



HAL
open science

Étude théorique et approximation numérique d'une nouvelle formule de dérivée de forme et applications

Azeddine Sadik

► **To cite this version:**

Azeddine Sadik. Étude théorique et approximation numérique d'une nouvelle formule de dérivée de forme et applications. Mathématiques [math]. Nantes Université; Université Sultan Moulay Slimane (Beni Mellal, Maroc), 2022. Français. NNT: . tel-04033068

HAL Id: tel-04033068

<https://hal.science/tel-04033068>

Submitted on 16 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE DE DOCTORAT DE

NANTES UNIVERSITE
ET L'UNIVERSITE SULTAN MOULAY SLIMANE

ECOLE DOCTORALE N° 601

*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*

Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

Azeddine SADIK

**« Étude théorique et approximation numérique d'une nouvelle formule
de dérivée de forme et applications »**

**Thèse présentée et soutenue publiquement au Maroc, le 18 Juillet 2022
Unité de recherche: Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)**

Rapporteurs avant soutenance :

Nour eddine ALAA
Marc DAMBRINE
Antoine HENROT

Professeur, Université Cadi Ayyad, Maroc
Professeur, Université de Pau, France
Professeur, Université de Lorraine, France

Composition du Jury :

Président :

Ahmed ZEGHAL

Professeur, Université Abdelmalek Essaadi, Maroc

Rapporteurs :

Nour eddine ALAA
Marc DAMBRINE
Antoine HENROT

Professeur, Université Cadi Ayyad
Professeur, Université de Pau
Professeur, Université de Lorraine

Examineurs :

Nour eddine ASKOUR
Francois JUBERTEAU

Professeur, Université Sultan Moulay Slimane, Maroc
Professeur, Université de Nantes, France

Directeur de thèse (France) : Abdesslam BOULKHEMAIR

MCF-HDR, Université de Nantes

Directeur de thèse (Maroc) : Abdelkrim CHAKIB

Professeur, Université Sultan Moulay Slimane

Remerciements

Cette thèse en Cotutelle a été réalisée dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, LMJL de Nantes (France) et le Laboratoire de Mathématiques et Applications, LMA de Beni Mellal (Maroc).

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mes directeurs de thèse, professeur Abdesslam BOULKHEMIR et professeur Abdelkrim CHAKIB pour la confiance qu'ils m'ont accordé tout au long de ce travail de recherche. Je tiens à les remercier également pour leurs précieuses recommandations, encouragements et engagements constants. Je leur exprime ma profonde gratitude d'avoir accepté de diriger et suivre ce travail de thèse soigneusement. J'aimerais leur exprimer à quel point j'ai apprécié leurs qualités scientifiques et pédagogiques indéniables. Je leur remercie également d'avoir assuré les conditions nécessaires pour l'accomplissement de ce travail, aussi bien pour leur soutien qui m'ont consacré dans les moments difficiles. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury. Je remercie le professeur Ahmed ZEGHAL pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury.

Ce fut un grand honneur que les professeurs Nour Eddine ALAA, Marc DAMBRINE et Antoine HENROT aient accepté de rapporter cette thèse. Je les remercie du temps qu'ils ont consacré à la lecture du manuscrit, et pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail.

J'adresse tous mes remerciements aux professeurs Nourredine ASKOUR et François JAUBERTEAU d'avoir porté intérêt à ce travail en examinant cette thèse et de faire partie des membres de jury.

Un grand merci au Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, que je faisais partie en tant que thésard inscrit. C'était sans doute un avantage, non seulement pour les conditions offertes, mais aussi grâce à la convivialité qui y règne. Que tous ses membres, qu'ils soient professeurs, thésards ou secrétaires, trouvent ici mes sincères remerciements.

Je n'oublie pas de remercier tous mes professeurs depuis le primaire. Un remerciement spécial est adressé aux professeurs de l'université Sultan Moulay Slimane de Beni Mellal. Je cite notamment S. Baghdadi, A. Bouaarich, A. Maaden, H. Maaroufi, A. Ouhinou et A. Stouti.

Le financement de ma thèse est assuré par une bourse de recherche (CNRST du Maroc) et en partie par le Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL), Bourse

d'excellence Eiffel et le Centre Henri Lebesgue (CHL).

J'adresse mes remerciements à ma famille, en particulier mes parents pour leur soutien permanent, constant et surtout sans aucune faille. Grâce à la patience et la confiance qu'ils m'ont toujours insufflées, ils m'ont permis d'avancer en toute quiétude. J'espère qu'ils trouveront en ce travail une récompense pour ce qu'ils ont fait pour moi.

Finalement, je remercie tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail. Mes remerciements vont à mes collègues de la FST de Beni Mellal et de l'UFR de Nantes que j'ai sollicités dans le cadre de mon travail de thèse, je les remercie pour la richesse des échanges que j'ai pu avoir avec eux.



Table des matières

Remerciements	i
Résumé	vii
Abstract	viii
Introduction générale	1
1 Résultats préliminaires	8
1.1 Quelques notations	8
1.2 Espaces fonctionnels	10
Les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$	10
Formules intégrales et changement de variable	10
Les espaces $C^m(\Omega)$	12
Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	13
L'espace $BV(\Omega)$	14
Quelques inégalités dans les espaces de Sobolev	15
Injections de Sobolev et application trace	15
1.3 Quelques résultats de géométrie différentielle	16
Caractérisation d'un domaine régulier	16
Normale unitaire	17
1.4 Quelques résultats d'analyse convexe	22
Fonctions convexes	22
Support, fonction support	23
I Dérivation de forme par rapport à une déformation du type Minkowski	26
2 Dérivation de forme de fonctionnelles coût volumiques par rapport aux domaines étoilés	28
2.1 Propriétés des domaines étoilés	29
2.2 Dérivation de forme pour des domaines étoilés	36
Cas d'une déformation avec des domaines fortement convexes	37
Cas général où Ω est convexe	40
Formule générale de calcul de la dérivée de forme	45
3 Dérivation de forme de fonctionnelles coût surfaciques par rapport aux domaines étoilés	47
3.1 Position du problème	47

3.2	Existence de la dérivée de forme	48
4	Dérivation de forme de problèmes aux limites elliptiques sur des domaines convexes	57
4.1	Quelques résultats de continuité par rapport au domaine	57
	Propriété du cône uniforme pour une somme de Minkowski	58
	Résultat de prolongement uniforme	59
	Continuité uniforme de l'opérateur trace	60
	Condition de la boule uniforme	65
	Quelques estimations uniformes utilisant les jauges	69
4.2	Quelques estimations et inégalités sur les espaces de Sobolev	82
	Résultats de continuité et d'interpolation	87
4.3	Quelques propriétés sur les fonctions support	90
4.4	Dérivation avec une déformation de Minkowski	97
	Dérivation de forme du problème de Dirichlet	97
	Dérivation de forme pour le problème de Neumann	120
II	Application à la résolution numérique de problèmes d'optimisation de forme	143
5	Etude numérique d'un problème à frontière libre de type Bernoulli	145
5.1	Formulation du problème de Bernoulli en optimisation de forme	146
	Nouvelle formulation du problème de Bernoulli	147
5.2	Dérivation de forme du problème d'optimisation	150
	Dérivation du problème d'optimisation de forme	153
5.3	Processus d'identification de la forme optimale	161
	Méthode du gradient	161
	Discrétisation du problème d'optimisation de forme	163
5.4	Résultats numériques	167
	Modèle d'analyse	167
	Modèle de conception	170
6	Résolution numérique d'un problème d'optimisation de forme sujet à deux problèmes aux limites couplés	173
6.1	Position du problème d'optimisation de forme	173
6.2	Dérivation par rapport aux domaines	175
	Dérivation du problème d'optimisation de forme	177
6.3	Processus de résolution numérique	185
	Algorithme de résolution	185
	Approximation des problèmes d'états	187
	Discrétisation du problème d'optimisation de forme	190
6.4	Résultats numériques	191
	Le premier exemple	191
	Le deuxième exemple	192

Le troisième exemple	194
Conclusion	199
Bibliographie	200

Table des figures

2.1	(a) : Ouvert étoilé, (b) : Ouvert étoilé par rapport à une boule.	32
2.2	(a) : Ouvert étoilé, (b) : Ouvert étoilé par rapport à une boule $B(0, r)$. . .	34
5.1	Illustration du domaine Ω	146
5.2	Schéma illustrant la partition du bord en éléments frontières.	164
5.3	Domaines initial, optimal et exact.	168
5.4	Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.	168
5.5	Frontières libres pour différents nombres d'itérations.	169
5.6	Domaines initial, optimal et exact.	169
5.7	Variation du coût en fonction du nombre d'itérations	170
5.8	Domaine optimal pour différentes valeurs de C	171
5.9	Domaine optimal pour différentes valeurs de C	172
6.1	Description du domaine $\omega = D \setminus \bar{\Omega}$	174
6.2	Les formes successives pour différents nombres d'itérations.	192
6.3	Formes intermédiaires obtenues pour différents nombres d'itérations (de gauche à droite, de haut en bas) itér = 0 ; 40 ; 120 et 180.	193
6.4	La variation du gradient en fonction du nombres d'itérations.	193
6.5	Formes intermédiaires obtenues pour différents nombres d'itérations (de gauche à droite, de haut en bas) itér = 0 ; 70 ; 150 et 180.	194
6.6	La variation du gradient en fonction du nombres d'itérations	195
6.7	Convergence de la forme optimale vers la forme exacte.	195
6.8	Les solutions exacte et approchée $u _{\gamma^*}$ pour différents nombres d'itérations.	196
6.9	Formes successives obtenues aux itérations (de gauche à droite, de haut en bas) itér = 0 ; 30 ; 60 and 100.	197
6.10	La variation du gradient de la fonctionnelle coût en fonction du nombres d'itérations.	197
6.11	La convergence de la frontière optimale vers l'exacte.	198
6.12	Les solutions exactes et approchées $u _{\gamma^*}$ pour différents nombres d'itérations.	198

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude théorique et numérique d'une formule de calcul de la dérivée de forme utilisant une déformation de type Minkowski. Nous proposons une généralisation d'une formule de dérivation de fonctionnelles coûts intégrales volumiques par rapport à une famille de domaines non convexes. Nous commençons par proposer une première approche qui consiste à étendre les résultats des travaux antérieurs à une famille de domaines admissibles étoilés, en se basant sur leurs caractérisations via les fonctions jauges. Ensuite nous établissons un résultat d'existence de la dérivée de forme d'une fonctionnelle coût surfacique, en utilisant encore une fois une déformation de Minkowski d'ouverts étoilés par des convexes, tout en exprimant sa dérivée au moyen des fonctions support. Nous terminons la partie théorique de cette thèse en étudiant l'existence de la dérivée de forme de solutions de problèmes aux limites en utilisant la déformation de Minkowski d'ouverts étoilés par des convexes. Ceci permet de traiter des problèmes d'optimisation de forme dont la fonctionnelle coût dépend de la solution d'un problème aux limites modèle de type Dirichlet ou Neumann. Le deuxième volet de cette thèse vise à concrétiser les résultats obtenus dans le cadre de la nouvelle formule de dérivation de forme dans le cas convexe, en les appliquant à des modèles d'optimisation de forme. Nous nous intéressons, dans un premier lieu, à la résolution numérique d'un problème inverse à frontière libre de type Bernoulli, reformulé en un problème en optimisation de forme, ensuite dans le dernier travail effectué dans cette thèse nous étudions une classe de problèmes aux limites couplés via une condition de transmission appropriée de type Neumann, tout en suggérant un algorithme de résolution qui montre l'intérêt pratique de la nouvelle formule de dérivation en se basant sur une discrétisation par la méthode des éléments frontières et la réciprocity duale.

Abstract

In this thesis, we are interested in the theoretical and numerical study of a formula of shape derivative which uses a Minkowski type deformation. We propose a generalization of a formula of shape derivative of a volume cost functional with respect to a family of non-convex domains. We start by proposing a first approach which consists in extending the results of previous works to a family of star-shaped domains, based on their characterizations via gauge functions. Then, we establish a result on the existence of the shape derivative of a surface cost functional, by using once again a Minkowski deformation of star-shaped domains by convex sets and expressing its derivative by means of the support functions. We end the theoretical part of this thesis by studying the existence of the shape derivative of solutions of boundary value problems using the Minkowski deformation of convex domains. This will allow us to deal with shape optimization problems whose cost functional depends on the solution of a boundary value problem of the Dirichlet or Neumann type. The second part of this thesis aims at concretising the results obtained in the framework of the new shape derivative formula in the convex case, by applying them to shape optimization models. We first focus on the numerical solution of a Bernoulli free boundary inverse problem, reformulated as a shape optimization one. In the last work of this thesis, we study a class of boundary problems coupled via an appropriate Neumann transmission condition, while suggesting a solution algorithm that shows the practical interest of the new shape derivative formula based on a discretization by the boundary element method and dual reciprocity.

Introduction générale

L'optimisation de forme est un ensemble de techniques permettant de rechercher et de déterminer une forme optimale parmi un certain nombre, généralement infini, de formes possibles. C'est une méthode très ancienne, en effet, certains problèmes d'optimisation de forme sont connus depuis l'antiquité. On peut mentionner, par exemple, le problème de la reine Didon [57] qui est un problème d'isopérimétrie : on cherche la forme du champ ayant la plus grande aire pour une longueur de clôture donnée. De nos jours, la méthode d'optimisation de forme est couramment utilisée pour résoudre des problèmes pratiques dans divers domaines des applications comme l'aéronautique, le nucléaire, l'hydrodynamique, l'électronique, l'optique ou encore le génie mécanique. En effet, les industriels dans ces différents secteurs s'orientent de plus en plus vers des outils d'optimisation de forme, dans le but d'améliorer la productivité, de réduire le coût et de maximiser le profit.

Du point de vue mathématique, c'est une approche variationnelle qui consiste à minimiser (ou maximiser) une fonctionnelle coût J par rapport à une famille \mathcal{O}_{ad} de domaines (ou formes) de \mathbb{R}^n . La difficulté réside ainsi dans le fait que la famille des domaines n'est en général pas un espace vectoriel. De plus, dans les applications, la fonctionnelle dépend souvent de la solution d'une équation aux dérivées partielles posée dans un domaine de cette famille, ce qui rend encore plus difficile l'étude de la dérivée par rapport au domaine (ou dérivée de forme) de la fonctionnelle.

De manière plus précise, un problème d'optimisation de forme peut s'écrire sous la forme : trouver $\Omega^* \in \mathcal{O}_{ad}$ solution de

$$J(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{O}_{ad}} J(\Omega), \quad \text{avec } J : \mathcal{O}_{ad} \rightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \overline{\mathbb{R}}). \quad (1)$$

Plusieurs questions peuvent se poser par rapport à ce type de problème. A la question de l'existence de formes optimales, peuvent s'ajouter celles de leur unicité, leur régularité ou de leurs propriétés géométriques.

Dans ce travail, nous étudions surtout les fonctionnelles de type « intégrale », que ce soit une intégrale sur le domaine ou sur son bord :

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx \quad \text{ou} \quad J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} f(x) d\sigma(x),$$

où f est une fonction qui peut éventuellement dépendre de la solution d'un problème aux limites posé sur Ω , appelé habituellement "problème d'état". Dans la question de l'existence de formes optimales ou pour les besoins de leur détermination numérique, peut se poser aussi la question de la détermination des conditions d'optimalité nécessaires et (ou) suffisantes. En effet, ces conditions sont souvent à la base d'algorithmes numériques du type gradient permettant de déterminer numériquement le minimum de la fonctionnelle coût. Par ailleurs, comme dans le cas de l'optimisation classique, les conditions d'optimalité sont naturellement liées à la (ou les) dérivée(s) de la fonctionnelle par rapport au

domaine, qu'on appelle habituellement "dérivée(s) de forme".

Historiquement, la notion de dérivation par rapport au domaine a été introduite pour la première fois par le mathématicien Jacques Hadamard. Dans son mémoire [53] sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, en 1907, Hadamard a donné un cadre commode pour définir une notion de dérivation par rapport aux domaines qu'on appelle aussi, depuis, la méthode d'Hadamard. L'idée de ce dernier est de fixer une forme de référence et de paramétrer les variations de cette forme initiale à l'aide d'un champ de vecteurs bien choisi au voisinage du bord. Cette idée est, de nos jours, à la base des méthodes variationnelles en optimisation de forme. Ensuite, les méthodes de dérivation de formes ont été développées dans un contexte topologique par de nombreux auteurs, notamment, J. Cea [25], Murat-Simon [70], O. Pironneau [77], Sokolowski-Zolésio [85], Henrot-Pierre [57], Delfour-Zolésio [33],... Cependant, ces méthodes de déformation par un champ de vecteurs présentent quelques difficultés aussi bien du point de vue théorique que numérique. Notamment, lorsqu'il s'agit de faire une correspondance entre l'ensemble des domaines admissibles et celui des champs de vecteurs, il est ainsi nécessaire d'imposer des conditions de régularité très fortes sur les données initiales afin de pouvoir dériver par rapport au domaine. Aussi, il est très difficile de résoudre un problème d'optimisation de forme conditionnel par cette méthode et nécessite généralement de le transformer en un problème non conditionnel via la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Par ailleurs, la mise en oeuvre numérique du problème d'optimisation de forme nécessite d'étendre le champ vecteur (obtenu seulement sur la frontière) au domaine tout entier ou de remailler le domaine à chaque itération du processus, ce qui rend les calculs très coûteux en terme de temps. Voir G. Allaire [2] concernant ces difficultés.

Afin d'éviter quelques uns de ces inconvénients, nous proposons une approche différente et plus ciblée. Elle est basée sur la formule de dérivation proposée dans les travaux [76, 10, 8] dans un contexte de convexité des domaines, formule qui exprime la dérivée de forme de la fonctionnelle coût au moyen des fonctions support. A ce propos, rappelons que l'on peut associer à tout domaine convexe borné sa fonction support qui est continue, convexe et positivement homogène (de degré 1), et qu'inversement toute fonction vérifiant ces propriétés est la fonction support d'un certain domaine convexe obtenu comme étant le sous-différentiel à l'origine de cette fonction. De ce fait, la variation du domaine peut être caractérisée par la variation de sa fonction support. Ainsi, dans un processus de résolution numérique, ceci permet d'obtenir un nouveau domaine seulement en calculant le sous-différentiel à l'origine de la fonction support obtenue lors d'une itération, et d'éviter alors les calculs fastidieux issus de l'utilisation de la méthode basée sur les champs de vecteurs [2].

En optimisation de forme, ce type de formule de dérivation dans un contexte de convexité a été obtenu pour la première fois, il y a une vingtaine d'années, par A. A. Niftiyev et Y. Gasimov [76] pour la fonctionnelle

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} f(x)dx,$$

en utilisant la déformation du convexe Ω_0 par le convexe Ω sous la forme $(1 - \varepsilon)\Omega_0 + \varepsilon\Omega$, $\varepsilon \in]0, 1[$, et en faisant intervenir les fonctions support. Plus précisément, ils ont montré

le résultat suivant : étant donnés Ω_0 et Ω deux ouverts bornés convexes de classe \mathcal{C}^2 et f une fonction de classe \mathcal{C}^1 , alors on a la formule suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{J((1-\varepsilon)\Omega_0 + \varepsilon\Omega) - J(\Omega_0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} f(x) (P_\Omega(\nu_0(x)) - P_{\Omega_0}(\nu_0(x))) d\sigma(x),$$

où ν_0 est la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0 et P_Ω, P_{Ω_0} sont respectivement les fonctions support des domaines Ω et Ω_0 . Récemment, cette formule a été généralisée par A. Boulkhemair et A. Chakib [10] pour la même famille d'ouverts, mais pour une fonction f appartenant à l'espace de Sobolev $W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Ensuite, ce même résultat a été encore une fois généralisé par A. Boulkhemair [8] au cas d'une famille d'ouverts qui sont seulement convexes. Ces deux derniers auteurs ont également proposé une formule de dérivation de forme similaire, en considérant une déformation de Ω_0 du type Minkowski [86], sous la forme $\Omega_0 + \varepsilon\Omega$. Cette formule s'énonce comme suit : étant donné Ω_0 et Ω deux ouverts bornés convexes de classe \mathcal{C}^2 et f une fonction appartenant à $W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, alors on a la limite suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{J(\Omega_0 + \varepsilon\Omega) - J(\Omega_0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} f(x) P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma(x).$$

L'intérêt de cette formule par rapport à celle de Niftiyev et Gasimov est qu'elle n'utilise pas la fonction support de Ω_0 , ce qui laisse entrevoir une possible extension de la formule au cas où Ω_0 n'est pas convexe. Dans le premier travail de cette thèse, nous développons cette idée et obtenons un résultat qui étend cette nouvelle formule de dérivée de forme au cas des ouverts étoilés de classe \mathcal{C}^2 . La preuve de ce résultat suit la démarche de [10, 8]. Plus précisément, nous supposons d'abord que le domaine Ω avec lequel on déforme est fortement convexe, ce qui nous permet de construire une paramétrisation via un certain \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. Cette construction est basée sur quelques propriétés analytiques et géométriques des fonctions jauge associées aux domaines étoilés et des fonctions support, et, en particulier, sur un résultat crucial concernant l'inclusion de la convolution de deux hypersurfaces. Elle permet de ramener le calcul de la dérivée de forme au cas classique utilisant des champs de vecteurs. Le cas général est obtenu par approximation d'un domaine convexe par une suite de domaines fortement convexes et repose, en particulier, sur un résultat de continuité par rapport aux domaines étoilés de la fonction jauge, via la distance de Hausdorff. Nous signalons aussi que la formule ainsi obtenue peut aussi être considérée comme une extension de celle qui est bien connue dans la théorie de Brunn-Minkowski pour les convexes dans le cas $f = 1$ (voir par exemple [86]).

Ensuite nous établissons un résultat d'existence de la dérivée de forme de la fonctionnelle coût surfacique

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} f(x) d\sigma(x),$$

où f une fonction donnée définie sur \mathbb{R}^n , en utilisant encore une fois une déformation de Minkowski d'ouverts étoilés par des convexes et en exprimant sa dérivée au moyen des fonctions support. Plus précisément, nous montrons le résultat : soit $\Omega_0 \subset D$ un ouvert borné étoilé par rapport à une boule et Ω un ouvert convexe borné contenant 0, les deux

ouverts étant de classe \mathcal{C}^2 . Alors, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{J(\Omega_0 + \varepsilon\Omega) - J(\Omega_0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu_0} + \mathcal{H}f \right)(x) P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma(x). \quad (2)$$

où ν_0 est la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0 , \mathcal{H} est la courbure moyenne de $\partial\Omega_0$ et P_Ω est la fonction support du domaine Ω . Par ailleurs, l'idée de la démonstration se base sur quelques propriétés géométriques sur la somme de Minkowski d'un domaine étoilé et d'un domaine convexe ainsi qu'un résultat de continuité uniforme de l'opérateur trace.

Nous terminons la partie théorique de cette thèse en établissant un résultat d'existence de la dérivée de forme d'un problème aux limites. Ce type de questions se présente naturellement lorsqu'il s'agit de calculer la dérivée d'une fonctionnelle coût qui fait intervenir une fonction qui dépend de la solution d'un problème aux limites du type Dirichlet ou Neumann. Ces résultats d'existence sont basés sur un certain nombre de résultats de géométrie différentielle, géométrie convexe et d'analyse. Notamment, quelques résultats sur les domaines vérifiant la condition de la boule uniforme, des résultats de prolongement uniforme et de continuité uniforme de l'opérateur trace, des estimations uniformes qui font intervenir les fonctions jaugees et des résultats de continuité des fonctions support par rapport aux domaines. Nous établissons ainsi les résultats suivants : Fixons D un ouvert convexe borné assez régulier, et une fonction $f \in H^1(D)$. Soit Ω_0, Ω deux ouverts convexes de classe \mathcal{C}^2 , tels que $\overline{\Omega_0}, \overline{\Omega} \subset D$. On suppose que Ω_0 contient 0 et on notera par Ω_ε le déformé de Ω_0 par Ω , défini par $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega$ qui est inclu dans D , pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, pour un certain $\varepsilon_0 > 0$.

Considérons $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ la solution du problème aux limites de type Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

et notons par $\tilde{u}_\varepsilon \in H^1(D)$ son prolongement par 0 en dehors de Ω_ε . Alors, l'application $\varepsilon \mapsto \tilde{u}_\varepsilon$ est dérivable en 0^+ ; plus précisément, il existe $\widehat{u}'_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| \frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} - u'_0 \right\|_{H^1(\Omega_0)} = 0,$$

où $u'_0 := \widehat{u}'_0|_{\Omega_0}$ est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u'_0 = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ u'_0 = -\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_\Omega(\nu_0) & \text{sur } \partial\Omega_0, \end{cases}$$

avec ν_0 est la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0 et P_Ω est la fonction support du domaine Ω .

Étant donnée maintenant une fonction $g \in H^2(D)$, considérons v_ε la solution du

problème aux limites de type Neumann :

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon + v_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = g & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Alors, il existe $\tilde{v}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^n)$ un prolongement de v_ε , tel que l'application $\varepsilon \mapsto \tilde{v}_\varepsilon$ soit dérivable en 0^+ ; plus précisément, il existe $\widehat{v}'_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tel que l'on ait

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| \frac{\tilde{v}_\varepsilon - \tilde{v}_0}{\varepsilon} - \widehat{v}'_0 \right\|_{H^1(\Omega_0)} = 0,$$

et $v'_0 := \widehat{v}'_0|_{\Omega_0}$ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta v'_0 + v'_0 = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial}{\partial \nu_0} v'_0 = \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_\Omega(\nu_0) + \sum_{i,j=1}^n \partial_j P_\Omega(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases} \quad (3)$$

où $\mathcal{N}_{i,j} = \partial_i \nu_{0,j} (\partial_i u_0 - g \nu_{0,i})$ et $\nu_0 = (\nu_{0,1}, \dots, \nu_{0,n})$ est la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0 et P_Ω est la fonction support du domaine Ω .

Le deuxième volet de cette thèse vise à concrétiser les résultats obtenus dans le cadre de la nouvelle formule de dérivation de forme dans le cas convexe, en les appliquant à des modèles d'optimisation de forme. Nous nous intéressons, dans un premier lieu, à la résolution numérique d'un problème inverse à frontière libre de type Bernoulli, reformulé en un problème en optimisation de forme. Ce type de problèmes décrit, par exemple, le problème de la conception d'un condensateur annulaire dans laquelle l'une des plaques est connue, tandis que l'autre doit être déterminée, de sorte que l'intensité du champ électrostatique y reste constante. Cette classe de problèmes à frontière libre a été largement étudiée du point de vue théorique par de nombreux auteurs, voir par exemple [2, 1, 29, 47, 62]. Du point de vue pratique, ce type de problème peut être reformulé en un problème d'optimisation de forme en introduisant la condition de Dirichlet ou celle de Neumann sur la frontière libre dans une fonctionnelle coût à optimiser avec un problème aux limites approprié comme contrainte. Des résultats d'existence de solutions pour de telles reformulations en problèmes d'optimisation de forme ont déjà été obtenus dans la littérature, citons, entre autres, [55] où la régularité C^2 de la frontière libre est utilisée et [12] où on utilise seulement la régularité C^1 . Sur le plan numérique, un certain nombre de techniques d'approximation de ces formulations d'optimisation de forme ont été proposées. Nous citons à titre d'exemples : l'approche variationnelle de la dérivation de forme introduite dans [60], celle des domaines fictifs proposée dans [56], l'approche pseudo-solide pour la résolution du problème discret associé introduite dans [90], l'approche d'optimisation de forme utilisant une fonctionnelle coût associée à la donnée de Neumann et la formulation lagrangienne développée dans [79], et enfin l'approche itérative basée sur une reformulation en level-set et une discrétisation en éléments frontières proposée dans [7, 64]. Nous citons également le travail récent [6] où les auteurs étudient des problèmes d'optimisation de forme avec des domaines convexes au moyen de développements spectraux et

en utilisant les fonctions support. Dans ce travail, nous proposons une formulation d'optimisation de forme de ce problème en utilisant une fonctionnelle coût volumique. En nous basant sur la formule de dérivée de forme par rapport aux domaines convexes proposée dans [10, 8, 9, 16] et qui utilise la déformation de Minkowski, nous obtenons une expression de la dérivée de la fonctionnelle coût au moyen des fonctions support. Ensuite, nous proposons une méthode d'approximation du type gradient pour résoudre ce problème. Sa résolution numérique est basée sur une discrétisation du problème d'état par la méthode des éléments frontières [21], ceci afin d'éviter les inconvénients liés à l'approche utilisant la discrétisation en éléments finis qui nécessite un remaillage du domaine à chaque itération. Enfin, nous donnons quelques résultats numériques montrant l'efficacité de l'approche proposée.

Le dernier travail effectué dans cette thèse concerne une classe de problèmes aux limites couplés via une condition de transmission appropriée de type Neumann, modélisant les interactions entre deux régions qui ont des propriétés physiques différentes. Ce type de problèmes se présente par exemple lorsqu'il s'agit d'optimiser des structures mécaniques soumises à des charges thermiques et refroidies par un fluide, tandis que la condition de transmission modélise la force exercée par le fluide sur le solide. Le problème d'optimisation de forme que nous considérons vise à minimiser une fonctionnelle coût choisie de manière générale, afin de pouvoir appliquer les résultats obtenus à une large classe de modèles. Notons à ce stade que l'approche optimisation de forme pour traiter des problèmes couplés n'est pas nouvelle. Citons, par exemple, l'article [66] où une analyse d'optimisation de forme pour un problème d'interaction fluide-structure stationnaire fortement couplé a été proposée. Une approche dite des matériaux isotropes solides avec pénalisation (SIMP) a été introduite dans [23, 93, 94] pour traiter une classe de problèmes couplés d'optimisation de forme. Il existe également de nombreux travaux traitant des problèmes de couplage par transfert de chaleur ou par convection se basant sur des méthodes à densité variable, voir par exemple [35, 74, 95]. Les méthodes de densité variable ont été récemment utilisées dans [4] pour établir une procédure générale permettant d'approcher une forme de couplage en utilisant l'optimisation topologique. La méthode d'optimisation de forme topologique pour un domaine piézoélectrique et élasto-dynamique couplé à une chambre acoustique a été introduite dans [68]. Nous citons également une autre approche en optimisation de forme topologique permettant de traiter un problème de Navier-Stokes en régime stationnaire faiblement couplé sur le domaine fluide, un problème couplé régi par une équation de convection-diffusion sur tout le domaine et un problème de thermo-élasticité linéaire dans le domaine solide, a été proposée dans [44]. Récemment, une analyse en optimisation de forme pour les modèles couplés utilisant des outils de la double programmation dynamique a été également proposée dans [67]. Dans ce travail, nous donnons une expression de la dérivée de forme de la fonctionnelle coût via les fonctions support, suivant ainsi la formule de dérivée de forme par rapport aux domaines convexes proposée dans [8, 10]. La formule de dérivée de forme ainsi obtenue sera alors la base de notre processus d'optimisation adopté pour la simulation numérique de ce problème. Dans ce cadre, nous optons pour une discrétisation des problèmes d'état et d'état adjoint via la méthode des éléments frontière et la réciprocity duale [21, 22]. Nous donnons ainsi quelques résultats numériques montrant l'efficacité de l'approche proposée.

Le plan de cette thèse est le suivant.

Dans le premier chapitre, nous rappelons un certain nombre de notions et d'outils, et donnons quelques résultats préliminaires essentiels pour cette thèse.

Dans le deuxième chapitre, nous établissons un résultat permettant de généraliser la formule de calcul de la dérivée de forme pour une fonctionnelle de forme intégrale volumique sur une famille d'ouverts étoilés, en utilisant leurs déformations de Minkowski par des convexes.

Dans le troisième chapitre nous montrons l'existence de la dérivée de forme d'une fonctionnelle coût surfacique en utilisant une déformation de Minkowski des domaines étoilés par des convexes.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions l'existence de la dérivée de forme de la solution de problèmes aux limites elliptiques modèles de type Dirichlet ou Neumann en utilisant une déformation de Minkowski d'ouverts convexes par des convexes.

Dans le cinquième chapitre, nous proposons une nouvelle approche numérique pour l'étude d'un problème à frontière libre de type Bernoulli, en adaptant la nouvelle formule de dérivation de forme proposée dans [8, 10] au cas des domaines doublement connexes. Nous proposerons un algorithme de résolution numérique dont nous montrons l'intérêt pratique via son illustration à travers différents tests numériques.

Dans le dernier chapitre, nous étudions une classe de problèmes d'optimisation de forme où il est question de minimiser une fonctionnelle coût générale sous contrainte de deux problèmes aux limites couplés à travers une condition aux limites de transmission du type Neumann. Une approximation numérique de ce problème est ensuite proposée, basée sur une méthode du type gradient combinée à une discrétisation par la méthode des éléments frontière et la réciprocité duale.

Enfin, nous terminons ce mémoire en donnant une conclusion et quelques perspectives.

Résultats préliminaires

Sommaire

1.1 Quelques notations	8
1.2 Espaces fonctionnels	10
Les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$	10
Formules intégrales et changement de variable	10
Les espaces $C^m(\Omega)$	12
Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	13
L'espace $BV(\Omega)$	14
Quelques inégalités dans les espaces de Sobolev	15
Injections de Sobolev et application trace	15
1.3 Quelques résultats de géométrie différentielle	16
Caractérisation d'un domaine régulier	16
Normale unitaire	17
1.4 Quelques résultats d'analyse convexe	22
Fonctions convexes	22
Support, fonction support	23

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques outils de base et nous présentons quelques résultats préliminaires essentiels pour ce travail. Nous rappelons, en particulier, les définitions des espaces de Sobolev, ceux de Lebesgue et ceux des fonctions à variation bornée, puis quelques estimations et injections sur les espaces de Sobolev. Ensuite, nous présentons quelques résultats de géométrie différentielle concernant la caractérisation d'un domaine régulier. Enfin, nous introduisons la notion de fonction support d'un domaine convexe et donnons quelques propriétés des fonctions support.

1.1 Quelques notations

Tout au long de ce travail, nous adoptons les notations et les définitions suivantes.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on munit l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^n du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{pour tous } x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

la norme associée étant notée :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \text{pour tout } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

- Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$, on munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}$ des matrices de la norme notée :

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2} \quad \text{pour tout } A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$. La matrice ${}^{\top}A$ est la matrice transposée de A .
- $B(x_0, r)$ est la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r de \mathbb{R}^n .
- $\overline{B}(x_0, r)$ est la boule fermée de centre x_0 et de rayon r de \mathbb{R}^n .
- $S_n(x_0, r)$ est la sphère de centre x_0 et de rayon r de \mathbb{R}^n .
- S^{n-1} est la sphère de centre 0 et de rayon 1 de \mathbb{R}^n .
- On note le gradient de $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \right).$$

- Le laplacien de $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit :

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}.$$

- La divergence de $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est notée par :

$$\operatorname{div}(\psi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\psi_i}{\partial x_i}.$$

- Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multi-indice dans \mathbb{N}^n de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, la dérivée partielle d'ordre α de φ notée $\partial^\alpha\varphi$, est définie par :

$$\partial^\alpha\varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

- On note par $\lambda_n(\Omega)$ la mesure de Lebesgue de Ω sur \mathbb{R}^n .
- L'intérieur et la fermeture d'un ensemble A seront notés par, respectivement par, $\overset{\circ}{A}$ et \overline{A} . le complémentaire d'un ensemble A dans un ensemble \mathbb{R}^n sera noté par A^c ou C_A . Le bord ∂A de A est défini par $\overline{A^c} \cap \overline{A}$.
- Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble. La fonction distance d'un $x \in \mathbb{R}^n$ à A , notée dans la littérature par d_A ou $d(\cdot, A)$, est définie par :

$$d_A(x) := \begin{cases} \inf_{y \in A} \|x - y\|, & A \neq \emptyset \\ +\infty, & A = \emptyset \end{cases}$$

- Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et $B \subseteq \mathbb{R}^n$ deux ensembles. La distance de Hausdorff de A et B est notée par :

$$d^H(A, B) := \max\left(\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\right).$$

1.2 Espaces fonctionnels

Dans cette section, nous rappelons des définitions et des propriétés de quelques espaces fonctionnels. Nous renvoyons le lecteur par exemple à [58, 65, 86, 92], pour plus de détails.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n .

Les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Nous commençons par définir les espaces de Lebesgue (voir [20, 39]).

- Soit $p \in [1, +\infty[$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions mesurables dont la $p^{\text{ième}}$ puissance est intégrable, au sens de Lebesgue. L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach.

- $L^2(\Omega)$ est l'espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

- $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables u telles que

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf_{M \subset \Omega, \lambda_n(M)=0} \sup_{x \in \Omega \setminus M} |u(x)| \equiv \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

soit finie. $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ est un espace de Banach.

Formules intégrales et changement de variable

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné tel que son bord est une hypersurface lipschitzienne et $x \in \partial\Omega$. Alors, par définition il existe un voisinage ouvert $U_x \subseteq \mathbb{R}^n$ de x , $a, b \in \mathbb{R}$, une boule ouverte $B_{n-1}(\bar{x}, r) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ de $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ et une application $\varphi_x : B_{n-1}(\bar{x}, r) \rightarrow]a, b[$ lipschitzienne telle que $\varphi_x(\bar{x}) = x_n$ et

$$\Omega \cap U_x = \{(\bar{x}, y) \in B_{n-1}(\bar{x}, r) \times]a, b[\mid \varphi_x(\bar{x}) < y\},$$

$$\partial\Omega \cap U_x = \{(\bar{x}, \varphi_x(\bar{x})) \mid \bar{x} \in B_{n-1}(\bar{x}, r)\}.$$

Donc on obtient :

$$\partial\Omega = \bigcup_{x \in \partial\Omega} \partial\Omega \cap U_x.$$

Par compacité, donc il existe des $(x_i)_{i=1}^k \subset \partial\Omega$ et un entier k tel que $\partial\Omega$ est représentable par les graphes des $\{\varphi_i\}_{i=1}^k$ tel que

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^k \partial\Omega \cap U_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \text{avec } U_i = U_{x_i}.$$

On considère la famille $\{\partial\Omega \cap U_i\}_{i=1}^k$ et on considère une partition de l'unité $\{\xi_i\}_{i=1}^k$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, 0 \leq \xi_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^k \xi_i = 1 \text{ sur } \partial\Omega.$$

De plus

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \text{Supp}(\xi_i) \text{ est compact et } \text{Supp}(\xi_i) \subset \partial\Omega \cap U_i.$$

On munit ainsi l'espace topologique $\partial\Omega$ de la tribu borélienne $\mathfrak{B}(\partial\Omega)$ et la mesure σ appelée la mesure surfacique définie par :

$$\sigma(A) = \sum_{i=1}^k \int_{B_{n-1}(\bar{x}_i, R)} (\xi_i \chi_A) \circ (y, \varphi_i(y)) \|(\nabla_{n-1} \varphi_i(y), -1)\| d\lambda_{n-1}(y), \forall A \in \mathfrak{B}(\partial\Omega).$$

Cette définition ne dépend pas de la partition de l'unité choisie. Pour plus d'informations sur cette mesure (voir [39]). Ainsi soit $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, donc l'intégrale sur $\partial\Omega$ est définie par :

$$\int_{\partial\Omega} f(x) d\sigma(x) = \sum_{i=1}^k \int_{B_{n-1}(\bar{x}_i, R)} (\xi_i f) \circ (y, \varphi_i(y)) \sqrt{1 + \|\nabla_{n-1} \varphi_i(y)\|^2} d\lambda_{n-1}(y).$$

En particulier, soit $p \in [1, +\infty[$ et soit f une fonction dans $L^p(\partial\Omega, \mathfrak{B}(\partial\Omega), \sigma)$ alors,

$$\|f\|_{L^p(\partial\Omega)} := \left(\int_{\partial\Omega} |f(x)|^p d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Rappelons maintenant le théorème général d'intégration par parties connu sous le nom de la formule d'Ostrogradsky et celui de Green (voir [20, 39]).

Théorème 1.1 (*Formule d'Ostrogradsky*) Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 et ν est la normale extérieure au bord $\Gamma = \partial\Omega$. Alors, pour tout $\Phi \in (H^1(\Omega))^n$ on a la formule de divergence suivante :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\Phi)(x) dx = \int_{\Gamma} \langle \gamma(\Phi), \nu \rangle (x) d\sigma. \quad (1.1)$$

où γ est l'application trace.

Théorème 1.2 (*Formule de Green*) Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 et ν est la normale extérieure au bord $\Gamma = \partial\Omega$. Alors, pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ on a la formule de Green suivante :

$$- \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \gamma(v)(x) d\sigma, \quad (1.2)$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \langle \nabla u, \nu \rangle.$$

Remarque 1.1 Dans [39] la Formule d'Ostrogradsky et celui de Green reste valable aussi dans le cas où Ω est de bord $\partial\Omega$ seulement lipschitzien.

Enonçons maintenant les formules de changement de variable pour des intégrales volumiques et surfaciques dans le cas des domaines lipschitziens, dont la démonstration se trouve dans [3, 39].

Théorème 1.3 Soient Ω_0 , un ouvert, borné de \mathbb{R}^n et ϕ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n , notons par $\nabla\phi(y)$ la matrice jacobienne de ϕ en y .

1. *Intégrales volumiques.* : Soit $f \chi_{\phi(\Omega_0)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\int_{\phi(\Omega_0)} f(x) d\lambda = \int_{\Omega_0} f \circ \phi(y) |\det(\nabla\phi(y))| d\lambda. \quad (1.3)$$

2. *Intégrales surfacique.* : Supposons de plus que $\partial\Omega$ est une hypersurface lipschitzienne et ν_0 la normale extérieure associée. Soit $g \in L^1(\partial\phi(\Omega_0))$ avec $(\phi(\partial\Omega_0) = \partial\phi(\Omega_0))$. Alors,

$$\int_{\partial\phi(\Omega_0)} g(x) d\sigma(x) = \int_{\partial\Omega_0} g \circ \phi(y) |\det(\nabla\phi(y))| \|{}^\top\nabla\phi(y)^{-1}\nu_0(y)\| d\sigma. \quad (1.4)$$

Avant d'introduire les espaces de Sobolev, nous donnons quelques résultats sur les espaces de fonctions de classe C^m , pour $m \in \mathbb{N}$.

Les espaces $C^m(\Omega)$

- On désigne par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω , muni de la norme suivante :

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|. \quad (1.5)$$

- $C^m(\Omega)$ est l'espace des fonctions, φ , qui ont des dérivées partielles $D^\alpha\varphi$ continues sur Ω , pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, tel que $|\alpha| \leq m$.
- On note par $C_0^m(\Omega)$ le sous-espace de $C^m(\Omega)$ des fonctions qui s'annulent à l'infini.
- $C^m(\bar{\Omega})$ est un sous-espace de $C^m(\Omega)$ des fonctions φ telles que $D^\alpha\varphi$ soit bornée et uniformément continue sur Ω , pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, tel que $|\alpha| \leq m$. Il est muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha\varphi(x)|. \quad (1.6)$$

- Pour $0 < \lambda \leq 1$, on désigne par $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ le sous-espace de $C^m(\bar{\Omega})$, des fonctions φ dont les dérivées $D^\alpha\varphi$ satisfont la condition de Hölder d'exposant λ , pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, telle que $|\alpha| = m$, i.e. il existe $c > 0$, telle que

$$|\partial^\alpha\varphi(x) - \partial^\alpha\varphi(y)| \leq c\|x - y\|^\lambda \quad \forall x, y \in \Omega \quad (1.7)$$

$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ est muni de la norme

$$\|\varphi\|_{C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})} = \|\varphi\|_{C^m(\bar{\Omega})} + \max_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\alpha\varphi(x) - \partial^\alpha\varphi(y)|}{\|x - y\|^\lambda}. \quad (1.8)$$

- On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω , dont le dual topologique $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω .
- $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Nous donnons maintenant quelques définitions sur les espaces de Sobolev (voir par exemple [42]).

- On désigne tout d'abord par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables de classe C^∞ à support compact dans Ω , dont le dual topologique $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω .
- Soit $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty[$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\},$$

où $\partial^\alpha u$ est la dérivée au sens de distributions de u , donnée par

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} := (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

- Pour $p = +\infty$, l'espace $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est défini par :

$$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \{\vartheta \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) / \nabla \vartheta \in (L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))^n\}.$$

L'espace $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est un Banach pour la norme

$$\|\vartheta\|_{W^{1,\infty}} = \|\vartheta\|_{L^\infty} + \|\nabla \vartheta\|_{L^\infty}.$$

- On définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ par

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), \text{ pour tout } |\alpha| \leq m\}.$$

L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert quand il est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2}.$$

- L'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini comme étant l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Par définition, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un fermé de $H^1(\Omega)$. De plus, la semi-norme sur $H^1(\Omega)$

$$\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_{L^2}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $\|\cdot\|_{H^1}$. Si de plus la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est assez régulière, alors on aura

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) / \gamma(u) = 0\}.$$

où γ désigne l'opérateur trace qui est une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

- Pour tout réel $s = m + \sigma$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $0 < \sigma < 1$, on définit $H^s(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions $\varphi \in H^s(\Omega)$ qui vérifient :

$$\|\varphi\|_{H^m(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial^\alpha \varphi(x) - \partial^\alpha \varphi(y)|^2}{\|x - y\|^{n+2\sigma}} dx dy < +\infty \quad \text{pour } \forall |\alpha| = m. \quad (1.9)$$

$H^s(\Omega)$ muni de la norme

$$\|\varphi\|_{H^s(\Omega)} = \left(\|\varphi\|_{H^m(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial^\alpha \varphi(x) - \partial^\alpha \varphi(y)|^2}{\|x - y\|^{n+2\sigma}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.10)$$

est un espace de Banach.

- On définit $H^{1/2}(\partial\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ qui vérifient :

$$\|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{\|x - y\|^n} d\sigma_x d\sigma_y < +\infty \quad \text{pour } \forall |\alpha| = m. \quad (1.11)$$

$H^{1/2}(\partial\Omega)$ muni de la norme

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \left(\|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{\|x - y\|^n} d\sigma_x d\sigma_y \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.12)$$

est un espace de Banach.

L'espace $BV(\Omega)$

Rappelons d'abord la définition de l'espace des mesures bornées (voir [20, 39, 42]).

- $\mathcal{M}_b(\Omega)$ est l'espace des mesures de Radon bornées (ou de masse totale finie). Il est défini comme étant l'espace des formes linéaires continues sur $(C_c(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$. Ainsi, $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ si

$$\mu : C_c(\Omega) \mapsto \mathbb{R} \text{ est linéaire et } \exists C > 0, \forall \varphi \in C_c(\Omega), |\mu(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_\infty.$$

L'espace $\mathcal{M}_b(\Omega)$ est un Banach pour la norme :

$$|\mu| = \sup_{\varphi \in C_c(\Omega), \|\varphi\|_\infty \leq 1} |\mu(\varphi)|.$$

où $C_c(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω .

- $BV(\Omega)$ est l'espace des fonctions f à variation bornée, i.e. $f \in BV(\Omega)$ si et seulement si $f \in L^1(\Omega)$ et $\nabla f \in (\mathcal{M}_b(\Omega))^n$.

D'après le théorème 2.3.4 de [42], on a

$$\partial_i f \in \mathcal{M}_b(\Omega) \Leftrightarrow \sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \|\varphi\|_\infty \leq 1} |\langle f, \partial_i \varphi \rangle| < \infty.$$

Ainsi, $BV(\Omega)$ est l'espace des fonctions f , dont la norme

$$\|f\|_{BV} = \|f\|_{L^1} + |\nabla f|_{bv}, \text{ où } |\partial_i f|_{bv} := \sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \|\varphi\|_\infty \leq 1} |\langle f, \partial_i \varphi \rangle|$$

est finie. $BV(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{BV}$ est un espace de Banach.

Quelques inégalités dans les espaces de Sobolev

Dans ce paragraphe nous donnons quelques estimations et inégalités dans les espaces de Sobolev qui seront très utiles dans la suite de cette thèse et que nous énonçons sous forme de trois lemmes [3, 26, 30, 51, 42].

Lemme 1.1 *Soit $\varphi \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R})$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné. Alors, on a*

$$\|\varphi\|_{L^\infty(I)} \leq \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi(t)| dt + \int_I |\varphi'(t)| dt, \quad \varphi \in W^{1,1}(I), \quad (1.13)$$

où $|I|$ est la longueur de I .

Nous aurons aussi besoin du lemme d'interpolation suivant [87].

Lemme 1.2 *Soit T une distribution tempérée sur \mathbb{R}^n qui satisfait les estimations suivantes*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_1 \|\varphi\|_{L^\infty}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, |\langle \partial_i \partial_j T, \varphi \rangle| \leq C_2 \|\varphi\|_{L^\infty}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Alors, il existe une constante C qui ne dépend que de n , telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |\langle \partial_i T, \varphi \rangle| \leq C \sqrt{C_1 C_2} \|\varphi\|_{L^\infty}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Injections de Sobolev et application trace

Nous donnons maintenant quelques injections de Sobolev et quelques résultats de continuité de l'application trace sur $H^m(\Omega)$ et $H^s(\Omega)$, qui seront utiles par la suite. Voir par exemple [3, 39, 69], pour plus de détails.

Nous commençons par énoncer le théorème d'injection de Sobolev suivant :

Théorème 1.4 *Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d de frontière lipschitzienne.*

- $H^1(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^2(\Omega)$.

ii) L'espace $H^1(\Omega)$ s'injecte continûment et d'une manière compacte dans $H^s(\Omega)$, pour tout $\frac{1}{2} < s < 1$.

Nous énonçons également un résultat sur la continuité de l'opérateur trace.

Théorème 1.5 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d de frontière lipschitzienne, alors l'application γ trace, définie de

- i) $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ est linéaire et continue de plus compacte.
- ii) $H^s(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, pour tout $\frac{1}{2} < s < 1$ est linéaire et continue.

1.3 Quelques résultats de géométrie différentielle

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats et propriétés sur les domaines réguliers dont nous aurons besoin par la suite.

Caractérisation d'un domaine régulier

Dans ce paragraphe, nous allons établir un résultat concernant la paramétrisation locale des sous-variétés. Pour cela, nous rappelons tout d'abord la définition d'un ouvert lipschitzien, de classe \mathcal{C}^k et fortement convexe (pour plus de détails voir [19, 57, 65]).

Définition 1.1 Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n . On dit que l'ouvert Ω est de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) (resp. lipschitzien) si :

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \partial\Omega$, il existe un voisinage ouvert $U_x \subseteq \mathbb{R}^n$ de x , deux réels a, b , une boule ouverte $B_{n-1}(\bar{x}, r) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ de $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ et une application $\varphi_x : B_{n-1}(\bar{x}, r) \rightarrow]a, b[$ de classe \mathcal{C}^k (resp. lipschitzienne) telle que $\varphi_x(\bar{x}) = x_n$ et

$$\Omega \cap U_x = \{(\bar{y}, y_n) \in B_{n-1}(\bar{x}, r) \times]a, b[/ \varphi_x(\bar{y}) < y_n\}.$$

$$\partial\Omega \cap U_x = \{(z, \varphi_x(z)) / z \in B_{n-1}(\bar{x}, r)\}.$$

Remarque 1.2 Soient Ω un ouvert de classe \mathcal{C}^k et $x \in \partial\Omega$. Considérons l'application ϑ_x définie par :

$$\begin{aligned} \vartheta_x : K \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \vartheta_x(y) = \varphi_x(\bar{y}) - y_n \end{aligned}$$

où $K = B_{n-1}(\bar{x}, R) \times]a, b[$ et la fonction φ_x est donnée dans la définition 1.1. On a ϑ_x est de classe \mathcal{C}^k , donc soit $y \in K$ et $h \in \mathbb{R}^n$, alors

$$d\vartheta_x(y).h = d\varphi_x(\bar{y}).\bar{h} - h_n = \langle (\nabla_{n-1}\varphi_x(\bar{y}), -1), h \rangle.$$

Ainsi, ϑ_x est une submersion ($\nabla\vartheta_x(\cdot) \neq 0$). De plus

$$\Omega \cap U(x) = \{y \in K / \vartheta_x(y) < 0\} \text{ et } \partial\Omega \cap U(x) = \{y \in K / \vartheta_x(y) = 0\}.$$

Énonçons maintenant la définition d'un ouvert fortement convexe (voir [65]).

Définition 1.2 Soit Ω un ouvert de classe C^k . On dit que Ω est fortement convexe, si au voisinage de chaque point $x \in \partial\Omega$, la fonction ϑ_x est fortement convexe.

La question d'existence d'une caractérisation des domaines se pose également, dans ce cadre nous avons le résultat suivant [33, 39].

Théorème 1.6 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^k . Alors, il existe une fonction f définie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} lipschitzienne, telle que :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) < 0\} \text{ et } \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = 0\}.$$

De plus, la fonction f peut être choisie telle qu'il existe un voisinage W de $\partial\Omega$ tel que $f \in C^k(W)$ et $\nabla f \neq 0$ sur W .

Remarque 1.3 Dans le résultat précédent, on peut même prendre f convexe dans le cas des domaines convexes [33].

Normale unitaire

En géométrie, la normale à une hypersurface en un point est définie comme étant la droite orthogonale au plan tangent en ce point. Ainsi tout vecteur directeur de cette droite est appelé vecteur normal en ce point. Notons que la connaissance du vecteur normal a beaucoup d'application en mécanique, en optique, etc.

Commençons par donner la définition d'un vecteur normal unitaire (voir [65, 19, 57]).

Définition 1.3 Soient $S \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété et $x \in S$, on appelle vecteur normal unitaire à S en x , tout vecteur $n_x \in (T_x S)^\perp$ tel que $\|n_x\| = 1$. L'application

$$\begin{aligned} \nu : S &\longrightarrow S^{n-1} \\ x &\longmapsto n_x \end{aligned}$$

lorsqu'elle existe est appelée champs de vecteurs normaux unitaires.

Une situation simple où on peut déterminer localement un champs de vecteurs normaux est celui du cas d'un domaine régulier (voir [33]) :

Remarque 1.4 Soient $S \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété de classe C^1 et $x \in S$. D'après la définition 1.1, il existe un ouvert $U(x)$ de \mathbb{R}^n et une application φ_x tels que

$$\partial\Omega \cap U(x) = \{(z, \varphi_x(z)) / z \in B_{n-1}(\bar{x}, r)\}.$$

Alors, il existe un champs de vecteurs normaux ν dirigés vers l'extérieur sur $\partial\Omega \cap U(x)$ donné par

$$\nu = \frac{(\nabla\varphi_x(\cdot), -1)^T}{\sqrt{\|\nabla\varphi_x\|^2 + 1}}.$$

Dans la suite, nous allons donner deux résultats concernant la normale dans le cas du paramétrage global (voir [39]).

Proposition 1.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe \mathcal{C}^k tel que il existe un voisinage W de $\partial\Omega$ et une fonction f telle que $f \in \mathcal{C}^k(W)$, $\nabla f \neq 0$ sur W et $\partial\Omega = \{f = 0\}$. Alors, il existe un champ de vecteurs normaux sur $\partial\Omega$ donné par $\nu = \frac{\nabla f(\cdot)}{\|\nabla f(\cdot)\|}$.

Proposition 1.2 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe \mathcal{C}^k . Considérons la partie $\Omega_{r,a}$ définie par $r\Omega + a$. On note par $\nu, \nu_{r,a}$ la normale à $\Omega, \Omega_{r,a}$ respectivement. Alors, on a pour tout $x \in \partial\Omega$, $\nu(x) = \nu_{r,a}(rx + a)$.

Démonstration.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe \mathcal{C}^k . D'après le Théorème 1.6, il existe une fonction f définie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} lipschitzienne, telle que :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) < 0\} \quad \text{et} \quad \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = 0\}.$$

De plus il existe un voisinage W de $\partial\Omega$, tel que

$$f \in \mathcal{C}^k(W), \quad \nabla f \neq 0 \text{ sur } W.$$

Ensuite d'après la Proposition 1.1, il existe un champ de vecteurs normaux sur $\partial\Omega$ donné par

$$\nu = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

Considérons la partie $\Omega_{r,a} = r\Omega + a$. Donc on a

$$\Omega_{r,a} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / f\left(\frac{1}{r}(x - a)\right) < 0 \right\}$$

et

$$\partial\Omega_{r,a} = r\partial\Omega + a = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / f\left(\frac{1}{r}(x - a)\right) = 0 \right\}.$$

On note par $\nu_{r,a}$ la normale à $\Omega_{r,a}$. Donc

$$\nu_{r,a}(\cdot) = \frac{\nabla \left(f \circ \left(\frac{1}{r}(\text{Id}_{\mathbb{R}^n} - a) \right) \right)}{\left\| \nabla \left(f \circ \left(\frac{1}{r}(\text{Id}_{\mathbb{R}^n} - a) \right) \right) \right\|} = \frac{\frac{1}{r} \nabla f \left(\frac{1}{r}(\text{Id}_{\mathbb{R}^n} - a) \right)}{\left\| \frac{1}{r} \nabla f \left(\frac{1}{r}(\text{Id}_{\mathbb{R}^n} - a) \right) \right\|} = \nu \left(\frac{1}{r}(\text{Id}_{\mathbb{R}^n} - a) \right).$$

Donc au point $x \in \partial\Omega$ on obtient

$$\nu(x) = \nu_{r,a}(rx + a).$$

■

Nous rappelons un résultat technique qu'on utilise souvent concernant l'extension de la normale à \mathbb{R}^n (voir [57]).

Théorème 1.7 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$). Alors, il existe une extension \mathcal{N} de classe \mathcal{C}^{k-1} de l'application ν à \mathbb{R}^n .

Nous aurons besoin du résultat suivant :

Lemme 1.3 Soit Ω un domaine borné de classe \mathcal{C}^2 fortement convexe et soit ν le champ de vecteur normal unitaire extérieur à $\partial\Omega$. Alors, $\nu : \partial\Omega \mapsto S^{n-1}$ est injectif.

Démonstration. Les hypothèses impliquent qu'il existe une fonction fortement convexe de classe \mathcal{C}^2 $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) < 0\}, \quad \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) = 0\}, \quad \nabla\varphi \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } \nu = \nabla\varphi/|\nabla\varphi|.$$

Soit $x, y \in \partial\Omega$ tel que $\nu(x) = \nu(y)$ et montrons que $x = y$. Supposons par l'absurde que $x \neq y$. Puisque φ est fortement convexe, il découle d'après la proposition 1.5 que

$$\langle \nabla\varphi(x), y - x \rangle < \varphi(y) - \varphi(x) \quad \text{et} \quad \langle \nabla\varphi(y), x - y \rangle < \varphi(x) - \varphi(y).$$

Puisque $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$, en multipliant respectivement par $\frac{1}{|\nabla\varphi(x)|}$ et $\frac{1}{|\nabla\varphi(y)|}$, on obtient

$$\langle \nu(x), y - x \rangle < 0 \quad \text{and} \quad -\langle \nu(y), y - x \rangle = \langle \nu(y), x - y \rangle < 0,$$

ce qui est en contradiction avec $\nu(x) = \nu(y)$. Ainsi, $x = y$, d'où l'injectivité de ν . ■

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant qui permet d'estimer le bord de la somme de Minkowski de deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n en utilisant la convolution des hypersurfaces (voir par exemple [73, 50, 61]).

Lemme 1.4 Soit $A, B \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts bornés de classe \mathcal{C}^1 . Considérons l'ensemble suivant :

$$\partial A \star \partial B := \{x + y : x \in \partial A, y \in \partial B \text{ et } \nu_A(x) = \nu_B(y)\} \quad (1.14)$$

où ν_A et ν_B sont les champs de vecteurs normaux unitaires extérieurs de ∂A et ∂B respectivement. Alors, on a

$$\partial(A + B) \subset \partial A \star \partial B.$$

Démonstration. Soit $A, B \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts bornés de classe \mathcal{C}^1 . Rappelons que la somme de Minkowski de deux ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^n$ peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}^n ; (-A + x) \cap B \neq \emptyset\}. \quad (1.15)$$

Soit $x \in \partial(A + B)$. Il résulte de (1.15) que $(-A + x) \cap B = \emptyset$ et que $\overline{(-A + x)} \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Ainsi

$$\partial(-A + x) \cap \partial B \neq \emptyset.$$

Soit $y \in \partial(-A + x) \cap \partial B$. Puisque $-A + x \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B$, donc les hypersurfaces $\partial(-A + x)$ et ∂B sont tangentes en y et on a $T_y \partial(-A + x) = T_y \partial B$ et $\nu_{(-A+x)}(y) = -\nu_B(y)$. Or, $y \in \partial(-A + x) = -\partial A + x$, ainsi $x \in \partial A + y$ et il existe $a \in \partial A$ tel que $x = y + a$. De plus, comme $-A + x$ est l'image de A par un difféomorphisme $z \mapsto -z + x$, alors on a

$$-\nu_A(a) = \nu_{(-A+x)}(y) = -\nu_B(y),$$

ce qui achève la preuve du Lemme. ■

Nous terminons cette section par rappeler quelques outils de géométrie différentielle, souvent utiles pour les calculs de dérivation de formes d'intégrale sur le bord. Pour plus de détails voir le livre [57].

On considère maintenant un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n à bord lipschitzien. Par compacité on va donc supposer que $\Gamma = \partial\Omega$ est représentable par un nombre fini de graphes lipschitziens et ν est la normale à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω .

Définition 1.4 (Composante tangentiel) *Pour tout champ de vecteur W défini sur Γ , on appelle composante tangentielle de W , qu'on note W_Γ , la projection orthogonale de W sur le plan tangent :*

$$W_\Gamma := W - \langle W, \nu \rangle \nu,$$

où ν est le vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω .

Remarque 1.5 *Soient Ω un ouvert borné à bord $\Gamma = \partial\Omega$ de classe \mathcal{C}^1 et $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Soit V un champs de vecteur dans $L^2(\Gamma)$, considérons sa composante tangentielle V_Γ définie par : $V_\Gamma := V - \langle V, \nu \rangle \nu$, où ν est le vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω . Alors, en utilisant le fait que le gradient de u est porté par la normale, on a*

$$\langle \nabla u, V \rangle - \langle V, \nu \rangle \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma, \quad \text{où } \frac{\partial u}{\partial \nu} := \langle \nabla u, \nu \rangle. \quad (1.16)$$

En effet, établir (1.16) est équivalent à montrer que $\langle \nabla u, V_\Gamma \rangle = 0$ sur Γ , car on a

$$\langle \nabla u, V_\Gamma \rangle = \langle \nabla u, V \rangle - \langle V, \nu \rangle \langle \nabla u, \nu \rangle = 0, \quad \text{sur } \Gamma.$$

Or, pour presque tout $x \in \Gamma$, on a $\langle \nabla u(x), V_\Gamma(x) \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x + tV_\Gamma(x)) - u(x)}{t}$. Comme $x \in \Gamma$, alors $u(x) = 0$. D'autre part, on a

$$\langle \nu(x), V_\Gamma(x) \rangle = \langle \nu(x), V(x) \rangle - \langle V(x), \nu(x) \rangle \langle \nu(x), \nu(x) \rangle = 0,$$

donc $V_\Gamma(x) \in \nu(x)^\perp = T_x\Gamma$. Ainsi, il existe t_x , telle que pour tout $t \in]-t_x, t_x[$, on a $x + tV_\Gamma(x) \in T_x\Gamma \cap \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. D'où, pour tout $|t| < t_x$, $u(x + tV_\Gamma(x)) = 0$. Par conséquent, (1.16) s'en déduisant.

Notons que la formule (1.16) s'étend aux fonctions de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (voir par exemple [85]).

Définition 1.5 (Gradient tangentiel) *Soit g une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Γ . On définit son gradient tangentiel par :*

$$\nabla_{|\Gamma} g = \nabla \tilde{g} - \langle \nabla \tilde{g}, \nu \rangle \nu, \quad \text{sur } \Gamma,$$

où $\tilde{g} \in \mathcal{C}^1$ est un prolongement de g .

Définition 1.6 (Divergence tangentielle) *Soit un champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur Γ . On définit sa divergence tangentielle par*

$$\text{div}_\Gamma(V) = \text{div}(V) - \langle \nabla \tilde{V}, \nu \rangle \nu, \quad \text{sur } \Gamma,$$

où \tilde{V} est un prolongement de V sur \mathbb{R}^n .

Définition 1.7 Soit Ω un ouvert, borné de classe \mathcal{C}^2 . On définit la courbure moyenne de $\partial\Omega$ par :

$$H = \operatorname{div}_\Gamma \tilde{\nu}, \quad \text{sur } \Gamma.$$

où $\tilde{\nu}$ est une extension de classe \mathcal{C}^1 de ν .

Remarque 1.6 La quantité H ne dépend pas de l'extension unitaire de classe \mathcal{C}^1 de ν choisie (voir Proposition 5.4.8, [57]).

Maintenant nous rappelons les formules suivantes dont la preuve dans [57].

Proposition 1.3 Nous avons les propriétés suivantes :

$$- \forall f \in \mathcal{C}^1(\Gamma), \forall V \in \mathcal{C}^1$$

$$\operatorname{div}_\Gamma(fV) = f \operatorname{div}_\Gamma(V) + V \nabla_\Gamma f. \quad (1.17)$$

$$- \forall f, g \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$$

$$\nabla_\Gamma(fg) = g \nabla_\Gamma f + f \nabla_\Gamma g. \quad (1.18)$$

$$- \forall f, g \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$$

$$\nabla f \nabla g = \nabla_\Gamma g \nabla_\Gamma f + \frac{\partial f}{\partial \nu} \frac{\partial g}{\partial \nu}. \quad (1.19)$$

Le laplacien d'une fonction u est défini sur un ouvert Ω par la formule $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$. Si la fonction u est définie sur le bord Γ de l'ouvert Ω , on a une définition analogue lorsqu'elle appartient à :

$$W^{2,1}(\Gamma) = \{u \in W^{1,1}(\Gamma) / \nabla_\Gamma u \in W^{1,1}(\Gamma, \mathbb{R}^n)\}.$$

Définition 1.8 (Opérateur de Laplace-Beltrami) Soit Ω un ouvert de classe \mathcal{C}^2 . L'opérateur de Laplace-Beltrami sur Γ , noté Δ_Γ est défini, pour tout $u \in W^{2,1}(\Gamma)$, par :

$$\Delta_\Gamma u = \operatorname{div}_\Gamma \nabla_\Gamma u.$$

On déduit de cette définition et de la proposition 5.4.9 de [57] la formule suivante.

Proposition 1.4 On suppose que Ω est de classe \mathcal{C}^2 et $u : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . Alors

$$\Delta u = \Delta_\Gamma u + H \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$\text{où } \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \nu_i \nu_j.$$

Nous terminons cette partie par donner la formule d'intégration par parties pour des intégrales sur Γ . Il fait l'objet du théorème suivant [33, 57].

Théorème 1.8 Soit Ω un ouvert de classe \mathcal{C}^2 de bord Γ . Pour $f, g \in H^2(\Omega)$ on a les formules suivantes :

$$\int_\Gamma \nabla_\Gamma f \nabla_\Gamma g \, d\sigma = - \int_\Gamma f \Delta_\Gamma g \, d\sigma. \quad (1.20)$$

1.4 Quelques résultats d'analyse convexe

Dans ce paragraphe, nous rappelons des résultats d'analyse convexe qui seront très utiles pour la suite de ce travail (voir par exemple [86, 58]).

Fonctions convexes

Définition 1.9 Soient K un sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^n et une fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f convexe si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

- On dit que f est fortement convexe ou α -convexe (avec $\alpha > 0$) si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{\alpha}{2}t(1-t)\|x - y\|.$$

On peut caractériser une fonction convexe dans le cas où celle-ci est régulière de la manière suivante (voir [65]).

Proposition 1.5 Soit K un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors, on a

- Si la fonction f est convexe, alors on a

$$\forall x, y \in K, \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x).$$

- Si la fonction f est fortement convexe ou α -convexe (avec $\alpha > 0$), alors on a

$$\forall x, y \in K, \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x) - \frac{\alpha}{2}t(1-t)\|x - y\|.$$

Nous aurons également besoin des résultats suivants (voir [71, 86]). Pour cela, nous commençons par rappeler la définition de l'enveloppe convexe.

Définition 1.10 Soit A une partie de \mathbb{R}^n , alors l'enveloppe convexe est défini par :

$$\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid k \geq 1, x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Proposition 1.6 Soit Ω une partie compacte, convexe et d'intérieur non vide. Alors, $\Omega = \text{conv}(\partial\Omega)$.

Proposition 1.7 Soient f une application convexe et $K \subseteq D_f$. Alors, on a

$$\sup_{x \in K} f(x) = \sup_{x \in \text{conv}(K)} f(x).$$

Support, fonction support

Dans cette section, nous allons donner quelques définitions et propriétés sur l'ensemble des points supports d'une partie de \mathbb{R}^n , ainsi que sur la fonction support d'un convexe.

Rappelons tout d'abord la définition de l'ensemble des points supports (voir [72, 86]).

Définition 1.11 Soient A une partie non vide de \mathbb{R}^n . On dit que x_0 est un point support de A , s'il existe une forme linéaire $f_* \in \mathbb{R}^{n'} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, telle que $f_* \neq 0$ et f_* atteint sa borne supérieure sur A en x_0 . On dit dans ce cas que f_* supporte A et on note par $\text{supp}(A)$ l'ensemble des points supports de A .

Nous avons alors le résultat de densité dû à Bishop et Phelps (voir [71]).

Théorème 1.9 Soient C une partie fermée convexe de \mathbb{R}^n et $x \in \partial C$. Alors

$$\overline{\text{supp}(C)} = \partial C.$$

Ainsi en rajoutant le fait que C doit être d'intérieur non vide, on aura le corollaire suivant (voir [86]) :

Corollaire 1.1 Soit C une partie non vide fermé et convexe de \mathbb{R}^n d'intérieur non vide. Alors, on a $\text{supp}(C) = \partial C$.

Fonctions support

Nous allons maintenant définir la fonction support d'une partie de \mathbb{R}^n (voir [86]).

Définition 1.12 Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie non vide et bornée. La fonction support de C est la fonction définie par :

$$P_C : \xi \in \mathbb{R}^n \mapsto P_C(\xi) = \sup_{x \in C} \langle \xi, x \rangle \in \mathbb{R}.$$

Considérons maintenant l'ensemble suivant :

$$\mathcal{C}^n := \{ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n / \Omega \text{ non vide, fermé, borné et convexe} \}.$$

Soit $A, B \in \mathcal{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On vérifie que $A + B$ et λA (au sens de Minkowski) restent dans \mathcal{C}^n . De plus, \mathcal{C}^n est stable par intersection finie. D'autre part, \mathcal{C}^n est un espace métrique muni de la distance de Hausdroff d^H .

Nous avons les propriétés des fonctions support (voir [86]).

Proposition 1.8 Soit $C \in \mathcal{C}^n$, alors P_C est définie sur \mathbb{R}^n et vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0, P_C(tx) = tP_C(x)$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, P_C(x + y) \leq P_C(x) + P_C(y)$.
- (ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, |P_C(x) - P_C(y)| \leq \sup_{a \in \mathbb{S}^{n-1}} P_C(a) \|x - y\|$.

En particulier, P_C est convexe.

Soit $\mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des formes sous-linéaires $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (1) $p(tx) = tp(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0.$
- (2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$

Considérons l'application \mathfrak{P} définie par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} : \mathcal{C}^n &\longrightarrow \mathbb{S}(\mathbb{R}^n) \\ C &\longmapsto \mathfrak{P}(C) = P_C \end{aligned}$$

Cette application est bien définie d'après la proposition précédente. De plus, on a le résultat suivant dû à Hörmander (voir [71, 36, 37]) :

Théorème 1.10 *L'application \mathfrak{P} définie de \mathcal{C}^n dans $\mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ est bijective. De plus, on a :*

$$\forall C \in \mathcal{C}^n, \forall t \geq 0, \mathfrak{P}(tC) = t\mathfrak{P}(C) \text{ et } \forall A, B \in \mathcal{C}^n, \mathfrak{P}(A + B) = \mathfrak{P}(A) + \mathfrak{P}(B).$$

Soient $p \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$, $N(p) := \sup_{\|x\| \leq 1} p(x)$ et $A, B \in \mathcal{C}^n$, alors on a

$$d^H(A, B) = N(\mathfrak{P}(A) - \mathfrak{P}(B)) = \sup_{x \in S^{n-1}} |P_A(x) - P_B(x)|, \quad (1.21)$$

où $d^H(., .)$ est la métrique de Hausdorff.

Nous aurons également besoin du résultat suivant.

Théorème 1.11 *Soient $C \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné convexe, et P_C est sa fonction support. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors P_C est différentiable en x , si et seulement s'il existe un unique $x_* \in \overline{C}$, tel que $P_C(x) = \max_{y \in C} \langle x, y \rangle = \langle x, x_* \rangle$. P_C est différentiable en x . Dans ce cas, on a $\nabla P_C(x) = x_*$.*

Rappelons la caractérisation des applications sous-linéaires (voir [86]).

Théorème 1.12 *Soit p une application sous-linéaire définie sur \mathbb{R}^n . Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :*

$$p(x) = \max_{y \in \partial p(0)} \langle x, y \rangle.$$

Remarque 1.7 *L'ensemble $\partial p(0)$ est appelé le sous-différentiel de p au point 0 et est défini par :*

$$\partial p(0) := \{\zeta \in \mathbb{R}^{n'} / \zeta(y) - \zeta(0) \leq p(y) - p(0), \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Or, on sait que $(\mathbb{R}^n)' := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}' + \dots + \mathbb{R}'$, donc on obtient

$$\partial p(0) = \{\xi \in \mathbb{R}^n / \langle \xi, y \rangle \leq p(y), \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Comme p est convexe, alors, d'après le théorème de Moreau ([71]), $\partial p(0)$ est un convexe non vide et compact de \mathbb{R}^n . Ainsi, $\partial p(0) \in \mathcal{C}^n$; de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$p(x) = \max_{y \in \partial p(0)} \langle x, y \rangle = P_{\partial p(0)}(x).$$

Par suite, l'application \mathfrak{P} de \mathcal{K}^n dans $\mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ est bijective.

Première partie

Dérivation de forme par rapport à
une déformation du type Minkowski

Dérivation de forme de fonctionnelles coût volumiques par rapport aux domaines étoilés

Sommaire

2.1 Propriétés des domaines étoilés	29
2.2 Dérivation de forme pour des domaines étoilés	36
Cas d'une déformation avec des domaines fortement convexes	37
Cas général où Ω est convexe	40
Formule générale de calcul de la dérivée de forme	45

La résolution numérique de problèmes d'optimisation de forme nécessite en général d'introduire une notion de différentiabilité par rapport au domaine ou ce que l'on appelle la dérivée de forme. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une méthode de calcul de la dérivée de forme d'une fonctionnelle coût volumique, en utilisant une déformation de type Minkowski. Il s'agit d'une formule en optimisation de forme qui a été introduite dans le cas des domaines convexes par [76] et étudiée aussi par [10, 8]. Notre but alors est de l'étendre à des domaines non convexes en l'occurrence des domaines étoilés.

Plus précisément, une formule de dérivation de forme d'une fonctionnelle coût \mathcal{J} du type :

$$\mathcal{J} : \Lambda \mapsto \mathcal{J}(\Lambda) = \int_{\Lambda} f(x) dx,$$

où Λ est un ouvert borné de \mathbb{R}^n et f est une fonction définie sur \mathbb{R}^n , a été introduite par A. A. Niftiyev et Y. Gasimov [76], en utilisant une déformation du convexe Ω_0 par un convexe Ω suivant la formule $(1 - \varepsilon)\Omega_0 + \varepsilon\Omega$, $\varepsilon \in]0, 1[$, et en exprimant la dérivée au moyen des fonctions support. En fait, ils obtiennent la formule

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}((1 - \varepsilon)\Omega_0 + \varepsilon\Omega) - \mathcal{J}(\Omega_0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} f(x) (P_{\Omega}(\nu_0(x)) - P_{\Omega_0}(\nu_0(x))) d\sigma(x),$$

où que les ouverts Ω_0 et Ω bornés, convexes et de classe \mathcal{C}^2 , et f de classe \mathcal{C}^1 , et où ν_0 est la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0 .

Récemment, cette formule a été généralisée par A. Boulkhemair et A. Chakib [10] pour la même famille d'ouverts, mais pour une fonction f appartenant à l'espace de Sobolev $W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Ensuite, ce même résultat a été encore une fois généralisé par A. Boulkhemair [8] au cas d'une famille d'ouverts qui sont seulement convexes. Ils ont également proposé une formule de dérivation de forme similaire en considérant une déformation de Ω_0 du type

Minkowski [86], sous la forme $\Omega_0 + \varepsilon\Omega$. Cette formule s'énonce comme suit : étant donnés Ω_0 et Ω deux ouverts bornés convexes de classe \mathcal{C}^2 et f une fonction appartenant à $W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, alors on a la limite suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}(\Omega_0 + \varepsilon\Omega) - \mathcal{J}(\Omega_0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} f(x) P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma(x). \quad (2.1)$$

Dans ce chapitre, nous démontrons un résultat qui généralise cette formule de dérivation de forme au cas d'une famille d'ouverts étoilés. Pour ce faire, nous allons commencer par donner quelques définitions et démontrer quelques propriétés des domaines étoilés. La stratégie de démonstration de la formule consiste à supposer, dans un premier temps, que Ω est fortement convexe, ce qui va nous permettre d'établir un certain difféomorphisme entre Ω_0 et $\Omega_0 + \varepsilon\Omega$ et d'utiliser par la suite les techniques classiques de dérivation de forme. Ensuite, le cas général où Ω est seulement convexe est traité en l'approchant par une suite de domaines fortement convexes, tout en établissant un résultat de continuité de la fonction jauge par rapport aux domaines étoilés munis de la distance de Hausdorff.

Ce résultat a fait l'objet d'un article soumis pour publication [14] et d'une communication au "9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM19), Valencia, Spain, from 15 to 19 July, 2019".

2.1 Domaines étoilés et fonctions jauge

Dans cette section, nous allons donner quelques définitions et démontrer quelques résultats utiles sur les domaines étoilés. En effet, dans la littérature, il existe plusieurs définitions d'un domaine étoilé, nous adoptons dans ce travail, la suivante :

Définition 2.1 *On dit qu'un ouvert Ω de \mathbb{R}^n est étoilé par rapport à un point $x_0 \in \Omega$, si pour tout $x \in \bar{\Omega}$ (l'adhérence de Ω), on a $[x_0, x[= \{(1-t)x_0 + tx; 0 \leq t < 1\} \subset \Omega$. En particulier, si $x_0 = 0$, pour tout $x \in \bar{\Omega}$, le segment $[0, x[\subset \Omega$.*

Remarque 2.1 *Notons qu'un domaine Ω de \mathbb{R}^n est convexe si et seulement s'il est étoilé par rapport à chaque $x_0 \in \Omega$ (voir [36]).*

Dans la suite, afin de pouvoir caractériser les domaines étoilés par leurs fonctions jauge, nous allons souvent considérer des domaines bornés étoilés par rapport à 0. Considérons donc Ω un domaine borné étoilé par rapport à 0. Nous définissons sa fonction jauge ([36]) qu'on notera $J_\Omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$J_\Omega(x) = \inf\{\lambda > 0 / x \in \lambda\Omega\}.$$

Il est clair que $\{\lambda > 0 / x \in \lambda\Omega\}$ est non vide puisque $0 \in \Omega$.

Le résultat suivant rassemble les principales propriétés de la fonction jauge associée à un domaine étoilé.

Proposition 2.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné étoilé par rapport à 0. Alors, la fonction jauge J_Ω satisfait les propriétés suivantes :*

- (i) $J_\Omega(0) = 0, J_\Omega(x) > 0, \forall x \neq 0.$
- (ii) $J_\Omega(tx) = tJ_\Omega(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}_+.$
- (iii) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; J_\Omega(x) < 1\}.$
- (iv) $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; J_\Omega(x) = 1\}.$
- (v) $J_\Omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.
- (vi) Soit Ω' un autre domaine étoilé par rapport à 0 tel que $\Omega' \subset \Omega$, alors, $J_\Omega \leq J_{\Omega'}$.
- (vii) $J_{t\Omega} = (1/t)J_\Omega, \forall t \in \mathbb{R}_+^*,$ et comme conséquence on a

$$t\bar{\Omega} \subset \Omega \subset \bar{\Omega} \subset \frac{1}{t}\Omega, \forall t \in]0, 1[$$

Démonstration. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné étoilé par rapport à 0.

La démonstration des assertions (i), (ii) et (vi) découle immédiatement de la définition de la jauge J_Ω et du fait que Ω est un voisinage borné de 0.

Pour démontrer (iii), Soient $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $J_\Omega(x) < 1$ et $\varepsilon_x = 1 - J_\Omega(x) > 0$. D'après la caractérisation de la borne inférieure il existe λ_{ε_x} tel que

$$\frac{1}{\lambda_{\varepsilon_x}}x \in \Omega \text{ et } 0 \leq J_\Omega(x) \leq \lambda_{\varepsilon_x} < J_\Omega(x) + \varepsilon_x = 1.$$

Puisque $\frac{1}{\lambda_{\varepsilon_x}}x \in \Omega$ et Ω est étoilé par rapport à 0, alors on a $[0, \lambda_{\varepsilon_x}^{-1}x[\subset \Omega_0$. D'autre part comme $\lambda_{\varepsilon_x} < 1$, donc $\lambda_{\varepsilon_x} \lambda_{\varepsilon_x}^{-1}x = x \in \Omega$. Inversement, si $x \in \Omega$, le fait que Ω est un ouvert étoilé par rapport à 0 implique que $x \in \lambda\Omega$ pour tout $\lambda < 1$. D'où $J_\Omega(x) < 1$.

Pour prouver (iv), soit $x \in \partial\Omega$, alors il résulte de (iii) que $J_\Omega(x) \geq 1$. D'autre part, comme Ω est un domaine étoilé, on a pour tout $t \in [0, 1[$, $tx \in \Omega$. Ce qui implique que pour tout $t \in [0, 1[$, on a $J_\Omega(tx) = tJ_\Omega(x) < 1$. D'où pour tout $\lambda > 1$, on aura $J_\Omega(x) < \lambda$. Donc $J_\Omega(x) \leq 1$. Par suite $J_\Omega(x) = 1$. Inversement, soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $J_\Omega(x) = 1$, alors on a $x \notin \Omega$ et $x \in \lambda\Omega$ pour tout $\lambda > 1$. Ce qui implique que pour tout $t \in [0, 1[$ on a $tx \in \Omega$. Or, puisque $tx \rightarrow x$ quand $t \rightarrow 1^-$, nous obtenons que $x \in \partial\Omega$.

Maintenant, puisque J_Ω est une fonction positivement homogène, donc pour prouver sa continuité il suffit de montrer que $\{J_\Omega < 1\}$ est un ouvert et que $\{J_\Omega \leq 1\}$ est un fermé. Cela découle de (iii) et (iv) puisque $\{J_\Omega < 1\} = \Omega$ est un ouvert et $\{J_\Omega \leq 1\} = \bar{\Omega}$ est un fermé. Ce qui démontre alors (v).

Pour démontrer (vii), on a, par définition de la jauge,

$$J_{t\Omega}(x) = \inf\{\lambda > 0, x \in \lambda t\Omega\} = J_\Omega((1/t)x) = (1/t)J_\Omega(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad (2.2)$$

Soit maintenant $t \in]0, 1[$ et $x \in t\bar{\Omega}$, alors d'après (iii), on a $J_{t\Omega}(x) \leq 1$. Ensuite d'après (2.2), on a

$$J_{t\Omega}(x) = (1/t)J_\Omega(x) \leq 1.$$

Donc $J_\Omega(x) \leq t < 1$. Ce qui entraîne que $x \in \Omega$. On en déduit alors que $t\bar{\Omega} \subset \Omega$. Montrons maintenant la deuxième inclusion. Soit $x \in \bar{\Omega}$. Alors d'après (iii) et (iv), on a $J_\Omega(x) \leq 1$.

En utilisant (vii), on a

$$J_{\frac{1}{t}\Omega}(x) = tJ_{\Omega}(x) \leq t < 1.$$

D'où d'après (iii), on obtient $x \in \frac{1}{t}\Omega$. Ce qui implique que $\bar{\Omega} \subset \frac{1}{t}\Omega$. ■

Il est bien connu en analyse convexe que la fonction jauge d'un domaine convexe est Lipschitzienne [83]. Ce n'est pas toujours le cas pour les domaines étoilés par rapport à 0. Comme le caractère Lipschitz de la fonction jauge sera important pour la suite, nous aurons ainsi besoin d'introduire une famille de domaines étoilés pour lesquels les fonctions jauge associées auront cette régularité, à savoir les domaines étoilés par rapport à une boule.

Définition 2.2 *Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est dit étoilé par rapport à un sous-ensemble $G \subset \Omega$, s'il est étoilé par rapport à chaque point de G . Autrement dit,*

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall y \in G, \quad \{(1-t)y + tx; 0 \leq t < 1\} \subset \Omega.$$

En particulier, dans le cas où $G = B(0, r)$, $r > 0$, le domaine est dit étoilé par rapport à une boule.

Le caractère Lipschitz de la fonction jauge est en réalité équivalent au fait que le domaine soit étoilé par rapport à une boule. C'est l'objet du résultat suivant pour lequel nous donnons une preuve un peu plus simple que celle donnée dans [17, 36].

Proposition 2.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné étoilé par rapport à 0. Alors, Ω est étoilé par rapport à une boule $B(0, r) \subset \Omega$ centrée en 0 et de rayon $r > 0$ si et seulement si J_{Ω} est Lipschitzienne de constante de Lipschitz égale à $1/r$.*

Démonstration. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné et étoilé par rapport à 0. Supposons d'abord que J_{Ω} satisfait l'inégalité suivante, pour $r > 0$:

$$|J_{\Omega}(y) - J_{\Omega}(x)| \leq \frac{1}{r}|y - x|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Soit $y \in B(0, r)$, $x \in \bar{\Omega}$ et $t \in [0, 1[$, d'après (2.3) on aura

$$J_{\Omega}((1-t)y + tx) \leq J_{\Omega}(tx) + \frac{1}{r}|(1-t)y| < t + \frac{1}{r}(1-t)r = 1.$$

Ainsi d'après la proposition 2.1, on a $(1-t)y + tx \in \Omega$, pour tout $y \in B(0, r)$, $x \in \bar{\Omega}$ et $t \in [0, 1[$. Donc Ω est étoilé par rapport à la boule $B(0, r)$.

Inversement, supposons que Ω est étoilé par rapport à la boule $B(0, r)$. Soit tout d'abord $x \in \partial\Omega$ et considérons l'ensemble $K_x := \text{conv}(\bar{B}(0, r) \cup \{x\})$, l'enveloppe convexe de la partie $\bar{B}(0, r) \cup \{x\}$. Il est clair que l'intérieur de K_x notée Ω_x est un domaine convexe qui est par définition donné par

$$\Omega_x = \overset{\circ}{K}_x \subseteq \text{conv}(\bar{B}(0, r) \cup \{x\}) := \{(1-t)y + tx; y \in \bar{B}(0, r), t \in [0, 1]\}.$$

Donc Ω_x est inclus dans Ω . Ainsi, en utilisant la propriété (vi) de la Proposition 2.1, on obtient

$$J_\Omega \leq J_{\Omega_x} \leq J_{B(0,r)}.$$

Par suite, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire

$$J_\Omega(y) \leq J_{\Omega_x}(y) \leq J_{\Omega_x}(x) + J_{\Omega_x}(y-x) \leq 1 + J_{B(0,r)}(y-x) \leq J_\Omega(x) + \frac{1}{r}|y-x|,$$

car J_{Ω_x} est une fonction convexe, $J_{\Omega_x}(x) = 1 = J_\Omega(x)$ et $J_{B(0,r)}(z) = |z|/r$. D'où pour tout $x \in \partial\Omega$ on a

$$J_\Omega(y) - J_\Omega(x) \leq \frac{1}{r}|y-x|. \quad (2.4)$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors $\frac{x}{J_\Omega(x)}$ est dans $\partial\Omega$. Ainsi d'après (2.4) on aura

$$J_\Omega\left(\frac{y}{J_\Omega(x)}\right) - J_\Omega\left(\frac{x}{J_\Omega(x)}\right) \leq \frac{1}{r}\left|\frac{y}{J_\Omega(x)} - \frac{x}{J_\Omega(x)}\right|.$$

Ce qui implique par homogénéité de la fonction jauge que

$$J_\Omega(y) - J_\Omega(x) \leq \frac{1}{r}|y-x|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Par suite, J_Ω est lipschitzienne de constante de Lipschitz $\frac{1}{r}$. ■

Remarque 2.2 *La démonstration de la proposition 2.2 peut être vue comme une autre façon de prouver qu'un ouvert borné étoilé par rapport à une boule est à bord lipschitzien que celle donnée dans [57]).*

En fait, de manière générale un domaine étoilé par rapport à un point n'est pas nécessairement lipschitzien, ceci est illustré dans la figure 2.1.

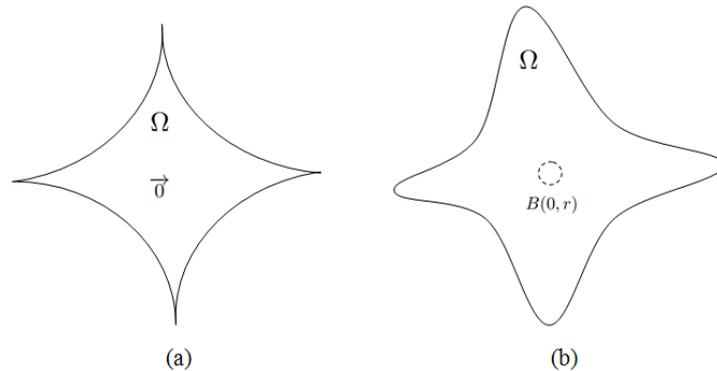


FIGURE 2.1 – (a) : Ouvert étoilé, (b) : Ouvert étoilé par rapport à une boule.

Dans la suite, afin d'établir un résultat qui permet de faire le lien entre la régularité géométrique des domaines par rapport à une boule et celle des fonctions jauge associées nous aurons besoin du lemme clé suivant.

Lemme 2.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné étoilé par rapport à $B(0, r)$ ($r > 0$), alors

$$\langle \nu(x), x \rangle \geq r, \quad \text{pour presque tout } x \in \partial\Omega,$$

où ν est le vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω .

Démonstration. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné étoilé par rapport à une boule $B(0, r)$, $r > 0$. D'après la Proposition 2.1, on a

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; J_\Omega(x) < 1\}, \quad \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; J_\Omega(x) = 1\}, \quad (2.5)$$

De plus, d'après la Proposition 2.2, la fonction jauge J_Ω est Lipschitzienne de constante de Lipschitz égale à $\frac{1}{r}$, c'est-à-dire, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|J_\Omega(x) - J_\Omega(y)| \leq \frac{1}{r}|x - y|.$$

Par suite, d'après le Théorème de Rademacher (voir par exemple [42]), on a

$$|\nabla J_\Omega(x)| \leq \frac{1}{r}, \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

D'autre part, comme Ω est étoilé par rapport à $B(0, r)$, d'après la proposition 2.2, on a $\partial\Omega = \{J_\Omega = 1\}$ est lipschitzien, de plus d'après [39] la normale extérieure à Ω est définie pour presque tout $x \in \partial\Omega$ par

$$\nu(x) = \frac{\nabla J_\Omega(x)}{|\nabla J_\Omega(x)|}.$$

Par ailleurs, puisque J_Ω est positivement homogène, on a, pour tout $x \in \partial\Omega$,

$$\langle \nabla J_\Omega(x), x \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_\Omega(x + tx) - J_\Omega(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)J_\Omega(x) - J_\Omega(x)}{t} = J_\Omega(x) = 1,$$

ce qui entraîne que

$$\langle \nu(x), x \rangle = \left\langle \frac{\nabla J_\Omega(x)}{|\nabla J_\Omega(x)|}, x \right\rangle = \frac{1}{|\nabla J_\Omega(x)|} \geq r, \quad \text{pour presque tout } x \in \partial\Omega$$

■

Nous avons alors le résultat suivant dont la démonstration est analogue à celle du Lemma 4.3. de [10], établie dans le cas des domaines convexes, et qui est basée sur le fait que $\langle \nu(x), x \rangle$ ne s'annule pas. Ceci est donc assuré dans notre cas par le lemme 2.1.

Proposition 2.3 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné étoilé par rapport à une boule $B(0, r)$, $r > 0$. Alors, J_Ω est de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si et seulement si Ω est de classe \mathcal{C}^k .

Remarque 2.3 L'argument indispensable qui a donné lieu à cette propriété qui permet de caractériser la régularité d'un domaine étoilé par rapport à une boule $B(0, r)$ par celle de sa fonction jauge est : $\langle \nu(x), x \rangle \geq r$ p.p. tout $x \in \partial\Omega$. Cette propriété n'est pas toujours

vérifiée pour les domaines étoilés par rapport à un point même s'ils sont assez réguliers. Ceci est illustré dans la figure (2.2).

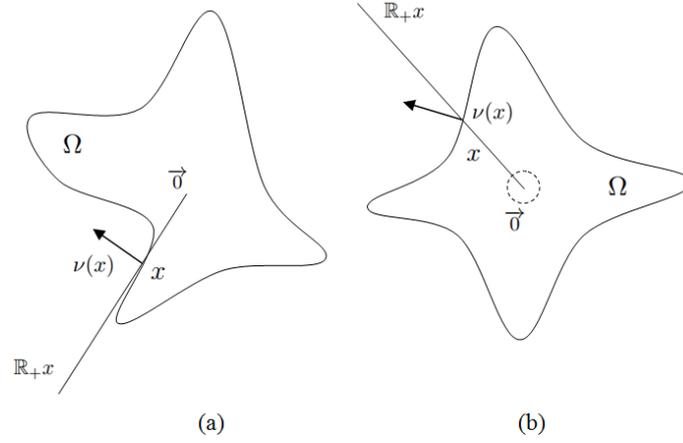


FIGURE 2.2 – (a) : Ouvert étoilé, (b) : Ouvert étoilé par rapport à une boule $B(0, r)$.

Nous aurons également besoin du résultat suivant concernant la continuité de la fonction jauge par rapport à la famille des domaines étoilés par rapport à une boule munie de la métrique de Hausdorff.

Proposition 2.4 Soit A et B deux domaines de \mathbb{R}^n , bornés et étoilés par rapport à la boule $B(0, r)$, $r > 0$, tels que $A \subseteq B$. Alors, on a

$$\sup_{S^{n-1}} |J_A - J_B| \leq \frac{1}{r^2} d^H(\bar{A}, \bar{B}) \quad (2.6)$$

Démonstration. Soit $x \in \partial B$; puisque $\bar{A} \subset \bar{B}$, alors il existe $y_x \in \partial A$ tel que $d(x, \bar{A}) = |x - y_x|$. Par suite, comme $J_A(y_x) = J_B(x) = 1$, on a

$$|J_A(x) - J_B(x)| \leq |J_A(x) - J_A(y_x)| + |J_A(y_x) - J_B(x)| = |J_A(x) - J_A(y_x)|. \quad (2.7)$$

Or, d'après la Proposition 2.2, la fonction jauge J_A est lipschitzienne de constante de Lipschitz $\frac{1}{r}$; alors,

$$|J_A(x) - J_A(y_x)| \leq r^{-1} |x - y_x| = r^{-1} d(x, \bar{A}). \quad (2.8)$$

Donc,

$$|J_A(x) - J_B(x)| \leq r^{-1} d(x, \bar{A}).$$

Puisque $x \in \partial B$, on obtient

$$|J_A(x) - J_B(x)| \leq r^{-1} \sup_{z \in \bar{B}} d(z, \bar{A}) = r^{-1} d^H(\bar{A}, \bar{B}).$$

Soit maintenant $x \in S^{n-1}$. Comme $\frac{x}{J_B(x)} \in \partial B$, par homogénéité des fonctions jauge J_A

et J_B , on a

$$|J_A(x) - J_B(x)| = J_B(x) \left| J_A\left(\frac{x}{J_B(x)}\right) - J_B\left(\frac{x}{J_B(x)}\right) \right| \leq J_B(x) r^{-1} d^H(\overline{A}, \overline{B}),$$

et comme $B(0, r) \subset B$, on aura alors

$$J_B(x) \leq J_{B(0,r)}(x) = |x|/r = 1/r.$$

D'où le résultat. ■

Nous terminons ce paragraphe en donnant un résultat de stabilité de la famille des domaines étoilé par les opérations d'addition au sens de Minkowski et de la multiplication par un scalaire (voir [83]).

Lemme 2.2 *Soient Ω_1 un convexe borné contenant 0 et Ω_2 un domaine borné étoilé par rapport à une boule $B(0, r)$, $r > 0$ et soit λ un réel strictement positif. Alors, $\Omega_1 + \Omega_2$ et $\lambda\Omega_2$ sont des domaines étoilés par rapport à une boule $B(0, r)$, avec*

$$\Omega_1 + \Omega_2 := \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in \Omega_1, x_2 \in \Omega_2\}.$$

et

$$\lambda\Omega_1 := \{\lambda x \mid x \in \Omega_1\}.$$

Démonstration. Soit $x \in \overline{\Omega_1 + \Omega_2} = \overline{\Omega_1} + \overline{\Omega_2}$, alors il existe $x_1 \in \overline{\Omega_1}$ et $x_2 \in \overline{\Omega_2}$ tels que $x = x_1 + x_2$. Par hypothèse, pour tout $y \in B(0, r)$ on a

$$\{tx_1; 0 \leq t < 1\} \subset \Omega_1 \quad \text{et} \quad \{(1-t)y + tx_2; 0 \leq t < 1\} \subset \Omega_2$$

Soit maintenant $t \in [0, 1[$ et $w \in B(0, r)$. Vérifions que

$$(1-t)x + tw = (1-t)x_1 + (1-t)x_2 + tw \in \Omega_1 + \Omega_2.$$

D'après la Proposition 2.1, on a $(1-t)\overline{\Omega_1} \subset \Omega_1$. Donc, $(1-t)x_1 \in \Omega_1$. Par suite,

$$(1-t)x_1 + (1-t)x_2 + tw \in \Omega_1 + \Omega_2.$$

Donc, $\Omega_1 + \Omega_2$ est un domaine étoilé par rapport à la boule $B(0, r)$. En utilisant les mêmes arguments on peut montrer que $\lambda\Omega_2$ est un domaine étoilé par rapport à la boule $B(0, r)$. ■

2.2 Dérivation de forme pour une famille de domaines étoilés de classe \mathcal{C}^2

Dans ce paragraphe, nous allons présenter une généralisation de la formule (2.1) de calcul de la dérivée de forme d'une fonctionnelle intégrale volumique du type

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{J}(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx$$

pour une classe de domaines étoilés de classe \mathcal{C}^2 . Pour ce faire, nous considérons l'espace \mathcal{U}_{ad} des domaines admissibles défini par :

$$\mathcal{U}_{ad} := \{\Omega \subseteq \mathbb{R}^n / \Omega \text{ non vide, ouvert, borné, étoilé par rapport à une boule et de classe } \mathcal{C}^2\},$$

et notons aussi par \mathcal{C}_{ad} la famille des domaines suivante :

$$\mathcal{C}_{ad} := \{\Omega \subseteq \mathbb{R}^n / \Omega \text{ non vide, compact, étoilé par rapport à une boule}\}.$$

Ainsi pour tout $\Omega \in \mathcal{U}_{ad}$, on a $\bar{\Omega} \in \mathcal{C}_{ad}$, on peut alors lui associer sa fonction support $P_{\bar{\Omega}} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \langle \cdot, x \rangle$. Or, puisque

$$\sup_{x \in \Omega} \langle \cdot, x \rangle = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \langle \cdot, x \rangle,$$

nous noterons alors souvent $P_{\bar{\Omega}}$ par P_{Ω} .

Nous avons alors le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.1 *Soit $\Omega_0 \in \mathcal{U}_{ad}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine convexe borné et $f \in W^{1,1}(D)$, où D est un domaine borné régulier assez grand pour qu'il contienne tous les ensembles $\Omega_0 + \varepsilon\Omega$, $\varepsilon \in [0, 1]$. Alors, on a la formule suivante*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}(\Omega_0 + \varepsilon\Omega) - \mathcal{J}(\Omega_0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} f(x) P_{\Omega}(\nu_0(x)) d\sigma(x). \quad (2.9)$$

où ν_0 est la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0 .

La stratégie de la démonstration consiste à supposer, dans un premier temps, que Ω est fortement convexe. Ce qui va nous permettre d'établir un certain difféomorphisme entre Ω_0 et $\Omega_0 + \varepsilon\Omega$ et d'utiliser par la suite les techniques classiques de dérivation de forme. Ensuite, le cas général où Ω est seulement convexe est traité en utilisant une approximation par une suite de domaines fortement convexes.

La démonstration de ce théorème est basée sur un certain nombre de résultats de géométrie et d'analyse que nous allons démontrer par la suite sous forme de lemmes. Notons également que la preuve de ce résultat utilise beaucoup les techniques d'analyse convexe via les fonctions jauge, ce qui nécessite de supposer dans un premier temps que Ω_0 et Ω sont des voisinages de 0. Le cas général sera traité par la suite.

Cas d'une déformation avec des domaines fortement convexes

Dans cette section, nous allons commencer par supposer que le domaine avec lequel on déforme est fortement convexe. Pour cela, soit $\Omega_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ et Ω un domaine fortement convexe et on suppose qu'ils sont tous les deux des voisinages de 0. Nous allons construire une correspondance entre $\overline{\Omega}_0$ et $\overline{\Omega}$ de manière explicite, en utilisant certaines propriétés géométriques du domaine Ω . Pour cela, nous construisons tout d'abord cette correspondance entre $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ et $\Gamma = \partial\Omega$. Ce résultat fait objet du lemme suivant.

Lemme 2.3 *Soit $\Omega_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ et Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de classe \mathcal{C}^2 supposé fortement convexe. Alors, il existe une application $a_0 : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$ telle que pour tout $x \in \Gamma_0$, on a*

$$P_\Omega(\nu_0(x)) = \langle \nu_0(x), a_0(x) \rangle, \quad (2.10)$$

où ν_0 est la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0 . De plus, l'application a_0 satisfait les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $x \in \partial\Omega_0$, $\nu(a_0(x)) = \nu_0(x)$, où ν est la normale à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω .

(ii) L'application $a_0 : \partial\Omega_0 \rightarrow \partial\Omega$ est de classe \mathcal{C}^1 .

Démonstration. Soit $\Omega_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ et Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de classe \mathcal{C}^2 supposé fortement convexe. D'après [86], la fonction support P_Ω est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Alors en particulier elle est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathcal{V}_{S^{n-1}}$, un voisinage de la sphère. Maintenant, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, considérons l'ensemble suivant :

$$F(\overline{\Omega}, x) = \{y \in \overline{\Omega} ; P_\Omega(y) = \langle y, x \rangle\}.$$

Comme P_Ω est différentiable en $\nu_0(x)$, pour tout $x \in \Gamma_0$, il découle du Corollaire 1.7.3 de [86] que l'ensemble $F(\overline{\Omega}, \nu_0(x))$ contient le seul élément $\nabla P_\Omega(\nu_0(x))$. D'où,

$$F(\overline{\Omega}, \nu_0(x)) = \{y \in \overline{\Omega} ; \max_{z \in \overline{\Omega}} \langle y, z \rangle = \langle y, \nu_0(x) \rangle\} = \{\nabla P_\Omega(\nu_0(x))\}.$$

Comme $\nabla P_\Omega(\nu_0(x)) \in \text{supp}(\overline{\Omega})$, d'après la proposition 1.6, on a $\text{supp}(\overline{\Omega}) \subseteq \partial\Omega$. Donc, $\nabla P_\Omega(\nu_0(x)) \in \partial\Omega$.

Définissons ainsi l'application a_0 par :

$$a_0 : \begin{array}{ccc} \Gamma_0 := \partial\Omega_0 & \longrightarrow & \Gamma := \partial\Omega \\ x & \longmapsto & a_0(x) = \nabla P_\Omega(\nu_0(x)), \end{array}$$

et montrons qu'elle vérifie (i) et (ii). Puisque Ω de classe \mathcal{C}^2 et fortement convexe, alors la fonction normale $\nu : \Gamma \rightarrow S^{n-1}$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme dont l'inverse est donnée par (voir par exemple [86],[10])

$$\nu^{-1} : y \in S^{n-1} \mapsto \nu^{-1}(y) = \nabla P_\Omega(y) \in \Gamma.$$

Comme Ω_0 est de classe \mathcal{C}^2 , alors on peut lui associer un vecteur normal $\nu_0 : \Gamma_0 \rightarrow S^{n-1}$

de classe \mathcal{C}^1 (voir par exemple [33, 57]). Ainsi, pour tout $x \in \Gamma_0$, on a

$$a_0 : x \in \Gamma_0 \mapsto a_0(x) = \nabla P_\Omega(\nu_0(x)) = \nu^{-1}(\nu_0(x)) \in \Gamma.$$

Donc, l'application a_0 est de classe \mathcal{C}^1 et de plus on a $\nu(a_0) = \nu_0$. ■

Nous allons maintenant étendre la définition de a_0 à une application définie de Ω_0 dans Ω , puis même à une application définie de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n . En effet, considérons l'application a définie sur \mathbb{R}^n , en fonction de a_0 , par

$$a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ J_{\Omega_0}(x) a_0\left(\frac{x}{J_{\Omega_0}(x)}\right) & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

En se basant sur la Proposition 2.1, la Proposition 2.2, la Proposition 2.3 et le Lemme 2.3, on montre le résultat suivant (voir [10], pour plus de détails).

Lemme 2.4 *Soit $\Omega_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe \mathcal{C}^2 et fortement convexe et on suppose qu'ils sont tous les deux voisinages de 0. Alors, l'application $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait les conditions suivantes :*

- (i) $a = a_0$, sur Γ_0 .
- (ii) $a(\Omega_0) \subset \Omega$ et $a(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_0}) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.
- (iii) a est positivement homogène et de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et elle est lipschitzienne sur \mathbb{R}^n .

Maintenant, en utilisant le champ de vecteurs a , pour tout $\varepsilon > 0$, considérons l'application déformation de l'identité Φ_ε définie par :

$$\Phi_\varepsilon(x) := (\text{Id}_{\mathbb{R}^n} + \varepsilon a)(x).$$

Comme l'application a est lipschitzienne sur \mathbb{R}^n , il est bien connu que si ε est suffisamment petit, alors Φ_ε est un homéomorphisme lipschitzien de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n (voir par exemple [30]). De plus, d'après le théorème de l'inversion locale, Φ_ε est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n \setminus 0$.

Le lemme suivant nous permet de démontrer un résultat crucial qui concerne le paramétrage du domaine Ω_ε à l'aide de l'application Φ_ε .

Lemme 2.5 *Soit $\Omega_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ et Ω un domaine borné de classe \mathcal{C}^2 fortement convexe dans \mathbb{R}^n et on suppose qu'ils sont tous les deux voisinages de 0. Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons le domaine $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega$ et l'application $\Phi_\varepsilon : x \mapsto x + \varepsilon a(x)$. Alors, pour tout ε suffisamment petit, on a :*

- (i) $\Phi_\varepsilon(\partial\Omega_0) = \partial\Omega_0 \star \varepsilon\partial\Omega$ et $\partial\Omega_\varepsilon \subseteq \partial(\Phi_\varepsilon(\Omega_0))$.
- (iii) $\Phi_\varepsilon(\Omega_0) = \Omega_\varepsilon$.

Démonstration. émontrons l'assertion (i). En utilisant le Lemme 2.3 et le Lemme 2.4, on a $a(x) = a_0(x) \in \partial\Omega$ et $\nu_0(x) = \nu(a(x))$, pour tout $x \in \partial\Omega_0$. Ainsi,

$$\Phi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon a(x) \in \partial\Omega_0 \star \varepsilon\partial\Omega.$$

Inversement, soit $z \in \partial\Omega_0 \star \varepsilon\partial\Omega$, il existe alors $(x, y) \in \partial\Omega_0 \times \partial\Omega$, tel que $z = x + \varepsilon y$ et $\nu_0(x) = \nu_{\varepsilon\Omega}(\varepsilon y) = \nu(y)$. En utilisant encore une fois le Lemme 2.4, on aura $a(x) \in \partial\Omega$ et $\nu_0(x) = \nu(a(x)) = \nu(y)$. Ensuite, en appliquant le Lemme 1.3, on obtient $a(x) = y$. Donc, $z = x + \varepsilon a(x) = \Phi_\varepsilon(x) \in \Phi_\varepsilon(\partial\Omega_0)$. Par suite, $\Phi_\varepsilon(\partial\Omega_0) = \partial\Omega_0 \star \varepsilon\partial\Omega$. En appliquant maintenant le Lemme 1.4, on obtient

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial(\Omega_0 + \varepsilon\Omega) \subseteq \partial\Omega_0 \star \partial(\varepsilon\Omega) = \partial\Omega_0 \star \varepsilon\partial\Omega = \Phi_\varepsilon(\partial\Omega_0) = \partial\Phi_\varepsilon(\Omega_0).$$

ce qui achève la preuve de (i).

Montrons maintenant l'assertion (ii). D'après le Lemme 2.4, on a $a(\Omega_0) \subseteq \Omega$. Donc,

$$\Phi_\varepsilon(\Omega_0) = (\text{Id}_{\mathbb{R}^n} + \varepsilon a)(\Omega_0) \subseteq \Omega_0 + \varepsilon a(\Omega_0) \subset \Omega_0 + \varepsilon\Omega \subseteq \Omega_\varepsilon.$$

Ensuite, afin de montrer l'inclusion inverse, on aura besoin tout d'abord de considérer la fonction jauge de $\Phi_\varepsilon(\Omega_0)$. Pour cela commençons par vérifier que $\Phi_\varepsilon(\Omega_0)$ est un domaine étoilé par rapport à 0. En effet, soit $y \in \overline{\Phi_\varepsilon(\Omega_0)}$, montrons que $[0, y[\subset \Phi_\varepsilon(\Omega_0)$. Comme Φ_ε est un homéomorphisme, alors $\overline{\Phi_\varepsilon(\Omega_0)} \subseteq \Phi_\varepsilon(\overline{\Omega_0})$. Donc, il existe $x \in \overline{\Omega_0}$, tel que $y = \Phi_\varepsilon(x)$. Comme Ω_0 est étoilé par rapport à 0, alors $[0, x[\subset \Omega_0$. Soit maintenant $z \in [0, y[$, alors il existe $t \in [0, 1[$, tel que $z = ty = t\Phi_\varepsilon(x)$. Or, d'après le Lemme 2.4, l'application a est positivement homogène, donc $\Phi_\varepsilon(tx) = tx + \varepsilon ta(x) = t\Phi_\varepsilon(x)$. Donc, $z = \Phi_\varepsilon(tx) \in \Phi_\varepsilon(\Omega_0)$. Par suite, $\Phi_\varepsilon(\Omega_0)$ est étoilé par rapport à 0.

Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe $x \in \Omega_\varepsilon$ tel que $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Phi_\varepsilon(\Omega_0)$, c'est à dire que l'inclusion $\Phi_\varepsilon(\Omega_0) \subset \Omega_\varepsilon$ est stricte. En particulier, on a $J_{\Phi_\varepsilon(\Omega_0)}(x) > J_{\Omega_\varepsilon}(x)$. Ainsi, d'après la Proposition 2.1 on sait que $0 < J_{\Omega_\varepsilon}(x) < 1$ et $J_{\Phi_\varepsilon(\Omega_0)}(x) \geq 1$. Considérons alors $x^* = \frac{x}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)} \in \partial\Omega_\varepsilon$. On aura $J_{\Phi_\varepsilon(\Omega_0)}(x^*) = \frac{J_{\Phi_\varepsilon(\Omega_0)}(x)}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)} > 1$. Donc, $x^* \notin \partial(\Phi_\varepsilon(\Omega_0))$. Ce qui est en contradiction avec l'assertion (i). Par conséquent, $\Phi_\varepsilon(\Omega_0) = \Omega_\varepsilon$. ■

Nous allons maintenant démontrer le Théorème 2.1 dans le cas où Ω est un ouvert borné fortement convexe et de classe \mathcal{C}^2 .

Démonstration du Théorème 2.1 dans le cas où Ω est fortement convexe.

La démonstration de ce Théorème 2.1 dans le cas où Ω est fortement convexe et de classe \mathcal{C}^2 se base essentiellement sur le Lemme 2.5. En effet, d'après ce lemme, il existe un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme Φ_ε qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\Phi_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}, \quad i \frac{d}{d\varepsilon} \Phi_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} = a := J_{\Omega_0}(x) \nabla P_\Omega \left(\nu_0 \left(\frac{x}{J_{\Omega_0}(x)} \right) \right) \quad \text{et} \quad \Phi_\varepsilon(\Omega_0) = \Omega_0 + \varepsilon\Omega.$$

Le problème du calcul de la dérivée se réduit alors au cas classique d'une déformation de Ω_0 par un difféomorphisme ou, plus précisément, un homéomorphisme Lipschitz. Ainsi, d'après [85], par exemple, nous aurons la formule de dérivée de forme suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}(\Omega_0 + \varepsilon\Omega) - \mathcal{J}(\Omega_0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} f(x) \langle a(x), \nu_0(x) \rangle d\sigma.$$

Ensuite, d'après le Lemme 2.3 et le Lemme 2.4, on a

$$\langle a(x), \nu_0(x) \rangle = \langle a_0(x), \nu_0(x) \rangle = P_\Omega(\nu_0(x)), \quad \text{pour tout } x \in \partial\Omega_0.$$

D'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}(\Omega_0 + \varepsilon\Omega) - \mathcal{J}(\Omega_0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} f(x) P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma(x).$$

Ce qui achève la preuve du Théorème 2.1 dans le cas où Ω est fortement convexe. ■

Cas général où Ω est convexe

Dans ce paragraphe, afin de démontrer la formule de dérivation de forme dans le cas général où Ω est seulement convexe, l'idée naturelle pour y procéder est d'approcher Ω par une suite de domaines fortement convexes. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant (voir [10]) :

Lemme 2.6 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné convexe, alors il existe une suite $(\Omega^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'ouverts bornés réguliers et fortement convexes, telles que $\Omega^k \subset \Omega$ et*

$$d^H(\overline{\Omega^k}, \overline{\Omega}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \quad (2.11)$$

Cette approximation nous permet d'établir les deux lemmes suivants, qui seront très utiles lorsqu'il s'agit de démontrer le Théorème 2.1.

Lemme 2.7 *Soit $\Omega_0 \in \mathcal{U}_{ad}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné convexe et $(\Omega^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de domaines fortement convexes, telle que $\Omega_k \subset \Omega$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $(\Omega^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers Ω au sens de (2.11). Alors, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$d^H(\overline{\Omega_\varepsilon^k}, \overline{\Omega_\varepsilon}) \leq \varepsilon d^H(\overline{\Omega^k}, \overline{\Omega}).$$

où $\Omega_\varepsilon^k = \Omega_0 + \varepsilon\Omega^k$ et $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega$.

Démonstration. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné convexe et $(\Omega^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts bornés réguliers et fortement convexes, telle que $\Omega^k \subset \Omega$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $d^H(\overline{\Omega^k}, \overline{\Omega}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. D'après [86], on a

$$d^H(\overline{\Omega_\varepsilon^k}, \overline{\Omega_\varepsilon}) = d^H(\overline{\Omega_0 + \varepsilon\Omega^k}, \overline{\Omega_0 + \varepsilon\Omega}) \leq d^H(\overline{\Omega_0}, \overline{\Omega_0}) + d^H(\varepsilon\overline{\Omega^k}, \varepsilon\overline{\Omega}).$$

Comme $\Omega_k \subseteq \Omega$, on a

$$d^H(\varepsilon\overline{\Omega^k}, \varepsilon\overline{\Omega}) = \sup_{x \in \varepsilon\overline{\Omega}} d(x, \varepsilon\overline{\Omega^k}) = \varepsilon d^H(\overline{\Omega^k}, \overline{\Omega}).$$

Par suite,

$$d^H(\overline{\Omega_\varepsilon^k}, \overline{\Omega_\varepsilon}) \leq \varepsilon d^H(\overline{\Omega^k}, \overline{\Omega}).$$

■

Ensuite, nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.8 *Soient $\Omega_0 \in \mathcal{U}_{ad}$, Ω un domaine borné convexe, tous deux voisinages de 0, et $f \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, et soit $(\Omega^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de domaines fortement convexes telle que $\Omega_k \subset \Omega$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et que $(\Omega^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers Ω au sens de (2.11). Alors, il existe une constante $C > 0$, telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, on ait*

$$\left| \int_{\Omega_\varepsilon^k} f(x) dx - \int_{\Omega_\varepsilon} f(x) dx \right| \leq C \varepsilon \|f\|_{W^{1,1}(D)} d^H(\overline{\Omega}^k, \overline{\Omega}),$$

où $\Omega_\varepsilon^k = \Omega_0 + \varepsilon \Omega^k$ et $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon \Omega$.

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que Ω_0 soit étoilé par rapport à la boule $B(0, r)$ et soit $B(0, R) \subseteq D$ une boule choisie suffisamment grande pour que

$$\Omega_0 + \varepsilon \Omega \subset B(0, R) \text{ pour tout } \varepsilon \in [0, 1].$$

D'après le Lemme 2.2, Ω_ε et Ω_ε^k sont des domaines étoilés par rapport à la boule $B(0, r)$ pour tout ε et k . Désignons respectivement par J_ε et J_ε^k les fonctions jauge associées. En appliquant la formule de changement de variable pour les coordonnées polaires [42], on a alors pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\Omega_\varepsilon} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \int_{S^{n-1}} \chi_{\Omega_\varepsilon}(\rho\omega) f(\rho\omega) \rho^{n-1} d\rho d\omega.$$

D'après la proposition 2.1, on a $\Omega_\varepsilon = \{J_\varepsilon < 1\}$, donc,

$$\chi_{\Omega_\varepsilon}(\rho\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \rho\omega \in \Omega_\varepsilon \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1, & J_\varepsilon(\rho\omega) < 1 \\ 0, & J_\varepsilon(\rho\omega) \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \rho < \frac{1}{J_\varepsilon(\omega)} \\ 0, & \rho \geq \frac{1}{J_\varepsilon(\omega)} \end{cases} = \chi_{[0, \frac{1}{J_\varepsilon(\omega)}]}(\rho).$$

D'où,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{J_\varepsilon(\omega)}} \int_{S^{n-1}} f(\rho\omega) \rho^{n-1} d\rho d\omega.$$

De même, on a

$$\int_{\Omega_\varepsilon^k} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{J_\varepsilon^k(\omega)}} \int_{S^{n-1}} f(\rho\omega) \rho^{n-1} d\rho d\omega.$$

Posons alors

$$I_\varepsilon^k(f) = \int_{\Omega_\varepsilon} f(x) dx - \int_{\Omega_\varepsilon^k} f(x) dx.$$

On a donc

$$I_\varepsilon^k(f) = \int_{S^{n-1}} \int_{\frac{1}{J_\varepsilon^k(\omega)}}^{\frac{1}{J_\varepsilon(\omega)}} f(\rho\omega) \rho^{n-1} d\rho d\omega.$$

Ceci nous permet d'estimer $I_\varepsilon^k(f)$ de la manière suivante :

$$|I_\varepsilon^k(f)| \leq \int_{S^{n-1}} \left| \frac{J_\varepsilon(\omega) - J_\varepsilon^k(\omega)}{J_\varepsilon(\omega) J_\varepsilon^k(\omega)} \right| \sup_{\rho \in [\frac{1}{J_\varepsilon^k(\omega)}, \frac{1}{J_\varepsilon(\omega)}]} |f(\rho\omega) \rho^{n-1}| d\omega. \quad (2.12)$$

D'autre part, d'après le Lemme 2.6, on a $\Omega^k \subset \Omega$ et par suite

$$B(0, r) \subset \Omega_\varepsilon^k \subset \Omega_\varepsilon \subset B(0, R), \text{ pour tout } \varepsilon \text{ et } k.$$

Il découle alors de la Proposition 2.1 que

$$J_{B(0,R)} \leq J_\varepsilon \leq J_\varepsilon^k \leq J_{B(0,r)}.$$

Or, $J_{B(0,r)}(x) = \frac{\|x\|}{r}$ et $J_{B(0,R)}(x) = \frac{\|x\|}{R}$ (voir [59, 86]), (2.12) devient alors :

$$|I_\varepsilon^k(f)| \leq R^2 \int_{S^{n-1}} |J_\varepsilon(\omega) - J_\varepsilon^k(\omega)| \sup_{\rho \in [r,R]} |f(\rho\omega)\rho^{n-1}| d\omega.$$

En utilisant le fait que Ω_ε et Ω_ε^k sont des domaines étoilés par rapport à $B(0, r)$, que $\Omega_\varepsilon^k \subseteq \Omega_\varepsilon$, le Lemme 2.7 et le Lemme 2.4, on obtient

$$\sup_{S^{n-1}} |J_\varepsilon - J_\varepsilon^k| \leq \frac{1}{r^2} d^H(\overline{\Omega}_\varepsilon^k, \overline{\Omega}_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{r^2} d^H(\overline{\Omega}^k, \overline{\Omega}).$$

Par suite,

$$|I_\varepsilon^k(f)| \leq \frac{R^2 \varepsilon}{r^2} d^H(\overline{\Omega}^k, \overline{\Omega}) \int_{S^{n-1}} \sup_{\rho \in [r,R]} |f(\rho\omega)\rho^{n-1}| d\omega.$$

Ensuite, en appliquant le Lemme 1.1 à la fonction $\rho \mapsto f(\rho\omega)\rho^{n-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} |I_{\varepsilon,k}(f)| &\leq \frac{R^2 \varepsilon}{r^2} d^H(\overline{\Omega}^k, \overline{\Omega}) \int_{S^{n-1}} \int_r^R \left(|f(\rho\omega)| \left(\frac{\rho^{n-1}}{R-r} + (n-1)\rho^{n-2} \right) + |\nabla f(\rho\omega)| \rho^{n-1} \right) d\rho d\omega \\ &\leq \frac{R^2 \varepsilon}{r^2} d^H(\overline{\Omega}^k, \overline{\Omega}) \int_{r \leq |x| \leq R} \left(\frac{|f(x)|}{R-r} + \frac{n-1}{|x|} |f(x)| + |\nabla f(x)| \right) dx \\ &\leq \frac{R^2 \varepsilon}{r^2} d^H(\overline{\Omega}^k, \overline{\Omega}) \left(\frac{1}{R-r} + \frac{n-1}{r} + 1 \right) \int_{r \leq |x| \leq R} (|f(x)| + |\nabla f(x)|) dx \\ &\leq \frac{R^2 \varepsilon}{r^2} d^H(\overline{\Omega}^k, \overline{\Omega}) \left(\frac{1}{R-r} + \frac{n-1}{r} + 1 \right) \|f\|_{W^{1,1}(D)}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme. ■

Nous allons maintenant donner la preuve du résultat principal de ce chapitre dans le cas général.

Preuve du Théorème 2.1 dans le cas où Ω est convexe. Soient $\Omega_0 \in \mathcal{U}_{ad}$, Ω un domaine borné convexe, tous deux voisinages de 0, et $f \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. D'après le Lemme 2.6, il existe une suite $(\Omega^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'ouverts bornés suffisamment réguliers et fortement convexes telle que $\Omega^k \subset \Omega$ et $d^H(\overline{\Omega}^k, \overline{\Omega}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{J}(\Omega_0 + \varepsilon\Omega) - \mathcal{J}(\Omega_0)}{\varepsilon} - \int_{\partial\Omega_0} f(x) P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma(x) &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} f(x) dx - \int_{\Omega_\varepsilon^k} f(x) dx \right) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega_\varepsilon^k} f(x) dx - \int_{\Omega_0} f(x) dx \right) - \int_{\partial\Omega_0} f(x) P_{\Omega^k}(\nu_0)(x) d\sigma(x) \end{aligned}$$

$$+ \int_{\partial\Omega_0} f(x) \left(P_{\Omega^k}(\nu_0(x)) - P_{\Omega}(\nu_0(x)) \right) d\sigma(x). \quad (2.13)$$

Soit $\delta > 0$. D'après le lemme 2.8, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $k \geq k_0$ et pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, on a

$$\frac{1}{\varepsilon} \left| \left(\int_{\Omega^\varepsilon} f(x) dx - \int_{\Omega_k^\varepsilon} f(x) dx \right) \right| \leq \delta. \quad (2.14)$$

D'autre part, en utilisant la formule donnée dans la Proposition 1.10, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega_0} f(x) (P_{\Omega_k}(\nu_0(x)) - P_{\Omega}(\nu_0(x))) d\sigma(x) \right| &\leq \int_{\partial\Omega_0} |f| d\sigma \sup_{x \in S^{n-1}} |P_{\Omega_k}(x) - P_{\Omega}(x)| \\ &\leq d^H(\overline{\Omega_k}, \overline{\Omega}) \int_{\partial\Omega_0} |f| d\sigma. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.6, on a $d^H(\overline{\Omega_k}, \overline{\Omega}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. Ainsi, pour ce même $\delta > 0$, il existe $k_1 \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $k \geq k_1$, on ait

$$\left| \int_{\partial\Omega_0} f(x) (P_{\Omega_k}(\nu_0(x)) - P_{\Omega}(\nu_0(x))) d\sigma(x) \right| < \delta.$$

En prenant maintenant $k_2 = \max\{k_0, k_1\}$, comme Ω_{k_2} est fortement convexe, d'après la première partie de la démonstration, il existe ε_δ , tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_\delta[$, on ait

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega_k^\varepsilon} f(x) dx - \int_{\Omega_0} f(x) dx \right) - \int_{\partial\Omega_0} f(x) (P_{\Omega_{k_2}} - P_{\Omega_0})(\nu_0(x)) d\sigma(x) \right| < \delta. \quad (2.15)$$

Par suite, en utilisant (2.14) et (2.15), on obtient, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_\delta[$,

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega^\varepsilon} f(x) dx - \int_{\Omega_0} f(x) dx \right) - \int_{\partial\Omega_0} f(x) (P_{\Omega} - P_{\Omega_0})(\nu_0(x)) d\sigma(x) \right| < 3\delta.$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 2.1 dans le cas où Ω est convexe et Ω_0, Ω sont voisinages de 0. ■

Nous allons maintenant démontrer le Théorème 2.1 dans le cas où Ω_0 et Ω ne sont pas nécessairement voisinages de 0. Pour cela, nous aurons besoin du résultat suivant dont on peut trouver la preuve dans [57], par exemple.

Lemme 2.9 Soit $(\Psi_\varepsilon)_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ une famille de C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n , telle que $\Psi_0(x) = x$, $(\varepsilon, x) \mapsto \Psi_\varepsilon(x)$ et $(\varepsilon, y) \mapsto \Psi_\varepsilon^{-1}(y)$ sont de classe C^1 sur $[0, \varepsilon_0] \times \mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $f \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(\Phi_\varepsilon(x)) - f(x)}{\varepsilon} = \nabla f(x) \cdot \frac{d}{d\varepsilon} \Phi_\varepsilon(x) \Big|_{\varepsilon=0^+} \quad \text{dans } L_{loc}^1(\mathbb{R}^n).$$

Afin de démontrer le Théorème 2.1 dans le cas général où Ω_0 et Ω ne sont pas des voisinages de 0, Nous aurons besoin du résultat suivant.

Théorème 2.2 Soit $\Omega_0 \in \mathcal{U}_{ad}$, Ω un domaine convexe, tous deux voisinages de 0, et soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ et $f \in W^{1,1}(D)$ où D est un domaine borné suffisamment grand et

régulier, tel que $\Omega_0 + a + \varepsilon(\Omega + b) \subset D$ pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Alors, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}(\Omega_0 + a + \varepsilon(\Omega + b)) - \mathcal{J}(\Omega_0 + a)}{\varepsilon} = \int_{\partial(\Omega_0 + a)} P_{\Omega + b}(\nu_{\Omega_0 + a}(x)) f(x) d\sigma. \quad (2.16)$$

où $\nu_{\Omega_0 + a}$ est la normale à $\partial(\Omega_0 + a)$ dirigée vers l'extérieure de $\Omega_0 + a$.

Démonstration. Par changement de variable, on a

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{J}(a + \Omega_0 + \varepsilon(b + \Omega)) - \mathcal{J}(a + \Omega_0)}{\varepsilon} &= \frac{\mathcal{J}(a + \varepsilon b + \Omega_\varepsilon) - \mathcal{J}(a + \Omega_0)}{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} f(a + \varepsilon b + x) dx - \int_{\Omega_0} f(a + x) dx \right). \end{aligned}$$

Notons par $f_\varepsilon = f(a + \varepsilon b + x)$, $f_0 = f(a + x)$, alors on a

$$\frac{\mathcal{J}(a + \Omega_0 + \varepsilon(b + \Omega)) - \mathcal{J}(a + \Omega_0)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(x) dx - \int_{\Omega_0} f_0(x) dx \right).$$

Tout d'abord, d'après la Proposition 2.9, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f_\varepsilon - f_0}{\varepsilon} = \nabla f(x + a) \cdot b = \operatorname{div}(f(x + a)b) \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Considérons ainsi la décomposition

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon - f_0)(x) - \operatorname{div}(f(x + a)b)(x) \right) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}(f(x + a)b)(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} f(a + x)(x) dx - \int_{\Omega_0} f(a + x)(x) dx \right), \end{aligned}$$

On a

$$\left| \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon - f_0)(x) - \operatorname{div}(f(x + a)b)(x) \right) dx \right| \leq \int_D \left| \frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon - f_0)(x) - \operatorname{div}(f(x + a)b)(x) \right| dx.$$

Donc,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon - f_0)(x) - \operatorname{div}(f(x + a)b)(x) \right) dx \right| = 0. \quad (2.17)$$

D'autre part, comme la convergence au sens de Hausdorff de $\bar{\Omega}_\varepsilon$ vers $\bar{\Omega}_0$ entraîne que $\chi_{\Omega_\varepsilon}$ converge presque partout vers χ_{Ω_0} quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, alors en utilisant le théorème de Lebesgue [20], on a

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}(f(x + a)b)(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(f(x + a)b)(x) dx. \quad (2.18)$$

Ainsi, en utilisant les convergences (2.17) et (2.18) et en appliquant le Théorème 2.1 à la fonction $f(a + x)$, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}(a + \Omega_0 + \varepsilon(b + \Omega)) - \mathcal{J}(a + \Omega_0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} f(x + a) P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma(x) + \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(f(x + a)b) dx.$$

Par application de la formule de la divergence, on a

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}(a + \Omega_0 + \varepsilon(b + \Omega)) - \mathcal{J}(a + \Omega_0)}{\varepsilon} &= \int_{\partial\Omega_0} f(x + a) P_{\Omega}(\nu_0(x)) d\sigma + \int_{\partial\Omega_0} f(x + a) b \cdot \nu_0(x) d\sigma \\
 &= \int_{\partial\Omega_0} f(x + a) P_{b+\Omega}(\nu_0(x)) d\sigma \\
 &= \int_{\partial(a+\Omega_0)} f(x) P_{b+\Omega}(\nu_{a+\Omega_0}(x)) d\sigma.
 \end{aligned}$$

■

Démonstration du Théorème 2.1 dans le cas général Soient $\Omega_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ et Ω un domaine borné convexe, qui ne sont pas nécessairement des voisinages de 0. Soit $c \in \Omega$ et $c_0 \in \Omega_0$. Les domaines $\Sigma_0 = \Omega_0 - c_0$ et $\Sigma = \Omega - c$ sont alors des voisinages de 0. En appliquant la formule (2.16) en prenant $a = c_0$ et $b = c$, on obtient

$$\frac{\mathcal{J}(\Sigma_0 + a + t(\Sigma + b)) - \mathcal{J}(\Sigma_0 + a)}{t} = \frac{\mathcal{J}(\Omega_0 + t\Omega) - \mathcal{J}(\Omega_0)}{t}.$$

Par conséquent, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}(\Omega_0 + \varepsilon\Omega) - \mathcal{J}(\Omega_0)}{\varepsilon} = \int_{\partial(\Omega_0)} f(x) P_{\Omega}(\nu_{\Omega_0}(x)) d\sigma(x),$$

ce qui termine la preuve du Théorème 2.1. ■

Remarque 2.4 Le résultat de ce théorème peut être vu comme une généralisation de la formule connue dans la théorie de Brunn-Minkowski [59, 86, 92] au cas des domaines étoilés. En effet, dans la théorie de Brunn-Minkowski, la formule suivante est bien connue :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(\overline{\Omega_0} + \varepsilon\overline{\Omega}) - V(\overline{\Omega_0})}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} P_{\Omega}(\nu_0(x)) d\sigma(x), \quad (2.19)$$

où V est la mesure de Lebesgue et Ω_0, Ω sont des domaines bornés convexes. Ainsi, la formule (2.9) du Théorème 2.1 est une extension de la formule (2.19) au cas des domaines étoilés.

Le dernier résultat de ce chapitre est une formule de dérivation de forme pour une fonctionnelle coût où la fonction f dépend de la famille de domaines.

Formule générale de calcul de la dérivée de forme

Nous allons maintenant établir un résultat de calcul de la dérivée de forme par rapport à la famille \mathcal{U}_{ad} d'une fonctionnelle coût \mathcal{J} qui fait intervenir une fonction f_{Ω} qui dépend du domaine Ω . Cette situation est fréquente dans les applications.

Théorème 2.3 Soient $\Omega_0 \in \mathcal{U}_{ad}$, Ω un domaine convexe borné et $\Omega_{\varepsilon} = \Omega_0 + \varepsilon\Omega$. Soit $(f_{\varepsilon})_{\varepsilon}$ une famille de fonctions de $L^1(D)$ telle que $f_0 \in W^{1,1}(D)$ et soit h une fonction telle

que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f_\varepsilon - f_0}{\varepsilon} = h \text{ dans } L^1(D).$$

Considérons la fonction :

$$I(\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(x) dx.$$

Alors, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{I(\varepsilon) - I(0)}{\varepsilon} = \int_{\Omega_0} h(x) dx + \int_{\partial\Omega_0} f_0(x) P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma(x), \quad (2.20)$$

où ν_0 est la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0 .

Démonstration. Soient $\Omega_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ et Ω un domaine convexe borné. Alors, on a

$$\frac{I(\varepsilon) - I(0)}{\varepsilon} = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon - f_0)(x) - h(x) \right) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} h(x) dx + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} f_0(x) dx - \int_{\Omega_0} f_0(x) dx \right),$$

Par hypothèse, on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(f_\varepsilon - f_0)}{\varepsilon} = h$ dans $L^1(D)$. Or,

$$\left| \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon - f_0)(x) - h(x) \right) dx \right| \leq \int_D \left| \frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon - f_0)(x) - h(x) \right| dx.$$

Donc,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon - f_0)(x) - h(x) \right) dx \right| = 0. \quad (2.21)$$

D'autre part, comme la convergence au sens de Hausdorff de $\overline{\Omega_\varepsilon}$ vers $\overline{\Omega_0}$ entraîne que $\chi_{\Omega_\varepsilon}$ converge presque partout vers χ_{Ω_0} quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, alors en utilisant le théorème de Lebesgue [20], on a

$$\int_{\Omega_\varepsilon} h(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_0} h(x) dx. \quad (2.22)$$

Ainsi, en utilisant les convergences (2.21) et (2.22) et en appliquant le Théorème 2.1 à la fonction f_0 , on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{I(\varepsilon) - I(0)}{\varepsilon} = \int_{\Omega_0} h(x) dx + \int_{\partial\Omega_0} f_0(x) P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma(x),$$

d'où le résultat. ■

Dérivation de forme de fonctionnelles coût surfaciques par rapport aux domaines étoilés

Sommaire

3.1	Position du problème	47
3.2	Existence de la dérivée de forme	48

Dans ce chapitre, nous abordons une question importante, à savoir celle de l'existence de la dérivée de forme pour une fonctionnelle coût surfacique. Nous établissons un résultat d'existence de la dérivée de forme de fonctionnelles coût surfaciques pour une famille d'ouverts étoilés, en utilisant une déformation de type Minkowski par des convexes. Ceci en explicitant sa dérivée de forme via les fonctions support. Celle-ci se base sur quelques propriétés géométriques sur la somme de Minkowski d'un domaine étoilé et d'un domaine convexe ainsi qu'un résultat de continuité uniforme de l'opérateur trace. Par ailleurs, l'idée de la démonstration est d'établir dans un premier lieu une formule dans le cas d'une déformation par des fortement convexes. Ensuite, nous allons présenter une extension de cette formule pour cette même fonctionnelle dans le cas général.

3.1 Position du problème

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'existence de la dérivée de forme d'une fonctionnelle coût surfacique du type

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{K}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma(x)$$

pour une classe d'ouverts étoilé en utilisant une déformation dy type Minkowski par des convexes, où g est une fonction définie sur \mathbb{R}^n . Il s'agit en fait de proposer une nouvelle formule de dérivée de forme de ce type de fonctionnelles via les fonctions support. Pour ce faire, soit D un ouvert convexe borné assez régulier et soient $\Omega_0 \subset D$ un ouvert borné étoilé par rapport à une boule centrée en 0 et Ω un ouvert convexe borné de D , tous les deux de classe C^2 . Considérons une variation du domaine Ω_0 à l'aide de Ω via une déformation du type Minkowski sous la forme :

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega, \quad \varepsilon \in]0, 1[. \tag{3.1}$$

Notre objectif est de montrer l'existence de la dérivée de l'application :

$$\varepsilon \in [0, 1] \mapsto \mathcal{K}(\Omega_\varepsilon) = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x) d\sigma_\varepsilon(x)$$

en 0^+ , tout en explicitant son expression via les fonctions support.

3.2 Existence de la dérivée de forme

Dans ce paragraphe nous commençons par établir un résultat d'estimation uniforme très utile dans le cas de déformations de domaines étoilés par des fortement convexes, qui se base sur les deux lemmes suivants.

Lemme 3.1 *Soit A , B et C des ouverts bornés non vide de \mathbb{R}^n , tels que $\overline{B} \subset C$, alors on a*

$$\overline{A+B} \subset A+C. \quad (3.2)$$

Démonstration. Soit A , B et C des ouverts bornés non vide de \mathbb{R}^n . Alors, on a

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B},$$

or par hypothèse $\overline{B} \subset C$, donc

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A} + C.$$

Ainsi, une condition suffisante pour avoir l'inclusion (3.2) est de montrer que

$$\overline{A} + C \subset A + C.$$

Ce qui revient alors à démontrer que $\partial A + C \subset A + C$, car on a

$$\overline{A} + C = (A \cup \partial A) + C = (A + C) \cup (\partial A + C).$$

Soit $x \in \partial A + C$, il existe alors $a \in \partial A$ et $c \in C$, tels que $x = a + c$. Comme C est ouvert, alors il existe $r > 0$, tel que $B(c, r) \subset C$. D'autre part, puisque $a \in \partial A$, alors $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$. Soit ainsi $b \in B(a, r) \cap A$ et soit $y = b - a$, donc

$$y \in B(a, r) - \{a\} = B(0, r). \quad (3.3)$$

Par suite, en utilisant (3.3) et le fait que $a + y = b \in A$ et $B(c, r) \subset C$, on obtient

$$x = a + c = a + y + c - y = b + c - y \in A + c - B(0, r) \subset A + C.$$

D'où $\overline{A} + C \subset A + C$. D'où le résultat. ■

Nous aurons également besoin d'un résultat de continuité de l'application trace, qui fait l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.2 Soient D un ouvert borné de \mathbb{R}^n et $A \subset D$ un domaine étoilé par rapport à la boule $B(0, r)$ (avec $r > 0$), alors il existe une constante $c > 0$ qui ne dépend que de r et de D , telle que

$$\|g\|_{L^2(\partial A)} \leq c(D, r)\|g\|_{H^1(A)}, \quad \forall g \in H^1(A). \quad (3.4)$$

Démonstration. Soient $A \subset D$ un domaine étoilé par rapport à la boule $B(0, r)$, alors d'après la Lemme 2.1 on a

$$\langle \nu_{\partial A}(x), x \rangle \geq r, \quad \text{pour presque tout } x \in \partial A, \quad (3.5)$$

où $\nu_{\partial A}$ est le vecteur normal à ∂A dirigé vers l'extérieur de A .

Soit $g \in H^1(A)$, en utilisant l'inégalité (3.5), on peut écrire

$$\|g\|_{L^2(\partial A)}^2 = \int_{\partial A} |g(x)|^2 d\sigma(x) = \frac{1}{r} \int_{\partial A} r |g(x)|^2 d\sigma(x) \leq \frac{1}{r} \int_{\partial A} \langle \nu_{\partial A}(x), x \rangle |g(x)|^2 d\sigma(x),$$

puis en appliquant la formule de Green, on aura

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2(\partial A)}^2 &\leq \frac{1}{r} \int_{\partial A} \langle \nu_{\partial A}(x), x \rangle |g(x)|^2 d\sigma(x) \\ &= \frac{1}{r} \int_A \operatorname{div}(|g(x)|^2 \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}) d\sigma(x) \\ &= \frac{n}{r} \int_A |g(x)|^2 d\sigma(x) + \frac{2}{r} \int_A g \langle \nabla g(x), \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle d\sigma(x). \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\|g\|_{L^2(\partial A)}^2 \leq \frac{n}{r} \|g\|_{L^2(A)}^2 + \frac{2}{r} \sup_{y \in A} \|y\| \int_A |g(x)| \|\nabla g(x)\| d\sigma(x).$$

Ensuite en appliquant l'inégalité de Young et en utilisant le fait que $A \subset D$, on aura

$$\|g\|_{L^2(\partial A)}^2 \leq \frac{n}{r} \|g\|_{L^2(A)}^2 + \frac{2}{r} \sup_{y \in D} \|y\| (\|g\|_{L^2(A)}^2 + \|\nabla g\|_{L^2(A)}^2).$$

Donc

$$\|g\|_{L^2(\partial A)}^2 \leq C(n, r, D) \|g\|_{H^1(A)},$$

avec

$$C(n, r, D) = \sqrt{\frac{n}{r} + \frac{2}{r} \sup_{y \in D} \|y\|}.$$

■

En utilisant maintenant le fait qu'il existe une suite $(\Omega^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'ouverts bornés suffisamment réguliers et fortement convexes (voir par exemple [10, 86]) telle que $\bar{\Omega} \subset \Omega^k$ et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d^H(\bar{\Omega}^k, \bar{\Omega}) = 0, \quad (3.6)$$

nous démontrons maintenant le résultat clés de l'existence de la dérivée de forme de

fonctionnelles surfaciques.

Proposition 3.1 *Soit D un ouvert convexe borné assez régulier suffisamment large. Soit g une fonction de $H^1(D)$, alors il existe une constante $C = C(g, D, r) > 0$ indépendante de $\varepsilon \in [0, 1]$ et de $k \in \mathbb{N}$, telle que*

$$\left| \int_{\partial\Omega_{\varepsilon,k}} g(x) d\sigma - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x) d\sigma \right| \leq C(g, D, r) \varepsilon d^H(\overline{\Omega^k}, \overline{\Omega}),$$

où $\Omega_\varepsilon^k = \Omega_0 + \varepsilon\Omega^k$ et $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega$.

Démonstration. Soient $\Omega_0 \subset D$ un ouvert borné étoilé par rapport à une boule $B(0, r)$, $r > 0$ et Ω un ouvert convexe borné de D , tous les deux de classe C^2 . Soient $\varepsilon \in [0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}$, définissons les domaines suivants :

$$\Omega_\varepsilon^k = \Omega_0 + \varepsilon\Omega^k \text{ et } \Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega.$$

Considérons maintenant le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } v \text{ solution de :} \\ -\Delta v + v = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon^k \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}, \\ \partial_\nu v = g \quad \text{sur } \partial(\Omega_\varepsilon^k \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}), \end{cases} \quad (3.7)$$

Par construction de la suite $(\Omega^k)_{k \in \mathbb{N}}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$:

$$\overline{\varepsilon\Omega} \subset \varepsilon\Omega^k. \quad (3.8)$$

Ainsi en utilisant (3.8), puis en appliquant le Lemme 3.1 aux domaines Ω_0 , $\varepsilon\Omega$ et $\varepsilon\Omega^k$ on obtient

$$\overline{\Omega_\varepsilon} = \overline{\Omega_0 + \varepsilon\Omega} \subset \Omega_\varepsilon^k = \Omega_0 + \varepsilon\Omega^k, \quad \forall (\varepsilon, k) \in [0, 1] \times \mathbb{N}.$$

Donc, les bords $\partial\Omega_\varepsilon^k$ et $\partial\Omega_\varepsilon$ ne se touchent pas. Ainsi le problème (3.7) est bien posé. Comme $g \in H^1(D)$ alors par application du Théorème de Lax-Milgram le problème (3.7) admet une solution unique, qu'on notera par $\vartheta_{\varepsilon,k} \in H^1(\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon)$. Montrons alors qu'il existe une constante c indépendante de ε et k telle que

$$\left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon^k} g(x) d\sigma - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x) d\sigma \right| \leq c d^H(\overline{\Omega_\varepsilon^k}, \overline{\Omega}).$$

En effet, en utilisant le fait que $\vartheta_{\varepsilon,k}$ est solution du problème (3.7), on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon^k} g(x) d\sigma - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x) d\sigma \right| &= \left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon^k} \partial_\nu \vartheta_{\varepsilon,k}(x) d\sigma - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \partial_\nu \vartheta_{\varepsilon,k}(x) d\sigma \right| \\ &= \left| \int_{\partial(\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon)} \partial_\nu \vartheta_{\varepsilon,k}(x) d\sigma \right|, \end{aligned}$$

puis en appliquant la formule de Green, on aura

$$\left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon^k} g(x)d\sigma - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x)d\sigma \right| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon} \operatorname{div}(\nabla \vartheta_{\varepsilon,k})(x)dx \right| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon} \Delta \vartheta_{\varepsilon,k}(x)dx \right|.$$

Or $\Delta \vartheta_{\varepsilon,k} = \vartheta_{\varepsilon,k}$ dans $\overline{\Omega_\varepsilon^k} \setminus \Omega_\varepsilon$, alors on a

$$\left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon^k} g(x)d\sigma - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x)d\sigma \right| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon} \vartheta_{\varepsilon,k}(x)dx \right|.$$

D'après le Lemme 2.2, les domaines Ω_ε^k et Ω_ε sont étoilés par rapport à la boule $B(0, r)$. De plus, comme l'ouvert D est choisi assez grand, alors on a

$$B(0, r) \subset \Omega_\varepsilon \subseteq \Omega_\varepsilon^k \subset D, \quad \forall (\varepsilon, k) \in [0, 1[\times \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

Ainsi en utilisant la Proposition 4.1, il existera une constante $\sigma_0 = \sigma_0(r, D) > 0$, telle que pour tout ε et k , les ouvert Ω_ε^k et Ω_ε vérifient la condition du σ_0 -cône. Donc, il existe une extension de $\vartheta_{\varepsilon,k}$ à D , qu'on notera par $\tilde{\vartheta}_{\varepsilon,k} \in H^1(D)$ et une constante $L_{\sigma_0} > 0$ indépendante de ε et k (voir D. Chenais [27]), telle que

$$\|\tilde{\vartheta}_{\varepsilon,k}\|_{H^1(D)} \leq L_{\sigma_0} \|\vartheta_{\varepsilon,k}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon)}.$$

On aura donc

$$\left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon^k} g(x)d\sigma - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x)d\sigma \right| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon} \vartheta_{\varepsilon,k}(x)dx \right| \leq \int_{\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon} |\tilde{\vartheta}_{\varepsilon,k}| dx.$$

En appliquant par suite le Lemme 2.8 aux ouverts Ω_ε^k et Ω_ε et à la fonction $\tilde{\vartheta}_{\varepsilon,k}$, il existe alors une constante $C > 0$ indépendante de ε et k telle qu'on a

$$\left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon^k} g(x)d\sigma - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x)d\sigma \right| \leq C d^H(\overline{\Omega_\varepsilon^k}, \overline{\Omega_\varepsilon}) \|\tilde{\vartheta}_{\varepsilon,k}\|_{W^{1,1}(D)}.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon^k} g(x)d\sigma - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x)d\sigma \right| &\leq C \sqrt{\lambda(D)} d^H(\overline{\Omega_\varepsilon^k}, \overline{\Omega_\varepsilon}) \|\tilde{\vartheta}_{\varepsilon,k}\|_{H^1(D)} \\ &\leq L_{\sigma_0} C \sqrt{\lambda(D)} d^H(\overline{\Omega_\varepsilon^k}, \overline{\Omega_\varepsilon}) \|\vartheta_{\varepsilon,k}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Pour conclure il reste à estimer uniformément la norme $\|\vartheta_{\varepsilon,k}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon)}$ par rapport à ε et k . Comme $\vartheta_{\varepsilon,k}$ est solution du problème (3.7), alors en prenant $\varphi = \vartheta_{\varepsilon,k}$ comme fonction test dans la formulation variationnelle, on obtient

$$\|\vartheta_{\varepsilon,k}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon)}^2 = \int_{\partial(\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon)} \partial_\nu \vartheta_{\varepsilon,k} \vartheta_{\varepsilon,k} d\sigma.$$

Ainsi en utilisant le fait que $\partial_\nu \vartheta_{\varepsilon,k} = g$ sur $\partial(\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon)$, on aura

$$\begin{aligned} \|\vartheta_{\varepsilon,k}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon^k} g \vartheta_{\varepsilon,k} d\sigma + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g \vartheta_{\varepsilon,k} d\sigma \\ &\leq \|g\|_{L^2(\partial\Omega_\varepsilon^k)} \|\vartheta_{\varepsilon,k}\|_{L^2(\partial\Omega_\varepsilon^k)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega_\varepsilon)} \|\vartheta_{\varepsilon,k}\|_{L^2(\partial\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Comme les domaines Ω_ε^k et Ω_ε vérifient les conditions du Lemme 3.2, alors les applications traces respectives de $H^1(\Omega_\varepsilon^k)$ dans $L^2(\partial\Omega_\varepsilon^k)$ et de $H^1(\Omega_\varepsilon)$ dans $L^2(\partial\Omega_\varepsilon)$ sont uniformément continues par rapport à ε et k . Donc, il existe une constante $M > 0$, telle que

$$\begin{aligned} \|\vartheta_{\varepsilon,k}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon)}^2 &\leq M \|g\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^k)} \|\tilde{\vartheta}_{\varepsilon,k}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^k)} + M \|g\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|\tilde{\vartheta}_{\varepsilon,k}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq 2M \|g\|_{H^1(D)} \|\tilde{\vartheta}_{\varepsilon,k}\|_{H^1(D)} \\ &\leq 2ML_{\sigma_0} \|g\|_{H^1(D)} \|\vartheta_{\varepsilon,k}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout ε et k , on a

$$\|\vartheta_{\varepsilon,k}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^k \setminus \Omega_\varepsilon)} \leq 2ML_{\sigma_0} \|g\|_{H^1(D)}.$$

On en déduit ainsi, qu'il existe une constante $C > 0$, telle qu'on a

$$\left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon^k} g(x) d\sigma - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x) d\sigma \right| \leq C \|g\|_{H^1(D)} d^H(\overline{\Omega_\varepsilon^k}, \overline{\Omega_\varepsilon}), \quad \forall \varepsilon \in [0, 1[\quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Finalement d'après le Lemme 2.7, on a

$$d^H(\overline{\Omega_\varepsilon^k}, \overline{\Omega_\varepsilon}) \leq \varepsilon d^H(\overline{\Omega^k}, \overline{\Omega}).$$

D'où le résultat. ■

Remarque 3.1 Notons que le résultat de la Proposition 3.1 reste valable de manière générale pour deux ouverts ω et Ω supposés étoilés par rapport à une boule $B(0, r)$, telles qu'ils sont inclus dans un ouvert borné fixé D et que $\overline{\omega} \subset \Omega$. Dans ce cas on aura l'estimation suivante :

$$\left| \int_{\partial\omega} g(x) d\sigma - \int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma \right| \leq C(r, D) \|g\|_{H^1(D)} d^H(\overline{\omega}, \overline{\Omega}).$$

Pour énoncer le résultat principal de ce chapitre, rappelons tout d'abord la définition de la courbure moyenne.

Définition 3.1 Soit Ω_0 un ouvert, borné de classe \mathcal{C}^2 . On définit la courbure moyenne de $\partial\Omega_0$ par :

$$\mathcal{H} = \operatorname{div}_\Gamma \nu_0 := \operatorname{div} \mathcal{N}_0 - \langle \nabla \mathcal{N}_0 \cdot \nu_0, \nu_0 \rangle, \quad \text{sur } \Gamma_0.$$

où \mathcal{N}_0 est une extension de classe \mathcal{C}^1 de ν_0 .

Remarque 3.2 Cette définition ne dépend pas de l'extension utilisée (voir Proposition 5.4.8, [57]).

Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 3.1 *Soient $\Omega_0 \subset D$ un ouvert borné de classe C^2 et étoilé par rapport à une boule centrée en 0 et Ω un ouvert convexe borné de D contenant 0. Soit $g \in H^2(D)$, alors on a la formule*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{K}(\Omega_0 + \varepsilon\Omega) - \mathcal{K}(\Omega_0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} + \mathcal{H}g \right)(x) P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma. \quad (3.10)$$

où ν_0 est la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0 et \mathcal{H} est la courbure moyenne de $\partial\Omega_0$.

Démonstration. La démonstration de ce résultat se fait en deux étapes : nous commençons tout d'abord par traiter le cas où Ω est fortement convexe, puis nous abordons le cas général, où Ω est convexe.

Cas où Ω est fortement convexe.

D'après le Lemme 2.5, il existe un C^1 -diffeomorphisme Φ_ε qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\Phi_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}, \quad \frac{d}{d\varepsilon} \Phi_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} = a \text{ et } \Phi_\varepsilon(\Omega_0) = \Omega_0 + \varepsilon\Omega,$$

où

$$a := J_{\Omega_0}(x) \nabla P_\Omega \left(\nu_0 \left(\frac{x}{J_{\Omega_0}(x)} \right) \right).$$

Le problème du calcul de la dérivée se réduit alors au cas classique de déformations de Ω_0 par un diffeomorphisme ou, plus précisément, un homéomorphisme Lipschitz. Ainsi, d'après [85], nous avons la formule de dérivée de forme suivante :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{K}(\Omega_0 + \varepsilon\Omega) \Big|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} + \mathcal{H}g \right)(x) \langle a(x), \nu_0(x) \rangle d\sigma.$$

Ensuite d'après le Lemme 2.3 et le Lemme 2.4, on a

$$\langle a, \nu_0 \rangle = \langle a_0, \nu_0 \rangle = P_\Omega(\nu_0) \quad \text{dans } \partial\Omega_0.$$

Par conséquent, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{K}(\Omega_0 + \varepsilon\Omega) - \mathcal{K}(\Omega_0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} + \mathcal{H}g \right)(x) P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma.$$

Cas général, où Ω est convexe.

Posons $G = \frac{\partial g}{\partial \nu_0} + \mathcal{H}g$. On écrit alors la décomposition :

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{K}(\Omega_0 + \varepsilon\Omega) - \mathcal{K}(\Omega_0)}{\varepsilon} - \int_{\partial\Omega_0} G(x)P_\Omega(\nu_0(x))d\sigma(x) = \\ & \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x)dx - \int_{\partial\Omega_{\varepsilon,k}} g(x)dx \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\partial\Omega_{\varepsilon,k}} g(x)dx - \int_{\partial\Omega_0} g(x)dx \right) \\ & - \int_{\partial\Omega_0} G(x)P_{\Omega_k}(\nu_0(x))d\sigma(x) + \left(\int_{\partial\Omega_0} G(x)P_{\Omega_k}(\nu_0(x))d\sigma - \int_{\partial\Omega_0} G(x)P_\Omega(\nu_0(x))d\sigma \right), \end{aligned}$$

où $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega$ et $\Omega_\varepsilon^k = \Omega_0 + \varepsilon\Omega^k$.

En utilisant la formule (1.21) du Théorème 1.10, on a

$$\left| \int_{\partial\Omega_0} G(P_{\Omega_k}(\nu_0) - P_\Omega(\nu_0))d\sigma \right| \leq \int_{\partial\Omega_0} |G|d\sigma \sup_{x \in S^{n-1}} |P_{\Omega_k} - P_\Omega| \leq d^H(\overline{\Omega_k}, \overline{\Omega}) \int_{\partial\Omega_0} |G|d\sigma.$$

Soit $\delta > 0$. Comme $d^H(\overline{\Omega_k}, \overline{\Omega}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $k \geq k_0$, on ait

$$\left| \int_{\partial\Omega_0} G(x)(P_{\Omega_k}(\nu_0(x)) - P_\Omega(\nu_0(x)))d\sigma(x) \right| < \delta. \quad (3.11)$$

Aussi, d'après la Proposition 3.1, il existe $k_1 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $k \geq k_1$, on a

$$\frac{1}{\varepsilon} \left| \left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x)dx - \int_{\partial\Omega_{\varepsilon,k}} g(x)dx \right) \right| \leq \delta. \quad (3.12)$$

D'autre part soit $k_2 = \max\{k_0, k_1\}$, comme Ω_{k_2} est fortement convexe, d'après la première partie de la démonstration, il existe ε_δ , tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_\delta[$, on ait

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\partial\Omega_{\varepsilon,k_2}} g(x)dx - \int_{\partial\Omega_0} g(x)dx \right) - \int_{\partial\Omega_0} G(x)P_{\Omega_{k_2}}(\nu_0(x))d\sigma(x) \right| < \delta. \quad (3.13)$$

Ainsi d'après (3.12), (3.11) et (3.13), pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_\delta$, on a

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x)dx - \int_{\partial\Omega_0} g(x)dx \right) - \int_{\partial\Omega_0} G(x)P_\Omega(\nu_0(x))d\sigma(x) \right| < 3\delta.$$

Ce qui achève la preuve du Théorème. ■

En conséquence à ce résultat, nous démontrons le corollaire suivant, qui concerne le cas où la fonction g dépend du ε .

Corollaire 3.1 *Soient $\Omega_0 \subset D$ un ouvert borné de classe C^2 et étoilé par rapport à une boule centrée en 0 et Ω un ouvert convexe borné de D contenant 0. Soient $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ une famille de fonctions de $W^{1,1}(D)$, telle que $g_0 \in W^{2,1}(D)$ et $g \in W^{1,1}(D)$ une fonction telle que*

$$g = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} (g_\varepsilon - g_0) \text{ au sens de l'espace } W^{1,1}(D).$$

Considérons la fonctionnelle :

$$\varepsilon \in [0, 1] \mapsto F(\varepsilon) = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g_\varepsilon(x) dx.$$

Alors, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(\varepsilon) - F(0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} g(x) dx + \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial g_0}{\partial \nu_0} + \mathcal{H}g_0 \right)(x) P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma(x), \quad (3.14)$$

où ν_0 est la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0 .

Démonstration. Soient $\Omega_0 \subset D$ un ouvert borné de classe C^2 et étoilé par rapport à une boule centrée en 0 et Ω un ouvert convexe borné de D contenant 0. Soit $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, on a

$$\frac{F(\varepsilon) - F(0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon}(g_\varepsilon - g_0)(x) - g(x) \right) dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x) dx + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} g_0(x) dx - \int_{\partial\Omega_0} g_0(x) dx \right).$$

En utilisant la Proposition 4.2, il existe une constante $c > 0$ indépendante de ε , telle que

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon}(g_\varepsilon - g_0) - g \right) d\sigma \leq c \left\| \frac{1}{\varepsilon}(g_\varepsilon - g_0) - g \right\|_{W^{1,1}(D)}.$$

Ainsi, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{1}{\varepsilon}(g_\varepsilon - g_0) - g \right) d\sigma \right| = 0.$$

D'autre part, en utilisant le Lemme 2.2, les ouverts Ω_0 et Ω_ε sont étoilés par rapport à la boule $B(0, r)$, tels qu'ils sont inclus dans D . De plus, $\Omega_0 \subset \bar{\Omega}_0 \subset \Omega_\varepsilon$, $\forall \varepsilon \in]0, 1]$. En effet, comme Ω contient 0, alors il existe $r_0 > 0$, tel que $\bar{B}(0, r_0/2) \subset \Omega$. Ainsi

$$\Omega_0 \subset \Omega_0 + \overline{\varepsilon B(0, r_0/2)} \subseteq \Omega_0 + \varepsilon\Omega.$$

En appliquant le Lemme 3.1 aux domaines Ω_0 , $\varepsilon\Omega$ et $\varepsilon B(0, r_0/2)$ on obtient

$$\overline{\Omega_0 + \varepsilon B(0, r_0/2)} \subset \Omega_0 + \varepsilon\Omega.$$

Donc $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega_\varepsilon$, $\forall \varepsilon \in]0, 1]$. Alors, d'après la Remarque 3.1, on a l'estimation

$$\left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x) d\sigma - \int_{\partial\Omega_0} g(x) d\sigma \right| \leq C(r, D) \|g\|_{H^1(D)} d^H(\bar{\Omega}_0, \bar{\Omega}_\varepsilon).$$

Ainsi on aura

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(x) d\sigma - \int_{\partial\Omega_0} g(x) d\sigma \right| &\leq C(r, D) \|g\|_{H^1(D)} d^H(\bar{\Omega}_0, \bar{\Omega}_0 + \varepsilon\bar{\Omega}) \\ &\leq C(r, D) \|g\|_{H^1(D)} d^H(\{0\}, \varepsilon\bar{\Omega}) \\ &\leq C(r, D) \|g\|_{H^1(D)} d^H(\{0\}, \bar{\Omega})\varepsilon. \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g d\sigma - \int_{\partial\Omega_0} g d\sigma \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

Par suite, en appliquant le Théorème 3.1 à la fonction g_0 , on conclut que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(\varepsilon) - F(0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} g(x) dx + \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial g_0}{\partial \nu_0} + \mathcal{H}g_0 \right)(x) P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma(x).$$

■

Dérivation de forme de problèmes aux limites elliptiques sur des domaines convexes

Sommaire

4.1 Quelques résultats de continuité par rapport au domaine . . .	57
Propriété du cône uniforme pour une somme de Minkowski	58
Résultat de prolongement uniforme	59
Continuité uniforme de l'opérateur trace	60
Condition de la boule uniforme	65
Quelques estimations uniformes utilisant les jauges	69
4.2 Quelques estimations et inégalités sur les espaces de Sobolev	82
Résultats de continuité et d'interpolation	87
4.3 Quelques propriétés sur les fonctions support	90
4.4 Dérivation avec une déformation de Minkowski	97
Dérivation de forme du problème de Dirichlet	97
Dérivation de forme pour le problème de Neumann	120

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de la dérivée de forme de la solution de problèmes aux limites elliptiques modèles de type Dirichlet ou Neumann en utilisant une déformation de Minkowski de domaines convexes par des convexes. Ce type de questions se présente naturellement lorsqu'il s'agit de calculer la dérivée d'une fonctionnelle coût qui fait intervenir une fonction qui dépend de la solution d'un problème aux limites du type Dirichlet ou Neumann. Ces résultats d'existence sont basés sur un certain nombre de résultats de géométrie différentielle, géométrie convexe et d'analyse. Notamment la condition de la boule uniforme, des résultats de prolongement uniforme et de continuité uniforme de l'opérateur trace, des estimations uniformes qui font intervenir les fonctions jauge et des résultats de continuité des fonctions support par rapport aux domaines.

4.1 Quelques résultats de la géométrie différentielle et de la géométrie convexe

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et nous établissons des résultats essentiels pour ce travail. Nous démontrons en particulier des résultats d'estimation uniforme par rapport aux domaines, en l'occurrence, la propriété du prolongement uniforme,

un résultat de continuité uniforme de l'opérateur trace et quelques propriétés géométriques concernant ce qu'on appelle la condition de la boule uniforme ou la condition de ϱ -boule ($\varrho > 0$).

Nous commençons tout d'abord par établir quelques propriétés géométriques sur la somme de Minkowski d'un domaine étoilé et d'un domaine convexe.

Notons que dans toute la suite de ce paragraphe nous désignerons par c une constante générique.

Propriété du cône uniforme pour une somme de Minkowski

Soient Ω_0 un domaine étoilé par rapport à une boule et Ω un domaine convexe borné de \mathbb{R}^n . Soit D un domaine borné régulier de \mathbb{R}^n tel que

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega \subset D, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Dans la suite, nous allons montrer que le domaine Ω_ε satisfait la propriété du σ -cône [57] pour une constante $\sigma > 0$ indépendante de ε et de Ω . Pour cela nous commençons par rappeler qu'un ouvert Ω satisfait la propriété du σ -cône si

$$\forall x \in \partial\Omega, \exists \xi \in \mathbb{S}^{n-1}, \text{ tel que } \forall y \in \bar{\Omega} \cap B(x, \sigma), \text{ on a } C(y, \xi, \sigma) \subset \Omega.$$

où ξ est un vecteur unitaire, σ est une constante positive et $C(y, \xi, \sigma)$ est ce qu'on appelle le cône époiné de sommet y , de direction ξ et de dimension σ , défini par

$$C(y, \xi, \sigma) = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z - y, \xi \rangle \geq \cos(\sigma)|z - y| \text{ et } 0 < |z - y| < \sigma\}.$$

Nous avons alors le résultat suivant [57].

Lemme 4.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné étoilé par rapport à la boule $B(x_0, r)$ avec $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$. Alors, Ω a la propriété du σ -cône, où σ est donné par :*

$$\sigma := \min \left\{ \ell, \arcsin \left(\frac{r}{2m} \right) \right\}$$

avec $\ell := \frac{d(x_0, \partial\Omega)}{2}$ et $m := \sup_{x \in \partial\Omega} \|x - x_0\|$.

En se basant sur ce lemme, nous établissons le résultat suivant.

Proposition 4.1 *Soient Ω_0 un domaine borné étoilé par rapport à une boule et Ω un domaine borné convexe contenant 0, tels que $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega \subset D$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Alors, il existe $\sigma_0 > 0$, tel que Ω_ε a la propriété du σ_0 -cône, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$.*

Démonstration. Soient Ω_0 un domaine borné étoilé par rapport à la boule $B(x_0, r)$ avec $x_0 \in \Omega_0$ et $r > 0$, et Ω un domaine borné convexe, tel que $0 \in \Omega$. Alors, d'après le Lemme 2.2, $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega$ est étoilé par rapport à la boule $B(x_0, r)$. Ainsi, d'après le

Lemme 4.1, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que Ω_ε satisfait la propriété du δ_ε -cône, avec :

$$\delta_\varepsilon = \min \left\{ \ell_\varepsilon, \arcsin \left(\frac{r}{2m_\varepsilon} \right) \right\} \quad \text{où} \quad \ell_\varepsilon = \frac{d(x_0, \partial\Omega_\varepsilon)}{2} \quad \text{et} \quad m_\varepsilon = \sup_{x \in \partial\Omega_\varepsilon} \|x - x_0\|.$$

De plus, on a

$$\ell_\varepsilon = \frac{d(x_0, \partial\Omega_\varepsilon)}{2} := \frac{1}{2} \inf_{x \in \partial\Omega_\varepsilon} \|x - x_0\| \geq \frac{1}{4}r.$$

En effet, soit $x \in \partial\Omega_\varepsilon$ puisque $\overline{B}(x_0, r/2) \subset \Omega_0 \subset \Omega_\varepsilon$, alors $x \notin \overline{B}(x_0, r/2)$. Ainsi

$$\|x - x_0\| > \frac{r}{2}, \quad \forall x \in \partial\Omega_\varepsilon.$$

Par suite

$$\ell_\varepsilon = \frac{d(x_0, \partial\Omega_\varepsilon)}{2} := \frac{1}{2} \inf_{x \in \partial\Omega_\varepsilon} \|x - x_0\| \geq \frac{r}{4}.$$

D'autre part, puisque $x_0 \in \Omega_0 \subset D$ alors

$$m_\varepsilon = \sup_{x \in \partial\Omega_\varepsilon} \|x - x_0\| \leq \sup_{x \in \overline{\Omega}_\varepsilon} \|x - x_0\| \leq \sup_{x \in D} \|x - x_0\| = \sup_{x \in \partial D} \|x - x_0\|.$$

Puisque $\overline{B}(x_0, r) \subset D$, alors

$$\sup_{x \in \partial D} \|x - x_0\| \geq r > r/2.$$

Ainsi si on note par $C_{r,D} = \frac{r}{2 \sup_{x \in \partial D} \|x - x_0\|}$, on aura $C_{r,D} \in]-1, 1[$ et par suite

$$\delta_\varepsilon = \min \left\{ \ell_\varepsilon, \arcsin \left(\frac{r}{2m_\varepsilon} \right) \right\} \geq \min \{ \arcsin(C_{r,D}), r \}.$$

Par conséquent, il existe $\sigma_0 > 0$ tel que $\delta_\varepsilon \geq \sigma_0$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Ce qui achève la preuve de ce résultat. ■

Résultat de prolongement uniforme

Nous commençons ce paragraphe par énoncer un résultat classique de prolongement uniforme sur les espaces de Sobolev définis sur Ω_ε . C'est l'objet du lemme suivant qui est une conséquence immédiate du théorème de prolongement uniforme de D. Chenais [27], tout en se basant sur la Proposition 4.1.

Lemme 4.2 *Soient Ω_0 un domaine borné étoilé par rapport à une boule et Ω un domaine borné convexe contenant 0, tels que $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega \subset D$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Alors il existe un prolongement de u noté \tilde{u} et une constante $c > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$ on a*

$$\|\tilde{u}\|_{H^1(D)} \leq c\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega_\varepsilon). \tag{4.1}$$

Nous aurons besoin également d'un résultat de prolongement uniforme sur des espaces de Sobolev d'ordre supérieur. Ceci fait l'objet du théorème suivant qui est aussi une conséquence de la Proposition 4.1 et du Théorème de Stein [82, 87].

Théorème 4.1 *Soient Ω_0 un domaine borné étoilé par rapport à une boule $B(x_0, r)$ ($r > 0$) et Ω un domaine borné convexe contenant 0, tels que $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega \subset D$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors il existe un opérateur de prolongement linéaire continue*

$$\mathcal{E}_S : H^k(\Omega_\varepsilon) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^n),$$

tel qu'il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de k, n et r , telle que

$$\|\mathcal{E}_S u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq C(k, n, r) \|u\|_{H^k(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall u \in H^k(\Omega_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (4.2)$$

Continuité uniforme de l'opérateur trace

Dans ce paragraphe, nous établissons un résultat de continuité uniforme de l'opérateur trace par rapport à une famille de domaines étoilés. Pour cela, nous commençons tout d'abord par montrer la formule de changement de variable suivante.

Lemme 4.3 *Soient Ω_0 un domaine borné étoilé par rapport à la boule $B(0, r)$, $r > 0$ et Ω un domaine borné convexe contenant 0, qui sont tous les deux de classe \mathcal{C}^1 , tels que $\Omega_\varepsilon \subset D$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Soit g une fonction dans $W^{1,1}(D)$, alors on a la formule :*

$$\|g\|_{L^1(\partial\Omega_\varepsilon)} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left| g \left(\frac{x}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)} \right) \right| |\nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x)| \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)^n} d\sigma,$$

où J_{Ω_ε} est la fonction jauge associée au domaine Ω_ε .

Démonstration. D'après le Lemme 2.2, l'ouvert Ω_ε est étoilé par rapport à la boule $B(0, r)$. Soit alors J_{Ω_ε} la fonction jauge associée à Ω_ε . Considérons ϕ_ε l'application définie par

$$\phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{x}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)} \|x\| & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases},$$

D'après [8], la fonction ϕ_ε est un homéomorphisme bi-lipschitzien de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n qui satisfait la relation suivante :

$$\phi_\varepsilon(\mathbb{S}^{n-1}) = \partial\Omega_\varepsilon.$$

De plus, son inverse ϕ_ε^{-1} est défini par

$$\phi_\varepsilon^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|} J_{\Omega_\varepsilon}(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ainsi en utilisant la formule de changement de variable dans le cas des homéomorphismes lipschitziens [39], on aura :

$$\|g\|_{L^1(\partial\Omega_\varepsilon)} = \int_{\phi_\varepsilon(\mathbb{S}^{n-1})} |g(x)| d\sigma(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |g(\frac{x}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}\|x\|)| |\det(\nabla\phi_\varepsilon(x))| \|(\nabla\phi_\varepsilon(x))^{-T}\nu_{\mathbb{S}^{n-1}}\| d\sigma,$$

où $\nabla\phi_\varepsilon(x)^{-T}$ désigne le transposé de la matrice inverse $\nabla\phi_\varepsilon(x)^{-1}$ et $\nu_{\mathbb{S}^{n-1}}$ est la normale à \mathbb{S}^{n-1} .

Commençons alors par expliciter le terme $|\det(\nabla\phi_\varepsilon(x))|$. Puisque le domaine Ω_ε est étoilé par rapport à la boule $B(0, r)$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, alors d'après la proposition 2.2, on a

$$|J_\varepsilon(y) - J_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{r}\|y - x\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{4.3}$$

Ainsi, comme J_ε est lipschitzienne, d'après le Théorème de Rademacher [42], elle est presque partout différentiable. Par suite $\phi_\varepsilon, \phi_\varepsilon^{-1}$ sont presque partout différentiables sur un voisinage de \mathbb{S}^{n-1} , alors pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ on a

$$\nabla\phi_\varepsilon(x) = \frac{\|x\|}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}I_n + \frac{x^\top x}{\|x\|J_{\Omega_\varepsilon}(x)} - x^\top \nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x) \frac{\|x\|}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)^2},$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n .

Ainsi

$$\nabla\phi_\varepsilon(x) = \frac{\|x\|}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)} \left[I_n + \frac{x^\top x}{\|x\|^2} - x^\top \nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x) \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)} \right].$$

Puisque $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, alors

$$\nabla\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)} \left[I_n + x^\top x - x^\top \nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x) \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)} \right].$$

Par suite on aura

$$\det(\nabla\phi_\varepsilon(x)) = \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)^n} \det(I_n + x^\top z).$$

avec $z = x - \nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x) \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}$. Ainsi en utilisant la formule suivante (voir [8]) :

$$\det(I_n + x^\top z) = 1 + {}^\top xz = 1 + \langle x, z \rangle. \tag{4.4}$$

Par linéarité de l'application $A \in \mathcal{M}_{n,n} \mapsto {}^\top A \in \mathcal{M}_{n,n}$, on obtient

$$\det(\nabla\phi_\varepsilon(x)) = \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)^n} (1 + {}^\top xz) = \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)^n} \left(1 + \|x\|^2 - {}^\top x \nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x) \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)} \right).$$

En utilisant le fait que l'application J_{Ω_ε} est homogène, alors

$${}^\top x \nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x) = \langle x, \nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x) \rangle = J_{\Omega_\varepsilon}(x).$$

Ainsi on aura

$$\det(\nabla\phi_\varepsilon(x)) = \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)^n} (1 + {}^\top xx - 1) = \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)^n}. \quad (4.5)$$

Explicitons ensuite le terme $\|\nabla\phi_\varepsilon(x)^{-T}\nu_{\mathbb{S}^{n-1}}\|$. Or comme on sait que pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, on a

$$(\nabla\phi_\varepsilon(x))^{-1} = \nabla\phi_\varepsilon^{-1}(\phi_\varepsilon(x)).$$

Ainsi, soit $y \in \partial\Omega_\varepsilon$, calculons tout d'abord $\nabla\phi_\varepsilon^{-1}(y)$:

$$\nabla\phi_\varepsilon^{-1}(y) = \frac{J_{\Omega_\varepsilon}(y)}{\|y\|} I_n + \frac{y {}^\top \nabla J_{\Omega_\varepsilon}(y)}{\|y\|} - \frac{J_{\Omega_\varepsilon}(y)}{\|y\|^3} y {}^\top y.$$

Soit $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ et $y = \phi_\varepsilon(x) = \frac{x}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)} x$, en utilisant le fait que J_{Ω_ε} est homogène d'ordre 1 et $\nabla J_{\Omega_\varepsilon}$ est homogène d'ordre 0, on aura

$$(\nabla\phi_\varepsilon(x))^{-1} = \nabla\phi_\varepsilon^{-1}(\phi_\varepsilon(x)) = \frac{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{\|x\|} I_n + \frac{x {}^\top \nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{\|x\|} - \frac{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{\|x\|^3} x {}^\top x.$$

Ainsi

$$({}^\top \nabla\phi_\varepsilon(x))^{-1} = \frac{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{\|x\|} I_n + \frac{\nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x) {}^\top x}{\|x\|} - \frac{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{\|x\|^3} x {}^\top x.$$

Or on sait que $\nu_{\mathbb{S}^{n-1}}$ est l'application l'identité, donc pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ ($\|x\| = 1$)

$$|{}^\top \nabla\phi_\varepsilon(x)^{-1}\nu_{\mathbb{S}^{n-1}}(x)| = |{}^\top \nabla\phi_\varepsilon(x)^{-1}x| = |J_{\Omega_\varepsilon}(x)x + \nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x) - J_{\Omega_\varepsilon}(x)x| = |\nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x)|. \quad (4.6)$$

Par conséquent d'après (4.5) et (4.6), on a la formule

$$\|g\|_{L^1(\partial\Omega_\varepsilon)} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |g(\frac{x}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)})| |\nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x)| \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)^n} d\sigma.$$

■

Nous avons ainsi le résultat.

Proposition 4.2 *Soient Ω_0 un domaine borné étoilé par rapport à la boule $B(0, r)$, $r > 0$ et Ω un domaine borné convexe contenant 0, qui sont tous les deux de classe \mathcal{C}^1 , tels que $\Omega_\varepsilon \subset D$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Alors, il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\|g\|_{L^1(\partial\Omega_\varepsilon)} \leq c \|g\|_{W^{1,1}(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall g \in W^{1,1}(D), \quad \forall \varepsilon \in [0, 1]. \quad (4.7)$$

Démonstration. Soient Ω_0 un domaine borné étoilé par rapport à la boule $B(0, r)$, $r > 0$ et Ω un domaine borné convexe contenant 0, qui sont tous les deux de classe \mathcal{C}^1 . D'après le Lemme 4.3, on a la formule suivantes :

$$\|g\|_{L^1(\partial\Omega_\varepsilon)} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |g(\frac{x}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)})| |\nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x)| \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)^n} d\sigma.$$

On a

$$\frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}} \leq \frac{1}{J_D} \leq \frac{1}{\inf_{\mathbb{S}^{n-1}} J_D}.$$

D'autre part, d'après la Proposition 2.2, on a $\|\nabla J_{\Omega_\varepsilon}\|_\infty$ est uniformément borné par rapport à ε . Par suite, il existe une constante $c > 0$, telle que

$$\|g\|_{L^1(\partial\Omega_\varepsilon)} \leq c \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left| g\left(\frac{x}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}\right) \right| d\sigma,$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$\|g\|_{L^1(\partial\Omega_\varepsilon)} \leq c \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |g(\phi_\varepsilon(x))| d\sigma, \tag{4.8}$$

Il découle alors de la continuité de l'opérateur trace de $W^{1,1}(B(0,1))$ vers $L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ qu'il existe $c' > 0$ tel que (4.8) devienne

$$\|g\|_{L^1(\partial\Omega_\varepsilon)} \leq c \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |g \circ \phi_\varepsilon| d\sigma \leq c' \|g \circ \phi_\varepsilon\|_{W^{1,1}(B(0,1))},$$

ce qui entraîne que

$$\|g\|_{L^1(\partial\Omega_\varepsilon)} \leq c' \left[\int_{B(0,1)} |g \circ \phi_\varepsilon| dx + \int_{B(0,1)} \|\top \nabla \phi_\varepsilon\| \|(\nabla g) \circ \phi_\varepsilon\| dx \right].$$

Par suite, en utilisant encore une fois la formule du changement de variable, on aura

$$\int_{B(0,1)} |g(\phi_\varepsilon(x))| dx = \int_{\Omega_\varepsilon} |g(x)| |\det(\nabla \phi_\varepsilon^{-1}(x))| dx$$

et

$$\int_{B(0,1)} \|\top \nabla \phi_\varepsilon(x)\| \|\nabla g(\phi_\varepsilon(x))\| dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \|\top \nabla \phi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^{-1}(x))\| \|\nabla g(x)\| |\det(\nabla \phi_\varepsilon^{-1}(x))| dx.$$

D'autre part, il existe deux constantes $\ell_1 > 0$ et $\ell_2 > 0$ indépendantes de ε , telles que

$$\det(\nabla \phi_\varepsilon^{-1}(x)) \leq \ell_1, \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon$$

et

$$\|\top \nabla \phi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^{-1}(x))\| \leq \ell_2, \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon.$$

En effet, comme les fonction ϕ_ε et son inverse ϕ_ε^{-1} satisfont les relations suivantes [8, 86] :

$$\phi_\varepsilon^{-1}(\Omega_\varepsilon) = B(0,1),$$

$$\begin{aligned}
\det(\nabla\phi_\varepsilon^{-1}(x)) &= \det\left(\frac{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{\|x\|}I_n + \frac{x^\top\nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{\|x\|} - \frac{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{\|x\|^3}x^\top x\right) \\
&= \det\left(\frac{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{\|x\|}\left(I_n + \frac{x^\top\nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)} - \frac{1}{\|x\|^2}x^\top x\right)\right) \\
&= \left(\frac{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{\|x\|}\right)^n \det\left(I_n + x^\top\left(\frac{\nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)} - \frac{1}{\|x\|^2}x\right)\right)
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété (voir [8]) :

$$\det(I_n + x^\top z) = 1 + x^\top z = 1 + \langle x, z \rangle, \quad x, z \in \mathbb{R}^n \quad (4.9)$$

et le fait que $x^\top\nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x) = J_{\Omega_\varepsilon}(x)$, on aura

$$\begin{aligned}
\det(\nabla\phi_\varepsilon^{-1}(x)) &= \left(\frac{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{\|x\|}\right)^n \left(1 + x^\top\nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x)\frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)} - x^\top x\frac{1}{\|x\|^2}\right) \\
&= \left(\frac{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{\|x\|}\right)^n.
\end{aligned}$$

D'où

$$\det(\nabla\phi_\varepsilon^{-1}(x)) = \left(\frac{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{\|x\|}\right)^n, \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon.$$

D'autre part, on a et

$$\|x^\top\nabla\phi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^{-1}(x))\| = \left\|\frac{\|x\|}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}I_n + \frac{x^\top x}{\|x\|J_{\Omega_\varepsilon}(x)} - \frac{x^\top\nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}\| \|x\|\right\| \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon.$$

En utilisant maintenant le fait que $B(0, r) \subset \Omega_\varepsilon \subset D$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, on aura

$$\frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}} \leq \frac{1}{J_D} \quad \text{et} \quad J_{\Omega_\varepsilon} \leq J_{B(0,r)}.$$

En utilisant ensuite le fait que $\|x\| = \frac{\|x\|}{r}r = rJ_{B(0,r)}$ et $\frac{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{J_{B(0,r)}} \leq 1$, alors pour tout $x \in \Omega_\varepsilon$, on aura

$$\begin{aligned}
\det(\nabla\phi_\varepsilon^{-1}(x)) &= \left(\frac{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{\|x\|}\right)^n = \left(\frac{J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{J_{B(0,r)}}\right)^n \frac{1}{r^n} \\
&\leq \frac{1}{r^n}.
\end{aligned}$$

D'après la Proposition 2.2, on a $\|\nabla J_{\Omega_\varepsilon}\|_\infty$ est uniformément borné par rapport à ε , ainsi

on a

$$\begin{aligned} \|\mathop{\mathrm{tr}}\nabla\phi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^{-1})(x)\| &= \left\| \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)} I_n + \frac{\mathop{\mathrm{tr}}xx}{\|x\|^2 J_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)} - \frac{x \mathop{\mathrm{tr}}\nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x)}{J_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)} \right\| \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(y)} + \frac{\|\mathop{\mathrm{tr}}xx\|}{\|x\|^2} \sup_{y \in \mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(y)} + \|x\| \|\nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x)\| \sup_{y \in \mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{J_{\Omega_\varepsilon}(y)} \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{J_D(y)} \left(2 + \sup_{x \in D} \|x\| \|\nabla J_{\Omega_\varepsilon}(x)\| \right) \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe $c > 0$ telle que

$$\|g\|_{L^1(\partial\Omega_\varepsilon)} \leq c \left[\int_{\Omega_\varepsilon} |g(x)| dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla g(x)\| dx \right].$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition. ■

Condition de la boule uniforme

Dans ce paragraphe, nous rappelons ce qu'on appelle la condition de la boule uniforme. C'est une propriété géométrique qui va nous permettre d'établir quelques résultats sur la géométrie des domaines $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega$, $\varepsilon \in [0, 1]$, qui seront utiles dans la suite de ce travail.

Nous introduisons ainsi la définition d'un ouvert satisfait la condition de la boule uniforme comme suit (voir [31, 32]).

Définition 4.1 Soient $\varrho > 0$ et $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. On dit qu'un ouvert $\Omega \subseteq D$ vérifie la condition ϱ -boule et on écrit $\Omega \in \mathcal{B}_\varrho(D)$ si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un vecteur unitaire \mathbf{d}_x de \mathbb{R}^n tel que :

$$\begin{cases} B(x - \varrho\mathbf{d}_x, \varrho) \subseteq \Omega \\ B(x + \varrho\mathbf{d}_x, \varrho) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Notons que la condition de la boule uniforme (extérieure/intérieure) est déjà considérée par Poincaré en 1890 [78]. C'est une propriété qui empêche la formation de singularités telles que les coins, les fractures ou les auto-intersections [31]. En fait, elle est connue pour caractériser la régularité $\mathcal{C}^{1,1}$ des hypersurfaces [32].

Rappelons tout d'abord quelques propriétés importantes vérifiées par les domaines qui ont la condition de ϱ -boule (voir [32]).

Proposition 4.3 Soient $\varrho > 0$ et $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Soit un ouvert $\Omega \in \mathcal{B}_\varrho(D)$, alors on les propriétés suivantes :

- (i) L'ouvert Ω satisfait la condition du $f^{-1}(\varrho)$ -cône, avec $f : \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \frac{\alpha}{\cos(\alpha)} \in]0, +\infty[$.
- (ii) L'application $\mathbf{d} : x \in \partial\Omega \mapsto \mathbf{d}_x \in \mathbb{S}^{n-1}$ est bien définie, de plus elle est $\frac{1}{\varrho}$ -lipschitzienne.

Remarque 4.1 D'après le Théorème 1.8 de [32], le vecteur unitaire \mathbf{d}_x dans la Définition 4.1 est en fait le vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω en $x : \nu_{\partial\Omega}(x)$. Donc, d'après la Proposition 4.3 si $\Omega \in \mathcal{B}_\varrho(D)$ ($\varrho > 0$), alors l'application $\nu : x \in \partial\Omega \mapsto \nu_{\partial\Omega}(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$ est $\frac{1}{\varrho}$ -lipschitzienne.

Rappelons ensuite la notion de la stricte positivité du *reach*. C'est une caractérisation pratique, de la condition de la boule uniforme, introduite par Federer [43]. Pour cela, commençons tout d'abord par rappeler quelques notations et définitions introduites par Federer [43]. Soit Ω un ensemble non-vide de \mathbb{R}^n , introduisons l'ensemble suivant :

$$\mathfrak{U}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n / \exists! a \in \Omega, \|x - a\| = d_\Omega(x)\}.$$

Il contient tous les points de \mathbb{R}^n ayant une unique projection sur Ω , c'est-à-dire le domaine maximal sur lequel l'application projection est bien définie

$$\Pi_\Omega : x \in \mathfrak{U}(\Omega) \mapsto \Pi_\Omega(x) \in \Omega,$$

où $\Pi_\Omega(x)$ est l'unique point de Ω , tel que $\|x - \Pi_\Omega(x)\| = d_\Omega(x)$. Notons que $\Omega \subseteq \mathfrak{U}(\Omega)$, ainsi en particulier $\mathfrak{U}(\Omega) \neq \emptyset$.

On peut maintenant définir la notion de la stricte positivité du *reach*.

Définition 4.2 Soient Ω un ensemble non-vide de \mathbb{R}^n et $x \in \Omega$, considérons l'ensemble :

$$\mathfrak{R}_\Omega(x) = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ / B(x, r) \subseteq \mathfrak{U}(\Omega)\}.$$

On définit alors le *reach* de Ω par :

$$\text{Reach}(\Omega) = \inf_{x \in \Omega} \mathfrak{R}_\Omega(x).$$

On dit que Ω admet un *reach* positif si $\text{Reach}(\Omega) > 0$.

Remarque 4.2 Notons que d'après [89] nous avons un exemple d'un ouvert qui admet un *reach* positive. En effet un ouvert Ω est convexe, si et seulement si, $\text{Reach}(\Omega) = +\infty$.

Notons que la notion du *Reach* positive a été introduite pour caractériser la condition uniforme de la boule. Ce qui est vrai, comme on va le voir dans la suite, dans le cas du *Reach* d'une hypersurface. Par contre, le *Reach* positive d'un ouvert n'implique pas que son bord vérifie la condition uniforme de la boule, comme l'indique la remarque 4.2. En effet, un ouvert peut avoir un *Reach* positive même s'il a un bord non régulier, en particulier le cas où Ω est un rectangle.

Par la suite on va rappeler quelques caractérisations de cette notion de *Reach* par la condition uniforme de la boule, aussi on va rappeler un résultat donnant une condition suffisante pour avoir un *Reach* positive. On commence ainsi par la caractérisation suivante (voir [31, 32]).

Théorème 4.2 Soient $\varrho > 0$ et $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. S'il existe un réel $\varrho > 0$, tel que $\Omega \in \mathcal{B}_\varrho(D)$ alors $\partial\Omega$ a un Reach positive et on a $\text{Reach}(\partial\Omega) > \varrho$.
2. Si $\partial\Omega$ a un Reach positive, alors $\Omega \in \mathcal{B}_\varrho(D)$, pour tout $\varrho \in]0, \text{Reach}(\partial\Omega)[$, et en plus, si $\text{Reach}(\partial\Omega) \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\Omega \in \mathcal{B}_{\text{Reach}(\partial\Omega)}(D)$.

Corollaire 4.1 Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $\Omega \subset D$ un ouvert, alors on a la caractérisation :

$$\text{Reach}(\partial\Omega) = \sup\{\varrho > 0 / \Omega \in \mathcal{B}_\varrho(D)\}. \quad (4.10)$$

Énonçons maintenant un théorème qui donne une condition suffisante pour avoir un Reach positive (voir Proposition 14 du [89]).

Théorème 4.3 Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $\Omega \subset D$ un ouvert de classe \mathcal{C}^2 . Alors, $\partial\Omega$ admet un Reach positive.

La condition du Reach positive et la propriété uniforme de la boule, permettent d'établir des propriétés intéressantes, comme celle donnée dans la Proposition 4.3. Ainsi notre objectif est d'établir cette propriété sur nos domaines qui s'écrivent sous forme d'une somme de Minkowski qui fait intervenir le paramètre ε comme suit $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega$. Ainsi, dans la suite nous allons montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ qui ne dépend pas de ε tel que les domaines Ω_ε vont vérifier la condition δ -boule. C'est un résultat important pour la suite de ce chapitre et qui va servir à établir des propriétés cruciales pour les résultats d'existence de la dérivée de forme des problèmes aux limites, en utilisant une déformation de type Minkowski.

Pour ce faire, nous commençons par montrer que la condition du Reach positive et la propriété uniforme de la boule restent invariantes par les homothéties. Ce qui fait l'objet des deux lemmes suivants.

Lemme 4.4 Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné assez grand et $\varrho > 0$. Soit $\Omega \subset D$ un ouvert dans $\mathcal{B}_\varrho(D)$, alors pour tout réel $\lambda > 0$, tel que $\lambda\Omega \subset D$, on a $\lambda\Omega \in \mathcal{B}_{\lambda\varrho}(D)$, où

$$\lambda\Omega := \{\lambda x / x \in \Omega\}.$$

Démonstration. Soient $\varrho > 0$ et $\Omega \in \mathcal{B}_\varrho(D)$, alors en appliquant la remarque 4.1, pour tout $y \in \partial\Omega$ on a :

$$B(y - \varrho\nu_{\partial\Omega}(y), \varrho) \subseteq \Omega; \quad B(y + \varrho\nu_{\partial\Omega}(y), \varrho) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \quad (4.11)$$

où $\nu_{\partial\Omega}$ est la normale à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω . Soit $\lambda > 0$, montrons que $\lambda\Omega \in \mathcal{B}_{\lambda\varrho}(D)$. Soit $x \in \partial(\lambda\Omega) = \lambda\partial\Omega$, alors il existe $y \in \partial\Omega$, tel que $x = \lambda y$. Commençons ainsi par montrer que $B(x - \lambda\varrho\nu_{\lambda\partial\Omega}(x), \lambda\varrho) \subseteq \lambda\Omega$. Soit alors $z \in B(x - \lambda\varrho\nu_{\lambda\partial\Omega}(x), \lambda\varrho)$, donc

$$\begin{aligned} |z - x + \lambda\varrho\nu_{\lambda\partial\Omega}(x)| < \lambda\varrho &\Rightarrow |z - \lambda y + \lambda\varrho\nu_{\lambda\partial\Omega}(x)| < \lambda\varrho \\ &\Rightarrow |z/\lambda - y + \varrho\nu_{\lambda\partial\Omega}(x)| < \varrho. \end{aligned}$$

Or d'après la Proposition 1.2, on a

$$\nu_{\lambda\partial\Omega}(\lambda y) = \nu_{\partial\Omega}(y), \text{ pour tout } y \in \partial\Omega.$$

Ainsi on aura $|z/\lambda - y + \varrho\nu_{\partial\Omega}(y)| < \varrho$. D'où, $z/\lambda \in B(y - \varrho\nu_{\partial\Omega}(y), \varrho)$. Par suite d'après (4.11), on obtient que $z \in \lambda\Omega$. Par conséquent,

$$B(x - \lambda\varrho\nu_{\lambda\partial\Omega}(x), \lambda\varrho) \subseteq \lambda\Omega. \quad (4.12)$$

Il reste à montrer la deuxième inclusion, soit $z \in B(x + \lambda\varrho\nu_{\lambda\partial\Omega}(x), \lambda\varrho)$, alors on vérifie que $z/\lambda \in B(y + \varrho\nu_{\partial\Omega}(y), \varrho)$. Ainsi, d'après (4.11) on a $z/\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Donc $z \in \mathbb{R}^n \setminus \lambda\Omega$, ce qui implique que

$$B(x + \lambda\varrho\nu_{\lambda\partial\Omega}(x), \lambda\varrho) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \lambda\Omega. \quad (4.13)$$

On déduit de (4.12) et (4.13) que $\lambda\Omega \in \mathcal{B}_{\lambda\varrho}(D)$. ■

Lemme 4.5 Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $\varrho > 0$. Soit $\Omega \subset D$ un ouvert tel que $Reach(\partial\Omega) > 0$, alors pour tout réel $\lambda > 0$ on a

$$Reach(\lambda\partial\Omega) = \lambda Reach(\partial\Omega).$$

Démonstration. Soit $\Omega \subset D$ un ouvert tel que $Reach(\partial\Omega) > 0$ et soit un réel $\lambda > 0$, alors d'après le Théorème 4.2, on a $\Omega \in \mathcal{B}_{Reach(\partial\Omega)}(D)$. D'autre part pour $\lambda > 0$, d'après le Lemme 4.4, on a $\lambda\Omega \in \mathcal{B}_{\lambda Reach(\partial\Omega)}(D)$. Or d'après la caractérisation du Corollaire 4.1 on a

$$Reach(\partial(\lambda\Omega)) = \sup\{\varrho > 0 / \lambda\Omega \in \mathcal{B}_{\varrho}(D)\},$$

ainsi on obtient

$$Reach(\partial(\lambda\Omega)) \geq \lambda Reach(\partial\Omega). \quad (4.14)$$

Il reste alors l'inégalité inverse. En effet, soit $\varrho > 0$, tel que $\lambda\Omega \in \mathcal{B}_{\varrho}(D)$. Alors d'après le Lemme 4.4, on a $\Omega \in \mathcal{B}_{\varrho/\lambda}(D)$. Ainsi par caractérisation du $Reach(\partial(\Omega))$, on a

$$Reach(\partial(\Omega)) \geq \frac{\varrho}{\lambda}, \quad \forall \varrho > 0, \text{ tel que } \lambda\Omega \in \mathcal{B}_{\varrho}(D).$$

D'où,

$$Reach(\partial(\Omega)) \geq \frac{Reach(\partial(\lambda\Omega))}{\lambda}. \quad (4.15)$$

Ainsi, la preuve de ce lemme découle de l'inégalité (4.14) et (4.15). ■

Rappelons finalement un résultat qui permet d'expliciter le $Reach$ du bord d'une somme de Minkowski de deux convexes [63].

Théorème 4.4 Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $A, B \subset D$ deux ouverts convexes de classe \mathcal{C}^1 . Si ∂A admet un $Reach$ positive ϱ_A et ∂B admet un $Reach$ positive ϱ_B , alors $\partial(A + B)$ admet un $Reach$ positive, telle que $Reach(\partial(A + B)) \geq \varrho_A + \varrho_B$.

Ainsi nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.5 *Soit D un domaine borné convexe régulier de \mathbb{R}^n . Soient Ω_0 et Ω deux ouverts bornés convexes, tels qu'ils sont de classe \mathcal{C}^2 et que $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega \subset D$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Alors on a les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, l'ouvert Ω_ε admet un Reach positive. De plus on a*

$$\text{Reach}(\partial\Omega_\varepsilon) \geq \text{Reach}(\partial\Omega_0) + \varepsilon\text{Reach}(\partial\Omega).$$

(ii) *Il existe un réel $\varrho = \varrho(\Omega_0) > 0$, telle que $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{B}_\varrho(D)$, $\forall \varepsilon \in [0, 1]$.*

(iii) *Il existe un réel $\varrho > 0$, telle qu'on*

$$\|\nu_\varepsilon(x) - \nu_\varepsilon(y)\| \leq \frac{1}{\varrho}\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \partial\Omega_\varepsilon.$$

où ν_ε est la normale à $\partial\Omega_\varepsilon$ dirigée vers l'extérieur de Ω_ε .

Démonstration. Soit $\Omega_0 \subset D$ et $\Omega \subset D$ deux ouverts bornés convexes et de classe \mathcal{C}^2 . Alors en particulier on a pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$ l'ouvert $\varepsilon\Omega$ est classe \mathcal{C}^2 . Ainsi, d'après le Théorème 4.3, on a

$$\text{Reach}(\partial\Omega_0) > 0; \quad \text{Reach}(\partial(\varepsilon\Omega)) > 0.$$

Ensuite en utilisant le Théorème 4.4, on aura alors

$$\text{Reach}(\partial\Omega_\varepsilon) \geq \text{Reach}(\partial\Omega_0) + \text{Reach}(\partial(\varepsilon\Omega)).$$

Or d'après, le Lemme 4.5, on a $\text{Reach}(\partial(\varepsilon\Omega)) = \varepsilon\text{Reach}(\partial(\Omega))$. Ce qui prouve la première assertion de ce théorème.

Montrons maintenant le deuxième assertion. D'après (i), on a

$$\text{Reach}(\partial\Omega_\varepsilon) \geq \text{Reach}(\partial\Omega_0) + \varepsilon\text{Reach}(\partial\Omega) \geq \text{Reach}(\partial\Omega_0), \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Ensuite en appliquant le Théorème 4.2, on a $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{B}_\varrho(D)$, pour tout $\varrho \in]0, \text{Reach}(\partial\Omega_\varepsilon)[$. En particulier, on obtient

$$\Omega_\varepsilon \in \mathcal{B}_{\text{Reach}(\partial\Omega_0)}(D), \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Par conséquent, en utilisant la remarque 4.1, on aura que l'application $\nu_\varepsilon : \partial\Omega_\varepsilon \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$ est $1/\text{Reach}(\partial\Omega_0)$ -lipschitzienne. Ce qui termine la preuve de ce résultat. ■

Quelques estimations uniformes utilisant les jauges

Dans cette section nous allons démontrer quelques estimations uniformes par rapport au paramètre ε en utilisant les fonctions jauges des domaines. Plus précisément, nous commençons par établir des estimations uniformes du gradient et du hessien de la fonction jauge des domaines Ω_ε . Ce qui fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.4 Soit D un domaine borné convexe régulier de \mathbb{R}^n . Soit Ω_0 et Ω deux ouverts bornés convexes contenant 0 , tels qu'ils sont de classe \mathcal{C}^2 et que $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega \subset D$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Soit $\sigma > 0$ un réel fixé, considérons l'ensemble $K = D \setminus B(0, \sigma)$, alors il existe une constante $C = C(K, \Omega_0, \Omega) > 0$ qui dépend de K , Ω_0 et Ω , telle qu'on a les estimations suivantes :

(i) Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on a

$$\|\nabla J_\varepsilon(x) - \nabla J_\varepsilon(y)\| \leq C(K, \Omega_0, \Omega)\|y - x\|, \quad \forall x, y \in D \setminus B(0, \sigma).$$

(ii) Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on a

$$\|J_\varepsilon''\|_{L^\infty(K)} \leq C(K, \Omega_0, \Omega),$$

où J_ε'' est la matrice hessienne de J_ε .

Démonstration. Soit $\sigma > 0$, considérons l'ensemble $K = D \setminus B(0, \sigma)$. Montrons le premier point de cette proposition. Soit $x, y \in K$, alors en utilisant le fait que ∇J_ε est homogène d'ordre 0 (car les fonctions jaugees sont homogène d'ordre 1) on a

$$\|\nabla J_\varepsilon(x) - \nabla J_\varepsilon(y)\| = \left\| \nabla J_\varepsilon\left(\frac{x}{J_\varepsilon(x)}\right) - \nabla J_\varepsilon\left(\frac{y}{J_\varepsilon(y)}\right) \right\|.$$

Notons par, $x_\varepsilon = \frac{x}{J_\varepsilon(x)}$ et $y_\varepsilon = \frac{y}{J_\varepsilon(y)}$. Comme $\partial\Omega_\varepsilon = \{J_\varepsilon = 1\}$ (voir la Proposition 2.1), alors par homogénéité de la fonction jauge on vérifie que $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in \partial\Omega_\varepsilon$. D'autre part, puisque le domaine Ω_0 est un convexe de class \mathcal{C}^2 et Ω un convexe, alors d'après [18] le domaine Ω_ε est de classe \mathcal{C}^1 , ainsi d'après la Proposition 2.3 la fonction J_ε est de classe \mathcal{C}^1 . De plus comme $\partial\Omega_\varepsilon = \{J_\varepsilon = 1\}$, on peut étendre le vecteur normal à Ω_ε dirigé vers l'extérieur de $\partial\Omega_\varepsilon$, $\nu_\varepsilon = \nu_{\partial\Omega_\varepsilon}$ à \mathbb{R}^n en posant $\nu_\varepsilon = \nabla J_\varepsilon / \|\nabla J_\varepsilon\|$. Ainsi on aura

$$\begin{aligned} \|\nabla J_\varepsilon(x) - \nabla J_\varepsilon(y)\| &= \|\nabla J_\varepsilon(x_\varepsilon) - \nabla J_\varepsilon(y_\varepsilon)\| \\ &= \left\| \frac{\nabla J_\varepsilon(x_\varepsilon)}{\|\nabla J_\varepsilon(x_\varepsilon)\|} \|\nabla J_\varepsilon(x_\varepsilon)\| - \frac{\nabla J_\varepsilon(y_\varepsilon)}{\|\nabla J_\varepsilon(y_\varepsilon)\|} \|\nabla J_\varepsilon(y_\varepsilon)\| \right\| \\ &\leq \|\nu_\varepsilon(x_\varepsilon)\| \|\nabla J_\varepsilon(x_\varepsilon)\| - \nu_\varepsilon(y_\varepsilon)\| \|\nabla J_\varepsilon(y_\varepsilon)\| \\ &\leq \|\nu_\varepsilon(x_\varepsilon) - \nu_\varepsilon(y_\varepsilon)\| \|\nabla J_\varepsilon(x_\varepsilon)\| + \|\nu_\varepsilon(y_\varepsilon)\| \left| \|\nabla J_\varepsilon(x_\varepsilon)\| - \|\nabla J_\varepsilon(y_\varepsilon)\| \right|. \end{aligned}$$

En utilisant l'homogénéité de la fonction jauge J_ε , on vérifie que

$$\langle \nu_\varepsilon(x), x \rangle = \left\langle \frac{\nabla J_\varepsilon(x)}{\|\nabla J_\varepsilon(x)\|}, x \right\rangle = \frac{1}{\|\nabla J_\varepsilon(x)\|}, \quad \text{pour presque tout } x \in \partial\Omega_\varepsilon.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\nabla J_\varepsilon(x) - \nabla J_\varepsilon(y)\| &\leq \|\nu_\varepsilon(x_\varepsilon) - \nu_\varepsilon(y_\varepsilon)\| \|\nabla J_\varepsilon(x_\varepsilon)\| + \left| \frac{1}{\langle \nu_\varepsilon(x_\varepsilon), x_\varepsilon \rangle} - \frac{1}{\langle \nu_\varepsilon(y_\varepsilon), y_\varepsilon \rangle} \right| \\ &\leq \|\nu_\varepsilon(x_\varepsilon) - \nu_\varepsilon(y_\varepsilon)\| \|\nabla J_\varepsilon(x_\varepsilon)\| + \frac{|\langle \nu_\varepsilon(x_\varepsilon), x_\varepsilon \rangle - \langle \nu_\varepsilon(y_\varepsilon), y_\varepsilon \rangle|}{\langle \nu_\varepsilon(x_\varepsilon), x_\varepsilon \rangle \langle \nu_\varepsilon(y_\varepsilon), y_\varepsilon \rangle}. \end{aligned}$$

Comme $0 \in \Omega_0$ fixons $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset \Omega_0 \subset \Omega_\varepsilon$, alors les domaines Ω_ε sont étoilés par rapport à la boule $B(0, r)$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$ (car ils sont convexes). Ainsi, d'après le Lemme 2.1, on a

$$\frac{1}{\|\nabla J_\varepsilon(x)\|} = \langle \nu_\varepsilon(x), x \rangle \geq r, \quad \text{pour presque tout } x \in \partial\Omega_\varepsilon.$$

On aura alors

$$\begin{aligned} \|\nabla J_\varepsilon(x) - \nabla J_\varepsilon(y)\| &\leq \frac{1}{r} \|\nu_\varepsilon(x_\varepsilon) - \nu_\varepsilon(y_\varepsilon)\| + \frac{1}{r^2} |\langle \nu_\varepsilon(x_\varepsilon), x_\varepsilon \rangle - \langle \nu_\varepsilon(y_\varepsilon), y_\varepsilon \rangle| \\ &\leq \frac{1}{r} \|\nu_\varepsilon(x_\varepsilon) - \nu_\varepsilon(y_\varepsilon)\| + \frac{1}{r^2} (|\langle \nu_\varepsilon(x_\varepsilon) - \nu_\varepsilon(y_\varepsilon), y_\varepsilon \rangle| + |\langle \nu_\varepsilon(x_\varepsilon), y_\varepsilon - x_\varepsilon \rangle|) \\ &\leq \frac{1}{r} \|\nu_\varepsilon(x_\varepsilon) - \nu_\varepsilon(y_\varepsilon)\| + \frac{1}{r^2} (\|\nu_\varepsilon(x_\varepsilon) - \nu_\varepsilon(y_\varepsilon)\| \|y_\varepsilon\| + \|y_\varepsilon - x_\varepsilon\|). \end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 4.5, il existe une constante $C = C(\Omega_0, D)$, telle qu'on a

$$\|\nu_\varepsilon(x_\varepsilon) - \nu_\varepsilon(y_\varepsilon)\| \leq C \|x_\varepsilon - y_\varepsilon\|.$$

Par suite, on obtient

$$\|\nabla J_\varepsilon(x) - \nabla J_\varepsilon(y)\| \leq \frac{C}{r} \|x_\varepsilon - y_\varepsilon\| + \frac{C}{r^2} \|x_\varepsilon - y_\varepsilon\| \|y_\varepsilon\| + \frac{C}{r^2} \|y_\varepsilon - x_\varepsilon\|.$$

Ce qui revient ainsi à estimer le terme $\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\|$, on a

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon - y_\varepsilon\| &= \left\| \frac{x}{J_\varepsilon(x)} - \frac{y}{J_\varepsilon(y)} \right\| \\ &= \frac{1}{J_\varepsilon(x)} \|x - y\| + \|y\| \left| \frac{1}{J_\varepsilon(x)} - \frac{1}{J_\varepsilon(y)} \right| \\ &\leq \frac{1}{J_\varepsilon(x)} \|x - y\| + \frac{1}{J_\varepsilon(x)} \frac{1}{J_\varepsilon(y/\|y\|)} |J_\varepsilon(y) - J_\varepsilon(x)|. \end{aligned}$$

D'une part, comme les domaines Ω_ε sont étoilés par rapport à la boule $B(0, r)$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, alors d'après la proposition 2.2, on a

$$|J_\varepsilon(y) - J_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{r} \|y - x\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (4.16)$$

D'autre part, on a

$$B(0, r) \subset \Omega_\varepsilon \subset D, \quad \text{pour tout } \varepsilon \in [0, 1].$$

Il découle alors de la Proposition 2.1 que $1/J_\varepsilon \leq 1/J_D$. Ainsi on aura

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon - y_\varepsilon\| &\leq \frac{1}{J_D(x)} \|x - y\| + \frac{1}{r} \frac{1}{J_D(x)} \frac{1}{J_D(y/\|y\|)} \|y - x\| \\ &\leq \sup_K \frac{1}{J_D} \|x - y\| + \frac{1}{r} \sup_K \frac{1}{J_D} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{J_D} \|y - x\|. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\|\nabla J_\varepsilon(x) - \nabla J_\varepsilon(y)\| &\leq \frac{C}{r}\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\| + \frac{C}{r^2}\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\| \left\| \frac{y}{J_{\Omega_\varepsilon}(y)} \right\| + \frac{C}{r^2}\|y_\varepsilon - x_\varepsilon\| \\
&\leq \left(\frac{C}{r} + \frac{C}{r^2} \frac{1}{J_D(y/\|y\|)} + \frac{C}{r^2} \right) \|x_\varepsilon - y_\varepsilon\| \\
&\leq \left(\frac{C}{r} + \frac{C}{r^2} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{J_D} + \frac{C}{r^2} \right) \left(\sup_K \frac{1}{J_D} + \frac{1}{r} \sup_K \frac{1}{J_D} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{J_D} \right) \|y - x\|.
\end{aligned}$$

Donc il existe une constante $C = C(K, \Omega_0, \Omega) > 0$, telle que

$$\|\nabla J_\varepsilon(x) - \nabla J_\varepsilon(y)\| \leq C(K, \Omega_0, \Omega) \|y - x\|, \quad \forall x, y \in D \setminus B(0, \sigma), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (4.17)$$

Le deuxième point de cette proposition est une conséquence de l'équation (4.17). En effet, d'après le Théorème de Rademacher [42], grâce à (4.17) on montre que la matrice hessienne de J_ε est définie p.p. sur $D \setminus B(0, \sigma)$, de plus on a l'estimation

$$\|J_\varepsilon''(x)\| \leq C(K, \Omega_0, \Omega), \quad \forall x \in D \setminus B(0, \sigma), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Ce qui termine la preuve de cette proposition. ■

Dans la suite nous allons établir un résultat de continuité du gradient de la fonction jauge ∇J_ε par rapport à ε . L'idée de la démonstration utilise le fait que le hessien J_ε'' est uniformément borné. Rappelons tout d'abord que le résultat de la dérivabilité de la fonction $\varepsilon \mapsto J_\varepsilon$ a été déjà établie dans [8]. Ceci fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.5 *Soit D un domaine borné convexe régulier de \mathbb{R}^n . Soient Ω_0 et Ω deux ouverts bornés convexes contenant 0 de classe \mathcal{C}^2 , tels que $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega \subset D$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Alors, on a les formules suivantes :*

(i) *Pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$ et pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, on a*

$$J_\varepsilon(x) - J_0(x) = - \int_0^\varepsilon J_s(x) P_\Omega(\nabla J_s(x)) ds.$$

(ii) *Pour tout $i = 1, \dots, n$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$ et pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, on a*

$$\partial_i J_\varepsilon(x) - \partial_i J_0(x) = - \int_0^\varepsilon [\partial_i J_s(x) P_\Omega(\nabla J_s(x)) + J_s(x)^\top \partial_i \nabla J_s(x) \nabla P_\Omega(\nabla J_s(x))] ds.$$

Ainsi nous avons le résultat suivant.

Proposition 4.6 *Soit D un domaine borné convexe régulier de \mathbb{R}^n . Soient Ω_0 et Ω deux ouverts bornés convexes contenant 0 de classe \mathcal{C}^2 , tels que $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega \subset D$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Alors il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de Ω_0, Ω et D , telle que*

$$\|\nabla J_\varepsilon - \nabla J_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon C(D, \Omega_0, \Omega), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (4.18)$$

Démonstration.

Comme le domaine Ω_0 est un convexe de class \mathcal{C}^2 et Ω un convexe, alors d'après [18] le domaine Ω_ε est de classe \mathcal{C}^1 , ainsi d'après la Proposition 2.3 la fonction J_ε est de classe \mathcal{C}^1 . D'autre part, d'après l'estimation (i) de la Proposition 4.4, la fonction ∇J_ε est lipschitzienne, donc J_ε est de classe $\mathcal{C}^{1,1}$. En utilisant la Proposition 4.5, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\nabla J_\varepsilon(x) - \nabla J_0(x) = - \int_0^\varepsilon [\nabla J_s(x) P_\Omega(\nabla J_s(x)) + J_s(x)^\top J_s''(x) \nabla P_\Omega(\nabla J_s(x))] ds,$$

où J_s'' est la matrice hessienne de la jauge J_s .

En utilisant le fait que la fonction jauge J_s est homogène, alors le hessien J_s'' est homogène d'ordre -1 . Ainsi comme l'application $A \in \mathcal{M}_{n,n} \rightarrow {}^\top A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est linéaire, alors on a $J_s(x)^\top J_s''(x) = J_s(x/\|x\|)^\top J_s''(x/\|x\|)$. D'autre part, en utilisant l'assertion (ii) de la proposition 1.8, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |P_\Omega(x) - P_\Omega(y)| \leq \sup_{a \in \mathbb{S}^{n-1}} P_\Omega(a) \|x - y\| \leq \sup_{a \in \mathbb{S}^{n-1}} P_D(a) \|x - y\|.$$

Ainsi, d'après le Théorème de Rademacher, on a $\|\nabla P_\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c$, où $c = \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D$. On aura donc

$$\begin{aligned} \|\nabla J_\varepsilon(x) - \nabla J_0(x)\| &\leq \int_0^\varepsilon [\|\nabla J_s(x)\|^2 |P_\Omega(\nabla J_s(x)/\|\nabla J_s(x)\|)|] ds \\ &\quad + \int_0^\varepsilon [\|J_s(x/\|x\|)^\top J_s''(x/\|x\|)\| \|\nabla P_\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}] ds \\ &\leq \int_0^\varepsilon [c \|\nabla J_s(x)\|^2 \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D + c \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} J_s \|J_s''(x/\|x\|)\|] ds \end{aligned}$$

D'une part, comme $0 \in \Omega_0$, fixons $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset \Omega_0 \subset \Omega_\varepsilon$, alors les domaines Ω_ε sont étoilés par rapport à la boule $B(0, r)$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$ (car ils sont convexes), d'après la proposition 2.2, on a

$$\|\nabla J_s(x)\| \leq \frac{1}{r}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall s \in [0, \varepsilon]. \tag{4.19}$$

D'autre part, on a

$$B(0, r) \subset \Omega_\varepsilon \subset D, \quad \text{pour tout } \varepsilon \in [0, 1].$$

Il découle alors de la Proposition 2.1 que $J_s \leq J_{B(0,r)}$, $\forall s \in [0, \varepsilon]$. Par suite, on aura

$$\|\nabla J_\varepsilon(x) - \nabla J_0(x)\| \leq \varepsilon \frac{c}{r^2} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D + c \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} J_{B(0,r)} \int_0^\varepsilon \|J_s''(x/\|x\|)\| ds.$$

Soit $K = D \setminus B(0, \sigma)$, ($\sigma > 0$) un voisinage de la sphère, alors la deuxième assertion de la Proposition 4.4, il existera une constante $C > 0$ qui dépend de K , Ω_0 et Ω , telle que :

$$\|J_\varepsilon''\|_{L^\infty(K)} \leq C.$$

Par suite pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|\nabla J_\varepsilon(x) - \nabla J_0(x)\| \leq \varepsilon \frac{c}{r^2} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D + c \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} J_{B(0,r)} \varepsilon C.$$

Ce qui termine la preuve de cette proposition. ■

Nous allons maintenant présenter quelques résultats d'estimations uniformes concernant l'application Φ_ε qui permet de transformer l'ouvert Ω_0 en l'ouvert Ω_ε . Ces estimations uniformes sont très utiles lorsqu'il s'agit d'établir les résultats d'existence de la dérivée de forme de problèmes aux limites.

Proposition 4.7 *Soit D un domaine borné convexe régulier de \mathbb{R}^n . Soient Ω_0 et Ω deux ouverts bornés convexes de classe \mathcal{C}^2 contenant 0, tels que $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega \subset D$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Considérons les applications suivantes :*

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n & \Psi_\varepsilon : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \Phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)}x & , x \neq 0 ; \\ 0 & , x = 0 \end{cases} & x &\mapsto \Psi_\varepsilon(y) = \begin{cases} \frac{J_\varepsilon(x)}{J_0(x)}x & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

où J_0 et J_ε sont respectivement les fonctions jauge associées aux domaines Ω_0 et Ω_ε . Alors on a les propriétés suivantes :

- (i) l'application $\Phi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme, tel que $\Phi_\varepsilon(\Omega_0) = \Omega_\varepsilon$ et $\Phi_\varepsilon(\partial\Omega_0) = \partial\Omega_\varepsilon$.
- (ii) Il existe une constante $C = C(r, D) > 0$, telle que

$$\|\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(y)\| \leq C(r, D)\|x - y\|, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\|\Psi_\varepsilon(x) - \Psi_\varepsilon(y)\| \leq C(r, D)\|x - y\|, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

où $\Psi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- (iii) Notons par $\gamma_{1,\varepsilon}$ et $\gamma_{2,\varepsilon}$ les deux applications définies de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} par $\gamma_{1,\varepsilon} = |\det(\nabla\Phi_\varepsilon)|$ et $\gamma_{2,\varepsilon} = |\det(\nabla\Psi_\varepsilon)|$. Alors il existe une constante $C = C(r, D) > 0$, telle qu'on a les estimations suivantes :

$$\max_{i \in \{1,2\}} (\|\gamma_{i,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}) \leq C(r, D), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

et

$$\max(\|\nabla\Phi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \|\nabla\Psi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}) \leq C(r, D), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

- (iv) Il existe une constante $C = C(r, D) > 0$, telle qu'on a les estimations suivantes :

$$\max \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon} (\nabla\Phi_\varepsilon - I_n) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \left\| \frac{1}{\varepsilon} (\nabla\Psi_\varepsilon - I_n) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \right) \leq C(r, D), \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

et

$$\max_{i \in \{1,2\}} \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon} (\gamma_{i,\varepsilon} - 1) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \right) \leq C(r, D), \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

(v) Considérons la matrice $\mathcal{A}_\varepsilon = \gamma_{1,\varepsilon} \nabla \Psi_\varepsilon^\top \nabla \Psi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, alors il existe une constante $C = C(r, D) > 0$, telle qu'on a l'estimation uniforme suivante :

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{A}_\varepsilon - I_n) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(r, D), \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Démonstration. Soient Ω_0 et Ω deux ouverts bornés convexes, tel qu'ils sont voisinages de 0. Alors les domaines $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon \Omega \subset D$ sont convexes, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Considérons ainsi les fonctions jauges J_0 et J_ε associées respectivement aux domaines Ω_0 et Ω_ε . Montrons (i), considérons l'application Φ_ε définie par $\Phi_\varepsilon(0) = 0$ et

$$\Phi_\varepsilon(x) = \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)} x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0.$$

En utilisant l'homogénéité des fonctions jauges on vérifie facilement que l'application Φ_ε est bijective et son inverse est défini par $\Phi_\varepsilon^{-1}(0) = 0$ et

$$\Phi_\varepsilon^{-1}(x) = \frac{J_\varepsilon(x)}{J_0(x)} x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0.$$

Notons par Ψ_ε l'application Φ_ε^{-1} . Comme $0 \in \Omega_0$, fixons $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset \Omega_0 \subset \Omega_\varepsilon$, alors les domaines Ω_ε sont étoilés par rapport à la boule $B(0, r)$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$ (car ils sont convexes), alors d'après la proposition 2.2, on a

$$|J_\varepsilon(y) - J_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{r} \|y - x\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (4.20)$$

Donc en particulier les fonctions $(J_\varepsilon)_{\varepsilon \in [0,1]}$ sont continues. Ainsi l'application Φ_ε définie un homéomorphisme. De plus d'après la Proposition 2.1, on a

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n ; J_\varepsilon(x) < 1\} \quad \text{et} \quad \partial\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n ; J_\varepsilon(x) = 1\}.$$

Ainsi, en utilisant l'homogénéité des fonctions jauges on vérifie les égalités :

$$\Phi_\varepsilon(\Omega_0) = \Omega_\varepsilon \quad \text{et} \quad \Phi_\varepsilon(\partial\Omega_0) = \partial\Omega_\varepsilon.$$

Montrons (ii) : soit $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors on a

$$\begin{aligned}
|\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(y)| &= \left| \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)}x - \frac{J_0(y)}{J_\varepsilon(y)}y \right| \\
&= \left| \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)}(x - y) + \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)}y - \frac{J_0(y)}{J_\varepsilon(y)}y \right| \\
&= \left| \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)}(x - y) + \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)}y - \frac{1}{J_\varepsilon(y)}(J_0(y) - J_0(x))y - J_0(x)\frac{1}{J_\varepsilon(y)}y \right| \\
&= \left| \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)}(x - y) + J_0(x) \left(\frac{1}{J_\varepsilon(x)} - \frac{1}{J_\varepsilon(y)} \right) y + (J_0(x) - J_0(y))\frac{1}{J_\varepsilon(y)}y \right| \\
&\leq \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)}\|x - y\| + \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)J_\varepsilon(y)}\|y\|\|J_\varepsilon(x) - J_\varepsilon(y)\| + \frac{1}{J_\varepsilon(y)}\|y\|\|J_0(x) - J_0(y)\|.
\end{aligned}$$

D'une part, on a

$$B(0, r) \subset \Omega_\varepsilon \subset D, \text{ pour tout } \varepsilon \in [0, 1].$$

Il découle alors de la Proposition 2.1 que

$$J_0 \leq J_{B(0,r)} \text{ et } 1/J_\varepsilon \leq 1/J_D. \quad (4.21)$$

Ainsi on a

$$\frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)} = \frac{J_0(x/\|x\|)}{J_\varepsilon(x/\|x\|)} \leq \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_0}{J_D}, \quad \frac{1}{J_\varepsilon(y)}\|y\| = \frac{1}{J_\varepsilon(y/\|y\|)} \leq \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{J_D}$$

et

$$\frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)J_\varepsilon(y)}\|y\| = \frac{J_0(x/\|x\|)}{J_\varepsilon(x/\|x\|)J_\varepsilon(y/\|y\|)} \leq \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_0}{J_D^2}.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité (4.20), on aura

$$|\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(y)| \leq \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_0}{J_D}\|x - y\| + \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_0}{J_D^2} \frac{1}{r}\|x - y\| + \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{J_D} \frac{1}{r}\|x - y\|.$$

Donc pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$|\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(y)| \leq C(D, r)\|x - y\|,$$

avec

$$C(D, r) = \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_0}{J_D} + \frac{1}{r} \left(\sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_0}{J_D^2} + \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{J_D} \right).$$

Ensuite on en déduit la deuxième inégalité vérifiée par Ψ_ε , en se basant sur les équations (4.20) et (4.21).

Montrons (iii) : tout d'abord d'après l'assertion (ii), comme $\Psi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon$ sont lipschitziennes, donc d'après le Théorème de Rademacher [42], elles sont presque partout différentiables. De plus on a les estimations

$$\max(\|\nabla \Phi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \|\nabla \Psi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}) \leq C(r, D), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[,$$

où $C(r, D)$ est le maximum des constantes de Lipschitz associées aux fonctions Ψ_ε et Φ_ε données par (ii). Établissons maintenant les estimations sur $\gamma_{1,\varepsilon} = |\det(\nabla\Phi_\varepsilon)|$ et $\gamma_{2,\varepsilon} = |\det(\nabla\Psi_\varepsilon)|$. Pour cela, calculons tout d'abord $\det(\nabla\Phi_\varepsilon)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\nabla\Phi_\varepsilon(x) = \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)} I_n + \frac{1}{J_\varepsilon(x)} x^\top \nabla J_0(x) - \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)^2} x^\top \nabla J_\varepsilon(x),$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n .

Ainsi

$$\nabla\Phi_\varepsilon(x) = \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)} \left[I_n + \frac{1}{J_0(x)} x^\top \nabla J_0(x) - \frac{1}{J_\varepsilon(x)} x^\top \nabla J_\varepsilon(x) \right].$$

Par suite, en utilisant le fait que l'application $A \in \mathcal{M}_{n,n} \rightarrow {}^\top A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est linéaire, on aura

$$\det(\nabla\Phi_\varepsilon(x)) = \left(\frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)} \right)^n \det(I_n + x^\top z).$$

avec $z = \nabla J_0(x) \frac{1}{J_0(x)} - \nabla J_\varepsilon(x) \frac{1}{J_\varepsilon(x)}$. Ainsi en utilisant la formule suivante :

$$\det(I_n + a^\top b) = 1 + {}^\top ab = 1 + \langle a, b \rangle, \quad a, b \in \mathbb{R}^n.$$

On obtient

$$\det(\nabla\Phi_\varepsilon(x)) = \left(\frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)} \right)^n (1 + {}^\top xz) = \left(\frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)} \right)^n \left(1 + {}^\top x \nabla J_\varepsilon(x) \frac{1}{J_\varepsilon(x)} - {}^\top x \nabla J_0(x) \frac{1}{J_0(x)} \right).$$

En utilisant le fait que la fonction jauge est homogène, on obtient

$${}^\top x \nabla J_\varepsilon(x) = \langle x, \nabla J_\varepsilon(x) \rangle = J_\varepsilon(x), \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Ainsi on aura

$$\gamma_{1,\varepsilon}(x) = |\det(\nabla\Phi_\varepsilon(x))| = \left(\frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)} \right)^n (1 + 1 - 1) = \left(\frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)} \right)^n.$$

De même pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, on montre que

$$\gamma_{2,\varepsilon}(x) = |\det(\nabla\Psi_\varepsilon(x))| = \left(\frac{J_\varepsilon(x)}{J_0(x)} \right)^n.$$

Comme $B(0, r) \subset \Omega_\varepsilon \subset D$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, il découle alors de la Proposition 2.1 que

$$J_\varepsilon \leq J_{B(0,r)} \text{ et } 1/J_\varepsilon \leq 1/J_D.$$

Ainsi on obtient les estimations :

$$\gamma_{1,\varepsilon}(x) = \left(\frac{J_0(x/\|x\|)}{J_\varepsilon(x/\|x\|)} \right)^n \leq \left(\frac{J_{B(0,r)}(x/\|x\|)}{J_D(x/\|x\|)} \right)^n \leq \left(\sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_{B(0,r)}}{J_D} \right)^n,$$

et

$$\gamma_{2,\varepsilon}(x) \leq \left(\sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_{B(0,r)}}{J_D} \right)^n.$$

Ce qui achève la preuve de (iii).

Montrons (iv), soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\nabla \Phi_\varepsilon(x) = \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)} I_n + \frac{1}{J_\varepsilon(x)} x^\top \nabla J_0(x) - \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)^2} x^\top \nabla J_\varepsilon(x).$$

Remarquons que pour $\varepsilon = 0$ et pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\nabla \Phi_0(x) = \frac{J_0(x)}{J_0(x)} I_n + \frac{1}{J_0(x)} x^\top \nabla J_0(x) - \frac{J_0(x)}{J_0(x)^2} x^\top \nabla J_0(x) = I_n.$$

Notons par

$$\Upsilon_\varepsilon = \left\| \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \Phi_\varepsilon(x) - I_n) \right\| = \left\| \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \Phi_\varepsilon(x) - \nabla \Phi_0(x)) \right\|.$$

On décompose ainsi Υ_ε comme suit :

$$\Upsilon_\varepsilon \leq \Upsilon_{1,\varepsilon} + \Upsilon_{2,\varepsilon} + \Upsilon_{3,\varepsilon},$$

avec

$$\Upsilon_{1,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \left\| \left(\frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)} - \frac{J_0(x)}{J_0(x)} \right) I_n \right\|, \quad \Upsilon_{2,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \left\| \left(\frac{1}{J_\varepsilon(x)} - \frac{1}{J_0(x)} \right) x^\top \nabla J_0(x) \right\|$$

et

$$\Upsilon_{3,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)^2} x^\top \nabla J_\varepsilon(x) - \frac{J_0(x)}{J_0(x)^2} x^\top \nabla J_0(x) \right\|.$$

Ensuite en utilisant l'homogénéité de la fonction jauge on obtient

$$\Upsilon_{1,\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{1}{J_\varepsilon(x/\|x\|)} (J_\varepsilon(x/\|x\|) - J_0(x/\|x\|)) \right\|.$$

Ainsi, par application de la Proposition 4.5, on aura

$$|J_\varepsilon(x/\|x\|) - J_0(x/\|x\|)| \leq \int_0^\varepsilon |J_s(x/\|x\|)| |P_\Omega(\nabla J_s(x/\|x\|))| ds.$$

En utilisant le fait que la fonction ∇J_s est homogène d'ordre 0, car les fonctions jauge sont homogènes d'ordre 1, on aura

$$|J_\varepsilon(x/\|x\|) - J_0(x/\|x\|)| \leq \int_0^\varepsilon |J_s(x/\|x\|)| |P_\Omega(\nabla J_s(x))| ds.$$

Comme $B(0,r) \subset \Omega_\varepsilon \subset D$, pour tout $\varepsilon \in [0,1]$, il découle alors de la Proposition 2.1, que

$$J_s \leq J_{B(0,r)}, \quad \forall s \in [0,\varepsilon], \quad \forall \varepsilon \in [0,1].$$

D'autre part, en utilisant le fait que les fonctions jauge J_ε sont $\frac{1}{r}$ -lipschitz (ceci

d'après (4.20)), alors d'après le Théorème de Rademacher, on a

$$\|\nabla J_\varepsilon(x)\| \leq \frac{1}{r}, \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1]. \quad (4.22)$$

Ainsi, en utilisant l'homogénéité de la fonction support et la fait que $\Omega \subset D$, on aura

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon(x/\|x\|) - J_0(x/\|x\|)| &\leq \int_0^\varepsilon |J_s(x/\|x\|)| |P_\Omega(\nabla J_s(x))| ds \\ &\leq \int_0^\varepsilon |J_{B(0,r)}(x/\|x\|)| |P_\Omega(\nabla J_s(x)/\|\nabla J_s(x)\|)| \|\nabla J_s(x)\| ds \\ &\leq \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} J_{B(0,r)} \frac{1}{r} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D \int_0^\varepsilon ds \\ &\leq \varepsilon \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} J_{B(0,r)} \frac{1}{r} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Par suite, comme $\frac{1}{J_\varepsilon} \leq \frac{1}{J_D}$, alors

$$\begin{aligned} \Upsilon_{1,\varepsilon} &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{1}{J_\varepsilon(x/\|x\|)} (J_\varepsilon(x/\|x\|) - J_0(x/\|x\|)) \right\| \\ &\leq \frac{1}{J_D(x/\|x\|)} \frac{1}{\varepsilon} \|(J_\varepsilon(x/\|x\|) - J_0(x/\|x\|))\| \\ &\leq \frac{1}{r} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{J_D} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} J_{B(0,r)} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D. \end{aligned}$$

Traitons maintenant le terme $\Upsilon_{2,\varepsilon}$, on a

$$\begin{aligned} \Upsilon_{2,\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon} \left\| \left(\frac{1}{J_\varepsilon(x)} - \frac{1}{J_0(x)} \right) x^\top \nabla J_0(x) \right\| \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{1}{J_\varepsilon(x)J_0(x)} (J_\varepsilon(x) - J_0(x)) x^\top \nabla J_0(x) \right\| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{1}{J_\varepsilon(x/\|x\|)J_0(x/\|x\|)} (J_\varepsilon(x/\|x\|) - J_0(x/\|x\|)) \frac{x}{\|x\|}^\top \nabla J_0(x) \right\| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{J_\varepsilon(x/\|x\|)J_0(x/\|x\|)} |J_\varepsilon(x/\|x\|) - J_0(x/\|x\|)| \|\nabla J_0(x)\|. \end{aligned}$$

D'après les équations (4.22) et (4.23), on obtient

$$\begin{aligned} \Upsilon_{2,\varepsilon} &\leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{J_\varepsilon(x/\|x\|)J_0(x/\|x\|)} |J_\varepsilon(x/\|x\|) - J_0(x/\|x\|)| \|\nabla J_0(x)\| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{J_D(x/\|x\|)^2} \frac{1}{r} \varepsilon \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} J_{B(0,r)} \frac{1}{r} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D \\ &\leq \frac{1}{r^2} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{J_D^2} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} J_{B(0,r)} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D. \end{aligned}$$

Il reste alors à estimer $\Upsilon_{3,\varepsilon}$. En utilisant le fait que l'application transposée est linéaire

dans $\mathcal{M}_{n,n}$, on aura

$$\begin{aligned}\Upsilon_{3,\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)^2} x^\top \nabla J_\varepsilon(x) - \frac{J_0(x)}{J_0(x)^2} x^\top \nabla J_0(x) \right\| \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left\| J_0(x) x^\top \left(\frac{1}{J_\varepsilon(x)^2} \nabla J_\varepsilon(x) - \frac{1}{J_0(x)^2} \nabla J_0(x) \right) \right\|.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\Upsilon_{3,\varepsilon} &\leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)^2} \|x\| \|\nabla J_\varepsilon(x) - \nabla J_0(x)\| \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \frac{J_0(x) \|x\|}{J_\varepsilon(x)^2 J_0(x)^2} \|\nabla J_0(x)\| |J_\varepsilon(x) - J_0(x)| |J_\varepsilon(x) + J_0(x)|.\end{aligned}$$

Afin d'estimer uniformément le terme $\Upsilon_{3,\varepsilon}$, d'après la Proposition 4.6, il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\|\nabla J_\varepsilon(x) - \nabla J_0(x)\| \leq \varepsilon C, \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon \in [0, 1[. \quad (4.24)$$

D'autre part, on sait que pour tout $\varepsilon \in [0, 1[$, on a $\frac{1}{J_\varepsilon} \leq \frac{1}{J_D}$ et $J_\varepsilon \leq J_{B(0,r)}$. Ainsi, en utilisant l'estimation (4.22), on aura

$$\begin{aligned}\Upsilon_{3,\varepsilon} &\leq C \frac{J_{B(0,r)}(x)}{J_D(x)^2} \|x\| + \frac{2}{r} \frac{1}{\varepsilon} \frac{J_0(x) J_{B(0,r)}^2(x) \|x\|}{J_\varepsilon(x)^2 J_0(x)^2} |J_\varepsilon(x) - J_0(x)| \\ &\leq C \frac{J_{B(0,r)}(x/\|x\|)}{J_D(x/\|x\|)^2} + \frac{2}{r} \frac{1}{\varepsilon} |J_\varepsilon(x/\|x\|) - J_0(x/\|x\|)| \frac{J_{B(0,r)}^3(x/\|x\|)}{J_D(x/\|x\|)^4} \\ &\leq C \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_{B(0,r)}}{J_D^2} + \frac{2}{r} \frac{1}{\varepsilon} |J_\varepsilon(x/\|x\|) - J_0(x/\|x\|)| \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_{B(0,r)}^3}{J_D^4}.\end{aligned}$$

Ensuite, d'après (4.23), on obtient

$$\Upsilon_{3,\varepsilon} \leq C \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_{B(0,r)}}{J_D^2} + \frac{2}{r^2} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_{B(0,r)}^4}{J_D^4} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D.$$

Par conséquent, il existe une constante $C = C(D, r) > 0$, telle qu'on a $|\Upsilon_\varepsilon|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(D, r)$. Les mêmes arguments peuvent être utilisés pour démontrer qu'il existe une constante $C = C(D, r) > 0$, telle que

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \Psi_\varepsilon - I_n) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(r, D), \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Il reste ainsi à estimer le terme

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} (\gamma_{i,\varepsilon} - 1) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Nous nous limitons à traiter le cas $i = 1$, ensuite le cas $i = 2$, en découle en utilisant les

même techniques. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\varepsilon} (\gamma_{1,\varepsilon}(x) - 1) \right| &= \frac{1}{\varepsilon} |\det(\nabla \Phi_\varepsilon(x)) - 1| = \frac{1}{\varepsilon} \left| \left(\frac{J_\varepsilon(x)}{J_0(x)} \right)^n - 1 \right| \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{J_0^n(x)} |J_\varepsilon^n(x) - J_0^n(x)| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{J_0^n(x)} |J_\varepsilon(x) - J_0(x)| \sum_{\ell=0}^{n-1} J_\varepsilon^{n-1-\ell}(x) J_0^\ell(x). \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant (4.23), on obtient

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\varepsilon} (\gamma_{1,\varepsilon}(x) - 1) \right| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{J_D^n(x)} |J_\varepsilon(x) - J_0(x)| \sum_{\ell=0}^{n-1} J_{B(0,r)}^{n-1-\ell}(x) J_{B(0,r)}^\ell(x) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{J_{B(0,r)}^{n-1}(x)}{J_D^n(x)} |J_\varepsilon(x) - J_0(x)| (n-1) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{J_{B(0,r)}^{n-1}(x/\|x\|)}{J_D^n(x/\|x\|)} |J_\varepsilon(x/\|x\|) - J_0(x/\|x\|)| (n-1) \\ &\leq \frac{J_{B(0,r)}^{n-1}(x/\|x\|)}{J_D^n(x/\|x\|)} (n-1) \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} J_{B(0,r)} \frac{1}{r} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D \\ &\leq \frac{(n-1)}{r} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_{B(0,r)}^n}{J_D^n} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve de (iv).

Montrons maintenant la dernière assertion (v). Considérons la matrice

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \gamma_{1,\varepsilon} \nabla \Psi_\varepsilon^\top \nabla \Psi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n^2},$$

montrons qu'il existe une constante $C = C(r, D) > 0$, telle qu'on a l'estimations uniforme suivante :

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{A}_\varepsilon - I_n) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(r, D), \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{A}_\varepsilon(x) - I_n) \right\| &= \frac{1}{\varepsilon} \|\gamma_{1,\varepsilon}(x) \nabla \Psi_\varepsilon(x)^\top \nabla \Psi_\varepsilon(x) - I_n\| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} |\gamma_{1,\varepsilon}(x) - 1| \|\nabla \Psi_\varepsilon(x)\| \|\nabla \Psi_\varepsilon(x)\| + \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla \Psi_\varepsilon(x)\| \|\nabla \Psi_\varepsilon(x) - I_n\| \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla \Psi_\varepsilon(x) - I_n\|. \end{aligned}$$

En utilisant ainsi (iii) et le fait que $\nabla \Psi_\varepsilon(x)^\top \nabla \Psi_\varepsilon(x) - I_n = \nabla \Psi_\varepsilon(x)^\top (\nabla \Psi_\varepsilon(x) - I_n)$, il existe une constante $C = C(D, r) > 0$, telle qu'on a

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{A}_\varepsilon(x) - I_n) \right\| \leq C \frac{1}{\varepsilon} \|\gamma_{1,\varepsilon} - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + 2C \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla \Psi_\varepsilon - I_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Par suite d'après (iv), il existe une constante $C(r, D)$, telle que (v) est vérifiée. Ce qui

achève la preuve de la proposition. ■

4.2 Quelques estimations et inégalités uniformes par rapport aux domaines sur les espaces de Sobolev

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques estimations uniformes très utiles pour étudier l'existence de la dérivée de forme des problèmes aux limites elliptiques.

Soit D un ouvert convexe borné assez régulier et soient $\Omega_0 \subset D$ un domaine borné étoilé par rapport à une boule et $\Omega \subset D$ un domaine convexe borné. Alors, il existe une suite $(\Omega^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de domaines fortement convexes, telle que $\Omega_k \subset \Omega$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et que la suite Ω^k converge vers Ω au sens de Hausdorff. Nous avons alors le résultat d'estimation suivant dont la preuve est une conséquence immédiate de celle du Lemme 2.8.

Lemme 4.6 *Soit $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ une famille de fonctions dans $W^{1,1}(D)$. Alors, il existe une constante $c > 0$ indépendante de ε et k telle que, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$,*

$$\left| \int_{\Omega_{\varepsilon,k}} f_\varepsilon(x) dx - \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(x) dx \right| \leq \varepsilon c \|f_\varepsilon\|_{W^{1,1}(D)} d^H(\overline{\Omega^k}, \overline{\Omega}).$$

où $\Omega_{\varepsilon,k} = \Omega_0 + \varepsilon\Omega_k$ et $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega$.

Comme conséquence de ce résultat, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 4.2 *Soient $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ deux familles de fonctions dans $H^1(D)$. Alors, il existe une constante $c > 0$ indépendante de ε et k , telle que, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$,*

$$\left| \int_{\Omega_{\varepsilon,k}} f_\varepsilon g_\varepsilon(x) dx - \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon g_\varepsilon(x) dx \right| \leq \varepsilon c \|f_\varepsilon\|_{H^1(D)} \|g_\varepsilon\|_{H^1(D)} d^H(\overline{\Omega^k}, \overline{\Omega}).$$

Nous aurons également besoin des estimations suivantes faisant intervenir les fonctions jauges.

Proposition 4.8 *Soit D un domaine borné convexe régulier de \mathbb{R}^n . Soit Ω_0 et Ω deux ouverts bornés convexes contenant 0, tels que $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega \subset D$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Soit $g \in H^1(D)$, alors il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de D , telle qu'on a l'estimation :*

$$\left\| \frac{g \circ \Phi_\varepsilon - g}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C(D) \|\nabla g\|_{L^2(D)}, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1]. \quad (4.25)$$

Si de plus $g \in H^2(D)$, alors il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de D , telle qu'on a l'estimation :

$$\left\| \frac{\nabla(g \circ \Phi_\varepsilon) - \nabla g}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C(D) \|g\|_{H^2(D)}, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1], \quad (4.26)$$

où $\Phi_\varepsilon = \frac{J_0}{J_\varepsilon} Id_{\mathbb{R}^n}$, J_0 et J_ε sont les fonctions jauge associées respectivement aux domaines Ω_0 et Ω_ε .

Démonstration. Soit D un domaine borné convexe régulier suffisamment grand, tel que $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega \subset D$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$ et soit $g \in H^1(D)$. Montrons la première estimation (4.25) en supposant dans un premier temps que $g \in \mathcal{D}(\overline{D})$. Soit $x \in \Omega_0$; en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, on aura

$$g(\Phi_\varepsilon(x)) - g(x) = \int_0^1 \nabla g([(1-t) + t\alpha_\varepsilon(x)]x) dt (\Phi_\varepsilon(x) - x),$$

où $\Phi_\varepsilon(x) = \alpha_\varepsilon(x)x$ et $\alpha_\varepsilon(x) = \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)}$. Ainsi on a

$$\left\| \frac{g \circ \Phi_\varepsilon - g}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)}^2 = \int_{\Omega_0} \left(\int_0^1 \nabla g([(1-t) + t\alpha_\varepsilon(x)]x) dt \frac{(\Phi_\varepsilon(x) - x)}{\varepsilon} \right)^2 dx.$$

D'autre part, on a

$$\left\| \frac{\Phi_\varepsilon(x) - x}{\varepsilon} \right\| = \left\| \frac{J_0(x)/J_\varepsilon(x) - 1}{\varepsilon} x \right\| = \left\| \frac{J_0(x) - J_\varepsilon(x)}{\varepsilon} \frac{1}{J_\varepsilon(x)} x \right\| \leq \left| \frac{J_0(x) - J_\varepsilon(x)}{\varepsilon} \right| \frac{1}{J_\varepsilon(x/\|x\|)}$$

En utilisant la Proposition 4.5, on a

$$|J_0(x) - J_\varepsilon(x)| \leq \int_0^\varepsilon |J_s(x)| |P_\Omega(\nabla J_s(x))| ds.$$

Comme $0 \in \Omega_0$, fixons $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset \Omega_0 \subset \Omega_\varepsilon$. Alors les domaines Ω_ε sont étoilés par rapport à la boule $B(0, r)$, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$ (car ils sont convexes). Il découle alors de la Proposition 2.1, que $J_D \leq J_\varepsilon \leq J_{B(0,r)}$. En utilisant le fait que les fonctions jauge J_ε sont $\frac{1}{r}$ -lipschitz (ceci d'après (4.20)), alors d'après le Théorème de Rademacher (voir par exemple [42]), on a

$$\|\nabla J_\varepsilon(x)\| \leq \frac{1}{r}, \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1]. \quad (4.27)$$

Ainsi, en utilisant l'homogénéité de la fonction support et le fait que $\Omega \subset D$, on aura

$$\begin{aligned} |J_0(x) - J_\varepsilon(x)| &\leq \int_0^\varepsilon |J_s(x)| |P_\Omega(\nabla J_s(x))| ds \\ &\leq \int_0^\varepsilon |J_{B(0,r)}(x)| |P_\Omega(\nabla J_s(x)/\|\nabla J_s(x)\|)| \|\nabla J_s(x)\| ds \\ &\leq \sup_D J_{B(0,r)} \frac{1}{r} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D \int_0^\varepsilon ds \\ &\leq \varepsilon \sup_D J_{B(0,r)} \frac{1}{r} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\Phi_\varepsilon(x) - x}{\varepsilon} \right\| &\leq \sup_D J_{B(0,r)} \frac{1}{r} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D \frac{1}{J_D(x/\|x\|)} \\ &\leq \sup_D J_{B(0,r)} \frac{1}{r} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{J_D}. \end{aligned}$$

Il existe alors une constante $C = C(D)$, telle qu'on a

$$\left\| \frac{g \circ \Phi_\varepsilon - g}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \leq C \int_{\Omega_0} \left(\int_0^1 \|\nabla g([(1-t) + t\alpha_\varepsilon(x)]x)\| dt \right)^2 dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\left\| \frac{g \circ \Phi_\varepsilon - g}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \leq C \int_{\Omega_0} \int_0^1 \|\nabla g([(1-t) + t\alpha_\varepsilon(x)]x)\|^2 dt dx.$$

Considérons maintenant la fonction

$$s \in [0, 1] \mapsto \varsigma(s) = \frac{s-1}{\alpha_\varepsilon(x)-1}, \quad \varsigma(1) = 0, \quad \varsigma(\alpha_\varepsilon(x)) = 1 \quad \text{et} \quad \varsigma'(s) = \frac{1}{\alpha_\varepsilon(x)-1}.$$

En appliquant ainsi un changement de variable en utilisant la fonction réelle ς , on aura

$$\left\| \frac{g \circ \Phi_\varepsilon - g}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \leq C \int_{\Omega_0} \int_1^{\alpha_\varepsilon(x)} \|\nabla g(sx)\|^2 ds \frac{1}{\alpha_\varepsilon(x)-1} dx.$$

Comme $0 \in \Omega$ et Ω convexe, alors $\varepsilon\Omega \subset \Omega$. Donc,

$$\Omega_0 \subset \Omega_\varepsilon \subseteq \Omega_0 + \Omega.$$

ainsi $\alpha_\varepsilon(x) > 1$. D'autre part, il existe une constante $\beta > 0$, telle que

$$[1, \alpha_\varepsilon(x)] \subseteq [1, \beta], \quad \forall x \in \Omega_0, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

En effet, comme $J_{\Omega_0+\Omega} \leq J_\varepsilon \leq J_{B(0,r)}$, alors

$$\alpha_\varepsilon(x) = \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)} \leq \frac{J_0(x/\|x\|)}{J_\varepsilon(x/\|x\|)} \leq \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_{B(0,r)}}{J_{\Omega_0+\Omega}}.$$

Notons par $\beta = \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} (J_{B(0,r)}/J_{\Omega_0+\Omega})$, alors en utilisant le Théorème de Fubini [20], on peut écrire

$$\begin{aligned} \left\| \frac{g \circ \Phi_\varepsilon - g}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &\leq C \int_{\Omega_0} \int_1^\beta \chi_{[1, \alpha_\varepsilon(x)]} \|\nabla g(sx)\|^2 ds \frac{1}{\alpha_\varepsilon(x)-1} dx \\ &\leq C \int_1^\beta \int_{\Omega_0} \chi_{[1, \alpha_\varepsilon(x)]} \|\nabla g(sx)\|^2 \frac{1}{\alpha_\varepsilon(x)-1} dx ds. \end{aligned}$$

En appliquant maintenant un changement de variable en utilisant l'homothétie $x \mapsto sx$ et le fait que la fonction $x \mapsto \alpha_\varepsilon(x)$ est homogène d'ordre 0, on aura

$$\int_{\Omega_0} \chi_{[1, \alpha_\varepsilon(x)]} \|\nabla g(sx)\|^2 \frac{1}{\alpha_\varepsilon(x) - 1} dx = \int_{s\Omega_0} \chi_{[1, \alpha_\varepsilon(x)]} \|\nabla g(x)\|^2 \frac{1}{\alpha_\varepsilon(x) - 1} \frac{1}{s^n} dx.$$

Or, pour tout $s \in [1, \beta]$, on a $\frac{1}{s^n} \leq 1$. De plus comme l'intervalle $[1, \beta]$ ne dépend pas de D qui est choisie suffisamment grand, alors pour tout $s \in [1, \beta]$ on a $s\Omega_0 \subset D$. Par suite on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{g \circ \Phi_\varepsilon - g}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &\leq C \int_1^\beta \int_{s\Omega_0} \chi_{[1, \alpha_\varepsilon(x)]} \|\nabla g(x)\|^2 \frac{1}{\alpha_\varepsilon(x) - 1} \frac{1}{s^n} dx ds \\ &\leq C \int_1^\beta \int_D \chi_{[1, \alpha_\varepsilon(x)]} \|\nabla g(x)\|^2 \frac{1}{\alpha_\varepsilon(x) - 1} dx ds \\ &\leq C \int_D \int_1^{\alpha_\varepsilon(x)} \|\nabla g(x)\|^2 \frac{1}{\alpha_\varepsilon(x) - 1} dx ds \\ &\leq C \int_1^{\alpha_\varepsilon(x)} \frac{1}{\alpha_\varepsilon(x) - 1} ds \int_D \|\nabla g(x)\|^2 dx \\ &\leq C \|\nabla g\|_{L^2(D)}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend pas de g , telle pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on a

$$\left\| \frac{g \circ \Phi_\varepsilon - g}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C \|\nabla g\|_{L^2(D)}, \quad \forall g \in \mathcal{D}(\overline{D}). \quad (4.29)$$

Maintenant soit $g \in H^1(D)$, il existe une suite $(g_\ell)_\ell$ dans $\mathcal{D}(\overline{D})$ qui converge vers g dans $H^1(D)$. Donc l'estimation (4.29) est vérifiée pour tout $g_\ell, \forall \ell \in \mathbb{N}$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{g \circ \Phi_\varepsilon - g}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)} &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|g \circ \Phi_\varepsilon - g_\ell \circ \Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)} + \left\| \frac{g_\ell \circ \Phi_\varepsilon - g_\ell}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)} + \frac{1}{\varepsilon} \|g - g_\ell\|_{L^2(\Omega_0)} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|(g - g_\ell) \circ \Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)} + C \|\nabla g_\ell\|_{L^2(D)} + \frac{1}{\varepsilon} \|g - g_\ell\|_{L^2(\Omega_0)}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.7, l'application $\Phi_\varepsilon : \Omega_0 \rightarrow \Omega_\varepsilon$ est un homéomorphisme bi-lipschitzien, ainsi en utilisant la formule de changement de variable dans le cas des homéomorphismes bi-lipschitziens [39], on aura

$$\|(g - g_\ell) \circ \Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)}^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} |(g - g_\ell)(x)|^2 \gamma_\varepsilon(x) dx.$$

où $\gamma_\varepsilon = |\det(\nabla \Phi_\varepsilon)|$. Or d'après la proposition 4.7, il existe $c > 0$, une constante indépendante de ε , telle que

$$\|\gamma_\varepsilon\|_{L^\infty(D)} \leq c.$$

Ainsi, comme $(g - g_\ell) \in L^2(D)$, on aura

$$\|(g - g_\ell) \circ \Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)} \leq c \|g - g_\ell\|_{L^2(D)}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Par suite,

$$\left\| \frac{g \circ \Phi_\varepsilon - g}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq (c + C) \frac{1}{\varepsilon} \|g - g_\ell\|_{L^2(D)} + C \|\nabla g_\ell\|_{L^2(D)}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Par passage à limite, quand ℓ tend vers $+\infty$, on obtient

$$\left\| \frac{g \circ \Phi_\varepsilon - g}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C \|\nabla g\|_{L^2(D)}, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Montrons maintenant la deuxième estimation (4.26) en supposant que $g \in H^2(D)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\nabla(g \circ \Phi_\varepsilon) - \nabla g}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega_0} \left\| \frac{\nabla(g \circ \Phi_\varepsilon) - \nabla g}{\varepsilon} \right\|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_0} \left\| \frac{\top \nabla \Phi_\varepsilon \nabla g(\Phi_\varepsilon) - \nabla g}{\varepsilon} \right\|^2 dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega_0} \left\| \top \nabla \Phi_\varepsilon \cdot \frac{\nabla g(\Phi_\varepsilon) - \nabla g}{\varepsilon} \right\|^2 dx + 2 \int_{\Omega_0} \left\| \nabla g \cdot \frac{\top (\nabla \Phi_\varepsilon - I_n)}{\varepsilon} \right\|^2 dx, \end{aligned}$$

où I_n est la matrice identité.

D'après la Proposition 4.7, il existe une constante $c = c(D) > 0$, telle qu'on a

$$\max \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon} (I_n - \nabla \Phi_\varepsilon) \right\|_{L^\infty(D)}, \|\nabla \Phi_\varepsilon\|_{L^\infty(D)} \right) \leq c, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Ainsi on aura

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\nabla(g \circ \Phi_\varepsilon) - \nabla g}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &\leq 2c^2 \int_{\Omega_0} \left\| \frac{\nabla g(\Phi_\varepsilon) - \nabla g}{\varepsilon} \right\|^2 dx + 2c^2 \int_{\Omega_0} \|\nabla g\|^2 dx \\ &\leq c^2 \int_{\Omega_0} \left\| \frac{\nabla g(\Phi_\varepsilon) - \nabla g}{\varepsilon} \right\|^2 dx + 2c^2 \|\nabla g\|_{L^2(D)}^2 \end{aligned}$$

En appliquant l'estimation (4.25) à la fonction $\nabla g \in H^1(D)$, alors il existe une constante $C > 0$, telle pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on a

$$\left\| \frac{\nabla(g \circ \Phi_\varepsilon) - \nabla g}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \leq C \|\nabla(\nabla g)\|_{L^2(D)}^2 + C \|\nabla g\|_{L^2(D)}^2 \leq 2C \|g\|_{H^2(D)}^2.$$

Ce qui achève la preuve de ce résultat.



Résultats de continuité et d'interpolation sur les espaces de Sobolev et de Hölder

Dans ce paragraphe, nous présentons un résultat de continuité sur les espaces de Sobolev et de Hölder et un résultat d'interpolation. Nous commençons ainsi par celui de la continuité, où nous montrons que si une suite de fonctions (g_k) converge en norme L^∞ vers 0 et que le gradient g_k est uniformément borné, alors toutes les dérivées d'ordre inférieur à 1 converge également en norme L^∞ . Ce résultat fait l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.7 *Soit Ω_0 un ouvert borné de \mathbb{R}^n de bord $\Gamma_0 := \partial\Omega_0$ lipschitzien. Soient $\alpha \in]0, 1[$ et une suite $(g_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_0)$, telle que*

$$\|g_k\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_0)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \tag{4.30}$$

et

$$\exists M > 0, \quad |g_k(x) - g_k(y)| \leq M\|x - y\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}_0. \tag{4.31}$$

Alors la suite $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans l'espace $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_0)$, i.e.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|g_k\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_0)} = 0. \tag{4.32}$$

Démonstration. Soit Ω_0 un ouvert borné à bord lipschitzien. Soit $\alpha \in]1/2, 1[$ et soit une suite $(g_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_0)$ satisfait les conditions (4.30) et (4.31). Montrons que $\|g_k\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_0)}$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$ la norme höldérienne d'un élément g_k est donnée par :

$$\|g_k\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_0)} = \|g_k\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_0)} + |g_k|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_0)},$$

où $|\cdot|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_0)}$ est la semi-norme de l'espace $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_0)$, donnée par :

$$|g_k|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_0)} = \sup_{\substack{x, y \in \Omega_0, \\ x \neq y}} \frac{|g_k(x) - g_k(y)|}{\|x - y\|^\alpha}.$$

Par hypothèse on a $\|g_k\|_{L^\infty(\overline{\Omega}_0)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, il reste alors à traiter le terme $|g_k|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_0)}$. Pour ce faire, soit $\eta > 0$, $\rho = \frac{1}{M}\eta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ et $x, y \in \Omega_0$ ($x \neq y$), en utilisant le fait qu'il existe une constante $M > 0$, telle que la quantité $|g_k(x) - g_k(y)|/\|x - y\|$ est majorée uniformément par une constante $M > 0$, alors on a

$$\begin{aligned} \frac{|g_k(x) - g_k(y)|}{\|x - y\|^\alpha} &= \frac{|g_k(x) - g_k(y)|}{\|x - y\|} \|x - y\|^{1-\alpha} \\ &\leq M\|x - y\|^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

On distingue alors deux cas :

si $\|x - y\| \leq \rho$, alors on a

$$\frac{|g_k(x) - g_k(y)|}{\|x - y\|^\alpha} \leq M\|x - y\|^{1-\alpha} \leq M\rho^{1-\alpha}, \quad (4.33)$$

et si $\|x - y\| > \rho$, alors aura

$$\frac{|g_k(x) - g_k(y)|}{\|x - y\|^\alpha} \leq \frac{(|g_k(x)| + |g_k(y)|)}{\rho^\alpha} \leq 2\|g_k\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_0)} \frac{1}{\rho^\alpha}. \quad (4.34)$$

Alors de (4.33) et (4.34) on obtient

$$|g_k|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)} \leq \max(M\rho^{1-\alpha}, 2\|g_k\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_0)} \frac{1}{\rho^\alpha}) = \max(\eta, 2\|g_k\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_0)} M\eta^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}).$$

Comme $\alpha < 1$, soit maintenant $\delta = \frac{M}{2}\eta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, alors comme $\|g_k\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_0)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, il existe alors k_η , tel que pour tout $k \geq k_\eta$ on ait $\|g_k\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_0)} < \frac{M}{2}\eta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Par suite pour tout $k \geq k_\eta$, on a

$$|g_k|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)} \leq \max(\eta, 2\|g_k\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_0)} M\eta^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}) \leq \eta.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. ■

Pour la suite de ce travail nous aurons besoin de ce résultat d'interpolation.

Lemme 4.8 *Soit Ω_0 un ouvert borné de \mathbb{R}^n de bord $\Gamma_0 := \partial\Omega_0$ lipschitzien. Soient $\alpha \in]1/2, 1[$, $f \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ et $g \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)$, alors il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend que de Γ_0 et n , telle qu'on a l'estimation suivante :*

$$\|fg\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} \leq C(\Gamma_0, n)\|f\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}\|g\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)}. \quad (4.35)$$

Démonstration. Soit Ω_0 un ouvert borné à bord lipschitzien noté par $\Gamma_0 := \partial\Omega_0$. Soit $\alpha \in]1/2, 1[$, $f \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ et $g \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)$, alors par définition on a

$$\|fg\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}^2 = \|fg\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 + |fg|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}^2,$$

où $|\cdot|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}$ est la semi-norme de l'espace $H^{1/2}(\Gamma_0)$ donnée par :

$$|fg|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} = \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} \frac{|(fg)(x) - (fg)(y)|^2}{\|x - y\|^n} d\sigma_x d\sigma_y.$$

Par hypothèse on a $g \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)$, ce qui nous permet d'avoir l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|fg\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 &= \int_{\Gamma_0} |fg|^2 d\sigma \\ &\leq \|g\|_{L^\infty(\Gamma_0)}^2 \|f\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 \\ &\leq \|g\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)}^2 \|f\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}^2. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Il reste ainsi à traiter le deuxième terme associé à la semi-norme. En effet, on a

$$\begin{aligned}
 |fg|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}^2 &= \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} \frac{|(fg)(x) - (fg)(y)|^2}{\|x - y\|^n} d\sigma_x d\sigma_y \\
 &\leq \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} \frac{|(f(x) - f(y))g(x) + f(y)(g(x) - g(y))|^2}{\|x - y\|^n} d\sigma_x d\sigma_y \\
 &\leq 2 \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} \frac{|f(x) - f(y)|^2 |g(x)|^2}{\|x - y\|^n} d\sigma_x d\sigma_y + 2 \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} \frac{|f(y)|^2 |g(x) - g(y)|^2}{\|x - y\|^n} d\sigma_x d\sigma_y.
 \end{aligned}$$

Or par définition de la norme $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)}$, on a la majoration

$$|g(x) - g(y)| \leq \|g\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)} \|x - y\|^\alpha, \quad \forall x \neq y.$$

De plus comme $g \in L^\infty$, alors on aura

$$\begin{aligned}
 |fg|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}^2 &\leq 2 \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} \frac{|f(x) - f(y)|^2 |g(x)|^2}{\|x - y\|^n} d\sigma_x d\sigma_y + 2 \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} \frac{|f(y)|^2 |g(x) - g(y)|^2}{\|x - y\|^n} d\sigma_x d\sigma_y \\
 &\leq 2 \|g\|_{L^\infty(\Gamma_0)}^2 \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{\|x - y\|^n} d\sigma_x d\sigma_y + 2 \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} \frac{|f(y)|^2 \|g\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)}^2 \|x - y\|^{2\alpha}}{\|x - y\|^n} d\sigma_x d\sigma_y \\
 &\leq 2 \|g\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)}^2 |f|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}^2 + 2 \|g\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)}^2 \int_{\Gamma_0} |f(y)|^2 \int_{\Gamma_0} \frac{1}{\|x - y\|^{n-2\alpha}} d\sigma_x d\sigma_y
 \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la régularité lipschitz du bord Γ_0 et le fait que $\alpha \in]1/2, 1[$ (donc $n - 2\alpha < n - 1$), puis en se basant sur les mêmes techniques que celles du Lemme C.2.3 de [39], il existera alors une constante M qui dépend de Γ_0 , telle que pour tout $y \in \Gamma_0$, on a

$$\int_{\Gamma_0} \frac{1}{\|x - y\|^{n-2\alpha}} d\sigma_x \leq M.$$

Par suite on obtient,

$$\begin{aligned}
 |fg|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}^2 &\leq 2 \|g\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)}^2 |f|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}^2 + 2M \|g\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)}^2 \|f\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 \\
 &\leq 2(1 + M) \|g\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)}^2 |f|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}^2.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Ainsi les inégalités (4.36) et (4.37) entraînent que

$$\|fg\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}^2 \leq \|g\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)}^2 \|f\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}^2 + 2(1 + M) \|g\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)}^2 |f|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}^2.$$

En conséquence, il existe alors une constante $C = C(\Gamma_0, n)$, telle qu'on ait

$$\|fg\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} \leq C \|g\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)} \|f\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}.$$

D'où le résultat. ■

4.3 Quelques propriétés sur les fonctions support

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques propriétés sur les fonctions support qui seront utiles pour la suite de ce chapitre, en l'occurrence, quelques résultats de continuité de ces fonctions par rapport aux domaines. Pour cela, nous commençons par établir la formule du changement de variable suivante :

Lemme 4.9 *Soit Ω_0 un ouvert borné convexe et soit Υ une fonction dans $L^1(D)$, alors on a la formule*

$$\int_{\Omega_0} \Upsilon(x) dx = \int_0^1 \int_{\partial\Omega_0} \Upsilon(\rho x) \frac{1}{\|\nabla J_{\Omega_0}(x)\|} \rho^{n-1} d\sigma(x) d\rho,$$

où J_{Ω_0} est la fonction jauge associée au domaine Ω_0 .

Démonstration. Soit Υ une fonction intégrable, alors en utilisant un changement de variable en coordonnées polaires (voir par exemple Proposition 1 de [42]), on a

$$\int_{\Omega_0} \Upsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\Omega_0} \Upsilon(x) dx = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_{\Omega_0}(\rho\omega) \Upsilon(\rho\omega) d\omega \rho^{n-1} d\rho = \int_0^{+\infty} \Xi(\rho) \rho^{n-1} d\rho,$$

où $\Xi(\rho) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_{\Omega_0}(\rho\omega) \Upsilon(\rho\omega) d\omega$. Ensuite on considère l'homéomorphisme bi-lipschitzien et son inverse définis par :

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega_0 &\longrightarrow B(0, 1) \\ x &\longmapsto \Phi(x) = \begin{cases} \frac{J_{\Omega_0}(x)}{\|x\|} x & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Psi : B(0, 1) &\longrightarrow \Omega_0 \\ x &\longmapsto \Phi^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{\|y\|}{J_{\Omega_0}(y)} y & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

vérifiant $\Phi(\partial\Omega_0) = \mathbb{S}^{n-1}$. Alors en utilisant le changement de variable dans le cas des homéomorphismes bi-lipschitziens [39], on aura :

$$\begin{aligned} \Xi(\rho) &= \int_{\Phi(\partial\Omega_0)} \chi_{\Omega_0}(\rho\omega) \Upsilon(\rho\omega) d\omega \\ &= \int_{\partial\Omega_0} \chi_{\Omega_0}(\rho\Phi(x)) \Upsilon(\rho\Phi(x)) |\det(\nabla\Phi(x))| |(\nabla\Phi(x))^{-T} \nu_0| d\sigma(x), \end{aligned}$$

où $\nabla\Phi(x)^{-T}$ désigne le transposé de la matrice inverse $\nabla\Phi(x)^{-1}$. En utilisant les mêmes calculs que dans la démonstration de la Proposition 4.2, on montre que

$$|\det(\nabla\Phi(x))| |(\nabla\Phi(x))^{-T} \nu_0| = \frac{1}{\|x\|^n \|\nabla J_{\Omega_0}(x)\|}.$$

Ainsi on obtient

$$\Xi(\rho) = \int_{\partial\Omega_0} \chi_{\Omega_0}(\rho\Phi(x)) \Upsilon(\rho\Phi(x)) \frac{1}{\|x\|^n \|\nabla J_{\Omega_0}(x)\|} d\sigma(x).$$

Or d'après la Proposition 2.1, on a pour tout $x \in \partial\Omega_0$, $J_{\Omega_0}(x) = 1$, alors

$$\Phi(x) = \frac{J_{\Omega_0}(x)}{\|x\|} x = \frac{x}{\|x\|}, \quad \forall x \in \partial\Omega_0.$$

Par suite

$$\int_{\Omega_0} \Upsilon(x) dx = \int_0^{+\infty} \int_{\partial\Omega_0} \chi_{\Omega_0} \left(\rho \frac{x}{\|x\|} \right) \Upsilon \left(\rho \frac{x}{\|x\|} \right) \frac{1}{\|x\|^n \|\nabla J_{\Omega_0}(x)\|} d\sigma(x) \rho^{n-1} d\rho.$$

D'autre part, d'après la Proposition 2.1 on sait que la fonction jauge vérifie $\Omega_0 = \{J_{\Omega_0} < 1\}$. En utilisant l'homogénéité de la fonction J_{Ω_0} , on aura alors, pour tout $x \in \partial\Omega_0$:

$$\chi_{\Omega_0} \left(\rho \frac{x}{\|x\|} \right) = \begin{cases} 1, & \rho \frac{x}{\|x\|} \omega \in \Omega_0 \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1, & J_{\Omega_0}(\rho \frac{x}{\|x\|}) < 1 \\ 0, & J_{\Omega_0}(\rho \frac{x}{\|x\|}) \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \rho < \|x\| \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases} = \chi_{[0, \|x\|]}(\rho)$$

Ainsi on aura

$$\int_{\Omega_0} \Upsilon(x) dx = \int_{\partial\Omega_0} \int_0^{\|x\|} \Upsilon \left(\rho \frac{x}{\|x\|} \right) \frac{1}{\|x\|^n \|\nabla J_{\Omega_0}(x)\|} \rho^{n-1} d\rho d\sigma(x).$$

Considérons la fonction $t \in [0, 1] \mapsto \varsigma(t) = t\|x\|$, $\varsigma(0) = 0$, $\varsigma(1) = \|x\|$ et $\varsigma'(t) = \|x\|$. En appliquant ainsi un changement de variable en utilisant la fonction réelle ς , on aura alors le résultat

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \Upsilon(x) dx &= \int_{\partial\Omega_0} \int_{\varsigma(0)}^{\varsigma(1)} \Upsilon \left(\rho \frac{x}{\|x\|} \right) \frac{1}{\|x\|^n \|\nabla J_{\Omega_0}(x)\|} \rho^{n-1} d\rho d\sigma(x) \\ &= \int_{\partial\Omega_0} \int_0^1 \Upsilon \left(\varsigma(t) \frac{x}{\|x\|} \right) \frac{1}{\|x\|^n \|\nabla J_{\Omega_0}(x)\|} (\varsigma(t))^{n-1} \varsigma'(t) dt d\sigma(x) \\ &= \int_{\partial\Omega_0} \int_0^1 \Upsilon \left(t\|x\| \frac{x}{\|x\|} \right) \frac{1}{\|x\|^n \|\nabla J_{\Omega_0}(x)\|} (t\|x\|)^{n-1} \|x\| dt d\sigma(x) \\ &= \int_0^1 \int_{\partial\Omega_0} \Upsilon(tx) \frac{1}{\|\nabla J_{\Omega_0}(x)\|} t^{n-1} d\sigma(x) dt. \end{aligned}$$

■

Nous aurons également besoin des propriétés suivantes pour l'étude de l'existence de la dérivée de forme de problèmes aux limites. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant (voir [86]) :

Lemme 4.10 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné convexe, alors il existe une suite décroissante $(\Omega^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'ouverts bornés réguliers et fortement convexes, telles que $\Omega \subset \Omega^k$ et*

$$d^H(\overline{\Omega^k}, \overline{\Omega}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \tag{4.38}$$

Nous avons alors les propriétés.

Proposition 4.9 *Soit Ω un domaine borné convexe. Alors, il existe une suite $(\Omega_k)_k$ d'ouverts bornés fortement convexes et suffisamment réguliers, convergeant vers Ω au sens de Hausdorff, telle que $\Omega \subset \Omega_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, et satisfaisant les propriétés suivantes :*

(i) P_{Ω_k} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Il existe une constante $c > 0$, telle que

$$\|\nabla P_{\Omega_k}\|_{L^\infty(S^{n-1})} \leq c, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(iii) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|P_{\Omega_k} - P_\Omega\|_{L^\infty(D)} = 0$.

(iv) Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\partial_i \partial_j P_\Omega$ et $\partial_i \partial_j P_{\Omega_k}$ sont des mesures de Radon bornées et il existe une constante $c > 0$ indépendante de k , telle que :

$$|\langle \partial_i \partial_j (P_{\Omega_k} - P_\Omega), \varphi \rangle| \leq c \|\varphi\|_{L^\infty(D)} \sup_B P_D, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(D),$$

où B est un ouvert borné contenant D .

(v) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\partial_i P_{\Omega_k} - \partial_i P_\Omega\|_{L^1(D)} = 0$.

(vi) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega_0} \partial_i P_{\Omega_k}(\nu_0) \varphi d\sigma = \int_{\partial\Omega_0} \partial_i P_\Omega(\nu_0) \varphi d\sigma, \quad \forall \varphi \in L^1(\partial\Omega_0),$$

où Ω_0 est un ouvert borné convexe de classe C^1 .

Démonstration. D'après le Lemme 4.10, il existe une suite $(\Omega_k)_k$ d'ouverts bornés fortement convexes et suffisamment réguliers, telle que $\Omega \subset \Omega_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, et

$$d^H(\overline{\Omega}^k, \overline{\Omega}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \quad (4.39)$$

Comme les domaines Ω^k sont fortement convexes et assez réguliers, en particulier de classe C^1 , alors d'après [86], les fonctions P_{Ω_k} sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui démontre (i).

Pour prouver (ii), soit $k \in \mathbb{N}$, on a

$$P_{\Omega_k}(x + y) \leq P_{\Omega_k}(x) + P_{\Omega_k}(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi

$$P_{\Omega_k}(x) \leq P_{\Omega_k}(x - y) + P_{\Omega_k}(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Par homogénéité de la fonction support on aura pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \neq y$

$$P_{\Omega_k}(x) - P_{\Omega_k}(y) \leq P_{\Omega_k}\left(\frac{x - y}{\|x - y\|}\right) \|x - y\| \leq \sup_{z \in \mathbb{S}^{n-1}} P_{\Omega_k}(z) \|x - y\|.$$

En utilisant le fait que $\Omega_k \subset D$, $\forall k \in \mathbb{N}$, on aura alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$P_{\Omega_k}(x) - P_{\Omega_k}(y) \leq \sup_{z \in \mathbb{S}^{n-1}} P_D(z) \|x - y\|.$$

Notons par $C_D = \sup_{z \in \mathbb{S}^{n-1}} P_D(z)$, on obtient ainsi

$$|P_{\Omega_k}(x) - P_{\Omega_k}(y)| \leq C_D \|x - y\|.$$

En particulier, on a

$$|P_{\Omega_k}(x) - P_{\Omega_k}(y)| \leq C_D \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{V}_{S^{n-1}},$$

où $\mathcal{V}_{S^{n-1}}$ est un voisinage de S^{n-1} . Ainsi l'assertion (ii) découle de (i).

Montrons maintenant (iii). D'après le Lemme 1.8.14 de [86], on a la formule suivante

$$\|P_{\Omega_k} - P_{\Omega}\|_{L^\infty(S^{n-1})} = d^H(\overline{\Omega_k}, \overline{\Omega}),$$

d'où,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|P_{\Omega_k} - P_{\Omega}\|_{L^\infty(S^{n-1})} = 0. \tag{4.40}$$

D'autre part, par homogénéité de la fonction support, on a

$$\|P_{\Omega_k} - P_{\Omega}\|_{L^\infty(D)} \leq \sup_{x \in D} \|x\| \|P_{\Omega_k} - P_{\Omega}\|_{L^\infty(S^{n-1})},$$

d'où le résultat.

La preuve de l'assertion (iv) utilise les mêmes arguments que ceux de la Proposition 3 de [8], appliquée à P_{Ω} et P_{Ω_k} .

Montrons maintenant (v). Par application de (iv), il existe une constante $c > 0$ indépendante de k , telle que

$$|\langle \partial_i \partial_j (P_{\Omega_k} - P_{\Omega}), \varphi \rangle| \leq c \|\varphi\|_{L^\infty(D)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(D), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}. \tag{4.41}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |\langle P_{\Omega_k} - P_{\Omega}, \varphi \rangle| &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(D)} \int_D |P_{\Omega_k}(x) - P_{\Omega}(x)| dx \\ &\leq \lambda(D) \|\varphi\|_{L^\infty(D)} \|P_{\Omega_k} - P_{\Omega}\|_{L^\infty(D)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(D). \end{aligned} \tag{4.42}$$

Alors, en utilisant les inégalités (4.41) et (4.42), puis en appliquant le Lemme 1.2 à la distribution tempérée $T = \psi(P_{\Omega_k} - P_{\Omega})$, où $\psi \in \mathcal{D}(B)$ est une fonction plateau qui vérifie $\psi = 1$ dans un voisinage de D , il existe une constante $c > 0$ indépendante de k , telle que

$$|\langle \partial_i P_{\Omega_k} - \partial_i P_{\Omega}, \varphi \rangle| \leq c \sqrt{\|P_{\Omega_k} - P_{\Omega}\|_{L^\infty(D)}} \|\varphi\|_{\infty}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(D), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \tag{4.43}$$

Enfin, en utilisant la formule de dualité (voir par exemple [57]) :

$$\|\partial_i(P_{\Omega_k} - P_{\Omega})\|_{L^1(D)} = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(D), \\ \|\varphi\|_{L^\infty(D)} \leq 1}} \langle \partial_i(P_{\Omega_k} - P_{\Omega}), \varphi \rangle. \quad (4.44)$$

Les inégalités (4.43) et (4.44) entraînent qu'il existe une constante $c > 0$ indépendante de k , telle que

$$\|\partial_i(P_{\Omega_k} - P_{\Omega})\|_{L^1(D)} \leq c \sqrt{\|P_{\Omega_k} - P_{\Omega}\|_{L^\infty(D)}}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (4.45)$$

ce qui prouve (v).

Montrons enfin (vi). Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, en utilisant (ii), il existe une sous-suite de $(\partial_i P_{\Omega_k}(\nu_0))_k$ notée encore $(\partial_i P_{\Omega_k}(\nu_0))_k$ et une fonction $G_i \in L^\infty(\partial\Omega_0)$ [21], telle que

$$\partial_i P_{\Omega_k}(\nu_0) \rightharpoonup G_i \quad \text{dans } L^\infty(\partial\Omega_0) \text{ faible } - *.$$

Autrement dit,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega_0} \partial_i P_{\Omega_k}(\nu_0(x)) \theta(x) d\sigma = \int_{\partial\Omega_0} G_i(x) \theta(x) d\sigma, \quad \forall \theta \in L^1(\partial\Omega_0). \quad (4.46)$$

D'autre part, comme Ω_0 est une convexe de classe \mathcal{C}^1 , alors d'après le Lemme 2.3, sa fonction jauge J_{Ω_0} est aussi de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Soit maintenant $\rho \in [0, 1]$ et $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. En prenant

$$\theta(x) = \psi(\rho x) \rho^{n-1} \frac{1}{\|\nabla J_{\Omega_0}(x)\|},$$

on aura bien que $\theta \in L^1(\partial\Omega_0)$. En effet, d'une part grâce au Lemme 2.1, on a

$$\frac{1}{\|\nabla J_{\Omega_0}(x)\|} = \langle \nu_0(x), x \rangle \leq \sup_{y \in D} \|y\|, \quad \forall x \in \partial\Omega_0. \quad (4.47)$$

D'autre part, pour tout $\rho \in [0, 1]$ et tout $x \in \partial\Omega_0$, on a $|\psi(\rho x) \rho^{n-1}| \leq \|\psi\|_\infty$. On a donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega_0} \partial_i P_{\Omega_k}(\nu_0(x)) \theta(x) d\sigma = \int_{\partial\Omega_0} G_i(x) \theta(x) d\sigma, \quad (4.48)$$

et de plus, on a

$$\left| \int_{\partial\Omega_0} \partial_i P_{\Omega_k}(\nu_0(x)) \theta(x) d\sigma \right| \leq c \sup_{y \in D} \|y\| \|\psi\|_\infty, \quad (4.49)$$

grâce à l'assertion (ii). En appliquant ensuite le théorème de la convergence dominée de Lebesgue à la fonction

$$\rho \in]0, 1[\mapsto \int_{\partial\Omega_0} \partial_i P_{\Omega_k}(\nu_0(x)) \psi(\rho x) \rho^{n-1} \frac{1}{\|\nabla J_{\Omega_0}(x)\|} d\sigma(x),$$

tout en utilisant la convergence (4.48) et l'estimation (4.49), on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial_i P_{\Omega_k}(\nu_0(x)) \psi(\rho x) \rho^{n-1}}{\|\nabla J_0(x)\|} dx d\rho = \int_0^1 \int_{\partial\Omega_0} \frac{\tilde{G}_i(x) \psi(\rho x) \rho^{n-1}}{\|\nabla J_0(x)\|} dx d\rho, \quad (4.50)$$

où \tilde{G}_i est une fonction homogène de degré 0, qui est une extension de G définie par :

$$\tilde{G}_i(x) = G_i \left(\frac{x}{J_{\Omega_0}(x)} \right).$$

Or d'après le Lemme 2.1 on a $\nu_0 = \frac{\nabla J_{\Omega_0}}{\|\nabla J_{\Omega_0}\|}$, alors la fonction $x \mapsto \partial_i P_{\Omega_k}(\nu_0(x))$ est homogène de degré 0. Ainsi en utilisant le Lemme 4.9, on aura

$$\int_0^1 \int_{\partial\Omega_0} \partial_i P_{\Omega_k}(\nu_0(x)) \psi(\rho x) \rho^{n-1} \frac{1}{\|\nabla J_0(x)\|} d\sigma(x) d\rho = \int_{\Omega_0} \partial_i P_{\Omega_k}(\nu_0(x)) \psi(x) d\sigma(x). \quad (4.51)$$

et

$$\int_0^1 \int_{\partial\Omega_0} \tilde{G}_i(x) \psi(\rho x) \rho^{n-1} \frac{1}{\|\nabla J_{\Omega_0}(x)\|} d\sigma(x) d\rho = \int_{\Omega_0} \tilde{G}_i(x) \psi(x) d\sigma. \quad (4.52)$$

Par suite en utilisant les formules (4.51), (4.52) et la convergence (4.50), on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_0} \partial_i P_{\Omega_k}(\nu_0(x)) \psi(x) dx = \int_{\Omega_0} \tilde{G}_i(x) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n).$$

Ainsi,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_0} \langle \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0(x)), \psi(x) \rangle dx = \int_{\Omega_0} \langle \tilde{G}(x), \psi(x) \rangle dx, \quad \forall \psi \in (\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n))^n, \quad (4.53)$$

où $\tilde{G} = (\tilde{G}_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Montrons que $\tilde{G} = \nabla P_{\Omega}(\nu_0)$ p.p dans Ω_0 . Pour ce faire, soit $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, comme le domaine Ω_0 est de class \mathcal{C}^1 , alors d'après le Théorème 1.7, il existe une extension continue, de la fonction ν_0 à \mathbb{R}^n , notée encore ν_0 , prenant $\psi_0 = \varphi \nu_0$. On a bien $\psi_0 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. En utilisant la convergence (4.53), on a alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_0} \langle \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0(x)), \psi_0(x) \rangle dx = \int_{\Omega_0} \langle \tilde{G}(x), \psi_0(x) \rangle dx.$$

Or par homogénéité de la fonction P_{Ω_k} , on a

$$\langle \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0), \psi_0 \rangle = \langle \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0), \nu_0 \rangle \varphi = P_{\Omega_k}(\nu_0) \varphi.$$

Donc,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_0} P_{\Omega_k}(\nu_0) \varphi dx = \int_{\Omega_0} \langle \tilde{G}(x), \nu_0(x) \rangle \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n). \quad (4.54)$$

D'autre part, on a

$$\left| \int_{\Omega_0} P_{\Omega_k}(\nu_0) \varphi dx - \int_{\Omega_0} P_{\Omega}(\nu_0) \varphi dx \right| \leq \int_{\Omega_0} |\varphi| dx \|P_{\Omega_k} - P_{\Omega}\|_{\infty, \mathbb{S}^{n-1}}.$$

Ainsi, en utilisant la convergence (4.40), on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_0} P_{\Omega_k}(\nu_0) \varphi dx = \int_{\Omega_0} P_{\Omega}(\nu_0) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n). \quad (4.55)$$

Par suite, en utilisant (4.54) et (4.55), par identification on a $P_{\Omega}(\nu_0) = \langle \tilde{G}, \nu_0 \rangle$, p.p sur Ω_0 . En appliquant le Théorème 1.11, on a alors

$$\tilde{G} = \nabla P_{\Omega}(\nu_0) \text{ p.p dans } \Omega_0. \quad (4.56)$$

Montrons maintenant, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, que

$$\tilde{G} = \partial_i P_{\Omega}(\nu_0) \text{ p.p sur } \partial\Omega_0.$$

D'après (4.56), il existe une partie $D_0 \subset \Omega_0$, telle que $\tilde{G} = \partial_i P_{\Omega}(\nu_0)$ p.p dans D_0 et que $\Omega_0 \setminus D_0$ est de mesure null. Considérons l'ensemble $A = \{\frac{x}{\|x\|}, / x \in D_0\}$, en utilisant le fait que les fonctions \tilde{G} et $\partial_i P_{\Omega}(\nu_0)$ sont homogènes d'ordre 0, alors on a

$$\tilde{G}(x) = \partial_i P_{\Omega}(\nu_0(x)), \quad \forall x \in A.$$

Montrons que A est de mesure non null dans \mathbb{S}^{n-1} . En effet, puisque $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$, d'après la Proposition 5.9 de [48], on a

$$\sigma(A) = n\lambda \left(\bigcup_{t \in [0,1]} tA \right).$$

Remarquons que $(\overline{B}(0,1) \cap D_0) \setminus \{0\} \subseteq \bigcup_{t \in [0,1]} tA$. En effet, soit $z \in (\overline{B}(0,1) \cap D_0) \setminus \{0\}$, alors $z = t_z \frac{z}{\|z\|}$ avec $t_z = \|z\| \leq 1$. Puisque $z \in D_0$, alors $\frac{z}{\|z\|} \in A$. Donc, $z \in t_z A$. Ainsi

$$\sigma(A) = n\lambda \left(\bigcup_{t \in [0,1]} tA \right) \geq n\lambda \left((\overline{B}(0,1) \cap D_0) \setminus \{0\} \right) = n\lambda(\overline{B}(0,1) \cap D_0).$$

Considérons la décomposition $\overline{B}(0,1) = (\overline{B}(0,1) \cap D_0) \cup (\overline{B}(0,1) \cap \Omega_0 \setminus D_0)$. Puisque $\lambda(\Omega_0 \setminus D_0) = 0$, donc $\lambda(\overline{B}(0,1)) = \lambda(\overline{B}(0,1) \cap D_0) \neq 0$. Par conséquent $\sigma(A) \neq 0$. D'où,

$$\tilde{G} = \partial_i P_{\Omega}(\nu_0) \text{ p.p dans } \mathbb{S}^{n-1}.$$

En utilisant le fait qu'il existe un homéomorphisme lipschitz Φ entre \mathbb{S}^{n-1} et $\partial\Omega_0$, on en déduit alors que

$$\tilde{G} = \partial_i P_{\Omega}(\nu_0) \text{ p.p tout } x \in \partial\Omega_0.$$

Ce qui achève la preuve de (vi) et de la proposition. ■

4.4 Dérivation de forme des problèmes aux limites en utilisant une déformation de Minkowski

Dans cette section, nous allons étudier l'existence de la dérivée de forme de la solution d'un problème aux limites de types Dirichlet et Neumann, en utilisant la déformation de Minkowski. L'intérêt d'une telle dérivée est bien connu : indépendamment de la déformation utilisée, lorsqu'il s'agit par exemple de calculer la dérivée par rapport aux domaines de fonctionnelles du type

$$J(\Lambda) = \int_{\Lambda} f(x, u_{\Lambda}(x)) d\lambda(x) \quad \text{ou} \quad J(\Lambda) = \int_{\partial\Lambda} g(x, u_{\Lambda}(x)) d\sigma(x)$$

où u_{Λ} est solution d'une équation aux dérivées partielles elliptique posée sur Λ , nous sommes amenés à calculer la dérivée de forme de l'application $\Lambda \mapsto u_{\Lambda}$. Dans la suite, nous traitons donc cette question pour les deux problèmes aux limites elliptiques modèle de types Dirichlet et Neumann.

Dérivation de forme du problème de Dirichlet

Étant donné un ouvert Λ borné assez régulier et une fonction $f \in L^2(\Lambda)$, il est bien connu que le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_{\Lambda} = f & \text{dans } \Lambda \\ u_{\Lambda} = 0 & \text{sur } \partial\Lambda \end{cases} \tag{4.57}$$

admet une solution unique $u_{\Lambda} \in H_0^1(\Lambda)$. Nous savons aussi que si le domaine Λ est de classe \mathcal{C}^2 et $f \in H^1(\Lambda)$, alors $u_{\Lambda} \in H_0^1(\Lambda) \cap H^2(\Lambda)$.

Soient D un ouvert convexe borné assez régulier et suffisamment grand, $\Omega_0 \subset D$ un ouvert borné convexe contenant 0 et Ω un ouvert convexe borné de D . On suppose que Ω_0 et Ω sont de classe \mathcal{C}^2 . Considérons la déformation de Minkowski du domaine Ω_0 par Ω , définie pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$ par

$$\Omega_{\varepsilon} = \Omega_0 + \varepsilon\Omega \subset D.$$

Désignons par u_0 (resp. u_{ε}) la solution du problème (4.57) pour $\Lambda = \Omega_0$ (resp. $\Lambda = \Omega_{\varepsilon}$). Notre objectif est d'étudier l'existence de la dérivée de forme de l'application

$$\varepsilon \mapsto u_{\varepsilon}.$$

Pour ce faire, soit $f \in H^1(D)$ et soit $(\Omega^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante d'ouverts bornés suffisamment réguliers et fortement convexes, donnée par le Lemme 2.6, telle que $\Omega \subset \Omega^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, et vérifiant :

$$d^H(\overline{\Omega^k}, \overline{\Omega}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \tag{4.58}$$

Posons $\Omega_{\varepsilon,k} = \Omega_0 + \varepsilon\Omega_k$, $\varepsilon \in [0, 1]$. Comme Ω_0 est un domaine borné de classe \mathcal{C}^2 et convexe (en particulier étoilé par rapport à une boule), alors, d'après le Lemme 2.5, $\Omega_{\varepsilon,k}$

peut être considéré comme une déformation du domaine Ω_0 par le champ de vecteurs régulier

$$a_k(x) = J_{\Omega_0}(x) \nabla P_{\Omega_k} \left(\nu_0(x) \left(\frac{x}{J_{\Omega_0}(x)} \right) \right),$$

autrement dit, $\Omega_{\varepsilon,k} = \Phi_{\varepsilon,k}(\Omega_0)$, où $\Phi_{\varepsilon,k}(x) = x + \varepsilon a_k(x)$, avec $a_k \in W^{1,\infty}$. De plus, $\Phi_{\varepsilon,k}$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Considérons maintenant l'unique solution $u_{\varepsilon,k}$ du problème (4.57) pour $\Lambda = \Omega_{\varepsilon,k}$. D'après [33, 57, 85], il existe $\widehat{u}'_k \in H^1(D)$ tel que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P_{\varepsilon,k}(u_{\varepsilon,k}) - P(u_0)}{\varepsilon} = \widehat{u}'_k \text{ dans } H^1(D), \quad (4.59)$$

où $P_{\varepsilon,k}(u_{\varepsilon,k}) := P(u_{\varepsilon,k} \circ \Phi_{\varepsilon,k}) \circ \Phi_{\varepsilon,k}^{-1}$ et $P : H^1(\Omega_0) \rightarrow H^1(D)$ est un opérateur de prolongement linéaire continu. De plus, $u'_k := \widehat{u}'_k|_{\Omega_0}$ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u'_k = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ u'_k = -\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} \langle a_k, \nu_0 \rangle & \text{sur } \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (4.60)$$

D'après le lemme 2.3, on a

$$\langle a_k, \nu_0 \rangle = P_{\Omega_k}(\nu_0) \text{ sur } \partial\Omega_0, \quad (4.61)$$

donc, le problème (4.60) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} -\Delta u'_k = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ u'_k = -\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_{\Omega_k}(\nu_0) & \text{sur } \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (4.62)$$

Ainsi en plus de l'existence de la dérivée de u_ε , ce résultat en particulier le problème (4.62) fournit une idée sur la nature du problème aux limites que devra vérifier la dérivée de u_ε . En effet, on remarque que le problème (4.62) fait intervenir un terme qui dépend de k ($-\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_{\Omega_k}(\nu_0)$). Or comme on a une convergence des domaines Ω_k vers Ω , alors intuitivement la dérivée de u_ε va être la limite de u'_k quand k tend vers ∞ . Ainsi, nous allons montrer dans un premier lieu un résultat qui consiste à établir la convergence de la solution u'_k vers une fonction qu'on notera par u'_0 et on démontrera par la suite que c'est la dérivée de l'application $\varepsilon \rightarrow u_\varepsilon$.

Proposition 4.10 *On a la limite suivante :*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u'_k - u'_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0,$$

où $u'_0 \in H^1(\Omega_0)$ est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u'_0 = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ u'_0 = -\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_\Omega(\nu_0) & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases} \quad (4.63)$$

où ν_0 est la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0 .

Démonstration. Soit $u'_0 \in H^1(\Omega_0)$ la solution du problème aux limites (4.80), soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $u'_k \in H^1(\Omega_0)$ la solution du problème (4.62), alors la différence $u'_k - u'_0 \in H^1(\Omega_0)$ sera solution du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta(u'_k - u'_0) = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ u'_k - u'_0 = -\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0}(P_{\Omega_k}(\nu_0) - P_{\Omega}(\nu_0)) & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases} \quad (4.64)$$

Montrons que la norme $\|u'_k - u'_0\|_{H^1(\Omega_0)}$ tend vers 0, quand k tend vers l'infini. Pour cela, d'après [20, 28] il existe une constante $C = C(\Omega_0)$ qui ne dépend que du domaine Ω_0 , telle qu'on a

$$\|u'_k - u'_0\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C \|u'_k - u'_0\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_0)}.$$

Comme $u'_k - u'_0$ est la solution du problème (4.64), alors on obtient l'estimation

$$\|u'_k - u'_0\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C \left\| \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0}(P_{\Omega_k}(\nu_0) - P_{\Omega}(\nu_0)) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_0)}.$$

On se ramène alors à évaluer la limite de la norme

$$\left(\left\| \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0}(P_{\Omega_k} - P_{\Omega})(\nu_0) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_0)} \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

quand k tend vers l'infini. Comme le domaine Ω_0 est de class \mathcal{C}^2 et la donnée f du problème (4.57) est dans $H^1(D)$, alors d'après [20, 52], la solution u_0 du problème (4.57) pour $\Lambda = \Omega_0$ appartient à $H^2(\Omega_0)$. De plus d'après le Théorème 1.7, il existe une extension de classe \mathcal{C}^1 , de la fonction ν_0 à \mathbb{R}^n , notée encore ν_0 . Ainsi, $\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0}|_{\partial\Omega_0}$ est bien définie dans l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega_0)$. De même d'après la Proposition 4.9 on vérifie aussi que le terme $P_{\Omega_k}(\nu_0) - P_{\Omega}(\nu_0)$ est bien dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)$, pour tout $\alpha \in]1/2, 1[$. Par suite, en appliquant le Lemme (4.8), il existe une constante $C = C(\partial\Omega_0) > 0$ telle que

$$\left\| \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0}(P_{\Omega_k} - P_{\Omega})(\nu_0) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_0)} \leq C \left\| \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_0)} \|(P_{\Omega_k} - P_{\Omega})(\nu_0)\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_0)}.$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que $(P_{\Omega_k} - P_{\Omega})(\nu_0)$ satisfait les conditions du Lemme (4.7). En effet, d'une part par homogénéité de la fonction support, on a

$$\|(P_{\Omega_k} - P_{\Omega})(\nu_0(x))\| \leq \left\| (P_{\Omega_k} - P_{\Omega}) \left(\frac{\nu_0(x)}{\|\nu_0(x)\|} \right) \right\| \|\nu_0(x)\|, \quad \forall x \in \bar{\Omega}_0.$$

Ainsi, on obtient

$$\|(P_{\Omega_k} - P_{\Omega})(\nu_0)\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_0)} \leq \|P_{\Omega_k} - P_{\Omega}\|_{L^\infty(S^{n-1})} \sup_{x \in \bar{\Omega}_0} \|\nu_0(x)\|.$$

Or, d'après la deuxième assertion du Théorème 1.10, on a

$$\|P_{\Omega_k} - P_{\Omega}\|_{L^{\infty}(S^{n-1})} = d^H(\overline{\Omega}_k, \overline{\Omega}).$$

Par suite, on a

$$\|(P_{\Omega_k} - P_{\Omega})(\nu_0)\|_{L^{\infty}(\overline{\Omega}_0)} \leq \sup_{x \in \overline{\Omega}_0} \|\nu_0(x)\| d^H(\overline{\Omega}_k, \overline{\Omega}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Puisque la suite des domaines $\overline{\Omega}_k$ converge au sens de Hausdorff vers $\overline{\Omega}$, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|(P_{\Omega_k} - P_{\Omega})(\nu_0)\|_{L^{\infty}(\overline{\Omega}_0)} = 0. \quad (4.65)$$

D'autre part, en utilisant le fait que les fonctions support P_{Ω} et P_{Ω_k} sont lipschitziennes avec une constante de lipschitz C_D qui ne dépend que de D (voir Proposition 1.8), on a alors

$$\begin{aligned} |(P_{\Omega_k} - P_{\Omega})(\nu_0(x)) - (P_{\Omega_k} - P_{\Omega})(\nu_0(y))| &\leq |P_{\Omega_k}(\nu_0(x)) - P_{\Omega_k}(\nu_0(y))| + |P_{\Omega}(\nu_0(x)) - P_{\Omega}(\nu_0(y))| \\ &\leq 2C_D \|\nu_0(x) - \nu_0(y)\| \\ &\leq 2C_D \sup_{z \in \overline{\Omega}_0} \|\nabla \nu_0(z)\| \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}_0. \end{aligned}$$

Ainsi il existe une constante $M > 0$ qui ne dépend pas de k , telle qu'on a

$$|(P_{\Omega_k} - P_{\Omega})(\nu_0(x)) - (P_{\Omega_k} - P_{\Omega})(\nu_0(y))| \leq M \|x - y\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}_0. \quad (4.66)$$

Par conséquent d'après le Lemme 4.7, on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|(P_{\Omega_k} - P_{\Omega})(\nu_0)\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_0)} = 0.$$

D'où le résultat. ■

Avant de présenter le résultat d'existence de la dérivée de u_{ε} en $\varepsilon = 0$, nous aurons besoin d'établir quelques estimations uniformes, qui font objet des deux lemmes suivants :

Lemme 4.11 *Soit D un domaine borné convexe régulier suffisamment grand, tel que $\Omega_{\varepsilon} \subset \Omega_{\varepsilon}^k \subset D$, $\forall \varepsilon \in [0, 1]$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et soit $f \in H^1(D)$. Considérons les solutions u_{ε} et $u_{\varepsilon,k}$ respectives du problème (4.57) sur Ω_{ε} et Ω_{ε}^k , alors on a :*

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} \nabla(u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon,k}) \nabla \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_{\varepsilon}). \quad (4.67)$$

Démonstration. Soient $\varepsilon \in [0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}$, et soit u_{ε} et $u_{\varepsilon,k}$ les solutions respectives du problème (4.57) sur Ω_{ε} et Ω_{ε}^k . Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_{\varepsilon})$, on a les deux formulations :

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} -\Delta u_{\varepsilon} \varphi dx = \int_{\Omega_{\varepsilon}} f \varphi dx \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_{\varepsilon}^k} -\Delta u_{\varepsilon,k} \varphi dx = \int_{\Omega_{\varepsilon}^k} f \varphi dx.$$

Comme $u_{\varepsilon} \in H^2(\Omega_{\varepsilon})$ et $u_{\varepsilon,k} \in H^2(\Omega_{\varepsilon}^k)$, en appliquant alors la formule de Green on

aura

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla \varphi dx - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \partial_\nu u_\varepsilon \varphi dx = \int_D \chi_{\Omega_\varepsilon} f \varphi dx \text{ et}$$

et

$$\int_{\Omega_\varepsilon^k} \nabla u_{\varepsilon,k} \nabla \varphi dx - \int_{\partial\Omega_\varepsilon^k} \partial_\nu u_{\varepsilon,k} \varphi dx = \int_D \chi_{\Omega_\varepsilon^k} f \varphi dx.$$

En utilisant le fait que $\Omega_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon^k \subset D$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$, on aura

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla \varphi dx = \int_D \chi_{\Omega_\varepsilon} f \varphi dx. \quad (4.68)$$

et

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon,k} \nabla \varphi dx = \int_D \chi_{\Omega_\varepsilon^k} f \varphi dx = \int_D \chi_{\Omega_\varepsilon} f \varphi dx. \quad (4.69)$$

En soustrayant ainsi l'équation (4.69) de l'équation (4.68), on obtient

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla (u_\varepsilon - u_{\varepsilon,k}) \nabla \varphi dx = 0.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Lemme 4.12 *Soit D un domaine borné convexe régulier, tel que $\Omega_\varepsilon \subset D$, $\forall \varepsilon \in [0, 1]$ et soit $f \in H^1(D)$. Considérons la solution u_ε du problème (4.57) pour $\Lambda = \Omega_\varepsilon$. Pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, considérons le prolongement $\tilde{u}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^n)$ de u_ε par zéro en dehors de Ω_ε , alors on a les estimations uniformes suivantes :*

$$\exists C = C(D) > 0, \text{ telle que } \left\| \frac{\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(D)} \leq C, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1]. \quad (4.70)$$

et

$$\exists C = C(r, D) > 0, \text{ telle que } \left\| \frac{\tilde{u}_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1]. \quad (4.71)$$

où $\Phi_\varepsilon = \frac{J_0}{J_\varepsilon} Id_{\mathbb{R}^n}$, J_0 et J_ε sont respectivement les fonctions jauge associées aux domaines Ω_0 et Ω_ε .

Démonstration.

Soit $\varepsilon \in [0, 1]$, et soit u_0 et u_ε les solutions respectives du problème (4.57) pour $\Lambda = \Omega_0$ et $\Lambda = \Omega_\varepsilon$. Considérons \tilde{u}_0 et \tilde{u}_ε leurs prolongements par 0 respectivement en dehors de Ω_0 et Ω_ε .

Montrons l'estimation (4.70), comme pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$ on a $\Omega_0 \subset \Omega_\varepsilon \subset D$, alors \tilde{u}_0 et \tilde{u}_ε sont nulles en dehors de Ω_ε et en particulier en dehors de D , on obtient ainsi

$$\left\| \frac{\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(D)} = \left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

Puisque $(u_\varepsilon - \tilde{u}_0)/\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$, en utilisant l'inégalité de Poincaré uniforme [11, 57], il existe alors une constante $C = C(D) > 0$ qui ne dépend que de D , telle que :

$$\left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(D)} = \left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1]. \quad (4.72)$$

Or, on sait que la norme $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}$ peut être définie par dualité par :

$$\left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon) \\ \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leq 1}} \left\langle \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon}, \varphi \right\rangle_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Soit alors $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$ telle que $\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leq 1$, considérons la décomposition suivante :

$$\left\langle \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon}, \varphi \right\rangle_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \left(\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon,k}}{\varepsilon} \right) \nabla \varphi dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \left(\frac{u_{\varepsilon,k} - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u}'_k \right) \nabla \varphi dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \widehat{u}'_k \nabla \varphi dx.$$

où $u_{\varepsilon,k}$ est l'unique solution du problème (4.57) pour $\Lambda = \Omega_{\varepsilon,k}$ et \widehat{u}'_k est l'unique solution du problème (4.60). Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon}, \varphi \right\rangle_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \nabla (u_\varepsilon - u_{\varepsilon,k}) \nabla \varphi dx + \left\| \nabla \left(\frac{u_{\varepsilon,k} - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u}'_k \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\quad + \left\| \nabla \widehat{u}'_k \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \nabla (u_\varepsilon - u_{\varepsilon,k}) \nabla \varphi dx + \left\| \frac{u_{\varepsilon,k} - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u}'_k \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \widehat{u}'_k \right\|_{H^1(D)} \\ &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \nabla (u_\varepsilon - u_{\varepsilon,k}) \nabla \varphi dx + \left\| \frac{P_{\varepsilon,k}(u_{\varepsilon,k}) - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u}'_k \right\|_{H^1(D)} + \left\| \widehat{u}'_k \right\|_{H^1(D)} \end{aligned}$$

Pour le premier terme, d'après le Lemme (4.11), on a

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \nabla (u_\varepsilon - u_{\varepsilon,k}) \nabla \varphi dx = 0. \quad (4.73)$$

D'autre part, en utilisant (4.59), il existe une constante $c > 0$ qui ne dépend que de D , f et k , telle que :

$$\left\| \frac{P_{\varepsilon,k}(u_{\varepsilon,k}) - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u}'_k \right\|_{H^1(D)} \leq c, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (4.74)$$

Comme les estimations (4.73) et (4.74) sont vérifiées, pour tout φ , alors il existe une constante $C = C(D, k, f) > 0$, telle qu'on a

$$\left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C.$$

Montrons ensuite la deuxième estimation (4.71). Considérons ainsi la décomposition :

$$\left\| \frac{\tilde{u}_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_0)} \leq \left\| \frac{\tilde{u}_0 - u_\varepsilon}{\varepsilon} \circ \Phi_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_0)} + \left\| \frac{\tilde{u}_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_0)}.$$

Commençons par traiter le terme $\left\| \frac{\tilde{u}_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_0)}$. Soient $\varepsilon \in]0, 1[$, $\psi \in H_0^1(\Omega_0)$

et $\psi_\varepsilon = \psi \circ \Phi_\varepsilon^{-1}$, où $\Phi_\varepsilon^{-1} = \frac{J_\varepsilon}{J_0} \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et J_0 et J_ε sont respectivement les fonctions jauge associées aux domaines Ω_0 et Ω_ε . D'après la Proposition 4.7, la fonction $\Phi_\varepsilon : \Omega_0 \rightarrow \Omega_\varepsilon$ est un homéomorphisme bi-lipschitzien. De plus en utilisant les estimations (iii) de la Proposition 4.7, on vérifie que $\psi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$.

Considérons ainsi ψ_ε comme fonction test dans la formulation variationnelle vérifiée par u_ε sur Ω_ε , on aura

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f \psi_\varepsilon dx.$$

En utilisant la formule de changement de variable dans le cas des homéomorphismes bi-lipschitziens [39], on aura

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \nabla \psi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \gamma_\varepsilon dx = \int_{\Omega_0} f \circ \Phi_\varepsilon \psi_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \gamma_\varepsilon dx, \quad (4.75)$$

où $\gamma_\varepsilon = |\det(\nabla \Phi_\varepsilon)|$. D'autre part, on a

$$\nabla u_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) = {}^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \text{ et } \nabla \psi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) = {}^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla(\psi_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) = {}^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla \psi.$$

On aura ainsi

$$\int_{\Omega_0} {}^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) {}^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla \psi \gamma_\varepsilon dx = \int_{\Omega_0} f \circ \Phi_\varepsilon \psi \gamma_\varepsilon dx, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega_0).$$

Or, on sait que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, on a $AaAb = {}^\top AAab$. En effet,

$$AaAb = Aa \cdot Ab = Ab \cdot Aa = {}^\top(Ab)Aa = {}^\top(b) {}^\top(A)Aa = b \cdot {}^\top AAa = {}^\top AAa \cdot b = {}^\top AAab.$$

En utilisant cette formule (en prenant $A = {}^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1}$, $a = \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon)$, $b = \nabla \psi$), on obtient

$${}^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) {}^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla \psi = (\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} {}^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi.$$

Ainsi

$$\int_{\Omega_0} \gamma_\varepsilon (\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} {}^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi dx = \int_{\Omega_0} f \circ \Phi_\varepsilon \psi \gamma_\varepsilon dx.$$

On reprend les mêmes notations que celles utilisées dans la Proposition 4.7, on aura

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \gamma_\varepsilon (\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} {}^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1}.$$

On obtient alors

$$\int_{\Omega_0} \mathcal{A}_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi dx = \int_{\Omega_0} f \circ \Phi_\varepsilon \psi \gamma_\varepsilon dx, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega_0). \quad (4.76)$$

D'autre part, comme u_0 est solution de :

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla \psi dx = \int_{\Omega_0} f \psi dx, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega_0). \quad (4.77)$$

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaire pour montrer la deuxième estimation. En effet, comme $(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0)/\varepsilon \in H_0^1(\Omega_0)$, en utilisant l'inégalité de Poincaré [11, 57], il existe une constante $c > 0$, telle que :

$$\left\| \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_0)} \leq c \left\| \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{H_0^1(\Omega_0)}.$$

Or par dualité on a

$$\left\| \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{H_0^1(\Omega_0)} = \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{D}(\Omega_0) \\ \|\psi\|_{H_0^1(\Omega_0)} \leq 1}} \left\langle \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}, \psi \right\rangle_{H_0^1(\Omega_0)}.$$

Ainsi, soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_0)$, on a :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}, \psi \right\rangle_{H_0^1(\Omega_0)} &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla \psi dx \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{1}{\varepsilon} (I_n - \mathcal{A}_\varepsilon) \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} \mathcal{A}_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi dx \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla \psi dx, \end{aligned}$$

où I_n est la matrice identité. Alors en utilisant les équations (4.76) et (4.77), on aura

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}, \psi \right\rangle_{H_0^1(\Omega_0)} &= \int_{\Omega_0} \frac{1}{\varepsilon} (I_n - \mathcal{A}_\varepsilon) \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} f \circ \Phi_\varepsilon \psi \gamma_\varepsilon dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} f \psi dx \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{1}{\varepsilon} (I_n - \mathcal{A}_\varepsilon) \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi dx + \int_{\Omega_0} \frac{1}{\varepsilon} (f \circ \Phi_\varepsilon - f) \psi \gamma_\varepsilon dx \\ &\quad - \int_{\Omega_0} f \psi \frac{1}{\varepsilon} (\gamma_\varepsilon - 1) dx. \end{aligned}$$

Ainsi, d'une part, d'après la Proposition 4.7, il existe une constante $c = c(D, r) > 0$, telle que :

$$\max \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon} (I_n - \mathcal{A}_\varepsilon) \right\|_{L^\infty(D)}, \left\| \frac{1}{\varepsilon} (\gamma_\varepsilon - 1) \right\|_{L^\infty(D)}, \|\gamma_\varepsilon\|_{L^\infty(D)} \right) \leq c, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

D'autre part, d'après la Proposition 4.8, il existe une constante $c > 0$, telle que :

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} (f \circ \Phi_\varepsilon - f) \right\|_{L^\infty(\Omega_0)} \leq c, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Hölder, il existe une constante $c > 0$, indépendante de ε , telle que :

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}, \psi \right\rangle_{H_0^1(\Omega_0)} &\leq \left\| \frac{1}{\varepsilon} (I_n - \mathcal{A}_\varepsilon) \right\|_{L^\infty(D)} \|u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_0)} \|\psi\|_{H_0^1(\Omega_0)} \\
 &+ c \|\psi\|_{L^2(\Omega_0)} + \left\| \frac{1}{\varepsilon} (\gamma_\varepsilon - 1) \right\|_{L^\infty(D)} \|f\|_{L^2(\Omega_0)} \|\psi\|_{L^2(\Omega_0)} \\
 &\leq c \|u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_0)} \|\psi\|_{H_0^1(\Omega_0)} + c \|\psi\|_{L^2(\Omega_0)} + c \|f\|_{L^2(\Omega_0)} \|\psi\|_{L^2(\Omega_0)}.
 \end{aligned}$$

Comme $\psi \in H_0^1(\Omega_0)$, alors grâce à l'inégalité de Poincaré [11, 57], il existe une constante $c > 0$ telle qu'on a

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega_0)} \leq c \|\psi\|_{H_0^1(\Omega_0)}.$$

Donc,

$$\left\langle \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}, \psi \right\rangle_{H_0^1(\Omega_0)} \leq c (\|u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_0)} + 1 + \|f\|_{L^2(\Omega_0)}) \|\psi\|_{H_0^1(\Omega_0)}.$$

Afin d'estimer le terme $\|u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_0)}$, on utilise le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned}
 \|u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega_0} \|\nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon)\|^2 dx = \int_{\Omega_0} \|\mathop{\mathrm{T}}\nabla\Phi_\varepsilon \nabla u_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)\|^2 dx \\
 &= \int_{\Omega_\varepsilon} \|\mathop{\mathrm{T}}\nabla\Phi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^{-1}) \nabla u_\varepsilon\|^2 |\det(\nabla\Phi_\varepsilon^{-1})| dx.
 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la Proposition 4.7, il existe une constante $c = c(D, r) > 0$, telle que

$$\max \left(|\det(\nabla\Phi_\varepsilon^{-1})|_{L^\infty(D)}, \|\mathop{\mathrm{T}}\nabla\Phi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^{-1})\|_{L^\infty(D)} \right) \leq c, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

On obtient alors

$$\|u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_0)}^2 \leq c^3 \|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}^2.$$

Ensuite, en utilisant le fait que u_ε est solution du problème (4.57) pour $\Lambda = \Omega_\varepsilon$, on aura

$$\begin{aligned}
 \|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f u_\varepsilon dx \\
 &\leq \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|f\|_{L^2(D)}.
 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré uniforme [11, 57], il existe une constante $C_0 > 0$, telle que :

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq C_0 \|f\|_{L^2(D)} \|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Par conséquent, la norme $\|u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_0)}$ est uniformément bornée par rapport à ε . Donc il existe une constante $C = C(D, r) > 0$, telle que

$$\left\| \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_0)} \leq c \left\| \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{H_0^1(\Omega_0)} \leq C. \quad (4.78)$$

Il reste ainsi à traiter le terme $\left\| \frac{(\tilde{u}_0 - u_\varepsilon)}{\varepsilon} \circ \Phi_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_0)}$. On a

$$\left\| \frac{(\tilde{u}_0 - u_\varepsilon)}{\varepsilon} \circ \Phi_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_0)} = \frac{1}{\varepsilon} \|(\tilde{u}_0 - u_\varepsilon) \circ \Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla((\tilde{u}_0 - u_\varepsilon) \circ \Phi_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

En utilisant la formule de changement de variable dans le cas des homéomorphismes bi-lipschitziens, on aura

$$\|(\tilde{u}_0 - u_\varepsilon) \circ \Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)}^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} |\tilde{u}_0 - u_\varepsilon|^2 \gamma_\varepsilon dx$$

et

$$\begin{aligned} \|\nabla((\tilde{u}_0 - u_\varepsilon) \circ \Phi_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla \Phi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^{-1}) \nabla(\tilde{u}_0 - u_\varepsilon)\|^2 \gamma_\varepsilon dx \\ &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla \Phi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^{-1})\|^2 \|\nabla(\tilde{u}_0 - u_\varepsilon)\|^2 \gamma_\varepsilon dx, \end{aligned}$$

où $\gamma_\varepsilon = |\det(\nabla \Phi_\varepsilon^{-1})|$. Or d'après la proposition 4.7, il existe une constante $C > 0$, indépendante de ε , telle que

$$\max(\|\nabla \Phi_\varepsilon\|_{L^\infty(D)}, \|\gamma_\varepsilon\|_{L^\infty(D)}) \leq C.$$

Donc

$$\|(\tilde{u}_0 - u_\varepsilon) \circ \Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C \|\tilde{u}_0 - \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(D)}$$

et

$$\|\nabla((\tilde{u}_0 - u_\varepsilon) \circ \Phi_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C^2 \|\nabla(\tilde{u}_0 - u_\varepsilon)\|_{L^2(D)}.$$

Donc, il existe une constante $c > 0$, telle qu'on a

$$\left\| \frac{(\tilde{u}_0 - u_\varepsilon)}{\varepsilon} \circ \Phi_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_0)} \leq c \frac{1}{\varepsilon} \|\tilde{u}_0 - \tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(D)}.$$

D'après l'estimation (4.70), le terme $\frac{1}{\varepsilon} \|\tilde{u}_0 - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)}$ est uniformément borné par rapport à ε , et donc $\left\| \frac{(\tilde{u}_0 - u_\varepsilon)}{\varepsilon} \circ \Phi_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_0)}$ l'est aussi. Ce qui conclut la démonstration de ce Lemme. ■

Dans ce cadre nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.6 *Soit D un domaine borné convexe régulier, tel que $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega \subset D$, $\forall \varepsilon \in [0, 1]$ et soit $f \in H^1(D)$. Considérons la solution u_ε du problème (4.57) pour $\Lambda = \Omega_\varepsilon$. Alors, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, il existe un prolongement $\tilde{u}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^n)$ de u_ε , et $\widehat{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$,*

tels que l'on ait :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| \frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} - u'_0 \right\|_{H^1(\Omega_0)} = 0. \quad (4.79)$$

Autrement dit, l'application $\varepsilon \in [0, 1] \mapsto u_\varepsilon \in H^1(\Omega_0)$ est dérivable en 0 et sa dérivée \widehat{u}'_0 est telle que $u'_0 := \widehat{u}'_0|_{\Omega_0}$ est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u'_0 = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ u'_0 = -\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_\Omega(\nu_0) & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases} \quad (4.80)$$

où ν_0 est la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0 et P_Ω est la fonction support du domaine Ω_0 .

Démonstration. Soit $\varepsilon \in [0, 1]$, et soit u_0 et u_ε les solutions respectives du problème (4.57) pour $\Lambda = \Omega_0$ et $\Lambda = \Omega_\varepsilon$. Considérons \tilde{u}_0 et \tilde{u}_ε leurs prolongements par 0 respectivement en dehors de Ω_0 et Ω_ε . D'après le Lemme 4.12 et l'estimation (4.70), il existe une constante $c > 0$, telle que

$$\left\| \frac{\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(D)} \leq c, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Donc, il existe une sous-suite notée encore $(U_\varepsilon)_\varepsilon$, $U_\varepsilon = \frac{\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon}$ et un élément $\omega \in H^1(D)$, telle que

$$U_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon]{} \omega, \quad \text{dans } H^1(D). \quad (4.81)$$

Comme $H^1(D)$ s'injecte de manière continue dans $H^1(\Omega_0)$, alors on a

$$U_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon]{} \omega, \quad \text{dans } H^1(\Omega_0). \quad (4.82)$$

Commençons tout d'abord par montrer que ω concide avec u'_0 la solution du problème (4.80). D'après l'injection compacte de $H^1(\Omega_0)$ dans $L^2(\Omega_0)$ et la compacité de l'application trace de $H^1(\Omega_0)$ dans $L^2(\partial\Omega_0)$, on peut extraire une sous-suite notée encore $(U_\varepsilon)_\varepsilon$, telle qu'on a :

$$U_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{} \omega, \quad \text{dans } L^2(\Omega_0). \quad (4.83)$$

et

$$U_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{} \omega, \quad \text{dans } L^2(\partial\Omega_0). \quad (4.84)$$

Notons que d'après les convergence (4.82) et (4.83), on a

$$\langle \nabla U_\varepsilon, \nabla \phi \rangle_{L^2(\Omega_0)} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{} \langle \nabla \omega, \nabla \phi \rangle_{L^2(\Omega_0)}, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega_0). \quad (4.85)$$

En effet, pour tout $\phi \in H^1(\Omega_0)$ on a

$$\begin{aligned} |\langle \nabla(U_\varepsilon - \omega), \nabla \phi \rangle_{L^2(\Omega_0)}| &\leq |\langle U_\varepsilon - \omega, \phi \rangle_{H^1(\Omega_0)}| + |\langle U_\varepsilon - \omega, \phi \rangle_{L^2(\Omega_0)}| \\ &\leq |\langle U_\varepsilon - \omega, \phi \rangle_{H^1(\Omega_0)}| + \|U_\varepsilon - \omega\|_{L^2(\Omega_0)} \|\phi\|_{L^2(\Omega_0)}. \end{aligned}$$

Ainsi (4.85) découle de (4.82) et (4.83).

Soit maintenant $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_0)$, en utilisant le fait que $\Omega_0 \subset \Omega_\varepsilon$, comme u_ε et u_0 sont les solutions respectives du problème (4.57) pour $\Lambda = \Omega_\varepsilon$ et $\Lambda = \Omega_0$, alors u_ε et u_0 sont solutions des deux formulations :

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon \nabla \phi dx = \int_{\Omega_0} f \phi dx \quad (4.86)$$

et

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla \phi dx = \int_{\Omega_0} f \phi dx. \quad (4.87)$$

En soustrayant la formulation (4.87) de (4.86), tout en divisant par ε , on aura

$$\int_{\Omega_0} \nabla \left(\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right) \nabla \phi dx = 0, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

En particulier pour tous les termes de la sous-suite des $(U_\varepsilon)_\varepsilon$, on a

$$\int_{\Omega_0} \nabla U_\varepsilon \nabla \phi dx = 0. \quad (4.88)$$

Par passage à la limite dans (4.88), on aura

$$\int_{\Omega_0} \nabla \omega \nabla \phi dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega_0).$$

Donc $-\Delta \omega = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_0)$, par suite $-\Delta \omega = 0$ p.p. dans Ω_0 . Il reste alors à montrer que $w = -\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_\Omega(\nu_0)$ sur $\partial \Omega_0$. On a $u_\varepsilon = 0$ sur $\partial \Omega_\varepsilon$. Or, d'après la proposition 4.7, il existe un homéomorphisme bi-lipschitzien et son inverse définies par :

$$\begin{array}{l} \Phi_\varepsilon : \Omega_0 \rightarrow \Omega_\varepsilon \\ x \mapsto \Phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)} x & , x \neq 0 ; \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \Psi_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \rightarrow \Omega_0 \\ x \mapsto \Phi^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{J_\varepsilon(x)}{J_0(x)} x & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases} \end{array}$$

De plus $\Phi_\varepsilon(\partial \Omega_0) = \partial \Omega_\varepsilon$, où J_0 et J_ε sont respectivement les fonctions jauge associées aux domaines Ω_0 et Ω_ε . Ainsi, on aura $u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon = 0$ sur $\partial \Omega_0$. Or, puisque $u_0 = 0$ sur $\partial \Omega_0$, alors

$$\frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} = 0 \text{ sur } \partial \Omega_0.$$

Étudions alors la limite de $\frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \Big|_{\partial \Omega_0}$, quand ε tend vers 0^+ . Pour cela, considérons la décomposition :

$$\frac{(u_\varepsilon - u_0)}{\varepsilon} \circ \Phi_\varepsilon + \frac{\tilde{u}_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} = 0 \text{ sur } \partial \Omega_0,$$

qui s'écrit

$$\Xi_\varepsilon^{(1)} + \Xi_\varepsilon^{(2)} = 0 \text{ sur } \partial \Omega_0.$$

avec

$$\Xi_\varepsilon^{(1)} = U_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \text{ et } \Xi_\varepsilon^{(2)} = \frac{\tilde{u}_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}.$$

Commençons par montrer que $\Xi_\varepsilon^{(1)}$ converge vers ω dans $L^2(\partial\Omega_0)$, quand ε tend vers 0. On a

$$\|\Xi_\varepsilon^{(1)} - \omega\|_{L^2(\partial\Omega_0)} \leq \|\Xi_\varepsilon^{(1)} - \omega \circ \Phi_\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega_0)} + \|\omega \circ \Phi_\varepsilon - \omega\|_{L^2(\partial\Omega_0)}. \quad (4.89)$$

En utilisant la continuité de l'application trace de $H^s(\Omega_0)$ vers $H^{s-1/2}(\partial\Omega_0)$ (en particulier $L^2(\partial\Omega_0)$), pour tout $s \in]1/2, 1[$, (voir la Proposition 1.5), il existe alors une constante $c > 0$ indépendante de ε , telle que :

$$\|\Xi_\varepsilon^{(1)} - \omega\|_{L^2(\partial\Omega_0)} \leq c\|\Xi_\varepsilon^{(1)} - \omega \circ \Phi_\varepsilon\|_{H^s(\Omega_0)} + \|\omega \circ \Phi_\varepsilon - \omega\|_{L^2(\partial\Omega_0)}.$$

D'une part, par définition de la norme $\|\cdot\|_{H^s(\Omega_0)}$, on a

$$\begin{aligned} \|\Xi_\varepsilon^{(1)} - \omega \circ \Phi_\varepsilon\|_{H^s(\Omega_0)}^2 &= \|\Xi_\varepsilon^{(1)} - \omega \circ \Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \\ &+ \int_{\Omega_0} \int_{\Omega_0} \frac{|(\Xi_\varepsilon^{(1)} - \omega \circ \Phi_\varepsilon)(x) - (\Xi_\varepsilon^{(1)} - \omega \circ \Phi_\varepsilon)(y)|^2}{\|x - y\|^{2s+n}} d\lambda_x d\lambda_y \\ &= \int_{\Omega_0} |(U_\varepsilon - \omega)(\Phi_\varepsilon(x))|^2 dx \\ &+ \int_{\Omega_0} \int_{\Omega_0} \frac{|(U_\varepsilon - \omega)(\Phi_\varepsilon(x)) - (U_\varepsilon - \omega)(\Phi_\varepsilon(y))|^2}{\|x - y\|^{2s+n}} d\lambda_x d\lambda_y. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de changement de variable dans le cas des homéomorphismes bi-lipschitziens [39], on aura

$$\begin{aligned} \|\Xi_\varepsilon^{(1)} - \omega \circ \Phi_\varepsilon\|_{H^s(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} |(U_\varepsilon - w)(x)|^2 \gamma_\varepsilon(x) dx \\ &+ \int_{\Omega_\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{|(U_\varepsilon - w)(x) - (U_\varepsilon - w)(y)|^2}{\|\Psi_\varepsilon(x) - \Psi_\varepsilon(y)\|^{2s+n}} \gamma_\varepsilon(x) \gamma_\varepsilon(y) d\lambda_x d\lambda_y. \end{aligned}$$

avec $\gamma_\varepsilon = |\det(\nabla\Psi_\varepsilon)|$. Or d'après la proposition 4.7, il existe des constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ et $C_3 > 0$ indépendantes de ε , telles que :

$$C_1\|x - y\| \leq \|\Psi_\varepsilon(x) - \Psi_\varepsilon(y)\| \leq C_2\|x - y\|, \quad \varepsilon \in]0, 1[, \quad \forall x, y \in D. \quad (4.90)$$

et

$$\|\gamma_\varepsilon\|_{L^\infty(D)} \leq C_3. \quad (4.91)$$

Ensuite en utilisant le fait que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, $\Omega_\varepsilon \subset D$, on aura

$$\begin{aligned} \|\Xi_\varepsilon^{(1)} - \omega \circ \Phi_\varepsilon\|_{H^s(\Omega_0)}^2 &\leq C_2\|U_\varepsilon - \omega\|_{L^2(D)}^2 \\ &+ (C_2)^2 \int_D \int_D \frac{|(U_\varepsilon - \omega)(x) - (U_\varepsilon - \omega)(y)|^2}{\|\Psi_\varepsilon(x) - \Psi_\varepsilon(y)\|^{2s+n}} d\lambda_x d\lambda_y. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant (4.90), il existe une constante $C > 0$ indépendantes de ε , telles que :

$$\|\Psi_\varepsilon(x) - \Psi_\varepsilon(y)\|^{2s+n} \geq C\|x - y\|^{2s+n}.$$

Il existe alors une constante $c > 0$, telle que

$$\begin{aligned} \|\Xi_\varepsilon^{(1)} - \omega \circ \Phi_\varepsilon\|_{H^s(\Omega_0)}^2 &\leq c\|U_\varepsilon - \omega\|_{L^2(D)}^2 \\ &+ c \int_D \int_D \frac{|(U_\varepsilon - \omega)(x) - (U_\varepsilon - \omega)(y)|^2}{\|x - y\|^{2s+n}} d\lambda_x d\lambda_y. \\ &\leq c\|U_\varepsilon - \omega\|_{H^s(D)}^2. \end{aligned}$$

Grâce à la convergence (4.81) et l'injection compacte de l'espace $H^1(D)$ dans $H^s(D)$, ($s < 1$) (voir Proposition 1.4) il existe une sous-suite de $(U_\varepsilon)_\varepsilon$ notée de la même manière, telle que

$$\|U_\varepsilon - \omega\|_{H^s(D)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

Par conséquent, on a

$$\|\Xi_\varepsilon^{(1)} - \omega \circ \Phi_\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega_0)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

Il reste ainsi à estimer le terme $\|\omega \circ \Phi_\varepsilon - \omega\|_{L^2(\partial\Omega_0)}$ de la décomposition (4.89). En effet, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, en utilisant la formule de changement de variable dans le cas des homéomorphismes bi-lipschitziens [39], on aura

$$\|\omega \circ \Phi_\varepsilon - \omega\|_{H^1(\Omega_0)}^2 \leq \int_{\Omega_0} |\omega(\Phi_\varepsilon(x))|^2 dx + \int_{\Omega_0} \|\nabla(\omega \circ \Phi_\varepsilon)(x)\|^2 dx + \|\omega\|_{H^1(\Omega_0)}^2.$$

Donc,

$$\|\omega \circ \Phi_\varepsilon - \omega\|_{H^1(\Omega_0)}^2 \leq \int_{\Omega_\varepsilon} |\omega(x)|^2 \gamma_\varepsilon(x) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla\Phi_\varepsilon(\Psi_\varepsilon(x))\|^2 \|\nabla\omega(x)\|^2 \gamma_\varepsilon(x) dx + \|\omega\|_{H^1(\Omega_0)}^2.$$

où $\gamma_\varepsilon = |\det(\nabla\Psi_\varepsilon)|$. Or d'après la proposition 4.7, il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε , telle que

$$\max(\|\nabla\Phi_\varepsilon\|_{L^\infty(D)}, \|\gamma_\varepsilon\|_{L^\infty(D)}) \leq C.$$

Comme $\omega \in H^1(D)$, on obtient

$$\|\omega \circ \Phi_\varepsilon - \omega\|_{H^1(\Omega_0)}^2 \leq C\|\omega\|_{H^1(D)}^2 + C\|\nabla\omega\|_{L^2(D)}^2 + \|\omega\|_{H^1(\Omega_0)}^2.$$

Donc, il existe une sous-suite notée encore $(\omega \circ \Phi_\varepsilon - \omega)_\varepsilon$ et un élément $W \in H^1(\Omega_0)$, tels que $\omega \circ \Phi_\varepsilon - \omega$ converge faiblement vers W dans $H^1(\Omega_0)$. De plus grâce à l'injection compacte de $H^1(\Omega_0)$ dans $L^2(\Omega_0)$ et la compacité de l'application trace de $H^1(\Omega_0)$ dans $L^2(\partial\Omega_0)$, on peut extraire une sous-suite notée encore $(\omega \circ \Phi_\varepsilon - \omega)_\varepsilon$, telle qu'on a la convergence forte dans $L^2(\Omega_0)$ et la convergence des traces dans $L^2(\partial\Omega_0)$:

$$\omega \circ \Phi_\varepsilon - \omega \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} W \text{ dans } L^2(\Omega_0).$$

et

$$\omega \circ \Phi_\varepsilon - \omega \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} W \text{ dans } L^2(\partial\Omega_0).$$

Or d'après la proposition 4.8, on a

$$\|\omega \circ \Phi_\varepsilon - \omega\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \varepsilon \|\nabla \omega\|_{L^2(D)}.$$

Donc $\omega \circ \Phi_\varepsilon - \omega$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega_0)$. Ce qui permet alors d'avoir $W = 0$ dans $L^2(\Omega_0)$, en particulier $W = 0$ p.p. sur $\partial\Omega_0$. D'où $\omega \circ \Phi_\varepsilon - \omega \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$ dans $L^2(\partial\Omega_0)$. En conséquence on a, par application de la réciproque partielle du théorème de convergence dominée, on a :

$$\Xi_\varepsilon^{(1)} = U_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \omega, \text{ p.p sur } \partial\Omega_0.$$

Montrons maintenant que $\Xi_\varepsilon^{(2)} = (u_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_0)/\varepsilon$ converge vers $\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_\Omega(\nu_0)$ sur $\partial\Omega_0$. D'après le Lemme 4.12, il existe une constante $c > 0$ indépendante de u_0 et ε , telle que

$$\left\| \frac{\tilde{u}_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_0)} \leq c.$$

Il existe alors une sous-suite notée encore $(\Xi_\varepsilon^{(2)})_\varepsilon$ et un élément $\vartheta \in H^1(\Omega_0)$, telle que $\Xi_\varepsilon^{(2)}$ converge faiblement vers ϑ dans $H^1(\Omega_0)$:

$$\frac{\tilde{u}_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \rightharpoonup_\varepsilon \vartheta, \text{ dans } H^1(\Omega_0). \quad (4.92)$$

De plus, grâce à l'injection compacte de $H^1(\Omega_0)$ dans $L^2(\Omega_0)$ et la compacité de l'application trace de $H^1(\Omega_0)$ dans $L^2(\partial\Omega_0)$, on peut extraire une sous-suite notée de la même manière, telle qu'on a les convergences :

$$\frac{\tilde{u}_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \vartheta, \text{ dans } L^2(\Omega_0). \quad (4.93)$$

et

$$\frac{\tilde{u}_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \vartheta, \text{ dans } L^2(\partial\Omega_0). \quad (4.94)$$

Montrons que $\vartheta = \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_\Omega(\nu_0)$. Pour cela, rappelons que comme le domaine Ω_0 est de class \mathcal{C}^2 , alors d'après la Proposition 2.3 la fonction J_0 est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. De plus comme $\partial\Omega_0 = \{J_0 = 1\}$, on peut définir une extension de classe \mathcal{C}^1 , de la fonction ν_0 à \mathbb{R}^n comme suit $\nu_0 = \nabla J_0 / \|\nabla J_0\|$. Ainsi on a

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_\Omega(\nu_0) = \langle \nabla u_0, \nu_0 \rangle \frac{1}{\|\nabla J_0\|} P_\Omega(\nabla J_0).$$

On sait ainsi d'après le Lemme 2.1, que $\langle \nu_0, \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle = \frac{1}{\|\nabla J_0\|}$. Donc on aura

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_\Omega(\nu_0) = \langle \nabla u_0, \nu_0 \rangle \langle \nu_0, \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0).$$

Comme $u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0)$ alors u_0 est porté par la normale (voir Remarque 1.5), ce qui implique que

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_\Omega(\nu_0) = \langle \nabla u_0, \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0).$$

Il suffit donc de montrer que $\vartheta = \langle \nabla u_0, \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0)$. Comme $\tilde{u}_0 \in H^1(D)$, alors il existe une suite d'éléments $u_\ell \in \mathcal{D}(D)$, telle que $u_\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} \tilde{u}_0$ dans $H^1(D)$. Soit $\ell \in \mathbb{N}$, on décompose $\Xi_\varepsilon^{(2)} - \langle \nabla u_0, \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0)$ en trois termes comme suit :

$$\Xi_\varepsilon^{(2)} - \langle \nabla u_0, \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0) = I_{1,\varepsilon}^\ell + I_{2,\varepsilon}^\ell + I_3^\ell$$

avec

$$I_{1,\varepsilon}^\ell = \frac{(\tilde{u}_0 - u_\ell) \circ \Phi_\varepsilon - (u_0 - u_\ell)}{\varepsilon}, \quad I_{2,\varepsilon}^\ell = \frac{u_\ell \circ \Phi_\varepsilon - u_\ell}{\varepsilon} - \langle \nabla u_\ell, \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0)$$

et

$$I_3^\ell = \langle \nabla(u_\ell - u_0), \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0).$$

Montrons tout d'abord que $\Xi_\varepsilon^{(2)}$ converge vers $\langle \nabla u_0, \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0)$ dans $L^2(\Omega_0)$. D'une part, on a

$$\begin{aligned} \|I_3^\ell\|_{L^2(\Omega_0)} &= \|\langle \nabla(u_\ell - u_0), \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0)\|_{L^2(\Omega_0)} \\ &\leq \sup_{\bar{\Omega}_0} \|P_\Omega(\nabla J_0) \text{Id}_{\mathbb{R}^n}\| \|\nabla(u_\ell - u_0)\|_{L^2(\Omega_0)} \\ &\leq \sup_{\bar{D}} |P_\Omega(\nabla J_0) \text{Id}_{\mathbb{R}^n}| \|u_\ell - u_0\|_{H^1(\Omega_0)}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

D'autre part, d'après en appliquant la Proposition 4.8, il existe une constante $C_0 > 0$ qui ne dépend pas de ℓ , telle qu'on a

$$\|I_{1,\varepsilon}^\ell\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C_0 \|\tilde{u}_0 - u_\ell\|_{H^1(D)}. \quad (4.96)$$

Montrons maintenant $\|I_{2,\varepsilon}^\ell\|_{L^2(D)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$. Pour ce faire, soit $\ell \in \mathbb{N}^*$, commençons par montrer que $I_{2,\varepsilon}^\ell \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$ p.p. dans D . Comme u_ℓ est régulière, on peut écrire

$$\begin{aligned} I_{2,\varepsilon}^\ell &= \frac{u_\ell \circ \Phi_\varepsilon - u_\ell}{\varepsilon} - \langle \nabla u_\ell, \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0) \\ &= \int_0^1 \nabla u_\ell((1-t)\text{Id}_{\mathbb{R}^n} + t\Phi_\varepsilon) dt \frac{\Phi_\varepsilon - \text{Id}_{\mathbb{R}^n}}{\varepsilon} - \langle \nabla u_\ell, \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0). \end{aligned}$$

D'une part, en utilisant la Proposition 4.5, on a

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_\varepsilon - \text{Id}_{\mathbb{R}^n}}{\varepsilon} &= \frac{\frac{J_0}{J_\varepsilon} \text{Id}_{\mathbb{R}^n} - \text{Id}_{\mathbb{R}^n}}{\varepsilon} \\ &= \frac{J_0 - J_\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{J_\varepsilon} \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon J_s P_\Omega(\nabla J_s) ds \frac{1}{J_\varepsilon} \text{Id}_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Soit $s \in [0, 1]$. En utilisant la lipschicité de P_Ω (voir (ii) de la Proposition 1.8), il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de D , telle que

$$|P_\Omega(\nabla J_s) - P_\Omega(\nabla J_0)| \leq C \|\nabla J_s - \nabla J_0\|.$$

Ensuite en utilisant la Proposition 4.6, il existe une constante $C_1 > 0$ qui ne dépend pas de s , telle que

$$\begin{aligned} |P_\Omega(\nabla J_s) - P_\Omega(\nabla J_0)| &\leq C \|\nabla J_s - \nabla J_0\|_{L^\infty(D)} \\ &\leq sC \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_\Omega \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la Proposition 4.5, on a

$$|J_0 - J_s| \leq \int_0^s |J_\rho| |P_\Omega(\nabla J_\rho)| d\rho.$$

Comme $0 \in \Omega_0$, fixons $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset \Omega_0 \subset \Omega_\rho$. Alors les domaines Ω_ρ sont étoilés par rapport à la boule $B(0, r)$, pour tout $\rho \in [0, 1]$ (car ils sont convexes). Il découle alors de la Proposition 2.1, que $J_D \leq J_\rho \leq J_{B(0,r)}$. En utilisant le fait que les fonctions jauge J_ρ sont $\frac{1}{r}$ -lipschitz (ceci d'après (4.20)), alors d'après le Théorème de Rademacher (voir par exemple [42]), on a

$$\|\nabla J_\rho(x)\| \leq \frac{1}{r}, \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \rho \in [0, 1]. \quad (4.97)$$

Ainsi, en utilisant l'homogénéité de la fonction support et le fait que $\Omega \subset D$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ on aura

$$\begin{aligned} |J_0(x) - J_s(x)| &\leq \int_0^s |J_\rho(x)| |P_\Omega(\nabla J_\rho(x))| d\rho \\ &\leq \int_0^s |J_{B(0,r)}(x)| |P_\Omega(\nabla J_\rho(x)) / \|\nabla J_\rho(x)\| | \|\nabla J_\rho(x)\| ds \\ &\leq \sup_D J_{B(0,r)} \frac{1}{r} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D \int_0^s ds \\ &\leq s \sup_D J_{B(0,r)} \frac{1}{r} \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} P_D. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Donc, les applications $s \mapsto J_s P_\Omega(\nabla J_s)$ et $\varepsilon \mapsto J_\varepsilon$ sont continues. Ainsi, on obtient

$$\frac{\Phi_\varepsilon - \text{Id}_{\mathbb{R}^n}}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Id}_{\mathbb{R}^n} P_\Omega(\nabla J_0), \text{ p.p. dans } D. \quad (4.99)$$

Concernant le terme $\int_0^1 \nabla u_\ell((1-t)\text{Id}_{\mathbb{R}^n} + t\Phi_\varepsilon) dt$, on a

$$B(0, r) \subset \Omega_\varepsilon \subset D \text{ pour tout } \varepsilon,$$

alors d'après la Proposition 2.1, on a $1/J_{B(0,r)} \leq 1/J_\varepsilon \leq 1/J_D$, ainsi pour tout $x \in D$, et pour tout $t \in [0, 1]$, on aura

$$\begin{aligned} \|(1-t)x + t\Phi_\varepsilon(x)\| &= \left\| \left((1-t) + t \frac{J_0(x)}{J_\varepsilon(x)} \right) x \right\| \\ &= \left\| (1-t)\text{Id}_{\mathbb{R}^n} + t \frac{J_0(x/\|x\|)}{J_\varepsilon(x/\|x\|)} x \right\| \\ &\leq \sup_{\bar{D}} \|\text{Id}_{\mathbb{R}^n}\| \left(1 + \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_0}{J_D} \right). \end{aligned}$$

Notons ainsi par

$$\alpha = \sup_{\bar{D}} \|\text{Id}_{\mathbb{R}^n}\| \left(1 + \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{J_0}{J_D} \right),$$

alors par continuité de l'application $y \mapsto \nabla u_\ell(y)$, on a

$$\|\nabla u_\ell((1-t)\text{Id}_{\mathbb{R}^n} + t\Phi_\varepsilon)\| \leq \sup_{z \in B(0, \alpha)} \|\nabla u_\ell(z)\|$$

et

$$\nabla u_\ell((1-t)\text{Id}_{\mathbb{R}^n} + t\Phi_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \nabla u_\ell \text{ p.p. } t \text{ dans } [0, 1].$$

De plus $\sup_{z \in B(0, \alpha)} \|\nabla u_\ell(z)\| \in L^1([0, 1])$. Donc, en appliquant le théorème de la convergence dominée, on aura

$$\int_0^1 \nabla u_\ell((1-t)\text{Id}_{\mathbb{R}^n} + t\Phi_\varepsilon) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \nabla u_\ell. \quad (4.100)$$

Ainsi, d'après (4.99) et (4.100), on a

$$I_{2, \varepsilon}^\ell \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \text{ p.p. dans } D. \quad (4.101)$$

Or, d'après la Proposition 4.7, il existe une constante $c = c(D) > 0$, telle que

$$\left\| \frac{\Phi_\varepsilon - \text{Id}_{\mathbb{R}^n}}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(D)} \leq c.$$

Par suite, en utilisant (4.97), on aura

$$\begin{aligned} |I_{2,\varepsilon}^\ell| &= \left| \int_0^1 \nabla u_\ell((1-t)\text{Id}_{\mathbb{R}^n} + t\Phi_\varepsilon) dt \frac{\Phi_\varepsilon - \text{Id}_{\mathbb{R}^n}}{\varepsilon} - \langle \nabla u_\ell, \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0) \right| \\ &\leq \sup_{z \in B(0,\alpha)} \|\nabla u_\ell(z)\| c + |P_\Omega(\nabla J_0)| \|\nabla J_0\| \sup_{z \in \overline{D}} \|\nabla u_\ell(z)\| \|z\| \\ &\leq \sup_{z \in B(0,\alpha)} \|\nabla u_\ell(z)\| c + \frac{1}{r} \sup_{z \in \mathbb{S}^{n-1}} P_D(z) \sup_{z \in \overline{D}} \|\nabla u_\ell(z)\| \|z\|. \end{aligned}$$

De plus $\sup_{z \in B(0,\alpha)} \|\nabla u_\ell(z)\| c + \frac{1}{r} \sup_{z \in \mathbb{S}^{n-1}} P_D(z) \sup_{z \in \overline{D}} \|\nabla u_\ell(z)\| \|z\| \in L^2(D)$. Donc, en appliquant le théorème de la convergence dominée, on aura

$$\|I_{2,\varepsilon}^\ell\|_{L^2(D)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0. \quad (4.102)$$

On conclut alors d'après (4.95), (4.96), que

$$\|\Xi_\varepsilon^{(2)} - \langle \nabla u_0, \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0)\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \left(\sup_{\overline{D}} |P_\Omega(\nabla J_0)| + C_0 \right) \|\tilde{u}_0 - u_\ell\|_{H^1(D)} + \|I_{2,\varepsilon}^\ell\|_{L^2(D)}.$$

Donc pour $\delta > 0$, il existe $\ell_1 \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $\ell \geq \ell_1$, on ait

$$\left(\sup_{\overline{D}} |P_\Omega(\nabla J_0)| + C_0 \right) \|\tilde{u}_0 - u_\ell\|_{H^1(D)} < \delta/2.$$

Ensuite, d'après (4.102), il existe $\varepsilon_\delta > 0$, tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_\delta$ on ait aussi

$$\|I_{2,\varepsilon}^{\ell_1}\|_{L^2(D)} < \delta/2.$$

En conséquence la convergence (4.93) entraîne que $\vartheta = \langle \nabla u_0, \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0)$ dans Ω_0 . Comme ∇J_0 est de classe C^1 , $P_\Omega \in W^{1,\infty}(D)$ (d'après Proposition 1.8) et $u_0 \in H^2(\Omega_0)$, alors $\langle \nabla u_0, \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0)$ dans $H^1(\Omega_0)$. D'où

$$\vartheta = \langle \nabla u_0, \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle P_\Omega(\nabla J_0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_\Omega(\nu_0) \text{ p.p } \partial\Omega_0.$$

Donc d'après (4.94), on en déduit que

$$\frac{\tilde{u}_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_\Omega(\nu_0) \text{ dans } L^2(\partial\Omega_0).$$

Par suite,

$$\Xi_\varepsilon^{(1)} + \Xi_\varepsilon^{(2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \omega + \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_\Omega(\nu_0), \text{ } \sigma - \text{p.p } \partial\Omega_0.$$

Or comme, $\Xi_\varepsilon^{(1)} + \Xi_\varepsilon^{(2)} = 0$ sur $\partial\Omega_0$, alors $\omega = -\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_\Omega(\nu_0)$. Donc, ω sera solution du problème

$$\begin{cases} -\omega = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \omega = -\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_\Omega(\nu_0) & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

Ce qui implique, par unicité de la solution, que $w = u'_0$. Montrons maintenant que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| \frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} - u'_0 \right\|_{H^1(\Omega_0)} = 0.$$

D'après 4.83, on a une convergente forte dans $L^2(\Omega_0)$, il reste ainsi à traiter le terme de la semi-norme. Soit alors $\phi \in H^1(\Omega_0)$, comme $\Omega_0 \subset \Omega_\varepsilon$, alors u_ε , u_0 et u'_0 sont les solutions respectives des les formulations variationnelles suivantes :

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon \nabla \phi dx = \int_{\Omega_0} f \phi dx + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_0} \phi d\sigma, \quad \phi \in H^1(\Omega_0) \quad (4.103)$$

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla \phi dx = \int_{\Omega_0} f \phi dx + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} \phi d\sigma, \quad \phi \in H^1(\Omega_0) \quad (4.104)$$

et

$$\int_{\Omega_0} \nabla u'_0 \nabla \phi dx = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u'_0}{\partial \nu_0} \phi d\sigma, \quad \phi \in H^1(\Omega_0). \quad (4.105)$$

En soustrayant l'équation (4.104) de (4.103) et en multipliant par $\frac{1}{\varepsilon}$, on obtient

$$\int_{\Omega_0} \frac{\nabla(u_\varepsilon - u_0)}{\varepsilon} \nabla \phi dx = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial_{\nu_0}(u_\varepsilon - u_0)}{\varepsilon} \phi d\sigma. \quad (4.106)$$

Ensuite en soustrayant l'équation (4.105) de (4.106), on aura

$$\int_{\Omega_0} \nabla(U_\varepsilon - u'_0) \nabla \phi dx = \int_{\Gamma_0} \partial_{\nu_0}(U_\varepsilon - u'_0) \phi d\sigma. \quad (4.107)$$

Par passage à la limite dans (4.107), en utilisant la convergence (4.85), on obtient

$$\int_{\Gamma_0} \partial_{\nu_0} U_\varepsilon \phi d\sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_0} \partial_{\nu_0} u'_0 \phi d\sigma, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega_0).$$

Ainsi, d'après [20], la suite $(\partial_{\nu_0}(U_\varepsilon))_\varepsilon$ est borné dans $L^2(\partial\Omega_0)$. Comme on a

$$\begin{aligned} \left| \|\nabla U_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)}^2 - \|\nabla u'_0\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \right| &= \left| \int_{\Omega_0} \nabla U_\varepsilon \nabla U_\varepsilon dx - \int_{\Omega_0} \nabla u'_0 \nabla u'_0 dx \right| \\ &= \left| \int_{\partial\Omega_0} \partial_{\nu_0} U_\varepsilon U_\varepsilon - \int_{\Omega_0} \nabla u'_0 \nabla u'_0 dx \right| \\ &= \left| \int_{\partial\Omega_0} \partial_{\nu_0} U_\varepsilon (U_\varepsilon - u'_0) + \int_{\partial\Omega_0} \partial_{\nu_0} U_\varepsilon u'_0 - \int_{\Omega_0} \nabla u'_0 \nabla u'_0 dx \right| \\ &= \left| \int_{\partial\Omega_0} \partial_{\nu_0} U_\varepsilon (U_\varepsilon - u'_0) + \int_{\Omega_0} \nabla(U_\varepsilon - u'_0) \nabla u'_0 dx \right| \\ &\leq \|\partial_{\nu_0} U_\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega_0)} \|U_\varepsilon - u'_0\|_{L^2(\partial\Omega_0)} + \left| \int_{\Omega_0} \nabla(U_\varepsilon - u'_0) \nabla u'_0 dx \right|, \end{aligned}$$

d'après (4.85) et (4.84), on obtient la convergence :

$$\|\nabla U_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|\nabla u'_0\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Ce qui entraîne que :

$$U_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u'_0 \text{ dans } H^1(\Omega_0).$$

Comme u'_0 est déterminée d'une manière unique et elle est la seule valeur d'adhérence de la sous-suite $(U_\varepsilon)_\varepsilon$, alors on aura

$$\frac{\tilde{u}_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u'_0 \text{ dans } H^1(\Omega_0). \quad (4.108)$$

Ce qui achève la preuve de ce théorème. ■

Comme application de ce résultat nous allons expliciter la dérivée de forme d'une fonctionnelle coût volumique générale, faisant intervenir la solution d'un problème du type (4.57). Nous nous intéressons plus précisément à des fonctionnelles du type

$$\Lambda \mapsto J_D(\Lambda) = \int_\Lambda |u_\Lambda(x) - \varphi_1(x)|^2 dx + \int_\Lambda \|\nabla u_\Lambda(x) - \nabla \varphi_2(x)\|^2 dx.$$

où u_Λ est la solution du problème (4.57), φ_1 et φ_2 sont des fonctions données respectivement dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ et $H^2(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 4.3 *L'application J_D est dérivable en 0^+ et sa dérivée est donnée par :*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{J_D(\Omega_0 + \varepsilon\Omega) - J_D(\Omega_0)}{\varepsilon} &= \int_{\Omega_0} (2u'_0(u_0 - \varphi_1) + (f + 2\Delta\varphi_2)u'_0) dx \\ &+ \int_{\partial\Omega_0} (|u_0 - \varphi_1|^2 + \|\nabla\varphi_2\|^2) P_\Omega(\nu_0) d\sigma, \end{aligned} \quad (4.109)$$

où u'_0 est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u'_0 = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ u'_0 = -\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} P_\Omega(\nu_0) & \text{sur } \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (4.110)$$

Démonstration. Commençons tout d'abord par traiter la dérivée de la fonctionnelle

$$\varepsilon \rightarrow j_D(\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(x) - \varphi_1(x)|^2 dx.$$

Notons ainsi par $F_\varepsilon = |u_\varepsilon - \varphi_1|^2$ et $F'_0 = 2\widehat{u'_0}(u_0 - \varphi_1)$, où $u'_0 := \widehat{u'_0}|_{\Omega_0}$ est l'unique solution du problème (4.110), alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{j_D(\varepsilon) - j_D(0)}{\varepsilon} &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} (F_\varepsilon - F_0) - F'_0 \right) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} F'_0 dx + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} F_0 dx - \int_{\Omega_0} F_0 dx \right) \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(2(u_0 - \varphi_1) \left(\frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right) - F'_0 \right) dx \\ &+ \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{(u_\varepsilon - \tilde{u}_0)^2}{\varepsilon} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} F'_0 dx + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} F_0 dx - \int_{\Omega_0} F_0 dx \right) \\ &= j_1(\varepsilon) + j_2(\varepsilon) + j_3(\varepsilon) + j_4(\varepsilon). \end{aligned}$$

où

$$j_1(\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(2(u_0 - \varphi_1) \left(\frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right) - F'_0 \right) dx, \quad j_2(\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{(u_\varepsilon - \tilde{u}_0)^2}{\varepsilon} dx,$$

$$j_3(\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} F'_0 dx \quad \text{et} \quad j_4(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} F_0 dx - \int_{\Omega_0} F_0 dx \right).$$

Comme F_0 vérifie les conditions du Théorème 2.1, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} j_4(\varepsilon) = \int_{\partial\Omega_0} F_0(x) P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma(x) = \int_{\partial\Omega_0} |u_0 - \varphi_1(x)|^2 P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma(x). \quad (4.111)$$

Il reste alors à évaluer les limites de j_1 , j_2 et j_3 en 0. Commençons par évaluer celle de j_1 en 0, on a

$$\begin{aligned} j_1(\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(2(\tilde{u}_0 - \varphi_1) \left(\frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right) - F'_0 \right) dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} 2(\tilde{u}_0 - \varphi_1) \left(\left(\frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right) - 2(u_0 - \varphi_1) \widehat{u}'_0 \right) dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} 2(\tilde{u}_0 - \varphi_1) \left(\left(\frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right) - \widehat{u}'_0 \right) dx. \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} 2(\tilde{u}_0 - \varphi_1) \left(\left(\frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right) - \widehat{u}'_0 \right) dx + \int_{\Omega_0} 2(\tilde{u}_0 - \varphi_1) \left(\left(\frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right) - \widehat{u}'_0 \right) dx. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned} |j_1(\varepsilon)| &\leq \|2(\tilde{u}_0 - \varphi_1)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \left\| \left(\frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right) - \widehat{u}'_0 \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} + \|2(\tilde{u}_0 - \varphi_1)\|_{L^2(\Omega_0)} \left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u}'_0 \right\|_{L^2(\Omega_0)} \\ &\leq \|2(\tilde{u}_0 - \varphi_1)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u}'_0 \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|2(\tilde{u}_0 - \varphi_1)\|_{L^2(\Omega_0)} \left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u}'_0 \right\|_{L^2(\Omega_0)}. \end{aligned}$$

Donc, d'après le Lemme 4.12 et l'estimation (4.70), il existe une constante $c > 0$, telle qu'on a :

$$|j_1(\varepsilon)| \leq c \|2(u_0 - \varphi_1)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} + \|2(\tilde{u}_0 - \varphi_1)\|_{L^2(\Omega_0)} \left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u}'_0 \right\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Or, on a

$$\|2(u_0 - \varphi_1)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)}^2 = \int_D \chi_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} |2(\tilde{u}_0 - \varphi_1)|^2 dx + \int_D \chi_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} |\nabla(2(\tilde{u}_0 - \varphi_1))|^2 dx.$$

Comme on sait que la convergence au sens de Hausdorff de $\overline{\Omega_\varepsilon}$ vers $\overline{\Omega_0}$ entraîne que $\chi_{\Omega_\varepsilon}$ converge presque partout vers χ_{Ω_0} quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, alors $\chi_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} = \chi_{\Omega_\varepsilon} - \chi_{\Omega_0}$ converge presque partout vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. En utilisant alors le théorème de Lebesgue [20], on aura

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|2(\tilde{u}_0 - \varphi_1)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} = 0.$$

D'autre part, d'après la convergence (4.108), on aura pour $\delta > 0$, il existe ε_0 , tel que $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$, on ait

$$|j_1(\varepsilon)| \leq \delta.$$

Évaluons maintenant la limite de $j_3(\varepsilon)$ en 0. On a

$$\left| j_3(\varepsilon) - \int_{\Omega_0} F'_0 dx \right| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon} 2\widehat{u}'_0(\tilde{u}_0 - \varphi_1) dx - \int_{\Omega_0} F'_0 dx \right|.$$

Ensuite en utilisant la convergence presque partout de la fonction $\chi_{\Omega_\varepsilon}$ vers χ_{Ω_0} quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, puis en appliquant encore une fois le théorème de Lebesgue [20] à la fonction $2\widehat{u}'_0(u_0 - \varphi_1)$, il existera ε_1 , tel que $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_1$, on ait

$$|j_3(\varepsilon)| \leq \delta.$$

Il reste alors à évaluer la limite de j_2 quand ε tend vers 0. On a

$$\begin{aligned} |j_2(\varepsilon)| &= \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{(u_\varepsilon - \tilde{u}_0)^2}{\varepsilon} dx \right| \leq \varepsilon \left\| \frac{(u_\varepsilon - \tilde{u}_0)}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \varepsilon 2 \left\| \frac{(u_\varepsilon - \tilde{u}_0)}{\varepsilon} - \widehat{u}'_0 \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \varepsilon 2 \|\widehat{u}'_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \\ &\leq \varepsilon 2 \left\| \frac{(u_\varepsilon - \tilde{u}_0)}{\varepsilon} - \widehat{u}'_0 \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \varepsilon 2 \|\widehat{u}'_0\|_{L^2(D)}^2 \end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.12 et l'estimation (4.70), il existe une constante $c > 0$, telle qu'on a

$$|j_2(\varepsilon)| \leq \varepsilon c + \varepsilon \|\widehat{u}'_0\|_{L^2(D)}^2$$

On conclut alors que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |j_3(\varepsilon)| = 0.$$

Par conséquent, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{j_D(\varepsilon) - j_D(0)}{\varepsilon} = \int_{\Omega_0} F'_0 dx + \int_{\partial\Omega_0} F_0(x) P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma(x).$$

D'autre part, notons par $G_\varepsilon = |\nabla u_\varepsilon - \nabla \varphi_2|^2$ et par g_D l'application définie par :

$$\varepsilon \rightarrow g_D(\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} G_\varepsilon(x) dx.$$

Il reste ainsi à traiter la dérivée de la fonctionnelle $g_D(\varepsilon)$. En effet, en utilisant le fait que u_ε est solution du problème (4.57) sur $\Lambda = \Omega_\varepsilon$, on aura

$$\begin{aligned} g_D(\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon - \nabla \varphi_2|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon - \nabla \varphi_2) \nabla u_\varepsilon dx - \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla u_\varepsilon - \nabla \varphi_2) \nabla \varphi_2 dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} (f + 2\Delta \varphi_2) u_\varepsilon dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla \varphi_2\|^2 dx \\ &= g_{1,D}(\varepsilon) + g_{2,D}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Ensuite en utilisant le Théorème 2.1, on aura

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{g_{2,D}(\varepsilon) - g_{2,D}(0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} \|\nabla\varphi_2\|^2(x) P_\Omega(\nu_0(x)) d\sigma(x). \quad (4.112)$$

Puis en utilisant les mêmes arguments que pour la fonctionnelle j_D , on démontre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{g_{1,D}(\varepsilon) - g_{1,D}(0)}{\varepsilon} = \int_{\Omega_0} (f + 2\Delta\varphi_2) u'_0 dx.$$

Ce qui achève la preuve de ce corollaire. ■

Dérivation de forme pour le problème de Neumann

Soit D un ouvert convexe borné assez régulier et soit $\Lambda \subset D$ un ouvert borné assez régulier. Étant donnés les fonctions $f \in L^2(D)$ et $g \in L^2(\partial\Lambda)$, considérons le problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_\Lambda + u_\Lambda = f & \text{dans } \Lambda \\ \frac{\partial u_\Lambda}{\partial \nu} = g & \text{sur } \partial\Lambda. \end{cases} \quad (4.113)$$

Notons que, puisque le domaine Λ est assez régulier, si en plus $f \in H^1(\Lambda)$ et $g \in H^1(\Lambda)$, alors le problème (4.113) admet une solution unique $u_\Lambda \in H^2(\Lambda)$.

Soient $\Omega_0 \subset D$ un ouvert convexe contenant 0 de classe \mathcal{C}^3 et Ω un ouvert convexe borné de D contenant 0 de classe \mathcal{C}^2 . Considérons la déformation de Minkowski du domaine Ω_0 par Ω définie, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, par :

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega.$$

Désignons par u_0 (resp. u_ε) la solution du problème (4.113) pour $\Lambda = \Omega_0$ (resp. $\Lambda = \Omega_\varepsilon$).

Dans cette section, nous montrons l'existence de la dérivée de forme de l'application :

$$\varepsilon \mapsto u_\varepsilon,$$

dans un espace fonctionnel approprié. En effet, dans le cas d'une déformation de Minkowski de domaines convexes par des convexes contenant 0, nous aurons toujours $\Omega_0 \subseteq \Omega_\varepsilon$, $\forall \varepsilon \in [0, 1]$. Nous nous ramenons ainsi à établir l'existence de la dérivée de forme de l'application

$$\varepsilon \in [0, 1] \mapsto u_\varepsilon \in H^1(\Omega_0).$$

Pour ce faire, comme Ω est un domaine convexe borné, d'après [86], il existe $(\Omega^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante d'ouverts bornés suffisamment réguliers et fortement convexes, telle que $\Omega \subset \Omega^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et vérifiant :

$$d^H(\overline{\Omega^k}, \overline{\Omega}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \quad (4.114)$$

Posons $\Omega_{\varepsilon,k} = \Omega_0 + \varepsilon\Omega_k$, $\varepsilon \in [0, 1]$. Comme Ω_0 est un domaine borné de classe \mathcal{C}^2 et convexe

(en particulier étoilé par rapport à une boule centrée en 0), alors d'après le Lemme 2.5, $\Omega_{\varepsilon,k}$ est une déformation du domaine Ω_0 par le champ de vecteurs régulier :

$$a_k(x) = J_{\Omega_0}(x) \nabla P_{\Omega_k} \left(\nu_0(x) \left(\frac{x}{J_{\Omega_0}(x)} \right) \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

et

$$a_k(x) = \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0(x)), \quad \forall x \in \partial\Omega_0$$

autrement dit, $\Omega_{\varepsilon,k} = \Phi_{\varepsilon,k}(\Omega_0)$ où $\Phi_{\varepsilon,k} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n} + \varepsilon a_k$, $\forall \varepsilon \in [0, 1]$ et $\forall k \in \mathbb{N}$. De plus, $\Phi_{\varepsilon,k}$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Soit maintenant $f \in H^1(D)$ et $g \in H^2(D)$, considérons l'unique solution $u_{\varepsilon,k}$ du problème (4.113) pour $\Lambda = \Omega_{\varepsilon,k}$. D'après [33, 57, 85], il existe $\widehat{u}'_k \in H^1(D)$ tel que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P_{\varepsilon,k}(u_{\varepsilon,k}) - \tilde{u}_0}{\varepsilon} = \widehat{u}'_k \quad \text{dans } H^1(D) \quad (4.115)$$

où $P_{\varepsilon,k}(u_{\varepsilon,k}) := P(u_{\varepsilon,k} \circ \Phi_{\varepsilon,k}) \circ \Phi_{\varepsilon,k}^{-1}$, $\tilde{u}_0 := P(u_0)$ et $P : H^1(\Omega_0) \rightarrow H^1(D)$ est un opérateur de prolongement linéaire et continu. De plus, $u'_k := \widehat{u}'_k|_{\Omega_0}$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u'_k + u'_k = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial u'_k}{\partial \nu_0} = \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) \langle a_k, \nu_0 \rangle + \nabla u_0 \nabla|_{\Gamma_0} \langle a_k, \nu_0 \rangle & \text{sur } \Gamma_0 = \partial\Omega_0, \end{cases} \quad (4.116)$$

où

$$\nabla|_{\Gamma_0} \langle a_k, \nu_0 \rangle = \nabla \langle a_k, \nu_0 \rangle - \langle \nabla \langle a_k, \nu_0 \rangle, \nu_0 \rangle \nu_0$$

Or, d'après le lemme 2.3, on a

$$\langle a_k, \nu_0 \rangle = P_{\Omega_k}(\nu_0) \quad \text{dans } \partial\Omega_0. \quad (4.117)$$

Puisque Ω_0 est de classe \mathcal{C}^2 , alors d'après le Théorème 1.7, il existe une extension de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ de la normale, notée encore par ν_0 . Alors, par homogénéité de la fonction P_{Ω_k} , on a

$$\nabla \langle a_k, \nu_0 \rangle = \nabla(P_{\Omega_k}(\nu_0)) = {}^\top \nabla \nu_0 \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0) \quad \text{sur } \Gamma_0.$$

Ainsi en utilisant le fait que $\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} = g$, alors

$$\begin{aligned} \langle \nabla u_0, \nabla|_{\Gamma_0} \langle a_k, \nu_0 \rangle \rangle &= \langle \nabla u_0, \nabla \langle a_k, \nu_0 \rangle - \langle \nabla \langle a_k, \nu_0 \rangle, \nu_0 \rangle \nu_0 \rangle \\ &= \langle \nabla u_0, {}^\top \nabla \nu_0 \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0) \rangle - \langle {}^\top \nabla \nu_0 \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0), \nu_0 \rangle \langle \nabla u_0, \nu_0 \rangle \\ &= \langle {}^\top \nabla \nu_0 \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0), \nabla u_0 - g \nu_0 \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \partial_j P_{\Omega_k}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j}. \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{N}_{i,j} = \partial_i \nu_{0,j} (\partial_i u_0 - g \nu_{0,i}).$$

Donc, le problème (4.60) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} -\Delta u'_k + u'_k = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial u'_k}{\partial \nu_0} = \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_{\Omega_k}(\nu_0) + \sum_{i,j=1}^n \partial_j P_{\Omega_k}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases} \quad (4.118)$$

Ainsi, de manière analogue au cas du problème de Dirichlet, les éléments de la preuve du résultat d'existence nécessitent d'avoir une idée sur le problème vérifié par la dérivée de u_ε en 0 notée par u'_0 . Commençons alors par établir un résultat de convergence de $(u'_k)_k$ vers u'_0 , quand k tend vers l'infini. Ceci fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.11 *On a la limite suivante :*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u'_k - u'_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0,$$

où $u'_0 \in H^1(\Omega_0)$ est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u'_0 + u'_0 = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial u'_0}{\partial \nu_0} = \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_{\Omega}(\nu_0) + \sum_{i,j=1}^n \partial_j P_{\Omega}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases} \quad (4.119)$$

et ν_0 est la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0 et $\mathcal{N}_{i,j} = \partial_i \nu_{0,j} (\partial_i u_0 - g \nu_{0,i})$.

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$ et u'_k la solution du problème variationnel suivant :

$$\int_{\Omega_0} \nabla u'_k \nabla \varphi dx + \int_{\Omega_0} u'_k \varphi dx = \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_{\Omega_k}(\nu_0) \varphi d\sigma + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_0} \partial_j P_{\Omega_k}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} \varphi d\sigma \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_0). \quad (4.120)$$

En prenant $\varphi = u'_k$ et en utilisant l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned} \|u'_k\|_{H^1(\Omega_0)}^2 &\leq \|P_{\Omega_k}\|_{L^\infty(D)} \left\| \frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right\|_{L^2(\Gamma_0)} \|u'_k\|_{L^2(\Gamma_0)} \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \|\partial_j P_{\Omega_k}\|_{L^\infty(D)} \|\mathcal{N}_{i,j}\|_{L^2(\Gamma_0)} \|u'_k\|_{L^2(\Gamma_0)}. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la continuité de l'opérateur trace de $H^1(\Omega_0)$ vers $L^2(\Gamma_0)$ et le fait que $P_{\Omega_k} \leq P_D$, $\forall k \in \mathbb{N}$ il existera alors une constante $c > 0$, telle que

$$\begin{aligned} \|u'_k\|_{H^1(\Omega_0)} &\leq c \|P_{\Omega_k}\|_{L^\infty(D)} \left\| \frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right\|_{L^2(\Gamma_0)} + c \sum_{i,j=1}^n \|\partial_j P_{\Omega_k}\|_{L^\infty(D)} \|\mathcal{N}_{i,j}\|_{L^2(\Gamma_0)} \\ &\leq c \|P_D\|_{L^\infty(D)} \left\| \frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right\|_{L^2(\Gamma_0)} + c \|\nabla P_{\Omega_k}\|_{L^\infty(D)} \sum_{i,j=1}^n \|\mathcal{N}_{i,j}\|_{L^2(\Gamma_0)} \end{aligned}$$

En utilisant l'assertion (ii) de la Proposition 4.9, il existera alors $\alpha > 0$, telle que

$$\|\tilde{u}'_k\|_{H^1(\Omega_0)} \leq \alpha, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ainsi il existe une sous suite de $(u'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ notée encore par $(u'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $w \in H^1(\Omega_0)$, tels que

$$u'_k \rightharpoonup w, \quad \text{dans } H^1(\Omega_0).$$

On a donc

$$\int_{\Omega_0} \nabla u'_k \nabla \varphi dx + \int_{\Omega_0} u'_k \varphi dx \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_0} \nabla w \nabla \varphi dx + \int_{\Omega_0} w \varphi dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_0)$$

De plus, en appliquant les assertions (iii) et (vi) de la Proposition 4.9, on aura

$$\int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_{\Omega_k}(\nu_0) \varphi d\sigma \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_{\Omega}(\nu_0) \varphi d\sigma, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_0) \quad (4.121)$$

et

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_0} \partial_j P_{\Omega_k}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} \varphi d\sigma \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_0} \partial_j P_{\Omega}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} \varphi d\sigma, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_0). \quad (4.122)$$

Puisque, u'_k est solution du problème (4.120), on aura que w est solution du problème variationnel suivant :

$$\int_{\Omega_0} \nabla w \nabla \varphi dx + \int_{\Omega_0} w \varphi dx = \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_{\Omega}(\nu_0) \varphi d\sigma + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_0} \partial_j P_{\Omega}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} \varphi d\sigma, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_0).$$

Ce qui implique, par unicité de la solution, que $w = u'_0$. Montrons que

$$u'_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} u'_0 \quad \text{dans } H^1(\Omega_0).$$

Comme u'_k converge u'_0 faiblement dans $H^1(\Omega_0)$, alors il existe une sous-suite de $(u'_k)_k$ notée encore $(u'_k)_k$, telle qu'on a

$$u'_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} u'_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega_0) \quad (4.123)$$

et

$$u'_{k|_{\Gamma_0}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} u'_{0|_{\Gamma_0}} \quad \text{dans } L^2(\Gamma_0). \quad (4.124)$$

Commençons par montrer que

$$\|\nabla u'_k\|_{L^2(\Omega_0)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \|\nabla u'_0\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

En prenant $\varphi = u'_k$ dans (4.120), on a

$$\int_{\Omega_0} |\nabla u'_k|^2 dx = - \int_{\Omega_0} (u'_k)^2 dx + \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_{\Omega_k}(\nu_0) u'_k d\sigma + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_0} \partial_j P_{\Omega_k}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} u'_k d\sigma.$$

D'après (4.123), on a

$$- \int_{\Omega_0} (u'_k)^2 dx \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} - \int_{\Omega_0} (u'_0)^2 dx. \quad (4.125)$$

Ensuite, posons

$$I_k^1 = \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) (P_{\Omega_k}(\nu_0) u'_k - P_{\Omega}(\nu_0) u'_0) d\sigma.$$

et

$$I_k^2 = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_0} \partial_j P_{\Omega_k}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} u'_k d\sigma - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_0} \partial_j P_{\Omega}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} u'_0 d\sigma.$$

On a

$$I_k^1 = \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) (P_{\Omega_k}(\nu_0) - P_{\Omega}(\nu_0)) u'_0 d\sigma + \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_{\Omega_k}(\nu_0) (u'_k - u'_0) d\sigma.$$

Donc

$$\begin{aligned} |I_k^1| &\leq \left\| \frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right\|_{L^2(\Gamma_0)} \|P_{\Omega_k} - P_{\Omega}\|_{L^\infty(D)} \|u'_0\|_{L^2(\Gamma_0)} \\ &\quad + \left\| \frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right\|_{L^2(\Gamma_0)} \|P_D\|_{L^\infty(D)} \|u'_k - u'_0\|_{L^2(\Gamma_0)}. \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $P_{\Omega_k} \leq P_D$. Alors d'après (4.124) on a

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right\|_{L^2(\Gamma_0)} \|P_D\|_{L^\infty(D)} \|u'_k - u'_0\|_{L^2(\Gamma_0)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus en utilisant l'assertion (iii) de la Proposition 4.9, on obtient

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right\|_{L^2(\Gamma_0)} \|P_{\Omega_k} - P_{\Omega}\|_{L^\infty(D)} \|u'_0\|_{L^2(\Gamma_0)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc

$$|I_k^1| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

D'autre part I_k^2 peut s'écrire

$$I_k^2 = I_{1,k}^2 + I_{2,k}^2,$$

avec

$$I_{1,k}^2 = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_0} \partial_j P_{\Omega_k}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} (u'_k - u'_0) d\sigma, \text{ et } I_{2,k}^2 = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_0} \partial_j (P_{\Omega_k}(\nu_0) - P_{\Omega}(\nu_0)) \mathcal{N}_{i,j} u'_0 d\sigma.$$

On a

$$|I_{1,k}^2| \leq \|\nabla P_{\Omega_k}(\nu_0)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \|u'_k - u'_0\|_{L^2(\Gamma_0)} \sum_{i,j=1}^n \|\mathcal{N}_{i,j}\|_{L^2(\Gamma_0)}.$$

En utilisant l'assertion (iii) de la proposition 4.9 et la convergence (4.124), on obtient

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_{1,k}^2 = 0.$$

On a aussi,

$$|I_{2,k}^2| \leq \sum_{i,j=1}^n \left| \int_{\Gamma_0} \partial_j (P_{\Omega_k}(\nu_0) - P_\Omega(\nu_0)) \mathcal{N}_{i,j} u'_0 d\sigma \right|.$$

En appliquant l'assertion (vi) de la Proposition 4.9, on aura alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_{2,k}^2 = 0.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_0} |\nabla u'_k|^2 dx &= - \int_{\Omega_0} (u'_0)^2 dx + \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_\Omega(\nu_0) + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_0} \partial_j P_\Omega(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} u'_0 d\sigma \\ &= \int_{\Omega_0} |\nabla u'_0|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Ainsi comme u'_k converge faiblement vers u'_0 dans $H^1(\Omega_0)$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u'_k - u'_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0.$$

Ce qui achève la preuve de ce résultat. ■

Maintenant afin d'établir le résultat d'existence de la dérivée de forme, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.13 *Soit D un domaine borné convexe régulier, tel que pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \varepsilon\Omega \subset D$, et soit $f \in H^1(D)$ et $g \in H^2(D)$. Considérons, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, la solution u_ε du problème de Neumann (4.113) pour $\Lambda = \Omega_\varepsilon$. Alors, il existe deux constante $C_1 = C_1(r, D) > 0$ et $C_2 = C_2(D) > 0$ indépendantes de ε , telles que pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, on a :*

$$\left\| \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C_1 \tag{4.126}$$

et

$$\left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_2, \tag{4.127}$$

où $\tilde{u}_0 = \mathcal{E}_S(u_0)$ est un prolongement de u_0 donné par E. M. Stein Théorème 4.1, $\Phi_\varepsilon = \frac{J_0}{J_\varepsilon} Id_{\mathbb{R}^n}$ et J_0, J_ε sont respectivement les fonctions jauge associées aux domaines Ω_0 et Ω_ε .

Démonstration.

Soit $\varepsilon \in [0, 1]$ et soient u_0 et u_ε les solutions respectives du problème (4.113) pour $\Lambda = \Omega_0$ et $\Lambda = \Omega_\varepsilon$. Montrons la première estimation (4.126) de ce lemme. On sait que la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_0)}$ peut être définie par dualité comme suit :

$$\left\| \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_0)} = \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega_0}) \\ \|\psi\|_{H^1(\Omega_0)} \leq 1}} \left\langle \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_0)}.$$

Soit alors $\psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega_0})$ tel que $\|\psi\|_{H^1(\Omega_0)} \leq 1$, montrons qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de ψ et ε telle que :

$$\left\langle \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_0)} \leq C.$$

Pour ce faire, soit $\varepsilon \in]0, 1[$, $\psi_\varepsilon = \psi \circ \Phi_\varepsilon^{-1}$ avec $\Phi_\varepsilon^{-1} = \frac{J_\varepsilon}{J_0} \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et J_0 et J_ε sont respectivement les fonctions jauge associées aux domaines Ω_0 et Ω_ε . D'après la Proposition 4.7, la fonction $\Phi_\varepsilon : \Omega_0 \rightarrow \Omega_\varepsilon$ est un homéomorphisme bi-lipschitzien, De plus en utilisant les estimations (iii) de la Proposition 4.7, on vérifie que $\psi_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$.

Prenons alors ψ_ε comme fonction test, dans la formulation variationnelle de u_ε :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon dx + \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \psi_\varepsilon dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f \psi_\varepsilon dx + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} g \psi_\varepsilon d\sigma. \quad (4.128)$$

En utilisant la formule de changement de variable dans le cas des homéomorphismes bi-lipschitziens [39], on aura

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \nabla \psi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) \gamma_\varepsilon dx + \int_{\Omega_0} u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \psi_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \gamma_\varepsilon dx = \int_{\Omega_0} f \circ \Phi_\varepsilon \psi_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \gamma_\varepsilon dx + \int_{\partial \Omega_0} g \circ \Phi_\varepsilon \psi_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon d\sigma, \quad (4.129)$$

où $\gamma_\varepsilon = |\det(\nabla \Phi_\varepsilon)|$ et $\mathcal{B}_\varepsilon = \|\nabla(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nu_0\| \gamma_\varepsilon$. Comme on a

$$\nabla u_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) = \nabla^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \quad \text{et} \quad \nabla \psi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon) = \nabla^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla(\psi_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) = \nabla^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla \psi,$$

(4.129) devient :

$$\int_{\Omega_0} \nabla^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla \psi \gamma_\varepsilon dx + \int_{\Omega_0} u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \psi \gamma_\varepsilon dx = \int_{\Omega_0} f_\varepsilon \psi \gamma_\varepsilon dx + \int_{\partial \Omega_0} g_\varepsilon \psi \mathcal{B}_\varepsilon d\sigma,$$

où $f_\varepsilon = f \circ \Phi_\varepsilon$ et $g_\varepsilon = g \circ \Phi_\varepsilon$.

Or, on sait que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^n$ et $B \in \mathcal{M}_{n,n}$, on a $\text{BaBb} = \nabla^\top \text{BBab}$. En effet,

$$\text{BaBb} = \text{Ba} \cdot \text{Bb} = \text{Bb} \cdot \text{Ba} = \nabla^\top(\text{Bb})\text{Ba} = \nabla^\top(b) \nabla^\top(B)\text{Ba} = b \cdot \nabla^\top \text{BBa} = \nabla^\top \text{BBa} \cdot b = \nabla^\top \text{BBab}.$$

En utilisant cette formule (en prenant $B = \nabla^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1}$, $a = \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon)$, $b = \nabla \psi$), on aura

$$\nabla^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla \psi = (\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla^\top(\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi.$$

Ainsi

$$\int_{\Omega_0} \gamma_\varepsilon (\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1 \top} (\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1} \nabla (u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi dx + \int_{\Omega_0} u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \psi \gamma_\varepsilon dx = \int_{\Omega_0} f_\varepsilon \psi \gamma_\varepsilon dx + \int_{\partial \Omega_0} g_\varepsilon \psi \mathcal{B}_\varepsilon d\sigma.$$

En reprenant les mêmes notations que celles utilisées dans la Proposition 4.7, on écrit

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \gamma_\varepsilon (\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1 \top} (\nabla \Phi_\varepsilon)^{-1}.$$

On aura alors

$$\int_{\Omega_0} \mathcal{A}_\varepsilon \nabla (u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi dx + \int_{\Omega_0} u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \psi \gamma_\varepsilon dx = \int_{\Omega_0} f_\varepsilon \psi \gamma_\varepsilon dx + \int_{\partial \Omega_0} g_\varepsilon \psi \mathcal{B}_\varepsilon d\sigma. \quad (4.130)$$

D'autre part, la formulation variationnelle vérifiée par u_0 s'écrit :

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla \psi dx + \int_{\Omega_0} u_0 \psi dx = \int_{\Omega_0} f \psi dx + \int_{\partial \Omega_0} g \psi d\sigma, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega_0). \quad (4.131)$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_0)} &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} \nabla (u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \psi dx \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla \psi dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} u_0 \psi dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} (I_n - \mathcal{A}_\varepsilon) \nabla (u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} (1 - \gamma_\varepsilon) u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \psi dx \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} \mathcal{A}_\varepsilon \nabla (u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \psi \gamma_\varepsilon dx \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla \psi dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} u_0 \psi dx, \end{aligned}$$

où I_n est la matrice identité. Ainsi en utilisant les équations (4.130) et (4.131), on aura

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_0)} &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} (I_n - \mathcal{A}_\varepsilon) \nabla (u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} (1 - \gamma_\varepsilon) u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \psi dx \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} f_\varepsilon \psi \gamma_\varepsilon dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0} f \psi dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial \Omega_0} g_\varepsilon \psi \mathcal{B}_\varepsilon d\sigma - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial \Omega_0} g \psi d\sigma \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{1}{\varepsilon} (I_n - \mathcal{A}_\varepsilon) \nabla (u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) \nabla \psi dx + \int_{\Omega_0} \frac{1}{\varepsilon} (1 - \gamma_\varepsilon) u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \psi dx \\ &\quad + \int_{\Omega_0} \frac{1}{\varepsilon} (f \circ \Phi_\varepsilon - f) \psi \gamma_\varepsilon dx + \int_{\Omega_0} f \psi \frac{1}{\varepsilon} (\gamma_\varepsilon - 1) dx \\ &\quad + \int_{\partial \Omega_0} \frac{1}{\varepsilon} (g_\varepsilon - g) \psi \mathcal{B}_\varepsilon d\sigma + \int_{\partial \Omega_0} g \psi \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{B}_\varepsilon - 1) d\sigma. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_0)} &\leq \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon} (I_n - \mathcal{A}_\varepsilon) \right\|_{L^\infty(D)} + \left\| \frac{1}{\varepsilon} (\gamma_\varepsilon - 1) \right\|_{L^\infty(D)} \right) \|u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_0)} \|\psi\|_{H^1(\Omega_0)} \\
&+ \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon - f) \right\|_{L^2(\Omega_0)} \|\gamma_\varepsilon\|_{L^\infty(D)} + \|f\|_{L^2(\Omega_0)} \left\| \frac{\gamma_\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty(D)} \right) \|\psi\|_{H^1(\Omega_0)} \\
&+ \left| \int_{\partial\Omega_0} \frac{1}{\varepsilon} (g_\varepsilon - g) \psi \mathcal{B}_\varepsilon d\sigma + \int_{\partial\Omega_0} g \psi \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{B}_\varepsilon - 1) d\sigma \right|.
\end{aligned}$$

Or, d'après la Proposition 4.7, il existe une constante $c = c(D) > 0$, telle que

$$\max \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon} (I_n - \mathcal{A}_\varepsilon) \right\|_{L^\infty(D)}, \left\| \frac{1}{\varepsilon} (\gamma_\varepsilon - 1) \right\|_{L^\infty(D)}, \|\gamma_\varepsilon\|_{L^\infty(D)} \right) \leq c, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

En appliquant aussi la Proposition 4.8 à la fonctions $f \in H^1(D)$, il existera une constante $c = c(f, D) > 0$, telle que

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} (f \circ \Phi_\varepsilon - f) \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Ainsi on aura l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_0)} &\leq 2c \|u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_0)} \|\psi\|_{H^1(\Omega_0)} + (C + c \|f\|_{L^2(\Omega_0)}) \|\psi\|_{H^1(\Omega_0)} \\
&+ \left| \int_{\partial\Omega_0} \frac{1}{\varepsilon} (g_\varepsilon - g) \psi \mathcal{B}_\varepsilon d\sigma \right| + \left| \int_{\partial\Omega_0} g \psi \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{B}_\varepsilon - 1) d\sigma \right|.
\end{aligned}$$

Il reste ainsi à traiter les deux termes d'intégrales sur le bord $\partial\Omega_0$. D'après la Proposition 4.7, il existera une constante $c = c(D) > 0$, telle que

$$\max \left(\|\nabla \Phi_\varepsilon^{-1}\|_{L^\infty(D)}, \|\gamma_\varepsilon\|_{L^\infty(D)} \right) \leq c, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Ensuite en appliquant la Proposition 4.8 à la fonction $g \in H^2(D)$, il existera une constante $C = C(g, D) > 0$, telle que

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} (g \circ \Phi_\varepsilon - g) \right\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Par suite, en utilisant l'inégalité de Hölder et la continuité de l'application trace de $H^1(\Omega_0)$ dans $L^2(\partial\Omega_0)$, on aura

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\partial\Omega_0} \frac{1}{\varepsilon} (g_\varepsilon - g) \psi \mathcal{B}_\varepsilon d\sigma \right| &\leq \left| \int_{\partial\Omega_0} \frac{1}{\varepsilon} (g_\varepsilon - g) \left\| {}^\top(\nabla\Phi_\varepsilon)^{-1}\nu_0 \right\| \gamma_\varepsilon \psi d\sigma \right| \\
 &\leq \left| \int_{\partial\Omega_0} \frac{1}{\varepsilon} (g_\varepsilon - g) \left\| {}^\top(\nabla\Phi_\varepsilon)^{-1} \right\| \|\nu_0\| \gamma_\varepsilon \psi d\sigma \right| \\
 &\leq \|\nabla\Phi_\varepsilon^{-1}\|_{L^\infty(D)} \|\gamma_\varepsilon\|_{L^\infty(D)} \int_{\partial\Omega_0} \left| \frac{1}{\varepsilon} (g_\varepsilon - g) \right| |\psi| d\sigma \\
 &\leq \|\nabla\Phi_\varepsilon^{-1}\|_{L^\infty(D)} \|\gamma_\varepsilon\|_{L^\infty(D)} \left\| \frac{1}{\varepsilon} (g \circ \Phi_\varepsilon - g) \right\|_{L^2(\partial\Omega_0)} \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega_0)} \\
 &\leq C_{tr}^2 c^2 \left\| \frac{1}{\varepsilon} (g \circ \Phi_\varepsilon - g) \right\|_{H^1(\Omega_0)} \|\psi\|_{H^1(\Omega_0)} \\
 &\leq C_{tr} c^2 C \|\psi\|_{H^1(\Omega_0)},
 \end{aligned}$$

où C_{tr} est la constante de continuité de l'opérateur trace.

D'autre part, pour le terme $\int_{\partial\Omega_0} g \psi \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{B}_\varepsilon - 1) d\sigma$, on a tout d'abord que :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{B}_\varepsilon - 1) \right| &\leq \left| \frac{1}{\varepsilon} (\gamma_\varepsilon - 1) \right| \|\nabla\Phi_\varepsilon^{-1}\| + \left| \frac{1}{\varepsilon} (\|{}^\top(\nabla\Phi_\varepsilon)^{-1}\nu_0\| - 1) \right| \\
 &\leq c \left| \frac{1}{\varepsilon} (\gamma_\varepsilon - 1) \right| + \left| \frac{1}{\varepsilon} (\|{}^\top(\nabla\Phi_\varepsilon)^{-1}\nu_0\| - \|I_n\nu_0\|) \right| \\
 &\leq c \left| \frac{1}{\varepsilon} (\gamma_\varepsilon - 1) \right| + \left| \frac{1}{\varepsilon} (\|\nabla\Phi_\varepsilon^{-1} - I_n\|) \right|
 \end{aligned}$$

D'après la Proposition 4.7, il existe une constante $C = C(D) > 0$, telle que

$$\max \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon} (\nabla\Phi_\varepsilon^{-1} - I_n) \right\|_{L^\infty(D)}, \left\| \frac{1}{\varepsilon} (\gamma_\varepsilon - 1) \right\|_{L^\infty(D)} \right) \leq C, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Ainsi, il existe une constante $C > 0$ telle qu'on aura

$$\left| \int_{\partial\Omega_0} g \psi \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{B}_\varepsilon - 1) d\sigma \right| \leq C \|g\|_{H^1(\Omega_0)} \|\psi\|_{H^1(\Omega_0)}.$$

Par suite, il existera une constante $c > 0$ indépendante de ε , telle que :

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_0)} &\leq 2c \|u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_0)} \|\psi\|_{H^1(\Omega_0)} + (C + c \|f\|_{L^2(\Omega_0)}) \|\psi\|_{H^1(\Omega_0)} \\
 &\quad + C_{tr} c^2 C \|\psi\|_{H^1(\Omega_0)} + C \|g\|_{H^1(\Omega_0)} \|\psi\|_{H^1(\Omega_0)}.
 \end{aligned}$$

Or comme $\psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_0)$ tel que $\|\psi\|_{H^1(\Omega_0)} \leq 1$, alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de ε , telle que :

$$\left\langle \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_0)} \leq C (\|u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)} + 2 + \|g\|_{H^1(\Omega_0)} + \|f\|_{L^2(\Omega_0)}).$$

Il reste alors à estimer le terme $\|u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)}$. En appliquant la formule de changement de variable à l'aide de l'homéomorphisme bi-lipschitzien $\Phi_\varepsilon : \Omega_0 \rightarrow \Omega_\varepsilon$, on aura

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega_0} \|\nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon)\|^2 dx + \int_{\Omega_0} |u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_0} \|\nabla^\top \Phi_\varepsilon \nabla u_\varepsilon(\Phi_\varepsilon)\|^2 dx + \int_{\Omega_0} |u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla^\top \Phi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^{-1}) \nabla u_\varepsilon\|^2 |\det(\nabla \Phi_\varepsilon^{-1})| dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon|^2 |\det(\nabla \Phi_\varepsilon^{-1})| dx. \end{aligned}$$

Or d'après la Proposition 4.7, il existe une constante $c = c(D) > 0$, telle que

$$\max\left(|\det(\nabla \Phi_\varepsilon^{-1})|_{L^\infty(D)}, \|\nabla^\top \Phi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^{-1})\|_{L^\infty(D)}\right) \leq c, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

On obtient alors

$$\|u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)}^2 \leq (c^2 + c) \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2.$$

En utilisant maintenant le fait que u_ε est solution du problème (4.113) pour $\Lambda = \Omega_\varepsilon$ et en prenant u_ε comme fonction test dans la formulation variationnelle de u_ε , on aura

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon|^2 dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f u_\varepsilon dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g u_\varepsilon d\sigma.$$

En appliquant la continuité uniforme de l'opérateur trace de $W^{1,1}(\Omega_\varepsilon)$ vers $L^1(\partial\Omega_\varepsilon)$ (voir proposition 4.2), il existe une constante $M > 0$ indépendante de ε , telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \|f u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)} + M \|g u_\varepsilon\|_{W^{1,1}(\Omega_\varepsilon)}.$$

Ainsi grâce à l'inégalité de Hölder, on aura

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \max(1, M) \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} (\|f\|_{L^2(D)} + \|g\|_{H^1(D)}).$$

Par conséquent, la norme $\|u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)}$ est uniformément bornée par rapport à ε . On en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de ψ et ε telle que :

$$\left\langle \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_0)} \leq C.$$

Par suite,

$$\left\| \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C. \quad (4.132)$$

Montrons maintenant la deuxième estimation (4.127). Notons tout d'abord que comme le domaine Ω_0 est assez régulier, d'après le Théorème 4.1, il existe alors un opérateur de prolongement continu P_0 défini de $H^2(\Omega_0)$ à valeurs dans $H^2(\mathbb{R}^n)$. Soit ainsi $\tilde{u}_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$ un prolongement de $u_0 \in H^2(\Omega_0)$. Commençons par traiter le terme :

$$\left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

En utilisant le changement de variable dans le cas des homéomorphismes bilipschitziens, on aura

$$\left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\int_{\Omega_0} |(\tilde{u}_0 - u_\varepsilon) \circ \Phi_\varepsilon|^2 \gamma_\varepsilon dx},$$

où $\gamma_\varepsilon = |\det(\nabla \Phi_\varepsilon)|$. Or d'après la proposition 4.7, il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε , telle que

$$\|\gamma_\varepsilon\|_{L^\infty(D)} \leq C.$$

Donc

$$\left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \sqrt{C} \left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \circ \Phi_\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Par suite,

$$\left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \sqrt{C} \left\| \frac{u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)} + \sqrt{C} \left\| \frac{\tilde{u}_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Ensuite, d'après la Proposition 4.8, il existe une constante $c = c(D) > 0$, telle que

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} (\tilde{u}_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_0) \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(D)}, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

Puis en utilisant (4.132), il existe alors une constante $c = c(D, u_0) > 0$, telle que

$$\left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

D'autre part en utilisant la formule de changement à l'aide de l'homéomorphisme bilipschitzien, on aura

$$\left\| \frac{\nabla u_\varepsilon - \nabla \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\int_{\Omega_0} \|(\nabla u_0 - \nabla u_\varepsilon) \circ \Phi_\varepsilon\|^2 \gamma_\varepsilon dx},$$

où $\gamma_\varepsilon = |\det(\nabla \Phi_\varepsilon)|$. Or, on a

$$(\nabla u_0 - \nabla u_\varepsilon) \circ \Phi_\varepsilon = {}^\top \nabla \Phi_\varepsilon^{-1} \nabla (u_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon).$$

On aura alors,

$$\left\| \frac{\nabla u_\varepsilon - \nabla \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\int_{\Omega_0} \|{}^\top \nabla \Phi_\varepsilon^{-1} \nabla (u_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon)\|^2 \gamma_\varepsilon dx}.$$

Or, d'après la proposition 4.7, il existe une constante $C > 0$, indépendante de ε , telle que

$$\max(\|\nabla \Phi_\varepsilon^{-1}\|_{L^\infty(D)}, \|\gamma_\varepsilon\|_{L^\infty(D)}) \leq C.$$

Donc

$$\left\| \frac{\nabla u_\varepsilon - \nabla \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C \left\| \frac{\nabla(u_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon)}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Par suite,

$$\left\| \frac{\nabla u_\varepsilon - \nabla \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C \left\| \frac{\nabla(u_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) - \nabla u_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)} + C \left\| \frac{\nabla(u_0 \circ \Phi_\varepsilon) - \nabla u_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

D'une part, d'après la Proposition 4.8, il existe une constante $c = c(D) > 0$, telle que

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} (\tilde{u}_0 \circ \Phi_\varepsilon - u_0) \right\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C \|\tilde{u}_0\|_{H^2(D)}, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

D'autre part, en utilisant (4.132), il existera alors une constante $c = c(D, u_0) > 0$, telle que

$$\left\| \frac{\nabla u_\varepsilon - \nabla \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1].$$

D'où le résultat. ■

Nous avons alors le résultat d'existence de la dérivée de formes pour le problème de Neumann.

Théorème 4.7 Soient $f \in H^1(D)$ et $g \in H^2(D)$. Considérons, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, la solution u_ε du problème de Neumann (4.113) pour $\Lambda = \Omega_\varepsilon := \Omega_0 + \varepsilon\Omega$. Alors, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, il existe un prolongement $\tilde{u}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^n)$ de u_ε et $\widehat{u}'_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, tels que l'on ait

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| \frac{\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u}'_0 \right\|_{H^1(\Omega_0)} = 0.$$

Autrement dit, l'application $\varepsilon \in [0, 1] \mapsto u_\varepsilon \in H^1(\Omega_0)$ est dérivable en 0 et sa dérivée $u'_0 := \widehat{u}'_0|_{\Omega_0}$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u'_0 + u'_0 = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial u'_0}{\partial \nu_0} = \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_\Omega(\nu_0) + \sum_{i,j=1}^n \partial_j P_\Omega(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases} \quad (4.133)$$

où $\mathcal{N}_{i,j} = \partial_i \nu_{0,j} (\partial_i u_0 - g \nu_{0,i})$, $\nu_0 = (\nu_{0,1}, \dots, \nu_{0,n})$ est la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0 et P_Ω est la fonction support du domaine Ω .

Démonstration. Soit $\varepsilon \in [0, 1]$ et soient u_0 et u_ε les solutions respectives du problème (4.113) pour $\Lambda = \Omega_0$ et $\Lambda = \Omega_\varepsilon$. Soit P_0 un opérateur de prolongement de $H^1(\Omega_0)$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ et notons par $\tilde{u}_0 = P_0(u_0)$ le prolongement de Ω_0 dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. Comme Ω_ε contient Ω_0 , d'après l'estimation (4.127) du Lemme 4.13, il existe une constante

$c = c(D, u_0) > 0$, telle que

$$\left\| \frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega_0)} \leq c, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Donc, de la suite $(\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon})_\varepsilon$ on peut extraire une sous-suite notée de la même manière $(W_\varepsilon)_\varepsilon$, $W_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}$ et il existe un élément $w \in H^1(D)$, telle que W_ε converge faiblement vers w dans $H^1(\Omega_0)$:

$$W_\varepsilon \rightharpoonup w, \text{ dans } H^1(\Omega_0). \quad (4.134)$$

Considérons $\tilde{w} = P_0(w) \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et montrons que $w = u'_0$ et que W_ε converge vers w fortement dans $H^1(\Omega_0)$. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_0)$, on a :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla \psi dx + \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \psi dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f \psi dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g \psi d\sigma, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (4.135)$$

Considérons les fonctionnelles suivantes :

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \langle u_\varepsilon, \psi \rangle_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad \mathcal{J}_2(\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} f \psi dx \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_3(\varepsilon) = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g \psi d\sigma.$$

Alors pour tout $\varepsilon \in [0, 1[$, on a $\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \mathcal{J}_2(\varepsilon) + \mathcal{J}_3(\varepsilon)$. Calculons ainsi les limites

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}_i(\varepsilon) - \mathcal{J}_i(0)}{\varepsilon}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Commençons par calculer celle du terme \mathcal{J}_1 , que l'on décompose en trois termes comme suit :

$$\frac{\mathcal{J}_1(\varepsilon) - \mathcal{J}_1(0)}{\varepsilon} = A_1(\varepsilon) + A_2(\varepsilon) + A_3(\varepsilon),$$

avec

$$A_1(\varepsilon) = \left\langle \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \tilde{w}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad A_2(\varepsilon) = \langle \tilde{w}, \psi \rangle_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

et

$$A_3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\langle \tilde{u}_0, \psi \rangle_{H^1(\Omega_\varepsilon)} - \langle u_0, \psi \rangle_{H^1(\Omega_0)} \right).$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Hölder pour le premier terme $A_1(\varepsilon)$, on aura

$$\begin{aligned} |A_1(\varepsilon)| &= \left| \left\langle \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \tilde{w}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right| \\ &\leq \left| \left\langle \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \tilde{w}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \right| + \left| \left\langle \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \tilde{w}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_0)} \right| \\ &\leq \left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \tilde{w} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} + \left| \left\langle \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \tilde{w}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_0)} \right|. \end{aligned}$$

D'une part, d'après l'estimation (4.127) du Lemme 4.13, il existe une constante $c > 0$,

telle qu'on aura

$$\begin{aligned} |A_1(\varepsilon)| &= \left| \left\langle \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \tilde{w}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right| \\ &\leq (c + \|\tilde{w}\|_{H^1(D)}) \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} + \left| \left\langle \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \tilde{w}, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_0)} \right|. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$|A_1(\varepsilon)| \leq (c + \|\tilde{w}\|_{H^1(D)}) \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} + \left| \langle W_\varepsilon - \tilde{w}, \psi \rangle_{H^1(\Omega_0)} \right|.$$

Or, on a

$$\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)}^2 = \int_D \chi_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} |\psi|^2 dx + \int_D \chi_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} |\nabla(\psi)|^2 dx,$$

et comme la convergence au sens de Hausdorff de $\bar{\Omega}_\varepsilon$ vers $\bar{\Omega}_0$ entraîne que $\chi_{\Omega_\varepsilon}$ converge presque partout vers χ_{Ω_0} quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, alors $\chi_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} = \chi_{\Omega_\varepsilon} - \chi_{\Omega_0}$ converge presque partout vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. En utilisant alors le théorème de Lebesgue [20], on aura

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} = 0.$$

Ensuite l'équation (4.134), entraîne que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |A_1(\varepsilon)| = 0.$$

D'autre part, en utilisant le fait que $\chi_{\Omega_\varepsilon}$ converge presque partout vers χ_{Ω_0} quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, puis en appliquant le théorème de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A_2(\varepsilon) = \langle \tilde{w}, \psi \rangle_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \langle \tilde{w}, \psi \rangle_{H^1(\Omega_0)}.$$

Finalement pour le terme $A_3(\varepsilon)$, comme $\tilde{u}_0 \psi$ dans $W^{1,1}(D)$, alors d'après le Théorème 2.1 l'application

$$\varepsilon \mapsto \langle \tilde{u}_0, \psi \rangle_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

est dérivable en 0^+ et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A_3(\varepsilon) = \int_{\partial\Omega_0} (u_0 \psi + \nabla u_0 \nabla \psi) P_\Omega(\nu_0) d\sigma.$$

Par conséquent on aura

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}_1(\varepsilon) - \mathcal{J}_2(0)}{\varepsilon} = \langle w, \psi \rangle_{H^1(\Omega_0)} + \int_{\partial\Omega_0} (u_0 \psi + \nabla u_0 \nabla \psi) P_\Omega(\nu_0) d\sigma.$$

Maintenant comme $f\psi \in W^{1,1}(D)$, alors d'après le Théorème 2.1, la fonction

$$\varepsilon \mapsto \int_{\Omega_\varepsilon} f\psi dx$$

est dérivable en 0^+ et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}_2(\varepsilon) - \mathcal{J}_2(0)}{\varepsilon} = \int_{\partial\Omega_0} f\psi P_{\Omega}(\nu_0) d\sigma.$$

Par suite puisque $\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \mathcal{J}_2(\varepsilon) + \mathcal{J}_3(\varepsilon)$, $\forall \varepsilon \in [0, 1[$ on aura

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}_3(\varepsilon) - \mathcal{J}_3(0)}{\varepsilon} = \langle w, \psi \rangle_{H^1(\Omega_0)} + \int_{\partial\Omega_0} (u_0\psi + \nabla u_0 \nabla \psi) P_{\Omega}(\nu_0) d\sigma - \int_{\partial\Omega_0} f\psi P_{\Omega}(\nu_0) d\sigma.$$

Ainsi cette limite existe, et le but est de l'expliciter en fonction de g . En effet, soit $k \in \mathbb{N}$ et considérons la fonction suivante :

$$J_{3,k}(\varepsilon) = \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}^k} g\psi d\sigma.$$

Or d'après [57, 85], nous avons la formule de dérivée de forme suivante :

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} J_{3,k}(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\partial\Omega_0} G_0 P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma \quad \text{avec} \quad G_0 = \frac{\partial g\psi}{\partial \nu_0} + Hg\psi, \quad (4.136)$$

où H est la courbure moyenne de $\partial\Omega_0$. D'autre part, comme $u_{\varepsilon,k}$ est solution du problème (4.113) pour $\Lambda = \Omega_{\varepsilon,k}$, alors elle est solution de :

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}^k} \nabla u_{\varepsilon,k} \nabla \psi dx + \int_{\Omega_{\varepsilon}^k} u_{\varepsilon,k} \psi dx = \int_{\Omega_{\varepsilon}^k} f\psi dx + \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}^k} g\psi d\sigma, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

En utilisant ainsi le fait que $u_{\varepsilon,k}$ est dérivable (d'après (4.115)), on montre de la même manière que précédemment que :

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} J_{3,k}(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0^+} = \langle w, \psi \rangle_{H^1(\Omega_0)} - \int_{\partial\Omega_0} (u_0\psi + \nabla u_0 \nabla \psi) P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma - \int_{\partial\Omega_0} f\psi P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma. \quad (4.137)$$

Donc, d'après (4.136) et (4.137), pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\int_{\partial\Omega_0} G_0(x) P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma = \langle w, \psi \rangle_{H^1(\Omega_0)} - \int_{\partial\Omega_0} (u_0\psi + \nabla u_0 \nabla \psi) P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma - \int_{\partial\Omega_0} f\psi P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma.$$

D'où, en utilisant la Proposition 4.9, on obtient

$$\int_{\partial\Omega_0} (u_0\psi + \nabla u_0 \nabla \psi) P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega_0} (u_0\psi + \nabla u_0 \nabla \psi) P_{\Omega}(\nu_0) d\sigma,$$

$$\int_{\partial\Omega_0} f\psi P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega_0} f\psi P_{\Omega}(\nu_0) d\sigma$$

et

$$\int_{\partial\Omega_0} G_0(x) P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega_0} G_0(x) P_{\Omega}(\nu_0) d\sigma.$$

Par conséquent, on obtient l'égalité suivante :

$$\langle w, \psi \rangle_{H^1(\Omega_0)} + \int_{\partial\Omega_0} (u_0\psi + \nabla u_0 \nabla \psi) P_\Omega(\nu_0) d\sigma = \int_{\partial\Omega_0} f\psi P_\Omega(\nu_0) d\sigma + \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial g\psi}{\partial \nu_0} + Hg\psi \right) P_\Omega(\nu_0) d\sigma$$

$\forall \psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega_0})$.

Donc

$$\langle w, \psi \rangle_{H^1(\Omega_0)} = \langle w, \psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle -\Delta w + w, \nabla \psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega_0).$$

Ce qui implique que $-\Delta w + w = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_0)$. En conséquence $-\Delta w + w = 0$ p.p dans Ω_0 . Ainsi pour montrer que w concide avec u'_0 , il suffit de montrer qu'il vérifie la condition de Neumann :

$$\frac{\partial w}{\partial \nu_0} = \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_\Omega(\nu_0) + \sum_{i,j=1}^n \partial_j P_\Omega(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} \quad \text{sur } \partial\Omega_0.$$

En effet, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega_0})$, on a

$$\langle w, \psi \rangle_{H^1(\Omega_0)} = \int_{\partial\Omega_0} F(\psi) P_\Omega(\nu_0) d\sigma,$$

avec $F(\psi) = \frac{\partial g\psi}{\partial \nu_0} + Hg\psi + f\psi - u_0\psi - \nabla u_0 \nabla \psi$. Soit $k \in \mathbb{N}$, en utilisant la décomposition suivante :

$$\langle w, \psi \rangle_{H^1(\Omega_0)} = \int_{\partial\Omega_0} F(\psi) (P_\Omega - P_{\Omega_k})(\nu_0) d\sigma + \int_{\partial\Omega_0} F(\psi) P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma,$$

montrons qu'il existe une fonction $\Upsilon_k \in L^2(\partial\Omega_0)$, telle que

$$\int_{\partial\Omega_0} F(\psi) P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma = \int_{\partial\Omega_0} \Upsilon_k \psi d\sigma.$$

Comme $u_0 \in H^2(\Omega_0)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega_0})$, en utilisant la formule (1.4) et le fait que $\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} = g$ sur $\partial\Omega_0$, on aura

$$\nabla u_0 \nabla \psi = \nabla_{|\Gamma_0} u_0 \nabla_{|\Gamma_0} \psi + \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} \frac{\partial \psi}{\partial \nu_0} = g \frac{\partial \psi}{\partial \nu_0} + \nabla_{|\Gamma_0} u_0 \nabla_{|\Gamma_0} \psi, \quad \text{sur } \partial\Omega_0.$$

On aura ainsi

$$\begin{aligned} F(\psi) &= f\psi - u_0\psi - \nabla_{|\Gamma_0} u_0 \nabla_{|\Gamma_0} \psi - g \frac{\partial \psi}{\partial \nu_0} + \frac{\partial g\psi}{\partial \nu_0} + Hg\psi \\ &= f\psi - u_0\psi - \nabla_{|\Gamma_0} u_0 \nabla_{|\Gamma_0} \psi + \psi \frac{\partial g}{\partial \nu_0} + Hg\psi \end{aligned}$$

D'autre part comme Ω_0 est de classe \mathcal{C}^2 et $f \in H^1(D)$, alors $u \in H^3(\Omega_0)$ (voir par exemple [52]). Ainsi puisque $-\Delta u_0 + u_0 = f$ p.p. dans Ω_0 , on a $-\Delta u_0 + u_0 = f$ p.p. dans

$\partial\Omega_0$. Par suite, en utilisant la formule (1.20), on aura

$$f - \Delta_{|\Gamma_0} u_0 - H \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} + u_0 \quad \text{sur } \partial\Omega_0.$$

Donc

$$f = -\Delta_{|\Gamma_0} u_0 - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} - Hg + u_0 \quad \text{sur } \partial\Omega_0.$$

On aura ainsi :

$$\begin{aligned} F(w, \psi) &= -\Delta_{|\Gamma_0} u_0 \psi - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \psi + u_0 \psi - Hg\psi - u_0 \psi - \nabla_{|\Gamma_0} u_0 \nabla_{|\Gamma_0} \psi + \psi \frac{\partial g}{\partial \nu_0} + Hg\psi \\ &= -\Delta_{|\Gamma_0} u_0 \psi - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \psi - \nabla_{|\Gamma_0} u_0 \nabla_{|\Gamma_0} \psi + \psi \frac{\partial g}{\partial \nu_0}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\int_{\partial\Omega_0} F(w, \psi) P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma = \int_{\partial\Omega_0} -\Delta_{|\Gamma_0} u_0 \psi P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma + \int_{\partial\Omega_0} \left(-\frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \psi - \nabla_{|\Gamma_0} u_0 \nabla_{|\Gamma_0} \psi + \psi \frac{\partial g}{\partial \nu_0} \right) P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma.$$

D'autre part, Puisque Ω_0 est de classe \mathcal{C}^3 , alors d'après le Théorème 1.7, il existe une extension de la normale ν_0 de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, notée encore par ν_0 . De plus comme la fonction P_{Ω_k} est régulière, alors $P_{\Omega_k}(\nu_0) \in H^2(\Omega_0)$ et comme $u \in H^3(\Omega_0)$, en utilisant alors la formule d'intégration par partie (1.19), on aura

$$\int_{\partial\Omega_0} -\Delta_{|\Gamma_0} u_0 \psi P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma = \int_{\partial\Omega_0} \nabla_{|\Gamma_0} u_0 \nabla_{|\Gamma_0} (\psi P_{\Omega_k}(\nu_0)) d\sigma.$$

Explicitons le terme $\nabla_{|\Gamma_0} u_0 \nabla_{|\Gamma_0} (\psi P_{\Omega_k}(\nu_0))$. Tout d'abord puisque $\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} = g$ sur $\partial\Omega_0$, alors

$$\nabla_{|\Gamma_0} u_0 := \nabla u_0 - \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} \nu_0 = \nabla u_0 - g\nu_0 \quad \text{sur } \partial\Omega_0.$$

En utilisant la formule (1.18), on aura

$$\nabla_{|\Gamma_0} u_0 \nabla_{|\Gamma_0} (\psi P_{\Omega_k}(\nu_0)) = \nabla u_0 \nabla_{|\Gamma_0} (P_{\Omega_k}(\nu_0)) \psi + \nabla_{|\Gamma_0} u_0 \nabla_{|\Gamma_0} \psi P_{\Omega_k}(\nu_0).$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \nabla_{|\Gamma_0} (P_{\Omega_k}(\nu_0)) &= \nabla (P_{\Omega_k}(\nu_0)) - \langle \nabla (P_{\Omega_k}(\nu_0)), \nu_0 \rangle \nu_0 \\ &= {}^\top \nu_0 \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0) - \langle {}^\top \nu_0 \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0), \nu_0 \rangle \nu_0. \end{aligned}$$

Ainsi, on aura

$$\begin{aligned}
\nabla u_0 \nabla_{|\Gamma_0}(P_{\Omega_k}(\nu_0)) &= \langle \nabla u_0, {}^\top \nu_0 \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0) \rangle - \langle {}^\top \nu_0 \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0), \nu_0 \rangle \nabla u_0 \nu_0 \\
&= \langle \nabla u_0, {}^\top \nu_0 \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0) \rangle - \langle {}^\top \nu_0 \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0), \nu_0 \rangle g \\
&= \langle \nabla u_0 - g \nu_0, {}^\top \nu_0 \nabla P_{\Omega_k}(\nu_0), \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \partial_j P_{\Omega_k}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j}.
\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{N}_{i,j} = \partial_i \nu_{0,j} (\partial_i u_0 - g \nu_{0,i}).$$

Par suite

$$\nabla_{|\Gamma_0} u_0 \nabla_{|\Gamma_0} (\psi P_{\Omega_k}(\nu_0)) = \sum_{i,j=1}^n \partial_j P_{\Omega_k}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} \psi + \nabla_{|\Gamma_0} u_0 \nabla_{|\Gamma_0} \psi P_{\Omega_k}(\nu_0).$$

Ainsi en remplaçant ceci dans l'expression de $F(w, \psi)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_0} F(w, \psi) P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma &= \int_{\partial\Omega_0} \sum_{i,j=1}^n \partial_j P_{\Omega_k}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} \psi d\sigma + \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) \psi P_{\Omega_k}(\nu_0) d\sigma \\
&= \int_{\partial\Omega_0} \Upsilon_k \psi d\sigma,
\end{aligned}$$

où

$$\Upsilon_k = \sum_{i,j=1}^n \partial_j P_{\Omega_k}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} + \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_{\Omega_k}(\nu_0).$$

Donc, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_0)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\langle w, \psi \rangle_{H^1(\Omega_0)} = \int_{\partial\Omega_0} F(w, \psi) (P_\Omega - P_{\Omega_k})(\nu_0) d\sigma + \int_{\partial\Omega_0} \Upsilon_k \psi d\sigma.$$

En faisant maintenant tendre k vers l'infini, tout en utilisant les assertions (iii) et (vi) de la Proposition 4.9, on aura

$$\left| \int_{\partial\Omega_0} F(w, \psi) (P_\Omega - P_{\Omega_k})(\nu_0) d\sigma \right| \leq \int_{\partial\Omega_0} |F(w, \psi)| d\sigma \|P_\Omega - P_{\Omega_k}\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\left| \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) \psi (P_\Omega - P_{\Omega_k})(\nu_0) d\sigma \right| \leq \int_{\partial\Omega_0} \left| \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) \psi \right| d\sigma \|P_\Omega - P_{\Omega_k}\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

et

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_0} \partial_j P_{\Omega_k}(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} \psi d\sigma \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_0} \partial_j P_\Omega(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} \psi d\sigma, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega_0).$$

Donc, on obtient

$$\langle w, \psi \rangle_{H^1(\Omega_0)} = \left\langle \sum_{i,j=1}^n \partial_j P_\Omega(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} + \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_\Omega(\nu_0), \psi \right\rangle_{L^2(\partial\Omega_0)}, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega_0}), \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega_0}).$$

Or comme $w \in H^1(\Omega_0)$ et $\Delta w \in L^2(\Omega_0)$ (car $\Delta w = w$ dans Ω_0), alors $\frac{\partial w}{\partial \nu_0} \in H^{-1/2}(\partial\Omega_0)$.

Ainsi en appliquant la formule de Green, on aura

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial \nu_0}, \psi \right\rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \left\langle \sum_{i,j=1}^n \partial_j P_\Omega(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} + \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_\Omega(\nu_0), \psi \right\rangle_{L^2(\partial\Omega_0)} \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega_0}).$$

Puisque la fonction $\sum_{i,j=1}^n \partial_j P_\Omega(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} + \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_\Omega(\nu_0) \in L^2(\partial\Omega_0)$, alors on en déduit que,

$$\frac{\partial w}{\partial \nu_0} = \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_\Omega(\nu_0) + \sum_{i,j=1}^n \partial_j P_\Omega(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} \quad \text{sur } \partial\Omega_0.$$

Par conséquent w est solution du même problème aux limites dont u'_0 est solution. Donc $w = u'_0$ et $\widehat{u'_0} := \tilde{w}$. Montrons maintenant que $(W_\varepsilon)_\varepsilon$ converge fortement vers u'_0 dans $H^1(\Omega_0)$. Pour ce faire, soit $\psi \in H^1(\Omega_0)$, comme $\Omega_0 \subset \Omega_\varepsilon$, alors on a les formulations suivantes :

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_\varepsilon \nabla \psi dx + \int_{\Omega_0} u_\varepsilon \psi dx = \int_{\Omega_0} f \psi dx + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_0} \psi d\sigma, \quad (4.138)$$

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0 \nabla \psi dx + \int_{\Omega_0} u_0 \psi dx = \int_{\Omega_0} f \psi dx + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} \psi d\sigma \quad (4.139)$$

et

$$\int_{\Omega_0} \nabla u'_0 \nabla \psi dx + \int_{\Omega_0} u'_0 \psi dx = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u'_0}{\partial \nu_0} \psi d\sigma. \quad (4.140)$$

Par suite on obtient

$$\left\langle \frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} - u'_0, \psi \right\rangle_{H^1(\Omega_0)} = \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial_{\nu_0}(u_\varepsilon - u_0)}{\varepsilon} - \partial_{\nu_0} u'_0 \right) \psi d\sigma. \quad (4.141)$$

Ainsi, on a

$$\langle W_\varepsilon - u'_0, \psi \rangle = \int_{\Gamma_0} \partial_{\nu_0}(W_\varepsilon - u'_0) \psi d\sigma, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega_0). \quad (4.142)$$

Ensuite par passage à la limite dans (4.142), tout en utilisant la convergence (4.134), on obtient

$$\int_{\Gamma_0} \partial_{\nu_0} W_\varepsilon \psi d\sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_0} \partial_{\nu_0} u'_0 \psi d\sigma, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega_0).$$

Ainsi, d'après [20], la suite $(\partial_{\nu_0}(W_\varepsilon))_\varepsilon$ est borné dans $L^2(\partial\Omega_0)$. Prenons maintenant

$\psi = W_\varepsilon - u'_0$ comme fonction test dans (4.142), on aura alors

$$\begin{aligned} |W_\varepsilon - u'_0|_{H^1(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Gamma_0} \partial_{\nu_0}(W_\varepsilon - u'_0)W_\varepsilon - u'_0 d\sigma \\ &\leq |W_\varepsilon - u'_0|_{L^2(\partial\Omega_0)} |\partial_{\nu_0}(W_\varepsilon - u'_0)|_{L^2(\partial\Omega_0)} \\ &\leq |W_\varepsilon - u'_0|_{L^2(\partial\Omega_0)} (|\partial_{\nu_0}W_\varepsilon|_{L^2(\partial\Omega_0)} + |\partial_{\nu_0}u'_0|_{L^2(\partial\Omega_0)}). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que l'application trace de $H^1(\Omega_0)$ dans $L^2(\partial\Omega_0)$ est compacte, donc la convergence faible de W_ε vers u'_0 dans $H^1(\Omega_0)$ entraîne qu'elle existe une sous-suite notée encore $(W_\varepsilon)_\varepsilon$, telle que :

$$W_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} w, \text{ dans } L^2(\partial\Omega_0).$$

De plus, en utilisant le fait que $\|\partial_{\nu_0}W_\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega_0)}$ est uniformément bornée par rapport à ε , on obtient alors

$$\|W_\varepsilon - u'_0\|_{H^1(\Omega_0)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

Donc

$$\frac{\tilde{u}_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u'_0, \text{ dans } H^1(\Omega_0). \quad (4.143)$$

Ce qui achève la preuve. ■

Comme application directe de ce résultat d'existence, on s'intéresse au calcul de la dérivée de la fonctionnelle suivante :

$$\Lambda \mapsto J_N(\Lambda) = \int_{\Lambda} j(x, u_\Lambda(x), \nabla u_\Lambda(x)) dx.$$

où u_Λ est la solution du problème (4.113) et $j : D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction que l'on suppose de classe \mathcal{C}^1 sur ce produit. En plus, pour des raisons techniques on va supposer que la fonction $j(x, y, z)$ vérifie les conditions suivantes :

(H₁) *La dérivée première et seconde de j par rapport à la deuxième variable (y, z) existe et est bornée sur $D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.*

(H₂) $\exists M > 0, \forall (x, y, z) \in D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, |j(x, y, z)| \leq M(1 + |y|^2 + \|z\|^2)$.

Nous avons alors le résultat suivant.

Corollaire 4.4 *L'application J_N est dérivable en 0^+ et sa dérivée est donnée par :*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{J_N(\Omega_0 + \varepsilon\Omega) - J_N(\Omega_0)}{\varepsilon} &= \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial j}{\partial y}(\cdot, u_0, \nabla u_0)u'_0 + \frac{\partial j}{\partial z}(\cdot, u_0, \nabla u_0)\nabla u'_0 \right) dx \\ &+ \int_{\partial\Omega_0} j(\cdot, u_0, \nabla u_0)P_\Omega(\nu_0) d\sigma, \end{aligned} \quad (4.144)$$

où $u'_0 := \widehat{u'_0}|_{\Omega_0}$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u'_0 + u'_0 = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial u'_0}{\partial \nu_0} = \left(\frac{\partial g}{\partial \nu_0} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \nu_0^2} \right) P_\Omega(\nu_0) + \sum_{i,j=1}^n \partial_j P_\Omega(\nu_0) \mathcal{N}_{i,j} & \text{sur } \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (4.145)$$

Démonstration. Notons tout d'abord par

$$j'_0 = \frac{\partial j}{\partial y}(\cdot, u_0, \nabla u_0)u'_0 + \frac{\partial j}{\partial z}(\cdot, u_0, \nabla u_0)\nabla u'_0,$$

où $u'_0 := \widehat{u'_0}|_{\Omega_0}$ est l'unique solution du problème (4.145) et considérons la décomposition

$$\begin{aligned} \frac{J_N(\Omega_\varepsilon) - J_N(\Omega_0)}{\varepsilon} &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon}(j_\varepsilon - j_0) - j'_0 \right) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} j'_0 dx + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} j_0 dx - \int_{\Omega_0} j_0 dx \right) \\ &= J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon) + J_3(\varepsilon). \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} J_1(\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon}(j_\varepsilon - j_0) - j'_0 \right) dx, \quad J_2(\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} j'_0 dx, \\ J_3(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} j_0 dx - \int_{\Omega_0} j_0 dx \right). \end{aligned}$$

Il résulte des hypothèses que $j_0 \in W^{1,1}(D)$, ainsi d'après le Théorème 2.1, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_3(\varepsilon) = \int_{\partial\Omega_0} j_0(x)P_\Omega(\nu_0(x))d\sigma(x). \quad (4.146)$$

Il reste alors à évaluer les limites de J_1 et J_2 en 0^+ . Commençons par évaluer celle de J_1 en 0^+ . En utilisant l'hypothèse (**H**₁) on montre l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} |J_1(\varepsilon)| &\leq \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}(j(\cdot, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - j(\cdot, u_0, \nabla u_0)) - \frac{\partial j}{\partial y}(\cdot, u_0, \nabla u_0)u'_0 \right| \\ &+ \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}(j(\cdot, u_0, \nabla u_\varepsilon) - j(\cdot, u_0, \nabla u_0)) - \frac{\partial j}{\partial z}(\cdot, u_0, \nabla u_0)\nabla u'_0 \right| \\ &\leq \|j'\|_\infty \left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u'_0} \right\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)} + \|j''\|_\infty \left(\left\| \widehat{u'_0} \nabla(u_\varepsilon - \tilde{u}_0) \right\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)} + \left\| (u_\varepsilon - \tilde{u}_0)\widehat{u'_0} \right\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)} \right) \\ &+ \|j'\|_\infty \left\| \nabla \left(\frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} \right) - \nabla \widehat{u'_0} \right\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)} + \|j''\|_\infty \left\| \nabla(u_\varepsilon - \tilde{u}_0)\nabla \widehat{u'_0} \right\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)} \end{aligned}$$

Ainsi, on aura

$$\begin{aligned} |J_1(\varepsilon)| &\leq \|j'\|_\infty \left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u'_0} \right\|_{W^{1,1}(\Omega_\varepsilon)} + \|j''\|_\infty \left(\left\| (u_\varepsilon - \tilde{u}_0)\widehat{u'_0} \right\|_{W^{1,1}(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \widehat{u'_0} \nabla(u_\varepsilon - \tilde{u}_0) \right\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)} \right) \\ &\leq \|j'\|_\infty \left(\left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u'_0} \right\|_{W^{1,1}(\Omega_0)} + \left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u'_0} \right\|_{W^{1,1}(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \right) \\ &+ \|j''\|_\infty \left(\left\| (u_\varepsilon - \tilde{u}_0)\widehat{u'_0} \right\|_{W^{1,1}(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} + \left\| (u_\varepsilon - \tilde{u}_0)\widehat{u'_0} \right\|_{W^{1,1}(\Omega_0)} \right) \\ &+ \|j''\|_\infty \left(\left\| \widehat{u'_0} \nabla(u_\varepsilon - \tilde{u}_0) \right\|_{L^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} + \left\| \widehat{u'_0} \nabla(u_\varepsilon - \tilde{u}_0) \right\|_{L^1(\Omega_0)} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Hölder, on aura

$$|J_1(\varepsilon)| \leq \|j'\|_\infty \sqrt{\lambda(\Omega_0)} \left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u}'_0 \right\|_{H^1(\Omega_0)} + \|j'\|_\infty \sqrt{\lambda(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u}'_0 \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ + 2\|j''\|_\infty \|u_\varepsilon - \tilde{u}_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|\widehat{u}'_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} + 2\|j''\|_\infty \|(u_\varepsilon - \tilde{u}_0)\|_{H^1(\Omega_0)} \|\widehat{u}'_0\|_{H^1(D)}.$$

Puis en utilisant l'estimation (4.127) du Lemme 4.13, il existe alors une constante $C > 0$ telle qu'on a

$$\max \left(\|j'\|_\infty, \|j''\|_\infty, \left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u}'_0 \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \|u_\varepsilon - \tilde{u}_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \|\widehat{u}'_0\|_{H^1(D)} \right) \leq C.$$

Donc il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε , telle qu'on aura

$$|J_1(\varepsilon)| \leq C \left(\left\| \frac{u_\varepsilon - \tilde{u}_0}{\varepsilon} - \widehat{u}'_0 \right\|_{H^1(\Omega_0)} + \sqrt{\lambda(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} + \|\widehat{u}'_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} + \|u_\varepsilon - \tilde{u}_0\|_{H^1(\Omega_0)} \right).$$

Or comme la convergence au sens de Hausdorff de $\overline{\Omega_\varepsilon}$ vers $\overline{\Omega_0}$ entraîne que $\chi_{\Omega_\varepsilon}$ converge presque partout vers χ_{Ω_0} quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, alors $\chi_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} = \chi_{\Omega_\varepsilon} - \chi_{\Omega_0}$ converge presque partout vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, en utilisant alors le théorème de Lebesgue [20], on aura

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\lambda(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} + \|\widehat{u}'_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} = 0.$$

Ensuite en utilisant (4.143), on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| \frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} - u'_0 \right\|_{H^1(\Omega_0)} + \|u_\varepsilon - \tilde{u}_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0.$$

Donc pour $\delta > 0$, il existe ε_0 , tel que $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$, on a

$$|J_1(\varepsilon)| \leq \delta.$$

Évaluons maintenant la limite de $J_2(\varepsilon)$ en 0^+ . On a

$$\left| J_2(\varepsilon) - \int_{\Omega_0} j'_0 dx \right| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0} j'_0 dx \right|$$

En utilisant la convergence au sens de Hausdorff de $\overline{\Omega_\varepsilon}$ vers $\overline{\Omega_0}$ entraîne que $\chi_{\Omega_\varepsilon}$ converge presque partout vers χ_{Ω_0} quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et le théorème de Lebesgue à la fonction j'_0 , il existe ε_1 , tel que $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_1$, on a

$$\left| J_2(\varepsilon) - \int_{\Omega_0} j'_0 dx \right| \leq \delta.$$

Ce qui achève la démonstration de ce Corollaire. ■

Deuxième partie

Application à la résolution numérique de problèmes d'optimisation de forme

Etude numérique d'un problème à frontière libre de type Bernoulli

Sommaire

5.1 Formulation du problème de Bernoulli en optimisation de forme	146
Nouvelle formulation du problème de Bernoulli	147
5.2 Dérivation de forme du problème d'optimisation	150
Dérivation du problème d'optimisation de forme	153
5.3 Processus d'identification de la forme optimale	161
Méthode du gradient	161
Discrétisation du problème d'optimisation de forme	163
5.4 Résultats numériques	167
Modèle d'analyse	167
Modèle de conception	170

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle approche numérique pour l'étude d'un problème à frontière libre du type Bernoulli reformulé en un problème d'optimisation de forme. Ce type de problèmes décrit, par exemple, le problème de la conception d'un condensateur annulaire dans laquelle l'une des plaques est connue, tandis que l'autre doit être déterminée, de sorte que l'intensité du champ électrostatique y reste constante. Cette classe de problèmes à frontière libre a été largement étudiée du point de vue théorique et numérique par de nombreux auteurs, voir par exemple [2, 1, 29, 47, 62] et les références qui y figurent. Dans ce travail, nous commençons par proposer une formulation en optimisation de forme du problème de Bernoulli faisant intervenir une fonctionnelle coût volumique. Nous explicitons ainsi la dérivée de forme de sa fonctionnelle coût via les fonctions support. Ensuite, nous proposons une méthode de résolution de ce problème basée sur un algorithme du type gradient et une discrétisation par la méthode des éléments frontières. Enfin nous montrons l'intérêt pratique de cette approche via son illustration à travers différents tests numériques.

Le travail présenté dans ce chapitre a donné lieu à un article paru [15] et une communication au "First Moroccan Congress on Mathematics and its Applications, Tetouan (Morocco) from 17 to 19 December, 2018".

5.1 Formulation du problème de Bernoulli en un problème d'optimisation de forme

Soit D un ouvert borné convexe régulier de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$). Soit Ω un ouvert de classe \mathcal{C}^2 , qui s'écrit sous la forme $\Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1$, avec Ω_2 un ouvert borné de classe \mathcal{C}^2 de D et Ω_1 un compact connexe de classe \mathcal{C}^2 de Ω_2 . Notons par Γ_1 le bord de Ω_1 qui est la partie fixe de la frontière de Ω et par Γ_2 le bord de Ω_2 qui est la frontière libre de Ω (voir figure 5.1).

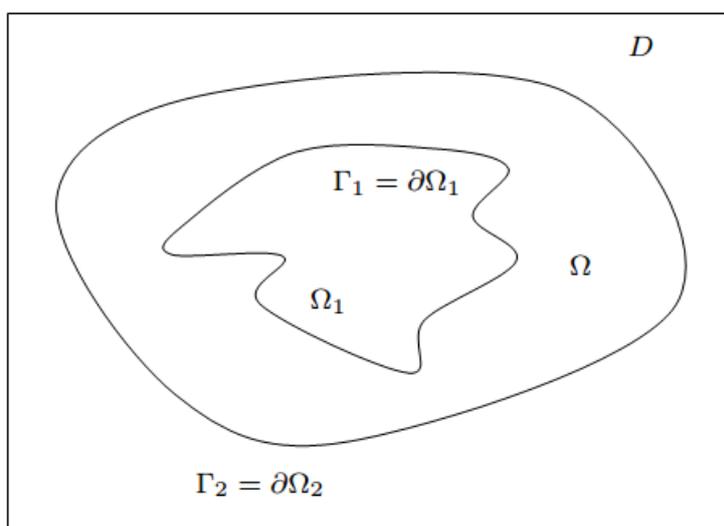


FIGURE 5.1 – Illustration du domaine Ω .

Nous nous intéressons à un problème inverse géométrique de type Bernoulli, qui consiste à trouver la frontière libre Γ_2 et u , solution du problème suivant :

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1, \\ u = \varphi_1 & \text{sur } \Gamma_1 = \partial\Omega_1, \\ u = \varphi_2 & \text{sur } \Gamma_2 = \partial\Omega_2, \\ \partial_{\nu_2} u = \partial_{\nu_2} G & \text{sur } \Gamma_2, \end{cases} \quad (5.1)$$

où f , φ_1 , φ_2 et G sont des fonctions données, ν_2 est la normale unitaire à Γ_2 dirigée vers l'extérieur de Ω_2 et $\partial_{\nu_2} u = \langle \nabla u|_{\Gamma_2}, \nu_2 \rangle$ est la trace de la dérivée normale.

Notons que dans ce problème à frontière libre, deux conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann doivent être satisfaites sur Γ_2 . Ainsi, afin de proposer une méthode d'approximation du problème (5.1), nous considérons sa formulation en un problème d'optimisation qui consiste à introduire la condition de Dirichlet sur Γ_2 dans une fonctionnelle

coût à minimiser, comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } \mathcal{J}(\Omega, u_\Omega) \text{ pour tout } \Omega \in \mathcal{O} \\ \text{où } \mathcal{J}(\Omega, u_\Omega) = \int_{\Gamma_2} (u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 d\sigma \\ \text{et } u_\Omega \text{ est solution de} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$$(PE) \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v = f & \text{dans } \Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1, \\ v = \varphi_1 & \text{sur } \Gamma_1 = \partial\Omega_1, \\ \partial_{\nu_2} v = \partial_{\nu_2} G & \text{sur } \Gamma_2 = \partial\Omega_2, \end{array} \right.$$

où \mathcal{O} est une famille de domaines admissibles.

Cependant, cette formulation conduit à un problème mal posé au sens de [41]. Pour remédier à ceci nous pouvons proposer une autre formulation en optimisation de forme qui vise à introduire, cette fois-ci, la condition de Neumann sur Γ_2 dans une fonctionnelle coût à minimiser. Même-si celle-ci conduit à un problème qui est plutôt bien posé au sens de [40], sa résolution nécessite, toutefois, des hypothèses de régularité très fortes sur la solution du problème d'état aussi bien que sur les domaines admissibles. Afin de pallier aux problèmes liés à ces fonctionnelles coût surfaciques, nous proposons une nouvelle formulation en optimisation de forme faisant intervenir une fonctionnelle coût volumique. Ceci dans le but d'utiliser aussi les formules de dérivées de forme développées dans [8, 10].

Nouvelle formulation du problème de Bernoulli

Dans ce paragraphe, nous allons proposer une reformulation du problème d'optimisation (5.1) en un problème d'optimisation de forme en utilisant une fonctionnelle coût volumique. Ainsi, nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 5.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné convexe de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$). Alors, pour tout $y \in \Omega$ fixé, on a*

$$\langle \nu(x), x - y \rangle > 0, \quad \text{pour tout } x \in \partial\Omega,$$

où ν est la normale à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω . En particulier, si $0 \in \Omega$, on aura

$$\langle \nu(x), x \rangle > 0, \quad \text{pour tout } x \in \partial\Omega.$$

Démonstration. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné convexe de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$). Supposons dans un premier temps que $0 \in \Omega$. Puisque Ω est convexe, d'après [33], il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, telle que

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) < 0\} \text{ et } \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) = 0\}.$$

De plus, comme Ω est de classe \mathcal{C}^k , alors la fonction φ peut être choisie de telle façon qu'il existe un voisinage W de Γ tel que

$$\varphi \in \mathcal{C}^k(W), \quad \nabla\varphi \neq 0 \text{ sur } W \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|}.$$

Soit $x \in \partial\Omega$, alors d'après la Proposition 1.5, par caractérisation de la convexité aux points 0 et $x \in \partial\Omega$ on a

$$\langle \nabla\varphi(x), 0 - x \rangle \leq \varphi(0) - \varphi(x).$$

Or puisque $\varphi(0) < 0$ et $\varphi(x) = 0$, alors

$$\langle \nabla\varphi(x), x \rangle \geq -\varphi(0) > 0. \quad (5.3)$$

Ainsi, en multipliant cette équation par $\frac{1}{\|\nabla\varphi(x)\|}$, on obtient que

$$\langle \nu(x), x \rangle > 0, \text{ pour tout } x \in \partial\Omega.$$

Supposons maintenant que $0 \notin \Omega$, soit $y \in \Omega$ et considérons $\tilde{\Omega} = \Omega - y$ le translaté du domaine Ω . Ainsi on a bien que $\tilde{\Omega}$ est un ouvert convexe borné de classe C^k qui contient 0. Par suite, on aura

$$\langle \nu_{\Omega-y}(x), x \rangle > 0, \text{ pour tout } x \in \partial\Omega - y.$$

D'après la proposition 1.2, on a

$$\nu_{\Omega-y}(x - y) = \nu(x), \text{ pour tout } x \in \partial\Omega.$$

D'où on obtient

$$\langle \nu(x), x - y \rangle > 0, \text{ pour tout } x \in \partial\Omega.$$

■

Dans la suite, afin de simplifier les calculs et sans faire aucune restriction à notre étude, on va supposer que $0 \in \Omega_1$. Alors en appliquant le lemme 5.1 à $\Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1$, on aura

$$\langle \nu_2(x), x \rangle > 0, \text{ pour tout } x \in \Gamma_2.$$

Ceci en fait nous permet d'approcher le problème de Bernoulli (5.1) en considérant comme fonctionnelle coût à minimiser dans le problème d'optimisation (5.2), celle définie par

$$\mathcal{J}(\Omega) = \int_{\Gamma_2} (u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 \langle \nu_2(x), x \rangle d\sigma(x), \quad (5.4)$$

au lieu de celle qui vise à minimiser la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(\Omega) = \int_{\Gamma_2} (u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 d\sigma(x). \quad (5.5)$$

En utilisant le fait que la normale au domaine $\Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ est donnée par

$$\begin{aligned} \nu : \partial\Omega &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\longmapsto \nu(x) = \begin{cases} \nu_2(x) & \text{si } x \in \Gamma_2 \\ -\nu_1(x) & \text{si } x \in \Gamma_1, \end{cases} \end{aligned}$$

où ν_k , pour $k = 1, 2$ est le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de Ω_k respectivement et \mathbb{S}^{n-1} est la sphère unité de \mathbb{R}^n , la fonctionnelle (5.4) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\Omega) &= \int_{\Gamma_2} (u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 \langle \nu_2(x), x \rangle d\sigma + \int_{\Gamma_1} (u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 \langle \nu_1(x), x \rangle d\sigma \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} (u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 \langle \nu_1(x), x \rangle d\sigma \\ &= \int_{\Gamma} (u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 \langle \nu(x), x \rangle d\sigma + \int_{\Gamma_1} (u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 \langle \nu_1(x), x \rangle d\sigma. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de divergence on aura

$$\mathcal{J}(\Omega) = \int_{\Omega} \operatorname{div}((u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 x) dx + \int_{\Gamma_1} (u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 \langle \nu_1(x), x \rangle d\sigma.$$

Puis en utilisant le fait que $u_\Omega = \varphi_1$ sur Γ_1 , on obtient

$$\mathcal{J}(\Omega) = \int_{\Omega} \operatorname{div}((u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 x) dx + \int_{\Gamma_1} (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))^2 \langle \nu_1(x), x \rangle d\sigma. \quad (5.6)$$

Ainsi comme le terme $\int_{\Gamma_1} (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))^2 \langle \nu_1(x), x \rangle d\sigma$ ne dépend pas du domaine variable Ω_2 , alors minimiser (5.4) revient à minimiser la fonctionnelle volumique

$$\mathcal{J}(\Omega) = \int_{\Omega} \operatorname{div}((u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 x) dx. \quad (5.7)$$

Par suite, on peut approcher le problème de Bernoulli (5.1) par le problème d'optimisation de forme suivant

$$(PO) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } \mathcal{J}(\Omega, u_\Omega) \text{ pour tout } \Omega \in \mathcal{O} \\ \text{où } \mathcal{J}(\Omega, u_\Omega) = \int_{\Omega} \operatorname{div}((u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 x) dx \\ \text{et } u_\Omega \text{ est solution de} \\ (PE) \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v = f & \text{dans } \Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1, \\ v = \varphi_1 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \partial_{\nu_2} v = \partial_{\nu_2} G & \text{sur } \Gamma_2. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

où \mathcal{O} est la famille des domaines admissibles définie par

$$\mathcal{O} = \{\Omega \subset \mathbb{R}^n / \Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1, \quad \Omega_2 \in \mathcal{O}(\Omega_1, D)\},$$

$$\mathcal{O}(\Omega_1, D) = \{\Omega \subset \mathbb{R}^n / \Omega \in \mathcal{U}(D), \quad \Omega_1 \subset \Omega, \text{ et } \bar{\Omega} \subset D\},$$

et $\mathcal{U}(D)$ est la famille des domaines convexes de classe \mathcal{C}^2 inclus dans D .

Dans la suite, nous allons proposer une approche numérique de ce problème basée sur un algorithme de résolution du type gradient, qui nécessite d'étudier la première variation ou la différentiabilité de la fonctionnelle coût par rapport à la famille de domaines \mathcal{O} . Pour cela, nous allons adapter les formules de dérivation de forme proposées dans [8, 10] à cette famille de domaines admissibles afin de pouvoir exprimer la dérivée de forme via

les fonctions support des domaines de \mathcal{O} .

5.2 Dérivation de forme du problème d'optimisation

Dans cette section, nous allons expliciter la dérivée par rapport aux domaines de la fonctionnelle coût du problème d'optimisation de forme (5.8). Pour cela, nous commençons tout d'abord par rappeler les formules de dérivées de forme établies dans [8, 10], dans le cas des domaines convexes. Considérons ainsi la fonctionnelle volumique suivante

$$\Omega \in \mathcal{U} \mapsto J(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx, \quad (5.9)$$

où $f \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ et \mathcal{U} est la famille des domaines convexes. Étant donné Ω_0 un ouvert convexe de classe \mathcal{C}^2 et Ω un ouvert convexe. En utilisant une déformation du type Minkowski $\Omega_{\varepsilon} = \Omega_0 + \varepsilon \Omega$ et une déformation convexe du type $\Omega'_{\varepsilon} = (1-\varepsilon)\Omega_0 + \varepsilon \Omega$, dans [8, 10], les auteurs ont établi respectivement les formules :

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} J(\Omega_{\varepsilon}) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\partial\Omega_0} f(x) P_{\Omega}(\nu_0(x)) d\sigma \quad (5.10)$$

et

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} J(\Omega'_{\varepsilon}) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\partial\Omega_0} f(x) (P_{\Omega} - P_{\Omega_0})(\nu_0(x)) d\sigma, \quad (5.11)$$

où ν_0 est la normale à $\partial\Omega_0$ dirigée vers l'extérieur de Ω_0 .

En se basant sur (5.10), nous allons expliciter la dérivée de forme de la fonctionnelle coût \mathcal{J}

$$\Omega \in \mathcal{O} \mapsto \mathcal{J}(\Omega, u_{\Omega}) = \int_{\Omega} \operatorname{div}((u_{\Omega}(x) - \varphi_2(x))^2 x) dx,$$

en fonction des fonctions support et en utilisant une déformation du type Minkowski.

Soient Ω_1 est un compact connexe de classe \mathcal{C}^2 fixé de \mathbb{R}^n , $\Omega_2 \in \mathcal{O}(\Omega_1, D)$ et $\Omega'_2 \in \mathcal{U}(D)$, alors on a

$$\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2 \in \mathcal{O}(\Omega_1, D), \text{ pour tout } \varepsilon \in [0, 1] \text{ assez petit,}$$

de plus

$$\chi_{(\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2) \setminus \Omega_1} = \chi_{\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2} - \chi_{\Omega_1}.$$

Par suite, on a

$$J((\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2) \setminus \Omega_1) = \int_D \chi_{(\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2) \setminus \Omega_1} f(x) dx = J(\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2) - J(\Omega_1).$$

Ainsi, en utilisant la formule (5.10), on obtient

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (J(\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2 \setminus \Omega_1)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} (J(\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Gamma_2} f(x) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma(x). \quad (5.12)$$

Par conséquent, nous avons le résultat suivant

Proposition 5.1 Soit $\Omega_2 \in \mathcal{O}(\Omega_1, D)$ et $\Omega'_2 \in \mathcal{U}(D)$. Alors, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{J((\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2) \setminus \Omega_1) - J(\Omega_2 \setminus \Omega_1)}{\varepsilon} = \int_{\Gamma_2} f(x) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma(x),$$

où ν_2 est la normale à $\partial\Omega_2$ dirigée vers l'extérieur de Ω_2 .

Dans le cas où la fonctions f dépend du domaine, nous montrons le résultat suivant

Proposition 5.2 Soient $\Omega_2 \in \mathcal{O}(\Omega_1, D)$ et $\Omega'_2 \in \mathcal{U}(D)$ et soit $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in [0,1]}$ une famille de fonctions dans $L^1(D)$ et $f \in L^1(D)$, telles que

$$f_0 \in W^{1,1}(D) \quad \text{et} \quad f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon - f_0) \quad \text{dans } L^1(D).$$

Alors la fonction I définie par

$$I : \varepsilon \mapsto I(\varepsilon) = \int_{(\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2) \setminus \Omega_1} f_\varepsilon(x) dx,$$

est dérivable en 0^+ et on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{I(\varepsilon) - I(0)}{\varepsilon} = \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} f(x) dx + \int_{\Gamma_2} f_0(x) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma(x). \quad (5.13)$$

où ν_2 est la normale à $\partial\Omega_2$ dirigée vers l'extérieur de Ω_2 .

Démonstration. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, Ω et Ω' deux domaines de \mathcal{O} , alors il existe $\Omega_2, \Omega'_2 \in \mathcal{O}(D)$ tels que $\Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ et $\Omega' = \Omega'_2 \setminus \Omega_1$. Notons ainsi par $\Lambda_\varepsilon = \Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2$ et $\Omega^\varepsilon = (\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2) \setminus \Omega_1$. Remarquons alors qu'on peut écrire

$$\frac{I(\varepsilon) - I(0)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega^\varepsilon} f_\varepsilon(x) dx - \int_{\Omega^\varepsilon} f_0(x) dx \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega^\varepsilon} f_0(x) dx - \int_{\Omega} f_0(x) dx \right),$$

que nous pouvons décomposer de la manière suivante

$$\begin{aligned} \frac{I(\varepsilon) - I(0)}{\varepsilon} &= \int_D \chi_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon - f_0)(x) - f(x) \right) dx + \int_D \chi_{\Omega^\varepsilon}(x) f(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega^\varepsilon} f_0(x) dx - \int_{\Omega} f_0(x) dx \right). \end{aligned}$$

Ainsi par hypothèse on a

$$\left| \int_D \chi_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon - f_0)(x) - f(x) \right) dx \right| \leq \int_D \left| \left(\frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon - f_0)(x) - f(x) \right) \right| dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

D'autre part, comme $\chi_{\Omega^\varepsilon} = \chi_{\Lambda_\varepsilon} - \chi_{\Omega_1}$ et puisque la fonction caractéristique $\chi_{\Lambda_\varepsilon}$ converge presque partout vers χ_{Ω_2} , alors en utilisant le Théorème de Lebesgue [20] on aura

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_D \chi_{\Omega^\varepsilon}(x) f(x) dx = \int_D \chi_{\Omega}(x) f(x) dx.$$

De plus en utilisant la formule (5.10), on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{I(\varepsilon) - I(0)}{\varepsilon} = \int_D \chi_\Omega f dx + \int_{\partial\Omega_2} f_0(x) P_{\Omega_2'}(\nu_2(x)) d\sigma(x)$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{I(\varepsilon) - I(0)}{\varepsilon} = \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} f(x) dx + \int_{\partial\Omega_2} f_0(x) P_{\Omega_2'}(\nu_2(x)) d\sigma(x).$$

■

Nous aurons également besoin du résultat suivant qui concerne le cas où f est produit de deux fonctions qui dépendent du domaine. Ce résultat est une conséquence immédiate de la proposition 5.2.

Corollaire 5.1 Soit $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[}$ et $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[}$ deux familles de fonctions dans $L^2(D)$ et f, g deux fonctions de $L^2(D)$, telles que

$$f_0, g_0 \in H^1(D), \quad f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon - f_0) \text{ dans } L^2(D) \quad \text{et} \quad g = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} (g_\varepsilon - g_0) \text{ dans } L^2(D),$$

alors l'application $\varepsilon \in]0, 1[\mapsto f_\varepsilon g_\varepsilon \in L^1(D)$ est dérivable en 0^+ . De plus l'application

$$\varepsilon \in]0, 1[\mapsto F(\varepsilon) = \int_{(\Omega_2 + \varepsilon\Omega_2') \setminus \Omega_1} f_\varepsilon g_\varepsilon(x) dx \in \mathbb{R}.$$

est dérivable en 0^+ et on a la limite suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(\varepsilon) - F(0)}{\varepsilon} = \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} (gf_0 + fg_0)(x) dx + \int_{\Gamma_2} f_0 g_0(x) P_{\Omega_2'}(\nu_2(x)) d\sigma(x), \quad (5.14)$$

où ν_2 est la normale à $\partial\Omega_2$ dirigée vers l'extérieur de Ω_2 .

Démonstration. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, en utilisant la décomposition

$$\frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon g_\varepsilon - f_0 g_0) - f_0 g - f g_0 = (f_\varepsilon - f_0) \frac{1}{\varepsilon} (g_\varepsilon - g_0) + g_0 \left(\frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon - f_0) - f \right) + f_0 \left(\frac{1}{\varepsilon} (g_\varepsilon - g_0) - g \right),$$

puis en utilisant la formule d'Hölder, on aura

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon g_\varepsilon - f_0 g_0) - f_0 g - f g_0 \right\|_{L^1(D)} &\leq \|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(D)} \left\| \frac{g_\varepsilon - g_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(D)} + \|g_0\|_{L^2(D)} \left\| \frac{f_\varepsilon - f_0}{\varepsilon} - f \right\|_{L^2(D)} \\ &\quad + \|f_0\|_{L^2(D)} \left\| \frac{g_\varepsilon - g_0}{\varepsilon} - g \right\|_{L^2(D)}. \end{aligned}$$

Or par hypothèse, il existe $M > 0$, tel que, pour tout $\varepsilon \in [0, 1[$, on a

$$\left\| \frac{g_\varepsilon - g_0}{\varepsilon} \right\|_{L^2(D)} \leq M.$$

Ainsi on aura

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon g_\varepsilon - f_0 g_0) - f_0 g - f g_0 \right\|_{L^1(D)} &\leq M \|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(D)} + \|g_0\|_{L^2(D)} \left\| \frac{f_\varepsilon - f_0}{\varepsilon} - f \right\|_{L^2(D)} \\ &\quad + \|f_0\|_{L^2(D)} \left\| \frac{g_\varepsilon - g_0}{\varepsilon} - g \right\|_{L^2(D)}. \end{aligned}$$

De plus puisque $\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(D)}$ tend vers 0 quand ε tend vers 0^+ , on obtient alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| \frac{1}{\varepsilon} (f_\varepsilon g_\varepsilon - f_0 g_0) - f_0 g - f g_0 \right\|_{L^1(D)} = 0.$$

En appliquant ainsi la Proposition 5.2 à la fonctionnelle

$$\varepsilon \in]0, 1[\mapsto F(\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(x) g_\varepsilon(x) dx.$$

On conclut que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(\varepsilon) - F(0)}{\varepsilon} = \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} (f_0 g + f g_0)(x) dx + \int_{\partial\Omega_2} f_0(x) g_0(x) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma(x). \quad (5.15)$$

■

Dérivation du problème d'optimisation de forme

Dans cette section, nous explicitons la dérivée de forme de la fonctionnelle \mathcal{J} définie par :

$$\mathcal{J}(\Omega, u_\Omega) = \int_{\Omega} \operatorname{div}((u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 x) dx, \quad (5.16)$$

où $\Omega \in \mathcal{O}$ et u_Ω est la solution du problème d'état suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_\Omega = f & \text{in } \Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1 \\ u_\Omega = \varphi_1 & \text{on } \Gamma_1 = \partial\Omega_1 \\ \partial_{\nu_2} u_\Omega = \partial_{\nu_2} G & \text{on } \Gamma_2 = \partial\Omega_2. \end{cases} \quad (5.17)$$

Soit Ω'_2 un domaine de $\mathcal{O}(D)$. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, considérons le domaine $\Omega^\varepsilon = (\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2) \setminus \Omega_1$ de frontière $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon$. Par construction on a $\partial(\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2)$ et Γ_1 sont deux parties disjointes de Γ_ε , telles que $\Gamma^\varepsilon = \partial(\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2) \cup \Gamma_1$. Soit ainsi u_{Ω^ε} la solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_{\Omega^\varepsilon} = f & \text{in } \Omega^\varepsilon = (\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2) \setminus \Omega_1, \\ u_{\Omega^\varepsilon} = \varphi_1 & \text{on } \Gamma_1, \\ \partial_{\nu_2} u_{\Omega^\varepsilon} = \partial_{\nu_2} G & \text{on } \Gamma_\varepsilon = \partial(\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2), \end{cases} \quad (5.18)$$

D'autre part, notons que pour tout $x \in \Omega$, on a

$$\operatorname{div}((u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 x) = 2(u_\Omega(x) - \varphi_2(x)) \langle \nabla(u_\Omega - \varphi_2)(x), x \rangle + n(u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2.$$

Considérons ainsi l'application suivante :

$$\begin{aligned} F : D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto F(x, y, z) = 2(y - \varphi_2(x)) \langle z - \nabla \varphi_2(x), x \rangle + n(y - \varphi_2(x))^2. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Alors, on a

$$F(\cdot, u_\Omega, \nabla u_\Omega) = 2(u_\Omega - \varphi_2) \langle \nabla(u_\Omega - \varphi_2), I_d \rangle + n(u_\Omega - \varphi_2)^2 = \operatorname{div}((u_\Omega - \varphi_2)^2 I_d),$$

où I_d est l'application identité sur \mathbb{R}^n . Par suite \mathcal{J} peut s'écrire

$$\mathcal{J}(\Omega, u_\Omega) = \int_{\Omega} F(x, u_\Omega(x), \nabla u_\Omega(x)) dx. \quad (5.20)$$

Remarque 5.1 *Lorsqu'on suppose que Ω est fortement convexe, Ω^ε peut être considéré comme une déformation du domaine Ω par un champ de vecteur $a(x)$ qui satisfait la propriété $\langle a, \nu \rangle = P_{\Omega'}(\nu)$ (voir [10]). Ainsi, en supposant que $f \in H^1(D)$, $\varphi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ et $G \in H^3(D)$ et en suivant [58, 33, 85], il existe $u', v' \in H^1(D)$, telles que*

$$\tilde{u}_\varepsilon = \tilde{u} + \varepsilon u' + \varepsilon v_\varepsilon \text{ dans } H^1(D),$$

où \tilde{u} et \tilde{u}_ε sont des prolongements respectifs de u_Ω et u_{Ω^ε} sur D et u' est la dérivée de forme de u_Ω par rapport au champ de déformation a .

Par suite, il existe une fonction F'_0 dans $L^1(D)$, telle que

$$\frac{1}{\varepsilon} [F(\cdot, \tilde{u}_\varepsilon, \nabla \tilde{u}_\varepsilon) - F(\cdot, \tilde{u}, \nabla \tilde{u})] - F'_0 \longrightarrow 0 \text{ in } L^1(D), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

avec

$$F'_0 = 2u' \langle \nabla(\tilde{u}_\varepsilon - \varphi_2), I_d \rangle + 2(u_\Omega - \varphi_2) \langle \nabla u', I_d \rangle + n2u'(u_\Omega - \varphi_2) = \operatorname{div}(2u'(u_\Omega - \varphi_2) I_d).$$

Nous établissons maintenant le résultat suivant.

Théorème 5.1 *Soit $\Omega_2 \in \mathcal{O}(\Omega_1, D)$, $\Omega'_2 \in \mathcal{U}(D)$ et $\Omega^\varepsilon = (\Omega_2 + \varepsilon \Omega'_2) \setminus \Omega_1$. Supposons que $f \in H^1(D)$, $\varphi_2 \in H^2(D)$, $\varphi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ et $G \in H^3(D)$ et que Ω'_2 est fortement convexe tel que $0 \in \Omega'_2$. Alors la dérivée de forme de $\mathcal{J}(\Omega, u_\Omega)$ existe et est donnée par*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}(\Omega^\varepsilon, u_{\Omega^\varepsilon}) - \mathcal{J}(\Omega, u_\Omega)}{\varepsilon} = \int_{\Gamma_2} \mathcal{B}(x) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma(x), \quad (5.21)$$

où

$$\mathcal{B} = \operatorname{div}((u_\Omega - \varphi_2)^2 I_d) + \langle \nabla(u_\Omega - G), \nabla \psi \rangle - (f + \Delta G) \psi,$$

et ψ est la solution du problème dit d'état adjoint suivant

$$\begin{cases} -\Delta\psi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{sur } \Gamma_1 = \partial\Omega_1, \\ \partial_{\nu_2}\psi = -2(u_\Omega - \varphi_2)\langle \nu_2, I_d \rangle & \text{sur } \Gamma_2 = \partial\Omega_2, \end{cases} \quad (5.22)$$

et ν_2 est la normale à $\partial\Omega_2$ dirigée vers l'extérieur de Ω_2 .

Démonstration. Soient $\varepsilon \in]0, 1[$, $\Omega_2 \in \mathcal{O}(D)$ et $\Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ et soit Ω'_2 un ouvert dans $\mathcal{O}(D)$ contenant 0. Notons par $\Lambda_\varepsilon = \Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2$ et $\Omega^\varepsilon = \Lambda_\varepsilon \setminus \Omega_1$ les domaines de frontières respectives Γ^ε et Γ_ε . Comme $0 \in \Omega'_2$, alors

$$\Omega_2 \subset \Lambda_\varepsilon, \text{ pour tout } \varepsilon \in]0, 1[.$$

Par suite

$$\Omega_\varepsilon \cap \Omega = (\Lambda_\varepsilon \cap \Omega_2) \setminus \Omega_1 = ((\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2) \cap \Omega_2) \setminus \Omega_1 = \Omega_2 \setminus \Omega_1. \quad (5.23)$$

Donc $\Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1 \subset \Omega_\varepsilon$. Ainsi u_Ω et u_{Ω_ε} sont solutions respectives des problèmes suivants :

$$\begin{cases} -\Delta u_\Omega = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\Omega = \varphi_1 & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta u_{\Omega_\varepsilon} = f & \text{dans } \Omega, \\ u_{\Omega_\varepsilon} = \varphi_1 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

Alors $\delta u = u_{\Omega_\varepsilon} - u_\Omega$ est solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta(\delta u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \delta u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \subseteq \Gamma. \end{cases} \quad (5.24)$$

Notons par $\Delta\mathcal{J}$ la fonctionnelle définie par

$$\Delta\mathcal{J} = \mathcal{J}(\Omega^\varepsilon, u_{\Omega^\varepsilon}) - \mathcal{J}(\Omega, u_\Omega),$$

qui s'écrit

$$\Delta\mathcal{J} = \int_{\Omega} (F(x, u_{\Omega^\varepsilon}(x), \nabla u_{\Omega^\varepsilon}(x)) - F(x, u_\Omega(x), \nabla u_\Omega(x))) dx + J_1(\varepsilon).$$

avec

$$J_1(\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} F(x, u_{\Omega^\varepsilon}(x), \nabla u_{\Omega^\varepsilon}(x)) dx - \int_{\Omega} F(x, u_{\Omega^\varepsilon}(x), \nabla u_{\Omega^\varepsilon}(x)) dx.$$

Notons ainsi par $\delta F = F(x, u_{\Omega^\varepsilon}, \nabla u_{\Omega^\varepsilon}) - F(x, u_\Omega, \nabla u_\Omega)$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \delta F &= \operatorname{div}((u_{\Omega^\varepsilon} - \varphi_2)^2 I_d) - \operatorname{div}((u_\Omega - \varphi_2)^2 I_d) = \operatorname{div}(\delta u(\delta u + 2(u_\Omega - \varphi_2)) I_d) \\ &= \langle \nabla(\delta u), I_d \rangle (\delta u + 2(u_\Omega - \varphi_2)) + \delta u \langle \nabla(\delta u + 2(u_\Omega - \varphi_2)), I_d \rangle + n\delta u(\delta u + 2(u_\Omega - \varphi_2)) \\ &= 2\delta u \langle \nabla(\delta u), I_d \rangle + 2\delta u \langle \nabla(u_\Omega - \varphi_2), I_d \rangle + 2(u_\Omega - \varphi_2) \langle \nabla(\delta u), I_d \rangle + n(\delta u)^2 + 2n\delta u(u_\Omega - \varphi_2) \\ &= \langle v_\Omega, \nabla(\delta u) \rangle + \operatorname{div}(v_\Omega)\delta u + n(\delta u)^2 + 2\delta u(x) \langle \nabla(\delta u)(x), x \rangle \\ &= \operatorname{div}(v_\Omega \delta u) + n(\delta u)^2 + 2\delta u(x) \langle \nabla(\delta u)(x), x \rangle. \end{aligned}$$

avec $v_\Omega(x) = 2(u_\Omega(x) - \varphi_2(x))x$. Par suite, $\Delta\mathcal{J}$ s'écrit cette fois-ci :

$$\Delta\mathcal{J} = J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon) + Err_{\delta u}(\varepsilon), \quad (5.25)$$

avec

$$J_2(\varepsilon) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v_\Omega \delta u)(x) dx \quad \text{et} \quad Err_{\delta u}(\varepsilon) = n \|\delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_{\Omega} \delta u(x) \langle \nabla(\delta u)(x), x \rangle dx.$$

En utilisant la formule de divergence, on aura

$$\begin{aligned} J_2(\varepsilon) &= \int_{\partial\Omega} \langle v_\Omega, \nu \rangle(x) \delta u(x) d\sigma \\ &= 2 \int_{\Gamma_2} (u_\Omega - \varphi_2) \langle \nu_2(x), x \rangle \delta u(x) d\sigma - 2 \int_{\Gamma_1} (u_\Omega - \varphi_2) \langle \nu_1(x), x \rangle \delta u(x) d\sigma. \end{aligned}$$

Or puisque $\delta u = 0$ sur Γ_1 , alors

$$J_2(\varepsilon) = 2 \int_{\Gamma_2} (u_\Omega - \varphi_2) \langle \nu_2(x), x \rangle \delta u(x) d\sigma.$$

Considérons ainsi ψ la solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta\psi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ \partial_{\nu_2}\psi = -2(u_\Omega - \varphi_2) \langle \nu_2, I_d \rangle & \text{on } \Gamma_2. \end{cases}$$

On aura alors

$$J_2(\varepsilon) = 2 \int_{\Gamma_2} (u_\Omega - \varphi_2) \langle \nu_2(x), x \rangle \delta u(x) d\sigma = - \int_{\Gamma_2} \partial_{\nu_2}\psi(x) \delta u(x) d\sigma(x). \quad (5.26)$$

De plus comme

$$\Delta(\delta u) = \Delta\psi = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \delta u = \psi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

en appliquant la formule de Green à J_2 , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \partial_{\nu_2}\psi(x) \delta u(x) d\sigma &= \int_{\Gamma} \partial_\nu \psi(x) \delta u(x) d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \nabla\psi \nabla\delta u dx \\ &= \int_{\Gamma} \psi(x) \partial_\nu \delta u(x) d\sigma. \end{aligned}$$

Donc

$$J_2(\varepsilon) = - \int_{\Gamma} \psi(x) \partial_\nu \delta u(x) d\sigma.$$

D'autre part, $\Delta\mathcal{J}$ peut s'écrire sous la forme

$$\Delta\mathcal{J} = J_{1,1}(\varepsilon) - J_{1,2}(\varepsilon) + J_2(\varepsilon) + Err_{\delta u}(\varepsilon).$$

avec

$$J_{1,1}(\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} F(x, u_{\Omega^\varepsilon}(x), \nabla u_{\Omega^\varepsilon}(x)) dx \quad \text{et} \quad J_{1,2}(\varepsilon) = \int_{\Omega} F(x, u_{\Omega^\varepsilon}(x), \nabla u_{\Omega^\varepsilon}(x)) dx.$$

En appliquant maintenant la Proposition 5.2 à la fonction $\varepsilon \mapsto F_\varepsilon = F(\cdot, u_{\Omega^\varepsilon}, \nabla u_{\Omega^\varepsilon})$, on obtient

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (J_{1,1}(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} F'_0(x) dx + \int_{\Gamma_2} F_0(x) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma, \quad \text{avec} \quad F_0 = F(\cdot, u_\Omega, \nabla u_\Omega).$$

De plus

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (J_{1,2}(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} F'_0(x) dx.$$

Ainsi

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (J_1(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Gamma_2} F(x, u_\Omega(x), \nabla u_\Omega(x)) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma. \quad (5.27)$$

Calculons maintenant la dérivée de la fonctionnelle J_2 en 0^+ . Pour ce faire considérons une décomposition de J_2 , comme suit

$$\begin{aligned} J_2(\varepsilon) &= - \int_{\Gamma} \partial_\nu \delta u(x) \psi(x) d\sigma \\ &= - \int_{\Gamma} (\partial_\nu u_{\Omega^\varepsilon}(x) - \partial_\nu G(x)) \psi(x) d\sigma + \int_{\Gamma} (\partial_\nu u_\Omega(x) - \partial_\nu G(x)) \psi(x) d\sigma. \end{aligned}$$

Or puisque

$$\partial_{\nu_2} u_\Omega = \partial_{\nu_2} G \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \quad \text{et} \quad \psi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1,$$

alors

$$\int_{\Gamma} (\partial_\nu u_\Omega(x) - \partial_\nu G(x)) \psi(x) d\sigma = \int_{\Gamma_1} (\partial_{\nu_1} u_\Omega - \partial_{\nu_1} G)(x) \psi(x) d\sigma + \int_{\Gamma_2} (\partial_{\nu_2} u_\Omega - \partial_{\nu_2} G)(x) \psi(x) d\sigma.$$

Donc

$$\int_{\Gamma} (\partial_\nu u_\Omega(x) - \partial_\nu G(x)) \psi(x) d\sigma = 0.$$

De plus, comme $\partial_{\nu_2^\varepsilon} u_{\Omega^\varepsilon} = \partial_{\nu_2^\varepsilon} G$ sur $\partial(\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2)$ et $\psi = 0$ sur Γ_1 , on aura alors

$$(\partial_{\nu^\varepsilon} u_{\Omega^\varepsilon} - \partial_{\nu^\varepsilon} G) \psi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon.$$

Par suite, J_2 s'écrit

$$J_2(\varepsilon) = - \int_{\Gamma} (\partial_\nu u_{\Omega^\varepsilon} - \partial_\nu G) \psi d\sigma + \int_{\Gamma^\varepsilon} (\partial_{\nu^\varepsilon} u_{\Omega^\varepsilon} - \partial_{\nu^\varepsilon} G) \psi d\sigma.$$

En appliquant la formule de divergence à J_2 , on obtient que

$$J_2(\varepsilon) = - \int_{\Omega} \text{div}(\nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G)\psi)(x) dx + \int_{\Omega^\varepsilon} \text{div}(\nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G)\psi)(x) dx.$$

Or comme

$$-\Delta u_{\Omega^\varepsilon} = f \quad \text{dans} \quad \Omega \subset \Omega^\varepsilon \quad \text{et} \quad -\Delta u_{\Omega^\varepsilon} = f \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

on aura alors

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G)\psi) &= \langle \nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G), \nabla\psi \rangle + \psi\Delta(u_{\Omega^\varepsilon} - G) \\ &= \langle \nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G), \nabla\psi \rangle + \psi(-f - \Delta G).\end{aligned}$$

Ainsi on peut réécrire J_2 sous la forme

$$J_2(\varepsilon) = J_{2,1}(\varepsilon) + J_{2,2}(\varepsilon) + J_{2,3}(\varepsilon) + J_{2,4}(\varepsilon),$$

avec

$$\begin{aligned}J_{2,1}(\varepsilon) &= - \int_{\Omega} \langle \nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G), \nabla\psi \rangle(x) dx, & J_{2,2}(\varepsilon) &= - \int_{\Omega} (-f - \Delta G)\psi(x) dx, \\ J_{2,3}(\varepsilon) &= \int_{\Omega^\varepsilon} \langle \nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G), \nabla\psi \rangle(x) dx & \text{et} & \quad J_{2,4}(\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} (-f - \Delta G)\psi(x) dx.\end{aligned}$$

Notons tout d'abord par B_ε la fonction définie par $B_\varepsilon : \varepsilon \mapsto \langle \nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G), \nabla\psi \rangle$, alors il existe $B'_0 \in L^1(D)$ telle que

$$\frac{1}{\varepsilon}(B_\varepsilon - B_0) - B'_0 \longrightarrow 0 \quad \text{in } L^1(D), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Donc

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (J_{2,1}(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = - \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} B'_0(x) dx. \quad (5.28)$$

Aussi, il est facile de voir que :

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (J_{2,2}(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = 0 \quad (5.29)$$

Ensuite, en appliquant la Proposition 5.2 aux fonctions $J_{2,3}$ et $J_{2,4}$, on obtient

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (J_{2,3}(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} B'_0(x) dx + \int_{\Gamma_2} B_0(x) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma, \quad (5.30)$$

et

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (J_{2,4}(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Gamma_2} (-f - \Delta G)\psi(x) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma. \quad (5.31)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{d\varepsilon} (J_2(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} &= \int_{\Gamma_2} (B_0(x) - (f + \Delta G)\psi(x)) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_2} (\langle \nabla(u_{\Omega} - G), \nabla\psi \rangle - (f + \Delta G)\psi(x)) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma.\end{aligned} \quad (5.32)$$

Ainsi d'après (5.27) et (5.32), on aura

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Gamma_2} \mathcal{B}(x) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma, \quad (5.33)$$

avec

$$\mathcal{B}(x) = \operatorname{div}((u_\Omega(x) - \varphi_2(x))^2 x) + \langle \nabla(u_\Omega - G)(x), \nabla\psi(x) \rangle - (f + \Delta G)(x)\psi(x).$$

Montrons maintenant que

$$\operatorname{Err}_{\delta u}(\varepsilon) = o(\varepsilon), \quad \text{avec} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

En effet, on a

$$\delta u \Delta(\delta u) = \sum_{i=1}^n \delta u \partial_i^2 \delta u = - \sum_{i=1}^n (\partial_i(\delta u))^2 + \sum_{i=1}^n \partial_i(\delta u \partial_i(\delta u)).$$

D'après (5.24) on a $\delta u \Delta(\delta u) = 0$ dans Ω , donc

$$\sum_{i=1}^n (\partial_i(\delta u))^2 = \sum_{i=1}^n \partial_i(\delta u \partial_i(\delta u)) \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (\partial_i(\delta u))^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \partial_i(\delta u \partial_i(\delta u))(x) dx. \quad (5.34)$$

En appliquant la formule de divergence à (5.34), on aura

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (\partial_i(\delta u))^2 dx &= \int_{\Gamma} \delta u \partial_\nu(\delta u)(x) d\sigma \\ &= \int_{\Gamma} \partial_\nu u_{\Omega^\varepsilon}(x) \delta u(x) d\sigma - \int_{\Gamma} \partial_\nu u_\Omega(x) \delta u(x) d\sigma, \end{aligned}$$

qui peut également s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \|\nabla \delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (\partial_i(\delta u))^2 \\ &= \int_{\Gamma} (\partial_\nu u_{\Omega^\varepsilon}(x) - \partial_\nu G(x)) \delta u(x) d\sigma - \int_{\Gamma} (\partial_\nu u_\Omega(x) - \partial_\nu G(x)) \delta u(x) d\sigma. \end{aligned}$$

Or puisque on a

$$\delta u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \quad \text{et} \quad \partial_{\nu_2} u_\Omega = \partial_{\nu_2} G \text{ sur } \Gamma_2,$$

alors

$$\int_{\Gamma} (\partial_\nu u_\Omega(x) - \partial_\nu G(x)) \delta u(x) d\sigma = 0.$$

Donc

$$\|\nabla \delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Gamma} (\partial_\nu u_{\Omega^\varepsilon}(x) - \partial_\nu G(x)) \delta u(x) d\sigma.$$

De plus, comme on a

$$\partial_{\nu_2^\varepsilon} u_{\Omega^\varepsilon} = \partial_{\nu_2^\varepsilon} G \text{ sur } \partial(\Omega_2 + \varepsilon\Omega'_2) \quad \text{et} \quad \delta u = 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$

alors

$$(\partial_{\nu^\varepsilon} u_{\Omega^\varepsilon} - \partial_{\nu^\varepsilon} G) \delta u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon.$$

Ce qui permet d'écrire

$$\|\nabla \delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Gamma} (\partial_{\nu} u_{\Omega^\varepsilon}(x) - \partial_{\nu} G(x)) \delta u(x) d\sigma - \int_{\Gamma^\varepsilon} (\partial_{\nu^\varepsilon} u_{\Omega^\varepsilon}(x) - \partial_{\nu^\varepsilon} G(x)) \delta u(x) d\sigma. \quad (5.35)$$

En appliquant la formule de divergence à (5.35), on aura

$$\|\nabla \delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G)\delta u)(x) dx - \int_{\Omega^\varepsilon} \operatorname{div}(\nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G)\delta u)(x) dx.$$

Ensuite, puisque $-\Delta u_{\Omega^\varepsilon} = f$ dans $\Omega \subset \Omega^\varepsilon$, alors on a

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G)\delta u) &= \langle \nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G), \nabla \delta u \rangle + \Delta(u_{\Omega^\varepsilon} - G)\delta u \\ &= \langle \nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G), \nabla \delta u \rangle - (f + \Delta G)\delta u. \end{aligned}$$

Donc

$$\|\nabla \delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \Xi_1(\varepsilon) + \Xi_2(\varepsilon) + \Xi_3(\varepsilon) + \Xi_4(\varepsilon),$$

avec

$$\begin{aligned} \Xi_1(\varepsilon) &= \int_{\Omega} \langle \nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G), \nabla \delta u \rangle(x) dx, & \Xi_2(\varepsilon) &= - \int_{\Omega} (f + \Delta G)\delta u(x) dx, \\ \Xi_3(\varepsilon) &= - \int_{\Omega^\varepsilon} \langle \nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G), \nabla \delta u \rangle(x) dx & \text{et} & \quad \Xi_4(\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} (f + \Delta G)\delta u(x) dx. \end{aligned}$$

Tout d'abord il est facile de voir que

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \Xi_2(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0^+} = 0. \quad (5.36)$$

Notons ensuite par W_ε la fonction définie par $\varepsilon \mapsto W_\varepsilon = \langle \nabla(u_{\Omega^\varepsilon} - G), \nabla \delta u \rangle$ et par H_ε la fonction définie par $H_\varepsilon = (f + \Delta G)\delta u$, avec $W_0 = 0$ et $H_0 = 0$. Alors, il existe $W'_0 \in L^1(D)$ et $H'_0 \in L^1(D)$ telles que

$$\frac{1}{\varepsilon}(W_\varepsilon - W_0) - W'_0 \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{L^1(D)} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon}(H_\varepsilon - H_0) - H'_0 \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{L^1(D)} 0.$$

Ainsi, en appliquant la proposition 5.2 à Ξ_1 , Ξ_3 et Ξ_4 on obtient

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \Xi_1(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0^+} = - \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} W'_0(x) dx, \quad (5.37)$$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \Xi_3(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} W'_0(x) dx + \int_{\Gamma_2} W_0(x) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma = \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} W'_0(x) dx \quad (5.38)$$

et

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \Xi_4(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} H'_0(x) dx + \int_{\Gamma_2} H_0(x) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma = \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} H'_0(x) dx. \quad (5.39)$$

Par conséquent,

$$\frac{d}{d\varepsilon} \|\nabla \delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \Big|_{\varepsilon=0^+} = 0,$$

Par suite

$$\|\nabla \delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 = o(\varepsilon) \quad (5.40)$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré [11], il existe une constante $C_\Omega > 0$, telle que

$$\|\delta u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla \delta u\|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus en utilisant l'inégalité de Hölder, il existe une constante $C_D > 0$, telle que

$$\begin{aligned} \left| 2 \int_{\Omega} \delta u \langle \nabla(\delta u), I_d \rangle \right| &\leq 2 \sup_{x \in D} \|x\| \|\delta u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \delta u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_D \|\delta u\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\leq C_D C_\Omega^2 \|\nabla \delta u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Par suite, en utilisant (5.40) et le fait que $Err_{\delta u}(0) = 0$, on conclut que

$$Err_{\delta u}(\varepsilon) = n \|\delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_{\Omega} \delta u(x) \langle \nabla(\delta u)(x), x \rangle dx = o(\varepsilon).$$

D'où, en conclusion on obtient

$$\Delta \mathcal{J} = J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon) + Err_{\delta u}(\varepsilon) = \varepsilon \int_{\Gamma_2} \mathcal{B}(x) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma + o(\varepsilon),$$

Par conséquent

$$\delta \mathcal{J}(\Omega, u_\Omega)(\Omega') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \Delta \mathcal{J} = \int_{\partial \Omega_2} \mathcal{B}(x) P_{\Omega'_2}(\nu_2(x)) d\sigma.$$

Ce qui achève la preuve du théorème. ■

5.3 Processus d'identification de la forme optimale

Dans cette section, dans le but de résoudre numériquement le problème d'optimisation (5.8), nous suggérons un algorithme de résolution du type gradient combiné à une discrétisation des problèmes d'états par la méthode des éléments frontières (BEM) [21].

Méthode du gradient

Nous proposons l'algorithme suivant du type gradient basé sur la nouvelle méthode de calcul de la dérivée de forme permettant d'explicitier le gradient de \mathcal{J} via les fonctions support.

Algorithme

(1) Initialisation.

- Choisir un domaine initiale $\Omega_0 = \Omega_{0,2} \setminus \Omega_1 \in \mathcal{O}$.
- Se donner un coefficient $\rho \in]0, 1[$ et une précision Eps.

(2) Partie principale, pour l'itération $k=0, \dots$

- (i) Résoudre le problème d'état

$$\begin{cases} \Delta u_k = f & \text{dans } \Omega_k = \Omega_{k,2} \setminus \Omega_1 \\ u_k = \varphi_1 & \text{sur } \Gamma_1 = \partial\Omega_1 \\ \partial_{\nu_2} u_k = \partial_{\nu_2} G & \text{sur } \Gamma_{k,2} = \partial\Omega_{k,2} \end{cases} \quad (5.41)$$

- (ii) Résoudre le problème d'état adjoint

$$\begin{cases} \Delta \psi_k = 0 & \text{dans } \Omega_k \\ \psi_k = \varphi_1 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \partial_{\nu_2} \psi_k = -2(u_k - \varphi_2) \langle \nu_2(x), x \rangle & \text{sur } \Gamma_{k,2} \end{cases} \quad (5.42)$$

- (iii) ◦ Extraire $u_k, \psi_k, \nabla u_k$ et $\nabla \psi_k$ sur $\Gamma_k = \partial\Omega_k$.

- Calculer \mathcal{B}_k sur $\Gamma_{2,k}$ par la relation

$$\mathcal{B}(x) = \operatorname{div} \left((u_k(x) - \varphi_2(x))^2 x \right) + \langle \nabla(u_k - G), \nabla \psi \rangle(x) - ((f + \Delta G)\psi_k)(x), \quad x \in \Gamma_{2,k}.$$

- (iv) Calculer $P_k = P_{\Omega_{2,k}}$.

- (v) Calculer \hat{p}_k la solution de

$$\arg \min_{\varphi \in \mathcal{P}} j_k(\varphi) := \int_{\Gamma_{2,k}} \mathcal{B}_k(x) (\varphi - P_k)(\nu_k(x)) d\sigma(x). \quad (5.43)$$

où

$$\mathcal{P} = \{ \Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) / \Phi \text{ est convexe et homogène de degré 1 et } P_{\Omega_1} < \Phi \leq P_D \}.$$

- (vi) ◦ Déterminer

$$P_{k+1} = P_k + \rho(\hat{p}_k - P_k).$$

- Déterminer le domaine $\bar{\Omega}_{k+1}$ associé à P_{k+1} par

$$\bar{\Omega}_{k+1} = \partial P_{k+1}(0) = \left\{ l \in \mathbb{R}^2 / P_{k+1}(x) \geq \langle l, x \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

(3) Critère d'arrêt.

- Si $\|u_k - \varphi_2\|_{L^2(\Gamma_{k,2})} \leq \text{Eps}$, **Fin**.
 - Sinon, **aller à (2)**.
-

Remarque 5.2 *Notons que l'algorithme ci-dessus est de type gradient de descente, il est ainsi naturel d'utiliser le critère d'arrêt suivant :*

$$\|j_k(\widehat{P}_k)\| \leq Eps.$$

Par ailleurs, nous pouvons également considérer d'autres critères d'arrêt, en l'occurrence celui utilisé dans notre algorithme qui est liée directement au problème inverse en particulier à la condition de Dirichlet sur $\Gamma_{k,2}$:

$$\|u_k - \varphi_2\|_{L^2(\Gamma_{k,2})} \leq Eps.$$

Discrétisation du problème d'optimisation de forme

Dans ce paragraphe, nous proposons une discrétisation du problème d'optimisation de forme (5.8), en se basant sur une discrétisation du problème d'état (5.41) et d'état adjoint (5.42) par la méthode des éléments frontières, notée de manière abrégée par BEM.

Discrétisation du problème d'état et d'état adjoint par la méthode BEM

La méthode des éléments frontières (BEM) est une technique numérique qui offre une alternative efficace aux méthodes d'approximation des équations aux dérivées partielles, comme la méthode des différences finies et celle des éléments finis. Le principal avantage du BEM est sa capacité unique à fournir une solution complète aux problèmes aux limites, en fonctions uniquement des données aux bord, avec des économies substantielles en temps de calcul et en effort de stockage des données. En effet, seule la frontière du domaine est discrétisée. Par conséquent le maillage est facilement produit et le nombre de degrés de liberté est plus petit que celui dans le cas des éléments finis et différences finies. Ce qui rend ainsi le stockage des données moins coûteux. Aussi la solution à l'intérieur du domaine est approchée avec un taux de convergence assez élevé et qui reste le même pour toutes les dérivées de la solution à n'importe quel ordre. Toutefois cette méthode présente des inconvénients à ne pas négliger, à savoir la nécessité d'avoir une solution fondamentale du problème considéré afin d'obtenir une équation intégrale aux frontières équivalente [21], aussi la matrice de rigidité ainsi obtenue est dense et non symétrique.

Nous allons maintenant proposer une approximation du problème d'état (5.41) et d'état adjoint (5.42) en utilisant la procédure standard de la méthode des éléments frontière [21, 22]. En effet, ces problèmes d'états peuvent être reformulés en utilisant une équation intégrale du type

$$c(\xi)u(\xi) = \int_{\Gamma} \left\{ u(y)\partial_{\nu_y} \ln |\xi - y| - \partial_{\nu_y} u(y) \ln |\xi - y| \right\} d\sigma(y). \quad (5.44)$$

où $u^*(y; \xi) = (1/2\pi) \ln(1/r)$ est la solution fondamentale de l'équation de Laplace, $r = \|y - \xi\|$ est la distance entre le point de collocation ξ et le point d'extrémité y , $q^* =$

$-(1/2\pi)\partial u^*/\partial\nu$ est le flux du potentiel $u^*(y; \xi)$ et

$$c(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in \Omega \\ 1/2, & \xi \in \Gamma \\ 0, & \xi \notin \Gamma \cup \Omega \end{cases}$$

La discrétisation de l'équation (5.44) peut être faite en utilisant différents types d'éléments, nous considérons ici les éléments constants [21]. Nous subdivisons ainsi la frontière Γ en \mathbf{n} éléments frontières $(\Gamma_i)_{i=1}^{\mathbf{n}}$, tel que $\Gamma = \cup_{i=1}^{\mathbf{n}} \Gamma_i$, et on suppose que les valeurs de u et de $q = \partial u/\partial\nu$ sont constantes sur chaque élément frontière $(\Gamma_i)_{i=1, \dots, \mathbf{n}}$ et valent respectivement les valeurs u_i et q_i sur chaque élément Γ_i . Notons par $(\xi_k)_{k=1, \dots, \mathbf{n}}$ les points milieux de chaque élément Γ_k . Alors on peut approcher l'équation (5.44) de la manière suivante :

$$c(\xi)u(\xi) = \sum_{\ell=1}^{\mathbf{n}} u_\ell \int_{\Gamma_\ell} q^*(\xi, y) d\sigma(y) - \sum_{\ell=1}^{\mathbf{n}} q_\ell \int_{\Gamma_\ell} \partial_{\nu_y} u(y) u^*(\xi, y) d\sigma(y), \quad \xi \in \Gamma \cup \Omega, \quad (5.45)$$

en particulier, pour $\xi = \xi_k$, $k = 1, \dots, \mathbf{n}$, on obtient

$$\frac{c(\xi_k)u(\xi_k)}{2} = \frac{u_k}{2} = \sum_{\ell=1}^{\mathbf{n}} u_\ell \int_{\Gamma_\ell} q^*(\xi_k, y) d\sigma(y) - \sum_{\ell=1}^{\mathbf{n}} q_\ell \int_{\Gamma_\ell} \partial_{\nu_y} u(y) u^*(\xi_k, y) d\sigma(y). \quad (5.46)$$

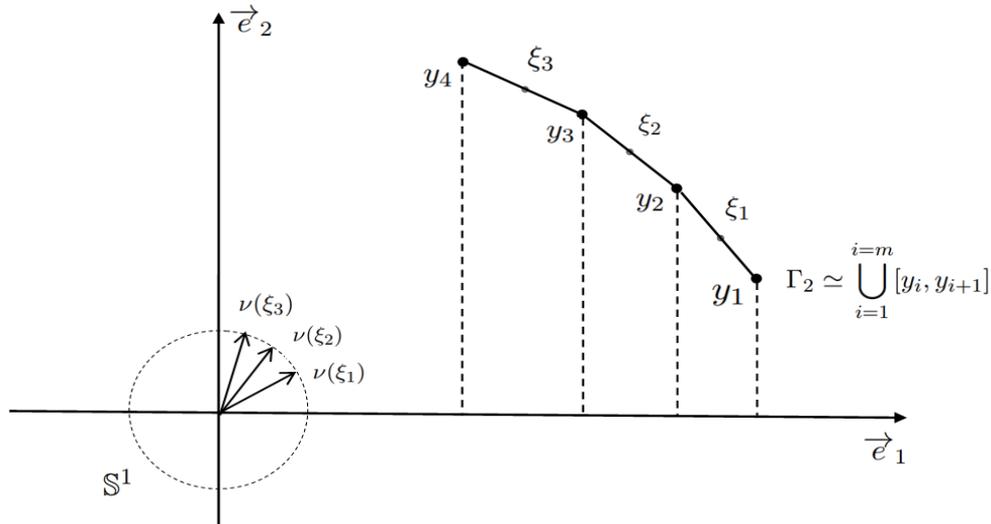


FIGURE 5.2 – Schéma illustrant la partition du bord en éléments frontières.

En utilisant le système (5.46), on peut alors approcher l'équation (5.44) sous la forme suivante :

$$\sum_{\ell=1}^{\mathbf{n}} H_{k,\ell} u_\ell = \sum_{\ell=1}^{\mathbf{n}} G_{k,\ell} q_\ell, \quad k = 1, \dots, \mathbf{n} \quad (5.47)$$

où $H_{k,\ell}$ et $G_{k,\ell}$ sont les coefficients respectifs, des matrices H et G , donnés par :

$$H_{k,\ell} = (1 - \delta_{k,\ell}) \int_{\Gamma_l} q_k^*(\xi_k, y) d\sigma(y) + \delta_{k,\ell} \left(\int_{\Gamma_l} q_k^*(\xi_k, y) d\sigma(y) + \frac{1}{2} \right), \quad (5.48)$$

$$G_{k,\ell} = \int_{\Gamma_l} u_k^*(\xi_k, y) d\sigma(y). \quad (5.49)$$

où δ est le symbole de Kronecker.

Ensuite la méthode de quadrature de Gauss où la formule d'intégration de 4-points de Gauss est utilisée pour l'intégration numérique des coefficients des matrices H et G . Par ailleurs, pour le calcul des coefficients diagonaux, on remarque que les termes diagonaux $H_{k,k}$ sont nuls, tandis que les termes $G_{k,k}$ peuvent être calculés analytiquement par les formules suivantes (voir [21])

$$G_{k,k} = \frac{L_k}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{2}{L_k}\right) + 1 \right] \quad (5.50)$$

où L_k est la longueur de l'élément Γ_k .

D'autre part, les valeurs des coefficients de H et G qui sont hors diagonale, se calculent de la manière suivante [21]

$$H_{k,\ell} = \sum_{i=1}^4 -\left(\frac{1}{d_s^2}\right) L w_i \frac{\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}}{2} \quad (5.51)$$

$$G_{k,\ell} = \sum_{i=1}^4 \ln\left(\frac{1}{d_s}\right) w_i \frac{\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}}{2} \quad (5.52)$$

où X_1, X_2, Y_1 et Y_2 sont les coordonnées des collocations de chaque élément Γ_k et les quantités w_i, L et d_s sont données analytiquement dans [21].

On note que le système (5.47) peut être réorganisé comme suit :

$$\sum_{\ell=1}^{\mathbf{n}} a_{\ell,k} x_\ell = \sum_{l=1}^{\mathbf{n}} b_{\ell,k}, \quad k = 1, \dots, \mathbf{n} \quad (5.53)$$

avec

$$a_{\ell,k} = \begin{cases} - \int_{\Gamma_l} u_k^*(\xi_k, y) d\sigma(y) & \text{si } u \text{ est connue sur } \Gamma_\ell \\ \int_{\Gamma_l} q_k^*(\xi_k, y) d\sigma(y) - 1/2 \delta_{\ell,k} & \text{si } \partial u / \partial \nu \text{ est connue sur } \Gamma_\ell \end{cases} \quad (5.54)$$

$$b_{\ell,k} = \begin{cases} u_k \left(- \int_{\Gamma_l} q_k^*(\xi_k, y) d\sigma(y) + 1/2 \delta_{\ell,k} \right) & \text{si } u \text{ est connue sur } \Gamma_\ell \\ q_k \int_{\Gamma_l} u_k^*(\xi_k, y) d\sigma(y) & \text{si } \partial u / \partial \nu \text{ est connue sur } \Gamma_\ell \end{cases} \quad (5.55)$$

$$x_\ell = \begin{cases} u_\ell & \text{si } u \text{ est connue sur } \Gamma_\ell \\ q_\ell & \text{si } \partial u / \partial \nu \text{ est connue sur } \Gamma_\ell. \end{cases} \quad (5.56)$$

Nous obtenons ainsi le système d'ordre \mathbf{n} :

$$Ax = b, \quad (5.57)$$

$$\text{où } A_{\ell,k} = a_{\ell,k} \text{ et } b_k = \sum_{\ell=1}^{\mathbf{n}} b_{\ell,k}, \quad k, \ell \in \{1, \dots, N\}.$$

Discrétisation du gradient et de la famille des fonctions admissibles

Notons tout d'abord par \mathbf{m} , ($\mathbf{m} < \mathbf{n}$), le nombre d'éléments frontières appartenant au bord extérieur Γ_2 et par $\mathbf{n} - \mathbf{m}$ le nombre d'éléments frontières appartenant au bord intérieur Γ_1 . Considérons les deux partitions $Y = (y_i)_{i=0}^{\mathbf{m}}$ et $\xi = (\xi_i)_{i=0}^{\mathbf{m}}$ de Γ_2 , telles que ξ_i est le point milieu de l'élément frontière $[y_{i-1}, y_i]$ pour $i = 1, \dots, \mathbf{m}$.

Le gradient discret de la fonctionnelle coût peut être approché de la manière suivante

$$j(P) = \sum_{i=0}^{\mathbf{m}} h_i \mathcal{B}_i (P_i - P_{\Omega}(\nu(\xi_i)))$$

où $h_i = \|y_{i+1} - y_i\|$; $P = (P_i = P(\nu(\xi_i)))_{i=0}^{\mathbf{m}}$; $\nu(\xi_i)$ est la normale extérieure à l'élément frontière $[y_i, y_{i+1}]$ et $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}(\xi_i)$ est tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i &= 2(u_i - \varphi_2(\xi_i)) \left(\nabla u^h(\xi_i) - \nabla \varphi_2(\xi_i), \xi_i \right) + 2(u_i - \varphi_2(\xi_i))^2 \\ &+ \left(\nabla (u^h(\xi_i) - G^h(\xi_i)), \nabla \psi^h(\xi_i) \right) + (f(\xi_i) - \Delta G^h(\xi_i)) \psi_i \end{aligned}$$

où u^h est la solution approchée du problème d'état, telle que $u^h(\xi_i) = u_i$, pour $i = 0, \dots, \mathbf{n}$ est la solution d'un système linéaire du type (6.56), ψ^h est la solution approchée du problème d'état adjoint, telle que $\psi^h(\xi_i) = \psi_i$, pour $i = 0, \dots, \mathbf{n}$ est la solution d'un système linéaire du type (6.56) et G^h une fonction approchée de G .

Nous définissons ensuite la famille des fonctions admissibles discrète par :

$$\mathcal{P} = \left\{ P = (P_0, \dots, P_{\mathbf{m}}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}+1}; \begin{array}{l} P_{\Omega_1}(\nu(\xi_i)) \leq P_i \leq P_D(\nu(\xi_i)) \quad i = 1, \dots, \mathbf{m} - 1, \\ P_0 \leq \lambda_0 P_{\mathbf{m}} + (1 - \lambda_0) P_1, \\ P_i \leq \lambda_i P_{i-1} + (1 - \lambda_i) P_{i+1} \quad i = 1, \dots, \mathbf{m} - 1 \text{ et} \\ P_{\mathbf{m}} \leq \lambda_{\mathbf{m}} P_{\mathbf{m}-1} + (1 - \lambda_{\mathbf{m}}) P_0 \end{array} \right\}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{\|\nu(\xi_{\mathbf{m}}) - \nu(\xi_0)\|}{\|\nu(\xi_0) - \nu(\xi_1)\|}, \quad \lambda_i = \frac{\|\nu(\xi_{i-1}) - \nu(\xi_i)\|}{\|\nu(\xi_i) - \nu(\xi_{i+1})\|}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, \mathbf{m} - 1 \\ \text{et } \lambda_{\mathbf{m}} &= \frac{\|\nu(\xi_{\mathbf{m}-1}) - \nu(\xi_{\mathbf{m}})\|}{\|\nu(\xi_{\mathbf{m}}) - \nu(\xi_0)\|}. \end{aligned}$$

Le domaine discret associé à

$$\bar{\Omega}_0 = \partial \hat{P}(0) = \{l \in \mathbb{R}^2; \bar{P}(x) \geq \langle l, x \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^2\}$$

est considérée comme solution de l'équation (voir [76])

$$\nu^{(1)}(\xi_i) l_i^{(1)} + \nu^{(2)}(\xi_i) l_i^{(2)} = \hat{P}_i, \quad \text{pour } i = 0, \dots, \mathbf{m}$$

et

$$\nu^{(1)}(\xi_i) l_i^{(2)} - \nu^{(2)}(\xi_i) l_i^{(1)} = \nu^{(1)}(\xi_i) \xi_i^{(2)} - \nu^{(2)}(\xi_i) \xi_i^{(1)}, \text{ pour } i = 0, \dots, \mathbf{m}$$

5.4 Résultats numériques

Afin de montrer l'efficacité et la performance de l'algorithme proposé lorsqu'il s'agit d'identifier la forme optimale du problème d'optimisation, nous considérons deux modèles, un modèle d'analyse et un autre de conception. Pour le premier modèle on suppose connue la exacte du problème d'optimisation (5.8) et on cherche à la reconstruire. Tandis que le deuxième modèle sera consacré à la résolution numérique d'un problème de type Bernoulli.

Modèle d'analyse

Dans ce modèle d'analyse, nous considérons un premier exemple, dont on cherche à reconstruire la solution exacte du problème d'optimisation (5.8) associée au domaine exact $\Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1$, avec

$$\Omega_2 = \{(x, y) / x^2 + y^2 < (1.5)^2\},$$

étant donné le domaine fixe

$$\Omega_1 = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq (0.75)^2\}$$

et la solution exacte du problème d'état (5.17), $u(x, y) = x^2 - y^2$, associée aux données $f = 0$ et $G = x^2 - y^2$.

Ainsi les nombres d'éléments frontières utilisés pour la discrétisation de la frontière libre et de la frontière fixe sont pris respectivement $N = 100$ et $M = 104$. Le coefficient de déformation est choisi $\rho = 0,008$ et la précision désirée est $EPSD = 10^{-2}$. Le domaine initial Ω est l'ellipse de centre $(0, 0)$, de longueur 1 suivant l'axe $\vec{\sigma x}$ et de longueur 2 suivant l'axe $\vec{\sigma y}$.

Pour tous les tests numériques considérés, les nombres d'éléments frontières utilisés pour la discrétisation de la frontière libre et de la frontière fixe sont pris respectivement $\mathbf{n} = 70$ et $\mathbf{m} = 40$. Le coefficient de déformation est choisi $\rho = 0,01$ et la précision désirée est $EPSD = 10^{-3}$. Le domaine initial Ω est l'ellipse de centre $(0, 0)$, de longueur 3 suivant l'axe $\vec{\sigma x}$ et de longueur 2 suivant l'axe $\vec{\sigma y}$.

La frontière optimale est atteinte au bout de 181 itérations. Dans la figure 5.3, nous présentons les domaines fixe, initial, optimal et exact. La variation de la fonctionnelle coût en fonction des nombres d'itérations est représentée dans la figure 5.4. Dans la figure 5.5, nous présentons les frontières initiale et libre pour différents nombres d'itérations (10; 40; 80; 120 et 150).

Nous remarquons que la frontière optimale ainsi obtenue représente une bonne approximation de la frontière exacte.

Pour l'exemple suivant, nous préservons la même solution exacte $u(x, y) = x^2 - y^2$, mais nous considérons cette fois-ci comme domaine exact Ω_2 , l'ellipse de centre $(0, 0)$ de longueur 1.5 suivant $(\vec{\sigma x})$ et 1 suivant $(\vec{\sigma y})$. Pour le même nombre d'éléments de frontières, $\rho = 0.0001$ et la précision $\varepsilon = 10^{-3}$, la solution optimale est atteinte au bout de 111

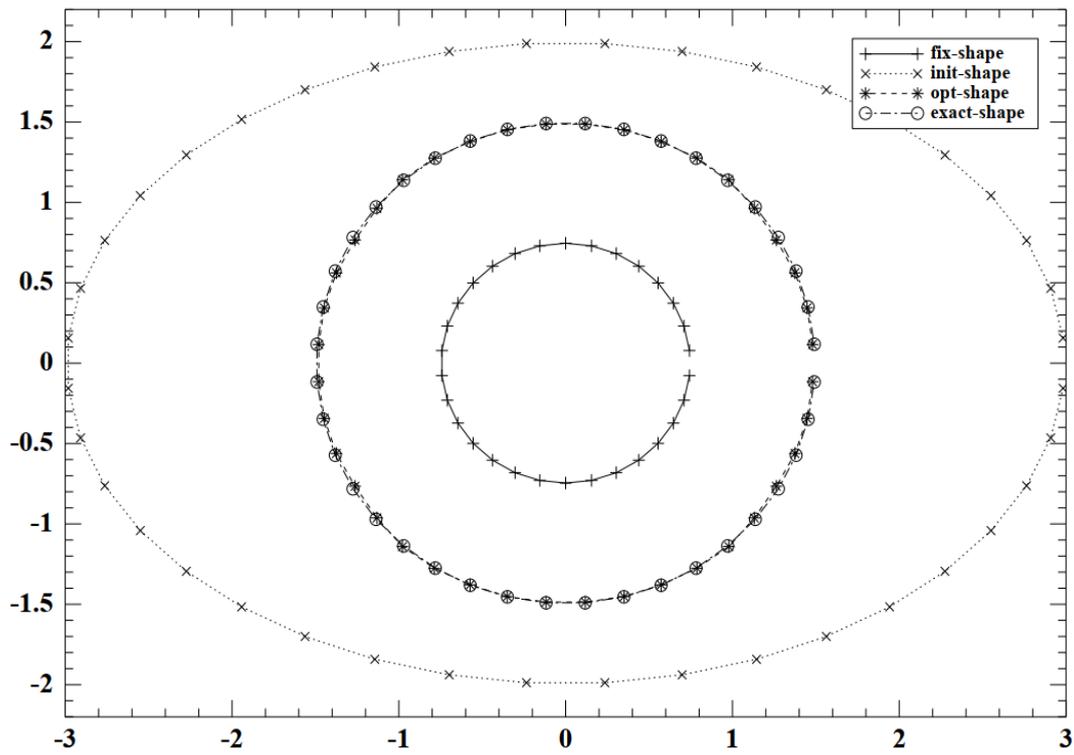


FIGURE 5.3 – Domaines initial, optimal et exact.

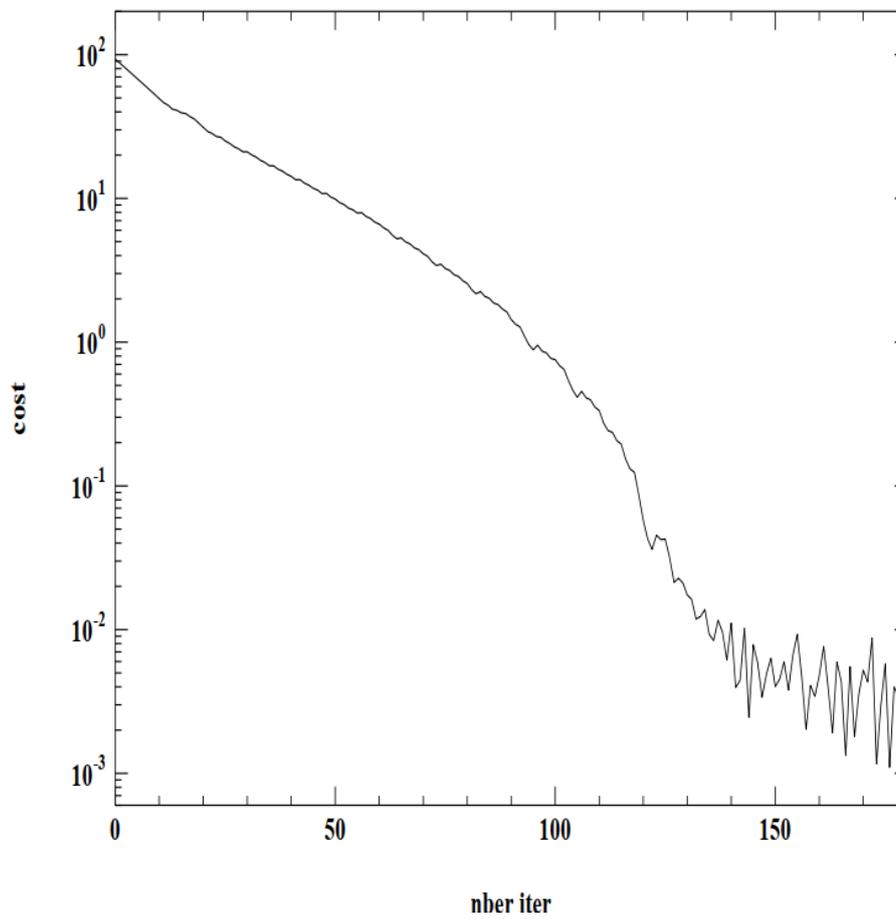


FIGURE 5.4 – Variation du coût en fonction du nombre d'itérations.

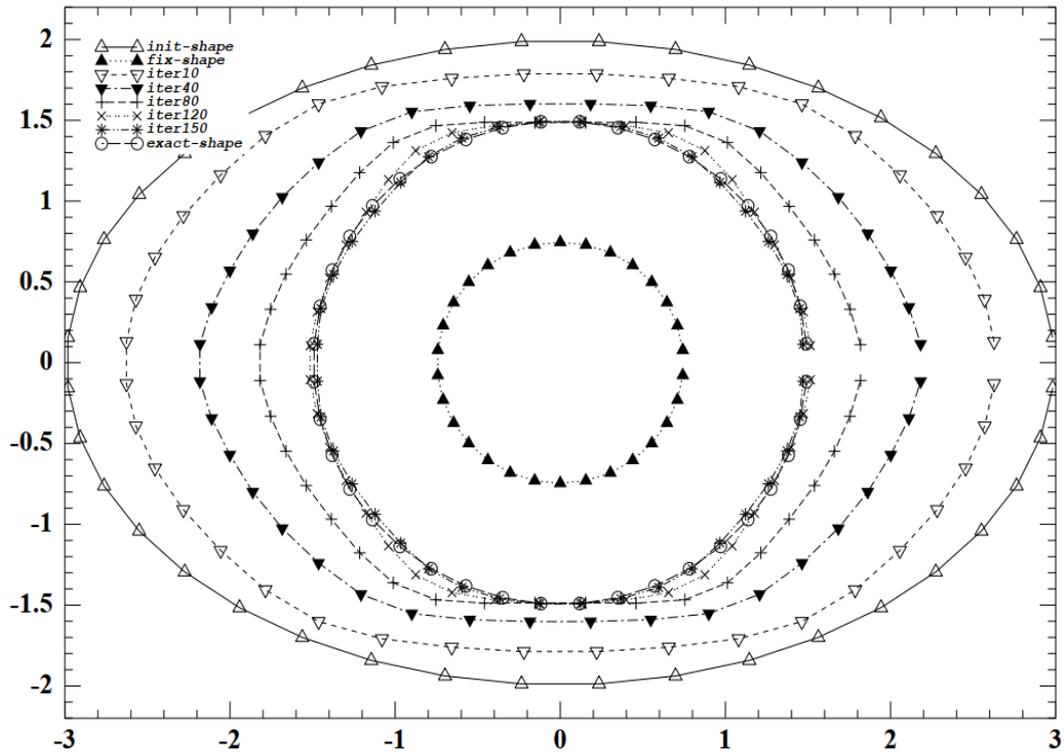


FIGURE 5.5 – Frontières libres pour différents nombres d'itérations.

itérations. Les domaines initial, fixe, exact et optimal sont présentés dans la figure 5.6. La variation de la fonctionnelle coût en fonction du nombre d'itérations est illustrée dans la figure 5.7.

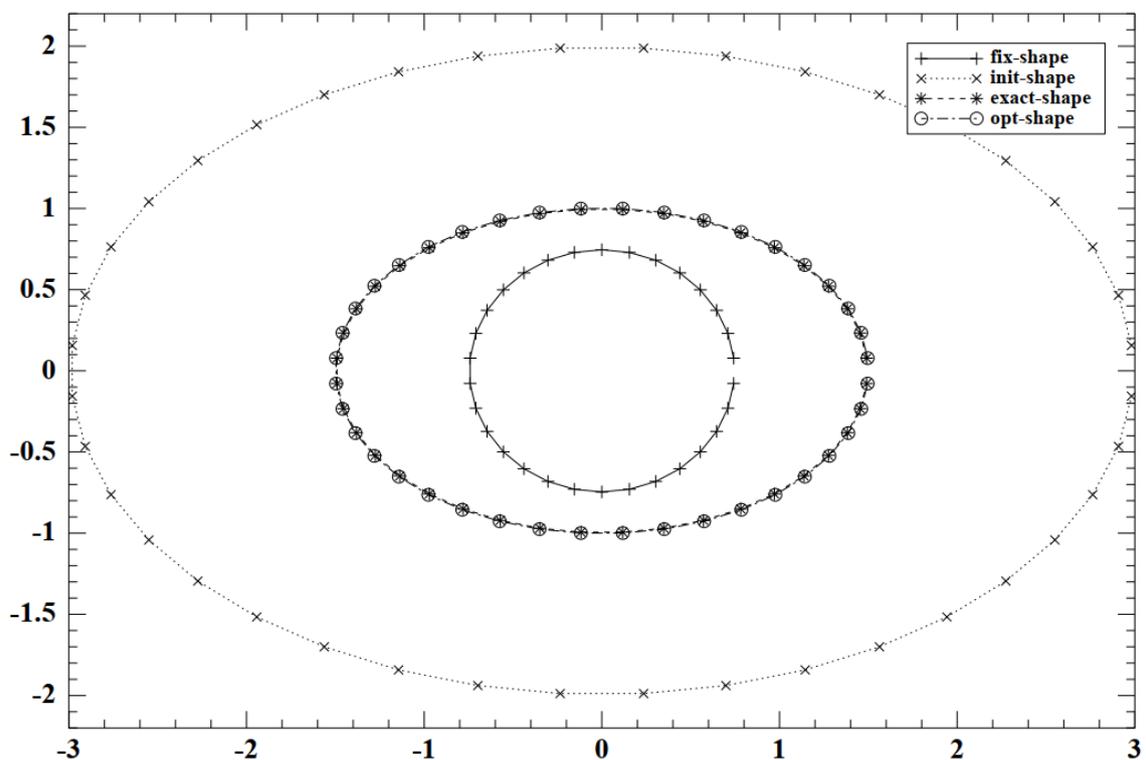


FIGURE 5.6 – Domaines initial, optimal et exact.

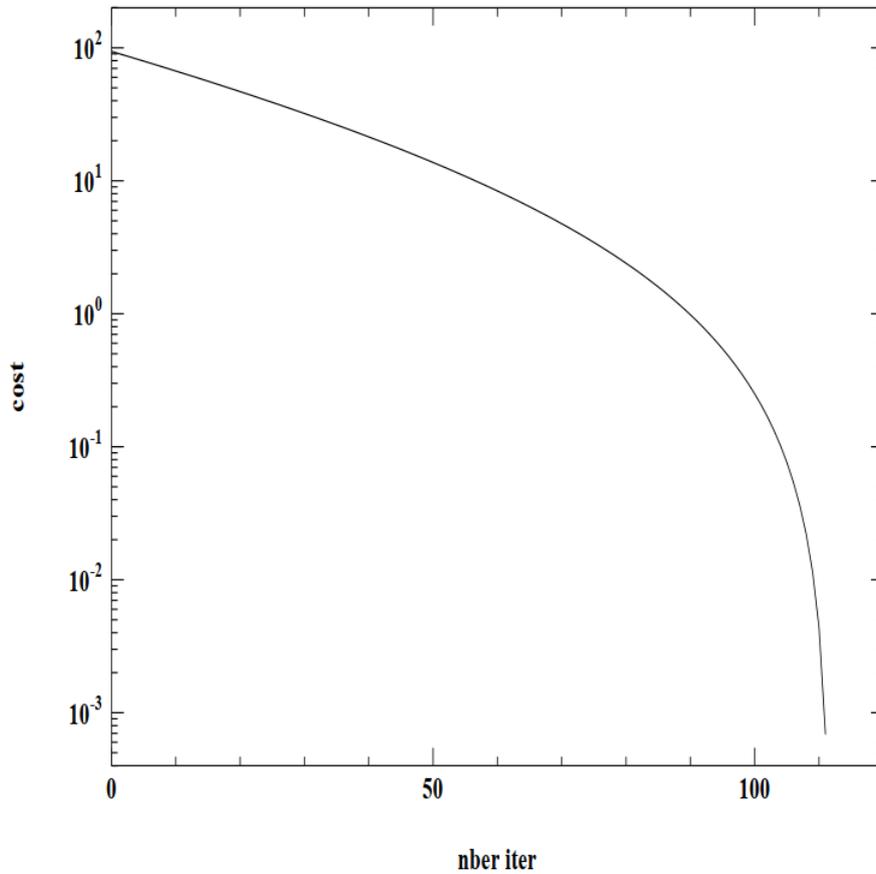


FIGURE 5.7 – Variation du coût en fonction du nombre d'itérations

Modèle de conception

Dans cette section, nous considérons le problème de Bernoulli qui consiste à trouver la frontière Γ_2 et u solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ u = 1 & \text{sur } \Gamma_2, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = C & \text{sur } \Gamma_2, \end{array} \right. \quad (5.58)$$

avec C est une constante négative.

Le premier test numérique que nous considérons vise à confirmer numériquement le résultat théorique (voir [47]), qui dit que si le domaine fixe est une boule $B(0, r)$ de centre $(0, 0)$ et de rayon r , alors la solution de ce problème est une boule $B(0, R)$, telle que $R > r$, de plus R croît en fonction de C . Le domaine initial considéré est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 3, le domaine fixe est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 0,75. Ainsi les nombres d'éléments frontières utilisés pour la discrétisation de la frontière libre et de la frontière fixe sont pris respectivement $\mathbf{n} = 70$ et $\mathbf{m} = 40$. La précision désirée est donnée par $Eps = 10^{-5}$ et le coefficient de déformation est choisi $\rho = 0.01$. On remarque que la solution optimale est un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon R qui croît lorsque la constante

C croît. On présente ainsi dans la figure 5.8, le domaine optimal pour différentes valeurs de C . La variation du coût pour différentes valeurs de C est illustrée dans le tableau 5.1.

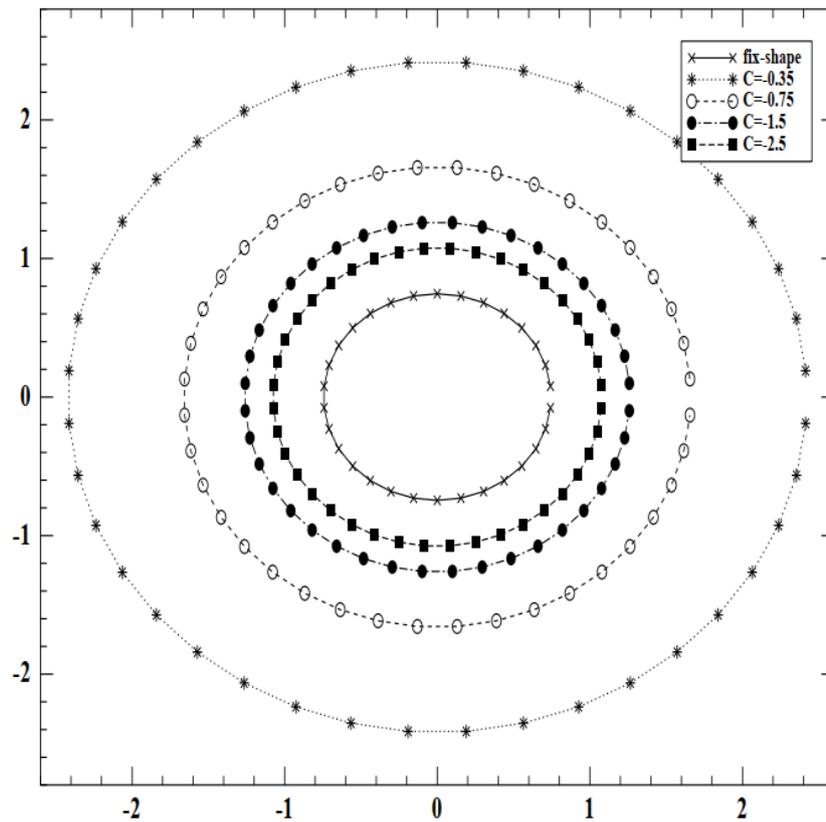
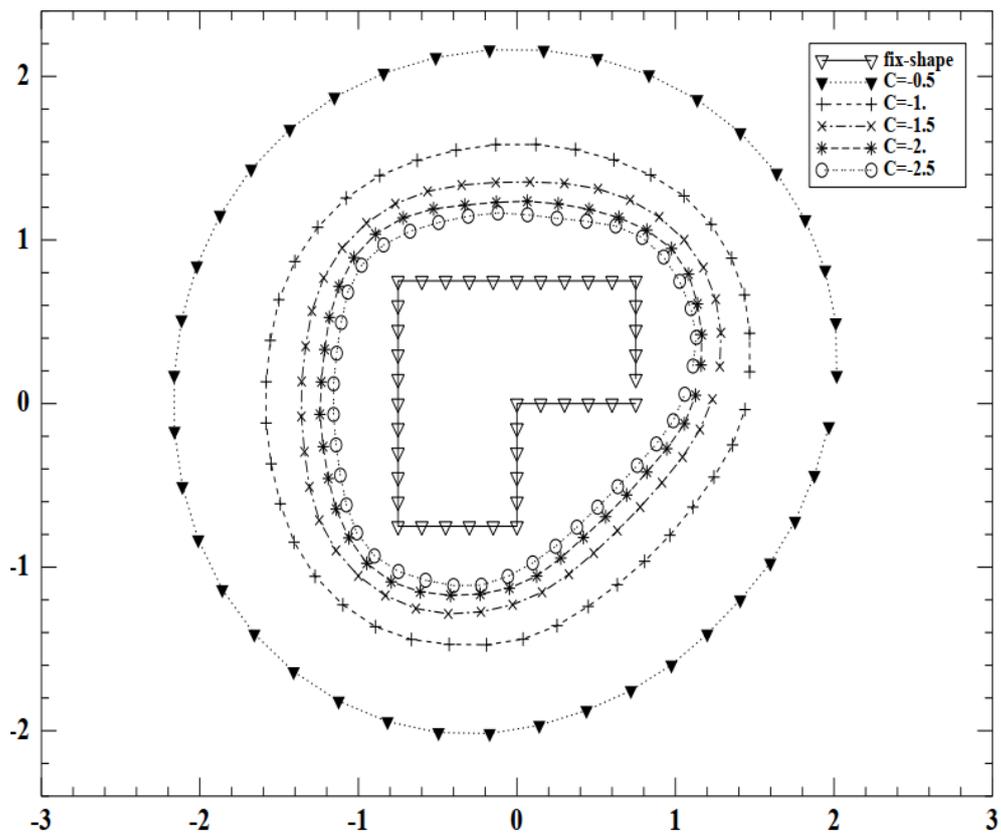


FIGURE 5.8 – Domaine optimal pour différentes valeurs de C .

C	-0.35	-0.75	-1.5	-2.5
Coût	$1.55 \cdot 10^{-6}$	$8.55 \cdot 10^{-8}$	$4.3 \cdot 10^{-8}$	$4.34 \cdot 10^{-6}$

TABLE 5.1 – Coût pour différentes valeurs de C .

Pour le deuxième test numérique, nous préservons les mêmes données, mais nous considérons comme domaine fixe Ω_1 un polygone. Les nombres d'éléments frontières utilisés pour la discrétisation de la frontière libre et de la frontière fixe sont pris respectivement $\mathbf{n} = 80$ et $\mathbf{m} = 40$. Ainsi les domaines fixe et les domaines optimaux pour différentes valeurs de C sont présentés dans la figure 5.9. On observe que les formes optimales ont la même allure que celles obtenues dans [60, 56].

FIGURE 5.9 – Domaine optimal pour différentes valeurs de C .

Résolution numérique d'un problème d'optimisation de forme sujet à deux problèmes aux limites couplés

Sommaire

6.1	Position du problème d'optimisation de forme	173
6.2	Dérivation par rapport aux domaines	175
	Dérivation du problème d'optimisation de forme	177
6.3	Processus de résolution numérique	185
	Algorithme de résolution	185
	Approximation des problèmes d'états	187
	Discrétisation du problème d'optimisation de forme	190
6.4	Résultats numériques	191
	Le premier exemple	191
	Le deuxième exemple	192
	Le troisième exemple	194

Dans ce chapitre, nous étudions une classe de problèmes d'optimisation de forme sujet à deux problèmes aux limites couplés. Il consiste en fait à minimiser une fonctionnelle coût présentée sous forme générale, sous contraints deux problèmes aux limites couplés par une condition de transmission du type Neumann. A ce stade, nous notons que la méthode d'optimisation de forme a été déjà utilisée pour traiter différents problèmes aux limites couplés. Nous citons à titre d'exemple les travaux [23, 35, 68, 66, 74, 93, 94, 95]. Dans ce travail nous montrons l'existence de la dérivée de forme de la fonctionnelle coût. Ensuite, nous explicitons son expression via les fonctions support, tout en utilisant les formules proposées dans [8, 10, 9]. Enfin nous présentons quelques résultats numérique obtenus en utilisant un algorithme du type gradient combiné à une discrétisation par la méthode des éléments frontières et la réciprocity duale.

Le travail présenté dans ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis [13].

6.1 Position du problème d'optimisation de forme

Étant donné B un ouvert borné convexe et régulier de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$). Soient D un ouvert borné de B , Ω un ouvert borné convexe et régulier et $\omega \subset D$ l'ouvert, tel que $\omega = D \setminus \bar{\Omega}$. Notons par ∂D la frontière de D , qui est la partie extérieure du bord de ω supposée fixée

et connue et par Γ la frontière de Ω , qui est la partie intérieure du bord de ω supposée inconnue (voir figure 6.1).

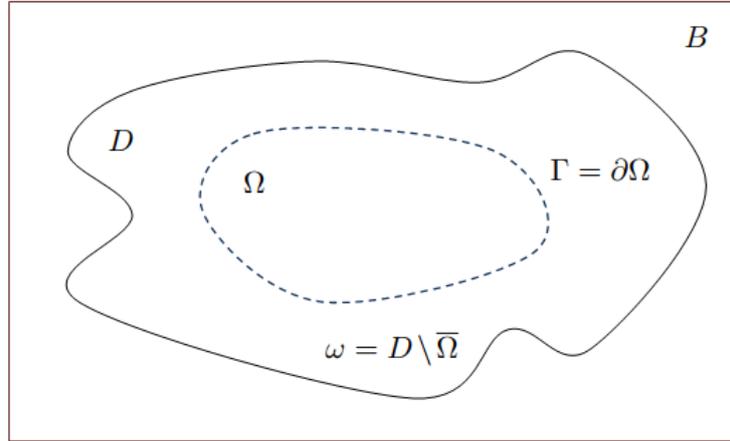


FIGURE 6.1 – Description du domaine $\omega = D \setminus \bar{\Omega}$.

Le problème consiste alors à déterminer la frontière libre Γ , en minimisant une fonctionnelle coût sous forme générale par rapport à une famille de domaines admissibles sous contraintes deux problèmes aux limites couplés par une condition de transmission. Plus précisément, il s'agit d'un problème d'optimisation de forme géométrique pour un modèle en régime permanent, régi par des problèmes aux limites elliptiques couplés par une condition de transmission du type Neumann. Ainsi le problème considéré se présente comme suit :

$$\min_{\Omega \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} J(\Omega, u_{\Omega}, v_{\Omega}), \quad (6.1)$$

où u_{Ω} et v_{Ω} sont solutions des problèmes suivants :

$$\begin{cases} -\nabla(\gamma \nabla v_{\Omega}) = k & \text{dans } \omega = D \setminus \bar{\Omega}, \\ v_{\Omega} = g & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, \\ v_{\Omega} = g & \text{sur } \partial D \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\begin{cases} -\nabla(\mu \nabla u_{\Omega}) + q u_{\Omega} = f & \text{dans } \Omega, \\ \mu \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} = \gamma \frac{\partial v_{\Omega}}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (6.3)$$

où \mathcal{U}_{ad} désigne une famille de domaines admissibles, f , k , μ , γ , g et q sont des fonctions données, ν est le vecteur normale à Γ et $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u|_{\Gamma}, \nu \rangle$ est la dérivée normale de u .

La fonctionnelle coût J est considérée sous la forme générale :

$$\mathcal{J}(\Omega) = J(\Omega, u_{\Omega}, v_{\Omega}) = \int_{\Omega} F_1(x, u_{\Omega}(x)) + \int_{D \setminus \bar{\Omega}} F_2(x, v_{\Omega}(x)) dx \quad (6.4)$$

où F_1 et F_2 sont des fonctions données et v_{Ω} et u_{Ω} sont respectivement solution de (6.2) et (6.3).

Notons que ce type de problèmes d'optimisation de forme se présente par exemple lorsqu'il s'agit d'optimiser des structures mécaniques soumises à des charges thermiques et refroidie par un fluide, tandis que la condition de transmission modélise la force exercée par le fluide Ω sur le solide ω .

Dans ce travail, nous proposons une nouvelle approche numérique pour l'étude du problème d'optimisation (6.1) qui consiste à minimiser la fonctionnelle coût \mathcal{J} , sous contraintes les deux problèmes (6.2) et (6.3). Ainsi, nous donnons une expression de la dérivée de forme de la fonctionnelle coût par rapport à la famille des domaines \mathcal{U}_{ad} via les fonctions support, suivant la formule de dérivée de forme par rapport aux domaines convexes proposée dans [8, 10]. La formule de dérivée de forme ainsi obtenue sera alors la base de notre processus d'optimisation adopté pour la simulation numérique de ce problème. Dans ce cadre, nous optons pour une discrétisation des problèmes d'état et d'état adjoint via la méthode des éléments frontières et la réciprocity duale [21, 22]. Nous terminons par donner quelques résultats numériques montrant l'efficacité de l'approche proposée.

6.2 Dérivation par rapport aux domaines

Afin d'établir la dérivée de forme de la fonctionnelle coût du problème d'optimisation de forme (6.1)-(6.2)-(6.3) en se basant sur [8, 10], nous aurons besoin d'établir quelques résultats préliminaires. Pour ce faire, soient D un ouvert borné convexe de classe \mathcal{C}^2 fixé dans B , Ω un ouvert borné convexe de classe \mathcal{C}^2 et ω est l'ouvert tel que $\omega = D \setminus \bar{\Omega}$. On supposera qu'il existe $\delta > 0$, tel que

$$d^H(\partial D, \partial \Omega) \geq \delta. \tag{6.5}$$

où d^H est la distance de Hausdorff.

Soit maintenant $\tilde{\Omega}$ un ouvert borné convexe dans \mathbb{R}^n et $\varepsilon \in]0, 1[$. Notons par $\Omega_\varepsilon = \Omega + \varepsilon \tilde{\Omega}$ et $\omega_\varepsilon = D \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon$ les déformations de Ω et ω , qui sont respectivement de frontières Γ_ε et Σ_ε . Notons ainsi que si $\varepsilon = 0$, on aura $\Omega_0 = \Omega$ et $\omega_0 = D \setminus \bar{\Omega}$. D'autre part d'après l'équation (6.5), il existe ε_0 tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, on aura

$$\bar{\Omega}_\varepsilon \subset D \quad \text{et} \quad d^H(\partial D, \Gamma_\varepsilon) \geq \delta.$$

Par suite

$$\Sigma_\varepsilon = \partial D \cup \Gamma_\varepsilon, \quad \partial D \cap \Gamma_\varepsilon = \emptyset \tag{6.6}$$

et

$$\chi_{\omega_\varepsilon} = \chi_D - \chi_{\Omega_\varepsilon}. \tag{6.7}$$

Maintenant étant donné une fonction $f \in W^{1,1}(B)$, considérons la fonctionnelle

$$I : \varepsilon \mapsto I(\varepsilon) = \int_{\omega_\varepsilon} f(x) dx.$$

En utilisant le fait que

$$I(\varepsilon) = \int_D f(x) dx - \int_B \chi_{\Omega_\varepsilon} f(x) dx$$

et en appliquant la formule (5.10) à I , on obtient

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (I(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \left(- \int_B \chi_{\Omega_\varepsilon} f(x) dx \right) \right|_{\varepsilon=0^+} = - \int_\Gamma f(x) P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) d\sigma(x). \quad (6.8)$$

Par conséquent, nous avons le résultat suivant

Théorème 6.1 *La fonctionnelle I est dérivable en 0^+ et sa dérivée est donnée par*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{I(\varepsilon) - I(0)}{\varepsilon} = \int_\Gamma -f(x) P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) d\sigma(x),$$

où ν est la normale à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω .

De manière général, lorsque la fonction f dépend du domaine, en utilisant les même techniques que dans la Proposition 5.2, on montre le résultat suivant.

Proposition 6.1 *Soient $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[} \subset L^1(B)$ et $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[} \subset L^1(B)$ deux familles de fonctions et soient $f_0, g_0 \in W^{1,1}(B)$ et f, g des fonctions telles que*

$$f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(f_\varepsilon - f_0)}{\varepsilon} \text{ dans } L^1(B) \quad \text{et} \quad g = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(g_\varepsilon - g_0)}{\varepsilon} \text{ dans } L^1(B).$$

Alors les fonctionnelles

$$J_1 : \varepsilon \mapsto J_1(\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(x) dx \quad \text{et} \quad J_2 : \varepsilon \mapsto J_2(\varepsilon) = \int_{\omega_\varepsilon} g_\varepsilon(x) dx$$

sont dérivables en 0^+ , de plus on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{J_1(\varepsilon) - J_1(0)}{\varepsilon} = \int_\Omega f(x) dx + \int_\Gamma f_0(x) P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) d\sigma(x). \quad (6.9)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{J_2(\varepsilon) - J_2(0)}{\varepsilon} = \int_\omega g(x) dx - \int_\Gamma g_0(x) P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) d\sigma(x). \quad (6.10)$$

où ν est la normale à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω .

Comme conséquence immédiate de la Proposition 6.1, nous aurons

Corollaire 6.1 *Soit $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[}$ et $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[}$ deux familles de fonctions dans $L^2(B)$. Soient $f_0 \in H^1(B), g_0 \in H^1(B)$ et f, g des fonctions telles que*

$$f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(f_\varepsilon - f_0)}{\varepsilon} \text{ dans } L^2(B) \quad \text{et} \quad g = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(g_\varepsilon - g_0)}{\varepsilon} \text{ dans } L^2(B).$$

Alors les fonctionnelles

$$J_1(\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(x) g_\varepsilon(x) dx \quad \text{et} \quad J_2(\varepsilon) = \int_{\omega_\varepsilon} f_\varepsilon(x) g_\varepsilon(x) dx$$

sont dérivables en 0^+ , de plus en notant par $\ell = g f_0 + f g_0$ on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{J_1(\varepsilon) - J_1(0)}{\varepsilon} = \int_\Omega \ell(x) dx + \int_\Gamma g_0 f_0(x) P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) d\sigma(x). \quad (6.11)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{J_2(\varepsilon) - J_2(0)}{\varepsilon} = \int_{\omega} \ell(x) dx - \int_{\Gamma} f_0 g_0(x) P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) d\sigma(x). \quad (6.12)$$

où ν est la normale à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω .

Dérivation du problème d'optimisation de forme

Dans cette section, nous allons établir le résultat théorique principal de ce chapitre, qui concerne la dérivée de forme de la fonctionnelle coût \mathcal{J} , sous contraints les deux problèmes aux limites (6.2)- (6.3). Pour ce faire définissons tout d'abord l'espace des domaines admissibles

$$\mathcal{U}_{\text{ad}} = \{\Theta \subset \mathbb{R}^n / \Theta \text{ est ouvert, } \bar{\Theta} \subset \Omega, \Theta \in \mathcal{C}^2 \cap \mathcal{K} \text{ et } d^H(\partial\Theta, \partial\Omega) \geq \rho\}, \quad (6.13)$$

où $\rho > 0$ une constante donnée, \mathcal{K} désigne l'espace des domaines convexe, \mathcal{C}^2 désigne la famille des domaines de frontières de classe C^2 .

Puis considérons la fonctionnelle définie sur \mathcal{U}_{ad} par

$$\mathcal{J}(\Omega, \omega = D \setminus \bar{\Omega}) = \int_{\Omega} F_1(x, u_{\Omega}(x)) + \int_{\omega} F_2(x, v_{\Omega}(x)) dx \quad (6.14)$$

où $F_1, F_2 : B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues données et u_{Ω} et v_{Ω} sont les solutions respectives des problèmes suivants

$$\begin{cases} -\nabla(\gamma \nabla v_{\Omega}) = k & \text{dans } \omega = D \setminus \bar{\Omega}, \\ v_{\Omega} = g & \text{sur } \Gamma \cup \partial D \end{cases} \quad (6.15)$$

et

$$\begin{cases} -\nabla(\mu \nabla u_{\Omega}) + q u_{\Omega} = f & \text{dans } \Omega, \\ \mu \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} = \gamma \frac{\partial v_{\Omega}}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (6.16)$$

Dans la suite, nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

- (H₁) Les dérivées premières et secondes de F_1 et F_2 par rapport à la deuxième variable existent et sont bornées sur $B \times \mathbb{R}$.
- (H₂) $g \in H^1(D)$, $f \in H^1(D)$, $k \in H^1(D)$ et $q \in L^{\infty}(D)$ une fonction positive.
- (H₃) $\mu \in W^{1,\infty}(D)$, $\gamma \in W^{1,\infty}(D)$, et il existe $\alpha > 0, \beta > 0$, tels que $\mu \geq \alpha$ p.p. dans D et $\gamma \geq \beta$ p.p. dans D .

Remarque 6.1 Notons que ces hypothèses de régularité permettent d'une part d'assurer que les problèmes (6.15)-(6.16) sont bien posés et que leurs solutions sont assez régulières, d'autre part d'établir le résultat d'existence de la dérivée de forme de la fonctionnelle \mathcal{J} .

Soit $\tilde{\Omega} \in \mathcal{C}^2 \cap \mathcal{K}$, un ouvert borné, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ considérons l'ouvert $\Omega_{\varepsilon} = \Omega + \varepsilon \tilde{\Omega}$ et désignons par $\omega_{\varepsilon} = D \setminus \bar{\Omega}_{\varepsilon}$ l'ouvert de frontières Γ_{ε} et Σ_{ε} . Soit $u_{\Omega_{\varepsilon}}$ et $v_{\Omega_{\varepsilon}}$ les solutions

respectives des problèmes suivants

$$\begin{cases} -\nabla(\gamma \nabla v_{\Omega_\varepsilon}) = k & \text{dans } \omega_\varepsilon, \\ v_{\Omega_\varepsilon} = g & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \cup \partial D \end{cases} \quad (6.17)$$

et

$$\begin{cases} -\nabla(\mu \nabla u_{\Omega_\varepsilon}) + qu_{\Omega_\varepsilon} = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \mu \frac{\partial u_{\Omega_\varepsilon}}{\partial \nu} = \gamma \frac{\partial v_{\Omega_\varepsilon}}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \end{cases} \quad (6.18)$$

Remarque 6.2 *Lorsqu'on suppose que $\tilde{\Omega}$ est fortement convexe, l'ouvert Ω_ε peut être considéré comme le déformé de Ω par le champ de vecteur $V(x) = a(x)$, tel que $\langle a(x), \nu(x) \rangle = P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x))$ (voir [8, 10]). Ainsi, en supposant que les hypothèses (\mathbf{H}_2) et (\mathbf{H}_3) sont satisfaites et en suivant [58, 33, 85], il existe $u', v' \in H^1(B)$, tels que*

$$\tilde{u}_\varepsilon = \tilde{u} + \varepsilon u' + \varepsilon U_\varepsilon \quad \text{où } U_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ in } H^1(B) \quad \text{et} \quad \tilde{v}_\varepsilon = \tilde{v} + \varepsilon v' + \varepsilon V_\varepsilon \quad \text{où } V_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ in } H^1(B),$$

où \tilde{u}_ε et \tilde{v}_ε sont respectivement des prolongements uniformes de u_{Ω_ε} et v_{Ω_ε} sur B et \tilde{u} et \tilde{v} sont respectivement des prolongements uniformes de u_Ω et v_Ω sur B .

Par suite, sous l'hypothèse (\mathbf{H}_1) , il existe deux fonctions F'_1 et F'_2 dans $L^1(B)$, telles que

$$\frac{1}{\varepsilon} [F_1(\cdot, \tilde{u}_\varepsilon) - F_1(\cdot, \tilde{u})] - F'_1 \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{L^1(B)} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon} [F_2(\cdot, \tilde{v}_\varepsilon) - F_2(\cdot, \tilde{v})] - F'_2 \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{L^1(B)} 0.$$

Nous avons alors le résultat suivant

Théorème 6.2 *Supposons que les hypothèses (\mathbf{H}_1) , (\mathbf{H}_2) et (\mathbf{H}_3) sont satisfaites. Soit $\Omega \in \mathcal{U}_{ad}$, $\omega = D \setminus \Omega$, $\tilde{\Omega} \in \mathcal{C}^2 \cap \mathcal{K}$ un ouvert borné, $\Omega_\varepsilon = \Omega + \varepsilon \tilde{\Omega}$ et $\omega_\varepsilon = D \setminus \tilde{\Omega}_\varepsilon$. Supposons en plus que $0 \in \tilde{\Omega}$ et que $\tilde{\Omega}$ est fortement convexe, alors la dérivée de forme de \mathcal{J} en (Ω, ω) est donnée par*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}(\Omega_\varepsilon, \omega_\varepsilon) - \mathcal{J}(\Omega, \omega)}{\varepsilon} = \int_{\Gamma} \mathcal{G}(x) P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) d\sigma(x). \quad (6.19)$$

où

$$\mathcal{G} = F_1(x, u_\Omega(x)) - F_2(x, v_\Omega(x)) + f\psi - \psi(qu_\Omega + k) + \nabla\psi(\gamma \nabla g - \mu \nabla u_\Omega),$$

avec ϕ et ψ sont les solutions des problèmes suivants (problèmes d'états adjoints) :

$$\begin{cases} -\nabla(\mu \nabla \phi) + q\phi = \frac{\partial F_1}{\partial u}(\cdot, u_\Omega) & \text{dans } \Omega, \\ \mu \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (6.20)$$

et

$$\begin{cases} -\nabla(\gamma \nabla \psi) = \frac{\partial F_2}{\partial v}(\cdot, v_\Omega) & \text{dans } \omega, \\ \psi = \phi & \text{sur } \Gamma, \\ \psi = 0 & \text{sur } \partial D \end{cases} \quad (6.21)$$

où ν est la normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω .

Démonstration. Soient $\varepsilon \in]0, 1[$, $\Omega \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ et ω l'ouvert tel que $\omega = D \setminus \bar{\Omega}$ et soit $\tilde{\Omega}$ un ouvert borné fortement convexe et de classe \mathcal{C}^2 contenant 0. Notons par $\Omega_\varepsilon = \Omega + \varepsilon\tilde{\Omega}$ et $\omega_\varepsilon = D \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon$ les ouverts de frontières respectives Γ_ε et $\partial D \cup \Gamma_\varepsilon$. Alors pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ on a $\Omega \subset \Omega + \varepsilon\tilde{\Omega}$. Par suite

$$\Omega_\varepsilon \cap \Omega = (\Omega + \varepsilon\tilde{\Omega}) \cap \Omega = \Omega \quad \text{et} \quad \omega_\varepsilon \cap \omega = D \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon \cap D \setminus \bar{\Omega} = \omega_\varepsilon \quad (6.22)$$

Notons maintenant par $\Delta\mathcal{J} = \mathcal{J}(\Omega_\varepsilon, \omega_\varepsilon) - \mathcal{J}(\Omega, \omega)$, on a

$$\Delta\mathcal{J} = \int_{\Omega_\varepsilon} F_1(x, u_{\Omega_\varepsilon}(x))dx + \int_{\omega_\varepsilon} F_2(x, v_{\Omega_\varepsilon}(x))dx - \int_{\Omega} F_1(x, u_{\Omega}(x))dx - \int_{\omega} F_2(x, v_{\Omega}(x))dx.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{J} &= \int_{\Omega_\varepsilon} F_1(x, u_{\Omega_\varepsilon}(x))dx - \int_{\Omega} F_1(x, u_{\Omega_\varepsilon}(x))dx + \int_{\Omega} (F_1(x, u_{\Omega_\varepsilon}(x)) - F_1(x, u_{\Omega}(x)))dx \\ &\quad + \int_{\omega_\varepsilon} F_2(x, v_{\Omega_\varepsilon}(x)) - F_2(x, v_{\Omega}(x))dx + \int_{\omega_\varepsilon} F_2(x, v_{\Omega}(x))dx - \int_{\omega} F_2(x, v_{\Omega}(x))dx, \end{aligned}$$

Par suite $\Delta\mathcal{J}$ s'écrit

$$\Delta\mathcal{J} = j_1(\varepsilon) + j_2(\varepsilon) + j_3(\varepsilon) + j_4(\varepsilon),$$

avec

$$\begin{aligned} j_1(\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon} F_1(\cdot, u_{\Omega_\varepsilon})dx - \int_{\Omega} F_1(\cdot, u_{\Omega_\varepsilon})dx, & j_2(\varepsilon) &= \int_{\Omega} (F_1(\cdot, u_{\Omega_\varepsilon}) - F_1(\cdot, u_{\Omega}))dx \\ j_3(\varepsilon) &= \int_{\omega_\varepsilon} (F_2(\cdot, v_{\Omega_\varepsilon}) - F_2(\cdot, v_{\Omega}))dx & \text{et} & \quad j_4(\varepsilon) = \int_{\omega_\varepsilon} F_2(\cdot, v_{\Omega})dx - \int_{\omega} F_2(\cdot, v_{\Omega})dx \end{aligned}$$

Commençons tout d'abord par calculer la dérivée de forme des fonctions j_1 et j_4 . En utilisant la Remarque 6.2 et en appliquant la Proposition 6.1 à la fonction $F_{1,\varepsilon} = F_1(\cdot, u_{\Omega_\varepsilon})$, on obtient

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (j_1(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Omega} F'_{1,0}(x)dx + \int_{\Gamma} F_{1,0}(x)P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x))d\sigma - \int_{\Omega} F'_{1,0}(x)dx. \quad (6.23)$$

où $F_{1,0} = F_1(\cdot, u_{\Omega})$. Alors

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (j_1(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Gamma} F_1(x, u_{\Omega}(x))P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x))d\sigma. \quad (6.24)$$

En utilisant les même arguments pour la fonction $F_{2,\varepsilon} = F_2(\cdot, v_{\Omega_\varepsilon})$, on obtient

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (j_4(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = - \int_{\Gamma} F_2(x, v_{\Omega}(x))P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x))d\sigma. \quad (6.25)$$

Par suite

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (j_1(\varepsilon) + j_4(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Gamma} (F_1(x, u_{\Omega}(x)) - F_2(x, v_{\Omega}(x)))P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x))d\sigma. \quad (6.26)$$

Maintenant afin d'expliciter la dérivée de forme des fonctionnelles j_2 et j_3 , en notant par $\delta u = u_{\Omega_\varepsilon} - u_\Omega$ et $\delta v = v_{\Omega_\varepsilon} - v_\Omega$ et en utilisant le fait que F_1 et F_2 satisfont l'hypothèse (\mathbf{H}_1) , d'après la remarque on peut écrire

$$j_2(\varepsilon) = \int_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial u}(\cdot, u_\Omega) \delta u dx + \int_{\Omega} o_1(\varepsilon), \quad \text{avec} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|o_1(\varepsilon)\|_{L^1(B)}}{\varepsilon} = 0.$$

$$j_3(\varepsilon) = \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial F_2}{\partial v}(\cdot, v_\Omega) \delta v dx + \int_{\omega_\varepsilon} o_2(\varepsilon), \quad \text{avec} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|o_2(\varepsilon)\|_{L^1(B)}}{\varepsilon} = 0.$$

Donc

$$j_2(\varepsilon) + j_3(\varepsilon) = i_1(\varepsilon) + i_2(\varepsilon) + o(\varepsilon), \quad \text{avec} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

où

$$i_1(\varepsilon) = \int_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial u}(\cdot, u_\Omega) \delta u dx \quad \text{et} \quad i_2(\varepsilon) = \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial F_2}{\partial v}(\cdot, v_\Omega) \delta v dx.$$

Introduisons maintenant ϕ et ψ les solutions uniques des problèmes suivants,

$$\begin{cases} -\nabla(\mu \nabla \phi) + q\phi = \frac{\partial F_1}{\partial u}(\cdot, u_\Omega) & \text{dans } \Omega, \\ \mu \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (6.27)$$

et

$$\begin{cases} -\nabla(\gamma \nabla \psi) = \frac{\partial F_2}{\partial v}(\cdot, v_\Omega) & \text{dans } \omega, \\ \psi = \phi & \text{sur } \Gamma \\ \psi = 0 & \text{sur } \partial D. \end{cases} \quad (6.28)$$

En utilisant le fait que $\omega_\varepsilon \subseteq \omega$, $\forall \varepsilon \in [0, 1]$ alors on a ϕ et ψ satisfont les équations suivantes

$$-\nabla(\mu \nabla \phi) + q\phi = \frac{\partial F_1}{\partial u}(\cdot, u_\Omega) \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad -\nabla(\gamma \nabla \psi) = \frac{\partial F_2}{\partial v}(\cdot, v_\Omega) \quad \text{dans } \omega_\varepsilon.$$

Ainsi i_1 et i_2 s'écrivent

$$i_1(\varepsilon) = \int_{\Omega} -\nabla(\mu \nabla \phi) \delta u dx + \int_{\Omega} q\phi \delta u dx, \quad i_2(\varepsilon) = \int_{\omega_\varepsilon} -\nabla(\gamma \nabla \psi) \delta v dx.$$

D'autre part, en utilisant les inclusions (6.22), on aura

$$\begin{cases} -\nabla(\gamma \nabla v_{\Omega_\varepsilon}) = k & \text{dans } \omega_\varepsilon \\ -\nabla(\gamma \nabla v_\Omega) = k & \text{dans } \omega_\varepsilon \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\nabla(\mu \nabla u_{\Omega_\varepsilon}) + qu_{\Omega_\varepsilon} = f & \text{dans } \Omega \\ -\nabla(\mu \nabla u_\Omega) + qu_\Omega = f & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Par suite, δv et δu sont les solutions respectives des équations

$$-\nabla(\gamma \nabla \delta v) = 0 \quad \text{dans } \omega_\varepsilon \quad (6.29)$$

et

$$-\nabla(\mu \nabla \delta u) + q\delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (6.30)$$

Ainsi en multipliant le premier terme de équation de (6.30) par une fonction test ϕ et en

appliquant la formule de Green à leurs intégrales sur Ω , on aura

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\phi \nabla(\mu \nabla \delta u) dx + \int_{\Omega} q \delta u \phi dx &= \int_{\Omega} -\phi \nabla \mu \nabla \delta u dx + \int_{\Omega} -\phi \mu \Delta \delta u dx + \int_{\Omega} q \delta u \phi dx \\ &= \int_{\Omega} -\phi \nabla \mu \nabla \delta u dx + \int_{\Omega} \nabla(\phi \mu) \nabla \delta u dx - \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial \delta u}{\partial \nu} \phi d\sigma + \int_{\Omega} q \delta u \phi dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\Omega} (-\phi \nabla(\mu \nabla \delta u) + \phi q \delta u) dx = \int_{\Omega} \mu \nabla \phi \nabla \delta u dx - \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial \delta u}{\partial \nu} \phi d\sigma + \int_{\Omega} q \delta u \phi dx. \quad (6.31)$$

Par suite

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \phi \nabla \delta u dx + \int_{\Omega} q \delta u \phi dx = \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial \delta u}{\partial \nu} \phi d\sigma. \quad (6.32)$$

Ainsi en multipliant le premier terme de équation de (6.29) par une fonction test ψ et en appliquant la formule de Green à leurs intégrales sur Ω , on aura

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{\varepsilon}} -\psi \nabla(\gamma \nabla \delta v) dx &= \int_{\omega_{\varepsilon}} -\psi \nabla \gamma \nabla \delta v dx - \int_{\omega_{\varepsilon}} \psi \gamma \Delta \delta v dx \\ &= \int_{\omega_{\varepsilon}} -\psi \nabla \gamma \nabla \delta v dx + \int_{\omega_{\varepsilon}} \nabla(\psi \gamma) \nabla \delta v dx - \int_{\Sigma_{\varepsilon}} \gamma \frac{\partial \delta v}{\partial \nu} \psi d\sigma. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\omega_{\varepsilon}} -\psi \nabla(\gamma \nabla \delta v) dx = \int_{\omega_{\varepsilon}} \gamma \nabla \psi \nabla \delta v dx - \int_{\Sigma_{\varepsilon}} \gamma \frac{\partial \delta v}{\partial \nu} \psi d\sigma. \quad (6.33)$$

D'où

$$\int_{\omega_{\varepsilon}} \gamma \nabla \psi \nabla \delta v dx = \int_{\Sigma_{\varepsilon}} \gamma \frac{\partial \delta v}{\partial \nu} \psi d\sigma. \quad (6.34)$$

Ainsi en utilisant les équations (6.32) et (6.34), alors les fonctions i_1 et i_2 s'écrivent

$$\begin{aligned} i_1(\varepsilon) &= \int_{\Omega} -\nabla(\mu \nabla \phi) \delta u dx + \int_{\Omega} q \delta u \phi dx \\ &= \int_{\Omega} -\delta u \nabla \mu \nabla \phi dx + \int_{\Omega} -\mu \delta u \Delta \phi dx + \int_{\Omega} q \delta u \phi dx \\ &= \int_{\Omega} -\delta u \nabla \mu \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \nabla(\mu \delta u) \nabla \phi dx + \int_{\Omega} q \delta u \phi dx - \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \delta u \\ &= \int_{\Omega} \mu \nabla \phi \nabla \delta u dx + \int_{\Omega} q \delta u \phi dx - \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \delta u d\sigma \\ &= \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial \delta u}{\partial \nu} \phi d\sigma - \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \delta u d\sigma \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
i_2(\varepsilon) &= \int_{\omega_\varepsilon} -\nabla(\gamma\nabla\psi)\delta v dx = \int_{\omega_\varepsilon} -\delta v\nabla\gamma\nabla\psi dx + \int_{\omega_\varepsilon} -\gamma\delta v\Delta\psi dx \\
&= \int_{\omega_\varepsilon} -\delta v\nabla\gamma\nabla\psi dx + \int_{\omega_\varepsilon} \nabla(\gamma\delta v)\nabla\psi dx - \int_{\Sigma_\varepsilon} \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\delta v d\sigma \\
&= \int_{\omega_\varepsilon} \gamma\nabla\psi\nabla\delta v dx - \int_{\Sigma_\varepsilon} \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\delta v d\sigma \\
&= \int_{\Sigma_\varepsilon} \gamma\frac{\partial\delta v}{\partial\nu}\psi d\sigma - \int_{\Sigma_\varepsilon} \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\delta v d\sigma.
\end{aligned}$$

Or comme $\Sigma_\varepsilon = \partial D \cup \Gamma_\varepsilon$ et $\partial D \cap \Gamma_\varepsilon = \emptyset$, on obtient

$$\begin{aligned}
i_2(\varepsilon) &= \int_{\Sigma_\varepsilon} (\gamma\frac{\partial\delta v}{\partial\nu}\psi - \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\delta v) d\sigma \\
&= \int_{\Sigma_\varepsilon} (\gamma\frac{\partial v_{\Omega_\varepsilon}}{\partial\nu}\psi - \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\nu}v_{\Omega_\varepsilon}) d\sigma - \int_{\Sigma_\varepsilon} (\gamma\frac{\partial v_\Omega}{\partial\nu}\psi - \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\nu}v_\Omega) d\sigma \\
&= \int_{\partial D} (\gamma\frac{\partial v_{\Omega_\varepsilon}}{\partial\nu}\psi - \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\nu}v_{\Omega_\varepsilon}) d\sigma - \int_{\Gamma_\varepsilon} (\gamma\frac{\partial v_{\Omega_\varepsilon}}{\partial\nu}\psi - \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\nu}v_{\Omega_\varepsilon}) d\sigma \\
&\quad - \int_{\Sigma_\varepsilon} (\gamma\frac{\partial v_\Omega}{\partial\nu}\psi - \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\nu}v_\Omega) d\sigma.
\end{aligned}$$

Ainsi, on aura

$$\begin{aligned}
i_1(\varepsilon) + i_2(\varepsilon) &= \int_\Gamma (\mu\frac{\partial u_{\Omega_\varepsilon}}{\partial\nu}\phi - \mu\frac{\partial\phi}{\partial\nu}u_{\Omega_\varepsilon}) d\sigma - \int_\Gamma (\mu\frac{\partial u_\Omega}{\partial\nu}\phi - \mu\frac{\partial\phi}{\partial\nu}u_\Omega) d\sigma \\
&\quad + \int_\Gamma (\gamma\frac{\partial v_{\Omega_\varepsilon}}{\partial\nu}\psi - \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\nu}v_{\Omega_\varepsilon}) d\sigma - \int_{\Gamma_\varepsilon} (\gamma\frac{\partial v_{\Omega_\varepsilon}}{\partial\nu}\psi - \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\nu}v_{\Omega_\varepsilon}) d\sigma \\
&\quad - \int_{\Sigma_\varepsilon} (\gamma\frac{\partial v_\Omega}{\partial\nu}\psi - \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\nu}v_\Omega) d\sigma.
\end{aligned}$$

Ensuite en utilisant le fait que ϕ et ψ satisfont les conditions aux limites

$$\mu\frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0, \quad \psi = \phi \text{ sur } \Gamma \quad \text{et} \quad \psi = 0 \text{ sur } \partial D,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
i_1(\varepsilon) + i_2(\varepsilon) &= \int_\Gamma \mu\frac{\partial u_{\Omega_\varepsilon}}{\partial\nu}\psi d\sigma - \int_{\Gamma_\varepsilon} \gamma\frac{\partial v_{\Omega_\varepsilon}}{\partial\nu}\psi d\sigma - \int_{\partial D} \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\nu}v_{\Omega_\varepsilon} d\sigma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\nu}v_{\Omega_\varepsilon} d\sigma \\
&\quad - \int_{\Sigma_\varepsilon} (\gamma\frac{\partial v_\Omega}{\partial\nu}\psi - \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\nu}v_\Omega) d\sigma - \int_\Gamma (\gamma\frac{\partial u_\Omega}{\partial\nu}\phi - \mu\frac{\partial\phi}{\partial\nu}u_\Omega) d\sigma.
\end{aligned}$$

En utilisant également le fait que u_{Ω_ε} et v_{Ω_ε} satisfont les conditions aux limites

$$\mu\frac{\partial u_{\Omega_\varepsilon}}{\partial\nu} = \gamma\frac{\partial v_{\Omega_\varepsilon}}{\partial\nu}, \quad v_{\Omega_\varepsilon} = g \text{ sur } \Gamma_\varepsilon \quad \text{et} \quad v_{\Omega_\varepsilon} = g \text{ sur } \partial D,$$

on aura

$$\begin{aligned} i_1(\varepsilon) + i_2(\varepsilon) &= \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial u_{\Omega_\varepsilon}}{\partial \nu} \psi d\sigma - \int_{\Gamma_\varepsilon} \mu \frac{\partial u_{\Omega_\varepsilon}}{\partial \nu} \psi d\sigma - \int_{\Sigma_\varepsilon} \gamma \frac{\partial \psi}{\partial \nu} g d\sigma \\ &\quad - \int_{\Sigma_\varepsilon} (\gamma \frac{\partial v_\Omega}{\partial \nu} \psi - \gamma \frac{\partial \psi}{\partial \nu} v_\Omega) d\sigma - \int_{\Gamma} (\mu \frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} \phi - \mu \frac{\partial \phi}{\partial \nu} u_\Omega) d\sigma, \end{aligned}$$

qui peut être décomposé comme suit

$$i_1(\varepsilon) + i_2(\varepsilon) = \ell_1(\varepsilon) + \ell_2(\varepsilon) + \ell_3(\varepsilon) + \ell_4$$

où

$$\begin{aligned} \ell_1(\varepsilon) &= \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial u_{\Omega_\varepsilon}}{\partial \nu} \psi d\sigma - \int_{\Gamma_\varepsilon} \mu \frac{\partial u_{\Omega_\varepsilon}}{\partial \nu} \psi d\sigma, & \ell_2(\varepsilon) &= - \int_{\Sigma_\varepsilon} \gamma \frac{\partial \psi}{\partial \nu} g d\sigma \\ \ell_3(\varepsilon) &= - \int_{\Sigma_\varepsilon} (\gamma \frac{\partial v_\Omega}{\partial \nu} \psi - \gamma \frac{\partial \psi}{\partial \nu} v_\Omega) d\sigma, & \text{et } \ell_4 &= - \int_{\Gamma} (\mu \frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} \phi - \mu \frac{\partial \phi}{\partial \nu} u_\Omega) d\sigma. \end{aligned}$$

Comme ℓ_4 ne dépend pas de ε , on a $\left. \frac{d}{d\varepsilon} \ell_4 \right|_{\varepsilon=0^+} = 0$. D'autre part, puisque u_{Ω_ε} est solution de l'équation

$$-\nabla \mu \nabla u_{\Omega_\varepsilon} + q u_{\Omega_\varepsilon} - f = \mu \Delta u_{\Omega_\varepsilon} \quad \text{sur } \Omega \subset \Omega_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1],$$

en appliquant la formule de Green à ℓ^1 , on aura

$$\begin{aligned} \ell_1(\varepsilon) &= \int_{\Omega} \Delta u_{\Omega_\varepsilon} \mu \psi dx + \int_{\Omega} \nabla u_{\Omega_\varepsilon} \nabla (\mu \psi) dx - \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u_{\Omega_\varepsilon} \mu \psi dx - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_{\Omega_\varepsilon} \nabla (\mu \psi) dx \\ &= \int_{\Omega} (q u_{\Omega_\varepsilon} \psi - f \psi + \mu \nabla u_{\Omega_\varepsilon} \nabla \psi) dx - \int_{\Omega_\varepsilon} (q u_{\Omega_\varepsilon} \psi - f \psi + \mu \nabla u_{\Omega_\varepsilon} \nabla \psi) dx \end{aligned}$$

Notons par B_ε la fonction définie par $B_\varepsilon = (q u_{\Omega_\varepsilon} \psi - f \psi + \mu \nabla u_{\Omega_\varepsilon} \nabla \psi)$. Il est alors facile de voir de la Remarque 6.2, qu'il existe $B'_0 \in L^1(B)$, tel que

$$\frac{1}{\varepsilon} [B_\varepsilon - B_0] - B'_0 \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^1(B), \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ensuite en appliquant la Proposition 6.1, on obtient l'expression suivante

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (\ell_1(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = - \int_{\Gamma} B_0 P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) d\sigma, \tag{6.35}$$

et comme $\psi = \phi$ sur Γ , on aura

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (\ell_1(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Gamma} (f \psi - q u_\Omega \psi - \mu \nabla u_\Omega \nabla \psi) P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) d\sigma. \tag{6.36}$$

Explicitons maintenant la formule de la dérivée de ℓ_2 . Comme ψ est solution de l'équation

$$-\gamma \Delta \psi = \frac{\partial F_2}{\partial v}(\cdot, v_\Omega) + \nabla \gamma \nabla \psi \quad \text{dans } \omega_\varepsilon \subset \omega, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1]$$

alors

$$\begin{aligned}\ell_2(\varepsilon) &= - \int_{\Sigma_\varepsilon} \gamma \frac{\partial \psi}{\partial \nu} g d\sigma = \int_{\omega_\varepsilon} (-\Delta \psi \gamma g - \nabla \psi \nabla(\gamma g)) dx \\ &= \int_{\omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial F_2}{\partial v}(\cdot, v_\Omega) g + g \nabla \psi \nabla \gamma - \nabla \psi \nabla(\gamma g) \right) dx \\ &= \int_{\omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial F_2}{\partial v}(\cdot, v_\Omega) g - \gamma \nabla \psi \nabla g \right) dx.\end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant, encore une fois, la proposition 6.1, on obtient la formule suivante

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (\ell_2(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Gamma} \left(-\frac{\partial F_2}{\partial v}(\cdot, v_\Omega) g + \gamma \nabla \psi \nabla g \right) P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) d\sigma. \quad (6.37)$$

D'autre part en appliquant la formule de Green, alors on aura

$$\ell_3(\varepsilon) = - \int_{\Sigma_\varepsilon} \left(\gamma \frac{\partial v_\Omega}{\partial \nu} \psi - \gamma \frac{\partial \psi}{\partial \nu} v_\Omega \right) d\sigma = - \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla(\gamma \nabla v_\Omega) \psi - \nabla(\gamma \nabla \psi) v_\Omega) dx.$$

Or comme ψ et v_Ω sont les solutions respectives des équations

$$-\nabla(\gamma \nabla \psi) = \frac{\partial F_2}{\partial v}(\cdot, v_\Omega) \text{ dans } \omega_\varepsilon \quad \text{et} \quad -\nabla(\gamma \nabla v_\Omega) = k \text{ dans } \omega_\varepsilon,$$

alors

$$\ell_3(\varepsilon) = \int_{\omega_\varepsilon} (k\psi - \frac{\partial F_2}{\partial v}(\cdot, v_\Omega) v_\Omega) dx.$$

Ensuite, en appliquant la proposition 6.1, on obtient la formule suivante

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (\ell_3(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Gamma} \left(-k\psi + \frac{\partial F_2}{\partial v}(\cdot, v_\Omega) v_\Omega \right) P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) d\sigma, \quad (6.38)$$

et comme $v_\Omega = g$ sur Γ , on aura

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (\ell_3(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Gamma} \left(-k\psi + \frac{\partial F_2}{\partial v}(\cdot, v_\Omega) g \right) P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) d\sigma. \quad (6.39)$$

Par conséquent, d'après les formules (6.36), (6.37) et (6.38) on aura

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (i_1(\varepsilon) + i_2(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0^+} = \int_{\Gamma} (f\psi - \psi(qu_\Omega + k) + \nabla \psi(\gamma \nabla g - \mu \nabla u_\Omega)) P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) d\sigma. \quad (6.40)$$

Ainsi en utilisant le fait que $(j_1 + j_2 + j_3 + j_4)(0) = 0$, on conclue que

$$\Delta \mathcal{J} = j_1(\varepsilon) + j_2(\varepsilon) + j_3(\varepsilon) + j_4(\varepsilon) = \varepsilon \int_{\Gamma} \mathcal{G}(x) P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) d\sigma + \eta(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0,$$

où

$$\mathcal{G} = F_1(x, u_\Omega(x)) - F_2(x, v_\Omega(x)) + f\psi - \psi(qu_\Omega + k) + \nabla \psi(\gamma \nabla g - \mu \nabla u_\Omega).$$

Ce qui achève la preuve du Théorème. ■

Remarque 6.3 Notons que pour des raisons de simplicité, sans faire aucune restriction au résultat du Théorème 6.2, nous avons supposé que $0 \in \Omega$, ce qui nous a permis de simplifier le calcul de la dérivée de forme en utilisant les inclusions $\Omega \subset \Omega_\varepsilon = \Omega + \varepsilon\tilde{\Omega}$ et $\omega_\varepsilon = D \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon \subset \omega$. Ainsi, on obtient la limite suivante

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}(\Omega_\varepsilon, \omega_\varepsilon) - \mathcal{J}(\Omega, \omega)}{\varepsilon} = \int_{\Gamma} \mathcal{G}(x) P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) d\sigma(x). \quad (6.41)$$

Puis, en utilisant la déformation convexe $\Omega_\varepsilon = (1 - \varepsilon)\Omega + \varepsilon\tilde{\Omega}$, d'après [8] et en se basant sur le Théorème 6.2, on obtient la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}(\Omega_\varepsilon, \omega_\varepsilon) - \mathcal{J}(\Omega, \omega)}{\varepsilon} = \int_{\Gamma} \mathcal{G}(x) (P_{\tilde{\Omega}} - P_{\Omega})(\nu(x)) d\sigma(x). \quad (6.42)$$

Ainsi, selon le résultat dont on aura besoin, on peut utiliser l'une des deux déformations et par conséquent la formule de dérivée de forme y associée. En effet, pour notre processus d'optimisation numérique nous utilisons la formule (6.42) basée sur la déformation convexe. Par ailleurs, si nous utilisons la formule (6.41) associée à la déformation de Minkowski, l'algorithme d'optimisation ne converge vers l'optimum que si le domaine initial Ω_0 est un sous-ensemble du domaine optimal (puisque $\Omega \subseteq \Omega_\varepsilon$ et $\omega_\varepsilon \subseteq \omega$, pour tout ε).

6.3 Processus de résolution numérique du problème d'optimisation de forme

Dans ce paragraphe, nous proposons une approche numérique de résolution du problème d'optimisation de forme (6.1)-(6.2)-(6.3) en se basant sur la formule de dérivation de forme de la fonctionnelle \mathcal{J} explicité via les fonctions support. Nous suggérons ainsi un algorithme de résolution du type gradient combiné à une discrétisation des problèmes d'états et d'états adjoints par la méthode des éléments frontières et la réciprocity duale (DRBEM) [75, 22]. Ceci afin d'éviter le remaillage du domaine, à chaque itération du processus d'optimisation, nécessaire dans le cas d'une discrétisation par la méthode des éléments finis.

Algorithme de résolution

En se basant sur la formule de dérivée de forme de la fonctionnelle coût \mathcal{J} explicitée dans le Théorème 6.2, le processus d'identification de la forme optimale s'effectue en utilisant l'algorithme du type gradient de descente proposé dans [10]. Cet algorithme est résumée comme suit.

Algorithme

(1) Initialisation.

- Choisir un domaine initiale $\Omega_0 \in \mathcal{U}_{ad}$, tel que $\omega_0 = D \setminus \overline{\Omega}_0$.

- Se donner un coefficient $\rho \in]0, 1[$ et une précision Eps.

(2) Partie principale, pour l'itération $k=0, \dots$

- (i) Déterminer u_k et v_k les solutions respectives des problèmes d'états (6.15) et (6.16) sur $\omega_k = D \setminus \bar{\Omega}_k$.
- (ii) Déterminer ϕ_k et ψ_k les solutions respectives des problèmes d'états adjoints (6.20) et (6.21) sur $\omega_k = D \setminus \bar{\Omega}_k$.
- (iii) ◦ Extraire les données (u_k, v_k) , (ϕ_k, ψ_k) , $(\nabla u_k, \nabla v_k)$ et $(\nabla \phi_k, \nabla \psi_k)$ sur $\Gamma_k = \partial\Omega_k$.
◦ Calculer \mathcal{G}_k sur Γ_k par la formule

$$\mathcal{G}_k = F_1(\cdot, u_k) - F_2(\cdot, v_k) + f\psi_k - \psi_k(qu_k + k) + \nabla\psi_k(\gamma\nabla g - \mu\nabla u_k).$$

- (iv) Calculer $P_k = P_{\Omega_k}$.

- (v) Calculer \hat{P}_k la solution du problème suivant

$$\arg \min_{\varphi \in \mathcal{P}} j_k(\varphi) := \int_{\Gamma_k} \mathcal{G}_k(x)(\varphi - P_k)(\nu(x)) d\sigma(x). \quad (6.43)$$

où

$$\mathcal{P} = \{\Phi \in C(\mathbb{R}^2) / \Phi \text{ est convexe et homogène de degré 1 et } P_{B(0,r)} \leq \Phi \leq P_D\}.$$

- (vi) ◦ Déterminer le domaine

$$\Omega_{k+1} = (1 - \rho)\Omega_k + \rho\tilde{\Omega}_k,$$

où $\tilde{\Omega}_k$ associé à \hat{P}_k par la relation

$$\bar{\tilde{\Omega}}_k = \partial\hat{P}_k(0) = \{l \in \mathbb{R}^2 / \hat{P}_k(x) \geq \langle l, x \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^2\}.$$

(3) Critère d'arrêt.

- Si $\|j_k(\hat{P}_k)\| \leq \text{Eps}$, **Fin**.
- Sinon, **aller à l'étape (2)**.

Remarque 6.4 Notons que la dérivée de forme de fonctionnelles de forme $\Omega \rightarrow J(\Omega)$ suivant la direction d'un champ de vecteurs ϑ s'écrit sous la forme générale :

$$J'(\Omega)(\vartheta) = \int_{\partial\Omega} g\langle\vartheta(x), \nu(x)\rangle d\sigma(x) =: \langle g|_{\Gamma}, \langle\vartheta(x), \nu(x)\rangle \rangle_{L^2(\partial\Omega)}, \quad (6.44)$$

où la fonction $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est le gradient de forme de J par rapport au produit scalaire $L^2(\partial\Omega)$. Ce résultat est appelé le théorème de structure de Hadamard pour les dérivées de forme [85]. Maintenant, dans le cas où la fonctionnelle est définie sur une famille de

domaines convexes, ce théorème de structure s'écrit (voir [11, 10, 9]) :

$$J'(\Omega)(\tilde{\Omega}) := \int_{\partial\Omega} f(x) (P_{\tilde{\Omega}}(\nu(x)) - P_{\Omega}(\nu(x))) d\sigma(x) = \langle f, (P_{\tilde{\Omega}} - P_{\Omega})(\nu) \rangle_{L^2(\partial\Omega)}, \quad (6.45)$$

avec $J'(\Omega)(\tilde{\Omega})$ ne dépend que de la composante normale de $P_{\tilde{\Omega}}$ sur la frontière $\partial\Omega$.

On remarque aussi que l'expression (6.45) nous a permis de déterminer une direction descente, comme il a été décrit dans l'algorithme ci-dessus, telle que la suite des domaines $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est construite de telle manière que la suite $(\mathcal{J}(\Omega_k))_{k \in \mathbb{N}}$ soit décroissante. En effet, soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors pour $\rho \in]0, 1[$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\Omega_{k+1}) - \mathcal{J}(\Omega_k) &= \mathcal{J}((1 - \rho)\Omega_k + \rho\partial\hat{P}_k(0)) - \mathcal{J}(\Omega_k) \\ &= \rho \left(\int_{\partial\Omega_k} \mathcal{G}_k(P_{\partial\hat{P}_k(0)} - P_{\Omega_k}) \circ \nu_k d\sigma \right) + O(\rho) \\ &= \rho \left(\int_{\partial\Omega_k} \mathcal{G}_k(\hat{P}_k - P_{\Omega_k}) \circ \nu_k d\sigma \right) + O(\rho) \\ &= \rho (j_k(\hat{P}_k) - j_k(P_{\Omega_k})) + O(\rho) \end{aligned}$$

Or puisque $\hat{P}_k = P_{\partial\hat{P}_k(0)}$ est solution du problème $\arg \min_{p \in \mathcal{E}} j_k(p)$, alors

$$j_k(\hat{P}_k) = \int_{\partial\Omega_k} \mathcal{G}_k \hat{P}_k \circ \nu_k d\sigma \leq j_k(P_{\Omega_k}),$$

ce qui garantit la décroissance de la fonctionnelle coût \mathcal{J} . Par conséquent, \hat{P}_k définit bien une direction de descente pour \mathcal{J} .

Approximation des problèmes d'états

La discrétisation des problèmes d'états et d'états adjoints, se fait en utilisant la méthode des éléments frontières et la réciprocity duale (DRBEM). Cette méthode est une extension de la méthode des éléments frontières utilisée pour la résolution numérique des problèmes aux limites non homogènes ou non linéaires. Elle a été introduite dans un premier lieu par Nardini et Brebbia [22, 75] et a été ensuite largement utilisée pour la résolution numérique de différents problèmes aux limites. Dans cette section nous présentons brièvement cette méthode de discrétisation et nous renvoyons le lecteur à [22, 75], pour plus de détails.

Dans la suite comme les problèmes d'états et d'états adjoints considérés sont régis par des problèmes aux limites avec des conditions aux limites du type Dirichlet ou Neumann non homogènes, pour des raisons de simplicité, nous décrivons la méthode DRBEM pour un problème modèle du type :

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Lambda, \\ u = \bar{u} & \text{sur } \Sigma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_2} = \bar{q} & \text{sur } \Sigma_2, \end{cases} \quad (6.46)$$

où Σ_1 et Σ_2 sont deux parties disjointes de $\Sigma = \partial\Lambda$, \bar{u} et \bar{q} sont des fonctions données respectivement sur le bord Σ_1 et Σ_2 et f une fonction donnée sur Ω qui peut éventuellement dépendre de u (voir [22]).

Alors, lorsqu'il s'agit de traiter les problèmes (6.15) et (6.21), on prend $\Lambda = \omega = D \setminus \Omega$, $\Sigma_1 = \partial D \cup \partial\Omega$ et $\Sigma_2 = \emptyset$. Tandis que lorsqu'il s'agit de traiter les problèmes (6.16) et (6.20), on prend $\Lambda = \Omega$, $\Sigma_1 = \emptyset$ et $\Sigma_2 = \partial\Omega$.

La méthode DRBEM propose ainsi l'approximation de f de la manière suivante :

$$f \simeq \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j h_j. \quad (6.47)$$

où α_j sont des coefficients inconnus, h_j sont des fonctions d'approximations appropriées (voir [22] pour des exemples de choix de ces fonctions), N est le nombre de noeuds de la frontière et L est un nombre de noeuds intérieurs au domaine. Elle consiste ensuite à utiliser une série de solutions particulières \hat{u}_j associées aux fonctions h_j obtenues par les équations

$$\Delta \hat{u}_j = h_j, \text{ for } j = 1, \dots, N + L. \quad (6.48)$$

Ainsi en substituant l'équation (6.48) dans (6.47), on obtient l'approximation suivante

$$f \simeq \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \Delta \hat{u}_j. \quad (6.49)$$

Alors le problème (6.46) est approché par :

$$\begin{cases} \Delta(u - \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \hat{u}_j) = 0 & \text{dans } \Lambda, \\ u - \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \hat{u}_j = \bar{u} - \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \hat{u}_j & \text{sur } \Sigma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_2} - \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \nu_2} = \bar{q} - \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \nu_2} & \text{sur } \Sigma_2. \end{cases} \quad (6.50)$$

Ainsi, on peut appliquer la procédure standard de la méthode des éléments frontières [21] au problème (6.50). Plus précisément (6.50) est reformulé en utilisant l'équation intégrale suivante :

$$\lambda(\xi)u(\xi) - \int_{\Sigma} \bar{u}(y)\mathbf{q}(y;\xi)d\sigma_y + \int_{\Sigma} \mathbf{u}(y;\xi)\bar{q}(y)d\sigma_y = \quad (6.51)$$

$$\sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(\lambda(\xi)\hat{u}_j(\xi) - \int_{\Sigma} \hat{u}_j(y)\mathbf{q}(y;\xi)d\sigma_y + \int_{\Sigma} \mathbf{u}(y;\xi)\hat{q}_j(y)d\sigma_y \right). \quad (6.52)$$

où $\mathbf{u}(y, \xi) = -(1/2\pi) \ln(\|y - \xi\|)$ est la solution fondamentale de l'équation de Laplace, $\mathbf{q} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu}$ est la dérivée normale de $\mathbf{u}(y; \xi)$, $\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \nu}$ est la dérivée normale de \hat{u}_j , $q = \frac{\partial u}{\partial \nu}$

est la dérivée normale de u et

$$\lambda(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in \Lambda \\ 1/2, & \xi \in \Sigma \\ 0, & \xi \notin \Sigma \cup \Lambda. \end{cases}$$

On subdivise la frontière Σ en N éléments frontières $(\Gamma_k)_{k=1,\dots,N}$, tel que $\Sigma = \bigcup_{k=1}^N \Gamma_k$, et on suppose que les valeurs de u et q sont constantes sur chaque élément frontière Γ_k et valent respectivement les valeurs u_k et q_k sur chaque élément Γ_k . Notons par $(\xi_k)_{k=1,\dots,n}$ les points milieux de chaque élément Γ_k .

Ainsi en particulier dans (6.51), pour $\xi = \xi_k$, $k = 1, \dots, n$ on obtient

$$\frac{u_k}{2} - \sum_{\ell=1}^N u_\ell \int_{\Gamma_\ell} \mathbf{q}(\cdot; \xi_k) + \sum_{\ell=1}^N q_\ell \int_{\Gamma_\ell} \mathbf{u}(\cdot; \xi_k) = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(\hat{u}_{j,k} - \sum_{\ell=1}^N \hat{u}_{j,\ell} \int_{\Gamma_\ell} \mathbf{q}(\cdot; \xi_k) + \sum_{\ell=1}^N \hat{q}_{j,\ell} \int_{\Gamma_\ell} \mathbf{u}(\cdot; \xi_k) \right).$$

Alors on peut approcher l'équation intégrale (6.51) sous la forme suivante :

$$\sum_{\ell=1}^N u_\ell H_{k,\ell} - \sum_{\ell=1}^N q_\ell G_{k,\ell} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(\sum_{\ell=1}^N \hat{u}_{j,\ell} H_{k,\ell} - \sum_{\ell=1}^N \hat{q}_{j,\ell} G_{k,\ell} \right), \quad \text{pour } k = 1, \dots, N. \quad (6.53)$$

où $H_{k,\ell}$ et $G_{k,\ell}$ sont les coefficients respectifs des matrices H et G qui sont donnés par

$$H_{k,\ell} = (1 - \delta_{k,\ell}) \int_{\Gamma_\ell} \mathbf{q}(\cdot; \xi_k) + \delta_{k,\ell} \left(\frac{1}{2} - \int_{\Gamma_\ell} \mathbf{q}(\cdot; \xi_k) \right), \quad (6.54)$$

$$G_{k,\ell} = \int_{\Gamma_\ell} \mathbf{u}(\cdot; \xi_k). \quad (6.55)$$

où $\delta_{k,l}$ est le symbole Kronecker.

Ainsi, le système (6.53) peut être réorganisé comme un système d'ordre N sous forme :

$$A x = b \quad (6.56)$$

où

$$A_{jk} = \begin{cases} -G_{jk} & \text{pour la condition aux limites de Dirichlet} \\ H_{jk} & \text{pour la condition aux limites de Neumann} \end{cases}, \quad \text{pour } k = 1, \dots, N. \quad (6.57)$$

$$x^k = \begin{cases} q_k & \text{pour la condition aux limites de Dirichlet} \\ u_k & \text{pour la condition aux limites de Neumann} \end{cases}, \quad \text{pour } k = 1, \dots, N. \quad (6.58)$$

Après avoir obtenu l'équation (6.56) en utilisant des techniques standard, la valeur de la solution à n'importe quel noeud interne peut être calculé à partir de l'équation (6.51). En

effet, dans le cas d'un noeud interne ξ , on a $\lambda(\xi) = 1$ et l'équation (6.51) devient

$$u(\xi) = \sum_{\ell=1}^N u_\ell \int_{\Gamma_\ell} \mathbf{q}(\cdot; \xi) - \sum_{\ell=1}^N q_\ell \int_{\Gamma_\ell} \mathbf{u}(\cdot; \xi) + \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(\hat{u}_j(\xi) - \sum_{\ell=1}^N \hat{u}_{j,\ell} \int_{\Gamma_\ell} \mathbf{q}(\cdot; \xi) + \sum_{\ell=1}^N \hat{q}_{j,\ell} \int_{\Gamma_\ell} \mathbf{u}(\cdot; \xi) \right).$$

Discrétisation du problème d'optimisation de forme

Afin de proposer une discrétisation du gradient de la fonctionnelle coût, Notons par M le nombre des éléments frontières appartenant à la frontière libre Γ , tel que $M < N$ et $N - M$ est le nombre des éléments frontières appartenant à la frontière extérieure fixé ∂D . Soit $(C_k)_{k=1}^M$ une partition de Γ , où $C_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)})$ et soit $\xi = (\xi_k)_{k=1}^M$ une partition de Γ , tel que $\xi_k = (\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)})$ est le point milieu de l'élément frontière $[C_i, C_{i+1}]$.

On approche le gradient de la fonctionnelle coût de la manière suivante

$$j(P) = \sum_{k=1}^M \ell_k \mathcal{G}_k (P_k - P_\Omega(\nu(\xi_k)))$$

où $\ell_k = \|y_{k+1} - y_k\|$; $P = (P_k = P(\nu(\xi_k)))_{k=1}^M$; $\nu(\xi_k)$ est la normale extérieure à l'élément frontière $[C_k, C_{k+1}]$ et $B_k = B(\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)})$, tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_k &= F_1(\xi_k, u_k) - F_2(\xi_k, u_k) + f(\xi_k)\psi_k - \psi_k(u_k q(\xi_k) + k(\xi_k)) \\ &+ \nabla\psi(\xi_k)(\gamma(\xi_k)\nabla g(\xi_k) - \gamma(\xi_k)\nabla u_k) \end{aligned}$$

où u^h et v^h sont les solutions approchées respectives des problèmes d'états, telles que $(u^h(\xi_k) = u_k)_{k=1}^M$ et $(v^h(\xi_k) = v_k)_{k=1}^M$ sont les solutions d'un système linéaire du type (6.56) tandis que ϕ^h et ψ^h sont les solutions approchées respectives des problèmes d'états adjoints, telles que $(\phi^h(\xi_k) = \phi_k)_{k=1}^M$ et $(\psi^h(\xi_k) = \psi_k)_{k=1}^M$ sont les solutions d'un système linéaire du type (6.56).

Puis on approche l'espace des fonctions admissibles \mathcal{P} par :

$$\mathcal{P} = \left\{ P = (P_1, \dots, P_M) \in \mathbb{R}^M / P \text{ satisfont les équations (6.59) et (6.60)} \right\}$$

où

$$r = P_{B(0,r)}(\nu(\xi_k)) \leq P_k \leq P_D(\nu(\xi_k)) \quad \text{pour } k = 1, \dots, M. \quad (6.59)$$

et

$$\begin{cases} P_1 \leq (1 - \lambda_1) P_M + \lambda_1 P_M, \\ P_k \leq (1 - \lambda_k) P_{k-1} + \lambda_k P_{k+1}, \quad \text{pour } k = 2, \dots, M - 1 \\ P_N \leq (1 - \lambda_M) P_{M-1} + \lambda_M P_1 \end{cases} \quad (6.60)$$

avec

$$\lambda_1 = \frac{\|\nu(\xi_1) - \nu(\xi_M)\|}{\|\nu(\xi_2) - \nu(\xi_M)\|}, \quad \lambda_i = \frac{\|\nu(\xi_i) - \nu(\xi_{i-1})\|}{\|\nu(\xi_{i+1}) - \nu(\xi_{i-1})\|}$$

$$\text{pour } i = 2, \dots, M - 1; \quad \lambda_M = \frac{\|\nu(\xi_M) - \nu(\xi_{M-1})\|}{\|\nu(\xi_1) - \nu(\xi_{M-1})\|}.$$

Le domaine discret associé à

$$\bar{\Omega} = \partial\bar{P}(0) = \{l = (l^{(1)}, l^{(2)}) \in \mathbb{R}^2 / \hat{P}(x) \geq \langle l, x \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^2\},$$

est considéré comme solution de l'équation

$$\nu^{(1)}(\xi_k) l_k^{(2)} - \nu^{(2)}(\xi_k) l_k^{(1)} = \nu^{(1)}(\xi_k) \xi_k^{(2)} - \nu^{(2)}(\xi_k) \xi_k^{(1)} \quad \text{for } k = 1, \dots, M. \quad (6.61)$$

D'autre part, on a

$$\nu^{(1)}(\xi_k) l_k^{(1)} + \nu^{(2)}(\xi_k) l_k^{(2)} = \hat{P}_k \quad \text{for } k = 1, \dots, M \quad (6.62)$$

6.4 Résultats numériques

Dans le but de montrer l'efficacité de l'approche proposée, nous présentons quelques résultats numériques concernant quelques tests dont on cherche à estimer et identifier la forme optimale, pour différentes expressions de la fonctionnelle coût \mathcal{J} et différentes solutions exactes. Ainsi, étant donné des valeurs exactes des solutions respectives de (6.16) et (6.15) et des frontières exactes Γ et Σ , on cherche à construire la frontière libre en utilisant l'algorithme de résolution numérique proposé. Pour cela, nous présentons trois exemples numériques et pour différentes expressions des fonctionnelles coût et différentes expressions des solutions exactes.

Le premier exemple

Pour cet exemple, nous considérons le domaine fixe défini par

$$\partial D = \{(1.2) \cos(t), (1.6) \sin(t) / t \in [0, 2\pi]\}.$$

Étant donné les fonctions $\varphi_1 = x$, $\varphi_2 = y$, $F_1(\cdot, u) = (u - \varphi_1)^2$ et $F_2(\cdot, v) = (v - \varphi_2)^2$ dont la fonctionnelle coût associée est

$$\mathcal{J}(\Omega, \omega = D \setminus \bar{\Omega}) = \int_{\Omega} (u - \varphi_1)^2 + \int_{\omega} (v - \varphi_2)^2 dx.$$

On cherche à construire la frontière exacte

$$\partial\Omega_{ex} = \{(0.4) \cos(t), (0.4) \sin(t) / t \in [0, 2\pi]\}$$

et la solution exacte, $v_{ex}(x, y) = x^2 - y^2$, du problème d'état (6.15), associée aux données $\gamma = 1$, $k = 0$ et $g = x^2 - y^2$ et la solution exacte u_{ex} du problème d'état (6.16), associée aux données $\mu = 1$, $q = 1$ et $f = -2$.

Ainsi les nombres d'éléments frontières utilisés pour la discrétisation de la frontière libre et de la frontière fixe sont pris respectivement $N = 100$ et $M = 104$. Le coefficient

de déformation est choisi $\rho = 0,008$ et la précision désirée est $EP\!S\!D = 10^{-2}$. Le domaine initial Ω est l'ellipse de centre $(0, 0)$, de longueur 1 suivant l'axe $\vec{\sigma}_x$ et de longueur 2 suivant l'axe $\vec{\sigma}_y$.

Ainsi en utilisant l'algorithme proposé, la frontière optimale est atteinte au bout de 202 itérations. Dans la figure 6.2, nous présentons les domaines fixe, initial, optimal, exact et successifs pour différents nombres d'itérations. Ceci montre en fait la convergence de la solution optimale vers la solution exacte. Les formes intermédiaires obtenues pour différents nombres d'itérations sont présentées dans la figure 6.3. La variation du gradient de la fonctionnelle coût en fonction du nombre d'itérations est présentée dans la figure 6.4. Les résultats numériques ainsi obtenus présentent une bonne approximation de la solution optimale.

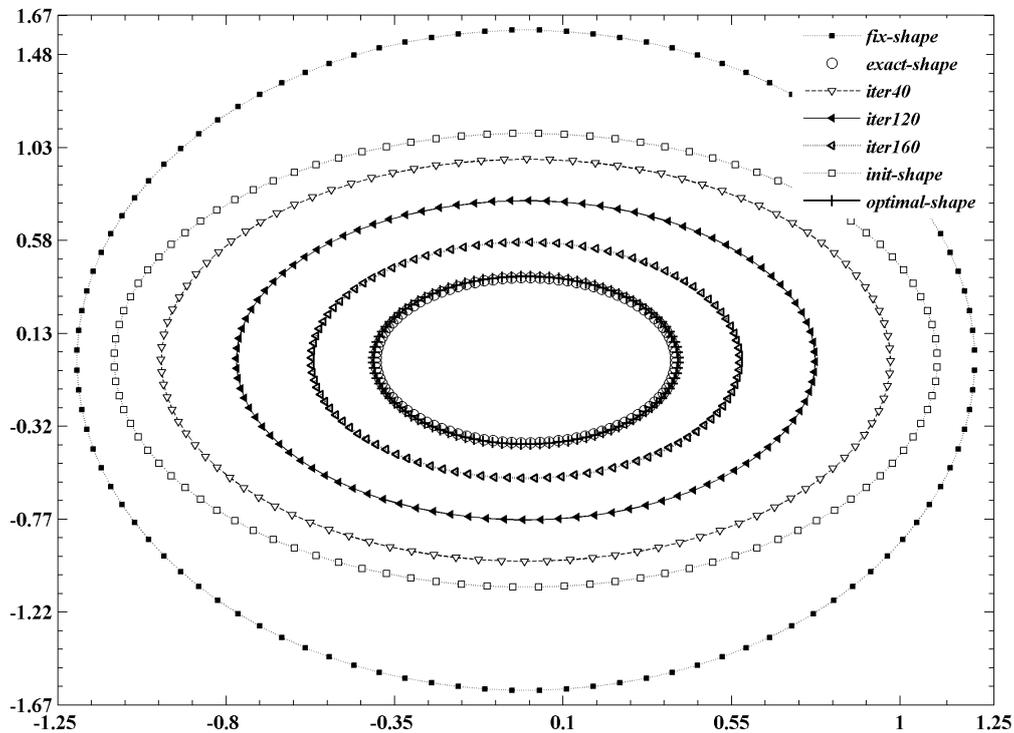


FIGURE 6.2 – Les formes successives pour différents nombres d'itérations.

Le deuxième exemple

Dans cet exemple, nous considérons, cette fois-ci, le domaine fixe défini par

$$\partial D = \{((1.4) \cos(t), (1.9) \sin(t)) / t \in [0, 2\pi]\}.$$

Étant donné les fonctions $F_2(\cdot, v) = 0$, $\varphi_1 = 1$ et $F_1(\cdot, u) = (u - \varphi_1)^2$ dont la fonctionnelle coût associée est

$$\mathcal{J}(\Omega, \omega) = \int_{\Omega} (u(x) - 1)^2 dx.$$

On cherche à déterminer la frontière exacte

$$\partial\Omega_{ex} = \{((0.4) \cos(t), (0.5) \sin(t)) / t \in [0, 2\pi]\},$$

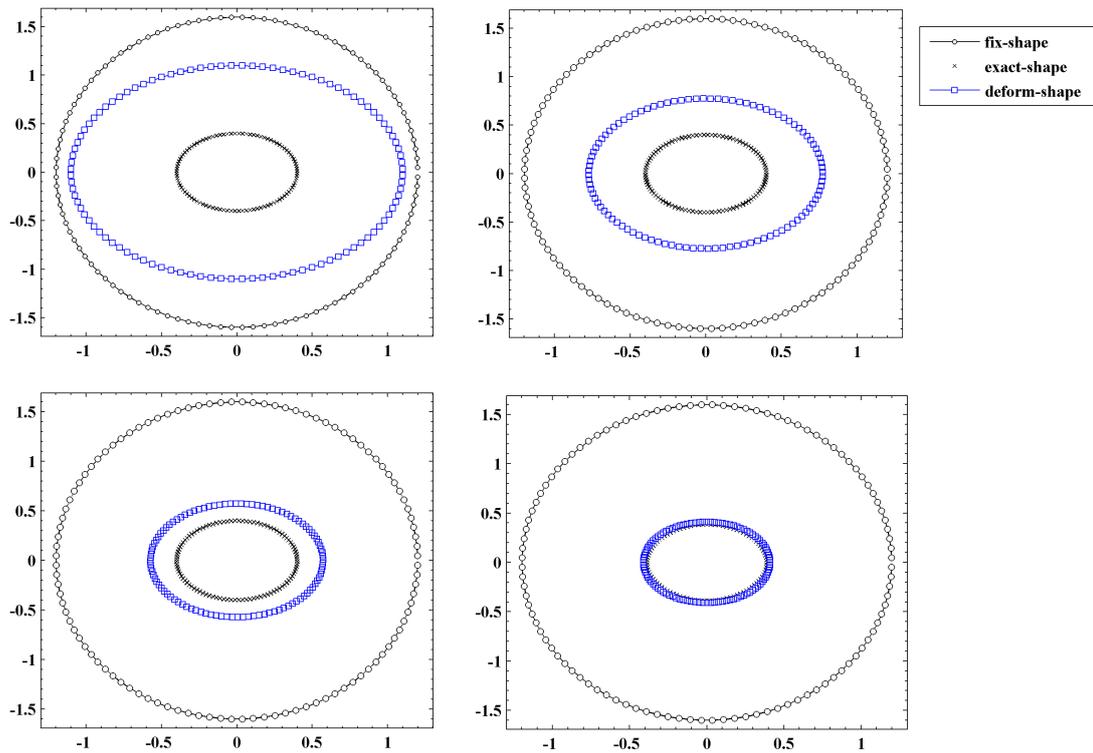


FIGURE 6.3 – Formes intermédiaires obtenues pour différents nombres d'itérations (de gauche à droite, de haut en bas) itér = 0 ; 40 ; 120 et 180.

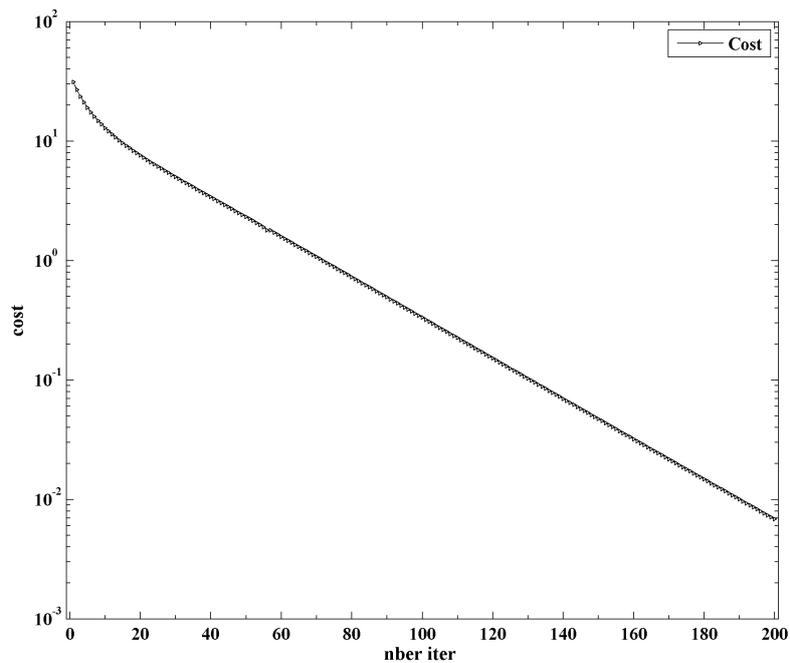


FIGURE 6.4 – La variation du gradient en fonction du nombres d'itérations.

et la solution exacte $v_{ex}(x, y) = x^2 + y^2 + \cos(x) + \sin(y)$, du problème d'état (6.15), associée aux données $\gamma = 1$, $k = 4 - \cos(x) - \sin(y)$ et $g = v_{ex}$ et la solution exacte u_{ex} du problème d'état (6.16), associée aux données $\mu = 1$, $q = 2$ et $f = 0$.

Ainsi les nombres d'éléments frontières utilisés pour la discrétisation de la frontière libre et de la frontière fixe sont pris respectivement $N = 100$ et $M = 104$. Le coefficient de déformation et la précision sont pris respectivement $\rho = 0,001$ et $EPSD = 10^{-2}$. Le domaine initial Ω est le rectangle $] -0.6, 0.6[\times] -0.8, 0.8[$.

En utilisant le processus d'optimisation, la frontière optimale est atteinte au bout de 210 itérations. Les formes intermédiaires obtenues pour différents nombres d'itérations sont présentées dans la figure 6.5. La variation du gradient de la fonctionnelle de coût en fonction du nombre d'itérations est présentée dans la figure 6.6. Les domaines fixe, initial, optimal, exact et successifs pour différents nombres d'itérations sont présentés dans la figure 6.7, ce qui montre la convergence des formes successives vers le domaine exacte.

Dans le dernier test numérique, nous présentons la solution exacte u_{ex} et la solution approchée u_k à l'itération k notée par u_k , dans un ensemble de M points intérieurs, noté par $\gamma_* = \{(x_i, y_i) \in D \setminus \bar{\Omega}_k, \text{ pour } i = 1, \dots, M\}$. La convergence des solutions approchées vers la solution exacte est illustrée dans la figure 6.8.

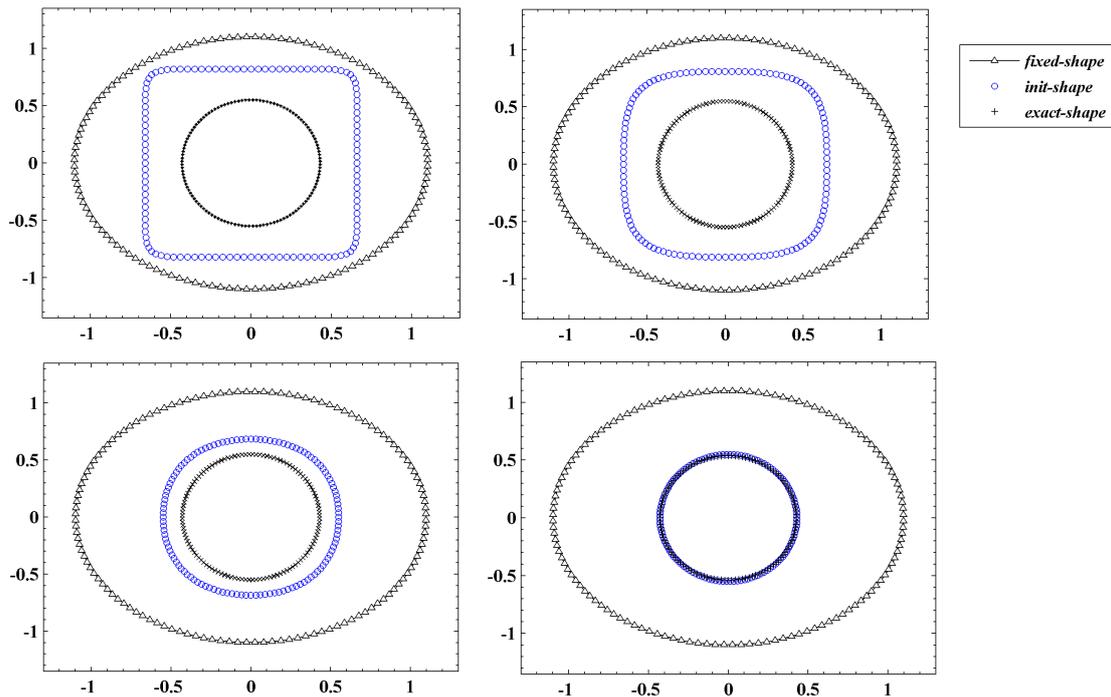


FIGURE 6.5 – Formes intermédiaires obtenues pour différents nombres d'itérations (de gauche à droite, de haut en bas) itér = 0; 70; 150 et 180.

Le troisième exemple

Dans le dernier exemple, étant donné le domaine fixe suivant

$$\partial D = \{((1.4) \cos(t), (1.9) \sin(t)) / t \in [0, 2\pi]\}$$

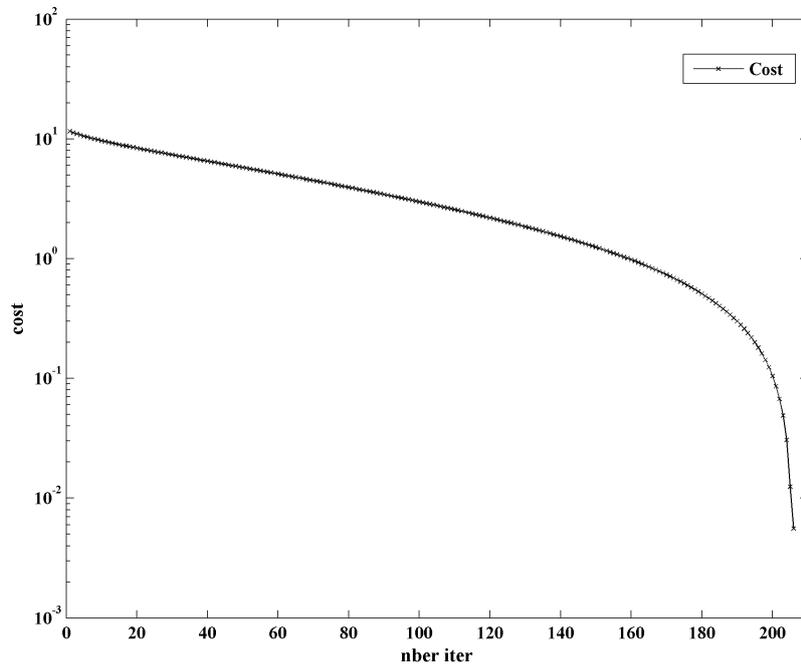


FIGURE 6.6 – La variation du gradient en fonction du nombres d'itérations

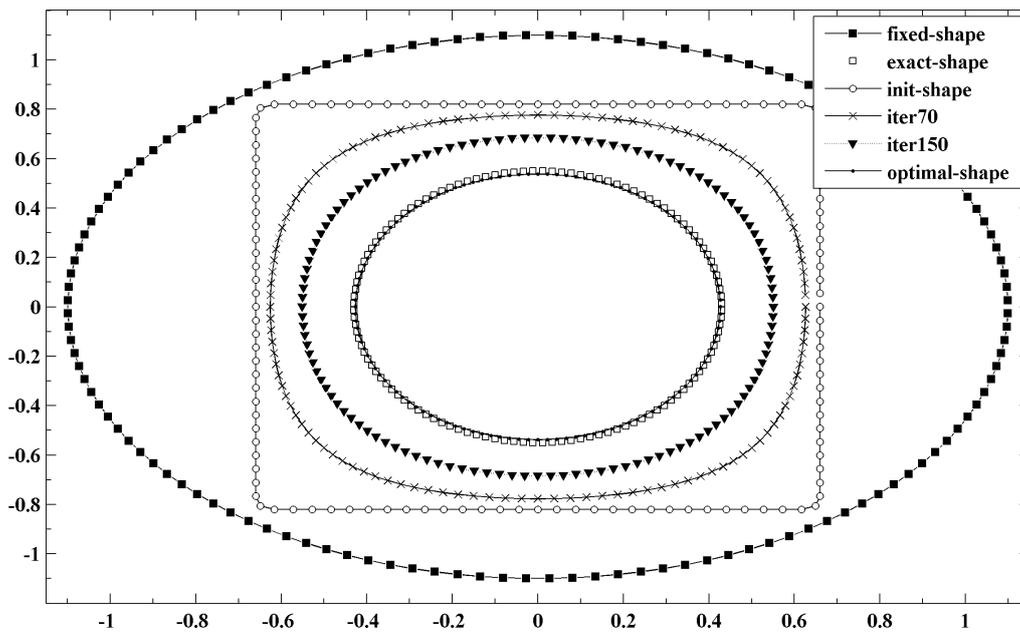


FIGURE 6.7 – Convergence de la forme optimale vers la forme exacte.

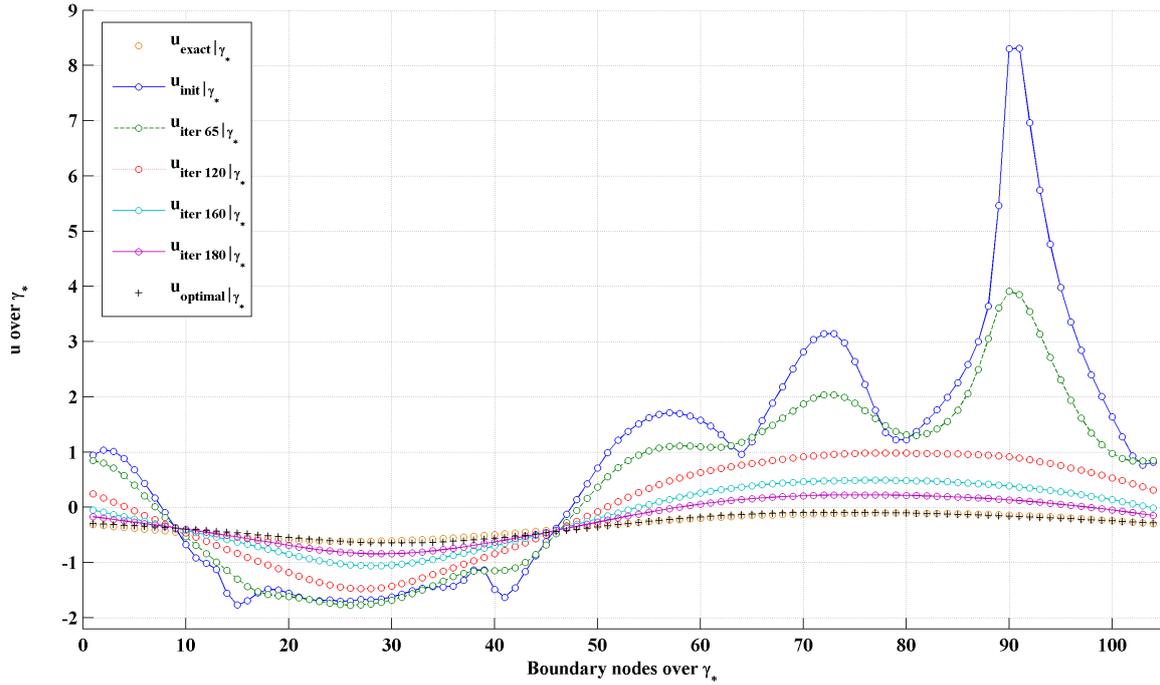


FIGURE 6.8 – Les solutions exacte et approchée $u|_{\gamma_\star}$ pour différents nombres d'itérations.

Considérons les fonctions $F_1(\cdot, u) = 1$, $\varphi_2 = 0$ et $F_2(\cdot, v) = (v - \varphi_2)^2$ dont la fonctionnelle coût associée est

$$\mathcal{J}(\Omega, \omega) = \int_B \chi_\Omega(x) dx + \lambda \int_\omega (v(x))^2 dx.$$

On cherche à construire la frontière exacte

$$\partial\Omega_{ex} = \{((0.4) \cos(t), (0.6) \sin(t)) / t \in [0, 2\pi]\},$$

et la solution exacte $v_{ex}(x, y) = -x^2 - y^2 + \cos(x) \sin(y)$, du problème d'état (6.15) associée aux données $\gamma = 1$, $k = -2 - \cos(x) \sin(y)$ et $g = v_{ex}$ et la solution exacte u_{ex} du problème d'état (6.16), associée aux données $\mu = 1$, $q = 1$ et $f = 0$.

Ainsi les nombres d'éléments frontières utilisés pour la discrétisation de la frontière libre et de la frontière fixe sont pris respectivement $N = 60$ et $M = 64$. Le coefficient de déformation et la précision sont pris respectivement $\rho = 0,021$ et $EPSD = 10^{-2}$. Le domaine initial Ω est le rectangle $] -0.7, 0.7[\times] -0.9, 0.9[$.

Dans la figure 6.9, nous présentons les formes intermédiaires obtenues pour différents nombres d'itérations. La variation du gradient de la fonctionnelle de coût en fonction du nombre d'itérations est présentée dans la figure 6.10. La convergence des formes successives vers le domaine exacte est illustrée dans la figure 6.11, où nous présentons les domaines fixe, initial, optimal, exact et successifs pour différents nombres d'itérations

Dans le dernier test numérique, nous présentons la solution exacte u_{ex} et la solution approchée u_k à l'itération k notée par u_k , dans un ensemble de M points intérieurs, noté par $\gamma_\star = \{(x_i, y_i) \in D \setminus \bar{\Omega}_k, \text{ pour } i = 1, \dots, M\}$. La convergence des solutions approchées vers la solution exacte est illustrée dans la figure 6.12.

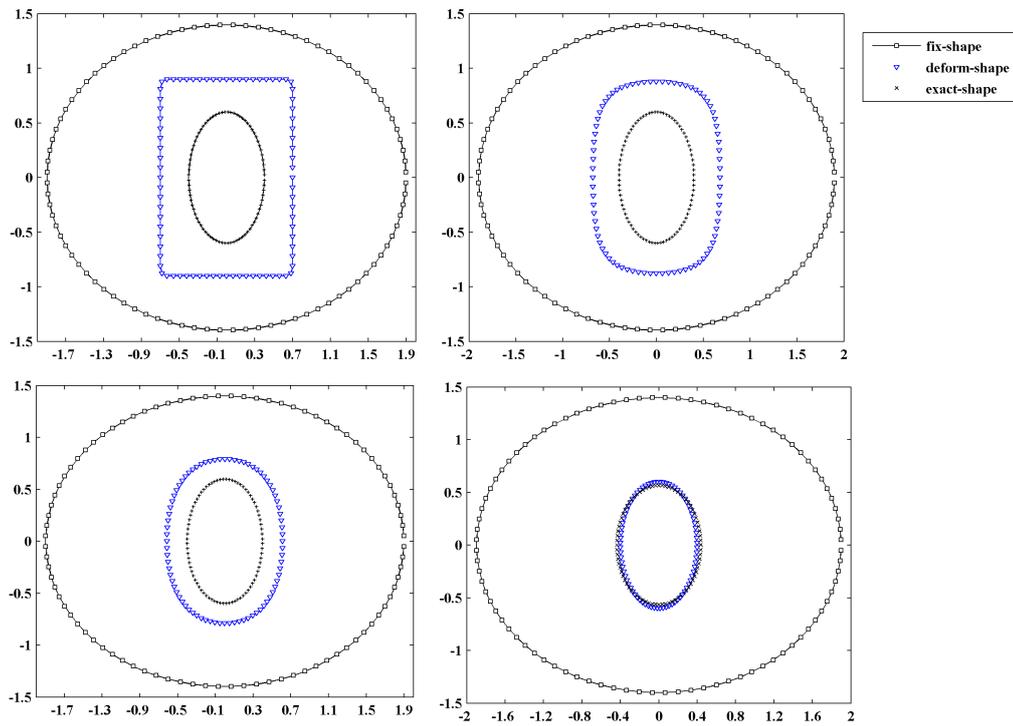


FIGURE 6.9 – Formes successives obtenues aux itérations (de gauche à droite, de haut en bas) $it\acute{e}r = 0; 30; 60$ and 100 .

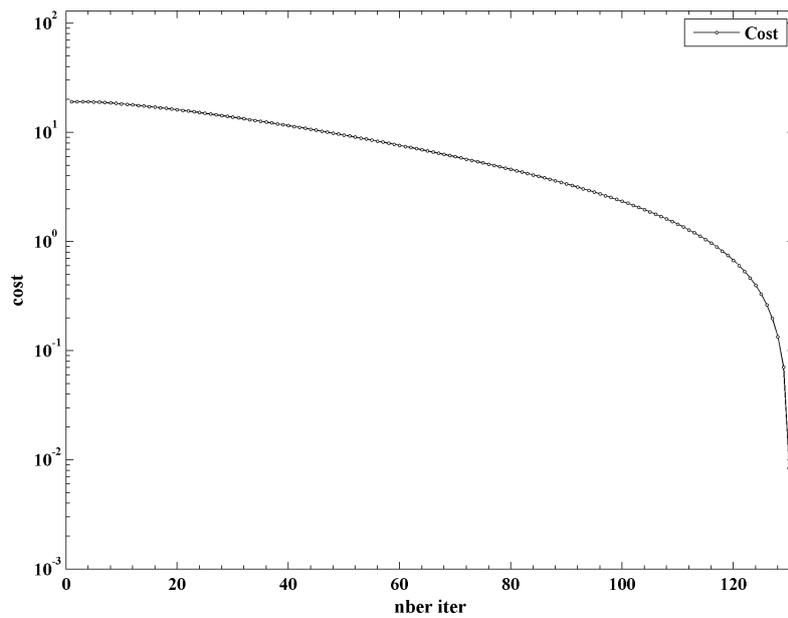


FIGURE 6.10 – La variation du gradient de la fonctionnelle coût en fonction du nombres d'itérations.

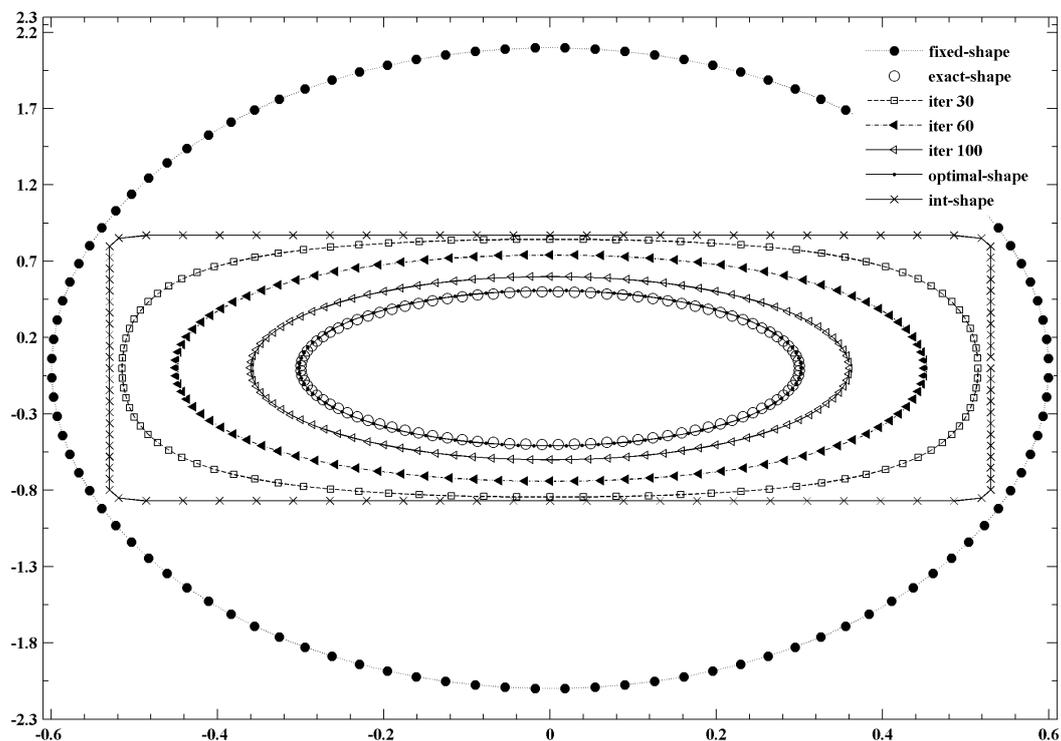
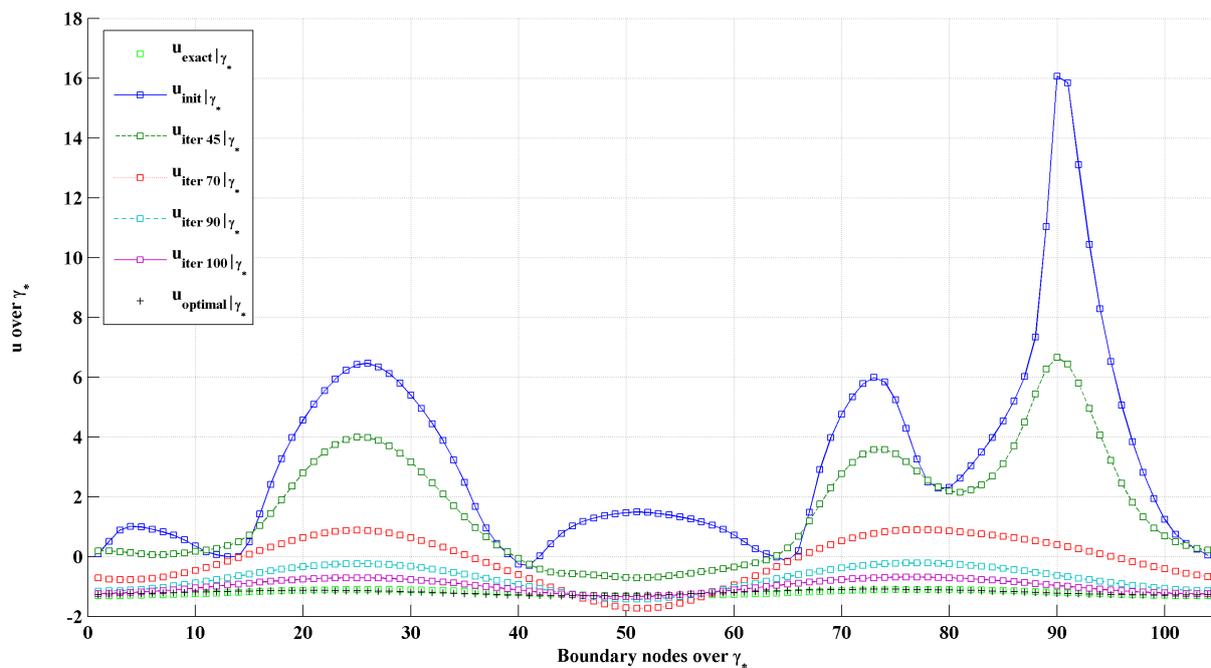


FIGURE 6.11 – La convergence de la frontière optimale vers l'exacte.

FIGURE 6.12 – Les solutions exactes et approchées $u|_{\gamma_*}$ pour différents nombres d'itérations.

Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude théorique et numérique d'une nouvelle formule de calcul de la dérivée de forme. Nous avons commencé par développer quelques résultats théoriques qui consistent à généraliser cette formule de dérivation de forme aux cas des domaines étoilés. Puis, nous avons établi un résultat d'existence de la dérivée de forme d'une fonctionnelle coût surfacique, tout en explicitant son expression via les fonctions support. Ensuite, nous avons étudié l'existence de la dérivée de forme de la solution de problèmes aux limites elliptiques modèles de type Dirichlet ou Neumann. Enfin, dans le but d'illustrer le résultat obtenu dans le cas des domaines convexes, nous avons appliqué cette formule de dérivation de forme à la résolution numérique de quelques problèmes d'optimisation de forme concrets, tout en suggérant un algorithme de résolution qui montre l'intérêt pratique de la nouvelle formule de dérivation. Ainsi les algorithmes de résolution numérique basés sur la méthode du gradient, utilisant la nouvelle formule de dérivation de forme sont moins coûteux comparés à ceux utilisant la méthode de dérivation de forme classiques nécessitant une extension du champ de vecteurs de déformation sur tout le domaine ou un remaillage du domaine à chaque itération de ce processus d'optimalité.

Comme perspective de ce travail, on peut envisager les questions suivantes :

- Appliquer les résultats obtenus à la résolution numérique des problèmes d'optimisation de forme en mécanique des fluides de manière générale.
- Développer d'autres approches pour des domaines admissibles plus généraux pour des fonctionnelles volumiques et surfaciques.

Bibliographie

- [1] A. Acker, R. Meyer, A free boundary problem for the p-Laplacian : uniqueness, convexity, and successive approximation of solutions, *Electronic Journal of Differential Equations*, (1995), n° 8, 1-20. [5](#), [145](#)
- [2] G. Allaire, *Conception Optimale de Structures*, Mathematiques et Applications, vol. 58, Springer-Verlag, Berlin, 2007. [2](#), [5](#), [145](#)
- [3] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, vol. 140, Academic Press, New York, London, [12](#), [15](#)
- [4] S. Amstutz, C. Dapogny, A. Ferrer, A consistent relaxation of optimal design problems for coupling shape and topological derivatives, *Numerische Mathematik*, 140 (2018), n° 1, 35-94. [6](#)
- [5] H. W. Alt, L. A. Caffarelli, Existence and regularity for a minimum problem with free boundary, *J. Reine Angew. Math.*, 325 (1981), 105-144.
- [6] P. Antunes, B. Bogosel, Parametric Shape Optimization using the Support Function, available at <https://arxiv.org/pdf/1809.00254.pdf>, (2018). [5](#)
- [7] F. Bouchon, S. Clain, R. Touzani, Numerical solution of the free boundary Bernoulli problem using a level set formulation, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194 (2005), n° 36-38, 3934-3948. [5](#)
- [8] A. Boulkhemair, On a Shape Derivative Formula in the Brunn–Minkowski Theory, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 55 (2017), n° 1, 156-171. [2](#), [3](#), [6](#), [7](#), [28](#), [60](#), [61](#), [63](#), [64](#), [72](#), [93](#), [147](#), [149](#), [150](#), [173](#), [175](#), [178](#), [185](#)
- [9] A. Boulkhemair, A. Chakib, Erratum : On a shape derivative formula with respect to convex domains, *J. Convex Anal.*, 22 (2015), 901-903. [6](#), [173](#), [187](#)
- [10] A. Boulkhemair, A. Chakib, On a shape derivative formula with respect to convex domains, *Journal of Convex Analysis*, 21 (2014), n° 1, 67-87. [2](#), [3](#), [6](#), [7](#), [28](#), [33](#), [37](#), [38](#), [40](#), [49](#), [147](#), [149](#), [150](#), [154](#), [173](#), [175](#), [178](#), [185](#), [187](#)
- [11] A. Boulkhemair, A. Chakib, On the uniform Poincaré inequality, *Comm. Partial Differential Equations*, 32 (2007), n° 7-9, 1439-1447. [101](#), [104](#), [105](#), [161](#), [187](#)
- [12] A. Boulkhemair, A. Chakib, A. Nachaoui, A shape optimization approach for a class of free boundary problems of Bernoulli type, *Applications of Mathematics*, 58 (2013), n° 2, 205-221. [5](#)
- [13] A. Boulkhemair, A. Chakib, A. Sadik, On numerical study of constrained coupled shape optimization problems based on a new shape derivative method, (2020), Submitted to *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Wiley. [173](#)
- [14] A. Boulkhemair, A. Chakib, A. Sadik, On a shape derivative formula for a family of star-shaped domains, (2019), Submitted to *Communications in Contemporary Mathematics*, World Scientific. [29](#)

- [15] A. Boulkhemair, A. Chakib, A. Nachaoui, A. A. Niftiyev, A. Sadik, On a numerical shape optimal design approach for a class of free boundary problems, *Computation Optimization and Applications*, Springer, 77 (2020), 509–537. [145](#)
- [16] A. Boulkhemair, A. Chakib, and A. Sadik, Geometrical variations of a state-constrained functional on star-shaped domains. *Advanced Mathematical Models & Applications*, 6(2), 73-88(2021). [6](#)
- [17] G. Beer, Starshaped sets and the Hausdorff metric. *Pacific Journal of Mathematics*, 61 (1975), n° 1, 21-27. [31](#)
- [18] I. Belegradek, Z. Jiang, Smoothness of Minkowski sum and generic rotations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 450.2(2017), 1229-1244. [70](#), [73](#)
- [19] M. Berger, B. Gostiaux, *Geometrie differentielle, varietes, courbes, surfaces*, Mathématiques, Presses Universitaires de France, Paris, Second edition, 1992. [16](#), [17](#)
- [20] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Theorie et applications, (maths monde), Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1983. [10](#), [11](#), [14](#), [44](#), [46](#), [84](#), [99](#), [116](#), [118](#), [119](#), [134](#), [139](#), [142](#), [151](#)
- [21] C. A. Brebbia, J. Dominguez, *Boundary elements : an introductory course*, Computational Mechanics Publications, Southampton, New York, Second edition 1992. [6](#), [94](#), [161](#), [163](#), [164](#), [165](#), [175](#), [188](#)
- [22] P. W. Partridge, C. A. Brebbia, *Dual reciprocity boundary element method*, Springer Science and Business Media, International Series on Computational Engineering, 2012. [6](#), [163](#), [175](#), [185](#), [187](#), [188](#)
- [23] M. P. Bendsoe, O. Sigmund, *Topology optimization*, Theory, methods and applications, Springer-Verlag, Berlin, 2003. [6](#), [173](#)
- [24] V. I. Burenkov, *Sobolev Spaces on Domains*, Teubner-Texte zur Mathematik, Vol. 137, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart, 1998.
- [25] J. Céa, Approximation variationnelle des problèmes aux limites, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 14 (1964), n° 2, 345–444. [2](#)
- [26] J. Céa, D. Chenais, G. Geymonat, J.L. Lions *Partial Differential Equations and Functional Analysis, in memory of Pierre Grisvard*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 22, 1996. [15](#)
- [27] D. Chenais, Sur une famille de varietes a bord lipschitziennes, application a un problème d'identification de domaine, *Ann. Inst. Fourier*, 4 (1977), n° 27, 201-231. [51](#), [59](#)
- [28] F. Chouly, Sur la prise en compte de quelques conditions aux limites avec la methode des lments finis, hal-01564693, (2017). [99](#)
- [29] P. Cardaliaguet, R. Tahraoui, Some uniqueness results for Bernoulli interior free boundary problems in convex domains, *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)*, 102 (2002). [5](#), [145](#)
- [30] P. Ciarlet, *Mathematical Elasticity vol. I*, Elsevier Science Publishers, B.V., Amsterdam, Te Netherlands, 1988. [15](#), [38](#)

- [31] J. Dalphin, Uniform ball property and existence of optimal shapes for a wide class of geometric functionals, *Interfaces and Free Boundaries*, 20(2), 211-260, (2018). [65](#), [66](#)
- [32] J. Dalphin, Some characterizations of a uniform ball property, *ESAIM : proceedings and surveys*, 45, 437-446, (2014). [65](#), [66](#)
- [33] M. C. Delfour, J.-P. Zolésio, *Shapes and geometries, metrics, analysis, differential calculus, and optimization*, Advances in Design and Control, Siam, vol. 22, 2011. [2](#), [17](#), [21](#), [38](#), [98](#), [121](#), [147](#), [154](#), [178](#)
- [34] R. Dautray, J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique*, INSTN : Collection Enseignement, vol. 4, Masson, Paris, 1988.
- [35] T. Dbouk, A review about the engineering design of optimal heat transfer systems using topology optimization, *Applied Thermal Engineering*, Elsevier, 112 (2017), 841-854. [6](#), [173](#)
- [36] V. F. Demyanov, A. M. Rubinov, *Bases of non-smooth analysis and quasidifferential calculus*. M. Nauka, vol. 420, 1990. [24](#), [29](#), [31](#)
- [37] V. F. Demyanov, A. M. Rubinov, *Quasidifferential calculus. Optimization Software*. Inc. Publications Division, New York 1986. [24](#)
- [38] J. I. Diaz, B. Kawohl, On convexity and star-shapedness of level sets for some nonlinear elliptic and parabolic problems on convex rings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 177 (1993), 263-263.
- [39] J. Droniou, *Quelques Résultats sur les Espaces de Sobolev*, Polycopié de l'Ecole Doctorale de Maths-Info de Marseille, (in French), 2001. [10](#), [11](#), [12](#), [14](#), [15](#), [17](#), [33](#), [61](#), [85](#), [89](#), [90](#), [103](#), [109](#), [110](#), [126](#)
- [40] K. Eppler, H. Harbrecht, Tracking Neumann Data for Stationary Free Boundary Problems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48 (2009), n° 5, 2901-2916. [147](#)
- [41] K. Eppler, H. Harbrecht, Tracking Dirichlet Data in L^2 is an Ill-Posed Problem. *Journal of optimization theory and applications*, 145 (2010), n° 1, 17-35. [147](#)
- [42] L. Evans, R. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Textbooks in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. [13](#), [14](#), [15](#), [33](#), [41](#), [61](#), [72](#), [76](#), [83](#), [90](#), [113](#)
- [43] H. Federer, Curvature measures, *Transactions of the American Mathematical Society*, 93(3) :418-491, December 1959. [66](#)
- [44] F. Feppon, G. Allaire, F. Bordeu, J. Cortial, C. Dapogny, Shape optimization of a coupled thermal fluid-structure problem in a level set mesh evolution framework, *SeMA Journal*, 76 (2019), n° 3, 1-46. [6](#)
- [45] W. M. Feldman, I. C. Kim, Dynamic stability of equilibrium capillary drops. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 211 (2014), n° 3, 819-878.
- [46] E. Francini, Star-shapedness of level sets for solutions of nonlinear elliptic equations, *Mathematische Nachrichten*, 193 (1998), n° 1, 49-56.
- [47] M. Flucher, M. Rumpf, Bernoulli's free-boundary problem, qualitative theory and numerical approximation, *Journal für die Reine und angewandte Mathematik*, 486 (1997), 165-204. [5](#), [145](#), [170](#)

- [48] T. Gallay, THÉORIE DE LA MESURE ET DE L'INTÉGRATION. Université Joseph Fourier, Grenoble, 2009. 96
- [49] Z. M. Gao, C. Y. Ma, and H. W. Zhuang, Shape optimization for Navier–Stokes flow. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 16 (2008), n° 5, 583-616.
- [50] K. Pijush Ghosh, Deguchi Koichiro, *Mathematics of shape description : A morphological approach to image processing and computer graphics* Singapore : Wiley, 2009. 19
- [51] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Classics in Applied Mathematics, Pitman Advanced Pub. Program, Monographs and studies in mathematics, vol. 24, 1985.i 15
- [52] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Reprint of the 1998 edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001. 99, 136
- [53] J. Hadamard, *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*, (1907), dans Oeuvres de J. Hadamard, CNRS Paris 1968. 2
- [54] J. Haslinger, R. A. E. Mäkinen. *Introduction to shape optimization*, volume 7 of Advances in Design and Control. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2003.
- [55] J. Haslinger, T. Kozubek, K. Kunisch, G. Peichl, An embedding domain approach for a class of 2-d shape optimization problems : Mathematical analysis. *J. Math. Anal. Appl.*, 290 (2004), 665-685. 5
- [56] J. Haslinger, T. Kozubek, K. Kunisch, G. Peichl, Shape optimization and fictitious domain approach for solving free-boundary value problems of Bernoulli type, *Comput. Optim. Appl.*, 26 (2003), 231-251. 5, 171
- [57] A. Henrot, M. Pierre, *Variation et optimisation de formes*, une analyse géométrique, Springer Science & Business Media, vol. 48, 2006. 1, 2, 16, 17, 18, 20, 21, 32, 38, 43, 52, 58, 94, 98, 101, 104, 105, 121, 135
- [58] L. Hörmander, *em Notions of convexity*, Progress in Mathematics, 127. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994. 10, 22, 154, 178
- [59] L. Hörmander, *Notions of Convexity*, Progress in Mathematics 127, Birkhauser, Basel 1994. 42, 45
- [60] K. Ito, K. Kunisch, G. H. Peichl., Variational approach to shape derivatives for a class of Bernoulli problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 314 (2006), n° 1, 126-14. 5, 171
- [61] A. Kaul, R. T. Farouki, Computing Minkowski sums of planar curves. *Int. J. Computat. Geom. Appl.* 5 (1995), 413–432. 19
- [62] D. Kinderlehrer, L. Nirenberg, Regularity in free boundary problems. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze.* 4 (1977), n° 2, 373-391. 5, 145
- [63] S. G. Krantz, and H. R. Parks, On the vector sum of two convex sets in space, *Canadian Journal of Mathematics*, 43(2), 347-355, (1991). 68

- [64] C. M. Kuster, A. G. Pierre, R. Touzani, Fast numerical methods for Bernoulli free boundary problems. *SIAM journal on scientific computing*. 29 (2007), n° 2, 622-634. [5](#)
- [65] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*. EDP sciences, 2012. [10](#), [16](#), [17](#), [22](#)
- [66] E. Lund, H. Moller, L. A. Jakobsen, Shape design optimization of stationary fluid-structure interaction problems with large displacements and turbulence, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 25 (2003), n° 5-6, 383-392. [6](#), [173](#)
- [67] M. Lipnicka, A. Nowakowski, On dual dynamic programming in shape optimization of coupled models, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 59 (2019), n° 1, 153-164. [6](#)
- [68] G. Leugering, A. A. Novotny, G. P. Menzala, J. Sokolowski, On shape optimization for an evolution coupled system, *Applied Mathematics and Optimization*, 64 (2011), n° 3, 441-466. [6](#), [173](#)
- [69] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Vol. 1. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, (1968). [15](#)
- [70] F. Murat, J. Simon, : Etude de problèmes d'optimal design. *Lecture Notes in Computer Sciences*, Springer Verlag, Berlin 41 (1976), 54-62. [2](#)
- [71] J.-P. Penot, *Calculus Without Derivatives*, Graduate Texts in Mathematics, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France Springer, 2013. [22](#), [23](#), [24](#), [25](#)
- [72] R. Robert Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability*. Vol. 1364. Springer, 2009. [23](#)
- [73] M. Peternell, Tibor Steiner, Minkowski sum boundary surfaces of 3D-objects, *Graphical Models* 69 (2007), n° 3-4, 180-190. [19](#)
- [74] G. Marck, M. Nemer, J.-L., Harion, Topology optimization of heat and mass transfer problems : Laminar flow, *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 63 (2013), 508-539. [6](#), [173](#)
- [75] D. Nardini, C. A. Brebbia, A new approach to free vibration analysis using boundary elements. In *Boundary Element Method in Engineering*, Springer Verlag, Berlin, (1982), 312-326. [185](#), [187](#)
- [76] A. A. Niftiyev, Y. S. Gasimov, Control by Boundaries and Eigenvalue Problems with Variable Domains. *Publishing House of Baku State University*(in Russian), Baku (2004). [2](#), [28](#), [166](#)
- [77] O. Pironneau, *Optimal shape design for elliptic systems*, Springer Series in Computational Physics, 1984. [2](#)
- [78] H. Poincaré, Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique, *American Journal of Mathematics*, 12(3) :211-294, March 1890. [65](#)
- [79] J. F. T. Rabago, Jerico B. Bacani, Shape optimization approach for solving the Bernoulli problem by tracking the Neumann data : A Lagrangian formulation, *Communications on Pure & Applied Analysis*, 17 (2018), n° 6, 2683-2702. [5](#)

- [80] P.-A. Raviart, J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree, Masson, Paris, 1983.
- [81] R. Adams, J. F. Fournier, *Sobolev spaces*, Academic Press, Pure and Applied Mathematics, Elsevier, 2003.
- [82] L. G. Rogers, *A Degree-Independent Sobolev Extension Operator*, Thesis (Ph.D.)–Yale University, 2004. [60](#)
- [83] M. A. Rubinov, *Abstract convexity and global optimization*, Springer Science & Business Media, Vol. 44, 2013. [31](#), [35](#)
- [84] P. Salani, Star-shapedness of level sets of solutions to elliptic PDEs, *Applicable Analysis*, 84 (2005), n° 12, 1185-1197.
- [85] J. Sokolowski, J. P. Zolesio, *Introduction to Shape Optimization. Shape Sensitivity Analysis*, Springer Series in Computational Mathematics, Berlin, Heidelberg, vol. 16, 1992. [2](#), [20](#), [39](#), [53](#), [98](#), [121](#), [135](#), [154](#), [178](#), [186](#)
- [86] R. Schneider, *Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications Cambridge university press, vol. 151, 2014. [3](#), [10](#), [22](#), [23](#), [24](#), [29](#), [37](#), [40](#), [42](#), [45](#), [49](#), [63](#), [91](#), [92](#), [93](#), [120](#)
- [87] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, 1970. [15](#), [60](#)
- [88] R. Temam, *Shape optimization for stationary Navier–Stokes equation, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 2001.
- [89] C. Thäle, 50 YEARS SETS WITH POSITIVE REACH-A SURVEY, *Surveys in Mathematics and its Applications*, 3 (2008). [66](#), [67](#)
- [90] J. I. Toivanen, J. Haslinger, R. A. E. Mäkinen, Shape optimization of systems governed by Bernoulli free boundary problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 197 (2008), n° 45-48, 3803-3815. [5](#)
- [91] S. Tang, J. Yong, *Control Theory and Related Topics : In Memory of Xunjing Li : Fudan University*, China, 3-5 June, World Scientific, 2005.
- [92] L. Webster, *Convexity*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 1994. [10](#), [45](#)
- [93] F. Wein, M. Kaltenbacher, B. Kaltenbacher, G. Leugering, E. Bänsch, F. Schury, On the effect of self-penalization of piezoelectric composites in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43 (2011), 405-417. [6](#), [173](#)
- [94] G. H. Yoon,, Topological layout design of electro-fluid-thermal-compliant actuator, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 209-212 (2012) 28-44. [6](#), [173](#)
- [95] X. Zhao, M. Zhou, O. Sigmund, C. Andreasen, A "poor man's approach" to topology optimization of cooling channels based on a darcy flow model, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 116 (2018) 1108-1123. [6](#), [173](#)

Titre : Étude théorique et approximation numérique d'une nouvelle formule de dérivée de forme et applications

Mots clés : Optimisation de formes, calcul de dérivée de formes, étude théorique, approximation numérique, équations aux dérivées partielles, méthode de gradient, analyse convexe.

Résumé : Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude théorique et numérique d'une formule de calcul de la dérivée de forme utilisant une déformation de type Minkowski. Nous proposons une généralisation d'une formule de dérivation de fonctionnelles coûts intégrales volumiques par rapport à une famille de domaines non convexes. Nous commençons par proposer une première approche qui consiste à étendre les résultats des travaux antérieurs à une famille de domaines admissibles étoilés, en se basant sur leurs caractérisations via les fonctions jauges. Ensuite nous établissons un résultat d'existence de la dérivée de forme d'une fonctionnelle coût surfacique, en utilisant encore une fois une déformation de Minkowski d'ouverts étoilés par des convexes, tout en exprimant sa dérivée au moyen des fonctions support. Nous terminons la partie théorique de cette thèse en étudiant l'existence de la dérivée de forme de solutions de problèmes aux limites en utilisant la déformation

de Minkowski d'ouverts étoilés par des convexes. Ceci permet de traiter des problèmes d'optimisation de forme dont la fonctionnelle coût dépend de la solution d'un problème aux limites modèle de type Dirichlet ou Neumann. Le deuxième volet de cette thèse vise à concrétiser les résultats obtenus dans le cadre de la nouvelle formule de dérivation de forme dans le cas convexe, en les appliquant à des modèles d'optimisation de forme. Nous nous intéressons, dans un premier lieu, à la résolution numérique d'un problème inverse à frontière libre de type Bernoulli, reformulé en un problème en optimisation de forme, ensuite dans le dernier travail effectué dans cette thèse nous étudions une classe de problèmes aux limites couplés via une condition de transmission appropriée de type Neumann, tout en suggérant un algorithme de résolution qui montre l'intérêt pratique de la nouvelle formule de dérivation en se basant sur une discrétisation par la méthode des éléments frontières et la réciprocity duale.

Title : On a theoretical and numerical study of a formula of shape derivative and applications

Keywords : Shape optimization, shape derivative, convex analysis, PDE, gradient method.

Abstract : In this thesis, we are interested in the theoretical and numerical study of a formula of shape derivative which uses a Minkowski type deformation. We propose a generalization of a formula of shape derivative of a volume cost functional with respect to a family of non-convex domains. We start by proposing a first approach which consists in extending the results of previous works to a family of star-shaped domains, based on their characterizations via gauge functions. Then, we establish a result on the existence of the shape derivative of a surface cost functional, by using once again a Minkowski deformation of star-shaped domains by convex sets and expressing its derivative by means of the support functions. We end the theoretical part of this thesis by studying the existence of the shape derivative of solutions

of boundary value problems using the Minkowski deformation of convex domains. This will allow us to deal with shape optimization problems whose cost functional depends on the solution of a boundary value problem of the Dirichlet or Neumann type. The second part of this thesis aims at concretising the results obtained in the framework of the new shape derivative formula in the convex case, by applying them to shape optimization models. We first focus on the numerical solution of a Bernoulli free boundary inverse problem, reformulated as a shape optimization one. In the last work of this thesis, we study a class of boundary problems coupled via an appropriate Neumann transmission condition, while suggesting a solution algorithm that shows the practical interest of the new shape derivative formula based on a discretization by the boundary element method and dual reciprocity.