



HAL
open science

Analyse du comportement viscoélastique de matériaux anisotropes par reconstruction de formes d'ondes

Nicolas Leymarie

► **To cite this version:**

Nicolas Leymarie. Analyse du comportement viscoélastique de matériaux anisotropes par reconstruction de formes d'ondes. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Bordeaux 1, 2002. Français. NNT: . tel-04024141

HAL Id: tel-04024141

<https://hal.science/tel-04024141>

Submitted on 10 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NoDerivatives 4.0 International License

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

Par **Nicolas LEYMARIE**

Diplômé du Magistère MATMECA

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

**Analyse du comportement viscoélastique de matériaux
anisotropes par reconstruction de formes d'ondes**

Soutenue le : 4 janvier 2002.

Après avis de :

MM. V. GIBIAT, Professeur, Université Toulouse 3

A. LHÉMERY, Chercheur au CEA, HDR

Rapporteurs

Devant la Commission d'examen formée de :

MM. J.-Y. CHAPELON, Directeur de Recherches INSERM, Lyon

C. ARISTÉGUI, Maître de Conférences, Université Lyon 1

B. AUDOIN, Professeur, Université Bordeaux 1

S. BASTE, Professeur, Université Bordeaux 1

A.G. EVERY, Professeur, University of the Witwatersrand, Afrique du Sud

V. GIBIAT, Professeur, Université Toulouse 3

A. LHÉMERY, Chercheur au CEA, HDR.

Président

Ce travail a été accompli au Laboratoire de Mécanique Physique de l'Université de Bordeaux 1 (CNRS UMR 5469), au sein du groupe Endommagement. Il a reçu le soutien financier de la Région Aquitaine, à travers un cofinancement BDI CNRS. Je tiens à remercier pour son accueil Didier DESJARDINS, directeur de ce laboratoire.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à Messieurs Vincent GIBIAT et Alain LHÉMERY pour avoir accepté de rapporter ce travail. Au travers des discussions et rencontres que nous avons pu avoir, j'ai apprécié leurs qualités scientifiques et humaines ainsi que l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. J'exprime également ma profonde reconnaissance à Arthur EVERY qui m'a honoré de sa présence dans le jury.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Jean-Yves CHAPELON, Directeur de Recherche à l'INSERM, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Son regard "extérieur" a su enrichir et ouvrir des perspectives à ce travail.

Mes remerciements iront bien sûr à mon directeur de thèse Stéphane BASTE pour m'avoir toujours fait confiance et pour les libertés d'agir et d'entreprendre qu'il a su me laisser durant ces trois années.

Une mention spéciale à Christophe ARISTÉGUI qui par sa disponibilité permanente a permis à ce travail d'aboutir, tout en gardant ce souci de rigueur qui le caractérise. Voilà déjà plus de sept ans, qu'il a su me transmettre, par son enthousiasme, l'intérêt pour la mécanique. Qu'il soit convaincu de toute ma reconnaissance et de mon amitié.

J'adresse un grand merci à mes deux interlocuteurs privilégiés, Bertrand AUDOIN et Olivier PONCELET, ... un camion de "Mars" n'y suffirait pas. Exploitant, sans abus je l'espère, leurs compétences scientifiques, ils ont grandement contribué à l'élaboration de ce travail au travers de nos nombreuses et longues discussions. Pour tout cela et bien d'autres choses encore, je tiens à leur exprimer toute ma gratitude ainsi que mon amitié.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du Laboratoire, qui durant ces trois années mon permis de travailler dans un contexte agréable. Merci à tous mes collègues étudiantins, les anciens et ceux encore en activité, Zorro (i--), Fred, Stéphanie, Manu, Guillaume, Franck, Thomas et les nouveaux venus. Les moments de détente ont été et reste des moments plus que nécessaires. Enfin, merci à Jean-Marie de m'avoir sorti une grosse épine du pied.

Pour finir, merci à Cécile, à ma famille et à ceux qui ont su me supporter dans la dernière ligne droite...

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
PROPAGATION ULTRASONORE EN MILIEU VISCOÉLASTIQUE LINÉAIRE ANISOTROPE	4
1. Loi de comportement linéaire pour un milieu viscoélastique anisotrope	4
1.1. Les équations constitutives généralisées	4
1.2. Écriture fréquentielle des équations constitutives	6
1.3. Prise en compte de la causalité : relations de Kramers-Krönig	7
1.4. Modèles rhéologiques : formalisme global et formalisme local	8
2. Équation de propagation dans un milieu viscoélastique anisotrope	10
2.1. L'équation de propagation	10
2.2. Formulation de Christoffel	10
3. L'interférométrie ultrasonore : principes et limites de la méthode	12
3.1. Configuration expérimentale	13
3.2. Les techniques usuelles de mesure de temps de retard	14
3.2.1. La fonction d'intercorrélation	14
3.2.2. La transformée de Hilbert	15
3.3. Les problèmes et limites des techniques de chronométrie	16
3.3.1. L'analyse de réponses multimodales	16
3.3.2. L'analyse de signaux pour des milieux viscoélastiques	18
3.3.3. Les limites de la caractérisation par interférométrie ultrasonore	19
4. Les méthodes basées sur la modélisation de la réponse d'une lame immergée	20
4.1. Description des méthodes existantes : définition des fonctions objectif	21
4.2. Les raisons de l'élaboration d'une nouvelle méthode	22
CHAPITRE II	
CARACTÉRISATION ULTRASONORE PAR RECONSTRUCTION DE FORMES D'ONDES : FORMULATION DU PROBLÈME	23
1. Le problème direct : écriture analytique de la fonction de transfert d'une plaque viscoélastique anisotrope	23
1.1. Solutions des équations de propagation pour une lame à faces parallèles immergée	23
1.2. Calcul des champs de déplacement engendrés par une onde plane incidente sur une lame à faces parallèles immergée	25

1.2.1. Expressions du champ de déplacement et de la tension mécanique à chacune des interfaces de la lame	25
1.2.2. Écriture des conditions de continuité aux interfaces sous la forme d'un système linéaire : calcul des amplitudes complexes solutions du système	26
1.3. Formulation de la fonction de transfert en transmission d'une lame à faces parallèles et reconstruction du signal transmis à partir d'un signal de référence	28
2. Le problème inverse : optimisation par reconnaissance des formes d'ondes	29
2.1. Les fonctions objectif	30
2.1.1. Principe du maximum de vraisemblance et définition des grandeurs énergétiques utilisées	30
2.1.2. Écriture des fonctions objectifs : stratégie d'optimisation	32
2.1.3. Application pratique des fonctions objectif pour des signaux échantillonnés à bande étroite	34
2.1.4. Analyse et traitement des fonctions objectif en présence de bruit	35
2.2. Les différentes stratégies d'identification : approches globale et locale	38
2.2.1. Reconstruction de formes d'ondes pour un modèle rhéologique prédéfini globalement	38
2.2.2. Paramétrisation par une formulation locale des raideurs : évaluation de comportements rhéologiques	39
2.3. Mise en œuvre du procédé d'optimisation	40
2.3.1. Technique de minimisation	40
2.3.2. Écriture analytique des dérivées du premier et second ordre de la fonction de transfert de la lame	42
2.3.3. Calcul des intervalles de confiance	43
CHAPITRE III	
VALIDATION ET ANALYSE À PARTIR DE SIGNAUX SIMULÉS	45
1. Identification des rigidités complexes selon un modèle rhéologique prédéfini	45
1.1. Description de l'étude et présentation des différents cas simulés	45
1.2. Validation de la méthode en l'absence de bruit	47
1.3. Influence des rapports signal sur bruit et longueur d'onde sur épaisseur	48
1.4. Influence du choix arbitraire d'un modèle rhéologique	52
2. Identification fréquentielle locale des raideurs complexes : détermination de comportements rhéologiques	55
2.1. Identification de comportements rhéologiques classiques	55
2.2. Identification de lois de comportement rhéologiques inhomogènes complexes	57
2.2.1. Simulations de lois de comportement rhéologiques inhomogènes	57
2.2.2. Identification de lois de comportement "classiques" inhomogènes	58
2.2.3. Identification de lois de comportement inhomogènes non monotones	59
2.3. Identification de modèles rhéologiques respectant la causalité	61

CHAPITRE IV	
CARACTÉRISATION EXPÉRIMENTALE DE MATÉRIAUX VISCOÉLASTIQUES : ÉTUDES GLOBALE ET LOCALE	63
1. Caractérisation expérimentale pour des rapports longueur d'onde sur épaisseur élevés	63
1.1. Matériau viscoélastique isotrope : échantillon de PMMA	64
1.2. Matériau anisotrope fortement dispersif : composite 2D carbone-SiC	66
1.3. Conclusion	68
2. Analyse de modèles rhéologiques en incidence normale par identification locale	69
2.1. Relations analytiques entre l'évolution de la raideur complexe et les courbes de dispersion et d'atténuation, en incidence normale	69
2.2. Application expérimentale de l'identification locale en incidence normale	70
2.3. Conclusion	73
CONCLUSION	74
BIBLIOGRAPHIE	77

Introduction

Portée par le développement des sciences de l'ingénieur, l'évaluation non destructive des structures a connu un essor considérable au cours du siècle dernier. Les techniques ultrasonores sont devenues l'outil privilégié pour le contrôle et l'évaluation non destructifs des propriétés mécaniques des matériaux. L'onde acoustique se propageant dans tout milieu suffisamment dense (fluide ou solide), ces techniques présentent l'avantage d'être applicables à une très large gamme de matériaux.

Les méthodes de caractérisation ultrasonore s'avèrent maintenant incontournables lorsqu'il s'agit de déterminer les propriétés mécaniques de matériaux anisotropes, et plus particulièrement de matériaux composites. Pour des milieux hétérogènes à l'échelle microscopique (matériaux composites, matériaux microfissurés, ...), l'outil acoustique autorise l'évaluation des caractéristiques mécaniques du milieu homogénéisé à l'échelle de la longueur d'onde, c'est à dire, de la fréquence spatiale de l'excitation mécanique. C'est cette faculté d'homogénéisation des propriétés mécaniques de matériaux, à la fois hétérogènes et anisotropes, qui fait des techniques de caractérisation ultrasonores un outil essentiel pour l'identification de lois de comportement dans le cadre de milieu continu homogène équivalent.

Cette étude s'inscrit précisément dans l'analyse et le développement des techniques ultrasonores adaptées au suivi sous traction de l'endommagement de matériaux composites. La structure hétérogène de ces matériaux (fibres, porosité, inclusions) et leur endommagement par microfissuration entraîne un caractère dispersif marqué des ondes acoustiques [Biot, 1962; Papadakis, 1965; Chandra *et al.*, 1999; Biwa et Shibata, 2000] pour lequel un modèle viscoélastique linéaire des lois de comportement du milieu homogène équivalent considéré est nécessaire [Biot, 1956; Bourbié *et al.*, 1986; Auld, 1990; Lakes, 1998]. Le formalisme requis par l'hypothèse d'un tel milieu autorise, par l'introduction de fonctions de rigidités complexes en fréquence, des lois d'évolution de vitesses de phase et de coefficients d'atténuation *a priori* quelconques. Cependant, les relations de Kramers-Krönig, traduisant les conditions de causalité des phénomènes physiques, définissent une relation fréquentielle entre les parties réelle et imaginaire de ces fonctions de rigidités complexes. La dispersion et l'atténuation des ondes acoustiques apparaissent alors comme deux phénomènes dépendants l'un de l'autre, relations dont il faudrait tenir compte dans les techniques d'identification de propriétés viscoélastiques de milieu dispersif.

Issues de la même équation de propagation, déduite du principe fondamental de la dynamique et de la loi de comportement des matériaux, deux grandes familles de techniques de caractérisation ultrasonore peuvent être distinguées. La première est basée sur l'étude des modes propres d'un échantillon. Dans le cas d'un déplacement libre aux interfaces, la caractérisation repose sur l'analyse des modes guidés se propageant dans une plaque mince [Nayfeh et Chimenti, 1988; Rokhlin et Chimenti, 1990; Chimenti, 1997]. Pour un déplacement imposé aux interfaces, il s'agit d'étudier les fréquences de résonance (spectroscopie) d'une structure simple (cube, plaque rectangulaire) [Ledbetter *et al.*, 1995; Maynard, 1996]. Ces méthodes ont l'avantage d'être très précises dans le cas de matériaux purement élastiques mais sont beaucoup moins efficaces dès qu'un comportement dissipatif visqueux apparaît. De plus, elles sont difficilement adaptables au suivi continu de

l'endommagement. L'autre famille exploite directement les propriétés des ondes de volume (vitesse de propagation et atténuation) liées par l'équation de propagation aux propriétés mécaniques du milieu. Ainsi, par l'estimation de vitesses de phase et d'atténuations des ondes de volume selon plusieurs directions de propagation, il est possible de remonter aux propriétés mécaniques du milieu. Ces mesures s'effectuent généralement de deux façons différentes. Soit l'onde acoustique est générée et réceptionnée au contact de l'échantillon [Hayes, 1969; Van Buskirk *et al.*, 1986; Arts, 1993]. Soit les mesures sont réalisées sans contact en utilisant un milieu de couplage fluide tel que l'eau ou l'air [Markham, 1970; Smith, 1972; Hosten *et al.*, 1987; Castagnède *et al.*, 1990; Rokhlin et Wang, 1992; Hosten *et al.*, 1996]. Ce principe de mesure permettant une identification complète des propriétés mécaniques sans toucher à l'échantillon, il a été préférentiellement utilisé pour le suivi ultrasonore de l'endommagement [Baste *et al.*, 1989]. Basée sur ce principe, une technique dite "d'interférométrie", comparant un signal de référence, dont le filtre propagatif est connu, avec des signaux de propriétés recherchées, a ainsi été développée au sein du Laboratoire de Mécanique Physique de l'Université Bordeaux 1 dès le début des années 80 [Hosten *et al.*, 1983; Castagnède, 1984; Deschamps, 1985] puis adaptée à une évaluation sous charge [Baste *et al.*, 1989; Baste *et al.*, 1990; Audoin et Baste, 1994]. Les résultats prometteurs ont encouragé le développement et l'élargissement du domaine d'application des techniques de caractérisation ultrasonore que ce soit en traitement du signal [Audoin, 1991; Audoin et Roux, 1996], ou par une généralisation de l'étude à des classes de symétries quelconques [Aristégui, 1997; Aristégui et Baste, 1997a; Aristégui et Baste, 1997b].

Dans cette optique, un des objectifs de ce travail est d'élargir le domaine d'application des techniques de caractérisation ultrasonores à des matériaux fortement atténuants et hétérogènes, étudiés, par souci d'homogénéisation, à des fréquences ultrasonores plus basses. Cette étude s'attache donc à présenter une méthode d'identification des propriétés viscoélastiques de matériaux anisotropes, effectuée à partir de l'analyse des signaux transmis au travers d'une lame à faces parallèles. Inspirée du principe de maximum de vraisemblance [Van Trees, 1968; Whalen, 1971; Flandrin, 1993], la méthode de reconstruction de formes d'ondes s'avère être non seulement adaptée à des signaux acquis pour des rapports longueur d'onde sur épaisseur élevés et des niveaux de bruits importants, mais aussi applicable à l'identification de comportements rhéologiques complexes.

Le premier chapitre pose le contexte de l'étude à travers le formalisme et les divers problèmes liés à la propagation ultrasonore en milieu viscoélastique. Dans un premier temps, la modélisation des lois de comportement pour un milieu homogène viscoélastique anisotrope est présentée. Dans un tel milieu, nous montrons, à une fréquence fixée, la relation linéaire à coefficients complexes entre les états de contraintes et déformations [Lakes, 1998]. Ces coefficients complexes représentent les constantes viscoélastiques ou rigidités complexes du milieu à la fréquence considérée. La relation de cause à effet entre le modèle viscoélastique du milieu homogénéisé et les phénomènes de dispersion et d'atténuation des ondes acoustiques se propageant dans ce milieu est établie par l'écriture de l'équation de propagation.

Nous présentons alors sommairement le principe de la méthode d'interférométrie et les techniques de traitement du signal usuellement utilisées. Les limites de cette méthode sont alors mises en évidence que ce soit en raison d'un caractère dispersif trop important du matériau, de la géométrie même de l'échantillon, ou bien de la fréquence d'étude choisie. En réponse aux problèmes soulevés, des méthodes d'identifications basées sur le calcul de la réponse complète en réflexion [Lavrentyev et Rokhlin, 1997] ou en transmission [Kinra et

Iyer, 1995; Hosten *et al.*, 1997; Castaing *et al.*, 2000] pour une lame à faces parallèles ont été proposées. Partant de ce même principe, le deuxième chapitre présente la technique de caractérisation par reconstruction de formes d'ondes que nous avons développée.

Tout d'abord, l'écriture du problème direct permet de poser nos hypothèses de travail. La configuration retenue est une lame à faces parallèles viscoélastique de symétrie quelconque sous l'hypothèse d'une propagation en ondes planes. Une formulation analytique de la réponse de la plaque en transmission et, par conséquent, de la forme d'onde du signal transmis, est alors établie faisant apparaître les constantes viscoélastiques dépendantes de la fréquence, comme paramètres du problème. Ensuite, le procédé inverse de reconstruction est présenté. Après avoir formulé les deux fonctions objectif permettant de quantifier le degré de vraisemblance entre deux jeux de signaux, nous définissons deux stratégies d'identification des évolutions fréquentielle des constantes viscoélastiques : une approche dite "globale", où la paramétrisation des évolutions fréquentielle des constantes viscoélastiques s'effectue sur la base de modèles rhéologiques classiques prédéfinis, et l'approche dite "locale", où l'identification est effectuée autour d'une fréquence à partir d'un développement limité au premier ordre des rigidités complexes.

Ensuite, une première phase de validation des techniques implémentées est effectuée à partir de simulations. Les effets de divers paramètres, tels que le niveau de bruit, l'épaisseur de la plaque et les degrés d'anisotropie et d'atténuation du matériau, sont étudiés. Dans cette première étape de validation, le modèle rhéologique est supposé connu sur la plage fréquentielle étudiée. La technique d'identification utilisée est alors globale. L'influence du choix d'un modèle rhéologique prédéfini sur l'identification des constantes viscoélastiques est alors discuté. Ce choix apparaît alors être un point prépondérant de la qualité de la reconstruction globale. Dès lors, l'approche fréquentielle locale de la technique de reconnaissance de formes d'ondes, permet par une identification "par morceaux" de retrouver des lois d'évolution quelconques des rigidités en fonction de la fréquence. La reconstruction de comportements rhéologiques complexes peut ainsi être effectuée. Cette identification des paramètres autorise également, lors de l'optimisation, le respect des conditions locales de causalité et permet ainsi d'identifier des lois de comportement rhéologiques respectant ce principe physique.

Le chapitre 4 présente les confrontations expérimentales. Deux essais sont retenus afin de valider expérimentalement la méthode de caractérisation globale. Le premier échantillon étudié est une plaque de Polyméthylméthacrylate (PMMA), matériau isotrope présentant un comportement viscoélastique classique propre à une absorption pure. Le deuxième est une lame de composite carbone-SiC 2D, milieu anisotrope et fortement dispersif. Enfin, une étude préliminaire en incidence normale de l'identification locale est effectuée mettant en évidence les possibilités offertes par cette démarche.

Chapitre I

Propagation ultrasonore en milieu viscoélastique linéaire anisotrope

La réponse d'un matériau à une sollicitation mécanique n'est jamais physiquement instantanée. Cette réponse étalée dans le temps, aussi brève soit elle, traduit le caractère viscoélastique d'un milieu. Ainsi, tout matériau est susceptible de présenter un comportement viscoélastique qu'il soit marqué ou non. En acoustique, la viscoélasticité se traduit par une dispersion (dépendance de la vitesse de propagation avec la fréquence) et une atténuation des signaux ultrasonores. Les phénomènes de dispersion et d'atténuation des ondes ultrasonores sont essentiellement dus, soit à une absorption, soit à une diffraction dans le milieu de propagation. De tels phénomènes sont généralement modélisés par une loi de comportement viscoélastique du milieu homogène équivalent [Bourbié *et al.*, 1986, Lakes, 1998].

Les motivations de la prise en compte des phénomènes viscoélastiques sont multiples. C'est avant tout un moyen d'affiner la modélisation et de se rapprocher ainsi d'un cas réel. C'est pourquoi, la prise en compte de la viscosité dans le modèle de propagation ultrasonore s'avère nécessaire pour la plupart des matériaux. L'occultation des phénomènes visqueux lors d'une caractérisation ultrasonore peut conduire à des erreurs, y compris sur l'évaluation des propriétés élastiques du milieu. En outre, la dispersion est également une source d'informations complémentaires profondément liées aux propriétés de la microstructure du matériau (hétérogénéités, microfissures, porosités) [Sutherland, 1975; Kinra et Anand, 1982; Bourbié *et al.*, 1986; Chandra *et al.*, 1999; Biwa et Shibata, 2000].

1. LOI DE COMPORTEMENT LINÉAIRE POUR UN MILIEU VISCOÉLASTIQUE ANISOTROPE

En mécanique des solides, la loi de comportement d'un matériau viscoélastique s'écrit sous la forme d'une dépendance temporelle des relations liant les contraintes et les déformations du milieu. Cette partie pose le formalisme utilisé afin d'établir les équations constitutives des matériaux viscoélastiques linéaires sous leur forme temporelle puis fréquentielle. Les relations de Kramers-Krönig sont alors brièvement rappelées pour ensuite présenter les deux approches globale et locale utilisées pour la paramétrisation des propriétés viscoélastiques.

1.1. Les équations constitutives généralisées

Les équations constitutives d'un matériau élastique sont exprimées classiquement par la loi de Hooke généralisée [Lemaitre et Chaboche, 1985] :

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (I.1)$$

où C_{ijkl} sont les composantes du tenseur d'ordre 4 des rigidités du matériau, et où σ_{ij} et ε_{kl} représentent respectivement les composantes des tenseurs du second ordre des contraintes et des déformations. Notons que nous omettrons par la suite les symboles somme en utilisant la convention de sommation d'Einstein. Cette relation (I.1) traduit une loi de comportement tridimensionnelle du matériau où l'état d'une contrainte pour une surface et une direction donnée peut dépendre de l'ensemble du tenseur des déformations (cas triclinique).

Par la suite et ce par souci de simplification des écritures tensorielles, les tenseurs symétriques des contraintes et des déformations sont notés la plupart du temps sous leur forme contractée avec les conventions suivantes :

- si $i = j$ (resp. $k = l$)
alors $I = i$ (resp. $J = k$) $\Rightarrow \sigma_I = \sigma_{ij}$ (resp. $\varepsilon_J = \varepsilon_{kl}$),
- si $i \neq j$ (resp. $k \neq l$)
alors $I = 9 - (i + j)$ (resp. $J = 9 - (k + l)$) $\Rightarrow \sigma_I = \sigma_{ij}$ (resp. $\varepsilon_J = 2\varepsilon_{kl}$).

Dans le cas des milieux viscoélastiques, les contraintes évaluées à un instant donné t , dépendent non seulement des déformations à cet instant (réponse instantanée) mais également de l'histoire passée de ces déformations (phénomène de relaxation), ce qui peut s'écrire [Lemaitre et Chaboche, 1985] :

$$\sigma_I(t) = \mathcal{F}_{IJ}(\varepsilon_J(\tau)), \quad -\infty < \tau \leq t. \quad (I.3)$$

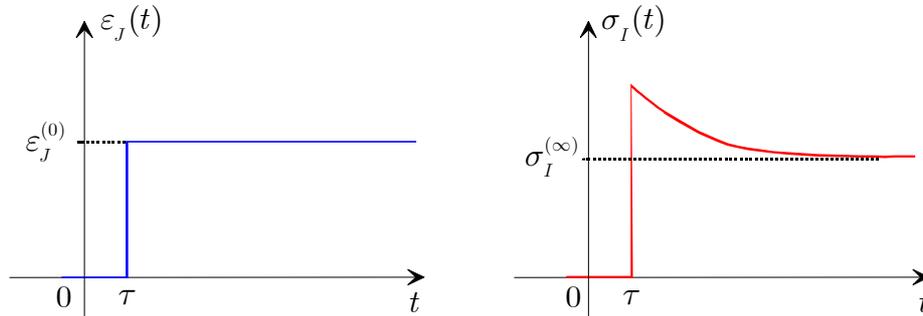


Figure I.1 : Courbes des déformations et des contraintes au sein d'un matériau viscoélastique lors d'un essai de relaxation.

Prenons le cas simple d'un essai de relaxation (cf. Fig. I.1). Le tenseur des fonctions de relaxation est alors défini comme l'ensemble des fonctions $\mathfrak{R}_{IJ}(t)$ telles que :

$$\sigma_I(t) = \mathfrak{R}_{IJ}(t - \tau) \varepsilon_J^{(0)}, \quad (I.4)$$

où $\sigma_I(t)$ est la réponse en contraintes aux sollicitations de relaxation $\varepsilon_J(t)$ définies par :

$$\varepsilon_J(t) = \mathcal{H}(t - \tau) \varepsilon_J^{(0)}, \quad (I.5)$$

$\mathcal{H}(t)$ représentant la fonction d'Heaviside et $\varepsilon_J^{(0)}$ étant une constante homogène à une déformation.

Dans le cadre de la mécanique des comportements linéaires, le principe de superposition de Boltzmann stipule que l'effet provenant d'une composition de différentes causes est la somme des effets individuels dus à chacune de ces causes (cf. Fig. I.2). Ainsi, en se servant de

la relation (I.4), la contrainte $\sigma_I(t)$ à un instant t peut être définie comme la somme infinitésimale des contraintes engendrées par l'histoire passée des déformations $\varepsilon_J(\tau)$ avec $\tau \in [0, t]$. En écrivant cette somme d'événements continus par morceaux sous la forme d'une intégrale au sens de Stieljes [Christensen, 1982], l'expression de $\sigma_I(t)$ s'écrit :

$$\sigma_I(t) = \int_{\varepsilon_J(0)}^{\varepsilon_J(t)} \mathfrak{R}_{IJ}(t - \tau) d\varepsilon_J(\tau). \quad (\text{I.6})$$

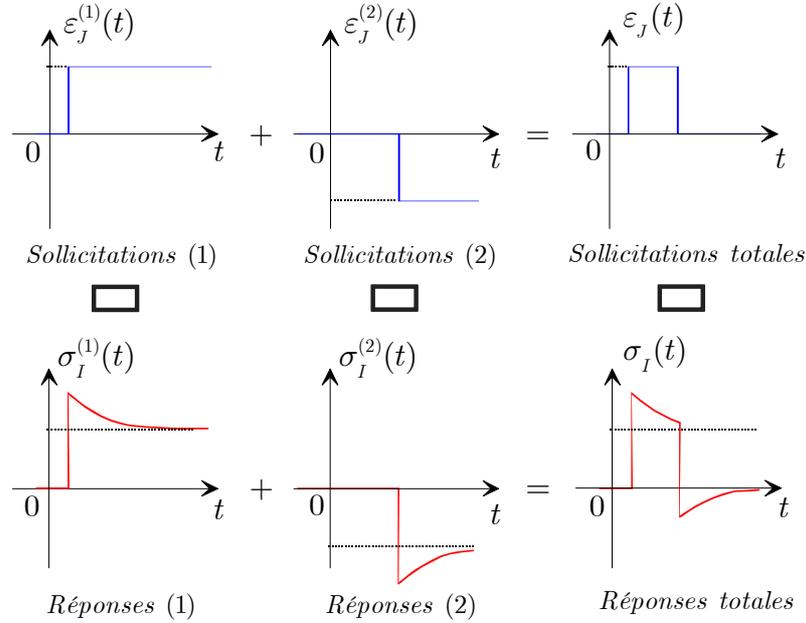


Figure I.2 : Illustration du principe de superposition de Boltzmann : la somme des réponses provoquées par chacune des sollicitations est égale à la réponse totale causée par la somme de ces sollicitations.

Les déformations étant supposées continues dérivables par morceaux et les fonctions étant toutes "causales", c'est à dire identiquement nulles pour tout temps t strictement négatif, l'équation (I.6) s'écrit sous la forme d'un produit de convolution :

$$\sigma_I(t) = (\mathfrak{R}_{IJ} * \dot{\varepsilon}_J)(t), \quad (\text{I.7})$$

où $\dot{\varepsilon}_J(t)$ représente la dérivée temporelle de $\varepsilon_J(t)$ au sens des distributions.

1.2. Écriture fréquentielle des équations constitutives

L'écriture fréquentielle des équations constitutives est nécessaire pour établir la formulation de l'équation de propagation de Christoffel en milieu viscoélastique, présentée au paragraphe 2.1. Afin de reformuler la relation temporelle (I.7) en une formulation fréquentielle équivalente, il est essentiel de définir la transformée de Fourier ainsi que de rappeler quelques-unes de ses propriétés. La transformation de Fourier est un opérateur applicable à toute fonction d'énergie finie $y(t)$ définie, telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt < +\infty, \quad (\text{I.8})$$

ensemble des fonctions, noté $L^2(\mathbb{R})$. Alors, la transformée de Fourier d'une fonction $y(t)$ appartenant à $L^2(\mathbb{R})$ est définie par :

$$Y(\omega) = \hat{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (\text{I.9})$$

où t représente le temps, ω est la pulsation égale à $2\pi\nu$ et ν la fréquence. La notation avec le signe chapeau au-dessus de la fonctionnelle ne sera par la suite utilisée que pour des lettres grecques ou symboles particuliers. L'application de la transformée de Fourier sera également étendue aux fonctions intégrables au sens des distributions telle que la fonction de Dirac $\delta(t)$ ou la fonction d'Heaviside $\mathcal{H}(t)$.

Notons la propriété usuelle de la transformée de Fourier d'un produit de convolution de deux fonctions $(y * z)(t)$ qui n'est autre que le produit des transformées de Fourier $Y(\omega)$ et $Z(\omega)$ de ces deux fonctions :

$$\widehat{(y * z)}(\omega) = Y(\omega) Z(\omega). \quad (\text{I.10})$$

Dès lors, il est possible d'écrire la relation temporelle (I.7) dans le domaine fréquentiel. Notons que si les grandeurs physiques, telles que les déformations ou les contraintes, sont à énergie finie, la fonction de relaxation $\mathfrak{R}_{IJ}(t)$ ne l'est généralement pas, celle-ci tendant à l'infini vers une constante notée $C_{IJ}^{(\infty)}$. Par contre, la dérivée de la fonction de relaxation, notée $c_{IJ}(t)$ est une fonction nulle à l'infini appartenant à $L^2(\mathbb{R})$. Il vient alors la relation :

$$\sigma_I(t) = (\mathfrak{R}_{IJ} * \dot{\varepsilon}_J)(t) = (\dot{\mathfrak{R}}_{IJ} * \varepsilon_J)(t) = (c_{IJ} * \varepsilon_J)(t) \quad (\text{I.11})$$

et d'après (I.10), nous obtenons :

$$\hat{\sigma}_I(\omega) = C_{IJ}(\omega) \hat{\varepsilon}_J(\omega), \quad (\text{I.12})$$

où les $C_{IJ}(\omega)$, transformées de Fourier des $c_{IJ}(t)$, représentent les composantes complexes du tenseur des rigidités. Ces fonctions fréquentielles établissent ainsi des relations linéaires entre les contraintes et les déformations, comparables au cas purement élastique de l'équation (I.1). La formulation fréquentielle (I.12) indique alors que la réponse d'un milieu viscoélastique à une excitation harmonique est reliée linéairement par les coefficients complexes $C_{IJ}(\omega)$ définissant les rigidités complexes du milieu à la fréquence angulaire ω . L'écriture (I.12) de la loi de comportement d'un milieu viscoélastique sera utilisée par la suite pour l'écriture de l'équation de propagation d'une onde plane monochromatique.

1.3. Prise en compte de la causalité : relations de Kramers-Krönig

Le principe de causalité, applicable à tout phénomène physique, postule simplement qu'un effet ne peut précéder sa cause. De ce fait, la fonction de relaxation ainsi que sa dérivée doivent être des fonctions causales. Cette hypothèse de causalité implique alors des relations fréquentielles entre les parties réelle et imaginaire des $C_{IJ}(\omega)$ usuellement appelées relations de Kramers-Kronig [Krönig, 1926]. Ces relations ont fait l'objet de nombreuses applications dans l'étude des phénomènes dispersifs [Mangulis, 1964; Horton Sr., 1974; O'Donnell *et al.*, 1981; Angel et Achenbach, 1991; Hosten, 1998; Mobley *et al.*, 2000]. La fonction de relaxation est décomposée en deux fonctions causales sous la forme :

$$\mathfrak{R}_{IJ}(t) = \tilde{\mathfrak{R}}_{IJ}(t) + C_{IJ}^{(\infty)} \mathcal{H}(t), \quad (\text{I.13})$$

où $\tilde{\mathfrak{R}}_{IJ}(t)$ est une fonction de l'espace $L^2(\mathbb{R})$. Par ailleurs, il vient :

$$c_{IJ}(t) = \tilde{c}_{IJ}(t) + C_{IJ}^{(\infty)}\delta(t). \quad (\text{I.14})$$

Si une fonction $y(t)$ est supposée causale, la partie réelle de la transformée de Fourier de y , notée $Y'(\omega)$, est reliée à la partie imaginaire de la transformée de Fourier de y , notée $Y''(\omega)$ par la relation [De Coulon, 1984] :

$$Y'(\omega) = Hi\{Y''\}(\omega) \Leftrightarrow Y''(\omega) = -Hi\{Y'\}(\omega), \quad (\text{I.15})$$

où $Hi\{y\}$ représente la transformée de Hilbert d'une fonction y . Celle-ci est définie par :

$$Hi\{y\}(t) = \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(u)}{t-u} du = vp \left\{ \frac{1}{\pi t} * y(t) \right\}, \quad (\text{I.16})$$

où vp indique la valeur principale de Cauchy, ce produit de convolution pouvant présenter des points de singularité. Les propriétés de la transformée de Fourier d'une fonction réelle $y(t)$ imposent les relations :

$$Y'(\omega) = Y'(-\omega) \text{ et } Y''(\omega) = -Y''(-\omega). \quad (\text{I.17})$$

Ainsi, en appliquant les relations (I.15) et (I.17) à la fonction réelle causale $\tilde{c}_{IJ}(t)$, il vient les relations de Kramers-Krönig :

$$\begin{cases} C'_{IJ}(\omega) - C_{IJ}^{(\infty)} = \frac{2}{\pi} vp \int_0^{+\infty} \frac{u C''_{IJ}(u)}{\omega^2 - u^2} du \\ C''_{IJ}(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} vp \int_0^{+\infty} \frac{C'_{IJ}(u) - C_{IJ}^{(\infty)}}{\omega^2 - u^2} du \end{cases}. \quad (\text{I.18})$$

En prenant l'hypothèse de faibles variations des $C_{IJ}(\omega)$ en fonction de la fréquence (absence de pics de résonance), O'Donnell *et al.* [1981] proposent une formulation locale des relations (I.18), issue d'une approximation au premier ordre des C'_{IJ} , sous la forme :

$$C''_{IJ}(\omega) = \frac{\pi}{2} |\omega| \frac{dC'_{IJ}(\omega)}{d\omega}. \quad (\text{I.19})$$

Cette approximation locale prendra tout son intérêt lors de l'utilisation du formalisme "local" modélisant le comportement rhéologique du matériau présenté au paragraphe suivant.

1.4. Modèles rhéologiques : formalisme global et formalisme local

Dans l'hypothèse d'une loi de comportement viscoélastique linéaire, la relation fréquentielle (I.12) définit les raideurs $C_{IJ}(\omega)$ du milieu considéré comme des fonctions complexes dépendant de la fréquence. Des modèles rhéologiques usuels, dits "classiques", généralement utilisés pour les fréquences ultrasonores [Deschamps et Hosten, 1992; Lakes, 1998] sont de la forme :

$$C_{IJ}(\omega) = C'_{IJ} + i \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^p C''_{IJ}(\omega_0), \quad (\text{I.20})$$

où la partie réelle est une constante notée C'_{IJ} et où la partie imaginaire possède une dépendance polynomiale de degré p , égal le plus souvent à 0, 1 voir 2 (constante, linéaire ou quadratique). La constante $C''_{IJ}(\omega_0)$ représente alors la valeur imaginaire des rigidités à la pulsation ω_0 . Remarquons que pour les modèles de type (I.20), le principe de causalité décrit par les relations de Kramers-Krönig n'est pas respecté. Néanmoins, ceux-ci s'en approchent dans le cas où $C'_{IJ} \gg C''_{IJ}(\omega_0)$ pour une gamme de pulsations proches de la pulsation ω_0 . Ainsi, par une formulation simple prédéfinie (I.20), le comportement viscoélastique d'un milieu est modélisé à l'aide de deux paramètres pour chacune des rigidités d'un matériau viscoélastique. Dans des modélisations plus complexes, d'autres paramétrages plus élaborés, comme le modèle de Maxwell généralisé [Lemaitre et Chaboche, 1985], peuvent être définis. Cependant, cela conduit rapidement à une multiplication des paramètres du modèle.

Le second point important réside dans l'homogénéité présumée des lois d'évolution fréquentielles de chaque raideurs $C_{IJ}(\omega)$. En effet, dans la plupart des études, les fonctions $C_{IJ}(\omega)$ en milieu viscoélastique sont toutes paramétrées selon les mêmes modèles rhéologiques (i.e., degré de p invariant). Si ce choix paraît judicieux dans le cas de polymères, où l'absorption présente un caractère homogène quelle que soit la sollicitation mécanique, cette hypothèse peut s'avérer inexacte dans le cas de composites où les phénomènes d'atténuation sont variables avec la nature de l'excitation [Lakes, 1998; Biwa et Shibata, 2000]. Les modèles rhéologiques correspondant sont alors dits "inhomogènes".

La modélisation simplifiée définie par la relation (I.20) peut donc s'avérer pertinente dans le cas d'un matériau peu absorbant. Cependant, pour des matériaux au comportement viscoélastique marqué ou inhabituel, il est intéressant de proposer d'autres types de modèles plus adaptatifs. Ainsi, afin de respecter la causalité et de décrire des lois d'évolutions inhomogènes des raideurs $C_{IJ}(\omega)$, une paramétrisation locale des évolutions des raideurs est proposée. En écrivant le développement limité au premier ordre des fonctions $C_{IJ}(\omega)$ autour de la pulsation ω_0 :

$$C_{IJ}(\omega_0 + \Delta\omega) = C_{IJ}(\omega_0) + \frac{dC_{IJ}}{d\omega}(\omega_0) \Delta\omega + o(\Delta\omega), \quad (\text{I.21})$$

où $o(\Delta\omega)$ est une fonction de limite nulle quand $\Delta\omega$ tend vers 0. Ainsi, les 4 paramètres réels, permettant de traduire localement les variations au premier ordre de la raideur $C_{IJ}(\omega)$ autour de la pulsation ω_0 , ne sont autres que :

$$C'_{IJ}(\omega_0), C''_{IJ}(\omega_0), \frac{dC'_{IJ}}{d\omega}(\omega_0) \text{ et } \frac{dC''_{IJ}}{d\omega}(\omega_0).$$

Par conséquent, la paramétrisation ainsi effectuée ne présume *a priori* d'aucune évolution particulière pour chaque raideur et autorise, en outre, l'introduction de la relation (I.19) comme condition locale de causalité. Ces points traitant de la modélisation des lois de comportement en milieux viscoélastiques linéaires seront développés plus amplement dans le chapitre 2 traitant de la paramétrisation des modèles rhéologiques pour la formulation de notre problème inverse.

2. ÉQUATION DE PROPAGATION DANS UN MILIEU VISCOÉLASTIQUE ANISOTROPE

2.1. L'équation de propagation

Le champ de déplacement d'une particule est noté $\vec{u}(t, \vec{x})$, où t est le temps et \vec{x} est le vecteur position de la particule considérée au repos. Les équations de propagation seront établies dans le cadre de l'acoustique linéaire avec l'hypothèse des petites déformations. Les milieux de propagation sont supposés homogènes viscoélastiques linéaires (cf. Eq. (I.12)). De plus, tout effet thermique ainsi que les efforts de volume sont négligés. Sous ces conditions, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j}, \quad (\text{I.22})$$

où ρ est la densité du milieu et où la notation non contractée des tenseurs des contraintes et déformations est temporairement réutilisée.

De plus, l'expression du tenseur des déformations en fonction du champ de déplacement, en négligeant les termes du second ordre, est la suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (\text{I.23})$$

Les tenseurs des déformations et des contraintes étant symétriques, les équations constitutives (I.12) impliquent une double symétrie du tenseur des fonctions de relaxation et par la même du tenseur des rigidités complexes. On obtient alors la relation :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk}. \quad (\text{I.24})$$

En combinant les équations (I.23) et (I.24), il vient :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} * u_{l,k}, \quad (\text{I.25})$$

où le produit de convolution (cf. Eq. (I.11)), remplace ici le produit simple utilisé dans le cadre de l'élasticité linéaire. L'équation de propagation d'un milieu homogène anisotrope viscoélastique linéaire se déduit alors en introduisant l'équation (I.25) dans (I.22). Finalement, il vient :

$$\rho \ddot{u}_i = c_{ijkl} * u_{l,jk}. \quad (\text{I.26})$$

2.2. Formulation de Christoffel

Le champ réel de déplacement $\vec{u}(t, \vec{x})$ pour une onde plane hétérogène harmonique, peut s'écrire sous la forme [Auld, 1990] :

$$\vec{u}(t, \vec{x}) = \text{Re} \left\{ A \vec{P} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right\} = \text{Re} \left\{ A \vec{P} e^{i\omega(t - \vec{S} \cdot \vec{x})} \right\}, \quad (\text{I.27})$$

où A est l'amplitude complexe de l'onde, \vec{P} est son vecteur polarisation complexe, ω est la pulsation considérée ici comme réelle et $\vec{S} = \vec{S}' - i\vec{S}''$ est le vecteur lenteur complexe de l'onde, utilisé dans les équations en lieu et place de l'usuel vecteur d'onde complexe $\vec{k} = \omega \vec{S}$.

Dans la suite des calculs, nous travaillerons en omettant la notation de la partie réelle dans l'expression (I.27). Rappelons que la partie réelle \vec{S}' du vecteur lenteur indique la normale aux plans équiphases et désigne la direction de propagation de la phase. La vitesse de propagation des plans équiphases d'une onde plane hétérogène, ou vitesse de phase, notée V , est reliée à la partie réelle du vecteur lenteur par la relation :

$$V^{-1} = \sqrt{\vec{S}' \cdot \vec{S}'} . \quad (\text{I.28})$$

La partie imaginaire \vec{S}'' du vecteur lenteur indique la normale aux plans équiampitudes et désigne alors la direction de décroissance de l'amplitude.

L'équation de propagation (I.26) appliquée à une onde plane hétérogène harmonique de pulsation ω fixée, décrite par (I.27), conduit à l'expression :

$$C_{ijkl} S_j S_k u_l - \rho u_i = 0 . \quad (\text{I.29})$$

Cette équation conduit au système aux valeurs propres de Christoffel [Auld, 1990] communément écrit sous la forme :

$$\left(C_{ijkl} S_j S_k - \rho \delta_{il} \right) P_l = \Omega_{il} P_l = 0 . \quad (\text{I.30})$$

où Ω est une matrice carrée symétrique de dimension trois. En posant $S = \sqrt{\vec{S} \cdot \vec{S}}$, norme au sens complexe du vecteur lenteur, on définit une direction de propagation complexe $\vec{n} = \vec{n}' + i\vec{n}''$, telle que [Poncelet et Deschamps, 1997] :

$$\vec{S} = S \vec{n} , \quad (\text{I.31})$$

avec $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ (vecteur complexe unitaire). Pour cette direction de propagation \vec{n} fixée, on définit le tenseur d'ordre deux et de dimension trois, appelé tenseur de Christoffel, tel que :

$$\Gamma_{il} = C_{ijkl} n_j n_k . \quad (\text{I.32})$$

La relation (I.30) s'écrit alors comme un système aux valeurs propres de la forme :

$$\left(\Gamma_{il} - \rho S^{-2} \delta_{il} \right) P_l = 0 . \quad (\text{I.33})$$

Ainsi, d'après l'équation (I.33), pour une direction de propagation complexe donnée, il existe trois modes de propagation différents. Les lenteurs complexes $S^{(m)}$ de chacun de ces modes ne sont autres que les valeurs propres du système (I.33). Le vecteur polarisation associé, noté $\vec{P}^{(m)}$, correspond alors au vecteur propre associé à la valeur propre $S^{(m)}$.

Notons que, dans le cas de la viscoélasticité, le tenseur de Christoffel est dépendant de la fréquence. Par conséquent, les lenteurs sont elles-mêmes dépendantes de la fréquence. Le mode de propagation est alors dit dispersif. Dans le cadre de la propagation en milieu infini, il existe ainsi une relation de cause à effet entre le comportement viscoélastique et la dispersion acoustique des modes de propagation.

3. L'INTERFÉROMÉTRIE ULTRASONORE : PRINCIPES ET LIMITES DE LA MÉTHODE

L'équation de propagation de l'acoustique linéaire établit une relation entre les propriétés des ondes acoustiques se propageant dans un milieu et les propriétés mécaniques de ce milieu. Pour une direction de propagation complexe \vec{n} fixée, l'équation (I.33) relie les vitesses de phase et les atténuations des modes générés aux constantes viscoélastiques du milieu.

Se basant sur ces relations, de nombreux auteurs ont exploité les propriétés des ondes de volume afin d'évaluer les caractéristiques mécaniques des matériaux. Markham [1970] puis Smith [1972] proposèrent une première approche afin de déterminer les propriétés élastiques de matériaux anisotropes. C'est dès le début des années 80 que des travaux similaires ont commencé au sein du Laboratoire de Mécanique Physique (LMP). Les premières études furent initiées par J. Roux, B. Hosten et B. Castagnède [Hosten *et al.*, 1983; Hosten et Castagnède, 1983; Castagnède, 1984; Roux *et al.*, 1985] qui développèrent une technique de caractérisation automatisée, dite "d'interférométrie ultrasonore". Par la suite cette technique a connu des évolutions et améliorations permanentes à travers les différentes thèses consacrées à ce sujet [Deschamps, 1985; Audoin, 1991; Jourdain-Baudouin, 1996; Aristégui, 1997].

Le principe de l'interférométrie ultrasonore réside dans la comparaison de deux signaux issus d'une même source $e(t)$. L'un des signaux, appelé signal de référence, noté $r(t)$, possède des propriétés "maîtrisées", la réponse impulsionnelle $h_r(t)$ du système de référence étant connue. L'autre signal $y(t)$ est issu d'une réponse impulsionnelle inconnue, notée $h_y(t)$, dont on cherche à évaluer les propriétés. Ainsi définis, les deux signaux s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} r(t) = (e * h_r)(t) \\ y(t) = (e * h_y)(t) \end{cases} \quad (I.34)$$

En formulant le système (I.34) dans le domaine fréquentiel, le terme source $e(t)$ est supprimé et il vient ainsi la relation :

$$Y(\omega) = R(\omega) \frac{H_y(\omega)}{H_r(\omega)} = R(\omega)H(\omega), \quad (I.35)$$

où les transformées de Fourier des signaux sont aussi appelés les spectres des signaux. Le principe de l'interférométrie consiste à étudier les informations de la fonction de transfert H pour en déduire les propriétés de la réponse impulsionnelle inconnue $h_y(t)$.

Dans le cadre de l'interférométrie ultrasonore, les réponses impulsionnelles sont les filtres propagatifs d'ondes se propageant dans un milieu sur une distance donnée. Ainsi, nous appellerons milieu de référence, le milieu de propagation du signal de référence dont les propriétés mécaniques sont connues. L'étude du filtre propagatif du milieu inconnu permet alors de déduire, par l'écriture de problèmes inverses, les paramètres traduisant le comportement mécanique du milieu.

Nous nous attacherons tout d'abord à présenter la technique de spectro-interférométrie appliquée au dispositif expérimental. Ensuite nous développerons les différentes techniques de mesure de temps de vol permettant de déduire les vitesses de propagation. Nous aborderons alors les problèmes et les limites de la méthode d'interférométrie et les raisons pour lesquelles nous avons été amenés à développer une nouvelle technique basée sur la modélisation de la réponse d'une lame immergée.

3.1. Configuration expérimentale

L'échantillon est une lame à faces parallèles immergée. Le fluide assure le rôle d'agent de propagation des ondes entre les deux transducteurs, l'un jouant le rôle d'émetteur et l'autre de récepteur (cf. Fig. I.3). Le fluide est considéré comme le milieu de référence. La technique consiste à comparer le signal ayant traversé le fluide seul (sans échantillon) avec le signal ayant traversé la lame de propriétés inconnues.

La réponse ultrasonore en transmission d'une plaque est complexe. Pour simplifier, il est supposé que, dans le signal transmis $y(t)$, les différents modes de propagation puissent être distingués temporellement. Seuls les modes dits directs, c'est à dire ceux n'ayant subi aucune réflexion dans la lame, sont alors considérés. Dans un solide anisotrope quelconque, en conséquence de l'application de l'équation (I.30) et des lois de Snell-Descartes pour un dioptré fluide-solide, ces modes directs sont au nombre de trois [Dieulesaint et Royer, 1974].

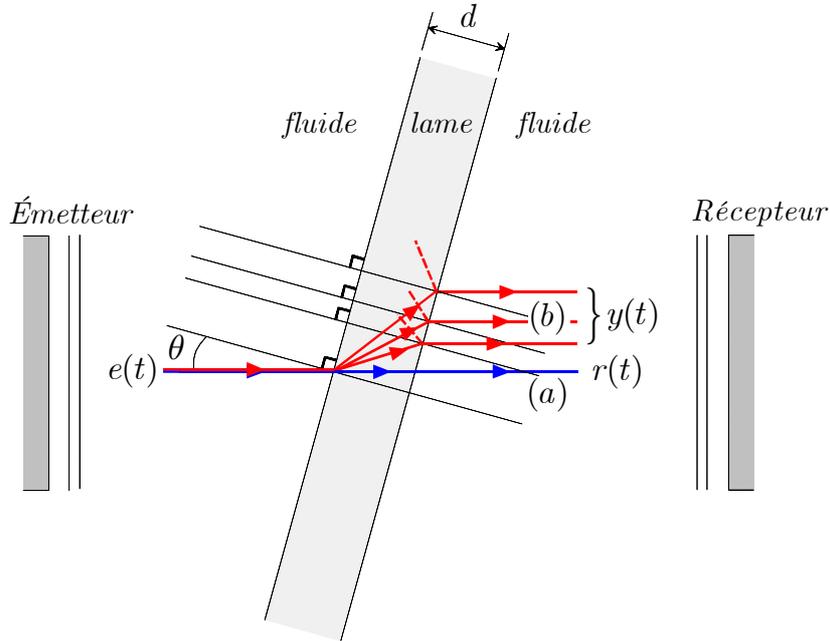


Figure I.3 : Représentation schématique du dispositif expérimental utilisé pour la caractérisation par interférométrie ultrasonore d'une lame à faces parallèles d'épaisseur d : (a) trajet des plans équiphases de l'onde plane sans échantillon, (b) trajets des plans équiphases des différents modes directs générés lors de la traversée de l'échantillon.

Ainsi, dans le cas où le fluide est considéré comme non-absorbant, la fonction de transfert $H^{(m)}$ d'un mode direct m , à une pulsation ω et un angle d'incidence θ (cf. Fig. I.3), s'écrit sous la forme :

$$H^{(m)}(\omega, \theta) = T^{(m)}(\omega, \theta) e^{-\alpha^{(m)}(\omega, \theta) d} e^{-i\omega \Delta t^{(m)}(\omega, \theta)}, \quad (\text{I.36})$$

où $T^{(m)}$ est le coefficient complexe de transmission du mode à travers les deux dioptrés, $\alpha^{(m)}$ son coefficient d'atténuation, d l'épaisseur de la lame et $\Delta t^{(m)}$ le décalage temporel de propagation entre le signal de référence et la partie du signal transmis correspondant au mode m (cf. Fig. I.4). En général, le temps de retard $\Delta t^{(m)}$ est dépendant de la fréquence traduisant ainsi le caractère dispersif du matériau. L'illustration apportée par la figure I.4 souligne les différences de propagation des plans équiphases avec et sans échantillon. Alors que le signal de référence parcourt pendant un temps t_r la distance d_r à la vitesse V_f dans le fluide, le mode direct m parcourt en un temps $t_y^{(m)}$ la distance $d_y^{(m)}$ avec une vitesse de phase $V^{(m)}$.

Ainsi, l'expression du décalage temporel $\Delta t^{(m)}$ s'écrit :

$$\Delta t^{(m)} = t_r - t_y^{(m)} = d_r V_f^{-1} - d_y^{(m)} (V^{(m)})^{-1}. \quad (\text{I.37})$$

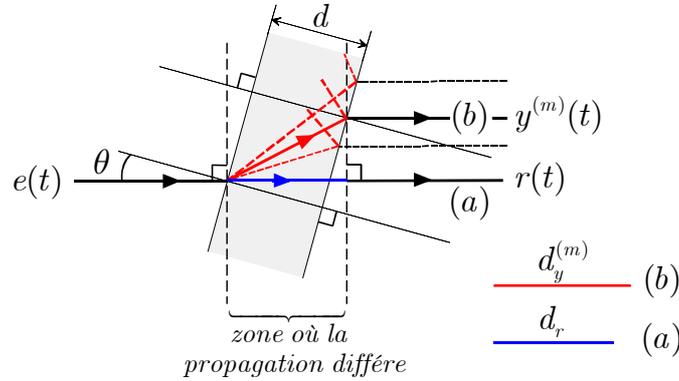


Figure I.4 : Tracé de la propagation des plans équiphases, (a) en l'absence d'échantillon, (b) en présence de l'échantillon pour un mode m . Visualisation de la différence des distances de parcours entre ces 2 modes permettant de déduire une relation entre le décalage temporel $\Delta t^{(m)}$ et la vitesse de phase $V^{(m)}$ du mode m .

En utilisant les lois de Snell-Descartes, l'angle de réfraction n'apparaît plus explicitement dans l'expression des distances de propagation. Ainsi, la mesure de la différence de temps de vol $\Delta t^{(m)}$ permet d'obtenir la vitesse de phase $V^{(m)}$ du mode volumique m , à partir de l'expression :

$$V^{(m)}(\omega, \theta) = V_f (1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2)^{-1/2}, \text{ avec } \beta = V_f d^{-1} \Delta t^{(m)}(\omega, \theta). \quad (\text{I.38})$$

La vitesse de phase du mode étant déterminée, le coefficient de transmission $T^{(m)}$ peut être déduit du jeu de paramètres connu $(V_f, V^{(m)}(\omega, \theta), \rho_f, \rho)$ où ρ_f et ρ sont respectivement les densités du fluide et de l'échantillon. De ce fait, le coefficient $T^{(m)}$ se ramène à une fonction de θ et ω . Le coefficient d'atténuation $\alpha^{(m)}$ est alors donné par :

$$\alpha^{(m)}(\omega, \theta) = \frac{1}{d} \ln \left[\left| T^{(m)}(\theta, \omega) \right| \left| \frac{R(\omega)}{Y^{(m)}(\omega, \theta)} \right| \right]. \quad (\text{I.39})$$

L'évaluation expérimentale des vitesses de phase et des atténuations des différents modes selon plusieurs angles d'incidence permet, par l'établissement du problème inverse approprié, de déterminer les propriétés mécaniques d'un milieu pour lesquelles l'écart des données expérimentales au modèle est minimum. Cette partie a fait l'objet de multiples travaux [Castagnède, 1984; Baudouin et Hosten, 1996; Aristégui, 1997] dénombrant plusieurs techniques d'optimisation mais le but n'est pas ici d'en développer le contenu.

3.2. Les techniques usuelles de mesure de temps de retard

3.2.1. La fonction d'intercorrélation

Une technique maintenant classique de mesure d'un décalage temporel entre deux signaux réside en l'utilisation des propriétés de la fonction d'intercorrélation [Knapp et Carter, 1976]. La fonction d'intercorrélation φ_{ry} entre deux signaux $r(t)$ et $y(t)$ est définie par :

$$\varphi_{ry}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{r(u)} y(u+t) du \Leftrightarrow \hat{\varphi}_{ry}(\omega) = \overline{R(\omega)} Y(\omega), \quad (\text{I.40})$$

où $\overline{}$ désigne la conjugaison complexe, dans le cas de signaux complexes, et naturellement l'identité pour le cas réel. La fonction d'autocorrélation $\varphi_{rr}(t)$ étant maximale pour un temps t nul, dans le cas d'un retard pur Δt entre les deux signaux $r(t)$ et $y(t) = r(t - \Delta t)$, la fonction d'intercorrrelation $\varphi_{ry}(t)$ s'écrit :

$$\varphi_{ry}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{r(u)} r(u+t - \Delta t) du = \varphi_{rr}(t - \Delta t). \quad (\text{I.41})$$

Ainsi, comme l'illustre la figure I.5, le maximum de $\varphi_{ry}(t)$ est atteint pour un temps t égal à Δt . Dans cette configuration, ce maximum est facilement repérable et donne une mesure très précise du temps de retard entre deux signaux de contenu spectral similaire.

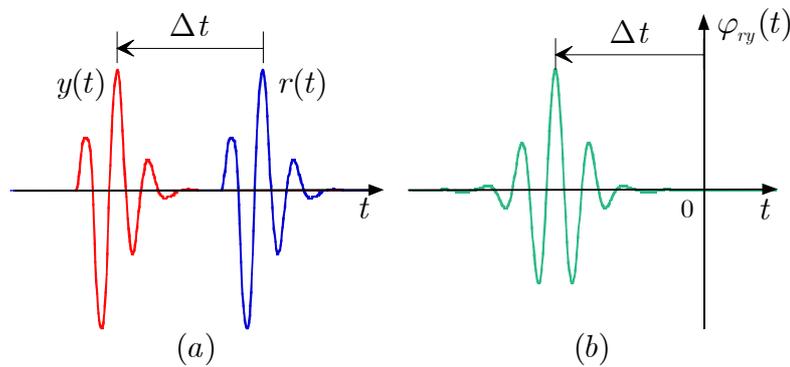


Figure I.5 : (a) Représentation schématique de deux signaux réels $r(t)$ et $y(t)$ décalés d'un temps Δt , tels que : $y(t) = r(t - \Delta t)$; (b) Fonction d'intercorrrelation réelle $\varphi_{ry}(t)$ entre les signaux $r(t)$ et $y(t)$.

Introduite et automatisée au LMP par B. Castagnède [1984], cette technique de mesure de temps de vol est très efficace pour des matériaux faiblement viscoélastiques ou pour des signaux à bande fréquentielle étroite. Cependant, cette méthode de mesure présente quelques désavantages notamment pour les signaux multimodaux ou fortement dispersifs dans lesquels la variation de la vitesse de propagation en fonction de la fréquence devient significative.

3.2.2. La transformée de Hilbert

Une autre technique développée, entre autre par B. Audoin [1991], utilise les propriétés de la transformée de Hilbert d'un signal afin de déterminer le décalage temporel entre deux signaux. Il s'agit d'étudier la transformée de Hilbert (cf. Eq.(I.16)) de la réponse impulsionnelle du filtre propagatif. Dans le cas d'un retard pur Δt entre deux signaux, la réponse impulsionnelle $h(t)$ est de la forme :

$$h(t) = \delta(t - \Delta t). \quad (\text{I.42})$$

Par conséquent, la transformée de Hilbert de $h(t)$ n'est autre que :

$$Hi\{h\}(t) = \frac{1}{\pi(t - \Delta t)}. \quad (\text{I.43})$$

La transformation de Hilbert possède ainsi la propriété intéressante de traduire un retard pur en une branche hyperbolique d'asymptote verticale facilement repérable (cf. Fig. I.6) qui

permet de déterminer également avec précision le temps de retard. Le retard Δt correspond au temps pour lequel la fonction $Hi\{h\}(t)$ coupe l'axe des abscisses.

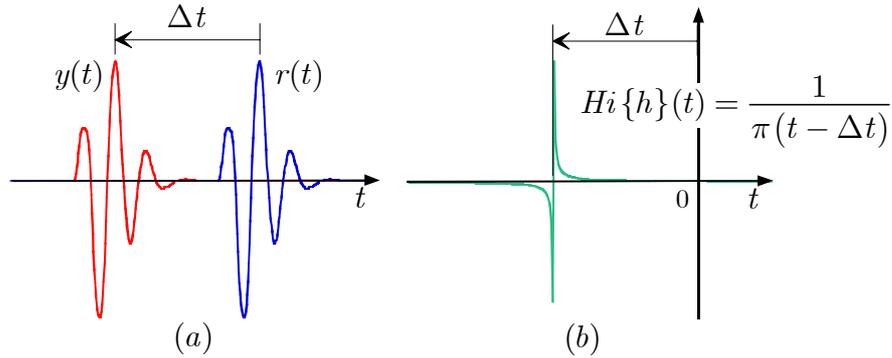


Figure 1.6 : (a) Représentation schématique de deux signaux $r(t)$ et $y(t)$ décalés d'un temps Δt tels que : $y(t) = r(t - \Delta t)$; (b) Transformée de Hilbert de la réponse impulsionnelle $h(t)$ telle que $r(t) = (h * y)(t)$.

Expérimentalement, la réponse impulsionnelle du système est déterminée à partir de la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert $H(\omega)$, déduite de (I.35) à l'aide d'une division spectrale de $Y(\omega)$ par $R(\omega)$.

Cette technique améliore notablement la chronométrie en présence de réponses multimodales ou dispersives [Audoin et Roux, 1996]. Ce point sera plus amplement développé dans le prochain paragraphe traitant des limites des techniques de chronométrie.

3.3. Les problèmes et limites des techniques de chronométrie

Si les techniques de chronométrie s'avèrent efficaces en théorie, elles peuvent dans le cas pratique conduire à une caractérisation erronée des propriétés mécaniques des matériaux. L'hypothèse principale, qui suppose la possibilité d'isoler les modes de volume dans le signal transmis, s'avère parfois délicate à vérifier. Les techniques de traitement du signal permettent de surmonter certaines difficultés (mélange de modes, signaux faiblement dispersifs). Cependant, il existe des limites au-delà desquelles l'erreur commise rend inadaptée la caractérisation mécanique par interférométrie ultrasonore.

3.3.1. L'analyse de réponses multimodales

Dans le cas réel, l'information contenue dans le signal transmis est multimodale. Cette réponse multimodale est due à un mélange des modes directs de polarisations longitudinale et transversales. Par extension, la notion de réponse multimodale inclut ici les mélanges dus aux réflexions multiples ou échos transmis. Dans cette configuration, pour un matériau supposé non dispersif, la fonction de transfert du signal transmis s'écrit sous la forme :

$$H(\omega, \theta) = H^{(1)}(\omega, \theta) + H^{(2)}(\omega, \theta) = T^{(1)}(\theta) e^{-i\omega \Delta t^{(1)}(\theta)} + T^{(2)}(\theta) e^{-i\omega \Delta t^{(2)}(\theta)}, \quad (\text{I.44})$$

où seulement deux modes sont considérés pour la clarté de l'exposé. Deux cas spécifiques sont alors différenciés. Soit il n'y a pas d'interaction énergétique entre les modes (cf. Fig. I.7) et alors l'hypothèse de séparabilité des modes s'écrit :

$$|\Delta t^{(1)} - \Delta t^{(2)}| \gg \Delta t_r, \quad (\text{I.45})$$

Δt_r étant l'encombrement temporel du signal de référence. Dans ce cas, les techniques de

chronométrie fournissent les temps d'arrivée de chacun des modes sans aucun biais (cf. Fig. I.7). Soit nous sommes en présence d'un mélange de modes, c'est à dire, dans les conditions où :

$$|\Delta t^{(1)} - \Delta t^{(2)}| < \Delta t_r. \quad (\text{I.46})$$

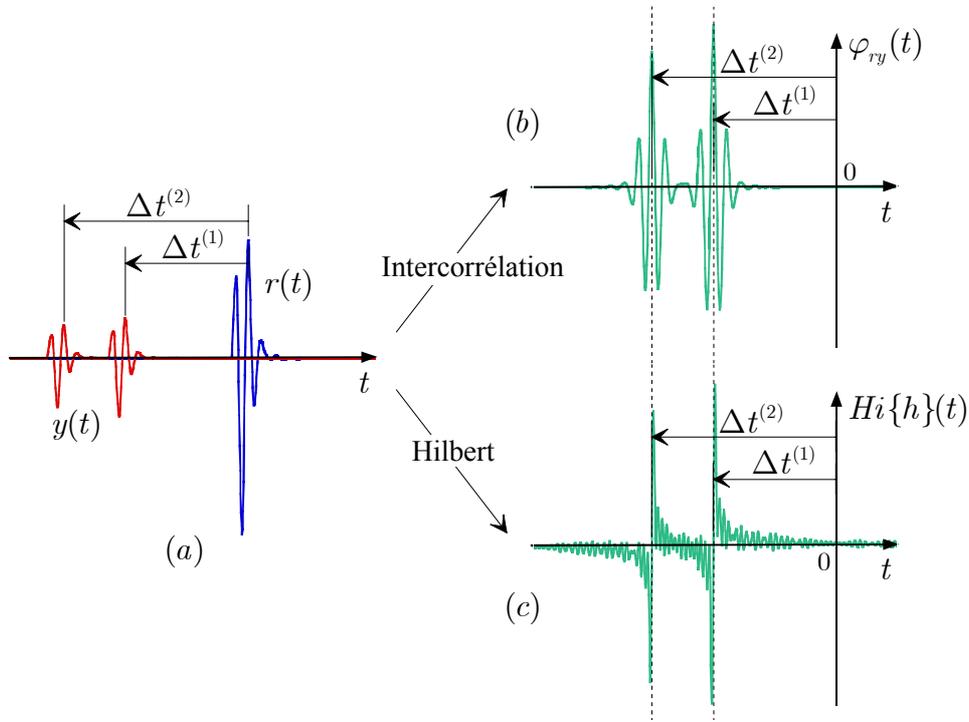


Figure I.7 : (a) Signal de référence et signal transmis multimodal simulé selon la fonction de transfert (I.44) dans la configuration d'une distinction entre les deux modes aisée : $|\Delta t^{(1)} - \Delta t^{(2)}| \gg \Delta t_r$; (b) Fonction d'intercorrrelation des deux signaux ; (c) Transformée de Hilbert de la réponse impulsionnelle.

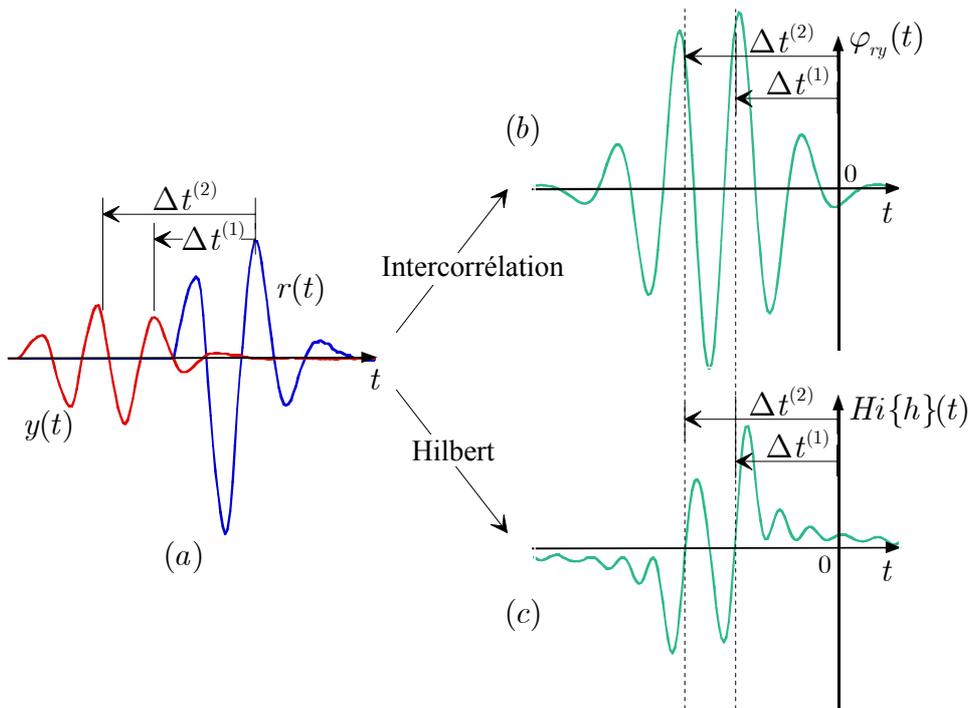


Figure I.8 : (a) Signal de référence et signal transmis multimodal simulé selon la fonction de transfert (I.44) dans la configuration d'une distinction entre les deux modes délicate : $|\Delta t^{(2)} - \Delta t^{(1)}| < \Delta t_r$; (b) Fonction d'intercorrrelation des deux signaux ; (c) Transformée de Hilbert de la réponse impulsionnelle.

Ceci se traduit par des interactions entre les modes (cf. Fig. I.8) rendant délicate la distinction de chacun des modes. Comme l'illustre cet exemple, si les mesures de la technique d'intercorrélation introduisent un biais non négligeable entre la localisation de ses maximums et les temps d'arrivée théoriques, la technique par transformée de Hilbert induit des erreurs bien moins importantes comme cela avait déjà pu être constaté [Audoin, 1991].

Ainsi, en présence de mélanges de modes, la mesure par transformée de Hilbert donne de meilleurs résultats. Les mesures de temps de vol ainsi déterminées ont permis d'étendre le domaine d'application de la technique d'interférométrie ultrasonore de mesure de propriétés supposées purement élastiques. Mais, en présence de mélange de modes, le contenu spectral $Y^{(m)}(\omega)$ de chacun des modes ne peut être déterminé précisément. De ce fait, une évaluation des atténuations $\alpha^{(m)}$, dans le cas d'un mélange de mode, ne peut pas être effectuée correctement pour un matériau viscoélastique.

3.3.2. L'analyse de signaux pour des milieux viscoélastiques

Nous n'exposerons dans ce paragraphe que l'étude de réponses dispersives unimodales excluant ainsi le problème lié aux mélanges de modes étudié précédemment.

Tout matériau est dispersif. Le tout est de savoir si la dispersion est un phénomène négligeable sur la plage de fréquence étudiée. En désaccord avec le principe de causalité traduit par les relations de Kramers-Krönig (cf. § I.1.3), une différenciation est faite dans un premier temps entre la notion de milieu viscoélastique, donc dispersif, et de milieu atténuant. La fonction de transfert dans un milieu atténuant est définie, pour un seul mode, telle que :

$$H(\omega, \theta) = T(\theta) e^{-\alpha(\omega, \theta)d} e^{-i\omega \Delta t(\theta)}. \quad (\text{I.47})$$

Dans ce cas, non physique, seule l'atténuation du mode est supposée dépendante de la fréquence. Les effets de dispersion sont alors négligés. Avec la relation (I.47), et en notant que l'atténuation est une fonction réelle paire (réponse impulsionnelle réelle), les deux techniques de traitement du signal ne présentent en théorie aucun biais dans la mesure des temps de vol.

Cette hypothèse simplificatrice, où les effets de dispersion ne sont pas pris en compte, peut s'avérer justifiée dans deux cas. Soit l'atténuation dans le milieu est faible sur la bande passante étudiée, et les phénomènes de dispersion peuvent alors être négligés (la variation de la vitesse de phase étant un phénomène du second ordre). Soit le signal de référence est à faible bande passante autour d'une pulsation ω_0 . Les mesures de vitesses et d'atténuations sont alors précises mais au voisinage de cette pulsation seulement. Dans la pratique, le signal de référence doit être de faible encombrement temporel (Δt_r faible) et donc à large bande fréquentielle afin de faciliter la séparation des modes.

Lorsque la dispersion des modes n'est plus un phénomène négligeable sur la plage de fréquence étudiée, la fonction de transfert prend la forme générale donnée par l'expression (I.36). La différence de temps de vol $\Delta t^{(m)}$ est alors fonction de la fréquence et il est difficile de relier les mesures effectuées par les techniques d'interférométrie à des grandeurs physiques non ambiguës. La simulation de signaux dispersifs montre que la technique par transformée de Hilbert fournit un temps de retard correspondant aux fréquences basses contenues dans le spectre de la référence tandis que l'intercorrélation indique une valeur de temps de vol pour une fréquence comprise entre les fréquences centrales de la référence et du signal transmis [Audoin, 1991]. Cette différence entre les techniques est mise en évidence dans la figure I.9 par la simulation d'un signal dispersif issu d'un filtre propagatif causal. En posant un

coefficient d'atténuation $\alpha(\omega) = a\omega^2$, d'après les relations locales de causalité [O'Donnell *et al.*, 1981], il vient l'expression de $\Delta t(\omega)$ suivante :

$$\Delta t(\omega) = \Delta t_0 - (2ad / \pi) |\omega|, \quad (\text{I.48})$$

où a est une constante positive. Ainsi, des mesures de temps de vol effectuées, nous pouvons déduire les fréquences angulaires de ω_φ et ω_{Hi} correspondant respectivement aux mesures de temps $\Delta t(\omega_\varphi)$ par l'intercorrrelation et $\Delta t(\omega_{Hi})$ par la transformée de Hilbert (cf. Fig. I.9).

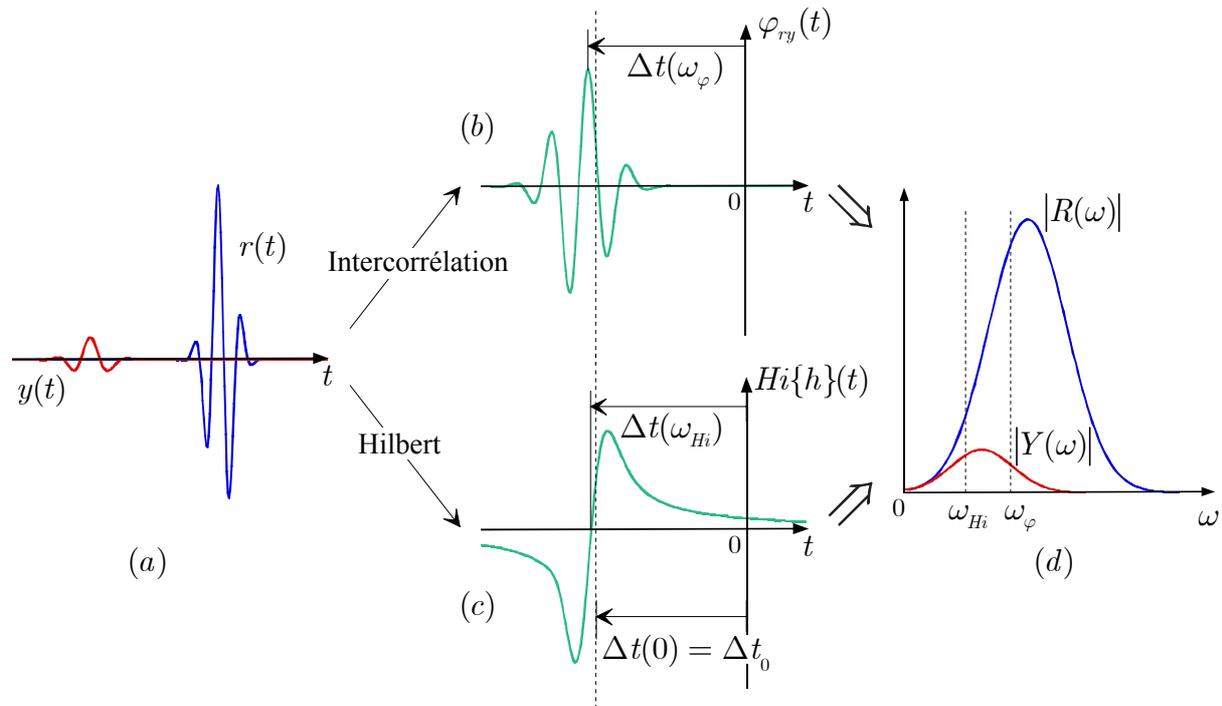


Figure I.9 : (a) Signal de référence et signal transmis dispersif simulé selon une fonction de transfert générale de la forme (I.36) avec $\alpha(\omega, \theta) = a\omega^2$ et $\Delta t(\omega, \theta) = \Delta t_0 - (2ad / \pi) |\omega|$ où a est une constante positive ; (b) Fonction d'intercorrrelation des deux signaux ; (c) Transformée de Hilbert de la réponse impulsionnelle ; (d) Modules des spectres des deux signaux et visualisation des fréquences ω_φ et ω_{Hi} correspondant respectivement aux mesures de temps de vol pour la technique d'intercorrrelation et par transformée de Hilbert.

Il est toujours préférable de s'approcher le plus possible des rigidités apparentes du matériau pour un essai quasi-statique. Ces sollicitations mécaniques correspondant à des fréquences quasi-nulle, la mesure effectuée par transformée de Hilbert est donc, par défaut, la technique la mieux adaptée. Les avantages de cette technique (séparabilité des modes et faible sensibilité à la dispersion) en ont fait l'outil préférentiel de la caractérisation ultrasonore des propriétés élastiques et du suivi de l'endommagement.

3.3.3. Les limites de la caractérisation par interférométrie ultrasonore

Si l'interférométrie ultrasonore a prouvé son efficacité pour de nombreux matériaux [Hosten *et al.*, 1987; Castagnède *et al.*, 1990; Aristégui et Baste, 1997], elle n'en reste pas moins limitée sous certaines conditions qui dépendent à la fois de la géométrie de l'échantillon, de ses propriétés mécaniques et des caractéristiques du signal de référence. Un échantillon de faible épaisseur et fortement absorbant, présente la configuration typique pour laquelle la technique d'interférométrie est difficilement applicable.

Une des hypothèses des techniques de caractérisation ultrasonore étudiées est de considérer le milieu comme homogène à l'échelle des longueurs d'onde utilisées. Cette

homogénéisation du milieu s'effectue par le choix des modes de volume par opposition aux modes optiques ou modes de structure, caractéristiques de la structure hétérogène du milieu [Brillouin et Parodi, 1956; Nemat-Nasser et M. Yamada, 1981; Baste, 1985; Leymarie et Baste, 1999]. Nous étendons ici la terminologie énoncée par Brillouin qui pour des réseaux cristallins parle de "branches acoustiques" et de "branches optiques" en rapport aux fréquences liées à la génération de ces modes dans les cristaux. Dans des matériaux hétérogènes à plus grande échelle (composites), de tels modes, appelés modes de structures, propres à la structure hétérogène du milieu, sont générés pour des fréquences ultrasonores de l'ordre du MégaHertz [Baste, 1985].

Ainsi, pour une plage de fréquence fixée par les caractéristiques du signal de référence, une gamme de longueurs d'onde peut être définie selon les caractéristiques du milieu. La condition d'homogénéisation impose alors à la longueur d'onde minimale d'être au moins supérieure à la plus grande taille des hétérogénéités.

La condition de séparabilité des modes directs avec les échos, mais également entre eux, implique également une limite liée à l'encombrement temporel du signal de référence. Ceci se traduit par une limite basse sur la fréquence centrale v_c de ce signal.

En pratique, seules l'épaisseur de l'échantillon et la fréquence centrale des transducteurs sont des paramètres ajustables. Ainsi, les limites de l'interférométrie peuvent être résumées par le tableau suivant :

Paramètres	Limites basses	Limites hautes
Épaisseur d	<ul style="list-style-type: none"> ➤ $d \gg \lambda_{max}$, où λ_{max} est la longueur d'onde maximale telle que : $\lambda_{max} \simeq \frac{V_{max}}{2\pi v_c}$ 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ d doit être limitée si le matériau est fortement absorbant. ➤ d est parfois limitée pour des raisons de coût ou par le procédé même de fabrication.
Fréquence centrale v_c	<ul style="list-style-type: none"> ➤ $v_c \gg \frac{V_{max}}{2\pi d}$, condition sur la fréquence équivalente à celle posée sur l'épaisseur. 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ $v_c < v_{struct}$, où v_{struct} est la fréquence de coupure basse des modes de structure.

Tableau I.1 : Limites de la méthode d'interférométrie en fonction des paramètres expérimentalement ajustables (épaisseur de l'échantillon, fréquence centrale de la référence) ; V_{max} est la vitesse de phase maximale pour le milieu considérée.

La coexistence des conditions établies dans le tableau I.1, impose alors un cadre de travail qui peut parfois s'avérer trop restreint en vue de caractériser des matériaux [Leymarie et Baste, 1999]. Les limites hautes ne sont pas propres à l'interférométrie mais communes à toute technique de caractérisation de propriétés mécaniques du milieu homogène. L'objectif ne peut être que de s'affranchir de l'hypothèse de séparabilité énergétique des modes qui fixe les limites basses en fréquence et en épaisseur. C'est précisément ce que permettent les techniques de caractérisation basées sur la réponse globale d'une lame à faces parallèles.

4. LES MÉTHODES BASÉES SUR LA MODÉLISATION DE LA RÉPONSE D'UNE LAME IMMERGÉE

La technique d'interférométrie, permettant de définir les caractéristiques des modes directs, nécessite des conditions souvent trop restrictives sur la fréquence et l'épaisseur de

l'échantillon. Ainsi, le rapport longueur d'onde sur épaisseur λ/d , noté RLE, se doit d'être petit devant l'unité (cf. Tab. I.1). En outre, cette technique ne permet pas d'étudier correctement les effets de dispersion caractéristiques de la viscoélasticité du milieu.

Pour remédier à ces deux inconvénients principaux, des méthodes d'évaluations non destructives, basées sur l'évaluation de la réponse en transmission ou en réflexion d'une lame à faces parallèles, ont été développées. Les réponses multimodales et dispersives de la lame étant alors modélisées dans leur intégrité, les interférences entre les modes n'introduisent pas de biais et apportent, au contraire, autant d'informations permettant d'affiner la signature acoustique du matériau. Ainsi, ces techniques présentent l'avantage de repousser les limites supérieures du rapport RLE et permettent, par-là même, d'analyser le caractère dispersif des signaux en milieu visqueux.

4.1. Description des méthodes existantes : définition des fonctions objectif

Des méthodes de caractérisation, plus ou moins évoluées, ont été développées à partir des fonctions de transfert théorique et expérimentale en transmission ou en réflexion d'une lame à faces parallèles [Kinra et Iyer, 1995; Hosten *et al.*, 1997; Lavrentyev et Rokhlin, 1997; Castaing *et al.*, 2000].

Le critère de caractérisation optimale correspond le plus souvent à l'écart minimum entre les résultats de mesures expérimentales et ceux issus d'un modèle déduit de paramètres caractéristiques de l'échantillon (les rigidités complexes C_{IJ} dans le cas présent). Pour cela, deux fonctions coût, ou fonctions objectif, sont principalement utilisées. Notons H_n la fonction de transfert théorique déduite de la modélisation et H_n^{Exp} la fonction de transfert expérimentale, associées toutes deux à un jeu de variables, définissant par exemple une direction de propagation, référencée par l'entier n . La première technique vise à minimiser l'écart quadratique entre les modules des fonctions de transfert. La fonction coût F , s'écrit alors [Hosten *et al.*, 1997; Lavrentyev et Rokhlin, 1997] :

$$F(C_{IJ}) = \sum_n \sum_k \left(|H_n^{Exp}(\omega_k)| - |H_n(\omega_k, C_{IJ})| \right)^2. \quad (I.49)$$

L'autre fonction coût utilisée n'est autre que la distance entre les fonctions de transfert complexe qui s'écrit [Kinra et Iyer, 1995] :

$$F(C_{IJ}) = \sum_n \sum_k \left| H_n^{Exp}(\omega_k) - H_n(\omega_k, C_{IJ}) \right|^2. \quad (I.50)$$

Cependant, la minimisation de l'écart entre les fonctions de transfert H_n et H_n^{Exp} n'est pas forcément un choix judicieux. En effet, la fonction de transfert expérimentale étant déduite d'une division par le spectre de référence $R(\omega)$ (cf. Eq. (I.35)), son évaluation peut être fortement perturbée en présence de bruit et cela, plus particulièrement, autour des fréquences où le spectre de référence est faible. Ainsi, des travaux plus récents proposent, sur le modèle de l'équation (I.49), de travailler directement avec les modules des spectres des signaux reconstruits et mesurés expérimentalement évitant de ce fait une sensibilité prohibitive au bruit ainsi qu'aux antirésonances [Castaing *et al.*, 2000].

4.2. Les raisons de l'élaboration d'une nouvelle méthode

Les méthodes de caractérisation non destructives basées sur la réponse d'une lame restent encore peu utilisées en raison du temps de traitement très important notamment pour des matériaux viscoélastiques anisotropes. Si les méthodes utilisant les fonctions objectif (I.49) et (I.50) ou leurs extensions ont déjà fourni de nombreux résultats prometteurs [Castaing *et al.*, 2000], certaines améliorations et développements semblent toutefois nécessaires.

Les problèmes inverses élaborés à partir des fonctions objectif (I.49) et (I.50) présentent notamment une sensibilité au bruit non négligeable introduisant un biais sur le jeu de paramètres optimal. De plus, la fonction objectif (I.49) et ses extensions, ne prenant pas en compte explicitement les termes de phase, cette technique est peu sensible aux paramètres d'optimisation en l'absence d'interférence dans les signaux transmis (échantillon de très faible épaisseur ou fortement absorbant).

Nous proposons donc d'élaborer une nouvelle démarche dans la caractérisation ultrasonore des plaques viscoélastiques adaptée à des rapports RLE élevés. L'écriture de l'énergie d'interaction entre deux signaux réels sous leur forme analytique conduit à la construction de deux fonctions objectif peu sensibles au bruit, définissant un large domaine de convergence.

Chapitre II

Caractérisation ultrasonore par reconstruction de formes d'ondes : formulation du problème

Tout problème de caractérisation est constitué par deux grandes étapes. La première, le problème direct, consiste à formaliser, avec différentes hypothèses, la réponse impulsionnelle du système à caractériser en fonction des paramètres le modélisant. La seconde, le problème inverse associé, réside en la détermination des paramètres du système à partir de sa réponse impulsionnelle. Pour un ensemble de mesures, la recherche des solutions optimales passe par la minimisation de fonctions objectif, judicieusement définies pour quantifier l'écart des réponses prédites aux mesures expérimentales.

Ce chapitre se compose donc de deux parties. La première présente le problème direct où nous établissons, sous les hypothèses d'une propagation en ondes plane, la réponse en transmission d'une plaque anisotrope viscoélastique immergée. Les lois de comportement (I.12) font ainsi apparaître les fonctions complexes $C_{IJ}(\omega)$, comme paramètres principaux du problème. La seconde partie s'attache, dans un premier temps, à définir les fonctions objectif. Enfin, la stratégie d'identification des fonctions complexes $C_{IJ}(\omega)$ est présentée selon deux approches différentes : l'approche dite "globale", où la paramétrisation des fonctions $C_{IJ}(\omega)$ s'effectue sur tout le domaine fréquentiel étudié pour des modèles rhéologiques classiques prédéfinis (I.20), et l'approche dite "locale", où l'identification est effectuée autour d'une fréquence selon la paramétrisation locale (I.21) approximant au premier ordre les raideurs $C_{IJ}(\omega)$.

1. LE PROBLÈME DIRECT : ÉCRITURE ANALYTIQUE DE LA FONCTION DE TRANSFERT D'UNE PLAQUE VISCOÉLASTIQUE ANISOTROPE

Le problème direct est basé sur un modèle de propagation en ondes planes, dans le cadre de l'acoustique linéaire. Sa construction est issue du formalisme proposée par Deschamps et Hosten [Deschamps et Hosten, 1992; Deschamps et Chevée, 1993].

1.1. Solutions des équations de propagation pour une lame à faces parallèles immergée

Il s'agit ici d'écrire l'expression de la réponse d'une lame à faces parallèles immergée dans un fluide isotrope non-absorbant, dont une des interfaces est excitée par une onde plane incidente, notée I , monochromatique de pulsation ω_2 , homogène et de direction de propagation réelle définie par son vecteur lenteur noté $\vec{S}^{(I)}$ (cf. Fig. II.1). Ce vecteur est entièrement défini par la vitesse de propagation dans le fluide V_f et par l'angle d'incidence θ fixant, dans le plan azimuthal (II) repéré par l'angle azimuthal ψ , la direction de propagation par rapport à la normale aux interfaces $\vec{1}$. Cette onde incidente est réfléchiée et réfractée à la

première interface générant ainsi plusieurs modes dans le solide qui eux-mêmes se réfléchissent et se réfractent à la seconde interface engendrant une réponse contenant un nombre infini d'échos.

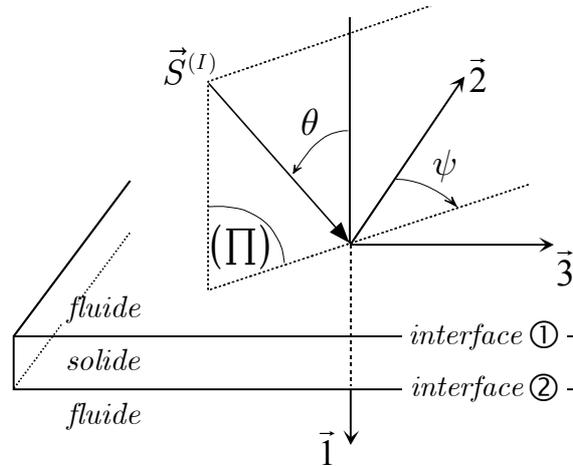


Figure II.1 : Définition du système de coordonnées $(\vec{1}, \vec{2}, \vec{3})$ associé à la lame à faces parallèles immergée tel que le vecteur $\vec{1}$ soit normal aux interfaces fluide-solide, interface ①, et solide-fluide, interface ②. L'onde plane incidente I est caractérisée par son vecteur lenteur réel pur $\vec{S}^{(I)}$ fixant une direction de propagation selon un angle d'incidence θ par rapport à $\vec{1}$ dans le plan azimuthal (II) repéré par l'angle azimuthal ψ .

Pour une onde plane monochromatique incidente, les lois de Snell-Descartes et l'équation de Christoffel [Auld, 1990] impliquent, dans chacun des milieux, la génération d'un nombre limité de modes : un mode réfléchi R dans le fluide par la première interface, un mode transmis T dans le fluide délimitant la seconde interface et six ondes dites "partielles" au sein de la lame solide, notés QL^+ , $QT1^+$, $QT2^+$, QL^- , $QT1^-$, $QT2^-$, dont la signification sera donnée par la suite. Le champ de déplacement dans chacun des milieux s'exprime alors comme la composition des champs de déplacement associés à chaque mode existant (cf. Eq. (I.27)).

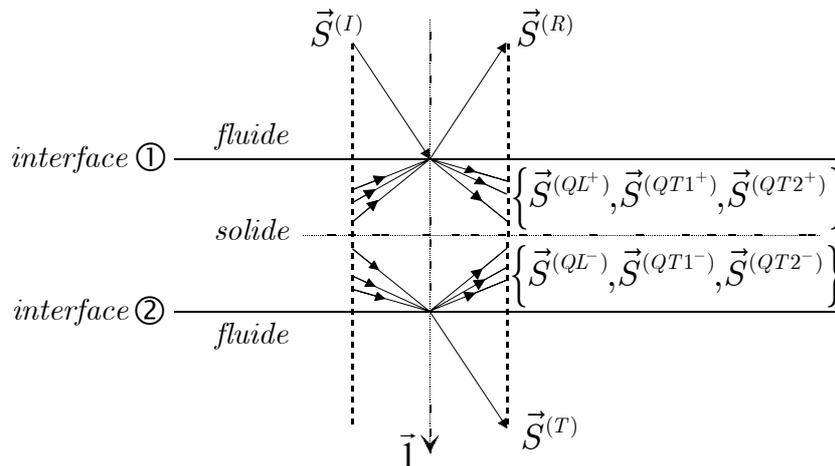


Figure II.2 : Définition de tous les modes existant dans un plan azimuthal (II) lors de l'excitation par une onde plane incidente d'une lame solide anisotrope immergée. Seules les directions de propagation des plans équiphases sont ici représentées (partie réelle des vecteurs lenteur). Le fluide n'étant pas absorbant, les plans équiamplitudes des modes ont, d'après la relation (II.1), pour normale commune la direction $\vec{1}$ et, par souci de clarté, ne sont pas reportés.

Les lois de Snell-Descartes appliquées à chacun des deux dioptrés plans, liquide-solide et solide-liquide, imposent une relation d'égalité entre les projections des vecteurs lenteur des modes incidents, réfléchis et réfractés sur le plan $(\vec{2}, \vec{3})$ parallèles aux interfaces. En se

référant aux notations utilisées dans la figure II.2, ces relations d'égalité, au sens complexe, s'écrivent de la manière suivante [Deschamps, 1996] :

$$S_i^{(I)} = S_i^{(R)} = S_i^{(T)} = S_i^{(m)}, \quad (\text{II.1})$$

où $i = \{2, 3\}$ et $m = \{QL^+, QT1^+, QT2^+, QL^-, QT1^-, QT2^-\}$. La partie imaginaire de $\vec{S}^{(I)}$ étant considérée comme nulle (fluide non-absorbant), seules les composantes selon la direction $\vec{1}$ des parties imaginaires des vecteurs lenteur sont différentes de zéro.

Les composantes selon la direction $\vec{1}$ des vecteurs lenteurs des 8 modes générés restent alors inconnues. Néanmoins, connaissant *a priori* la vitesse de propagation V_f des ondes dans le fluide, seules les composantes des 6 ondes partielles dans le solide de symétrie quelconque restent à identifier [Musgrave, 1970].

En appliquant l'équation de Christoffel (I.30) pour le solide, les composantes des vecteurs lenteur $S_1^{(m)}$ sont assimilées aux racines complexes d'un polynôme \mathcal{P} , de degrés six en S_1 , défini par l'égalité suivante :

$$\mathcal{P}(S_1, C_{IJ}, \rho, S_2^{(I)}, S_3^{(I)}) = \det[\Omega(S_1, C_{IJ}, \rho, S_2^{(I)}, S_3^{(I)})], \quad (\text{II.2})$$

où \mathcal{P} est le déterminant de la matrice Ω définie dans l'équation (I.30). La détermination de chacune des six racines $S_1^{(m)}$, pour un jeu de variables $(C_{IJ}, \rho, S_2^{(I)}, S_3^{(I)})$ donné, permet de définir, dans leur intégralité, les vecteurs lenteurs $\vec{S}^{(m)}$ des modes générés au sein de la lame.

Afin de décrire le champ de déplacement dans le solide, il ne nous reste qu'à calculer les vecteurs polarisations $\vec{P}^{(m)}$, associés à chaque mode m vérifiant :

$$\Omega(S_1^{(m)}, C_{IJ}, \rho, S_2^{(I)}, S_3^{(I)}) \vec{P}^{(m)} = \vec{0}, \quad (\text{II.3})$$

système pour lequel il existe une seule solution, à un coefficient de proportionnalité près, pour une valeur de $S_1 = S_1^{(m)}$ fixée. Ainsi les six paires de solution $(\vec{S}^{(m)}, \vec{P}^{(m)})$ définissent les six ondes partielles se propageant dans la lame que nous distinguons par leur nature, QL pour quasi-longitudinal, $QT1$ et $QT2$ pour quasi-transverse 1 et 2, et par les signes $+$ ou $-$ indiquant le sens de propagation de l'énergie du mode m par rapport à la direction $\vec{1}$ [Musgrave, 1970].

1.2. Calcul des champs de déplacement engendrés par une onde plane incidente sur une lame à faces parallèles immergée

1.2.1. Expressions du champ de déplacement et de la tension mécanique à chacune des interfaces de la lame

Les expressions des lenteurs et des polarisations de tous les modes étant connues, il est nécessaire d'établir l'expression des amplitudes complexes (cf. Eq. (I.27)). De façon classique, les conditions de continuité du champ de déplacement selon la normale aux interfaces et de la tension mécanique à ces mêmes interfaces sont appliquées [Dieulesaint et Royer, 1974].

Écrivons tout d'abord, au facteur commun près $e^{i\omega(t - S_2^{(I)} \cdot x_2 - S_3^{(I)} \cdot x_3)}$ (terme toujours omis par la suite), l'expression des champs de déplacement des particules du fluide et du solide aux interfaces ①, $x_1 = -d/2$, et ②, $x_1 = +d/2$:

$$\begin{cases} \vec{u}_{\text{fluide}}(t, x_1 = -d/2, x_2, x_3) = A^{(I)} \vec{P}^{(I)} e^{i\gamma S_1^{(I)}} + A^{(R)} \vec{P}^{(R)} e^{-i\gamma S_1^{(I)}}, \\ \vec{u}_{\text{solide}}(t, x_1 = \pm d/2, x_2, x_3) = \sum_m A^{(m)} \vec{P}^{(m)} e^{\mp i\gamma S_1^{(m)}}, \\ \vec{u}_{\text{fluide}}(t, x_1 = +d/2, x_2, x_3) = A^{(T)} \vec{P}^{(T)} e^{-i\gamma S_1^{(T)}}, \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

où $\gamma = \omega d/2$. De là, nous pouvons déduire, d'après la relation (I.25), l'expression des tensions aux interfaces ① et ② dans le solide, telle que :

$$\begin{aligned} T_j(x_1 = \pm d/2) &= \sigma_{1j}(x_1 = \pm d/2) \\ &= -i\omega \sum_m C_{1jkl}(\omega) S_k^{(m)} A^{(m)} P_l^{(m)} e^{\mp i\gamma S_1^{(m)}}. \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Rappelons que les composantes $S_k^{(m)}$ sont elles-mêmes des fonctions de $(C_{IJ}(\omega), \rho, S_2^{(I)}, S_3^{(I)})$ (cf. Eq. (II.2)).

Le fluide étant isotrope non-visqueux et donc à vitesse réelle constante $\mathcal{S}_f = V_f^{-1}$, quelle que soit la direction de propagation, seules les contraintes de pression sont générées dans le fluide. Les tensions dans le fluide s'écrivent alors :

$$\begin{cases} T_1(x_1 = -d/2) = \sigma_{11}(x_1 = -d/2) = -i\omega \rho_f V_f (A^{(I)} P_1^{(I)} e^{i\gamma S_1^{(I)}} + A^{(R)} P_1^{(R)} e^{-i\gamma S_1^{(I)}}), \\ T_1(x_1 = +d/2) = \sigma_{11}(x_1 = +d/2) = -i\omega \rho_f V_f A^{(T)} P_1^{(T)} e^{-i\gamma S_1^{(T)}}, \\ T_2(x_1 = \pm d/2) = \sigma_{12}(x_1 = \pm d/2) = 0, \\ T_3(x_1 = \pm d/2) = \sigma_{13}(x_1 = \pm d/2) = 0. \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Une fois l'écriture des champs de déplacement et des tensions sur chacune des interfaces développée analytiquement, nous obtenons des expressions fonctions à la fois des raideurs complexes du matériau mais aussi des amplitudes, des vitesses, et des polarisations complexes de chacun des modes considérés dans le problème.

1.2.2. Écriture des conditions de continuité aux interfaces sous la forme d'un système linéaire : calcul des amplitudes complexes solutions du système

Le vecteur continuité $\vec{\ell}$ pour tout mode $M = \{I, R, T, m\}$ dans le fluide ou dans le solide est défini par :

$$\begin{cases} u_1^{(M)} = \ell_1^{(M)} e^{-i\omega x_1 S_1^{(M)}}, \\ \sigma_{1j}^{(M)} = \ell_{j+1}^{(M)} e^{-i\omega x_1 S_1^{(M)}}, \text{ avec } j = 1 \text{ à } 3, \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

regroupant ainsi l'ensemble des quantités physiques nécessaires à la définition des conditions de continuités aux interfaces. Le problème s'écrit alors sous la forme d'un système linéaire de dimension (8x8) :

$$\mathcal{A} \vec{\mathcal{X}} = \vec{\mathcal{s}}, \quad (\text{II.8})$$

dont les inconnues sont les huit amplitudes complexes des modes générés, regroupées dans le

vecteur $\vec{\mathcal{X}}$ avec :

$$\vec{\mathcal{X}} = \left(A^{(R)}, A^{(QL^+)}, A^{(QT1^+)}, A^{(QT2^+)}, A^{(T)}, A^{(QL^-)}, A^{(QT1^-)}, A^{(QT2^-)} \right)^t, \quad (\text{II.9})$$

et où le vecteur \vec{s} est le vecteur source :

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} A^{(I)} e^{i\gamma s_1^{(I)}} \vec{\ell}^{(I)} \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.10})$$

défini sous la forme de deux vecteurs de dimension 4. La matrice \mathcal{A} , appelée matrice de continuité et dont le but est de transcrire les conditions de continuité aux interfaces, contient les vecteurs continuité de chaque mode et leur terme de phase. Enfin, la matrice carré \mathcal{A} , de dimension 8, peut se décomposer sous la forme d'une matrice de dimension (2x2) par blocs de dimension (4x4) et s'écrit :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{\circlearrowleft} \Phi_{\circlearrowleft} & \mathbf{L}_{\circlearrowright} \mathbf{U} \Phi_{\circlearrowright}^{-1} \\ \mathbf{L}_{\circlearrowleft} \mathbf{U} \Phi_{\circlearrowleft}^{-1} & \mathbf{L}_{\circlearrowright} \Phi_{\circlearrowright} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\circlearrowleft} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{\circlearrowright} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B}_{\circlearrowleft} \\ \mathbf{B}_{\circlearrowright} & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M} + \mathcal{B}, \quad (\text{II.11})$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{\circlearrowleft} = \left(-\vec{\ell}^{(R)}, \vec{\ell}^{(QL^+)}, \vec{\ell}^{(QT1^+)}, \vec{\ell}^{(QT2^+)} \right), \\ \mathbf{L}_{\circlearrowright} = \left(-\vec{\ell}^{(T)}, \vec{\ell}^{(QL^-)}, \vec{\ell}^{(QT1^-)}, \vec{\ell}^{(QT2^-)} \right), \\ \Phi_{\circlearrowleft} = \text{diag} \left(e^{-i\gamma s_1^{(I)}}, e^{i\gamma s_1^{(QL^+)}} , e^{i\gamma s_1^{(QT1^+)}} , e^{i\gamma s_1^{(QT2^+)}} \right), \\ \Phi_{\circlearrowright} = \text{diag} \left(e^{-i\gamma s_1^{(I)}}, e^{-i\gamma s_1^{(QL^-)}} , e^{-i\gamma s_1^{(QT1^-)}} , e^{-i\gamma s_1^{(QT2^-)}} \right), \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

et où $\mathbf{U} = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$. Cette structure par blocs permet ensuite de définir la matrice de réflexion-réfraction \mathcal{R} :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{R}_{\circlearrowleft} \\ \mathbf{R}_{\circlearrowright} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{M}_{\circlearrowleft}^{-1} \mathbf{B}_{\circlearrowleft} \\ -\mathbf{M}_{\circlearrowright}^{-1} \mathbf{B}_{\circlearrowright} & 0 \end{pmatrix} = -\mathcal{M}^{-1} \mathcal{B}, \quad (\text{II.13})$$

où $\mathbf{R}_{\circlearrowleft}$ est intrinsèque à l'interface ① et représente les coefficients de réflexion ou réfraction d'un mode incident de type $\{T, QL^-, QT1^-, QT2^-\}$ se convertissant en un mode de type $\{R, QL^+, QT1^+, QT2^+\}$ et où $\mathbf{R}_{\circlearrowright}$, intrinsèque à l'interface ②, donne les coefficients de réflexion ou réfraction d'un mode incident de type $\{R, QL^+, QT1^+, QT2^+\}$ pour un mode converti de type $\{T, QL^-, QT1^-, QT2^-\}$ [Deschamps et Cao, 1991; Chevée et Deschamps, 1992]. Cette écriture nous permettra de dissocier les phénomènes de réflexion et réfraction sur chacune des interfaces et ainsi de décrire la réponse selon le nombre de réflexions au sein de la lame. Dans cet esprit, définissons la matrice de double réflexion-réfraction \mathcal{T} :

$$\mathcal{T} = \mathcal{R}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\circlearrowleft} \mathbf{R}_{\circlearrowright} & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{\circlearrowright} \mathbf{R}_{\circlearrowleft} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.14})$$

Finalement, après avoir défini toutes ces quantités, la solution exacte du système (II.8) s'écrit :

$$\vec{\mathcal{X}} = (\mathcal{I} + \mathcal{R})(\mathcal{I} - \mathcal{T})^{-1} \mathcal{M}^{-1} \vec{s}, \quad (\text{II.15})$$

où \mathcal{I} est la matrice identité de dimension 8. Il est également possible, d'après la relation (II.14), de donner une expression approchée de la solution pour un nombre fixé N_R de réflexions des ondes partielles aux deux interfaces de la lame, telle que :

$$\vec{\mathcal{X}} = \sum_{n=0}^{n=N_R} \mathcal{T}^n (\mathcal{I} + \mathcal{R}) \mathcal{M}^{-1} \vec{s}. \quad (\text{II.16})$$

La réponse acoustique de la lame à une onde plane incidente I de pulsation ω est analytiquement définie à travers les relations (II.2), (II.3) et (II.15) ou (II.16) liant les propriétés des ondes aux grandeurs géométriques et physiques, notamment aux propriétés viscoélastiques du matériau.

1.3. Formulation de la fonction de transfert en transmission d'une lame à faces parallèles et reconstruction du signal transmis à partir d'un signal de référence

La fonction de transfert d'une lame à faces parallèles en transmission est définie comme le rapport des amplitudes spectrales complexes $A^{(T)}/A^{(I)}$. Ainsi, en utilisant l'équation (II.15) (ou (II.16) suivant la modélisation choisie), la fonction de transfert en transmission H_y de la plaque s'écrit :

$$H_y = A^{(T)}/A^{(I)} = (\vec{\mathcal{X}})_5 / A^{(I)} = e^{i\gamma S_1^{(I)}} \left(\mathbf{R}_{\otimes} (\mathbf{I} - \mathbf{R}_{\otimes} \mathbf{R}_{\otimes})^{-1} \mathbf{M}_{\otimes}^{-1} \vec{\mathcal{L}}^{(I)} \right)_1, \quad (\text{II.17})$$

ou

$$H_y = A^{(T)}/A^{(I)} = (\vec{\mathcal{X}})_5 / A^{(I)} = e^{i\gamma S_1^{(I)}} \left(\mathbf{R}_{\otimes} \sum_{n=0}^{n=N_R} (\mathbf{R}_{\otimes} \mathbf{R}_{\otimes})^n \mathbf{M}_{\otimes}^{-1} \vec{\mathcal{L}}^{(I)} \right)_1, \quad (\text{II.18})$$

où \mathbf{I} est la matrice identité de dimension 4 et où l'indice 5 (resp. 1) appliqué aux vecteurs de dimension 8 (resp. 4) indique la composante du vecteur considéré. Cette fonction de transfert dépend alors des variables $(\omega, C_{IJ}(\omega), d, \rho, S_2^{(I)}, S_3^{(I)})$ ou encore, dans un souci de se rapprocher de paramètres expérimentaux, des variables $(\omega, C_{IJ}(\omega), \rho, d, V_f, \theta, \psi)$.

Le signal de référence étant le signal pris sans échantillon, la fonction de transfert H_r associée à ce signal correspond à la réponse d'une lame d'eau d'épaisseur d . L'amplitude du mode transmis étant égale à 1 (pas de rupture d'impédance), seul un terme de propagation et donc de phase définit H_r , tel que :

$$H_r = e^{i\gamma S_1^{(I)}}, \quad (\text{II.19})$$

où le repère des phases est pris par convention au centre de la lame. La fonction de transfert H du problème n'est autre que le rapport des fonctions de transfert H_y et H_r (cf. Eq (I.35)) et s'écrit alors :

$$H(\omega, C_{IJ}(\omega), \rho, d, V_f, \theta, \psi) = \left(R_{\otimes} (\mathbf{I} - R_{\otimes} R_{\otimes})^{-1} M_{\otimes}^{-1} \vec{\ell}^{(I)} \right)_1, \quad (\text{II.20})$$

dans le cas de la réponse totale, ou bien :

$$H(\omega, C_{IJ}(\omega), \rho, d, V_f, \theta, \psi) = \left(R_{\otimes} \sum_{n=0}^{n=N_R} (R_{\otimes} R_{\otimes})^n M_{\otimes}^{-1} \vec{\ell}^{(I)} \right)_1, \quad (\text{II.21})$$

dans le cas de la réponse partielle de la plaque en ne considérant que N_R réflexions. Il est important de remarquer que l'évaluation de la fonction de transfert est implicitement liée aux quantités $S_1^{(m)}$ et $\vec{P}^{(m)}$ déterminées pour un jeu $(C_{IJ}, d, \rho, V_f, \theta, \psi)$ fixé. Nous traiterons le plus souvent la réponse totale de la lame, la réponse partielle pouvant présenter, sous certaines conditions, une divergence de la série [Deschamps et Cao, 1991] contenue dans l'expression (II.21) et ainsi altérer le procédé d'inversion. Par la suite, nous utiliserons, par défaut, la relation (II.20) pour déterminer la réponse d'une lame à face parallèle. Dans le cas contraire, une utilisation de l'écriture (II.21) sera notifiée en indiquant le nombre d'échos N_R considérés.

Il devient possible de reconstruire le spectre du signal transmis, et donc le signal lui-même, à partir du spectre R du signal de référence et de la fonction de transfert H . Désignons par l'indice n le signal transmis $y_n(t)$ associé au couple d'angles (θ_n, ψ_n) , il vient alors la relation :

$$Y_n(\omega, C_{IJ}(\omega), d, \rho, V_f) = R(\omega) H_n(\omega, C_{IJ}(\omega), d, \rho, V_f), \quad (\text{II.22})$$

où $y_n(t)$ est reconstruit par une simple transformée de Fourier inverse du spectre du signal $Y_n(\omega)$. En établissant la formulation exacte de la fonction de transfert en fonction de paramètres tels que les rigidités complexes de la lame C_{IJ} , l'épaisseur de la lame d ou bien la vitesse des ondes de pression dans le fluide couplant V_f , une étude exhaustive de l'influence de tels paramètres sur les propriétés des signaux transmis peut être effectuée aisément. Il serait également envisageable de quantifier le rôle d'une erreur systématique de mesure des angles θ et ψ sur la méthode d'identification.

Toutefois, notre étude s'attachera d'abord à l'analyse de l'influence des constantes viscoélastiques de la plaque sur sa réponse ultrasonore en transmission. C'est pourquoi, par la suite, nous considérerons tout autre paramètre comme une constante du problème.

2. LE PROBLÈME INVERSE : OPTIMISATION PAR RECONNAISSANCE DES FORMES D'ONDES

Une fois le problème direct défini, il est possible d'écrire le problème inverse où les paramètres choisis sont les rigidités complexes $C_{IJ}(\omega)$ du matériau. Pour ce faire, il faut avant tout définir les outils permettant de quantifier le degré de vraisemblance entre les signaux modélisés pour un jeu de $(C_{IJ}(\omega))$ donné et les signaux expérimentaux. Cette notion de vraisemblance est à la base de l'écriture des fonctions objectif utilisées par le procédé d'optimisation afin de reconstruire de façon optimale les formes d'ondes des signaux acquis expérimentalement.

2.1. Les fonctions objectif

La méthode d'optimisation proposée repose sur une prise en compte explicite de toutes les informations contenues dans les formes d'ondes des signaux transmis. C'est pourquoi, deux fonctions objectif basées sur une approche physique ont été établies en considérant à la fois l'information apportée par le module mais aussi par la phase des spectres des signaux.

Ce travail est directement inspiré du principe de maximum de vraisemblance et de l'expression des fonctions d'ambiguïté [Flandrin, 1993], développées initialement pour des applications radar ou sonar [Woodward, 1953]. En complément, une formulation analytique des signaux réels est apparue particulièrement adaptée à l'évaluation de la distance entre deux signaux [Reverdy et Audoin, 1999; Reverdy, 2000], objectif recherché de notre problème.

2.1.1. Principe du maximum de vraisemblance et définition des grandeurs énergétiques utilisées

Définissons d'abord le produit scalaire de l'espace des fonctions à énergies finies $L^2(\mathbb{R})$. Soit $y(t)$ et $z(t)$ deux signaux à énergie finie, le produit scalaire entre ces fonctions est alors défini par la relation :

$$\langle y, z \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \overline{z(t)} dt. \quad (\text{II.23})$$

qui, d'après la relation de Parseval [De Coulon, 1984], peut s'écrire dans le domaine fréquentiel sous la forme :

$$\langle y, z \rangle = \langle Y, Z \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) \overline{Z(\omega)} d\omega. \quad (\text{II.24})$$

Introduit par Gabor [Gabor, 1946] et Ville [Ville, 1947], puis développé pour le traitement du signal et l'analyse temps-fréquence [Mertins, 1999], le signal analytique $\check{y}(t)$ issu du signal réel $y(t)$ est défini par la relation suivante :

$$\check{y}(t) = y(t) + iHi\{y\}(t) \underset{\text{car } y(t) \text{ réel}}{\implies} \begin{cases} \check{Y}(\omega) = 2\mathcal{H}(\omega)Y(\omega) \\ \check{Y}(0) = Y(0) \end{cases}, \quad (\text{II.25})$$

où le signal est composé du signal réel pour la partie réelle et d'un signal équivalent en quadrature (i.e., $\langle y, Hi\{y\} \rangle = 0$) pour la partie imaginaire. Notons que, pour un signal analytique issu d'un signal réel, seules les composantes positives de son spectre sont non nulles. Cette caractéristique conduit à un gain de temps important pour le calcul de la quantité $\langle \check{Y}, \check{Z} \rangle$. Enfin, le signal analytique permet de dégager deux grandeurs couramment utilisées pour l'analyse des signaux [De Coulon, 1984], à savoir l'amplitude instantanée $a_y(t)$ et la phase instantanée $\phi_y(t)$, telles que :

$$\check{y}(t) = a_y(t)e^{i\phi_y(t)}. \quad (\text{II.26})$$

Si le produit scalaire entre deux signaux réels en quadrature est nul, le produit scalaire de ces mêmes signaux pris sous leur forme analytique est une constante imaginaire pure dans laquelle l'information sur les amplitudes instantanées de ces signaux est conservée. Ainsi, ne pas utiliser la formulation analytique dans les outils de traitement du signal équivaut le plus

souvent à une "perte d'information sur les signaux étudiés" [Flandrin, 1993]. Une représentation, par un diagramme de Fresnel, du produit scalaire permet de le visualiser et d'en appréhender le sens (cf. Fig. II.3). Ces mêmes diagrammes peuvent être représentés fréquemment en utilisant les spectres des signaux du fait de la relation (II.24).

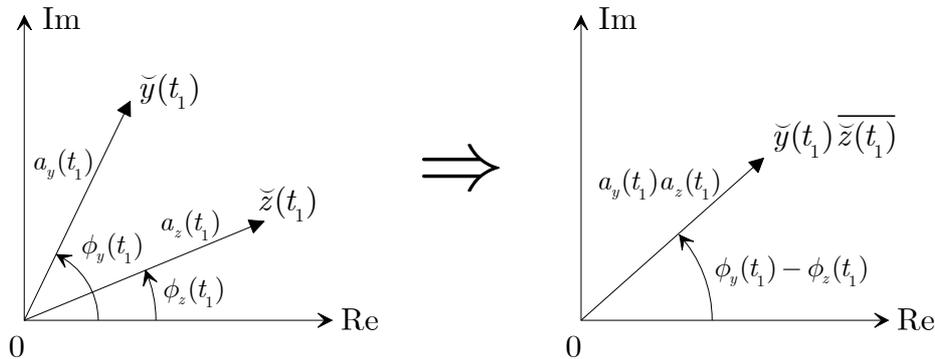


Figure II.3 : Diagramme de Fresnel en temps de deux signaux analytiques $\tilde{y}(t)$ et $\tilde{z}(t)$ et de la quantité complexe $\tilde{y}(t)\overline{\tilde{z}(t)}$ à un instant t_1 fixé. Lorsque le produit scalaire est purement réel les signaux sont en phase ou opposition de phase alors que si celui-ci est purement imaginaire les signaux sont en quadrature de phase. En revanche, aucun élément comparatif n'est apporté concernant les amplitudes des signaux.

Le maximum de vraisemblance entre deux signaux est atteint lorsque l'interaction entre deux signaux, quantifiée par le module du produit scalaire entre ces signaux, est maximale et que ces signaux sont de même énergie. Ainsi, le problème inverse consiste à rechercher les paramètres optimaux pour lesquels les signaux reconstruits à l'aide du modèle sont les plus semblables aux signaux expérimentaux (cf. Fig. II.4).

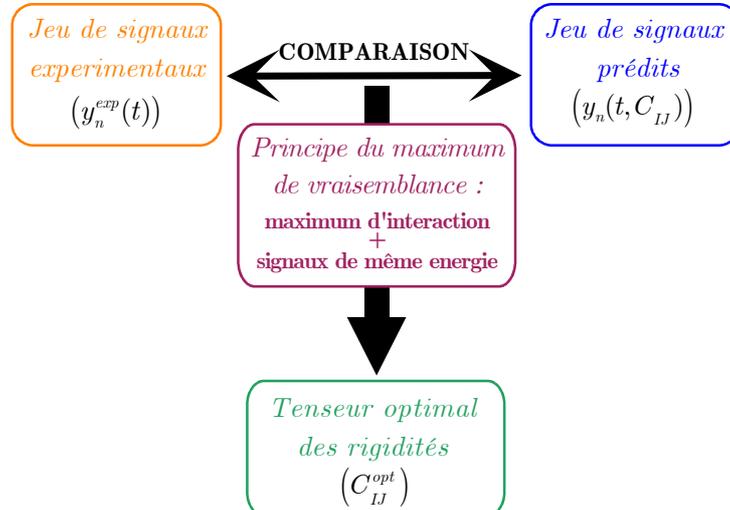


Figure II.4 : Synoptique du problème inverse basé sur la comparaison des signaux expérimentaux et des signaux prédits pour un jeu de variables (C_{IJ}) donné. Le jeu de paramètres optimal (C_{IJ}^{opt}) correspond à un maximum de vraisemblance entre l'expérience et la simulation.

La notion d'énergie d'interaction entre deux signaux est définie comme étant le résultat du produit scalaire entre ces deux signaux [Max, 1972]. En conséquence, il est nécessaire pour une présentation claire de l'écriture des fonctions objectif d'introduire trois fonctions dont la dimension s'apparente à celle d'une énergie. L'énergie d'interaction ε_n^{int} entre le signal théorique $\tilde{y}_n(t, C_{IJ})$ prédit et le signal expérimental équivalent $\tilde{y}_n^{exp}(t)$, ainsi que leur énergie respective ε_n^{pre} et ε_n^{exp} sont définies par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n^{int}(C_{IJ}) &= \left\langle \tilde{y}_n(\cdot, C_{IJ}), \tilde{y}_n^{exp} \right\rangle, \\
 \varepsilon_n^{pre}(C_{IJ}) &= \left\langle \tilde{y}_n(\cdot, C_{IJ}), \tilde{y}_n(\cdot, C_{IJ}) \right\rangle, \\
 \varepsilon_n^{exp} &= \left\langle \tilde{y}_n^{exp}, \tilde{y}_n^{exp} \right\rangle,
 \end{aligned} \tag{II.27}$$

où l'indice n désigne la direction de propagation de l'onde plane incidente liée au couple d'angles (θ_n, ψ_n) . Si les énergies ε_n^{pre} et ε_n^{exp} des signaux sont des quantités réelles, il est important de noter que, dans le cas de signaux analytiques, l'énergie d'interaction ε_n^{int} est une grandeur complexe. L'introduction de l'énergie d'interaction permet d'effectuer une analyse de la reconnaissance entre les signaux peu sensible aux bruits extérieurs qui n'interagissent que très faiblement avec le signal dit "utile" car propre au modèle recherché. L'influence du bruit sur la reconnaissance des formes d'ondes sera plus amplement discutée dans le paragraphe 2.1.3.

La fonction de transfert (II.20) étant définie fréquemment, nous pouvons expliciter les quantités ε_n^{int} et ε_n^{pre} sous leur forme intégrale :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n^{int}(C_{ij}) &= 2 \int_0^{+\infty} H_n(\omega, C_{IJ}) \chi_n(\omega) d\omega, \\
 \varepsilon_n^{pre}(C_{ij}) &= 2 \int_0^{+\infty} |H_n(\omega, C_{IJ})|^2 \xi_n(\omega) d\omega,
 \end{aligned} \tag{II.28}$$

avec $\chi_n(\omega) = E(\omega) \overline{Y_n^{exp}(\omega)}$ et $\xi_n(\omega) = |E(\omega)|^2$, le symbole $|\cdot|$ représentant le module d'un nombre complexe. Du fait de l'utilisation de signaux analytiques, les intégrales sont définies seulement sur la partie positive des pulsations.

2.1.2. Écriture des fonctions objectifs : stratégie d'optimisation

Nous avons introduit dans le paragraphe précédent, des quantités énergétiques qui vont nous permettre de définir, sur les bases du principe du maximum de vraisemblance, plusieurs fonctions objectif. La stratégie d'optimisation comprend plusieurs étapes : une phase d'initialisation du jeu de variables originel suivi d'une phase de raffinement afin de définir le jeu optimal des paramètres correspondant à la reconstruction optimale entre la prédiction et l'expérience.

Dans le cadre d'un procédé d'optimisation, le maximum de vraisemblance doit correspondre généralement à un minimum de la fonction coût. Soit N_s le nombre de signaux expérimentaux considérés, nous définissons alors la première fonction coût F^{init} , telle que :

$$F^{init}(C_{IJ}) = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} \left[1 - \frac{|\varepsilon_n^{int}(C_{IJ})|^2}{\varepsilon_n^{pre}(C_{IJ}) \varepsilon_n^{exp}} \right]. \tag{II.29}$$

Par application de l'inégalité d'Hölder [Brézis *et al.*, 1999], il vient :

$$\left| \varepsilon_n^{int}(C_{IJ}) \right|^2 \leq \varepsilon_n^{pre}(C_{IJ}) \varepsilon_n^{exp}, \quad \forall C_{IJ}. \tag{II.30}$$

Ainsi, cette fonction F^{init} est définie positive et admet un minimum global dont la valeur est nulle sous l'hypothèse qu'il existe un jeu de paramètres pour lequel les signaux simulés et

expérimentaux sont identiques.

La seconde fonction coût, notée F^{final} , est proposée selon deux formulations basées sur le même principe mais différenciées selon le poids qu'elles attribuent aux signaux dans le procédé de minimisation. Lorsque le même poids est attribué aux signaux, il vient :

$$F^{final}(C_{IJ}) = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} \left| 1 - \frac{\varepsilon_n^{int}(C_{IJ})}{\varepsilon_n^{exp}} \right|^2, \quad (\text{II.31}) \text{ (a)}$$

et, quand le poids du signal sur la fonctionnelle est régi par son énergie :

$$F^{final}(C_{IJ}) = \frac{\sum_{n=1}^{N_s} |\varepsilon_n^{exp} - \varepsilon_n^{int}(C_{IJ})|^2}{\sum_{n=1}^{N_s} |\varepsilon_n^{exp}|^2}. \quad (\text{II.31}) \text{ (b)}$$

Dans l'écriture de la fonction (a), ce sont les signaux qui sont normalisés alors que dans (b), c'est la fonction objectif elle-même qui est normalisée. Le choix de l'une ou l'autre des formulations dépendra du but recherché par l'utilisateur. Dans le cas pratique, nous observons au voisinage d'angles critiques une chute importante de l'énergie des signaux transmis. Ainsi, si l'utilisateur souhaite donner un poids équivalent pour tous les signaux alors il choisira l'écriture (a) s'exposant alors à une forte sensibilité au bruit dans le cas de signaux de très faible énergie. Dans le cas contraire, l'écriture (b) donnera un poids proportionnel à l'énergie transmise amoindissant l'influence des signaux aux incidences critiques. La fonction (II.31), prise indifféremment sous sa forme (a) ou (b), admet également son minimum global de valeur nulle pour le jeu de signaux prédits similaire au jeu de signaux expérimentaux. Par la suite nous utiliserons préférentiellement l'équation (II.31) (a) pour l'évaluation de F^{final} .

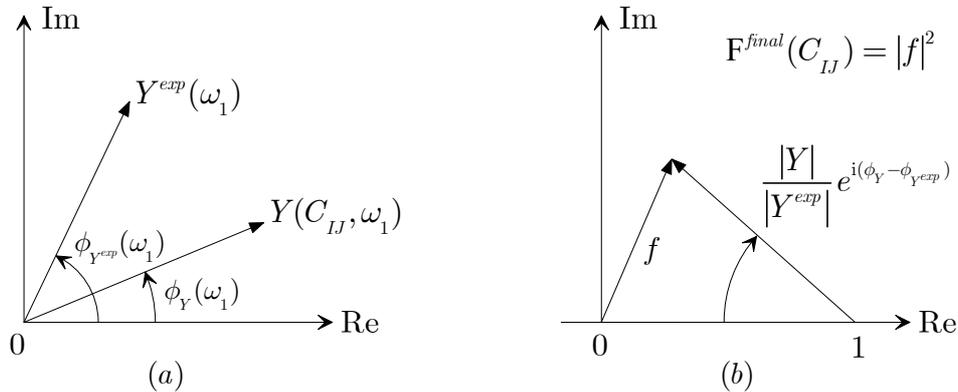


Figure II.5 : Diagrammes de Fresnel (a) pour des signaux monochromatiques de pulsation ω_1 et (b) illustrant la fonction F^{final} issue de ces signaux sous leur formulation analytique. Si les produits scalaires s'effectuaient entre les signaux réels, seule la composante réelle de f serait considérée ce qui entraînerait l'existence de zéros fictifs pour la fonctionnelle.

Si les deux fonctionnelles F^{init} et F^{final} présentent le même minimum global et sont localement convexes autour de ce minimum, leurs caractéristiques sont différentes et complémentaires.

La fonction F^{init} conduit à l'optimisation de l'enveloppe de l'énergie d'interaction normalisée, ce qui équivaut à une reconnaissance des amplitudes instantanées normalisées entre les signaux expérimentaux et prédits. Cette fonction n'est alors plus sensible aux termes

de phase d'interaction entre les signaux et présente un aspect régulier loin de la solution optimale. Cette propriété est illustrée par la figure II.6 (a) où la fonction F^{init} est évaluée à partir d'un signal expérimental $y^{exp}(t)$ et d'un signal prédit $y^{pre}(t)$ simplement retardé d'un temps Δt . La variable Δt remplace ici pour l'exemple les variables C_{IJ} dans la définition des fonctions objectif.

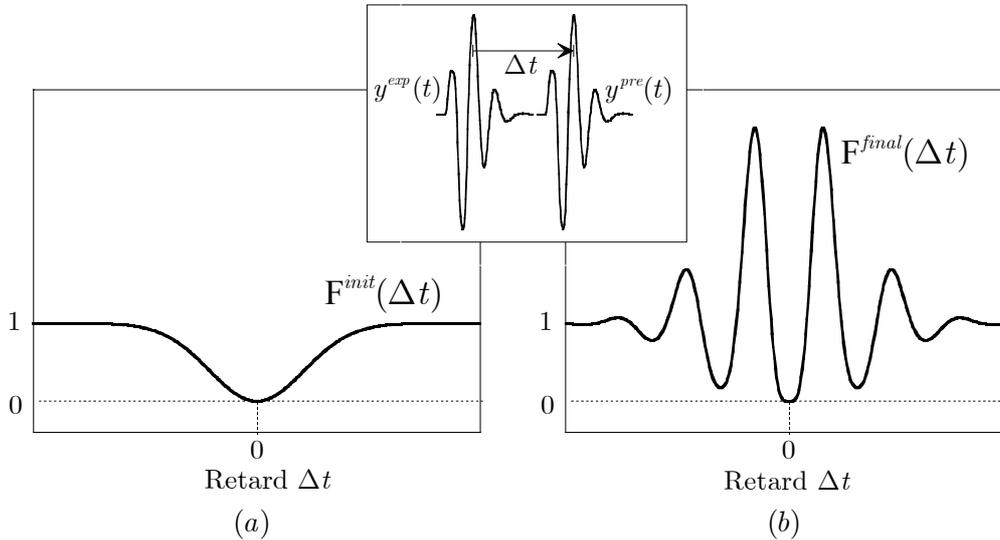


Figure II.6 : Représentation des fonctions objectif (a) F^{init} et (b) F^{final} dans le cas simple d'un retard pur Δt simulé entre le signal expérimental et le signal prédit : les signaux étant similaires pour un retard Δt nul, les deux fonctions sont alors nulles et minimales en $\Delta t = 0$.

Dans le cas de la fonction F^{final} , c'est directement l'énergie d'interaction qui est analysée. Cette fonction est très sensible aux termes de phase de l'énergie d'interaction ε_n^{int} ce qui permet d'obtenir une analyse beaucoup plus fine. Cependant, cette fonction est irrégulière et plus particulièrement dans le cas des signaux utilisés (gaussiens modulés en amplitude), ceci se traduisant par de nombreux minimum locaux limitant le domaine de convergence de la fonction (cf. Fig. II.6 (b)).

Ainsi, la fonction F^{init} sera utilisée comme un outil d'initialisation du jeu de paramètres tandis que la fonction F^{final} sera étudiée pour affiner l'optimisation. En conséquence, les minimisations successives des fonctions F^{init} et F^{final} devront permettre, sur un large domaine de convergence, une identification précise des paramètres optimaux (C_{IJ}^{opt}) vérifiant :

$$(C_{IJ}^{opt}) = \min_{(C_{IJ})} \{F^{final}(C_{IJ})\}. \quad (\text{II.32})$$

2.1.3. Application pratique des fonctions objectif pour des signaux échantillonnés à bande étroite

Dans la pratique, les signaux physiques sont enregistrés sous une forme échantillonnée [Max, 1972]. Pour un nombre N_{ech} d'échantillons, espacés d'un temps δt , nous déduisons la fréquence d'échantillonnage $\nu_e = 1/\delta t$ du signal expérimental discrétisé. Par conséquent, l'échantillonnage du signal s'effectue sur une période finie $T = N_{ech}\delta t$, définissant la plage temporelle d'observation $[0; T - \delta t]$ de ce signal. Le spectre du signal est de même échantillonné selon un pas $\delta\nu = 1/T$ et usuellement défini sur la plage de fréquence $[-\nu_e/2 + \delta\nu; \nu_e/2]$. Par analogie à la transformée de Fourier continue, la transformée de Fourier discrète, définissant le spectre du signal échantillonné, s'écrit :

$$Y(\omega_k) = \sum_{n=0}^{n=N_{ech}-1} y(t_n) e^{-i2\pi k n / N_{ech}} \quad (II.33)$$

avec $t_n = n \delta t$ et $\omega_k = 2\pi k \delta \nu$ pour tout $k \in [-N_{ech}/2 + 1; N_{ech}/2]$.

En procédant de la même façon, l'écriture du produit scalaire discret de deux signaux échantillonnés s'écrit alors :

$$\langle y, z \rangle = \sum_{n=0}^{n=N_{ech}-1} y(t_n) \overline{z(t_n)} = \langle Y, Z \rangle = \sum_{k=-N_{ech}/2+1}^{k=N_{ech}/2} Y(\omega_k) \overline{Z(\omega_k)}, \quad (II.34)$$

et les quantités énergétiques, définies dans l'équation (II.27), prennent alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{int}(C_{IJ}) &= 2 \sum_{k \in D_\omega} H_n(\omega_k, C_{IJ}) \chi_n(\omega_k), \\ \varepsilon_n^{pre}(C_{ij}) &= 2 \sum_{k \in D_\omega} |H_n(\omega_k, C_{IJ})|^2 \xi_n(\omega_k), \\ \varepsilon_n^{exp} &= 2 \sum_{k \in D_\omega} |Y^{exp}(\omega_k)|^2, \end{aligned} \quad (II.35)$$

où D_ω est le domaine des indices des pulsations sur lequel les quantités énergétiques sont considérées. En considérant l'ensemble des fréquences des spectres échantillonnés, D_ω contient tous les nombres entiers allant de 0 à $N_{ech}/2$ les signaux étant pris sous leur forme analytique. Cependant, les signaux étudiés ayant une largeur de bande bien inférieure à la bande passante définie par notre système, il est intéressant de ne considérer fréquemment qu'un nombre réduit de points. Ce procédé, assimilable à l'application d'une fonction porte fréquentielle sur les spectres des signaux, permet de réduire de façon drastique le temps de calcul sans altérer les minimums des fonctions objectif.

Dans la configuration classique d'une identification "globale" (cf. § II.2.2), le domaine D_ω sera défini autour des fréquences où l'énergie du signal de référence est prépondérante. Dans l'optimisation "locale" (cf. § II.2.2), ce domaine sera réduit à quelques points autour d'une fréquence. Il est alors intéressant de noter les similitudes entre la fonction F^{mit} et la fonction de cohérence entre deux signaux $y(t)$ et $z(t)$ définie par [De Coulon, 1984] :

$$\frac{|\hat{\varphi}_{yz}(\omega)|^2}{\hat{\varphi}_{yy}(\omega)\hat{\varphi}_{zz}(\omega)}. \quad (II.36)$$

Cette fonction, construite à partir des transformée de Fourier des fonctions d'intercorrélacion et d'autocorrélacion des signaux $y(t)$ et $z(t)$, est utilisée en traitement du signal pour déterminer la distance interspectrale entre deux signaux.

2.1.4. Analyse et traitement des fonctions objectif en présence de bruit

Par analogie à l'acoustique sonore, la notion de bruit englobe tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal dit utile. Ainsi, tout signal limitant l'intégrité ou l'intelligibilité du signal utile peut être considéré comme du bruit. Cependant, il est préférable d'établir une distinction entre le bruit dû à des perturbations

aléatoires, essentiellement de sources électriques ou électroniques (bruit thermique, bruit de grenaille) et les perturbations systématiques d'origines diverses comme, par exemple, des vibrations extérieures au système (moteur) ou même l'excitation de modes optiques perturbant les modes de volume caractéristiques du signal utile.

Si la conception d'un système peut faire l'objet de modifications afin de limiter voir supprimer l'influence des perturbations systématiques, il est impossible d'éliminer les sources de bruit internes à ce système. Nous nous intéresserons ici essentiellement à l'influence des bruits aléatoires. Aux fréquences supérieures à quelques dizaines de kiloHertz, le bruit de fond des composants électriques ou électroniques est essentiellement blanc [De Coulon, 1984]. Le bruit blanc, par analogie à la lumière blanche, est un bruit aléatoire dont la densité spectrale énergétique η , c'est à dire la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation, est une constante pour toute valeur de pulsation ω . Nous présenterons, dans un premier temps, l'influence théorique d'un tel bruit sur les fonctions objectif définies au paragraphe précédent. Pour cela définissons tout d'abord le bruit, comme le signal noté $b(t)$, tel que :

$$y_b^{exp}(t) = y^{exp}(t) + b(t), \quad (II.37)$$

où $y^{exp}(t)$ est le signal utile et $y_b^{exp}(t)$ le signal bruité. La propriété du bruit blanc, énoncée auparavant, s'écrit :

$$\hat{\varphi}_{bb}(\omega) = \eta \Leftrightarrow \varphi_{bb}(t) = \eta \delta(t). \quad (II.38)$$

Se plaçant dans le cadre de signaux échantillonnés, ce bruit blanc devient un bruit blanc à bande limitée de largeur B , égale à la moitié de la fréquence d'échantillonnage du système.

L'énergie d'interaction entre le signal bruité et un signal utile prédit $y(t)$ est égale à :

$$\varepsilon_b^{int} = \langle y_b^{exp}, y \rangle = \langle y^{exp}, y \rangle + \langle b, y \rangle. \quad (II.39)$$

L'interaction énergétique d'un bruit blanc avec le signal utile étant très faible, particulièrement dans le cas d'un bruit blanc centré gaussien (i.e., bruit thermique), l'énergie d'interaction utile $\varepsilon^{int} = \langle y^{exp}, y \rangle$ représente la quantité prépondérante de l'énergie d'interaction bruitée et donc :

$$\varepsilon_b^{int} \simeq \varepsilon^{int}. \quad (II.40)$$

De même, l'énergie du signal bruité ε_b^{exp} est approximativement égale à :

$$\varepsilon_b^{exp} = \langle y_b^{exp}, y_b^{exp} \rangle \simeq \langle y^{exp}, y^{exp} \rangle + \langle b, b \rangle = \varepsilon^{exp} + \varepsilon_b, \quad (II.41)$$

où $\varepsilon_b = 2\eta B$ est l'énergie du bruit. En conséquence, l'énergie du signal expérimental bruité contient à la fois l'énergie du signal expérimental utile mais également l'énergie du bruit. Ceci engendre alors un biais sur le minimum des fonctions objectif faussant ainsi l'identification des paramètres optimaux (C_{IJ}^{opt}).

Intéressons nous d'abord à la quantité utilisée par la fonction (II.29), à savoir :

$$1 - \frac{|\varepsilon_b^{int}|^2}{\varepsilon_b^{exp} \varepsilon^{pre}} \simeq 1 - \frac{|\varepsilon^{int}|^2}{\varepsilon^{exp} \varepsilon^{pre}} (1 + \text{RSB}^{-1})^{-1} \text{ tel que } \text{RSB} = \frac{\varepsilon^{exp}}{\eta B}, \quad (II.42)$$

où RSB n'est autre que le rapport signal sur bruit quantifiant, pour un signal d'énergie fixée,

le niveau de bruit présent dans le système. Sous l'hypothèse où l'interaction du bruit avec le signal utile est négligeable, le minimum de la relation (II.42) est toujours atteint, d'après la propriété (II.30), lorsque $y \equiv y^{exp}$. Cependant, la valeur de ce minimum n'est plus nulle et dépend alors du rapport RSB. De ce fait, le bruit ne joue pas un rôle perturbateur dans la localisation du minimum de la fonctionnelle F^{init} .

Si nous regardons maintenant le rôle du bruit sur la fonction F^{final} , sa présence dans le signal expérimental biaise obligatoirement la solution optimale et perturbe de ce fait l'optimisation. En conséquence, nous avons développé une technique d'évaluation de l'énergie du bruit afin de retrancher cette quantité à ε_b^{exp} et d'en déduire alors l'énergie du signal expérimental utile ε^{exp} . Pour ce faire, nous avons utilisé la propriété (II.38) du bruit supposé blanc. Ainsi, si nous écrivons la fonction d'autocorrélation du signal expérimental $y_b^{exp}(t)$, il vient :

$$\varphi_{y_b^{exp}y_b^{exp}}(t) = \varphi_{y^{exp}y^{exp}}(t) + \varphi_{bb}(t) + 2\text{Re}\{\varphi_{y^{exp}b}(t)\}. \quad (\text{II.43})$$

Le bruit blanc étant considéré comme décorrélé du signal utile, la quantité $\varphi_{y^{exp}b}(t)$ est supposée nulle et la relation (II.43) se réécrit :

$$\varphi_{y_b^{exp}y_b^{exp}}(t) \simeq \varphi_{y^{exp}y^{exp}}(t) + \eta\delta(t). \quad (\text{II.44})$$

Alors, pour tout temps t différent de zéro, les fonctions d'autocorrélation $\varphi_{y_b^{exp}y_b^{exp}}(t)$ et $\varphi_{y^{exp}y^{exp}}(t)$ sont égales. Soit $\varphi(t)$ une fonction d'extrapolation de degrés 2 supposée paire et maximale en zéro, telle que :

$$\varphi(t) = \frac{\ddot{\varphi}(0)}{2}t^2 + \varphi(0), \quad (\text{II.45})$$

nous effectuons alors une extrapolation polynomiale de la fonction $\varphi_{y_b^{exp}y_b^{exp}}(t)$ au voisinage strict du temps t nul [Theodor, 1994]. Ne prenant pas en compte le saut en zéro dans l'extrapolation, la valeur $\varphi(0)$ obtenue correspond à une valeur approchée de la valeur de $\varphi_{y^{exp}y^{exp}}(0)$, comme l'illustre la figure II.7.

Ainsi, d'après la relation (II.41), nous obtenons une approximation de l'énergie du signal utile. En pratique, l'énergie d'un bruit blanc étant uniformément répartie fréquentiellement, l'évaluation de l'énergie du bruit ε_b sur le domaine fréquentiel d'étude défini D_ω de largeur de bande $B(D_\omega)$, se déduit de la relation :

$$\varepsilon_b = \eta \frac{B(D_\omega)}{B}, \quad (\text{II.46})$$

la répartition de la densité spectrale énergétique du bruit b étant supposée constante.

L'étude développée porte essentiellement sur l'analyse et le traitement de bruits blancs additionnels afin d'en réduire l'influence sur le procédé d'optimisation. Si la présence de bruits colorés issus de phénomènes physiques est parfois observée (diffusion par des grains, émission acoustique des fissures, ...), ceux-ci sont le plus souvent décorrélés du signal utile (support fréquentiel différent). Dans le cas contraire, ces phénomènes physiques seraient pris en compte dans l'optimisation et donneraient lieu à de nouvelles interprétations des caractéristiques du milieu homogénéisé.

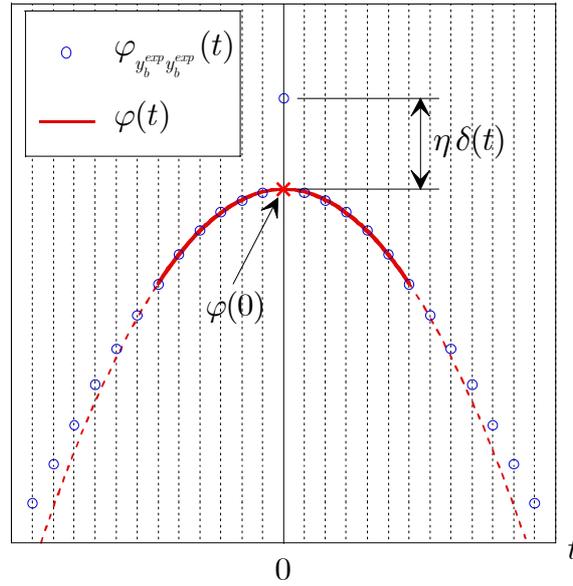


Figure II.7 : Illustration de la technique de détermination du niveau de bruit. La fonction d'autocorrélation du signal $y_b^{exp}(t)$ est déterminée discrètement et son extrapolation $\varphi(t)$ est déterminée sur quelques points autour du temps t nul, le point correspondant n'étant pas pris en compte.

2.2. Les différentes stratégies d'identification : approches globale et locale

Pour un matériau viscoélastique, les paramètres optimaux (C_{IJ}^{opt}) recherchés sont dépendants de la fréquence. Dans le procédé d'optimisation, il est avant tout nécessaire de définir un modèle (i.e., Eq. (I.20) ou (I.21)), permettant d'identifier, non pas les fonctions (C_{IJ}^{opt}), mais directement les paramètres optimaux modélisant le comportement viscoélastique du matériau. La modélisation utilisée repose sur la définition générale des fonctions ζ_{IJ} , associées aux variables $C_{IJ}(\omega)$, par :

$$\zeta_{IJ}(\omega, \kappa_q^{(IJ)}) = C_{IJ}(\omega), \quad (\text{II.47})$$

ces fonctions étant choisies linéaires selon les paramètres réels $\kappa_q^{(IJ)}$ indépendants de la fréquence. Pour un couple (I, J) et une pulsation ω fixés, le paramétrage de la variable $C_{IJ}(\omega)$ est alors effectué selon n_V paramètres $\kappa_q^{(IJ)}$, q allant de 1 à n_V . Pour l'ensemble des rigidités complexes, ces paramètres $\kappa_q^{(IJ)}$ sont regroupés dans un seul et même jeu de paramètres, noté (K_O) , définissant les N_V variables d'optimisation du problème.

2.2.1. Reconstruction de formes d'ondes pour un modèle rhéologique prédéfini globalement

La première technique d'identification, dite "globale", pose *a priori* l'hypothèse de comportements mécaniques uniformément définis sur toute la plage de fréquence étudiée. Usuellement, le comportement viscoélastique d'un matériau est décrit pour les fréquences ultrasonores selon des modèles rhéologiques classiques (I.20). En se basant sur le formalisme défini par la relation (II.47) et par identification aux modèles donnés par l'équation (I.20), la paramétrisation des fonctions $C_{IJ}(\omega)$ est entièrement définie par le jeu de variables réelles (K_O) , constitué de chacun des couples $(\kappa_1^{(IJ)}, \kappa_2^{(IJ)})$ ($n_V = 2$), vérifiant :

$$\zeta_{IJ}(\omega, \kappa_1^{(IJ)}, \kappa_2^{(IJ)}) = \kappa_1^{(IJ)} + i \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^p \kappa_2^{(IJ)}, \quad (\text{II.48})$$

où $\kappa_1^{(IJ)}$ est la partie réelle C'_{IJ} de la composante $C_{IJ}(\omega)$ du tenseur des rigidités, et $\kappa_2^{(IJ)}$ sa partie imaginaire $C''_{IJ}(\omega_0)$ à la pulsation, arbitrairement choisie, ω_0 . Les paramètres K_Q sont alors tous homogènes et assimilables à une raideur.

Le procédé d'identification global ainsi défini est relativement simple mais nécessite le choix préalable du modèle (II.48) défini par le degré p et la pulsation ω_0 . Au final, le procédé d'identification fournit les couples $(C'_{IJ}, C''_{IJ}(\omega_0))$, définissant les raideurs optimales pour le modèle rhéologique posé.

2.2.2. Paramétrisation par une formulation locale des raideurs : évaluation de comportements rhéologiques

Contrairement à la formulation globale, la formulation locale ne présuppose pas d'un modèle d'évolution des raideurs particulier, elle approxime le comportement des raideurs $C_{IJ}(\omega)$ localement autour d'une pulsation ω_0 selon l'écriture (I.21). Afin d'adapter ce formalisme au procédé d'identification, nous définissons localement autour de la pulsation ω_0 , la fonction modèle $\zeta_{IJ}(\omega, \kappa_q^{(IJ)})$, linéaire en $\kappa_q^{(IJ)}$, telle que :

$$\zeta_{IJ}(\omega, \kappa_q^{(IJ)}) = \kappa_1^{(IJ)} + i\kappa_2^{(IJ)} + (\omega - \omega_0)(\kappa_3^{(IJ)} + i\kappa_4^{(IJ)}), \quad (\text{II.49})$$

qui représente l'approximation locale au premier ordre des fonctions $C_{IJ}(\omega)$ pour ω au voisinage de ω_0 . Par identification avec la relation (I.21), les paramètres $\kappa_1^{(IJ)}$ et $\kappa_2^{(IJ)}$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires des raideurs $C_{IJ}(\omega_0)$, les paramètres $\kappa_3^{(IJ)}$ et $\kappa_4^{(IJ)}$ étant alors représentatifs des dérivées, c'est à dire de la variation locale de ces mêmes quantités. Le nombre n_V de paramètres, décrivant le comportement local pour chaque $C_{IJ}(\omega)$, est alors égal à 4. Même si cela reste une approximation, la formulation locale (II.49) autorise une analyse souple et précise des propriétés viscoélastiques d'un milieu autour d'une fréquence. Cette adaptivité permet de considérer, indépendamment de la nature réelle ou imaginaire des variables, des valeurs locales des raideurs (réelles ou imaginaires) constantes ($\kappa_3^{(IJ)}$ et/ou $\kappa_4^{(IJ)}$ paramètres identiquement nuls) ou bien linéairement dépendantes de la fréquence. Les différentes combinaisons envisagées des paramètres à identifier sont reportées dans le tableau II.1. Ainsi, le domaine D_ω est réduit à un nombre de fréquence égal à 1, 3 ou 5 points avec la possibilité de considérer ou non une pente locale et d'imposer des conditions de causalité locales (cf. Eq. (I.19)) aux paramètres optimisés.

D_ω \ Paramètres locaux	1, 3 ou 5 points	3 ou 5 points + pente	3 ou 5 points + pente + causalité
$\kappa_1^{(IJ)}$	variable	variable	variable
$\kappa_2^{(IJ)}$	variable	variable	variable
$\kappa_3^{(IJ)}$	fixé nul	variable	relation avec $\kappa_2^{(IJ)}$
$\kappa_4^{(IJ)}$	fixé nul	variable	variable

Tableau II.1 : Exemples d'implémentation du procédé d'optimisation sur un domaine fréquentiel local D_ω réduit à 1, 3 ou 5 points autour d'une fréquence correspondant au point central de l'intervalle ; dans la deuxième colonne, l'hypothèse définit les raideurs complexes comme constantes sur D_ω ; dans les troisième et quatrième colonnes, les raideurs complexes sont linéairement dépendantes de la fréquence, mais pour la dernière colonne l'hypothèse de causalité contraint les paramètres $\kappa_3^{(IJ)}$ et $\kappa_2^{(IJ)}$ à vérifier la relation (I.19).

L'intérêt de considérer les raideurs complexes comme constantes sur une fenêtre D_ω

réduite (cf. Tab. II.1, 2^e colonne) réside seulement dans l'économie de temps de calcul, le nombre de paramètre étant alors divisé par 2. La prise en compte locale de la pente permet d'affiner l'analyse. Enfin, il peut être envisagé d'imposer des relations entre des paramètres du modèle pour forcer, par exemple, des conditions de causalités locales définies par l'équation (I.19). En effet, grâce à la formulation (II.49), la possibilité d'imposer des relations locales entre les paramètres du modèle est réalisable. Les conditions de causalité de Kramers-Krönig, approximées localement par la relation (I.19), se reportent sur les paramètres optimisés de telle sorte que :

$$\kappa_3^{(IJ)} = \frac{2}{\pi |\omega_0|} \kappa_2^{(IJ)}, \quad (\text{II.50})$$

où ω_0 est la pulsation autour de laquelle s'effectue l'optimisation locale. Le paramètre $\kappa_3^{(IJ)}$ étant *a priori* une variable peu influente sur le procédé de reconstruction, en comparaison à $\kappa_2^{(IJ)}$, il semble préférable d'imposer au paramètre $\kappa_3^{(IJ)}$ la relation (II.50) à partir de la valeur de $\kappa_2^{(IJ)}$ optimisée. Grâce à ce nouveau choix de paramètres, le procédé d'optimisation peut être effectué en respectant ainsi localement la condition de causalité.

Le but étant de caractériser le comportement viscoélastique du matériau, non pas pour une seule fréquence, mais sur la totalité de la plage de fréquence étudiée, un procédé d'optimisations locales successives en parcourant le domaine d'étude a été développé. Par analogie à l'étude de la réponse fréquentielle d'une structure par une succession d'excitations harmoniques, il est possible de parcourir numériquement un domaine d'étude fréquentiel selon une fenêtre D_ω restreinte à quelques points, et ainsi analyser localement la cohérence fréquentielle entre le jeu de signaux expérimentaux et celui prédit.

Les différentes phases du procédé d'identification des modèles rhéologiques sont les suivantes. Premièrement, une initialisation des paramètres $\kappa_1^{(IJ)}$ et $\kappa_2^{(IJ)}$ est effectuée sur toute la plage de fréquence étudiée selon une technique d'identification globale avec $p = 0$, obtenant ainsi un ordre de grandeur des rigidités à identifier. Ensuite, en partant de la fréquence correspondant au maximum du module du spectre de la référence, l'optimisation est effectuée dans le sens des fréquences croissantes puis, une fois la fréquence maximale d'étude atteinte, dans le sens des fréquences décroissantes. Au final, pour chaque optimisation locale autour d'une pulsation ω_0 , les valeurs des paramètres $\kappa_1^{(IJ)}$ et $\kappa_2^{(IJ)}$ identifiées sont retenues comme la valeur optimale de la raideur $C_{IJ}(\omega_0)$.

La succession d'optimisations locales, effectuées sur un domaine fréquentiel D_ω réduit, permet ainsi une identification théorique globale des évolutions des raideurs en fonction de la fréquence.

2.3. Mise en œuvre du procédé d'optimisation

2.3.1. Technique de minimisation

La minimisation des fonctions objectif est effectuée selon la méthode de Newton généralisée associée à une méthode de recherche de la plus forte pente [Minoux, 1983] qui demande de connaître la valeur des dérivées premières et secondes de ces fonctions par rapport aux variables du problème.

Les fonctions F , représentant indifféremment les deux fonctions objectif F^{init} et F^{final} , sont des fonctions coût réelles positives calculées à partir des variables complexes $C_{IJ}(\omega)$. Ces fonctions étant toutes issues du carré du module d'une fonction complexe holomorphe

(dérivable au sens complexe, continue et uniforme), il est possible, en utilisant les relations de Cauchy-Riemann, de déterminer les grandeurs différentielles de F par rapport aux parties réelles et imaginaires des $C_{IJ}(\omega)$. En posant $f(C_{IJ})$ une fonction complexe holomorphe, telle que :

$$f(C_{IJ}) = f'(C'_{IJ}, C''_{IJ}) + if''(C'_{IJ}, C''_{IJ}), \quad (\text{II.51})$$

d'après les relations de Cauchy-Riemann [Rudin, 1998], il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial C'_{IJ}}(f' + if'') = \frac{\partial f}{\partial C_{IJ}}, \\ \frac{\partial}{\partial C''_{IJ}}(f' + if'') = i \frac{\partial f}{\partial C_{IJ}}, \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

et par conséquent :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial C'_{IJ} \partial C'_{KL}}(f' + if'') = \frac{\partial^2 f}{\partial C_{IJ} \partial C_{KL}}, \\ \frac{\partial}{\partial C'_{IJ} \partial C''_{KL}}(f' + if'') = -\frac{\partial^2 f}{\partial C_{IJ} \partial C_{KL}}, \\ \frac{\partial}{\partial C'_{IJ} \partial C''_{KL}}(f' + if'') = i \frac{\partial^2 f}{\partial C_{IJ} \partial C_{KL}}. \end{cases} \quad (\text{II.53})$$

A ce stade d'avancement, il est nécessaire d'introduire la notion de paramétrisation décrite dans le paragraphe 2.2. Ainsi, en se basant sur le formalisme posé par la relation (II.47), nous établissons la nouvelle fonction objectif réelle \tilde{F} dépendante des paramètres d'optimisation K_Q , telle que :

$$\tilde{F}(K_Q) = F(\zeta_{IJ}(\omega, \kappa_q^{(IJ)})). \quad (\text{II.54})$$

De façon similaire, nous noterons toute fonction \tilde{f} telle que $\tilde{f}(\kappa_q^{(IJ)}) = f(\zeta(\omega, \kappa_q^{(IJ)}))$. La fonction ζ_{IJ} étant supposé être une fonction linéaire des paramètres réels $\kappa_q^{(IJ)}$, les relations (II.52) et (II.53) s'écrivent alors sous une forme simplifiée :

$$\frac{\partial}{\partial \kappa_q^{(IJ)}}(\tilde{f}' + i\tilde{f}'') = \frac{\partial \zeta_{IJ}}{\partial \kappa_q^{(IJ)}} \frac{\partial f}{\partial C_{IJ}} \quad (\text{II.55})$$

pour les dérivées premières et :

$$\frac{\partial^2}{\partial \kappa_{q_1}^{(IJ)} \partial \kappa_{q_2}^{(KL)}}(\tilde{f}' + i\tilde{f}'') = \frac{\partial \zeta_{IJ}}{\partial \kappa_{q_1}^{(IJ)}} \frac{\partial \zeta_{KL}}{\partial \kappa_{q_2}^{(KL)}} \frac{\partial^2 f}{\partial C_{IJ} \partial C_{KL}} \quad (\text{II.56})$$

pour les dérivées secondes. Le calcul des dérivées premières et secondes du module d'une fonction holomorphe, telle que $|\tilde{f}(\kappa_q^{(IJ)})|^2 = (\tilde{f}'(\kappa_q^{(IJ)})^2 + \tilde{f}''(\kappa_q^{(IJ)})^2)$, ne pose alors aucun problème particulier.

Le type de fonctions $f(C_{IJ})$ rencontrées est apparenté aux fonctions énergétiques ε_n^{int} et ε_n^{pre} et donc à la fonction de transfert $H_n(C_{IJ})$ (cf. Eq. (II.28)). Ainsi, afin de calculer les valeurs exactes de (II.55) et (II.56), une formulation des dérivées premières et secondes de la fonction de transfert $H_n(C_{IJ})$, considérées *a priori* holomorphe, a été développée.

2.3.2. Écriture analytique des dérivées du premier et second ordre de la fonction de transfert de la lame

Dans le paragraphe 1.3 de ce chapitre, une écriture matricielle de la fonction de transfert H_n , pour un couple (θ_n, ψ_n) , a été établie (cf. Eq.(II.20)). Les variables d , ρ et S_f étant considérées comme des constantes du problème, la fonction de transfert H_n , à une pulsation ω fixée, ne dépend alors explicitement que des rigidités C_{IJ} . Cependant, implicitement, les vecteurs continuité $\vec{\ell}^{(m)}$ des ondes partielles dans le solide, ainsi que les termes de phase aux interfaces, sont formulés en fonction des quantités $S_1^{(m)}$ et $\vec{P}^{(m)}$. Il nous faut donc connaître les dérivées au premier et au second ordre de ces variables en fonction des rigidités C_{IJ} pour une pulsation ω fixée.

Les composantes $S_1^{(m)}$ sont déduites des racines du polynôme \mathcal{P} , défini par l'équation (II.2), qui n'est alors fonction que des paramètres S_1 et C_{IJ} . Ainsi, en appliquant le théorème des fonctions implicites au premier et au second ordre à la fonction $\mathcal{P}(S_1, C_{IJ})$, tel que :

$$\mathcal{P}(S_1^{(m)}, C_{IJ}) = 0, \quad (\text{II.57})$$

il vient la relation :

$$\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial C_{IJ}} = - \frac{\partial \mathcal{P} / \partial C_{IJ}}{\partial \mathcal{P} / \partial S_1}, \quad (\text{II.58})$$

pour les dérivées premières et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial C_{IJ} \partial C_{KL}} = & - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial C_{IJ} \partial C_{KL}} + \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial C_{IJ}} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial S_1 \partial C_{KL}} + \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial C_{KL}} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial C_{IJ} \partial S_1} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial C_{IJ}} \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial C_{KL}} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial S_1^2} \right), \quad (\text{II.59}) \end{aligned}$$

pour les dérivées secondes, où $\varphi^{(m)}$ est la fonction locale définie au voisinage de $S_1^{(m)}$ telle que $S_1 = \varphi^{(m)}(C_{IJ})$. Dorénavant, pour toute autre quantité telle que la polarisation $\vec{P}^{(m)}$, le champ de déplacement ou bien les contraintes, associée à un mode m , noté $\Theta^{(m)}$, les écritures des dérivées premières et secondes en fonctions des rigidités complexes sont les suivantes :

$$d\Theta^{(m)} = \left(\frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial C_{IJ}} + \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial C_{IJ}} \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial S_1} \right) dC_{IJ}, \quad (\text{II.60})$$

et

$$\begin{aligned} d^2 \Theta^{(m)} = & \left(\frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial C_{IJ} \partial C_{KL}} + \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial C_{IJ}} \frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial C_{KL} \partial S_1} + \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial C_{KL}} \frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial C_{IJ} \partial S_1} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial C_{IJ}} \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial C_{KL}} \frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial S_1^2} + \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial S_1} \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial C_{IJ} \partial C_{KL}} \right) dC_{IJ} dC_{KL}. \quad (\text{II.61}) \end{aligned}$$

Ainsi, le calcul de la fonction de transfert H_n n'étant qu'une combinaison linéaire des quantités $\Theta^{(m)}$, il est possible d'en déduire les dérivées du premier et du second ordre de H_n en appliquant les lois de dérivation classiques, que ce soit pour des matrices, des vecteurs ou des quantités scalaires.

Remarquons que les relations (II.58) et (II.59) ne peuvent être écrites si le problème (II.2) admet une solution double. Dans ce cas, il est nécessaire de traiter le problème en distinguant les modes dans un sous-espace de solution défini par leur polarisation [Baste et Deschamps, 1989]. La fonction $\mathcal{P}(S_1, C_{IJ})$ est alors le sous-déterminant de Ω pour le sous-espace fixé. La solution $S_1^{(m)}$ de $\mathcal{P}(S_1, C_{IJ})$ devient ainsi une racine simple et il est alors possible d'appliquer à nouveau le théorème des fonctions implicites. Cependant, il est très improbable de rencontrer ce cas de figure numériquement.

2.3.3. Calcul des intervalles de confiance

Pour le calcul des intervalles de confiance, nous nous sommes inspirés de techniques éprouvées [Audoin *et al.*, 1991], applicables aux minimisations au sens des moindres carrés, ayant fait l'objet de travaux pour d'autres types de problèmes inverses [Gourdin et Boumahrat, 1983].

Par soucis de simplification, l'ensemble des variables du problème $\kappa_q^{(IJ)}$ sont regroupées dans un seul et même jeu de paramètres, noté (K_Q) . L'intervalle de confiance associé à chaque variable K_Q est identifié pour la fonction objectif \tilde{F}^{final} , que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\tilde{F}^{final}(K_Q) = \sum_{n=1}^{n=N_s} |\tilde{f}_n(K_Q)|^2 = \sum_{n=1}^{n=N_s} \left(|\tilde{f}'_n(K_Q)|^2 + |\tilde{f}''_n(K_Q)|^2 \right), \quad (\text{II.62})$$

où $f_n(K_q)$ est une fonction complexe déduite par identification des relations (II.29) ou (II.31). Nous assimilons et traitons alors le problème comme une minimisation de deux fonctions réelles par une méthode des moindres carrés.

Notons les variables K_Q^{exact} , le jeu de paramètres intrinsèques au problème pour lequel la fonction objectif est nulle, et K_Q^{opt} , le jeu de paramètres déterminé par le procédé d'optimisation. Le vecteur erreur réel \vec{e} de dimension $2N_s$, est alors défini par :

$$\begin{cases} e_{2n+1} = \tilde{f}'_n(K_Q^{exact}) - \tilde{f}'_n(K_Q^{opt}) \\ e_{2n} = \tilde{f}''_n(K_Q^{exact}) - \tilde{f}''_n(K_Q^{opt}) \end{cases} \quad \text{pour } n \in [1, N_s]. \quad (\text{II.63})$$

En supposant que les variables aléatoires e_n suivent une distribution normale de moyenne nulle et de même variance, la matrice des covariances Λ des paramètres estimés K_Q^{opt} est évaluée par :

$$\Lambda_{ij} = \frac{\tilde{F}^{final}(K_Q^{opt})}{2N_s - N_V} \sum_{n=1}^{n=N_s} \left(\frac{\partial \tilde{f}'_n}{\partial K_i} \frac{\partial \tilde{f}'_n}{\partial K_j} + \frac{\partial \tilde{f}''_n}{\partial K_i} \frac{\partial \tilde{f}''_n}{\partial K_j} \right)_{K_Q=K_Q^{opt}}, \quad (\text{II.64})$$

où N_V est le nombre de variables de (K_q) optimisées. Ainsi, les variables aléatoires $(K_i^{exact} - K_i^{opt}) / \sqrt{\Lambda_{ii}}$ suivent une loi de Student à $(2N_s - N_V)$ degrés de liberté, ce qui permet de calculer un intervalle de confiance $\mathcal{J}(K_i)$ sur la variable K_i^{opt} , telle que :

$$\mathfrak{I}(K_i) \leq \tau \sqrt{\Lambda_{ii}} \quad (\text{II.65})$$

avec τ tel que :

$$Prob \left\{ \left| (K_i^{opt} - K_i^{exact}) / \sqrt{\Lambda_{ii}} \right| < \tau \right\} = \mu, \quad (\text{II.66})$$

indiquant la probabilité μ que la variable aléatoire soit inférieure en valeur absolue à τ . La constante μ représente alors le niveau de confiance de l'optimisation. Dans tous les résultats présentés par la suite, ce niveau de confiance est fixé à 95%. Finalement, le calcul de l'intervalle de confiance $\mathfrak{I}(K_i)$ nous permet alors de conclure que, sous la condition que le jeu de paramètre (K_Q^{exact}) existe, le paramètre K_Q^{exact} a 95% de chance d'appartenir à l'intervalle $[K_i^{opt} - \mathfrak{I}(K_i), K_i^{opt} + \mathfrak{I}(K_i)]$.

Chapitre III

Validation et analyse à partir de signaux simulés

Le développement d'une nouvelle procédure d'identification nécessite toujours une phase préalable de tests. La démarche consiste avant tout à valider la technique de résolution du problème inverse en analysant le comportement (efficacité, stabilité, sensibilité) du procédé d'optimisation pour les différents paramètres du modèle. L'utilisation de signaux simulés, dont les propriétés sont parfaitement maîtrisées, permet, par comparaison des résultats de l'identification avec les données originelles de la simulation, de préciser l'influence de ces paramètres.

L'étude se divise selon les deux approches dites "globale" et "locale". Dans la première phase traitant de l'approche globale, la stabilité, la fiabilité et la précision du procédé d'optimisation par reconnaissance de formes d'ondes sont prouvées pour des niveaux de bruit et des rapports RLE élevés, ainsi que pour des matériaux de degrés d'anisotropie et d'atténuation différents. Il est alors démontré que cette technique est adaptée aux matériaux dont le comportement rhéologique est parfaitement connu. Dans le cas contraire, la technique d'identification locale s'impose d'elle-même. C'est l'objet de la seconde partie de ce chapitre, où l'identification de comportements rhéologiques inconnus, satisfaisant ou non des conditions de causalité locale, est présentée puis validée à partir de simulations.

1. IDENTIFICATION DES RIGIDITÉS COMPLEXES SELON UN MODÈLE RHÉOLOGIQUE PRÉDÉFINI

1.1. Description de l'étude et présentation des différents cas simulés

Ce paragraphe décrit les simulations réalisées pour différentes valeurs des paramètres suivants : rapport signal sur bruit (RSB), rapport longueur d'onde sur épaisseur (RLE), degré d'anisotropie et degré d'atténuation. Les simulations de signaux ont été effectuées dans les plans principaux d'un matériau viscoélastique à symétrie orthotrope. Ainsi, le tenseur des rigidités voit le nombre de ses composantes non nulles et indépendantes, passer de 21 à 9. Les rigidités complexes choisies correspondent à celles d'un composite carbone-époxy unidirectionnel où le degré p du modèle (II.48) est fixé à 1 [Deschamps et Chevée, 1993]. Les valeurs des rigidités $C_{IJ}(\omega)$ sont reportées dans le tableau III.1 avec les variables $\kappa_q^{(IJ)}$ associées. En première approche, il est courant de considérer la partie réelle du tenseur des rigidités (C'_{IJ}) comme représentative de l'élasticité du milieu et la partie imaginaire (C''_{IJ}) comme caractéristique de la viscosité.

(I, J)	(1,1)	(2,2)	(3,3)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(4,4)	(5,5)	(6,6)
$\kappa_1^{(IJ)} = C'_{IJ}$ (GPa)	12	12	136	6,8	5,4	5,4	6,2	6,2	3,4
$\kappa_2^{(IJ)} = C''_{IJ}(\omega_0)$ (GPa)	0,65	0,65	1,1	0,12	0,23	0,23	0,22	0,22	0,24

Tableau III.1 : Paramètres du modèle (II.48) choisi pour définir les propriétés viscoélastiques du matériau utilisées pour la simulation des signaux.

Le plan de symétrie $(\vec{1}, \vec{2})$ de ce matériau est quasi-isotrope alors que le plan $(\vec{1}, \vec{3})$ est fortement anisotrope. La masse volumique du solide est 1560 kg/m^3 . Les effets des degrés d'anisotropie et d'atténuation sur la procédure d'optimisation sont étudiés en considérant les 3 configurations résumées dans les tableaux III.2 et III.3. La fréquence centrale ν_c du signal de référence mesuré expérimentalement est environ égale à 2 MHz.

Les 3 tests étudiés diffèrent les uns des autres par leurs degrés d'anisotropie et d'atténuation (cf. Tab. III.3). En effet, le degré d'anisotropie [Auld, 1990] change selon le choix du plan azimuthal. Dans le plan $(\vec{1}, \vec{2})$, la propagation s'effectue dans un plan quasi-isotrope alors que dans le plan $(\vec{1}, \vec{3})$ l'anisotropie est très marquée. Concernant le degré d'atténuation, sa valeur varie avec la pulsation ω_0 considérée. Plus la valeur de ω_0 , servant de référence aux paramètres $\kappa_2^{(IJ)} = C''_{IJ}(\omega_0)$, est basse, plus le matériau présente globalement une atténuation importante. Ainsi, pour une fréquence fixée, les variables C''_{IJ} sont plus élevées dans la troisième simulation que dans les deux premières.

Simulations	$\nu_0 = \omega_0 / 2\pi$	Degré d'anisotropie	Degré d'atténuation
test 1 – (II) : plan $(\vec{1}, \vec{2})$	2 MHz	faible	faible
test 2 – (II) : plan $(\vec{1}, \vec{3})$	2 MHz	élevé	faible
test 3 – (II) : plan $(\vec{1}, \vec{3})$	0,5 MHz	élevé	élevé

Tableau III.2 : Description et caractéristiques des jeux de signaux simulés ; le degré d'anisotropie varie avec le choix du plan azimuthal (II) et le degré d'atténuation change avec la valeur de la pulsation ω_0 .

La description des plages d'incidence angulaire est résumée dans le tableau III.3 pour chacun des tests implémentés, fixant le nombre N_s de signaux simulés. En complément, la liste des variables identifiables par le procédé d'inversion, car influençant la propagation des ondes planes dans le plan azimuthal défini, est indiquée. Enfin, le domaine fréquentiel D_ω choisi est composé de 50 points de mesure en fréquence s'étendant de 1,2 à 2,4 MHz.

Simulations	Plage des angles d'incidence	Composantes sensibles
test 1 – (II) : plan $(\vec{1}, \vec{2})$	$\left[0^\circ \xrightarrow[4^\circ]{pas} 60^\circ\right] \Rightarrow N_s = 16$	$(C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{66})$
tests 2 et 3 – (II) : plan $(\vec{1}, \vec{3})$	$\left[0^\circ \xrightarrow[1^\circ]{pas} 6^\circ \xrightarrow[0.5^\circ]{pas} 10^\circ \xrightarrow[2^\circ]{pas} 24^\circ\right] \Rightarrow N_s = 22$	$(C_{11}, C_{33}, C_{13}, C_{55})$

Tableau III.3 : Définition, pour chacune des simulations, de la plage d'angle d'incidence et des composantes sensibles du tenseur des rigidités, variant selon le plan azimuthal choisi.

Pour chacun des tests, nous étudions l'influence du rapport longueur d'onde sur épaisseur (RLE) en considérant des échantillons de 5 épaisseurs différentes : 0,5, 1, 2, 4 et 8 millimètres. Le rapport RLE donné correspond au rapport de la fréquence spatiale de l'onde longitudinale en incidence normale sur l'épaisseur de la plaque. Cette longueur d'onde étant de 1,4 mm à la fréquence de 2 MHz, le rapport RLE pour les tests effectués est compris entre 0,2 et 2,8 environ.

En parallèle, l'effet d'un bruit additionnel, quantifié par le rapport RSB, sur le procédé d'inversion est étudié pour 6 rapports signal sur bruit : 120, 40, 20, 12, 6 et 0 dB. Le bruit ajouté au signal "utile" simulé tend à être similaire à un bruit blanc gaussien centré, s'apparentant alors aux bruits électriques et électroniques (cf. § II.2.1.4). La simulation d'un tel bruit n'étant pas numériquement reproductible, nous réduisons la randomisation de la simulation en procédant à 16 tirages différents pour lesquels nous rechercherons les paramètres optimaux dont nous prendrons la moyenne comme résultat final.

Ces essais de simulation permettent ainsi d'étudier le comportement du procédé d'optimisation pour les principaux paramètres expérimentaux, allant de la géométrie aux propriétés mécaniques du matériau pour différents niveaux de bruit. Les résultats de ces différents tests sont présentés dans les paragraphes suivants.

1.2. Validation de la méthode en l'absence de bruit

Dans un premier temps, le but est de valider l'efficacité et la stabilité du processus d'identification des rigidités complexes selon un modèle rhéologique prédéfini. L'efficacité est une notion qui englobe à la fois la rapidité de convergence mais aussi la précision du procédé. La stabilité de l'optimisation s'apparente plus au domaine de convergence propre aux fonctions objectif définies. Aucun élément perturbateur, tel que le bruit, n'est rajouté aux jeux de signaux simulés. Il existe ainsi un jeu de signaux reconstruits identique en tout point au jeu de signaux simulés. S'affranchissant ainsi de complications liées à la modélisation même du problème, seules les difficultés propres à la technique de minimisation sont analysées.

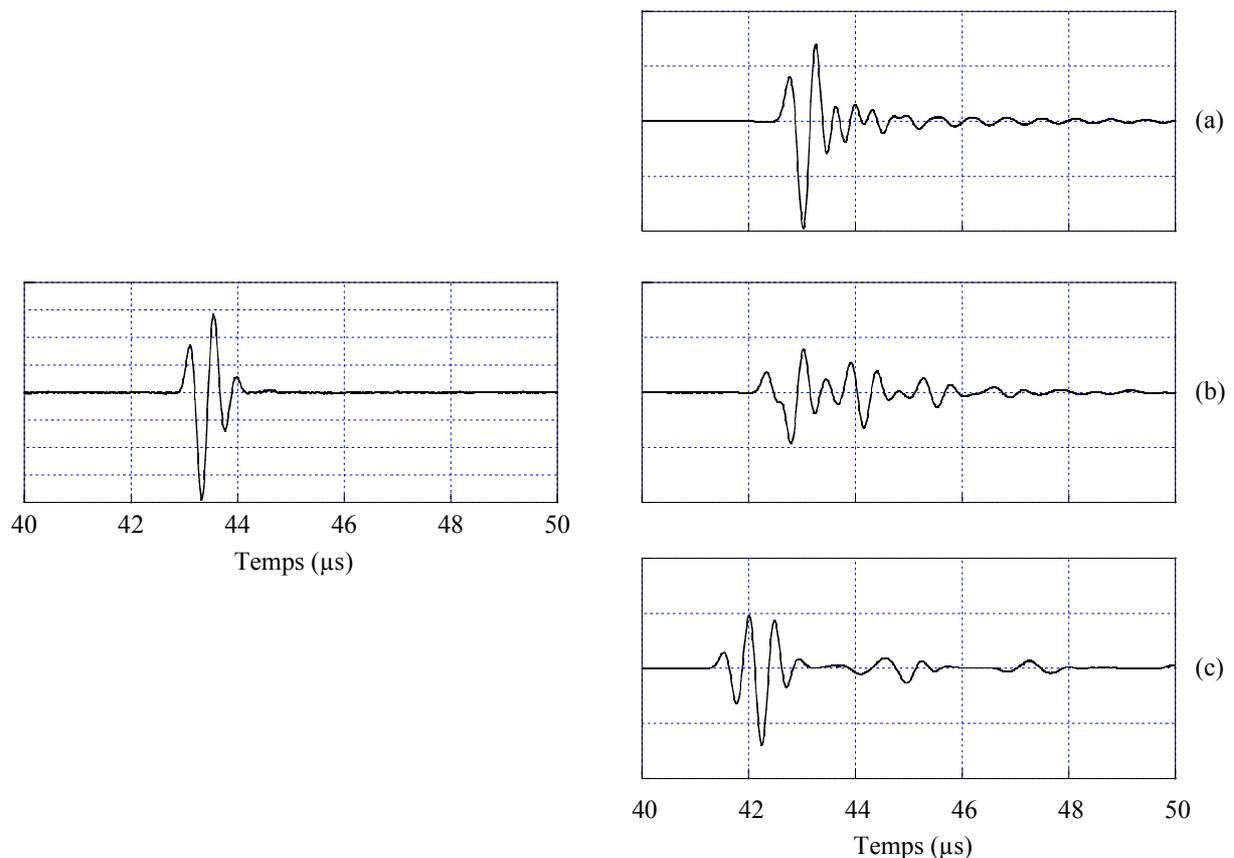


Figure III.1 : Illustration de l'effet de l'épaisseur sur la forme d'onde des signaux transmis : à gauche le signal de référence, à droite les signaux obtenus selon un angle d'incidence de 7° pour une épaisseur d'échantillon de (a) 1 mm, (b) 2 mm et (c) 4 mm dans la configuration du 2^e essai de simulation.

De nombreux facteurs, tels que l'épaisseur et les propriétés viscoélastiques du matériau, influent et modifient globalement l'aspect des signaux transmis (cf. Fig. III.1), introduisant parfois l'existence de minima locaux pour les fonctions objectif utilisées. S'il est impossible de considérer que le procédé d'optimisation identifie le minimum global de la fonction objectif quel que soit le jeu de paramètres initial choisi, une connaissance succincte des matériaux permet toutefois de définir un domaine restreint acceptable, contenant la solution exacte. Afin d'obtenir un domaine de convergence le plus large possible tout en gardant une précision importante, le schéma d'inversion est basé sur les minimisations successives des fonctions F^{init} et F^{final} . Du fait de sa grande régularité et de son large domaine de convergence, la fonction F^{init} est utilisée comme un outil d'initialisation des paramètres d'optimisation. La fonction F^{final} , dont le domaine de convergence est beaucoup plus réduit, est employée pour une recherche affinée du jeu de paramètres optimal.

Afin de traduire en pratique la méconnaissance du matériau étudié, une perturbation aléatoire des paramètres originels a été effectuée. Le jeu de raideurs initial est ainsi choisie aléatoirement dans un intervalle à $\pm 50\%$ des données ayant servi à la simulation des signaux (cf. Tab. III.1). Pour l'ensemble des tests présentés dans le tableau III.2 et quel que soit le rapport RLE, les rigidités complexes d'origine sont retrouvées avec des biais négligeables et des intervalles de confiance inférieurs à 0,3% sur les paramètres optimisés. Cette dernière valeur est très faible mais différente de 0%, les critères d'arrêt de l'optimisation fixés sur la valeur de la norme du gradient de F^{final} étant non nul.

Ainsi, pour une épaisseur de lame allant de 0,5 à 8 mm, ces premiers tests montrent, indépendamment des degrés d'anisotropie et d'atténuation du matériau, l'efficacité et la précision du processus d'inversion en l'absence de bruit extérieur.

1.3. Influence des rapports signal sur bruit et longueur d'onde sur épaisseur

En l'absence de bruit, le processus d'optimisation est très stable. Un des avantages notables de cette technique est d'être en théorie peu sensible aux bruits aléatoires fortement décorrélés des signaux "utiles" à reconstruire (cf. § II.2.1.4). Notre souhait est donc ici de définir la sensibilité aux divers paramètres précédemment décrits (cf. § III.1.1) et de définir les limites de la technique d'identification proposée. À travers l'analyse des erreurs et des incertitudes du procédé d'optimisation, il est alors possible de tirer des conclusions pertinentes sur chacun des essais réalisés pour différents rapports RLE et RSB.

La sensibilité des variables optimisées vis à vis du procédé d'inversion diffère selon le paramètre K_q considéré. Deux groupes se distinguent nettement : l'un rassemblant les parties réelles C'_{IJ} et l'autre les parties imaginaires $C''_{IJ}(\omega_0)$ du tenseur des rigidités, à savoir respectivement les paramètres $\kappa_1^{(IJ)}$ et $\kappa_2^{(IJ)}$ des modèles. Ainsi, afin de simplifier l'analyse des paramètres obtenus par le procédé d'inversion, nous avons défini pour chacun de ces groupes de paramètres une erreur relative moyenne, telle que :

$$\Delta K' = \frac{1}{N'_V} \sqrt{\sum_{Q'} \left(\frac{K_{Q'}^{opt}}{K_{Q'}^{exact}} - 1 \right)^2} \quad \text{et} \quad \Delta K'' = \frac{1}{N''_V} \sqrt{\sum_{Q''} \left(\frac{K_{Q''}^{opt}}{K_{Q''}^{exact}} - 1 \right)^2}, \quad (III.1)$$

où l'ensemble des paramètres d'optimisation (K_Q) est l'union des ensembles ($K_{Q'}$) et ($K_{Q''}$), désignant respectivement l'ensemble des $\kappa_1^{(IJ)}$ de taille N'_V , et celui des $\kappa_2^{(IJ)}$ de taille N''_V avec, par conséquent, $N'_V + N''_V = N_V$. Les notations et paramètres utilisés ont été auparavant définis dans les paragraphes II.2.2 et II.2.3.3. De la même façon, les incertitudes quadratiques

relatives moyennes sur les ensembles $(K_{Q'})$ et $(K_{Q''})$ sont respectivement définies comme :

$$\Delta\mathcal{J}' = \frac{1}{N'_V} \sqrt{\sum_{Q'} \left(\frac{\mathcal{J}(K_{Q'}^{opt})}{K_{Q'}^{exact}} \right)^2} \quad \text{et} \quad \Delta\mathcal{J}'' = \frac{1}{N''_V} \sqrt{\sum_{Q''} \left(\frac{\mathcal{J}(K_{Q''}^{opt})}{K_{Q''}^{exact}} \right)^2}. \quad (\text{III.2})$$

Les quantités établies par les relations (III.1) et (III.2) ne permettent pas d'examiner individuellement chaque paramètre mais englobe des paramètres dont la signification physique est commune, afin d'aboutir à une analyse générale du problème. Notons qu'aux intervalles de confiance près, tous les paramètres identifiés pour l'ensemble des simulations effectuées coïncident avec les données originelles utilisées pour la simulation. De même, la prise en compte dans le procédé d'inversion de la réduction du bruit (cf. § II.2.1.4) améliore remarquablement la reconstruction.

Pour chacune des 3 simulations, les résultats de cette étude sont représentés dans les figures III.2, III.3 et III.4 par les histogrammes des quantités $\Delta K'$, $\Delta K''$, $\Delta\mathcal{J}'$ et $\Delta\mathcal{J}''$ en fonction des rapports RLE et RSB.

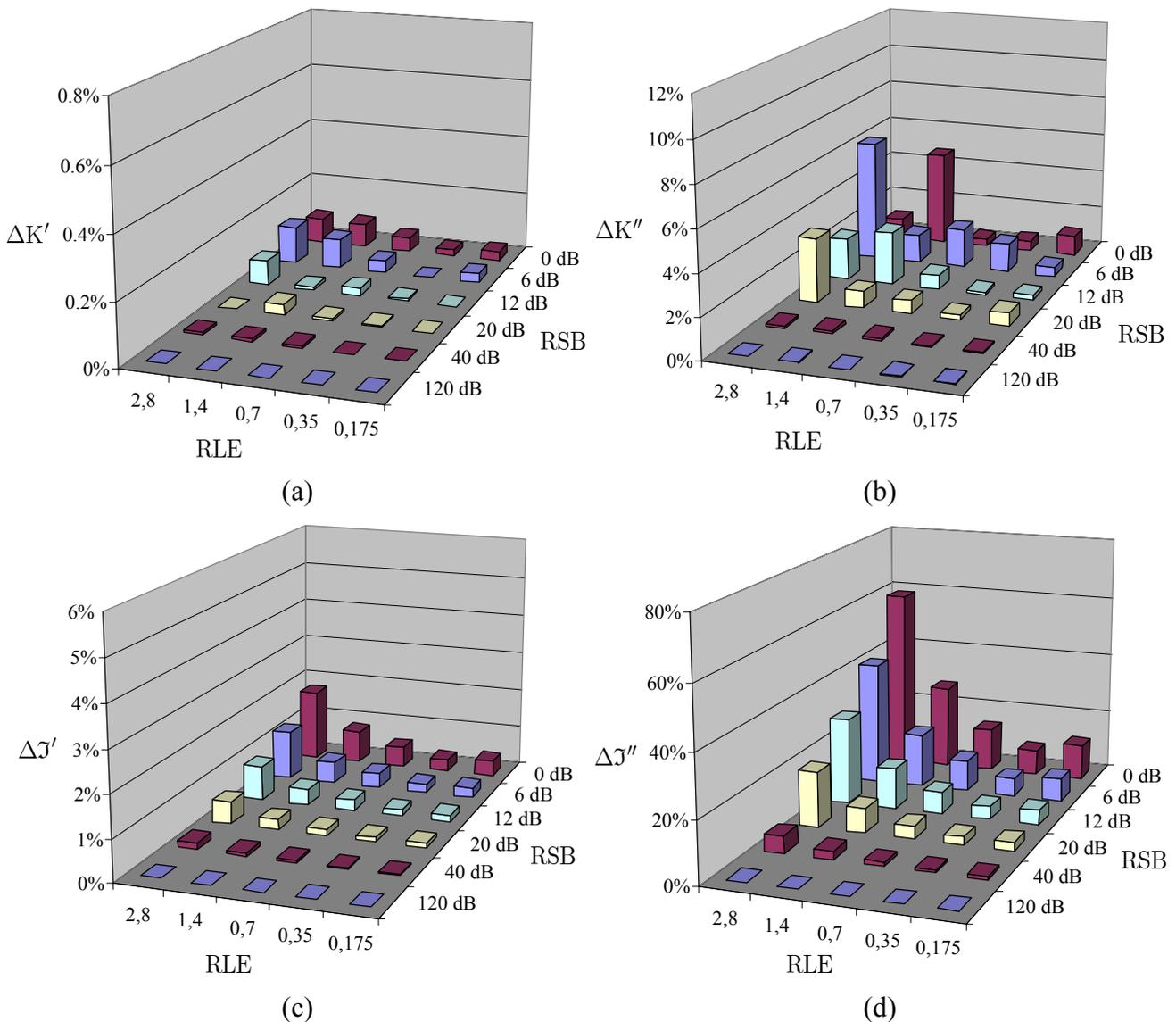


Figure III.2 : Résultats des essais pour la configuration du test 1 (cf. Tab. III.2). Les différents diagrammes, fonctions des rapports RLE et RSB, représentent : (a) l'erreur d'élasticité $\Delta K'$, (b) l'erreur de viscosité $\Delta K''$, (c) l'incertitude d'élasticité $\Delta\mathcal{J}'$ et (d) l'incertitude de viscosité $\Delta\mathcal{J}''$.

D'un point de vue général, les erreurs $\Delta K'$ commises sur les identifications des parties réelles des rigidités sont toujours négligeables ($< 0,8\%$), et les incertitudes $\Delta \mathcal{J}'$ restent tout à fait tolérables ($< 6\%$), bien que croissant globalement avec les rapports RLE et RSB. Par contre, si les identifications des parties imaginaires paraissent convenables ($\Delta K'' < 12\%$), l'ordre de grandeur des niveaux d'incertitudes $\Delta \mathcal{J}''$ calculées pour des rapports RSB inférieurs à 12 dB souligne le manque de fiabilité de la technique de caractérisation au delà de ce niveau de bruit. Cependant, notons que ces seuils de nuisances sont essentiellement atteints, dans une configuration expérimentale réelle, lorsque le milieu de couplage est l'air et pour des signaux non-moyennés. Ils sont plus rarement observés lorsque l'échantillon est immergé dans l'eau.

Pour chacun des tests de simulation, l'augmentation des incertitudes $\Delta \mathcal{J}'$ et $\Delta \mathcal{J}''$ avec le niveau de bruit souligne que la fiabilité de la reconstruction diminue naturellement avec le rapport RSB. Cette tendance n'a rien de surprenant, les intervalles de confiance quantifiant en théorie le niveau de précision de l'identification des raideurs complexes.

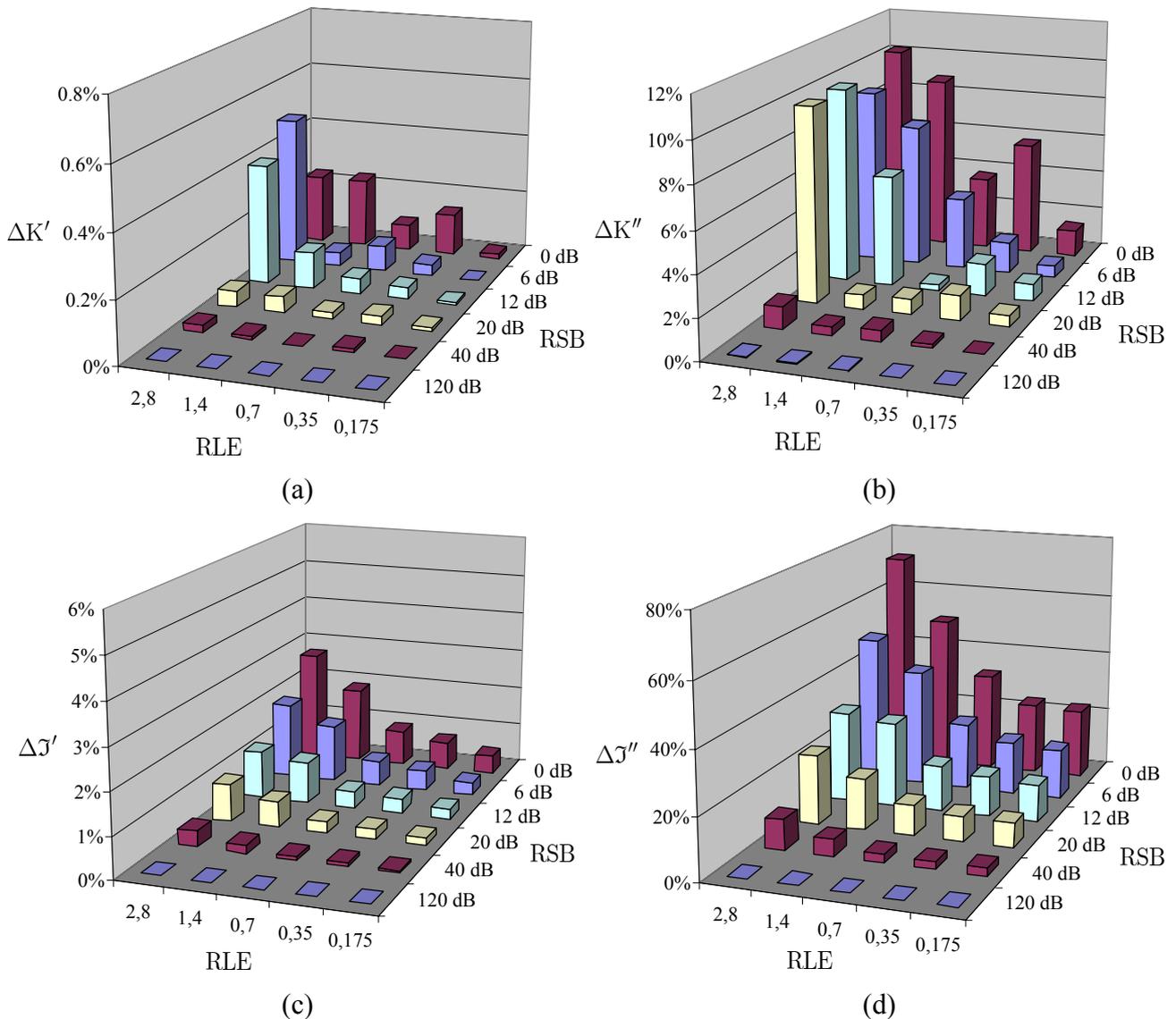


Figure III.3 : Résultats des essais pour la configuration du test 2 (cf. Tab. III.2). Les différents diagrammes, en fonction des rapports RLE et RSB, représentent : (a) l'erreur d'élasticité $\Delta K'$, (b) l'erreur de viscosité $\Delta K''$, (c) l'incertitude d'élasticité $\Delta \mathcal{J}'$ et (d) l'incertitude de viscosité $\Delta \mathcal{J}''$.

En comparant les diagrammes III.2, III.3 et III.4, les effets couplés de l'anisotropie et de l'atténuation sur la précision de la reconstruction peuvent être discutés. Le niveau des erreurs $\Delta K'$ étant très faible, il serait audacieux de dégager une analyse du comportement observé. La comparaison des figures III.2 et III.3 montre néanmoins que l'erreur $\Delta K''$ et les incertitudes $\Delta \mathcal{J}'$ et $\Delta \mathcal{J}''$ augmentent avec le niveau d'anisotropie. Par contre, le rapprochement des figures III.3 et III.4 montre que l'augmentation du degré d'atténuation semble à la fois affecter l'identification des parties réelles des raideurs (augmentation de $\Delta \mathcal{J}'$) et améliorer la reconstruction des parties imaginaires (diminution de $\Delta K''$ et de $\Delta \mathcal{J}''$). Cette dernière remarque souligne que la technique implémentée est tout à fait adaptée à la caractérisation de matériaux fortement dispersifs et gagne en précision sur la détermination des parties imaginaires des raideurs avec l'absorption croissante.

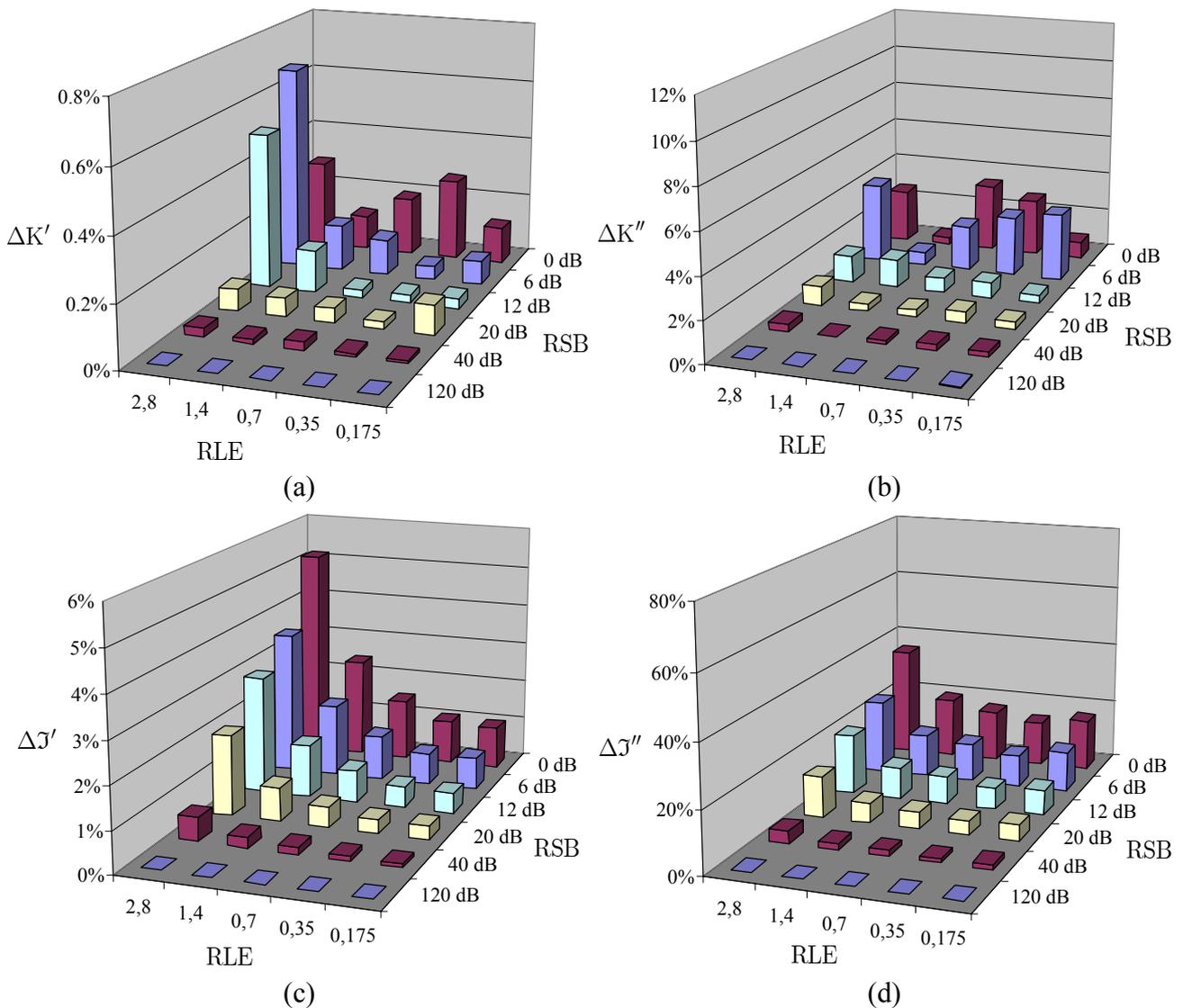


Figure III.4 : Résultats des essais pour la configuration du test 3 (cf. Tab. III.2). Les différents diagrammes, en fonction des rapports RLE et RSB, représentent : (a) l'erreur d'élasticité $\Delta K'$, (b) l'erreur de viscosité $\Delta K''$, (c) l'incertitude d'élasticité $\Delta \mathcal{J}'$ et (d) l'incertitude de viscosité $\Delta \mathcal{J}''$.

Nous avons donc montré l'applicabilité globale du processus d'inversion pour des signaux fortement bruités avec des rapports RLE élevés quelles que soient les propriétés viscoélastiques du matériau. Les niveaux d'incertitudes atteints pour les niveaux de bruits élevés et de faibles épaisseurs définissent les limites de la méthode au delà desquelles l'imprécision est excessive.

La précision et la fiabilité de la reconstruction sont maintenant illustrées par la figure III.5 qui décrit la reconstruction la moins vraisemblable parmi tous les essais (test 2, rapports RLE et RSB de 2,8 et 6 dB). Le graphique (c) représente le signal reconstruit à partir du signal bruité (b), dont la simulation originale est donnée en (a). L'excellent accord entre le signal original et le signal prédit souligne la précision de cette technique de reconnaissance de formes d'ondes. L'agrandissement effectué sur la queue du signal montre la très faible différence entre la reconstruction (c) et l'original (a).

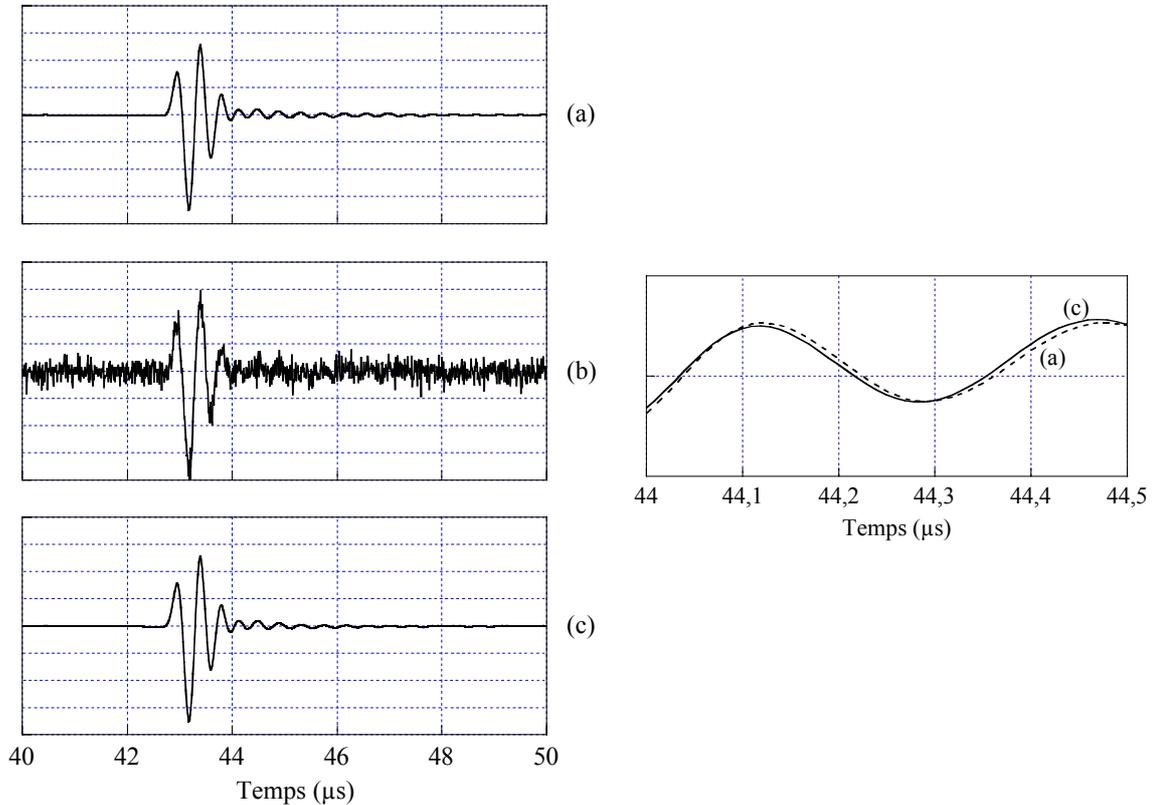


Figure III.5 : Représentation de la reconstruction la moins vraisemblable pour l'ensemble des tests. Les signaux tracés, pour le 2^e test avec une épaisseur de 0,5 mm pour un rapport RSB de 6 dB, correspondent respectivement au signal original en (a), au signal simulé bruité en (b) et au signal reconstruit en (c). A droite de ces 3 graphiques est reporté un agrandissement de la queue des signaux (a) et (c) afin de mettre en évidence les différences entre l'original et la reconstruction.

1.4. Influence du choix arbitraire d'un modèle rhéologique

Le choix préalable d'un modèle rhéologique doit être effectué afin d'identifier, selon ce modèle, les propriétés viscoélastiques d'un matériau. Les phénomènes d'atténuation et de dispersion des ondes ultrasonores peuvent être issus de causes liées à différents phénomènes de dissipation d'énergie (absorption intrinsèque, diffraction, friction) [Lakes, 1998; Chandra *et al.*, 1999]. Ainsi, dans des matériaux complexes, le modèle rhéologique utilisé peut s'avérer méconnu et donc le plus souvent inexact. Il apparaît alors nécessaire d'étudier les conséquences d'une mauvaise modélisation de la rhéologie du matériau sur la technique de reconnaissance de formes d'ondes.

Nous avons procédé à des simulations de signaux pour différents modèles rhéologiques : soit le matériau est considéré comme purement élastique, soit la construction se base sur le modèle viscoélastique (I.20) dont le degré p est égal à 0, 1 ou 2. Dans les simulations, quel que soit le modèle envisagé, les valeurs des parties réelles des rigidités C'_{IJ} restent celles du tableau III.1. Il en est de même pour les parties imaginaires $C''_{IJ}(\omega_0)$, avec l'hypothèse d'un

matériau viscoélastique. Par contre, dans le cas du matériau purement élastique, les raideurs imaginaires sont posées identiquement nulles ($\kappa_2^{(IJ)} = 0$). Le but étant de quantifier l'influence du choix d'un modèle rhéologique, aucun bruit n'a été ajouté à ces jeux de signaux.

Une étude préliminaire, fixant $p = 2$, a été effectuée pour chaque essai du tableau III.2 et pour des épaisseurs de lame de 1, 2, 4 et 8 mm [Leymarie *et al.*, 2001]. Les résultats obtenus ont montré que ni l'épaisseur, ni le degré d'anisotropie ne jouent un rôle prépondérant sur l'influence du choix d'une modélisation erronée des lois de comportement pour l'inversion. Par contre, plus le matériau présente un caractère viscoélastique marqué, plus l'écart croissant au modèle rhéologique originel détériore la qualité de la caractérisation du matériau.

Dans la figure III.6, les différentes identifications obtenues à partir des signaux simulés avec $p = 2$ sont illustrées par la représentation des signaux reconstruits, selon différents modèles rhéologiques, pour un angle d'incidence de 7° .

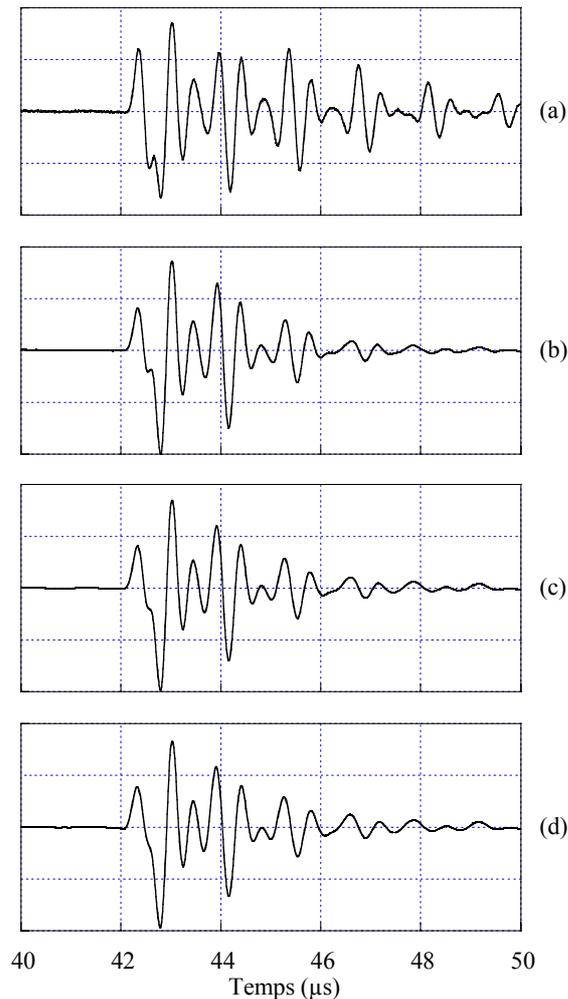


Figure III.6 : Reconstitutions d'un signal selon différents modèles rhéologiques à partir de signaux simulés avec un modèle rhéologique donné ($p = 2$). Pour l'illustration, les raideurs supposées sont celles du 2^e test, avec une épaisseur de 2 mm et un angle d'incidence de 7° : les parties imaginaires des rigidités C_{ij}'' sont successivement supposée (a) identiquement nulle, (b) fréquemment indépendante ($p = 0$), (c) linéaire en fréquence ($p = 1$) et enfin (d) "quadratique" en fréquence ($p = 2$). Notons que le signal simulé puis utilisé dans le procédé d'inversion est similaire au signal (d).

La forme temporelle du signal (a) est caractéristique d'un milieu élastique, où les échos issus des multiples réflexions aux interfaces sont peu atténués et où la dispersion des signaux n'est pas prise en compte. Les signaux (b) et (c), reconstruits selon un modèle prenant en compte la viscosité, présentent une allure proche de celle du signal (d) correspondant

exactement au signal simulé. Cependant, dans les cas (b) et (c), la modélisation étant imparfaite, la vraisemblance entre les signaux prédits et simulés n'est pas exacte. Une différence remarquable se distingue au niveau de l'inflexion située entre 42 et 43 μs . Cette dernière constatation illustre la nécessité, pour la technique de reconstruction de formes d'ondes, d'une description des phénomènes de dispersion la plus exacte possible.

Afin de quantifier l'effet des modèles les uns par rapport aux autres, 4 jeux de signaux ont été simulés à partir des 4 modèles rhéologiques proposés. Pour ces simulations, seule la configuration du deuxième test (cf. Tab. III.2) est retenue avec une épaisseur d'échantillon de 2 mm. Pour chacune de ces 4 simulations, les paramètres (K_q) ont été optimisés en se basant successivement sur les 4 modèles rhéologiques proposés. Si la comparaison des paramètres liés à la partie imaginaire des raideurs ne présente pas de sens, celle des paramètres liés à la partie réelle est intéressante pour différentes raisons. D'une part, ces simulations confirment que la prise en compte de la viscoélasticité dans le modèle est une donnée primordiale, influant notablement sur l'identification des constantes d'élasticité du matériau. D'autre part, ces essais démontrent la sensibilité de la technique au choix du modèle rhéologique. Comme l'illustre le diagramme de la figure III.7, une modélisation erronée entraîne naturellement une reconstruction approximative des signaux. En conséquence, l'identification des propriétés mécaniques de l'échantillon est biaisée dès lors que ce dernier présente un caractère viscoélastique. En revanche, dans le cas de la simulation de matériau élastique, tous les modèles testés pour l'optimisation demeurent valables (cf. Fig. III.7 pour le modèle élastique).

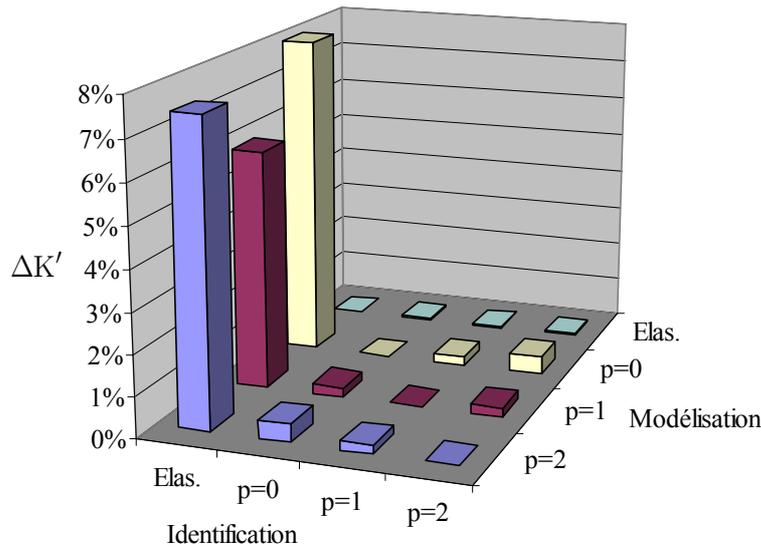


Figure III.7 : Diagramme des erreurs $\Delta K'$ observées en fonction de différents modèles rhéologiques choisis soit pour la simulation des signaux (modélisation), soit pour la reconstruction des signaux (identification).

Même si les procédés d'optimisation utilisant un modèle viscoélastique semblent donner de bien meilleurs résultats que dans une configuration purement élastique, cette étude met en évidence la nécessité de maîtriser le modèle rhéologique du matériau pour parvenir à une reconstruction optimale.

Sachant que les modèles rhéologiques classiques proposés, Eq. (I.20), ne reflètent pas toujours la réalité (le comportement du milieu étant *a priori* inconnu), il paraît intéressant de s'en détacher et d'autoriser l'existence de lois de comportement plus complexes. Nous avons donc cherché à adapter la technique mise en place dans le but d'identifier localement en fréquence les raideurs complexes du matériau, pour ensuite établir globalement les fonctions $C_{IJ}(\omega)$ sur toute la plage de fréquence étudiée.

2. IDENTIFICATION FRÉQUENTIELLE LOCALE DES RAIDEURS COMPLEXES : DÉTERMINATION DE COMPORTEMENTS RHÉOLOGIQUES

La connaissance de l'évolution fréquentielle des rigidités complexes d'un matériau est motivée par des raisons diverses. D'une part, la mesure d'évolutions non conventionnelles des constantes viscoélastiques d'un matériau en fonction de la fréquence pourrait amener à des interprétations physiques plus évoluées, notamment sur la microstructure du matériau. D'autre part, et c'est l'objet de notre étude, la mise en place d'un procédé d'identification des modèles rhéologiques conduirait naturellement à un perfectionnement de la technique de reconstruction. En effet, comme cela a déjà pu être constaté dans le paragraphe précédent, il est nécessaire de modéliser, de la façon la plus exacte possible, les évolutions des raideurs $C_{IJ}(\omega)$, pour éviter une reconstruction erronée des signaux. De plus, une telle formulation du problème permet, pour chaque raideur C_{IJ} , l'identification d'évolutions fréquentielles différentes (par exemple, linéaire pour la partie imaginaire du C_{11} , constante pour celle du C_{12} et quadratique pour celle du C_{66}). En effet, l'écriture (I.4) de la loi de comportement mécanique des matériaux viscoélastiques linéaires définit des fonctions de relaxation *a priori* indépendantes les unes des autres. Ainsi, lors du choix des modèles rhéologiques du matériau paramétrant la loi de comportement, nous pouvons décrire, non seulement une paramétrisation "anisotrope" ($\kappa_q^{(IJ)}$ indépendants les uns des autres), mais aussi un comportement rhéologique inhomogène [Biwa et Shibata, 2000] (évolutions en fréquence indépendantes des $C_{IJ}(\omega)$). Enfin, il apparaît intéressant de vérifier ou d'imposer la causalité des phénomènes exprimés à travers la loi de comportement par la relation locale (I.19).

2.1. Identification de comportements rhéologiques classiques

Dans un premier temps, nous avons cherché à définir la stratégie optimale à suivre pour l'identification de comportements rhéologiques. Les différents types d'implémentation proposés dans le tableau II.1 ont alors été testés pour différentes simulations basées sur des modèles rhéologiques classiques (I.20), où $p = 1$ ou 2 . Des calculs préliminaires ont alors mis en évidence le manque de stabilité de la technique d'optimisation locale autour de fréquences où la densité spectrale du signal de référence est faible. En conséquence, un critère simple, gage de stabilité du procédé d'inversion, limite le domaine d'étude à la bande passante à 6 dB du signal de référence. Ce critère a été validé pour le signal de référence de fréquence centrale à 2 MHz mais également pour un autre signal à 1 MHz. Pour le signal de référence utilisé par la suite, ce domaine est compris entre 1,34 et 2,83 MHz et comprend 63 points. Les résultats de la figure III.8 représentent les erreurs moyennes $\Delta K'$ et $\Delta K''$ ainsi que les incertitudes moyennes $\Delta \mathcal{J}'$ et $\Delta \mathcal{J}''$ obtenues selon les différentes stratégies définies dans le tableau II.1, pour un jeu de signaux simulés à partir du modèle rhéologique classique où $p = 2$, et pour une épaisseur de lame de 2 mm.

Globalement, les erreurs commises par l'identification locale (cf. Fig. III.8) restent négligeables quelle que soit la technique utilisée ($\Delta K' < 0,8\%$ et $\Delta K'' < 2,5\%$). Pour les optimisations à raideurs localement constantes (sans la pente), remarquons que les meilleures identifications sont obtenues pour le choix d'un domaine local réduit à 3 points. Lorsque 1 seul point est considéré, le procédé d'inversion manque de stabilité et de précision. Ce résultat est illustré par la figure III.9 (a). En revanche, dans une optimisation locale à 5 points, c'est l'approximation des raideurs constantes sur une bande fréquentielle trop large qui entraîne un biais dans la reconstruction (cf. Fig. III.9 (b)). Ainsi, sans la pente, la configuration avec 3 points semble correspondre à un compromis entre la stabilité de l'identification et la justesse

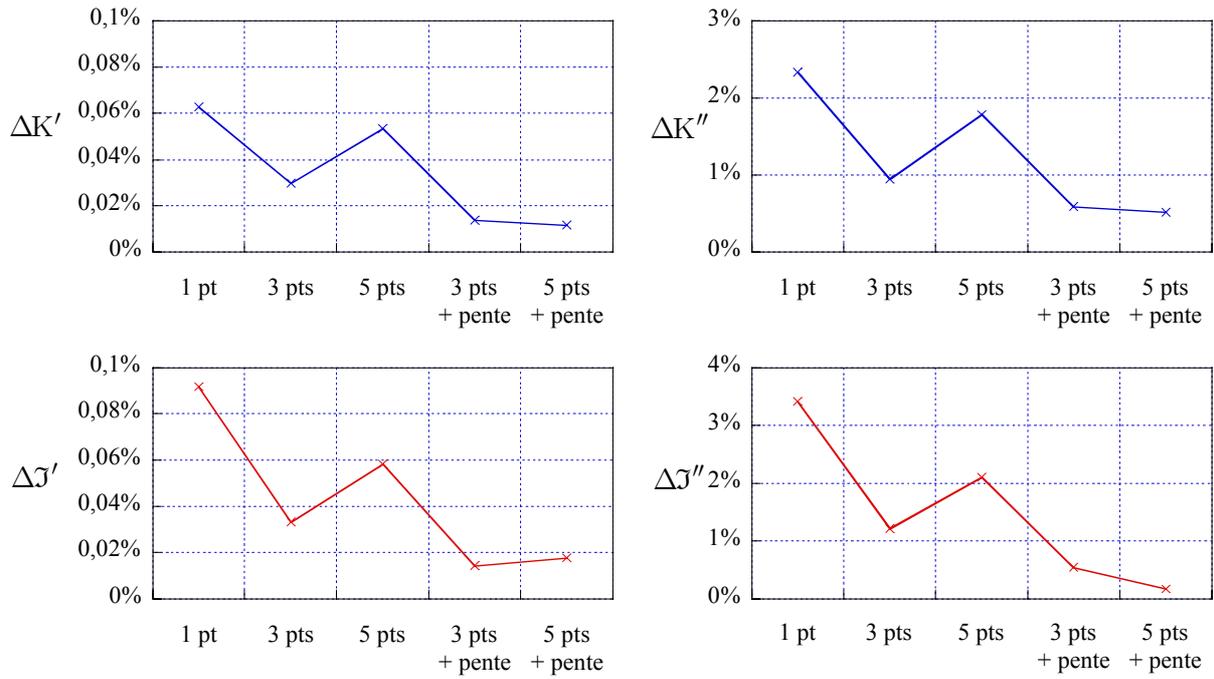


Figure III.8 : Moyennes sur le domaine D_ω des erreurs et incertitudes obtenues selon différentes stratégies d'identification locales. Les reconstructions sont effectuées sur un jeu de signaux simulé à partir d'un modèle rhéologique classique, où $p = 2$, et pour une épaisseur de lame de 2 mm.

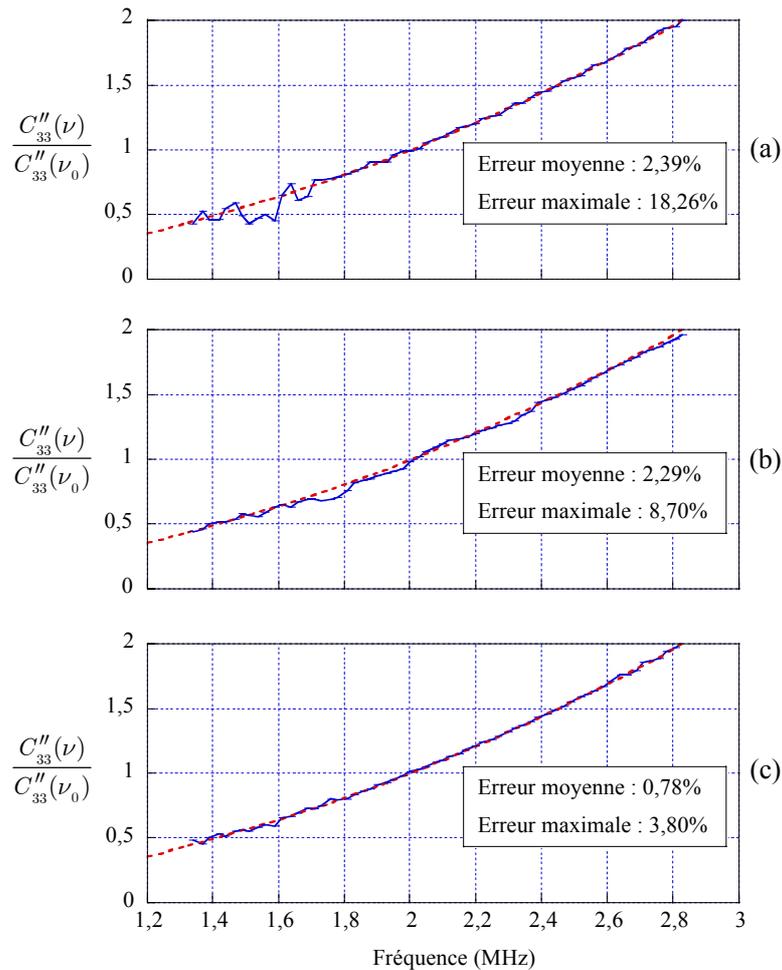


Figure III.9 : Reconstruction de la loi d'évolution de $C''_{33}(\omega)$, normalisée à la fréquence $\nu_0 = 2\text{MHz}$, obtenue pour les essais de la figure III.8 selon différentes stratégies d'optimisation locale : identification locale pour (a) 1 point, (b) 5 points ou (c) 5 points avec la pente.

de l'approximation. L'introduction, comme paramètres d'optimisation, d'une pente locale sur les raideurs améliore nettement la précision et la fiabilité de la reconstruction. Même s'il n'existe pas réellement, avec la pente, de différences notables entre les erreurs d'identification effectuées pour 3 et 5 points, la chute légère des incertitudes sur les parties imaginaires pour la technique avec 5 points rend préférable l'utilisation de cette dernière méthode.

En complément, l'exemple reporté dans la figure III.9 pour la reconstruction de l'évolution du $C''_{33}(\omega)$ (présentant les moins bon résultats) pour différentes stratégies, illustre par sa vraisemblance avec le tracé théorique, la meilleure qualité de l'optimisation par la méthode considérant 5 points plus la pente. Dans cette figure, comme pour les figures suivantes, les lois évaluée et originale sont respectivement associées aux tracés en traits pleins et pointillés. Remarquons enfin un manque commun de stabilité des procédés d'optimisation pour les basses fréquences pouvant provenir d'un manque de sensibilité lié aux atténuations faible observées pour ces fréquences.

L'importance de la prise en compte de la pente locale dans la paramétrisation du problème d'identification locale a donc été démontrée. Par la suite et par souci de précision, tous les résultats présentés ont été obtenus pour un paramétrage approximant linéairement les variations locales des raideurs complexes du matériau sur un domaine fréquentiel restreint à 5 points.

2.2. Identification de lois de comportement rhéologiques inhomogènes complexes

La notion d'inhomogénéité appliquée aux lois de comportement rhéologique indique ici que les lois d'évolution fréquentielle pour chaque raideur peuvent être définies différemment les unes par rapport aux autres. Les causes de dissipation d'énergie dans un matériau pouvant différer selon l'excitation mécanique, il est concevable de supposer l'existence de propriétés d'atténuation variables selon la nature des ondes. Afin de modéliser un comportement rhéologique anisotrope, nous avons choisi, par simplification, de considérer les parties réelles des raideurs comme indépendantes de la fréquence. En revanche, leurs parties imaginaires peuvent non seulement être dépendantes de la fréquence mais aussi évoluer différemment selon les paramètres considérés.

2.2.1. Simulations de lois de comportement rhéologiques inhomogènes

L'étude se décompose en deux phases de complexité croissante : une première simulation, où les évolutions fréquentielles des raideurs, considérées inhomogènes, sont basées sur les modèles rhéologiques classiques (I.20) (cf. Tab. III.4) ; puis une seconde simulation, moins orthodoxe, où les évolutions (III.3) sont non seulement inhomogènes mais également non monotones (cf. Tab. III.5).

Dans un premier temps, des simulations seront effectuées dans le plan anisotrope d'une lame de 2 mm d'épaisseur avec différents modèles rhéologiques "classiques", reportés dans le tableau III.4. Comme pour la deuxième simulation, les valeurs données dans le tableau III.1 correspondent aux raideurs pour une fréquence de 2 MHz.

(I, J)	(1,1)	(3,3)	(1,3)	(5,5)
$C'_{IJ}(\omega)$	constant	constant	constant	constant
$C''_{IJ}(\omega)$	linéaire ($p = 1$)	linéaire ($p = 1$)	constant ($p = 0$)	quadratique ($p = 2$)

Tableau III.4 : Lois rhéologiques gouvernant la dépendance fréquentielle de chaque raideur : simulation effectuée selon un choix d'évolution classique propre à chaque paramètre rattaché à un couple (I, J) .

Par opposition au terme classique, nous avons imaginé une seconde simulation pour laquelle les modèles rhéologiques présentent des évolutions non monotones. Les fonctions $C'_{IJ}(\omega)$ utilisées sont constantes pour les parties réelles et de la forme arbitraire suivante pour les parties imaginaires :

$$C''_{IJ}(\omega) = C''_{IJ}(\omega_0) \left[1 - e^{-2\omega/\omega_0} + e^{-32(\omega/\omega_0 - \eta)^2} \right] (\omega/\omega_0)^p \text{ avec } \eta = \frac{3}{4} \text{ ou } \frac{5}{4}. \quad (\text{III.3})$$

Asymptotiquement, les fonctions ainsi définies tendent vers un modèle rhéologique classique de degré p . Nous reprendrons donc les mêmes tendances que celles détaillées dans le tableau III.4 mais en prenant une loi d'évolution du type (III.3). Les caractéristiques de cette simulation sont reportées dans le tableau III.5.

(I, J)	(1,1)	(3,3)	(1,3)	(5,5)
$C'_{IJ}(\omega)$	constant	constant	constant	constant
$C''_{IJ}(\omega)$	$p = 1$ et $\eta = \frac{5}{4}$	$p = 1$ et $\eta = \frac{3}{4}$	$p = 0$ et $\eta = \frac{5}{4}$	$p = 2$ et $\eta = \frac{3}{4}$

Tableau III.5 : Lois rhéologiques gouvernant la dépendance fréquentielle de chaque raideur : simulation effectuée selon un choix d'évolution non monotone variable avec les paramètres de la modélisation.

2.2.2. Identification de lois de comportement "classiques" inhomogènes

Les évolutions fréquentielles $C'_{IJ}(\omega)$ et $C''_{IJ}(\omega)$, identifiées lors de la première simulation, sont représentées dans la figure III.10 après avoir été normalisées par rapport aux valeurs $C'_{IJ}(\omega_0)$ et $C''_{IJ}(\omega_0)$ données pour $\nu_0 = 2$ MHz dans le tableau III.1. Les résultats obtenus sur la première simulation sont remarquables en comparaison avec les valeurs théoriques utilisées. Les erreurs d'identification des parties réelle et imaginaire des raideurs, reportées sur les graphes, sont très faibles. Si les écarts observés sur les parties réelles montrent une reconstruction quasi-parfaite, la qualité de l'évaluation de l'ensemble des parties imaginaires se détériore pour les basses fréquences. Contrairement à ce que pourrait laisser suggérer le graphe relatif à la raideur $C'_{13}(\omega)$, cette donnée reste globalement invariante avec la fréquence (erreur moyenne inférieure à 0,02%).

La distinction d'évolutions fréquentielles non uniformes des propriétés mécaniques est donc effectuée sans difficulté par la technique d'optimisation mise en place. Ces observations démontrent la capacité du procédé d'inversion à identifier, sur une plage de fréquence correctement fixée, des comportements rhéologiques inhomogènes de matériaux viscoélastiques. Ces résultats encourageant permettent alors d'envisager l'analyse de modèles plus complexes, où les évolutions en fréquence présentent à la fois un caractère varié selon les raideurs, et non monotone en fréquence (existence d'extrema).

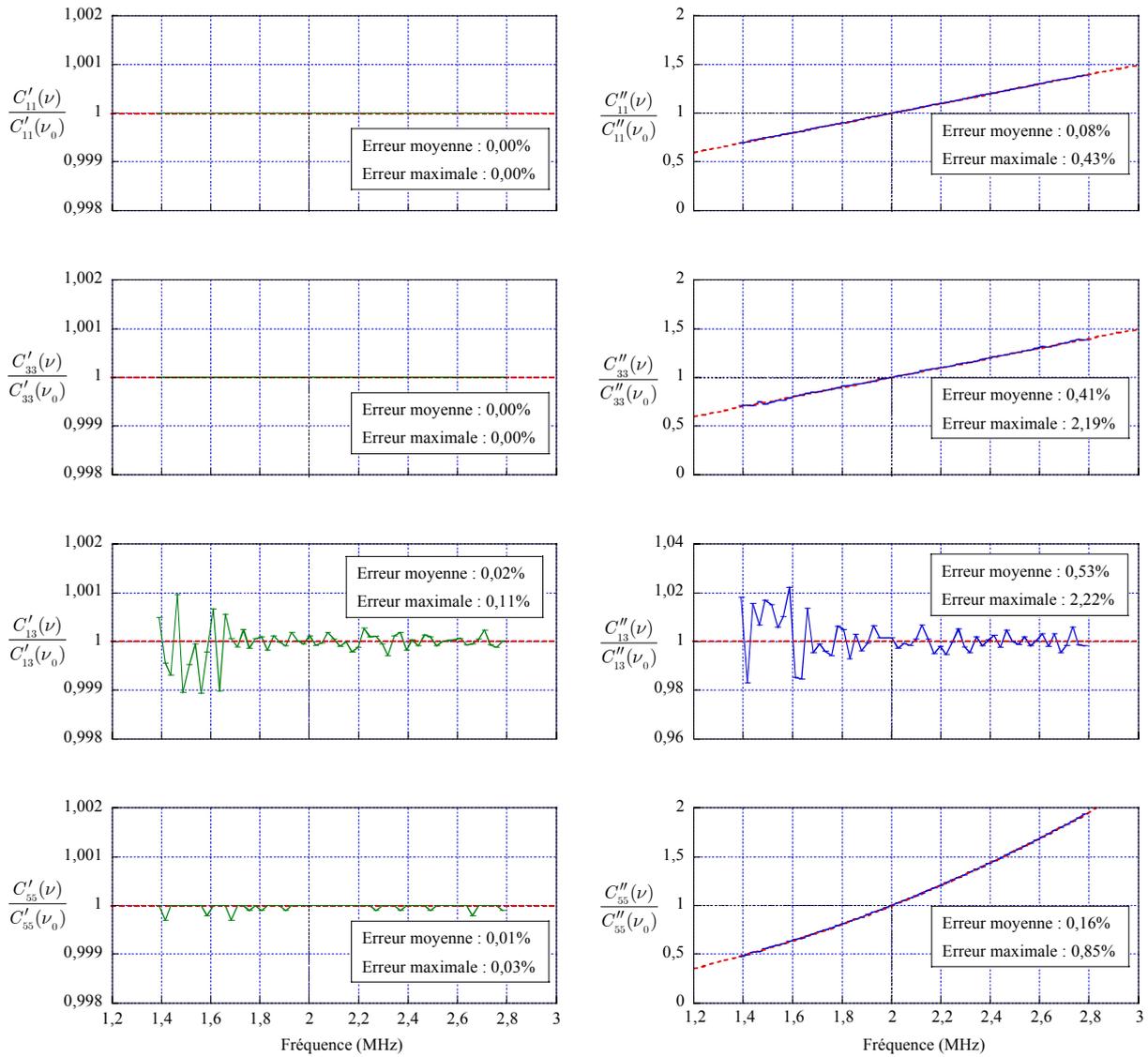


Figure III.10 : Identification des lois d'évolution, normalisées à la fréquence $\nu_0 = 2$ MHz, des raideurs sensibles à la reconstruction des signaux simulés pour des lois rhéologiques classiques inhomogènes, telles qu'elles sont définies dans le tableau III.4.

2.2.3. Identification de lois de comportement inhomogènes non monotones

Les modèles choisis pour la simulation de lois non monotones présentent des aspects originaux mais facilement concevables [Kinra *et al.*, 1999; Biwa et Shibata, 2000]. Les courbes d'évolution des parties imaginaires $C''_{IJ}(\omega)$ possèdent chacune un extremum différent dans le domaine fréquentiel étudié et tendent asymptotiquement vers un modèle rhéologique classique (cf. Tab.III.5). Malgré cette complexification des lois rhéologiques, la reconstruction effectuée, et illustrée par la figure III.11, démontre à nouveau l'efficacité du procédé. Chacune des évolutions $C''_{IJ}(\omega)$ présente une ressemblance frappante avec les courbes théoriques, confirmées par les erreurs reportées pour chacune des évaluations. Il semble donc que des tendances d'évolution, variables selon les raideurs, n'affectent pas le procédé d'identification, garantissant ainsi l'indépendance des lois fréquentielles propre à chaque propriété mécanique.

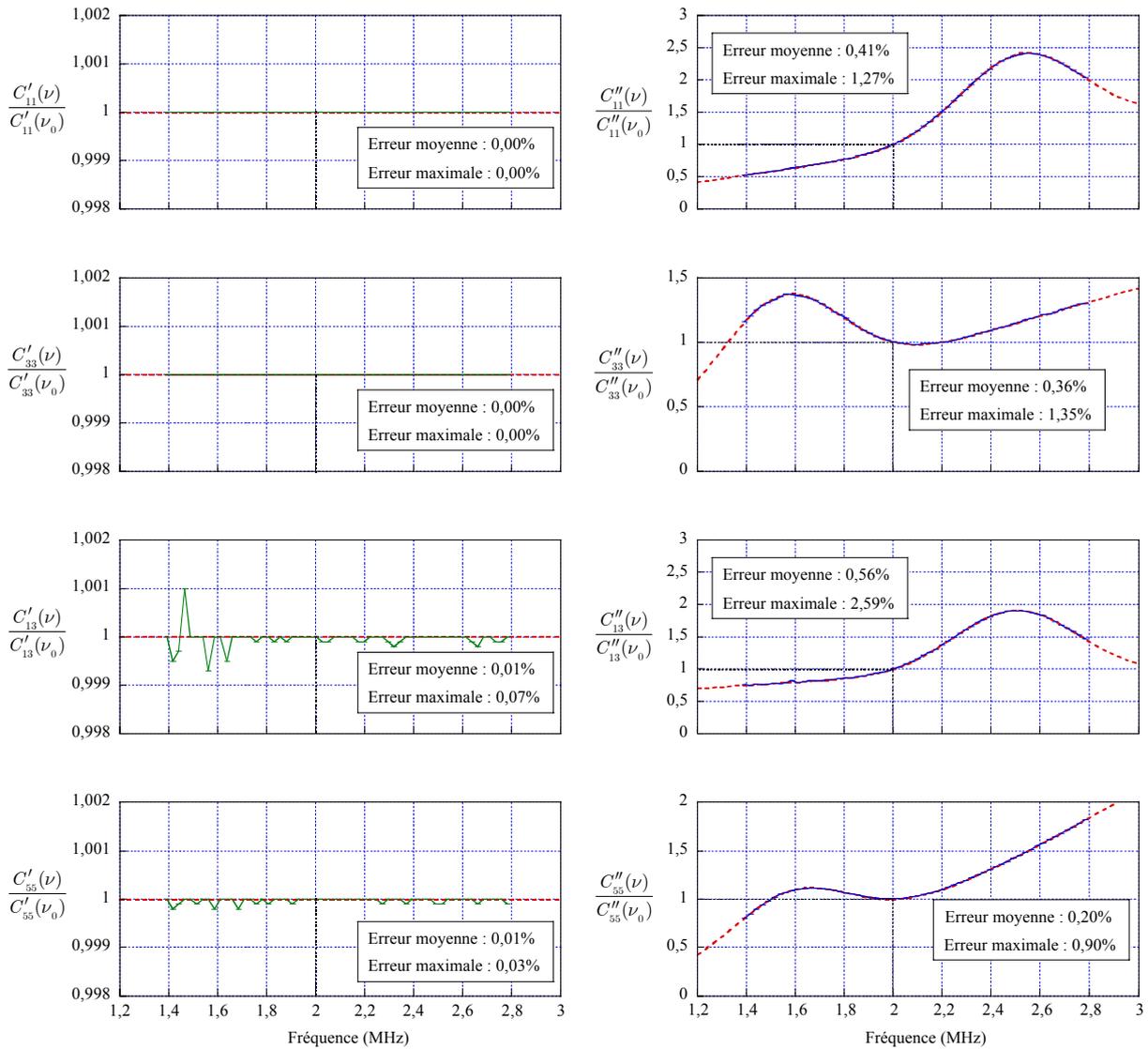


Figure III.11 : Identification des lois d'évolution, normalisées à la fréquence $\nu_0 = 2$ MHz, des raideurs sensibles à la reconstruction des signaux simulés pour des lois rhéologiques inhomogènes non monotones, établies à partir de l'équation (III.3) et des paramètres du tableau III.5.

Suite aux problèmes soulevés par l'optimisation globale dans le cas d'une méconnaissance du modèle rhéologique de matériau (cf. § III.1.4), un outil d'identification d'évolution fréquentielle des raideurs a été proposé. Dès à présent, nous avons démontré que le procédé permet non seulement d'identifier des lois de comportement viscoélastique classiques, mais laisse également la possibilité de reconstruire des comportements rhéologiques complexes $C'_{IJ}(\omega)$ propres à chaque rigidité.

Pour les tests effectués jusqu'ici, les parties réelles des raideurs ont été supposées constantes avec la fréquence. Par la suite, nous nous sommes intéressés à la variation des raideurs $C'_{IJ}(\omega)$ et à la faisabilité d'une identification complète de la dispersion acoustique des signaux dans les milieux viscoélastiques.

2.3. Identification de modèles rhéologiques respectant la causalité

Cette dernière étude basée sur des simulations est réalisée dans le but d'analyser et de quantifier la sensibilité de la technique d'optimisation locale à de faibles variations fréquentielles des parties réelles des raideurs.

Afin de ne pas simuler un cas dispersif totalement dénué de sens physique, nous nous sommes attachés à modéliser des variations des raideurs $C'_{IJ}(\omega)$, respectant localement les conditions de causalité. Ainsi, en se basant sur une évolution des fonctions $C'_{IJ}(\omega)$ satisfaisant la relation (II.50), un jeu de signaux dit "causal" est défini en considérant de nouveau les caractéristiques données dans le tableau III.5 pour les parties imaginaires des raideurs. À partir de ce jeu de signaux "causal", une reconstruction de l'évolution des raideurs a été effectuée en imposant la contrainte définie par la relation (II.50), établissant un lien local entre le paramètre $\kappa_3^{(IJ)}$ et la valeur de $\kappa_2^{(IJ)}$ optimisée.

Les résultats, illustrés par la figure III.12, montrent à nouveau une excellente vraisemblance entre les courbes théoriques et reconstruites.

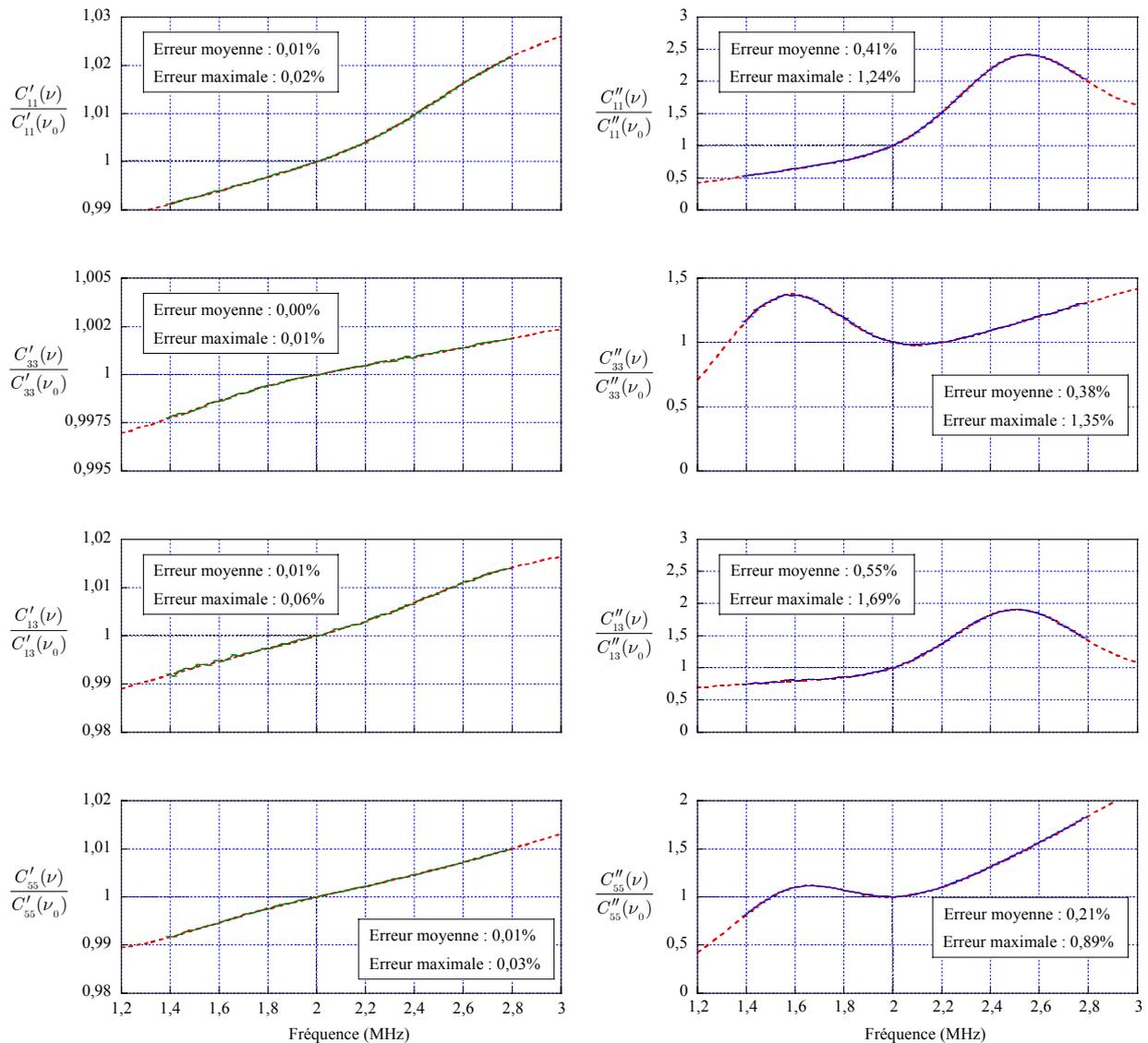


Figure III.12 : Identification des lois d'évolution, normalisées à la fréquence $\nu_0 = 2$ MHz, des raideurs selon un modèle respectant le principe de causalité des phénomènes mécaniques. Les valeurs des raideurs en fonction de la fréquence sont reliées par la relation (II.50) traduisant localement, sur les paramètres d'optimisation, le principe de causalité.

La variation des parties réelles $C'_{IJ}(\omega)$ en fonction de la fréquence est parfaitement définie et retrace, dans les moindres détails, les fluctuations causées par les variations des parties imaginaires $C''_{IJ}(\omega)$, en accord avec la relation (II.50). La stabilité de l'algorithme d'identification des fonctions $C_{IJ}(\omega)$ est ainsi mis en évidence, y compris lorsque les signaux présentent un caractère dispersif marqué (les raideurs réelles étant considérées variables avec la fréquence). Notons que les variations observées sur les parties réelles des raideurs ont été représentées sur des échelles beaucoup plus réduites que celles des parties imaginaires. Alors que les parties réelles fluctuent de quelques pourcents sur le domaine de fréquence étudié, les parties imaginaires varient du simple au double. Ainsi, le fait de considérer, en première approche, les parties réelles des raideurs comme constantes est une approximation justifiée.

Les essais de simulations ont donc permis de confirmer l'avantage principal de la technique d'identification locale qui autorise la reconstruction de modèles rhéologiques inhomogènes et non monotones d'un milieu, sans en connaître *a priori* le comportement mécanique. Cependant, l'inconvénient de cette technique par rapport au procédé d'identification globale est de ne pas être stable en présence de bruit ou de perturbations des signaux expérimentaux. Afin de palier au problème de stabilité "locale" de l'algorithme de reconstruction, quelques perspectives d'amélioration sont proposées dans la conclusion générale.

Après la phase nécessaire de simulation, où les hypothèses du problème direct sont vérifiées, il est nécessaire de confronter la technique de reconnaissance de formes d'ondes à des conditions expérimentales réelles.

Chapitre IV

Caractérisation expérimentale de matériaux viscoélastiques : études globale et locale

1. CARACTÉRISATION EXPÉRIMENTALE POUR DES RAPPORTS LONGUEUR D'ONDE SUR ÉPAISSEUR ÉLEVÉS

Le but de ces premières études expérimentales est de vérifier l'efficacité du procédé global de reconstruction de formes d'ondes pour la caractérisation de matériaux viscoélastiques dont les propriétés mécaniques sont *a priori* connues.

Les essais expérimentaux présentés sont effectués sur des lames à faces parallèles immergées dans l'eau. Comme l'illustre la figure IV.1, les ondes ultrasonores sont générées et réceptionnées à l'aide d'une paire de transducteurs piézoélectriques identiques, entre lesquels l'échantillon étudié est disposé. Ces transducteurs, supportés par un système composé de deux goniomètres, autorisent une auscultation de l'échantillon selon n'importe quelle direction de propagation, sans que ce dernier ne soit déplacé. La fixité de l'éprouvette étant une condition imposée par le dispositif expérimental du suivi ultrasonore de l'endommagement [Audoin, 1991], la configuration utilisée contraint l'émetteur et le récepteur à rester en permanence en vis-à-vis (cf. Fig. IV.1).

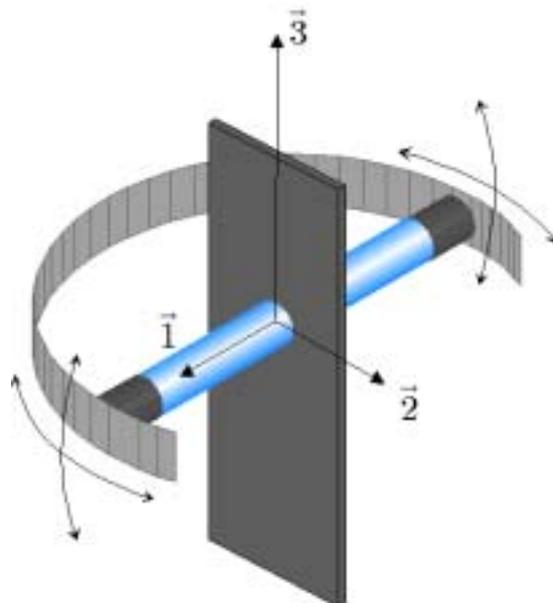


Figure IV.1 : Dispositif expérimental utilisé pour le suivi ultrasonore de l'endommagement : représentation schématique des 2 degrés de liberté en rotation des transducteurs, autorisant une auscultation selon n'importe quelle direction de propagation. Sous cette configuration, les transducteurs restent en permanence en vis-à-vis, aucun degré de liberté en translation n'étant autorisé.

Avant d'appliquer la méthode de caractérisation développée, discutons du domaine de validité expérimentale des hypothèses faites dans la modélisation du problème direct.

Les transducteurs étant en pratique de diamètre fini, l'hypothèse de champ acoustique spatial infini, défini par ses seuls plans équiampitudes et équiphases, n'est pas toujours expérimentalement vérifiée mais reste cependant satisfaisante sous certaines conditions. Le problème posé réside ici plus particulièrement en l'analyse de l'influence de la répartition spatiale de l'énergie sur le plan de phase du récepteur, afin de valider ou non l'hypothèse d'ondes planes. Si cette hypothèse demeure acceptable en l'absence d'échantillon (propagation dans le fluide seul), la réponse multimodale de la lame en incidence oblique modifie la répartition spatiale du faisceau acoustique transmis [Chevée et Deschamps, 1992; Chevée, 1993]. Sans tenir compte des effets de l'anisotropie sur la propagation, seules trois grandeurs jouent un rôle prépondérant sur la validité de l'hypothèse d'ondes planes : l'épaisseur de lame, les vitesses de propagation des modes dans le milieu et la densité de ce dernier. La déviation des modes directs et des échos est fixée, conformément aux lois de Snell-Descartes, par l'épaisseur et les vitesses de propagation. Enfin, l'impédance acoustique du matériau, déduite de la densité et des vitesses de propagation, permet de quantifier les rapports d'amplitude entre les modes directs et les échos, représentatifs, d'une certaine manière, de la répartition énergétique spatiale du faisceau transmis.

Afin de se rapprocher expérimentalement des hypothèses de propagation d'ondes planes, le suivi du décalage spatial des échos sous incidence oblique peut être réalisé. Une translation du récepteur par rapport à l'émetteur est classiquement introduite [Castagnède, 1984]. Or, dans notre cas, ce degré de liberté en translation n'est pas autorisé (cf. Fig. IV.1). Ainsi, la déviation spatiale du faisceau ultrasonore transmis ne peut être compensée. Cette limite du banc d'essai est alors susceptible de dégrader le résultat de la reconstruction des signaux, notamment autour des angles critiques des modes de la lame.

Deux essais sont retenus afin de valider expérimentalement la méthode de caractérisation et, par conséquent, de confronter la modélisation en ondes planes aux conditions expérimentales de propagation. Le premier échantillon étudié est une plaque de Polyméthylméthacrylate (PMMA), matériau isotrope présentant un comportement viscoélastique classique propre à une absorption pure. Le second est une lame de composite carbone-SiC 2D anisotrope, sujet à des phénomènes de dispersion importants. Pour ces expérimentations, les rapports RLE observés ont été choisis volontairement élevés afin d'étudier les avantages théoriques du procédé de reconstruction de formes d'ondes et de minimiser les effets liés à la déviation des faisceaux acoustiques.

1.1. Matériau viscoélastique isotrope : échantillon de PMMA

L'évaluation, par la méthode globale de reconstruction de formes d'ondes, des propriétés viscoélastiques d'une plaque de PMMA de 2,4 mm d'épaisseur est effectuée. Les transducteurs utilisés ont un diamètre de 29 mm et sont conçus pour générer une réponse impulsionnelle dont la fréquence centrale est d'environ 0,5 MHz. Ainsi, d'après les données de la littérature [Safaeinili *et al.*, 1996] (cf. Tab. IV.1 (b)), le rapport RLE pour l'onde longitudinale en incidence normale est à peu près égal à 2,8. Par ailleurs, l'atténuation observée dans ce type de polymère est connue pour être quasi-linéaire en fréquence, ce qui équivaut à une partie imaginaire des raideurs considérée constante avec la fréquence. Ainsi, la technique de reconstruction considère le modèle rhéologique prédéfini (I.20), où $p = 0$. La masse volumique du matériau étant de 1 185 kg/m³ et la rigidité de ce matériau étant de plus faible, ceci entraîne une faible rupture d'impédance entre l'eau et le PMMA.

Les signaux expérimentaux sont acquis dans le plan $(\vec{1}, \vec{2})$, défini par $\psi = 0^\circ$, pour différents angles d'incidence θ allant de 0° à 46° , par pas de 2° . Le domaine fréquentiel D_ω d'optimisation s'étend de 0,28 à 0,61 MHz, soit 28 raies du spectre.

Du fait de la faible rupture d'impédance entre le milieu couplant et la lame solide, le coefficient de réflexion des modes à l'intérieur de la lame est presque nul. Ainsi, la majeure partie de l'énergie contenue dans le faisceau transmis est liée aux premiers modes directs n'ayant subi aucune réflexion aux interfaces. De plus, l'épaisseur de la lame étant relativement faible, la déviation du faisceau est modérée. Par conséquent, nous pouvons supposer d'une reconstruction correcte des formes d'ondes sous l'hypothèse de propagation d'ondes planes.

Raideur complexe (GPa)		C_{11}	C_{22}	C_{12}	C_{66}
(a)	$\kappa_1^{(IJ)} = C'_{IJ}$	8,49 (0,06)	8,32 (0,47)	4,21 (0,26)	2,08 (0,16)
	$\kappa_2^{(IJ)} = C''_{IJ}(\omega_0)$	0,11 (0,03)	0,34 (0,30)	0,13 (0,15)	0,08 (0,05)
(b)	C'_{IJ}	8,61	8,61	4,34	2,14
	$C''_{IJ}(\omega_0)$	0,10	0,10	0,00	0,05

Tableau IV.1 : Propriétés viscoélastiques du PMMA : (a) paramètres identifiés à partir de la technique globale de reconstruction de formes d'ondes en supposant d'un modèle rhéologique prédéfini (I.20), où $p = 0$; (b) données de la littérature à des fréquences ultrasonores [Safaeinili et al., 1996]. Les incertitudes déterminées pour les données optimales (a) sont reportées entre parenthèses.

Les raideurs complexes identifiées ont été comparées avec les valeurs de référence [Safaeinili et al., 1996] et reportées dans le tableau IV.1. Malgré un rapport RLE important, les propriétés viscoélastiques de ce matériau coïncident, aux intervalles de confiance près, avec les valeurs de la littérature (cf. Tab. IV.1 (b)). Si l'identification des propriétés d'élasticité C'_{IJ} est bonne, celle des constantes d'atténuation C''_{IJ} reste trop imprécise (exceptée pour le paramètre C''_{11}).

Le niveau de bruit pouvant être considéré comme nul, cette incertitude provient essentiellement d'un écart au modèle proposé. Tout d'abord, les variables affectées sont essentiellement des données sensibles aux signaux acquis selon des angles d'incidence pour lesquels la déviation des faisceaux est non négligeable [Chevée, 1993]. La différence entre l'énergie perçue expérimentalement par le récepteur et l'énergie prédite du signal sous l'hypothèse d'ondes planes semble être compensée dans l'optimisation par une surestimation des constantes d'atténuation. Comme l'illustre la figure IV.2, l'algorithme de reconstruction s'attache à retrouver une vraisemblance maximale entre le signal expérimental (b) et le signal prédit (c). Dans cette figure, le signal théorique, reconstruit à partir des raideurs du tableau IV.1 (b), est représenté en (d). L'angle d'incidence, pour lequel ces signaux ont été représentés, correspond à la moins bonne vraisemblance entre le signal expérimental et le signal prédit par les paramètres identifiés. Cet angle, égal à 30° , est très proche de l'angle critique associé au mode longitudinal dans le PMMA. Par ailleurs, les différences importantes observées essentiellement au niveau de la queue des signaux correspondent aux échos ayant subi de multiples réflexions aux interfaces. Le procédé d'optimisation cherche ainsi à résorber l'amplitude des échos de la queue du signal reconstruit (c) pour se rapprocher au mieux de la réponse (b), alors que la solution en ondes planes (d) présente des échos d'amplitude plus élevée.

Cependant, même si cette constatation est gênante quant à la précision de la technique, il n'en reste pas moins vrai que la caractérisation effectuée dans ce cas simple apporte des

résultats convenables pour une épaisseur très faible en comparaison avec les longueurs d'onde dans le matériau.

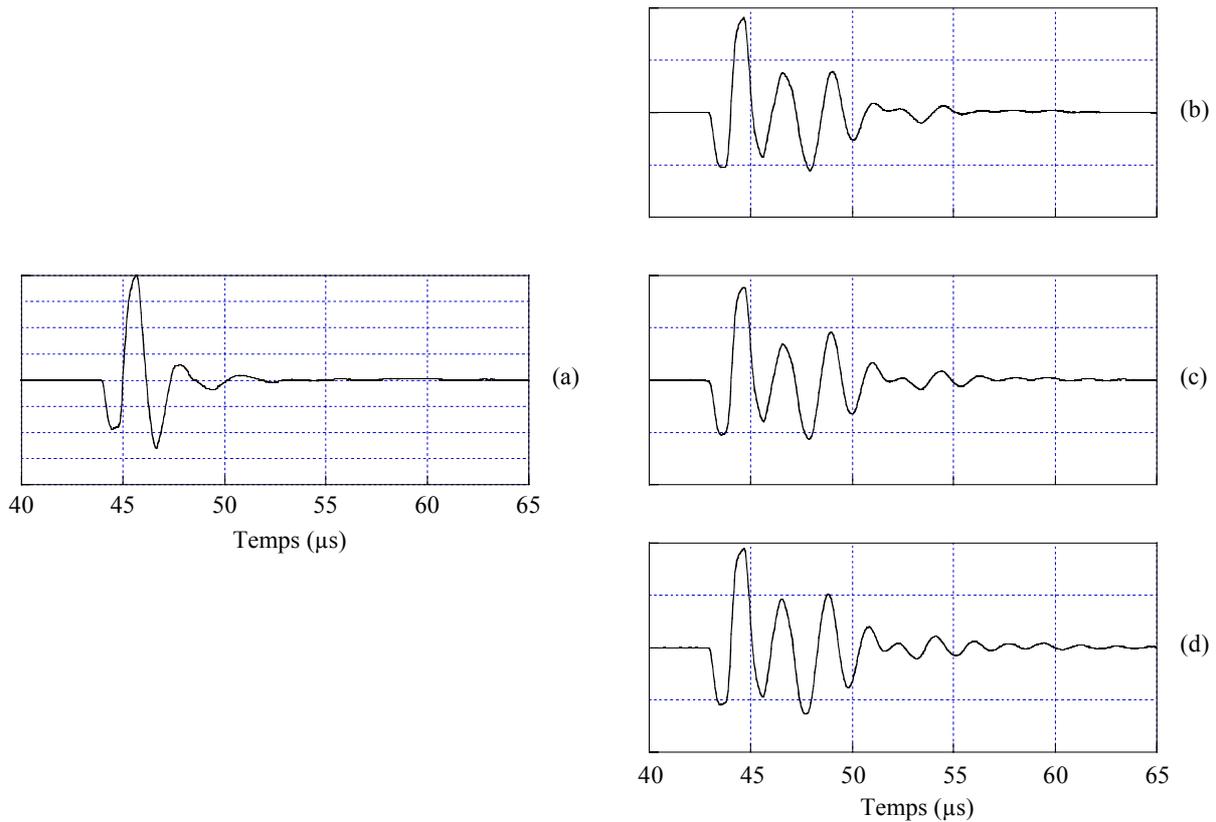


Figure IV.2 : Signaux issus de la caractérisation de l'échantillon de PMMA : (a) signal de référence de fréquence centrale égale à 0,4 MHz ; les tracés (b), (c) et (d) représentent respectivement les signaux expérimental, reconstruit et théorique (cf. Tab. IV.1) pour une plaque de 2,4 mm d'épaisseur et un angle d'incidence de 30°. Cet angle correspond à la moins bonne reconstruction parmi le jeu de signaux acquis lors de cet essai.

1.2. Matériau anisotrope fortement dispersif : composite 2D carbone-SiC

Afin d'étudier les effets de l'anisotropie, un second test est mené sur une plaque de composite fortement anisotrope de carbone-SiC 2D à symétrie quadratique, et dont la masse volumique est évaluée à 2 025 kg/m³. Le signal de référence de cet essai a une fréquence centrale voisine de 2 MHz, pour un diamètre de transducteurs de 29 mm. L'épaisseur de l'échantillon est de 2,2 mm, ce qui correspond à un rapport RLE de 0,7 environ. Le matériau présentant une porosité importante, l'atténuation observée des signaux ultrasonores traversant l'échantillon est marquée. Le milieu testé possède ainsi des degrés d'anisotropie et d'atténuation importants, qui en font un matériau assez difficile à caractériser. La technique de reconstruction est effectuée pour le modèle rhéologique prédéfini (I.20), où $p = 1$ et $\nu_0 = 2\text{MHz}$.

L'acquisition des signaux est réalisée dans le plan de symétrie $(\vec{1}, \vec{2})$ du composite pour des angles d'incidence allant de 0° à 18°, par pas de 0,5°. Cette plage d'incidence est nécessairement réduite en raison des propriétés mécaniques du matériau. En effet, les influences couplées des célérités élevées et de l'anisotropie du milieu impliquent une déviation spatiale importante des échos, même sous incidence oblique faible. Leur énergie est alors partiellement perçue par le récepteur. En conséquence, contrairement à la plaque en

PMMA, la technique d'identification utilisée ici ne considère pas la réponse totale de la plaque (cf. Eq. (II.20)) mais la réponse partielle de la plaque (cf. Eq. (II.21)), limitée aux deux premiers échos ($N_R = 2$).

Les résultats ainsi obtenus sont reportés dans le tableau IV.2 (a). Pour comparaison, des constantes d'élasticité évaluées avec la technique de mesure de temps de vol par transformée de Hilbert (cf. Tab. IV.2 (b)) sont fournis. Cette dernière caractérisation a été réalisée avec un signal de référence à 5 MHz, qui représente pour cette technique, la fréquence minimale d'utilisation en dessous de laquelle les effets de superposition de modes rendent cette méthode inappropriée.

Raideur complexe (GPa)		C_{11}	C_{22}	C_{12}	C_{66}
(a)	$\kappa_1^{(IJ)} = C'_{IJ}$	17,8 (0,5)	98,6 (4,2)	7,3 (1,0)	10,0 (0,4)
	$\kappa_2^{(IJ)} = C''_{IJ}(\omega_0)$	3,4 (0,2)	7,4 (3,7)	1,8 (0,6)	0,2 (0,3)
(b)	C'_{IJ}	16,7 (0,2)	88,5 (5,0)	5,3 (0,5)	8,5 (0,1)

Tableau IV.2 : Propriétés viscoélastiques (en GPa) d'un échantillon de composite carbone-SiC 2D dans le plan de symétrie $(\vec{1}, \vec{2})$: (a) paramètres optimisés à partir du modèle rhéologique prédéfini (I.20), où $p = 1$ et $\nu_0 = 2$ MHz ; (b) constantes d'élasticité déduites d'une technique de mesure de temps de vol des modes directs par transformée de Hilbert. Les fréquences centrales des signaux de référence utilisés pour les caractérisations sont de 2 MHz pour (a) et 5 MHz pour (b).

Le bon accord entre les parties réelles des rigidités identifiées à 2 MHz (cf. Tab.IV.2 (a)) avec les constantes d'élasticité déduites de la mesure des vitesses de propagation des modes directs (cf. Tab.IV.2 (b)), montre la robustesse de la technique d'identification des propriétés élastiques du matériau, malgré les mélanges de modes importants et des conditions expérimentales éloignées du modèle en ondes planes. La technique ainsi mise en œuvre permet, pour des fréquences ultrasonores faibles et donc des rapports RLE élevés, de déterminer les propriétés élastiques de matériaux anisotropes de façon fiable, et ainsi d'étendre le domaine fréquentiel d'étude pour l'évaluation ultrasonore de propriétés élastiques.

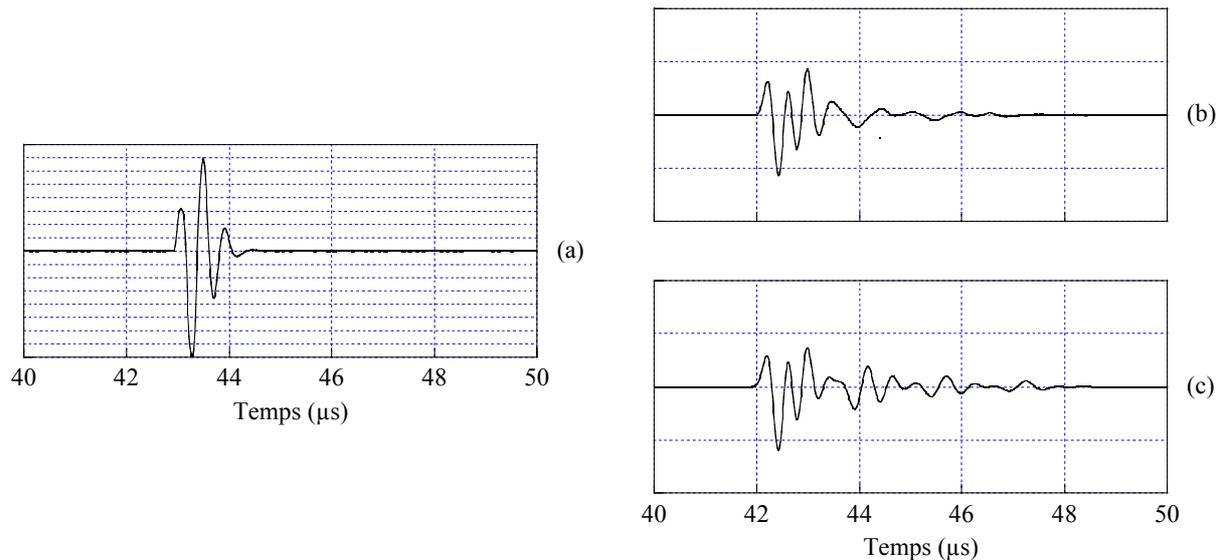


Figure IV.3 : Signaux intervenant dans la caractérisation de l'échantillon de composite carbone-SiC 2D : (a) signal de référence utilisé de fréquence centrale égale à 2 MHz ; (b) et (c) signaux expérimental et reconstruit (cf. Tab. IV.2) pour un angle d'incidence de $7,5^\circ$. Cet angle correspond à la moins bonne reconstruction parmi les signaux acquis lors de cet essai.

Les valeurs de référence des constantes d'atténuation de ce matériau n'ayant pu être obtenues par ailleurs, seule une superposition des jeux de signaux mesurés et reconstruits peut fournir une information sur la précision de l'identification des valeurs des $C''_{IJ}(\omega_0)$. Le signal de référence, et les signaux expérimental et prédit transmis sont respectivement représentés dans les figures IV.3 (a), (b) et (c), pour un angle d'incidence correspondant à la reconstruction la moins similaire.

Le rapprochement des figures IV.3 (b) et (c) montre une très bonne coïncidence entre les débuts des formes d'ondes, correspondant aux modes directs transmis à travers la plaque. En revanche, la comparaison des queues des signaux révèle des dissemblances notables. Ces différences sont observées entre la plupart des signaux expérimentaux et reconstruits. De nouveau, cet effet provient essentiellement de la considération d'un modèle en ondes planes ; effet d'autant plus marqué par la forte anisotropie du matériau dans lequel les directions préférentielles de propagation d'énergie sont parfois très différentes de celle des plans de phase [Musgrave, 1970; Deschamps et Assouline, 2000]. La répartition énergétique sur le plan du récepteur varie alors fortement avec l'angle d'incidence. La distribution uniforme supposée par l'hypothèse en ondes planes est donc encore moins bien vérifiée. Ainsi, pour des matériaux fortement anisotropes et viscoélastiques, l'association de la technique de caractérisation et du banc d'essai ultrasonore utilisé conduit à une évaluation approximative des parties imaginaires en raison d'un écart au modèle important.

1.3. Conclusion

Lors de ces deux études expérimentales, la validité et la précision de la technique de reconstruction des formes d'ondes ont été examinées. Les bons résultats obtenus à basses fréquences sur la lame fine de PMMA ont montré les capacités de la technique à identifier des propriétés viscoélastiques pour des rapports RLE élevés. Si la nature bornée des faisceaux acoustiques expérimentaux affecte peu l'identification des propriétés élastiques, l'évaluation de la plupart des constantes d'atténuation reste assez imprécise. De plus, la caractérisation du composite carbone-SiC met en évidence le caractère aggravant de l'anisotropie du matériau sur les mesures effectuées. Néanmoins, l'identification des constantes d'élasticité de ce matériau reste tout à fait satisfaisante et démontre la possibilité d'extension du domaine d'étude fréquentiel pour l'évaluation ultrasonore des propriétés élastiques de matériaux.

Concernant l'évaluation des constantes d'atténuation, deux améliorations potentielles sont envisageables ; l'une théorique, l'autre expérimentale. Soit une prise en compte des faisceaux bornés dans la formulation du problème direct est réalisée, mais ceci nécessite alors la connaissance des propriétés spatio-temporelles du faisceau acoustique de la référence. Soit le banc d'essai expérimental est adapté, pour tendre vers l'hypothèse d'ondes planes. Des études ont notamment démontré [Cawley et Hosten, 1997] que l'utilisation d'un large transducteur en émission ou en réception améliore notablement la validité des conditions en ondes planes.

2. ANALYSE DE MODÈLES RHÉOLOGIQUES EN INCIDENCE NORMALE PAR IDENTIFICATION LOCALE

Grâce au schéma d'identification locale développé pour la reconstruction de comportement rhéologique, il semble naturel de tester et d'analyser cette technique pour une application pratique simple. Comme cela a été amplement discuté dans le paragraphe précédent, l'hypothèse de propagation en ondes planes n'est pas expérimentalement vérifiée. Or, le procédé d'identification locale est une technique très sensible aux variations de phase et d'amplitude du spectre des signaux. Ainsi, un écart au modèle trop important serait susceptible d'engendrer des reconstructions inexactes. Cependant, dans le cas de signaux transmis en incidence normale, l'effet de la répartition spatiale de l'énergie des faisceaux acoustiques est beaucoup plus réduit. Dans ce cas, il semble alors admissible de considérer l'hypothèse de propagation en ondes planes dans le modèle de reconstruction comme pouvant amener à des résultats exploitables.

L'objet de cette étude est de déterminer les évolutions de la rigidité complexe $C_{11}(\omega)$ pour une plaque de matériau viscoélastique orthotrope. Cette identification de la fonction $C_{11}(\omega)$, sur une plage de fréquence fixée, permet alors de remonter aux évolutions de la vitesse de propagation et de l'atténuation de l'onde longitudinale en incidence normale. Ces données sont d'un intérêt certain dans l'étude des phénomènes de dispersion dans des milieux hétérogènes (évolution cristalline, porosité, microfissuration, ...). La méthode mise en oeuvre est alors un moyen d'obtenir le comportement rhéologique du milieu homogène équivalent.

2.1. Relations analytiques entre l'évolution de la raideur complexe et les courbes de dispersion et d'atténuation, en incidence normale

La variation de la fonction $C_{11}(\omega)$ sur une plage de fréquence étant potentiellement identifiable, il apparaît intéressant de développer les relations analytiques exactes entre la raideur complexe $C_{11}(\omega)$, et la vitesse de propagation $V(\omega)$ ainsi que l'atténuation $\alpha(\omega)$ de l'onde longitudinale en incidence normale.

Remarquons, tout d'abord, que l'étude est proposée dans le cadre d'un milieu à symétrie orthotrope, excluant le cas de la symétrie triclinique pour lequel d'autres termes de rigidité apparaissent dans l'équation de dispersion. Soit S la lenteur complexe, reliée au vecteur lenteur \vec{S} du mode longitudinal par la relation (I.31), en appliquant la relation (I.33), il vient l'égalité suivante :

$$S^2(\omega) = \frac{\rho}{C_{11}(\omega)}. \quad (\text{IV.1})$$

En posant $S = S' - iS''$ et en définissant le rapport $r_{11}(\omega) = C_{11}''(\omega)/C_{11}'(\omega)$ (inverse du facteur de qualité), la résolution de l'équation de dispersion (IV.1) conduit alors à :

$$S'(\omega) = \sqrt{\frac{\rho}{C_{11}'(\omega)}} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + r_{11}^2(\omega)}}{2(1 + r_{11}^2(\omega))}} \quad (\text{IV.2})$$

et

$$S''(\omega) = \sqrt{\frac{\rho}{C_{11}'(\omega)}} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + r_{11}^2(\omega)}}{2(1 + r_{11}^2(\omega))}}. \quad (\text{IV.3})$$

L'expression de la vitesse de phase $V(\omega)$ étant reliée à la lenteur par la relation (I.28), nous obtenons ainsi :

$$V(\omega) = \frac{1}{S'(\omega)} = \sqrt{\frac{C'_{11}(\omega)}{\rho}} \sqrt{\frac{2(1+r_{11}^2(\omega))}{(1+\sqrt{1+r_{11}^2(\omega)})}}. \quad (\text{IV.4})$$

En incidence normale, le coefficient d'atténuation $\alpha(\omega)$ est simplement égal au produit de la pulsation ω par la partie imaginaire de la lenteur S'' , ce qui permet d'écrire :

$$\alpha(\omega) = \omega S''(\omega) = \omega \sqrt{\frac{\rho}{C'_{11}(\omega)}} \sqrt{\frac{(-1 + \sqrt{1+r_{11}^2(\omega)})}{2(1+r_{11}^2(\omega))}}, \quad (\text{IV.5})$$

qui peut être reformulé en introduisant la vitesse $V(\omega)$, de telle sorte que :

$$\alpha(\omega) = \omega \frac{\rho V(\omega)}{2C'_{11}(\omega)} \frac{r_{11}(\omega)}{1+r_{11}^2(\omega)}. \quad (\text{IV.6})$$

Notons que, sous l'hypothèse $r_{11}(\omega) \ll 1$, les relations (IV.4) et (IV.6), développées au premier ordre, sont équivalentes aux approximations généralement effectuées :

$$V(\omega) = \sqrt{\frac{C'_{11}(\omega)}{\rho}} \quad \text{et} \quad \alpha(\omega) = \omega \frac{C''_{11}(\omega)}{2\rho V^3(\omega)}.$$

2.2. Application expérimentale de l'identification locale en incidence normale

Nous nous sommes attachés ici à étudier, dans le cas simple d'un signal transmis en incidence normale, l'efficacité du procédé d'identification locale afin de déterminer les évolutions de la vitesse de propagation $V(\omega)$ et de l'atténuation $\alpha(\omega)$, *via* celle de la raideur $C_{11}(\omega)$. Rappelons que cette technique est applicable, en théorie, quel que soit le rapport RLE.

L'essai a été effectué sur l'échantillon de composite carbone-SiC 2D précédemment utilisé, qui présente un comportement dispersif marqué. Le rapport approximatif moyen r_{11} entre les parties imaginaire et réelle de la raideur C_{11} , déterminée par la méthode globale (cf. § IV.1.2) est relativement élevé. Les caractéristiques des transducteurs utilisés sont les mêmes que pour l'identification globale avec une fréquence centrale voisine de 2 MHz. Le signal de référence et le signal transmis en incidence normale sont représentés dans la figure IV.4.

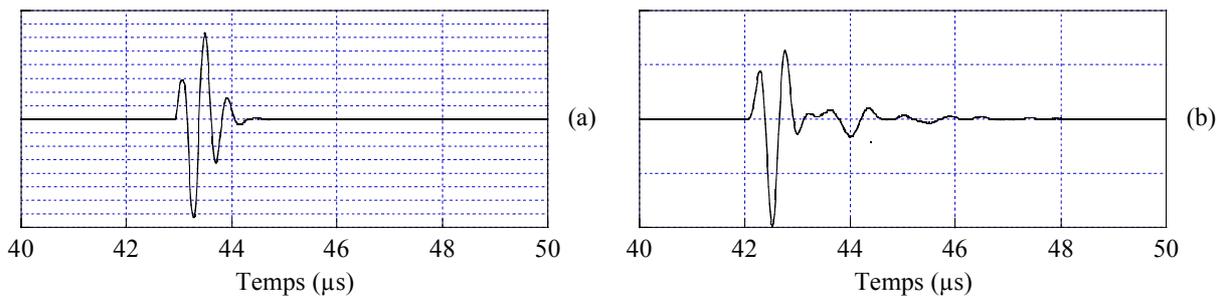


Figure IV.4 : (a) Signal de référence de fréquence centrale voisine de 2MHz. (b) Signal transmis en incidence normale à travers l'échantillon de carbone-SiC 2D de 2,2 mm d'épaisseur.

Les résultats de l'identification locale, effectuée avec 5 points plus la pente en forçant la relation locale de causalité (II.50), sont reportés dans la figure IV.5. Les parties réelle et imaginaire de la raideur sont volontairement représentées sur une plage de fréquence allant de 0,42 à 3,83 MHz pour illustrer les instabilités qui apparaissent en dehors de la bande passante prise à 6 dB sur la référence. Ces difficultés peuvent être liées à un manque de sensibilité, mais aussi probablement à la divergence du faisceau plus importante sur les basses fréquences [Papadakis, 1959]. Ainsi, l'étude qui suit porte uniquement sur les fréquences appartenant à cette bande passante allant de 1,5 à 2,9 MHz.

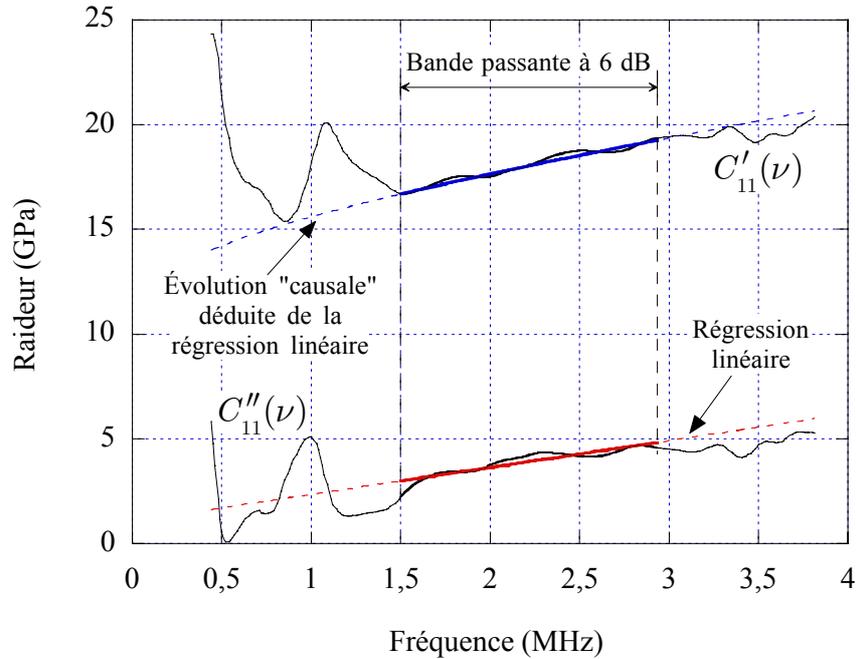


Figure IV.5 : Évolution des parties réelle et imaginaire de la constante de raideur $C_{11}(\nu)$ déterminée à l'aide de la technique d'identification locale à partir du signal transmis en incidence normale. L'étude porte uniquement sur les fréquences ν appartenant à la bande passante à 6 dB du signal de référence. La régression linéaire de l'évolution de la variable $C''_{11}(\nu)$ permet de déterminer à partir de la relation (I.19), une évolution de $C'_{11}(\nu)$ vérifiant la causalité.

Le caractère dispersif du matériau, déjà visible sur les formes temporelles IV.3 (b) et IV.4 (b) est ainsi quantitativement évalué par la technique d'identification locale. Les évolutions retenues des fonctions $C'_{11}(\nu)$ et $C''_{11}(\nu)$ sont représentées sur la figure IV.5 en traits pleins épais et montrent, malgré certaines fluctuations, une tendance à croître linéairement avec la fréquence. Nous observons alors, non seulement une forte variation de la partie imaginaire $C''_{11}(\nu)$, mais aussi une dépendance fréquentielle non négligeable de la partie réelle $C'_{11}(\nu)$. Remarquons qu'en comparant cette identification locale avec la technique d'identification globale (cf. § IV.1.2), la mesure de C'_{11} par cette dernière technique, égale à 17,8 GPa, correspond à la valeur moyenne sur la plage de fréquence utile de la fonction $C'_{11}(\nu)$ identifiée. En aparté, notons que la valeur déduite de la mesure de temps de vol par transformée de Hilbert correspond bien à une mesure basse fréquence (au alentour de 1,5 MHz pour un signal de référence à 5 MHz) de la vitesse de propagation de l'onde dispersive.

Afin d'obtenir une meilleure représentation des résultats, nous avons procédé, sur la plage d'étude fréquentielle, à une régression linéaire de l'évolution de la variable $C''_{11}(\nu)$, telle que :

$$C''_{11}(\nu) \simeq a_1 \nu + a_0. \quad (\text{IV.7})$$

Cette régression linéaire est tracé en trait discontinu sur la figure IV.5. De cette extrapolation nous déduisons, à l'aide de la relation locale (I.19), l'expression d'une évolution de type "causale" de $C'_{11}(\nu)$:

$$C'_{11}(\nu) \simeq C'_{11}(\nu_0) + a_1(\nu - \nu_0) + a_0 \ln(\nu/\nu_0), \quad (IV.8)$$

où ν_0 est une fréquence appartenant au domaine d'étude, pour laquelle l'écart entre l'approximation et la mesure est minimal. Cette évolution "causale" est reportée dans la figure IV.5. En suivant ce procédé simple à implémenter, nous extrapolons les lois d'évolution de la rigidité en incidence normale en s'affranchissant des fluctuations expérimentales tout en respectant la causalité.

Dès lors, en utilisant les relations (IV.4) et (IV.6) établissant, en fonction des valeurs identifiées fréquentiellement de la raideur complexe $C'_{11}(\omega)$, l'expression des variations de la vitesse de propagation $V(\omega)$ et de l'atténuation $\alpha(\omega)$, nous reconstruisons à partir des mesures identifiées et extrapolées (cf. Eqs. (IV.7) et (IV.8)), les évolutions de ces deux grandeurs, reportées dans les figures IV.6 et IV.7.

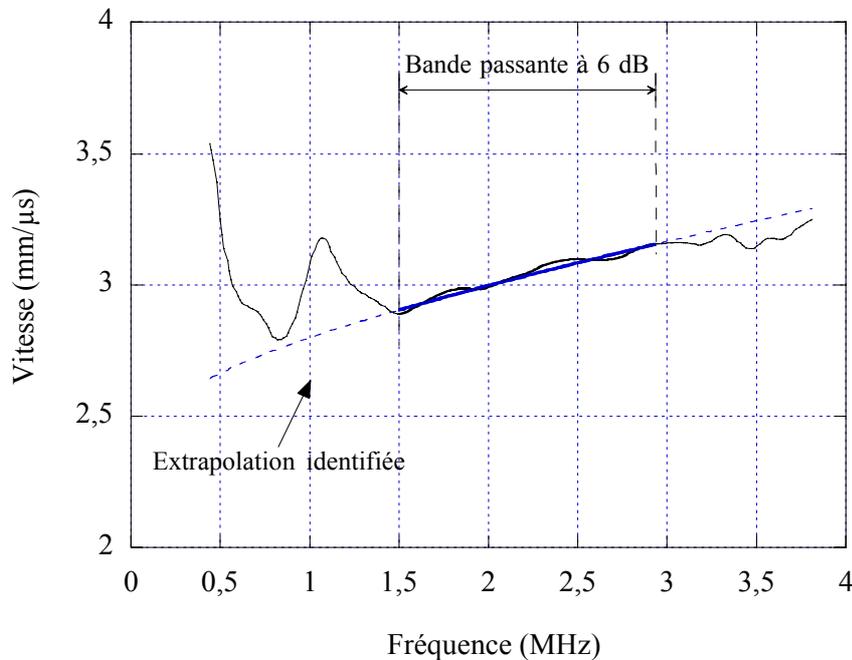


Figure IV.6 : Courbe de dispersion $V(\omega)$ de l'onde transmise en incidence normale pour un échantillon de carbone-SiC 2D de 2,2 mm d'épaisseur, obtenue à partir des reconstructions directe et extrapolée des évolutions de la raideur complexe $C'_{11}(\omega)$.

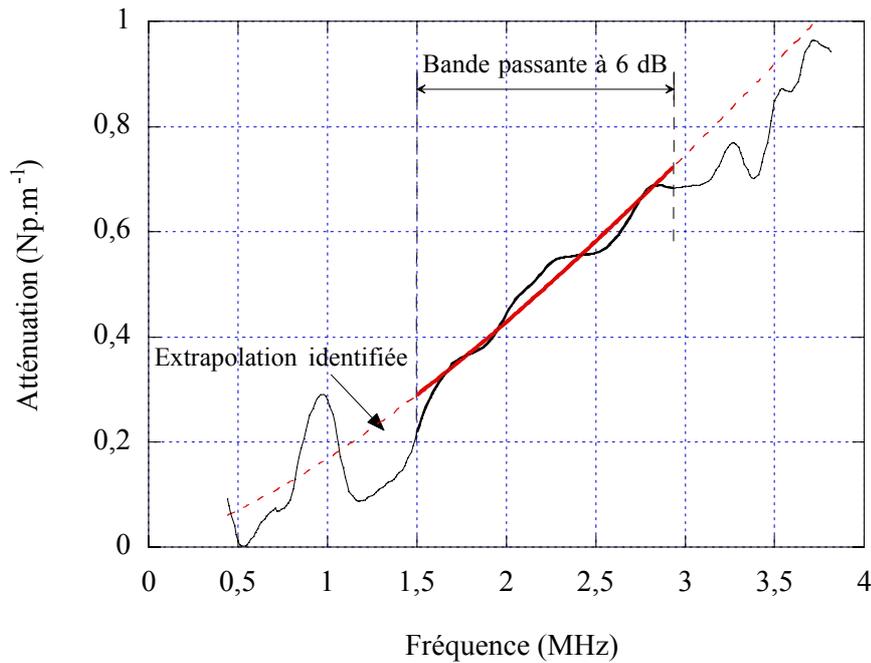


Figure IV.7 : Courbe du coefficient d'atténuation $\alpha(\omega)$ de l'onde transmise en incidence normale pour un échantillon de carbone-SiC 2D de 2,2 mm d'épaisseur, obtenue à partir des reconstructions directe et extrapolée des évolutions de la raideur complexe $C_{11}(\omega)$.

2.3. Conclusion

Ainsi, à l'aide d'un seul signal acquis en incidence normale, les variations de la partie imaginaire mais aussi de la partie réelle de la raideur $C_{11}(\omega)$ sont identifiées. Les courbes de dispersion et d'atténuation du matériau sont alors déterminées sur un domaine fréquentiel important au moyen de deux mesures uniquement : le signal de référence et le signal transmis en incidence normale.

Une analyse spectrale simple permet de retrouver ces mêmes courbes [Papadakis, 1959; Papadakis, 1966; He, 1999], mais cette technique nécessite l'absence d'interférences entre le mode direct et les échos (rapport RLE faible), ou bien l'application de portes temporelles susceptibles d'engendrer un biais sur la détermination du contenu spectral du mode direct seul.

Enfin et surtout, cette première étude n'est qu'une étape préliminaire encourageante qui ouvre de nombreuses perspectives sur l'identification de comportements rhéologiques complexes. Des efforts importants sur l'élaboration d'un banc d'essai expérimental adapté semblent indispensables au prolongement de ce travail. Le fait de s'affranchir des problèmes liés au non respect des hypothèses en propagation plane pourrait ainsi permettre des reconstructions de comportements rhéologiques aussi performantes que celles observées pour les simulations.

Conclusion

L'étude des phénomènes de dispersion et d'atténuation des ondes acoustiques est d'un intérêt certain dans des domaines aussi variés que la géophysique [Bourbié *et al.*, 1986], la biophysique [Mobley *et al.*, 2000] et l'évaluation non destructive des matériaux. Dès qu'un phénomène dissipatif apparaît, la propagation des ondes acoustiques est généralement décrite par un modèle de comportement viscoélastique linéaire. La prise en compte de tels phénomènes pour l'évaluation non destructive des matériaux permet alors de modéliser un comportement se rapprochant au mieux d'un milieu réel, et donc d'aboutir à sa meilleure caractérisation. De plus, l'évaluation des courbes de dispersion et d'atténuation selon différentes directions de propagation est une source d'informations pour de nombreuses applications.

Le premier chapitre rappelle le contexte de cette étude, traitant de la propagation ultrasonore en milieux viscoélastiques et des limites des techniques de caractérisation de milieux hétérogènes et/ou dispersifs. Le formalisme des lois de comportement pour un milieu homogène viscoélastique anisotrope établit une relation fréquentielle linéaire à coefficients complexes (rigidités complexes du milieu) entre les contraintes et les déformations. L'écriture de l'équation de propagation met alors en évidence la relation de cause à effet entre les propriétés viscoélastiques et les phénomènes de dispersion et d'atténuation des ondes acoustiques. Les limites de la technique d'interférométrie ultrasonore sont ensuite exposées. Elles sont dues à un caractère dispersif trop important du matériau, à la géométrie même de l'échantillon, ou bien liées à la fréquence d'étude choisie.

C'est dans le but initial de repousser ces limites et d'améliorer l'exactitude de la caractérisation, que la méthode par reconstruction de formes d'ondes a été développée pour une lame à faces parallèles immergée. Dans ce travail sur l'identification ultrasonore des comportements viscoélastiques, trois axes se détachent principalement : l'écriture du problème direct, la formulation des fonctions objectif et les deux stratégies d'identification dites "globale" et "locale".

Le problème direct pose les hypothèses de travail, considérant la transmission d'une onde plane par une lame à faces parallèles viscoélastique de symétrie quelconque. L'expression analytique de la réponse fréquentielle en transmission (et donc, à un facteur près, en réflexion) d'une plaque viscoélastique à symétrie quelconque est établie. L'écriture de la fonction de transfert du problème conduit, avec l'utilisation du théorème des fonctions implicites, aux formulations analytiques du gradient et du Hessien de cette fonction de transfert pour les paramètres du problème. L'efficacité et la précision du procédé d'optimisation en sont alors améliorées.

Le principe de la méthode de reconstruction des formes d'ondes consiste en la comparaison entre des signaux expérimentaux et prédits pour un jeu de paramètres donnés. Inspiré du principe de maximum de vraisemblance et de l'expression des fonctions d'ambiguïté, l'introduction de la notion d'énergie d'interaction entre deux signaux, pris sous leur forme analytique, permet alors : d'une part, un traitement sélectif des informations propres au signal utile dont nous cherchons la reconstruction optimale; et, d'autre part, d'établir l'expression de deux fonctions objectif complémentaires pour la technique

d'inversion. Le procédé présente ainsi l'avantage d'être peu sensible aux perturbations extérieures du signal (bruit électronique) et possède un domaine de convergence élargi.

Ayant montré que dans un milieu viscoélastique, les rigidités complexes étaient des fonctions de la fréquence, indépendantes entre elles, deux applications de la technique d'optimisation ont été envisagées. Un premier développement, dit d'identification "globale", repose sur le choix préalable d'un modèle rhéologique classique sur la plage de fréquence étudiée. Dans la seconde approche, dite "locale", l'évaluation est effectuée autour d'une fréquence à partir d'un développement limité au premier ordre des rigidités complexes. Cette formulation locale plus souple, car ne présupant d'aucune variation particulière, conduit, par associations successives d'optimisations locales, à une identification globale d'évolutions quelconques des raideurs avec la fréquence.

Les deux stratégies d'identification "globale" et "locale" sont validées par l'analyse de la technique de reconstruction à partir de signaux simulés. Pour l'approche globale, la stabilité, la fiabilité et la précision du procédé d'optimisation par reconnaissance de formes d'ondes sont démontrées pour des niveaux de bruit et des rapports longueurs d'onde sur épaisseur élevés, ainsi que pour des matériaux de degrés d'anisotropie et d'atténuation différents. Cependant, cette technique, présupant d'un comportement rhéologique du milieu parfaitement connu, ne permet pas de trouver de reconstruction optimale lorsque la modélisation choisie est inexacte. Dans ce cas, la méthode d'identification locale s'impose. La faisabilité de l'identification d'évolutions inhomogènes en fréquence, des parties réelles et imaginaires des rigidités respectant des conditions de causalité, est démontrée.

Enfin, la dernière partie traite des applications expérimentales relatives aux deux procédés proposés. Pour l'identification globale, deux essais ont été effectués sur des plaques fines de PMMA et de composite carbone-SiC 2D, pour des rapports longueur d'onde sur épaisseur élevés. Ces essais montrent, malgré les bons résultats obtenus pour l'évaluation des constantes d'élasticité, l'importance de l'effet de la nature bornée des faisceaux sur la détermination des constantes d'atténuation. Par conséquent, seul un essai préliminaire en incidence normale a été réalisé. En appliquant la technique de reconstruction locale, nous sommes parvenus, à partir d'un seul signal large bande, à identifier simultanément les variations des parties réelle et imaginaire de la raideur $C_{11}(\omega)$ montrant par la même les limites des modèles utilisés pour l'identification globale. Par ailleurs, par un procédé simple d'extrapolation respectant des conditions locales de causalité, les courbes de dispersion et d'atténuation du matériau sont déterminées en dépit du contenu multimodal (échos) du signal transmis.

Cette étude révèle donc la possibilité, non plus d'obtenir une caractérisation basée sur un modèle rhéologique prédéfini, mais bien d'identifier les évolutions des propriétés viscoélastiques d'un milieu. Cependant, l'obtention de résultats expérimentaux, tels que ceux montrés à partir de signaux simulés pour des évolutions inhomogènes des rigidités, nécessiterait de nombreux développements tant technologiques que théoriques.

Discutons tout d'abord des limites liées aux faisceaux bornés. La prise en compte, dans le problème direct, de la nature bornée des faisceaux acoustiques a déjà fait l'objet de nombreuses études [Deschamps, 1985; Chevée, 1991; Ur-Rehman, 1998]. Ce développement pourrait confirmer les évaluations erronées observées lors des essais expérimentaux. En simulant des signaux à partir d'un faisceau acoustique incident prédéterminé, la reconstruction obtenue avec le modèle en ondes planes permettrait de quantifier les erreurs, en fonction de l'épaisseur et des degrés d'anisotropie et d'atténuation du milieu. Par ailleurs, si le champ acoustique du signal de référence est parfaitement connu, l'implémentation d'un procédé

d'inversion prenant en compte la dispersion spatiale du faisceau est réalisable. Ceci permettrait, non seulement d'appliquer la technique d'identification par reconstruction de formes d'ondes en transmission, mais aussi en réflexion (accès à une seule interface). Une adaptation du banc d'essai expérimental, afin de mieux reproduire des conditions en ondes planes, est aussi réalisable par l'utilisation d'un récepteur couvrant une plus large surface.

Des améliorations restent nécessaires quant à la stabilité de l'identification locale pour de faibles niveaux de bruit, et pour élargir la bande passante de la référence au-delà de 6 dB. Le manque de stabilité proviendrait du fait que la reconstruction des lois d'évolution est réalisée par étapes successives et indépendantes, sur un domaine fréquentiel trop réduit (5 points). Il est alors envisageable d'adapter un procédé progressif de reconstruction des signaux gardant alors en mémoire les résultats des évaluations déjà effectuées. Ainsi, les niveaux de stabilité au bruit, similaires à ceux de l'identification globale, pourraient être atteints.

Les diverses simulations effectuées montrent l'étendue des possibilités offertes par la technique proposée. Que ce soit avec l'optimisation globale (caractérisations de matériaux viscoélastiques pour des rapports longueur d'onde sur épaisseur élevés en présence de bruit) ou locale (études de phénomènes complexes de dispersion acoustique), la technique de reconstruction de formes d'ondes implémentée ouvre un large domaine d'application. Par exemple, la mesure d'évolutions non conventionnelles des constantes viscoélastiques d'un matériau, en fonction de la fréquence, peut être un moyen de validation précis de modèles de milieux viscoélastiques homogènes équivalents complexes, tels que ceux décrivant les phénomènes de dispersion engendrés par la décohésion partielle fibre-matrice d'un matériau composite [Biwa et Shibata, 2000].

Bibliographie

- Angel Y.C. et Achenbach J.D.**, 1991, "Attenuation and speed of antiplane waves in cracked solid using the Kramers-Krönig relations", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 90 (5), 2757-2762.
- Aristégui C. et Baste S.**, 1997a, "Optimal determination of the material symmetry axes and associated elasticity tensor from ultrasonic velocity data", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 102 (3), 1503-1521.
- Aristégui C. et Baste S.**, 1997b, "Optimal recovery of the elasticity tensor of general anisotropic materials from ultrasonic velocity data", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 101 (2), 813-833.
- Aristégui C.**, 1997, *Anisotropie élastique totale naturelle ou induite*, Thèse de l'Université Bordeaux 1, n°1682.
- Arts R.J.**, 1993, *A study of general anisotropic elasticity in rocks by wave propagation : theoretical and experimental aspects*, Thèse de l'Université Paris VI.
- Audoin B.**, 1991, *Évaluation ultrasonore de l'endommagement anisotrope d'un composite à matrice fragile*, Thèse de l'Université Bordeaux 1, n°620.
- Audoin B., Baste S. et Castagnède B.**, 1991, "Estimation de l'intervalle de confiance des constantes d'élasticité identifiées à partir des vitesses de propagation ultrasonores", *C. R. Acad. Sc. Paris*, Vol. 312, série II, 679-686.
- Audoin B. et Baste S.**, 1994, "Ultrasonic Evaluation of stiffness tensor changes and associated anisotropic damage in a ceramic matrix composite", *J. Appl. Mech.*, Vol. 61, 309-316.
- Audoin B. et Roux J.**, 1996, "An innovative application of the Hilbert transform to time delay estimation of overlapped ultrasonic echoes", *Ultrasonics*, Vol. 34 (1), 25-33.
- Auld B.A.**, 1990, *Acoustic fields and waves in solids*, Vols. 1 et 2 (Krieger Publishing Company, Stanford).
- Baste S.**, 1985, *Propagation des ondes élastiques dans les composites carbone-carbone 3D*, Thèse de l'Université Bordeaux 1, n°11.
- Baste S. et Deschamps M.**, 1989, "Identification des constantes d'élasticité à partir des vitesses de propagation dans un plan principal de symétrie", *C. R. Acad. Sc. Paris*, Vol. 309, série II, 1521-1526.
- Baste S., El Guerjouma R. et Gérard A.**, 1989, "Mesure de l'endommagement anisotrope d'un composite céramique-céramique par une méthode ultrasonore", *Revue Phys. Appl.*, Vol. 24 (7), 721-731.
- Baste S., El Guerjouma R. et Audoin B.**, 1990, "Effect of microcracking on the macroscopic behaviour of ceramic matrix composites: Ultrasonic evaluation of anisotropic damage", *Mechanics of Material*, Vol. 14, 15-31.

- Baudouin S. et Hosten B.**, 1996, "Immersion ultrasonic method to measure elastic constants and anisotropic attenuation in polymer-matrix and fiber-reinforced composite materials", *Ultrasonics*, Vol. 34, 379-382.
- Biot M.A.**, 1956, "Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid", *J. Appl. Phys.*, Vol. 27, 459-467.
- Biot M.A.**, 1962, "Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 34 (5), 1254-1264.
- Biwa S. et Shibata T.**, 2000, "Elastic and ultrasonic properties of a unidirectional composite with partially debonded fibres: numerical analysis for longitudinal shear modes", *Composites Science and Technology*, Vol. 60, 83-93.
- Bourbié T., Coussy O. et Zinszner B.**, 1986, *Acoustique des milieux poreux* (Technip, Paris).
- Brézis H., Ciarlet P.G. et Lions J.L.**, 1999, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications* (Dunod, Paris).
- Brillouin L. et Parodi M.**, 1956, *Propagation des ondes dans les milieux périodiques* (Masson, Paris).
- Castagnède B.**, 1984, *Mesure des constantes élastiques de solides anisotropes par une méthode ultrasonore*, Thèse de 3^e cycle, Université Bordeaux 1, n°620.
- Castagnède B., Jenkins J.T., Sachse W. et Baste S.**, 1990, "Optimal determination of the elastic constants of composite materials from ultrasonic wavespeed measurements", *J. Appl. Phys.*, Vol. 67 (6), 2753-2761.
- Castaing M., Hosten B. et Kundu T.**, 2000, "Inversion of ultrasonic, plane-wave transmission data in composite plates to infer viscoelastic material properties", *NDT&E International*, Vol. 33, 377-392.
- Cawley P. et Hosten B.**, 1997, "The use of large ultrasonic transducers to improve transmission coefficient measurements on viscoelastic anisotropic plates", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 101 (3), 1373-1379.
- Chandra R., Singh S.P. et Gupta K.**, 1999, "Damping studies in fiber-reinforced composites - a review", *Composite Structures*, Vol. 46, 41-51.
- Chevée P.**, 1993, *Réflexion et transmission d'un faisceau borné ultrasonore par une lame viscoélastique orthotrope immergée*, Thèse de l'Université Bordeaux 1, n°995.
- Chevée P. et Deschamps M.**, 1992, "Interactions d'ondes planes hétérogènes au sein d'une lame à faces parallèles dissipative : confrontation théorie-expérience", *Acustica*, Vol. 7, 224-230.
- Christensen R.M.**, 1982, *Theory of viscoelasticity: an introduction* (Academic press, New York).
- De Coulon F.**, 1984, *Théorie et traitement de signaux* (Polytechniques Romandes, Lausanne).
- Deschamps M.**, 1985, *Étude en ondes planes et faisceaux bornés de la réfraction à une interface liquide-solide, application à la caractérisation viscoélastique des composites*, Thèse de l'Université Bordeaux 1, n°4.

- Deschamps M.**, 1996, *Reflection and refraction of the inhomogeneous plane wave*, Acoustic Interaction with Submerged Elastic Structures, Part I, Edited by A. Guran, J. Riposte and F. Ziegler, World Scientific Publishing Company, pp. 164-206.
- Deschamps M. et Assouline F.**, 2000, "Attenuation along the Poynting vector direction of inhomogeneous plane waves in absorbing and anisotropic solids", *Acustica-acta acustica*, Vol. 86, 295-302.
- Deschamps M. et Cao C.**, 1991, "Reflection/Refraction of a solid layer by Debye's series expansion", *Ultrasonics*, Vol. 29, 288-293.
- Deschamps M. et Chevée P.**, 1993, "Reflection and transmission of a transient bounded beam by a dispersive and orthotropic plate", *Acta acustica (Paris)*, Vol. 1, 3-14.
- Deschamps M. et Hosten B.**, 1992, "The effects of viscoelasticity on the reflection and transmission of ultrasonic waves by an orthotropic plate", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 91 (4), 2007-2015.
- Dieulesaint E. et Royer D.**, 1974, *Ondes élastiques dans les solides* (Masson, Paris).
- Flandrin P.**, 1993, *Temps-fréquence* (Hermès, Paris).
- Gabor D.**, 1946, "Theory of Communication", *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, Vol. 93 (Part III, 26), 429-457.
- Gourdin A. et Boumahrat M.**, 1983, *Méthodes numériques appliquées* (Lavoisier, Paris).
- He P.**, 1999, "Direct measurement of ultrasonic dispersion using a broadband transmission technique", *Ultrasonics*, Vol. 37, 67-70.
- Horton Sr. C.W.**, 1974, "Dispersion relationships in sediments and sea water", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 55 (3), 547-549.
- Hosten B.**, 1998, "Heterogeneous structures of modes and Kramers-Krönig relationship in anisotropic viscoelastic materials", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 104 (3), 1382-1388.
- Hosten B., Barrot A. et Roux J.**, 1983, "Interférométrie numérique ultrasonore pour la détermination de la matrice de raideur des matériaux composites", *Acustica*, Vol. 53, 212-217.
- Hosten B. et Castagnède B.**, 1983, "Mesures des constantes élastiques du bois à l'aide d'un interféromètre ultrasonore numérique et leur optimisation", *C. R. Acad. Sc. Paris*, Vol. 296 série II, 1761-1764.
- Hosten B., Castaings M. et Kundu T.**, 1997, "Identification of viscoelastic moduli of composite materials from the plate transmission coefficient", *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, Vol. 17B, 1117-1124.
- Hosten B., Deschamps M. et Tittmann B.R.**, 1987, "Inhomogeneous wave generation and propagation in lossy anisotropic solids. Application to the characterization of viscoelastic composite materials", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 82 (5), 1763-1770.
- Jourdain-Baudouin S.**, 1996, *Mesure et modélisation de l'atténuation ultrasonore anisotrope dans les matériaux composites*, Thèse de l'Université Bordeaux 1, n°1638.
- Kinra V.K. et Anand A.**, 1982, "Wave propagation in a random particulate composite at long and short wavelengths", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 18, 367-380.

- Kinra V.K., Henderson B.K. et Maslov K.I.**, 1999, "Elastodynamic response of layers of spherical particles in hexagonal and square periodic arrangements", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 47, 2147-2170.
- Kinra V.K. et Iyer V.R.**, 1995, "Ultrasonic measurement of the thickness, phase velocity, density or attenuation of a thin-viscoelastic plate. Part II: the inverse problem", *Ultrasonics*, Vol. 33, 111-122.
- Knapp C.H. et Carter G.C.**, 1976, "The generalized correlation method for estimation of time delay", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 24, 320-327.
- Krönig R.**, 1926, "On the theory of dispersion X-Rays", *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 12, 547.
- Lakes R.S.**, 1998, *Viscoelastic solids* (CRC Press, New York).
- Lavrentyev A.I. et Rokhlin S.I.**, 1997, "Determination of elastic moduli, density, attenuation, and thickness of a layer using ultrasonic spectroscopy at two angles", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 102 (6), 3467-3477.
- Ledbetter H., Fortunko C. et Heyliger P.**, 1995, "Orthotropic elastic constants of a boron-aluminium fiber-reinforced composite: an acoustic-resonance-spectroscopy study.", *J. Appl. Phys.*, Vol. 78 (3), 1542-1546.
- Lemaitre J. et Chaboche J.L.**, 1985, *Mécanique des matériaux solides* (Bordas, Paris).
- Leymarie N. et Baste S.**, 2000, "Guided waves and ultrasonic characterization of three-dimensional composites", *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, Vol. 19B, 1175-1181.
- Leymarie N., Aristégui C., Audoin B. et Baste S.**, 2002, "Identification of complex stiffness tensor from waveform reconstruction", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 111 (3), 1232-1244.
- Mangulis V.**, 1964, "Kramers-Krönig or dispersion relations in acoustics", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 36 (1), 211-212.
- Markham M.F.**, 1970, "Measurement of the elastic constants of fibre composites by ultrasonics", *Composites*, Vol. 1, 145-149.
- Max J.**, 1972, *Méthodes et techniques de traitement du signal* (Masson, Paris).
- Mertins A.**, 1999, *Signal Analysis: Wavelets, Filter Banks, Time-Frequency Transforms and Applications* (John Wiley & Sons, Chichester).
- Minoux M.**, 1983, *Programmation mathématique, théorie et algorithmes* (Dunod, Paris).
- Mobley J., Waters K.R. et al.**, 2000, "Kramers-Krönig relations applied to finite bandwidth data from suspensions of encapsulated microbubbles", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 108 (5), 2091-2106.
- Musgrave M.J.P.**, 1970, *Crystal Acoustics* (Holden-Day, San Francisco).
- Nemat-Nasser S. et M. Yamada**, 1981, "Harmonic waves in fiber-reinforced orthotropic elastic composites", *J. Appl. Mech.*, Vol. 48, 967-971.
- O'Donnell M., Jaynes E.T. et Miller J.G.**, 1981, "Kramers-Krönig relationship between ultrasonic attenuation and phase velocity", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 69 (3), 696-701.

- Papadakis E.P.**, 1959, "Correction for diffraction losses in the ultrasonic field of a piston source", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 31 (2), 150-152.
- Papadakis E.P.**, 1966, "Ultrasonic diffraction loss and phase change in anisotropic media", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 40 (4), 863-876.
- Poncelet O. et Deschamps M.**, 1997, "Lamb waves generated by complex harmonic inhomogeneous plane waves", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 102 (1), 292-300.
- Reverdy F.**, 2000, *Synthèse de fronts acoustiques plans par déplacement d'une source laser : application à l'évaluation non destructive de matériaux composites*, Thèse de l'Université Bordeaux 1, n°2280.
- Reverdy F. et Audoin B.**, 1999, "Measurement by laser generated ultrasound of both stiffness coefficients and viscosities of an isotropic polymer material", *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, Vol. 18B, 1257-1264.
- Roux J., Hosten B., Castagnède B. et Deschamps M.**, 1985, "Caractérisation mécanique des solides par spectro-interférométrie ultrasonore", *Revue Phys. Appl.*, Vol. 20 (6), 351-358.
- Rudin W.**, 1998, *Analyse réelle et complexe : cours et exercices* (Dunod, Paris).
- Safaeinili A., Lobkis O.I. et Chimenti D.E.**, 1996, "Quantitative materials characterization using air-coupled leaky Lamb waves", *Ultrasonics*, Vol. 34, 393-396.
- Smith R.E.**, 1972, "Ultrasonic elastic constants of carbon fibers and their composites", *J. Appl. Phys.*, Vol. 43, 2555-2561.
- Sutherland H.J.**, 1975, "Dispersion of acoustic waves by fiber-reinforced viscoelastic materials", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 57 (4), 870-875.
- Theodor R.**, 1994, *Initiation à l'analyse numérique* (Masson, Paris).
- Ur-Rehman A.**, 1998, *Interaction d'un faisceau ultrasonore avec un milieu multicouche anisotrope à l'aide de la décomposition en spectre angulaire*, Thèse de l'Université de Technologie de Compiègne, n°D1118.
- Ville J.**, 1947, "Théorie et applications de la notion de signal analytique", *Câbles et Transmissions*, Vol. 1, 61-74.
- Woodward P.M.**, 1953, *Probability and information theory with application to radar* (Pergamon Press, London).

Analyse du comportement viscoélastique de matériaux anisotropes par reconstruction de formes d'ondes

Une nouvelle technique d'évaluation non destructive des propriétés viscoélastiques de milieux anisotropes est présentée. Inspirée du principe de maximum de vraisemblance, la méthode d'identification est basée sur la reconstruction d'un jeu de signaux à partir d'un modèle de propagation ultrasonore au travers d'une lame immergée.

La formulation du problème direct conduit à l'expression analytique la réponse de la lame, et par suite à prédire la forme d'onde d'un signal transmis en fonction des paramètres du problème.

Les spécificités du procédé d'inversion sont constituées par l'utilisation d'une formulation analytique des signaux expérimentaux lors de leur analyse et par la définition de deux fonctions objectif originales, complémentaires et peu sensibles au bruit.

Le milieu étudié étant supposé viscoélastique linéaire, le comportement mécanique est décrit à l'aide d'un tenseur des rigidités, fonctions complexes de la fréquence. Deux méthodes d'identification sont alors proposées : une approche dite "globale", où le comportement du milieu est décrit sur la gamme de fréquence étudiée par un modèle rhéologique prédéfini ; une approche dite "locale", où la description locale du comportement autour de chaque fréquence permet d'introduire des conditions de causalité et de reconstruire le modèle rhéologique du milieu sans en supposer la forme.

Les effets du rapport signal sur bruit, de l'épaisseur de la lame et des degrés d'anisotropie et d'atténuation du matériau, sont étudiés. L'influence du choix d'un modèle rhéologique prédéfini est discutée. Ce point étant prépondérant sur la qualité de la reconstruction par approche "globale", nous démontrons par l'approche "locale", la possibilité de caractériser des lois d'évolution fréquentielles quelconques des rigidités complexes, identifiant ainsi des comportements inattendus.

Mots clés :

END, viscoélasticité, anisotropie, réponse acoustique d'une plaque, signaux analytiques, causalité, principe du maximum de vraisemblance, problème inverse, atténuation, dispersion.

Viscoelasticity analysis of anisotropic materials from waveform reconstruction

This work deals with a new technique for the nondestructive evaluation of viscoelastic properties of anisotropic media. Inferred from the maximum likelihood, the identification method is based on the waveform reconstruction of a set of signals from a model quantifying wave propagation through immersed plates.

Initially, the direct problem formulation allows one to establish analytically the plate response, and consequently to predict the waveform of a transmitted signal in terms of the problem parameters.

Two main improvements have been developed for the inversion process. Analytic signal formulation is used in the signal analysis. Two original and complementary objective functions with a very low noise sensitivity are introduced.

Assuming a linear viscoelastic medium, the mechanical behavior at a given frequency is described by using a frequency-dependent complex stiffness tensor. Two identification methods are then proposed: the "global" approach, when the mechanical behavior is described by a rheologic model a priori set on the entire frequency band ; the "local" approach, when the mechanical behavior is approximated locally around each frequency by a linear evolution of viscoelasticity properties. This latter technique allows one to account for the causality conditions and to determine rheologic models without any assumption on their form.

The effects of the signal-to-noise ratio, the plate thickness, the anisotropy and damping of the materials are studied. The influence of an a priori choice of the rheologic model on the reconstruction is discussed. This error can be avoided by using the local approach, which is able to identify unusual frequency dependencies of the complex stiffnesses.

Keywords:

NDE, viscoelasticity, anisotropy, plate acoustic response, analytic signals, causality, maximum-likelihood principle, inverse problem, damping, dispersion