



**HAL**  
open science

# Étude des instabilités de sillage, de forme et de trajectoire de bulles par une étude stabilité linéaire globale

Paul Bonnefis

► **To cite this version:**

Paul Bonnefis. Étude des instabilités de sillage, de forme et de trajectoire de bulles par une étude stabilité linéaire globale. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Toulouse INP, 2019. Français. NNT : 2019INPT0070 . tel-03982380v1

**HAL Id: tel-03982380**

**<https://hal.science/tel-03982380v1>**

Submitted on 10 Feb 2023 (v1), last revised 21 Jul 2023 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License



# THÈSE

## En vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Institut National Polytechnique de Toulouse

---

Présentée et soutenue par

**Paul BONNEFIS**

Le 12 mars 2019

### Étude des instabilités de sillage, de forme et de trajectoire de bulles

---

Ecole doctorale : **MEGEP - Mécanique, Energétique, Génie civil, Procédés**

Spécialité : **Dynamique des fluides**

Unité de recherche :

**IMFT - Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse**

Thèse dirigée par

**David FABRE et Jacques MAGNAUDET**

Jury

**M. François GALLAIRE**, Rapporteur

**M. Benoît PIER**, Rapporteur

**M. Jean-Sébastien SCHOTTÉ**, Examineur

**Mme Patricia ERN**, Examineur

**M. David FABRE**, Directeur de thèse

**M. Jacques MAGNAUDET**, Directeur de thèse

**M. Michel FOURNIE**, invité



*À ma sœur, Charlotte.*



## RÉSUMÉ

---

Ce travail porte sur le couplage des déformations d'une bulle avec son sillage et sa trajectoire dans plusieurs configurations. Un formalisme de type eulérien-lagrangien permet d'écrire le problème sur un domaine mouvant faiblement déformé par rapport à la configuration de référence. Grâce à cette approche, il est possible d'étudier dans un cadre linéaire le couplage entre les déformations d'une bulle et les effets hydrodynamiques.

En appliquant ce formalisme, on peut dans un premier temps calculer l'écoulement de base autour de la bulle et sa géométrie d'équilibre, et dans un second temps développer une approche de stabilité globale prédisant les seuils d'instabilité et les propriétés des modes d'oscillation. Afin de développer cette méthode, des résultats sur les oscillations linéaires de bulles et de gouttes dans un fluide au repos et sans influence de la gravité sont tout d'abord présentés et comparés à des résultats théoriques existants. Puis, le principe du formalisme eulérien-lagrangien est illustré en prenant pour problème modèle l'équation de la chaleur formulée sur un domaine arbitrairement déformé.

Ce principe est ensuite appliqué aux équations de Navier-Stokes, aboutissant à une version linéarisée autour d'un domaine de référence incluant de manière complète les couplages entre déformations de la géométrie et perturbations de l'écoulement. On met en œuvre sur le système obtenu une méthode itérative de Newton donnant accès à l'état de base, c'est-à-dire à l'écoulement stationnaire autour de la bulle et à sa forme d'équilibre. Ce même système permet par la suite d'effectuer une analyse de stabilité globale de l'écoulement autour d'une bulle qui se déforme.

L'algorithme développé est d'abord appliqué au cas d'une bulle piégée dans un écoulement d'étirement, permettant de décrire des formes d'équilibre dans des régimes stables et instables.

Le cas de la bulle en ascension dans un fluide pur est ensuite abordé. Une étude paramétrique est conduite, couvrant une vaste gamme de liquides allant de l'eau pure à des huiles de silicone très visqueuses. Les états de base calculés par la méthode de Newton ainsi que les seuils d'instabilité des sillages sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. Dans les cas des liquides très peu visqueux, notre approche décrit de manière plus précise les effets visqueux dans les couches limites et donne des résultats plus satisfaisants que les approches numériques existantes. Elle confirme par ailleurs que la déformation de la bulle joue un rôle mineur dans ces gammes de paramètres. Pour les liquides plus visqueux en revanche, on observe un couplage plus fort entre déformation et sillage.

**Mots-clés :** Bulles, stabilité globale, déformation d'interface, éléments finis, formulation eulérienne-lagrangienne



## ABSTRACT

---

This work deals with the coupling between time-dependent deformation, wake dynamics and path characteristics of a gas bubble in different configurations. An Eulerian-Lagrangian formalism is sought to formulate this problem in a moving domain having a small deformation compared to the reference configuration. This approach allows us to study the linear coupling between bubble deformations and hydrodynamic effects.

This formalism makes it possible to first compute the base flow around a bubble and the corresponding steady shape, then to develop a global stability approach aimed at predicting the threshold of path instability and the properties of bubble oscillation modes.

To develop this method, we first compute the linear oscillations of bubbles and drops in a quiescent fluid without gravity and compare them to existing theory. Then, the premise of the Eulerian-Lagrangian formalism is illustrated using a model equation, namely the heat equation written in an arbitrarily deformed domain. The same formalism is applied to the Navier-Stokes equations, yielding a linearized version of these equations in the neighbourhood of a reference domain, including the two-way coupling between shape deformations and perturbations of the base flow. With this system of equations at hand, we implement a Newton method that provides the steady state, i.e. the base flow around the bubble and its geometry. The same system allows us to carry out a global stability analysis of the flow past a deformable bubble.

We first consider the situation where the bubble is trapped in a straining flow, for which we compute stable and unstable equilibrium shapes.

We finally tackle the case of a buoyancy-driven bubble rising in a pure liquid. A parametric study is carried out over a wide range of liquids, from pure water to high-viscosity silicon oils. Steady states computed with the Newton method and instability thresholds are found to be in good agreement with experimental observations. For low-viscosity fluids, our approach captures the viscous effects that take place in the boundary layer better than existing computational approaches, yielding predictions for the onset of path instability in better agreement with observations. Furthermore, it confirms that time-dependent bubble deformations play a minor part for such liquids. In contrast, a stronger coupling between shape and path instabilities is observed in high-viscosity fluids.

**Keywords :** Bubbles, global stability, interface deformation, finite elements, eulerian-lagrangian formalism



## REMERCIEMENTS

---

Cette thèse a été effectuée à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, IMFT, au sein du groupe INTERFACE, fraîchement renommé INTERFACES. Ce groupe et l'intégralité du labo m'ont chaleureusement accueilli durant ma thèse et j'en suis très reconnaissant. Je remercie l'INP qui a financé mon année de thèse supplémentaire en échange de quelques heures d'enseignement, une expérience très enrichissante.

Je souhaite tout d'abord remercier David Fabre et Jacques Magnaudet, mes directeurs de thèse, qui m'ont embarqué dans cette aventure de quatre ans durant laquelle j'ai eu toute la place pour exprimer ma curiosité scientifique et développer mon projet de thèse. Leur aide a été décisive, leur confiance et soutien m'ont permis d'achever et de parfaire mon travail. David Fabre a su m'orienter et me donner du recul dans les moments où les formulations mathématiques devenaient plus que touffues et indigestes. Il est un aficionado des méthodes mathématiques de pointes et se promène de manière innée dans le plan complexe. Jacques Magnaudet m'a transmis son expertise et sa connaissance insondable dans le domaine des bulles, ajoutant moult connaissances à la technique avec une grande finesse. Pédagogue, jusqu'au derniers moments il m'a patiemment enseigné certaines subtilités que j'avais occultées. Le duo complémentaire que forme David et Jacques m'a guidé dans des moments critiques me permettant la création de ce travail de thèse dont je suis fier. Merci à vous deux.

Je remercie François Gallaire et Benoît Pier pour avoir accepté d'être rapporteur pour cette thèse et pour toutes les remarques qu'ils m'ont fait. Je remercie Patricia Ern, pour la présidence du jury de thèse et pour toute sa bienveillance. Je remercie Jean-Sébastien Schotté pour toutes les remarques qu'il a faites sur mon manuscrit et merci à Michel Fournié d'avoir porté un regard de mathématicien sur mon travail.

Un grand merci à notre gestionnaire de groupe, Marie-Hélène, qui se démène pour tout le monde et qui effectue un travail exceptionnel. Toujours à l'écoute, quelque soit le problème, elle a toujours une solution!

J'ai côtoyé beaucoup de personnes durant cette thèse, qui m'ont aidé et avec qui j'ai beaucoup partagé et je suis content de compter parmi certains de vrais amis. Je tiens à remercier Florian que je connais depuis que je suis bébé-stagiaire, chevalier de l'ordre du *PPFFRrr!* *aux deux doigts levés*, grand défenseur de la culture alsacienne, *Genau!*

Un grand merci à Esli et Rominou, les jeunes mariés, pour toutes les soirées passées (ça représente quelques hectolitres de bières quand même), les virées, la visite de Mexico, les simples pauses cafés et tous les papotages!

Il ne faut pas oublier Sébastien qui m'a fait partager des moments inoubliables en montagne. Le dernier en date, sur l'arrêt du Petit Rulhe, moi, vaché à un nut : *T'es en bout de corde?*, lui : *Quoi? J'entends rien!!*. Et une belle nuit étoilée en perspective, *Hmm... si!*

Je remercie Marylou, mon binôme d'escalade pendant plus d'un an, toujours la pêche, toujours un plan un en tête et pleine de ressource madame la professeure! Je pense aussi à Caroline, si tu reviens sur Toulouse, je t'offrirai une *Grim'*. Il y a aussi Omar qui m'a appris les pires injures en Turc, Guillaume et Mijail qui ont commencé la thèse en même temps que moi.

Je remercie aussi les anciennes et anciens d'INTERFACE qui m'ont notamment introduit aux plaisirs des bières le vendredi soir au Dubliner, il y avait (dans le désordre) : Nico, Audrey, Jérôme, Jean-Lou (dévot du dieu grec Jadim), Michel, Mathieu, René, Marie, Lucia et Max, Auriane et Élise. Je remercie aussi Joël, mon prédécesseur, pour tout le travail qu'il

a abattu et qui m'a beaucoup servi dans cette thèse. Mais la famille s'est agrandie, le club des gros sacs formé de Sébastien, Florian et moi-même a accueilli Rafael (alias JP Rouve) et l'infatigable Hacène. Rafael, spécialiste du tour de France depuis 1903 et grand showman, *tu te gaves!* Je remercie aussi Alexis (alias Cantal), semi-aveyronnais mais cantalien de cœur, pour toutes les conneries qu'il a pu dire mais surtout pour les farçous et le pounti à son pot de thèse. Merci à Elena, la seule que j'ai réussi à embarquer au kung fu, tu t'en sortais bien! Merci à Émeryk pour toute les banderitas bues à Mexico! Je remercie aussi Valentin, chef pâtissier, il a réussi à confectionner un gâteau avec l'emblème des Stark et c'est pas rien. Je remercie aussi JB euh... Adrien, le champion des blagounettes toutes catégories confondues (et désolé si des personnes ont quasiment oublié ton prénom par ma faute). Il y aussi le jeune dernier, Guillaume, qui nous prend toujours de cours avec son humour graveleux. Je remercie Clémence pour tous les conversations et les encouragements pendant la rédaction. J'aurais aimé remercier René Gaderie mais il a toujours refusé de confectionner le traditionnel gâteau d'arrivée... Merci aussi aux stagiaires (qui eux ont ramené des gâteaux) de passage (maintenant thésards), je pense à Benjamin, Nadia, Nabil, Kalyani (surtout elle, pour les gâteaux bien sûr), Diogo et Ficus.

J'ai beaucoup parlé des thésards, la vie au labo est aussi partagée avec les chercheuses et chercheurs. Je remercie le duo Patricia (encore) et Véronique, vous avez été fantastiques. Je n'oublierai pas le repas que vous nous avez concocté pour votre départ, je crois que je n'ai pas pu travailler de l'après-midi. Je me souviens aussi des restos à Séville, *Querría un vaso de vino tinto? Pedro Ximénez, qué es?*. Merci à Rémi pour m'avoir initié à l'escalade et à la grande voie, toujours une vanne en réserve. Je remercie Frédéric pour tous les débats épulaires enflammés. Il y a aussi Philippe, qui s'est révélé être un excellent outsider pour le concours de la blague la plus nulle, on ne s'y attendait pas! J'ai apprécié discuter avec Julien avec qui on finit toujours par parler de tout ce qu'on peut faire en chimie et qui est parfois illicite. Que serait un café sans une anecdote de Thierry? Toujours une histoire de fou à raconter, je ne sais pas comment tu fais, il y en a tous les jours une nouvelle. En bon français, nous passions notre temps de repas à parler de nourriture, et qui mieux que Wladimir pour parler de ça! Manger donnait faim en compagnie de ce gourmet. Je remercie Jean Fabre, hé ouais, c'est bien moi que tu as croisé avec un heaume en carton sur la tête dans les couloirs du labo. Merci à l'ancienne chef de département Catherine et à son successeur à Sébastien, on est bien à INTERFACES.

Je suis extrêmement reconnaissant envers Laure, ma compagne, qui m'a soutenu durant cette thèse. Elle est restée près de moi dans les moments difficiles et ils ont été légion. Je remercie mes parents qui ont été à l'écoute et m'ont soutenu tout le long, jusqu'au pot de thèse qui a été exceptionnel! De la soupe au fromage et des gâteaux à la broche... du jamais vu à l'IMFT! Merci à toute ma famille, qui s'est mobilisée et a remplie l'amphithéâtre lors de ma soutenance. Merci à Pablo et Julia, vous êtes trop géniaux, bisous! Merci à David avec qui les soirées finissent quand il fait jour. Merci à mes potes du kung fu, bientôt tous *black belt*, Flo, Jo, Ju et Alix, ça m'a fait du bien toutes ces bières (et entraînements aussi). Bientôt Taïwan, je compte sur vous!

Ha! T'as eu peur Greg! (toi qui te targues d'être dans tous les remerciements des thésards d'INTERFACE) mais non, je ne t'ai pas oublié (et je te donne encore une fois raison). Merci à toi, pour tous les cafés partagés et les blagues parfois limites limites, *Punk à chat, va!*

*Combelongue, commune de Quins, Aveyron, le 8 juin.*

## TABLE DES MATIÈRES

1	INTRODUCTION	15
1.1	Les interactions fluide-structure	15
1.2	Gouttes et écoulements à surface libre	18
1.3	Bulles en ascension	20
1.4	Contexte et méthodes	25
1.4.1	Contexte	25
1.4.2	Méthodes numériques utilisées	26
1.4.3	Le logiciel utilisé : FreeFem++	27
1.5	Plan de la thèse	27
2	OSCILLATIONS DE BULLES ET DE GOUTTES DANS UN FLUIDE AU REPOS SANS GRAVITÉ	31
2.1	Introduction	31
2.2	Formulations du problème	32
2.2.1	Formulation forte et linéarisation	32
2.2.2	Formulation variationnelle	34
2.3	Discrétisation	38
2.3.1	Vitesse et pression	38
2.3.2	Grandeurs surfaciques	38
2.3.3	Écriture matricielle du problème	41
2.3.4	Pression interne et volume	43
2.3.5	Goutte dans un gaz à viscosité et densité négligeable	44
2.4	Étude linéaire des oscillations de Bulles	45
2.4.1	Relation théorique	45
2.4.2	Convergence en maillage	47
2.4.3	Redondance des nombres d'onde azimutaux (m)	49
2.4.4	Comparaison avec une discrétisation en éléments finis des grandeurs surfaciques	50
2.4.5	Évolution des oscillations de bulles en fonction du nombre d'Ohnesorge	51
2.5	Étude linéaire d'oscillations de gouttes	53
2.5.1	Relation théorique et convergence en maillage	53
2.5.2	Évolution des oscillations de gouttes en fonction du nombre d'Ohne- sorge	54
3	RÉSOLUTION D'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES AVEC CHANGE- MENT DE DOMAINE	57
3.1	Équation de Poisson sur un domaine déformé	57
3.1.1	Formulation forte	57
3.1.2	Formulation faible sur le domaine PHYSIQUE	60
3.2	Problème de Poisson avec changement de domaine	60
3.2.1	Changement de variable pour une intégrale multiple	60
3.2.2	Linéarisation de la bijection	62
3.2.3	Changement de variables linéarisé	62
3.3	Opérateurs de dérivation spatiale	62
3.3.1	Formulation faible sur le domaine de CALCUL	63
3.4	Résultats de la résolution d'EDP avec changement de domaine	65
4	LINÉARISATION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES AVEC FRONTIÈRE DÉFORMABLE POUR L'ÉTUDE DE STABILITÉ LINÉAIRE	71
4.1	Linéarisation des équations de Navier-Stokes, cas général	71
4.1.1	Formulation variationnelle sur le domaine PHYSIQUE	71
4.1.2	Linéarisation sur le domaine de CALCUL	73
4.1.3	Équations du maillage	78

4.1.4	Écriture matricielle du problème complet . . . . .	80
4.2	Linéarisation des équations de Navier-Stokes exprimées en vitesses absolues dans un référentiel relatif . . . . .	84
4.2.1	Formulation variationnelle sur le domaine de calcul . . . . .	85
4.2.2	Écriture matricielle du problème . . . . .	87
4.3	Méthode de Newton . . . . .	89
4.3.1	Méthode de continuation pseudo-curviligne . . . . .	91
4.4	Analyse de stabilité linéaire . . . . .	94
4.5	discrétisation des inconnues surfaciques . . . . .	95
4.6	Validations . . . . .	96
4.6.1	Bulle dans un réservoir en rotation . . . . .	96
4.6.2	Écoulement d'étirement . . . . .	99
5	BULLES EN ASCENSION DANS UN FLUIDE AU REPOS . . . . .	109
5.1	Maillages utilisés . . . . .	110
5.2	Écoulement stationnaire autour de la bulle et forme d'équilibre . . . . .	112
5.2.1	Comparaison de l'écoulement stationnaire avec d'autres simulations numériques . . . . .	112
5.2.2	Zone de recirculation . . . . .	113
5.2.3	Déformation de l'interface . . . . .	114
5.2.4	Comparaison avec des résultats expérimentaux . . . . .	115
5.3	Analyse de stabilité globale de l'écoulement autour de la bulle . . . . .	120
5.3.1	Le cas d'un fluide visqueux : une huile de silicone cinq fois plus visqueuse que l'eau . . . . .	124
5.3.2	Le cas de l'eau ultra-pure à 20°C . . . . .	128
5.3.3	Décomposition de la déformation de l'interface . . . . .	133
5.3.4	Variation de la décomposition de l'interface . . . . .	136
5.4	Pour aller plus loin dans la compréhension des instabilités . . . . .	138
6	CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES . . . . .	143
6.1	Résumé du travail . . . . .	143
6.2	Perspectives . . . . .	145
 <b>Annexes</b>		
A	CARACTÉRISATION DE LA GÉOMÉTRIE DE LA BULLE . . . . .	149
A.1	Cas axisymétrique . . . . .	149
A.2	Cas général . . . . .	154
A.3	Calcul des vecteurs unitaires et courbures à l'ordre 0 . . . . .	155
A.4	Avec l'opérateur de Laplace-Beltrami en coordonnées sphériques . . . . .	156
B	LINÉARISATION DU DOMAINE PHYSIQUE . . . . .	161
B.1	Intégration par changement de variable . . . . .	161
B.2	Opérateurs de dérivation spatiale . . . . .	163
B.2.1	Opérateurs Gradient . . . . .	164
B.2.2	Opérateur Divergence . . . . .	165
C	REPRÉSENTATION DES OSCILLATIONS DE FORME DES BULLES . . . . .	169
 BIBLIOGRAPHIE . . . . .		172





## INTRODUCTION

Les bulles, les gouttes, les ailes de libellules, les drapeaux et les valves aortiques de cœur humain ont un point en commun. Ils présentent tous une surface qui se déforme sous l'action d'un fluide qui s'écoule autour. Ces configurations constituent une classe de problèmes où l'écoulement fluide et la déformation d'un objet sont intriqués. Même si le comportement de certains objets peut être modélisé de façon linéaire, le comportement de l'écoulement ne l'est pas (dans le cas général) faisant du problème couplé un problème non linéaire.

Pour les bulles et les gouttes, la surface déformable est définie par une interface fluide-fluide. Dans les autres cas, on est en présence d'une paroi solide déformable. De façon générale, nous nous intéresserons aux interactions que peuvent avoir un écoulement et une surface déformable. Deux domaines se distinguent : les interactions fluide-fluide avec l'étude des écoulements multiphasiques, et les interactions fluide-structure où le mouvement d'un fluide est couplé avec les déformations d'un solide ou une membrane.

## 1.1 LES INTERACTIONS FLUIDE-STRUCTURE

La déformation d'un disque mince encastré en son centre constitue un problème canonique d'interaction fluide-structure. Son étude révèle une variété de modes de déformation. Pour un écoulement fixé, plus le disque est flexible, plus le nombre de plis est important (voir figure 1.1a). L'écoulement autour de ces disques déformés est stationnaire. En augmentant la vitesse de l'écoulement, la surface se met à osciller et le sillage perd son caractère stationnaire. Des tourbillons sont alors émis à une fréquence proche de la fréquence propre du disque sans écoulement. Il y a un couplage fort entre les oscillations du disque et le sillage (voir figure 1.1b).

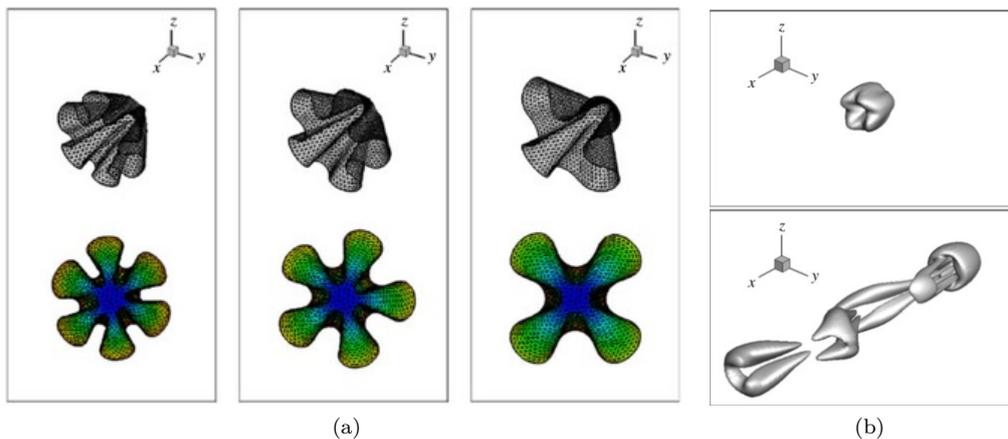


FIGURE 1.1 – Disques flexibles dans un écoulement, HUA et al. [40]. (a) Différents modes de déformation observés. (b) Critère  $Q$  dans le sillage : régime stationnaire (haut), régime oscillant (bas).

Le battement d'un drapeau correspond aussi à un problème où un couplage entre un écoulement fluide et une surface est présent. Le drapeau est une surface mince déformable sur laquelle le fluide adhère. Il peut être modélisé par une membrane fine. Une couche limite se développe à sa surface et de la vorticité est produite dans le sillage. Lorsque le

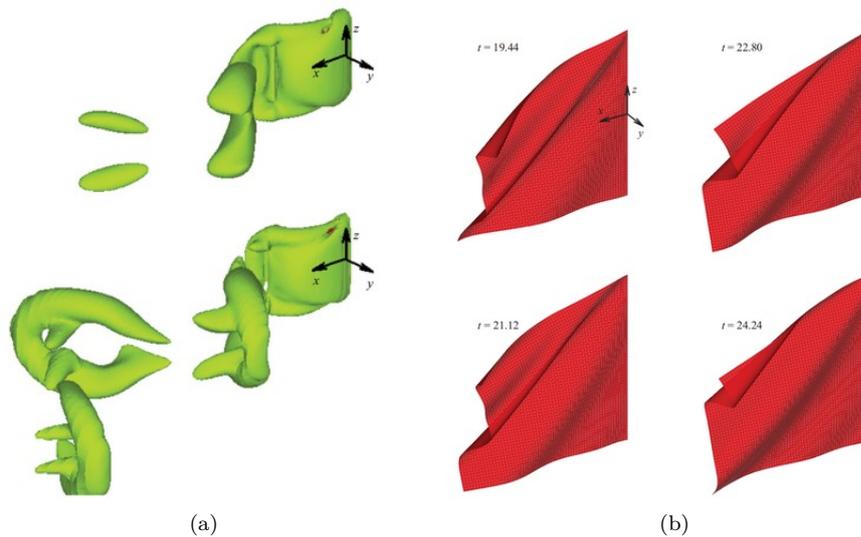


FIGURE 1.2 – Battement d'un drapeau à différents instants. (a) Isocontour de vorticité (sans gravité), en haut le fluide est deux fois plus visqueux qu'en bas. (b) Surface du drapeau (avec gravité) HUANG et SUNG [41].

drapeau commence à battre, le sillage adopte un comportement oscillatoire. Des structures tourbillonnaires sont alors produites de façon périodique comme la figure 1.2a le suggère. Des tourbillons en forme de tête d'épingle peuvent être produits par le battement du drapeau. La prise en compte de la gravité rompt la symétrie haut-bas du drapeau et de l'écoulement. Une onde traverse le drapeau en diagonale, résultat d'un fort couplage entre la déformation de la membrane et l'écoulement fluide.

Une belle illustration d'interaction fluide-structure est la locomotion animale. Les insectes possèdent des ailes qui se déforment sous l'action du fluide environnant. Les libellules sont capables d'accélération impressionnante, dépassant deux fois l'accélération de la pesanteur. Elles sont capables d'effectuer des vols en marche avant et arrière, des saltos, mais aussi de faire du surplacé dans un courant d'air. Pour comprendre comment cet insecte possède de telles aptitudes au vol, des équipes ont simulé numériquement l'écoulement autour de l'insecte (figure 1.3). L'objectif de telles études est d'analyser la mécanique des différentes

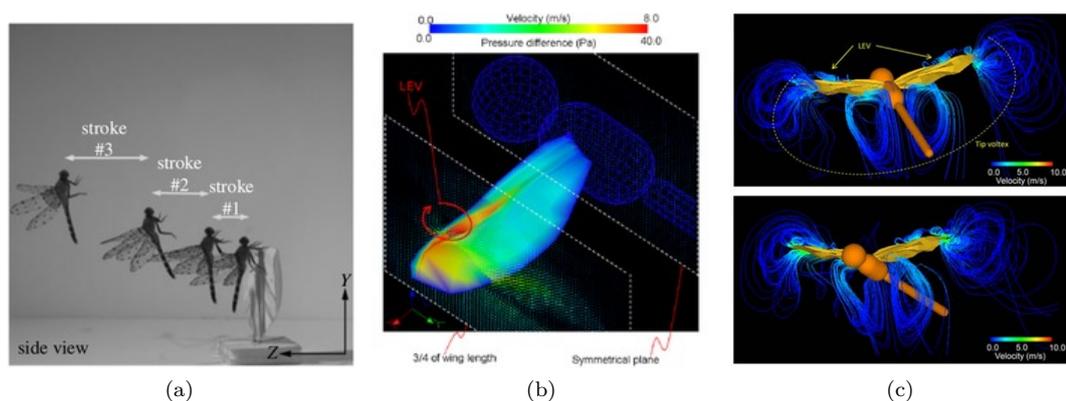


FIGURE 1.3 – Différentes études du vol de libellules. (a) Instantanés de libellule reculant, BODE-OKE et al. [12]. (b) Écoulement autour d'une aile déformable de libellule, HAMAMOTO et al. [35]. (c) Simulation du vol d'une libellule battant une paire d'ailes flexibles sous deux angles de vue différents, HAMAMOTO et al. [36]

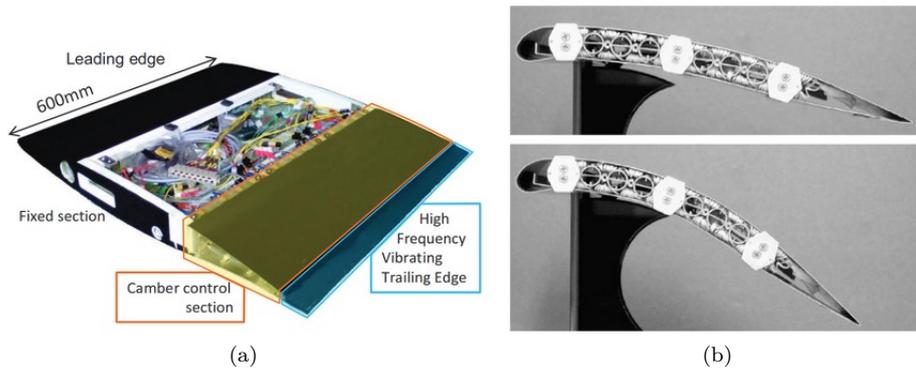


FIGURE 1.4 – Différentes études du vol de libellules. (a) Aile modifiant sa géométrie, ELZEY et al. [28]. (b) Aile dont l'extrémité est composée d'actuateurs afin de réduire la production de tourbillons dans le sillage, JODIN et al. [44].

phases du vol et l'influence de la flexibilité des ailes et de l'insecte en vue d'imiter la nature pour créer des micro-drones ailés.

Les déformations peuvent aussi être vues de façon active : en les contrôlant, il est possible de modifier l'écoulement les entourant. Le domaine aéronautique essaie de tirer parti de cela en créant des ailes à géométrie variable. Ainsi, modifier la forme des ailes d'un avion en vol ou même effectuer un contrôle actif de l'écoulement (en faisant vibrer le bord de fuite) permettrait des économies de carburant. Des ailes modulables ont ainsi été conçues (voir figure 1.4). Ce type d'aile s'adapterait aux différentes phases de vol. L'aviation du futur est intéressée par des déformations continues des ailes plutôt que l'utilisation de volets. Le bord de fuite pourrait se déformer et remplacerait le volet, évitant l'apparition d'angles brusques sur l'aile qui produisent de la turbulence.

La création de valves aortiques constitue un autre exemple d'application de cette classe de problèmes. Cette valve est naturellement déformable, non musculaire, sans innervation ni irrigation sanguine, avec une constitution similaire à celle du cartilage articulaire. L'idée est de produire des valves de remplacement en cas de dysfonctionnement. Située à la sortie

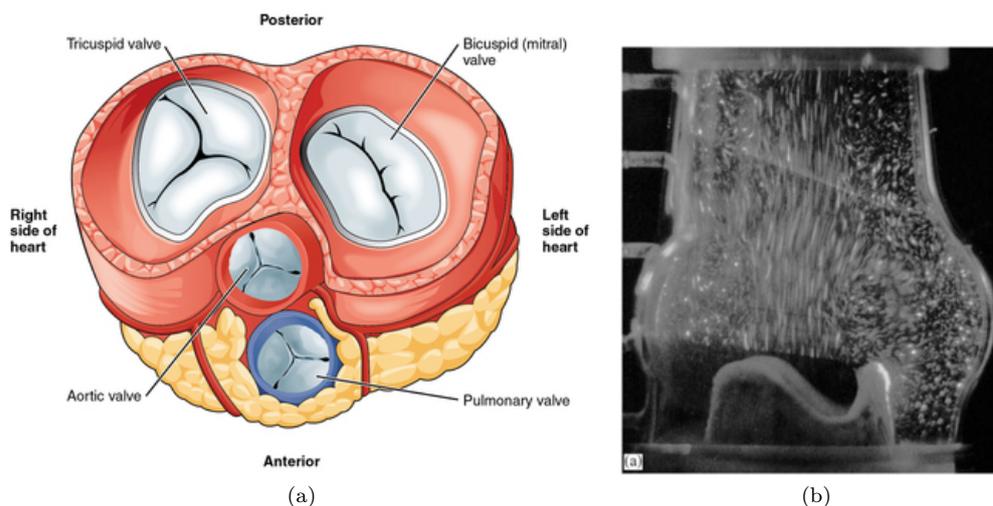


FIGURE 1.5 – (a) Valves du cœur humain, celle de l'aorte est au centre, Wikipédia. (b) *PIV* de l'écoulement pulsé à travers une valve porcine (en bas de l'image) dans un tube possédant la forme de l'aorte à la sortie du cœur.

du cœur (voir figure 1.5a), la valve aortique évite le reflux du sang dans ce dernier. Elle est composée de trois lobes en demi-lune nommés cuspides. Lorsque le cœur se contracte, la pression augmente et la valve s'ouvre, libérant le sang. Ensuite il se gonfle et la valve se referme, empêchant le sang de refluer à l'intérieur. Certaines pathologies nécessitent le remplacement de cette valve. Il est alors nécessaire de comprendre son fonctionnement en vue de la recréer artificiellement (YOGANATHAN et al. [81][82]). Des expériences ont été menées afin de visualiser l'écoulement à la sortie du cœur grâce à des techniques de vélocimétrie par imagerie de particules (*PIV*), figure 1.5b. Sur cette figure, la valve est visible en bas de l'image en position ouverte et le flux sanguin va du bas vers le haut. On remarque des structures tourbillonnaires dans l'aorte. Plusieurs designs de prothèse existent ; la *PIV* permet de visualiser comment ils impactent l'écoulement à la sortie du cœur.

L'étude de l'écoulement sanguin est utile à la compréhension du transport de nutriments et d'oxygène dans l'organisme. Pour comprendre comment les globules rouges réussissent à circuler dans les vaisseaux capillaires dont le diamètre est du même ordre que celui du globule (environ  $4\mu m$ ), il faut analyser la façon dont ils se déforment pour passer à l'intérieur (voir figure 1.6b). POZRIKIDIS [63] propose un modèle pour les globules rouges : une membrane élastique encapsulant un fluide, plongée dans un fluide d'une viscosité différente. Son modèle prédit la forme d'équilibre biconcave. L'écoulement cisailant qu'il impose au globule le fait osciller entre la forme d'équilibre et une forme en *S* observée expérimentalement (voir figure 1.6a). Cette configuration est plus complexe que celle du drapeau car il faut considérer une membrane et deux fluides. Le premier est le fluide externe, il correspond au plasma sanguin. Le second est le fluide constituant le globule rouge ; il n'entre pas en contact avec le fluide extérieur.

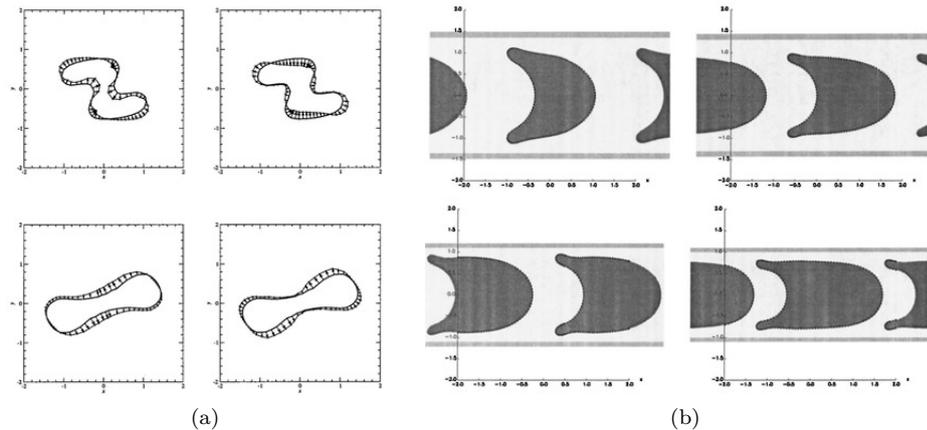


FIGURE 1.6 – Simulations numériques : (a) globule rouge déformé par un écoulement cisailant, POZRIKIDIS [63] et (b) globules rouges circulant dans deux capillaires de tailles différentes, POZRIKIDIS [64].

## 1.2 GOUTTES ET ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE

La surface déformable peut aussi être matérialisée par une interface délimitant deux phases, que celles-ci soient liquides ou gazeuses. Dans ce cas, c'est un problème d'interaction fluide-fluide ou un problème à surface libre si la viscosité et la masse volumique de l'une des phases sont négligeables. La dynamique de la surface est contrôlée par l'équilibre entre le saut des contraintes entre les deux phases et les forces capillaires présentes à l'interface.

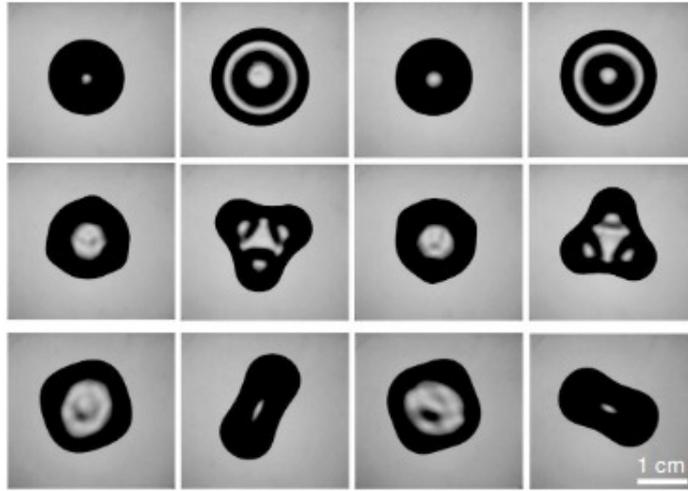


FIGURE 1.7 – Oscillations d’une goutte posée sur une plaque vibrante. Chaque ligne correspond à un mode d’oscillation différent. Les images d’une même ligne sont séparées d’une demi-période d’excitation de la plaque vibrante. Issu de NOBLIN et al. [60].

Une goutte posée sur une plaque vibrée peut ainsi être vue comme une configuration possédant une surface déformable, l’interface fluide-air constituant cette surface. NOBLIN [61] a étudié ce type de problème. Il fait vibrer une goutte posée sur plaque et observe comment celle-ci oscille. Différents modes d’oscillation sont observés dont certains sont représentés sur la figure 1.7. Ces modes présentent des topologies similaires aux modes propres d’une goutte sphérique (voir PROSPERETTI [65]). Dans cette expérience il faut noter la présence d’une ligne triple. Elle peut glisser sur le substrat ou être fixe, suivant les modes d’oscillation.

Un autre phénomène fascinant est la formation de surfaces polygonales sur un fluide en rotation. Un fluide est entraîné par le fond tournant d’un réservoir à moitié rempli. La surface du fluide adopte alors des formes polygonales tournantes (voir figure 1.8a). La force centrifuge expulse le fluide vers le bord du réservoir et un démouillage est observé sur le fond. La surface sèche présente alors une géométrie polygonale tournant de façon rigide (voir figure 1.8b). Plus la rotation est importante, plus le polygone possède de côtés. Une analyse de stabilité linéaire a été menée par MOUGEL et al. [56] dans le cas potentiel pour analyser dans quel contexte une rupture de symétrie se produit, conduisant à de telles géométries de surface. Elle indique que le mécanisme donnant lieu à l’apparition des polygones tournants provient d’une résonance entre des ondes de gravité et des ondes centrifuges. Les expériences et l’analyse de stabilité linéaire sont en bon accord sur les zones d’existence de ces polygones

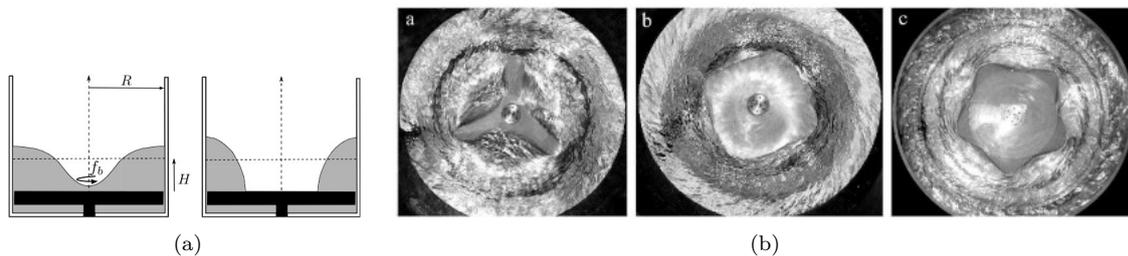


FIGURE 1.8 – (a) Schéma en coupe verticale de l’installation à fond tournant. La partie tournante est en noir, à gauche est représenté le cas *mouillé* et à droite le cas *démouillé*, MOUGEL [55]. (b) Surface polygonale observée dans un réservoir cylindrique dont le fond entraîne un fluide newtonien, expérience de JANSSON et al. [43].

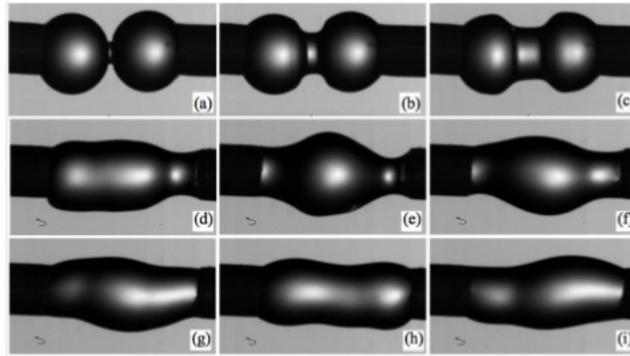


FIGURE 1.9 – Clichés de la coalescence de deux gouttes à plusieurs instants, CHIREUX et al. [18].

et leurs fréquences.

De la coalescence de deux gouttes tenues par un disque résulte la création d'un pont liquide. La perturbation créée par la coalescence fait osciller le pont liquide. Ce phénomène a été étudié expérimentalement et théoriquement par CHIREUX et al. [18] (voir figure 1.9). Les oscillations sont amorties et le pont liquide atteint une forme d'équilibre stable. D'autre part, dans le même article, une analyse de stabilité linéaire globale a été conduite sur la forme d'équilibre stable pour un fluide non visqueux. Les fréquences et les modes propres du pont liquide données par la théorie linéaire et les expériences concordent. Les différents modes d'oscillation ont été retrouvés en considérant différentes symétries du problème. Cependant, l'analyse de stabilité prédit uniquement les fréquences et modes propres ; en revanche les taux d'amortissement ne sont pas accessibles à la théorie non visqueuse.

GALLINO et al. [31] ont caractérisé l'état d'équilibre instable d'une goutte dans un champ d'étirement élongationnel en conditions de Stokes. La goutte est étirée par l'écoulement et au-delà d'une certaine intensité, elle se rompt. Il existe un état instable où les forces capillaires et visqueuses se compensent. Cet état délimite le bassin d'attraction de la solution stationnaire et celui de la solution instationnaire conduisant à la rupture de la goutte. Ces deux états sont représentés sur la figure 1.10.

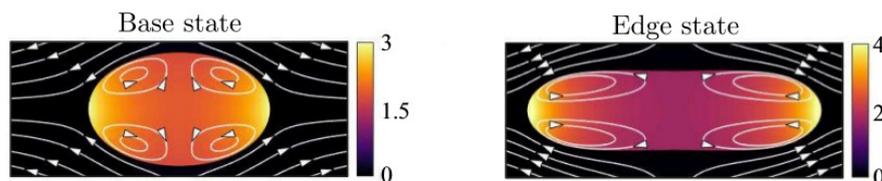


FIGURE 1.10 – État de base (à gauche) correspond à l'état d'équilibre stable et état marginal (*Edge state*, à droite) correspondant à l'état d'équilibre instable, GALLINO et al. [31].

### 1.3 BULLES EN ASCENSION

Les instabilités de trajectoire, de sillage et de forme, de bulles en ascension sous l'effet de la gravité font partie de cette classe de problème d'écoulement possédant une surface déformable.

Il est connu depuis longtemps qu'une bulle en ascension dans de l'eau peut exhiber une trajectoire en zigzag ou hélicoïdale. Au début du XVI<sup>e</sup> siècle, Léonard de Vinci reporte, dans ses manuscrits cryptés, des observations de ce phénomène accompagnées de commentaires (voir figure 1.11). Et ce phénomène questionne toujours les scientifiques. Pourquoi une bulle

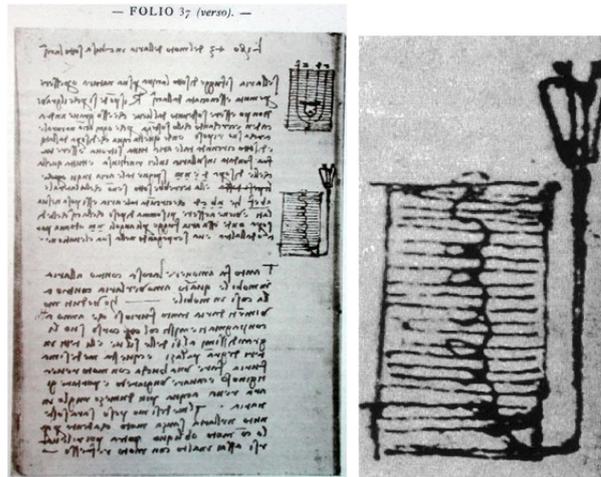


FIGURE 1.11 – Fac-similé d'une page de manuscrit de Léonard de Vinci (à gauche) avec un agrandissement représentant un schéma de la trajectoire hélicoïdale d'une bulle en ascension (à droite).

adopte-t-elle un telle trajectoire quand elle remonte dans l'eau ? Les causes ont longtemps été sujettes à débat (MAGNAUDET et EAMES [49]).

Répondre à cette question pose de sérieux problèmes techniques. La propreté de l'interface joue un rôle crucial dans la dynamique de la bulle. Les molécules d'eau sont polarisées en raison de l'agencement asymétrique entre les atomes d'hydrogène et d'oxygène. Compte tenu de cette polarisation, des impuretés (tensioactifs) naturellement présentes dans l'eau ont tendance à se concentrer à l'interface car celles-ci présentent à la fois un site hydrophile et un site hydrophobe (voir figure 1.12). Ces tensioactifs se retrouvent piégés et diminuent la tension superficielle du couple liquide-gaz. Ils peuvent même engendrer des gradients de tension superficielle qui créent des effets Marangoni, induisant un cisaillement à la surface de la bulle. L'interface polluée de la bulle est alors tangentielle plus rigide : la condition dynamique à l'interface change. Pour une interface sans tensioactif, le fluide glisse le long de l'interface, si la viscosité du gaz est négligée. En revanche, en présence de tensioactifs, le fluide adhère à l'interface. Les tensioactifs sont emportés par l'écoulement et s'accumulent à l'arrière de la bulle. La forme de la bulle, sa vitesse d'ascension et le seuil d'apparition des trajectoires oscillantes sont alors grandement modifiés par les tensioactifs.

Beaucoup d'études ont été menées sur ce phénomène durant la deuxième partie du XX<sup>e</sup> siècle. Parmi les premières, celles de SAFFMAN [71], HARTUNIAN et SEARS [37] et AYBERS et TAPUCU [6][5] ont permis de documenter les trajectoires hélicoïdales et en zigzag que les bulles peuvent emprunter. L'étude théorique de MOORE [54] donne une prédiction de

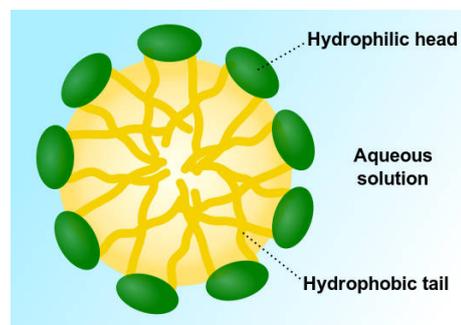


FIGURE 1.12 – Schéma illustrant les tensioactifs sur une interface, Wikipédia

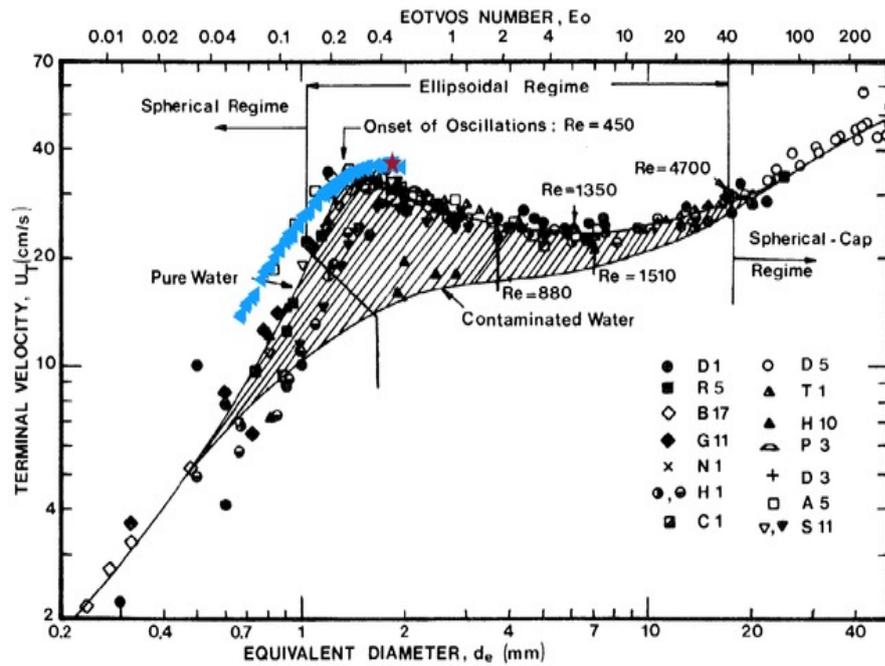


FIGURE 1.13 – Graphe donnant la vitesse terminale de bulles dans de l’eau à  $20^{\circ}C$ , CLIFT et al. [20] sur lequel a été ajouté : ( $\blacktriangleleft$ ) correspondant aux données de DUINEVELD [26] et ( $\star$ ) au seuil d’apparition de l’instabilité de sillage ( $D = 1.82\text{ mm}$ ,  $U_T = 36.37\text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $Re \approx 660$ ) avec de l’eau ultra-pure à la même température.

la vitesse terminale d’une bulle en fonction de son rapport de forme pour une géométrie ellipsoïdale, la bulle étant supposée en mouvement rectiligne. L’ouvrage de CLIFT et al. [20] condense une grande partie de ces études. Dans cet ouvrage, de nombreux résultats expérimentaux sont collectés et une courbe donnant la vitesse d’ascension de la bulle en fonction de son diamètre est donnée pour de l’eau contaminée et de l’eau pure, figure 1.13. Les travaux de DUINEVELD [26] (suivis de SANADA et al. [72] et SATO [73]) ont largement remis en question les résultats concernant l’eau pure. En effet, DUINEVELD [26] est le premier à utiliser une méthode permettant d’obtenir une eau ultra-pure, dont la résistance est de  $18.2\text{ M}\Omega \cdot \text{cm}$ . Les résultats de ses expériences révèlent alors une vitesse d’ascension largement supérieure aux données de la littérature existante à cette époque. La contamination de l’interface diminuant drastiquement cette vitesse, il est le premier à effectuer cette expérience avec une interface propre. La figure 1.13 permet de comparer les résultats des expériences de DUINEVELD [26] avec ceux reporté dans [20]. Pour le seuil déclenchement de l’instabilité de trajectoire, la différence est frappante, avec une erreur relative de 32%. Même si le mouvement oscillant de la bulle n’est pas beaucoup affecté par une légère pollution de l’interface qui s’accumule à l’arrière (BEL FDHILA et DUINEVELD [10] et TASOGLU et al. [74]), le seuil d’apparition des trajectoires non rectilignes est lui très sensible à cette pollution. RYSKIN et LEAL [68][69][70] ont abordé les premiers les écoulements visqueux autour de bulles déformables par des simulations numériques axisymétriques. Dans [69], ils étudient les effets de la viscosité et de la tension de surface et mettent en évidence la présence possible d’une zone de recirculation dans le sillage, confirmant des observations expérimentales. Pour certaines valeurs élevées de la tension de surface, ils ne parviennent pas à obtenir de solution convergée et suggèrent que l’écoulement a sûrement perdu sa symétrie axiale, en raison d’instabilités de forme ou de sillage. En se basant sur les travaux existants concernant les disques et les sphères, il est évident pour eux que le mouvement de zigzag d’une bulle, et le lâcher tourbillonnaires qui s’ensuit, nécessite la présence d’un tourbillon stationnaire attaché à la bulle. La déstabilisation de ce tourbillon serait le moteur de l’instabilité de trajectoire.

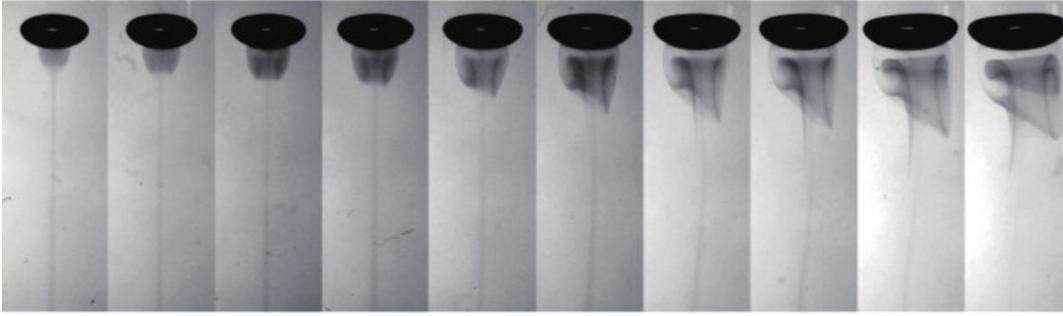


FIGURE 1.14 – Bulles de différentes tailles en ascension dans une huile de silicone. Le sillage est visualisé grâce à un colorant photochromique. Les quatre premières ont une trajectoire rectiligne et les six dernières ont une trajectoire tridimensionnelle. Images issues de SATO [73].

Depuis que l'importance de la pureté de l'eau a été reconnue, plusieurs séries de travaux expérimentaux ont porté sur le seuil d'apparition du mouvement oscillant de la bulle. Nous pouvons citer DE VRIES et al. [22][21], SANADA et al. [72], ZENIT et MAGNAUDET [83][84] et SATO [73]. La figure 1.14 montre des sillages correspondant à des trajectoires stationnaires et instationnaires visualisés grâce à des colorants [73]. DE VRIES [21] utilise une technique de Schlieren pour révéler le sillage : un gradient vertical de température est présent dans la cuve pour que l'indice de réfraction de l'eau varie avec la hauteur, ce qui ajoute une incertitude vis-à-vis de l'effet de la température. En croisant ses résultats avec ceux des simulations de BLANCO et MAGNAUDET [11] sur les sillages de bulles ellipsoïdales, il est le premier à noter que l'instabilité de sillage ne semble pas nécessiter la présence d'une zone de recirculation. Cela remet en cause le mécanisme de cette instabilité. Les études [83] et [73] utilisent d'autres fluides que l'eau, notamment des huiles de silicone. Ces fluides ont l'avantage de ne pas être polaires, permettant aux interfaces de rester propres. Ainsi elles renseignent sur le seuil d'apparition des trajectoires oscillantes pour des conditions bien différentes du cas de l'eau (la tension superficielle des huiles de silicone est environ quatre fois inférieure à celle de l'eau et la viscosité peut varier de plus de quatre ordres de grandeurs). ZENIT et MAGNAUDET [83][84] montrent que la forme de la bulle importe plus que le nombre de Reynolds ascensionnel de la bulle. En effet, ils notent que l'instabilité de trajectoire se produit lorsque le rapport de forme devient supérieur à une valeur critique,  $\chi \approx 2$  ( $\chi = \frac{\text{grand axe}}{\text{petit axe}}$ ). MOUGIN et MAGNAUDET [58] ont les premiers simulé l'instabilité de trajectoire d'une bulle. Ils prescrivent sa forme (un ellipsoïde de révolution), ce qui n'empêche pas la bulle d'adopter, après une phase d'accélération rectiligne, un mouvement en zigzag et enfin hélicoïdal (voir figure 1.16a). Ils expliquent que ces trajectoires permettent d'évacuer plus efficacement la vorticit e produite à la surface de la bulle. Il en découle que la déformation de l'interface n'est pas un ingrédient nécessaire aux instabilités de trajectoire. MAGNAUDET et MOUGIN [50] cartographient la stabilité du sillage de bulles ellipsoïdales fixes dans un écoulement uniforme. Ils identifient un rapport de forme critique  $\chi = 2.2$  en dessous duquel il n'y a pas d'instabilité de sillage. Au-dessus de ce seuil, le sillage axisymétrique devient instable. Il est remplacé par un sillage tridimensionnel constitué de deux tourbillons longitudinaux contrarotatifs. Dès lors, la bulle subit une force de portance. Si elle est libre de se mouvoir, sa trajectoire devient non rectiligne. Le seuil déterminé dans [50] diffère néanmoins de celui obtenu expérimentalement par DUINEVELD [26] qui trouve une bulle oscillant pour  $\chi \approx 1.9$ .

D'autres études se consacrent plus précisément à la trajectoire non rectiligne des bulles et aux oscillations de leur surface. MEIRON [52] effectue une analyse de stabilité linéaire d'une bulle déformable en ascension dans un fluide parfait et montre que les oscillations de forme sont toujours stables. Il souligne que l'anisotropie géométrique de la bulle (dès lors que la forme d'équilibre s'éloigne d'une sphère) brise les dégénérescences des harmoniques sphériques. *I.e.* les fréquences des oscillations de surface dépendent de l'orientation de celle-ci,

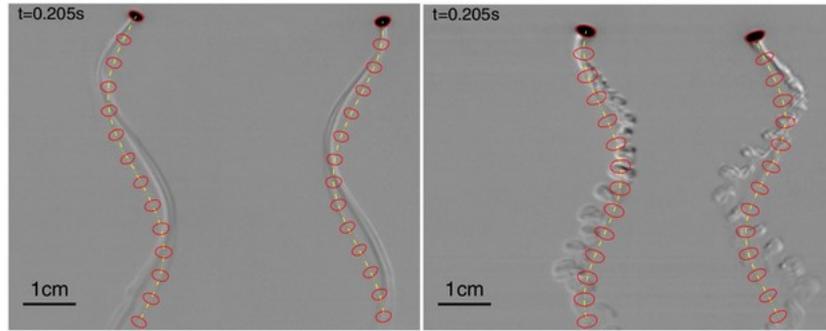


FIGURE 1.15 – Bulles montant sous l’effet de la gravité. Les deux clichés représentent chacun deux vues perpendiculaires de la même bulle au même instant. À gauche la bulle effectue une trajectoire hélicoïdale sans se déformer. À droite, la bulle a une trajectoire similaire mais présente aussi une oscillation de forme qui se traduit par des lâchers tourbillonnaires. Visualisation par Schlieren, VELDHUIS et al. [80].

contrairement au cas d’une bulle sphérique sans écoulement et sans gravité (PROSPERETTI [65]). ELLINGSEN et RISSO [27], LUNDE et PERKINS [48], VELDHUIS et al. [80] s’intéressent aux fréquences d’oscillation et à l’apparition de modes de forme, sans caractériser les seuils d’apparition des trajectoires non rectilignes (voir figure 1.15). Ils indiquent que les oscillations de surface possèdent deux cercles nodaux, tous deux horizontaux ou verticaux. Ils notent que le cas axisymétrique, avec deux cercles nodaux verticaux, apparaît préférentiellement. Pour une bulle montant dans la direction de son axe de révolution, cela correspond à un nombre d’onde principal  $l = 2$  et un nombre d’onde azimutal  $m = 0$  dans la nomenclature des harmoniques sphériques. Ils observent aussi des oscillations de surface  $l = 2$ ,  $m = 2$ , c’est à dire avec deux cercles nodaux verticaux. Pour l’eau pure, les oscillations de surface  $l = 2$ ,  $m = 0$  sont couplées avec un lâcher tourbillonnaire, ce qui n’est pas le cas lorsque l’interface est polluée par des tensioactifs.

Dans la continuité des travaux [50], TCHOUFAG et al. [76] ont effectué une analyse de stabilité globale d’une bulle ellipsoïdale fixe dans un écoulement uniforme qui révèle deux modes instables. Le premier à se déstabiliser est stationnaire et le second est oscillant. Son seuil d’apparition coïncide avec les simulations numériques de MAGNAUDET et MOUGIN [50]. Ils observent le *wavemaker* dans la configuration de la bulle fixe. Sa distribution mène à penser que la zone clef de l’instabilité est située au sein du tourbillon stationnaire attaché à la bulle. TCHOUFAG et al. [78] effectuent une nouvelle analyse de stabilité dans laquelle les degrés de liberté de déplacement et de rotation de la bulle sont ajoutés. Ils observent que la déstabilisation du système couplé fluide-bulle se déroule la plupart du temps à travers une bifurcation de Hopf qui aboutit à un mode oscillant à haute ou basse fréquence selon les cas. Le problème libre est plus riche que le précédent où la bulle est fixée. Ils ne réussissent néanmoins pas à établir une correspondance directe avec les expériences ou les simulations numériques directes car le rapport de forme et le nombre Reynolds ne peuvent pas être fixés indépendamment dans un fluide réel. CANO-LOZANO et al. [14] ont mené une simulation numérique directe de bulles de formes fixes mais réaliste en ascension dans un fluide au repos. L’interface est considérée sans tensioactif, avec une condition de cisaillement nul appliquée à la surface de la bulle. Ils cartographient les formes axisymétriques et stationnaires de bulles et leurs vitesses ascensionnelles pour une grande gamme de viscosités et tensions de surface. Ils obtiennent une courbe neutre donnant la transition entre le mouvement rectiligne et le zig-zag qui est en bon accord avec les résultats expérimentaux pour les fluides les plus visqueux. En revanche, ce n’est pas le cas pour les fluides peu visqueux, tel que l’eau ou certaines huiles de silicone. Ils déterminent aussi les paramètres nécessaires à l’apparition d’une zone de recirculation derrière la bulle. Ils confirment ainsi que cette zone de recirculation n’est pas nécessaire à l’apparition de l’instabilité de trajectoire. Ces travaux viennent compléter

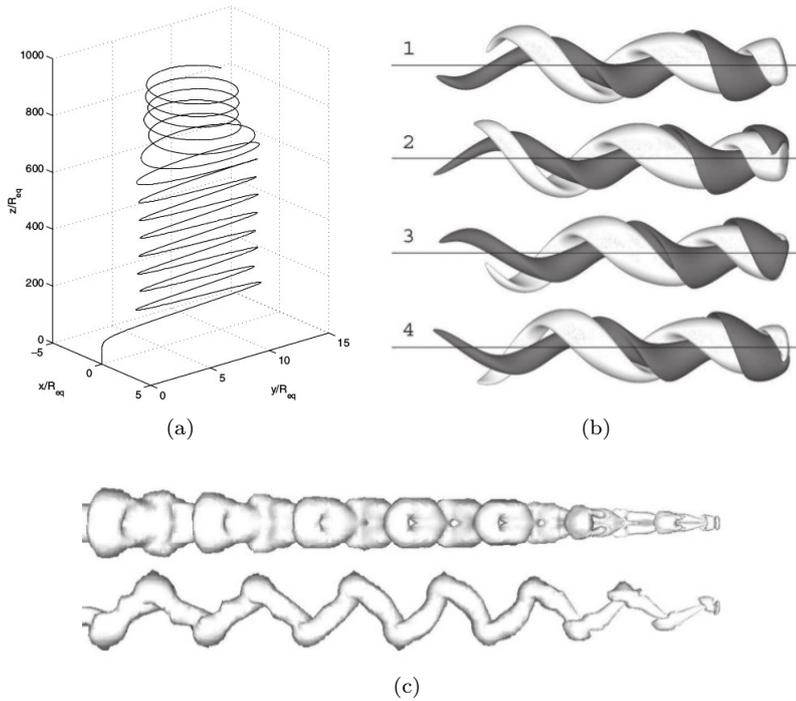


FIGURE 1.16 – (a) Trajectoire d’une bulle montrant une trajectoire rectiligne puis en zigzag et enfin hélicoïdale, simulation de MOUGIN et MAGNAUDET [58]. (b) Isocontour de vorticité à quatre instants pour une bulle décrivant une trajectoire hélicoïdale, simulation de CANO-LOZANO et al. [16]. (c) Critère  $\lambda_2$  révélant la forme du sillage dans deux plans perpendiculaires lors d’une trajectoire en zigzag, simulation de CANO-LOZANO et al. [16].

ceux de MAGNAUDET et MOUGIN [50], en considérant la bulle comme mobile et prenant en compte la rupture de symétrie avant-arrière. Afin de compléter ces résultats et de tenter d’expliquer les différences avec les expériences pour les cas faiblement visqueux, CANO-LOZANO et al. [15] effectuent une analyse de stabilité globale à la manière que [76] et [78] mais en considérant une forme de bulle rigide avec une asymétrie avant-arrière. Les résultats s’en trouvent améliorés mais les différences avec les expériences sont toujours importantes. Pour une bulle fixe, ils concluent que la prise en compte de l’asymétrie de la bulle a un effet stabilisant. Mais aucune différence n’est observable pour les fluides les plus visqueux. Pour les bulles libres, ils observent aussi le même caractère globalement stabilisant de l’asymétrie de la géométrie de la bulle. Les résultats expérimentaux et les simulations numériques directes sont néanmoins toujours loin des résultats de cette étude. CANO-LOZANO et al. [16] utilisent la simulation numérique directe pour approcher les seuils d’instabilité du même problème et étudier les trajectoires non rectilignes des bulles. Plusieurs trajectoires sont mises en évidence : zigzag, hélicoïdes, hélicoïdes aplaties, chaotiques. Et les combinaisons de trajectoires sont nombreuses. Il est possible de passer d’un mouvement de zigzag à une hélicoïde ou vice versa.

## 1.4 CONTEXTE ET MÉTHODES

### 1.4.1 Contexte

Ce travail s’inscrit dans la lignée des travaux de MOUGIN et MAGNAUDET [58] et MAGNAUDET et MOUGIN [50] qui ont étudié les bulles en ascension via des simulations numériques directes de bulles indéformables. Ces travaux ont été complétés par TCHOUFAG et al. [76][78] grâce à des analyses de stabilité linéaire globale de bulles ellipsoïdales indéformables fixes

ou en ascension libre. CANO-LOZANO et al. [15] ont ensuite enrichi ces études de stabilité en considérant des formes de bulles réalistes mais rigides. Ils ont ainsi tenu compte de l'asymétrie avant-arrière des bulles causée par les effets visqueux. Cependant les résultats de ces analyses de stabilité ne sont pas en bon accord avec les expériences ni avec les simulations numériques directes. Or, l'ingrédient important qui n'a pas été inclus dans ces analyses est la possible déformation de la bulle en réponse aux perturbations de l'écoulement. C'est pourquoi nous cherchons ici à développer une analyse de stabilité linéaire globale de bulles déformables afin d'appréhender le rôle des déformations sur les caractéristiques des instabilités des bulles en ascension. De manière générale, l'approche de stabilité linéaire globale fournit les caractéristiques des premiers modes instables du système : seuil, fréquence, taux d'amplification, structure spatiale. Ces caractéristiques sont celles qui sont observées dans l'évolution du système réel si la perte de stabilité a lieu via une bifurcation supercritique. L'analyse étant linéaire, les mécanismes sous-jacents sont plus accessibles que dans les simulations numériques directes qui intègrent l'ensemble des non-linéarités du problème. La contrepartie est que les résultats ne sont valables qu'en-dessous et au voisinage immédiat du seuil de stabilité. Au-dessus de ce seuil, tout en restant proche, l'analyse de stabilité reste correcte aux temps courts. De plus, la recherche de valeurs et modes propres est peu coûteuse en ressources numériques, conférant un avantage non négligeable à l'approche linéaire face aux simulations numériques directes.

#### 1.4.2 Méthodes numériques utilisées

Ce travail s'appuie sur deux pans méthodologiques : l'analyse de stabilité linéaire globale et les formulation *ALE* (Arbitrairement Eulerien et Lagrangien). Notre méthode présente des similarités avec celles de HERRADA et MONTANERO [39] et ALBERT et al. [1]. Les premiers effectuent une analyse de stabilité globale d'un jet capillaire grâce à un formalisme *ALE* et une méthode spectrale. Les seconds étudient la stabilité globale de films fluides tombants avec un formalisme *ALE* et un solveur en volumes finis.

Les méthodes de stabilité globale ont été développées par notre équipe au travers des travaux de ASSEMAT et al. [4] et de TCHOUFAG et al. [76][77][78] qui utilisent les éléments finis. Nous les utiliserons via le même logiciel de calcul décrit plus bas.

D'autre part, la méthode *ALE* ( HUGHES et al. [42], DONEA et al. [24]) permet de considérer des objets déformables dans un écoulement. Dans le cadre de cette méthode, les objets étudiés (une bulle dans notre contexte) sont délimités par une frontière du domaine de calcul. Le formalisme *ALE* autorise cette frontière à se déplacer : les mouvements de l'objet sont décrits de manière lagrangienne. Le fluide est en revanche traité de manière eulérienne. Pour faire cohabiter ces deux descriptions, les nœuds, définissant la discrétisation du domaine, doivent se déplacer pour suivre les déformations de l'objet. Ce déplacement est étendu et relaxé dans tout le domaine pour que la discrétisation reste valide. La relaxation dans le domaine est arbitraire car seul le déplacement de la frontière est physique. Le mouvement du fluide se décrit alors sur un domaine mouvant dont les nœuds peuvent se déplacer les uns par rapport aux autres. Il est donc nécessaire de prendre en compte les déplacements nodaux dans les équations fluides du problème pour qu'elles en restent indépendantes.

D'un point de vue mathématique, cela implique qu'un *mapping* (application bijective) entre deux domaines doit être utilisé. Le premier domaine est dit de référence ou de calcul ; c'est celui sur lequel les équations sont résolues. Le second domaine est le domaine physique ou déformé, c'est le domaine réel. Grâce à une application bijective, il est donc possible de transposer le problème défini sur un domaine déformé vers un domaine de référence sur lequel les calculs sont effectués.

Dans le cas d'écoulement à surface déformable, la condition dynamique fait apparaître les effets capillaires à travers la pression de Laplace. Cela est par exemple discuté par BÄNSCH [7], BARRETT et al. [8] et GANESAN et TOBISKA [32] qui en proposent différentes discrétisa-

tions.

La méthode *ALE* permet de coupler efficacement les déformations d'un objet avec l'écoulement fluide. De plus, le contour de l'objet est défini par la position de certains nœuds de la discrétisation du domaine. Cela confère à ce déplacement une précision supérieure à celle obtenue avec les autres méthodes numériques utilisées pour décrire les écoulements diphasiques (frontières immergées - *IBM*, Volumes de fluide - *VoF*, *Level Set*) qui nécessitent la reconstruction de la géométrie des interfaces (et notamment de leur courbure) via des interpolations.

#### 1.4.3 Le logiciel utilisé : *FreeFem++*

Nous utilisons le logiciel *open source FreeFem++*[38]. Ce logiciel est basé sur la méthode des éléments finis (*Finite Element Method* ou *FEM*) et est écrit en *C++*. Il possède son propre langage de script inspiré du *C++* qui permet de réaliser plusieurs objectifs :

- Créer des maillages 2D automatiquement grâce au logiciel *bamg* intégré. Il est basé sur un algorithme de Delaunay-Voronoi. La densité des points est proportionnelle à celle des contours de la géométrie. Les contours sont définis via des courbes paramétrées.
- Transposer les formulations variationnelles continues en un problème matriciel discret en utilisant la méthode des éléments finis sur la triangulation que constitue le maillage. Le choix de la discrétisation revient au choix des fonctions de base et de leurs degrés d'interpolation (P1, P2, P3, *etc.*).
- Résoudre les systèmes linéaires créés à partir des formulations variationnelles.
- Résoudre des problèmes aux valeurs propres (*e.g.*  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{u}$ ) avec une méthode de projection de type Krylov-Shur de la librairie *SLEPc* intégrée à *FreeFem++*.

Cette liste n'est nullement exhaustive. De nombreux exemples sont donnés sur le site internet (<https://freefem.org/>) et dans la documentation dédiée au logiciel.

## 1.5 PLAN DE LA THÈSE

Outre l'introduction qui précède, cette thèse est constituée de cinq chapitres. À travers plusieurs étapes, les chapitres 2 à 4 mènent progressivement à l'analyse de stabilité globale d'une bulle déformable en ascension faite au chapitre 5.

Le chapitre 2 étudie les oscillations linéaires d'une bulle ou d'une goutte au repos et sans gravité. Une méthode d'éléments finis est utilisée et une analyse de stabilité globale permet d'obtenir les oscillations linéaires dans ces deux configurations. Les résultats sont comparés aux solutions analytiques de PROSPERETTI [65]. Le bon accord avec la théorie permet de s'assurer que la dynamique de l'interface est bien décrite par notre code de stabilité dans un cadre simplifié (sans écoulement de base ni gravité).

Le chapitre 3 présente la façon dont nous cherchons à coupler les oscillations de surface avec le champ fluide. En effet, la bulle étant définie par une frontière du domaine, une oscillation de cette dernière déforme le domaine. Avant d'appréhender les difficultés à résoudre dans le cadre des équations de Navier-Stokes, nous étudions une équation modèle : l'équation de Poisson. Le but est d'obtenir la solution de cette équation sur un domaine déformé en se rapportant à un domaine de référence et à la relation entre ces deux domaines. Les distorsions du domaine déformé sont prises en compte grâce à un *mapping* de ce dernier sur le domaine de référence. Ces distorsions sont considérées faibles. L'équation de Poisson est alors linéarisée sur le domaine de référence par le biais du *mapping*. Afin d'obtenir la solution sur le domaine déformé, il faut procéder en deux étapes. Il est tout d'abord nécessaire de résoudre l'équation de Poisson sur le domaine de référence (*i.e.* les distorsions du domaine

déformé sont négligées). Dans un second temps, on calcule la correction qu'il faut apporter à cette solution pour obtenir la solution sur le domaine déformé (*i.e.* prenant en compte les distorsions de ce domaine). Une validation de cette procédure est alors proposée.

Le chapitre 4 met en application la méthode développée au chapitre précédent pour le cas de bulles. L'approche concernant la dynamique de l'interface est tirée du chapitre 2 avec l'opérateur de Stokes. La méthode de changement de domaine du chapitre 4 est aussi adoptée. Ainsi une méthode permettant de linéariser les équations de Navier-Stokes autour d'une bulle déformable est construite. Cette approche assure un couplage total entre la dynamique et la cinématique de l'interface.

Les champs de base sont obtenus grâce à une méthode de Newton. Ils permettront par la suite de mener une analyse de stabilité globale. Plusieurs cas-tests viennent valider les codes ainsi créés. Une première configuration, concernant une bulle dans un réservoir en rotation, valide l'utilisation de la méthode de Newton. L'aspect changement de domaine et l'analyse de stabilité globale sont validés grâce au cas d'une bulle piégée dans un écoulement élongationnel. Notre méthode de Newton, permettant d'obtenir les écoulements de base et les formes d'équilibre de bulles, notre code de stabilité globale se trouve alors validé numériquement.

Le chapitre 5 concentre la quasi-totalité des résultats inédits de cette thèse. Il décrit tout d'abord les écoulements stationnaires autour des bulles en ascension. Des comparaisons sont effectuées avec la littérature. Ensuite, une étude de stabilité globale est menée sur une vaste gamme de paramètres physiques (viscosité et tension de surface), donnant entre autres accès au seuil de déclenchement de l'instabilité de sillage. Ces résultats sont discutés et mis en regard avec les résultats expérimentaux et numériques connus. Puis nous étudierons plus précisément les cas de bulles en ascension dans deux fluides différents : une huile de silicone relativement visqueuse et l'eau ultra-pure à 20°C. Les spectres et les modes globaux donnent accès aux types d'instabilités présentes. La déformation de l'interface est décomposée pour comprendre la nature des mouvements qui la composent. Cette décomposition montre que les déformations de l'interface sont très faibles devant les déplacements latéraux des bulles.

Enfin, nous nous sommes intéressés au concept de *wavemaker* pour une bulle en ascension dans un liquide pur. Il permet de localiser la zone de l'écoulement où l'amplification de l'instabilité est la plus importante. Il révèle la zone clé des instabilités considérées : la région autour du maximum de courbure à la surface de la bulle, qui correspond à celle où la vorticité est la plus forte.

Le court et dernier chapitre 6 synthétise les principales conclusions méthodologiques et physiques qu'a révélées ce travail. Il esquisse également quelques perspectives en termes d'applications à d'autres systèmes et de développements d'outils.

Trois annexes techniques terminent le mémoire. L'annexe A donne les relations relatives à la linéarisation de la courbure utilisée dans les chapitres 2 et 4. L'annexe B détaille plus précisément le *mapping* et les linéarisations des écritures intégrales et des opérateurs de dérivée spatiale utilisés dans les chapitres 3 et 4. L'annexe C regroupe quelques représentations de bulles oscillant pour des modes discutés dans le chapitre 5.





OSCILLATIONS DE BULLES ET DE GOUTTES DANS UN FLUIDE  
AU REPOS SANS GRAVITÉ

---

2.1 INTRODUCTION

Ce chapitre s'intéresse à l'oscillation linéaire de bulles et de gouttes dans un fluide au repos sans gravité. Les résultats théoriques de tels problèmes sont connus, ils ont été étudiés par MILLER et SCRIVEN [53] et repris plus tard par PROSPERETTI [65]. Nous considérerons une bulle dans un fluide au repos, ayant en conséquence une forme d'équilibre parfaitement sphérique, voir figure 2.1. À l'intérieur de la bulle, la surpression par rapport à la pression extérieure est due à la capillarité. Elle est égale à  $\frac{2\gamma}{R}$ , dite pression de Laplace. Ce cas sans écoulement servira à valider le calcul des courbures et des formes d'oscillation des bulles et permettra de vérifier l'implémentation du couplage entre la surface libre et le fluide, avec les effets capillaires. Deux forces interviennent dans la dynamique de l'interface, la force capillaire qui tend à faire revenir l'interface à sa forme initiale, de façon à minimiser sa surface, et les forces visqueuses du fluide qui sont dissipatives. Les paramètres physiques associés à ce phénomène sont le diamètre de la bulle  $2R$ , la masse volumique  $\rho$ , la viscosité dynamique  $\mu$  et la tension de surface  $\gamma$ . Un nombre adimensionnel permettant de comparer ces grandeurs est le nombre d'Ohnesorge,

$$Oh = \frac{\mu}{\sqrt{2\rho\gamma R}} \quad (2.1)$$

Il correspond à un nombre capillaire,  $Ca = \frac{v\mu}{\gamma}$  basé sur une échelle de vitesse  $v = \sqrt{\frac{\gamma}{2R\rho}}$  construite avec la capillarité. En effet, les mouvements de l'interface résultent uniquement des efforts de tension superficielle, en cela cette échelle de vitesse est adaptée.

Les résultats attendus sont connus de façon analytique grâce aux auteurs cités précédemment. Les formes d'oscillations des bulles dans un fluide au repos correspondent aux harmoniques sphériques données par les polynômes de Legendre.

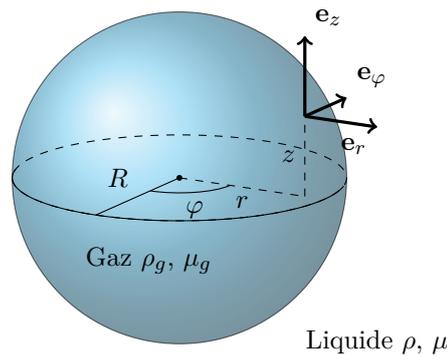


FIGURE 2.1 – Bulle sphérique dans un fluide au repos avec son repère cylindrique. Les vecteurs unitaires  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\varphi$  ne dépendent que de l'azimut et  $\mathbf{e}_z$  est uniforme dans tout l'espace.

## 2.2 FORMULATIONS DU PROBLÈME

## 2.2.1 Formulation forte et linéarisation

Ce problème consiste en l'étude d'une inclusion de gaz dans un fluide liquide au repos, sans gravité, sans tensioactifs ni effet thermique. De la sorte, il n'y a pas de poussée d'Archimède ni aucune force volumique, et de ce fait, la bulle reste immobile. Nous considérerons que la viscosité dynamique du gaz est négligeable par rapport à celle du liquide,  $\mu_g \ll \mu$  (il en est de même pour les masses volumiques  $\rho_g \ll \rho$ ). Dans cette limite de faible rapport de viscosités,  $\mu_g/\mu \ll 1$ , le cisaillement des fluides à l'interface n'induit aucune vitesse. Cela implique aussi que le déplacement de l'interface ne peut être que normal à celle-ci. En effet, aucune force tangente à l'interface ne vient s'exercer sur celui-ci (pas d'effet Marangoni), donc aucun déplacement tangent ne peut exister. En conséquence, le champ de vitesse n'est pas résolu dans la bulle et la pression est considérée comme étant uniforme. L'écoulement est supposé incompressible, le mode d'oscillation sphérique faisant varier le volume sera inhibé mais cela ne change rien à l'apparition des autres modes – ceux-ci conservant le volume. Par ailleurs, il résulte de ces hypothèses que la pression interne de la bulle ne variera pas et restera égale à la pression de Laplace.

**Remarque :** Il serait possible de prendre en compte les variations de volume dans la bulle en ajoutant une équation reliant la pression de la bulle au rayon de celle-ci grâce à l'équation de Rayleigh-Plesset ou une linéarisation de celle-ci. Mais ce n'est pas l'objet de cette étude. Ici, nous cherchons à valider le code de stabilité permettant de s'assurer de l'implémentation correcte des termes de courbure et du couplage entre le déplacement de l'interface et la vitesse fluide autour de la bulle.

Ce problème est régi par les équations Navier-Stokes incompressibles, le contour de la bulle est matérialisé par  $\Gamma_b$  :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \Sigma \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.3)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial t} \right|_{\Gamma_b} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (2.4)$$

$$\Sigma \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_b} + p_b \mathbf{n} = \gamma \kappa \mathbf{n} \quad (2.5)$$

avec le tenseur des contraintes dans le fluide

$$\Sigma = -pI + \mu \left( \nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} \right) = -pI + 2\mu D(\mathbf{u}) \quad (2.6)$$

Aussi, seront notés :

$I$  – le tenseur identité

$D$  – le tenseur des déformations

$\mu$  – la viscosité dynamique,

$p_b$  – la pression à l'intérieur de la bulle,

$\mathbf{x}_s$  – la position de l'interface liquide-gaz,

$\kappa$  – la somme des courbures principales de l'interface,

$\gamma$  – la tension superficielle.

Pour étudier linéairement la bulle au repos, il faut linéariser les équations de Navier-Stokes ainsi que leurs conditions aux limites (2.2-2.5). Considérant la symétrie du problème,

les solutions peuvent être recherchées sous la forme de modes normaux. Cela donne une décomposition pour les vitesses, pression, courbure et déplacement normal de la forme :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(r, \varphi, z, t) &= \epsilon \hat{\mathbf{u}}_1(r_0, z_0) e^{\lambda t + im\varphi_0} && + O(\epsilon^2) + c.c. \\
p(r, \varphi, z, t) &= p_0(r_0, z_0) + \epsilon \hat{p}_1(r_0, z_0) e^{\lambda t + im\varphi_0} && + O(\epsilon^2) + c.c. \\
\kappa(r, \varphi, z, t) &= \kappa_0(r_0, z_0) + \epsilon \hat{\kappa}_1(r_0, z_0) e^{\lambda t + im\varphi_0} && + O(\epsilon^2) + c.c. \\
\mathbf{n}(r, \varphi, z, t) &= \mathbf{n}_0(r_0, z_0) + \epsilon \hat{\mathbf{n}}_1(r_0, z_0) e^{\lambda t + im\varphi_0} && + O(\epsilon^2) + c.c. \\
\mathbf{x}_s(r, \varphi, z, t) &= \mathbf{x}_{s0} + \epsilon \hat{\eta}(r_0, z_0) e^{\lambda t + im\varphi_0} \mathbf{n}_0(r_0, z_0) + O(\epsilon^2) + c.c. && (2.7) \\
p_b(t) &= p_{b0} + c.c.
\end{aligned}$$

où  $c.c.$  désigne le complexe conjugué. Les grandeurs du champ de base, notées avec l'indice 0, prennent des valeurs connues pour le cas d'une bulle sphérique dans un fluide au repos sans gravité. Vitesses et pression du liquide seront choisies nulles. La pression de la bulle est uniquement la pression de Laplace  $p_{b0} = \gamma \kappa_0$  où  $\kappa_0 = 2/R$  désigne la courbure de la sphère. La pression de la bulle reste constante, car si elle variait, il en résulterait une variation de volume que nous avons précédemment exclue. Le déplacement de l'interface n'intervient qu'au premier ordre car la bulle est dans son état d'équilibre, une sphère.

Il est à noter que les modes propres ne dépendent plus de l'azimut en raison de la décomposition azimutale des modes. L'opérateur  $\nabla$  peut ainsi être modifié grâce à cette dissociation des variables. Les dérivées dans la direction azimutale feront apparaître un facteur  $im$ , le nombre d'onde azimutal. L'opérateur  $\nabla$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
\nabla \hat{\mathbf{u}} &= \begin{pmatrix} \partial_{r_0} \hat{u}_r & (im \hat{u}_r - \hat{u}_\varphi)/r_0 & \partial_{z_0} \hat{u}_r \\ \partial_{r_0} \hat{u}_\varphi & (im \hat{u}_\varphi + \hat{u}_r)/r_0 & \partial_{z_0} \hat{u}_\varphi \\ \partial_{r_0} \hat{u}_z & im \hat{u}_z/r_0 & \partial_{z_0} \hat{u}_z \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z} && \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = \text{Tr}(\nabla \hat{\mathbf{u}}) \\
\nabla \hat{p} &= \begin{pmatrix} \partial_{r_0} \hat{p} \\ im \hat{p}/r_0 \\ \partial_{z_0} \hat{p} \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z} && (2.8)
\end{aligned}$$

En injectant la décomposition en modes propres (2.7) dans les équations (2.2-2.5) et en isolant les termes d'ordre 1, on obtient,

$$\rho \lambda \hat{\mathbf{u}}_1 = \nabla \cdot \hat{\Sigma}_1 \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 = 0 \quad (2.10)$$

$$\lambda \hat{\eta}|_{\Gamma_{b_0}} = \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}_0 \quad (2.11)$$

$$\hat{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{n}_0|_{\Gamma_{b_0}} = \gamma \hat{\kappa}_1 \mathbf{n}_0 \quad (2.12)$$

avec  $\hat{\Sigma}_1 = -\hat{p}_1 I + 2\mu D(\hat{\mathbf{u}}_1)$ .

On note que les termes contenant la perturbation de la normale  $\hat{\mathbf{n}}_1$  ont disparu de l'équation (2.12). En effet, ils se compensent puisque  $p_{b_0} - p_0 = \gamma \kappa_0$ . Les exponentielles,  $e^{\lambda t + im\varphi_0}$ , ont aussi disparu, une simplification a été effectuée de part et d'autre des égalités. Enfin, les dérivées temporelles ont été remplacées par une multiplication par  $\lambda$ .

**Remarque :** À l'ordre zéro, la condition dynamique se réduit à la loi de Laplace qui énonce que la différence de pression de part et d'autre d'une interface est égale à la somme des

*courbures principales multipliée par la tension de surface* :  $\Delta p = \gamma\kappa$ .

La condition dynamique à la surface de la bulle (2.12) fait apparaître la courbure de l'interface. L'annexe A.32 donne l'expression de la courbure jusqu'au premier ordre. Cela permet de fermer les équations en reliant le déplacement normal à la courbure. Cela ajoute une équation au système qui devient :

$$\rho\lambda\hat{\mathbf{u}}_1 = \nabla \cdot \hat{\Sigma}_1 \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 = 0 \quad (2.14)$$

$$\lambda\hat{\eta}|_{\Gamma_{b_0}} = \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}_0 \quad (2.15)$$

$$\hat{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{n}_0|_{\Gamma_{b_0}} = \gamma\hat{\kappa}_1\mathbf{n}_0 \quad (2.16)$$

$$\hat{\kappa}_1 = \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial s_0} \left( r_0 \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial s_0} \right) + \hat{\eta} \left( \kappa_0^{(a)^2} + \kappa_0^{(b)^2} - \frac{m^2}{r_0^2} \right) \quad (2.17)$$

Ces cinq dernières équations définissent le problème aux valeurs propres qui régit les oscillations linéaires d'une bulle au repos dans un fluide visqueux.

Nous utilisons une paramétrisation curviligne de l'interface. Cela permet de ne pas avoir de problème de multi-évaluation des grandeurs définies sur celle-ci. Cette écriture est aussi la plus naturelle qui soit car il en découlera une symétrie des opérateurs donnant la perturbation de la courbure en fonction du déplacement de cette dernière. Une paramétrisation en fonction de l'angle orthoradial  $\theta_0$  pourrait être utilisée mais elle conduit à des opérateurs non-symétriques. Elle sous-tend aussi qu'il ne peut exister deux points de la surface ayant le même paramètre  $\theta_0$ , chose qui n'est pas toujours vérifiée sachant que la topologie des bulles peut être complexe. Courbures, normales et déplacement normal sont finalement définies uniquement sur le contour  $\Gamma_{b_0}$ . Ils s'écrivent  $\hat{\kappa}_1(s_0)$ ,  $\hat{\mathbf{n}}_1(s_0)$  et  $\hat{\eta}(s_0)$ .

### 2.2.2 Formulation variationnelle

Maintenant que le problème (2.13-2.17) est défini, la méthode des éléments finis est utilisée pour le résoudre. Ce problème doit en conséquence être exprimé sous sa forme faible. La figure 2.2 représente le schéma du domaine de calcul. Le problème étant axisymétrique ou périodique selon la direction azimutale  $\varphi_0$ , un domaine 2D dans le plan méridien  $(r_0, 0, z_0)$  avec un repère cylindrique est suffisant pour résoudre le problème. De plus, il est possible de ne considérer qu'un demi-domaine grâce à des conditions de symétrie ou d'anti-symétrie sur le plan équatorial de la bulle.

En multipliant les relations (2.13,2.14) par les fonctions-test associées à la vitesse ( $\mathbf{v}$ ) et à la pression ( $q$ ) puis en les intégrant sur le domaine de calcul  $\Omega$ , on trouve  $\forall \mathbf{v}, q$  :

$$\int_{\Omega_0} \rho\lambda\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega_0} \nabla \cdot \hat{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_0} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 q = 0 \quad (2.18)$$

Une intégration par parties du terme correspondant aux contraintes  $\hat{\Sigma}_1$  fait apparaître la valeur de la contrainte sur le contour du domaine  $\Omega_0$ , noté  $\partial\Omega_0$ .

$$\int_{\Omega_0} \rho\lambda\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_0} \hat{\Sigma}_1 : \nabla \mathbf{v} + \int_{\Omega_0} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 q - \underbrace{\int_{\partial\Omega_0} \hat{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_0}_{(*)} = 0 \quad (2.19)$$

Deux types de conditions limites sont considérées ici. Les conditions de Dirichlet permettent de fixer la valeur de la vitesse  $\hat{\mathbf{u}}_1$  du fluide. Les conditions de Neumann servent à imposer la

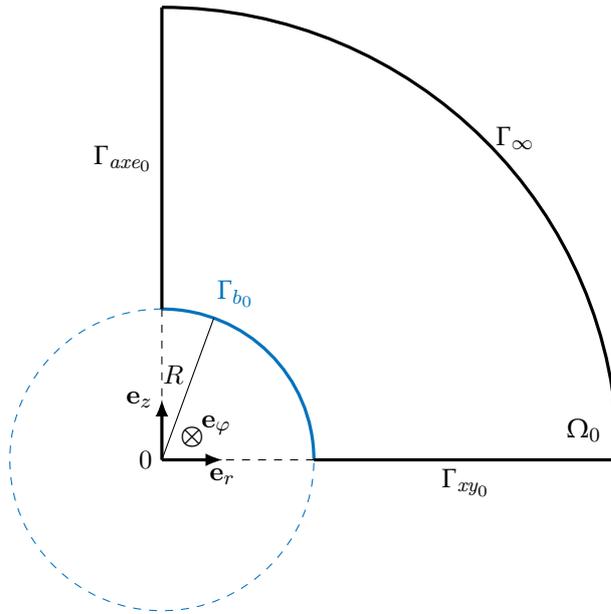


FIGURE 2.2 – Domaine de calcul pour l'étude linéaire de bulles dans un fluide au repos.

valeur de la contrainte totale  $\hat{\Sigma}_1$ , elles prescrivent la valeur de la dérivée de la vitesse dans une direction plus la valeur de la pression.

**TRAITEMENT DES CONDITIONS DE NEUMANN** Les conditions de Neumann sont implémentées via l'intégrale de la contrainte (\*) de l'équation (2.19) sur le contour du domaine de calcul, en remplaçant la valeur de la contrainte par la valeur désirée. Ainsi en intervertissant  $\hat{\Sigma}_1$  par une valeur connue, une condition de Neumann est imposée.

**TRAITEMENT DES CONDITIONS DE DIRICHLET** Elles sont implémentées via des pénalisations, *i.e.* en forçant, grâce à une pondération élevée, la valeur d'un degré de liberté des équations. Par exemple, pour imposer une condition de Dirichlet de type  $\hat{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{U}_D$  sur un intervalle  $\Gamma_D$ , il faut ajouter dans la formulation variationnelle du problème le terme suivant (pour la bulle au repos,  $\Gamma_D = \Gamma_{axe0} \cup \Gamma_{xy0}$ ) :

$$a_{cl}(\hat{\mathbf{u}}_1, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_D} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{v} \frac{1}{\epsilon_D} - \int_{\Gamma_D} \mathbf{U}_D \cdot \mathbf{v} \frac{1}{\epsilon_D} \quad \text{où } \epsilon_D \ll 1 \quad (2.20)$$

**Remarque :** Dans le logiciel FreeFEM++, ces termes de pénalisation valent par défaut  $10^{30}$  et sont appelés TGV (Très Grande Valeur). Ils permettent de pondérer un terme sur la diagonale de la matrice de façon à ce que les termes extra-diagonaux deviennent négligeables en raison des troncatures dues à la précision numérique imposée.

**CONDITIONS SUR L'AXE DE SYMÉTRIE** Dans le cas axisymétrique ( $m = 0$ ) ou pour des nombres d'onde azimutaux non nuls ( $m \neq 0$ ), les conditions aux limites sont différentes. Plusieurs considérations pour la dépendance azimutale de l'écoulement sont répertoriées dans le tableau 2.1. Les conditions de Dirichlet sont imposées avec les termes de pénalisation (2.20) en choisissant les bonnes composantes à annuler dans l'expression, en effet, cette expression est modifiée pour ne supprimer que les composantes souhaitées. Les conditions de Neumann sont *sous-entendues* dans la formulation car l'intégrale de la contrainte sur l'axe est multipliée par  $r_0$  et devient nécessairement nulle. Ces conditions sont détaillées ici pour montrer que, par exemple pour  $m = 0$ , une condition de non-pénétration est imposée sur l'axe de symétrie, mais aussi que la dérivée  $\frac{\partial \hat{u}_{1z}}{\partial r_0} \propto \mathbf{e}_z \cdot \hat{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{e}_r$  est nulle, assurant qu'aucune discontinuité n'ait été créée.

$m = 0$	$m = \pm 1$	$m = \pm 2$
Dirichlet sur $\Gamma_{axe_0}$		
$\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{e}_r = 0$	-	$\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{e}_r = 0$
$\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$	-	$\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$
-	$\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{e}_z = 0$	$\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{e}_z = 0$
Neumann sur $\Gamma_{axe_0}$		
-	$\mathbf{e}_r \cdot \hat{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{e}_r = 0$	-
-	$\mathbf{e}_\varphi \cdot \hat{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{e}_r = 0$	-
$\mathbf{e}_z \cdot \hat{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{e}_r = 0$	-	-

Tableau 2.1 – Conditions aux limites sur l’axe de symétrie de révolution ( $r_0 = 0$ ), noté  $\Gamma_{axe_0}$ 

Symétrie	Anti-Symétrie
Dirichlet	
-	$\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{e}_r = 0$
-	$\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$
$\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{e}_z = 0$	-
Neumann	
$\mathbf{e}_r \cdot \hat{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{e}_r = 0$	-
$\mathbf{e}_\varphi \cdot \hat{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{e}_r = 0$	-
-	$\mathbf{e}_z \cdot \hat{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{e}_r = 0$

Tableau 2.2 – Conditions aux limites sur le plan équatorial ( $z = 0$ ), noté  $\Gamma_{xy_0}$ , dans le cas où il représente un plan de symétrie ou d’anti-symétrie

CONDITIONS AUX LIMITES "À L'INFINI" Une condition de doit être imposée sur la frontière extérieure  $\Gamma_\infty$  afin de modéliser le raccord avec un domaine "infini", plusieurs choix sont possibles. Le choix retenu ici consiste à imposer une condition de Neumann sur contrainte. Loin de la bulle, la composante visqueuse est négligeable, cela revient en pratique à imposer une variation de pression nulle loin de la bulle. Cela s’écrit :

$$\hat{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{n}_0|_{\Gamma_\infty} = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

et l’intégrale de la contrainte (\*) de l’équation 2.19 est nulle sur le contour  $\Gamma_\infty$ .

CONDITION À LA LIMITE SUR LE PLAN ÉQUATORIAL Travailler avec un demi-domaine permet un gain de rapidité et de stockage considérable. Les calculs s’effectueront sur la moitié de la bulle, ainsi représentée par un quart de cercle. Il faut en conséquence considérer la condition sur le plan équatorial qui est soit une symétrie, soit une anti-symétrie. Le tableau 2.2 donne les conditions aux limites pour les deux cas sur le plan équatorial. Avec l’adjonction des conditions de Neumann (2.16) et (2.21), la formulation faible pour le bloc fluide  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  devient,  $\forall \mathbf{v}, q$  :

$$\int_{\Omega_0} \rho \lambda \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_0} \hat{\Sigma}_1 : \nabla \mathbf{v} + \int_{\Omega_0} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 q - \int_{\Gamma_{b_0}} \hat{\kappa}_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_0 + a_{cl}(\hat{\mathbf{u}}_1, \mathbf{v}) = 0 \quad (2.22)$$

$$\text{où} \quad \hat{\Sigma}_1 : \nabla \mathbf{v} = -\hat{p}_1 \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu D(\hat{\mathbf{u}}_1) : \nabla \mathbf{v}$$

Il reste à écrire la formulation variationnelle pour les équations (2.15),(2.17). Elles représentent la condition cinématique à l’interface et la relation entre la déformation de cette

dernière et sa courbure. Ces deux relations sont respectivement associées aux fonctions-test du déplacement normal,  $\tau$ , et de la courbure,  $\zeta$ .

La condition cinématique à l'interface s'écrit directement,  $\forall \tau$  :

$$\int_{\Gamma_{b_0}} \lambda \hat{\eta} \tau + \int_{\Gamma_{b_0}} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}_0 \tau = 0 \quad (2.23)$$

et elle exprime la continuité des vitesses normales à l'interface. La dérivée temporelle du déplacement interfacial est égale à la vitesse normale du fluide à l'interface.

Enfin, la relation entre courbure et déformation de l'interface (2.17) nécessite une intégration par parties. Elle s'écrit tout d'abord,  $\forall \zeta$  :

$$\int_{\Gamma_{b_0}} \hat{\kappa}_1 \zeta = \int_{\Gamma_{b_0}} \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial s_0} \left( r_0 \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial s_0} \right) \zeta + \hat{\eta} \zeta \left( \kappa_0^{(a)^2} + \kappa_0^{(b)^2} - \frac{m^2}{r_0^2} \right) \quad (2.24)$$

Précédemment, nous avons omis – dans les écritures uniquement – les volumes et surfaces élémentaires à des fins de lisibilité. Or, pour effectuer l'intégration par parties sur le terme de dérivation du second ordre dans l'équation précédente, il est justement nécessaire d'introduire la surface élémentaire  $r_0 ds_0 d\varphi_0$ . Ainsi, l'intégration par parties devient plus simple à appréhender et donne,  $\forall \zeta$  :

$$\int_{\Gamma_{b_0}} \hat{\kappa}_1 \zeta r_0 ds_0 d\varphi_0 = - \int_{\Gamma_{b_0}} \left[ \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial s_0} \frac{\partial \zeta}{\partial s_0} - \hat{\eta} \zeta \left( \kappa_0^{(a)^2} + \kappa_0^{(b)^2} - \frac{m^2}{r_0^2} \right) \right] r_0 ds_0 d\varphi_0 + \left[ r_0 \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial s_0} \zeta \right]_0^{L_b} \quad (2.25)$$

où  $s_0 = 0$  correspond à la position sur l'axe de symétrie et  $s_0 = Lb$  à celle sur le plan équatorial.

Deux cas de figures sont à considérer. Si l'un de ces points correspond à une symétrie, *i.e.*  $m$  pair ou  $(x0y)$  plan de symétrie, la dérivée du déplacement en ce point sera nulle. Ce point sera un ventre d'oscillation et  $\frac{\partial \eta}{\partial s_0} \zeta$  en ce point sera nul. Pour une anti-symétrie en un de ces points, *i.e.*  $m$  impair ou  $(x0y)$  plan d'anti-symétrie, alors ce point sera un nœud d'oscillation, le déplacement sera nul, et le choix des fonctions-test – qui sera décrit un peu plus bas – fera en sorte que ce produit soit nul, car la fonction-test s'annulera.

En somme,  $\left[ r_0 \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial s_0} \zeta \right]_0^{L_b} = 0$  dans tous les cas.

Nous choisissons d'écrire plus synthétiquement l'équation sur la courbure,  $\forall \zeta$  :

$$\int_{\Gamma_{b_0}} \hat{\kappa}_1 \zeta = - \int_{\Gamma_{b_0}} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial s_0} \frac{\partial \zeta}{\partial s_0} - \hat{\eta} \zeta \left( \kappa_0^{(a)^2} + \kappa_0^{(b)^2} - \frac{m^2}{r_0^2} \right) \quad (2.26)$$

**SYNTHÈSE.** Le problème couplant les équations fluides dans le domaine et la dynamique de l'interface s'écrit suivant les équations précédentes :

Trouver  $\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1, \hat{\eta}, \hat{\kappa}_1$ , tel que  $\forall \mathbf{v}, q, \tau, \zeta$  :

$$\int_{\Omega_0} \rho \lambda \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega_0} \hat{\Sigma}_1 : \nabla \mathbf{v} + \int_{\Omega_0} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 q - \int_{\Gamma_{b_0}} \hat{\kappa}_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_0 + a_{cl}(\hat{\mathbf{u}}_1, \mathbf{v}) = 0 \quad (2.27)$$

$$\int_{\Gamma_{b_0}} \lambda \hat{\eta} \tau + \int_{\Gamma_{b_0}} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}_0 \tau = 0 \quad (2.28)$$

$$\int_{\Gamma_{b_0}} \hat{\kappa}_1 \zeta + \int_{\Gamma_{b_0}} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial s_0} \frac{\partial \zeta}{\partial s_0} - \hat{\eta} \zeta \left( \kappa_0^{(a)^2} + \kappa_0^{(b)^2} - \frac{m^2}{r_0^2} \right) = 0 \quad (2.29)$$

### 2.3 DISCRÉTISATION

Le problème posé mathématiquement est continu. Pour résoudre une approximation de ce problème, il faut discrétiser les équations. *FreeFEM++* effectue une discrétisation automatique. Il faut cependant choisir le type des fonctions de base pour la projection des solutions. La méthode de Galerkin est utilisée, *i.e.* les fonctions-test sont identiques aux fonctions de bases.

#### 2.3.1 Vitesse et pression

Une fois la formulation variationnelle définie (2.27)-(2.29), la méthode des éléments finis implique une discrétisation des intégrales afin d'obtenir un système matriciel. Le domaine est en conséquence décomposé en une triangulation sur laquelle des fonctions polynomiales ont une valeur de 1 sur un nœud et 0 sur tous les autres. Ces fonctions sont les fonctions de forme et servent à projeter les grandeurs qui dépendent de l'espace. De cette manière, pour projeter une fonction  $f$  sur la triangulation  $\mathcal{T}_h$  il suffit de connaître les valeurs aux nœuds de cette fonction et les fonction de formes notées  $\phi(x, y)$  :

$$f(x, y) \simeq f_h(x, y) = \sum_{k=0}^{M-1} f_k \phi_k(x, y), \quad (2.30)$$

avec  $f_k$  la valeur de la fonction  $f$  au point  $k$  de coordonnées  $(x_k, y_k)$  pour une discrétisation comprenant  $M$  degrés de liberté.

Le type d'élément retenu pour les vitesses et pressions est le classique élément de Taylor-Hood  $(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_1)$  représenté sur la figure 2.3. Les vitesses sont exprimées avec des fonctions de forme quadratiques et la pression est projetée sur des fonctions de forme linéaires. Ce type d'élément respecte la condition *inf-sup* dite aussi condition de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB). En effet, la démonstration de la stabilité du problème de Stokes axisymétrique avec de tels éléments a été faite par LEE et LI [47]. Il existe d'autres éléments, le plus économique étant le  $(\mathcal{P}_1 + \mathcal{B}, \mathcal{P}_1)$  dit élément mini de ARNOLD et al. [3], un autre conservant localement la masse est le  $(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_0)$ . Cette énumération n'est aucunement exhaustive et ces sujets ont été traités par de nombreux auteurs, parmi eux, on peut citer les ouvrages de BREZZI et FORTIN [13] et GIRAULT et RAVIART [34].

#### 2.3.2 Grandeurs surfaciques

Les grandeurs surfaciques, déplacement normal de l'interface  $\hat{\eta}$  et courbure  $\hat{\kappa}_1$  n'existent que sur le contour du domaine et plus précisément sur l'interface entre la bulle et le fluide  $\Gamma_{b_0}$ . Il ne semble donc pas utile de créer des fonctions définies dans tout le domaine, ces degrés de liberté seraient superflus.

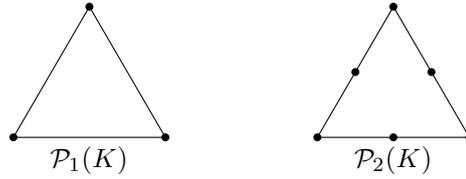


FIGURE 2.3 – Les degrés de liberté sont représentés pour les éléments de Taylor-Hood ( $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_1$ ) sur un triangle élémentaire  $K$  d’une triangulation. Les points noirs ( $\bullet$ ) représentent les degrés de liberté, à gauche pour la pression et à droite pour la vitesse.

**LE PREMIER CHOIX** Pour projeter ces grandeurs, la première stratégie a été d’utiliser des fonctions linéaires  $\mathcal{P}_1$ , identiques à celles de la pression mais réduites au contour  $\Gamma_{b_0}$ . La perturbation de la courbure et le déplacement normal de l’interface prennent des valeurs sur chaque nœud de la bulle et varient linéairement par morceau.

Il s’est avéré que la formulation dans un référentiel 2D-axisymétrique conduit à des oscillations de la perturbation de la courbure. En effet, le point appartenant à la bulle et à l’axe ( $0z$ ) pose problème. À cet endroit, la perturbation de la courbure et le déplacement de l’interface sont mal résolus, sûrement à cause de l’écriture intégrale du problème. Dans un tel référentiel, avec un axe de symétrie (où  $r_0 = 0$ ), l’intégration par parties sur la courbure fait apparaître des termes de bords nécessaires afin d’imposer la bonne symétrie du problème. Le terme  $\left[ r_0 \frac{\partial \eta}{\partial s_0} \zeta \right]_0^{L_b}$  de l’équation (2.25) représente les valeurs des dérivées du déplacement normal aux pôles et sert à imposer une condition de Neumann dans le cas  $m$  pair. Or ce terme est strictement nul en raison du facteur  $r_0$ , plus rien n’assure ainsi la satisfaction de cette condition limite. De ce fait, le déplacement oscille sur les pôles et sur les points proches de ceux-ci, contaminant à son tour la perturbation de la courbure. Au final, la courbure totale en ces points est entachée d’erreurs, oscille à l’échelle de la maille et des pressions parasites apparaissent. Une éventuelle correction à ce problème consisterait à ajouter des termes de stabilisation comme CENANOVIC et al. [17] l’ont fait. Cela améliorerait certainement le calcul de la perturbation de l’interface. Un autre choix a cependant été effectué pour pallier cette difficulté.

**LE CHOIX RETENU** Ne parvenant pas à atténuer cette surpression sur l’axe, la démarche a été de projeter les fonctions surfacique  $-\hat{\kappa}_1$  et  $\hat{\eta}$  sur une base différente de celle des éléments finis qui assure automatiquement un bon comportement sur l’axe. En raison de la périodicité du problème, nous avons opté pour une décomposition en série de Fourier en fonction de l’abscisse curviligne  $s_0$ . La base de fonction doit être orthogonale et respecter les conditions aux limites des fonctions qu’elle projette. C’est pour cela que les fonctions sinus ou cosinus sont adaptées.

**Remarque 1 :** Une autre base de fonctions a été testée : les polynômes de Legendre qui constituent aussi une base orthogonale de fonctions. Cependant cette base est adaptée aux coordonnées sphériques, dans le cas où la surface admet un paramétrage  $R(\theta)$  dans le plan méridien plus contraignant qu’un paramétrage curviligne. Cette option a néanmoins été testée (voir les développements de la courbure avec l’opérateur de Laplace-Beltrami en coordonnées sphériques en Annexe A.4) mais n’apporte aucun avantage particulier, le point négatif étant la perte de la symétrie de la formulation de la courbure. Le repère de Frenet est plus naturel pour écrire l’équilibre des contraintes à l’interface, car il décompose les vecteurs en composantes normale et tangente alors que le repère sphérique les décompose en composantes radiale et orthoradiale.

**Remarque 2 :** Le problème identifié ci-dessus est particulièrement sévère dans les chapitres suivants, lors du calcul de formes d’équilibre des bulles. Les déformations successives de la surface amplifient les erreurs faites à chaque itération. Ce problème reste beaucoup

plus discret dans le cas de l'analyse de stabilité si la forme d'équilibre possède une courbure régulière. Le parti pris a été d'adopter la décomposition en série de Fourier pour le calcul de la forme d'équilibre et pour le calcul de stabilité, même si dans le cas des oscillations propres d'une bulle, la discrétisation des grandeurs surfaciques avec des éléments  $\mathcal{P}_1$  est satisfaisante (2.4.4). La discussion sur les discrétisations des inconnues surfaciques pour le calcul du champ de base et forme d'équilibre justifiant ce choix est donné dans la section 4.5.

Considérons tout d'abord la frontière  $\Gamma_{b_0}$  sur laquelle un repère de Frenet-Serret permet de définir une abscisse curviligne allant de  $s_0 = 0$  sur l'axe de symétrie à  $L_b$  sur le plan équatorial  $\Gamma_{xy_0}$  comme le montre la figure 2.4. En raison de la périodicité de la surface, deux

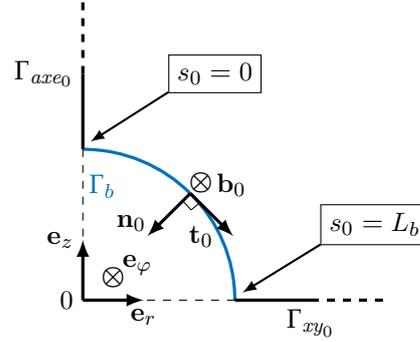


FIGURE 2.4 – Repère de Frenet sur l'interface de la bulle et son abscisse curviligne  $s_0$ .

possibilités pour le déplacement normal sont à considérer. Sur le point  $s_0 = 0$ , le déplacement normal est maximal et il correspond à un ventre d'oscillation ou bien il est nul et correspond à un nœud d'oscillation. Le premier cas est associé à une dépendance azimutale avec  $m$  pair, le second à  $m$  impair. Pour cette raison, des cosinus seront utilisés quand  $m = 0$  ou  $\pm 2$  et des sinus lorsque  $m = \pm 1$ . Cela donne la base de fonctions suivante pour projeter les grandeurs surfaciques :

$$\hat{\eta}(s_0) \simeq \sum_{k=0}^{N_F} \phi_{F,k}^m(s_0) X_{\hat{\eta}}(k) \quad (2.31)$$

La base de fonction  $\phi_{F,k}^m$  est différente suivant les symétries du problème. Suivant que le nombre d'onde azimutal, des fonctions sinus ou cosinus sont utilisés. De plus, la condition de symétrie ou d'anti-symétrie sur le plan équatorial est ajustée grâce au coefficient à un coefficient multiplicatif. Pour une anti-symétrie, un nœud est présent au niveau du plan équatorial alors que pour une symétrie, c'est un ventre. Le tableau 2.3 donne les fonctions de base utilisées pour toutes les géométries et symétries considérées. Ces fonctions respectent toutes les conditions de périodicité de la perturbation de la surface.

équateur	$m$ pair		$m$ impair	
	symétrie	anti-symétrie	symétrie	anti-symétrie
$\phi_{F,k}^m(s_0)$	$\cos\left(\frac{2k\pi s_0}{L_b}\right)$	$\cos\left(\frac{k\pi s_0}{L_b}\right)$	$\sin\left(\frac{k\pi s_0}{L_b}\right)$	$\sin\left(\frac{2k\pi s_0}{L_b}\right)$
$\phi_{F,k}^m(0)$	1	1	0	0
$\phi_{F,k}^m(L_b)$	1	0	$\pm 1$	0

Tableau 2.3 – Base de fonctions de Fourier pour toutes les symétries et dépendances azimutales considérées.

Il est important de noter que la perturbation de la courbure  $\hat{\kappa}_1$  respecte les mêmes conditions aux limites que le déplacement normal de l'interface. Elle se décompose en deux termes :

$$\hat{\kappa}_1 = \underbrace{\frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial s_0} \left( r_0 \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial s_0} \right)}_{(a)} + \underbrace{\hat{\eta} \left( \kappa_0^{(a)^2} + \kappa_0^{(b)^2} - \frac{m^2}{r_0^2} \right)}_{(b)} \quad (2.32)$$

$r_0$ ,  $\kappa_0^{(a)^2}$  et  $\kappa_0^{(b)^2}$  étant symétriques, une multiplication ou division par ces termes ne change pas les symétries. Le terme (b) a en conséquence les symétries de  $\hat{\eta}$ . La dérivée selon  $s_0$  inverse les symétries, mais puisqu'elle est appliquée deux fois, cela ne les modifie finalement pas et le terme (a) possède aussi les symétries de  $\hat{\eta}$ .

L'orthogonalité des sinus et cosinus étant connue, soient  $k$  et  $l$  deux entiers positifs :

$$\int_0^{L_b} \phi_{F,k}^m(s_0) \phi_{F,l}^m(s_0) ds_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } k = l \text{ et symétrie sur l'équateur} \\ \pi & \text{si } k = l \text{ et anti-symétrie sur l'équateur} \end{cases} \quad (2.33)$$

Les fonctions  $\phi_{F,k}^m(s_0)$  sont bien orthogonales et respectent les bonnes conditions aux limites (table 2.3). Elles peuvent alors être utilisées comme fonctions de base pour les grandeurs surfaciques.

### 2.3.3 Écriture matricielle du problème

Il faut considérer le problème matriciel complet et couplé pour calculer ses valeurs propres :

$$\mathcal{A}\hat{\mathbf{q}} = \lambda\mathcal{B}\hat{\mathbf{q}}, \quad (2.34)$$

où  $\lambda$  est la valeur propre et  $\hat{\mathbf{q}} = [\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1, X_{\kappa_1}, X_\eta]^T$  le vecteur propre. La matrice  $\mathcal{A}$  de notre problème est une matrice hybride comprenant des éléments finis et des éléments surfaciques créés en s'appuyant sur une décomposition en série de Fourier. Cette relation matricielle peut être décomposée en plusieurs blocs définis suivant leur action :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{ff} & \mathcal{A}_{\kappa f} & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{\kappa\kappa} & \mathcal{A}_{\eta\kappa} \\ \mathcal{A}_{f\eta} & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{q}} = \lambda \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{ff} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{B}_{\eta\eta} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{q}} \quad (2.35)$$

Les premiers blocs,  $\mathcal{A}_{ff}$  et  $\mathcal{B}_{ff}$  représentent l'action du fluide sur lui-même, et correspondent aux équations de Stokes sans la condition à la limite dynamique à l'interface. Ils peuvent se décomposer à nouveau en vitesses et pressions :

$$\mathcal{A}_{ff} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\mathbf{uu}} & -\mathcal{A}_{p\mathbf{u}} \\ \mathcal{A}_{p\mathbf{u}}^T & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{ff} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{\mathbf{uu}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

En sachant que la méthode de Galerkin continue est utilisée, *i.e.* que les fonctions-test et les fonctions de forme sont identiques ( $\mathbf{v} = [v_r, v_\varphi, v_z]^T$ ), vitesse et pression sont décomposées de la sorte :

$$\hat{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}_0) \simeq \sum_{k=1}^{N_u} \begin{pmatrix} v_r^k(\mathbf{x}_0) \hat{u}_{1r}^k \\ v_\varphi^k(\mathbf{x}_0) \hat{u}_{1\varphi}^k \\ v_z^k(\mathbf{x}_0) \hat{u}_{1z}^k \end{pmatrix}, \quad \hat{p}_1(\mathbf{x}_0) \simeq \sum_{k=1}^{N_p} q^k(\mathbf{x}_0) \hat{p}_1^k, \quad (2.37)$$

où  $\hat{\mathbf{u}}_1^k$  et  $\hat{p}_1^k$  sont les valeurs de  $\hat{\mathbf{u}}_1$  et  $\hat{p}_1$  au nœud  $k$ . On remarque que le nombre de degrés de liberté est différent pour la vitesse et la pression,  $N_u > N_p$ . La vitesse est projetée sur des fonctions de forme quadratiques et la pression sur des fonctions linéaires, en accord avec le choix des éléments de Taylor-Hood.

En notant  $(\cdot, \cdot)$  la norme de Hilbert de l'espace  $\Omega_0$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$  sur le contour  $\Gamma$  :

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, dv_0 \quad (\nabla \mathbf{a}, \nabla \mathbf{b}) = \int_{\Omega_0} \nabla \mathbf{a} : \nabla \mathbf{b} \, dv_0 \quad (2.38)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, d\mathcal{A}_0 \quad \langle c, d \rangle_\Gamma = \int_\Gamma c d \, d\mathcal{A}_0 \quad (2.39)$$

D'après la formulation variationnelle (2.27), les blocs composant la matrice fluide-fluide  $\mathcal{A}_{ff}$  peuvent s'écrire :

$$(\mathcal{A}_{\mathbf{uu}})_{ij} = (2\mu D(\mathbf{v}^j), \nabla \mathbf{v}^i) \quad (2.40)$$

$$(\mathcal{A}_{p\mathbf{u}})_{ij} = (q^j, \nabla \cdot \mathbf{v}^i) \quad (2.41)$$

$$(\mathcal{B}_{\mathbf{uu}})_{ij} = -(\rho \mathbf{v}^j, \mathbf{v}^i) \quad (2.42)$$

Les matrices  $\mathcal{A}_{\mathbf{uu}}$  et  $\mathcal{B}_{\mathbf{uu}}$  correspondent respectivement à la divergence des contraintes visqueuses et aux dérivées temporelles de la vitesse, avec une dimension de  $3N_u$ . Enfin, le bloc  $\mathcal{A}_{p\mathbf{u}}$  qui constitue une matrice rectangulaire de taille  $3N_u \times N_p$ , représente le gradient de pression. Son transposé  $\mathcal{A}_{p\mathbf{u}} = \mathcal{A}_{\mathbf{u}p}^T$  correspond à l'équation de continuité dans le fluide.

Le bloc  $\mathcal{A}_{\kappa\mathbf{u}}$  résulte de la discrétisation de la condition dynamique à l'interface (2.27). C'est un bloc hybride avec les fonctions-test de la vitesse, en élément finis, et des fonctions de Fourier permettant de projeter la courbure (2.31) :

$$(\mathcal{A}_{\kappa\mathbf{u}})_{il} = \left\langle \gamma \phi_{F,l}^m \mathbf{n}_0, \mathbf{v}^i \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (2.43)$$

Ce bloc est rectangulaire ( $3N_u \times N_F$ ) et modélise l'intégrale de la courbure le long de l'interface multipliée par les fonctions-test associées à la vitesse.

Les blocs  $\mathcal{A}_{\kappa\kappa}$  et  $\mathcal{A}_{\eta\kappa}$  sont une discrétisation de la relation entre la perturbation de la courbure et le déplacement normal de l'interface. Ils utilisent tous deux des fonctions de Fourier pour projeter les grandeurs à calculer et la fonction-test associée. Ces deux blocs représentent l'expression (2.29) discrétisée :

$$(\mathcal{A}_{\kappa\kappa})_{kl} = \left\langle \phi_{F,l}^m, \phi_{F,k}^m \right\rangle_{\Gamma_{b_0}}, \quad (2.44)$$

$$(\mathcal{A}_{\eta\kappa})_{kl} = \left\langle \frac{1}{r_0} \left( \phi_{F,l}^m \right)', \left( \phi_{F,k}^m \right)' \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} - \left\langle \phi_{F,l}^m \left( \kappa_0^{(a)2} + \kappa_0^{(b)2} - \frac{m^2}{r_0^2} \right), \phi_{F,k}^m \right\rangle_{\Gamma_{b_0}}, \quad (2.45)$$

où  $(\cdot)'$  désigne la dérivée par rapport à la variable  $s_0$ , l'abscisse curviligne le long de l'interface. Les dérivées des fonctions de la base de Fourier sont connues analytiquement et sont remplacées directement dans les expressions.

Les derniers blocs permettent d'appliquer la condition de Dirichlet à l'interface, à savoir la continuité des vitesses entre le fluide et l'interface. Autrement dit, la dérivée temporelle du déplacement de l'interface est égale à la vitesse fluide au même point. C'est la traduction dans l'espace discret de la formulation variationnelle de l'équation (2.28) :

$$(\mathcal{A}_{\mathbf{u}\eta})_{kj} = \left\langle \mathbf{v}^j, \phi_{F,k}^m \mathbf{n}_0 \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (2.46)$$

$$(\mathcal{B}_{\eta\eta})_{kl} = - \left\langle \phi_{F,l}^m, \phi_{F,k}^m \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} = (\mathcal{A}_{\kappa\kappa})_{kl} \quad (2.47)$$

#### 2.3.4 Pression interne et volume

Dans le cas où le plan équatorial représente une anti-symétrie, ou bien que le nombre d'onde azimutal est non nul, le volume de la bulle est naturellement conservé par les symétries ou périodicités autour de l'axe  $(0z)$ . Prenons le cas de l'anti-symétrie. Si le volume augmente dans l'hémisphère nord, une diminution de même ampleur est observable dans l'hémisphère sud. Il en va de même pour les nombres d'onde azimutaux non nuls.

En revanche, si le nombre d'onde azimutal est nul, avec une condition de symétrie sur le plan équatorial, il est nécessaire de prescrire le volume de la bulle pour que celui-ci reste constant. En effet, dans ce cas, un déplacement monotone de l'interface dans la direction normale implique une variation de volume. Une contrainte est ajoutée au problème via un multiplicateur de Lagrange afin de conserver le volume. Ce dernier a une signification physique : c'est la variation de pression interne de la bulle qui a été considérée comme nulle dans la définition des modes définie dans l'équation (2.7). Cette pression interne à la bulle reste néanmoins nulle, car les modes sont iso-volume, son utilité est purement calculatoire. Dans ce cas précis, il faut en conséquence considérer la pression de la bulle comme suit :

$$p_b(t) = p_{b_0} + \epsilon \hat{p}_{b_1} e^{i\lambda t} + O(\epsilon^2) + c.c. \quad (2.48)$$

Au premier ordre, un terme est ajouté à la condition dynamique à l'interface (2.16) :

$$\hat{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{n}_0 \Big|_{\Gamma_{b_0}} = \gamma \hat{\kappa}_1 \mathbf{n}_0 - \hat{p}_{b_1}, \quad (2.49)$$

puis il apparaît dans l'intégrale de la contrainte de la formulation variationnelle :

$$\int_{\Gamma_{b_0}} \hat{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v} = \int_{\Gamma_{b_0}} (\gamma \hat{\kappa}_1 - \hat{p}_{b_1}) \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v} \quad (2.50)$$

Et la contrainte sur le volume, que cette nouvelle inconnue permet de prendre en compte, s'écrit :

$$\int_{\Gamma_{b_0}} \hat{\eta} = 0, \quad (2.51)$$

assurant que l'intégrale du déplacement normal sur la bulle est bien nulle.

Le système matriciel (2.35) gagne une ligne et une colonne et le vecteur d'inconnues gagne un terme  $\hat{\mathbf{q}} = [\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1, \hat{p}_{b_1}, X_{\kappa_1}, X_\eta]^T$ . Seuls les blocs fluides sont modifiés, les termes ajoutés sont en gris.

$$\mathcal{A}_{ff} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} & -\mathcal{A}_{p\mathbf{u}} & \mathcal{A}_{p_b\mathbf{u}} \\ \mathcal{A}_{p\mathbf{u}}^T & 0 & 0 \\ \mathcal{A}_{vol} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{ff} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

La contrainte sur le volume, exprimée par le bloc  $\mathcal{A}_{vol}$ , est un vecteur horizontal de taille  $N_F$  qui s'écrit :

$$(\mathcal{A}_{vol})_l = \langle \phi_{F,l}^m, 1 \rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (2.53)$$

La nouvelle inconnue  $\hat{p}_{b_1}$  étant un scalaire, la fonction-test associée vaut 1.

Le bloc  $\mathcal{A}_{p_b f}$  correspond à la discrétisation de l'intégrale (2.50) :

$$\mathcal{A}_{p_b f} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{p_b\mathbf{u}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\mathcal{A}_{p_b\mathbf{u}})_i = \langle 1, \mathbf{v}^i \cdot \mathbf{n}_0 \rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (2.54)$$

En conclusion, le système à résoudre pour l'analyse de stabilité linéaire d'une bulle est donné par (2.35). En revanche il faut considérer deux cas de figure. Dans le cas où une anti-symétrie est présente sur le plan équatorial ou si le nombre d'onde azimutal est impair, le volume est naturellement conservé. Il ne faut pas considérer la pression dans la bulle. Les blocs fluide  $\mathcal{A}_{ff}$  et  $\mathcal{B}_{ff}$  sont donnés par (2.36). Par contre, lorsque la conservation du volume n'est pas assurée par les symétries du problème, *i.e.* dans le cas d'un nombre d'onde azimutal pair et d'une symétrie sur le plan équatorial, la décomposition des blocs fluide est donnée par (2.52).

### 2.3.5 Goutte dans un gaz à viscosité et densité négligeable

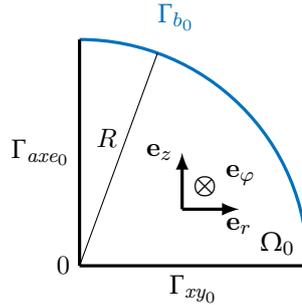


FIGURE 2.5 – Domaine de calcul pour l'étude de stabilité d'une goutte dans un fluide ayant une viscosité et densité négligeable.

Les équations permettant d'effectuer l'analyse de stabilité linéaire pour une goutte dans le vide, *i.e.* où les effets du fluide environnant sont négligés, sont identiques à celles décrites précédemment (2.27)-(2.29). L'unique différence réside dans le domaine qui est dans le cas d'une goutte un quart de disque (figure 2.5). Une conséquence est l'absence de conditions limite à l'infini, étant donné que le fluide extérieur n'a pas d'impact sur la goutte. Les conditions de symétrie ou d'anti-symétrie et les dépendances azimutales étant les mêmes que

dans le cas de la bulle, les fonctions de Fourier pour projeter les grandeurs surfaciques sont identiques. Le système discrétisé sera ainsi identique à celui défini plus haut (2.35).

En changeant uniquement le domaine, le code de calcul permettant de réaliser l'analyse de stabilité de bulles dans un fluide visqueux est capable de réaliser celle de gouttes visqueuses dans le vide.

## 2.4 ÉTUDE LINÉAIRE DES OSCILLATIONS DE BULLES

L'études des oscillations de faible amplitude des bulles ou des gouttes sphériques dans un autre fluide remonte au *XIX<sup>ème</sup>* siècle avec KELVIN [45]. En 1932, LAMB [46] donne la fréquence d'oscillation de gouttes immergées dans un autre fluide non visqueux. Plus tard, MILLER et SCRIVEN [53] calculent les fréquences et taux d'amortissement pour des bulles dans plusieurs cas de figure, de la goutte dans le vide à la bulle de gaz de densité et viscosité négligeables dans un liquide ainsi que des cas intermédiaires. Ensuite PROSPERETTI [65] donne les relations de dispersion pour tous les cas de figure grâce à une analyse modale et note la présence d'un spectre continu en fonction de la viscosité. Une partie de ces derniers travaux nous permet de réaliser le premier cas-test nous assurant du bon fonctionnement du couplage fluide-interface. Notre code sera comparé à la configuration de bulles de gaz dans un fluide visqueux et au cas de gouttes visqueuses dans le vide.

### 2.4.1 Relation théorique

Une analyse de stabilité a été réalisée pour une bulle dans un fluide visqueux avec tension de surface, sans effet Marangoni. Le nombre d'Ohnesorge est le paramètre de contrôle, les grandeurs caractéristiques du problème sont le rayon  $R$  de la bulle, la tension superficielle du couple fluide-gaz  $\gamma$ , la viscosité dynamique  $\mu$  et la masse volumique  $\rho$  du fluide. La viscosité cinématique est notée  $\nu = \mu/\rho$ . Dans le cas de la bulle, l'équation caractéristique donnant les valeurs propres est donnée par PROSPERETTI [65], sous la forme :

$$(\lambda^2 - 2b_B\lambda + \omega_B^2) [\tilde{\mathcal{H}}_{l-1/2}(X) + 2] + 4l(l+2)^2 \frac{\nu}{R^2} = 0 \quad (2.55)$$

où

$$\begin{cases} \omega_B^2 = (l-1)(l+1)(l+2) \frac{\gamma}{\rho} R^3 \\ b_B = (l+2)(2l+1) \frac{\nu}{R^2} \end{cases} \quad (2.56)$$

désignent la pulsation d'une bulle dans un fluide non visqueux et le taux d'amortissement dans la limite faiblement visqueuse, LAMB [46]. Dans (2.55) on a posé

$$X = R \left( \frac{\lambda}{\nu} \right)^{1/2}, \quad \tilde{\mathcal{H}}_n(z) = z \frac{H_{n+1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)}, \quad (2.57)$$

où  $H_n^{(1)}$  est la fonction de Hankel de première espèce.

Le nombre  $l$  est le nombre d'onde principal. Il correspond au nombre de cercles nodaux sur la surface et est égal au nombre de méridiens nodaux plus celui de parallèles nodaux, à ne pas confondre avec  $m$ , le nombre d'onde azimutal qui concorde avec le nombre de méridiens nodaux.

Le déplacement normal théorique de l'interface est donné par les polynômes  $P_l$  de Legendre de degré  $l$  :

$$\eta = P_l(\theta) \quad \text{où} \quad \theta = s_0/R \quad (2.58)$$

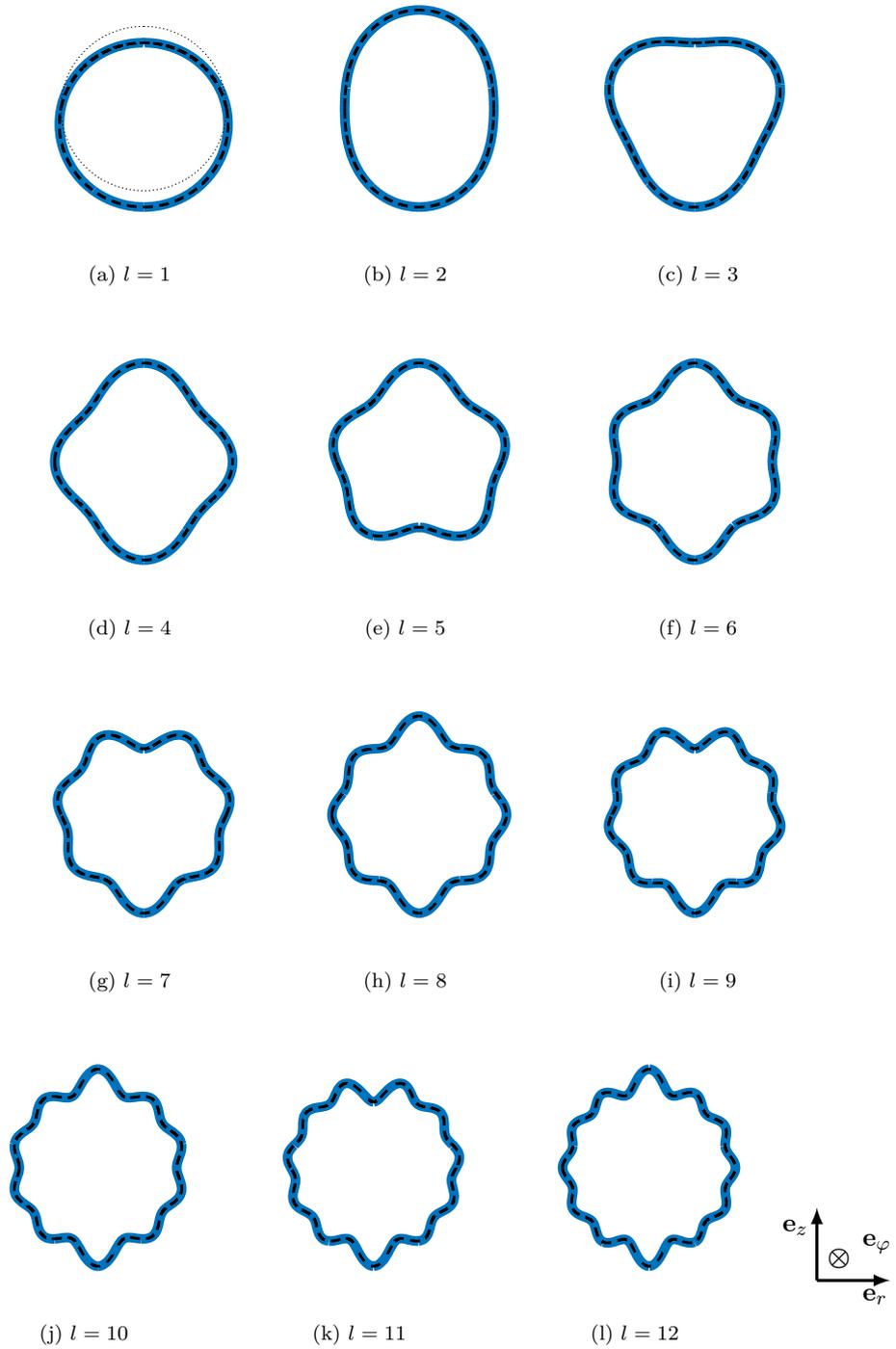


FIGURE 2.6 – Différents modes d'oscillations pour une bulle dans un fluide au repos pour  $m = 0$ . Les modes avec un nombre d'onde principal pair (resp. impair) sont obtenus avec une condition symétrie (resp. antisymétrie) sur l'équateur. Comparaison entre les résultats de l'analyse de stabilité linéaire (ligne bleue) et les harmoniques sphériques (ligne pointillée noire)

$N_F$	$N_s$	$\epsilon_{surf}$	$N_F$	$N_s$	$\epsilon_{surf}$
5	64	2.1	5	284	2.1
10	64	$5.8 \cdot 10^{-3}$	10	284	$2.8 \cdot 10^{-4}$
20	64	$5.2 \cdot 10^{-3}$	20	284	$2.8 \cdot 10^{-4}$
40	64	$5.4 \cdot 10^{-4}$	40	284	$2.8 \cdot 10^{-4}$
80	64	$2.9 \cdot 10^{-1}$	80	284	$2.8 \cdot 10^{-4}$

Tableau 2.4 – Erreur absolue entre la surface théorique de la bulle oscillante et celle prédite par le code de stabilité linéaire pour le mode  $l = 12$ ,  $Oh = 0.001$  pour deux discrétisations différentes de la surface ( $N_s = 64$  et  $N_s = 284$ ). La première colonne représente l'ordre à laquelle la troncature de la série de Fourier a été effectuée et la deuxième est le nombre de nœuds présents sur la surface

La résolution de l'équation (2.55) est faite de manière itérative grâce à un algorithme de Newton sous *MATLAB*. Les résultats sont utilisés dans les graphes 2.7-2.8 pour les comparer avec ceux donnés par notre code.

Ces valeurs propres correspondent à des oscillations iso-volumiques de la surface de la bulle. La figure 2.6 montre une coupe transversale dans le plan  $(0, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z)$ . Les solutions théoriques sont les harmoniques sphériques, définies par les polynômes de Legendre. Les résultats montrent un bon accord même pour des modes à haute fréquence,  $l = 12$ , possédant douze cercles nodaux. L'erreur absolue intégrale permet de quantifier l'écart entre la surface et sa valeur théorique sous la forme :

$$\epsilon_{surf} = 4\pi \int_{\Gamma_{b_0}} |\hat{\eta} - P_l| r_0 ds_0, \quad (2.59)$$

où  $\hat{\eta}$  est normé de façon à conserver une amplitude unitaire.

Le tableau 2.4 montre les différences observées dans différentes configurations entre la forme perturbée théorique et celle trouvée numériquement. On note que peu de fonctions de la base de Fourier sont nécessaires à la bonne représentation de la surface perturbée. Effectivement, les vingt premiers termes de la série de Fourier suffisent à bien représenter les polynômes de Legendre jusqu'au douzième degré. Il est à noter que tronquer trop loin la série de Fourier mène à des erreurs importantes. Les fonctions trigonométriques sont projetées sur des éléments  $\mathcal{P}_1$  et lorsque qu'une période,  $L_b/(k\pi a_F)$ , est définie par trop peu de points les erreurs sur les intégrales de celles-ci sont importantes et conduisent à de mauvaises évaluations des coefficients du problème matriciel. Afin de correctement définir les fonctions de la base de Fourier, nous avons choisi de ne pas descendre en dessous de 3 points par période spatiale pour garder une bonne précision, impliquant  $N_F \leq N_s/3$ .

#### 2.4.2 Convergence en maillage

Le cas de la bulle dans un fluide au repos a la particularité de posséder une solution analytique donnée par la résolution de l'équation (2.55). Il est ainsi possible de comparer les valeurs données par la résolution de cette équation avec le code de stabilité linéaire développé. Le tableau 2.5 permet de comparer les valeurs propres dans la limite des faibles nombres d'Ohnesorge (0.001) pour les modes  $l = \{2, 3, 11\}$ . On remarque que pour les deux premiers modes, le maillage (A) donne un bon accord avec la relation de Prosperetti, l'erreur étant largement inférieure à 1% avec un maillage comprenant moins de 4000 points. Avec l'utilisation des maillages (B), (C), (D) et (E), il est à noter que la solution du code converge vers les solutions de Prosperetti, le prix à payer étant l'augmentation du nombre points sur la surface de la bulle et à l'intérieur du domaine. Le nombre de points sur la surface,  $N_s$ , est plus important que celui dans le volume comme le montre la comparaison des résultats entre

Maillage	$Oh$	$l$	$m$	$N_s$	$N_F$	$N_v$	$R_\infty$	FreeFem++ LSA		Erreur relative	
								$\lambda_r$	$\lambda_i$	$\epsilon_r(\lambda_r)$	$\epsilon_r(\lambda_i)$
(A)	0.001	2	0	64	20	3935	10	-0.027057027	3.462933844	0.24 %	0.003 %
(B)	0.001	2	0	96	20	4434	10	-0.027035836	3.462907903	0.16 %	0.002 %
(C)	0.001	2	0	127	20	4952	10	-0.027026477	3.462893915	0.12 %	0.002 %
(D)	0.001	2	0	284	20	9652	10	-0.027003460	3.462873166	0.04 %	0.001 %
(E)	0.001	2	0	567	20	38308	10	-0.026993752	3.462868192	0.003 %	0.0009 %
(F)	0.001	2	0	567	20	70476	20	-0.026993698	3.462840227	0.003 %	$6.10^{-5}$ %
(A)	0.001	3	1	64	20	3935	10	-0.047392113	6.322452730	0.29 %	0.002 %
(B)	0.001	3	1	96	20	4434	10	-0.047332664	6.322421825	0.16 %	0.001 %
(C)	0.001	3	1	127	20	4952	10	-0.047315062	6.322400237	0.13 %	0.0007 %
(D)	0.001	3	1	284	20	9652	10	-0.047271963	6.322364861	0.03 %	0.0002 %
(E)	0.001	3	1	567	20	38308	10	-0.047256870	6.322356207	0.002 %	$4.10^{-5}$ %
(F)	0.001	3	1	567	20	70476	20	-0.047256854	6.322355652	0.002 %	$3.10^{-5}$ %
(A)	0.001	11	1	64	20	3935	10	-0.422778994	39.476669404	5.54 %	0.005 %
(B)	0.001	11	1	96	20	4434	10	-0.408066598	39.474415199	1.87 %	0.001 %
(B)	0.001	11	1	96	40	4434	10	-0.408065755	39.474422287	1.87 %	0.001 %
(C)	0.001	11	1	127	20	4952	10	-0.403677284	39.474677759	0.78 %	0.0003 %
(D)	0.001	11	1	284	20	9652	10	-0.400926288	39.474821857	0.09 %	$5.10^{-5}$ %
(E)	0.001	11	1	567	20	38308	10	-0.400591450	39.474801377	0.0001 %	$3.10^{-6}$ %
(E)	0.001	11	1	567	40	38308	10	-0.400591453	39.474801358	0.0001 %	$3.10^{-6}$ %

Tableau 2.5 – Valeurs propres ( $\lambda$ ) pour différents maillages et pour un nombre d’Ohnesorge  $Oh = 0.001$ . Erreur relative ( $\epsilon_r$ ) avec la valeur théorique prédite par PROSPERETTI [65], obtenue numériquement avec la relation (2.55).  $N_s$  est le nombre de points sur la surface,  $N_v$  est le nombre de nœuds du maillage et  $R_\infty$  est la distance entre la frontière  $\Gamma_\infty$  et le centre de la bulle.

les maillages (D) et (E) qui donnent des erreurs du même ordre avec un nombre de points total qui varie du simple au double.

Le cas du mode  $l = 11$  est un peu plus critique et demande un raffinement supérieur aux modes précédents. En effet, sa pulsation est largement supérieure aux deux autres donc la couche limite se développant à la surface de la bulle est plus fine et demande plus de nœuds pour être bien captée. Afin d’obtenir une erreur relative inférieure à 1%, l’utilisation du maillage (C) est nécessaire et seuls les maillages (D) et (E) peuvent atteindre une précision supérieure.

Comme le montre la figure 2.6, le mode  $l = 11$  présente une surface qui oscille avec 11 cercles nodaux et exhibe une forme plus complexe. En conséquence, l’influence du nombre de fonctions de Fourier prises pour projeter la perturbation de la courbure et le déplacement normal ( $\hat{\kappa}_1$  et  $\hat{\eta}$ ) a été testé. Le tableau 2.5 montre que choisir  $N_F = 20$  permet de converger vers le bon résultat et qu’augmenter ce nombre ne diminue pas l’erreur. Dans le cas d’une forme de base sphérique, les 20 premières fonctions de la base de Fourier suffisent à projeter avec précision les grandeurs surfaciques.

Dans le cas de faibles nombres d’Ohnesorge, la couche limite de la bulle est assez fine. En revanche, pour des nombres d’Ohnesorge proches de l’unité, la pulsation chute et la couche limite s’épaissit. Un plus grand domaine est éventuellement nécessaire et le nombre de points sur la surface peut diminuer. Comme les modes présentent la même topologie – forme d’interface perturbée, valeur de la perturbation de la courbure – le nombre de fonctions sur la base de Fourier peut rester identique au cas précédent.

Le tableau 2.6 donne les valeurs propres trouvées pour  $Oh = 0.5$ . Les contraintes sur le nombre de points sont faibles et avec un maillage léger, il est possible d’obtenir des résultats qui diffèrent de moins de 0.1% de la valeur théorique. Le mode  $l = 2$  est sensible à la taille du domaine avec une réelle différence sur les pulsations. Cela vient du fait qu’il a une faible pulsation impliquant une couche limite épaisse. Le mode  $l = 11$  a une fréquence angulaire

de  $1.99 \cdot 10^{-7} s^{-1}$ , proche du zéro machine. De ce fait le code ne réussit pas à lui donner une valeur autre que  $0 s^{-1}$ . Les erreurs dues à la taille du domaine peuvent apparaître lorsque la fréquence angulaire du mode est inférieure à  $1 s^{-1}$ , uniquement pour cette gamme, il peut être nécessaire de choisir une taille de domaine supérieure à dix rayons de la bulle.

Maillage	$Oh$	$l$	$m$	$N_s$	$N_F$	$N_v$	$R_\infty$	FreeFem++ LSA		Erreur relative	
								$\lambda_r$	$\lambda_i$	$\epsilon_r(\lambda_r)$	$\epsilon_r(\lambda_i)$
(A')	0.5	2	0	52	20	1088	10	-1.130486434	0.551392646	0.09 %	0.6 %
(B')	0.5	2	0	52	20	2563	20	-1.131432904	0.554698311	0.004 %	0.02 %
(A')	0.5	3	1	52	20	1088	10	-2.385955876	1.029893433	0.02 %	0.01 %
(B')	0.5	3	1	52	20	2563	20	-2.385381566	1.029409845	0.003 %	0.03 %
(A')	0.5	11	1	52	20	1088	10	-8.725573399	0.0	0.12 %	$2.10^{-7} \%^*$
(B')	0.5	11	1	52	20	2563	20	-8.728813122	0.0	0.09 %	$2.10^{-7} \%^*$

Tableau 2.6 – Valeurs propres ( $\lambda$ ) pour différents maillages et pour un nombre d’Ohnesorge  $Oh = 0.5$ . Erreur relative ( $\epsilon_r$ ) avec la valeur théorique prédite par PROSPERETTI [65], obtenue numériquement avec la relation (2.55). \* ici, l’erreur absolue est calculée car la pulsation trouvée avec la relation théorique vaut  $1.99 \times 10^{-7} s^{-1}$ .

Pour conclure, les contraintes imposées par le code de stabilité sur le maillage sont faibles à haut nombre de Ohnesorge ( $\gg 0.5$ ). Des maillages très légers peuvent suffire pour obtenir des résultats précis, tout en prenant garde à la taille du domaine. À très faible nombre d’Ohnesorge ( $\sim 0.001$ ), la bonne définition de la couche limite est contraignante et le maillage doit posséder un nombre suffisant de nœuds en son sein. Il a aussi été montré que le nombre de fonctions de la base de Fourier nécessaire était faible dans le cas sphérique, et qu’augmenter au-delà de 20 ce nombre n’apportait pas de précision supplémentaire si la surface est suffisamment bien discrétisée.

#### 2.4.3 Redondance des nombres d’onde azimutaux ( $m$ )

Nous allons vérifier une dégénérescence bien connue de problème admettant une symétrie sphérique et résolu au moyen d’harmoniques sphériques. Le nombre  $m$  n’est pas déterminant pour les valeurs propres du problème (2.55) car  $m$  dépend du choix de l’orientation de l’axe ( $Oz$ ) contrairement à  $l$ , le nombre total de cercles nodaux, qui n’est lié à aucune orientation du système de coordonnées. Il est ainsi possible de retrouver les mêmes modes d’oscillation pour différents nombres d’onde azimutaux  $m$  en gérant la condition à la limite sur le plan équatorial. Par exemple, le mode  $l = 2$  peut être obtenu avec  $m = 0$  et  $m = 2$  pour une symétrie sur le plan équatorial. Ce même mode peut être également retrouvé pour  $m = 1$  et une anti-symétrie par rapport au plan équatorial.

$l$	$m$	$n$	plan équatorial	$\lambda_r$	$\lambda_i$	$\epsilon_r(\lambda_r)$	$\epsilon_r(\lambda_i)$
2	0	2	symétrie	-0.027003460	3.462873166	0.04%	0.001%
2	1	1	anti-symétrie	-0.026998668	3.462875380	0.02%	0.001%
2	2	0	symétrie	-0.026997464	3.462877700	0.02%	0.001%
3	0	3	anti-symétrie	-0.047277523	6.322364653	0.05%	0.0002%
3	1	2	symétrie	-0.047271963	6.322364861	0.03%	0.0002%
3	2	1	anti-symétrie	-0.047266656	6.322367572	0.02%	0.0002%

Tableau 2.7 – Valeurs propres ( $\lambda$ ) de modes pour  $Oh = 0.001$ , calculées avec plusieurs nombres d’onde azimutaux. La valeur de référence pour calculer l’erreur relative ( $\epsilon_r$ ) est celle de PROSPERETTI [65], issue de la relation (2.55). Le maillage (D), décrit dans le tableau 2.5 a été utilisé assurant une bonne précision des résultats.

Maillage	$l$	$m$	$N_s$	$N_F$	$N_v$	$R_\infty$	Élts surf.	$\lambda_r$	$\lambda_i$	$\epsilon_r(\lambda_r)$	$\epsilon_r(\lambda_i)$
(D)	2	0	284	20	9652	10	Fourier	-0.027003460	3.462873166	0.04%	0.001%
(D)	2	0	284	-	9652	10	$\mathcal{P}_1$	-0.027003470	3.462901255	0.04%	0.002%
(D)	3	1	284	20	9652	10	Fourier	-0.047277523	6.322364653	0.05%	0.0002%
(D)	3	1	284	-	9652	10	$\mathcal{P}_1$	-0.047271989	6.322442379	0.03%	0.001%
(D)	11	1	284	20	9652	10	Fourier	-0.400926320	39.474822289	0.09%	$5.10^{-5}\%$
(D)	11	1	284	-	9652	10	$\mathcal{P}_1$	-0.400928610	39.480837966	0.09%	0.02%
(E)	11	1	567	40	38308	10	Fourier	-0.400591453	39.474801358	0.006%	$3.10^{-6}\%$
(E)	11	1	567	-	38308	10	$\mathcal{P}_1$	-0.400591929	39.476300189	0.006%	0.004%

Tableau 2.8 – Valeurs ( $\lambda$ ) propres de modes pour  $Oh=0.001$ , calculées avec deux versions du code, une avec les grandeurs surfaciques projetées sur la base de Fourier et une autre sur des éléments  $\mathcal{P}_1$  en éléments finis classiques. La valeur de référence pour calculer l’erreur relative ( $\epsilon_r$ ) est celle de PROSPERETTI [65], issue de la relation (2.55).

Cette redondance permet de vérifier l’implémentation correcte de la courbure, du déplacement de l’interface, du choix des fonctions de Fourier sur l’interface et des opérateurs  $\nabla$  (où chaque dérivation par rapport à l’azimut est remplacée par une multiplication par  $im\varphi$ ). Le tableau 2.7 montre effectivement que des résultats identiques ont été obtenus dans trois configurations géométriques,  $m = \{0, 1, 2\}$ , pour un mode pair et un mode impair. Cela atteste de la bonne prise en compte du nombre d’onde azimutal et des simplifications qu’elle implique grâce au repère cylindrique. La dépendance azimutale est bien respectée, la formulation 2D avec une décomposition azimutale des modes propres 3D est consistante.

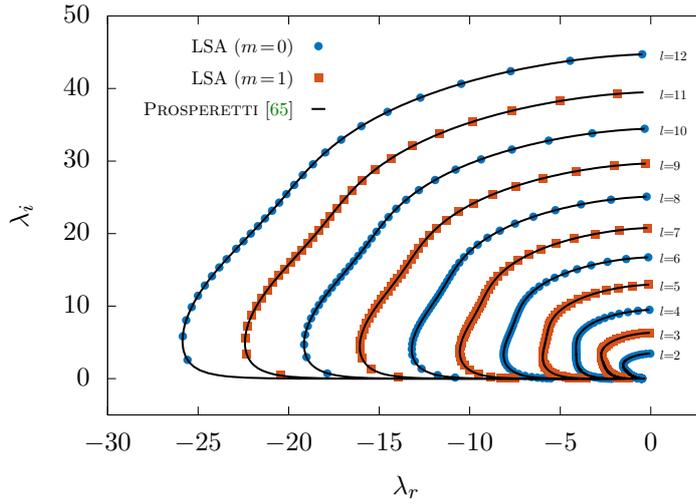
#### 2.4.4 Comparaison avec une discrétisation en éléments finis des grandeurs surfaciques

Les fonctions de Fourier permettent d’éviter les pressions parasites créées par les irrégularités de la surface près des pôles. Les courbures de la forme d’équilibre de la bulle exigent une très grande régularité de la surface puisqu’elles sont obtenues via les dérivées secondes du vecteur position par rapport à l’abscisse curviligne (Annexe A.3). Cependant, dans le cas des oscillations libres d’une bulle dans un fluide au repos, ces pressions parasites n’apparaissent pas grâce à la régularité de la forme d’équilibre de la bulle, la sphère.

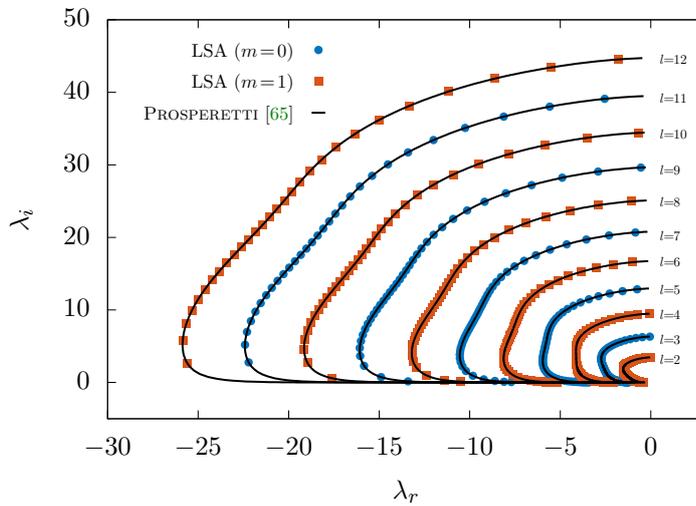
Il est alors envisageable de comparer les valeurs obtenues avec un code de stabilité utilisant la base de Fourier et le même code utilisant des fonctions  $\mathcal{P}_1$  pour projeter les grandeurs surfaciques. Dans les deux cas, le problème matriciel est quasiment identique, seul les blocs concernant la courbure, le déplacement normal et la conservation du volume diffèrent *i.e.*  $\mathcal{A}_{\kappa f}$ ,  $\mathcal{A}_{\kappa\kappa}$ ,  $\mathcal{A}_{\kappa\eta}$  et  $\mathcal{A}_{f\eta}$ .

Le tableau 2.8 compare les résultats obtenus pour trois modes et permet de montrer le bon accord entre les deux méthodes de discrétisation des grandeurs surfaciques. Néanmoins, il est à noter que la partie imaginaire des valeurs propres calculées dans le cas de la discrétisation  $\mathcal{P}_1$  exhibe une erreur supérieure jusqu’à plusieurs ordres à celle obtenue en utilisant la base de Fourier. La comparaison avec le maillage (E) montre que cette grandeur converge effectivement moins rapidement avec les éléments de surface  $\mathcal{P}_1$  qu’avec ceux de la base de Fourier.

Le seul bémol qui peut être imputé à la discrétisation avec des fonctions de Fourier est le temps d’assemblage des matrices avec le logiciel *FreeFem++*. Celui-ci est optimisé pour assembler des matrices d’éléments finis. Une matrice comprenant des intégrales de fonctions de la base de Fourier est plus longue à créer et surtout à assembler. D’autre part, les blocs utilisant une décomposition de Fourier sont des matrices pleines et non creuses comme avec l’utilisation de fonctions de forme en éléments finis. Les performances en terme de rapidité sont réduites mais il est montré dans les chapitres suivant que le gain en stabilité des algorithmes est effectif, voir 4.5.



(a) Cas symétrique



(b) Cas antisymétrique

FIGURE 2.7 – Spectres des modes propres (2 à 12) en fonction du nombre d'Ohnesorge. Analyse de stabilité linéaire avec *FreeFem++* et théorie. Deux conditions cinématiques ont été testées sur le plan équatorial, symétrie (a) et anti-symétrie (b).

#### 2.4.5 Évolution des oscillations de bulles en fonction du nombre d'Ohnesorge

Maintenant le code et le maillage validés quantitativement pour des valeurs discrètes, il est possible d'examiner le spectre continu des oscillations propres en fonction du nombre de Ohnesorge. Dans le code de stabilité, la viscosité du fluide peut être ajustée tandis que la masse volumique, la tension superficielle et rayon de la bulle sont gardés constants. Les calculs ont été effectués pour une gamme de nombre d'Ohnesorge  $Oh \in [0.001, 1.3]$ , sachant que pour une bulle d'air millimétrique dans l'eau pure à  $20^\circ C$ ,  $Oh = 0.0052$ .

La figure 2.7 montre les spectres obtenus dans deux cas de figure, un avec une condition de symétrie sur le plan équatorial et un autre avec une condition d'anti-symétrie. Cela redémontre sur toute sur une gamme de valeurs de nombre d'Ohnesorge la redondance des symétries du problème mais aussi la validité des résultats au regard de la relation de PROSPERETTI [65] tracée en ligne continue. Chaque branche représente un mode différent correspondant aux formes oscillantes de la figure 2.6, jusqu'à  $l = 12$ . La différence entre les

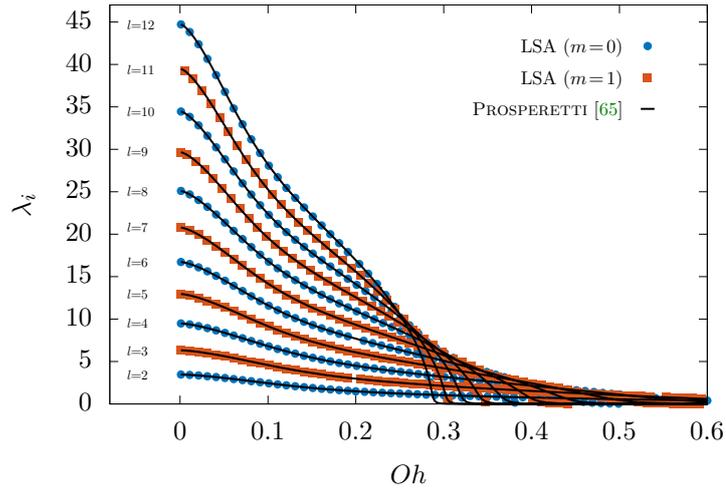


FIGURE 2.8 – Pulsation des modes propres (2 à 12) d’une bulle en fonction du nombre d’Ohnesorge. Analyse de stabilité linéaire avec *FreeFem++* et théorie.

deux spectres réside dans le fait que les modes pairs sont obtenus avec  $m = 0$  et les impairs avec  $m = 1$  dans le cas symétrique et inversement dans la configuration anti-symétrique. La limite non visqueuse ( $Oh \rightarrow 0$ ) est située sur l’axe des ordonnées où  $\lambda_r = 0$ . En effet, dans ce cas il n’y a pas d’amortissement des oscillations. L’autre limite correspond aux grands nombres d’Ohnesorge et est confondue avec l’axe des abscisses. Pour une telle condition, la diffusion visqueuse devient prépondérante face aux autres mécanismes et le mode tend vers une relaxation aperiodique vers la position d’équilibre.

Le nombre d’onde principal  $l$  représente le nombre de cercles nodaux à la surface de la bulle : plus  $l$  est petit, plus le mode d’oscillation minimise la surface. Ainsi les modes à faible nombre d’onde principal ont des taux d’amplifications plus élevés car ils mettent en jeu moins d’énergie de surface – la surface perturbée étant plus faible. L’énergie qu’il faut fournir à ceux-ci pour qu’ils s’activent est moins importante.

Il a été difficile de suivre les modes à pulsation quasi nulle et les résultats numériques s’arrêtent à des nombres d’Ohnesorge plus faibles que la courbe théorique, notamment pour les modes à haut nombre d’onde principal.

La pulsation décroît avec l’augmentation du nombre d’Ohnesorge et tend vers zéro comme le montre la figure 2.8. Il n’y a pas de bifurcation vers un mouvement aperiodique, comme ce serait le cas pour une goutte, mais la pulsation admet zéro comme valeur asymptotique. La brusque chute de la pulsation correspond à un maximum de l’amortissement, comme le montre la figure 2.9. Le taux d’amplification devient très faible et le mouvement devient proche du mouvement aperiodique avec une période qui tend vers l’infini. Ensuite, pour des nombres d’Ohnesorge supérieurs à ces extrema, le taux d’amplification augmente pour se rapprocher de zéro tout en gardant une différence nette entre avec le taux d’amplification et les modes voisins.

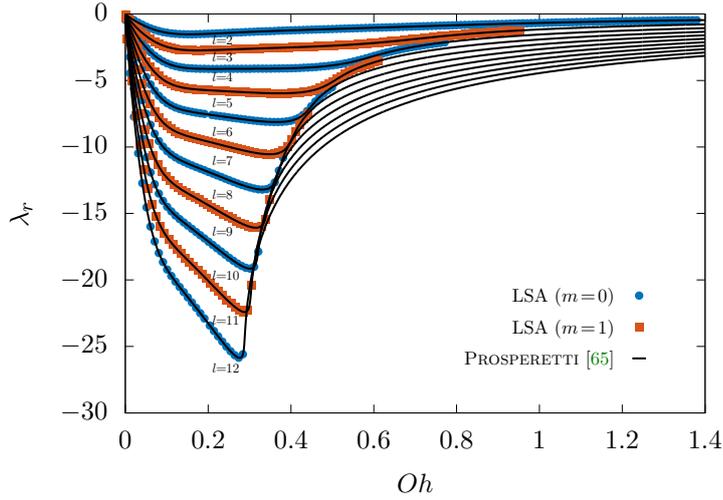


FIGURE 2.9 – Taux d’amplification des modes propres (2 à 12) en fonction du nombre d’Ohnesorge. Analyse de stabilité linéaire avec *FreeFem++* et théorie.

## 2.5 ÉTUDE LINÉAIRE D’OSCILLATIONS DE GOUTTES

Cette validation reprend aussi les travaux de PROSPERETTI [65], plus précisément le cas d’une goutte dans le vide, ou plutôt, d’une goutte dans un fluide dont la viscosité et la masse volumique sont négligeables comparativement à celles de la goutte. Les choix vis-à-vis des équations et discrétisations utilisés dans le cas de la bulle sont toujours valables. Les mêmes phénomènes physiques sont considérés, la principale différence réside dans le domaine de calcul qui se limite à la goutte, soit un quart de disque (figure 2.5).

### 2.5.1 Relation théorique et convergence en maillage

PROSPERETTI [65] donne la relation permettant d’obtenir les valeurs propres de ce problème sous la forme :

$$(\lambda^2 - 2b_D\lambda + \omega_D^2) [\tilde{\mathcal{J}}_{l-3/2}(X) - 2] + 4(l-1)^2(l+1)\frac{\nu}{R^2} = 0, \quad (2.60)$$

où

$$\begin{cases} \omega_D^2 = (l-1)l(l+2)\frac{\gamma}{\rho}R^3 \\ b_D = (l-1)(2l+1)\frac{\nu}{R^2} \end{cases} \quad (2.61)$$

désignent la pulsation de la goutte dans un fluide non visqueux et le taux d’amortissement dans la limite faiblement visqueuse (LAMB [46]), et,

$$X = R \left( \frac{\lambda}{\nu} \right)^{1/2}, \quad \tilde{\mathcal{J}}_n(z) = z \frac{J_{n-1}(z)}{J_n(z)} \quad (2.62)$$

où  $J_n$  est la fonction de Bessel de première espèce.

Le code de stabilité linéaire a ainsi été testé sur une plage de nombre d’Ohnesorge [0.001, 1] par pas de 0.001. Les valeurs propres trouvées numériquement ont été confrontées à la relation théorique (2.60) précédemment citée. Les détails du maillage utilisé sont donnés dans le tableau 2.9. Le maillage (AA), le plus léger, est retenu en raison du bon accord qu’il permet

Maillage	$Oh$	$l$	$m$	$N_s$	$N_F$	$N_v$	$\lambda_r$	$\lambda_i$	$\epsilon_r(\lambda_r)$	$\epsilon_r(\lambda_i)$
(AA)	0.001	2	0	283	4744	30	-0.006937966	2.828296376	0.022 %	0.00027 %
(BB)	0.001	2	0	566	18629	30	-0.006937607	2.828290634	0.017 %	$6.10^{-5}$ %
(AA)	0.001	3	1	283	4744	30	-0.019286223	5.476715622	0.0160 %	0.00027 %
(BB)	0.001	3	1	566	18629	30	-0.019284978	5.476704087	0.0096 %	$6.10^{-5}$ %

Tableau 2.9 – Valeurs propres ( $\lambda$ ) pour différents maillages pour un nombre d’Ohnesorge  $Oh=0.001$  calculées avec le code de stabilité linéaire et erreur relative ( $\epsilon_r$ ) avec la valeur théorique prédite par PROSPERETTI [65] obtenue numériquement via la relation (2.60).

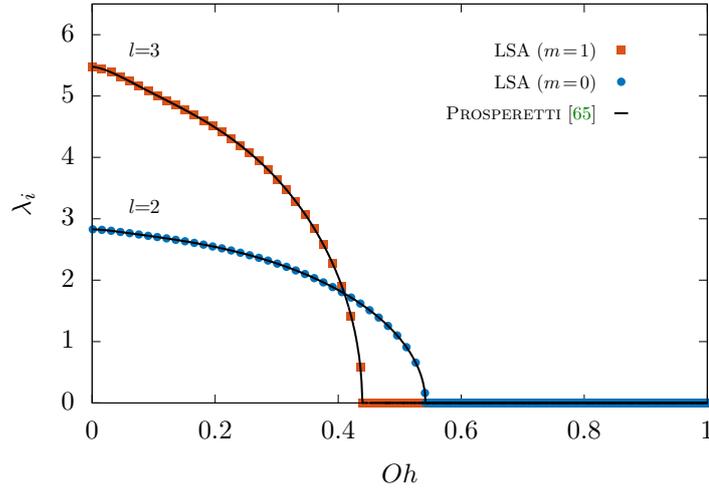


FIGURE 2.10 – Pulsation des modes propres (2 et 3) d’une goutte dans le vide en fonction du nombre d’Ohnesorge. Analyse de stabilité linéaire avec *FreeFem++* et théorie.

avec la théorie, soit une erreur relative maximale de l’ordre du centième de pourcent pour les modes  $l = \{2, 3\}$  à  $Oh=0.001$ .

### 2.5.2 Évolution des oscillations de gouttes en fonction du nombre d’Ohnesorge

La figure 2.11 présente la diminution de fréquence qui s’opère pour les modes 2 et 3 lorsque le nombre d’Ohnesorge augmente. Il existe même un nombre  $Oh_{l,c}$  critique pour lequel il y a un changement du mouvement oscillant amorti à une relaxation apériodique jusqu’à la forme d’équilibre. La pulsation devient nulle au-delà de  $Oh_{2,c} = 0.542$  pour le deuxième mode et  $Oh_{3,c} = 0.440$  pour le troisième. Les résultats de l’analyse de stabilité linéaire effectuée avec *FreeFem++* sont en très bon accord avec la théorie PROSPERETTI [65] autant pour la valeur du nombre d’Ohnesorge critique que sur toute la gamme de paramètre testée. Comme l’explique Properetti, la figure 2.11 montre que conformément à la transition observée pour le nombre d’Ohnesorge critique, on obtient deux valeurs propres réelles, la moins amortie correspondant au cas où la goutte retourne à l’équilibre dans un écoulement de Stokes, de façon apériodique.

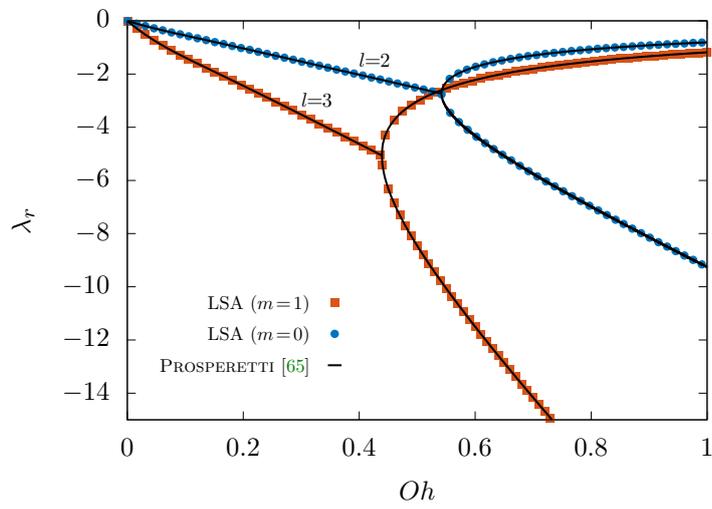


FIGURE 2.11 – Taux d'amplification des modes propres (2 et 3) d'une goutte dans le vide en fonction du nombre d'Ohnesorge. Analyse de stabilité linéaire avec *FreeFem++* et théorie.



## RÉSOLUTION D'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES AVEC CHANGEMENT DE DOMAINE

L'objectif est de trouver une formulation permettant de résoudre une équation aux dérivées partielles sur un domaine déformé en utilisant uniquement un domaine de référence et la bijection permettant de passer d'un domaine à l'autre. Deux domaines seront ainsi définis, le premier est le domaine de calcul (ou de référence), celui sur lequel les équations sont résolues numériquement. Le second domaine est le domaine physique, il est la représentation de l'espace physique sur lequel on souhaite obtenir la solution des équations.

Dans ce chapitre, la relation permettant de passer d'un domaine à l'autre sera prescrite mais dans les chapitres suivants, elle sera inconnue. Ce travail est un prérequis à la formulation des équations de Navier-Stokes sur un domaine qui se déforme. Avant de passer à une équation vectorielle, on s'intéresse ici à un problème modèle linéaire scalaire : l'équation de Poisson tridimensionnelle et axisymétrique en coordonnées cylindriques (physiquement, cela correspond à l'équation de la chaleur stationnaire à conductivité uniforme avec un forçage volumique). Pour résoudre cette équation, la méthode des éléments finis (*FEM*) sera utilisée. Le problème sera exprimé de manière faible, faisant apparaître des intégrales volumiques et surfaciques sur le domaine physique. La méthode proposée dans ce travail consiste à réécrire ces équations sur le domaine de calcul via un changement de variables.

La première partie de ce chapitre s'intéressera à définir la bijection et le changement de variables permettant de passer du domaine physique au domaine de calcul. Une deuxième partie s'attardera sur les opérateurs de dérivation spatiale des coordonnées physiques sur le domaine de calcul en faisant intervenir la bijection entre les deux domaines. Ces deux derniers éléments permettront de transposer la formulation faible de l'équation de Poisson du domaine physique vers le domaine de calcul. Les outils autorisant à exprimer des équations sur un domaine de calcul différent du domaine physique seront alors définis. Le résultat de l'application à l'équation de Poisson sera comparé avec la solution attendue.

### 3.1 ÉQUATION DE POISSON SUR UN DOMAINE DÉFORMÉ

#### 3.1.1 Formulation forte

L'équation modèle choisie est l'équation de Poisson qui est assimilable l'équation stationnaire de la chaleur stationnaire avec un terme source. Elle est écrite sur le domaine déformé et nous la linéariserons ensuite sur le domaine de référence.

La formulation forte de ce problème est la suivante :

$$\begin{aligned}
 \lambda \Delta_{\Omega} T(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) &= 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\
 T|_{\Gamma_D} &= T_D & \Gamma_D \subset \partial\Omega \\
 \nabla_{\Omega} T \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} &= \mathbf{q}_N \cdot \mathbf{n} & \Gamma_N \subset \partial\Omega
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $\lambda$  est la conductivité thermique considérée comme constante sur tout le domaine  $\Omega$ . Le domaine physique, sur lequel on veut trouver la solution est  $\Omega$  et possède deux frontières où sont appliquées, (sur  $\Gamma_D$ ) une condition de Dirichlet et (sur  $\Gamma_N$ ) une condition de Neumann.

**Remarque :** Dans ce problème, le temps n'est pas une variable car une solution station-

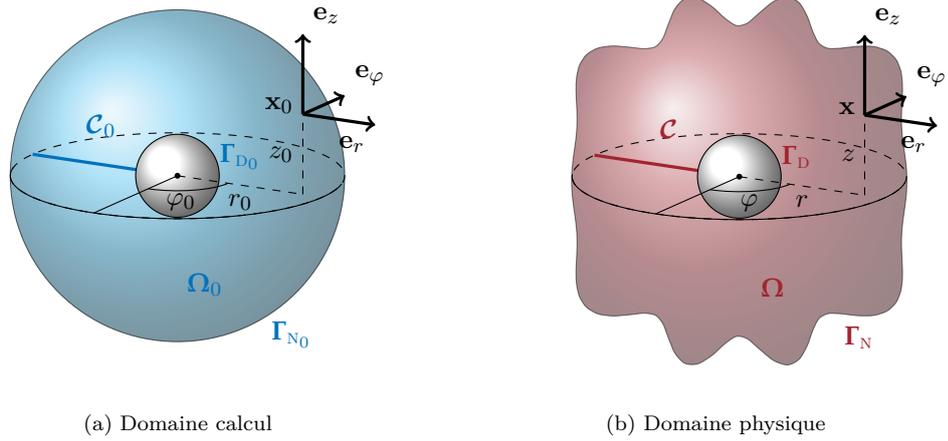


FIGURE 3.1 – Domaine de calcul et domaine physique sur lesquels le problème thermique est défini

nnaire est recherchée. Même si le domaine n'est pas dépendant du temps il est noté  $\Omega$ . Dans le chapitre suivant, le domaine physique suivra le contour d'une bulle qui oscille, il sera alors noté  $\Omega_t$ .

L'équation de la chaleur stationnaire (3.1) permet d'illustrer la méthode développée ici. L'objectif est d'approcher la solution de ce problème sur le domaine physique  $\Omega$  (figure 3.1b), en utilisant uniquement le domaine de calcul  $\Omega_0$  (figure 3.1a). La géométrie sur laquelle est résolu ce problème thermique est une boule de rayon unitaire  $R_\epsilon$  déformée de façon axisymétrique et évidée en son centre d'une sphère de rayon  $\frac{R_\epsilon}{4}$ . Le problème étant axisymétrique, le domaine de calcul se réduit à un demi-disque troué en son centre. Le problème de conduction thermique à résoudre est décrit sous sa formulation forte par (3.1). La bijection entre les deux domaines, *i.e.* la fonction qui permet de passer du domaine de référence au domaine physique, est connue :

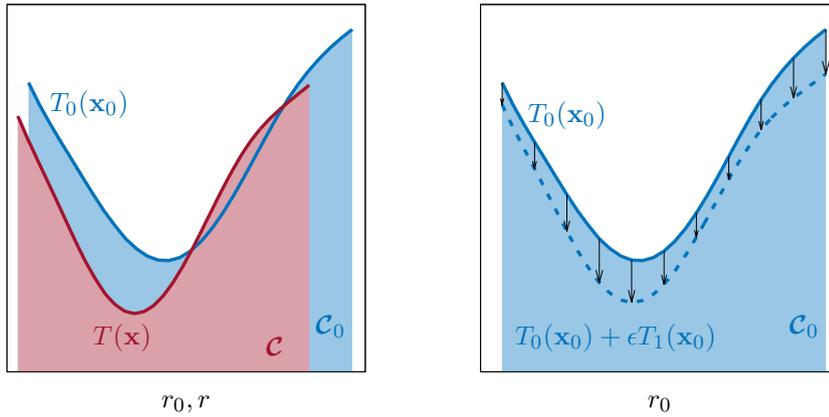
$$\Phi : (\mathbf{x}_0, t) \mapsto (\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}, t) = (\mathbf{x}_0 [1 - \epsilon \cos(4\pi r_0)], t) \quad (3.2)$$

D'autres bijections ont été testées mais celle-ci a la particularité d'avoir un déplacement normal à la frontière extérieure de  $\Omega_0$ , ce qui permet de tester les différentes façons de gérer les dilations ou contractions des surfaces élémentaires.

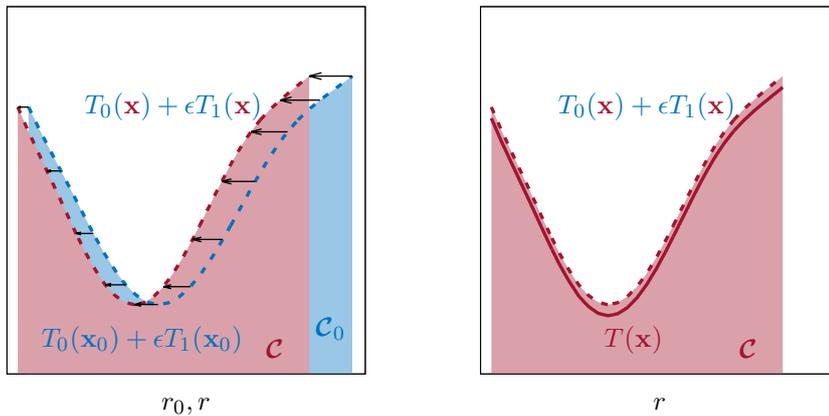
Grâce à la connaissance de la bijection (3.2), le problème thermique (3.1) défini sur  $\Omega$  pourra être décomposé en deux sous-problèmes sur le domaine  $\Omega_0$ . Chaque problème permettra de résoudre la température à un ordre différent qui sera décomposée sous la forme :

$$T(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}_0) + \epsilon T_1(\mathbf{x}_0) + O(\epsilon^2) \quad (3.3)$$

Un problème à l'ordre zéro et un problème à l'ordre un par rapport au petit paramètre  $\epsilon$  seront définis. Le premier est identique au problème écrit sur le domaine physique  $\Omega$  mais il sera exprimé sur le domaine de référence  $\Omega_0$ . Il donnera  $T_0(\mathbf{x}_0)$ . Le problème à l'ordre un permettra de prendre en compte les différences entre  $\Omega_0$  et  $\Omega$ . Il donnera ainsi la correction  $\epsilon T_1(\mathbf{x}_0)$  à ajouter à la température  $T_0(\mathbf{x}_0)$  afin d'approcher la solution du problème (3.1). Enfin, il suffira de projeter la solution corrigée à l'ordre  $\epsilon$  sur le domaine physique  $\Omega$  pour obtenir une approximation de  $T(\mathbf{x})$  en n'utilisant que le domaine de référence  $\Omega_0$  et la bi-



- (a) Résolution du problème à l'ordre 0. On représente  $T_0(\mathbf{x}_0)$  et  $T(\mathbf{x})$  sur leurs contours respectifs  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}$ . L'objectif est d'approcher la solution  $T(\mathbf{x})$  à partir de calculs sur le domaine de référence.
- (b) Résolution du problème à l'ordre 1. Ajout de la correction  $\epsilon T_1$  à  $T_0$ , tous deux définis sur  $\mathcal{C}_0$ . La grandeur  $T_0 + \epsilon T_1$  est obtenue sur le domaine de référence.



- (c) Projection de la grandeur corrigée  $T_0 + \epsilon T_1$  sur le domaine déformé :  $T_0(\mathbf{x}_0) + \epsilon T_1(\mathbf{x}_0) \mapsto T_0(\mathbf{x}) + \epsilon T_1(\mathbf{x})$
- (d) Comparaison entre le résultat du problème linéarisé à l'ordre 1 et la solution recherchée  $T$ .

FIGURE 3.2 – Schéma illustrant le principe du calcul de l'approximation de la solution sur le domaine déformé (rouge), à partir des solutions calculées sur le domaine de référence (bleu). Les valeurs sur le plan équatorial des températures sont représentées.

jection le reliant à  $\Omega$ .

Les schémas présentés sur la figure 3.2 montrent les différentes étapes pour arriver à l'approximation de la solution sur le domaine physique. Pour illustrer les différentes étapes, les températures sur des portions de  $\Omega_0$  et  $\Omega$  notées  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}$  sont représentées sur la figure 3.1.

## 3.1.2 Formulation faible sur le domaine PHYSIQUE

La formulation faible du problème (3.1) est obtenue en la multipliant par une fonction-test  $\tilde{T}$  et en intégrant sur le domaine déformé :

$$\int_{\Omega} \Delta_{\Omega} T \tilde{T} + \int_{\Omega} f \tilde{T} + \int_{\Gamma_D} (T \tilde{T} - T_D \tilde{T}) \frac{1}{\epsilon_D} = 0 \quad (3.4)$$

Cette équation contient la condition de Dirichlet via une pénalisation grâce au terme  $\frac{1}{\epsilon_D}$  avec  $\epsilon_D \ll 1$ .

**Notation :** En vue d'alléger le formalisme, les volumes élémentaires sont omis des écritures intégrales. Il est sous-entendu que  $dv = r dr d\varphi dz$  pour les intégrales sur  $\Omega$  et  $dv_0 = r_0 dr_0 d\varphi_0 dz_0$  sur  $\Omega_0$ . Le même raisonnement est appliqué pour les intégrales surfaciques, où l'on sous-entend les surfaces élémentaires  $dA = r ds d\varphi$  sur  $\partial\Omega$  et  $dA_0 = r_0 ds_0 d\varphi_0$  sur  $\partial\Omega_0$ .

Ensuite, une intégration par parties sur le laplacien de la température, fait apparaître la condition de Neumann et réduit l'ordre des dérivées spatiales.

$$- \int_{\Omega} \nabla_{\Omega} T \cdot \nabla_{\Omega} \tilde{T} + \int_{\Omega} f \tilde{T} + \int_{\Gamma_N} \nabla_{\Omega} T \cdot \mathbf{n} \tilde{T} + \int_{\Gamma_D} (T \tilde{T} - T_D \tilde{T}) \frac{1}{\epsilon_D} = 0 \quad (3.5)$$

Définissons l'espace vectoriel :

$$H^1(\Omega) = \{T \in L^2(\Omega) : \nabla_{\Omega} T \in (L^2(\Omega))^3\} \quad (3.6)$$

La condition de Neumann peut être intégrée, et donne la formulation variationnelle sur le domaine physique :

Trouver  $T \in H^1(\Omega)$  tel que  $\forall \tilde{T} \in H^1(\Omega)$  :

$$- \int_{\Omega} \nabla_{\Omega} T \cdot \nabla_{\Omega} \tilde{T} + \int_{\Omega} f \tilde{T} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{q}_N \cdot \mathbf{n} \tilde{T} + \int_{\Gamma_D} (T \tilde{T} - T_D \tilde{T}) \frac{1}{\epsilon_D} = 0 \quad (3.7)$$

## 3.2 PROBLÈME DE POISSON AVEC CHANGEMENT DE DOMAINE

Une fois la formulation faible du problème écrite, l'objectif est de transposer cette dernière sur le domaine de référence  $\Omega_0$ .

## 3.2.1 Changement de variable pour une intégrale multiple

Soit  $\Phi$  une application bijective, de classe  $\mathcal{C}^1$ , de  $\Omega_0$  sur  $\Omega_t$  dont sa bijection réciproque est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$ . Cette application est susceptible de varier au cours du temps. Une représentation schématique de cette bijection est donnée par la figure 3.3.

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \Omega_0 \times (0, T) &\mapsto \Omega_t \times (0, T) \\ (\mathbf{x}_0, t) &\mapsto (\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le domaine  $\Omega_t$  peut se déformer, certaines de ses frontières sont mobiles. C'est là où réside la difficulté puisqu'il faudra écrire des équations sur ce domaine mouvant.

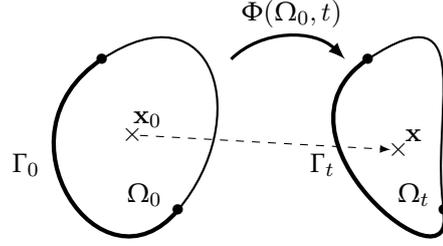


FIGURE 3.3 –  $\Omega_t$  (resp.  $\Gamma_t \subset \partial\Omega_t$ ) est l'image de  $\Omega_0$  (resp.  $\Gamma_0 \subset \partial\Omega_0$ ) par l'application bijective  $\Phi$ .

**Remarque :** L'application  $\Phi$  peut être appelée un « mapping » spatio-temporel. En effet, à une position et un temps sont associés, une autre position et un autre temps. C'est un changement de référentiel mais qui gardera le même repère,  $(\mathbf{OM}, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$

Soient  $J_\Phi$  sa matrice jacobienne et  $D_{J_\Phi}$  son jacobien,

$$J_\Phi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \quad \text{et} \quad D_{J_\Phi} = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \right| = \det(J_\Phi) \tag{3.9}$$

Comme  $\Phi^{-1}(\Omega_t, t) = (\Omega_0, t)$ , la formule du changement de variables pour une fonction quelconque  $f$  s'écrit :

$$\int_{\Omega_t} f(\mathbf{x})dv = \int_{\Omega_0} f(\Phi(\mathbf{x}_0, t))\tilde{D}_{J_\Phi}dv_0 \tag{3.10}$$

Le terme  $\tilde{D}_{J_\Phi}$  représente le jacobien modifié de la bijection de telle sorte qu'il intègre le changement de variable sur les termes de métriques. En coordonnées cylindriques, le volume élémentaire s'écrit  $dv = r dr d\varphi dz$ , il est nécessaire d'effectuer le changement de variable sur  $r$  auquel la bijection  $\Phi$  associe  $r_0 + \epsilon \xi_r$ . En factorisant par  $dv_0 = r_0 dr_0 d\varphi_0 dz_0$ , on retrouve le jacobien modifié  $\tilde{D}_{J_\Phi} = D_{J_\Phi} \cdot (1 + \epsilon \xi_r / r_0)$ . Il peut se voir comme le ratio des éléments volumiques des deux domaines  $\tilde{D}_{J_\Phi} = \frac{dv}{dv_0}$ . Pour un système de coordonnées cartésiennes, on a plus simplement  $\tilde{D}_{J_\Phi} = D_{J_\Phi}$ . Une description plus complète de ce changement de variable est donnée en Annexe B.1.

Soit  $d$  la dimension de  $\Omega_0$ . Dans le cas d'une intégrale surfacique sur un contour  $\Gamma_t$ , avec  $\Phi^{-1}(\Gamma_t, t) = (\Gamma_0, t)$ ,

$$\int_{\Gamma_t} f(\mathbf{x})d\mathcal{A} = \int_{\Gamma_0} f(\Phi(\mathbf{x}_0, t))\Pi_i^{d-1} \mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathcal{J}}_\Phi \cdot \mathbf{e}_i d\mathcal{A}_0, \tag{3.11}$$

où  $\mathbf{e}_i$  désignent les vecteurs générateurs de  $\Gamma_0$ . Le terme  $\Pi_i^{d-1} \mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathcal{J}}_\Phi \cdot \mathbf{e}_i$  représente la variation de la surface élémentaire avec  $\tilde{\mathcal{J}}_\Phi = \nabla_{\Omega_0} \mathbf{x}$ . De la même façon que pour l'intégrale volumique,  $\tilde{\mathcal{J}}_\Phi$  représente la jacobienne modifiée de la bijection de telle sorte qu'elle intègre le changement de variable sur les termes de métriques. Aussi, dans le cas cartésien,  $\tilde{\mathcal{J}}_\Phi$  sera identique à  $J_\Phi$ . L'annexe B.1 donne de plus amples informations pour les cas cylindrique et cartésien de ce changement de variables.

### 3.2.2 Linéarisation de la bijection

Soit  $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  le champ vectoriel représentant le déplacement entre les deux domaines. Par la suite, on considère que  $\|\mathbf{d}\| \ll \|\mathbf{x}_0\|$  et on choisit d'écrire  $\mathbf{d}$  sous la forme suivante :

$$\mathbf{d} = \epsilon \boldsymbol{\xi} \quad (3.12)$$

avec  $\epsilon \ll 1$ . Cela revient à définir la bijection (3.8) comme :

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \Omega_0 \times (0, T) &\mapsto \Omega_t \times (0, T) \\ (\mathbf{x}_0, t) &\mapsto (\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, t), t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

La matrice jacobienne et le jacobien (3.9) peuvent aussi être développés :

$$J_\Phi = \frac{\partial(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d})}{\partial \mathbf{x}_0} = I + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}_0} \quad \text{et} \quad D_{J_\Phi} = \det \left( I + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}_0} \right). \quad (3.14)$$

La distance entre un point et son image est, par conséquent, du premier ordre par rapport au paramètre  $\epsilon$ . Il est supposé comme *petit* devant les autres grandeurs et un développement au premier ordre est possible. Il est alors possible de linéariser les expressions vis-à-vis de ce paramètre.

### 3.2.3 Changement de variables linéarisé

L'équation (B.3), démontrée en annexe, donne le changement de variables permettant de se ramener à une intégrale sur le domaine de calcul  $\Omega_0$ .

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{f}(\mathbf{x}) dv = \int_{\Omega_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}) (1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi}) dv_0 + O(\epsilon^2) \quad (3.15)$$

Les formulations variationnelles font aussi intervenir des intégrales surfaciques qu'il faut exprimer sur un contour  $\Gamma_0 \subset \partial \Omega_0$ . Dans ce cas, le changement de variables est obtenu en annexe avec la relation (B.11) :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t} f(\mathbf{x}) d\mathcal{A} &= \int_{\Gamma_0} f(\mathbf{x}_0) \left[ 1 + \epsilon \left( \frac{\eta_r}{r_0} + \mathbf{t}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \right] d\mathcal{A}_0 + O(\epsilon^2) \\ &= \int_{\Gamma_0} f(\mathbf{x}_0) \left[ 1 + \epsilon \eta \left( \frac{n_{0r}}{r_0} - \kappa_0^{(a)} \right) \right] d\mathcal{A}_0 + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Cette dernière expression est uniquement valable pour un système de coordonnées cylindriques, le seul utilisé tout au long de ce manuscrit. Une hypothèse importante pour arriver à cette expression est que la déformation permettant de passer de  $\Gamma_0$  à  $\Gamma_t$  se fait dans la direction normale à  $\Gamma_0$  comme indiqué dans le paragraphe *Surfaces Élémentaires* en annexe, relation (B.7).

## 3.3 OPÉRATEURS DE DÉRIVATION SPATIALE

La connaissance de la bijection  $\Phi$  permet de calculer les dérivées spatiales par rapport aux variables de  $\Omega$ . Gradient et divergence sur le domaine physique vont ainsi être exprimés sur le domaine de calcul. Les développements correspondant à la linéarisation des gradients et

divergences sont faits en annexe B.2.

L'opérateur nabla est noté  $\nabla_{\Omega_0}$  sur  $\Omega_0$  et  $\nabla_{\Omega_t}$  sur  $\Omega_t$  et permet d'exprimer gradients et divergences sur ces deux domaines.

Les gradients :

$$\nabla_{\Omega_t} T = (I - \epsilon \nabla_{\Omega_0}^T \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\Omega_0} T + O(\epsilon^2) \quad (3.17)$$

$$\nabla_{\Omega_t} \mathbf{f} = \nabla_{\Omega_0} \mathbf{f} (I - \epsilon \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi}) + O(\epsilon^2) \quad (3.18)$$

La divergence :

$$\nabla_{\Omega_t} \cdot \mathbf{f} = \nabla_{\Omega_0} \cdot \mathbf{f} - \epsilon \nabla_{\Omega_0} \mathbf{f} : \nabla_{\Omega_0}^T \boldsymbol{\xi} + O(\epsilon^2) \quad (3.19)$$

### 3.3.1 Formulation faible sur le domaine de CALCUL

PREMIÈRE ÉTAPE. Les intégrales définies sur le domaine physique sont ramenées sur le domaine de calcul grâce aux intégrations par changement de variables (3.15),(3.16) :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_0} \nabla_{\Omega} T(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\Omega} \tilde{T}(\mathbf{x}_0) (1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi}) + \int_{\Omega_0} f(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}) \tilde{T}(\mathbf{x}_0) (1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi}) \\ & + \int_{\Gamma_{D_0}} (T(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}) - T_D(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi})) \tilde{T}(\mathbf{x}_0) \frac{1}{\epsilon_D} \left[ 1 + \epsilon \left( \frac{\xi_r}{r_0} + \mathbf{t}_0 \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \right] \\ & + \int_{\Gamma_{N_0}} \mathbf{q}_N(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}) \left[ 1 + \epsilon \left( \frac{\xi_r}{r_0} + \mathbf{t}_0 \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \right] \tilde{T}(\mathbf{x}_0) \\ & + O(\epsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

**Remarque :** Il est à noter que le changement de variables ne s'applique pas à la fonction-test  $\tilde{T}$ . En effet celle-ci étant liée au domaine sur lequel les équations sont définies, elle prend directement en argument la position du domaine sur lequel elle est exprimée. Ainsi,  $\tilde{T}(\mathbf{x})$  dans la relation (3.7) est directement remplacée par  $\tilde{T}(\mathbf{x}_0)$  dans la relation précédente (3.20).

DEUXIÈME ÉTAPE. Les grandeurs définies en  $\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}$  doivent être linéarisées de la sorte :

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T_0(\mathbf{x}_0) + \epsilon T_1(\mathbf{x}_0) + O(\epsilon^2) \\ f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \epsilon \nabla_{\Omega_0} f \cdot \boldsymbol{\xi} + O(\epsilon^2) \\ T_D(\mathbf{x}) &= T_D(\mathbf{x}_0) + \epsilon \nabla_{\Omega_0} T_D \cdot \boldsymbol{\xi} + O(\epsilon^2) \\ \mathbf{q}_N(\mathbf{x}) &= \mathbf{q}_N(\mathbf{x}_0) + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \mathbf{q}_N \cdot \boldsymbol{\xi} + O(\epsilon^2) \\ \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{n}_0(\mathbf{x}_0) + \epsilon \mathbf{n}_1(\mathbf{x}_0) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

**Remarque :** Il peut être nécessaire de préciser qu'en faisant un développement de Taylor sur  $T$ , on obtient :

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}) \\ &= T(\mathbf{x}_0) + \epsilon \nabla_{\Omega_0} T(\mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\xi} + O(\epsilon^2) \\ &= T_0(\mathbf{x}_0) + \underbrace{\epsilon \tilde{T}_1(\mathbf{x}_0) + \epsilon (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\Omega_0}) T(\mathbf{x}_0)}_{\epsilon T_1(\mathbf{x}_0)} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$T(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}_0) + \epsilon T_1(\mathbf{x}_0) + O(\epsilon^2)$$

La grandeur  $T_1$ , au premier ordre, intègre l'advection du champ de base  $T_0$  par le champ de déformation  $\boldsymbol{\eta}$ , qui permet de passer de  $\Omega_0$  à  $\Omega$ .

En utilisant (3.21), toutes les grandeurs vont être exprimées sur le domaine de référence et admettent  $\mathbf{x}_0$  comme argument – il ne sera plus noté. La formulation variationnelle du problème devient :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_0} \nabla_{\Omega} (T_0 + \epsilon T_1) \cdot \nabla_{\Omega} \tilde{T} (1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi}) + \int_{\Omega} (f + \epsilon \nabla_{\Omega_0} f \cdot \boldsymbol{\xi}) \tilde{T} (1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi}) \\ & + \int_{\Gamma_{D_0}} [(T_0 + \epsilon T_1) - (T_D + \epsilon \nabla_{\Omega_0} T_D \cdot \boldsymbol{\xi})] \frac{1}{\epsilon_D} \left[ 1 + \epsilon \left( \frac{\xi_r}{r_0} + \mathbf{t}_0 \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \right] \tilde{T} \\ & + \int_{\Gamma_{N_0}} (\mathbf{q}_N + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \mathbf{q}_N \cdot \boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{n}_0 + \epsilon \mathbf{n}_1) \left[ 1 + \epsilon \left( \frac{\xi_r}{r_0} + \mathbf{t}_0 \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \right] \tilde{T} \\ & + O(\epsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

**Remarque :** Le paramètre  $\epsilon_D$  servant à appliquer la condition Dirichlet est toujours plus petit que le paramètre  $\epsilon$  :  $\epsilon_D \ll \epsilon$

TROISIÈME ÉTAPE. Les gradients du domaine physique doivent être exprimés sur le domaine de calcul. La relation (3.18) permet cela, linéarisant ainsi ces derniers sous la forme :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_0} \left[ (I - \epsilon \nabla_{\Omega_0}^T \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\Omega_0} (T_0 + \epsilon T_1) \right] \cdot \left[ (I - \epsilon \nabla_{\Omega_0}^T \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\Omega_0} \tilde{T} \right] (1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi}) \\ & + \int_{\Omega} (f + \epsilon \nabla_{\Omega_0} f \cdot \boldsymbol{\xi}) \tilde{T} (1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi}) \\ & + \int_{\Gamma_{D_0}} [(T_0 + \epsilon T_1) - (T_D + \epsilon \nabla_{\Omega_0} T_D \cdot \boldsymbol{\xi})] \frac{1}{\epsilon_D} \left[ 1 + \epsilon \left( \frac{\xi_r}{r_0} + \mathbf{t}_0 \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \right] \tilde{T} \\ & + \int_{\Gamma_{N_0}} (\mathbf{q}_N + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \mathbf{q}_N \cdot \boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{n}_0 + \epsilon \mathbf{n}_1) \left[ 1 + \epsilon \left( \frac{\xi_r}{r_0} + \mathbf{t}_0 \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \right] \tilde{T} \\ & + O(\epsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

QUATRIÈME ET DERNIÈRE ÉTAPE. Les différents ordres peuvent à présent être séparés. Ainsi, ils sont résolus en cascade, *i.e.* le problème à l'ordre zéro est résolu puis il devient un terme de forçage pour le problème à l'ordre 1. En séparant les différents ordres, on obtient :

Problème à l'ordre 0 : trouver  $T_0 \in H^1(\Omega_0)$  tel que  $\forall \tilde{T} \in H^1(\Omega_0)$ ,

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_0} \nabla_{\Omega_0} T_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \tilde{T} + \int_{\Omega_0} f \tilde{T} \\ & + \int_{\Gamma_{D_0}} [T_0 - T_D(\mathbf{x}_0)] \tilde{T} \frac{1}{\epsilon_D} + \int_{\Gamma_{N_0}} \mathbf{q}_N(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}_0 \tilde{T} = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

À l'ordre zéro, le problème est uniquement une transposition sur le domaine de calcul du problème (3.7). Les dérivations spatiales se font par rapport aux variables du domaine de calcul et non par rapport au domaine déformé; il en va de même pour les domaines d'intégration. Plus précisément, il s'agit du problème de départ écrit sur le domaine de référence,  $T$ ,  $\Omega$ ,  $\Gamma_N$ ,  $\Gamma_D$  et  $\nabla_{\Omega}$  étant remplacés par  $T_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $\Gamma_{N_0}$ ,  $\Gamma_{D_0}$  et  $\nabla_{\Omega_0}$ .

Au premier ordre, les deux premières lignes de l'équation (3.26), correspondent à un problème analogue au problème à l'ordre zéro (3.25). Les termes de forçage et les conditions limites sont néanmoins différentes. Ces derniers sont remplacés par le premier ordre d'un développement de Taylor. Les termes de la troisième ligne de (3.26) prennent en compte la contraction ou dilatation du domaine, via la divergence du champ de déplacement. La linéarisation des gradients est incluse grâce à l'intégrale de la quatrième ligne. Les deux dernières lignes représentent l'influence de l'allongement ou du raccourcissement du contour du domaine sur les conditions aux limites ainsi que le changement de direction de la normale.

Problème au 1<sup>er</sup> ordre : trouver  $T_1 \in H^1(\Omega_0)$  tel que  $\forall \tilde{T} \in H^1(\Omega_0)$ ,

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_0} \nabla_{\Omega_0} T_1 \cdot \nabla_{\Omega_0} \tilde{T} + \int_{\Omega_0} (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\Omega_0}) f \tilde{T} \\ & + \int_{\Gamma_{N_0}} (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\Omega_0}) \mathbf{q}_N \cdot \mathbf{n}_0 \tilde{T} + \int_{\Gamma_{D_0}} (T_0 - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\Omega_0}) T_D) \frac{1}{\epsilon_D} \tilde{T} \\ & - \int_{\Omega_0} \nabla_{\Omega_0} T_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \tilde{T} \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi} + \int_{\Omega_0} f \tilde{T} \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi} \\ & + \int_{\Omega_0} \left( \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} + \nabla_{\Omega_0}^T \boldsymbol{\xi} \right) \cdot \nabla_{\Omega_0} T_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \tilde{T} \\ & + \int_{\Gamma_{N_0}} \mathbf{q}_N \cdot \mathbf{n}_0 \left( \frac{\xi_r}{r_0} + \mathbf{t}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \tilde{T} + \int_{\Gamma_{N_0}} \mathbf{q}_N \cdot \mathbf{n}_1 \tilde{T} \\ & + \int_{\Gamma_{D_0}} (T_0 - T_D) \frac{1}{\epsilon_D} \left( \frac{\xi_r}{r_0} + \mathbf{t}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \tilde{T} = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Le problème thermique sur un domaine déformé est mathématiquement écrit sous sa forme faible. La section suivante présente les résultats obtenus.

### 3.4 RÉSULTATS DE LA RÉOLUTION D'EDP AVEC CHANGEMENT DE DOMAINE

Les problèmes à l'ordre 0 et à l'ordre 1 sont résolus en cascade. Tout d'abord le problème (3.25) donne  $T_0$ . Cela permet ensuite de construire et résoudre le problème (3.26) peut être construit et résolu. En effet, ce dernier nécessite la connaissance de  $T_0$ . La température corrigée à l'ordre un est alors obtenue et projetée sur le domaine physique. La figure 3.4a montre les triangulations sur le domaine de calcul et le domaine physique. Le domaine physique n'est utile que pour calculer directement la solution de référence  $T(\mathbf{x})$  du problème (3.7) et pour projeter la solution corrigée au premier ordre. De cette façon,  $T_0 + \epsilon T_1$  peut

être comparée à  $T$ , la différence entre les deux grandeurs devant être d'ordre 2.

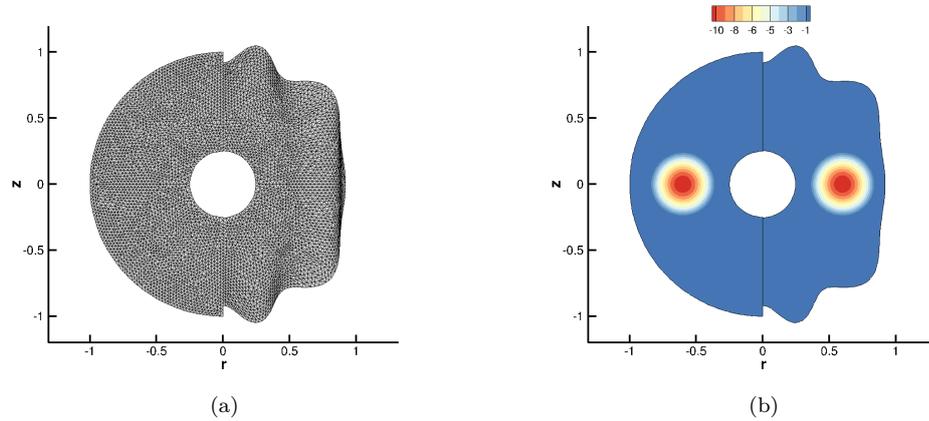


FIGURE 3.4 – (a) à gauche ( $r < 0$ ), triangulation du domaine de référence, à droite ( $r > 0$ ) triangulation du domaine déformé. (b) terme source  $f$  (3.27), représenté sur le domaine calcul et le domaine de déformé. Amplitude des déformations  $\epsilon = 0.08$ .

Le terme source de l'équation de la chaleur est donné comme suit,

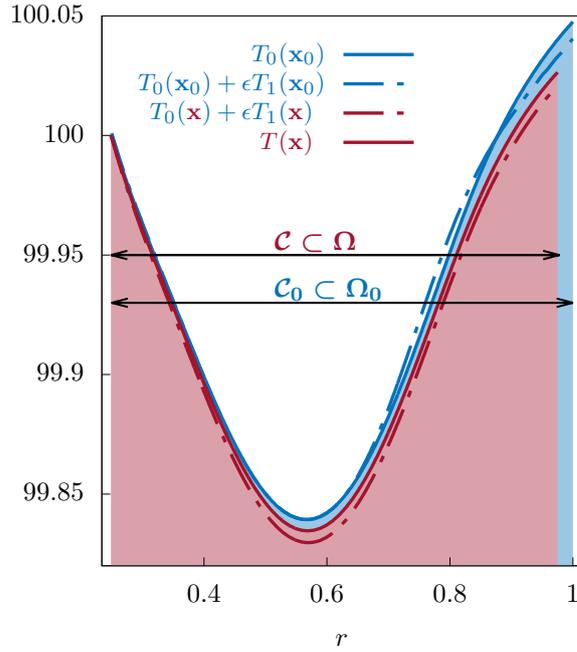
$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} A \cos(2\pi\tilde{r}) & \text{si } \tilde{r} < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.27)$$

avec  $\tilde{r} = \sqrt{(r - \frac{1}{2})^2 + z^2}$  et  $A = -10$ . La figure 3.4b représente ce terme sur les deux domaines. Il existe une zone toroïdale où un terme puits est présent. Les conditions limites sont prise constantes :

$$\begin{aligned} T_D &= 100 \\ q_N &= 0.28 \end{aligned} \quad (3.28)$$

La figure 3.5 reprend la même idée que les vignettes de la figure 3.2. Sur un seul graphe, avec des données réelles calculées pour  $\epsilon = 0.025$ , les différentes grandeurs permettant de passer de  $T_0$  à  $T$  sont représentées. Tout d'abord, on remarque un certain écart entre  $T_0(\mathbf{x})$  et  $T(\mathbf{x})$ . Écart qui est ensuite réduit par l'adjonction de la correction à l'ordre  $\epsilon$ . En effet, on observe qualitativement que l'écart entre  $T_0(\mathbf{x}) + \epsilon T_1(\mathbf{x})$  et  $T$  est inférieur à celui entre  $T_0(\mathbf{x})$  et  $T(\mathbf{x})$ . Ce graphe ne donnant que des informations dans une coupe du domaine, il peut être intéressant de voir ce qu'il se passe sur les champs de température sur l'intégralité du domaine.

La figure 3.6a dévoile le champ à l'ordre zéro,  $T_0(\mathbf{x}_0)$ , le point de départ et le champ  $T(\mathbf{x})$  que l'on souhaite approcher. Ils sont exprimés sur leurs domaines respectifs mais sont relativement similaires. La température sur le domaine physique possède un maximum plus élevé en raison d'une plus grande surface sur laquelle la condition de Neumann est appliquée (plus d'énergie entre dans le domaine à cet endroit). La figure 3.6b montre la correction de la température  $T_1$ . On remarque que ses extrema sont localisés dans les zones de forte déformation. En effet, le problème à l'ordre  $\epsilon$  est forcé par les termes de déplacement du maillage. Cette figure montre aussi le champ de température corrigé  $T_0 + \epsilon T_1$ . Celui-ci semble distordu : sachant qu'il doit s'exprimer sur le domaine physique  $\Omega$ , il ne convient pas au domaine de référence. Il faudra représenter ce champ sur la géométrie déformée grâce à une

FIGURE 3.5 – Coupe des différents champs sur les deux domaines,  $\Omega$  et  $\Omega_0$ 

projection.

Pour projeter un champ de température du maillage de référence sur le maillage déformé, aucune interpolation n'est nécessaire. Les valeurs des températures sur chaque sommet peuvent être déplacées sur le maillage déformé, elles restent associées aux mêmes sommets mais ceux-ci auront juste été déplacés. Le champ à l'ordre zéro peut ainsi être projeté sur le maillage déformé et comparé avec la solution recherchée (figure 3.7a). Comme le montre cette figure, la projection sur le maillage déformé induit une distorsion du champ de température à l'ordre zéro. Mais cette distorsion est supprimée par la correction d'ordre  $\epsilon$  ajoutée au champ à l'ordre zéro,  $T_0 + \epsilon T_1$ , comme le révèle la figure 3.7b. La solution corrigée semble plus proche que celle non-corrigée, la topologie des champs de température semble analogue malgré une amplitude plus faible.

L'écart à la solution recherchée  $T(\mathbf{x})$  de la projection du champ à l'ordre zéro et de la projection du champ corrigé à l'ordre  $\epsilon$  sont visibles sur la figure 3.8. Pour une grande amplitude de déformation,  $\epsilon = 0.08$  par exemple, le champ de température à l'ordre zéro et le champ corrigé présentent des erreurs du même ordre par rapport à la solution recherchée. Cependant, si la déformation est plus faible,  $\epsilon = 10^{-4}$ , l'erreur commise par la solution corrigée est deux ordres de grandeurs plus faible que celle commise par la seule projection de la solution à l'ordre zéro. Cela montre que pour les faibles déformations, la correction d'ordre  $\epsilon$  permet bien de se rapprocher de la solution recherchée. La formulation linéarisée nécessite un paramètre  $\epsilon \ll 1$ , il est en conséquence naturel d'obtenir de meilleurs résultats pour les faibles déformations. L'objectif de ce travail est de développer une méthode précise à  $O(\epsilon^2)$  près, ce qui permettra de déterminer une linéarisation des équations nécessaire à la mise en œuvre d'une méthode de Newton ainsi qu'une analyse de stabilité.

Afin d'avoir une vue plus quantitative des erreurs commises, la figure 3.9 représente la valeur de l'intégrale de l'erreur relative pour des maillages ayant différentes densités de points. La courbe pointillée correspond à un cas particulier, celui où sur toute la frontière du domaine une condition de Dirichlet est appliquée. Dans cette configuration, l'erreur est d'ordre deux par rapport au paramètre  $\epsilon$ , assurant que le développement  $T = T_0 + \epsilon T_1 +$

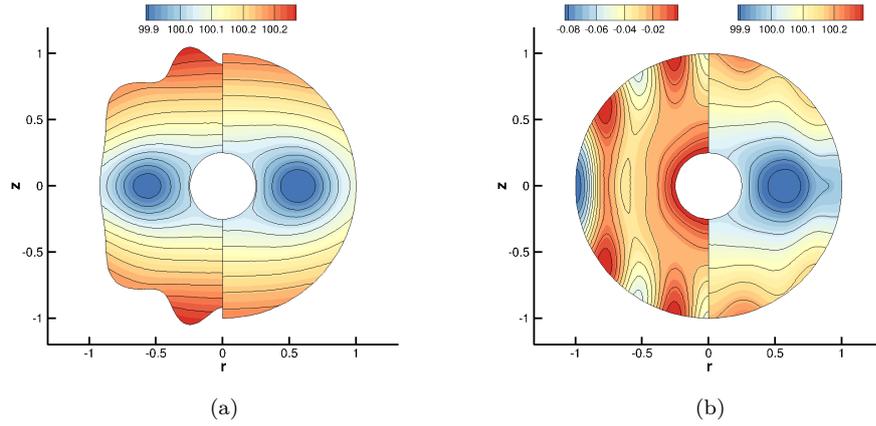


FIGURE 3.6 – (a), partie gauche, température  $T(\mathbf{x})$  que l'on cherche à approcher. (a), partie droite, Température à l'ordre zéro  $T_0(\mathbf{x}_0)$  sur le domaine de référence. (b), partie gauche, correction d'ordre  $\epsilon$  de la température sur le domaine de référence  $\epsilon T_1(\mathbf{x}_0)$ . (b), partie droite, température corrigée à l'ordre  $\epsilon$  sur le domaine de référence  $T_0(\mathbf{x}_0) + \epsilon T_1(\mathbf{x}_0)$ . ( $\epsilon=0.08$ )

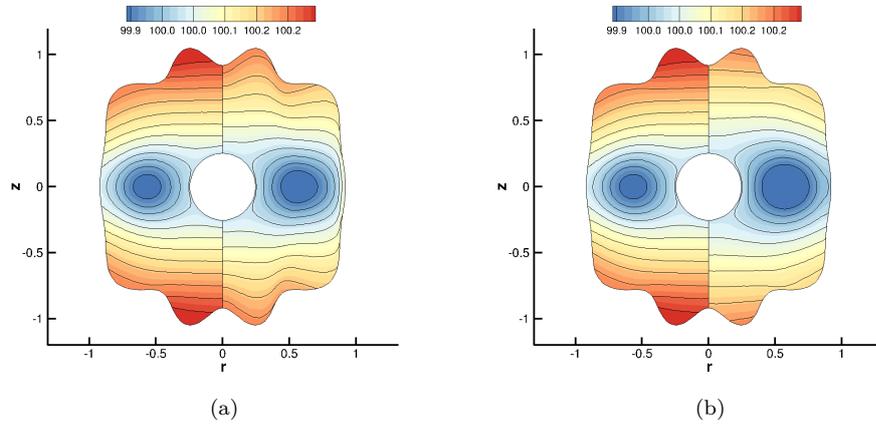


FIGURE 3.7 – (a,b), partie gauche, température  $T(\mathbf{x})$  calculée sur le domaine déformé. (a), partie droite, température calculée sur le domaine de référence et projetée sur le domaine déformé  $T_0(\mathbf{x})$ . (b), partie droite, température corrigée calculée sur le domaine de référence et projetée sur le domaine déformé  $T_0(\mathbf{x}) + \epsilon T_1(\mathbf{x})$ . ( $\epsilon=0.08$ )

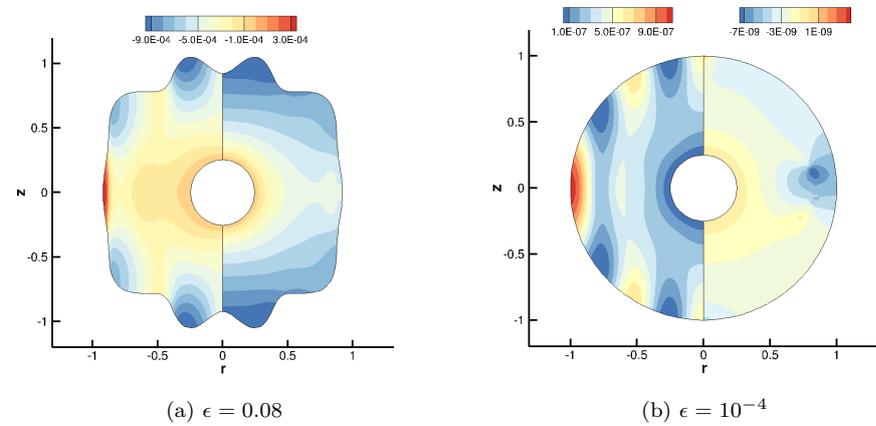


FIGURE 3.8 – Écart à la solution recherchée  $T(\mathbf{x})$  de la température projetée  $T_0(\mathbf{x})$  (à gauche) et de la température corrigée  $T_0(\mathbf{x}) + \epsilon T_1(\mathbf{x})$  (à droite).

$O(\epsilon^2)$  est correctement mené. La configuration classique, avec une condition de Neumann sur  $\Gamma_N$  et une condition de Dirichlet sur  $\Gamma_D$ , est représentée en trait plein. Elle garde un comportement similaire pour les trois premières décades  $\epsilon = [10^{-3}, 10^{-1}]$ , quel que soit le maillage. Cependant, lorsque le paramètre  $\epsilon$  diminue encore, l'erreur devient d'ordre un. Un raffinement du maillage permet d'étendre la précision d'ordre deux à quelques décades supplémentaires avec des densités de points de 320 ou 640 par unité de longueur sur les frontières du domaine. L'erreur reste d'ordre deux jusqu'à atteindre une valeur de  $10^{-8}$  pour les maillages grossiers et de  $10^{-10}$  pour les plus denses, nous confortant dans la conclusion que la linéarisation des termes de métriques et de changements de variables est correcte.

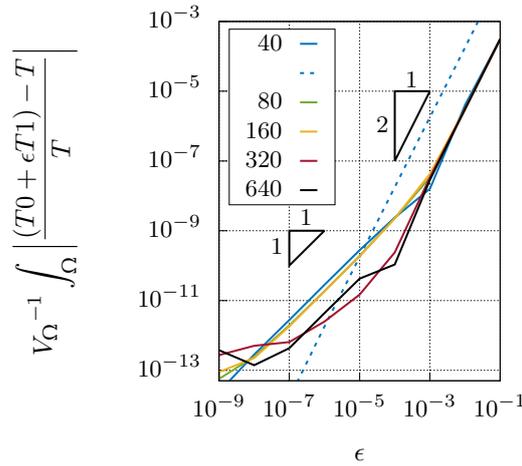


FIGURE 3.9 – Erreur relative intégrale de la solution corrigée en fonction de l’amplitude de la déformation

CONCLUSION

Dans ce chapitre, un exemple de résolution d’équation aux dérivées partielles avec un changement de domaine a été mené. La solution d’une équation stationnaire et linéaire sur un domaine déformé a été approchée au premier ordre via la résolution successive de deux problèmes sur un domaine plus simple. Les clefs permettant de résoudre un problème dont le domaine de calcul est différent du domaine physique ont été énoncées, incluant un changement de variables dans la formulation faible du problème de départ. Les opérateurs de dérivations ainsi que les surfaces et volumes élémentaires ont été linéarisés. Cette linéarisation laisse apparaître une erreur du deuxième ordre. Toutefois, il aurait été possible de ne pas commettre cette erreur puisque la relation entre les deux domaine est connue, les termes de métriques étant accessibles via l’inversion de la matrice jacobienne de la bijection.

Cependant, dans les chapitres suivants la bijection entre les deux domaines ne sera pas imposée, la déformation du domaine deviendra une inconnue du problème. Il ne sera en conséquence pas possible d’avoir complètement accès aux termes de métriques, seules leurs linéarisations seront accessibles. Les algorithmes utilisés, la méthode Newton par exemple, nécessitera ces linéarisations vis-à-vis d’un domaine de référence. En effet, les frontières du domaine seront mobiles. Il en sera de même pour l’étude de stabilité linéaire globale. Les problèmes à surface libre décrits dans les chapitres suivants pourront donc être construits de façon monolithique, assurant la stabilité des algorithmes.



## LINÉARISATION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES AVEC FRONTIÈRE DÉFORMABLE POUR L'ÉTUDE DE STABILITÉ LINÉAIRE

---

L'objectif est de trouver une formulation permettant de résoudre les équations de Navier-Stokes stationnaire avec une frontière déformable et de mener une analyse de stabilité linéaire de cet écoulement. La méthode utilisée est une méthode *ALE* (*Arbitrary Lagrangien Eulérien*). Cette classe de méthode permet de traiter de façon lagrangienne l'interface et de façon eulérienne le fluide, le tout dans un algorithme monolithique, *i.e.* un couplage total des interactions fluide-interface. L'interface sera nette (*sharp interface*) et ajustée à une frontière du domaine (*boundary fitted*). La philosophie de cette méthode réside dans le fait que le domaine physique (la géométrie de la frontière et le domaine fluide) est une inconnue du problème. Les équations vont être écrites sur ce domaine puis linéarisées sur un domaine de référence connu. Le domaine physique est quant à lui une inconnue du problème.

### 4.1 LINÉARISATION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES, CAS GÉNÉRAL

Afin d'effectuer une analyse de stabilité linéaire sur l'écoulement autour de bulles piégées ou en mouvement, il est en premier lieu nécessaire de calculer leurs formes d'équilibre ainsi que le champ stationnaire de vitesses et pressions du fluide qui les entoure. Cela est réalisé avec un algorithme qui utilise une méthode de Newton. En conséquence, l'étape de linéarisation des équations de Navier-Stokes est primordiale.

Cette section donnera, dans le cadre général, une linéarisation des équations de Navier-Stokes, qui sera ensuite appliquée au calcul du champ de base ou à l'analyse de stabilité linéaire globale, sans discriminer les deux cas. Elle se basera sur les travaux effectués dans les deux chapitres précédents. Les travaux menés au chapitre 2, *i.e.* les équations de Stokes avec une surface libre sont un ingrédient essentiel que nous reprendrons dans ce chapitre. Ils permettent de prendre en compte de façon linéarisée le couplage entre le fluide et l'interface. La partie concernant le changement de domaine est calquée sur la méthode développée au chapitre 3 et sera appliquée aux équations de Navier Stokes.

#### 4.1.1 Formulation variationnelle sur le domaine PHYSIQUE

Le domaine physique, sur lequel les équations de Navier-Stokes sont naturellement écrites, est montré figure 4.1. La bulle est matérialisée par le contour  $\Gamma_b$  en rouge. Deux cas de figure sont superposés sur ce schéma. Le premier, en traits pleins, est le domaine utilisé pour une bulle en ascension dans un fluide au repos. Le deuxième, en traits pointillés, est le demi-domaine utilisé pour une bulle piégée dans un écoulement d'étirement ou un réservoir en rotation. Une démarche générale est présentée, quel que soit le domaine choisi, la différence étant minime et résidant uniquement dans des conditions aux limites différentes sur le contour extérieur du domaine.

**Remarque :** Ces domaines portent la même appellation mais la formulation du problème sera exprimée de façon non discriminante entre les deux possibilités. Ensuite, le contexte précisera clairement dans quel cas se situer. Les conditions aux limites sur les frontières extérieures  $\Gamma_\infty$ , et sur la frontière matérialisant l'équateur ne seront pas écrites dans cette section. Elles sont dépendantes du cas étudié, de sa géométrie. Seules les intégrales de la

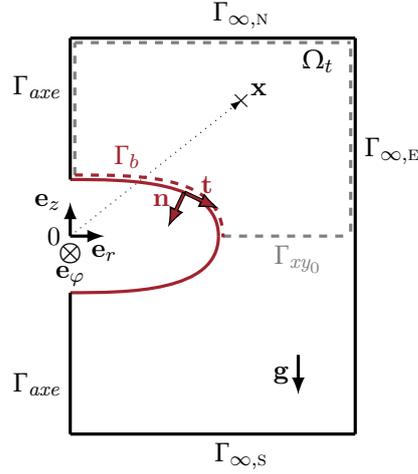


FIGURE 4.1 – Schéma du domaine physique pour l'étude de bulles piégées, en traits pointillés et pour l'étude d'une bulle en ascension en trait plein.

formulation faible dans le volume et à la surface de la bulle seront développées ici, celles-ci étant indépendantes du cas considéré.

La surface de la bulle est susceptible de varier au cours du temps ou au cours des itérations de la méthode de Newton. Elle est une inconnue du problème et en conséquence le domaine  $\Omega_t$  le sera aussi. Néanmoins, il est possible d'écrire les équations de Navier-Stokes sur ce domaine :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\Omega_t} \mathbf{u} \right) = \nabla_{\Omega_t} \cdot \Sigma_{\Omega_t} + \mathbf{f}_v \quad (4.1)$$

$$\nabla_{\Omega_t} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial t} \right|_{\Gamma_b} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (4.3)$$

$$\cdot \Sigma \cdot \mathbf{n} |_{\Gamma_b} + p_b \mathbf{n} = \gamma \kappa \mathbf{n} \quad (4.4)$$

avec le tenseur des contraintes dans le fluide

$$\Sigma_{\Omega_t} = -pI + \mu \left( \nabla_{\Omega_t} \mathbf{u} + \nabla_{\Omega_t}^T \mathbf{u} \right) = -pI + 2\mu D_{\Omega_t}(\mathbf{u}) \quad (4.5)$$

Les notations du chapitre 2 sont à nouveau utilisées. La formulation variationnelle de ce problème est la suivante,  $\forall \mathbf{v}, q$  :

$$\int_{\Omega_t} [\rho (\partial_t \mathbf{u} + \nabla_{\Omega_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{f}_v - \nabla_{\Omega_t} \cdot \Sigma_{\Omega_t}] \cdot \mathbf{v} + q \nabla_{\Omega_t} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.6)$$

**Remarque :** Les volumes et surfaces élémentaires sont, comme dans les chapitres précédents, omis des intégrales afin d'alléger les écritures.  $dv = r dr d\varphi dz$ ,  $dv_0 = r_0 dr_0 d\varphi_0 dz_0$ ,  $da = r ds d\varphi$  et  $da_0 = r_0 ds_0 d\varphi_0$  sont respectivement les volumes et surfaces élémentaires sur les domaines  $\Omega_t$  et  $\Omega_0$ .  $s$  et  $s_0$  étant les abscisses curvilignes sur la frontière de  $\Gamma_b$  et  $\Gamma_{b_0}$ .

Une intégration par parties sur le terme de divergence de la contrainte diminue l'ordre des dérivées associées et fait apparaître la condition de Neumann,  $\forall \mathbf{v}, q$  :

$$\int_{\Omega_t} [\rho (\partial_t \mathbf{u} + \nabla_{\Omega_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{f}_v] \cdot \mathbf{v} + \Sigma_{\Omega_t} : \nabla_{\Omega_t} \mathbf{v} + q \nabla_{\Omega_t} \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial \Omega_t} (\Sigma_{\Omega_t} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.7)$$

Enfin, l'adjonction des conditions aux limites à l'interface permet d'arriver à la formulation variationnelle sur le domaine physique :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}, q, \int_{\Omega_t} [\rho (\partial_t \mathbf{u} + \nabla_{\Omega_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{f}_v] \cdot \mathbf{v} + \Sigma_{\Omega_t} : \nabla_{\Omega_t} \mathbf{v} + q \nabla_{\Omega_t} \cdot \mathbf{u} \\ - \oint_{\partial \Omega_t \setminus \Gamma_b} (\Sigma_{\Omega_t} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} - \int_{\Gamma_b} (\gamma \kappa - p_b) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\forall \tau, \int_{\Gamma_b} (\partial_t \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{n} \tau = \int_{\Gamma_b} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \tau \quad (4.9)$$

où  $\tau$  est la fonction-test définie sur le contour  $\Gamma_b$  associée au déplacement de l'interface  $\eta$ .

**Remarque :** La relation entre le déplacement normal et la courbure reste à définir ainsi que les conditions aux limites sur le contour extérieur du domaine ( $\partial \Omega_t \setminus \Gamma_b$ ).

#### 4.1.2 Linéarisation sur le domaine de CALCUL

Il est maintenant question de linéariser la formulation (4.8) afin de l'écrire sur le domaine de calcul. Le domaine de physique  $\Omega_t$  étant inconnu, il est impossible d'effectuer des calculs en s'appuyant sur celui-ci. On se rapportera au domaine de calcul  $\Omega_0$ , connu et représenté sur la figure 4.2. La bijection entre les deux domaines est une inconnue du problème mais sera la solution d'un problème linéaire. Elle sera couplée avec la résolution des équations de Navier-Stokes, ce point sera abordé ultérieurement.

Nous utiliserons dans cette section les notions développées au chapitre 3, la définition du *mapping* spatio-temporel (3.8) permettant de linéariser des intégrales (3.15), (3.16) et des opérateurs de dérivations spatiales (3.17), (3.18), (3.19) sur le domaine de calcul. La méthode de résolution d'EDP avec un changement de domaine, développée au chapitre précédent, va ainsi être appliquée aux équations de Navier-Stokes. La déformation du domaine est une

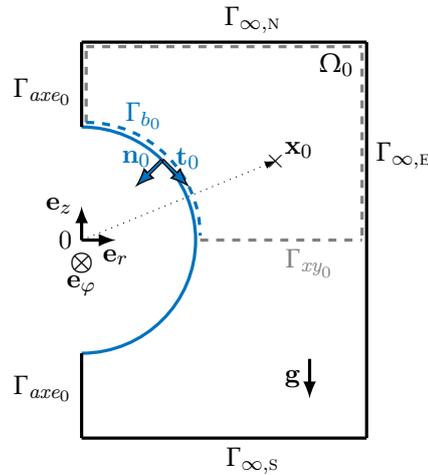


FIGURE 4.2 – Schéma du domaine de calcul pour l'étude de bulles piégées

extension de la déformation de l'interface de la bulle dans tout le domaine. Le contour  $\Gamma_b$  suit l'interface et son déplacement est relaxé dans le volume. De cette façon, il y a une continuité du déplacement au sein du domaine. L'interface est ainsi traitée de façon lagrangienne et le fluide eulérienne, comme le font les méthodes *ALE* (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*). Le déplacement dans le volume n'est pas physique, il est arbitraire. Il est en conséquence nécessaire de retrancher le mouvement créé par les déformations du domaine.

Rappelons la bijection entre les deux domaines,

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \Omega_0 \times (0, T) &\mapsto \Omega_t \\ (\mathbf{x}_0, t) &\mapsto \mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ce champ de déformation,  $\boldsymbol{\xi}$  est une continuation de la déformation de l'interface. Le contour  $\Gamma_b$  se déforme dans la direction perpendiculaire au contour de référence, comme le montre la figure A.1. Le contour physique variant au cours du temps, une vitesse de déformation peut être définie :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_0, t) = \partial_t \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)|_{\mathbf{x}_0} = \epsilon \partial_t \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, t) \quad (4.11)$$

Elle peut aussi être vue comme la vitesse locale de  $\Omega_t$  vis-à-vis de  $\Omega_0$ .

**Remarque :** Dans le cas de l'analyse de stabilité linéaire, le terme de vitesse du domaine a un sens. Néanmoins, pour le calcul du champ de base et de la forme d'équilibre avec la méthode de Newton, la solution recherchée est stationnaire. Cette vitesse et les autres dérivées temporelles seront alors prises systématiquement nulles.

Le long des trajectoires  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) \in \Omega_t$ , la dérivée temporelle de la vitesse s'écrit :

$$\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}} = \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}_0} + \partial_t \mathbf{x}|_{\mathbf{x}_0} \cdot \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (4.12)$$

Pour qu'elle ait un sens physique, il faut enlever à l'accélération fluide les variations de la vitesse causées par les distorsions du domaine. Celles-ci ne sont qu'un artifice numérique afin de définir un déplacement continu mais induisent une advection numérique. L'accélération ayant un sens physique est la suivante :

$$\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}_0} = \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}} - \mathbf{w} \cdot \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (4.13)$$

La formulation faible des équations de Navier-Stokes sur le domaine physique est donnée par,  $\forall \mathbf{v}, q$  :

$$\int_{\Omega_t} [\rho (\partial_t \mathbf{u}|_{\mathbf{x}_0} + \nabla_{\Omega_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{f}_v] \cdot \mathbf{v} + \Sigma_{\Omega_t} : \nabla_{\Omega_t} \mathbf{v} + q \nabla_{\Omega_t} \cdot \mathbf{u} - \int_{\Gamma_b} (\gamma \kappa - p_b) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.14)$$

En utilisant le changement de variable (3.15), (3.16), il est possible d'exprimer la formulation variationnelle sur le domaine de référence  $\Omega_0$ ,  $\forall \mathbf{v}, q$  :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0} [\rho \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}, t)|_{\mathbf{x}_0} + \rho \nabla_{\Omega_t} \mathbf{u}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}, t) - \mathbf{f}_v(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}, t)] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) [1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi}] \\
& + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Sigma}_{\Omega_t}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}, t) : \nabla_{\Omega_t} \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) [1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi}] \\
& + \int_{\Omega_0} [q(\mathbf{x}_0) \nabla_{\Omega_t} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}, t)] [1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi}] \\
& - \int_{\Gamma_{b_0}} [\gamma \kappa(s, t) - p_b(t)] \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) \left[ 1 + \epsilon \eta \left( \frac{n_{0r}}{r_0} - \kappa_0^{(a)} \right) \right] + O(\epsilon^2) = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Les différentes grandeurs sont décomposées à l'ordre  $\epsilon$  de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0) + \epsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_0, t) + O(\epsilon^2) \tag{4.16}$$

$$p(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}, t) = p_0(\mathbf{x}_0) + \epsilon p_1(\mathbf{x}_0, t) + O(\epsilon^2) \tag{4.17}$$

$$\mathbf{f}_v(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{f}_v(\mathbf{x}_0) + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \mathbf{f}_v(\mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, t) + O(\epsilon^2) \tag{4.18}$$

$$p_b(t) = p_{b0} + \epsilon p_{b1}(t) + O(\epsilon^2) \tag{4.19}$$

$$\kappa(s, t) = \kappa_0(s_0) + \epsilon \kappa_1(s_0, t) + O(\epsilon^2) \tag{4.20}$$

$$\mathbf{n}(s, t) = \mathbf{n}_0(s_0) + \epsilon \mathbf{n}_1(s_0, t) + O(\epsilon^2) \tag{4.21}$$

**Remarque :** La perturbation de la pression interne de la bulle  $p_{b1}$  joue le rôle de multiplicateur de Lagrange pour imposer le volume de la bulle. Lorsque les symétries du problème imposent naturellement cette condition, cette inconnue est inutile et n'est pas utilisée.

Il faut ensuite injecter ces décompositions dans la formulation variationnelle précédente. Puisque toutes les grandeurs du problème sont définies sur le domaine de calcul  $\Omega_0$ , il n'y a plus d'ambiguïtés possibles pour leurs arguments et on peut les supprimer,  $\forall \mathbf{v}, q$  :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0} \left[ \rho \partial_t (\mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}_1)|_{\mathbf{x}_0} + \rho \nabla_{\Omega_t} (\mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}_1) - \mathbf{f}_v - \epsilon \nabla_{\Omega_0} \mathbf{f}_v \cdot \boldsymbol{\xi} \right] \cdot \mathbf{v} (1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi}) \\
& + \int_{\Omega_0} (\boldsymbol{\Sigma}_{0\Omega_t} + \epsilon \boldsymbol{\Sigma}_{1\Omega_t}) : \nabla_{\Omega_t} \mathbf{v} (1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi}) \\
& + \int_{\Omega_0} q \nabla_{\Omega_t} \cdot (\mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}_1) (1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi}) \\
& - \int_{\Gamma_{b_0}} [\gamma (\kappa_0 + \epsilon \kappa_1) - p_{b0} - \epsilon p_{b1}] (\mathbf{n}_0 + \epsilon \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{v} \left[ 1 + \epsilon \eta \left( \frac{n_{0r}}{r_0} - \kappa_0^{(a)} \right) \right] \\
& + O(\epsilon^2) = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

(a) LE TERME DE DÉRIVATION TEMPORELLE D'après (4.11) et (4.13), tout en sachant que le terme d'ordre zéro est toujours stationnaire, la dérivée temporelle de la vitesse s'écrit :

$$\partial_t (\mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}_1)|_{\mathbf{x}_0} = \epsilon \partial_t \mathbf{u}_1|_{\mathbf{x}_0} - \epsilon \partial_t \boldsymbol{\xi}|_{\mathbf{x}_0} \cdot \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u}_0 \tag{4.23}$$

(b) LE TERME D'ADVECTION L'opérateur de dérivation  $\nabla_{\Omega_t}$  est tout d'abord linéarisé, ce qui donne de façon générale avec une vitesse  $\mathbf{u}$  :

$$\begin{aligned}\nabla_{\Omega_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u} (1 - \epsilon \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{u} \\ &= \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \epsilon \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} + O(\epsilon^2)\end{aligned}\quad (4.24)$$

Avec le développement de la vitesse à l'ordre  $\epsilon$ , la forme linéarisée du terme d'advection devient :

$$\begin{aligned}\nabla_{\Omega_t} (\mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}_1) &= \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_1 \\ &\quad + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_0 - \epsilon \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u}_0 + O(\epsilon^2)\end{aligned}\quad (4.25)$$

(c) LE TENSEUR DES CONTRAINTES Pour ce terme, il est nécessaire de linéariser le tenseur des déformations  $D(\cdot)$  apparaissant dans les contraintes visqueuses :

$$\begin{aligned}2D_{\Omega_t}(\mathbf{u}) &= \nabla_{\Omega_t} \mathbf{u} + \nabla_{\Omega_t}^T \mathbf{u} \\ &= \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u} \cdot (I - \epsilon \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi}) + [\nabla_{\Omega_0} \mathbf{u} (I - \epsilon \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi})]^T + O(\epsilon^2) \\ &= 2D_{\Omega_0}(\mathbf{u}) - \epsilon \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} - \epsilon (\nabla_{\Omega_0} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi})^T + O(\epsilon^2)\end{aligned}\quad (4.26)$$

On en déduit la formulation linéarisée du tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned}\Sigma_{\Omega_t} &= -p_0 I - \epsilon p_1 I + 2\mu D_{\Omega_0}(\mathbf{u}_0) + 2\epsilon \mu D_{\Omega_0}(\mathbf{u}_1) \\ &\quad - \epsilon \mu \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} - \epsilon \mu (\nabla_{\Omega_0} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi})^T + O(\epsilon^2) \\ &= \Sigma_{0\Omega_0} + \epsilon \Sigma_{1\Omega_0} - \epsilon \mu \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} - \epsilon \mu (\nabla_{\Omega_0} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi})^T + O(\epsilon^2)\end{aligned}\quad (4.27)$$

Il faut aussi linéariser le gradient appliqué à la fonction-test dans le terme  $\Sigma_{\Omega_t} : \nabla_{\Omega_t} \mathbf{v}$ ,

$$\begin{aligned}\Sigma_{\Omega_t} : \nabla_{\Omega_t} \mathbf{v} &= \Sigma_{0\Omega_0} : \nabla_{\Omega_0} \mathbf{v} + \epsilon \Sigma_{1\Omega_0} : \nabla_{\Omega_0} \mathbf{v} - \epsilon \Sigma_{0\Omega_0} : (\nabla_{\Omega_0} \mathbf{v} \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi}) \\ &\quad - \epsilon \mu \left[ \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} + (\nabla_{\Omega_0} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi})^T \right] : \nabla \mathbf{v} + O(\epsilon^2)\end{aligned}\quad (4.28)$$

(d) L'ÉQUATION DE CONTINUITÉ De façon analogue aux cas précédents, cette équation est linéarisée sous la forme :

$$\nabla_{\Omega} \cdot (\mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}_1) = \nabla_{\Omega_0} \cdot \mathbf{u}_0 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \mathbf{u}_1 - \epsilon \nabla_{\Omega_0} \mathbf{u}_0 : \nabla_{\Omega_0}^T \boldsymbol{\xi} + O(\epsilon^2)\quad (4.29)$$

SYNTHÈSE DES DÉVELOPPEMENTS Tous les opérateurs et toutes les grandeurs sont exprimés sur le même domaine ( $\Omega_0$ ), il n'y plus d'ambiguïtés et il est possible d'omettre les vecteurs positions et les indices sous les opérateurs. La formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes linéarisées (condition dynamique incluse) s'écrit,  $\forall \mathbf{v}, q$  :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0} \rho \nabla \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} + \Sigma_0 : \nabla \mathbf{v} - \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v} + q \nabla \cdot \mathbf{u}_0 \\
& - \int_{\Gamma_{b_0}} (\gamma \kappa_0 - p_{0b}) \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v} \\
& + \epsilon \int_{\Omega_0} [\rho (\partial_t \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_0 + \nabla \mathbf{u}_0 \cdot (\mathbf{u}_1 - \partial_t \boldsymbol{\xi})) - \nabla \mathbf{f}_v \cdot \boldsymbol{\xi}] \cdot \mathbf{v} + \Sigma_1 : \nabla \mathbf{v} + q \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \\
& - \epsilon \int_{\Gamma_{b_0}} (\gamma \kappa_1 - p_{1b}) \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v} + (\gamma \kappa_0 - p_{0b}) \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v} \\
& + \epsilon \int_{\Omega_0} -\rho \nabla \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} - \Sigma_0 : (\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}) - \mu \left[ \nabla \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} + (\nabla \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\xi})^T \right] : \nabla \mathbf{v} \\
& + \epsilon \int_{\Omega_0} -q \nabla \mathbf{u}_0 : \nabla^T \boldsymbol{\xi} \\
& + \epsilon \int_{\Omega_0} (\rho \nabla \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} + \Sigma_0 : \nabla \mathbf{v} - \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v} + q \nabla \cdot \mathbf{u}_0) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \\
& - \epsilon \int_{\Gamma_{b_0}} (\gamma \kappa_0 - p_{0b}) \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v} \eta \left( \frac{n_{0r}}{r_0} - \kappa_0^{(a)} \right) \\
& + O(\epsilon^2) = 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Les deux premières lignes correspondent au développement à l'ordre zéro, *i.e.* à la formulation vitesse-pression des équations de Navier-Stokes stationnaires avec une condition à la limite de surface libre.

Les troisième et quatrième lignes représentent la linéarisation à l'ordre  $\epsilon$  des vitesses et pressions sans la déformation du domaine. L'advection est néanmoins modifiée pour supprimer le flux de quantité de mouvement que pourrait créer la déformation du domaine. Le changement d'orientation de l'interface est inclus dans la condition à la limite.

Les lignes cinq et six viennent ajouter la correction à l'ordre  $\epsilon$  des opérateurs de dérivation spatiale. La modification de la métrique entre les deux domaines est ainsi prise en compte de façon linéaire.

Enfin, les deux dernières lignes prennent en compte la dilatation et contraction du domaine et du contour matérialisant l'interface.

**CONDITION CINÉMATIQUE** Elle est associée à la fonction-test du déplacement normal de l'interface  $\tau$ . Les mêmes étapes, permettant de linéariser les équations dans le volume, peuvent être appliquées à (4.9),  $\forall \tau$  :

$$\int_{\Gamma_{b_0}} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_0 \tau + \epsilon \int_{\Gamma_{b_0}} \left[ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_0 \eta \left( \frac{n_{0r}}{r_0} - \kappa_0^{(a)} \right) \right] \tau = \epsilon \int_{\Gamma_{b_0}} \partial_t \eta \tau + O(\epsilon^2) \tag{4.31}$$

**CALCUL DE LA PERTURBATION DE LA COURBURE** La relation entre déplacement normal de l'interface et la perturbation de la courbure a déjà été traitée et sa formulation variationnelle est définie par l'équation (2.26). En utilisant la décomposition  $\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{x}_{s_0} + \epsilon \eta(s_0, t) \mathbf{n}_0 + O(\epsilon^2)$ , la condition cinématique à l'interface s'écrit,  $\forall \zeta$  :

$$\int_{\Gamma_{b_0}} \kappa_1 \zeta = - \int_{\Gamma_{b_0}} \frac{\partial \eta}{\partial s_0} \frac{\partial \zeta}{\partial s_0} - \eta \zeta \left( \kappa_0^{(a)^2} + \kappa_0^{(b)^2} - \frac{m^2}{r_0^2} \right) \quad (4.32)$$

CONSERVATION DU VOLUME DE LA BULLE La fonction-test associée à la perturbation de la pression interne de la bulle est utilisée pour imposer un volume constant à celle-ci. Ce point a été abordé dans la section 2.3.4 du chapitre 2. Sachant que le champ de déformation peut être prolongé à l'intérieur de la bulle ( $\boldsymbol{\xi}$  sur  $\Omega_{b_0}$ ), le volume de la bulle se calcule ainsi :

$$\mathcal{V}_b = \int_{\Omega_{b_0}} (1 + \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) dv_0 + O(\epsilon^2) \quad (4.33)$$

où  $\Omega_{b_0}$  est le domaine interne à la bulle. Ce qui donne après l'utilisation du théorème de Green-Ostrogradski :

$$\epsilon \int_{\Gamma_{b_0}} \eta da_0 + O(\epsilon^2) = \mathcal{V}_b - \mathcal{V}_{b_0} \quad (4.34)$$

Dans le cas de la méthode de Newton, la forme de la bulle n'est pas convergée et des variations du volume peuvent être observées. Il est alors nécessaire de corriger ces erreurs avec la relation précédente. Cependant, dans le cas de la stabilité linéaire, le volume de la bulle à l'ordre zéro est convergé ( $\mathcal{V}_b = \mathcal{V}_{b_0}$ ) ; le terme de droite est donc nul. Le volume de la bulle est imposé uniquement lorsque les symétries ne l'imposent pas naturellement. Dans le cas contraire, la relation n'est pas nécessaire et le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte,  $p_{b_1}$  n'est plus utile.

RÉCAPITULATIF Les équations (4.30), (4.31), (4.32) et suivant les cas (4.34), constituent un développement à l'ordre  $\epsilon$  des équations fluides. Un jeu d'équation reste à être traité, les équations du maillage, qui donnent le champ de déplacement  $\boldsymbol{\xi}$  en fonction du déplacement de la surface de la bulle.

#### 4.1.3 Équations du maillage

La méthode permettant de linéariser les équations de Navier-Stokes avec une surface libre étend la déformation de l'interface à l'intérieur du domaine fluide. De cette façon, et comme pour les méthodes *ALE*, la triangulation du domaine se déplace afin que le contour représentant la bulle reste ajusté à celle-ci. Le déplacement de l'interface est donné par la relation (4.31), il est étendu via des équations arbitraires.

Plusieurs possibilités sont envisageables afin d'obtenir une transition progressive. Le champ de déplacement du maillage  $\boldsymbol{\xi}$  est précisément égal au déplacement normal  $\eta \mathbf{n}_0$  à l'interface. Ce déplacement est physique, le suivi de l'interface est en conséquence lagrangien. Cependant, la continuation de ce déplacement dans le volume n'a plus de sens physique, il est arbitraire. En outre, nous l'avons retranché dans le calcul de la dérivée temporelle de la vitesse, relation (4.13). Trois modèles de déplacement de maillage sont testés ici :

(a) LAPLACIEN VECTORIEL

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\xi} &= 0 & \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_0 \\ \boldsymbol{\xi} &= \eta \mathbf{n}_0 & \forall \mathbf{x}_0 \in \Gamma_{b_0} \end{aligned} \quad (4.35)$$

(b) LAPLACIEN VECTORIEL RELAXÉ

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\xi} - \alpha \boldsymbol{\xi} &= 0 & \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_0, \alpha \in \mathbb{R}^+ \\ \boldsymbol{\xi} &= \eta \mathbf{n}_0 & \forall \mathbf{x}_0 \in \Gamma_{b_0} \end{aligned} \quad (4.36)$$

(c) ÉQUATION D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[ \lambda_e \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} I - \mu_e \left( \nabla \boldsymbol{\xi} + \nabla^T \boldsymbol{\xi} \right) \right] &= 0 & \forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_0, \lambda_e, \mu_e \in \mathbb{R}^+ \\ \boldsymbol{\xi} &= \eta \mathbf{n}_0 & \forall \mathbf{x}_0 \in \Gamma_{b_0} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Ces équations sont écrites sur le domaine de référence et définissent la bijection entre ce dernier et le domaine physique.  $\eta$  et  $\boldsymbol{\xi}$  dépendent du temps dans le cas de l'analyse de stabilité linéaire. Dans le cas de la méthode de Newton, ils seront stationnaires mais cela ne changera rien aux équations les concernant. Il est possible de donner rapidement les formulations variationnelles de chaque équation. Le champ de déformation  $\boldsymbol{\xi}$  n'a pas de composante azimutale mais a, dans le cas  $m \neq 0$ , une dépendance azimutale.

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_r(r_0, \varphi_0, z_0, t) \\ 0 \\ \xi_z(r_0, \varphi_0, z_0, t) \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

En intégrant sur le domaine de calcul ces trois équations, on obtient après une intégration par parties et pour toute fonction-test  $\boldsymbol{\varsigma}$  associée à  $\boldsymbol{\xi}$  :

(a) LAPLACIEN VECTORIEL

$$\int_{\Omega_0} \nabla \boldsymbol{\xi} : \nabla \boldsymbol{\varsigma} + \mathbf{b}_{cl}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varsigma}) + \mathbf{c}_{cl}(\boldsymbol{\varsigma}) = 0 \quad (4.39)$$

(b) LAPLACIEN VECTORIEL RELAXÉ

$$\int_{\Omega_0} \nabla \boldsymbol{\xi} : \nabla \boldsymbol{\varsigma} + \alpha \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\varsigma} + \mathbf{b}_{cl}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varsigma}) + \mathbf{c}_{cl}(\boldsymbol{\varsigma}) = 0 \quad (4.40)$$

(c) ÉQUATION D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

$$\int_{\Omega_0} -\lambda_e \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \nabla \cdot \boldsymbol{\varsigma} + \mu_e \left( \nabla \boldsymbol{\xi} + \nabla^T \boldsymbol{\xi} \right) : \nabla \boldsymbol{\varsigma} + \mathbf{b}_{cl}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varsigma}) + \mathbf{c}_{cl}(\boldsymbol{\varsigma}) = 0 \quad (4.41)$$

La forme  $\mathbf{b}_{cl}$  contient les conditions de Dirichlet à imposer sur le contour du domaine de calcul. Cela inclut tout d'abord la condition à l'interface déjà exprimée. Il reste les conditions aux limites à l'infini, sur l'axe de symétrie et éventuellement sur le plan de symétrie s'il existe.  $\xi_r$  et  $\xi_z$  respectent les mêmes conditions aux limites que  $u_r$  et  $u_z$  sur  $\Gamma_{ax\epsilon_0}$  et sur  $\Gamma_{xy_0}$  (si ce dernier existe).

Notons  $\Gamma_\infty$  le contour tel que  $\Gamma_\infty = \Gamma_{\infty,N} \cup \Gamma_{\infty,S} \cup \Gamma_{\infty,E}$  dans le cas d'un domaine entier, et  $\Gamma_\infty = \Gamma_{\infty,N} \cup \Gamma_{\infty,E}$  dans le cas d'un demi-domaine. Les conditions aux limites sur le contour  $\partial\Omega_0$  s'expriment via les formes  $\mathbf{b}_{cl}$  et  $\mathbf{c}_{cl}$  qui peuvent se décomposer de la sorte :

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{cl}(\boldsymbol{\xi}, \varsigma) &= \mathbf{b}_{cl}^{\Gamma_{b_0}}(\boldsymbol{\xi}, \varsigma) + \mathbf{b}_{cl}^{\Gamma_\infty}(\boldsymbol{\xi}, \varsigma) + \mathbf{b}_{cl}^{\Gamma_{axe_0}}(\boldsymbol{\xi}, \varsigma) + \mathbf{b}_{cl}^{\Gamma_{xy_0}}(\boldsymbol{\xi}, \varsigma) \\ \mathbf{c}_{cl}(\varsigma) &= \mathbf{c}_{cl}^{\Gamma_{b_0}}(\varsigma)\end{aligned}\quad (4.42)$$

où

$$\mathbf{b}_{cl}^{\Gamma_{b_0}}(\boldsymbol{\xi}, \varsigma) = \int_{\Gamma_{b_0}} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\varsigma} \frac{1}{\epsilon_D}, \quad \mathbf{c}_{cl}^{\Gamma_{b_0}}(\varsigma) = - \int_{\Gamma_{b_0}} \eta \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varsigma} \frac{1}{\epsilon_D}, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{b}_{cl}^{\Gamma_\infty}(\boldsymbol{\xi}, \varsigma) = \int_{\Gamma_\infty} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\varsigma} \frac{1}{\epsilon_D} \quad (4.44)$$

La pénalisation permet d'imposer la valeur d'un degré de liberté en occultant les termes extradiagonaux. Ainsi, le déplacement loin de la bulle est nul, les frontières  $\Gamma_\infty$  ne se déplacent pas. De la même manière, il est possible d'imposer sur l'axe de symétrie et pour une seule composante :

$$\begin{aligned}\xi_r|_{\Gamma_{axe_0}} &= 0 && \text{si } m \text{ est pair} \\ \xi_z|_{\Gamma_{axe_0}} &= 0 && \text{si } m \text{ est impair}\end{aligned}\quad (4.45)$$

Enfin, si un demi-domaine est utilisé, il faut ajouter une condition sur le plan équatorial :

$$\begin{aligned}\xi_r|_{\Gamma_{xy_0}} &= 0 && \text{pour une symétrie} \\ \xi_z|_{\Gamma_{xy_0}} &= 0 && \text{pour une anti-symétrie}\end{aligned}\quad (4.46)$$

Ces deux dernières conditions sont analogues à celles de la vitesse exprimées au chapitre 2, tableaux 2.1 et 2.2.

Cela conclut la façon dont la bijection entre les deux domaines est calculée. Trois jeux d'équations sont possibles et on montrera qu'ils sont équivalents, afin de justifier leur caractère arbitraire. Ce système est couplé aux équations (4.30), (4.31), (4.32) et éventuellement (4.34). L'inconnue  $\boldsymbol{\xi}$  force ainsi les équations fluides. La formulation est alors dite monolithique puisque tout est résolu en même temps, au cours de la même itération.

#### 4.1.4 Écriture matricielle du problème complet

La formulation variationnelle de tous les blocs est linéarisée sur le domaine de calcul, la matrice jacobienne des équations de Navier-Stokes peut s'écrire sur un domaine mouvant. Les mêmes discrétisations sont utilisées pour le calcul du champ de base et pour l'analyse de stabilité linéaire. Comme précisé à la section 2.3, les éléments de Taylor-Hood sont utilisés pour la vitesse et la pression. Les grandeurs surfaciques ( $\eta$ ,  $\kappa_1$ ) sont décomposées en série de Fourier. Le champ de déplacement  $\boldsymbol{\xi}$  du maillage est projeté sur des éléments  $\mathcal{P}_1$  notés  $\boldsymbol{\varsigma} = [\varsigma_r, 0, \varsigma_z]^T$  :

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0) \simeq \sum_{k=1}^{N_\xi} \begin{pmatrix} \varsigma_r^k(\mathbf{x}_0) \xi_r^k \\ 0 \\ \varsigma_z^k(\mathbf{x}_0) \xi_z^k \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

où le couple  $\{\xi_r^k, \xi_z^k\}$  désigne la valeur des composantes de  $\boldsymbol{\xi}$  au nœud  $k$ .

Le problème complet développé à l'ordre  $\epsilon$  s'écrit sous la forme :

$$\epsilon \mathcal{A} \mathbf{q}_1 = \epsilon \mathcal{B} \partial_t \mathbf{q}_1 - \mathcal{N} \mathcal{S}_0(\mathbf{u}_0, p_0, \kappa_0) + O(\epsilon^2) \quad (4.48)$$

avec le vecteur d'état  $\mathbf{q}_1 = [\mathbf{u}_1, p_1, X_{\kappa_1}, X_\eta, \boldsymbol{\xi}]^T$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{ff} & \mathcal{A}_{\kappa f} & \mathcal{A}_{\eta f} & \mathcal{A}_{\xi f} \\ 0 & \mathcal{A}_{\kappa\kappa} & \mathcal{A}_{\eta\kappa} & 0 \\ \mathcal{A}_{f\eta} & 0 & \mathcal{A}_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_{\eta\xi} & \mathcal{A}_{\xi\xi} \end{pmatrix} \epsilon \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{ff} & 0 & 0 & \mathcal{B}_{\xi f} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{B}_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \epsilon \partial_t \mathbf{q}_1 - \begin{pmatrix} \mathcal{N} \mathcal{S}_{0,f} \\ 0 \\ \mathcal{N} \mathcal{S}_{0,\eta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

**Remarque :** Dans l'éventualité où les symétries du problème ne conservent pas naturellement le volume, il faut ajouter une inconnue au problème. Le vecteur d'état devient  $\mathbf{q}_1 = [\mathbf{u}_1, p_1, p_{b1}, X_{\kappa_1}, X_\eta, \boldsymbol{\xi}]^T$ . Il faut alors ajouter une ligne et une colonne aux blocs  $\mathcal{A}_{ff}$ ,  $\mathcal{B}_{ff}$  et une ligne à  $\mathcal{A}_{\kappa f}$ ,  $\mathcal{A}_{\eta f}$ ,  $\mathcal{B}_{\xi f}$  et  $\mathcal{N} \mathcal{S}_{0,f}$ .

Blocs des matrices fluide,  $\mathcal{A}_f$  et  $\mathcal{B}_f$

Nous allons d'abord détailler les blocs correspondant à la première ligne de la relation (4.49). Ce sont les équations de Navier-Stokes avec la condition dynamique à la surface de la bulle.

En gardant les notations du chapitre 2 (section 2.3.3), les matrices fluide s'écrivent sous la forme (2.52) :

$$\mathcal{A}_{ff} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} & -\mathcal{A}_{p\mathbf{u}} & \mathcal{A}_{p_b\mathbf{u}} \\ \mathcal{A}_{p\mathbf{u}}^T & 0 & 0 \\ \mathcal{A}_{vol} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{ff} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

À l'exception de  $\mathcal{A}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$ , les expressions des blocs composant cette matrice sont identiques à celles du chapitre 2. L'ajout des termes d'advection vient modifier celui-ci :

$$(\mathcal{A}_{\mathbf{u}\mathbf{u}})_{ij} = (2\mu D(\mathbf{v}^j), \nabla \mathbf{v}^i) + (\nabla \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}^j + \nabla \mathbf{v}^j \cdot \mathbf{u}_0, \mathbf{v}^i) \quad (4.51)$$

Les autres blocs de  $\mathcal{A}_{ff}$  et  $\mathcal{B}_{ff}$  sont donnés par les expressions (2.41), (2.42), (2.53), (2.54) :

$$(\mathcal{A}_{p\mathbf{u}})_{ij} = (q^j, \nabla \cdot \mathbf{v}^i) \quad (4.52)$$

$$(\mathcal{B}_{\mathbf{u}\mathbf{u}})_{ij} = -(\rho \mathbf{v}^j, \mathbf{v}^i) \quad (4.53)$$

$$(\mathcal{A}_{p_b\mathbf{u}})_i = \langle 1, \mathbf{v}^i \cdot \mathbf{n}_0 \rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (4.54)$$

$$(\mathcal{A}_{vol})_l = \langle \phi_{F,l}^m, 1 \rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (4.55)$$

La condition à la limite dynamique à l'interface se décompose en deux blocs,  $\mathcal{A}_{\kappa f} = (\mathcal{A}_{\kappa\mathbf{u}}, 0, 0)^T$  et  $\mathcal{A}_{\eta f} = (\mathcal{A}_{\eta\mathbf{u}}, 0, 0)^T$ . Le premier est donné par la relation (2.43), c'est la contribution de la perturbation de la courbure :

$$(\mathcal{A}_{\kappa\mathbf{u}})_{il} = \left\langle \gamma \phi_{F,l}^m \mathbf{n}_0, \mathbf{v}^i \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (4.56)$$

Le second introduit la variation de la direction de la normale (A.31) et la variation de longueur d'arc (B.9). Ils sont écrits respectivement à la première et deuxième ligne de l'expression suivante :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_{\eta\mathbf{u}})_{il} = & - \left\langle (\gamma\kappa_0 - p_{b_0}) \left[ \left( -\phi_{F,l}^m \right)' \mathbf{t}_0 - \phi_{F,l}^m \frac{m}{r_0} \mathbf{e}_\varphi \right], \mathbf{v}^i \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \\ & - \left\langle (\gamma\kappa_0 - p_{0b}) \phi_{F,l}^m \left( \frac{n_{0r}}{r_0} - \kappa_0^{(a)} \right) \mathbf{n}_0, \mathbf{v}^i \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Le matrice  $\mathcal{A}_{\xi f} = (\mathcal{A}_{\xi\mathbf{u}}, \mathcal{A}_{\xi p}, 0)^T$  assure la prise en compte du changement de métrique entre les deux domaines (le zéro grisé est à prendre en compte dans le cas (4.117) où la pression interne est une inconnue).

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_{\xi\mathbf{u}})_{ij} = & - (\rho \nabla \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}^j \cdot \mathbf{u}_0, \mathbf{v}^i) - (\boldsymbol{\Sigma}_0, \nabla \mathbf{v}^i \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}^j) \\ & - \mu \left( \nabla \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}^j + [\nabla \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}^j]^T, \nabla \mathbf{v}^i \right) \\ & + (\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta}^j, [\rho \nabla \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 - \mathbf{f}_v] \cdot \mathbf{v}^i + \boldsymbol{\Sigma}_0 : \mathbf{v}^i) + (\nabla \mathbf{f}_v \cdot \boldsymbol{\zeta}^j, \mathbf{v}^i) \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$(\mathcal{A}_{\xi p})_{ij} = \left( -\nabla \mathbf{u}_0 : \nabla^T \boldsymbol{\zeta}^j + \nabla \cdot \mathbf{u}_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\zeta}^j, q^i \right) \quad (4.59)$$

Pour conclure sur les équations projetées sur la fonction-test  $\mathbf{v}$ , la matrice  $\mathcal{B}_{\xi\mathbf{u}}$  vient retrancher l'advection causée par le déplacement du maillage :

$$(\mathcal{B}_{\xi\mathbf{u}})_{ij} = (\rho \boldsymbol{\zeta}^j \cdot \nabla \mathbf{u}_0, \mathbf{v}^i) \quad (4.60)$$

Ce terme appartient à la matrice  $\mathcal{B}$ . La vitesse du maillage est obtenue grâce à la dérivée temporelle de son déplacement  $\boldsymbol{\xi}$ .

*Blocs correspondant à la perturbation de la courbure  $\mathcal{A}_{\kappa}$*

Les blocs  $\mathcal{A}_{\kappa\kappa}$  et  $\mathcal{A}_{\eta\kappa}$  donnant la perturbation de la courbure sont identiques aux relations (2.44) et (2.45). La façon de calculer la courbure ne change pas comparativement au chapitre 2 où elle a été validée. On peut néanmoins rappeler les écritures de ces blocs :

$$(\mathcal{A}_{\kappa\kappa})_{kl} = \left\langle \phi_{F,l}^m, \phi_{F,k}^m \right\rangle_{\Gamma_{b_0}}, \quad (4.61)$$

$$(\mathcal{A}_{\eta\kappa})_{kl} = \left\langle \frac{1}{r_0} \left( \phi_{F,l}^m \right)', \left( \phi_{F,k}^m \right)' \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} - \left\langle \phi_{F,l}^m \left( \kappa_0^{(a)2} + \kappa_0^{(b)2} - \frac{m^2}{r_0^2} \right), \phi_{F,k}^m \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (4.62)$$

*Blocs correspondant au déplacement interfacial,  $\mathcal{A}_{\eta}$  et  $\mathcal{B}_{\eta\eta}$*

La condition à la limite cinématique est projetée sur les fonctions-test associées au déplacement de l'interface. Ces blocs permettent ainsi d'appliquer cette condition. Le premier est la perturbation de la vitesse normale :

$$(\mathcal{A}_{\mathbf{u}\eta})_{kj} = \left\langle \mathbf{v}^j, \phi_{F,k}^m \mathbf{n}_0 \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (4.63)$$

Le deuxième vient ajouter la perturbation de l'incidence de la normale et la variation de longueur d'arc de l'interface :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_{\eta\eta})_{kl} = & \left\langle \mathbf{u}_0 \cdot \left[ \left( -\phi_{F,l}^m \right)' \mathbf{t}_0 - \phi_{F,l}^m \frac{m}{r_0} \mathbf{e}_\varphi \right], \phi_{F,k}^m \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \\ & + \left\langle \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_0 \phi_{F,l}^m \left( \frac{n_{0r}}{r_0} - \kappa_0^{(a)} \right), \phi_{F,k}^m \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Ces deux premières contributions doivent s'équilibrer avec la variation temporelle du déplacement de l'interface. Cela est fait avec un bloc de la matrice  $\mathcal{B}$  :

$$(\mathcal{B}_{\eta\eta})_{kl} = - \left\langle \phi_{F,l}^m, \phi_{F,k}^m \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (4.65)$$

*Blocs correspondant aux équations de maillage  $\mathcal{A}_\xi$*

Les équations de maillage sont arbitraires, l'exemple le plus simple est développé (4.39). Les conditions limites sur l'axe de révolution ne sont pas explicitées car elles dépendent du nombre d'onde azimutal  $m$ .

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_{\xi\xi})_{ij} = & (\nabla \boldsymbol{\varsigma}^j, \nabla \boldsymbol{\varsigma}^i) + \left\langle \boldsymbol{\varsigma}^j \frac{1}{\epsilon_D}, \boldsymbol{\varsigma}^i \right\rangle_{\Gamma_{b_0} \cup \Gamma_\infty} \\ & + \mathbf{b}_{cl}^{\Gamma_{axe0}}(\boldsymbol{\varsigma}^j, \boldsymbol{\varsigma}^i) + \mathbf{b}_{cl}^{\Gamma_{xy0}}(\boldsymbol{\varsigma}^j, \boldsymbol{\varsigma}^i) \end{aligned} \quad (4.66)$$

Ce bloc correspond à la première partie de l'équation du maillage avec l'adjonction d'une partie des conditions aux limites de type Dirichlet. Le terme  $\mathbf{b}_{cl}^{\Gamma_{xy0}}(\boldsymbol{\varsigma}^j, \boldsymbol{\varsigma}^i)$  vient imposer la condition sur le plan équatorial. Il est uniquement nécessaire si un demi-domaine est utilisé. Ce premier bloc est forcé par le déplacement normal de la surface de la bulle via le bloc suivant :

$$(\mathcal{A}_{\eta\xi})_{il} = \left\langle \phi_{F,l}^m \mathbf{n}_0 \frac{1}{\epsilon_D}, \boldsymbol{\varsigma}^i \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (4.67)$$

Cela assure une continuité du déplacement entre l'interface et l'intérieur du maillage.

*Termes à l'ordre 0*

Le vecteur  $\mathcal{NS}_0(\mathbf{u}_0, p_0, \kappa_0)$  représente le résidu de l'équation stationnaire de Navier-Stokes. Il est utilisé pour effectuer le calcul du champ de base et doit être quasi nul une fois celui-ci convergé. L'analyse de stabilité linéaire, utilisant des champs de base convergés, ne nécessite pas ce terme qui est nul. La partie fluide de ce vecteur se décompose en trois :

$$(\mathcal{NS}_{0,\mathbf{u}})_i = (2\mu D(\mathbf{u}_0), \nabla \mathbf{v}^i) + (\rho \nabla \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 - \mathbf{f}_v, \mathbf{v}^i) - (p_0, \nabla \cdot \mathbf{v}^i) \quad (4.68)$$

$$(\mathcal{NS}_{0,p})_i = (\nabla \cdot \mathbf{u}_0, q^i) \quad (4.69)$$

$$(\mathcal{NS}_{0,vol}) = -(\mathcal{V}_{th} - \mathcal{V}_{b_0}) \quad (4.70)$$

Le volume théorique de la bulle est choisi tel que  $\mathcal{V}_{th} = 4/3\pi R^3$ , soit le volume de la sphère de rayon  $R$ .

La condition cinématique possède aussi un terme à l'ordre 0 :

$$(\mathcal{NS}_{0,\eta})_k = \left\langle \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_0, \phi_{F,k}^m \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (4.71)$$

### Récapitulatif

Les termes de l'équation linéarisée de Navier-Stokes (4.49) sont tous explicités. Cette formulation est utilisée pour calculer simultanément le champ de base autour de la bulle ainsi que la forme d'équilibre de cette dernière. L'étude de stabilité linéaire est aussi basée sur la même formulation. Ces équations sont exprimées en vitesses absolues dans un référentiel absolu. Elles sont adaptées à l'étude de bulles dont le barycentre ne se déplace pas. Le cas de bulles piégées dans un réservoir tournant ou dans un écoulement élongationnel peut être traité avec cette formulation. En revanche, il est judicieux d'utiliser un référentiel attaché à la bulle dans le cas où la gravité vient mouvoir la bulle.

## 4.2 LINÉARISATION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES EXPRIMÉES EN VITESSES ABSOLUES DANS UN RÉFÉRENTIEL RELATIF

Cette formulation est donnée par MOUGIN [57]. Elle permet de définir le barycentre de la bulle comme l'origine du référentiel. La bulle remontant sous l'effet de la gravité est accompagnée par le domaine qui lui est attaché. Les équations de Navier-Stokes et leurs conditions aux limites s'écrivent :

$$\nabla^r \cdot \mathbf{u}^r = 0, \quad (4.72)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^r}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}^r \times \mathbf{u}^r + \nabla^r \mathbf{u}^r \cdot (\mathbf{u}^r - \mathbf{W}_b) \right) = \nabla^r \cdot \boldsymbol{\Sigma}^r + \mathbf{f}_v, \quad (4.73)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^r \cdot \mathbf{n} = (\gamma \kappa - p_b) \mathbf{n}, \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (\mathbf{u}^r - \mathbf{W}_b) \cdot \mathbf{n}, \quad (4.75)$$

$$\mathbf{W}_b = \mathbf{u}_b + \boldsymbol{\Omega}^r \times \mathbf{r}, \quad (4.76)$$

où

$$\boldsymbol{\Sigma}^r = -pI + \mu \left( \nabla^r \mathbf{u}^r + [\nabla^r \mathbf{u}^r]^T \right), \quad (4.77)$$

$\mathbf{u}^r$  désigne la vitesse relative dans le référentiel attaché au barycentre de la bulle, et  $\boldsymbol{\Omega}^r$  le vecteur rotation de ce référentiel par rapport à un référentiel fixe, attaché au laboratoire.

Pour notre étude, le référentiel relatif choisi est celui se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{u}_b = u_b \mathbf{e}_z$ . Celle-ci correspond à la vitesse stationnaire d'ascension de la bulle. Ce référentiel est en déplacement rectiligne uniforme par rapport au référentiel du laboratoire (absolu). Son vecteur

de rotation est en conséquence nul, simplifiant les équations. Un tel mouvement assure que  $\nabla^r \equiv \nabla_{\Omega_t}$ ,  $\mathbf{\Omega}^r = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{W}_b = \mathbf{u}_b = u_b \mathbf{e}_z$ .

Pour effectuer ce changement de référentiel, il faut introduire une nouvelle inconnue, la vitesse verticale de la bulle  $u_b$ . Elle se décompose comme les autres grandeurs du problème :

$$u_b = u_{b_0} + \epsilon u_{b_1} + O(\epsilon^2), \quad (4.78)$$

qui admet une valeur constante vis-à-vis de l'espace et du temps.

**Remarque 1 :** Une nouvelle inconnue est ajoutée au système d'équation, une nouvelle contrainte est alors nécessaire. La position du barycentre peut ainsi être prescrite.

**Remarque 2 :** Il est important de noter que cette inconnue n'apparaîtra que pour le calcul du champ de base, lors de la méthode de Newton. En effet, celle-ci est la vitesse stationnaire d'ascension de la bulle. L'analyse de stabilité linéaire peut être conduite sur ce référentiel avançant à vitesse constante. Néanmoins, cela ne fixera pas le barycentre de la bulle pour autant. La bulle pourra avoir des modes dont les trajectoires ne sont pas rectilignes ou uniformes, la contrainte sur la position du barycentre sera donc levée pour l'analyse de stabilité linéaire.

#### 4.2.1 Formulation variationnelle sur le domaine de calcul

La même étape de linéarisation sur le domaine de calcul peut être effectuée sur les équations écrites dans le référentiel relatif. Nous pouvons donc reprendre les formulations variationnelles en intégrant le référentiel relatif. Les équations gérant les aspects géométriques (volume, courbure, maillage) ne sont pas impactées. Cela donne pour la formulation (4.30),  $\forall \mathbf{v}, q$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \rho \nabla \mathbf{u}_0^r \cdot (\mathbf{u}_0^r - \mathbf{u}_{b_0}) \cdot \mathbf{v} + \Sigma_0^r : \nabla \mathbf{v} - \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v} + q \nabla \cdot \mathbf{u}_0^r \\ & - \int_{\Gamma_{b_0}} (\gamma \kappa_0 - p_{0b}) \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v} \\ & + \epsilon \int_{\Omega_0} (\rho [\partial_t \mathbf{u}_1^r + \nabla \mathbf{u}_1^r \cdot (\mathbf{u}_0^r - \mathbf{u}_{b_0}) + \nabla \mathbf{u}_0^r \cdot (\mathbf{u}_1^r - \partial_t \boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}_{b_1})] - \nabla \mathbf{f}_v \cdot \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{v} \\ & + \epsilon \int_{\Omega_0} \Sigma_1^r : \nabla \mathbf{v} + q \nabla \cdot \mathbf{u}_1^r \\ & - \epsilon \int_{\Gamma_{b_0}} (\gamma \kappa_1 - p_{1b}) \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v} + (\gamma \kappa_0 - p_{0b}) \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v} \\ & + \epsilon \int_{\Omega_0} -\rho \nabla \mathbf{u}_0^r \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{u}_0^r - \mathbf{u}_{b_0}) \cdot \mathbf{v} \\ & + \epsilon \int_{\Omega_0} -\Sigma_0^r : (\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}) - \mu \left[ \nabla \mathbf{u}_0^r \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} + (\nabla \mathbf{u}_0^r \cdot \nabla \boldsymbol{\xi})^T \right] : \nabla \mathbf{v} \\ & + \epsilon \int_{\Omega_0} -q \nabla \mathbf{u}_0^r : \nabla^T \boldsymbol{\xi} \\ & + \epsilon \int_{\Omega_0} (\rho \nabla \mathbf{u}_0^r \cdot (\mathbf{u}_0^r - \mathbf{u}_{b_0}) \cdot \mathbf{v} + \Sigma_0^r : \nabla \mathbf{v} - \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v} + q \nabla \cdot \mathbf{u}_0^r) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \\ & - \epsilon \int_{\Gamma_{b_0}} (\gamma \kappa_0 - p_{0b}) \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v} \eta \left( \frac{n_{0r}}{r_0} - \kappa_0^{(a)} \right) \\ & + O(\epsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

avec la condition cinématique à la surface de la bulle (4.80),  $\forall \tau$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{b_0}} (\mathbf{u}_0^r - \mathbf{u}_{b_0}) \cdot \mathbf{n}_0 \tau \\ & + \epsilon \int_{\Gamma_{b_0}} \left[ (\mathbf{u}_1^r - \mathbf{u}_{b_1}) \cdot \mathbf{n}_0 + (\mathbf{u}_0^r - \mathbf{u}_{b_0}) \cdot \mathbf{n}_1 + (\mathbf{u}_0^r - \mathbf{u}_{b_0}) \cdot \mathbf{n}_0 \eta \left( \frac{n_{0r}}{r_0} - \kappa_0^{(a)} \right) \right] \tau \\ & - \epsilon \int_{\Gamma_{b_0}} \partial_t \eta \tau + O(\epsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.80)$$

*Position et volume de la bulle en ascension*

Afin de calculer et contrôler avec précision la position du barycentre, le champ de déformation  $\boldsymbol{\xi}$  du domaine  $\Omega_0$  est étendu à l'intérieur de la bulle, sur le domaine  $\Omega_{b_0}$  représenté sur la figure 4.3. Le déplacement interne à la bulle est noté  $\boldsymbol{\xi}_b$ . Il est obtenu avec les mêmes équations que le déplacement dans le domaine de calcul et observe les mêmes conditions aux limites sur les contours  $\Gamma_{b_0}$  et  $\Gamma_{axe_0}^b$ .

Le volume de la bulle s'obtient avec :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_b} dv = \mathcal{V}_{th} \\ & \int_{\Omega_{b_0}} (1 + \epsilon \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_b) dv_0 + O(\epsilon^2) = \mathcal{V}_{th} \end{aligned} \quad (4.81)$$

avec  $\nabla \equiv \nabla_{\Omega_0}$ . Ce qui donne pour la contrainte sur le volume :

$$\epsilon \int_{\Omega_{b_0}} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_b dv_0 + O(\epsilon^2) = \mathcal{V}_{th} - \mathcal{V}_{b_0} \quad (4.82)$$

**Remarque :** En appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, à cette intégrale on retrouve la contrainte (4.55), i.e. le flux de  $\eta \mathbf{n}_0$  sur  $\Gamma_{b_0}$ . Les deux façons d'imposer la contrainte sur le volume sont équivalentes et donnent les mêmes résultats.

La position du barycentre de la bulle doit coïncider avec l'origine du repère :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_b} \mathbf{OM} dv = \mathbf{0} \\ & \int_{\Omega_{b_0}} (\mathbf{OM}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}_b) (1 + \epsilon \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_b) dv_0 + O(\epsilon^2) = \mathbf{0} \\ & \epsilon \int_{\Omega_{b_0}} (\mathbf{OM}_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_b + \boldsymbol{\xi}_b) dv_0 + O(\epsilon^2) = -\mathcal{V}_{b_0} \mathbf{OG}_0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

La bulle étant axisymétrique, il faut projeter les équations précédentes sur l'axe vertical. La contrainte pour la position du barycentre est la suivante :

$$\epsilon \int_{\Omega_{b_0}} (z_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_b + \xi_{bz}) dv_0 + O(\epsilon^2) = -\mathcal{V}_{b_0} \mathbf{OG}_0 \cdot \mathbf{e}_z \quad (4.84)$$

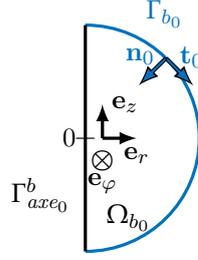


FIGURE 4.3 – Domaine de calcul à l'intérieur de la bulle  $\Omega_{b_0}$  afin d'imposer volume et position du barycentre pour l'obtention du champ de base de la bulle en ascension.

#### 4.2.2 Écriture matricielle du problème

L'inconnue additionnelle au problème (4.49) modifie la matrice fluide (4.117), les matrices intégrant le changement de métrique (4.58), (4.59), et le terme à l'ordre zéro. De nouveaux blocs sont aussi ajoutés. Dans ce cas, les inconnues du problème sont :

$$\mathbf{q}_1 = [\mathbf{u}_1^r, p_1, u_{b_1}, p_{b_1}, X_{\kappa_1}, X_\eta, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_b]^T \quad (4.85)$$

La vitesse de la bulle est verticale, en conséquence cette inconnue est un scalaire. La linéarisation des équations de Navier-Stokes s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{ff}^r & \mathcal{A}_{\kappa f} & \mathcal{A}_{\eta f} & \mathcal{A}_{\xi f}^r & \mathcal{A}_{\xi_b f} \\ 0 & \mathcal{A}_{\kappa\kappa} & \mathcal{A}_{\eta\kappa} & 0 & 0 \\ \mathcal{A}_{f\eta}^r & 0 & \mathcal{A}_{\eta\eta}^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_{\eta\xi} & \mathcal{A}_{\xi\xi} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_{\eta\xi_b} & 0 & \mathcal{A}_{\xi_b\xi_b} \end{pmatrix} \epsilon \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{ff} & 0 & 0 & \mathcal{B}_{\xi f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{B}_{\eta\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \epsilon \partial_t \mathbf{q}_1 - \begin{pmatrix} \mathcal{NS}_{0,f}^r \\ 0 \\ \mathcal{NS}_{0,\eta}^r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

Les matrices modifiées pour inclure la vitesse du référentiel attaché à la bulle sont notées avec un exposant  $r$ .

#### Blocs des matrices fluide, $\mathcal{A}_f$

Le bloc permettant d'imposer les conditions géométriques (volume et position) fait son apparition :

$$\mathcal{A}_{\xi_b f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{A}_{u_b \xi_b} \\ \mathcal{A}_{p_b \xi_b} \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

Il se décompose de la sorte :

$$(\mathcal{A}_{u_b \xi_b})_j = (z_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\varsigma}_b^j + \varsigma_{bz}^j, 1)_{\Omega_{b_0}} \quad (4.88)$$

$$(\mathcal{A}_{p_b \xi_b})_j = (\nabla \cdot \boldsymbol{\varsigma}_b^j, 1)_{\Omega_{b_0}} \quad (4.89)$$

Le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{\Omega_{b_0}}$  est effectué sur le domaine intérieur à la bulle. La première équation permet d'imposer la position du barycentre et la seconde le volume.

Le bloc fluide est modifié :

$$\mathcal{A}_{ff}^r = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\mathbf{uu}}^r & -\mathcal{A}_{p\mathbf{u}} & \mathcal{A}_{u_b\mathbf{u}}^r & \mathcal{A}_{p_b\mathbf{u}} \\ \mathcal{A}_{p\mathbf{u}}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{ff} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{\mathbf{uu}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.90)$$

Le mouvement du référentiel est pris en compte dans le calcul du terme d'advection :

$$(\mathcal{A}_{\mathbf{uu}}^r)_{ij} = (2\mu D(\mathbf{v}^j), \nabla \mathbf{v}^i) + (\rho \nabla \mathbf{u}_0^r \cdot \mathbf{v}^j + \rho \nabla \mathbf{v}^j \cdot (\mathbf{u}_0^r - \mathbf{u}_{b_0}), \mathbf{v}^i) \quad (4.91)$$

$$(\mathcal{A}_{u_b\mathbf{u}}^r)_i = (-\rho \nabla \mathbf{u}_0^r \cdot \mathbf{e}_z, \mathbf{v}^i) \quad (4.92)$$

Les derniers blocs qui doivent être corrigés sont les suivants :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_{\xi\mathbf{u}}^r)_{ij} &= -(\rho \nabla \mathbf{u}_0^r \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}^j \cdot (\mathbf{u}_0^r - \mathbf{u}_{b_0}), \mathbf{v}^i) - (\boldsymbol{\Sigma}_0^r, \nabla \mathbf{v}^i \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}^j) \\ &\quad - \mu \left( \nabla \mathbf{u}_0^r \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}^j + [\nabla \mathbf{u}_0^r \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}^j]^T, \nabla \mathbf{v}^i \right) \\ &\quad + (\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta}^j, [\rho \nabla \mathbf{u}_0^r \cdot (\mathbf{u}_0^r - \mathbf{u}_{b_0}) - \mathbf{f}_v] \cdot \mathbf{v}^i + \boldsymbol{\Sigma}_0^r : \mathbf{v}^i) + (\nabla \mathbf{f}_v \cdot \boldsymbol{\zeta}^j, \mathbf{v}^i) \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$(\mathcal{A}_{\xi p}^r)_{ij} = \left( -\nabla \mathbf{u}_0^r : \nabla^T \boldsymbol{\zeta}^j + \nabla \cdot \mathbf{u}_0^r \nabla \cdot \boldsymbol{\zeta}^j, q^i \right) \quad (4.94)$$

*Blocs correspondant au déplacement interfacial  $\mathcal{A}_\eta$*

Le bloc faisant intervenir la vitesse à l'ordre zéro doit être modifié :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_{\eta\eta}^r)_{kl} &= \left\langle (\mathbf{u}_0^r - \mathbf{u}_{b_0}) \cdot \left[ (-\phi_{F,l}^m)' \mathbf{t}_0 - \phi_{F,l}^m \frac{m}{r_0} \mathbf{e}_\varphi \right], \phi_{F,k}^m \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \\ &\quad + \left\langle (\mathbf{u}_0^r - \mathbf{u}_{b_0}) \cdot \mathbf{n}_0 \phi_{F,l}^m \left( \frac{n_{0r}}{r_0} - \kappa_0^{(a)} \right), \phi_{F,k}^m \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \end{aligned} \quad (4.95)$$

Et la perturbation de la vitesse ascensionnelle intervient dans  $\mathcal{A}_{f\eta}^r = (\mathcal{A}_{\mathbf{u}\eta}, 0, \mathcal{A}_{u_b\eta}^r, 0)$  avec :

$$(\mathcal{A}_{u_b\eta}^r)_{kl} = \left\langle -\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}_0, \phi_{F,k}^m \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (4.96)$$

**Remarque :** en revanche, le bloc  $\mathcal{B}_{\eta\eta}$  correspondant à la vitesse de l'interface n'est pas modifié.

*Termes à l'ordre 0*

Eux aussi sont modifiés, ils utilisent la vitesse relative du fluide :

$$(\mathcal{NS}_{0,\mathbf{u}}^r)_i = (2\mu D(\mathbf{u}_0^r), \nabla \mathbf{v}^i) + (\rho \nabla \mathbf{u}_0^r \cdot (\mathbf{u}_0^r - \mathbf{u}_{b_0}) - \mathbf{f}_v, \mathbf{v}^i) - (p_0, \nabla \cdot \mathbf{v}^i) \quad (4.97)$$

$$(\mathcal{NS}_{0,p}^r)_i = (\nabla \cdot \mathbf{u}_0^r, q^i) \quad (4.98)$$

$$(\mathcal{NS}_{0,u_b}^r) = \mathcal{V}_{b_0} \mathbf{OG}_0 \cdot \mathbf{e}_z \quad (4.99)$$

$$(\mathcal{NS}_{0,p_b}^r) = -(\mathcal{V}_{th} - \mathcal{V}_{b_0}) \quad (4.100)$$

$$(\mathcal{NS}_{0,\eta}^r)_k = \left\langle (\mathbf{u}_0^r - \mathbf{u}_{b_0}) \cdot \mathbf{n}_0, \phi_{F,k}^m \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (4.101)$$

Blocs correspondant aux équations de maillage dans la bulle  $\mathcal{A}_{\xi_b}$

Les équations de maillage étant identiques dans le fluide et dans la bulle, la discrétisation est identique.

$$(\mathcal{A}_{\xi_b \xi_b})_{ij} = \left( \nabla \mathbf{s}_b^j, \nabla \mathbf{s}_b^i \right)_{\Omega_{b_0}} + \left\langle \mathbf{s}_b^j \frac{1}{\epsilon_D}, \mathbf{s}_b^i \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (4.102)$$

$$+ \mathbf{b}_{cl}^{\Gamma_{axe_0}^b}(\mathbf{s}_b^j, \mathbf{s}_b^i) \quad (4.103)$$

$$(\mathcal{A}_{\eta \xi_b})_{il} = \left\langle \phi_{F,l}^m \mathbf{n}_0 \frac{1}{\epsilon_D}, \mathbf{s}_b^i \right\rangle_{\Gamma_{b_0}} \quad (4.104)$$

### 4.3 MÉTHODE DE NEWTON

Cette méthode permet d'obtenir des champs de base *i.e.* vitesses, pressions et forme de la bulle dans le cas stationnaire. La forme de la bulle est alors axisymétrique, il n'y a pas variations azimutales ( $m = 0$ ). En conséquence, les symétries du problème ne permettent pas de conserver naturellement le volume. Il est nécessaire d'ajouter la pression interne à la bulle comme inconnue qui joue le rôle de multiplicateur de Lagrange pour la contrainte sur le volume.

La solution recherchée étant stationnaire, aucune dérivée temporelle n'intervient et la vitesse du maillage  $\mathbf{w} = \partial_t \xi$  n'a pas de sens à proprement parler. Dans cette configuration, la linéarisation des équations de Navier-Stokes (4.48) se résume à :

$$\epsilon \mathcal{A} \mathbf{q}_1 = -\mathcal{NS}_0 + O(\epsilon^2) \quad (4.105)$$

La méthode de Newton est un algorithme qui permet de trouver le zéro d'une fonctionnelle connaissant une valeur de départ. La figure 4.4 illustre le principe de cet algorithme pour une fonction mono-dimensionnelle. Connaissant une valeur initiale  $x_0$ , on cherche  $x_{i+1}$  telle que :

$$F'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + F(x_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)} \quad (4.109)$$

afin de s'approcher de la racine de la fonction  $F$ . Un critère d'arrêt est nécessaire et l'itération s'arrête lorsque l'écart deux solutions successives est considéré acceptable :  $x_{i+1} - x_i < \epsilon_{crit} \sim 10^{-12}$ .

Les équations stationnaires de Navier-Stokes représentent la fonctionnelle dont on souhaite trouver le zéro. Au zéro de cette fonctionnelle est associé le champ de base stationnaire de

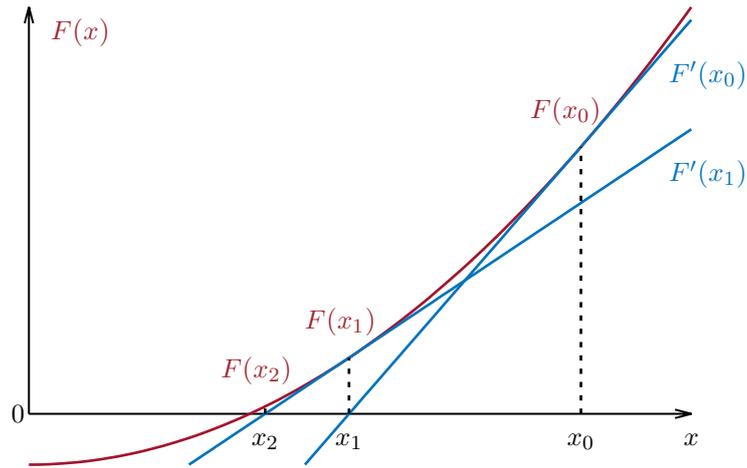


FIGURE 4.4 – Illustration de la méthode de Newton pour une fonction scalaire

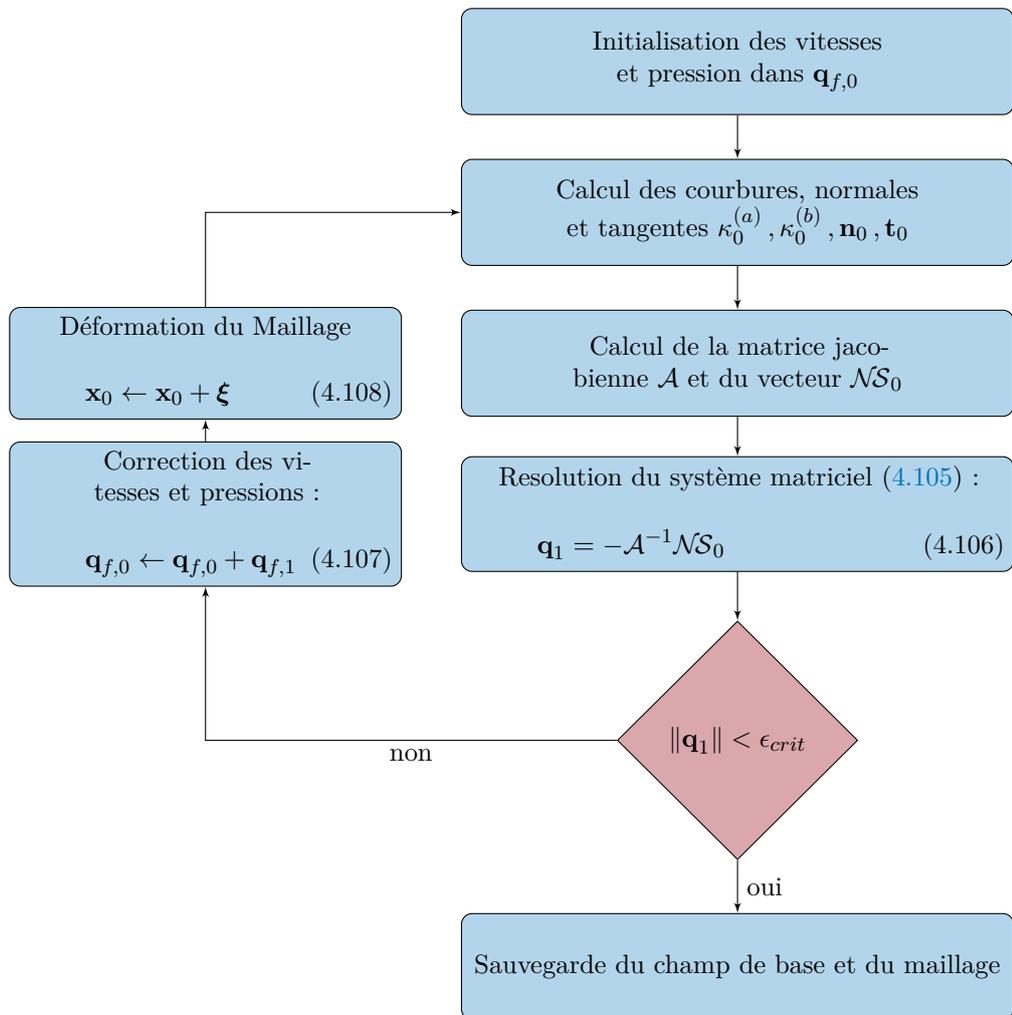


FIGURE 4.5 – Algorithme pour le calcul du champ de base.  $\mathbf{q}_{f,0}$  et  $\mathbf{q}_{f,1}$  représentent les vecteurs contenant les inconnues fluides (vitesses et pressions) à l'ordre 0 et  $\epsilon$ .

l'écoulement autour de la bulle ainsi que sa forme d'équilibre. La méthode consiste alors à approcher ce zéro de manière itérative grâce à la jacobienne de la fonctionnelle qui n'est autre que la matrice  $\mathcal{A}$  de l'équation précédente. Le système (4.105) donne les incréments des vitesses et pressions  $\{\mathbf{u}_1, p_1, (u_{b1}), p_{b1}\}$  pour approcher la solution stationnaire. L'algorithme est détaillé sur la figure 4.5.

Cette méthode converge en quelques itérations, de façon quadratique, mais présente l'inconvénient d'avoir un bassin d'attraction des solutions relativement étroit. Il faut en conséquence trouver une valeur approchée  $\mathbf{q}_0$  qui ne soit pas trop éloignée de la solution recherchée pour que l'algorithme converge. Un autre inconvénient provient du fait qu'il faut calculer la matrice jacobienne du problème à chaque itération car celle-ci dépend des vitesses et pressions à l'itération précédente. Cette étape a un coût de calcul important.

Un point à ne pas négliger est la gestion de la déformation du maillage. Les déformations successives de ce dernier peuvent mener à un étirement très important de certaines de ses mailles. Le maillage perd localement son isotropie et cela conduit à une mauvaise approximation des différentes grandeurs du problème. Dans de telles circonstances, il est nécessaire de reconstruire le maillage en conservant la forme de la bulle. Des interpolations à l'ordre 5 ont été utilisées pour que la surface garde sa forme. La mise en place de telles routines peut constituer un point difficile étant donné qu'il faut distribuer les nœuds sur la surface de la bulle en interpolant leurs positions et faire de même pour les zones de raffinement interne du maillage.

Dans le cas d'une bulle piégée, la matrice  $\mathcal{A}$  est donnée dans la section 4.1.4, le vecteur d'inconnues est  $\mathbf{q}_1 = [\mathbf{u}_1, p_1, p_b, X_{\kappa_1}, X_\eta, \boldsymbol{\xi}]^T$ . Par contre, la matrice jacobienne du problème de la bulle en ascension est exprimée dans la section 4.2.2. Le vecteur  $\mathbf{q}_1$  gagne la vitesse ascensionnelle et la déformation de la bulle comme inconnues, il devient  $\mathbf{q}_1 = [\mathbf{u}_1^r, p_1, u_{b1}, p_{b1}, X_{\kappa_1}, X_\eta, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_b]^T$ .

#### 4.3.1 Méthode de continuation pseudo-curviligne

La méthode de Newton est utilisée pour obtenir des écoulements de base. Ces derniers dépendent de plusieurs paramètres physiques comme la viscosité, la tension de surface, la masse volumique... L'idée est de faire varier ces paramètres pour couvrir de grandes gammes. Cependant, pour certains paramètres, formes d'équilibre et écoulements de base stationnaire n'existent pas. C'est le cas pour une bulle dans un écoulement d'étirement uni-directionnel. Une bulle piégée dans une telle configuration est plongée dans un champ de vitesse :

$$\begin{pmatrix} U_r \\ U_\varphi \\ U_z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} -r/2 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad (4.110)$$

où  $S$  est le taux d'étirement de l'écoulement.

Au-delà d'un certain taux d'étirement, une bulle piégée dans un tel écoulement s'étire jusqu'à se rompre. Il n'est donc pas utile de chercher une forme d'équilibre pour un taux d'étirement supérieur à cette valeur critique. En revanche, une branche instable peut exister. La figure 4.6 montre la pression interne à la bulle en fonction du taux d'étirement de l'écoulement. Les formes d'équilibres de bulle sont aussi visibles pour trois configurations. La branche stable, en trait plein, est accessible avec l'algorithme précédemment décrit. Cependant, en se rapprochant du taux d'étirement critique,  $S_{crit}$ , l'algorithme présente plus de difficultés à converger. Le but ici est de réussir à capter la branche instable pour obtenir des formes d'équilibre instables malgré la présence d'un point tournant sur la courbe. ALLGOWER et GEORG [2] développent dans leur ouvrage les méthodes de continuations qui permettent d'ef-

fectuer ce suivi. Classiquement, la façon d'utiliser une méthode de Newton est la suivante :

- Choisir un cas dont les paramètres de contrôle imposent une vitesse faible à l'infini et une faible déformation de l'interface.
- Initialiser les vitesses et pressions à zéro dans le fluide. La surface initiale de la bulle est choisie sphérique, la courbure est alors connue et la pression dans la bulle est estimée. Cela constitue le point de départ de la méthode de Newton.
- Lancer l'algorithme 4.5. Si la méthode converge, on obtient un nouveau champ de base et une nouvelle forme d'équilibre de la bulle.
- Utiliser ce champ de base trouvé comme point de départ, augmenter le paramètre de contrôle et lancer à nouveau l'algorithme 4.5.

La limite de ce fonctionnement est atteinte lorsqu'un point de rebroussement apparaît *e.g.* figure 4.6. Il faut alors diminuer le paramètre de contrôle pour espérer se retrouver sur la deuxième branche. Or, cela ne suffit pas, il faut aussi contraindre la direction dans laquelle on cherche une solution. C'est là que la méthode de continuation pseudo-curviligne (*pseudo-arclength continuation*) révèle son utilité. Le taux d'étirement devient une inconnue et il est linéarisé :

$$S = S_0 + \epsilon S_1 + O(\epsilon^2) \quad (4.111)$$

Ainsi, les conditions aux limites utilisant ce taux d'étirement doivent être développées à l'ordre  $\epsilon$ . La contrainte permettant de se situer dans la direction voulue est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial c} \\ \frac{\partial p_b}{\partial c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta S \\ \delta p_b \end{pmatrix} = \delta c \quad (4.112)$$

où  $c$  est l'abscisse curviligne de la courbe  $p_b = f(S)$  et  $\delta c$  est un incrément de cette abscisse. La figure 4.7 illustre cette relation d'orthogonalité. La solution est recherchée à une distance imposée  $\delta c$  dans la direction tangente à la courbe. La relation d'orthogonalité se linéarise de la sorte :

$$\epsilon \frac{\partial S}{\partial c} S_1 + \epsilon \frac{\partial p_b}{\partial c} p_{b1} = \delta c - \frac{\partial S}{\partial c} (S_0 - S^i) + \frac{\partial p_b}{\partial c} (p_{b0} - p_b^i) + O(\epsilon^2) \quad (4.113)$$

En choisissant l'incrément assez petit, il devient alors possible d'obtenir des champs de base et des formes d'équilibres appartenant à la branche instable en passant le point de rebroussement  $(S_{crit}, p_{b_{crit}})$ .

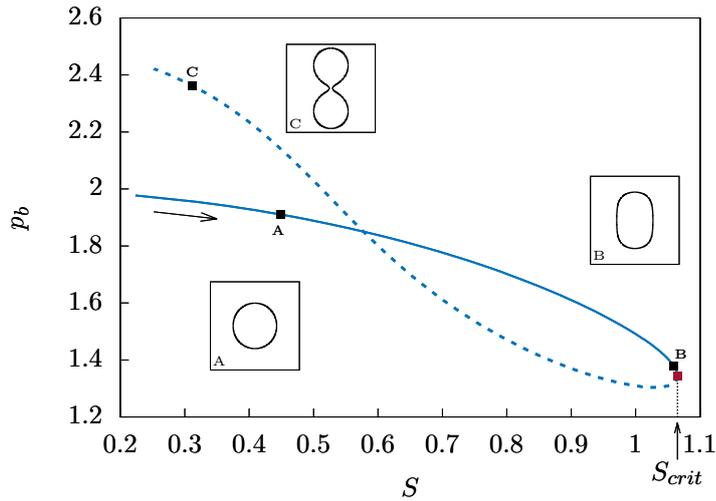


FIGURE 4.6 – Pression interne de la bulle en fonction du taux d'étirement  $S$  de l'écoulement. La branche en trait plein est la branche stable et celle en pointillés correspond à une forme d'équilibre instable. Le point rouge correspond au point de rebroussement  $(S_{crit}, p_{b_{crit}})$ .

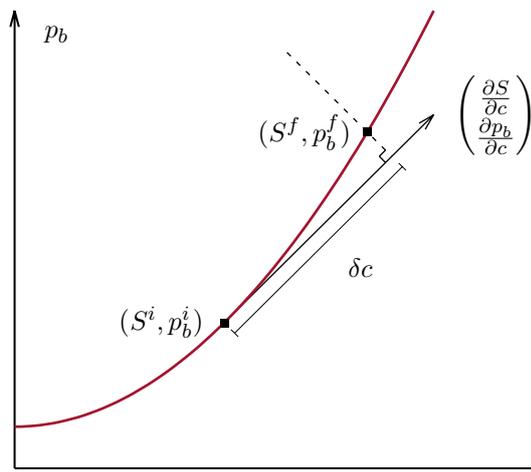


FIGURE 4.7 – Principe illustrant la direction dans laquelle la solution est recherchée avec la méthode de continuation. L'exposant  $i$  indique la solution permettant d'initialiser la méthode de Newton et l'exposant  $f$  la solution finale, convergée.

## 4.4 ANALYSE DE STABILITÉ LINÉAIRE

Dans le cas de l'analyse de stabilité linéaire, le terme  $\mathcal{NS}_0$  à l'ordre 0, dans les relations (4.49) et (4.86) est nul. En effet, le champ de base étant convergé, le résidu des équations de Navier-Stokes est négligeable. La décomposition modale des inconnues du problème donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1^{\text{ALE}}(r_0, \varphi_0, z_0, t) &= \hat{\mathbf{u}}_1^{\text{ALE}}(r_0, z_0)e^{\lambda t + im\varphi_0} + c.c. \\
p_1^{\text{ALE}}(r_0, \varphi_0, z_0, t) &= \hat{p}_1^{\text{ALE}}(r_0, z_0)e^{\lambda t + im\varphi_0} + c.c. \\
p_{b_1}(t) &= \hat{p}_{b_1}e^{\lambda t + im\varphi_0} + c.c. \\
\eta(r_0, \varphi_0, z_0, t) &= \hat{\eta}(s_0)e^{\lambda t + im\varphi_0} + c.c. \\
\kappa_1(r_0, \varphi_0, z_0, t) &= \hat{\kappa}_1(s_0)e^{\lambda t + im\varphi_0} + c.c. \\
\xi(r_0, \varphi_0, z_0, t) &= \hat{\xi}(r_0, z_0)e^{\lambda t + im\varphi_0} + c.c.
\end{aligned} \tag{4.114}$$

**Remarque :** Lorsque le référentiel attaché à la bulle sera utilisé, la vitesse du fluide exhibera un exposant :  $\hat{\mathbf{u}}_1^{\text{ALE},r}$ , signifiant que l'inconnue est la vitesse relative dans le référentiel se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{u}_b$ .

La dérivée temporelle est remplacée par une multiplication par  $\lambda$  et le problème aux valeurs propres s'écrit :

$$\mathcal{A}\hat{\mathbf{q}}_1 = \lambda\mathcal{B}\hat{\mathbf{q}}_1 \tag{4.115}$$

Pour l'étude de stabilité d'une bulle piégée,  $\hat{\mathbf{q}}_1 = [\hat{\mathbf{u}}_1^{\text{ALE}}, \hat{p}_1^{\text{ALE}}, \hat{p}_{b_1}, \hat{\eta}, \hat{\kappa}_1, \hat{\xi}]^T$ . Les blocs de la matrice  $\mathcal{A}$  sont identiques à ceux utilisés pour la méthode de Newton, tous les blocs sont détaillés dans la section 4.1.4. L'utilisation de l'inconnue supplémentaire  $\hat{p}_{b_1}$  dépend des symétries du problème.

Dans le cas d'une bulle en ascension,  $\hat{\mathbf{q}}_1 = [\hat{\mathbf{u}}_1^{\text{ALE},r}, \hat{p}_1^{\text{ALE}}, \hat{p}_{b_1}, \hat{\eta}, \hat{\kappa}_1, \hat{\xi}]^T$ , le référentiel n'est pas le même et quelques changements sont nécessaires. Les blocs des matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont définis dans la section 4.2.2 mais ils ne sont pas tous utilisés. Le champ de déformation de la bulle ainsi que la perturbation de sa vitesse ascensionnelle ne sont pas nécessaires (uniquement pour le calcul du champ de base). La contrainte sur le volume est imposée directement via le déplacement normal de l'interface  $\hat{\eta}$ , relation (4.55). Le problème s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{ff}^{r,stab} & \mathcal{A}_{\kappa f} & \mathcal{A}_{\eta f} & \mathcal{A}_{\xi f}^r \\ 0 & \mathcal{A}_{\kappa\kappa} & \mathcal{A}_{\eta\kappa} & 0 \\ \mathcal{A}_{f\eta}^r & 0 & \mathcal{A}_{\eta\eta}^r & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_{\eta\xi} & \mathcal{A}_{\xi\xi} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{ff} & 0 & 0 & \mathcal{B}_{\xi f} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{B}_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda \hat{\mathbf{q}}_1 \tag{4.116}$$

où

$$\mathcal{A}_{ff}^{r,stab} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\mathbf{uu}}^r & -\mathcal{A}_{p\mathbf{u}} & \mathcal{A}_{p_b\mathbf{u}} \\ \mathcal{A}_{p\mathbf{u}}^T & 0 & 0 \\ \mathcal{A}_{vol} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{ff} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{\mathbf{uu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.117}$$

La contrainte sur le barycentre a disparu, la bulle peut accélérer et décélérer mais les vitesses sont définies dans le référentiel avançant à la vitesse ascensionnelle (stationnaire) de la bulle.

GRANDEURS EULÉRIENNES Les vitesses et pressions obtenues dans les modes propres d'une telle analyse de stabilité linéaire sont des grandeurs eulériennes exprimées sur le domaine mouvant  $\Omega_t$ . Afin d'exprimer ces grandeurs sur le domaine de référence  $\Omega_0$  une dernière étape est nécessaire. Elle permet d'obtenir les grandeurs eulériennes sur le domaine fixe, celui qui est utilisé pour les visualiser. Le choix de la décomposition des grandeurs dans le volume a été le suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(r, \varphi, z, t) &= \mathbf{u}_0(r_0, z_0) + \epsilon \hat{\mathbf{u}}_1^{\text{ALE}}(r_0, z_0) e^{\lambda t + im\varphi_0} + O(\epsilon^2) + c.c. \\ p(r, \varphi, z, t) &= p_0(r_0, z_0) + \epsilon \hat{p}_1^{\text{ALE}}(r_0, z_0) e^{\lambda t + im\varphi_0} + O(\epsilon^2) + c.c. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Il impose que le déplacement du maillage est inclus dans les champs à l'ordre  $\epsilon$ . En effet, en faisant un développement de Taylor au premier ordre, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(r, \varphi, z, t) &= \mathbf{u}_0(r_0, z_0) + \epsilon \hat{\mathbf{u}}_1^{\text{E}}(r_0, z_0) e^{\lambda t + im\varphi_0} \\ &\quad + \epsilon [\hat{\boldsymbol{\xi}}(r_0, z_0) \cdot \nabla_{\Omega_0}] \mathbf{u}_0(r_0, z_0) e^{\lambda t + im\varphi_0} + O(\epsilon^2) + c.c. \\ p(r, \varphi, z, t) &= p_0(r_0, z_0) + \epsilon \hat{p}_1^{\text{E}}(r_0, z_0) e^{\lambda t + im\varphi_0} \\ &\quad + \epsilon [\hat{\boldsymbol{\xi}}(r_0, z_0) \cdot \nabla_{\Omega_0}] p_0(r_0, z_0) e^{\lambda t + im\varphi_0} + O(\epsilon^2) + c.c. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Par identification, avec l'équation 4.118, on remarque qu'il faut retrancher l'advection causée par les déformations du domaine  $\Omega_t$  qui ne sont pas physiques :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_1^{\text{E}}(r_0, z_0) &= \hat{\mathbf{u}}_1^{\text{ALE}}(r_0, z_0) - \epsilon [\hat{\boldsymbol{\xi}}(r_0, z_0) \cdot \nabla_{\Omega_0}] \mathbf{u}_0(r_0, z_0) + c.c. \\ \hat{p}_1^{\text{E}}(r_0, z_0) &= \hat{p}_1^{\text{ALE}}(r_0, z_0) - \epsilon [\hat{\boldsymbol{\xi}}(r_0, z_0) \cdot \nabla_{\Omega_0}] p_0(r_0, z_0) + c.c. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Ce sont ces champs de pressions et de vitesses qui sont indépendants des déformations du domaine  $\Omega_t$ . Les champs  $\hat{\mathbf{u}}_1^{\text{ALE}}$  et  $\hat{p}_1^{\text{ALE}}$  sont aussi eulériens mais vis-à-vis du domaine  $\Omega_t$ .

Une des vérifications cruciales effectuées plus bas (cf. 4.6.2) est de contrôler que le déplacement intérieur du domaine est bien arbitraire et ne modifie pas les vitesses et pressions des modes calculés.

**Remarque :** Lorsque que le champ de base est nul ou constant, on a l'égalité  $\hat{\mathbf{u}}_1^{\text{ALE}} = \hat{\mathbf{u}}_1^{\text{E}}$ . C'est pour cela que nous n'avons pas fait de distinction entre ces deux grandeurs dans le chapitre 2, pour le calcul de mode propre de bulles ou de gouttes sans écoulement et sans gravité. L'autre implication importante d'un champ de base nul ou constant est que les termes dus aux déplacements du maillage sont nuls, tout comme l'advection. On retrouve ainsi un problème de Stokes.

#### 4.5 DISCRÉTISATION DES INCONNUES SURFACIQUES

Depuis le chapitre 2 nous avons utilisé une décomposition en série de Fourier pour les inconnues surfaciques sans donner tous les éléments motivant ce choix. Effectivement, l'étude linéaire menée alors donne des résultats acceptables (cf. 2.4.4). Nous allons montrer que la formulation en éléments finis des inconnues surfaciques ne fonctionne pas pour le calcul de l'écoulement de base autour d'une bulle.

L'inconnue la plus sensible est la courbure à l'ordre  $\epsilon$ . Elle est importante car elle vient forcer la pression du fluide à l'interface. Une erreur sur sa valeur peut induire des variations de la pression dans le fluide près de l'axe qui peuvent engendrer eux-même des vitesses parasites. Il est absolument nécessaire d'éviter que de telles erreurs se produisent.

La figure 4.8 montre la valeur de  $k_1(s_0)$  après la première itération de la méthode de Newton pour différentes discrétisations de la surface de la bulle. Au niveau de l'axe de symétrie, une grande perturbation  $k_1$  est créée quand les éléments  $\mathcal{P}_1$  sont utilisés pour les grandeurs surfaciques. Le problème majeur est qu'il n'y a pas de convergence en maillage. Plus le nombre de points augmente sur la surface, plus la perturbation de la courbure est importante sur l'axe. La courbure au premier ordre finit par diverger sur l'axe. Cette perturbation peut se propager sur la surface près de l'axe, contaminant pressions puis vitesses du fluide. Dans certains cas, l'algorithme réussira quand même à converger mais pas de façon quadratique. La formulation axisymétrique ne permet pas de bien définir le déplacement des pôles de la bulle, le facteur  $r_0$  annule la condition à la limite du déplacement aux pôles de la bulle (c.f. 2.3.2).

Cette figure révèle aussi que lorsque les inconnues  $k_1$  et  $\eta$  sont décomposées en série de Fourier, la perturbation sur l'axe disparaît totalement, même pour une interface définie par peu de points. En effet, la base de fonction la constituant a été construite dans ce but précis. Cette technique, au prix d'un temps de calcul un peu plus élevé, permet de supprimer la brusque variation de courbure sur l'axe. En effet, le logiciel doit gérer des matrices pleines au lieu de matrices creuses.

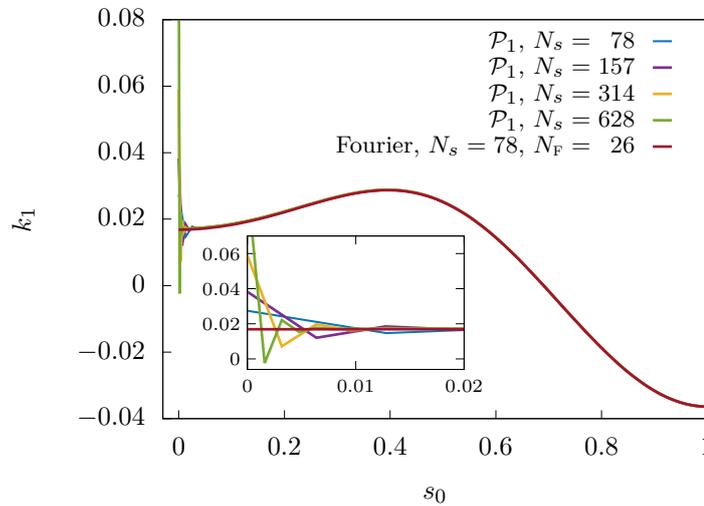


FIGURE 4.8 – Comparaison de la courbure à l'ordre  $\epsilon$  après la première itération de la méthode de Newton pour le calcul du champ de base d'une bulle dans un écoulement uni-axial,  $Oh = 0.01$  et  $We = 0.1$ .  $N_s$  est le nombre de nœuds définissant la surface de la bulle et  $N_F$  est le nombre de fonctions de Fourier sur lesquelles sont projetées les inconnues  $k_1$  et  $\eta$ .

## 4.6 VALIDATIONS

### 4.6.1 Bulle dans un réservoir en rotation

La première validation que nous avons effectuée correspond cas d'une bulle dans un fluide dont le réservoir est en rotation, sans influence de la gravité. Cet exemple est bien documenté par ROSENTHAL [67] qui donne la valeur théorique de l'allongement de la bulle. Il effectue aussi une analyse de stabilité locale et non globale sur une bulle cylindrique infiniment longue. Ce cas permet en conséquence de tester l'algorithme calculant les champs de base. La mise en rotation d'un réservoir contenant une bulle crée une accélération centrifuge qui pousse le fluide contre les parois et isole la bulle sur l'axe de rotation. Le fluide est en rotation solide

(de vecteur rotation  $\omega \mathbf{e}_z$ ) dans le réservoir qui est considéré comme infiniment grand. Le champ de vitesse et pression sont :

$$\begin{cases} \mathbf{u} &= \omega r \mathbf{e}_\varphi \\ p &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + P_\infty \end{cases} \quad (4.121)$$

où  $P_\infty$  est la constante de pression en  $r = 0$  à l'extérieur de la bulle. Ce problème est paramétré par deux nombre adimensionnels, le nombre d'Ohnesorge, déjà défini au chapitre 2, et le nombre de Weber :

$$Oh = \frac{\mu}{\sqrt{2\rho\gamma R}} \quad \text{et} \quad We = \frac{\rho(\omega R)^2 2R}{\gamma} \quad (4.122)$$

La vitesse caractéristique de l'écoulement est  $v = \omega R$ . Le nombre de Weber représente le rapport entre les forces d'inertie et la force capillaire. Il apparaît que la viscosité n'est pas un paramètre de la forme d'équilibre, seuls le rayon, la masse volumique, la tension de surface et le taux de rotation importent. En effet, en se plaçant dans le référentiel attaché au réservoir tournant, la vitesse du fluide est nulle et la bulle est plongée dans un champ de pression causé par la force d'inertie d'entraînement. La forme d'équilibre allongée résulte uniquement de la compétition entre la tension de surface et ce champ de pression. Il n'y a pas de contrainte visqueuse car il n'y a pas d'écoulement. Il en résulte que la forme d'équilibre d'une bulle dans un tel écoulement ne dépend pas de la viscosité du couple de fluides. En revanche, si des phénomènes dynamiques sont étudiés, comme le retour à l'équilibre après une perturbation ou la modification du taux de rotation, la viscosité aura une importance. Un écoulement verra le jour et des forces visqueuses entreront en jeu.

La méthode a été utilisé dans deux configurations :

- avec le référentiel du laboratoire où le fluide a une vitesse non nulle (4.121)
- via le référentiel attaché au réservoir dans lequel la vitesse du fluide est nulle.

Dans le deuxième cas, les champs de vitesse, pression et de force volumique sont :

$$\begin{cases} \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ p &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + P_\infty \\ \mathbf{f}_v &= \rho \omega^2 r \mathbf{e}_r \end{cases} \quad (4.123)$$

**Remarque :** la force d'inertie de Coriolis  $-2\rho\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}$  est nulle car la vitesse de l'écoulement est nulle dans ce référentiel.

Il est en conséquence possible d'effectuer le calcul de formes d'équilibre de bulles en utilisant la méthode de Newton, dans les deux référentiels et de comparer cela avec les résultats théoriques de ROSENTHAL [67]. Tout d'abord la figure 4.9 montre les formes d'équilibre de bulles pour des nombres de Weber allant de 0.1 à 50. On remarque bien que l'influence du champ de pression se fait de plus en plus ressentir et étire la bulle. Plus le taux de rotation, *i.e.* le nombre de Weber, est élevé, plus la bulle s'étire. En effet, en fixant  $\rho$ ,  $R$  et  $\gamma$ , l'amplitude du champ de pression dans lequel elle est plongée augmente alors que la tension de surface reste identique.

La figure 4.10 compare les rapports de forme d'équilibre de bulles calculée avec notre algorithme. Le rapport de forme d'une bulle se définit de la sorte :

$$\chi = \frac{\text{longueur demi-grand axe}}{\text{longueur demi-petit axe}} \quad (4.124)$$

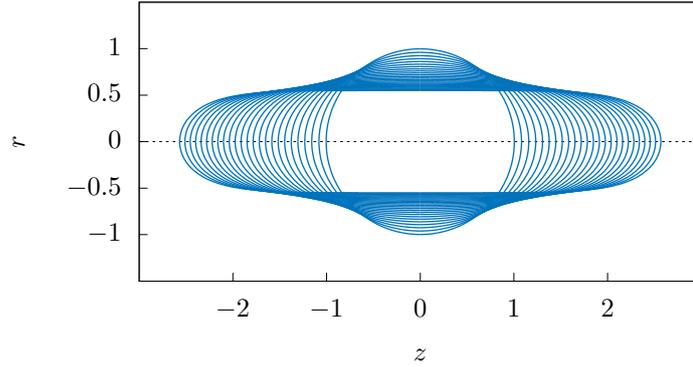


FIGURE 4.9 – Coupe des formes de bulles dans un fluide en rotation solide pour différents nombres de Weber :  $We = \{0.1, 2, 4, \dots, 48\}$ . Pour un nombre de Weber faible, la bulle est quasi sphérique et elle devient oblongue lorsqu'il augmente. L'axe ( $Or$ ) est l'axe de rotation.

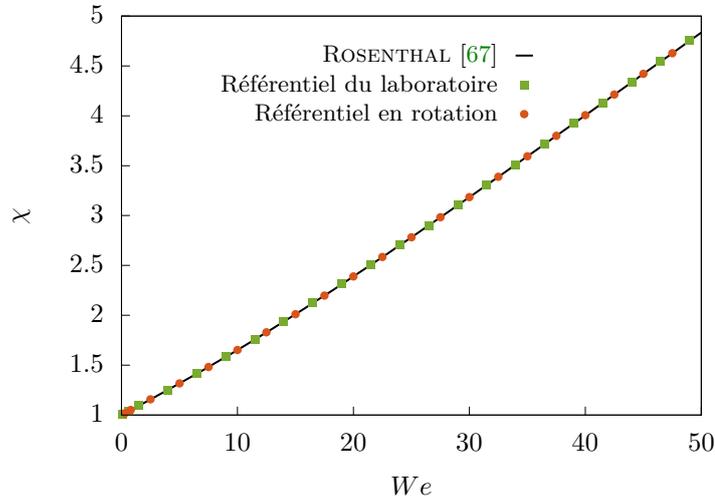


FIGURE 4.10 – Rapport de forme pour des bulles dans un réservoir tournant. Les résultats numériques obtenus avec deux référentiels différents sont comparés aux résultats théoriques.

Les résultats sont en très bon accord avec la relation de ROSENTHAL [67] quel que soit le référentiel choisi, celui attaché au réservoir ou celui du laboratoire. Les points obtenus numériquement ne sont pas tous affichés par souci de lisibilité.

Ce test est une première étape de validation de l'algorithme donnant le champ de base et la forme d'équilibre d'une bulle. Il assure que la forme de la bulle est correcte lorsque la convergence de l'algorithme est atteinte. Il faut noter que les champs de vitesse et de pression ont aussi convergé vers leurs solutions analytiques données par (4.121) et (4.123).

Une analyse de stabilité a aussi été menée. Cependant, l'existence d'ondes de Kelvin vient parasiter le spectre et il n'est plus possible de discerner les valeurs propres décrivant des ondes de Kelvin de celles impliquant uniquement la dynamique de l'interface. La caractérisation de ces ondes étant un lourd travail qui n'est pas l'objet de cette thèse, cet aspect de l'écoulement rotationnel n'a, en conséquence, pas été étudié.

On peut néanmoins noter qu'à faible nombre de Weber, les valeurs propres associées aux ondes de Kelvin sont discernables du reste du spectre. Dans ce cas de figure, l'étude de stabilité montre que les valeurs propres sont les mêmes quel que soit le référentiel choisi. Cela ne pouvant être vérifié que sur quelques valeurs du nombre de Weber (en raison de la présence d'ondes de Kelvin), nous ne présentons pas ces données.

#### 4.6.2 Écoulement d'étirement

Dans cette sous-section nous allons nous intéresser à la formulation pour l'analyse de stabilité linéaire. Nous avons vu que le déplacement au cœur du maillage est supposé être arbitraire. Il est un artifice numérique alors que le déplacement de la surface résulte lui de phénomènes physiques. C'est ce point qui va être testé ici, à savoir le caractère arbitraire de la déformation du maillage. Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire doivent en être indépendants.

La configuration étudiée pour mener à bien ce cas-test est une bulle piégée dans un écoulement d'étirement unidirectionnel. Les champs de vitesse et de pression loin de la bulle d'un tel écoulement sont définis comme suit :

$$\begin{pmatrix} U_r \\ U_\varphi \\ U_z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} -r/2 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad P = \rho S^2 \left( \frac{r^2}{8} + \frac{z^2}{2} \right), \quad \text{lorsque } (r^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty \quad (4.125)$$

Les nombres adimensionnels caractérisant cet écoulement sont le nombre de Reynolds et le nombre de Weber :

$$Re = \frac{\rho(SR)2R}{\mu} \quad \text{et} \quad We = \frac{\rho(SR)^2 2R}{\gamma} \quad (4.126)$$

L'écoulement de base autour de la bulle est calculé via la méthode de Newton décrite précédemment (*cf.* 4.3). Le résultat donné pour ce dernier est montré sur la figure 4.11. La bulle admet une légère déformation par rapport à une sphère de même volume. Le nombre de Reynolds ( $Re = 100$ ) étant relativement élevé, les vitesses de base ne sont pas négligeables afin que ce cas se différencie de la validation effectuée au chapitre 2, *i.e.* d'une bulle sans écoulement.

Les oscillations de forme de bulles peuvent être classifiées selon le nombre de méridiens nodaux ( $m$ ) et le nombre de parallèles nodaux ( $l - m$ ) qu'ils possèdent.  $l$ , la somme de ces deux nombres représente le nombre d'onde principal.

Le déplacement de l'interface ( $\eta \mathbf{n}_0$ ) est déterminé par l'équilibre des contraintes à la surface de la bulle avec la force capillaire. Il est uniquement défini sur la surface de la bulle. Ce déplacement est ensuite étendu au domaine fluide ( $\xi$ ). À cet effet, nous avons donné plusieurs équations qui permettent d'étendre dans le domaine le déplacement interfacial (4.35), (4.36) et (4.37). Une analyse de stabilité va être menée sur le champ de base de la figure 4.11 avec les trois formes de déplacement du maillage. Les résultats sont donnés dans le tableau 4.1. Ils révèlent que les valeurs propres sont indépendantes de la façon de calculer  $\xi$  dans le cas axisymétrique ( $m = 0$ ) et pour un nombre azimutal non nul ( $m = 1$ ). L'erreur relative maximale entre deux valeurs propres du même mode est de l'ordre de  $10^{-4}\%$ . Ce test donne une information globale. Il est néanmoins intéressant d'observer plus localement comment se comportent les vitesses sur un domaine mouvant.

Les deux premiers modes d'oscillation de forme sont représentés sur la figure 4.12. On constate bien une corrélation entre le déplacement de l'interface (en rouge) et les lignes de courant. Le mode d'oscillation de forme  $l = 2$  induit par exemple un quadrupôle dans le fluide. Les deux modes présentés sur la figure sont calculés avec un déplacement du domaine

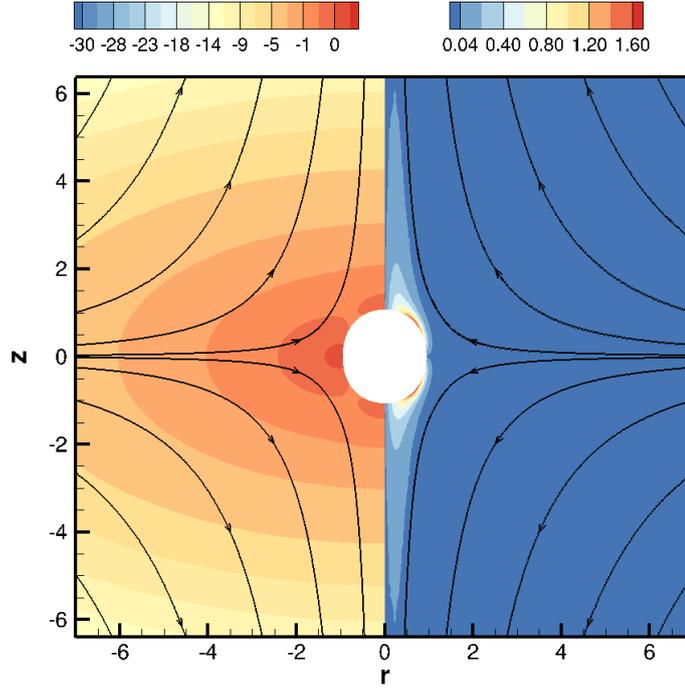


FIGURE 4.11 – Champ de base de l'écoulement autour d'une bulle piégée dans un étirement. À gauche est représentée la pression et à droite la vorticité ( $Oh = 0.01$ ,  $We = 1$ ,  $Re = 100$ ).

Éq. maillage	$l$	$m$	$\lambda_r$	$\lambda_i$
Laplacien	2	0	-0.2538132647	2.8002250831
Laplacien relaxé	2	0	-0.2538132645	2.8002250836
Elasticité	2	0	-0.2538132679	2.8002250839
Laplacien	3	1	-0.4196767312	5.7552241025
Laplacien relaxé	3	1	-0.4196771361	5.7552241170
Elasticité	3	1	-0.4196761375	5.7552238126

Tableau 4.1 – Cas de la bulle piégée dans un écoulement élongationnel, deux premiers modes de forme ( $Oh = 0.01$ ,  $We = 1$ ,  $Re = 100$ )

obtenu avec l'équation d'élasticité. Avec une équation de déplacement différente, le résultat aurait été identique, ce que nous allons montrer.

Pour ce faire nous allons comparer les vitesses verticales  $\hat{\mathbf{u}}_1^{\text{ALE}}$  et  $\hat{\mathbf{u}}_1^{\text{E}}$  pour deux modes. Dans le cas axisymétrique, les modes seront observés dans une coupe le long de l'axe ( $Oz$ ) et dans le cas  $m = 1$  le long de la droite  $r = z$ . Les points d'abscisses les plus faibles  $z \sim 1$  (resp.  $(r^2 + z^2)^{1/2} \sim 1$ ) dans le cas axisymétrique (resp.  $m = 1$ ) correspondent à la position de l'interface. Elle est légèrement supérieure à 1 car cette dernière est déformée par l'écoulement d'étirement uni-axial qui crée une contrainte à la surface de la bulle.

Il est tout d'abord utile de constater que les trois possibilités décrites pour calculer le déplacement  $\hat{\xi}$  dans le volume conduisent bien à des déplacements différents – équation d'élasticité linéaire (4.37), laplacien vectoriel (4.35) et le laplacien vectoriel relaxé (4.36). Cela est fait sur les figures 4.13. Les points de départ de ces courbes (points d'abscisse minimale) sont identiques. En effet, ces points correspondent à la surface de la bulle. Or le déplacement

sur la bulle a un sens physique, c'est le déplacement de l'interface. Il est donc attendu que ces courbes aient la même valeur en ces points, ce qui est bien vérifié. Cependant, lorsque l'abscisse augmente, en s'éloignant de la bulle, les valeurs que prend le déplacement du domaine diffèrent. Cela est dû aux différences manières de relaxer le mouvement de la surface de la bulle dans le domaine. Ce déplacement tend ensuite vers une valeur nulle en s'éloignant encore de la bulle, l'influence de la déformation de cette dernière disparaît. Nous avons bien trois méthodes qui donnent un déplacement différent de l'intérieur du domaine mais qui satisfont aux mêmes conditions aux limites.

Les figures 4.14 montrent, autant dans le cas axisymétrique que pour  $m=1$ , les différences entre les vitesses  $\hat{\mathbf{u}}_1^{\text{ALE}}$ . Celles-ci sont définies sur  $\Omega_0$  mais expriment la vitesse eulérienne à l'ordre  $\epsilon$  par rapport au domaine mouvant  $\Omega_t$ . La vitesse  $\lambda \hat{\xi} e^{\lambda t + im\varphi_0}$  de  $\Omega_t$  par rapport à  $\Omega_0$  étant dépendante du calcul du champ de déplacement  $\hat{\xi}$ , il est alors naturel que les vitesses  $\hat{\mathbf{u}}_1^{\text{ALE}}$  en dépendent aussi. On note néanmoins qu'elles ont la même valeur à la surface de la bulle. Cela s'explique par la même valeur que prend le déplacement sur l'interface. À ces points précis, la vitesse  $\hat{\mathbf{u}}_1^{\text{ALE}}$  est lagrangienne.

En revanche, les vitesses eulériennes  $\hat{\mathbf{u}}_1^{\text{E}}$  par rapport au domaine  $\Omega_0$  sont données sur les figures 4.15 grâce aux relations (4.120). Ces vitesses se superposent, montrant bien que sur le domaine  $\Omega_0$ , le déplacement du maillage n'a pas d'incidence. Le déplacement du maillage est donc bien arbitraire. Les courbes se recouvrant, les écarts relatifs des vitesses  $\hat{\mathbf{u}}_1^{\text{E}}$  sont représentés sur les figures 4.16. Ils sont inférieurs à 1% dans le cas  $m=0$ , et descendent même à 0.1% si l'on ne considère que la partie  $z < 2.5$ , en raison d'un maillage plus raffiné près de l'interface. Dans le cas  $m=1$ , l'écart est largement inférieur à 0.5% pour  $(r^2 + z^2)^{1/2} < 5$  puis augmente ensuite. Ces grands écart loin de la bulle s'expliquent par le fait que  $\hat{u}_{1z}^{\text{E}}$  devient proche de zéro et les mailles s'agrandissent. En conséquence, les fluctuations de l'écart relatif des vitesses gagnent en bruit et en amplitude, puisqu'il est nécessaire de diviser par une grandeur quasi nulle pour l'obtenir. Malgré ce bruitage de l'écart relatif entre les vitesses obtenues avec différents champs de déplacement du maillage, les résultats sont satisfaisants.

Le déplacement du maillage ne conserve pas localement le volume, sa divergence n'est pas nulle comme le montrent les figures 4.17 (en haut à droite). Cela implique que la divergence de la vitesse  $\hat{u}_{1z}^{\text{ALE}}$  est non nulle aussi, (mêmes figures, en haut à gauche). Toutefois, la vitesse eulérienne  $\hat{u}_{1z}^{\text{E}}$  satisfait bien l'équation de continuité, sa divergence est nulle (mêmes figures, en bas).

## CONCLUSION

Les tests rapportés dans cette section démontrent que nous sommes en mesure d'effectuer une analyse de stabilité d'une bulle se déformant. L'artifice technique permettant cela est la prolongation de la transformation de la bulle dans le domaine de calcul. Cette déformation du maillage nous autorise à écrire le problème sur un nouveau domaine même si cette déformation n'a pas de sens physique. Cet aspect arbitraire a été confirmé dans la validation numérique précédente, le résultat de l'analyse de stabilité est bien indépendant de la déformation du domaine de calcul.

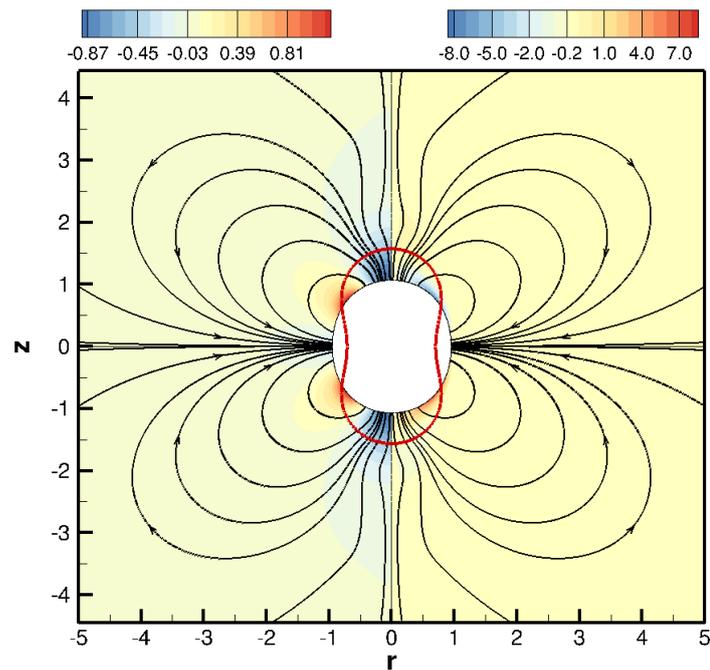
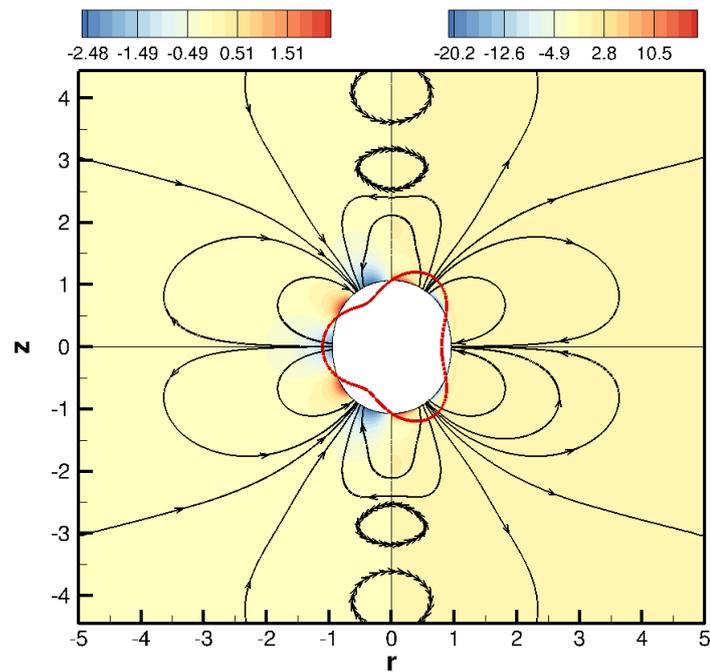
(a)  $l=2, m=0$ (b)  $l=3, m=1$ 

FIGURE 4.12 – Mode d’oscillation de forme stable correspondant aux cas-test du tableau 4.1. À gauche, partie réelle de la pression et à droite partie réelle de la vorticité. Les lignes de courant sont obtenues avec la partie réelle des vitesses eulériennes  $\hat{\mathbf{u}}_1^E$ . En rouge est représenté la partie imaginaire de la forme perturbée de l’interface ( $Oh = 0.01$ ,  $We = 1$ ,  $Re = 100$ ).

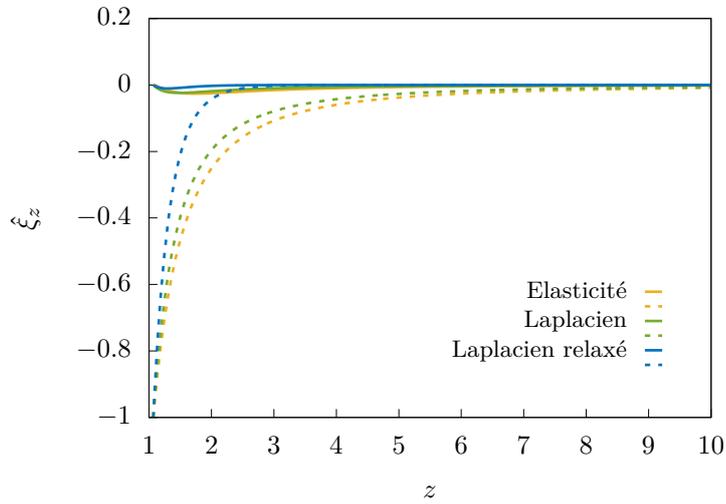
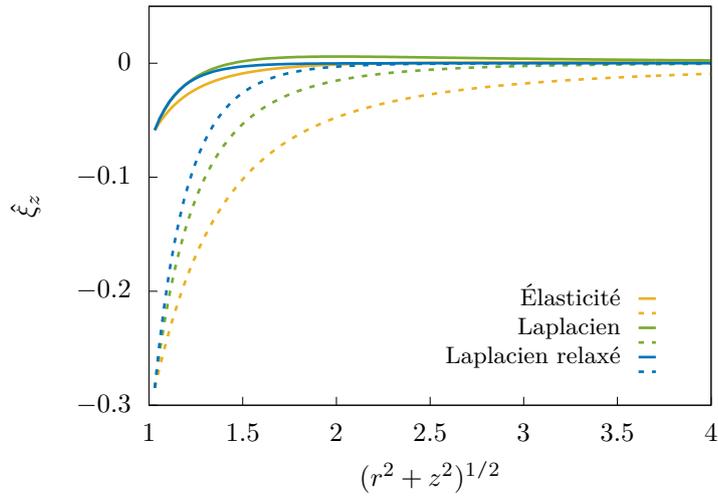
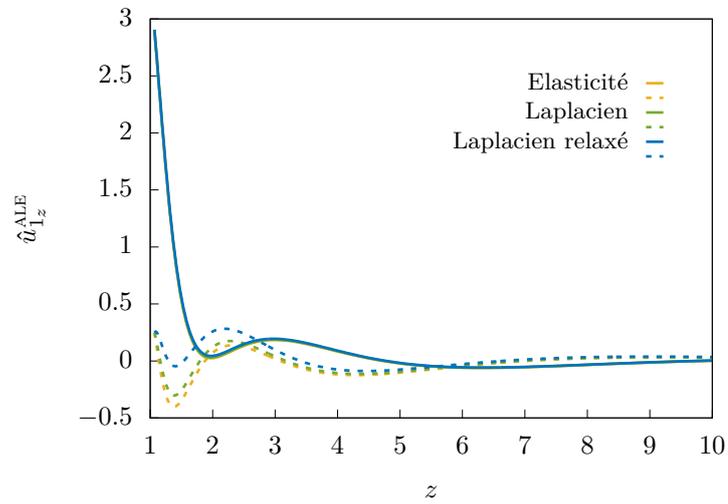
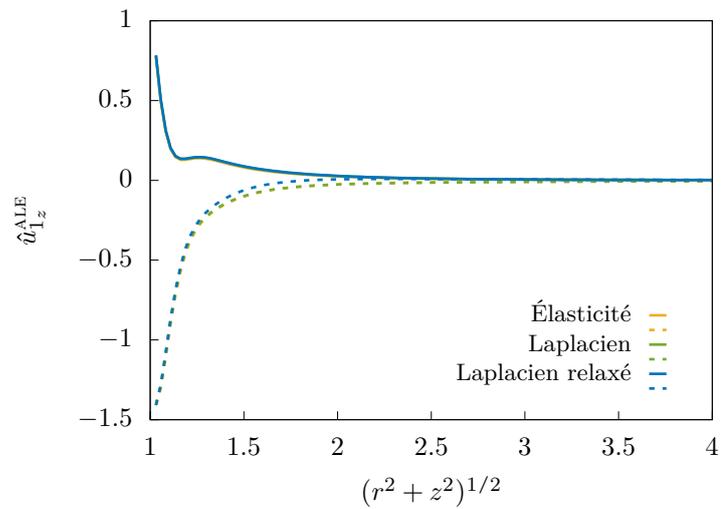
(a) mode  $l=2, m=0$ (b) mode  $l=3, m=1$ 

FIGURE 4.13 – Coupe du déplacement vertical du domaine  $\hat{\xi} \cdot \mathbf{e}_z$  le long de l'axe  $(Oz)$  (a) et le long de la droite  $r = z$  (b). La partie réelle est en trait plein et la partie imaginaire en trait pointillé.

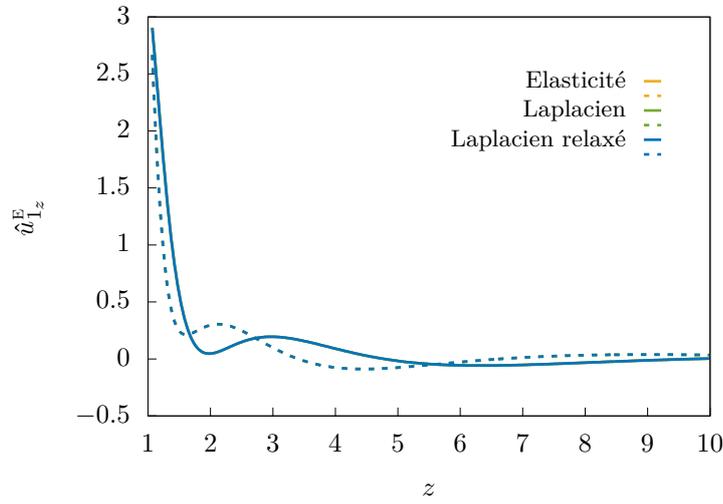


(a) mode  $l=2, m=0$

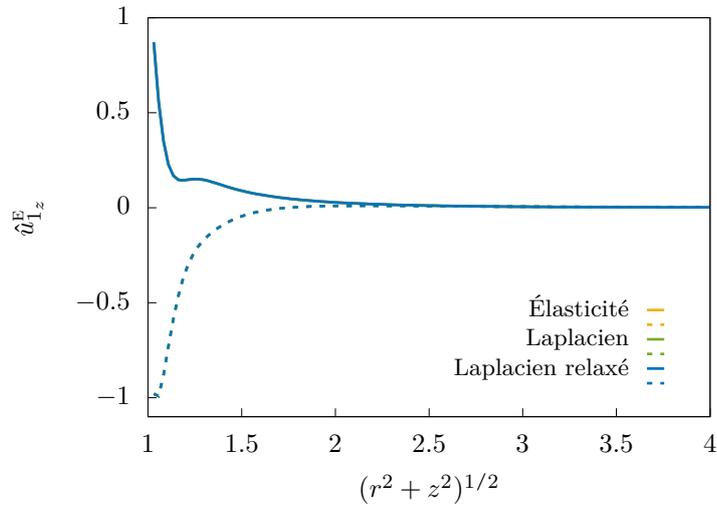


(b) mode  $l=3, m=1$

FIGURE 4.14 – Vitesse verticale  $\mathbf{e}_z \cdot \hat{\mathbf{u}}_1^{\text{ALE}}$  du mode propre le long de l'axe ( $Oz$ ) (a) et le long de la droite  $r = z$  (b). La partie réelle est en trait plein et la partie imaginaire en trait pointillé.



(a) mode  $l=2, m=0$



(b) mode  $l=3, m=1$

FIGURE 4.15 – Vitesse verticale  $\mathbf{e}_z \cdot \hat{\mathbf{u}}_1^E$  du mode propre le long de l'axe ( $Or$ ) (a) et le long de la droite  $r = z$  (b). La partie réelle est en trait plein et la partie imaginaire en trait pointillé.

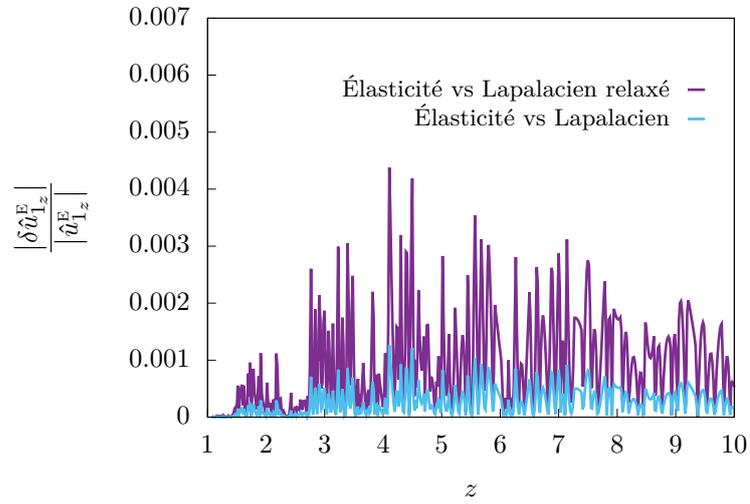
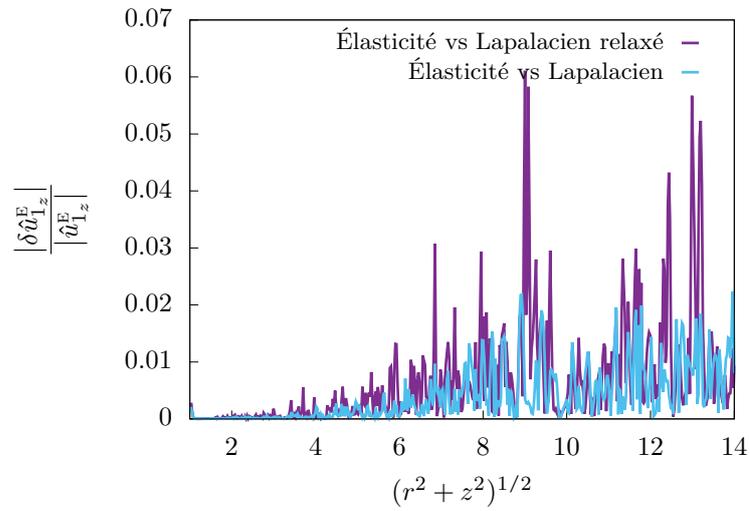
(a) mode  $l=2, m=0$ (b) mode  $l=3, m=1$ 

FIGURE 4.16 – Écart relatif sur la vitesse verticale  $\mathbf{e}_z \cdot \hat{\mathbf{u}}_1^E$  du mode propre le long de l'axe  $(Or)$  (a) et le long de la droite  $r=z$  (b). La partie réelle est en trait plein et la partie imaginaire en trait pointillé.

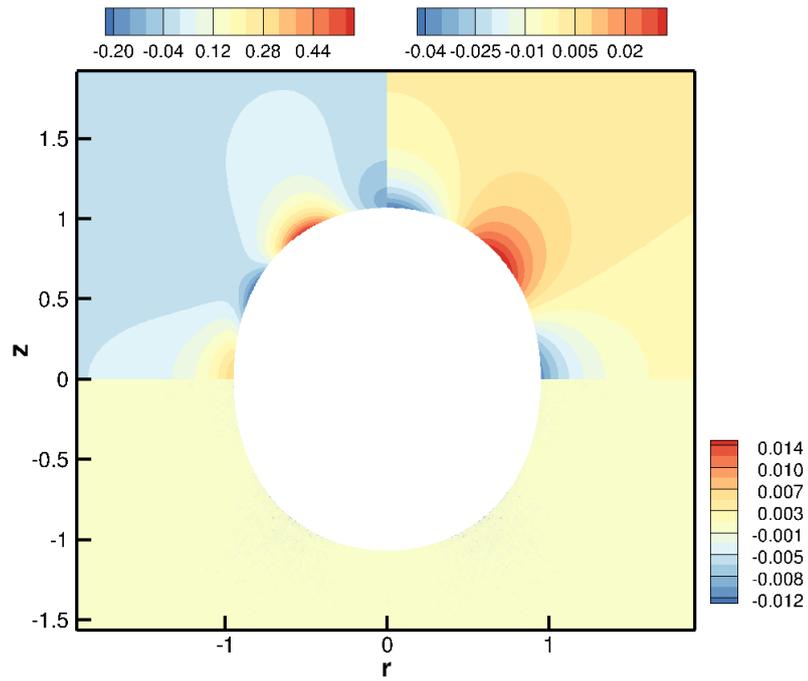
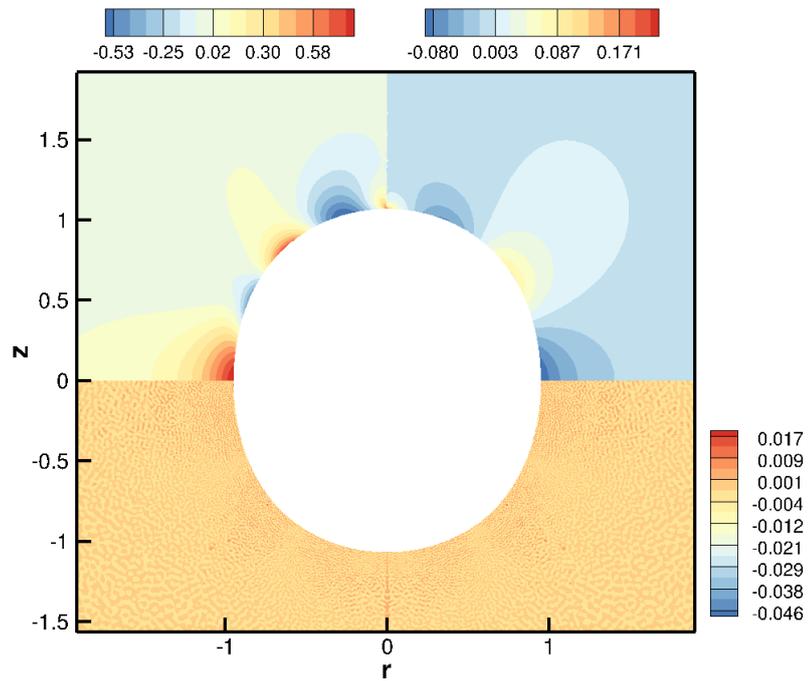
(a) mode  $l=2, m=0$ (b) mode  $l=3, m=1$ 

FIGURE 4.17 – En haut à gauche : divergence de  $\hat{\mathbf{u}}_1^{\text{ALE}}$ . En haut à droite : divergence de la partie réelle du déplacement du maillage. En bas, divergence de la vitesse partie réelle de la vitesse eulérienne  $\hat{\mathbf{u}}_1^{\text{E}}$



Notre méthode numérique est maintenant validée et va être appliquée au cas d'une bulle en ascension dans un fluide au repos. Nous nous intéresserons à une large gamme de couples liquide-gaz et nous nous arrêterons particulièrement sur le cas de l'eau pure, en raison des difficultés qu'il présente, autant d'un point de vue numérique qu'expérimental et pour lequel l'analyse de stabilité linéaire apporte des résultats pertinents. Nous observerons ainsi l'écoulement stationnaire autour de la bulle en le comparant à des simulations numériques existantes et à des expériences menées dans des fluides purs. Ensuite, nous commenterons les résultats obtenus grâce à l'analyse de stabilité globale de ces écoulements, en les comparant toujours avec la littérature. Nous aurons alors accès aux modes propres qui peuvent être décomposés suivant la nature des mouvements et déformations que subit la bulle.

Rappelons les nombres adimensionnels utilisés dans ce chapitre. Le nombre adimensionnel permettant de caractériser un couple de liquide-gaz dans lequel on suppose la densité et la viscosité du gaz négligeable est le nombre de Morton :

$$Mo = \frac{g\mu^4}{\rho\gamma^3} \quad (5.1)$$

Un deuxième nombre adimensionnel est nécessaire pour caractériser une bulle en ascension : le nombre de Bond,

$$Bo = \frac{\rho g D^2}{\gamma} \quad (5.2)$$

où  $D$  est le diamètre équivalent de la bulle. Ce nombre compare la force de flottabilité à la force capillaire. Pour de petits nombres de Bond, les effets capillaires dominent et la bulle adopte une forme sphérique. Pour de grands nombres de Bond, les effets de la gravité prennent le dessus. La bulle est ainsi déformée par l'écoulement. Le nombre de Bond s'écrit aussi comme le carré du diamètre équivalent d'une bulle normalisé par la longueur capillaire :

$$Bo = \left(\frac{D}{l_c}\right)^2, \quad \text{où} \quad l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}. \quad (5.3)$$

Ce couple de nombres adimensionnels ( $Mo$ ,  $Bo$ ) a l'avantage de déterminer clairement le couple liquide-gaz étudié grâce au nombre de Morton. À une longueur capillaire donnée, le nombre de Bond représente le diamètre équivalent de la bulle. Cela permet de se représenter physiquement les cas étudiés et de comparer plus aisément avec les résultats expérimentaux car ils sont obtenus pour des fluides donnés avec différentes tailles de bulle. Un autre nombre est parfois utilisé pour caractériser les écoulements diphasiques, le nombre de Weber :

$$We = \frac{\rho U_b^2 D}{\gamma} \quad (5.4)$$

où  $U_b$  est la vitesse ascensionnelle de la bulle. Il permet de comparer les forces d'inertie et la tension de surface. Cependant il utilise  $U_b$  comme échelle de vitesse qui est une inconnue dans le cas de bulle en ascension. Pour cette raison nous privilégierons le nombre de Bond  $Bo$ . Le nombre de Galilée est aussi utilisé :

$$Ga = \frac{\rho\sqrt{gD^3}}{\mu}. \quad (5.5)$$

Ce nombre est analogue à un nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho U_b D}{\mu} \quad (5.6)$$

Le nombre de Reynolds usuel utilise une échelle de vitesse ( $U_b$ ) définie par le déplacement de l'objet étudié par rapport au fluide environnant. Cette vitesse étant une inconnue du problème, puisqu'elle résulte de l'équilibre entre la force de traînée et la force de flottabilité (dans le cas stationnaire), le choix d'une échelle de vitesse différente semble alors judicieux. L'échelle de vitesse basée sur la gravité  $\sqrt{gD}$  est utilisée pour le nombre de Galilée, il compare ainsi les effets visqueux et les effets inertiels causés par la mise en mouvement sous l'effet de la poussée d'Archimède.

Les trois premiers nombres adimensionnels cités dans ce chapitre ( $Mo$ ,  $Bo$  et  $Ga$ ) sont liés par la relation suivante :

$$Mo = \frac{Bo^3}{Ga^4} \quad (5.7)$$

Pour une bulle, le coefficient de traînée adimensionnel peut s'écrire comme une fonction des nombres de Galilée et de Reynolds :

$$c_d = \frac{\|\mathbf{T}\|}{1/2\rho U_b^2 D^2} \quad \mathbf{T} = \rho g \frac{\pi D^3}{6} \mathbf{e}_z \quad (5.8)$$

La force de traînée vient équilibrer la force de flottabilité dans le cas d'un écoulement stationnaire et le coefficient de traînée peut se réécrire comme :

$$c_d = \frac{\pi Ga^2}{3 Re^2} \quad (5.9)$$

Cela implique que ce coefficient peut se déduire directement du nombre de Reynolds et du nombre de Galilée.

Enfin, le caractère oscillatoire de la forme ou de la trajectoire d'une bulle peut être défini par le nombre de Strouhal :

$$St = \frac{fD}{U_b} \quad (5.10)$$

où  $f$  est la fréquence de l'oscillation. Cette définition pose problème lorsque aucun écoulement n'existe autour de la bulle ( $U_b = 0$ ). Nous avons en conséquence adimensionné la fréquence avec le temps capillaire plutôt qu'avec  $U_b/D$  :

$$t_c = \sqrt{\frac{\rho R^3}{\gamma}} \quad (5.11)$$

Ce temps caractéristique a l'avantage de ne pas être singulier lorsque que le nombre de Bond est nul et que la bulle est immobile, comme pour les oscillations de bulles sans gravité. Cette adimensionnalisation est identique à celle du chapitre 2. Elle permet de faire le lien entre les fréquences des bulles en ascension et les bulles au repos. L'influence de l'écoulement sur les fréquences propres de la bulle pourra être observée comparativement aux fréquences propres.

## 5.1 MAILLAGES UTILISÉS

Outre la formulation permettant de discrétiser les équations, le choix du maillage est un point crucial. Il est nécessaire de s'assurer que les solutions soient bien convergées. Un exemple frappant est la comparaison des résultats de CANO-LOZANO et al. [16] et de TRIPA-

	$L_{amont}$	$L_{aval}$	$L_{lat}$	$d_b$	$d_\infty$	$N_v$	$Re$	$\chi$	$\lambda_r$	$\lambda_i$
$M_1$	10D	25D	15D	47	1	33938	754.941	2.24660	0.026887	2.69661
$M_2$	15D	30D	15D	69	1.5	41811	755.208	2.24653	0.026772	2.69667
$M_3$	20D	40D	20D	307	2	127575	755.222	2.24657	0.026791	2.69663
$M_4$	15D	30D	20D	248	2	68310	2168.47	2.35570	0.047090	0.062744
$M_5$	20D	40D	20D	458	2	117609	2168.54	2.35591	0.038827	0.054916

Tableau 5.1 – Quelques informations sur plusieurs maillages testés pour le cas de l’eau pure ( $Mo=2.54^{-11}$ ), avec  $Bo = 0.6$  ( $M_1 - M_3$ ) et pour le fluide le moins visqueux considéré ( $Mo=10^{-13}$ ), avec  $Bo = 0.175$  ( $M_4, M_5$ ). Les résultats concernent le mode  $m = 1$  dans les deux cas.

THI et al. [79] commentée dans le premier article. Alors que les deux équipes utilisent le même code numérique *Gerris*, les écarts sur les résultats sont importants, notamment pour les hauts nombres de Galilée. Cela peut s’expliquer par une différence de résolution de la couche limite visqueuse entourant la bulle, le maillage étant deux fois plus fin dans [16] que dans [79]. Nous nous sommes assurés qu’un nombre suffisant de nœuds est présent dans la couche limite. En effet, BATCHELOR [9] (p. 366) donne l’ordre de grandeur de l’épaisseur de la couche limite pour une surface libre. La diffusion pilote cette épaisseur, elle est en conséquence de l’ordre de  $Re^{-1/2}$ . Nous avons donc créé, autour de la bulle, une zone de raffinement d’épaisseur  $5Re^{-1/2}$  dans laquelle nous avons imposé un nombre de nœuds constant. Ainsi,  $N_\delta = 18$  nœuds sont présents dans la direction normale à la bulle sur une épaisseur  $5Re^{-1/2}$ . Sachant que les vitesses sont projetées sur des éléments quadratiques, la vitesse possède 36 degrés de liberté dans cette zone de raffinement. Il faut noter que cette épaisseur est dépendante du nombre de Reynolds. Les calculs des écoulements stationnaires ont été menés à nombre de Morton constant, en partant d’un faible nombre de Bond et en augmentant graduellement ce dernier. Une fois qu’un écoulement et la géométrie de la bulle sont convergés, une routine de re-maillage est utilisée afin de reconstruire un maillage respectant les conditions décrites ci-dessus, à savoir une densité de nœuds à la surface de la bulle de  $d_b = N_\delta Re^{1/2}/5$  par rayon de bulle. Cette technique fonctionne bien à haut nombre de Reynolds, mais pour les faibles nombres de Reynolds, la densité de nœuds sur la surface décroît. Une limite basse de densité a alors été imposée afin qu’un nombre suffisant de points définisse la surface : la densité ne peut alors descendre sous la barre de  $d_b = 32$  nœuds par rayon. Ces cas de figure correspondent à de faibles nombres de Reynolds ( $Re < 50$ ) qui sont le plus souvent loin des seuils d’instabilités.

Le tableau 5.1 montre quelques maillages utilisés pour mener le calcul de l’écoulement stationnaire autour de la bulle et son analyse de stabilité globale. Le test de convergence a été mené sur deux modes ayant un nombre azimutal  $m = 1$ . Le premier, à  $Mo = 2.54 \cdot 10^{-11}$ , correspond à un mode présentant un fort couplage entre le déplacement de la surface de la bulle et le sillage. Le second correspond au premier mode instable d’un couple liquide-gaz à  $Mo = 10^{-13}$  où le barycentre de la bulle oscille latéralement à basse fréquence. Les descriptions physiques des modes seront effectuées plus en détails dans les sections suivantes.  $M_1 - M_3$  donnent des résultats similaires pour le champ de base, peu de différences sont notables entre les nombres de Reynolds et les rapports de forme. Les écarts relatifs sont inférieurs à 0.1%. Les résultats de stabilité sont plus sensibles au choix de la triangulation et le maillage  $M_1$  donne un écart relatif plus important sur les valeurs propres. En conséquence, les paramètres du maillage  $M_2$  sont utilisés dans le cas de l’eau. Pour  $Mo = 10^{-13}$ , maillages  $M_4$  et  $M_5$ , le champ de base est bien défini puisque nombres de Reynolds et rapports de forme sont en parfait accord. En revanche, la valeur propre est sensible au maillage. Nous n’avons pu tester un maillage plus raffiné car le calcul effectué avec le maillage  $M_5$  nécessite beaucoup de mémoire vive et arrive à saturation sur nos stations (64 Go RAM). Néanmoins, cela ne représente pas un grand écart pour la valeur du nombre de

Bond critique puisque ce dernier ne varie que de quelques pourcents entre les deux maillages. En vue de remédier à ce problème, il serait judicieux d'utiliser des techniques d'adaptation de maillage afin de réduire le nombre de nœuds de la triangulation et d'optimiser leur répartition comme le montre FABRE et al. [30].

## 5.2 ÉCOULEMENT STATIONNAIRE AUTOUR DE LA BULLE ET FORME D'ÉQUILIBRE

L'écoulement de stationnaire (ou de base) autour de la bulle et la forme d'équilibre de cette dernière sont obtenus grâce à une méthode de Newton (*cf.* 4.3). Les vitesses ascensionnelles et rapport de formes donnés par la méthode de Newton doivent coïncider avec les expériences montrant une trajectoire rectiligne uniforme de la bulle. Néanmoins, si l'écoulement de base est instable, il ne sera pas observé dans les expériences ou avec des simulations directes. Les grandeurs les mieux renseignées dans la littérature sont la vitesse d'ascension, le rapport de forme des bulles (voir figure 5.1), le nombre de Reynolds et le coefficient de traînée. La comparaison du coefficient de traînée n'est pas nécessaire car elle découle du nombre de Reynolds (5.9), le nombre de Galilée étant déterminé une fois les nombre de Morton et de Bond fixés (5.7). Nous avons particulièrement étudié plusieurs fluides dont les caractéristiques sont données dans le tableau 5.2. Des bulles en ascension dans les cinq premiers fluides ont été observées dans la littérature et nous tâcherons de nous y référer. Nous donnerons des résultats de stabilité pour des bulles dans des fluides ayant des nombres de Morton égaux à  $10^{-12}$  et  $10^{-13}$ . Ces fluides correspondent à des métaux comme le galinstan qui est un alliage de métal liquide à température ambiante (**gallium**, **indium**, et **stannum**) ayant une très forte tension de surface. Ce métal liquide est largement utilisé pour les applications nucléaires et métallurgiques car il a un point de fusion très bas ( $-19^\circ\text{C}$ ) et n'est pas toxique comme le mercure. On note que le mercure a un nombre de Morton encore plus faible (de l'ordre de  $10^{-14}$ ) mais nous n'avons pas effectué de calculs dans cette gamme.

La première étape pour l'étude de bulles en ascension dans un fluide au repos via une étude stabilité globale est la caractérisation de l'écoulement de base. Pour mener à bien une telle étude, il est utile de vérifier que le résultat obtenu est conforme à d'autres simulations numériques ainsi qu'à des résultats expérimentaux.

### 5.2.1 Comparaison de l'écoulement stationnaire avec d'autres simulations numériques

Le tableau 5.3 permet de comparer nombres de Reynolds et rapports de forme de bulles obtenus avec d'autres codes numériques. Les résultats de CANO-LOZANO et al. [15] et DEISING et al. [23] sont obtenus avec des codes de simulation directe utilisant un formalisme *VoF*, en 2D-axisymétrique pour le premier et en 3D pour le second. Pour les cas (*B – E*), les différences entre le code *Gerris* (POPINET [62]) et notre méthode de Newton sont inférieures ou égales à 1% pour le nombre de Reynolds et d'environ 3% pour le rapport de forme des bulles. En revanche, le cas (*A*) est plus exigeant car il possède un nombre de Reynolds élevé. Les différences sont plus importantes, d'environ 5% pour le nombre de Reynolds et

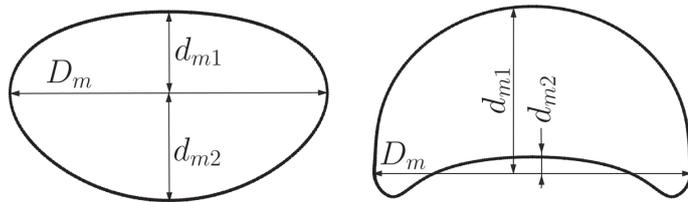


FIGURE 5.1 – Schéma montrant les diamètres mineur,  $d_m = d_{m1} + d_{m2}$ , et majeur,  $D_m$ , de CANO-LOZANO et al. [14]. La même convention sera utilisée ici. Le rapport de forme est défini comme  $\chi = \frac{D_m}{d_m} \geq 1$ .

Liquide	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	$\mu$ ( $mPa \cdot s$ )	$\gamma$ ( $mN/m$ )	$Mo = g\mu^4/(\rho\gamma^3)$	$l_c$ ( $mm$ )
Eau (20°C)	1000	1.00	72.86	$2.54 \cdot 10^{-11}$	2.73
DMS-T00	761	0.49	15.9	$1.8 \cdot 10^{-10}$	1.46
DMS-T02	873	1.75	18.7	$1.6 \cdot 10^{-8}$	1.48
DMS-T05	918	4.59	19.7	$6.2 \cdot 10^{-7}$	1.48
DMS-T11	935	9.35	20.1	$9.9 \cdot 10^{-6}$	1.48
Galinstan	6440	2.40	718	$1.4 \cdot 10^{-13}$	3.37

Tableau 5.2 – Propriétés de quelques fluides étudiés

	$Mo$	$Ga$	$Bo$	$Re$	$\chi$
$A^*$	$1.11 \cdot 10^{-11}$	311	0.47	891	2.28
$A$				850	2.17
$B^*$	$1.78 \cdot 10^{-10}$	236	0.82	514	2.20
$B$				509	2.14
$C^*$	$1.58 \cdot 10^{-8}$	161	2.20	239	2.28
$C$				239	2.25
$D^*$	$5.06 \cdot 10^{-7}$	111	4.25	130	2.36
$D$				129	2.35
$E^*$	$6.20 \cdot 10^{-7}$	128	5.50	141	2.74
$E$				141	2.67
$F^{**}$	$2.54 \cdot 10^{-11}$	200	0.34	575	1.73
$F$				570	1.67

Tableau 5.3 – Comparaison du nombre de Reynolds et du rapport de forme de bulles en ascension stationnaire. ( $A^* - E^*$ ) sont obtenus avec le code *Gerris* par CANO-LOZANO et al. [15], ( $A - F$ ) sont calculés grâce à notre méthode de Newton et ( $F^{**}$ ) est calculé avec *OpenFoam* par DEISING et al. [23] utilisant un module *VoF* adapté par leurs soins.

le rapport de forme. Nos résultats sont proches des simulations numériques présentes dans la littérature actuelle même si un écart plus important est constaté à haut nombre de Reynolds. De plus, on peut remarquer que les écarts avec la littérature sont toujours dans le même sens : notre code donne des nombres de Reynolds et des rapports de forme plus faibles.

La différence entre les résultats ( $A$ ) et ( $A^*$ ) peut s'expliquer par le soin particulier que nous avons porté à la bonne définition de la couche limite présente à la surface de la bulle.

### 5.2.2 Zone de recirculation

Il a été montré par CANO-LOZANO et al. [16] que l'existence d'un tourbillon toroïdal derrière la bulle n'est pas un préalable à la déstabilisation vers une trajectoire non rectiligne de la bulle (observé tout d'abord par DE VRIES et al. [22]). En effet, on observe dans [22] des bulles en ascension dans de l'eau ultra-pure qui adoptent des trajectoires oscillantes alors que BLANCO et MAGNAUDET [11] ont montré numériquement que pour ces gammes de paramètres (*i.e.* à très faible nombre de Morton) la bulle ne possédait pas encore de zone de recirculation. Ceci est contraire aux cas de sphères solides et plus généralement des solides non profilés où il est admis, d'après TCHOUFAG [75] dans le cas des disques tombants et plus généralement d'après ERN et al. [29], qu'une zone de recirculation apparaît toujours avant les instabilités de sillage. Il peut néanmoins être intéressant de comparer la courbe d'apparition de ce tourbillon trouvée dans notre étude avec la littérature. CANO-LOZANO

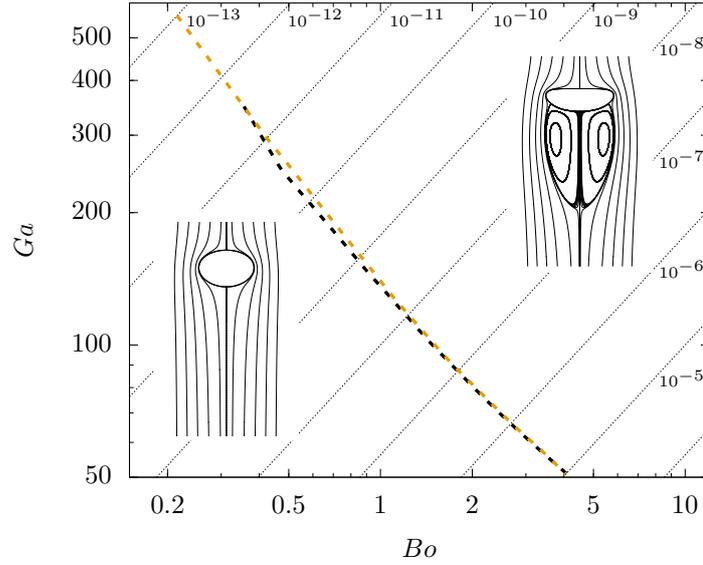


FIGURE 5.2 – Seuil d’existence de la recirculation dans le sillage de la bulle dans le plan  $(Ga, Bo)$ . La ligne pointillée jaune correspond à notre étude et celle en pointillés noirs à l’étude de CANO-LOZANO et al. [14]. Les droites à nombre de Morton constant sont représentées avec la valeur correspondante de  $Mo$ .

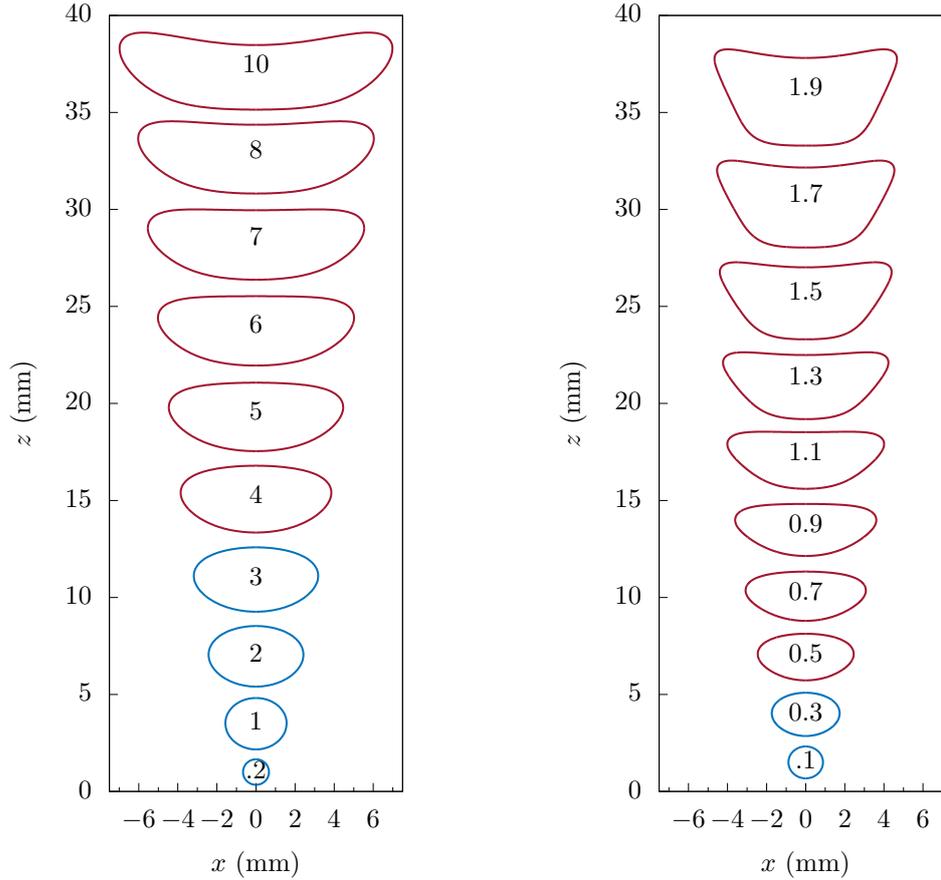
et al. [14] donnent une telle courbe d’apparition qui est comparée avec nos résultats dans la figure 5.2. Les résultats sont en très bon accord, notamment pour de hauts nombres de Morton où la viscosité est élevée (à faible nombre de Galilée). La zone de recirculation est aussi visible sur les champs de base représentés sur la figure 5.5 pour de l’eau pure à 20°C ( $Mo = 2.54 \cdot 10^{-11}$ ) et sur la figure 5.4 pour de l’huile de silicone ( $Mo = 6.2 \cdot 10^{-7}$ ). L’apparition du tourbillon toroïdal a lieu à  $Bo \simeq 0.49$  dans le cas de l’eau et à  $Bo \simeq 2.45$  dans le cas de l’huile de silicone. Ainsi, une zone de recirculation très réduite est notable à sur la figure 5.5d pour l’eau à  $Bo = 0.5$  et sur la figure 5.4b pour l’huile de silicone.

### 5.2.3 Déformation de l’interface

Notre méthode de Newton permet de calculer des écoulements autour de bulles largement déformées. La figure 5.3 répertorie différentes formes d’équilibre pour des bulles d’air dans l’eau pure à 20°C et une huile de silicone. On remarque que pour un nombre de Bond croissant, la bulle perd d’abord sa sphéricité pour devenir ellipsoïdale, puis elle perd sa symétrie amont-aval jusqu’à devenir concave sur le côté amont (haut). Ces formes d’équilibres très déformées présentent des maxima de courbure très élevés mais ne seront pas observées expérimentalement. Un résultats de stabilité de la section suivante est anticipé sur ces figures ; le code couleur indique si les formes d’équilibre correspondent à un écoulement stable ou instable. On voit ainsi que les bulles les plus déformées représentent un état d’équilibre instable. La vorticité tangentielle produite à la surface de la bulle s’écrit sous la forme (BATCHELOR [9] p. 366) :

$$\omega_S = 2\kappa u \quad (5.12)$$

où  $\omega_S$  est la norme de la vorticité dans le plan tangent à la surface de la bulle,  $\kappa$  est la courbure principale et  $u$  la norme du vecteur vitesse à la surface de la bulle. On voit alors sur les figures 5.5 et 5.4 que les maxima de vorticité sont situés sur la surface de la bulle et correspondent aux maxima de courbure. La vorticité alors produite vient nourrir un tourbillon toroïdal à



(a) huile de silicone DMS-T05,  
 $Mo = 6.2 \cdot 10^{-7}$ ,  $l_c = 1.48 \text{ mm}$

(b) eau à  $20^\circ\text{C}$ ,  
 $Mo = 2.54 \cdot 10^{-11}$ ,  $l_c = 2.73 \text{ mm}$

FIGURE 5.3 – Formes d'équilibre de bulles (le nombre de Bond correspondant est inscrit dans chaque bulle). Le bleu est utilisé dans le cas où l'écoulement autour de la bulle est stable et le bordeaux lorsque l'écoulement devient instable. L'échelle de longueur est obtenue grâce à la longueur capillaire (5.3).

l'arrière de la bulle qui va croître à mesure que le nombre de Bond augmente (autrement dit, le diamètre équivalent de la bulle).

#### 5.2.4 Comparaison avec des résultats expérimentaux

Nous avons comparé les nombres de Reynolds et rapports de forme avec plusieurs séries de résultats expérimentaux obtenus par DUINEVELD [26] et ZENIT et MAGNAUDET [83]. Les résultats de ces deux références sont reportés sur les figures 5.6a et 5.6b et les cinq fluides étudiés sont répertoriés dans le tableau 5.2. Nous pouvons comparer les solutions stationnaires obtenues via notre méthode de Newton avec les expériences. Les points bordeaux correspondent à la plus petite bulle subissant une instabilité de trajectoire. Au-delà de ce point, l'écoulement autour de la bulle n'est plus stationnaire, il a bifurqué vers un autre état. Il est donc attendu que les mesures expérimentales et nos résultats stationnaires diffèrent davantage. Nos résultats stationnaires sont parfaitement en accord avec ceux de DUINEVELD [26]. Ils montrent un très faible écart, que ce soit pour le nombre de Reynolds ou le rapport de forme. Dans le cas des huiles de silicone, le nombre de Reynolds est bien prédit par notre code de calcul et on remarque un écart attendu une fois que le mouvement de la bulle n'est plus rectiligne. L'écart le plus important est noté pour l'huile DMS-T02 ayant un nombre

de Morton intermédiaire ( $1.6 \cdot 10^{-8}$ ). À  $Bo = 2.2$ , nous trouvons  $\chi_{num} = 2.25$  alors que l'estimation expérimentale est  $\chi_{exp} \approx 2$ , soit un écart de 12.5%. Néanmoins, en reprenant le tableau 5.3, il faut noter que pour la même configuration CANO-LOZANO et al. [14] trouvent une valeur similaire à la nôtre,  $\chi_{num,2} = 2.28$ . Nous pouvons conclure que les grandeurs macroscopiques de l'écoulement stationnaire autour de la bulle sont calculées précisément par notre méthode de Newton ; le cas de l'eau pure l'atteste clairement.

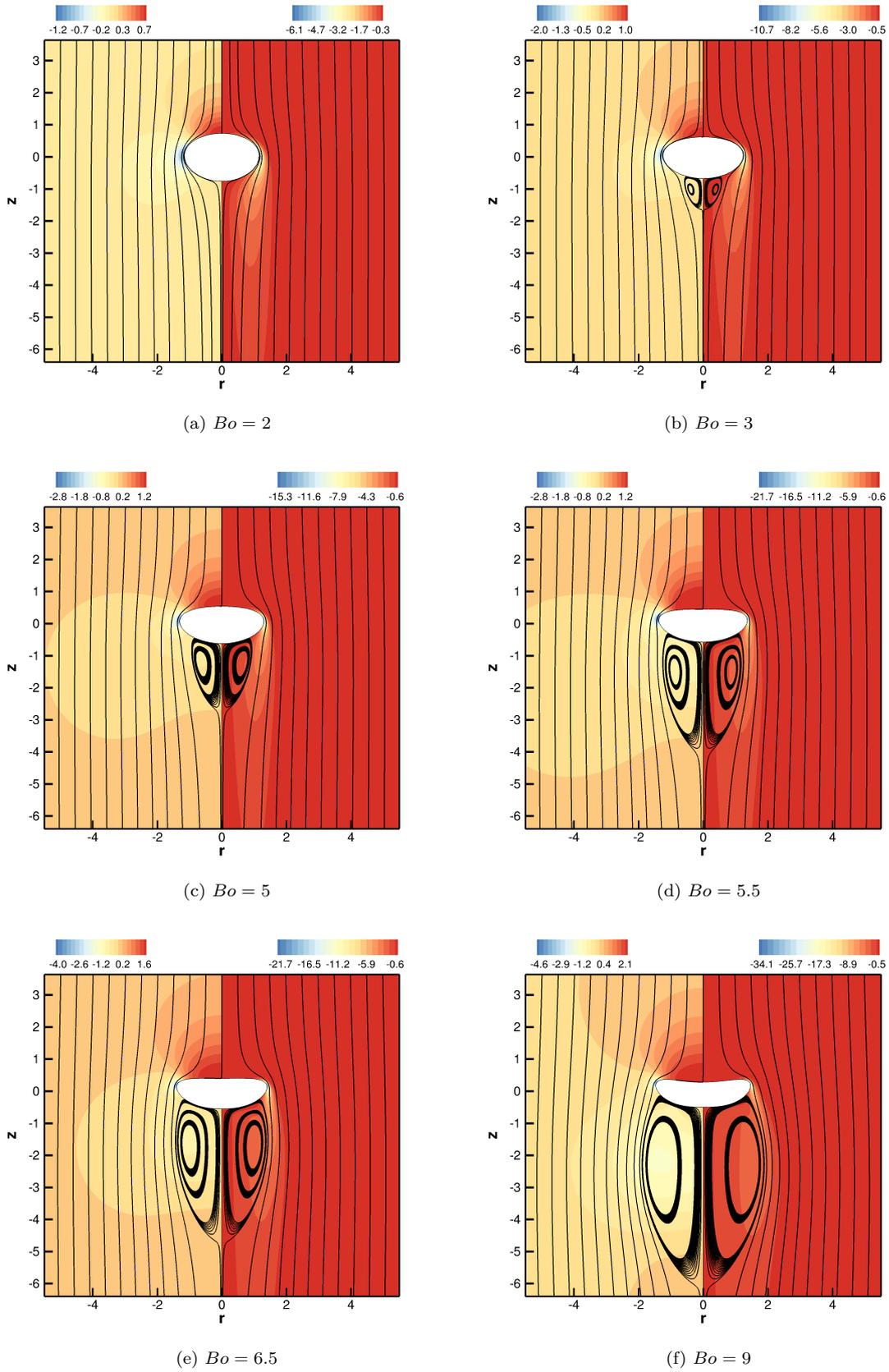


FIGURE 5.4 – Champ de base pour de l’huile de silicone DMS-T05 ( $Mo = 6.2 \cdot 10^{-7}$ ) pour différents  $Bo$ . À gauche est représentée la pression et à droite la vorticité.

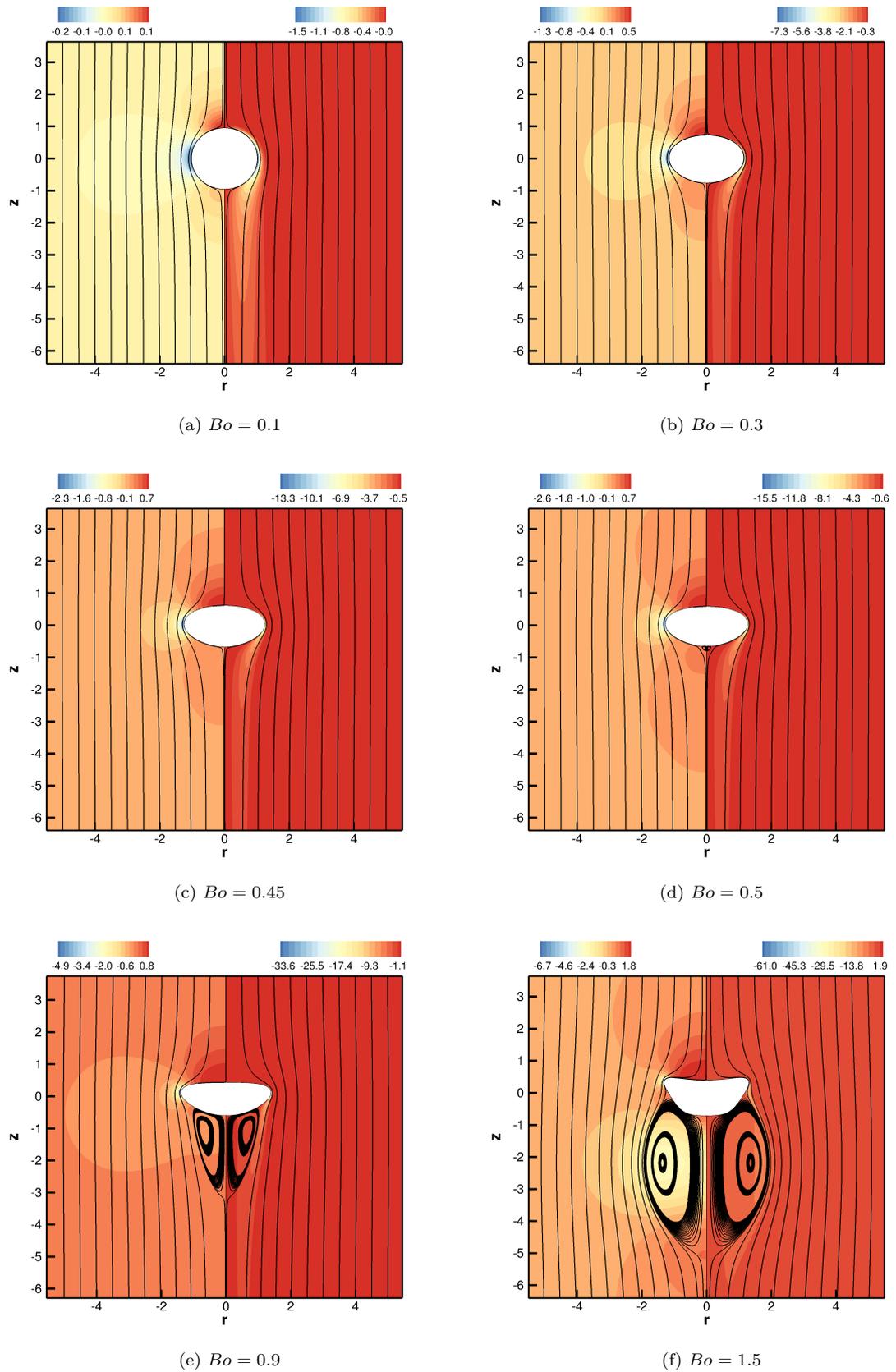


FIGURE 5.5 – Champ de base pour de l'eau pure à  $20^{\circ}\text{C}$  pour différents  $Bo$ . À gauche est représentée la pression et à droite la vorticité.

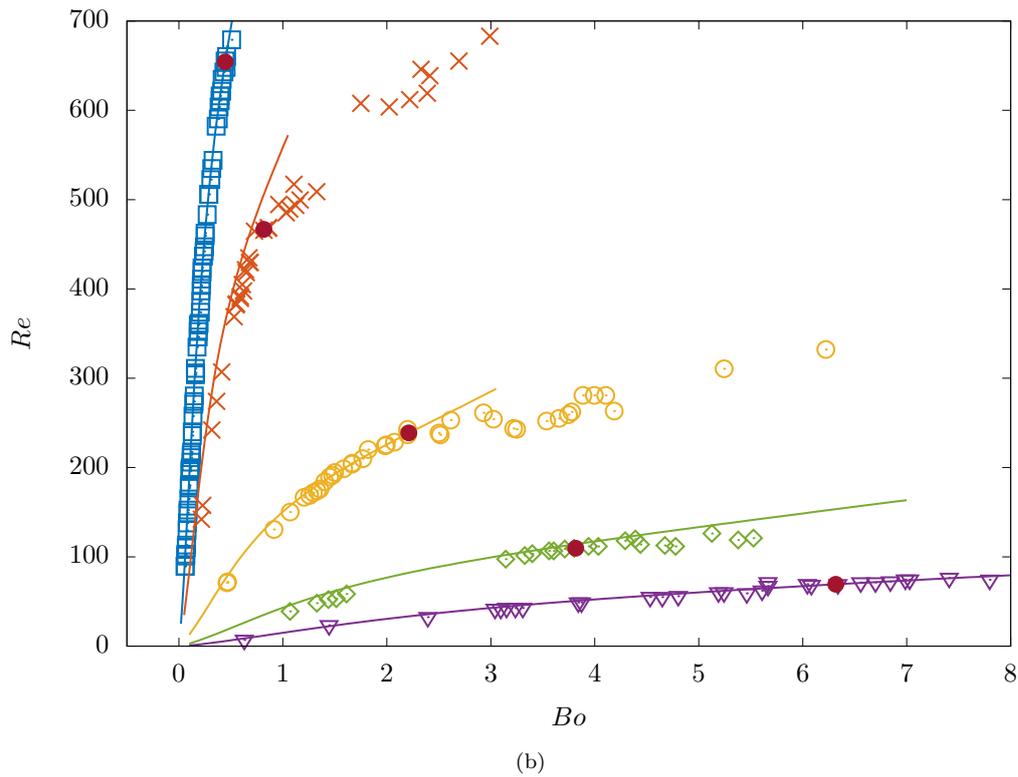
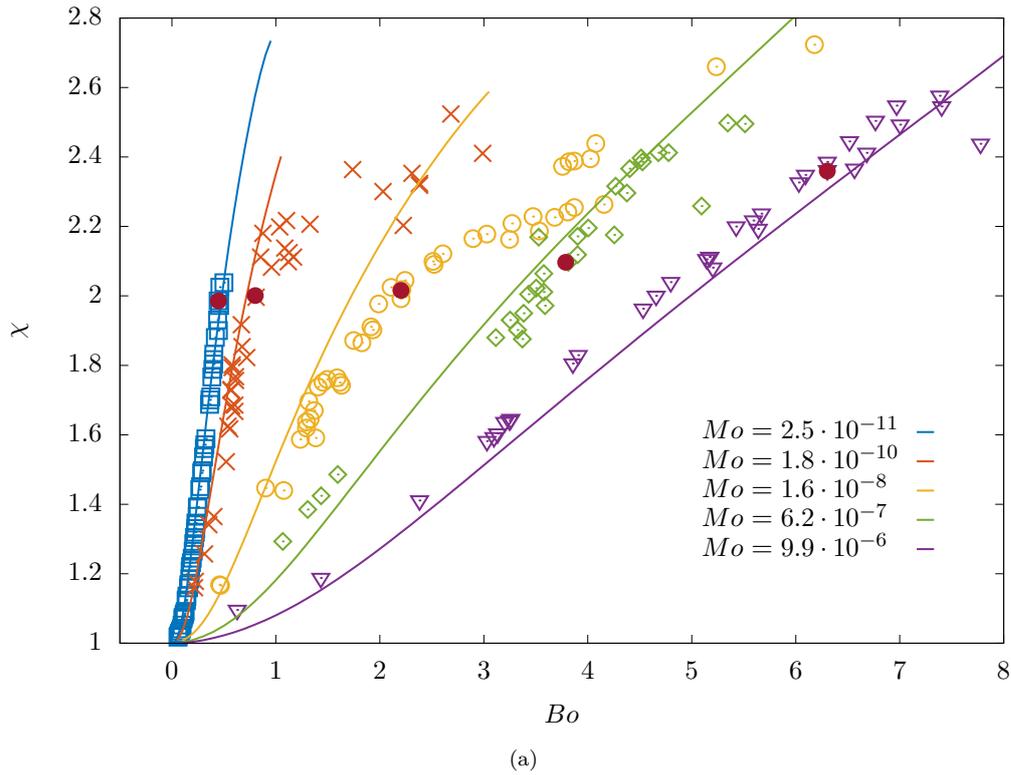


FIGURE 5.6 – Comparaison des rapport d’aspect (a) et nombres de Reynolds (b) en fonction du nombre de Bond pour différents fluides. Les lignes continues correspondent à la solution stationnaire obtenue avec la méthode de Newton et les symboles aux expériences. (□) eau ultra-pure (DUINEVELD [26]) et les huiles de silicone (X) DMS-T00, (○) DMS-T02, (◇) DMS-T05 et (▽) DMS-T11 (ZENIT et MAGNAUDET [83]). (●) correspond à la première instabilité de trajectoire observée expérimentalement pour chaque fluide.

## 5.3 ANALYSE DE STABILITÉ GLOBALE DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR DE LA BULLE

Un résultat central de l'étude de stabilité linéaire globale est présenté sur la figure 5.7. La courbe neutre obtenue grâce à notre code de stabilité globale et les résultats de diverses études sont comparés. Les résultats expérimentaux reportés sur cette figure ont été obtenus avec des fluides purs voire ultra-purs pour le cas de fluides polaires (eau) afin de bien vérifier la condition de glissement à l'interface. Expérimentalement, la transition entre le mouvement rectiligne et le mouvement oscillatoire de la bulle se situe sur le graphe entre les symboles rouges ouverts et fermés.

Les modes constituant cette courbe neutre sont des modes  $|m|=1$  car ce sont les premiers à se déstabiliser. C'est un résultat connu pour les objets axisymétriques dans un écoulement uniforme, *e.g.* NATARAJAN et ACRIVOS [59] pour des sphères et des disques fixes, TCHOUFAG et al. [76][78][77] pour des bulles (fixes ou libres) et des disques se mouvant librement dans un fluide. Ces modes correspondent à un mouvement hélicoïdal du centre de masse de la bulle avec ou sans déformation, une hélice à droite (resp. gauche) pour  $m=1$  ( $m=-1$ ) pour  $\lambda_i > 0$ . La théorie linéaire avec laquelle nous obtenons les modes donne les mêmes résultats pour les deux hélices et autorise une superposition des deux modes. De la somme de deux hélices tournant en sens opposé et de même amplitude naît un mouvement plan en zigzag du barycentre de la bulle. Il en découle que la théorie linéaire ne peut pas distinguer les modes hélicoïdaux et zigzags plans.

Les simulations directes de CANO-LOZANO et al. [14][16] donnent des résultats consistants entre eux. Elles sont en bon accord avec les expériences pour des nombres de Morton relativement élevés ( $Mo > 10^{-7}$ ). La principale différence entre ces deux groupes de simulations directes réside dans le fait que, pour les plus anciennes [14], la bulle est indéformable alors que pour [16], la bulle est déformable. Le bon accord constaté suggère que la déformation de la surface de la bulle ne semble pas être requise afin de capter le seuil dans la gamme  $Mo = 10^{-7} - 10^{-4}$ . Pour les nombres de Morton plus faibles ( $Mo < 10^{-8}$ ), l'ajout de déformation de la surface ne semble pas corriger la tendance et les données des deux études numériques s'éloignent des points expérimentaux.

Notre analyse de stabilité permet de construire une courbe neutre (en jaune) représentant le seuil de stabilité de l'écoulement autour de la bulle. Le seuil trouvé correspond bien à celui observé expérimentalement pour l'eau pure à température ambiante (DUINEVELD [26]) et les huiles de silicone (ZENIT et MAGNAUDET [83]). On relève un léger écart avec DE VRIES [21]. Dans l'expérience de ce dernier, un gradient de température de  $1K/cm$  était imposé dans la cuve afin de visualiser le sillage de la bulle par une technique de Schlieren. Une incertitude demeure sur l'effet de ce gradient. Cet élément peut expliquer l'écart avec notre résultat. Une série de mesures de SATO [73] (parmi trois) présente un écart important avec notre prédiction, que nous n'expliquons pas, alors que les deux autres séries corroborent très bien nos résultats.

Un point important à souligner est que la présence d'une zone de recirculation (tourbillon toroïdal) à l'arrière de la bulle n'est pas nécessaire à la déstabilisation de l'écoulement de base. Confirmant les observations de DE VRIES [21]. En effet, pour de faibles nombres de Morton ( $Mo < 1.6 \cdot 10^{-8}$ ), le seuil d'instabilité est inférieur à celui de l'apparition de la zone de recirculation dans le sillage de la bulle. L'argument de la déstabilisation de ce tourbillon toroïdal à l'arrière de la bulle comme moteur de l'instabilité de trajectoire est donc remis en cause, ce point est important car on sait que l'instabilité absolue du sillage d'un obstacle fixe prend naissance dans le tourbillon toroïdal.

Les très faibles nombres de Morton correspondent à des métaux liquides, eux seuls ayant des densités élevées avec une forte tension de surface tout en étant peu visqueux. ZHANG et NI [85][86] ont étudié numériquement les bulles en ascension dans du galinstan au re-

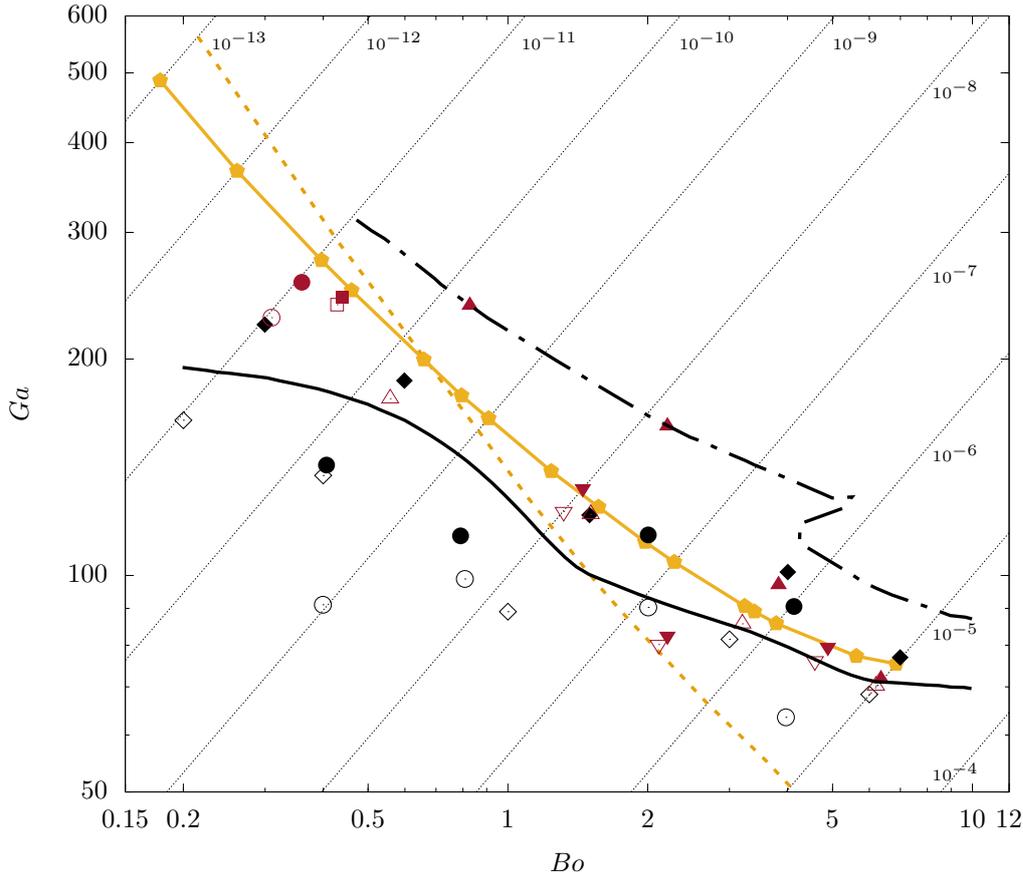


FIGURE 5.7 – La courbe neutre dans le plan  $(Bo, Ga)$  obtenue en reliant les symboles (◆) par une ligne continue correspond à notre analyse de stabilité globale. La ligne noire en tirets-pointillés correspond à l'analyse de stabilité globale effectuée par CANO-LOZANO et al. [15] dans laquelle la forme de la bulle est gelée. La ligne noire en trait continu est la courbe critique déduite des simulations directes tridimensionnelles avec une forme de bulle réaliste mais gelée réalisées par CANO-LOZANO et al. [14]. Les symboles vides (resp. pleins) représentent des cas où le mouvement rectiligne de la bulle est stable (resp. instable). (◆,◇) correspondent aux résultats de simulation directe de CANO-LOZANO et al. [16] pour une bulle déformable en ascension et (●,○) à l'étude similaire de TRIPATHI et al. [79]. (●,○) et (■,□) correspondent respectivement aux expériences de DE VRIES [21] et DUINEVELD [26] dans de l'eau ultra-pure. (▲,△) et (▼,▽) représentent les résultats des expériences de ZENIT et MAGNAUDET [83] et SATO [73] dans différentes huiles de silicone. La courbe en pointillés jaune représente le seuil d'apparition de la recirculation en écoulement axisymétrique (voir figure 5.2).

pos. RICHTER et al. [66] ont étudié expérimentalement le même problème dans un réservoir aplati. Ces auteurs ont principalement analysé l'influence de champs magnétiques appliqués au fluide conducteur sur la nature du sillage et de la trajectoire de la bulle. Toutes leurs mesures ou simulations sans champ magnétique ont été menées dans des régimes ascensionnels oscillatoires et l'apparition de l'instabilité de trajectoire n'a pas été caractérisée. Cela motive donc l'investigation de cette gamme de paramètres puisque nous ne connaissons pas, à ce jour, de données renseignant les seuils de stabilité de bulles montant dans de tels fluides.

Il faut enfin noter que l'étude de stabilité globale CANO-LOZANO et al. [15] semble surestimer pour chaque valeur de  $Mo$  le nombre de Bond critique auquel la transition vers un mouvement oscillatoire a lieu. Cette étude avait été menée avec des formes d'équilibre axisymétriques calculées avec *Gerris*, puis, calcul du champ de base et analyse globale ont été

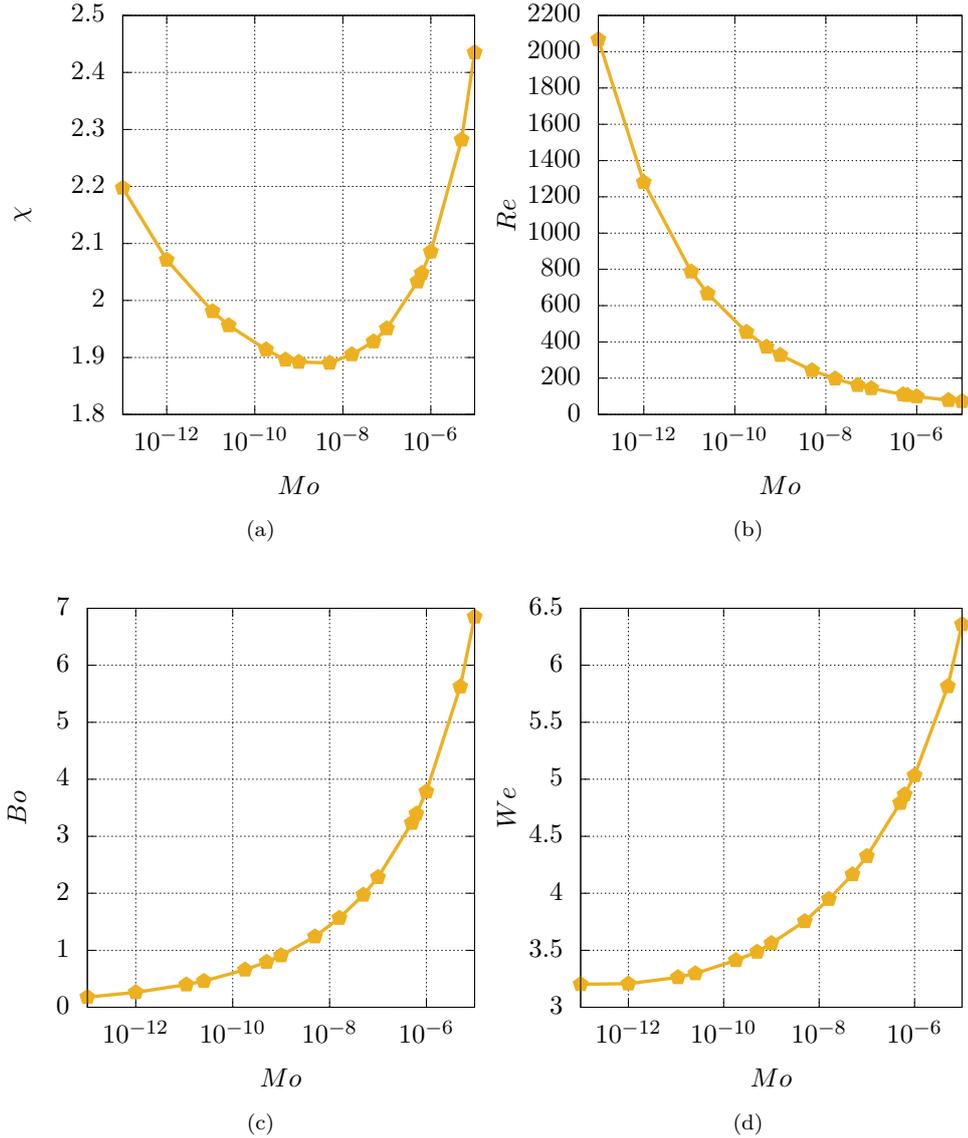


FIGURE 5.8 – Courbe neutre représentée dans d’autres plans.

menés avec *FreeFem++* de manière similaire à l’approche de TCHOUFAG [75][78]. L’hypothèse du caractère sous-critique de la bifurcation avait été brièvement évoquée par CANO-LOZANO et al. [15] avant d’être écartée. Nos résultats, en bon accord avec les résultats expérimentaux, semblent abonder dans le sens du scénario d’une bifurcation supercritique. De plus, la stabilisation observée à  $Mo = 5 \cdot 10^{-7}$  et  $Bo \approx 5$  dans [15] n’apparaît pas dans nos résultats : notre courbe neutre n’est jamais multivaluée et reste monotone.

Les figures 5.8a et 5.8b représentent cette même courbe neutre mais dans d’autres plans de l’espace des paramètres. Cela permet de voir à quel nombre de Reynolds ou rapports de forme se situe le seuil de stabilité. On peut noter que le rapport de forme  $\chi$  varie peu le long de cette courbe. En effet, sur six décades du nombre de Morton ( $Mo \in [10^{-12}, 10^{-6}]$ ) la déstabilisation a lieu pour un rapport de forme  $\chi = 2 \pm 5\%$ .

La figure 5.8d montre que quel que soit le nombre de Morton, les forces capillaires sont toujours inférieures aux forces inertielles. Cela confirme le fait que les rapports de forme des

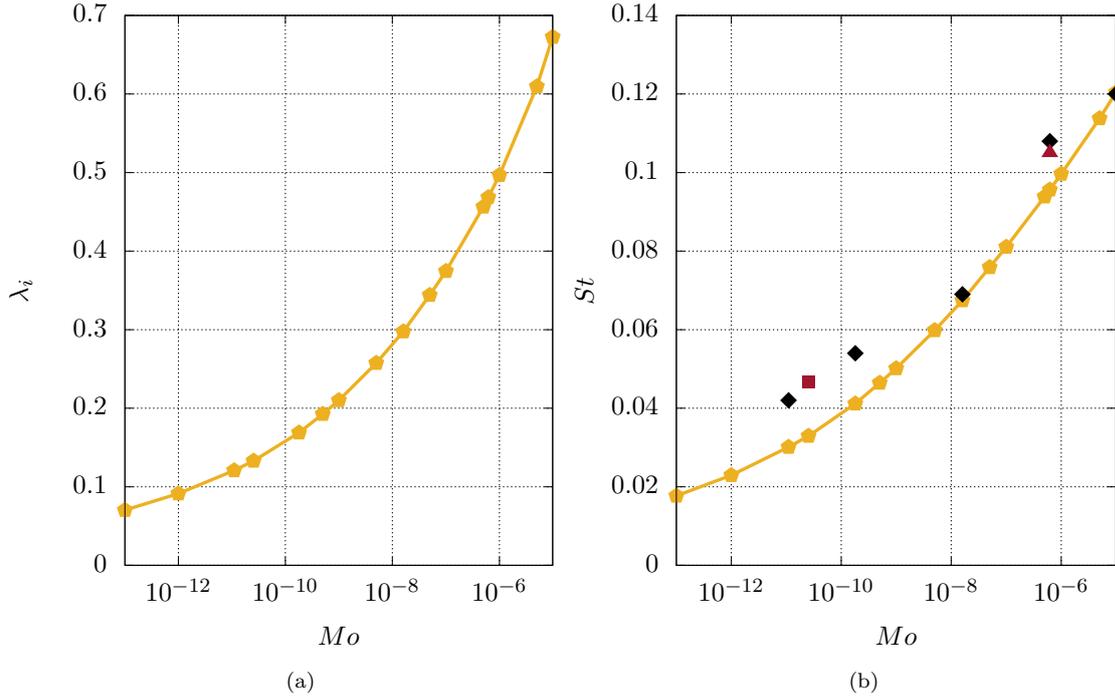


FIGURE 5.9 – Fréquences adimensionnelles de la première instabilité trouvée (courbes jaunes). La pulsation  $\lambda_i = 2\pi ft_c$  est adimensionnée via le temps capillaire (5.11) et le nombre de Strouhal  $St = fD/U_b$  est une fréquence adimensionnée par le temps caractéristique du mouvement de la bulle en ascension (5.10). (◆) correspond aux simulations numériques de CANO-LOZANO et al. [16]. (■) et (▲) correspondent aux expériences de DUINEVELD [25] et de ZENIT et MAGNAUDET [84].

formes d'équilibre sont bien supérieur à l'unité au niveau du seuil.

Les figures 5.9 dévoilent l'évolution de la fréquence en fonction du nombre de Morton avec deux adimensionnalisations différentes. La fréquence d'oscillation d'un phénomène est souvent un paramètre plus robuste que le seuil de déclenchement d'une instabilité. C'est pour cela que les résultats expérimentaux pour le nombre de Strouhal (figure 5.9b) sont en bon accord avec les simulations numériques. Cela dit, les écarts varient car les simulations ne sont pas menées au même nombre de Bond. CANO-LOZANO et al. [16] ne donnent pas les fréquences au seuil, car le seuil n'a pas été précisément déterminé. Les résultats pour  $Mo = \{1.8 \cdot 10^{-8}, 9.9 \cdot 10^{-6}\}$  coïncident particulièrement car les nombre de Bond de ces simulations sont presque identiques à ceux du seuil, pour lequel la courbe jaune donne la valeur. La fréquence donnée par DUINEVELD [25] est aussi à titre indicatif car elle ne correspond pas à la valeur au seuil mais à  $Bo \approx 0.71$ , alors que le seuil se situe à  $Bo \approx 0.44$ . En revanche, la fréquence trouvée par ZENIT et MAGNAUDET [84] est donnée pour le seuil d'instabilité, *i.e.* la plus petite bulle instable observée. Cette fréquence est en bon accord avec la nôtre. Il faut néanmoins noter que cette valeur est un ordre de grandeur, elle a été obtenue sur une seule période d'oscillation. La comparaison avec les données numériques et expérimentales est globalement satisfaisante, les différences pouvant être attribuées au fait que la plupart des valeurs ne correspondent pas au seuil. La fréquence donnée par la théorie linéaire représente une bonne approximation de celle du problème non linéaire.

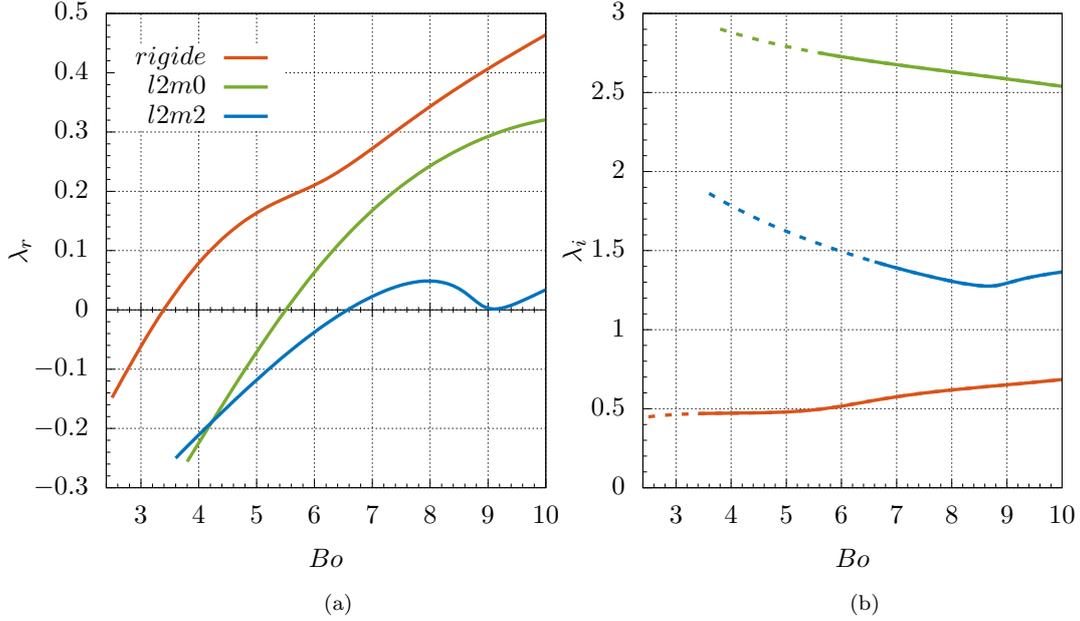


FIGURE 5.10 – Parties réelle (a) et imaginaire (b) des valeurs propres en fonction du nombre de Bond pour une bulle en ascension dans de l'huile de silicone DMS-T05,  $Mo = 6.2 \cdot 10^{-7}$ . Pour (b), les pointillés (resp. traits continus) représentent la partie stable (resp. instable) de la branche. Les valeurs propres sont adimensionnées par le temps capillaire (5.11). La branche *rigide* est obtenue avec  $m = 1$ .

### 5.3.1 Le cas d'un fluide visqueux : une huile de silicone cinq fois plus visqueuse que l'eau

Observons maintenant plus précisément les résultats de l'analyse de stabilité en fonction du nombre de Bond pour un fluide relativement visqueux, l'huile de silicone DMS-T05 à  $Mo = 6.2 \cdot 10^{-7}$ .

La figure 5.10 montre l'évolution des valeurs propres en fonction du nombre de Bond. Les trois branches les plus amplifiées sont représentées. La première branche qui devient instable reste la plus amplifiée sur toute la gamme de nombres de Bond testée. Cette branche, qu'on peut qualifier de *rigide*, a une fréquence adimensionnelle correspondant à  $St = 0.096$  au seuil. Le mode correspondant est représenté sur les figures 5.13a pour sa partie réelle et 5.13b pour sa partie imaginaire. Ce mode propre, à fréquence relativement basse, correspond à un mouvement de zigzag ou hélicoïdal. On note que la partie réelle du déplacement de l'interface effectue un mouvement de translation selon l'horizontale et la partie imaginaire une rotation (peu visible). En considérant que les parties réelle et imaginaire du mode sont déphasées d'un quart de période, on peut décomposer temporellement ce mode. Le mouvement de zigzag revient à n'observer que ce qui se passe dans un plan méridien. La figure 5.11 représente plusieurs instantanés d'une trajectoire en zigzag. La position 1 correspond à la figure 5.13a, le déplacement latéral est maximal. La bulle revient sur son axe en s'inclinant pour aligner son petit axe dans la direction du déplacement. Au bout d'un quart de période le barycentre de la bulle est revenu sur sa position moyenne (position 2) et l'inclinaison est maximale. La position 2 correspond à la figure 5.13b. La suite du mouvement se décrit de la même façon mais en considérant les dispositions des figures 5.13a et 5.13b avec des amplitudes opposées.

Ce mode se caractérise aussi par un lâcher d'une structure tourbillonnaire particulière dans son sillage comme le montrent les figures 5.13c et 5.13d. Cette structure ressemble à un tourbillon toroïdal mais possède deux lobes corotatifs, un schéma est disponible sur la figure 5.12.

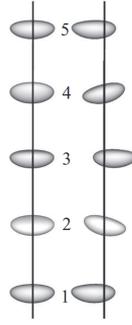


FIGURE 5.11 – Zig-zag observé par CANO-LOZANO et al. [14] pour  $Mo = 6.2 \cdot 10^{-7}$  à  $Bo = 4$ , les deux vues sont perpendiculaires.

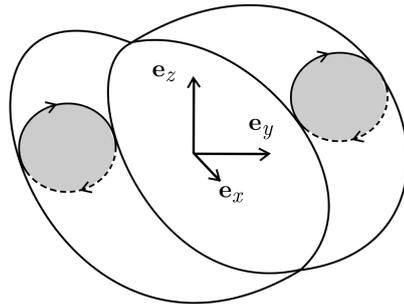


FIGURE 5.12 – Schéma des structures tourbillonnaires présentes dans le mode *rigide* représenté sur les figures 5.13.

Pour  $Bo = 4$ , nous trouvons une fréquence  $St = 0.091$  alors que la valeur donnée par CANO-LOZANO et al. [14] est  $St = 0.108$ . Cette différence de 19% peut être attribuée aux non-linéarités qui interviennent dans la simulation directe. Les fréquences sont néanmoins du même ordre. Rappelons que pour cette valeur de  $Mo$ , nos résultats sont en bon accord pour le seuil. Il est donc peu probable que la différence entre les deux fréquences provienne d'artefacts numériques.

Considérons maintenant les autres branches présentes sur le spectre 5.10. Ces branches représentent des modes secondaires car ils ont des taux d'amplification plus faibles que le mode *rigide*, il n'est pas sûr de pouvoir les observer expérimentalement. Ils correspondent à des modes de forme. Ce sont des modes qui présentent une déformation de la surface de la bulle importante et d'amplitude comparable ou supérieure aux mouvements de rotation et de translation en bloc. Pour un nombre d'onde azimutal  $m = 0$ , ces modes (et l'oscillation de la surface de bulle associée) sont axisymétriques. Pour  $|m| > 0$ , les modes sont pleinement tridimensionnels. Les déplacements latéraux de la bulle résultent de nombres azimutaux  $|m| = 1$  alors que les déplacements verticaux résultent de  $m = 0$ . Dans le cas  $m = 2$ , aucune translation ou rotation de la bulle ne n'est possible. Les branches  $l2m0$  et  $l2m2$ , représentant ces modes de forme, ont été nommées d'après les modes d'oscillation correspondant dans la limite  $Bo=0$ . Une fois la sphéricité perdue, la dégénérescence des harmoniques sphériques ne tient plus et l'anisotropie de la bulle et de l'écoulement environnant fait que les valeurs propres du système ne dépendent plus uniquement du nombre d'onde principal ( $l$ ) : les harmoniques sphériques ne sont plus les modes propres d'oscillation de la surface, comme l'a montré MEIRON [52] dans le cas de bulles en ascension dans un fluide non visqueux. Ainsi, pour le nombre d'onde principal  $l = 2$  nous trouvons deux modes qui se déstabilisent sur la gamme de nombres de Bond étudiée. Même si nous n'avons pas pu suivre les modes  $l2m0$  et  $l2m2$ , ils présentent tous deux des fréquences proches de celle du mode  $l = 2$  sans gravité dont la valeur est  $\lambda_i = 3.41$ . De plus, ils correspondent tous deux

à des oscillations de forme du même ordre que la translation. Le mode  $l2m0$  est représenté sur les figures 5.14a et 5.14b. En raison de la fréquence élevée de ce mode (par rapport au mode *rigide*), les tourbillons sont plus rapprochés dans le sillage. En effet, ils sont advectés avec une vitesse du même ordre que celle du mode *rigide* (la vitesse du champ de base) mais sont produits par les oscillations de forme à plus haute fréquence. Ce mode présente un fort couplage entre les fluctuations de la surface et le sillage. La partie réelle du déplacement de l'interface révèle une dissymétrie haut-bas qui indique que la vitesse du barycentre de la bulle varie. Au cours du temps, la bulle accélère et ralentit cycliquement dans la direction verticale.

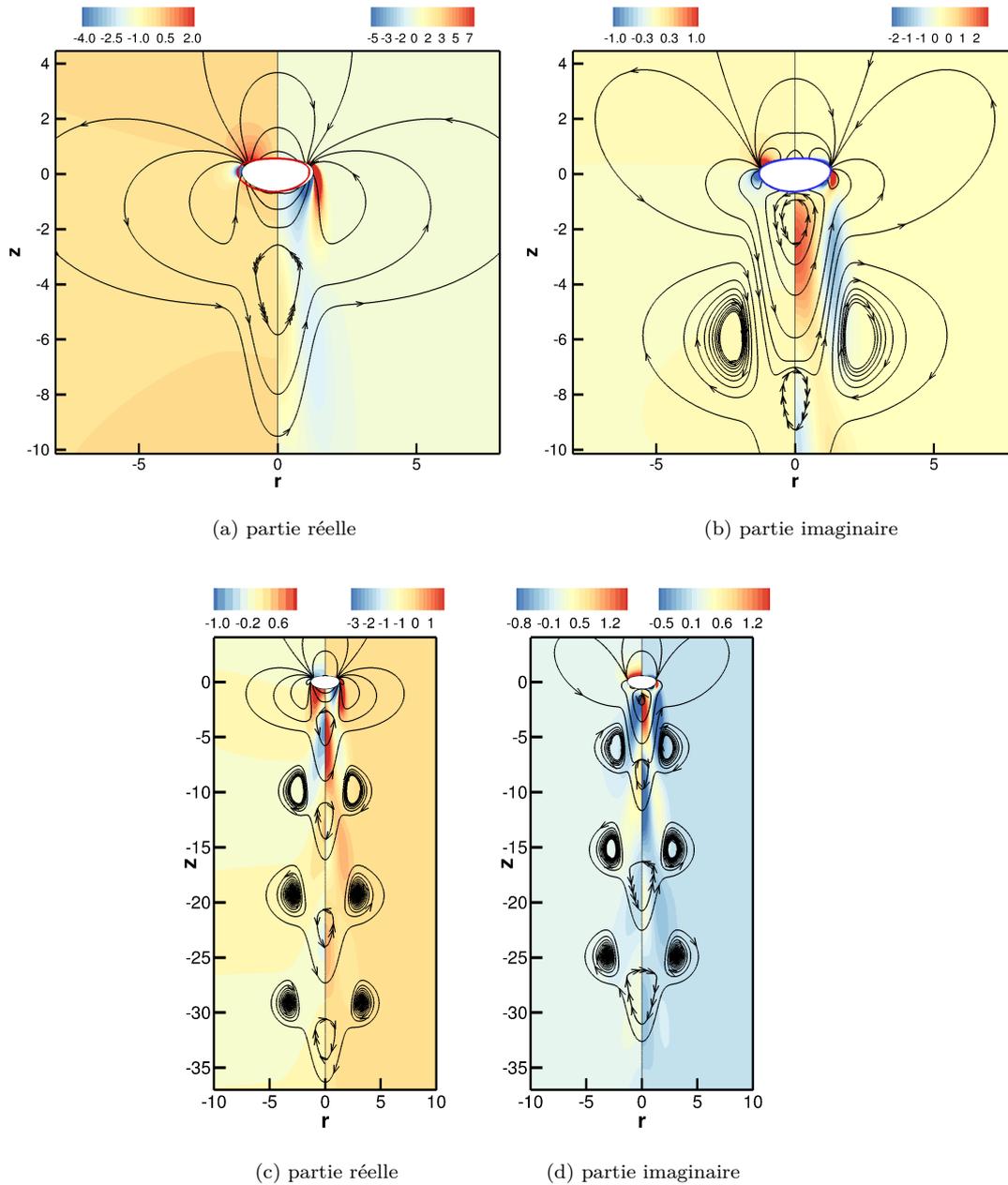


FIGURE 5.13 – Mode global de la première branche (*rigide*) instable pour l'huile de silicone DMS-T05,  $m = 1$ ,  $Bo = 3.7$ ,  $\lambda = 0.043 + 0.47i$ . (a,b) près de la bulle, les iso-contours de pression sont représentés à gauche et ceux de la vorticité azimutale à droite. (c,d) dans le sillage, les iso-contours de vitesse azimutale sont représentés à gauche et ceux de la vorticité azimutale à droite.

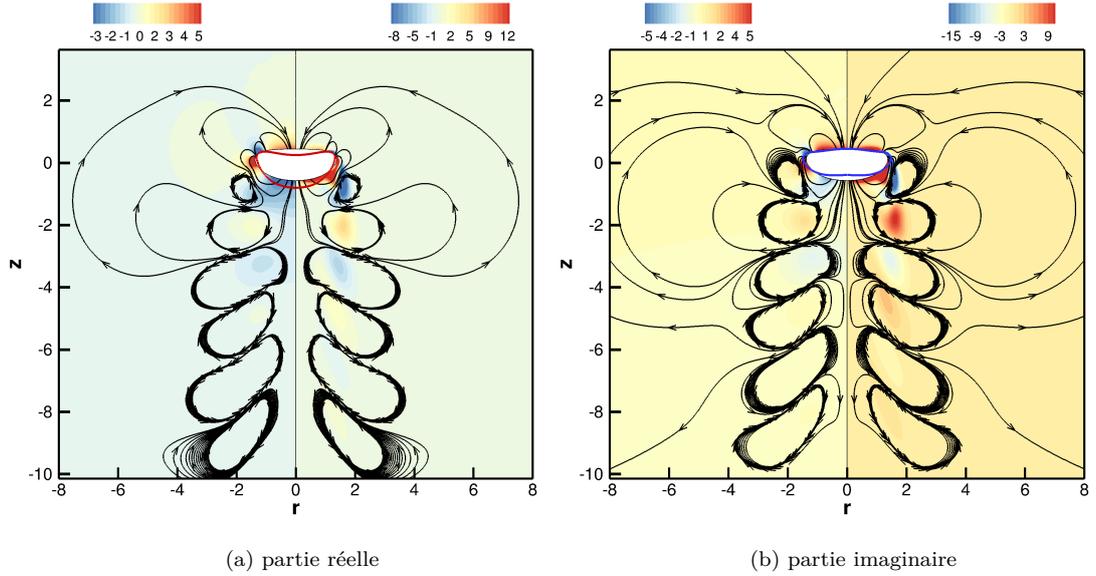


FIGURE 5.14 – Mode global de la deuxième branche ( $l2m0$ ). Les iso-contours de pression sont représentés à gauche, ceux de la vorticité azimutale à droite.  $m = 0$ ,  $Bo = 5.7$ ,  $\lambda = 0.026 + 2.75i$ .

### 5.3.2 Le cas de l'eau ultra-pure à 20°C

La figure 5.15 représente l'évolution des valeurs propres en fonction du nombre de Bond. La branche *rigide* est la première à se déstabiliser et reste la branche la plus instable sur toute la gamme de nombres de Bond étudiée. Le seuil est à  $Bo_c = 0.463$ , correspondant à un rayon équivalent  $R = 0.93mm$  alors que DUINEVELD [26] trouve  $R = 0.91mm$ . Nos résultats sont en très bon accord. Cette branche est à basse fréquence,  $St = 0.033$  au seuil, et subit un changement de nature à  $Bo = 0.63$  : on observe que le couple de valeurs propres conjuguées laisse place à deux valeurs propres réelles dont l'une se restabilise tandis que l'autre atteint des valeurs importantes. Au-delà de  $Bo \approx 0.63$ , l'instabilité dominante est donc le mode stationnaire, il consiste en une dérive oblique de la bulle. Cette transition vers un mouvement stationnaire avait déjà été notée par TCHOUFAG et al. [78] mais n'a jamais été observée expérimentalement. Elle apparaît cependant de manière transitoire dans des simulations numériques directes de [58], et précède un mouvement de zigzag. Les non-linéarités semblent rétablir par la suite un mode oscillant. Les figures 5.16c-5.16d représentent les modes stationnaires sur ces deux branches stationnaires, à même nombre de Bond. Le mouvement dans le fluide correspond à la perturbation créée par la translation et la rotation de la bulle.

Le mode *rigide* instationnaire est similaire à celui présenté pour le cas de l'huile de silicone DMS-T05, figure 5.13a-5.13b. La bulle a une trajectoire hélicoïdale de la même manière, à plus basse fréquence cependant. Son sillage est alors plus allongé, il est représenté sur la figure 5.17a.

Le spectre obtenu dans l'eau ultra-pure présente néanmoins des similarités avec celui trouvé dans l'huile de silicone (figure 5.10). Les modes de forme sont bien identifiables sur la figure 5.15. En effet, dans la limite  $Bo = 0$ , ceux-ci ont une pulsation  $\lambda_i = 3.41$  pour le mode  $l = 2$  et  $\lambda_i = 6.32$  pour le mode  $l = 3$  (cf chapitre 2). Les branches  $l2m0$ ,  $l2m1$  et  $l2m2$  semblent partir de la même valeur à  $Bo$  nul, il en va de même pour les branches  $l3m0$  et  $l3m1$ . Le mode  $l2m2$  n'a pas été suivi assez près de la limite  $Bo = 0$ , nous avons supposé qu'il tend vers la valeur  $\lambda_i = 3.41$  et l'avons nommé  $l2m2$ . En effet, il possède une déformation

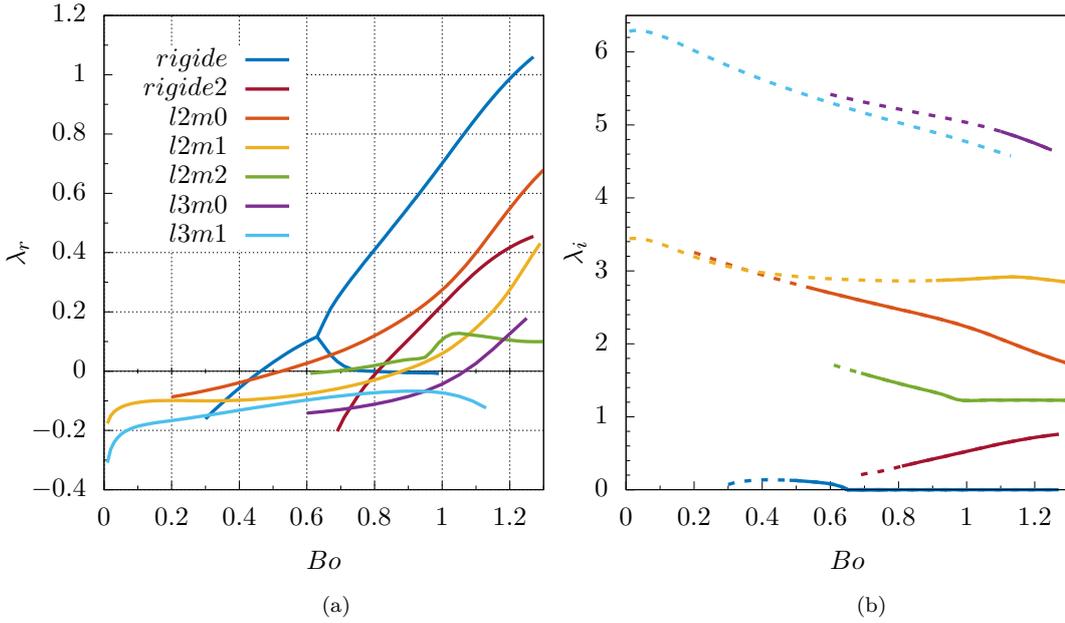
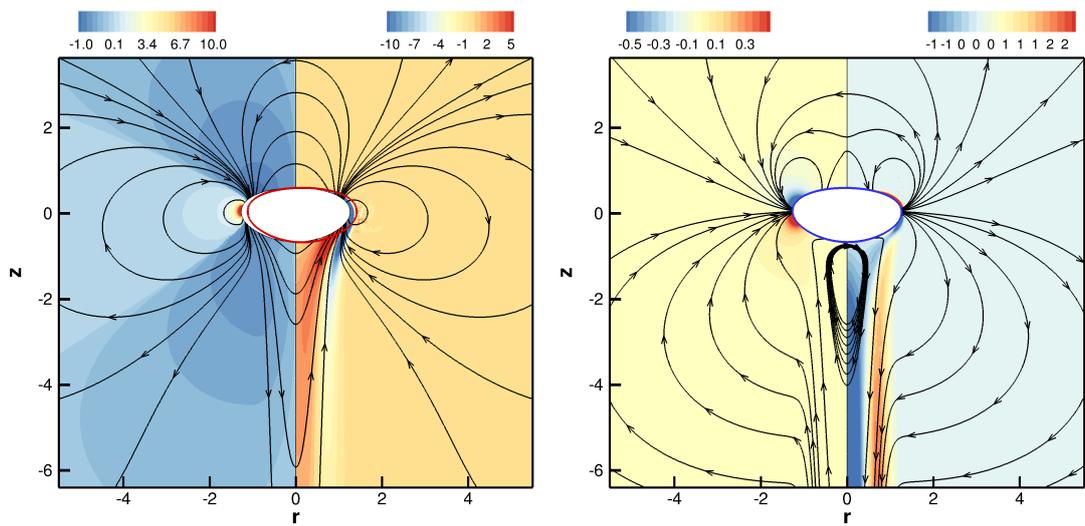


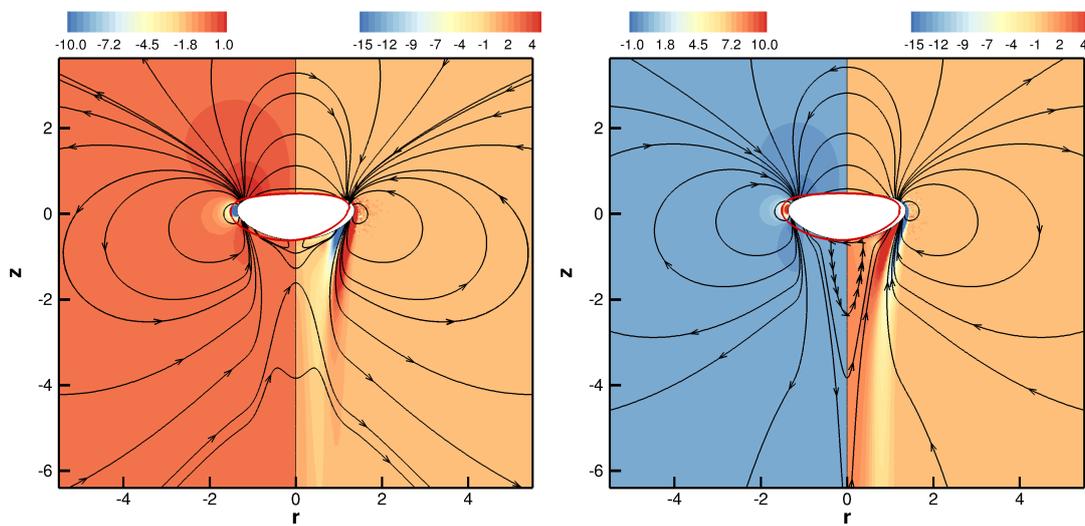
FIGURE 5.15 – Parties réelle (a) et imaginaire (b) des valeurs propres en fonction du nombre de Bond pour une bulle en ascension dans de l'eau pure,  $Mo = 2.54 \cdot 10^{-11}$ . Pour (b), les pointillés (resp. traits continus) représentent la partie stable (resp. instable) de la branche. Les branches *rigide* et *rigide2* sont obtenues avec  $m=1$ .

de la surface compatible avec ce dernier. Nous retrouvons qualitativement les résultats de MEIRON [52] prédisant que la pulsation diminue lorsque la déformation de la bulle augmente. Il prédit aussi que le mode *l2m2* a une fréquence plus faible que les deux autres *l2m1* et *l2m0*, propriété qui apparaît aussi dans nos résultats. Deux modes activant les déformations de la surface, issus de ces branches, sont représentés sur les figures 5.18. Ces modes présentent un fort couplage avec le sillage. Correspondant à une oscillation de la surface à fréquence élevée, ils produisent des tourbillons rapprochés dans le sillage. Le seuil d'instabilité du mode *l2m0* ( $Bo_c = 0.524$ ) est proche de celui du mode *rigide* qui est le premier à se déstabiliser. Il correspond à un rayon équivalent  $R = 0.99\text{mm}$  et sa fréquence adimensionnelle vaut  $St = 0.67$ . Le mode *rigide2* présente des similarités avec le mode *rigide* comme le montrent les figures 5.16e, 5.16f et 5.17c. Il possède cependant une fréquence nettement plus élevée. Il en résulte des structures plus rapprochées dans le sillage.



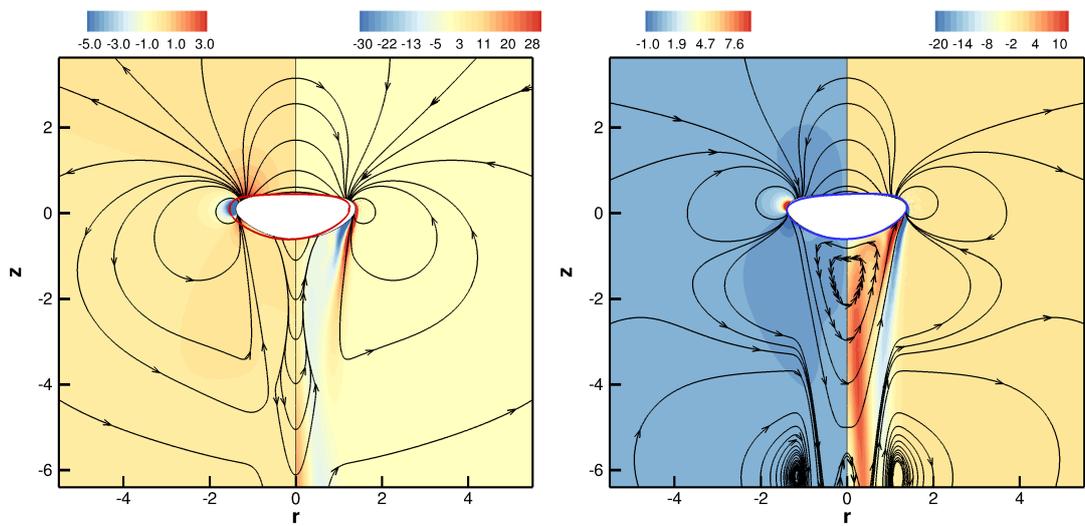
(a) Mode *rigide* (partie réelle),  $m=1$ ,  $Bo=0.48$ ,  $\lambda=0.014+0.13i$

(b) Mode *rigide* (partie imaginaire),  $m=1$ ,  $Bo=0.48$ ,  $\lambda=0.014+0.13i$



(c) Mode *rigide* stationnaire (partie réelle),  $m=1$ ,  $Bo=0.75$ ,  $\lambda=0.33$

(d) Mode *rigide* stationnaire (partie réelle),  $m=1$ ,  $Bo=0.75$ ,  $\lambda=0.03$



(e) Mode *rigide2* (partie réelle),  $m=1$ ,  $Bo=0.85$ ,  $\lambda=0.049+0.36i$

(f) Mode *rigide2* (partie imaginaire),  $m=1$ ,  $Bo=0.85$ ,  $\lambda=0.049+0.36i$

FIGURE 5.16 – Modes instables à faible déformation de la surface pour de l'eau pure à 20°C. La pression est représentée en iso-contours à gauche et la vorticité azimutale à droite.

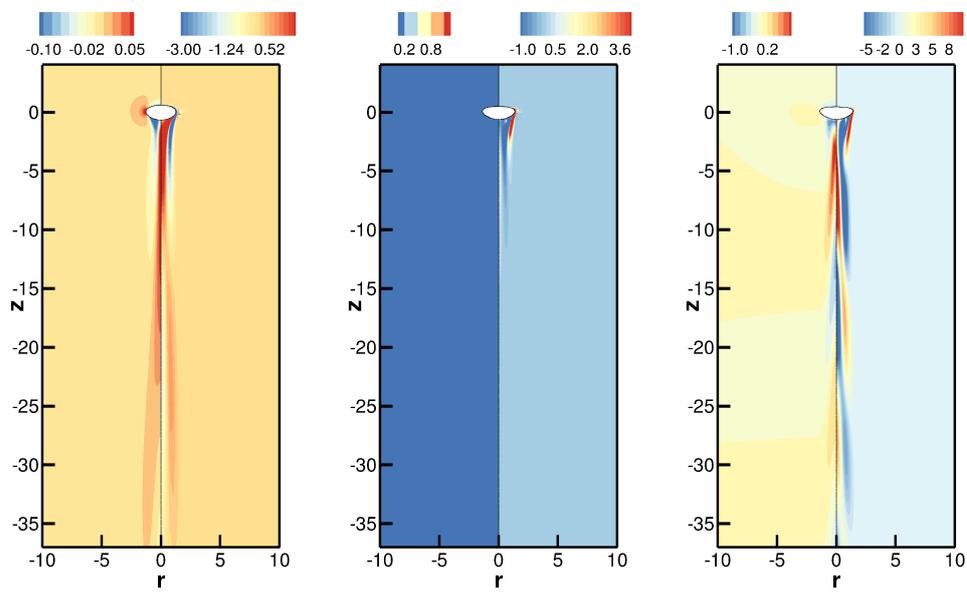
(a)  $Bo = 0.48$ ,  $\lambda = 0.014 + 0.13i$ (b)  $Bo = 0.75$ ,  $\lambda = 0.33$ (c)  $Bo = 0.85$ ,  $\lambda = 0.049 + 0.36i$ 

FIGURE 5.17 – Sillage Modes instables *rigide* (a), *rigide* stationnaire (b) et *rigide2* (c). Les parties réelles de la vitesse azimutale sont représentées en iso-contours à gauche et les parties réelles de la vorticité azimutale à droite.

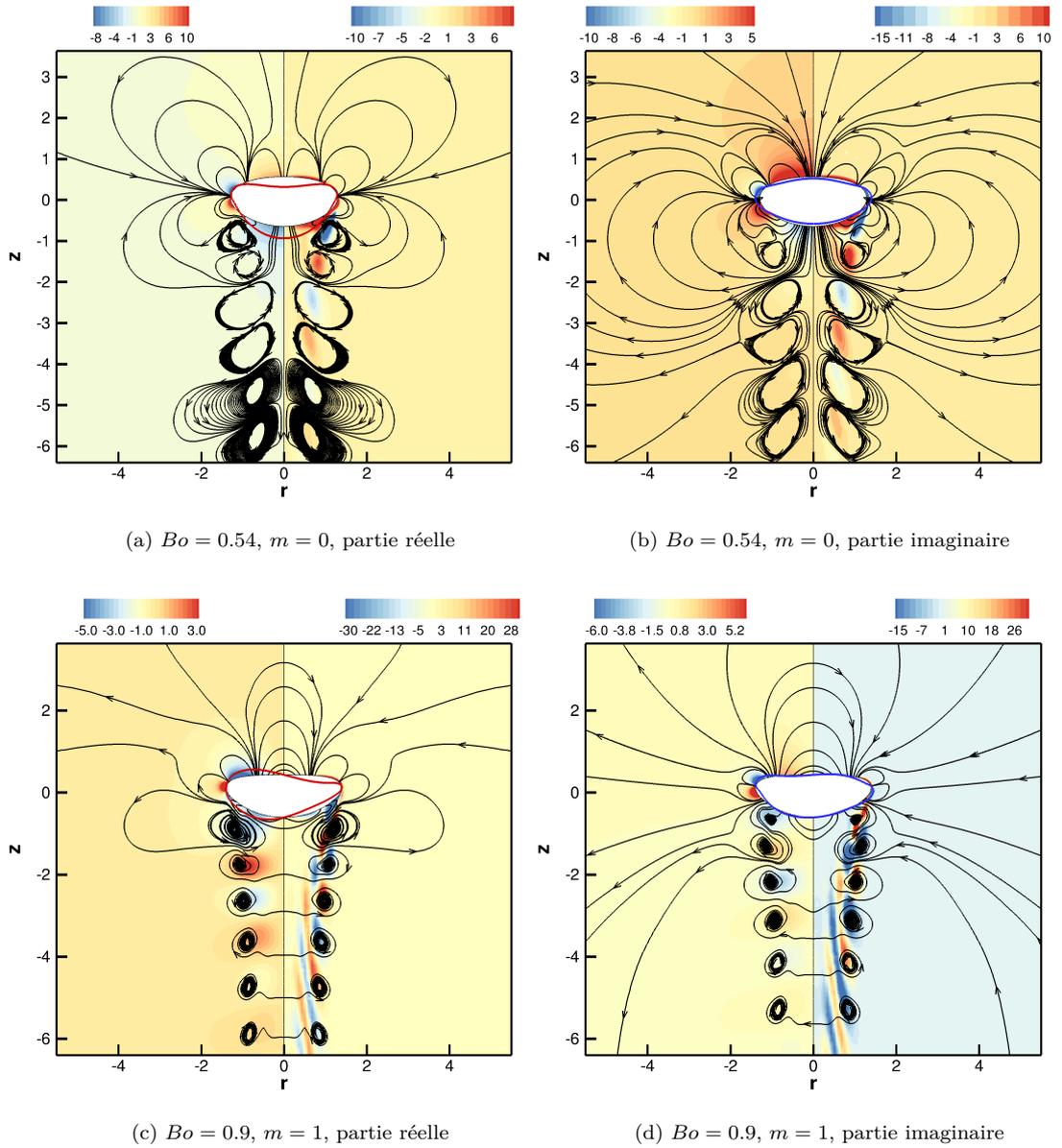
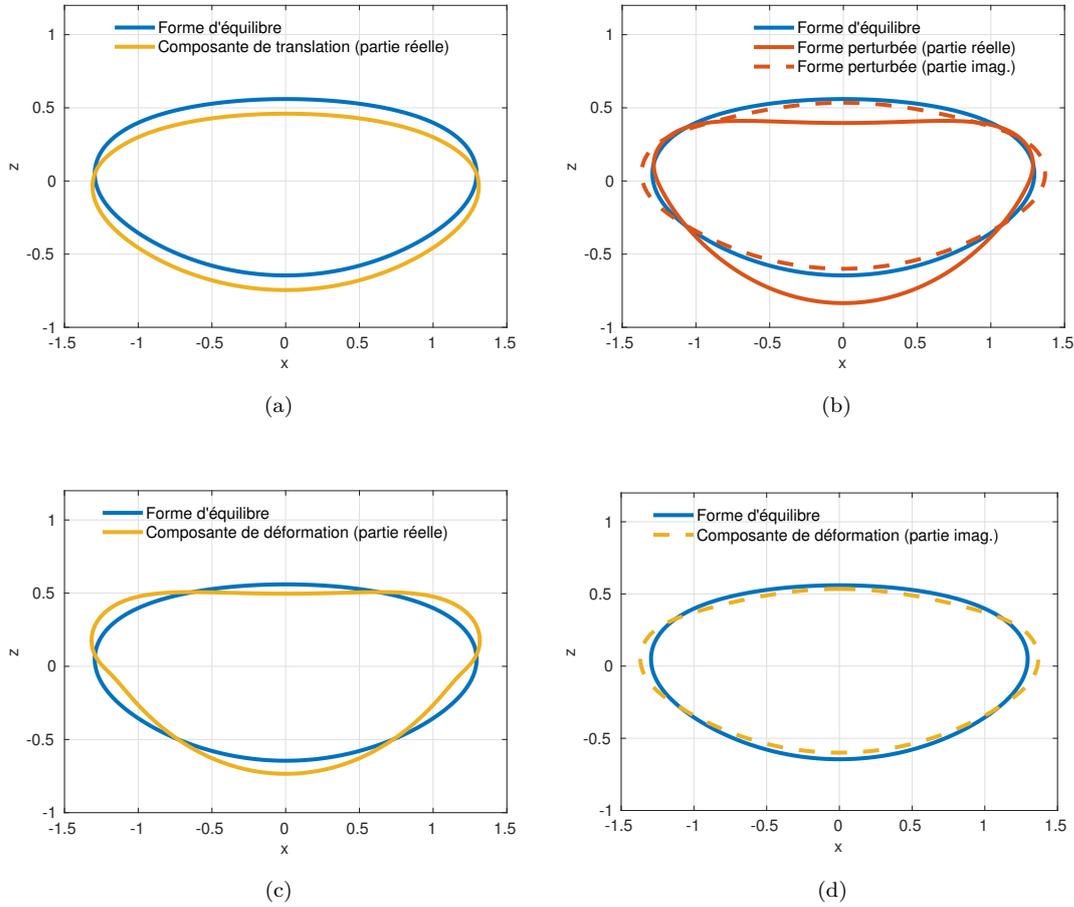


FIGURE 5.18 – Modes instables exhibant un fort couplage avec la déformation de la bulle pour l'eau pure à  $20^{\circ}\text{C}$ . (a,b) mode  $l2m0$ ,  $\lambda = 0.005 + 2.77i$  et (c,d)  $l2m1$ ,  $\lambda = 0.008 + 2.87i$ . La pression est représentée en iso-contours à gauche et la vorticité azimutale à droite.

## 5.3.3 Décomposition de la déformation de l'interface


 FIGURE 5.19 – Coupe verticale de la forme d'équilibre d'une bulle et de sa forme perturbée pour le mode  $l2m0$ .  $Mo = 2.54 \cdot 10^{-11}$ ,  $Bo = 0.54$ ,  $\lambda = 0.005 + 2.77i$ .

À la différence de l'approche de TCHOUFAG et al. [78], où l'hypothèse de forme rigide permet directement d'identifier les composantes de translations et de rotations, notre formalisme fournit un déplacement normal  $\hat{\eta}(s_0)$  qui mélange translation, rotation et déformation. Il est intéressant de séparer toutes ces contributions afin de comparer leurs amplitudes et déphasages. La déformation totale de l'interface peut se décomposer sous la forme :

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_x + \eta_z + \eta_{rot} + \eta_d \\ &= a\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e}_x + b\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e}_z + c(\mathbf{n}_0 \times \mathbf{OM}_0) \cdot \mathbf{e}_y + \eta_d \end{aligned} \quad (5.13)$$

avec respectivement  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les amplitudes complexes de la translation dans la direction horizontale et verticale et de la rotation autour de l'axe de lacet de la bulle. Par construction, les modes  $m = 1$  n'ont pas de translation selon la direction verticale. Les modes  $m = 0$ , n'ont pas de composante de translation horizontale ni de rotation car ces composantes résultent de mouvements non axisymétriques.

Une méthode des moindres carrés permet de trouver les amplitudes complexes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  minimisant le résidu de la relation (5.13) intégrée sur toute la surface de la bulle. Ce résidu constitue la composante de déformation pure de la surface de la bulle privée des mouvements solides. Ensuite, on normalise les modes par  $a$  dans le cas  $|m| = 1$  et par  $b$  dans le cas  $m = 0$ .

Cela assure que la composante de translation est incluse dans la partie réelle du déplacement et est unitaire. Afin de bien représenter les déformations de la surface sur les figures 5.19 et 5.20, les amplitudes des déformations (qui sont arbitraires), ont été normées de telle sorte que leurs maxima soient égaux à  $0.15R$ .

Les figures 5.19 et 5.20 montrent le résultat d'une telle décomposition pour les modes  $l2m0$  et  $l2m1$  dans l'eau pure.

Le mode d'oscillation  $l2m0$  se distingue par une large déformation de la bulle et un faible déplacement de ses points équatoriaux. La figure 5.19b révèle deux cercles nodaux de rayon  $r \approx 1$ . Les extrémités proches de l'équateur de la bulle se déplacent peu et le déplacement est maximal près de l'axe de symétrie. Ce mode présente une translation dans la direction verticale comme le montre la projection 5.19a. Cela traduit une accélération/décélération du centre de gravité de la bulle dans cette direction. La figure 5.19c décrit la déformation de la bulle qui est en phase avec le mouvement de translation. Cette déformation présente trois cercles nodaux parallèles dans des plans horizontaux. Cette déformation, couplée avec la translation, assure un déplacement maximal du centre de gravité avec un déplacement minimal des points proches de l'équateur. En quadrature de phase, la partie imaginaire de la surface oscille à la manière d'un mode propre  $l=2$  assurant une dilatation/contraction de la partie équatoriale de la bulle. En résumé, la surface de la bulle possède une couronne, proche de l'équateur, qui se dilate et se rétracte légèrement alors que ses pôles oscillent en phase entre une position haute et basse. Les instantanés de l'oscillation de ce mode sont présentés en annexe, figures C.1.

Le mode d'oscillation  $l2m1$  diffère du précédent par son nombre d'onde azimutal  $m=1$ . La déformation s'accompagne alors d'un mouvement de rotation. En effet, un bourrelet se déplace dans la direction azimutale comme le montrent les instantanés en annexe C.3. Similairement au mode  $l2m0$ , le barycentre de la bulle se déplace alors que son équateur se déforme peu comme le montre la figure 5.20b. Le déplacement dans le plan horizontal du barycentre de la bulle est visible sur la figure 5.20a. Ce barycentre décrit une trajectoire hélicoïdale. Cependant, la déformation de la bulle permet que le déplacement à l'équateur soit faible (figure 5.20c) car elle est opposée au déplacement causé par la translation à l'équateur. Comme dans le mode  $l2m0$ , la partie réelle de la composante de déformation possède trois cercles nodaux. Cependant la partie imaginaire de la composante de déformation en possède quatre, contre deux, pour le mode  $l2m0$ . Pour un nombre de Bond plus faible et donc une forme d'équilibre plus proche de la sphère, les composantes de déformation des modes  $l2m0$  et  $l2m1$  possèdent respectivement trois cercles nodaux pour la partie réelle et deux pour la partie imaginaire. Lorsque le nombre de Bond augmente et que la bulle est plus déformée, la partie imaginaire de la composante de déformation passe de deux à quatre cercles nodaux comme sur la figure 5.20d. Enfin, ce mode possède aussi une inclinaison non négligeable, dévoilée par la figure 5.20e.

La principale remarque que nous pouvons faire concernant ces deux modes de déformation de surface est qu'ils opèrent à rapport de forme relativement constant, impliquant que  $\chi$  varie peu. Dans le cas  $m=1$ , le barycentre de la bulle se déplace et son équateur est un cercle nodal. La même remarque peut être faite mais de façon plus nuancée pour le mode  $m=0$  étudié, le déplacement à l'équateur étant inférieur de 60% à celui du pôle sud.

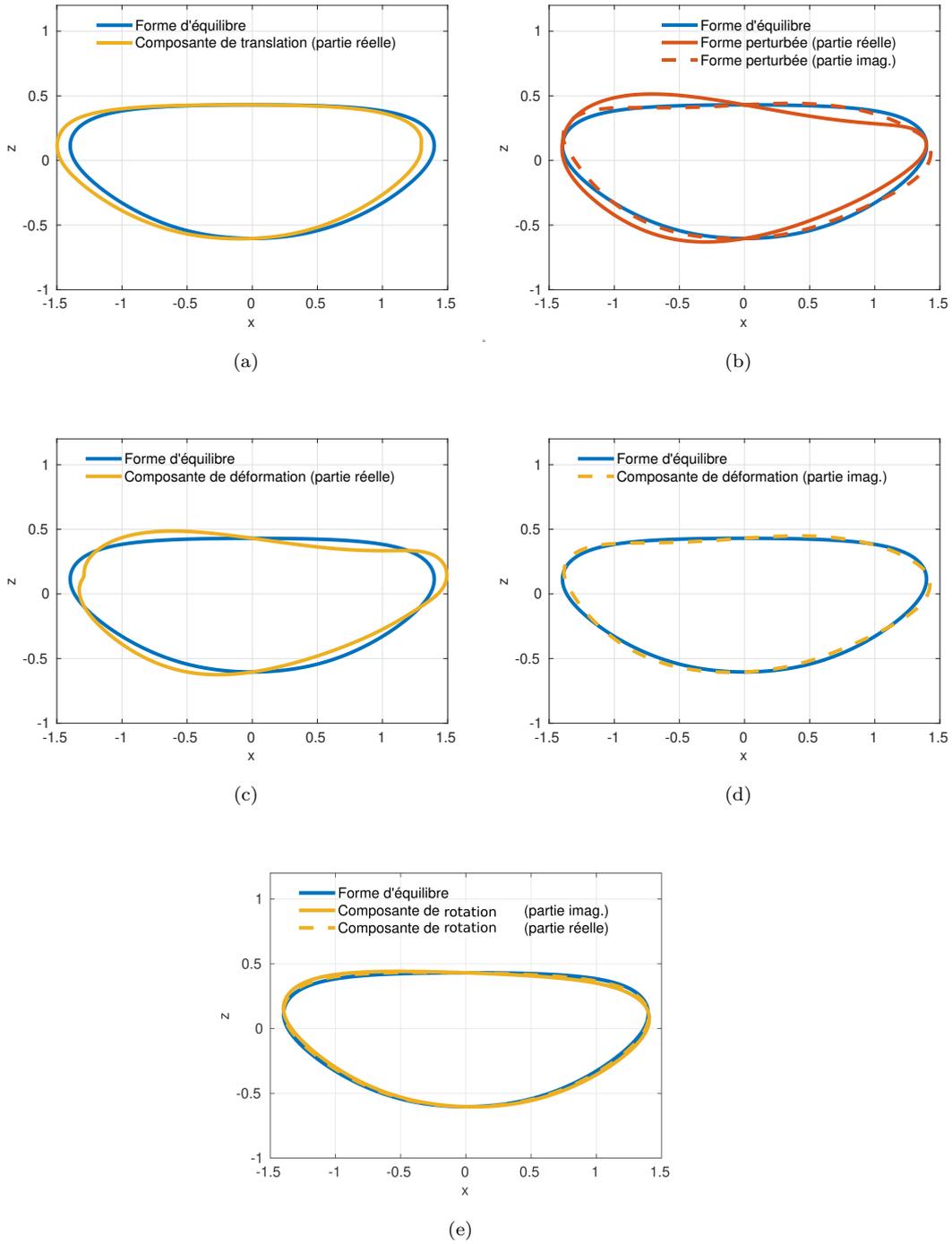


FIGURE 5.20 – Coupe verticale de la forme d'équilibre d'une bulle et de sa forme perturbée pour le mode  $l2m1$ .  $Mo = 2.54 \cdot 10^{-11}$ ,  $Bo = 0.9$ ,  $\lambda = 0.008 + 2.87i$ .

### 5.3.4 Variation de la décomposition de l'interface

Nous pouvons observer les amplitudes des diverses composantes de la décomposition de la déformation de la bulle sous la forme (5.13) en fonction du nombre de Morton afin de distinguer les différents déplacements solides des déformations de la surface. La figure 5.21 révèle l'évolution de ces composantes pour le premier mode instable (*i.e.* pour la courbe neutre de stabilité, figure 5.7). Rappelons que ces modes ont exclusivement un nombre d'onde azimutal  $m=1$ . Ils ont été normés par le déplacement maximum de translation dans le plan horizontal. Ainsi la translation est unitaire et on peut aisément comparer les autres contributions du déplacement de l'interface à cette dernière. Dans tous ces modes, la translation domine largement, suivie d'une rotation en quadrature de phase. Cela est caractéristique d'une instabilité créant une trajectoire hélicoïdale ou en zigzag. La composante de déformation reste faible sur toute la gamme de nombres de Morton étudiée, tant pour la partie réelle qu'imaginaire. Elle croît avec le nombre de Morton mais reste toujours au moins inférieure d'un ordre de grandeur à l'amplitude de la translation. À cause de cette faible, voire très faible, amplitude, on peut se questionner quant à son importance dans le calcul du seuil et le mécanisme d'instabilité. En effet, en se basant sur les observations expérimentales, CANO-LOZANO et al. [15] ont négligé la déformation de la bulle dans leur analyse de stabilité globale. Il a considéré des bulles rigides mais des formes d'équilibre réalistes (calculées avec le code *Gerris*) à la surface desquelles une condition de glissement était appliquée. Cependant, les seuils d'instabilité obtenus sont loin des résultats expérimentaux et des nôtres. Deux hypothèses sont alors possibles : soit la déformation de la bulle joue un important rôle même si son amplitude est de trois ordres inférieure à celle de la translation, soit le champ de base et la forme d'équilibre associée ne sont pas assez convergés. La déformation, même de faible amplitude, accompagne la translation de façon synchrone et son amplitude augmente avec le nombre de Morton. Cela s'explique par la valeur que prend le nombre de Bond (et de Weber) au seuil. Celui-ci croît aussi avec le nombre de Morton, impliquant alors une contribution plus faible des forces capillaires par rapport aux forces inertielles.

La partie réelle de la rotation et la partie imaginaire de la déformation montrent un comportement non régulier sur la figure 5.21. Les modes utilisés sur ce graphe ne correspondent pas exactement au seuil, ils ont un taux d'amplification non nul. Or, la figure 5.22 révèle qu'au niveau du seuil (en jaune), ces deux grandeurs varient beaucoup, expliquant ainsi ces variations. Cette figure montre l'évolution des composantes de la décomposition de la surface avant et après le seuil. La translation domine sur toute la gamme de nombres de Bond avec une rotation en quadrature (jusqu'à  $Bo=0.6$ ). Le changement de nature de la branche *rigide* est notable à  $Bo = 0.63$  où les parties imaginaires s'annulent. Le mode *rigide* stationnaire effectue alors une dérive latérale accompagnée d'une inclinaison non nulle. Tout au long de cette branche, les composantes de déformation sont, comme précédemment, faibles comparées à la translation.

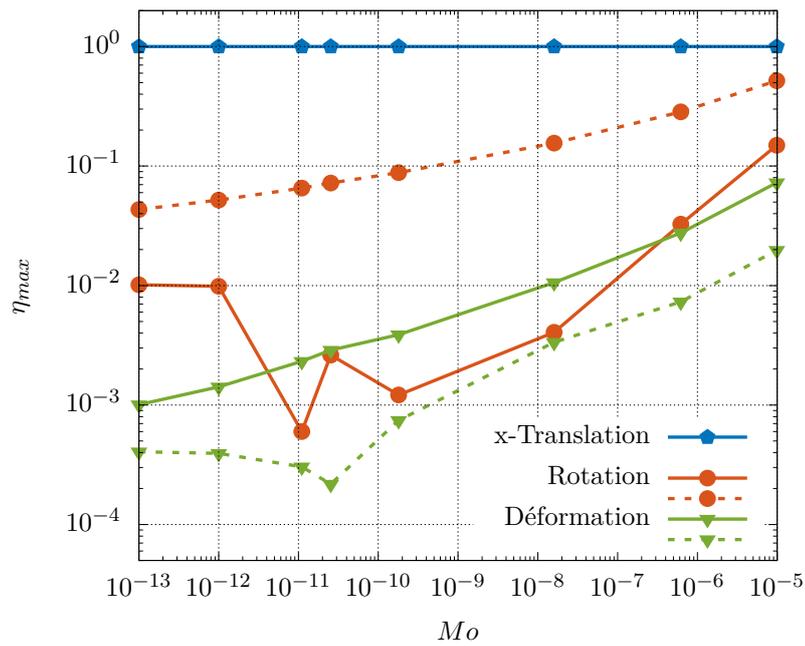


FIGURE 5.21 – Décomposition de la déformation de la surface de la bulle correspondant au premier mode instable pour différents couples liquide-gaz. En trait plein est indiqué le maximum du déplacement normal de l'interface et en trait pointillé la partie imaginaire.

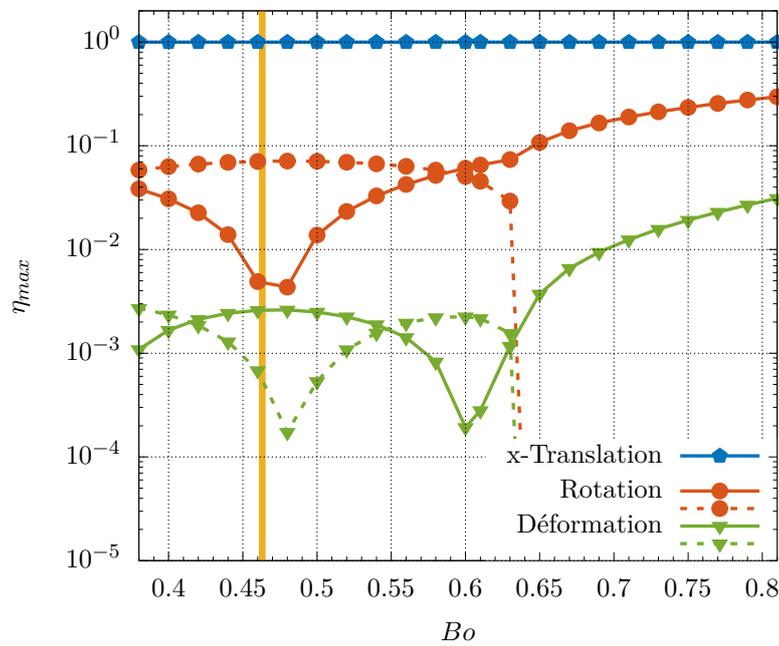


FIGURE 5.22 – Décomposition de la déformation de la surface de la bulle correspondant au premier mode instable pour l'eau pure à 20°C ( $Mo = 2.54 \times 10^{-11}$ ) en fonction du nombre de Bond. En trait plein est indiqué le maximum du déplacement normal de l'interface et en trait pointillé la partie imaginaire.

## 5.4 POUR ALLER PLUS LOIN DANS LA COMPRÉHENSION DES INSTABILITÉS

Dans le but d'évaluer précisément l'origine des instabilités, nous nous sommes intéressés au concept de *wavemaker*, suivant la même démarche que TCHOUFAG [75]. Ce concept est utilisé dans les écoulements ouverts (CHOMAZ [19]), notamment pour caractériser les sillages instables de corps solides (GIANNETTI et LUCHINI [33], MARQUET et al. [51]). Il permet de trouver la zone de l'écoulement la plus sensible à une modification de l'opérateur  $\mathcal{A}$  de l'équation (4.115). Le *wavemaker* peut aussi être décrit comme la zone où l'amplification du mode le plus instable est maximale. Nous utilisons l'opérateur adjoint pour déterminer cette région. Le mode adjoint est la solution du système linéaire :

$$\mathcal{A}^\dagger \hat{\mathbf{q}}_1^\dagger = \lambda^* \mathcal{B}^\dagger \hat{\mathbf{q}}_1^\dagger \quad (5.14)$$

où  $*$  est le conjugué complexe. Contrairement à [33] qui utilisent l'opérateur adjoint physique en intégrant par partie l'équation (4.115). Nous utilisons plus simplement l'opérateur adjoint numérique tel que  $\mathcal{A}^\dagger = (\mathcal{A}^*)^T$  et  $\mathcal{B}^\dagger = (\mathcal{B}^*)^T$  qui permet de définir de la même manière le *wavemaker*.

D'après [33] le *wavemaker* se définit comme la région la plus sensible à un couplage force-*vitesse* de la forme :

$$\hat{\mathbf{f}}_1 = \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 \delta(r - r_0, z - z_0), \quad (5.15)$$

où  $\mathbf{C}$  est une matrice  $3 \times 3$  exprimant ce couplage. Ces auteurs montrent que la variation de valeur propre  $\delta\lambda$  respecte l'inégalité  $|\delta\lambda| \leq \|C\| \|\hat{\mathbf{u}}_1\| \|\hat{\mathbf{u}}_1^\dagger\| (\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_1^\dagger)^{-1}$ . En tirant parti de cette condition, nous pouvons déterminer la région où  $|\delta\lambda|$  est maximal en examinant la grandeur  $\beta = \|\hat{\mathbf{u}}_1\| \|\hat{\mathbf{u}}_1^\dagger\|$ .

TCHOUFAG et al. [76] effectuent une telle analyse pour la première instabilité de sillage d'une bulle ellipsoïdale indéformable fixe. La figure 5.23 montre la sensibilité à une rétroaction de l'écoulement sur lui-même grâce à la grandeur  $\beta$ . On observe que les maxima de la grandeur  $\beta$  sont situés dans la zone de recirculation, indiquant que c'est cette région qui est à l'origine de l'instabilité de sillage.

Nous avons effectué le même calcul pour une bulle déformable en ascension dans un fluide au repos. Notons que plusieurs éléments diffèrent de l'étude précédente : la bulle est libre, elle est déformable et sa forme d'équilibre possède une asymétrie amont/aval. Néanmoins, le *wavemaker* nous donnera une indication sur le mécanisme de l'instabilité observée. Contrairement aux résultats de TCHOUFAG et al. [76], nous n'observons pas de maximum de  $\beta$  à l'aval de la bulle (figure 5.24). Ceci se vérifie qu'un tourbillon soit présent ou non derrière la bulle. Le maximum de la grandeur  $\beta$  est localisé sur l'équateur de la bulle. Cette zone est donc critique pour l'apparition de l'instabilité. En effet, elle correspond à la zone où

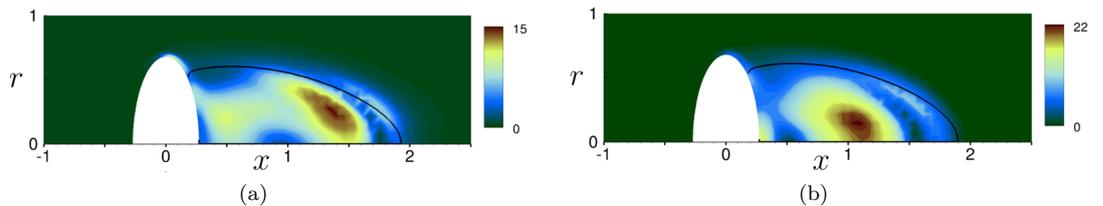


FIGURE 5.23 – Champ  $\beta = \|\hat{\mathbf{u}}_1\| \|\hat{\mathbf{u}}_1^\dagger\|$  pour le premier mode instable à  $\chi = 2.5$ ,  $Re = 215$ , (a) le mode est oscillant et (b) le mode est stationnaire. La courbe noire délimite le tourbillon présent à l'arrière de la bulle. D'après [76].

la courbure est maximale, l'endroit précis où la vorticité est aussi maximale d'après l'équation (5.12). En conséquence, le scénario le plus probable pour l'explication du mécanisme de l'instabilité de trajectoire provient de l'accumulation de vorticité à la surface de la bulle, rejoignant ainsi les conclusions de MAGNAUDET et MOUGIN [50]. La trajectoire hélicoïdale ou en zigzag permet à l'évidence d'évacuer cette vorticité de manière plus efficace qu'un sillage axisymétrique, à cause de la présence de tourbillons longitudinaux. L'hypothèse de la déstabilisation du tourbillon toroïdal comme moteur de l'instabilité de trajectoire semble donc exclue au vu de ces résultats.

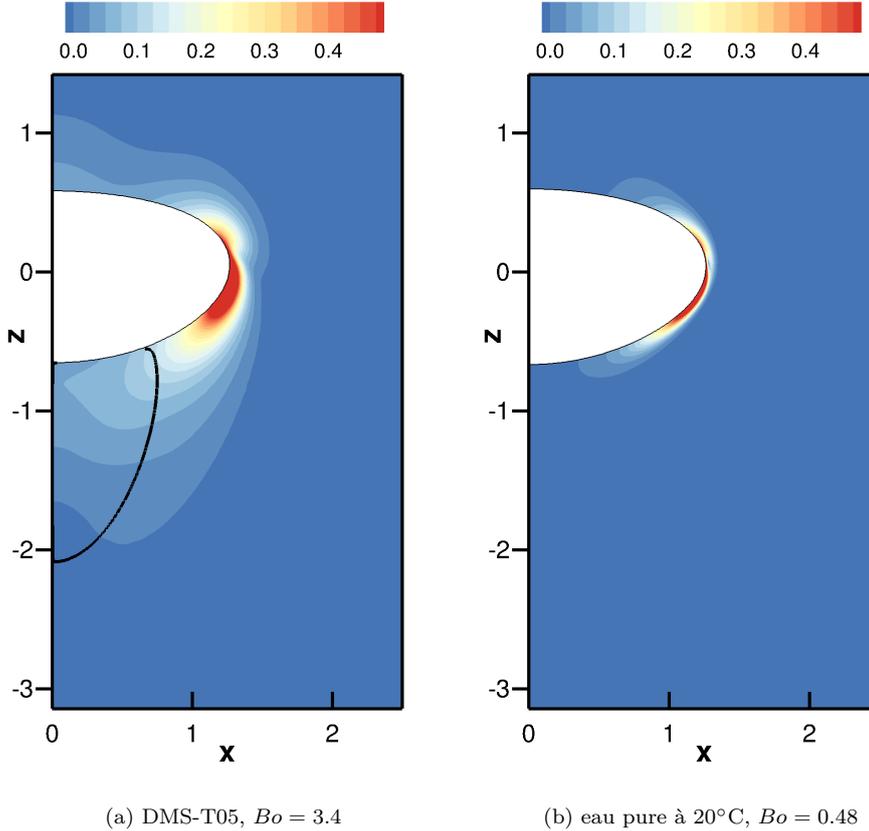


FIGURE 5.24 – Champ  $\beta = \|\hat{\mathbf{u}}_1\| \|\hat{\mathbf{u}}_1^\dagger\|$  pour les modes les plus instables (modes *rigide*)   nombre de Bond donné.

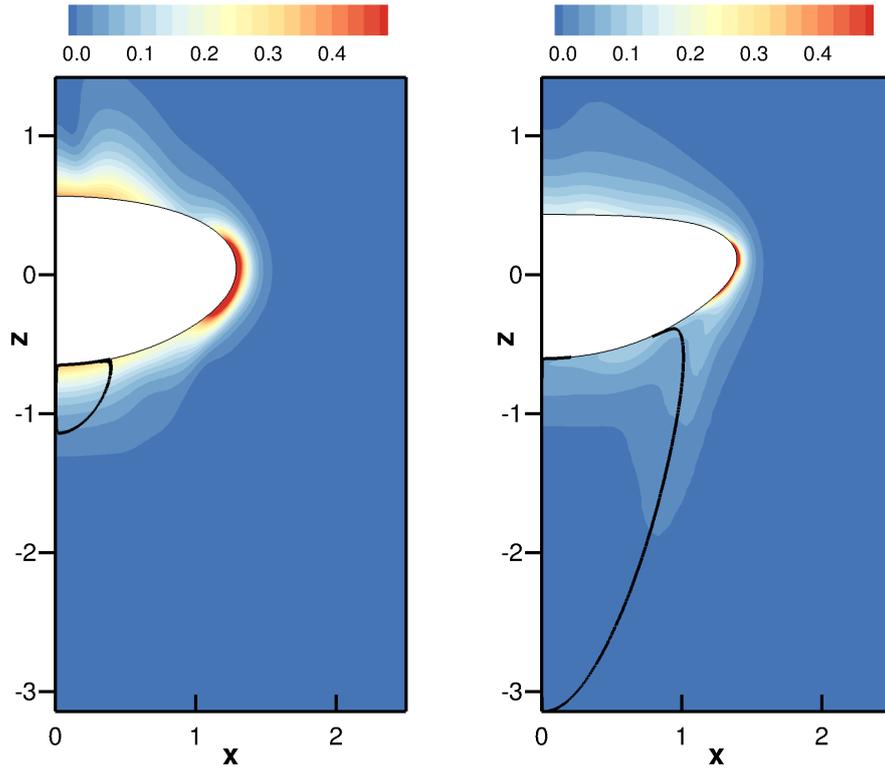
La figure 5.25 montre d'autres distributions de *wavemaker* pour des bulles dans l'eau ultrapure. Au vu de ces résultats, il apparaît aussi que les instabilités de formes ne prennent pas source dans l'excitation du tourbillon toroïdal, le maximum de la grandeur  $\beta$  étant toujours situé dans la région équatoriale de la bulle.

Pour le mode  $l2m0$ , la grandeur  $\beta$  est aussi relativement élevée sur les pôles de la bulle car ce mode d'oscillation de la surface présente de grands déplacements à ces endroits.

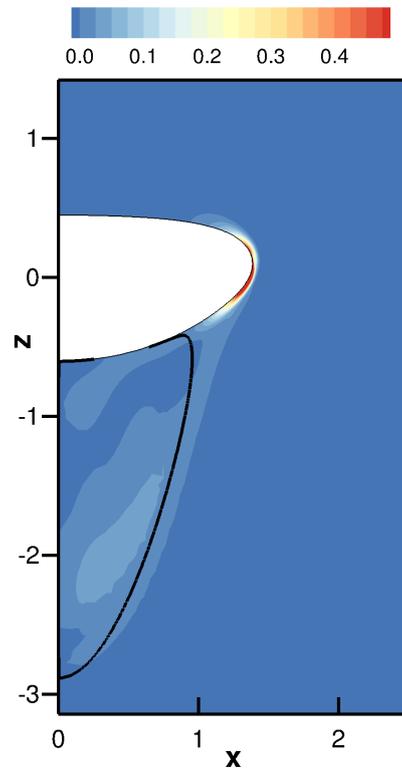
Il en va de même pour le mode  $l2m1$  mais de façon moins importante car le déplacement des pôles est nul (pour  $m = 1$ ). Près de la zone de décollement de l'écoulement, en aval de la bulle, à l'endroit où le cisaillement est fort, la quantité  $\beta$  présente aussi une valeur non négligeable mais bien inférieure à son maximum global.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, le mode *rigide2* présente des similitudes avec le mode *rigide* mais possède une fréquence plus élevée. La figure 5.25c révèle que les maxima de sensibilité à une perturbation de l'écoulement sont situés à l' quateur de la bulle. Néanmoins, on note que cette sensibilité possède un maximum local dans la zone de recirculation. Cela montre que pour ce mode il existe un couplage entre l'instabilité de trajectoire et de sillage. Il en résulte un mode oscillant à plus haute fréquence que le mode

*rigide*, les instabilités de sillage ayant généralement une fréquence plus importante que les instabilités de trajectoire (TCHOUFAG [75]).



(a) Mode  $m0l2$ , eau pure à 20°C,  $Bo = 0.54$       (b) Mode  $m1l2$ , eau pure à 20°C,  $Bo = 0.9$



(c) Mode  $rigide2$ , eau pure à 20°C,  $Bo = 0.85$

FIGURE 5.25 – Champ  $\beta = \|\hat{\mathbf{u}}_1\| \|\hat{\mathbf{u}}_1^\dagger\|$  pour deux modes de forme dans de l'eau pure.

## CONCLUSION

Nous avons mené une étude de stabilité de bulles déformables en ascension dans un fluide au repos sur une gamme de nombre de Morton peu accessible (jusqu'à  $Mo=10^{-13}$ ) car elle implique parfois de hauts nombre de Reynolds. Nous avons montré que notre algorithme permet de calculer avec une grande précision les écoulements stationnaires autour de bulles déformables. Les comparaisons avec diverses données expérimentales sont très satisfaisantes.

Une fois le champ de base obtenu, nous avons conduit une analyse de stabilité linéaire globale autour de cet état d'équilibre. Nous avons ainsi pu déterminer une courbe neutre en très bon accord avec les expériences, et cela même pour des nombres de Morton inférieurs à celui de l'eau pure. Ce bon accord avec les expériences abonde dans le sens d'une bifurcation supercritique vers une solution oscillante à faible fréquence. Nous avons confirmé que la présence d'un tourbillon toroïdal dans le sillage de la bulle n'est pas nécessaire au déclenchement de l'instabilité. Dans tous les cas, le premier mode instable a la même nature et présente une instabilité de trajectoire. Il conduit à une bulle remontant dans le fluide avec une trajectoire hélicoïdale ou en zigzag (la théorie linéaire ne pouvant les différencier). De plus, le mouvement de la bulle est essentiellement constitué d'une translation; la rotation est présente mais elle est plus faible d'environ un ordre de grandeur. La déformation de la bulle, quant à elle, est d'un à trois de grandeurs inférieure à celui de la translation. Les derniers résultats montrent que la sensibilité à une perturbation de l'écoulement est maximale à l'équateur de la bulle : c'est la zone clé de l'instabilité de trajectoire. De plus, le tourbillon à l'arrière de la bulle ne semble pas réactif à des rétroaction du fluide sur lui-même impliquant que ce n'est certainement pas le moteur de l'instabilité.

Pour le cas de l'eau ultra-pure, après avoir été oscillant, le premier mode instable change de nature et devient stationnaire. Le mouvement de la bulle consiste alors en une dérive oblique dans une seule direction. Ce mode étant amplifié, il doit saturer et les non-linéarités doivent faire bifurquer la solution vers un mouvement hélicoïdal ou zigzag, comme le montrent expériences et DNS. Néanmoins, seule une analyse faiblement non linéaire pourrait distinguer les deux configurations. Enfin, nous avons mis en évidence des modes secondaires instables où un fort couplage entre la dynamique de la surface et le sillage est présent. Les oscillations de trajectoire sont alors moins flagrantes. Ces modes peuvent être reliés aux oscillations linéaires de bulles sphériques dans la limite  $Bo=0$ . Puis, en augmentant le nombre de Bond, l'évolution de la forme d'équilibre vient briser la dégénérescence des harmoniques sphériques qui ne sont plus les modes propres de la surface. Ainsi, les branches correspondant à ces modes évoluent différemment suivant les symétries des oscillations de la surface.

## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

## 6.1 RÉSUMÉ DU TRAVAIL

Dans cette thèse, nous avons effectué une analyse de stabilité linéaire globale d'une bulle déformable en ascension. Pour mettre au point l'outil numérique nécessaire, nous sommes passés par plusieurs étapes.

Nous avons tout d'abord étudié une configuration simplifiée : une bulle dans un fluide au repos sans gravité. La forme d'équilibre de la bulle est une sphère. Le problème de Stokes instationnaire avec une surface libre (incluant les forces capillaires mais négligeant la viscosité du gaz) permet de décrire les oscillations linéaires et amorties de la surface de la bulle. Une paramétrisation curviligne de l'interface a été implémentée afin d'être applicable dans toutes les géométries. Les solutions ont été obtenues avec une analyse de stabilité linéaire globale utilisant les éléments finis et le logiciel de calcul *FreeFem++*. La formulation axisymétrique du problème pose un problème vis-à-vis de la condition dynamique sur l'axe de symétrie. De ce fait, les inconnues surfaciques (déplacement de l'interface et perturbations de la courbure de la bulle) ont été décomposé en séries de Fourier (de l'abscisse curviligne de la surface déformable). Ces séries de Fourier ont été choisies pour respecter les bonnes conditions aux limites et assurer le bon comportement de la courbure et du déplacement de l'interface aux pôles. Nous avons montré que cette procédure permet d'obtenir des résultats précis. Notre analyse de stabilité fournit les oscillations linéaires de bulles que nous avons comparées avec la théorie. Les résultats coïncident autant pour les valeurs propres (fréquences et taux d'amortissement) que pour les modes propres associés (déformations de la surface de la bulle). La comparaison avec la théorie a aussi été effectuée dans le cas des oscillations linéaire d'une goutte sphérique sans gravité plongée dans un gaz de viscosité et masse volumique négligeables.

Ainsi, ce chapitre a permis de s'assurer que la dynamique de l'interface est bien captée par notre analyse de stabilité dans une configuration simplifiée.

Ensuite, nous avons la mise en place d'un formalisme *ALE* pour un problème simplifié : l'équation de Poisson. Nous avons déformé un domaine de référence de façon arbitraire. Connaissant cette déformation, nous avons cherché à trouver la solution de l'équation de Poisson sur le domaine déformé en n'utilisant que le domaine de référence. Nous avons commencé par écrire la formulation variationnelle du problème de Poisson sur le domaine déformé. En effectuant un changement de variable, nous avons été en mesure d'exprimer ce problème sur le domaine de référence.

Le changement de variable a été pris en compte de façon linéaire. En effet, étant donné que la déformation est supposée faible tout au long de notre travail et que le changement de variable est par la suite intégré à une méthode de Newton et à une analyse de stabilité globale, seule la partie linéaire de ce changement de variable a été retenue. Les opérateurs de dérivation spatiale ont alors été linéarisés. Puis la formulation variationnelle entière du problème de Poisson sur le domaine déformé a été linéarisée et rapportée au domaine de référence. Le problème peut alors se décomposer en deux, un problème à l'ordre zéro où les déformations sont négligées, et un problème à l'ordre un qui donne les corrections à apporter à la solution d'ordre zéro afin de prendre en compte les déformations du domaine. Cette méthode a été testée et montre une convergence d'ordre deux (vis-à-vis de l'amplitude des déformations), assurant que tous les termes du premier ordre ont bien été pris en compte. La linéarisation du changement de domaine est ainsi vérifiée.

Ce principe a ensuite été appliqué aux équations de Navier-Stokes. Le couplage de la déformation de la bulle avec l'écoulement a été intégré via la déformation du domaine mentionnée précédemment et testée pour l'équation de Poisson. La déformation de l'interface a été étendue arbitrairement au domaine fluide de façon continue. Le couplage entre dynamique et cinématique de l'interface a été pris en compte de façon similaire au cas de la bulle sphérique sans écoulement ni gravité (auquel les termes manquants ont été ajoutés). Nous avons ainsi obtenu une formulation linéarisée des équations de Navier-Stokes autour d'un domaine de référence. Cette formulation permet de développer une méthode de Newton donnant accès aux écoulements stationnaires autour d'une bulle et sa forme d'équilibre. Elle permet aussi de mener une analyse de stabilité linéaire globale de ces écoulements. La méthode de Newton a été validée grâce à la configuration d'une bulle dans un réservoir en rotation en l'absence de gravité. Nous avons effectué une comparaison avec l'élongation théorique de la bulle qui a montré un excellent accord. Enfin, nous avons effectué un dernier test en considérant une bulle piégée dans un écoulement élongationnel. Nous nous sommes assurés que l'analyse de stabilité linéaire est bien indépendante du choix de l'extension de la déformation de l'interface dans le domaine, validant ainsi le code de stabilité et le formalisme *ALE*.

Le développement de ces méthodes numériques nous a permis d'étudier des bulles en ascension dans de nombreux fluides sans tensioactifs, en négligeant viscosité et masse volumique du gaz. Les cas stationnaires montrent tout d'abord un bon accord avec différentes données expérimentales. Nous avons ensuite mené, sur huit décades du nombre de Morton, une analyse de stabilité linéaire globale et avons obtenu la courbe neutre du déclenchement de l'instabilité de trajectoire dans le plan  $(Ga, Bo)$ . Nous trouvons un seuil très proche de ceux observés expérimentalement, en meilleur accord que les études numériques existantes, notamment pour les fluides correspondant à de très faibles nombres de Morton. Nous pensons que cette amélioration s'explique par une meilleure capture de la couche limite visqueuse par notre méthode. Nos calculs sont rapides en comparaison des simulations numériques directes et permettent l'utilisation de maillages plus fins. L'analyse de stabilité a même été étendue jusqu'à  $Mo = 10^{-13}$ , gamme qui correspond aux métaux liquides (grande masse volumique et forte tension superficielle pour une viscosité comparable à celle de l'eau). Près du seuil, tous les modes sont oscillants à basse ou très basse fréquence, en accord avec les simulations numériques et les expériences de laboratoire. Nos résultats confirment qu'une zone de recirculation n'est pas nécessaire à l'apparition de l'instabilité de trajectoire. Au seuil d'instabilité, nous observons que le rapport de forme varie peu et reste voisin de  $\chi \approx 2$  sur six décades du nombre de Morton ( $Mo = 10^{-12} - 10^{-6}$ ). Une décomposition du déplacement de l'interface pour le premier mode instable montre que la translation latérale domine et une rotation plus faible est présente en quadrature de phase. Nous avons ensuite analysé en détail le cas de bulles en ascension dans deux fluides différents : l'eau ultra-pure à 20°C et une huile de silicone environ cinq fois plus visqueuse que l'eau. Ces cas correspondent à une trajectoire en zigzag ou en hélice de la bulle (la théorie linéaire ne pouvant les distinguer). Dans le cas de l'eau, cette branche change de nature et devient stationnaire lorsque le nombre de Bond dépasse un seuil supérieur à celui de la stabilité marginale. Ce nouveau mode est stationnaire et oblique. Il n'est jamais observé expérimentalement mais il peut être identifié dans des simulations numériques. Le deuxième mode le plus instable est toujours le mode de forme axisymétrique ayant le plus petit nombre d'onde principal :  $l2m0$ . Pour ce mode, le barycentre de la bulle accélère et décélère périodiquement. Les bulles n'étant plus sphériques, nous identifions plusieurs modes de formes pour le même nombre d'onde principal, comme la théorie potentielle le prédit. Ils se différencient par leur orientation. Pour les modes de forme non-axisymétriques  $l2m1$ , le barycentre de la bulle effectue des translations mais la position de l'équateur de la bulle varie peu.

Enfin l'étude de sensibilité menée à l'aide du concept de *wavemaker* montre que la distribution de ce dernier a une valeur maximale à l'équateur de la bulle, dans la zone où la courbure et la production de vorticité sont maximales. Les modes de formes et de sillages présentent aussi cette particularité. Nous concluons que les instabilités de trajectoire et de

sillage de bulles en ascension, ont lieu afin d'évacuer de manière plus efficace la vorticit e produite à l' quateur. Ce mécanisme déclenche toutes les instabilités de bulles en ascension.

## 6.2 PERSPECTIVES

Concernant les bulles en ascension, une première question se pose. Le désaccord entre notre étude et celle de CANO-LOZANO et al. [15], qui ont mené une analyse de stabilité globale sur des bulles indéformables mais de formes réalistes en ascension, n'a pas trouvé d'explication. Les deux études sont proches : le travail présenté ici prend en compte les déformations alors qu'elles sont ignorées dans [15]. Or, nous avons montré que ces déformations de la surface sont minimales pour les modes *rigides*. Pour savoir si effectivement ces faibles déformations sont négligeables ou non, il serait intéressant d'effectuer une étude de stabilité globale avec les champs de base générés par notre approche mais en ignorant les déformations. Ainsi, on pourrait réellement quantifier l'importance des effets de la déformation de la bulle dans le déclenchement et les caractéristiques des premières instabilités.

Les études récentes de stabilité des ponts liquides (CHIREUX et al. [18]) et des écoulements tournants à surface libre (MOUGEL et al. [56]) ont été menées dans le cadre de la théorie des écoulements potentiels. Les outils développés dans cette thèse peuvent très bien appréhender ces problèmes en considérant la viscosité du fluide, donnant accès aux taux d'amplification des instabilités dans des conditions bien plus réalistes.

Des méthodes permettant d'étudier les non-linéarités d'un écoulement ont été développées dans notre équipe ; FABRE et al. [30] en ont fait une revue récente. Il serait intéressant d'appliquer le concept d'*harmonic balance* qui cherche à décomposer un écoulement non-linéaire et périodique en une somme d'harmoniques. Contrairement aux analyses faiblement non-linéaires, l'*harmonic balance* reste valide même en s'écartant du seuil d'instabilité de l'écoulement prédit par la théorie linéaire. Cette approche permettrait, par exemple dans le cas de bulles en ascension, de différencier les trajectoires en zigzag et en hélice et de caractériser l'apparition de trajectoires non-rectilignes couplées avec des oscillations de forme.

Un aspect très tentant   développer serait la prise en compte de l'écoulement du fluide interne à la bulle. Cela étendrait notre approche aux gouttes immergées dans un autre fluide. Le bloc nécessaire à la description du mouvement fluide au sein de la bulle ou goutte est identique à celui du fluide extérieur (aux conditions aux limites près). Une contribution du fluide interne viendrait s'ajouter dans la condition dynamique. Cette dernière poss derait une nouvelle composante, dans la direction tangentielle. Le déplacement de l'interface ne serait alors plus uniquement normal et la perturbation de la courbure comporterait une nouvelle contribution : le déplacement tangentiel causé par le cisaillement entre les deux fluides.

Une fois les contraintes tangentielles prises en compte, il est aussi possible de modifier la rhéologie de l'interface. Ainsi le déplacement de la surface déformable pourrait être couplé à une autre relation que l'équation de Young-Laplace : on pense en priorité à l'équation d'Euler-Bernoulli pour les poutres ou à une loi rhéologique pour les membranes. Ainsi les instabilités du drapeau dans un fluide visqueux et même les instabilités de flambement des capsules fluides immergées dans un autre fluide pourraient être étudiées au travers du même outil.



## ANNEXES



Dans cette annexe, on exprime les courbures, les vecteurs normaux et tangents pour une géométrie déformée. Ainsi, connaissant ces grandeurs pour une géométrie de base, on peut déterminer comment une perturbation normale de celle-ci vient les affecter.

### A.1 CAS AXISYMÉTRIQUE

Un repère cylindrique et un repère de Frenet sont définis sur la figure A.1 et permettent d'écrire la position de l'interface perturbée (développée à l'ordre 1) sous la forme :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OM}_0 + \epsilon \eta \mathbf{n}_0, \quad (\text{A.1})$$

où  $\epsilon \ll \|\mathbf{OM}\|$ . Une nouvelle position de l'interface implique de nouveaux vecteurs normal et tangent, aussi développés au premier ordre,

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \epsilon \mathbf{n}_1 + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.2a})$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \epsilon \mathbf{t}_1 + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.2b})$$

On rappelle les relations de Frenet,

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \kappa^{(a)} \mathbf{n} \quad (\text{A.3a})$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = -\kappa^{(a)} \mathbf{t} \quad (\text{A.3b})$$

où  $s_0$  désigne l'abscisse curviligne le long de  $\Gamma_{b_0}$  et  $s$  celle le long de  $\Gamma_b$ .

**Remarque 1 :**  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  et  $\kappa$  sont des fonctions de  $s$  alors que  $\mathbf{t}_0$ ,  $\mathbf{n}_0$ ,  $\kappa_0$ ,  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{n}_1$  et  $\kappa_1$  sont des fonctions de  $s_0$ . En écrivant (A.1, A.2), on exprime des grandeurs le long de  $\Gamma_b$  sur  $\Gamma_{b_0}$ , i.e. on cherche à exprimer les courbures et vecteurs tangent et normal de la géométrie perturbée sur la géométrie de référence.

**Remarque 2 :** Dans le cas axisymétrique, le déplacement de l'interface ne dépend pas de l'angle azimutal.

**Notation :** La dérivée  $\frac{\partial}{\partial s_0}$  sera parfois notée  $(.)'$  pour alléger certaines écritures.

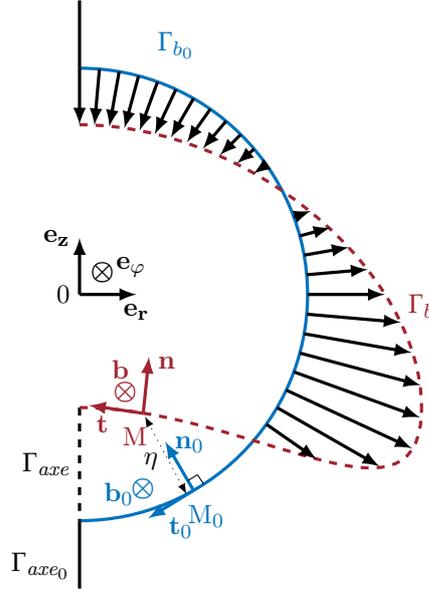


FIGURE A.1 – Superposition des deux contours  $\Gamma_{b_0}$  et  $\Gamma_b$  matérialisant respectivement les géométries de référence et perturbée d’une surface axisymétrique (dans notre cas, la surface d’une bulle). Le repère de Frenet, attaché à l’interface, est modifié par la déformation de cette dernière.

CALCUL DE  $\mathbf{t}_1$  : Il faut en premier lieu calculer la norme suivante en utilisant les relations de Frenet (A.3) et des développements limités à l’ordre 1,

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial s_0} \right\| &= \left\| \frac{\partial \mathbf{OM}_0}{\partial s_0} + \epsilon \eta \frac{\partial \mathbf{n}_0}{\partial s_0} + \epsilon \mathbf{n}_0 \frac{\partial \eta}{\partial s_0} \right\| \\
 &= \left\| \mathbf{t}_0 - \epsilon \eta \kappa_0^{(a)} \mathbf{t}_0 + \epsilon \eta' \mathbf{n}_0 \right\| \\
 &= \left\| \mathbf{t}_0 \left( 1 - \epsilon \eta \kappa_0^{(a)} \right) + \epsilon \eta' \mathbf{n}_0 \right\| \\
 &= \sqrt{\left( 1 - \epsilon \eta \kappa_0^{(a)} \right)^2 + \epsilon^2 \eta'^2} \\
 &= \sqrt{1 - 2\epsilon \eta \kappa_0^{(a)} + O(\epsilon^2)} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} 2\epsilon \eta \kappa_0^{(a)} + O(\epsilon^2) \\
 &= 1 - \epsilon \eta \kappa_0^{(a)} + O(\epsilon^2)
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

qui sera injectée ensuite dans le calcul du vecteur tangent,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t} &= \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial s} \\
 &= \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial s_0} \frac{\partial s_0}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial s_0} \left( \frac{\partial s}{\partial s_0} \right)^{-1} = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial s_0} \left\| \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial s_0} \right\|^{-1} \\
 &= \left( \mathbf{t}_0 (1 - \epsilon \eta \kappa_0^{(a)}) + \epsilon \eta' \mathbf{n}_0 \right) \left( 1 - \epsilon \eta \kappa_0^{(a)} + O(\epsilon^2) \right)^{-1} \\
 &= \mathbf{t}_0 + \frac{\epsilon \eta'}{1 - \epsilon \eta \kappa_0^{(a)}} \mathbf{n}_0 + O(\epsilon^2) \\
 &= \mathbf{t}_0 + \epsilon \eta' \left( 1 + \epsilon \eta \kappa_0^{(a)} \right) \mathbf{n}_0 + O(\epsilon^2) \\
 &= \mathbf{t}_0 + \epsilon \eta' \mathbf{n}_0 + O(\epsilon^2)
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

D’où,

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \epsilon \eta' \mathbf{n}_0 + O(\epsilon^2) \qquad \mathbf{t}_1 = \eta' \mathbf{n}_0 \qquad (\text{A.6})$$

CALCUL DE  $\mathbf{n}_1$  : Plus simplement, la perturbation de la normale sera définie grâce aux conditions d'orthogonalité des vecteurs unitaires de la base de Frenet.

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \epsilon \mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (\text{A.7})$$

dans la base de Frenet  $(M, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ . L'orthogonalité des vecteurs s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} &= 0 \\ \mathbf{t} \times \mathbf{n} &= \mathbf{b} \end{aligned} \qquad (\text{A.8})$$

Un développement à l'ordre 1 de ces deux équations donne,

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}_0 + \epsilon \mathbf{n}_1) \cdot (\mathbf{t}_0 + \epsilon \mathbf{t}_1) &= O(\epsilon^2) \\ \begin{pmatrix} a\epsilon \\ 1 + b\epsilon \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \eta' \\ 0 \end{pmatrix} &= O(\epsilon^2) \\ a\epsilon + \epsilon \eta' &= O(\epsilon^2) \\ a &= -\eta' + O(\epsilon^2) \end{aligned} \qquad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \times \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 + O(\epsilon^2) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \eta' \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\epsilon \eta' \\ 1 + b\epsilon \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 + O(\epsilon^2) \end{pmatrix} \\ 1 + b\epsilon &= 1 + O(\epsilon^2) \\ \text{D'où,} \quad b &= 0 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'expression du vecteur normal développé à l'ordre 1 pour une déformation de l'interface de faible amplitude,

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 - \epsilon \eta' \mathbf{t}_0 + O(\epsilon^2), \quad \mathbf{n}_1 = -\eta' \mathbf{t}_0 \qquad (\text{A.10})$$

De même que les vecteurs unitaires, les courbures  $\kappa^{(a)}$  et  $\kappa^{(b)}$  (respectivement dans les plans  $(O, \mathbf{t}, \mathbf{n})$  et  $(M_{axe}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ ,  $M_{axe}$  étant l'intersection de la droite de direction  $\mathbf{n}$  avec l'axe de symétrie de révolution ( $Oz$ )) vont faire l'objet d'un développement au premier ordre vis-à-vis de l'amplitude de la déformation. Ce sont les courbures dans les deux directions principales.

CALCUL DE LA COURBURE  $\kappa_1^{(a)}$  :

$$\kappa^{(a)} = \kappa_0^{(a)} + \epsilon \kappa_1^{(a)} \quad (\text{A.11a})$$

$$\kappa^{(b)} = \kappa_0^{(b)} + \epsilon \kappa_1^{(b)} \quad (\text{A.11b})$$

Les relations de Frenet (A.3) permettent d'obtenir la première contribution à la courbure moyenne,

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} \cdot \mathbf{n} = \kappa^{(a)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \kappa^{(a)} \quad (\text{A.12})$$

En utilisant les relations (A.3,A.4,A.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} &= \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s_0} \frac{\partial s_0}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s_0} \left\| \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial s_0} \right\|^{-1} \\ &= \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s_0} \left( 1 + \epsilon \eta \kappa_0^{(a)} + O(\epsilon^2) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Or, avec (A.6),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s_0} &= \frac{\partial \mathbf{t}_0}{\partial s_0} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial s_0} \\ &= \kappa_0^{(a)} \mathbf{n}_0 + \epsilon \frac{\partial(\eta' \mathbf{n}_0)}{\partial s_0} \\ &= \kappa_0^{(a)} \mathbf{n}_0 + \epsilon \left( \eta' \frac{\partial \mathbf{n}_0}{\partial s_0} + \frac{\partial \eta'}{\partial s_0} \mathbf{n}_0 \right) \\ &= \left( \kappa_0^{(a)} + \epsilon \eta'' \right) \mathbf{n}_0 - \epsilon \eta' \kappa_0^{(a)} \mathbf{t}_0 + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

En combinant la dernière relation avec (A.10),

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s_0} \cdot \mathbf{n} = \left( \left( \kappa_0^{(a)} + \epsilon \eta'' \right) \mathbf{n}_0 - \epsilon \eta' \kappa_0^{(a)} \mathbf{t}_0 + O(\epsilon^2) \right) \cdot \left( \mathbf{n}_0 - \epsilon \eta' \mathbf{t}_0 \right) \quad (\text{A.15a})$$

$$= \kappa_0^{(a)} + \epsilon \eta'' + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.15b})$$

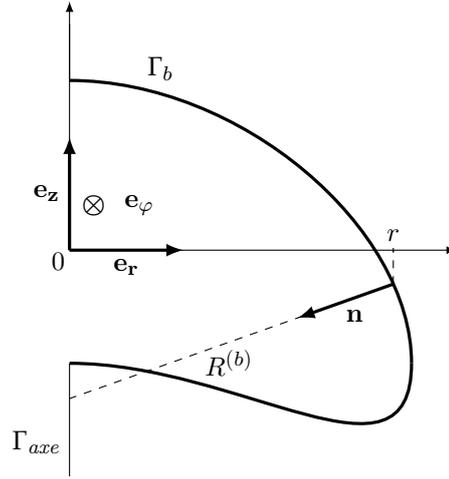
d'où la courbure dans la première direction principale,

$$\begin{aligned} \kappa^{(a)} &= \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s_0} \cdot \mathbf{n} \frac{\partial s_0}{\partial s} \\ &= \left( \kappa_0^{(a)} + \epsilon \eta'' + O(\epsilon^2) \right) \left( 1 + \epsilon \eta \kappa_0^{(a)} + O(\epsilon^2) \right) \\ &= \kappa_0^{(a)} + \epsilon \left( \eta'' + \eta \kappa_0^{(a)2} \right) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\kappa^{(a)} = \kappa_0^{(a)} + \epsilon \left( \eta'' + \eta \kappa_0^{(a)2} \right) + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.17})$$

$$\kappa_1^{(a)} = \eta'' + \eta \kappa_0^{(a)2} \quad (\text{A.18})$$

CALCUL DE LA COURBURE  $\kappa_1^{(b)}$  : La courbure dans la seconde direction est plus simple à calculer. Soit  $R^{(b)}$  le rayon de courbure dans le plan  $(M_{axe}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ . La distance à l'axe de symétrie est notée :


 FIGURE A.2 – Schéma des notations utilisées pour le calcul de la courbure  $\kappa^{(b)}$ .

$$\begin{aligned} r &= \mathbf{OM} \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{OM}_0 \cdot \mathbf{e}_r + \epsilon \eta \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e}_r \\ r &= r_0 + \epsilon \eta \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

La projection du rayon de courbure sur la direction de la normale implique

$$\begin{aligned} R^{(b)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r &= -r \\ R^{(b)} &= -\frac{r}{n_r} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} \kappa^{(b)} &= \frac{1}{R^{(b)}} = -\frac{n_r}{r} \\ &= -\frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e}_r}{r_0 + \epsilon \eta \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e}_r} - \frac{\epsilon \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_r}{r_0 + \epsilon \eta \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e}_r} + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{1}{r_0} \left[ -\frac{n_{0r}}{1 + \frac{\epsilon \eta n_{0r}}{r_0}} + \frac{\epsilon \eta' t_{0r}}{1 + \frac{\epsilon \eta n_{0r}}{r_0}} \right] + O(\epsilon^2) \\ &= -\frac{1}{r_0} n_{0r} \left( 1 - \frac{\epsilon \eta n_{0r}}{r_0} \right) + \frac{\epsilon}{r_0} \eta' t_{0r} \left( 1 - \epsilon \eta \frac{n_{0r}}{r_0} \right) + O(\epsilon^2) \\ &= -\frac{n_{0r}}{r_0} + \epsilon \eta \left( \frac{n_{0r}}{r_0} \right)^2 + \epsilon \eta' \frac{t_{0r}}{r_0} + O(\epsilon^2) \\ &= \kappa_0^{(b)} + \epsilon \left( \eta' \frac{t_{0r}}{r_0} + \eta \kappa_0^{(b)2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

D'où,

$$\kappa^{(b)} = \kappa_0^{(b)} + \epsilon \left( \eta' \frac{t_0 \cdot \mathbf{e}_r}{r_0} + \eta \kappa_0^{(b)2} \right) + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.22})$$

et

$$\kappa_1^{(b)} = \eta' \frac{t_{0r}}{r_0} + \eta \kappa_0^{(b)2} \quad (\text{A.23})$$

SYNTHÈSE SUR LE CALCUL DE LA COURBURE PERTURBÉE : Il est maintenant possible d'écrire la courbure moyenne en fonction de la perturbation de l'interface  $\eta$  sous la forme :

$$\kappa_1 = \kappa_1^{(a)} + \kappa_1^{(b)} \quad (\text{A.24})$$

$$\kappa_1 = \eta'' + \eta' \frac{t_{0r}}{r_0} + \eta \left( \kappa_0^{(a)2} + \kappa_0^{(b)2} \right) \quad (\text{A.25})$$

Or, on remarque que

$$\begin{aligned} \mathbf{OM}_0 &= r_0 \mathbf{e}_r + z_0 \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial \mathbf{OM}_0}{\partial s_0} &= \frac{\partial r_0 \mathbf{e}_r}{\partial s_0} + \frac{\partial z_0 \mathbf{e}_z}{\partial s_0} = \mathbf{t}_0 \\ &= \frac{\partial r_0}{\partial s_0} \mathbf{e}_r + \frac{\partial z_0}{\partial s_0} \mathbf{e}_z \\ &= \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \\ &\Rightarrow \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{e}_r = \frac{\partial r_0}{\partial s_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\partial z_0}{\partial s_0} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

D'où,

$$\kappa_1 = \eta'' + \eta' \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial s_0} + \eta \left( \kappa_0^{(a)2} + \kappa_0^{(b)2} \right)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial s_0} \left( r_0 \frac{\partial \eta}{\partial s_0} \right) + \eta \left( \kappa_0^{(a)2} + \kappa_0^{(b)2} \right) \quad (\text{A.27})$$

$$\kappa = \kappa_0 + \epsilon \left[ \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial s_0} \left( r_0 \frac{\partial \eta}{\partial s_0} \right) + \eta \left( \kappa_0^{(a)2} + \kappa_0^{(b)2} \right) \right] + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.28})$$

la courbure moyenne d'une surface déformée par un déplacement normal à celle-ci dans le cas axisymétrique.

## A.2 CAS GÉNÉRAL

Dans le cas général, il n'y a généralement pas de symétrie de révolution d'axe ( $Oz$ ). La déformation peut être décomposée sous la forme suivante :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OM}_0 + \epsilon \eta e^{im\varphi} \mathbf{n}_0 \quad (\text{A.29})$$

où  $\epsilon \ll \|\mathbf{OM}\|$ . Ici, la dépendance du déplacement interfacial avec l'angle azimutal est mise en évidence. Les perturbations de vecteur normal et de la courbure moyenne ont été calculées par CHIREUX et al. [18] :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \epsilon \eta' \mathbf{n}_0 + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.30})$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \epsilon \left( -\eta' \mathbf{t}_0 - \eta \frac{m}{r_0} \mathbf{e}_\varphi \right) + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.31})$$

$$\kappa = \kappa_0 + \epsilon \left[ \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial s_0} \left( r_0 \frac{\partial \eta}{\partial s_0} \right) + \eta \left( \kappa_0^{(a)2} + \kappa_0^{(b)2} - \frac{m^2}{r_0^2} \right) \right] + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.32})$$

### A.3 CALCUL DES VECTEURS UNITAIRES ET COURBURES À L'ORDRE 0

Les normales et courbures de la surface de référence sont calculées grâce aux relations classiques dans un repère cartésien. En considérant que l'interface paramétrée par son abscisse curviligne  $s_0$  est axisymétrique :

$$\mathbf{t}_0 = \frac{1}{\sqrt{r_0'^2 + z_0'^2}} \begin{pmatrix} r_0' \\ 0 \\ z_0' \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z} \quad \mathbf{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{r_0'^2 + z_0'^2}} \begin{pmatrix} -z_0' \\ 0 \\ r_0' \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z} \quad (\text{A.33})$$

$$\kappa_0^{(a)} = \frac{r_0'' z_0' - r_0' z_0''}{(r_0'^2 + z_0'^2)^{3/2}} \quad \kappa_0^{(b)} = -\frac{n_{0r}}{r_0} \quad (\text{A.34})$$

Ces calculs de vecteurs et courbures sont implémentés dans une routine de *FreeFEM++*. Comme l'espace est discrétisé, il faut approcher les valeurs des dérivées. En conséquence, pour obtenir les dérivées premières et secondes de  $r_0(s_0)$  ainsi que de  $z_0(s_0)$  sur une géométrie discrète de points, une interpolation polynomiale d'ordre 4 permet de trouver le polynôme qui passe par 5 points successifs (voir figure A.3). Une fois les coefficients de ces polynômes définis, les dérivées du point central parmi les 5 sont aisément accessibles.

Il existe une subtilité pour le calcul de la courbure  $\kappa_0^{(b)}$ . En effet, sa valeur sur l'axe est indéterminée. Le numérateur et dénominateur tendent tous deux vers zéro (A.34). Pour contourner ce problème, il est utile de considérer la géométrie au voisinage de l'axe de symétrie. Près de ce point là, la surface forme une calotte sphérique impliquant que les deux courbures principales sont égales. On peut donc imposer :

$$\kappa_0^{(b)} \Big|_{\Gamma_{b0} \cap \Gamma_{axe0}} = \kappa_0^{(a)} \quad (\text{A.35})$$

Un traitement particulier est effectué pour les points proches ou situés sur l'axe de symétrie ou le plan de symétrie. En effet, pour conserver la même précision sur les extrémités, il est nécessaire d'utiliser des points miroirs afin que le point qui nous intéresse soit entouré de part et d'autre par deux points et demeure ainsi dans la configuration de la figure A.3.

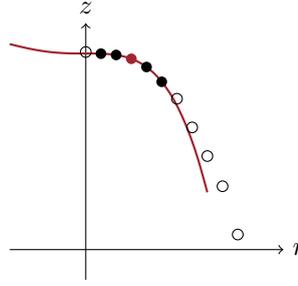


FIGURE A.3 – Exemple d’interpolation impliquant 5 points consécutifs (points pleins) pour obtenir les dérivées au point rouge. La courbe rouge est le tracé de  $(r, z) = (P_{r_0}^4(s_0), P_{z_0}^4(s_0))$ , résultant des interpolations polynomiales de  $r_0(s_0)$  et  $z_0(s_0)$  à l’ordre 4.

A.4 AVEC L’OPÉRATEUR DE LAPLACE-BELTRAMI EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Soit une bijection :

$$\chi : \Phi \mapsto \mathbb{R}^3, \tag{A.36}$$

avec  $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ . Sa matrice jacobienne est :

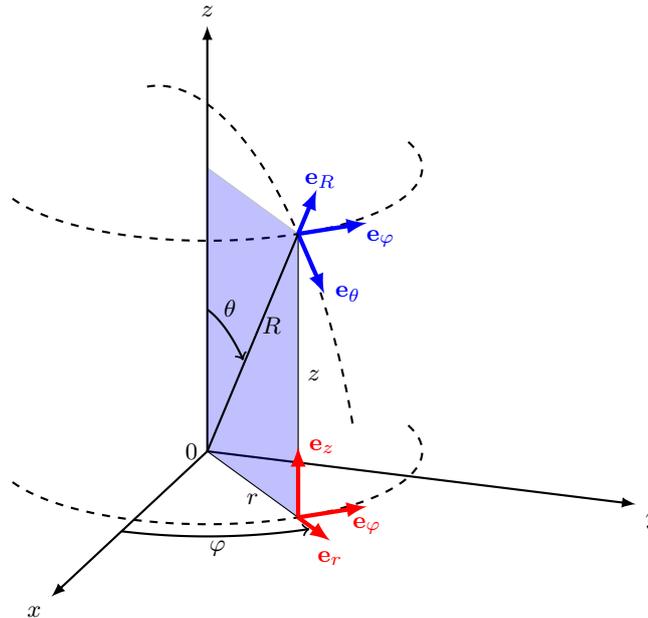
$$G = \begin{pmatrix} \chi_{,u} \cdot \chi_{,u} & \chi_{,u} \cdot \chi_{,v} \\ \chi_{,u} \cdot \chi_{,v} & \chi_{,v} \cdot \chi_{,v} \end{pmatrix} \tag{A.37}$$

On notera

$$G = (g_{\alpha,\beta}), \quad G^{-1} = (g^{\alpha,\beta}) \quad \text{et} \quad g = \det(G) \tag{A.38}$$

L’opérateur de Laplace-Beltrami s’écrit pour une fonction  $f$  quelconque :

$$\Delta_{\chi} f = \frac{1}{g^{1/2}} \partial_{\alpha} (g^{\alpha,\beta} g^{1/2} \partial_{\beta} f) \tag{A.39}$$



Dans un repère sphérique  $(R, \theta, \varphi)$  :

$$\mathbf{e}_R = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}_{(x,y,z)}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}_{(x,y,z)}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \quad (\text{A.40})$$

Et dans le repère cylindrique  $(r, \varphi, z)$  :

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{(R,\theta,\varphi)} \quad (\text{A.41})$$

Soit une bijection :

$$\chi_m : (\theta, \varphi) \mapsto R(\theta)e^{im\varphi}\mathbf{e}_R \quad (\text{A.42})$$

avec

$$\begin{aligned} \chi_{m,\theta} &= R'(\theta)e^{im\varphi}\mathbf{e}_r + R(\theta)e^{im\varphi}\mathbf{e}_\theta \\ \chi_{m,\varphi} &= R(\theta)ime^{im\varphi}\mathbf{e}_r + R(\theta)e^{im\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

La matrice jacobienne du *mapping* en coordonnées sphériques s'écrit :

$$G = e^{2im\varphi} \begin{pmatrix} R'^2 + R^2 & imRR' \\ imRR' & R^2(\sin^2\theta - m^2) \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

et

$$g = \det(G) = \left[ (R'^2 + R^2) R^2 (\sin^2\theta - m^2) + m^2 R'^2 R^2 \right] e^{2im\varphi} \quad (\text{A.45})$$

On sait que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Donc

$$G^{-1} = \frac{e^{-2im\varphi}}{(R'^2 + R^2) R^2 (\sin^2\theta - m^2) + m^2 R'^2 R^2} \begin{pmatrix} R^2(\sin^2\theta - m^2) & -imRR' \\ -imRR' & R'^2 + R^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.46})$$

Dans le cas  $m = 0$ , *i.e.* avec une symétrie axiale d'axe  $(0z)$  :

$$G = \begin{pmatrix} R'^2 + R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} (R'^2 + R^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (R^2 \sin^2\theta)^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.47})$$

et

$$g^{1/2} = (R'^2 + R^2)R|\sin\theta| \quad (\text{A.48})$$

L'opérateur de Laplace-Beltrami s'écrit :

$$\Delta_{\mathcal{X}_m} f = \frac{1}{g^{1/2}} \partial_\alpha \left( g^{\alpha,\beta} g^{1/2} \partial_\beta f \right) \quad (\text{A.49})$$

Dans le cas  $m=0$ , les dérivées  $\partial_\varphi$  ne sont pas systématiquement nulles. Par exemple, dans le cas où  $f = R(\theta) \mathbf{e}_r$ , le vecteur  $\mathbf{e}_r$  est une fonction de  $\theta$  et  $\varphi$ .

$$\Delta_{\mathcal{X}_0} f = \frac{1}{g^{1/2}} \left[ \partial_\theta \left( g^{\theta,\theta} g^{1/2} \partial_\theta f \right) + \partial_\varphi \left( g^{\varphi,\varphi} g^{1/2} \partial_\varphi f \right) \right] \quad (\text{A.50})$$

$$\Delta_{\mathcal{X}_0} f = \frac{1}{R \sin \theta \sqrt{R'^2 + R^2}} \left[ \partial_\theta \left( \frac{R \sin \theta}{\sqrt{R'^2 + R^2}} \partial_\theta f \right) + \partial_\varphi \left( \frac{\sqrt{R'^2 + R^2}}{R \sin \theta} \partial_\varphi f \right) \right] \quad (\text{A.51})$$

En développant et en utilisant le fait que le rayon ne dépend que de l'angle polaire  $\theta$

$$\Delta_{\mathcal{X}_0} f = \frac{\partial_{\theta\theta} f}{R'^2 + R^2} - \frac{R'(R'' + R)}{(R'^2 + R^2)^2} \partial_\theta f + \frac{(R \sin \theta)'}{R \sin \theta (R'^2 + R^2)} \partial_\theta f + \frac{\partial_{\varphi\varphi} f}{R \sin \theta} \quad (\text{A.52})$$

Soit  $f := id_\Gamma$ , la fonction identité définie sur un contour  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ . En coordonnées sphériques,  $id_\Gamma(\theta, \varphi) = R(\theta) \mathbf{e}_r(\theta, \varphi)$  est la fonction qui associe aux angles azimutal et polaire le vecteur position de chaque point du contour  $\Gamma$ .

On a alors l'identité :

$$\Delta_{\mathcal{X}_0}(R \mathbf{e}_r) = \kappa \mathbf{n} \quad (\text{A.53})$$

Dans ce qui suit l'opérateur de Laplace-Beltrami est appliqué à chaque composante indépendamment les unes des autres si  $f$  est un vecteur.

$$\Delta_{\mathcal{X}_0}(R \mathbf{e}_r) = \underbrace{\frac{\partial_{\theta\theta}(R \mathbf{e}_r)}{R'^2 + R^2} - \frac{R'(R'' + R)}{(R'^2 + R^2)^2} \partial_\theta(R \mathbf{e}_r)}_{\kappa^{(a)} \mathbf{n}} + \underbrace{\frac{(R \sin \theta)'}{R \sin \theta (R'^2 + R^2)} \partial_\theta(R \mathbf{e}_r) + \frac{\partial_{\varphi\varphi}(R \mathbf{e}_r)}{R \sin \theta}}_{\kappa^{(b)} \mathbf{n}} \quad (\text{A.54})$$

Avec les vecteurs tangents et normaux

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{R' \mathbf{e}_r + R \mathbf{e}_\theta}{(R'^2 + R^2)^{1/2}} \\ \mathbf{n} &= \frac{-R \mathbf{e}_r + R' \mathbf{e}_\theta}{(R'^2 + R^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

et les courbures principales

$$\begin{aligned} \kappa^{(a)} &= \frac{2R'^2 + R^2 - RR''}{(R'^2 + R^2)^{3/2}} \\ \kappa^{(b)} &= \frac{(R \cos \theta)'}{R \sin \theta (R'^2 + R^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$





## LINÉARISATION DU DOMAINE PHYSIQUE

Soit  $\Phi$  une application bijective, de classe  $C^1$ , de  $\Omega_0$  sur  $\Omega_t^*$  dont la bijection réciproque est aussi de classe  $C^1$ , telle que pour tout  $\mathbf{x}_0 \in \Omega_0$  il existe un unique  $\Phi(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x} \in \Omega_t$ .

### B.1 INTÉGRATION PAR CHANGEMENT DE VARIABLE

Tout au long de ce travail le déplacement est noté  $\boldsymbol{\xi} = \xi_r \mathbf{e}_r + \xi_z \mathbf{e}_z$  de sorte que les angles azimutaux vérifient  $\varphi \equiv \varphi_0$ . Cela implique que les déformations se font uniquement dans les plans azimutaux. Avec ces deux hypothèses, la matrice jacobienne de l'application  $\Phi$  devient,

$$J_{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial r_0} & \frac{\partial r}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial r}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r_0} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial r_0} & \frac{\partial z}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon \frac{\partial \xi_r}{\partial r_0} & \epsilon \frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi_0} & \epsilon \frac{\partial \xi_r}{\partial z_0} \\ 0 & 1 & 0 \\ \epsilon \frac{\partial \xi_z}{\partial r_0} & \epsilon \frac{\partial \xi_z}{\partial \varphi_0} & 1 + \epsilon \frac{\partial \xi_z}{\partial z_0} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

et  $D_{J_{\Phi}}$  son jacobien,

$$\begin{aligned} D_{J_{\Phi}} &= \det(J_{\Phi}) \\ D_{J_{\Phi}} &= 1 + \epsilon (\partial_{r_0} \xi_r + \partial_{z_0} \xi_r) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

**INTÉGRALE VOLUMIQUE.** Dans le repère cylindrique, les volumes et surfaces élémentaires sont  $dv = r dr d\varphi dz$ ,  $dv_0 = r_0 dr_0 d\varphi_0 dz_0$ . Le changement de variable se fait de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \mathbf{f}(\mathbf{x}) r dr d\varphi dz &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}) D_{J_{\Phi}} (r_0 + \epsilon \xi_r) dr_0 d\varphi_0 dz_0 + O(\epsilon^2) \\ &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}) D_{J_{\Phi}} \left(1 + \epsilon \frac{\xi_r}{r_0}\right) r_0 dr_0 d\varphi_0 dz_0 + O(\epsilon^2) \\ &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}) \tilde{D}_{J_{\Phi}} r_0 dr_0 d\varphi_0 dz_0 + O(\epsilon^2) \\ &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}) \left[1 + \epsilon \left(\partial_{r_0} \xi_r + \partial_{z_0} \xi_r + \frac{\xi_r}{r_0}\right)\right] r_0 dr_0 d\varphi_0 dz_0 + O(\epsilon^2) \\ &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}) (1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi}) r_0 dr_0 d\varphi_0 dz_0 + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{f}(\mathbf{x}) dv = \int_{\Omega_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}) (1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi}) dv_0 + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.3})$$

Il est possible de montrer que ce résultat est aussi valable pour un système de coordonnées cartésiennes (2D ou 3D). Dans ce cas, le jacobien linéarisé est directement  $D_{J_{\Phi}} = 1 + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \cdot \boldsymbol{\xi} + O(\epsilon^2)$ . Aucun terme de métrique n'apparaissant (contrairement au facteur  $r$  dans le volume élémentaire pour le cas cylindrique), on retombe bien sur l'équation (B.3).

**SURFACES ÉLÉMENTAIRES D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION.** Dans le même repère,  $d\mathcal{A} = r ds d\varphi$  et  $d\mathcal{A}_0 = r_0 ds d\varphi_0$  sont respectivement les surfaces élémentaires sur les domaines  $\partial\Omega_t$  et  $\partial\Omega_0$ ,  $s$  et  $s_0$  étant les abscisses curvilignes sur la frontière dans un plan azimutal ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z$ ) fixé pour  $\partial\Omega_t$  et  $\partial\Omega_0$ .

En premier lieu, il est nécessaire de connaître la relation entre les deux surfaces élémentaires.

On cherche l'expression de la longueur d'arc élémentaire  $ds$  sur  $\Gamma_t$ . Soit un vecteur  $d\mathbf{l}$  appartenant au contour  $\Gamma_t$  tel que  $d\mathbf{l} = \mathbf{t}ds$ ,

$$\begin{aligned}
d\mathbf{l} &= [\nabla_{\Omega_0} \mathbf{x}] \cdot d\mathbf{l}_0 \\
\mathbf{t}ds &= (I + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}_0 ds_0 + O(\epsilon^2) \\
ds &= \mathbf{t} \cdot (I + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}_0 ds_0 + O(\epsilon^2) \\
ds &= (\mathbf{t}_0 + \epsilon \mathbf{t}_1) \cdot (I + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}_0 ds_0 + O(\epsilon^2) \\
ds &= (\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t}_0 + \epsilon \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t}_1 + \epsilon \mathbf{t}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0) ds_0 + O(\epsilon^2) \\
ds &= (1 + \epsilon \mathbf{t}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0) ds_0 + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Sachant que  $d\mathcal{A}_0 = r_0 ds_0 d\varphi_0$  et  $d\mathcal{A} = r ds d\varphi$ , l'aire élémentaire s'écrit :

$$\begin{aligned}
d\mathcal{A} &= (r_0 + \epsilon \xi_r) (1 + \epsilon \mathbf{t}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0) ds_0 d\varphi_0 + O(\epsilon^2) \\
d\mathcal{A} &= \left[ 1 + \epsilon \left( \frac{\xi_r}{r_0} + \mathbf{t}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \right] r_0 ds_0 d\varphi_0 + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Plus synthétiquement, en coordonnées cylindriques :

$$d\mathcal{A} = \left[ 1 + \epsilon \left( \frac{\xi_r}{r_0} + \mathbf{t}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \right] d\mathcal{A}_0 + O(\epsilon^2) \tag{B.6}$$

Cela se retrouve de la même manière avec l'expression  $d\mathcal{A} = \Pi_i^{d-1} \mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\Phi} \cdot \mathbf{e}_i d\mathcal{A}_0$  où  $d = 3$ , les vecteurs générateur de la surface sont  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{t}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi$  :

$$\begin{aligned}
d\mathcal{A} &= \Pi_i^{d-1} \mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\Phi} \cdot \mathbf{e}_i d\mathcal{A}_0 \\
&= \Pi_i^{d-1} \mathbf{e}_i \cdot \nabla_{\Omega_0} \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i d\mathcal{A}_0 \\
&= (\mathbf{t} \cdot \nabla_{\Omega_0} \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}) (\mathbf{e}_\varphi \cdot \nabla_{\Omega_0} \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_\varphi) d\mathcal{A}_0 \\
&= ([\mathbf{t}_0 + \epsilon \mathbf{t}_1] \cdot [I + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi}] \cdot [\mathbf{t}_0 + \epsilon \mathbf{t}_1]) (\mathbf{e}_\varphi \cdot [I + \epsilon \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi}] \cdot \mathbf{e}_\varphi) d\mathcal{A}_0 + O(\epsilon^2) \\
&= (1 + \epsilon \mathbf{t}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0) \left( 1 + \epsilon \frac{\xi_r}{r_0} \right) d\mathcal{A}_0 + O(\epsilon^2) \\
&= \left[ 1 + \epsilon \left( \frac{\xi_r}{r_0} + \mathbf{t}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \right] d\mathcal{A}_0 + O(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

Supposons que le champ de déplacement  $\boldsymbol{\xi}$ , au niveau d'un contour  $\Gamma_0$ , s'exprime sous la forme :

$$\boldsymbol{\xi}|_{\Gamma_0} = \eta \mathbf{n}_0 \tag{B.7}$$

Sous la condition précédente, en utilisant les relations de Frenet (A.3), il est possible d'écrire différemment la longueur d'arc élémentaire du contour :

$$\begin{aligned}
ds &= (1 + \epsilon \partial_{s_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0) ds_0 + O(\epsilon^2) \\
ds &= (1 + [\epsilon \mathbf{n}_0 \partial_{s_0} \eta + \epsilon \eta \partial_{s_0} \mathbf{n}_0] \cdot \mathbf{t}_0) ds_0 + O(\epsilon^2) \\
ds &= (1 - \epsilon \eta \kappa_0^{(a)}) ds_0 + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Cela fait apparaître la courbure de la frontière et on a là une autre expression pour la surface élémentaire (B.6) :

$$d\mathcal{A} = \left[1 + \epsilon\eta \left(n_{0r}/r_0 - \kappa_0^{(a)}\right)\right] d\mathcal{A}_0 + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.9})$$

Dans le cas bidimensionnel cartésien, la *surface* élémentaire se réduit à la longueur d'arc sur le contour  $\Gamma_t$ . Il en résulte l'expression suivante :

$$\begin{aligned} d\tilde{\mathcal{A}} &= (1 + \epsilon\mathbf{t}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0) d\tilde{\mathcal{A}}_0 + O(\epsilon^2) \\ &= \left(1 - \epsilon\eta\kappa_0^{(a)}\right) d\tilde{\mathcal{A}}_0 + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

avec  $d\tilde{\mathcal{A}} = ds$  et  $d\tilde{\mathcal{A}}_0 = ds_0$ .

INTÉGRALE SURFACIQUE. Finalement, le changement de variable sur une intégrale surfacique pour un système de coordonnées cylindriques s'écrit sous la forme :

$$\int_{\Gamma_t} f(\mathbf{x}) d\mathcal{A} = \int_{\Gamma_0} f(\mathbf{x}_0) \left[1 + \epsilon\eta \left(n_{0r}/r_0 - \kappa_0^{(a)}\right)\right] d\mathcal{A}_0 + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.11})$$

avec  $d\mathcal{A} = r ds d\varphi$  et  $d\mathcal{A}_0 = r_0 ds_0 d\varphi_0$ .

Quant à la relation équivalente pour un système de coordonnées cartésien 2D, sans l'hypothèse de déplacement normal (B.7), elle devient :

$$\int_{\Gamma_t} f(\mathbf{x}) d\tilde{\mathcal{A}} = \int_{\Gamma_0} f(\mathbf{x}_0) (1 + \epsilon\mathbf{t}_0 \cdot \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}_0) d\tilde{\mathcal{A}}_0 + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.12})$$

## B.2 OPÉRATEURS DE DÉRIVATION SPATIALE

La connaissance de la bijection  $\Phi$  permet de calculer les dérivées spatiales par rapport aux variables de  $\Omega_t$ . Gradient et divergence sur le domaine physique sont ainsi exprimés sur le domaine de calcul.

Soit  $T$  un scalaire défini sur  $\Omega_t$ ,  $\Psi$  la bijection réciproque de  $\Phi$ , notée  $\Psi = \Phi^{-1}$  et  $J_\Psi = \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}}$  sa matrice jacobienne. On a :

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_0} = J_\Psi^T \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (\text{B.13})$$

Soit  $\mathbf{f}$  un champ vectoriel défini sur  $\Omega_t$ , On a de même

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_0} = J_\Psi \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (\text{B.14})$$

Ces relations se démontrent rapidement en utilisant la notation indicielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_i} &= \frac{\partial T}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_{0j}}{\partial x_i} = \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_0} \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial f_i}{\partial x_{0k}} \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Cette matrice jacobienne donne accès aux dérivées spatiales sur le domaine  $\Omega_t$ . Elle peut s'exprimer en fonction de  $\Phi$  sous la forme

$$J_\Psi(\mathbf{x}) = J_{\Phi^{-1}}(\mathbf{x}) = [J_\Phi(\Phi^{-1}(\mathbf{x}))]^{-1} = [J_\Phi(\mathbf{x}_0)]^{-1}, \quad (\text{B.16})$$

ou plus expressément, en utilisant le développement (B.1),

$$J_{\Psi} = \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^{-1} = J_{\Phi}^{-1} = \left( I + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^{-1} \quad (\text{B.17})$$

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées, et  $I$  la matrice identité, toutes trois de même dimension. L'inverse d'une matrice dans le cas où son déterminant est non-nul est donné par la méthode des cofacteurs.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [\text{com}A]^T \quad (\text{B.18})$$

où  $\text{com}A$  désigne la comatrice de la matrice  $A$ . En notant  $A = I + \epsilon B$ , on peut montrer en faisant un développement limité au premier ordre pour  $\epsilon \ll 1$ , que

$$(I + \epsilon B)^{-1} = I - \epsilon B + O(\epsilon^2), \quad (\text{B.19})$$

Ce qui permet d'obtenir la linéarisation de la jacobienne de  $\Psi$ ,

$$J_{\Psi} = J_{\Phi}^{-1} = I - \epsilon J_{\Phi} + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.20})$$

puisque le jacobien de la bijection n'est pas nul. On a alors

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} = \left( I - \epsilon J_{\Phi}^T \right) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_0} + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_0} (I - \epsilon J_{\Phi}) + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.22})$$

À présent, tous les outils nécessaires à la définition des gradients et divergences sur le domaine physique  $\Omega_t$  sont disponibles. Cependant, les termes de métriques dans le gradient et la divergence nécessitent une certaine attention.

*Remarque :* Pour un système de coordonnées cartésiennes, il serait possible de déduire de l'expression précédente (B.20) celle du gradient linéarisé puisque  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$  est le gradient de  $f$ , ce qui n'est pas vrai dans pour des coordonnées cylindriques.

### B.2.1 Opérateurs Gradient

On notera  $\nabla_{\Omega_t}$  et  $\nabla_{\Omega_0}$  les opérateurs nabla définis respectivement sur  $\Omega_t$  et  $\Omega_0$  tels que

$$\nabla_{\Omega_t} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \partial_r f_r & (\partial_\varphi f_r - f_\varphi)/r & \partial_z f_r \\ \partial_r f_\varphi & (\partial_\varphi f_\varphi + f_r)/r & \partial_z f_\varphi \\ \partial_r f_z & \partial_\varphi f_z/r & \partial_z f_z \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z} \quad (\text{B.23})$$

$$\nabla_{\Omega_0} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \partial_{r_0} f_r & (\partial_{\varphi_0} f_r - f_\varphi)/r_0 & \partial_{z_0} f_r \\ \partial_{r_0} f_\varphi & (\partial_{\varphi_0} f_\varphi + f_r)/r_0 & \partial_{z_0} f_\varphi \\ \partial_{r_0} f_z & \partial_{\varphi_0} f_z/r_0 & \partial_{z_0} f_z \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z} \quad (\text{B.24})$$

Il est possible de décomposer le gradient exprimé en coordonnées cylindriques sous la forme

$$\nabla_{\Omega_t} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \partial_r f_r & \partial_\varphi f_r & \partial_z f_r \\ \partial_r f_\varphi & \partial_\varphi f_\varphi & \partial_z f_\varphi \\ \partial_r f_z & \partial_\varphi f_z & \partial_z f_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -f_\varphi & 0 \\ 0 & f_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.25})$$

En injectant (B.22) et faisant un développement au premier ordre du terme  $r = r_0 + \epsilon \xi_r$ , on obtient :

$$\nabla_{\Omega_t} \mathbf{f} = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_0} (I - \epsilon J_\Phi) + \begin{pmatrix} 0 & -f_\varphi & 0 \\ 0 & f_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r_0(1 - \epsilon \xi_r) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.26})$$

En factorisant l'expression précédente, et en rassemblant certain termes, il est possible de faire apparaître des gradient cylindriques,

$$\nabla_{\Omega_t} \mathbf{f} = \nabla_{\Omega_0} \mathbf{f} (I - \epsilon \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi}) + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.27})$$

De la même manière, il est possible d'obtenir les gradients de quantités scalaires,

$$\nabla_{\Omega_t} T = \begin{pmatrix} \partial_r T \\ 1/r \partial_\varphi T \\ \partial_z T \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z} \quad \text{et}, \quad \nabla_{\Omega_0} T = \begin{pmatrix} \partial_{r_0} T \\ 1/r_0 \partial_{\varphi_0} T \\ \partial_{z_0} T \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z} \quad (\text{B.28})$$

En utilisant la relation (B.21) entre les dérivées spatiales sur  $\Omega_t$  et  $\Omega_0$ ,

$$\nabla_{\Omega_t} T = \left[ (I - \epsilon J_\Phi)^T \cdot \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_0} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r_0(1 - \epsilon \xi_r) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.29})$$

et en combinant encore les termes pour faire apparaître des opérateurs gradients,

$$\nabla_{\Omega_t} T = (I - \epsilon \nabla_{\Omega_0}^T \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\Omega_0} T + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.30})$$

**Remarque :** Les expressions des gradients (B.27, B.30) sont aussi valables pour un système de coordonnées cartésiennes. La démonstration ainsi faite met l'accent sur la prise en compte des termes issus de la métrique et du fait que le repère cylindrique est mobile. Une démonstration en coordonnées cartésiennes aurait été plus simple mais n'aurait pas donné l'assurance de l'équivalence avec le repère cylindrique.

### B.2.2 Opérateur Divergence

Une fois l'opérateur gradient défini par (B.27), l'opérateur divergence est déduit comme la trace (Tr) de ce dernier :

$$\nabla_{\Omega_t} \cdot \mathbf{f} = \text{Tr}(\nabla_{\Omega_t} \mathbf{f}) = \text{Tr} \left[ \nabla_{\Omega_0} \mathbf{f} (I - \epsilon \nabla_{\Omega_0} \boldsymbol{\xi}) \right] + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.31})$$

Sachant que  $\text{Tr}(AB) = A : B^T$ , cela peut se réécrire :

$$\nabla_{\Omega_t} \cdot \mathbf{f} = \nabla_{\Omega_0} \mathbf{f} : (I - \epsilon \nabla_{\Omega_0}^T \boldsymbol{\xi}) + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.32})$$

et plus synthétiquement,

$$\nabla_{\Omega_t} \cdot \mathbf{f} = \nabla_{\Omega_0} \cdot \mathbf{f} - \epsilon \nabla_{\Omega_0} \mathbf{f} : \nabla_{\Omega_0}^T \boldsymbol{\xi} + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.33})$$

**Remarque 1 :** *Tout comme les expressions du gradient, celle de la divergence (B.33) est aussi valable dans le cas cartésien.*

**Remarque 2 :** *La connaissance de la linéarisation de la divergence d'un tenseur n'est pas nécessaire ici : nous nous en affranchirons très rapidement grâce à des intégrations par parties dans les formulations variationnelles.*





## REPRÉSENTATION DES OSCILLATIONS DE FORME DES BULLES

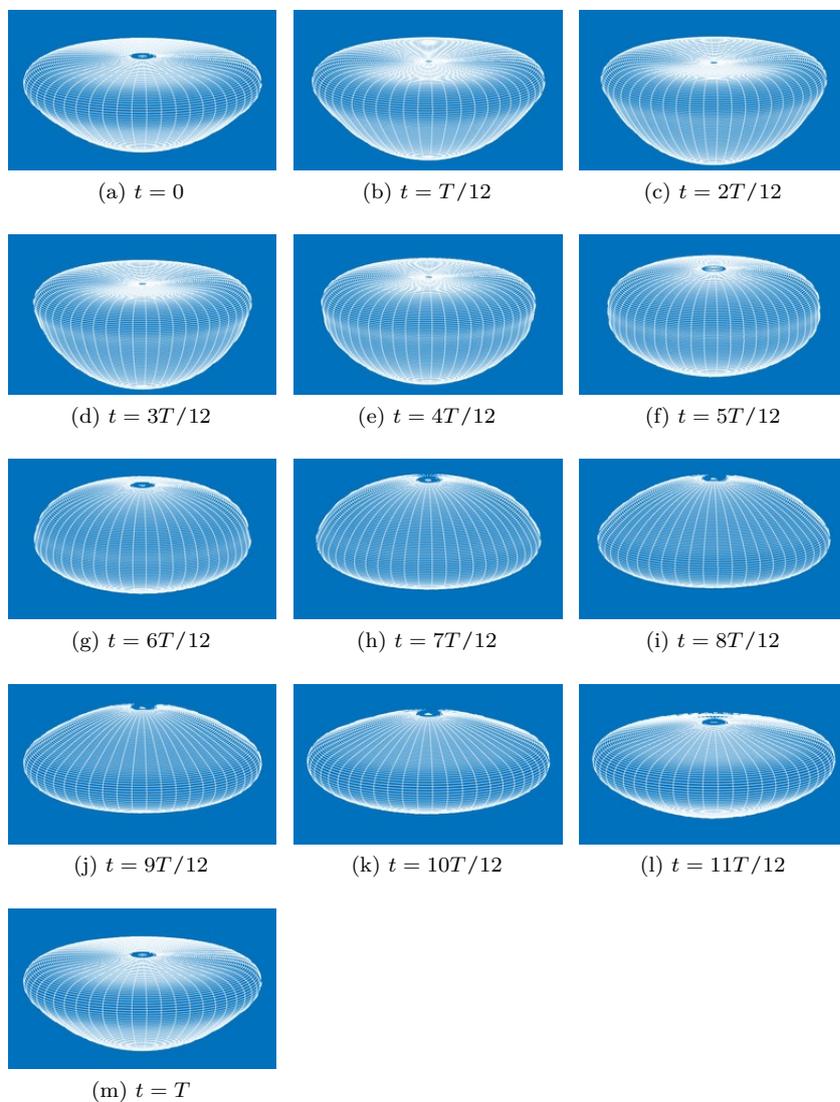


FIGURE C.1 – Instantanés du mode  $l2m0$  d'une bulle d'air dans de l'eau ultra-pure à  $20^\circ\text{C}$  au cours d'une période  $T = 2\pi/\lambda_i$ .  $Mo = 2.54 \cdot 10^{-11}$ ,  $Bo = 0.54$ ,  $\lambda = 0.005 + 2.77i$ .

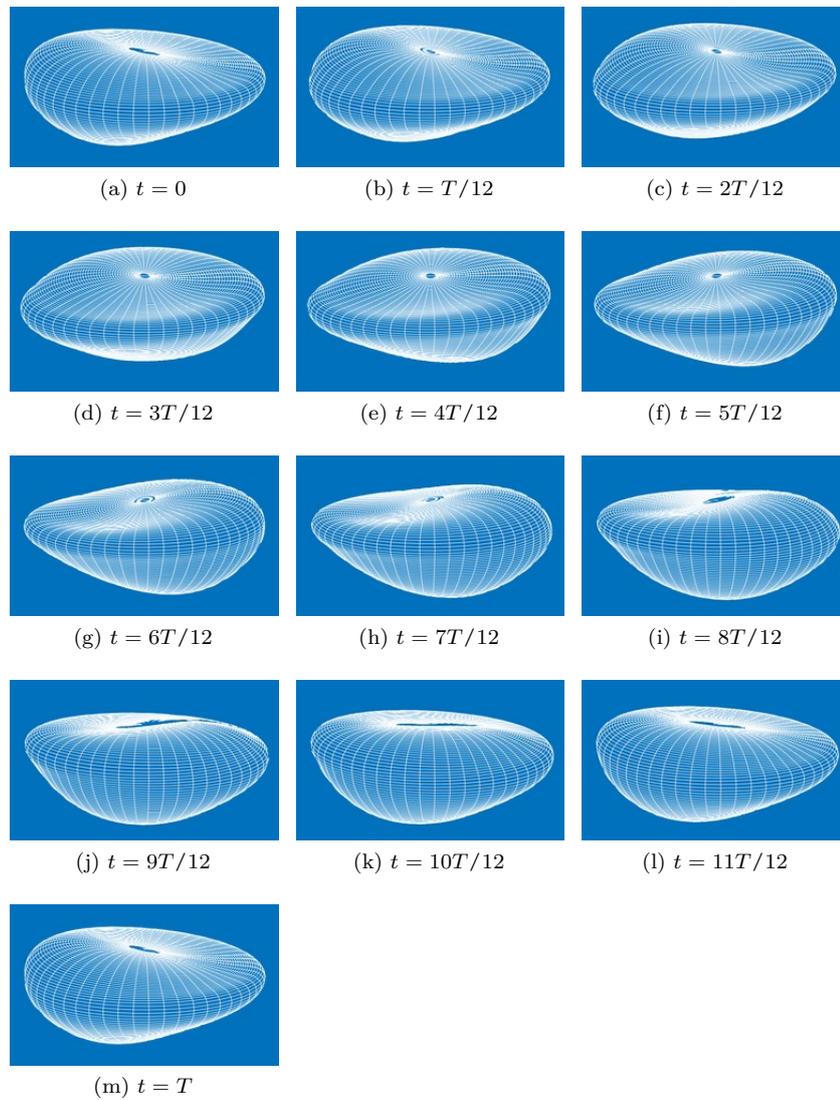


FIGURE C.2 – Instantanés du mode  $l2m1$  d'une bulle d'air dans de l'eau ultra-pure à  $20^\circ C$  au cours d'une période  $T = 2\pi/\lambda_i$ .  $Mo = 2.54 \cdot 10^{-11}$ ,  $Bo = 0.9$ ,  $\lambda_i = 0.008 + 2.87i$ .

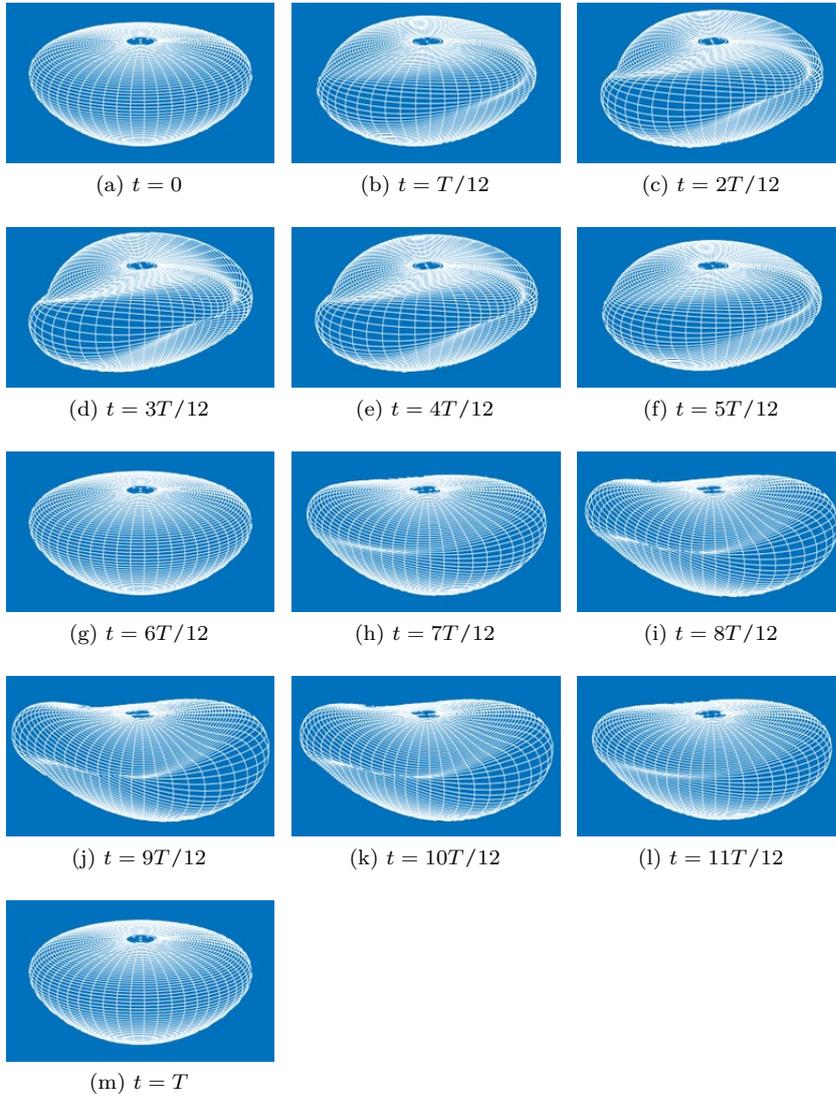


FIGURE C.3 – Instantanés du mode  $l2m2$  d'une bulle d'air dans de l'eau ultra-pure à  $20^\circ\text{C}$  au cours d'une période  $T = 2\pi/\lambda_i$ .  $Mo = 2.54 \cdot 10^{-11}$ ,  $Bo = 0.83$ ,  $\lambda_i = 0.026 + 1.42i$ .



## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] ALBERT, C, TEZUKA, A et BOTHE, D. « Global linear stability analysis of falling films with inlet and outlet ». *Journal of Fluid Mechanics* 745 (2014), p. 444-486.
- [2] ALLGOWER, E. L. et GEORG, K. *Introduction to numerical continuation methods*. T. 45. SIAM, 2003.
- [3] ARNOLD, D. N., BREZZI, F. et FORTIN, M. « A stable finite element for the Stokes equations ». *Calcolo* 21.4 (1984), p. 337-344.
- [4] ASSEMAT, P., FABRE, D. et MAGNAUDET, J. « The onset of unsteadiness of two-dimensional bodies falling or rising freely in a viscous fluid : a linear study ». *Journal of Fluid Mechanics* 690 (2012), p. 173-202.
- [5] AYBERS, N. et TAPUCU, A. « Studies on the drag and shape of gas bubbles rising through a stagnant liquid ». *Wärme-und Stoffübertragung* 2.3 (1969), p. 171-177.
- [6] AYBERS, N. et TAPUCU, A. « The motion of gas bubbles rising through stagnant liquid ». *Wärme-und Stoffübertragung* 2.2 (1969), p. 118-128.
- [7] BÄNSCH, E. « Finite element discretization of the Navier–Stokes equations with a free capillary surface ». *Numerische Mathematik* 88.2 (2001), p. 203-235.
- [8] BARRETT, J. W., GARCKE, H. et NÜRNBERG, R. « Eliminating spurious velocities with a stable approximation of viscous incompressible two-phase Stokes flow ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 267 (2013), p. 511-530.
- [9] BATCHELOR, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [10] BEL FDIHALA, R et DUINEVELD, P. « The effect of surfactant on the rise of a spherical bubble at high Reynolds and Peclet numbers ». *Physics of Fluids* 8.2 (1996), p. 310-321.
- [11] BLANCO, A. et MAGNAUDET, J. « The structure of the axisymmetric high-Reynolds number flow around an ellipsoidal bubble of fixed shape ». *Physics of fluids* 7.6 (1995), p. 1265-1274.
- [12] BODE-OKE, A. T., ZEYGHAMI, S. et DONG, H. « Flying in reverse : kinematics and aerodynamics of a dragonfly in backward free flight ». *Journal of The Royal Society Interface* 15.143 (2018), p. 20180102.
- [13] BREZZI, F. et FORTIN, M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. T. 15. Springer Science & Business Media, 2012.
- [14] CANO-LOZANO, J. C., BOHORQUEZ, P. et MARTÍNEZ-BAZÁN, C. « Wake instability of a fixed axisymmetric bubble of realistic shape ». *International Journal of Multiphase Flow* 51 (2013), p. 11-21.
- [15] CANO-LOZANO, J. C., TCHOUFAG, J., MAGNAUDET, J. et MARTÍNEZ-BAZÁN, C. « A global stability approach to wake and path instabilities of nearly oblate spheroidal rising bubbles ». *Physics of Fluids* 28.1 (2016), p. 014102.
- [16] CANO-LOZANO, J. C., MARTINEZ-BAZAN, C., MAGNAUDET, J. et TCHOUFAG, J. « Paths and wakes of deformable nearly spheroidal rising bubbles close to the transition to path instability ». *Physical Review Fluids* 1.5 (2016), p. 053604.
- [17] CENANOVIC, M., HANSBO, P. et LARSON, M. G. « Finite element procedures for computing normals and mean curvature on triangulated surfaces and their use for mesh refinement ». *arXiv preprint arXiv :1703.05745* (2017).
- [18] CHIREUX, V., FABRE, D., RISSO, F. et TORDJEMAN, P. « Oscillations of a liquid bridge resulting from the coalescence of two droplets ». *Physics of Fluids* 27.6 (2015), p. 062103.

- [19] CHOMAZ, J.-M. « Global instabilities in spatially developing flows : non-normality and nonlinearity ». *Annual Review of Fluid Mechanics* 37 (2005), p. 357-392.
- [20] CLIFT, R., GRACE, J. R. et WEBER, M. E. *Bubbles, drops, and particles*. Courier Corporation, 2005.
- [21] DE VRIES, A. W. *Path and wake of a rising bubble*. PhD thesis, University of Twente. 2002.
- [22] DE VRIES, A. W., BIESHEUVEL, A. et VAN WIJNGAARDEN, L. « Notes on the path and wake of a gas bubble rising in pure water ». *International journal of multiphase flow* 28.11 (2002), p. 1823-1835.
- [23] DEISING, D., BOTHE, D. et MARSCHALL, H. « Direct numerical simulation of mass transfer in bubbly flows ». *Computers & Fluids* (2018).
- [24] DONEA, J., GIULIANI, S et HALLEUX, J.-P. « An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions ». *Computer methods in applied mechanics and engineering* 33.1-3 (1982), p. 689-723.
- [25] DUINEVELD, P. C. « Bouncing and coalescence of two bubbles in water ». *Ph. D. thesis, Twente University* (1994).
- [26] DUINEVELD, P. C. « The rise velocity and shape of bubbles in pure water at high Reynolds number ». *Journal of Fluid Mechanics* 292 (1995), p. 325-332.
- [27] ELLINGSEN, K. et RISSO, F. « On the rise of an ellipsoidal bubble in water : oscillatory paths and liquid-induced velocity ». *Journal of Fluid Mechanics* 440 (2001), p. 235-268.
- [28] ELZEY, D. M., SOFLA, A. Y. et WADLEY, H. N. « A shape memory-based multifunctional structural actuator panel ». *International Journal of Solids and Structures* 42.7 (2005), p. 1943-1955.
- [29] ERN, P., RISSO, F., FABRE, D. et MAGNAUDET, J. « Wake-induced oscillatory paths of bodies freely rising or falling in fluids ». *Annual Review of Fluid Mechanics* 44 (2012), p. 97-121.
- [30] FABRE, D., CITRO, V., FERREIRA SABINO, D, BONNEFIS, P. et GIANNETTI, F. « A Practical Review on Linear and Nonlinear Global Approaches to Flow Instabilities ». *Applied Mechanics Reviews* (2018).
- [31] GALLINO, G., SCHNEIDER, T. M. et GALLAIRE, F. « Edge states control droplet breakup in sub-critical extensional flows ». *arXiv preprint arXiv :1806.05446* (2018).
- [32] GANESAN, S. et TOBISKA, L. « An accurate finite element scheme with moving meshes for computing 3D-axisymmetric interface flows ». *International journal for numerical methods in fluids* 57.2 (2008), p. 119-138.
- [33] GIANNETTI, F. et LUCHINI, P. « Structural sensitivity of the first instability of the cylinder wake ». *Journal of Fluid Mechanics* 581 (2007), p. 167-197.
- [34] GIRAULT, V. et RAVIART, P.-A. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations : Theory and Algorithms*. T. 5. Springer Science & Business Media, 2012.
- [35] HAMAMOTO, M., OHTA, Y., HARA, K. et HISADA, T. « Application of fluid-structure interaction analysis to flapping flight of insects with deformable wings ». *Advanced Robotics* 21.1-2 (2007), p. 1-21.
- [36] HAMAMOTO, M., OHTA, Y., HARA, K. et HISADA, T. « Free-flight analysis of dragonfly hovering by fluid-structure interaction analysis based on an arbitrary Lagrangian-Eulerian method ». *Advanced Robotics* 27.9 (2013), p. 657-666.
- [37] HARTUNIAN, R. A. et SEARS, W. « On the instability of small gas bubbles moving uniformly in various liquids ». *Journal of Fluid Mechanics* 3.1 (1957), p. 27-47.
- [38] HECHT, F. « New development in FreeFem++ ». *J. Numer. Math.* 20.3-4 (2012), p. 251-265.

- [39] HERRADA, M. et MONTANERO, J. M. « A numerical method to study the dynamics of capillary fluid systems ». *Journal of Computational Physics* 306 (2016), p. 137-147.
- [40] HUA, R.-N., ZHU, L. et LU, X.-Y. « Dynamics of fluid flow over a circular flexible plate ». *Journal of Fluid Mechanics* 759 (2014), p. 56-72.
- [41] HUANG, W.-X. et SUNG, H. J. « Three-dimensional simulation of a flapping flag in a uniform flow ». *Journal of Fluid Mechanics* 653 (2010), p. 301-336.
- [42] HUGHES, T. J., LIU, W. K. et ZIMMERMANN, T. K. « Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows ». *Computer methods in applied mechanics and engineering* 29.3 (1981), p. 329-349.
- [43] JANSSON, T. R., HASPANG, M. P., JENSEN, K. H., HERSEN, P. et BOHR, T. « Polygons on a rotating fluid surface ». *Physical Review Letters* 96.17 (2006), p. 174502.
- [44] JODIN, G., SCHELLER, J., DUHAYON, E., ROUCHON, J. F. et BRAZA, M. « Implementation of a hybrid electro-active actuated morphing wing in wind tunnel ». *Solid State Phenomena*. T. 260. Trans Tech Publications. 2017, p. 85-91.
- [45] KELVIN, L. « Oscillations of a liquid sphere ». *Mathematical and Physical Papers* 3 (1890), p. 384-386.
- [46] LAMB, H. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1932.
- [47] LEE, Y.-J. et LI, H. « On stability, accuracy, and fast solvers for finite element approximations of the axisymmetric stokes problem by Hood–Taylor elements ». *SIAM Journal on Numerical Analysis* 49.2 (2011), p. 668-691.
- [48] LUNDE, K. et PERKINS, R. J. « Shape oscillations of rising bubbles ». *Applied Scientific Research* 58 (1998), p. 387.
- [49] MAGNAUDET, J. et EAMES, I. « The motion of high-Reynolds-number bubbles in inhomogeneous flows ». *Annual Review of Fluid Mechanics* 32.1 (2000), p. 659-708.
- [50] MAGNAUDET, J. et MOUGIN, G. « Wake instability of a fixed spheroidal bubble ». *Journal of Fluid Mechanics* 572 (2007), p. 311-337.
- [51] MARQUET, O., SIPP, D. et JACQUIN, L. « Sensitivity analysis and passive control of cylinder flow ». *Journal of Fluid Mechanics* 615 (2008), p. 221-252.
- [52] MEIRON, D. I. « On the stability of gas bubbles rising in an inviscid fluid ». *Journal of Fluid Mechanics* 198 (1989), p. 101-114.
- [53] MILLER, C. A. et SCRIVEN, L. E. « The oscillations of a fluid droplet immersed in another fluid ». *Journal of Fluid Mechanics* 32.3 (1968), p. 417-435.
- [54] MOORE, D. W. « The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity ». *Journal of Fluid Mechanics* 23.4 (1965), p. 749-766.
- [55] MOUGEL, J. *Ondes et instabilités dans les écoulements tournants à surface libre*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier. 2014.
- [56] MOUGEL, J., FABRE, D. et LACAZE, L. « Waves and instabilities in rotating free surface flows ». *Mechanics & Industry* 15.2 (2014), p. 107-112.
- [57] MOUGIN, G. *Interactions entre la dynamique d'une bulle et les instabilités de son sillage*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse. 2001.
- [58] MOUGIN, G. et MAGNAUDET, J. « Path instability of a rising bubble ». *Physical Review Letters* 88.1 (2001), p. 014502.
- [59] NATARAJAN, R. et ACRIVOS, A. « The instability of the steady flow past spheres and disks ». *Journal of Fluid Mechanics* 254 (1993), p. 323-344.
- [60] NOBLIN, X., BUGUIN, A. et BROCHARD-WYART, F. « Triplon modes of puddles ». *Physical Review Letters* 94.16 (2005), p. 166102.
- [61] NOBLIN, X. *Mouillage et dé mouillage inertiel : triplons, flaques vibrées, ondes de chocs*. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI. 2004.

- [62] POPINET, S. « An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows ». *Journal of Computational Physics* 228.16 (2009), p. 5838-5866.
- [63] POZRIKIDIS, C. « Numerical simulation of the flow-induced deformation of red blood cells ». *Annals of Biomedical Engineering* 31.10 (2003), p. 1194-1205.
- [64] POZRIKIDIS, C. « Axisymmetric motion of a file of red blood cells through capillaries ». *Physics of Fluids* 17.3 (2005), p. 031503.
- [65] PROSPERETTI, A. « Normal-mode analysis for the oscillations of a viscous-liquid drop in an immiscible liquid ». *Journal de Mécanique* 19.1 (1980), p. 149-182.
- [66] RICHTER, T., KEPLINGER, O., SHEVCHENKO, N., WONDRAK, T., ECKERT, K., ECKERT, S. et ODENBACH, S. « Single bubble rise in GaInSn in a horizontal magnetic field ». *International Journal of Multiphase Flow* 104 (2018), p. 32-41.
- [67] ROSENTHAL, D. « The shape and stability of a bubble at the axis of a rotating liquid ». *Journal of Fluid Mechanics* 12.3 (1962), p. 358-366.
- [68] RYSKIN, G et LEAL, L. « Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Part 1. The finite-difference technique ». *Journal of Fluid Mechanics* 148 (1984), p. 1-17.
- [69] RYSKIN, G et LEAL, L. « Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Part 2. Buoyancy-driven motion of a gas bubble through a quiescent liquid ». *Journal of Fluid Mechanics* 148 (1984), p. 19-35.
- [70] RYSKIN, G et LEAL, L. « Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Part 3. Bubble deformation in an axisymmetric straining flow ». *Journal of Fluid Mechanics* 148 (1984), p. 37-43.
- [71] SAFFMAN, P. « On the rise of small air bubbles in water ». *Journal of Fluid Mechanics* 1.3 (1956), p. 249-275.
- [72] SANADA, T., SUGIHARA, K., SHIROTA, M. et WATANABE, M. « Motion and drag of a single bubble in super-purified water ». *Fluid Dynamics Research* 40.7-8 (2008), p. 534.
- [73] SATO, A. *Deformation, wake and collision of rising bubbles*. PhD thesis, Kyushu University. 2009.
- [74] TASOGLU, S., DEMIRCI, U. et MURADOGLU, M. « The effect of soluble surfactant on the transient motion of a buoyancy-driven bubble ». *Physics of fluids* 20.4 (2008), p. 040805.
- [75] TCHOUFAG, J. *Étude de la trajectoire d'objets en chute ou en ascension dans un fluide visqueux : une approche de stabilité globale*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier. 2013.
- [76] TCHOUFAG, J., MAGNAUDET, J. et FABRE, D. « Linear stability and sensitivity of the flow past a fixed oblate spheroidal bubble ». *Physics of Fluids* 25.5 (2013), p. 054108.
- [77] TCHOUFAG, J., FABRE, D. et MAGNAUDET, J. « Global linear stability analysis of the wake and path of buoyancy-driven disks and thin cylinders ». *Journal of Fluid Mechanics* 740 (2014), p. 278-311.
- [78] TCHOUFAG, J., MAGNAUDET, J. et FABRE, D. « Linear instability of the path of a freely rising spheroidal bubble ». *Journal of Fluid Mechanics* 751 (2014).
- [79] TRIPATHI, M. K., SAHU, K. C. et GOVINDARAJAN, R. « Dynamics of an initially spherical bubble rising in quiescent liquid ». *Nature Communications* 6 (2015), p. 6268.
- [80] VELDHUIS, C., BIESHEUVEL, A. et VAN WIJNGAARDEN, L. « Shape oscillations on bubbles rising in clean and in tap water ». *Physics of Fluids* 20.4 (2008), p. 040705.
- [81] YOGANATHAN, A. P., HE, Z. et CASEY JONES, S. « Fluid mechanics of heart valves ». *Annual Review of Biomedical Engineering* 6 (2004), p. 331-362.

- [82] YOGANATHAN, A. P., CHANDRAN, K. et SOTIROPOULOS, F. « Flow in prosthetic heart valves : state-of-the-art and future directions ». *Annals of Biomedical Engineering* 33.12 (2005), p. 1689-1694.
- [83] ZENIT, R. et MAGNAUDET, J. « Path instability of rising spheroidal air bubbles : a shape-controlled process ». *Physics of Fluids* 20.6 (2008), p. 061702.
- [84] ZENIT, R. et MAGNAUDET, J. « Measurements of the streamwise vorticity in the wake of an oscillating bubble ». *International Journal of Multiphase Flow* 35.2 (2009), p. 195-203.
- [85] ZHANG, J. et NI, M.-J. « Direct simulation of single bubble motion under vertical magnetic field : Paths and wakes ». *Physics of Fluids* 26.10 (2014), p. 102102.
- [86] ZHANG, J., NI, M.-J. et MOREAU, R. « Rising motion of a single bubble through a liquid metal in the presence of a horizontal magnetic field ». *Physics of Fluids* 28.3 (2016), p. 032101.