



HAL
open science

Penser l'effectivité: naissance de la notion chez Emile Borel

Roman Ikonicoff

► **To cite this version:**

Roman Ikonicoff. Penser l'effectivité: naissance de la notion chez Emile Borel. Histoire, Philosophie et Sociologie des sciences. UNIVERSITE PARIS.DIDEROT (Paris 7), 2011. Français. NNT: . tel-03963823

HAL Id: tel-03963823

<https://hal.science/tel-03963823>

Submitted on 30 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NoDerivatives 4.0 International License

UNIVERSITE PARIS.DIDEROT (Paris 7)

**ECOLE DOCTORALE : SAVOIRS SCIENTIFIQUES : EPISTEMOLOGIE,
HISTOIRE DES SCIENCES, DIDACTIQUE DES DISCIPLINES**

THESE DOCTORAT

en Épistémologie et histoire des sciences

AUTEUR :

Román IKONICOFF

TITRE

PENSER L'EFFECTIVITE

Naissance de la notion chez Émile Borel

Thèse dirigée par Jean-Jacques SZCZECINIARZ

Soutenue le 22 juin 2011

JURY

M. Jean-Paul Delahaye	: Membre
M. Michael Detlefsen	: Membre
M. Jacques Dubucs	: Président
M. Alain Michel	: Rapporteur
M. Jean Sallantin	: Rapporteur
M. Jean-Jacques Szczéciniaz	: Directeur

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier mon directeur de thèse, Jean-Jacques Szczéciniaz, pour la confiance et la sympathie qu'il m'a accordées. Merci de m'avoir initié à la recherche épistémologique et de m'avoir montré comment l'ancrer dans une matière historique autant que mathématique. Merci de m'avoir guidé, encouragé, soutenu pendant mes moments de doute et conseillé tout au long de ce travail.

Je remercie aussi chaleureusement les membres du jury de me faire l'honneur de participer à ma soutenance. Merci Michael Detlefsen pour l'inspiration que vos écrits m'ont offert tout au long de ma recherche et qui ont orienté ma conception de ce que doit être une analyse épistémologique ; merci Jacques Dubucs pour m'avoir accueilli au sein de l'IHPST durant une année universitaire où j'ai pu me former auprès de vous et de Jean Mosconi à l'épistémologie de la logique et aux écrits d'auteurs comme Polya, Tymoczko, Maddy ; merci Jean-Paul Delahaye pour m'avoir initié avec tant de générosité dès les années 1990 à l'inépuisable richesse de l'univers de la théorie de la calculabilité, ce qui m'a conduit à reprendre le chemin des écoliers (DEA d'Épistémologie) vers la thèse ; merci Alain Michel dont l'ouvrage sur la *Constitution de la théorie moderne de l'intégration* a été pour moi l'image de ce que devait être ce chemin, une fois construit ; merci Jean Sallantin pour avoir accepté d'apporter votre expertise technique et épistémologique en Intelligence artificielle dans la lecture et la soutenance de ma thèse.

Merci enfin à toute l'équipe du REHSEIS, en particulier à Karine Chemla, Michel Paty, Dominique Lecourt, Catherine Jamy, Christiane Villain, pour leurs cours de D.E.A. au sein de l'École Doctorale durant l'année 1998-1999, qui ont remis mon esprit sur les rails de la pensée scientifique. Et merci à Michèle Artigue, directrice de l'École doctorale.

Merci à ma relectrice : Yolande Limousin.

Enfin, j'adresse un grand merci à ma famille qui m'a soutenu durant tout ce temps. Lili, Alex et Iko, cette thèse vous est dédiée.

Table des matières

(une table plus détaillée se trouve en annexe)

AVANT PROPOS.....	9
I - Pourquoi l'effectivité.....	9
II- Objectifs programmatiques et problématique de la thèse	17
III- Pourquoi Borel et ses Leçons - 1898 ?	19

Partie I - Histoire

.1 - INTRODUCTION	23
I- Contexte historique	23
1°- Kronecker et Cantor.....	24
2°- De Hilbert à Turing et Church	35
3°- Fenêtre historique	66
II- Problématique épistémologique	69
1°- Une description heuristique.....	71
2°- Choix de la méthodologie.....	74
III- Plan de la thèse	82
.2 - "FRANCHIR LE PAS" OU TRAVERSER LE RUBICON ?	85
I- Problématique	86
II- Borel (et Lebesgue) dans le texte.....	93

1°- La définition des ensembles mesurables	93
2°- Analyse de l'extrait de Borel	101
3°- Les ensembles "quelconques" de Borel.....	105
4°- Lebesgue	108
5°- Définitions constructives vs. descriptives	113
III- 1901 : Borel et Lebesgue bifurquent	118
1°- Lettre numérotée I	119
2°- Lettre numérotée II	120
3°- Lettre numérotée III.....	121
IV- 1912 : Les explications de Borel	129
1°- Arguments.....	129
2°- Les ensembles bien définis de Borel	134
3°- Borel-1898 expliqué par Borel-1912.....	141
4°- Le cœur du problème : les ensembles arbitraires	144
V- Conclusion	156

.3 –INFINI DENOMBRABLE ET EFFECTIF CHEZ BOREL 159

I- Introduction.....	159
II- les ensembles de mesure nulle dans les Leçons-1898.....	161
1°- Le segment réel (0,1) amputé de ses rationnels : l'ensemble A	161
2°- Le problème du continu et les ensembles de mesure nulle.....	178
1°- Un problème de constructivité.....	185
III – Zoom sur l'additivité dénombrable : le théorème fondamental	190
1°- Théorème fondamental : démonstration des Leçons-1898.....	195
2°- Théorème fondamental : démonstration de la thèse de 1895	212
3°- Borel a-t-il démontré constructivement son théorème ?.....	226
IV – Conclusions	240
1°- Domaine de l'effectif et de l'existant chez Borel 1895-1898.....	240
2°- La procédure effective chez Borel 1895-1898.....	245

Partie II - Épistémologie

.1 - INTRODUCTION	252
I- Les existants mathématiques chez Borel (1898) – rappel.....	254
1°- Liste brute	255
2° - Relation avec l'effectivité.....	257
3° - Classement.....	257
II- Effectivité et procédure effective (Borel, 1895-1898).....	259
1°- Effectivité et procédure effective chez Borel	260
2°- Retour sur Kronecker.....	264
3°- Types de procédures effectives	271
.2 –FONDEMENTS EPISTEMOLOGIQUES DE L'EFFECTIVITE.....	277
I – Effectivité et Intuitionisme	278
1°- La preuve intuitionniste et la procédure effective	279
2°- Générale, potentielle et virtuelle.....	288
II - L'assertabilité.....	298
1°- Le point de vue anti-réaliste classique.....	298
2°- Le point de vue anti-réaliste strict	305
III- Effectivité et acte mathématique cognitif	331
1°- Preuve, intuition, évidence, acte.....	333
2°- Intentionnalité de l'acte, contenu de l'acte.....	347
3°- Application du schéma à 9 cas pratiques	354
4°- Preuve intuitionniste et effectivité : cinq cas.....	368
.3 –MODES DE CONNAISSANCE	384
I - Le principe de conservation épistémique.....	385
II- L'inférence logique à contenu mathématique	408
III- Accessibilité actionnelle	422
IV- Les architectures de Poincaré (Detlefsen-1992).....	442

Partie III - Conclusion

.1 –GESTES AUTHENTIQUES	486
I- Les objets dans la pensée mathématique – Maurice Caveing.....	486
II- Nature du geste – Jean Cavailles.....	498
III- Théâtralité du geste – Gilles Châtelet	506
IV- Embryogenèse des modes mathématiques	509
.2 –L’INFERENCE LOGIQUE A CONTENU.....	513
I- Comparaison.....	514
II- Nature et dynamique des gestes logiques à contenu.....	519
III- Sûreté et robustesse.....	522
.3 –CONCLUSION	526
I- Le mode logique à contenu.....	527
II- Le mode effectif-authentique.....	530
III- Coopération	532
IV- La formalisation de l’effectivité	533
BIBLIOGRAPHIE	537
Table de matière élargie.....	559
Annexe 1 : Textes en version originale.....	565

AVANT PROPOS

Avant de démarrer l'étude historique de la constitution de la notion d'*effectivité* chez Émile Borel (entre 1895 et 1898) dans le respect des règles historiographiques, nous profitons de l'Avant-propos pour commettre une entorse méthodologique : nous allons éclairer le passé à la lumière du présent, faire une lecture "à rebours" des événements afin, d'abord, d'ancrer notre sujet dans son contexte, ensuite – surtout – de dévoiler nos motivations et intentions. Les concepts et les néologismes dont nous nous servons dans cet avant-propos sont d'inspiration *néo-intuitioniste* et possèdent, tous, leurs références et leurs définitions, que nous donnerons dans les chapitres consacrés à la construction de notre outillage épistémologique (Partie II).

I - Pourquoi l'effectivité

« Les machines de Turing, conçues à l'origine pour la solution de problèmes purement logiques, sont également, aujourd'hui, un modèle théorique des calculateurs universels que sont les ordinateurs. L'usage d'une notion de machine dans un domaine traditionnellement considéré comme une science du raisonnement correct, un instrument d'analyse du langage et des énoncés, et même un exercice du jugement ou un art de penser, pourrait passer pour une curiosité s'il était marginal ou singulier. Mais les machines abstraites, ainsi que d'autres formalismes élaborés pour l'étude des

notions de calcul et de procédure effective, sont devenus l'un des principaux outils du logicien¹ [...].

Comment une discipline dont l'intérêt philosophique principal est d'ordre épistémologique, gnoséologique ou ontologique en vient-elle à traiter des calculs, des algorithmes et des machines ?² »

Dans son Introduction de *La machine en logique*, Pierre Wagner a exprimé une question que nous nous posons depuis notre découverte, dès les années de lycée, de l'œuvre et de la vie de Turing, de Gödel et de Von Neumann. A l'époque c'est sous la forme d'un livre, *La Guerre Secrète*³ - donné par mon père puisque « *tu veux faire des maths* » - , que nous avons découvert cet inexplicable paradoxe qui fait que ces choses si abstraites – les nombres – peuvent se "matérialiser" et avoir une action directe et physique sur le monde et la vie des hommes. C'est là que nous avons découvert le nom de Turing et entrouvert la porte de l'univers qui deviendrait l'objet de notre thèse d'histoire des sciences. Au cours des années, les lectures des œuvres de Turing et Gödel se sont additionnées mais n'ont pas résolu le paradoxe, au contraire : plus nous en apprenions moins nous comprenions comment l'ordinateur – c'est en ces termes que nous exprimions la "chose" à l'époque – a pu émerger d'une pensée orientée vers la pure mathématique et la logique. L'étonnement était d'ordre existentiel, car il nous semblait que ce phénomène reflétait le paradoxe de la condition humaine elle-même – physique, biologique et simultanément intellectuelle et rationnelle... Bien des années après, nous avons décidé d'en finir avec ce questionnement au moyen d'une thèse, décision qui a pris tout son sens quand, en 1999, notre futur directeur – Jean-Jacques Szczéciniaż – nous a signalé l'existence du livre de Pierre

¹ **Wagner**, *La machine en logique*, PUF, coll. Science, histoire et société, 1998, p.1

² *Ibidem*, p.12

³ **Cave Brown**, *La guerre secrète*, Ed. Pygmalion, 1981.

Wagner, *La machine en logique...* Aujourd'hui, dix ans plus tard, à l'issue d'un (très) long cheminement, l'étonnement demeure intact, mais il s'est paré de quelque connaissance plus profonde si ce n'est des raisons, du moins des conditions dans lesquels ce phénomène – la machine en mathématique – est advenu. La question a été apprivoisée...

Au démarrage de la thèse, c'est donc le livre de P. Wagner qui nous a mis sur la bonne voie :

« *La notion de procédure effective est l'une de celles qui établissent les rapports les plus étroits entre la logique et les machines, et [...] il s'agit bien du problème originel et central de la théorie de la calculabilité.* »⁴

Il fallait donc, pour comprendre l'émergence de la machine dans la pensée logique et mathématique, cibler les concepts d'*effectivité* et de *procédure effective*, objets cognitifs étranges qui – selon Wagner – avaient été les vecteurs par lesquels la "catalyse" mécanique s'était faite, et au moyen desquels la machine avait fait irruption explicitement (machines de Turing, thèse de Church-Turing, etc.)... Ainsi, l'*effectivité* semblait être historiquement le dernier concept non *explicitement* mécanique dans le processus d'émergence de la machine. Le mystère du "passage", s'il existait, se trouvait dans ce concept... et c'est ce passage qui nous intriguait.

Mais pour être en mesure de comprendre les termes mêmes du problème, notre formation d'ingénieur (et DEA de physique) était amplement insuffisante... Et cela nous a pris des années pour assimiler les connaissances techniques et historiques, et savoir manier le(s) langage(s)

⁴ Wagner, *La machine en logique*, p.17

adéquats. Ainsi, des dix années de thèse, les trois premières ont été consacrées à ce pur apprentissage de base :

- D'une part, le matériau historique et son contenu technique : l'histoire de la *crise des fondements*, la théorie naïve des ensembles de Cantor, les travaux fondateurs de Hilbert, le paradoxe de Richard, les deux articles de Zermelo sur la fonction de choix, l'alternative intuitionniste proposée par Brouwer, les théorèmes de Gödel, la machine universelle de Turing, etc.

- D'autre part, le matériau des épistémologues contemporains, disons depuis 1970, de Dummett jusqu'à Dubucs, Detlefsen, Martin-Löf, puisé dans leurs écrits – et dans les excellents cours de Jean Mosconi à l'IHPST (concernant Polya, Tymoczko, etc.).

Puis il nous a fallu nous plonger dans les mathématiques et la logique : apprendre les rudiments de cette dernière (logique et calcul des propositions, logique et calcul des prédicats)⁵ et comprendre leur historicité – nous avons suivi pendant un an les tout aussi excellents cours de Jacques Dubucs à l'IHPST. Concernant les mathématiques, nous avons dû étudier plusieurs théories (dont celle de la mesure de Borel) aidés un peu par notre formation reçue en classes préparatoires (Math Sup et Math Spé).

Bref, les trois premières années de thèse n'ont été qu'une remise à niveau avant la thèse. Puis ont suivi quatre années d'interruption pour des raisons professionnelles et de santé. La reprise de la recherche, en 2007, fut graduelle, pour enfin se transformer en une véritable thèse.

De ce point de vue, notre première recherche du sens de l'effectivité nous a conduit à une déception : les différents auteurs consultés en parlaient comme si la notion était indissociable du concept de récursivité

⁵ Notre livre de référence a été : **Ruyer**, *Logique*, PUF, 1990.

ou de l'idée de processus mécanique. Autrement dit, ces auteurs prenaient pour point d'origine une notion "intuitive" ayant déjà subi une élaboration par rapport à son sens initial, comme si la généalogie de l'effectivité démarrait avec et par Hilbert, dans les années 1920, voire carrément avec Church et sa thèse.

Ainsi, comme l'écrivait Daniel Lacombe en 1960 dans *La théorie des fonctions récursives et ses applications*⁶, au chapitre 6.2. L' « effectivité » au sens intuitif (p.438-442):

« Une application φ de \mathbf{N}^p dans \mathbf{N} est dite effectivement calculable s'il existe un procédé général et "uniforme", défini une fois pour toutes, permettant de passer de chaque p -uplet (x_1, \dots, x_p) à la valeur $\varphi(x_1, \dots, x_p)$ au moyen d'une suite finie et effectivement déterminée d'opérations effectivement réalisables. [...] Un sous-ensemble E de \mathbf{N}^p sera dit effectivement décidable s'il existe un procédé uniforme permettant de reconnaître, pour chaque p -uplet (x_1, \dots, x_p) , au terme d'une suite finie et effectivement déterminée d'opérations élémentaires effectivement réalisables, si (x_1, \dots, x_p) appartient ou non à E . »⁷

Et Lacombe d'ajouter à la fin du chapitre :

« Remarque C. - Dans l'expression "effectivement calculable" ou "effectivement décidable", l'adverbe "effectivement" est souvent remplacé par mécaniquement. On fait ainsi allusion à la notion périmathématique (assez vague) de "machine finie", notion dont

⁶ **Lacombe**, *La théorie des fonctions récursives et ses applications*, in Bulletin de la société mathématique de France, 88, 1960, p.393-468.

⁷ Ibidem. P.438-439

les machines de Turing (entre autres) constituent une traduction mathématique possible. »

On retrouve le même type d'interprétation par exemple chez Gochet et Gribomont⁸, au chapitre 2.3. *Contraintes associées à la calculabilité* (p.79-85), où les auteurs considèrent que la notion intuitive d'effectivité est celle donnée par Church dans sa thèse : après avoir rappelé les exigences d'effectivité que doivent satisfaire les systèmes formels selon Church-1956⁹, les auteurs écrivent (p.81) :

« Les exigences imposées par Church reviennent à dire qu'on doit pouvoir reconnaître par algorithme les formules, les axiomes, les règles et les démonstrations. » Puis : *« La notion d'effectivité utilisée dans les paragraphes qui précèdent est une notion intuitive aux contours flous. »*

Nous pouvons encore citer Largeault :

⁸ **Gochet, Gribomont**, *Logique, méthodes pour l'informatique fondamentale*, Vol. 1, Hermes, 1990.

⁹ Exigences de Church citées par Gochet et Gribomont (p.79-80) suivant Church-1956 : 1) « la spécification des symboles primitifs doit être effective en ce sens qu'il doit y avoir une méthode par laquelle, chaque fois qu'un symbole est donné, on peut toujours déterminer de manière effective s'il figure ou non parmi les symboles primitifs » ; 2) « la définition d'une formule bien formée doit être effective en ce sens qu'il y a une méthode par laquelle, chaque fois qu'une formule nous est présentée, nous pouvons déterminer de manière effective si elle est bien formée ou non » ; 3) « la spécification des axiomes doit être effective en ce sens qu'il y a une méthode par laquelle, chaque fois qu'une formule nous est présentée, nous pouvons déterminer de manière effective si elle figure ou non parmi les axiomes » ; 4) « les règles d'inférence, prises ensemble, doivent être effectives dans le sens suivant : il doit y avoir une méthode par laquelle, chaque fois qu'une formule est présentée comme découlant d'autres formules par inférence immédiate, on puisse toujours déterminer de manière effective, si l'inférence proposée est conforme ou non aux règles d'inférence. De ces exigences il suit que la notion de preuve est effective en ce sens qu'il existe une méthode par laquelle, chaque fois qu'une suite finie de formules est donnée, on peut toujours déterminer de manière effective si celle-ci est une preuve ou non. »

« Effectif, parfois synonyme de mécanique, signifie que les instructions de la procédure sont exécutables par une machine, i.e. par un dispositif doué d'un comportement local prédictible, chaque étape étant gouvernée par une règle. »¹⁰...

Et nous pourrions multiplier les exemples.

A la lecture des rares ouvrages évoquant l'effectivité, notre impression était que son analyse "regardait par dessus son épaule" vers la récursivité. Cela se comprend si – comme c'était le cas chez les auteurs précités – l'analyse vise à clarifier des éléments particuliers de l'histoire de ce processus de formalisation de la notion vague d'effectivité¹¹. Mais cela était stérile pour notre travail, puisque justement, nous voulions nous placer avant l'apparition explicite de la machine, c'est-à-dire dans un cadre où la machine n'existe pas encore en mathématique, où elle n'est pas déterminée historiquement. De fait, au début de notre recherche nous n'avons pas dissocié l'effectivité pré-hilbertienne de son devenir historique, ce qui nous a fait tomber dans le piège de revivre – ou plutôt d'accompagner imparfaitement – le cheminement de la formalisation du concept jusqu'à la thèse de Church-Turing, et de conclure que l'effectivité est une proto-récursivité en devenir, que *d'une certaine manière* l'effectivité d'avant Hilbert¹², Turing, Kleene et Church contenait

¹⁰ Largeault, *La logique*, coll. *Que s'ais-je ?*, PUF 1998. P.58.

¹¹ Nous utiliserons désormais des raccourcis commodes ("transformation de l'effectivité en récursivité", "formalisation de l'effectivité", etc.) pour signifier l'identification robuste par Church et Turing entre le caractère effectif (d'une procédure, d'une démonstration, etc.) et les propriétés de récursivité (selon la théorie des fonctions récursives générales de Gödel-Herbrand), de Turing-calculabilité et de λ -définissabilité (de Church et Kleene), dont Church et Turing ont prouvé l'équivalence formelle.

¹² D'avant le Hilbert des années 1920.

le concept de *calculateur humain*, de *machine de Turing universelle*, ce qui est historiquement vrai (puisque c'est ainsi que cela s'est passé) mais historiographiquement faux¹³ et, surtout, sans intérêt pour notre propos.

C'est notre directeur de thèse qui nous a fourni le moyen d'éviter ce piège : analyser l'*effectivité* dans l'œuvre strictement mathématique d'un auteur n'ayant pas participé directement au processus historique de formalisation. Concrètement, il nous a aiguillé vers Émile Borel et sa théorie de la mesure (1895-1898). Pourquoi ? C'est en cours de route que nous l'avons compris.

De fait, notre projet initial était bien vaste : dresser une "typologie" de l'effectivité selon plusieurs auteurs, dont Kronecker, Borel, Lebesgue, Hilbert (dans la décennie 1900). Ce programme a failli avoir raison de nous... Nous n'avons donc gardé que Borel et sa théorie de la mesure, ainsi que quelques éléments de la théorie de la mesure de Lebesgue et des conceptions de Kronecker, laissant pour plus tard l'étude comparative approfondie entre toutes ces conceptions (fort différentes) de la notion d'effectivité. Ce qui nous a conduit à la formulation définitive des objectifs et de la problématique de notre thèse...

Avant de les aborder, précisons un dernier point : nous nous servons de théories mathématiques dans la mesure où elles nous apportent des éléments sur notre sujet, mais notre étude *ne porte pas* sur ces théories, leur évolution, leur contenu propre. Aussi, sauf en cas de nécessité, nous

¹³ Selon Marc Bloch, l'"*obsession embryogénique*" peut faire croire aux historiens que "*les origines sont un commencement qui explique. Pis encore : qui suffit à expliquer*". Dans **Marc Bloch**, *Apologie pour l'histoire*, Librairie Armand Colin, Paris, 1974, p.38. Sorte de résurgence de la conception scolastique du "*S est P*". Voir **Leibniz**, *Recherches générales sur l'analyse des notions et des vérités*, J.B. Rauzy (éd.), coll. *Epiméthée*, P.U.F, 1998.

n'en ferons pas l'histoire ni ne donnerons leur formulation actuelle (ce qui sort du cadre du présent travail).

II- Objectifs programmatiques et problématique de la thèse

Notre thèse s'inscrit dans un programme de recherche plus large dont nous donnons ci-dessous les points importants.

Recherche historique

Etude comparative de l'effectivité :

- chez Borel
- chez Lebesgue
- chez Kronecker
- chez Hilbert (1900-1918)

Formes implicites et explicites de la pensée effective :

- chez les réalistes : Cantor, Hadamard, Zermelo, etc.
- chez les constructivistes et intuitionnistes : Poincaré, Brouwer etc.

Recherche épistémologique

- Construction d'une méthodologie d'analyse de cette notion

- Construction d'un système rendant compte de la notion en termes d'actes mathématiques (cognitifs).
- Application de notre méthode à l'analyse de l'histoire des transformations de l'effectivité en récursivité (1920-1937)
- Caractérisation cognitive de la notion d'effectivité et généalogie de l'apparition de la machine en mathématiques.

THESE

Nous nous tiendrons dans le présent travail aux objectifs suivants :

- typologie de l'effectivité chez Borel entre 1895 et 1898
- éléments d'une méthodologie d'analyse de la notion
- esquisse d'une caractérisation de l'effectivité selon des critères cognitifs.

Plus concrètement :

Après une mise en contexte historique et un exposé sur les éléments pertinents (pour notre propos) de la théorie de la mesure de Borel (**Partie I**), nous entamerons l'étude épistémologique : le concept de preuve et la théorie de l'acte (cognitif) mathématique (**Partie II**). Dans la conclusion (**Partie III**) nous procéderons à l'esquisse d'une phénoménologie de l'effectivité.

Enfin, nous donnerons dans un texte annexe (séparé de la thèse) une esquisse de l'évolution de la notion chez Borel entre les années 1898 et 1905, afin de baliser les étapes de ce qui pourrait constituer la suite de notre travail de thèse.

III- Pourquoi Borel et ses Leçons - 1898 ?

BOREL

Les avantages d'étudier Borel dans le cadre de l'analyse de l'effectivité sont nombreux. En voici les principaux :

- Dans ses écrits touchant au concept de mesure, entre 1895 et 1898, Borel a "pollué" le langage purement technique pour rendre compte des raisons philosophiques qui le présidait. Comme l'écrit Alain Michel :

« Borel aborde la théorie [de la mesure] avec des idées directrices précises, qui ne concernent pas seulement des points techniques, mais engagent un style d'appréhension de l'objet mathématique. [...] Borel présente l'exemple, précieux pour l'épistémologue, d'un mathématicien créateur soucieux de restituer dans son discours de mathématicien, les principes qui ont guidé le geste de sa création »¹⁴.

Signalons néanmoins que chez Borel ces motivations et croyances exprimées masquent parfois des pratiques contraires, le "geste de sa création" - pour reprendre l'expression "cavaillésienne" de Michel - semble souvent déborder son "discours de mathématicien".

- Borel a poussé ses collègues de l'École analytique, en particulier Lebesgue, à clarifier leur position épistémologique. Sous son influence, les discussions ne se sont pas cantonnées aux points techniques, elles ont aussi donné lieu à des échanges extra-mathématiques qui éclairent les motivations et les croyances de chacun des acteurs. En particulier,

¹⁴ Michel, *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*, col. *Mathesis*, Vrin, 1992, p.48-49.

l'extension du champ de l'effectif/constructif¹⁵ devint le centre des discussions entre Borel et Lebesgue au temps de l'écllosion de la théorie moderne de l'intégration. L'opposition (le plus souvent réelle, occasionnellement purement *de jure*) entre la méthode "constructive" de Borel et celle "descriptive" de Lebesgue, met en lumière deux conceptions du contrôle cognitif des procédures mathématiques, quoique chez Borel on trouve parfois "superposées" conceptions et pratiques hétéroclites (nous le verrons).

Autres raisons :

- Borel précède et ne participe pas au processus de formalisation de l'effectivité (Hilbert).
- La notion est centrale dans son travail mathématique.
- Borel s'en est servi comme critère épistémologique pour jauger les existants mathématiques.
- Borel lui a donné une puissance opératoire très forte (jusque dans l'infini dénombrable réalisé et l'infini non dénombrable *donné*), et en a extrait un concept mathématique (l'énumérabilité effective)...
- On assiste chez Borel à une quasi-mathématisation de la notion, dans une direction qui ne coïncide pas *a priori* avec celle de Hilbert.

LEÇONS SUR LA THEORIE DES FONCTIONS – 1898

- La notion d'effectivité y est très présente, voire centrale
- Les *Leçons* ont été publiées un an après les paradoxes de Cantor et de Burali-Forti (1897), donc déjà dans la dynamique de la réflexion sur la légitimité de certains existants de la théorie naïve de Cantor,

¹⁵ Pour le moment, nous ne distinguerons pas ces deux concepts.

mais avant le déclenchement de la "crise des fondements" (Hilbert – 1900 ; Russell – 1901) : donc pas influencées par ces évènements.

- L'effectivité chez Borel est déjà marquée par une conception plus large que celle de Kronecker (nous l'étudierons).
- 1^{er} texte long de Borel (par rapport aux articles précédents), où l'on peut suivre le développement d'une théorie fortement contrainte par des considérations épistémologiques.
- Les *Leçons...* sont un point de départ de conceptions épistémologiques qu'il ne cessera d'approfondir et de modifier par la suite.
- Ce texte contient un point singulier (définition de la mesure d'un ensemble non mesurable B), à la lisière entre le domaine du constructif et celui du descriptif. Il sera notre point d'appui pour démarrer et irradier (en amont et en aval)

PARTIE I

.1 - INTRODUCTION

I- Contexte historique

Dans la présente étude nous nous focaliserons sur la pensée de Borel durant la période 1895-1898, intervalle relativement court au regard du demi-siècle durant lequel l'effectivité est devenu un sujet de réflexion pour une certaine frange de la communauté mathématique, précisément entre les années 1880, moment où ce *mot-notion* prend racine dans le vocabulaire de certains mathématiciens avec un sens particulier s'éloignant du sens courant (dans le langage naturel), et les années 1936-1937, lorsqu'il est identifié robustement au concept mathématique de *récurtivité*, de *Turing-calculabilité* et de λ -*définissabilité* par Church¹⁶, Kleene et Turing¹⁷. Ainsi, quelques rappels sur cette période de 50 ans s'imposent.

Les rappels historiques sont déjà, bien évidemment, une interprétation orientée par l'objectif de notre thèse (supposée ne pas exister encore, mais en réalité déjà écrite). Nous avons donc choisi de nous focaliser sur quelques points particuliers, ceux qui intéressent strictement notre travail, selon un point de vue partiel (mais non partial),

¹⁶ Church, *A Note on the Entscheidungsproblem*, in *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1, 1936, pp.40-41, et *Correction to a Note on the Entscheidungsproblem*, pp.101-102.

¹⁷ Turing, *On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, in *Proceedings of the Mathematical Society*, 2, vol.42 (1936-1937), pp.230-265. Repris dans Turing, Girard, *La machine de Turing*, Sources du Savoir, Seuil, 1995, pp.42-104.

et passerons sous silence une multitude de faits dont certains sont, sans doute plus importants et décisifs historiquement. Aussi, nous ne prétendons pas dire ce qui s'est passé, mais le peu que nous en disons dans ce rappel nous servira par la suite.

1°- Kronecker et Cantor

a) Kronecker

De fait, la naissance de l'effectivité en tant que notion individualisée/autonome semble se confondre avec celle de la théorie des ensembles de Cantor (peut-être la précède-t-elle)¹⁸. Dès la fin du XIXe siècle, les termes "effectivement", "procédure effective", etc., intègrent le vocabulaire des mathématiciens - notamment par la voix de Kronecker - comme expressions qualifiant de manière générale des raisonnements mathématiques "robustes", "authentiques" car construits "de bas en haut" à partir d'opérations "sûres" sur des matériaux non moins "sûrs".

Kronecker est un des premiers pour qui l'usage du terme *effectif*, dans un sens plus mathématique que son sens courant, est attesté. Molk écrit dans *l'Encyclopédie des sciences mathématiques pures et*

¹⁸ En particulier, les définitions récursives de Dedekind (1888) des entiers naturels par les concepts d'ensemble, d'unité et de successeur sont, d'une manière implicite et par analyse rétrospective, liées au concept de procédure effective au sens de Hilbert. **Dedekind**, *Was sind und was sollen die Zahlen*, in Ewald 1996, p.790. Mais, contrairement à la conception kroneckerienne puis hilbertienne, la procédure de construction n'est pas pensée comme séparée de l'objet construit (les nombres naturels).

*appliquées*¹⁹, que selon Kronecker, les notions dont on doit se servir pour étudier les propriétés des nombres

*« doivent avoir un caractère arithmétique et non logique seulement, en sorte qu'elles ne sauraient porter que sur des groupes dont chaque élément puisse être **effectivement** obtenu au moyen d'un nombre fini d'opérations »*²⁰.

Dans cette citation, la procédure effective de construction (nombres) et le caractère effectif global d'une démonstration ne sont pas clairement séparés, même si Molk précise ensuite que Kronecker considère que pour effectuer la démonstration d'une proposition arithmétique,

*« il faut donner un **procédé** permettant d'obtenir, au moyen d'un nombre fini d'opérations arithmétiques au sens ancien du mot, effectués sur les éléments que l'on envisage, le résultat qu'énonce la proposition à démontrer »*²¹.

Retenons, en première approche, la nature du concept d'effectivité kroneckerienne : une procédure effective de calcul ou de démonstration est telle que chaque élément (du calcul ou de la démonstration) peut être obtenu au moyen d'un nombre fini d'opérations arithmétiques *au sens ancien du mot*.

¹⁹ Molk, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, T.1, réédité par les Editions Gabbay, 1992.

²⁰ Molk, *ibid.*, p.159. Le gras est de nous.

²¹ Ibidem.

L'interprétation de cette effectivité kroneckerienne est en soi un sujet complet de recherche. Mais nous pouvons en fixer quelques éléments. Les opérations arithmétiques "au sens ancien du mot" dont parle Kronecker seraient donc celles qui avaient cours du XIX^e siècle, avant notamment Dedekind et Cantor. Ces opérations incluent des *principes* portant sur des opérations arithmétiques, comme celui du *tertio non datur* (TND) et celui de *l'induction complète* sur les entiers (PIC)²². La question essentielle qui se pose est alors le statut du PIC et du TND quand on les applique à la suite naturelle des entiers ou à tout objet arithmétique (suite, série, etc.) indicé par la suite des entiers naturels : est-ce qu'une démonstration utilisant le PIC ou le TND est effective aux yeux de Kronecker ? La réponse dépend, nous semble-t-il, de l'étendue qu'on leur donne. On peut supposer qu'ils sont admis par Kronecker – ou du moins par une grande majorité de "kroneckeriens" – dans la perspective aristotélicienne de l'infini potentiel ou du fini *quelconque*, qui est la perspective classique²³. On admettrait donc l'utilisation du PIC et du TND sur ce fini quelconque mais pas quand la notion est assimilée à l'ensemble des entiers considérés comme réalisés. Bref, le PIC et le TND ne sont pas en-soi questionnés, c'est leur interprétation (ou leur extension) qui peut poser un problème aux yeux de certains mathématiciens du XIX^e siècle.

Comme l'a écrit Hilbert lui-même dans ses *Lectures de Göttingen* en 1920⁽²⁴⁾ :

²² Dans le processus de projection de la métamathématique dans la mathématique, le PIC et le TND deviendront effectivement des opérations arithmétiques.

²³ Nous ne voulons pas dire que l'infini potentiel et le fini quelconque sont des concepts équivalents. Mais, à l'échelle de "résolution" de notre propos ci-dessus, nous les traitons comme tels.

²⁴ **Hilbert**, *Probleme der mathematischen Logik*, 1920, traduit (partiellement) par **Ewald** dans *From Kant to Hilbert*, vol.II, Clarendon Press, Oxford, 1996, p.943-946. La traduction en français est nôtre (nous n'avons pas trouvé de traduction française).

« Kronecker lutte contre tout concept dans la mesure où celui-ci rend possible des propositions dont la validité n'est pas décidable en un nombre fini d'opérations. Par exemple, il autorise le concept d'irréductibilité d'une fonction rationnelle entière (à coefficients intégraux) uniquement sous la condition qu'un procédé fini soit donné pour décider de l'irréductibilité ; Kronecker m'a dit personnellement que la proposition selon laquelle il y a une infinité de nombres premiers n'a pas de sens jusqu'à ce qu'on ait montré qu'après chaque nombre premier il y a un autre nombre premier à l'intérieur d'un intervalle numérique déterminable – comme l'a fait Euclide quand il a prouvé qu'il devait y avoir au moins un nombre premier entre un premier p et le nombre $p! + 2$. Des propositions comme le théorème de Dirichlet, selon lequel dans toute progression arithmétique (dont la différence n'est pas divisible par l'élément initial) il y a une infinité de nombres premiers, il les déclare comme inadmissibles et nécessitant supplémentation.

Et Kronecker restreint aussi bien la logique. [...] Il s'en tient à des propositions purement logiques comme le tertium non datur, dont il n'admet l'applicabilité que sous la condition qu'il y ait la possibilité de décider de la question d'existence par une procédure finie. »²⁵

Comme le précise Ewald²⁶ :

« Kronecker avait des opinions fortes sur l'ontologie mathématique : de son point de vue, seuls les entiers naturels existent authentiquement ; **tous les autres objets mathématiques**

²⁵ Op. cit., p.944.

²⁶ Op. cit., p.942.

légitimes doivent être construits à partir d'eux en un nombre fini de pas. Il n'avait aucune tolérance pour les collections infinies complètes ou pour les définitions non constructives. »

De fait Kronecker pourrait être considéré comme le premier des constructivistes, celui qui inaugure la longue carrière du Constructivisme en tant qu'épistémologie forte.

*« Une première manifestation nette de mathématiques constructives a été donnée par Kronecker (1823 – 1891) [...]. Ecrivent Troelstra et Van Dalen dans *Constructivism in Mathematics* de 1988²⁷. Le constructivisme de Kronecker est plus aisément reconnu dans son point de vue sur le statut de certains objets mathématiques. Dans son essai "Über den Zahlbegriff" (1887) il esquissait le projet d'"arithmétiser" l'Algèbre et l'Analyse ; c'est-à-dire de fonder ces disciplines sur la notion la plus fondamentale de nombre. Il restreignait explicitement, par référence à Gauss, cette arithmétisation à l'analyse et à l'algèbre, la géométrie et la mécanique étant laissées dans une existence indépendante, [considérées] comme n'étant pas déterminées purement par notre esprit, mais comme se référant à une certaine réalité extérieure à l'esprit.[...] Une conséquence du projet d'arithmétisation de Kronecker était qu'il considérait une définition (en théorie des nombres et en algèbre) comme acceptable uniquement si l'on pouvait vérifier concrètement en un nombre fini de pas si un nombre donné tombait ou non sous sa coupe. Ce point de vue le conduisit tout naturellement à sa critique de l'existence "pure" de preuves. Il institua que l'existence d'une preuve*

²⁷ Troelstra & van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, vol.1, North-Holland, 1988, p.17-18. La traduction est nôtre.

pour un nombre pouvait seulement être considérée comme totalement exacte si elle contenait également une méthode pour trouver le nombre dont l'existence était prouvée (Kronecker 1901, p.VI). »

Si l'on cherchait une grande-paternité à la théorie de la preuve et, partant, à l'effectivité, les pistes données par Troelstra et Van Dalen seraient les premières que nous emprunterions (le "Über den Zahlbegriff" de 1887 de Kronecker et la référence à Gauss). Mais c'est plutôt devant nous que nous regardons, et Kronecker est un bon début.

Reprenons l'exemple des nombres premiers et indiquons ce qu'en première approche, nous estimons correspondre à l'idée kroneckerienne d'une démonstration effective (mais qui n'en épuise pas tout l'extension). Considérons donc la proposition classique : il y a une infinité de nombres premiers.

Avant Cantor, cette proposition n'était pas problématique puisqu'il était implicite que le terme "infinité" était à prendre au sens potentiel d'Aristote : toute suite (finie) de nombres premiers peut être augmentée en nombres premiers autant qu'on le désire (si on s'en donne les moyens) - on est bien-là dans le fini quelconque (toute suite finie...). Si l'on admet l'hypothèse que Kronecker, ou du moins les kroneckeriens, acceptent les raisonnements arithmétiques sur le fini quelconque, une démonstration effective de la proposition pourrait être la suivante (il y en a d'autres) :

Proposition : "après tout nombre premier, il y en a un autre"

Soit P un nombre premier quelconque donné (IP)

Soit $P\#$ le produit $P_1.P_2.P_3...P_j.P$, où $P_1.P_2.P_3...P_j$ est la suite (finie) des nombres premiers qui précèdent P

On forme le nombre $N=P_1.P_2.P_3...P_j.P + 1$

N est premier (et $N > P$) et la proposition est démontrée

En effet, si N n'est pas premier (TNDf₁)

Alors on peut écrire $N=Q.R$ avec R premier $\neq 1$ et Q entier

R est supérieur à tous les P_i et à P , et la proposition est démontrée.

En effet, si R est égal à l'un des P_i ($P_i \neq 1$) (TNDf₂)

$$Q.P_i = P_1.P_2.P_3...P_j.P + 1$$

$$Q = (P_1.P_2.P_3...P_j.P)/P_i + 1/P_i$$

Or $(P_1.P_2.P_3...P_j.P)/P_i$ est un entier car P_i fait partie de la suite $P_1.P_2.P_3...P_j.P$

Or $1/P_i$ n'est pas entier.

Donc Q n'est pas entier, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc N est un nombre premier supérieur à P

Nous avons noté TNDf₁ et TNDf₂ les lieux où le principe du *tertio non datur* dans sa forme affaiblie (démonstration par l'absurde) est utilisé dans la démonstration : la négation d'une propriété d'un entier implique l'affirmation de la propriété contraire ($\neg\neg p \vee \supset\neg p$), car dans la perspective du fini (même infini potentiel) tout entier vérifie nécessairement la (méta) propriété TND : $\forall p(n)\forall n, p \vee \supset\neg p$, p étant une propriété arithmétique (au sens classique) sur les entiers.

Dans la démonstration, on utilise une imbrication de deux raisonnements par l'absurde : la conclusion "Q n'est pas entier" permet de remonter vers l'hypothèse : \neg "Q est entier" \rightarrow \neg " $N=Q.R$ avec R premier $\neq 1$ et Q entier" \rightarrow \neg " N n'est pas premier". Donc N est $\neg\neg$ premier. Bref, en vertu de la forme affaiblie du TND, N est premier. CQFD

Cette démonstration reste dans le cadre aristotélicien de l'infini potentiel (ou fini quelconque) car à aucun moment, nous n'avons fait appel à autre chose qu'au concept de nombre, ou d'ensemble fini de nombres quelconques. Le pivot de la démonstration est un principe d'engendrement de nombres premiers toujours plus grands :

$N = P_1.P_2.P_3...P_j.P + 1$; $M = P_1.P_2.P_3...P_j...P_{j+h}.N + 1$ (avec $h \geq 1$) ; etc. A moins de rejeter le concept d'entier quelconque (ou d'ensemble fini quelconque), c'est-à-dire de remettre en question le concept d'infini potentiel, il est difficile de contester l'existant engendré par cette démonstration, et donc de rejeter la proposition générale : après tout nombre premier, il y en a un autre.

b) Cantor

Ce type de démonstration effective au sens kroneckerien, qui construit robustement un existant, est comparé aux existants de la théorie cantorienne et permet à certains mathématiciens, dont Borel, de questionner ces derniers, peut-être à cause des existants paradoxaux qui ont commencé à émerger (paradoxe de Burali-Forti en 1897, paradoxe du plus grand cardinal de Cantor en 1897²⁸) de la théorie naïve des ensembles exprimée dans la logique de Frege, laquelle contenait des règles de déduction spécifiques au concept d'ensemble (et qui admettait que certains ensembles soient éléments d'eux-mêmes). Ces "existants" sont donc jaugés à l'aune d'autres existants non problématiques : les existants robustes, classiques, génériques, génétiques... *effectifs*. Dans le cas présent, la démonstration ci-dessus pourrait être la même pour un cantorien, et dans un document écrit, on ne verrait aucune différence car celle-ci n'interviendrait qu'au niveau de l'interprétation du résultat : le "constructiviste"²⁹ s'en tenant à l'idée qu'on peut toujours augmenter

²⁸ Communiqué à cette date par Cantor à Hilbert

²⁹ Pour le moment, nous donnons au terme "constructiviste" ("constructivisme") un sens vague : est constructiviste celui qui adhère à la croyance que les objets mathématiques "authentiques" doivent être engendrés par des procédés génétiques (sens "bottom-up") à partir d'intuitions simples et incontestables pour la majorité des mathématiciens, à l'aide de procédés simples, usuels, classiques. De manière générale, nous entendons par constructiviste celui dont la philosophie est proche de celle de Kronecker, même s'il peut adopter un point de vue plus large concernant les règles de constructivité. Plus loin, nous préciserons de manière plus claire.

l'ensemble (fini) des premiers, le "cantorien"³⁰ concluant que l'ensemble des nombres premiers est actuellement infini dénombrable.

Cependant, les deux interprétations conduisent à des divergences explicites dans le langage mathématique dès que la conclusion sert de point d'appui à un raisonnement de type infinitiste, l'exemple-type historique étant celui des ensembles non-dénombrables.

De fait, le résultat obtenu par Cantor avec son procédé de diagonalisation (1891) marque le début de la phase aiguë d'affrontements entre les deux "clans" – dont les dissensions internes sont pourtant énormes –, qui durera toute la période de la "crise des fondements" : les cantoriens, comme Hadamard et Zermelo (même si certains sont prêts à faire des concessions face aux paradoxes), contre les constructivistes, comme Poincaré, Baire, Borel (même si certains ne rejettent pas toutes les "entités" du paradis de Cantor³¹).

Plus précisément, chez les constructivistes, on trouve deux types de positions : il y a ceux, finitistes stricts³² (par exemple Baire), qui rejettent toute idée d'infini actuel et voient dans l'infini potentiel un artifice pratique de pensée qui, *in fine*, ne signifierait rien d'autre que le fini quelconque *donné*. Mais il y a aussi ceux qui, sans rejeter *a priori* le concept d'infini actuel demandent qu'il soit construit dans l'intuition et non postulé axiomatiquement. C'est le cas de Borel. Pour ces derniers, le concept

³⁰ Nous parlons de cantorien par opposition à constructiviste : celui qui considère que l'engendrement des objets mathématiques peut se faire dans le sens "descendant" (top-down) à partir d'existants mathématiques généraux ou abstraits.

³¹ Les cas Hilbert et Lebesgue sont situés plus ou moins à la lisière des deux clans, Hilbert étant plutôt du côté cantorien (même si, pour convaincre les constructivistes, il adoptera leurs contraintes) et Lebesgue du côté constructiviste.

³² Nous utilisons l'adjectif "finitiste" au sens naïf et non pas au sens de Hilbert.

d'infini actuel des entiers (infini dénombrable) n'est pas nécessairement une fiction : Borel le voit comme un existant construit à partir d'une intuition, notre connaissance dans la suite des entiers en tant qu'elle est toujours extensible (nous en parlerons plus loin). En effet, ce kroneckerien "infiniste dénombrable" considère que le concept d'ensemble infini réalisé des entiers est adossé à un principe robuste : l'opération "successeur", qui lui donne une existence constructive. Tous les raisonnements sur cet ensemble (ou sur ses parties), comme l'équicardinalité de \mathbb{N} et $2\mathbb{N}$, sont valides car postérieurs à ce principe de construction (contrairement au cas du non dénombrable actuel).

Alors, pour ces constructivistes infinitistes, ce n'est pas tant le procédé de Cantor qui est contestable, que l'inférence finale : de l'assertion "quelle que soit l'infinité dénombrable réalisée de nombres que l'on se donne, l'on peut toujours construire un nombre n'y appartenant pas", les cantoriciens en tirent naturellement l'assertion "il existe des ensembles (actuels) non dénombrables" (par application du TNDf), tandis que ces constructivistes nient la validité de cette inférence et s'en tiennent, au mieux, à la constatation qu'on ne peut pas dénombrer les réels, c'est-à-dire les ranger dans une liste bien ordonnée dont on contrôle le mode d'ordonnement, sans pour autant croire à l'existence positive de la qualité mathématique d'ensemble "non dénombrable" de réels.

En effet, pour ces derniers, ce concept d'ensemble infini (positivement) non dénombrable découle d'un raisonnement "circulaire" (non prédictif au sens de Poincaré) implicite et fallacieux, issu du TNDf, principe logique qui ne serait mathématiquement correct (selon leur point de vue) que dans le domaine du fini. Là où le raisonnement leur apparaît comme circulaire, c'est que l'idée de l'existence de cet ensemble de tous les réels est implicitement injecté dans l'inférence entre les deux

assertions – “quelle que soit l’infinité dénombrable réalisée de nombres que l’on se donne, l’on peut toujours construire un nombre n’y appartenant pas” → “il existe des ensembles (actuels) non dénombrables” – et donc précède la conclusion, à savoir, l’ensemble de tous les réels est non dénombrable.

In fine, pour les constructivistes infinitistes l’inférence problématique doit être dépliée en les suivantes :

- “quel que soit l’ensemble infini dénombrable de nombres que l’on se donne, l’on peut toujours construire un nombre n’y appartenant pas” (démonstration)

ET

- “il existe un ensemble (actuel) contenant tous les nombres réels” (axiome implicite)

ALORS

- “cet ensemble de tous les nombres est actuellement non dénombrable”.

Le problème pour les constructivistes, c’est que cet axiome ne découle d’aucune construction préalable ni d’aucune intuition robuste et partagée.

Toujours est-il que, même s’il existe un (relatif) consensus entre cantoriciens et constructivistes infinitistes sur la robustesse du procédé de diagonalisation inventé par Cantor, et même si leur divergence ne se manifeste que dans l’interprétation de la conclusion, cette divergence mène à une opposition directe sur des existants mathématiques, comme celle de l’existence d’une fonction de choix dans le non-dénombrable

(Zermelo 1904, 1908), la question du cardinal de l'ensemble des réels, l'hypothèse du continu ($\aleph_1=2^{\aleph_0}$ et $\aleph_1= \text{succ}(\aleph_0)$), etc.

2°- De Hilbert à Turing et Church

a) Hilbert

On considère habituellement que la première impulsion *orientée* du processus historique de transformation de l'*effectivité* en *récurtivité*³³ provient de Hilbert-1900 (³⁴) et notamment de son célèbre "2^e problème" : face aux paradoxes qui commencent à émerger de la théorie naïve des ensembles et des nombres transfinis de Cantor, en particulier le paradoxe de Cantor et celui de Burali-Forti³⁵, Hilbert énonce son *credo* pour la première fois dans sa conférence parisienne "*Sur les problèmes futurs des mathématiques*" :

« Jusqu'ici personne n'a étayé d'aucune preuve, la conviction
[de Hilbert] que tout problème mathématique déterminé doit être

³³ Nous utiliserons le raccourci pratique "transformation de l'effectivité en récurtivité" pour signifier l'identification du caractère effectif (d'une procédure, d'une démonstration, etc.) à la propriété de récurtivité (selon la théorie des fonctions récursives générales de Gödel-Herbrand), de Turing-calculabilité et de lamda-définissabilité (de Church et Kleene).

³⁴ **Hilbert**, *Sur les problèmes futurs des mathématiques, les 23 problèmes*, dans *Compte rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiques tenu à Paris du 6 au 12 août 1900*, Gauthier-Villard, 1902. Réédité par les Editions Jacques Gabay, 1990.

³⁵ **Burali-Forti**, "Una questione sui numeri transfiniti", in *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **11** (1897): 154-164. Hilbert aurait été informé de ce paradoxe, ou du moins du paradoxe de Cantor (du plus grand nombre cardinal) par une lettre de ce dernier datant de 1897. Voir **Georg Cantor**, *Briefe*, p.388-389.

forcément susceptible d'une solution rigoureuse, que ce soit par une réponse directe à la question posée, ou bien par la démonstration de l'impossibilité de la résolution, c'est-à-dire la nécessité de l'insuccès de toute tentative de résolution »³⁶. « *Jamais, en effet, mathématicien ne sera réduit à dire : "Ignorabimus"* »³⁷.

Autrement dit, si **p** est un problème mathématique déterminé, i.e. une assertion qui a un sens mathématique pour la communauté des mathématiciens³⁸ (on suppose que ce sens est le même pour tous), alors : ou bien on peut démontrer que **p** est vrai (et/ou non-contradictoire)³⁹ ou bien on peut démontrer que **p** est faux (et/ou contradictoire), c'est-à-dire que $\neg\mathbf{p}$ est vrai ou non-contradictoire. Hilbert semble donc exclure de son énoncé (peut-être de sa pensée) la possibilité que, quelle que soit l'assertion donnée, on ne puisse démontrer ni qu'elle est vraie/non-contradictoire ni qu'elle est fautive/contradictoire, et *a fortiori*, la possibilité qu'on ne puisse pas démontrer formellement une assertion mathématique vraie.

Une fois sa conviction explicitée (pas d'*Ignorabimus*), Hilbert dresse une esquisse du "programme" qui doit fonder et justifier

³⁶ Hilbert, *op. cit.*, p.11.

³⁷ Hilbert, *op. cit.*, p.12.

³⁸ L'idée d' "assertion qui a un sens pour la communauté des mathématiciens" s'impose à nous le plus naturellement s'agissant de la période pré-axiomatique où les concepts de système formel, de langage-objet, de métalangage, etc. n'existaient pas (ou n'avaient pas le sens actuel). Parmi les assertions mathématiques qu'on exclu de cette classe - car à l'époque elles ne sont pas globalement acceptées - on trouve notamment celles reposant sur les concepts cantorien d'ensemble infini non-dénombrable actuel et, peut-être, d'ensemble infini dénombrable actuel (mais cela est, comme nous le verrons chez Borel, pas si évident).

³⁹ A l'époque, on ne distingue pas encore le vrai du démontrable (on considère *a priori* l'arithmétique élémentaire comme consistante et complète). Hilbert gardera cette conviction jusqu'à Gödel-1931.

mathématiquement cette conviction, c'est-à-dire démontrer sa véracité dans le langage usuel des mathématiciens. Ce proto-programme de Hilbert est une version naïve du véritable Programme qu'il élaborera entre 1917 à 1927, en particulier dans ses textes *Axiomatisches Denken* ("La pensée axiomatique", 1918)⁴⁰, *Neubegründung der Mathematik : Erste Mitteilung* ("Nouvelle fondation des mathématiques : Première communication", 1922)⁴¹ et son célèbre *Über das Unendliche* ("Sur l'infini", 1925)⁴².

Pour l'heure, dans son *Discours* de 1900, Hilbert évoque la nécessité d'"effectuer par voie directe [la] démonstration de la non-contradiction de l'Arithmétique"⁴³, "voie directe" signifiant : une démonstration de consistance absolue, c'est-à-dire sans l'appuyer sur une autre théorie réputée consistante – contrairement à ce qu'il avait fait pour la géométrie en 1899. Et cette voie directe doit s'accomplir en "un nombre fini de déductions logiques". On a là une première définition de l'effectivité selon Hilbert, bien que l'expression "déductions logiques" demande à être clarifiée. Toutefois, même avec cette expression floue, on constate que Hilbert semble avoir repris le schéma tracé par son ancien maître, Kronecker, pour qui, selon Molk, « il faut donner un procédé permettant d'obtenir, au moyen d'un **nombre fini d'opérations arithmétiques** au

⁴⁰ Hilbert, *Axiomatisches Denken*, in *Mathematische Annalen* 78: (1917)1918, p.405-415. Traduction anglaise par W. Ewald, *Axiomatic Thought*, in *From Kant to Hilbert*, vol.II, Clarendon Press, Oxford, 1996, p.1105-1115. La traduction est nôtre (nous n'avons pas trouvé de traduction française).

⁴¹ Hilbert, *Neubegründung der Mathematik : Erste Mitteilung* in *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 1, 1922, p.157–177. Traduction française par J. Largeault, *Nouvelle fondation des mathématiques : Première communication*, in *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.107-130.

⁴² Hilbert, *Über das Unendliche*, in *Math. Annal.*, 95, (1925)1926, p.161-190. Traduction française par J. Largeault, *Sur l'infini*, in *Logique mathématique*. Textes. Armand Colin, coll. U, Paris, 1972, pp. 233-237.

⁴³ Hilbert, *Sur les problèmes futurs des mathématiques, les 23 problèmes*, *op.cit.*, p.15.

sens ancien du mot, effectuées sur les éléments que l'on envisage, le résultat qu'énonce la proposition à démontrer »⁴⁴ (nous détaillons plus loin). Entre « un nombre fini de déductions logiques » (Hilbert) et « un nombre fini d'opérations arithmétiques » (Kronecker), la filiation historique est possible.

Hilbert déclare plus loin dans son *Discours* :

*« Lorsqu'il s'agit de poser les principes fondamentaux d'une science [i.e. l'arithmétique], l'on doit établir un système d'axiomes renfermant une description complète et exacte des relations entre les concepts élémentaires de cette science. Ces axiomes sont en même temps les définitions de ces concepts élémentaires ; aucune affirmation relative à la science dont nous examinons les principes fondamentaux ne sera admise comme exact[e], à moins qu'on ne puisse la tirer des axiomes au moyen d'un **nombre fini de déductions** »*⁴⁵.

Remarquons toute l'ambiguïté de la fin de sa déclaration : « aucune affirmation **relative à** la science dont nous examinons les principes fondamentaux ne sera admise comme exacte, à moins qu'on ne puisse la tirer des axiomes au moyen d'un nombre fini de déductions ». Par "relative à" désigne-t-il les affirmations *sur* l'arithmétique ("l'arithmétique est non-contradictoire") ou les affirmations *de* l'arithmétique ("7 + 5 = 12") ? Peut-être que cette ambiguïté n'est qu'un mirage dans notre regard

⁴⁴ **Molk**, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, T.1, réédité par les Editions Gabbay, 1992, p.159. Le gras est de nous.

⁴⁵ **Hilbert**, *Sur les problèmes futurs des mathématiques, les 23 problèmes*, *op.cit.*, pp.14-15. Le gras est de nous

averti⁴⁶, mais il se pourrait aussi que, déjà en 1900, Hilbert perçoit la possibilité que des assertions *sur* le langage des mathématiques puissent être projetées *dans* ce même langage, ou du moins la possibilité d'une correspondance entre les assertions du langage mathématique et un certain type d'assertion *sur* ce langage (la question est hors du cadre de ce travail).

Dans tous les cas, Hilbert consacra une grande partie de ses efforts – surtout dans la décennie 1920 – à transformer sa conviction philosophique ("*pas d'Ignorabimus*") en une assertion du langage mathématique, dont il est convaincu de la "démontrabilité". Et l'on sait bien que sa réflexion le conduira sur le terrain non pas tant des déductions logiques que sur celui bien plus ardu des fondements des "objets de pensée" mathématiques (selon sa propre expression)⁴⁷.

De fait, pour préciser ce qu'il entend par *démonstration de la consistance de l'arithmétique par voie directe au moyen d'un nombre fini de déductions logiques*, Hilbert présente en 1904, dans son *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik* ("Sur les fondements de la logique et de l'arithmétique", 1904)⁴⁸, un premier plan d'action pour cette démonstration.

⁴⁶ Notamment, en ce qui concerne l'identification de deux niveaux de langage mathématique, et la méthode de traduction des affirmations métamathématiques en langage mathématique (Gödel-1931).

⁴⁷ Dans son texte de 1904, que nous citerons ci-dessous, Hilbert écrit : « *J'appelle objet de pensée ou plus brièvement objet un objet de notre pensée et je le désignerai par un symbole. Considérons d'abord l'objet de pensée 1 (un)...* »

⁴⁸ **Hilbert**, *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, in *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg*, 1904, p.174–185. Traduction française dans **Rivenc & de Rouilhan**, *Sur les fondements de la logique et de l'arithmétique*, in *Logique et fondements des mathématiques – Anthologie (1850 – 1914)*, Bibliothèque scientifique Payot, Payot, 1992, p.245-270.

Nous n'allons pas procéder à l'analyse de ce texte de Hilbert (ni des autres), ce qui allongerait considérablement ce rappel historique. Basons-nous sur les propos de Kosta Došen dans son article *Le programme de Hilbert*⁴⁹ :

« [Hilbert] voudrait que l'on démontre qu'en partant de ces axiomes et en se servant de la logique on ne peut déduire en même temps une formule et sa négation. Les axiomes que Hilbert envisageait au congrès [de 1904] se rapportent à l'arithmétique des nombres réels (ce sont les axiomes de corps, les axiomes d'ordre, l'axiome d'Archimède et un axiome assez étrange qui exige que le domaine du système ne puisse être élargi). »

Bref, Hilbert esquisse en 1904 une première voie directe pour démontrer la consistance de l'arithmétique élémentaire, celle encapsulée par les axiomes de Peano, puis, en toute fin de texte, il dit :

« Les axiomes relatifs à la collection des nombres réels ne diffèrent qualitativement en rien de ceux nécessaires pour définir, par exemple, les nombres entiers. » Puis, « On montrera par la même méthode l'existence non contradictoire des concepts fondamentaux de la théorie cantorienne des ensembles, en particulier, l'existence des alephs. »⁵⁰

⁴⁹ Došen, *Le programme de Hilbert*, in *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, Sallantin & Szczeciniarz (eds), Nouvelle Encyclopédie Diderot, Presses Universitaires de France, Paris, 1999, pp. 87-106

⁵⁰ Hilbert, *Sur les fondements...*, 1904, p.270

Comme on le sait, cela ne se fera pas car la démonstration de la consistance absolue de l'arithmétique de Peano n'aboutira jamais.

Le texte de 1904 sera très critiqué, entre autres par Poincaré qui, dans trois articles étalés entre 1905 et 1906 dans la *Revue de métaphysique et de morale*⁵¹, lui reprochera la circularité (non prédicativité) de sa démonstration – et Hilbert, qui avait sans doute péché par excès d'optimisme, prendra plus de dix ans pour commettre un nouvel écrit sur la question, bien plus réfléchi. Concrètement, en 1904 Hilbert propose de faire la démonstration de consistance absolue du système d'axiomes de Peano *via* la non contradiction des propositions dérivées, en nombre potentiellement infini, ce qui demande un raisonnement par récurrence sur elles. Poincaré ne laisse pas passer : c'est une "*pétition de principe*" !

Citons le début de son texte, saisissant par sa clairvoyance anticipatrice, puis un paragraphe sur la question du raisonnement par récurrence.

« Ce qui nous frappe d'abord dans la nouvelle mathématique, c'est son caractère purement formel : « Pensons, dit Hilbert, trois sortes de choses que nous appellerons points, droites et plans, convenons qu'une droite sera déterminée par deux points et qu'au

⁵¹ Pour des raisons de simplicité, nous citons l'ensemble des trois écrits : **Poincaré**, *Les mathématiques et la Logique*, in *Revue de Métaphysique et de Morale*, années 1905, p. 815-835, 1906, p. 17-38, et p. 294-317. Réédités par **Heinzmann**, *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité*, Paris, Blanchard, 1986.

lieu de dire que cette droite est déterminée par ces deux points, nous pourrions dire qu'elle passe par ces deux points ou que ces deux points sont situés sur cette droite. » Que sont ces choses, non seulement nous n'en savons rien, mais nous ne devons pas chercher à le savoir. Nous n'en avons pas besoin, et quelqu'un, qui n'aurait jamais vu ni point, ni droite, ni plan pourrait faire de la géométrie tout aussi bien que nous. Que le mot passer par, ou le mot être situé sur ne provoquent en nous aucune image, le premier est simplement synonyme de être déterminé et le second de déterminer.

*Ainsi c'est bien entendu, pour démontrer un théorème, il n'est pas nécessaire ni même utile de savoir ce qu'il veut dire. On pourrait remplacer le géomètre par le piano à raisonner imaginé par Stanley Jevons ; ou, si l'on aime mieux, **on pourrait imaginer une machine où l'on introduirait les axiomes par un bout pendant qu'on recueillerait les théorèmes à l'autre bout, comme cette machine légendaire de Chicago où les porcs entrent vivants et d'où ils sortent transformés en jambons et en saucisses. Pas plus que ces machines, le mathématicien n'a besoin de comprendre ce qu'il fait.** »⁵²*

L'intuition de la présence de la machine dans la pensée formelle et un propos aux avant-goûts de *Chambre chinoise* de Searl mettent en lumière la lucidité intellectuelle de Poincaré. Venons-en au point fondamental du reproche adressé à Hilbert, la circularité du raisonnement. Pour démontrer la non contradiction deux à deux entre un nombre infini potentiel de propositions dérivées des axiomes de Peano, il faut se servir du raisonnement par récurrence, or celui-ci, et plus généralement le *Principe d'induction complète*, sont énoncés dans les axiomes de Péano... dont on cherche à démontrer la non contradiction.

⁵² Poincaré, *op. cit.*, premier article (1905), chap.II ;

« Pour établir que les postulats n'impliquent pas contradiction, il faut alors envisager toutes les propositions que l'on peut déduire de ces postulats considérés comme prémisses et montrer que, parmi ces propositions, il n'y en a pas deux dont l'une soit la contradictoire de l'autre. Si ces propositions sont en nombre fini, une vérification directe est possible. Ce cas est peu fréquent et d'ailleurs peu intéressant.

Si ces propositions sont en nombre infini, on ne peut plus faire cette vérification directe ; il faut recourir à des procédés de démonstration où en général on sera forcé d'invoquer ce principe d'induction complète qu'il s'agit précisément de vérifier.

Nous venons d'expliquer l'une des conditions auxquelles les logiciens devaient satisfaire et nous verrons plus loin qu'ils ne l'ont pas fait. »⁵³

Au fil de ses écrits – et non seulement dans les trois articles cités – Poincaré acquerra la conviction que le Principe d'induction complète et la notion de nombre entier qui y est amalgamée précèdent toute définition formelle, qu'ils sont des "germes" de la pensée mathématique pure (ou "authentique") irréductibles à la logique (nous y reviendrons dans la Partie II de la thèse).

Toujours est-il que le galop d'essai de Hilbert en 1904 est important car il est le dernier écrit de l'époque naïve : à partir de cette date, les différents acteurs prennent conscience que le problème de Hilbert ne se résoudra pas facilement avec les moyens habituels de la logique frégréenne (laquelle, d'ailleurs, contient également des concepts

⁵³ Poincaré, *op. cit.*, premier article (1905), chap. IV. Définitions et axiomes. Le paragraphe se trouve à la fin du chapitre.

mathématiques qu'on voudrait définir logiquement). Les réactions suscitées, et pas seulement celles de Poincaré, ont mis les mathématiciens intéressés par la question dans la dynamique d'une "course d'endurance".

Certes, l'écrit de Hilbert n'est pas, loin s'en faut, le seul moteur de ce changement de mode : l'entrée en scène de ce que l'on nommera plus tard l'axiome de choix de Zermelo (1904, puis 1908) et du paradoxe de Richard (1905), puis l'œuvre logiciste accomplie par Russell et Whitehead dans leur *Principia Mathematica*, donnent la dernière impulsion à ce qui est désormais une véritable crise des fondements des mathématiques. De fait, les critiques au logicisme, formalisme et méthode axiomatique montent en puissance entre 1904 et 1918, notamment par la voix de Poincaré, mais surtout avec l'entrée en jeu de Brouwer en 1908 : il propose une nouvelle philosophie mathématique, qui est aussi bien une nouvelle méthode mathématique, l'Intuitionisme, englobant dans un système unitaire et cohérent les fragments épars de la critique anti-formaliste que les "gentlemen farmer" *semi-intuitionnistes* de l'Ecole française (Brouwer nomme ainsi Poincaré, Borel, Baire, Lebesgue) n'avaient pas cherché à synthétiser. L'Intuitionisme propose une nouvelle façon de faire des mathématiques, avec ses principes, méthodes et théorèmes qui s'opposent à la "désincarnation" des formes axiomatiques, responsables selon ses opposants des paradoxes et pathologies. La lutte démarre entre Hilbert et Brouwer et, plus généralement, entre les partisans du mode de pensée "authentiquement" mathématique (intuitionnistes et apparentés) et ceux du mode de pensée logique à contenu mathématique (logicistes, axiomatistes, formalistes et réalistes durs). L'enjeu : le sauvetage ou le coulage de la théorie cantorienne qui, dans sa forme "authentique" et contentuelle, adossée à la logique de Frege, provoque des paradoxes.

L'axiomatisation de la théorie, qui aboutira à sa version ZFC et à son pendant $ZF \setminus AC$, sera l'une des voies de sauvetage. Mais Hilbert en emprunte une autre, fidèle à son *credo* de non "ignorabimus". Or les questions d'ignorance et de connaissance se situent dans la sphère du sens : Hilbert garde un pied dans les mathématiques contentuelles, qu'il voudrait – du moins en partie – assainir.

A partir de 1917, après plus de 10 ans de silence sur ce sujet – du moins de silence écrit et public –, Hilbert démarre la refonte de son programme, qui durera jusqu'en 1927. Comme écrit Dosen (p.92-94):

« [...] à partir des années 20, le problème [de Hilbert] a été compris comme s'il s'appliquait en premier lieu à l'arithmétique des entiers naturels et aux axiomes de Peano (on appelle ainsi les axiomes qui disent que zéro n'a pas de prédécesseur et que la fonction de successeur est injective; suivant le schéma de l'induction mathématique, c'est-à-dire du raisonnement par récurrence, et les définitions récursives de l'addition et de la multiplication). Ce n'est qu'après avoir résolu le problème pour cette arithmétique-là, qu'on passerait aux nombres réels et à l'analyse. Le but de Hilbert dans son programme est d'éliminer l'infini des mathématiques. Comme Karl Weierstrass a éliminé les infiniment petits et les infiniment grands de l'analyse, Hilbert veut éliminer ce qui reste de l'infini quand nous parlons, par exemple, de suites infinies, ou quand nous quantifions sur tout l'ensemble des entiers naturels. Éliminer l'infini n'est pas interdire son usage, mais seulement montrer qu'en principe on n'est pas obligé de le mentionner, qu'il est une fiction utile. En éliminant l'infini nous ne rejetons pas les méthodes des mathématiques classiques qui semblent le présupposer, mais nous les justifions. »

En d'autres termes, Hilbert veut éliminer l'infini... pour mieux

l'asseoir : se positionnant entre une mathématique contentuelle et une mathématique axiomatique, il conçoit une double modalité mathématique, mi-contentuelle mi-formelle, où l'infini serait évacué du premier mode pour investir pleinement le second. Reprenons Dosen :

« Hilbert qualifie de finitiste la partie des mathématiques dans laquelle on ne trouve que des propositions qui ne parlent pas de l'infini. Il a expliqué cette notion seulement d'une manière intuitive. Si on cherche une codification précise, on peut essayer d'identifier les mathématiques finitistes à l'arithmétique primitivement récursive de Thoraf Skolem, ou à quelque chose de fort semblable. Dans l'arithmétique primitivement récursive nous n'avons pas de quantificateurs, et ses théorèmes sont uniquement des formules de l'arithmétique avec des variables libres ou sans variables. (A part les opérations habituelles de l'arithmétique de Peano — zéro, successeur, addition et multiplication — on introduit dans l'arithmétique primitivement récursive d'autres opérations par des définitions primitivement récursives; le schéma de l'induction mathématique est remplacé par une règle de déduction. On peut aussi introduire les quantificateurs bornés comme abréviations pour des conjonctions ou disjonctions finies.) L'arithmétique primitivement récursive est non seulement un fragment de l'arithmétique de Peano, mais un fragment de l'arithmétique formelle intuitionniste, qu'on obtient en ajoutant les axiomes de Peano à la logique intuitionniste de premier ordre, une logique plus restreinte que la logique classique.

Pour Hilbert, [...] les mathématiques finitistes parlent de certaines constructions de l'intelligence humaine. Hilbert est d'accord sur ce point avec les constructivistes, et va même plus loin que les intuitionnistes. Le finitisme est un constructivisme très strict dans lequel nous ne trouvons que des objets mathématiques très concrets.

Parfois Hilbert parle comme si ces objets n'étaient que des constructions graphiques finies, créées par l'homme avec de l'encre sur du papier. Les entiers naturels ne seraient que les membres de la suite

I, II, III, IIII, ...

Mais limiter toutes les mathématiques aux mathématiques finitistes serait pour Hilbert une mutilation. Alors, comme en géométrie pour raccourcir et simplifier les démonstrations on introduit des points dans l'infini, les mathématiques finitistes seront élargies par des propositions idéales qui parlent de l'infini. Ces propositions-là, avec lesquelles nous introduisons toutes les mathématiques classiques, ne décrivent à proprement parler rien du tout [...] c'est pourquoi [Hilbert] peut être qualifié de formaliste. Tout cela ressemble beaucoup aux interprétations des théories scientifiques où nous distinguons les propositions empiriques (chez Hilbert, finitistes) des propositions théoriques (chez Hilbert, idéales), les secondes n'étant que des instruments qui servent à la déduction des premières et n'ayant pas plus de réalité que ne leur confère cette fonction instrumentale.

Dans son programme Hilbert voulait justifier l'introduction des propositions idéales en deux étapes. Supposons qu'il s'agisse des propositions idéales de l'arithmétique. Dans la première étape il faut construire un système formel complet de l'arithmétique — l'arithmétique de Peano étant supposée faire l'affaire. Que ce système est complet veut dire que pour chaque preuve intuitive de l'arithmétique, preuve qui peut se référer à l'infini ou non, on doit maintenant avoir une preuve correspondante dans l'arithmétique de Peano. Cette preuve dans le système formel est un objet graphique fini, qui par conséquent peut être étudié dans les mathématiques finitistes. Parmi les formules de l'arithmétique de Peano, celles qui

appartiennent au langage de l'arithmétique primitivement récursive et se rapportent aux mathématiques finitistes seront appelées finitistes. Les autres formules sont idéales.

Il se peut que dans la preuve d'une formule finitiste de l'arithmétique de Peano nous nous servions de formules idéales. Dans la deuxième étape du programme de Hilbert il faut montrer que ces preuves-là peuvent être éliminées et remplacées par des preuves des mêmes théorèmes dans l'arithmétique primitivement récursive. C'est-à-dire, il faut montrer que ces passages à travers l'idéal peuvent être évités. En termes techniques on dit qu'il faut montrer que l'arithmétique de Peano est une extension conservative de son fragment finitiste. Si nous y parvenons, nous saurons qu'à chaque théorème finitiste de l'arithmétique de Peano correspond une proposition finitiste correcte. L'introduction des propositions idéales est ainsi justifiée. Elle est inoffensive, et nous n'avons aucune raison de rejeter une chose inoffensive qui en plus est fort utile. En nous servant des propositions idéales nous pouvons raccourcir et simplifier nos preuves sans jamais tomber dans le faux.

Pour que la démonstration de conservativité de la deuxième étape soit tout à fait convaincante, cette démonstration, qui se déroule dans la théorie où nous prenons pour objet les systèmes formels, doit elle-même appartenir aux mathématiques finitistes. Autrement nous aurons présupposé dans la justification des propositions idéales que leur emploi est déjà justifié. Dans la théorie où nous prenons pour objet les systèmes formels — la théorie des preuves, ou la métamathématique — les méthodes finitistes sont de rigueur. »

Regardons quelques éléments des écrits de Hilbert de 1918, 1922 et 1925. Dans sa lecture adressée à la Société mathématique suisse de

Zurich, le 11 septembre 1917, publié en 1918 sous le titre *Axiomatisches Denken* – dont nous reprenons la traduction en anglais de Ewald (*Axiomatic Thought*)⁵⁴ – Hilbert trace de manière très générale son programme (refondé par rapport à la version 1904). Comme l'écrit Ewald (p.1106-1107) :

« Hilbert dans sa lecture ne se collète pas directement avec les problèmes techniques soulevés par [le développement des travaux concernant la crise des fondements, les critiques de Poincaré et Brouwer, l'axiomatisation de la théorie des ensembles par Zermelo, la logicisation de Russell et Whitehead, etc.] ; il ne le fera d'ailleurs pas par écrit jusqu'à ses articles sur la théorie de la preuve de 1922. [...] A la place, Hilbert sonde le rôle de l'axiomatisation en mathématiques et dans les sciences physiques [auxquelles il s'est consacré durant toute la période de silence sur la question des fondements] ; il rappelle et affine ses considérations sur la méthode axiomatique et, dans le sillon des Principia et de l'axiomatisation de Zermelo, signale à nouveau la nécessité d'une preuve directe de la consistance de la théorie des nombres et de la théorie des ensembles. Il cherche aussi à attirer l'attention des mathématiciens sur l'étude des preuves, et en plus [de la question] de la consistance et de l'indépendance des axiomes, il propose les problèmes de la décidabilité en un nombre fini de pas des problèmes mathématiques, [...] de la relation entre le contenu et le formalisme des mathématiques, et la solvabilité en principe de chaque problème mathématique.

[...] Comme le montre clairement la présente sélection, Hilbert voyait les systèmes formels d'axiomes [d'un point de vue] instrumental, comme un outil puissant pour la recherche

⁵⁴ Hilbert, *Axiomatic Thought*, op. cit., p.1105-1115. La traduction en français est nôtre.

mathématique [...]. Mais il ne suggère nulle part que la mathématique peut être simplement identifiée à l'étude des systèmes formels ; et de fait dans ses écrits théoriques sur la preuve il fait des efforts considérables pour préciser que les mathématiques authentiques – inhaltliche Mathematik – prennent place non pas dans le formalisme mais dans le métalangage. »

Ainsi, Hilbert écrit (paragraphe numérotés par Ewald, p.1113 et 1115) :

« [43] Parmi les questions mentionnées, la dernière – autrement dit, celle concernant la décidabilité en un nombre fini d'opérations – est la mieux connue et la plus discutée ; car il en va de l'essence de la pensée mathématique.

[...]

[54] Toutes ces questions de principe [dont celle de la décidabilité en un nombre fini d'opérations] me semblent former un important nouveau champ de recherche qui reste à développer. Pour conquérir ce champ nous devons, j'en suis persuadé, faire du concept de preuve mathématique spécifique un objet d'investigation, à l'instar de l'astronome qui prend en compte le déplacement de sa position, le physicien qui étudie la théorie de son appareillage, et le philosophe qui critique la raison elle-même. »⁵⁵

Enchaînons sur de courts extraits de Hilbert-1922⁵⁶ et Hilbert-1925⁽⁵⁷⁾ qui nous serviront à définir des concepts que nous utiliserons.

⁵⁵ Hilbert, *Axiomatic Thought*, op. cit., p.1105-1115.

⁵⁶ Hilbert, *Nouvelle fondation des mathématiques : Première communication*, op. cit., p.108-130.

⁵⁷ Hilbert, *Sur l'infini*, op. cit., p.215-245.

Dans son texte de 1922, après avoir mis en scène un procédé "descendant" de démonstration sur des nombres entiers quelconques donnés, procédé qu'il range du côté de l'arithmétique intuitive contrairement au principe d'induction de n à $n+1$ dont il affirme la nature formelle démontrable – point de discorde absolue avec Poincaré, Hilbert écrit (p.118-119) :

« Il est certain que nous pouvons aller plus loin dans l'arithmétique en poursuivant dans le style de traitement intuitif et contentuel, que nous venons de décrire et d'utiliser. Mais il est hors de doute qu'on ne peut pas couvrir de cette façon la totalité des mathématiques. Dès que nous abordons le point de vue de l'arithmétique et de l'algèbre plus avancées, p. ex. quand nous voulons obtenir des assertions sur une infinité de nombres ou de fonctions, le procédé contentuel nous laisse court. Car dans le cas d'une infinité de nombres, nous ne pouvons pas écrire de chiffres ni introduire des abréviations [...].

Toutefois nous pouvons arriver à un point de vue tenant compte de ces nécessités, en nous transportant sur un plan supérieur, où axiomes, formules, et démonstrations de la théorie mathématique seront eux-mêmes l'objet d'une étude contentuelle. A cette fin, il nous faut d'abord remplacer par des formules et par des règles, autrement dit reproduire, au moyen de formalismes, les raisonnements contentuels couramment utilisés dans les théories mathématiques, i.e. il faut effectuer une formalisation rigoureuse des théories mathématiques tout entières, démonstrations comprises [...]. Les axiomes, formules et démonstrations, en quoi consiste l'édifice formel, sont exactement ce qu'étaient les chiffres dans la construction précédemment esquissée de l'arithmétique élémentaire, et ce sont eux qui deviennent maintenant, tels des chiffres en arithmétique, le

thème de raisonnements contentuels, i.e. de la pensée véritable. »

Il s'agit donc de :

1- Construire un système formel complet de l'arithmétique : celui de Peano.

2- Définir un système intuitif de l'arithmétique élémentaire où les méthodes seraient strictement finies (pas d'infini potentiel) et où les propositions ne pourraient jamais référer à l'infini : le fragment finitiste.

3- Montrer que le système formel (SF) est une extension conservative du fragment finitiste (FF), i.e. :

$\forall E$: un énoncé de FF

$\forall P$: une preuve de E dans SF

Montrer que :

$\exists P'$: preuve de E dans FF

3 bis – Etant donné que : (SF extension conservative de FF) \Leftrightarrow (SF consistante), il suffit de montrer que SF est consistant.

Hilbert fait coup double : il relève le défi de « *son vieux problème de la consistance de l'arithmétique* » (Dosen, p.95), tout en montrant aux intuitionnistes et apparentés (les "constructivistes" selon Dosen), pour qui une démonstration de consistance peut avoir un statut trop formel, que cela implique nécessairement le caractère conservatif de SF vis-à-vis de FF. Or FF est une entité incontestable aux yeux des constructivistes : Dosen, p.93 « [Hilbert] *va même plus loin que les intuitionnistes. Le finitisme est un constructivisme très strict dans lequel nous ne trouvons*

que des objets mathématiques très concrets. » Bref, Hilbert dit aux constructivistes : si le système formel de Peano qui encapsule toute l'arithmétique est consistant, c'est parce que l'arithmétique (même avec la théorie de Cantor) ne dit rien de plus que ce qu'en dit son noyau ultra-constructif... mais il le dit autrement : en se servant d'expressions certes un peu abstraites.

En interprétant la démarche de Hilbert à la manière de Detlefsen dans son *Hilbert's program : an essay on mathematical instrumentalism* ⁽⁵⁸⁾, nous pourrions dire que le système mis au point par Hilbert est un instrument à "effet de levier" : le fragment contentuel, strictement finitiste, pilote le fragment formel : les énoncés contenant des termes infinitistes sont vus comme des propositions formelles – c'est-à-dire dont on ne cherche pas à déterminer le sens – régis par deux principes : celui de la bonne formation (formules bien formées selon des règles lexicales et syntaxiques prédéterminées à l'avance) et celui du pilotage contentuel. Les formules du fragment formel, dûment transformées en formules arithmétiques élémentaires par un codage à expliciter, sont combinées selon les règles et méthodes du fragment contentuel finitiste. Citons Hilbert 1925 (p.227-228)⁵⁹ :

« On doit reconnaître que la situation dans laquelle nous nous trouvons actuellement vis-à-vis des paradoxes est à la longue insupportable. Qu'on y réfléchisse : en mathématiques, cette science réputée pour un modèle de sûreté et de vérité, les notions et les inférences, celles que chacun a apprises, que chacun enseigne ou

⁵⁸ **Detlefsen**, *Hilbert's program : an essay on mathematical instrumentalism*, Kluwer Academic, Dordrecht, Boston, 1986.

⁵⁹ **Hilbert**, *Sur l'infini*, op. cit., p.227-8

emploie, conduisent à des insanités ! Si la pensée mathématique elle-même échoue, où trouvera-t-on sûreté et vérité ?

Par bonheur il y a un moyen tout à fait satisfaisant d'échapper aux paradoxes sans trahir notre science. Les considérations qui nous ont à le découvrir et les buts vers lesquels nous nous dirigeons sont les suivants :

1. Nous voulons examiner soigneusement les conceptualisations et les types d'inférences féconds de la théorie des ensembles, et, partout où c'est possible avec une chance de réussite, les étayer ou les rendre utilisables. Car il ne faut pas qu'on nous chasse du paradis que Cantor a créé pour nous.

2. Il est indispensable de donner partout aux inférences la sûreté qu'elles ont en arithmétique élémentaire, théorie à l'abri du doute et dans laquelle contradictions et paradoxes, s'il en survient, ne sont imputables qu'à notre manque de soin. »

Il est fort intéressant de voir que la diatribe sur le paradis de Cantor d'où il faut éviter à tout prix d'être chassés est la seule allusion au véritable but de Hilbert, à savoir : puisque tous les énoncés de FF démontrables par des théorèmes de SF sont démontrables par des preuves de FF ; puisque SF est consistant ; puisque *in fine* on a démontré que le monde de SF, pour étrange qu'il paraisse, n'entamera jamais la robustesse constructive de l'arithmétique... alors aucun constructiviste ne peut désormais nous interdire de "jouer" avec les propositions purement idéales de SF (et leurs démonstrations) au risque de contredire ses propres convictions.

C'est un vrai sauvetage du paradis cantorien car dans les faits – si son programme se réalise – chacun est libre d'interpréter ou non (dans la sphère contentuelle) le contenu de la formule "idéale" résultant de la combinatoire finitiste – une fois déplié le codage de cette formule.

Concluons en soulignant que l'arithmétique finitiste, "intuitive", "contentuelle" et "authentique" – tous des qualificatifs utilisés par Hilbert - définit, nous l'avons compris, le champ d'un effectif que même Kronecker ne saurait contester. Mais c'est là une contrainte maximale sur la notion, élaborée dans les années 20 par Hilbert (sous l'influence de toutes les critiques), nous donnant certes une "limite inférieure" au scope de la notion, véhiculant déjà un caractère proto-récurif qui ne saurait illustrer le point d'émergence historique de cette notion.

b) Récurivité

On l'a dit, depuis sa conférence en 1900 et tout au long de ses écrits jusqu'en 1927, Hilbert donne une série d'impulsions qui aboutira historiquement à la conception de la *théorie des fonctions récurives générales* (FRG), par Gödel (1934), Herbrand (1932) et Kleene, de la *théorie de fonctions λ -définissables*, par Church et Kleene, et de la *théorie de la [T]-calculabilité* par Turing⁶⁰. Les exigences de Hilbert, exprimées dès les premières années du siècle puis affinées durant trois décennies, conduiront finalement Kleene, Church et Turing à identifier, entre 1936 et 1937, la notion d'*effectivité* – qui a déjà subi moult modifications par rapport à sa version "début de siècle" – à la *récurivité*, la *λ -définissabilité* et/ou la *T-calculabilité*, ces trois théories ayant été formellement identifiées par Church et Kleene.

Kleene, dans son article de 1943, *Recursive predicates and quantifiers*⁶¹, résume (p.60) :

⁶⁰ Par commodité, nous utiliserons les abréviations respectives : FRG, $F\lambda$ et Tc .

⁶¹ Kleene, *Recursive predicates and quantifiers*, Transactions of the A.M.S. 53, 1943, p.41-73. La traduction est nôtre.

« Nous admettrons, pour commencer, une capacité intuitive à reconnaître plusieurs instances individuelles de ces notions [i.e., de processus effectif de calcul, de décidabilité effective d'une fonction]. En particulier, nous reconnaissons les fonctions récursives générales comme étant effectivement calculables, et donc nous reconnaissons les prédicats récursifs généraux comme étant effectivement décidables. Inversement, en tant que principe heuristique, de telles fonctions (prédicats) ont été reconnues comme étant effectivement calculables (effectivement décidables), et pour celle qu'on a étudié, elles se sont toujours révélées être récursives générales [...]. Ce fait heuristique, ainsi que certaines réflexions sur la nature des processus algorithmiques symboliques, ont conduit Church à énoncer la thèse suivante :

Thèse I : Toute fonction effectivement calculable (prédicat effectivement décidable) est récursive générale.

[...] Dans la mesure où nous avons déjà une notion intuitive de la calculabilité effective (décidabilité effective), la thèse a le caractère d'une hypothèse - un point souligné par Post et par Church. Si nous considérons la thèse et sa réciproque comme une définition, alors l'hypothèse est une hypothèse sur l'application de la théorie mathématique développée à partir de cette définition. Il y a, comme nous l'avons suggéré, des raisons très convaincantes pour accepter l'hypothèse. »

Entre le *Discours* de Hilbert de 1900 et le début des années 1930, l'*Entscheidungsproblem* (*Problème de la décision*) deviendra le nouveau point de mire au fur et à mesure qu'on réalisera toute la difficulté de mener à bien le programme de Hilbert – malgré les succès partiels de

Presburger (1929), Skolem (1930) et Tarski (1930). L'idée s'imposera peu à peu que la question de la consistance d'un système formel encapsulant un fragment de l'arithmétique, même le plus élémentaire (le fragment finitiste, en dessous duquel il n'y a plus d'arithmétique⁶²), pourrait être indécidable⁶³, ce que finit par prouver Gödel en 1931 (second théorème), en ayant préalablement démontré formellement que dans tout système formel il existe des assertions arithmétiques vraies du fragment finitiste choisi par Hilbert et néanmoins *indécidables* (premier théorème de Gödel-1931). Mais avant même les théorèmes de Gödel-1931, la difficulté de résoudre rapidement le problème posé par Hilbert dès le début du siècle obligera les mathématiciens du tournant 1920-1930 à tenter d'appréhender rigoureusement, dans sa formulation générale, ce qu'est une procédure effective (finitiste) de démonstration.

Dans le cadre du finitisme, cette "*voie directe*" dont Hilbert parlait en 1900 (démonstration en "*un nombre fini d'opérations*"⁶⁴), on cherchera à caractériser "universellement" la *procédure effective*⁶⁵ ("algorithme", "procédé de décision", etc.) pour des raisons que Jacques Dubucs⁶⁶ a justement décrites :

« *Aussi longtemps qu'on était à la phase des espoirs (et, donc, des illusions) au sujet [...] de l'Entscheidungsproblem [Problème de la décision], on pouvait se contenter d'une compréhension intuitive de*

⁶² Les questions soulevées par l'ultra-finitisme de Volp'in sont hors du cadre du présent travail.

⁶³ Plus précisément : quel que soit le système formel englobant le fragment finitiste de Hilbert, on ne peut démontrer sa consistance par des méthodes finitistes de ce fragment.

⁶⁴ **Hilbert**, *Sur les problèmes futurs des mathématiques, les 23 problèmes*, op.cit., p.15.

⁶⁵ Le parti pris kroneckerien de Hilbert, i.e. le finitisme, n'était pas la seule voie possible de l'effectivité. Borel nous donnera l'occasion d'en illustrer une conception non-finitiste.

⁶⁶ **Blanché, Dubucs**, *La logique et son histoire*, coll. "U", série Philosophie, Armand Colin/Masson, 1996, p.382.

ce qu'il convient d'entendre par un "algorithme" ou un "procédé de décision" : une fois présentée une procédure routinière permettant de décider la prouvabilité des formules dans telle ou telle théorie, il n'existe aucune autre espèce de difficulté pour reconnaître qu'on est bien en présence d'un algorithme. En revanche, un théorème d'indécidabilité représente une manière de quantification universelle sur la totalité des procédures possibles, et il ne peut être question d'y parvenir sans que le concept même de procédure ait été circonscrit avec la précision la plus exigeante ».

Clarifions ce passage " $\forall \exists \rightarrow \exists \forall$ " :

Hilbert-1900 :

« Tout problème mathématique déterminé doit être forcément susceptible d'une solution rigoureuse, que ce soit par une réponse directe à la question posée, ou bien par la démonstration de l'impossibilité de la résolution, c'est-à-dire la nécessité de l'insuccès de toute tentative de résolution »⁶⁷.

Autrement dit, pour toute proposition mathématique valide (qui a un sens pour la communauté des mathématiciens)⁶⁸, soit elle est démontrable, soit sa négation est démontrable⁶⁹ :

- $\forall p$, une proposition mathématique donnée, $\exists q$, un procédé mathématique exprimable clairement et directement dans

⁶⁷ Hilbert, *Sur les problèmes futurs des mathématiques, les 23 problèmes*, op. cit., p.11.

⁶⁸ Dans un système formel, on parle de formule bien formée.

⁶⁹ Nous nous plaçons dans le contexte de Hilbert-1900 où la démontrabilité d'une proposition mathématique est supposée équivalente à sa vérité, et réciproquement. Dans l'esprit de Hilbert-1900, il ne fait pas de doute que l'arithmétique élémentaire est consistante et complète.

l'écriture (c'est-à-dire par inférences directes et non problématiques) qui, soit finit par exhiber une démonstration de p , soit fini par exhiber une contradiction évidente (du type " $1=0$ ").

Mais si, après des années de recherche infructueuses pour démontrer cela, l'on commence à douter de la possibilité de démontrer la décidabilité de toutes les propositions mathématiques, il y a un risque qu'on puisse un jour être confronté à une proposition mathématique **p telle que $\forall q$, le procédé, q n'aboutit pas** – ce qui signifie qu'on ne peut exhiber ni une démonstration de p ni une contradiction triviale. Le programme de Hilbert, pour ne pas être tout simplement abandonné, doit être affaibli : le "pas d'*ignorabimus*" ne vise plus les propositions mathématiques mais la frontière entre propositions "saines" (celles justement où il n'y a pas d'*ignorabimus* sur leur vérité/non-contradiction ou leur fausseté/contradiction) et les propositions où il y a un *ignorabimus* (indécidabilité). Autrement dit : le mathématicien doit pouvoir déterminer *a priori*, grâce à un procédé mathématique robuste et direct, s'il y aura ou non un *ignorabimus* au sujet de la validité d'une proposition mathématique quelconque. On admet un *ignorabimus* (au niveau mathématique) à condition qu'il n'y en ait pas sur la présence ou non de cet *ignorabimus*.

C'est pourquoi il faut démontrer que $\exists Q$, **procédé effectif / $\forall p$, Q nous avertit quand p n'est pas décidable.**

Il s'agit donc d'un procédé de décision qui doit être applicable à tout type de proposition mathématique valide. Il faut donc décrire le principe de ce procédé, indépendamment de toute proposition mathématique à laquelle il s'appliquerait. C'est le défi de l'*entscheidungsproblem*.

Après Gödel-1931, il ne restera du programme de Hilbert que l'*entscheidungsproblem* : peut-on décider *a priori* si un énoncé mathématique quelconque est ou non décidable ?

Comme on sait, ce "pas d'*ignorabimus*" de second degré sera ruiné par Turing et Church (1936-1937), même si cela ne signifie pas qu'à l'échelle d'une proposition mathématique particulière ou même à l'échelle d'une classe de propositions, le mathématicien soit aveugle à sa décidabilité : le "pas d'*ignorabimus*" de Hilbert peut se réaliser sur une échelle locale. Mais ce n'est pas du tout ce que demandait Hilbert. Son programme, versions fort et faible (*entscheidungsproblem*), est un échec.

Mais cet échec est celui de l'intention de Hilbert, non de la richesse de son apport aux mathématiques, entre autres parce que c'est lui qui a défini le "bon" concept d'effectivité (du moins au sens historique) : une procédure effective est une méthode d'arrangements en un nombre fini de pas d'un nombre fini de symboles physiques (écrits) préétablis suivant des règles d'arithmétique élémentaire, que Hilbert pense être en nombre fini et clairement définissables... Aucun risque de partir subrepticement du côté du transfini puisque cela est "matériellement" impossible : le nombre de symboles écrits sur la feuille ne pourra jamais être physiquement infini, du moins au sens actuel (en revanche, il peut être augmenté autant qu'on veut). CQFD : Hilbert adosse sur le monde physique la garantie de "constructivité". Impossible en effet de faire plus "constructif" que cela, au point que certains théorèmes des "constructivistes" se retrouvent hors du cadre de l'effectif hilbertien. Plus besoin donc de discussions entre cantoriciens et constructivistes... Reste le flou autour de la notion de "règles de l'arithmétique élémentaire (en nombre fini)".

Puis, avec l'(hypo)thèse [**effectivité** \Leftrightarrow **récurtivité générale, T-calculabilité, λ -définissabilité**], Church, Kleene et Turing finissent de mathématiser⁷⁰ l'effectivité : la contrainte physique sur les *symboles-opérés-par-les-règles-de-l'arithmétique-élémentaire* est elle-même traduite en une entité mathématique parfaitement contrôlée : est effectif ce qui est récurtif général ou T-calculable ou λ -définissable, etc. Et l'étrangeté du résultat qui émerge de cette transformation (l'indécidabilité) démontre l'inanité de cette discussion, i.e. elle met hors jeu les prétentions des constructivistes aussi bien que des cantoriciens : les premiers parce que tout principe de construction, même le plus sûr (au sens des constructivistes), conduit à des résultats incontrôlables, les seconds parce que les indécidables relativisent la valeur de leurs concepts, qu'ils faisaient trôner au centre de la pensée mathématique pratique.

Surtout, grâce à Church et Turing (et Gödel, Kleene, Herbrand, etc.), la référence à l'intuition a pu être évacuée.

Le programme de Hilbert est une grande réussite, même si elle n'est pas celle visée par son auteur : malgré l'extraordinaire contrainte physique exercée sur les symboles, la mathématique se dérobe au contrôle, *l'ignorabimus* est une qualité intrinsèque, une propriété des mathématiques en acte.

Par-là, se ferme définitivement un chapitre des plus riches de l'histoire moderne des mathématiques, par les débats qu'il a suscités, les nouveaux domaines qu'il a ouverts⁷¹ et, plus globalement, par son impact,

⁷⁰ Même si la thèse de Turing-Church n'est pas un acte situé dans le langage-objet.

⁷¹ Théorie de la démonstration, théorie de la calculabilité, théorie des automates finis et des machines de Turing, algorithmique, informatique théorique et pratique, intelligence artificielle, etc.

direct et indirect, sur la culture du XXe siècle – qu'on retrouvera dans la cybernétique, le structuralisme, etc.

La métaphore mécanique de Turing et la thèse de Church⁷² ont permis de délimiter rigoureusement le champ d'application de l'*effectivité* (au sens de Hilbert), tant *en intention* qu'*en extension*.

- Intensivement, ce champ recouvre exactement l'ensemble des activités de la *machine / calculateur humain* imaginé par Turing⁷³ (aujourd'hui inclus dans le concept d'"*agent cognitif*"). A l'instar de l'*effectivité*, le calculateur humain est souvent identifié à son expression, c'est-à-dire à la trace nécessairement statique et achevée de ses activités mécaniques – forcément dynamiques et inachevées dans la mesure où on les conçoit *en-train-de-se-faire*.

- L'extension du champ de l'*effectivité* est égalée à l'ensemble de tous les enchaînements finis valides de formules mathématiques bien formées (dans un système formel contenant un fragment finitiste de l'arithmétique). Par "formules bien formées", nous entendons des formules construites par une suite finie de signes mathématiques piochés dans un ensemble fini *donné à l'avance*⁷⁴ de signes autorisés, dont la succession respecte un ensemble fini de règles lexicales *données à l'avance*. Quant aux enchaînements des formules entre elles, ils doivent respecter un nombre fini *donné à l'avance* de règles syntaxiques.

⁷² Nous écrivons "la thèse de Church-Turing", comme il est d'usage.

⁷³ Idéalisation de l'être humain en train de faire des calculs (au sens large). Turing, *On Computable Numbers...*, p.77 et suiv.

⁷⁴ Le "donné à l'avance" découle de l'universalisation du concept.

Mais si la thèse de Church-Turing marque, historiquement, l'extinction de la *crise des fondements* et de ses questionnements, elle a figé les débats plus qu'elle ne les a clos. En particulier a-t-on épuisé toute la richesse de la notion d'*effectivité*, entendu dans son sens pré-formel voire pré-hilbertien ?

Certes, avec l'échec du programme de Hilbert, on sait qu'une procédure effective est fortement contrainte par la proposition particulière à laquelle elle s'applique (même s'il existe des schémas effectifs généraux pour des classes de propositions)... Mais la notion même d'effectivité n'est-elle pas "captable" dans sa généralité, bien que dans un autre langage que le langage-objet, un langage enraciné dans la sphère des "phénomènes" cognitifs ? Nous pensons que la question mérite attention. Pourquoi ? Parce que la combinatoire formelle n'a pas – ou du moins pas encore – prouvé qu'elle était suffisante pour capter l'activité mathématique dans son ensemble ni, *a fortiori*, l'activité rationnelle : la croyance au tout-formel s'est heurtée au mur de l'échec du projet d'intelligence artificielle, échec néanmoins relatif et dont on ignore s'il est définitif.

D'un autre côté, la mise en sourdine des voix intuitionnistes par le formalisme relativiste conquérant a installée sur l'Intuitionisme une aura mythique (malgré elle), lui donnant l'aspect d'un fantasme ontologique, celui d'un "retour à la nature" antirationaliste (nichée à l'intérieur même des sciences) qu'on peut exprimer ainsi : "la science et la culture (occidentales) issue de la pensée rationnelle nous ayant conduit dans une impasse, cette pensée doit donc être transcendée" (pour ne pas dire rejetée)... Mais outre que l'Intuitionisme est une pure création de la rationalité, son idéalisation "posthume" dessert sa puissance conceptuelle car à travers cette idéalisation s'exprime en vérité une pensée anti-scientifique, mystique et, *in fine*, totalitaire.

Mais entre la voie du "*shut up and calculate*"⁽⁷⁵⁾ et celle de "*la vérité est ailleurs*", il en existe une troisième consistant à rester dans le strict cadre de la pensée et méthode scientifiques mais en nous autorisant à interroger d'autres disciplines scientifiques, pour dénicher une certaine vérité – ce que les puristes qualifient justement de "pollution".

Car nous croyons que la thèse de Church-Turing, par sa nature "arbitraire", c'est-à-dire émanant non pas d'une inférence mathématique, logique ou formelle mais d'un choix "humain", a résolu un problème mathématique en évacuant le questionnement vers la sphère épistémologique. Elle a assaini la science mathématique au prix d'une problématique philosophique qui, aujourd'hui encore, suscite le débat : celle du "passage" de la sphère phénoménologique (ou se trouvait l'effectivité pré-hilbertienne) à la sphère formelle (celle de la récursivité). Autrement dit, l'équivalence "effectivité \Leftrightarrow récursivité" instaurée par la thèse de Church-Turing a laissé ouverte la question de la "fonction" reliant le phénomène cognitif portant le nom d'"effectivité" à une certaine définition mathématique (ou informationnelle) de celui-ci. Si elle a donné naissance aux sciences algorithmiques, la thèse de Turing-Church a également figé et, paradoxalement, institué la dichotomie "phénomène de la pensée – calcul".

En effet, cet arbitraire de l'acte fondateur de l'algorithmique se répercute aujourd'hui dans les sciences phénoménologiques (en particulier la physique, la biologie et sciences cognitives) qui se servent de modèles algorithmiques : quel est le statut d'une simulation algorithmique vis-à-vis de son "modèle" physique ? Comment relier, autrement que par la thèse

⁷⁵ Expression attribuée tour à tour à Feynman et à Wheeler au sujet des questionnements sur les fondements de la physique quantique.

de Church (et ses versions physicalistes), la description informationnelle du monde physique aux lois physiques (au sens phénoménologique) ? Qu'est-ce qui nous permet d'affirmer qu'une simulation du fonctionnement cérébral (basé sur des modèles computationnels) a un lien avec le fonctionnement physique du cerveau ?

Le lien existe sans aucun doute, mais la chaîne causale qui mène de l'un à l'autre souffre encore d'une discontinuité : quelle est la fonction médiatrice entre les modèles computationnels et les phénomènes physiques qu'ils sont censés décrire (ou simuler ou symboliser) ? A quel domaine appartient cette fonction : la pensée "symbolique" ? Le monde physique ?... La thèse de Church ne l'a pas explicité, même si depuis les travaux de Robin Gandy⁷⁶, la voie physique semble pouvoir dire quelque chose de plus sur la nature de la thèse de Church et vice-versa...

Ce n'est pas non plus le test de Turing⁷⁷ qui a résolu ce problème : ce qui simule parfaitement un phénomène est-il ontologiquement identifiable au phénomène ? De fait, le test n'est qu'une application de la thèse de Church-Turing à un domaine différent – l'acte arbitraire prend cette fois la forme de l'assertion " phénomène = simulation (calcul) " – qui a eu la même vertu : isoler le questionnement philosophique de la pratique scientifique afin de libérer la puissance opérationnelle du (futur) domaine de l'intelligence artificielle (1956), puis des sciences cognitives (années 1990). Mais le test de Turing repose sur un acte de jugement qui, lui, n'a pas été objectivé, i.e. *notre jugement* de la coïncidence entre la simulation et le phénomène.

⁷⁶ **Gandy**, "On Axiomatic Systems in Mathematics and Theories in Physics", 1953 et suiv.

⁷⁷ **Turing**, *Computing Machinery and Intelligence*, Mind, 1950, vol. LXI, n°236, traduit par *Les ordinateurs et l'intelligence*, in Turing&Girard, *La machine de Turing*, Seuil, coll. Sources du Savoir, 1995, p.135-175.

Comment alors justifier la prémisse même des sciences cognitives (et neurosciences), qui veut que le corps physique (soumis aux lois de la physique) est à la base des fonctions cognitives, si l'on ne peut que la fonder sur un acte arbitraire, un jugement - peut-être seulement culturel - de l'entendement humain ? Certes, il se pourrait qu'un jour on construise une simulation d'un cerveau humain parfaitement satisfaisante à notre jugement, mais pourra-t-on affirmer que la simulation est un cerveau humain s'il n'est pas possible de relier de la manière la plus claire et causale les principes de calcul à la base de la simulation aux processus physiques ou biologiques de l'original ?

Il se pourrait aussi qu'on n'établisse jamais le lien entre ces deux sphères descriptionnelles *phénoménologique/informationnelle*. Que le seul lien qu'on puisse établir soit, justement, l'acte arbitraire de notre jugement. Il faudra alors chercher à clarifier ce qui, dans notre représentation du monde, rend l'inférence "effectivité = récursivité" (ou "phénomène = calcul ") cognitivement nécessaire. Autrement dit, la nécessité de la thèse de Church-Turing (et tous ses dérivés) est peut-être de nature cognitive, mais ni logique (apodictique), ni mathématique...

Dans cette perspective, notre travail de clarification de la notion d'effectivité en termes d'actes cognitifs sort du domaine de l'étude purement historique pour s'inscrire dans une réflexion plus contemporaine.

3°- Fenêtre historique

Si Hilbert-1900 marque historiquement l'appel à la *croisade* à l'*effectivité*, la quête individuelle, elle, a démarré avant, et n'arbore pas nécessairement l'oriflamme axiomatique : c'est le cas pour Borel à partir de 1895.

Nous aborderons ainsi l'*effectivité* au moment où elle est déjà dans le "vocabulaire mathématique", introduite par Kronecker dans les années 1880. Néanmoins, même dans le cas de Kronecker, il ne s'agit pas d'une création *ex-nihilo* : quand Kronecker se sert du qualificatif "*effectif*", un grand nombre de mathématiciens le *reconnaissent* déjà – comme si l'*effectivité*, ce qu'elle dénote, était là depuis toujours dans un recoin de l'esprit. De fait, chez Kronecker l'*effectivité* vient adjectiver la méthodologie "classique" de démonstration mathématique, qui jusque-là ne pouvait être nommée car elle occupait l'univers entier de la pratique mathématique. Comme cela a été remarqué, si Kronecker forge à partir de ce mot une notion, c'est que le contexte a changé : la méthode classique a perdu son statut d'universalité et se trouve sérieusement concurrencée par des nouvelles méthodes qui ont été cristallisées dans et par la *théorie des ensembles* de Cantor (c'est pourquoi nous parlons de *cantorisme* ou de *cantorien*, même si Cantor n'est pas à l'"origine").

Mais si elle a été nommée, la notion est loin d'être *fixée*. Et ce n'est qu'à partir de 1896-1897, qu'elle va progressivement s'autonomiser par rapport au point de vue de Kronecker, grâce à l'irruption du paradoxe de Burali-Forti (et celui de Cantor)⁷⁸. Mais elle est encore "confidentielle" et les mathématiciens qui s'en servent ne s'y intéressent pas directement (elle occupe la place de *definiens*, non pas de *definiendum*). Ceux-là ont, chacun, leur propre intuition de son extension. Pour certains, comme Baire, elle ne dépasse pas le fini : interdiction de considérer comme effective la démonstration d'un théorème incluant, d'une manière ou d'une

⁷⁸ Voir plus loin.

autre, l'idée d'un ensemble infini réalisé (dénombrable et non dénombrable) et, *a fortiori*, d'une *itération* infinie (dénombrable) dans la procédure de démonstration. D'autres mathématiciens l'étendent à l'infini dénombrable : pour Borel une démonstration incluant un ensemble infini dénombrable *réalisé* peut avoir un certain caractère d'effectivité (même dans le cas d'une itération infinie), mais il renonce à l'étendre "transfiniment" vers le non dénombrable⁷⁹...

De fait, en France, à cette époque, la croyance en l'existence d'une méthode de raisonnement mathématique "robuste" et "authentique" soumise à une contrainte, qui même si elle n'est pas explicitement nommée sera celle de l'effectivité, est l'apanage du petit clan des "semi-intuitionnistes" (nommés ainsi par Brouwer *a posteriori*), en particulier Poincaré et Borel, voire Lebesgue. Poincaré et Borel opposent cette méthode à celle des raisonnements de type "logique à contenu mathématique" qui fait le lit du cantorisme et de l'axiomatisme. Les cantoriciens, eux, ont tendance à rejeter ce jugement de robustesse hors de la sphère des mathématiques, tel Hadamard⁸⁰. L'École analytique française représentent un cas d'étude idéal, car ce microcosme réunit toutes les conceptions de l'effectivité, comme l'illustrera en 1905 les échanges épistolaires entre Baire, Borel, Lebesgue et Hadamard. Chacun, même Hadamard (par la négative) éclaire une extension archétypale du champ de l'effectivité : le fini, l'infini dénombrable réalisé, une sorte de transfini "constructif" réalisé... Sans oublier l'aîné du clan, Poincaré, dont les fulgurances "anticipent"⁸¹ les conceptions intuitionnistes, et qui sera une source d'inspiration pour le courant néo-intuitionniste moderne...

⁷⁹ Nous aborderons en détail ces points, dans la Partie I (et dans l'Annexe au sujet des *Cinq lettres sur la théorie des ensembles* -1905).

⁸⁰ Nous en parlons au sujet du théorème de Du Bois-Reymond (Annexe).

⁸¹ Nous utilisons le terme "anticipent" au sens non causal. En effet, il faudrait se pencher sur la filiation intellectuelle de Poincaré à Brouwer pour savoir dans quelle mesure celui-là a influencé celui-ci.

Nous verrons que Borel fait partie de la catégorie "infini dénombrable réalisé". Sa volonté d'étendre l'effectif aux ensembles infinis dénombrables considérés comme réalisés sera sa manière, d'une part, de "*sauver le paradis de Cantor*" (Hilbert), du moins en partie, en lui découvrant/inventant *a posteriori* une généalogie classique, d'autre part, de sauver la méthode classique, générique, en la modernisant, c'est-à-dire en l'étendant aux ensembles transfinis de Cantor de 1^{ère} catégorie... Borel est un des "médiateurs" entre tradition et modernisme⁸².

II- Problématique épistémologique

Le premier écueil quand on s'intéresse à l'histoire d'une notion ayant imprégné la culture contemporaine, c'est l'impossibilité de l'aborder sans parti pris. Il nous a donc semblé que la meilleure façon de contourner l'obstacle était d'intégrer nos croyances dans notre étude en leur donnant un statut méthodologique : elles préfigurent notre grille d'analyse de l'*effectivité*. Concrètement, notre parti pris une conception *phénoménologique* et *néo-intuitionniste* de l'acte mathématique soutenu par une intentionnalité, ce que nous justifierons et préciserons dans les chapitres méthodologiques de la Partie II de la thèse.

Coté néo-intuitionniste, Dummett, Detlefsen et d'autres s'appuient sur les écrits philosophiques de Poincaré pour élaborer une théorie cognitive de la pensée mathématique dont nous nous servirons dans la Partie II.

⁸² Comparé à Lebesgue, Borel pourrait être considéré comme le dernier et le plus moderne des mathématiciens classiques.

A l'époque de Borel, le terme effectif qualifie de manière vague un fait mathématique (une démonstration, une définition) dont la vérité a un caractère particulièrement sûr. Une vérité plus sûre qu'une autre... Nous dirons, en utilisant le vocabulaire qui sera le nôtre dans la deuxième partie de la thèse, que :

Le problème de l'effectivité se rapporte à la question du contrôle de l'acte (ou geste) mathématique.

Contrôle, acte, geste... Tous ces termes seront définis en Partie II.

L'idée d'associer l'effectivité à un acte cognitif non linguistique (au sens du langage-objet) liée au contrôle du geste mathématique, bien qu'elle ne se justifie pas en-soi, nous semble néanmoins proche de l'intuition. Surtout, elle est fertile. Quand Hilbert déclare en 1900 qu'il ne saurait y avoir *d'ignorabimus* en mathématiques, il parle non pas – ou pas seulement – des mathématiques elles-mêmes mais de l'attitude du mathématicien vis-à-vis de son objet de recherche : Hilbert, face à l'effet centrifuge des paradoxes de la théorie de Cantor, exhorte les mathématiciens à forger un outil de contrôle *sur* toutes les propositions mathématiques. Même s'il pense que cet outil ne peut qu'appartenir au champ mathématique – et il orientera toute la recherche dans ce sens – l'idée d'une instance de contrôle est *a priori* associée à une intention qui, si elle s'exerce sur la pratique des mathématiques, n'est pas nécessairement mathématisable. Que la notion d'effectivité – déjà là, mais sous forme embryonnaire – s'impose naturellement pour ce rôle montre qu'elle reflète d'une *certaine manière* cette intention.

Et quand Hilbert réalise qu'il n'est pas possible de contrôler directement toutes les propositions mathématiques, il maintient cette

intention, mais à un niveau différent : le mathématicien doit pouvoir contrôler sa capacité à contrôler (ou pas) ses propositions (*Entscheidungsproblem*)... Refaisons brièvement le cheminement historique de la transformation de l'effectivité en l'éclairant sous son aspect extra-mathématique (cognitif).

1°- Une description heuristique

Au tournant entre le XIX^e et le XX^e siècles, des mathématiciens se sont mis à qualifier d'*effectif* un certain type de démonstration (ou de définition) qui **dévoile l'objet de connaissance mathématique en le construisant dans l'intuition, dévoilement qui s'accomplit entièrement à la fin du processus**. Une démonstration *effective* désignait donc l'expression écrite d'un processus dynamique de construction d'un objet mathématique dans l'intuition.

Dans la bouche d'un mathématicien de l'époque de Borel, une démonstration⁸³ qualifiée d'*effective* signifiait que celle-ci possédait une robustesse particulière, qualité réputée appréhendable intuitivement par tous les mathématiciens, indépendamment de leur psychologie, de leurs croyances individuelles et de toute considération subjective. Bien sûr, une démonstration *effective* pour l'un pouvait ne pas l'être pour l'autre... mais la perception de la robustesse, ce sentiment de *solidité* dégagé par le qualificatif *effectif* (quelle que soit la construction considérée) était réputé faire sens aux yeux de tous les mathématiciens : quand l'un disait « cette démonstration est effective », l'autre savait à quel type de

⁸³ Désormais, nous parlerons uniquement de démonstration effective pour éviter la lourdeur d'expression. Mais cela s'applique aussi aux définitions effectives.

perception/sensation le premier faisait allusion (même s'il pouvait nier ce caractère à la démonstration présentée). Cette "objectivité" et universalité de la notion générale renvoyait donc à l'idée qu'il existait un mode particulier d'actes de pensée mathématique, authentique et indiscutable en-soi – même si personne n'était d'accord sur la nature de ce mode, son étendue et la "matière" mathématique sur lequel il pouvait s'exercer. Précisons que cette idée d'existence *objective* du mode effectif ne présuppose pas un point de vue *réaliste* sur les mathématiques : l'homogénéité de l'enseignement et de l'apprentissage mathématiques constitue un bagage commun, et donc des articulations de pensée communes à tous les mathématiciens, ou réputées telles. Aussi, d'un point de vue "cognitif", le qualificatif d'effectif signalait un acte qui garantissait la robustesse⁸⁴ d'un procédé mathématique.

Ainsi, avant le programme de Hilbert et l'*Entscheidungsproblem*, quand un mathématicien utilisait le terme "démonstration effective", il signalait simultanément sa certitude sur la correction de son procédé *dynamique* de construction, balisé par l'écriture, et la robustesse de cette certitude. L'objet *statique* de connaissance résultant de ce procédé effectif héritait alors cette robustesse – procédé et objet effectifs pouvant être vus aussi bien en termes de pensée mathématique qu'en termes de langage-objet écrit. Mais le caractère effectif d'une démonstration ne s'exprimait pas d'une manière particulière en langage-objet – sauf par l'utilisation *ad hoc* du mot écrit "effectif" – : l'instance de sur-contrôle (garantie ou robustesse de la certitude) s'exerçant sur le processus était de nature non linguistique⁸⁵. C'est toute la puissance du travail effectué entre 1900 et

⁸⁴ Les auteurs anglo-saxons se servent du terme "sound". Cela fait allusion, nous semble-t-il, à la nature quasiment "physique" de la sensation d'existence d'un objet mathématique obtenu par un procédé effectif.

⁸⁵ Au sens du langage-objet mathématique.

1937 que d'avoir réussi à projeter sur le langage-objet une expression de ce sur-contrôle cognitif, notamment par la description codée du tableau de fonctionnement d'une machine de Turing.

D'ailleurs cette croyance en l'existence objective d'un *noyau* d'actes cognitifs dynamiques robustes de contrôle *reconnaissables* par la communauté de tous les mathématiciens, auquel on se réfère par le qualificatif d'effectif, émerge de l'idée que certains actes/constructions/écriture peuvent être contrôlés "extérieurement" par le *consensus* dans la communauté mathématique (consensus supposé puisque aucun mathématicien ne détient la preuve factuelle de ce consensus). Ce consensus supposé, donc de principe, délimitant un supposé noyau d'actes cognitifs robustes et universels de contrôle, anticipe l'idéalisation du *calculateur humain* de Turin.

Plus précisément, sous l'impulsion de Hilbert le défi est progressivement devenu celui d'une expression objective, car en langage-objet, de la contrainte d'effectivité en soi – indépendamment des instances sur lesquelles elle s'appliquerait –, c'est-à-dire de l'expression générale du jugement de sur-contrôle de la construction d'objets mathématiques. Cela a conduit, dans les années 1930, à "fabriquer" un *calculateur humain* théorique mimant une certaine représentation commune extériorisée de ce jugement général...

Church et Turing ont effectué une *projection* dans le champ mathématique (langage-objet) d'une représentation de l'*acte(-geste) cognitif de contrôle dans l'intuition du geste mathématique... In fine*, cette représentation a fini en machine.

La suite appartient à l'histoire des mathématiques, de l'informatique et de l'intelligence artificielle.

2°- Choix de la méthodologie

Les recherches prenant pour objet central l'*effectivité* en tant que notion autonome détachée de son devenir historique (i.e. de l'équivalence avec la récursivité) sont rares... Comme si la puissance opératoire libérée en 1936-37 par la thèse de Church-Turing avait rendu dérisoire toute aspiration à un retour critique sur ce lent cheminement vers la récursivité et, surtout, sur la notion naïve et intuitive qui en était l'origine. Pourtant, au moins deux arguments plaident en faveur d'une telle analyse.

- Premièrement, on l'a dit, l'énoncé de la thèse de Church-Turing n'est advenu qu'après 30 ans de remodelages de la notion initiale d'effectivité⁸⁶ (entre les années 1880 et les années 1920) ;

- Deuxièmement, cette notion initiale, bien que non mathématique⁸⁷ et non définie clairement, avait néanmoins un caractère suffisamment clair et testable⁸⁸ auprès des mathématiciens pour servir de pivot dans des argumentations techniques entre mathématiciens du tournant XIX^e-XX^e siècle.

⁸⁶ Nous parlons de "la" notion initiale car, même si au début du XX^e siècle chaque mathématicien avait sa conception de l'extension du domaine de l'effectif, le concept est – c'est notre hypothèse – unitaire, à un certain niveau cognitif, qu'on cherchera à préciser.

⁸⁷ Dans le sens de non descriptible dans un langage-objet.

⁸⁸ Comme l'écrit Jean Largeault : « *Les Anciens connaissaient des problèmes résolubles par algorithme (calcul du pgcd de deux entiers : division euclidienne ; un entier est-il premier : cible d'Eratostène). On a toujours su reconnaître un algorithme quand s'en présente un, ce qui dispensait d'en préciser le concept.* » Dans **Largeault**, *La logique*, coll. *Que sais-je ?*, P.U.F., 1993, p.54.

Ainsi, si l'on se situe en amont du processus de transformation de l'effectivité c'est-à-dire si l'on fait abstraction des années séparant la conférence de 1900 de Hilbert et les années 1936-1937, on peut considérer que le concept naïf d'*effectivité* se situe à la lisière entre le langage mathématique et le langage phénoménologique sur les mathématiques. La question de l'intérêt, voire de la légitimité, d'étendre l'étude des mathématiques au-delà du contenu véhiculé par le langage-objet est donc posée. Mais pour que cette extension soit légitime *a priori*, elle se doit de remplir une condition : rester dans la sphère épistémologique des mathématiques. C'est pourquoi nous adossons notre analyse sur des concepts émanant de l'épistémologie cognitive, comme celui d'"acte mental".

Bien sûr, il n'est pas question de mettre en doute l'immense valeur mathématique, historique et culturelle de la thèse Church-Turing, de nier sa vertu opératoire et sa "fertilité" créative. Mais si l'on s'intéresse à l'histoire des concepts et de leur transformation, l'effectivité offre un terrain unique de rencontre entre *la mathématique* – en tant que langage à un contenu propositionnel – et *le geste mathématique*, en tant qu'activité cognitive et physique productrice de mathématique.

Peut-être qu'alors, dans ce processus historique de transformation d'une notion vague (1900) en concept mathématique (1937) où l'on a tant rapproché les niveaux linguistique et cognitif pourra-t-on saisir "quelque chose" de l'acte cognitif mathématique non-linguistique ? Mais à condition de s'entendre sur ce qu'est un *acte cognitif mathématique*. C'est toute la difficulté, et c'est notre point de mire pour la Partie II de la thèse : caractériser l'*acte cognitif mathématique*, indépendamment de la description en langage-objet de son contenu.

Concrètement, notre parti pris une conception *phénoménologique* et *néo-intuitionniste* de l'acte mathématique sous-tendu par une intentionnalité, ce que nous justifierons et préciserons dans les chapitres méthodologiques de la Partie II de la thèse.

Néanmoins si, comme nous l'avons dit, nous préciserons nos outils épistémologiques en Partie II de la thèse basés sur une philosophie phénoménologique et néo-intuitionniste, nous voudrions déjà citer Maurice Caveing qui donne une assise à notre choix. Dans l'Introduction de son livre *Le problème des objets dans la pensée mathématique*⁸⁹, Caveing écrit (p.13-14):

« Approche logique et approche linguistique épuisent-elles l'épistémologie moderne des mathématiques, et au-delà le champ des problèmes philosophiques qu'elles posent ? Il n'en est rien, car à partir d'attitudes philosophiques définies en elles-mêmes, deux autres démarches sont possibles, lesquelles se résument à l'alternative : philosophie de la conscience ou philosophie du concept ?

La première s'ancre dans la conviction que le philosophe, installé dans le style de méditation inaugurée jadis par le cogito cartésien, mais se gardant de toute dérive substantialiste, est en mesure de mettre au jour, par la voie réflexive, les modalités de constitution des sciences. À cette attitude reste attaché le nom de l'entreprise husserlienne, la phénoménologie comme philosophie première, radicale et rigoureuse, capable de produire une épistémologie fondamentale. Comme «phénomène» pour la conscience, l'objet

⁸⁹ **Caveing**, *Le problème des objets dans la pensée mathématique*, Vrin, coll. *Problèmes & Controverses*, 2004

mathématique est donné par des évidences spécifiques à titre de corrélat (noématique) [contenu] d'une visée (noétique) [réalisation] de conscience dans la relation d'intentionnalité.

*Toutefois au-delà du dessein proprement husserlien, une question demeure : la phénoménologie n'offre-t-elle pas malgré tout une méthode de description du « phénomène » dont il serait dommage de se priver en tant qu'approche des mathématiques? Il faut pour cela, semble-t-il, trois conditions : la première est de renoncer à l'ambition d'une épistémologie fondamentale et radicale qui se proposerait pour but d'atteindre quelque «essence» antéprédicative de l'objet mathématique-, la seconde est d'abandonner la tentative de dévoiler la source originare des mathématiques dans la subjectivité constituante et donc d'éliminer le recours à l'autoposition de l'ego transcendantal, opération récurrente et chimérique, puisque l'autoposition doit être en même temps anté-position de l'ego par rapport à lui-même ; enfin la troisième condition est de renoncer à produire une description totalisante des mathématiques, et **de n'utiliser la méthode phénoménologique descriptive que de manière locale**, en prenant comme objet tel aspect, telle région, telle théorie des mathématiques, déjà constitués avec leur technicité spécifique, afin de montrer précisément quelles ont été en ce cas-là les voies de leur constitution effective. Mais utilisée de cette façon, la méthode phénoménologique n'est pas nécessairement incompatible avec l'autre option philosophique.*

Une philosophie du concept en effet dénie au sujet tout pouvoir constituant absolu et refuse de voir en lui autre chose qu'un pôle d'activité traversé par le dynamisme du concept, par quoi s'explique le développement manifesté par les mathématiques au cours de leur histoire. Le sujet ne peut que faire l'expérience du concept qui n'est pas son produit, mais vient à lui à

*partir d'un acquis qui lui-même n'est rien d'autre que conceptuel. Avec le concept apparaissent la nécessité et l'objectivité propres aux mathématiques. En se posant, le concept déploie le mouvement qui l'a engendré, tout en présentant une unité de sens appelée à nouveau à un devenir ultérieur. Une temporalité intrinsèque habite donc le concept, et celui-ci n'unifie rationnellement les opérations mathématiques que de façon provisoire. Le concept, né de concepts, en engendre d'autres. Dans ce mouvement autonome qui n'a ni moment inaugural, ni ultime, ni même des étapes prévisibles, il est un jalon, et en même temps le pivot des théories mathématiques qui naissent de sa formation. Dans son autodéveloppement, il est capable d'assurer simultanément la nouveauté théorique et la permanence de la validité de l'acquis. C'est là ce qu'enseigne véritablement l'étude des théories mathématiques lorsqu'on interroge la structure de leur intelligibilité sans en rester à la simple description, et qu'on les restaure dans l'élément qui leur est propre, non pas comme productions de la conscience, mais comme productions de la raison. À ce type de philosophie reste attaché, sans qu'on ait prétendu par ces quelques lignes faire le tour de sa pensée, **le nom de Cavallès, lequel par lui seul constitue une réponse à la question de savoir si les mathématiques posent encore des problèmes philosophiques.** »⁹⁰*

Nous suivrons les conseils de Caveing : nous utiliserons une méthode phénoménologique descriptive *de manière locale* – en nous intéressant à un point particulier, au sens historique et thématique, de la théorie de la mesure de Borel – et prendrons le concept d'*effectivité* comme *traversant* le sujet Borel. Enfin, comme nous y invite Caveing, nous aborderons

⁹⁰ Caveing, *Op. cit.*, p.13-15. Le gras est de nous.

Cavaillès, mais dans la Conclusion de notre thèse. Poursuivons la citation (p.15) :

« L'examen des conditions dans lesquelles les mathématiques soulèvent des problèmes philosophiques, auquel nous venons de nous livrer de façon sommaire, ne constitue pas encore une formulation de ces problèmes. Il est nécessaire de se demander ce que deviennent dans les conditions décrites les caractéristiques attribuées classiquement aux mathématiques. Considérons l'une des plus communément admises, leur universalité. Celle-ci s'entendait en un triple sens : relativement aux sujets individuels, relativement aux époques historiques, relativement aux cultures et civilisations. Par là était donc désignée une validité transsubjective, transhistorique et transculturelle des mathématiques. On dira qu'il ne s'agit de rien d'autre que de leur caractère scientifique, communément reconnu quand on dit que ce sont des « sciences ». Encore faut-il préciser que l'on peut restreindre l'emploi du mot « science » à des disciplines qui étudient des objets posés comme extrinsèques par rapport aux thèses qui les concernent, tandis que, si l'on dit par exemple : « les mathématiques sont les sciences du nombre et de l'espace » , on ne dit rien d'autre que « les mathématiques sont les sciences d'objets mathématiques » et, même si l'on montre comment tous les autres dérivent de ces deux-là, la tautologie subsiste. Ce qu'on peut entendre par objectivité des mathématiques n'est donc pas la référence à un donné extérieur, mais bien cette universalité qui ne leur était classiquement pas contestée. Bien entendu elle était rapportée aux principes rationnels, dont l'usage n'est nullement l'exclusivité des mathématiques. Mais alors qu'en est-il de cette universalité quand une école de mathématiciens avance la thèse que certains théorèmes des mathématiques « classiques », du moins ceux d'un certain type, ne

*sont pas vraiment démontrés, contrairement à ce que tout mathématicien a pensé jusque-là, d'une part parce que leur démonstration s'appuie sur un principe logique réputé universel, mais qui précisément ne doit pas être appliqué dans ces cas-là, et d'autre part parce que la conception même de la démonstration utilisée est vicieuse? L'apparition chez les mathématiciens du clivage exposé ci-dessus, leur division en deux écoles, l'une « classique », l'autre dite « intuitionniste », mais proclamant produire les « vraies » mathématiques, sont-elles en état de briser « l'universalité » des mathématiques? Il importe de bien saisir que quiconque raisonne comme s'il admet à titre d'hypothèse les principes « classiques » des uns ou les contraintes nouvelles que les « intuitionnistes » s'imposent, est capable d'enchaîner rationnellement les conséquences qui en découlent dans l'un et l'autre cas. Au demeurant les logiciens se sont empressés de bâtir une logique intuitionniste ad hoc et de formaliser les procédures démonstratives, mais le problème dépasse le débat technique entre les deux écoles, et ne se réduit nullement à la simple question du choix d'une axiomatique. **La question se pose de savoir comment caractériser ce clivage et de déterminer s'il y a dans les modalités propres au développement historique de l'abstraction mathématique de quoi rendre compte d'une telle bifurcation.** »⁹¹*

Cette dernière phrase résume bien la problématique philosophique de notre thèse...

Enfin, pour lever un peu l'ambiguïté sur l'expression "objet mathématique" – déjà utilisé et qui sera récurrent tout au long de la thèse – et en attendant d'aborder la question de manière approfondie, ce qui

⁹¹ Caveing, *Op. cit.*, p.15. Le gras est de nous.

sera fait lors de l'analyse du concept cavallèsien de *geste mathématique*, une citation (p.21) de Caveing aura valeur de "déclaration préalable" :

« Ce que l'on peut cependant légitimement se proposer, c'est de choisir un point de vue à partir duquel il serait possible d'éclairer les problèmes ici évoqués, d'élucider jusqu'à un certain point les phénomènes opaques, de voir se dissoudre le sens aporétique de certaines exigences. Une hypothèse de méthode consisterait à identifier dans les mathématiques un point aveugle où les « manque-à-voir » constituant autant de problèmes auraient leur origine. Ce peut être, dans la façon dont mathématiciens et non-mathématiciens parlent des mathématiques, un terme de désignation qui leur soit commun, c'est-à-dire non spécifique. Les termes spécifiques, opération, fonction, ensemble, espace, etc. sont en principe bien définis. Il n'en va pas de même du terme «objet» alors que le mathématicien l'emploie constamment pour désigner ce sur quoi porte son activité intellectuelle. Or ce terme appartient au langage ordinaire, en particulier lorsqu'il est employé au pluriel, comme c'est le cas. À ce titre il peut être soupçonné à bon droit d'importer un germe d'ontologies implicites, de réifications subreptices, et donc des ferments d'opacité dans l'appréhension des modalités de fonctionnement de la pensée mathématique. L'emploi d'un tel terme, éminemment polysémique, chargé de surcroît du sens attaché à ses usages philosophiques, ne peut, en éveillant le soupçon, qu'engager la réflexion critique à examiner sérieusement en quel sens, légitime ou non, les mathématiques auraient affaire à des « objets ». »

Maintenant que nous avons retracé certains événements historiques de cette "montée" vers la théorie de la calculabilité, et que nous avons

cadre la problématique épistémologique, nous allons aborder l'étude de la notion d'effectivité chez Borel avec une méthodologie historiographique, en considérant que chez les mathématiciens de l'époque la notion d'effectivité au tournant du XIXe et XXe siècle avait, bien évidemment, un sens et une portée cognitive autonome de son devenir historique, ...

C'est ce sens que nous voulons retrouver.

III- Plan de la thèse

Partie I

Toute étude historique nécessite de fixer un point de départ, souvent arbitraire. En démarrant cette étude par une longue analyse consacrée à un point particulier des *Leçons sur la théorie des fonctions*⁹² de Borel (1898, p.48-49), nous ne dérogeons pas à la règle. Le premier chapitre a un objectif introductif : mettre en place la narration en évoquant – sans nécessairement expliquer – les concepts mathématiques qui feront l'objet d'un approfondissement dans les chapitres suivants. Ce chapitre aura donc un faible contenu mathématique et le concept d'effectivité, point de mire de tout notre travail, sera à peine évoqué. L'étude de l'effectivité ne démarrera qu'au chapitre suivant, une fois familiarisés avec certaines thématiques boréliennes.

⁹² **Borel**, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, 1898. Cette œuvre ayant fait l'objet de trois rééditions augmentées par Borel (1914, 1928, 1950), nous nous référerons à la première édition sauf quand nous préciserons. Dans la suite, nous nommerons cette œuvre: *Leçons*"

Partie II

Ayant extrait une certaine définition de l'effectivité chez Borel – à l'époque de l'écriture des *Leçons* –, nous l'utiliserons comme point de départ, ou plutôt comme matériau brut, pour mettre en place et exercer certains outils d'analyse épistémologiques inspirés d'auteurs contemporains, en nous servant en particulier de la méthodologie issue d'une théorie de l'acte cognitif.

Enfin, la **Partie III** constitue la conclusion.

Du point de vue de la construction

En dépit de tous nos efforts pour mettre en scène de manière limpide la construction de notre thèse, nous nous sommes heurté systématiquement à un problème qui nous semble insoluble : comment expliquer et approfondir épistémologiquement chaque concept mathématique (ou péri-mathématique) rencontré au cours de l'étude historique dès lors que ces explications font elles-mêmes appel à des concepts épistémologiques qu'il nous fallait construire en nous appuyant sur de nombreux écrits ?

Ce problème nous a obligé à partitionner la thèse en deux parties, la première historique centrée sur Borel, la seconde méthodologique et épistémologique. Cette partition est la plus logique : on présente d'abord un matériau historique d'où l'on extrait certains items, qu'on analyse ensuite à l'aune d'une théorie épistémologique. Mais une telle structure a un inconvénient : dans notre exposé historique, nous avons dû taire une partie de l'analyse épistémologique, qui pourtant oriente nos choix dans toute cette première partie.

Aussi, la première partie est, métaphoriquement, un travail de "dragage" d'un fond marin mathématique au cours duquel certains objets

sont hissés en surface et disposés sur le pont... en attendant qu'une figure composée de tous les morceaux accumulés commence à se dessiner enfin et donne prise au travail critique. Concrètement, au cours de la Première partie, nous pointerons concepts boréliens, qui ne formeront un tout qu'à la fin de cette partie, quand se dévoileront les thématiques centrales – *modes de connaissance, existants mathématiques*, etc. – et la conception de l'effectivité borélienne (de l'époque précoce choisie) sur lesquelles porteront l'analyse épistémologique.

.2 - "Franchir le pas" ou traverser le Rubicon ?

Nous allons démarrer par un exercice d'exégèse du discours de Borel dans ses *Leçons*. Ce chapitre contiendra surtout une analyse lexicale et/ou sémantique de ce discours, plutôt qu'un exposé mathématique circonstancié de la théorie de la mesure borélienne. Pourquoi ? Parce que le discours péri-mathématique de Borel reflète – et permet de se familiariser avec – un certain flou d'ordre épistémologique dans la pensée du mathématicien à l'époque des *Leçons* (1898). Or ce flou, loin d'être anecdotique, se retrouvera dans sa conception de l'effectivité (à l'époque considérée), ce que nous montrerons au chapitre suivant.

En partant de l'énoncé "descriptif" de l'existence d'une mesure pour des ensembles non mesurables B – nous allons nous initier à la théorie de la mesure, à la complexité de la pensée mathématique de Borel, et aux contraintes épistémologiques et épistémiques cadrant son geste. Ce chapitre ouvrira sur le suivant consacré à l'analyse d'un théorème effectif, énoncé en 1895.

Précisons que, malgré notre insistance à mettre l'accent sur les contradictions épistémologiques de Borel, nous tenons ces "défauts" pour l'expression d'une pensée brillante et mouvante se battant contre les premiers signes d'un cataclysme que nul n'avait vu venir, ni n'aurait pu vaincre à l'époque : la *crise des fondements*...

I- Problématique

Démarrons l'étude historique par l'extrait d'un texte d'Arnaud Denjoy, *Commentaire sur la mesure des ensembles*, paru dans les œuvres complètes d'Émile Borel⁹³, concernant la définition des ensembles mesurables donnée par Borel en 1898 dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions*. Au début de ce chapitre introductif à la pensée de Borel nous parlerons des ensembles mesurables B sans les définir, car nous procédons à une analyse structurelle d'un problème de définition chez Borel dans laquelle n'entre pas en compte le contenu particulier de ce concept. La définition s'éclairera en cours d'étude. L'analyse de l'extrait de Denjoy inaugure donc notre propos.

A. Denjoy écrit :

*« Si un ensemble n'est pas qualifié de mesurable, selon la définition de M. Borel, cela ne signifie pas que M. Borel lui dénie une mesure, qu'il faudra toutefois définir par d'autres considérations. Tout au contraire, M. Borel accepte de parler de la mesure d'un ensemble quelconque, même non mesurable au sens qu'il a précisé. Il écrit en substance : "Si un ensemble E contient un ensemble mesurable E1, de mesure α , la mesure de E est au moins égale à α . Si E est contenu dans E2, mesurable de mesure β , la mesure de E est au plus égale à β ." On en conclura que si $\beta = \alpha$, si E1 et E2 sont tous deux mesurables, de mesure α , et l'un contenant l'autre, **M. Borel énonce que la mesure de tout ensemble E compris entre les deux est à la fois au moins et au plus égale à α . De là à dire que la***

⁹³ Denjoy, *Commentaire sur la mesure des ensembles*, in Borel, *Œuvres*, Paris, CNRS, 1972, vol.1.

mesure de E vaut α , il n'y a qu'un pas. M. Lebesgue le franchit. »⁹⁴

Ce qui frappe d'emblée dans ce commentaire de Denjoy, avant même d'explorer son contenu mathématique, c'est l'ambiguïté du propos : « *Si un ensemble n'est pas qualifié de mesurable, selon la définition de M. Borel, cela ne signifie pas que M. Borel lui dénie une mesure, qu'il faudra toutefois définir par d'autres considérations. Tout au contraire, M. Borel accepte de parler de la mesure d'un ensemble quelconque, même non mesurable au sens qu'il a précisé.* » Si ces « *autres considérations* » sont d'ordre mathématique (ce qui semble évident), le propos de Denjoy sur l'attitude de Borel vis-à-vis de sa définition de la mesure tient quasiment du non-sens, eu égard à la manière dont un mathématicien est supposé appréhender la portée d'une définition : celle-ci n'est-elle pas sensée être la plus générale ? Car cela n'aurait pas de sens (sauf méthodologique) d'énoncer une définition pour affirmer qu'elle est incomplète, surtout si l'auteur la complète ensuite mais de manière très partielle, i.e. sans chercher à en tirer toutes les conséquences. Or ici, selon les propos de Denjoy, Borel donnerait une définition générale des ensembles mesurables B (⁹⁵) tout en admettant qu'elle n'est pas complète, puisqu'on peut l'étendre « *par d'autres considérations* ». On pourrait interpréter les propos de Denjoy de la manière suivante : Borel donne sa définition de la mesure des ensembles mais, par acquis de conscience mathématique, il fournit les moyens à d'autres mathématiciens attachés à une autre conception des mathématiques de proposer une définition plus large conduisant à étendre la catégorie des ensembles mesurables au-delà de la sienne... Des définitions distinctes correspondant à des modes distincts

⁹⁴ Ibidem, p.210. Dans cette citation – et dans toutes les citations de la thèse – : les italiques sont inversées et le gras est de nous.

⁹⁵ Les ensembles mesurables B sont les ensembles mesurables au sens de Borel.

d'appréhension des "existants" mathématiques, cela s'est déjà vu. Il suffit d'évoquer l'exemple de la définition des ensembles infinis, selon qu'on adhère au point de vue "cantorien" d'une infinité réalisée (existence d'ensembles infinis actuels) ou au point de vue intuitionniste d'une infinité potentielle (existence d'ensembles finis qu'on peut étendre de manière illimitée, mais pas d'ensembles infinis actuels). Mais alors, le mathématicien qui procède ainsi devrait considérer que sa définition élargie (au-delà de son propre mode d'appréhension des existants mathématiques) n'a pas de sens pour lui ou alors que le concept défini n'est pas le même que le sien. Or dans les propos de Denjoy, rien ne permet de penser que Borel rejette catégoriquement un prolongement de sa définition... En l'espèce, cet "addendum" à la définition des ensembles mesurables B donnée par Borel, tel que Denjoy le rapporte, a quelque chose d'incompréhensible.

Si nous avons choisi de citer Denjoy pour ouvrir notre étude sur Borel, c'est qu'il représente une bonne porte d'entrée : Denjoy nous livre de manière concise toute l'ambiguïté de Borel lui-même face à la "ligne de partage" entre sa conception épistémologique des mathématiques et son geste⁹⁶ de mathématicien qui se prolonge au-delà de cette conception, pour ainsi dire "à sa pensée défendante".

Résumons le commentaire de Denjoy⁹⁷.

⁹⁶ Le terme sera défini dans la partie méthodologique de la thèse. Pour le moment, contentons-nous de dire que par "geste" (mathématique) nous entendons aussi bien l'acte de pensée mathématique que l'acte d'écriture mathématique, considérés comme formant un tout.

⁹⁷ Ici encore, la définition d'un ensemble mesurable B n'est pas nécessaire à la compréhension de notre propos.

Citation que Denjoy fait des propos de Borel : « Si un ensemble E contient un ensemble mesurable E_1 , de mesure α , la mesure de E est au moins égale à α . Si E est contenu dans E_2 , mesurable de mesure β , la mesure de E est au plus égale à β . » Ce qui s'écrit :

α ; β ;	Soit E_1 , un ensemble mesurable au sens de Borel, de mesure Soit E_2 , un ensemble mesurable au sens de Borel, de mesure Soit E un ensemble quelconque tel que $E_1 \subset E \subset E_2$ Alors $\alpha \leq \text{mesure}_{\text{Borel}} \text{ de } E \leq \beta$ ⁽⁹⁸⁾
-----------------------------	--

Puis Denjoy attribue à Borel, sans le citer explicitement, le propos :

	Si $\beta = \alpha$, alors $\alpha \leq \text{mesure}_{\text{Borel}} \text{ de } E \leq \alpha$
--	--

Et Denjoy de conclure :

« De là à dire que la mesure de E vaut α , **il n'y a qu'un pas. M. Lebesgue le franchit.** »

	$\text{mes}_L(E) = \alpha$ ⁽⁹⁹⁾
--	--

⁹⁸ Nous utiliserons la notation "mesure_{Borel} de E " pour parler d'un ensemble auquel Borel attribue une mesure mais qui n'entre pas dans la définition des ensembles mesurables B ; et $\text{mes}_B(E)$ pour les ensembles mesurables au sens de Borel. Le statut de "mesure de E " avec E non mesurable B est, pour le moment, vague.

Concrètement, ce "pas" dont parle Denjoy se trouve dans la thèse de Lebesgue de 1902 : *Intégrale, longueur, aire*¹⁰⁰. Lebesgue y construit son intégrale à partir de sa définition de la mesure des ensembles (mesure de Lebesgue). Cet écrit n'est pas le premier où figure l'intégrale de Lebesgue : sa première occurrence date de 1901 dans *Sur une généralisation de l'intégrale définie*¹⁰¹. Néanmoins, dans la publication de 1901 Lebesgue n'aborde le problème de la mesure que latéralement (en une dizaine de lignes) pour définir son intégrale. En revanche, dans sa thèse de 1902, la définition des ensembles mesurables L (¹⁰²) y est amplement exposée.

Le "pas franchit" par Lebesgue à partir des considérations de Borel dans ses *Leçons* de 1898 est un épisode intrigant de l'histoire récente des mathématiques : Borel aurait offert à Lebesgue, pour ainsi dire "sur un plateau", le prolongement du concept de mesure qui allait constituer le socle de sa théorie de l'intégrale. En effet, selon Denjoy, Lebesgue aurait effectué l'inférence suivante :

$$[\text{mes}_B(E_1) \leq \text{mesure}_{\text{Borel}} \text{ de } E \leq \text{mes}_B(E_1)] \Rightarrow [E \text{ ensemble mesurable et } \text{mes}_L(E) = \text{mes}_B(E_1)] \text{ } ^{(103)}$$

Exprimée de la sorte, l'inférence de Lebesgue est immédiate. Et de

⁹⁹ Nous notons $\text{mes}_L(E)$ la mesure de E au sens de Lebesgue.

¹⁰⁰ **Lebesgue**, *Intégrale, longueur, aire*, soutenue à Nancy. Dans le texte, cette œuvre sera notée "Lebesgue-1902".

¹⁰¹ **Lebesgue**, *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, C. R. Acad. Sci. **132** (1901), p.1025-1028

¹⁰² Les ensembles mesurables L sont les ensembles mesurables au sens de Lebesgue.

¹⁰³ Pour les ensembles mesurables B, la mesure de Lebesgue est égale à la mesure de Borel

quelque manière qu'on s'y prenne, on ne voit pas ce qui a pu causer le "ratage".

Quand on sait que le "pas" franchi par Lebesgue l'a conduit à étendre la définition des ensembles mesurables B à des ensembles mesurables L non mesurables B suivant la méthode d'Archimède-Jordan, et à développer une nouvelle définition de l'intégrale s'étendant au-delà des fonctions Riemann-intégrables, on ne peut que se demander pourquoi Émile Borel – l'inventeur du concept d'"additivité dénombrable" qui a définitivement résolu le *problème de la mesure* – n'a pas effectué l'inférence, microscopique s'il en est, qui l'eut conduit de la proposition " $\alpha \leq \text{mesure de } E \leq \alpha$ " à la proposition " E ensemble mesurable et $\text{mes}_B(E) = \alpha$ ", généralisant ainsi son concept de mesure. Avec le recul – et la pratique actuelle des mathématiques – le fait semble inexplicable. Pourquoi un des plus grands mathématiciens du début du XXe siècle n'a pas eu, non pas l'idée ni même le geste, mais le "réflexe" que tout lycéen d'aujourd'hui connaissant un peu de mathématiques accomplirait sans même réfléchir : $\alpha \leq \text{mesure de } E \leq \alpha \Rightarrow \text{mes}(E) = \alpha$?

C'est que, au contraire, Borel, en 1898, réfléchissait beaucoup à ses "actes" mathématiques, que ces derniers étaient contraints par de très fortes convictions épistémologiques, que les prémisses de la crise des fondements étaient déjà visibles¹⁰⁴, et que le mathématicien français se voyait comme le garde-fou d'une mathématique en perte de sens depuis l'émergence de la théorie du transfini par Cantor (du moins, concernant certains pans de cette théorie) et les premiers balbutiements de la méthode axiomatique¹⁰⁵... Certes, des convictions fortes et un contexte

¹⁰⁴ Prises de position violentes autour de la théorie naïve des ensembles de Cantor, apparition des premiers paradoxes (Cantor-1897, Burali-Forti-1897), etc.

¹⁰⁵ N'oublions pas que l'axiomatisation de la géométrie par Hilbert est parue la même année que les

historique conflictuel peuvent expliquer qu'un mathématicien comme Borel ait, sciemment ou non, sabordé un acte de généralisation théorique. Mais nous verrons que loin de l'avoir sabordé, Borel l'a accompli, l'a écrit... pour ensuite s'arrêter. Ce qui rend le sabordage particulièrement dramatique.

Dans le présent chapitre, nous nous focaliserons sur l'inférence "manquée" de Borel et sur ses raisons plausibles, en les replaçant dans le contexte de l'époque. Nous verrons comment celles-ci éclairent sa conception des mathématiques et les effets "contraignants" sur son geste de mathématicien.

Enfin, pour disséquer ce "non-acte" microscopique, nous nous servirons des seuls outils qui, à notre avis, possèdent le "pouvoir de résolution" nécessaire, à savoir : la conception de "l'acte mathématique" développée par le courant "néo-intuitionniste", fondé par Dummett à partir de son analyse de l'épistémologie brouwerienne, et le concept de "modalité de la pensée mathématique" développé par Michael Detlefsen sur la base des réflexions de Poincaré (voir Partie II). Nous pourrions alors comprendre mieux ce qui a arrêté Borel : nous verrons par exemple que l'inférence de Lebesgue, qui semble immédiate, peut être considéré comme purement "logique" même si elle est à contenu mathématique, et non comme une inférence "authentiquement mathématique" selon un certain point de vue – qui était sans doute celui de Borel¹⁰⁶.

Leçons de Borel (1898).

¹⁰⁶ Nous reprenons cet exemple en Partie II, dans le chapitre intitulé "Les modes de la connaissance mathématique".

II- Borel (et Lebesgue) dans le texte

Denjoy nous a permis d'énoncer simplement notre problématique, nous allons maintenant investir le texte original de Borel, extrait des *Leçons*-1898. Celui-ci fait partie du chapitre "III.- Les ensembles mesurables"¹⁰⁷, et se situe à la fin de la (première) définition de la mesure des ensembles boréliens. La citation de Denjoy ci-dessus fait référence aux propos de Borel suivants :

*« Il est d'ailleurs expressément entendu que nous ne parlerons de mesure qu'à propos des ensembles que nous avons appelé mesurables. Cependant, si un ensemble E contient tous les éléments d'un ensemble mesurable E_1 , de mesure α , nous pourrions dire que la mesure de E est supérieure à α , **sans nous inquiéter si E est mesurable ou non**. Inversement, si E_1 contient tous les éléments de E , nous dirons que la mesure de E est inférieure à α . **Les mots supérieure et inférieure n'excluent d'ailleurs pas l'égalité. Il est aisé de voir que les propriétés essentielles s'étendent, avec des modifications convenables, à ces nouvelles définitions : en quelque sorte, un calcul d'égalités se trouve remplacé par un calcul d'inégalités qui peut parfois rendre les mêmes services.** »¹⁰⁸*

1°- La définition des ensembles mesurables

¹⁰⁷ Borel, *Leçons*, p.46-50.

¹⁰⁸ Borel, *Leçons*, p.48-49.

Avant d'entamer l'analyse de ces étranges propos, il nous faut résumer les points développés par Borel dans ses *Leçons* qui précèdent l'extrait considéré.

L'ouvrage est organisé en six chapitres :

- Le *Chapitre I. - Notions générales sur les ensembles* (p.1-21) présente le "fragment" de la théorie des ensembles de Cantor que Borel "sauve" par appel à des considérations de constructivité ou d'intuition immédiate : on y trouve les ensembles infinis dénombrables "numérotés", considérés comme réalisés constructivement, le continu arithmétique et les ensembles ayant la puissance du continu arithmétique, considérés comme donnés par l'intuition, etc.

- Le *Chapitre II. - Les nombres algébriques et l'approximation des incommensurables* (p.22-34) traite des propriétés des nombres du continu arithmétique et de l'ensemble de ces nombres.

- Le *Chapitre III. - Les ensembles parfaits et les ensembles mesurables* (p.35-50) définit la mesure des ensembles (mesurables B et quelconques) et les propriétés des ensembles mesurables B.

- Les chapitres *IV. - Le prolongement analytique* (p.51-61) ; *V. - Sur la convergence de certaines séries* (p.62-79) et *VI. - La notion de fonction d'une variable complexe* (p.80-102) mettent en scène une application de la théorie de la mesure à l'étude du prolongement analytique de certaines fonctions (les fonctions analytiques) *via* l'étude de la convergence de certaines séries (les développements de Taylor des fonctions analytiques)... ⁽¹⁰⁹⁾

¹⁰⁹ Pour le moment, nous ne nous occupons pas des *Notes de la première édition* (p.103-134) sur

En termes de contenu, Borel utilise comme matière première pour la définition des ensembles mesurables, le segment de la droite des réels $(0,1)$ entendu dans son sens usuel, c'est-à-dire formé des nombres rationnels et irrationnels (selon la définition de Dedekind), "analogue" arithmétique du segment géométrique $[0,1]$ ¹¹⁰. Borel précise à la p.16 de ses *Leçons* :

*"Nous admettrons que l'ensemble C des nombres compris entre 0 et 1 nous est donné, **sans chercher comment il pourrait l'être effectivement**. Les ensembles ayant la même puissance que l'ensemble C seront dit avoir la puissance du continu."*

Remarquons déjà que Borel semble admettre deux types d'existants mathématiques : ceux donnés dans l'intuition sans découler d'une construction effective et ceux construits effectivement.

Borel, toujours par analogie avec le continu géométrique, attribue à l'intervalle de réels $(0,1)$ une mesure égale à la longueur du segment $[0,1]$ entendu dans le sens géométrique. Il s'ensuit que l'intervalle arithmétique $(0,1)$ a pour mesure 1. Puis, il énonce (p.46-47) la définition de la mesure des ensembles. Nous allons le citer *in extenso* :

« Tous les ensembles que nous considérerons seront formés de points compris entre 0 et 1. Lorsqu'un ensemble sera formé de tous

lesquelles nous reviendrons dans la partie II de notre thèse.

¹¹⁰ Pour distinguer les segments géométriques des ensembles-segments arithmétiques, nous utiliserons pour les premiers une notation entre crochets – $[0,1]$ est le segment géométrique compris entre les bornes 0 et 1 de la droite – et pour les seconds une notation entre parenthèses – $(0,1)$ est l'ensemble arithmétique de réels de du segment.

les points compris dans une infinité dénombrable d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres et ayant une longueur totale s , nous dirons que l'ensemble a pour mesure s . Lorsque deux ensembles n'ont pas de points communs, et que leurs mesures sont s et s' , l'ensemble obtenu en les réunissant, c'est-à-dire leur somme, a pour mesure $s + s'$. D'ailleurs, il importe peu dans la définition de la mesure d'un ensemble, ou dans celle de la somme de deux ensembles, qu'on néglige ou qu'on tienne tel compte qu'on veut des extrémités des intervalles, en infinité dénombrable.

Plus généralement, si l'on a une infinité dénombrable d'ensembles ayant deux à deux aucun point commun et ayant respectivement pour mesure $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, leur somme (ou ensemble formé par leur réunion) a pour mesure

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$$

Tout cela est une conséquence de la définition de la mesure. Voici maintenant des définitions nouvelles : si un ensemble E a pour mesure s , et contient tous les points d'un ensemble E' dont la mesure est s' , l'ensemble $E - E'$, formé des points de E qui n'appartiennent pas à E' , sera dit avoir la mesure $s - s'$. »

Remarquons que Borel semble donner une existence non problématique aux concepts d'ensemble infini dénombrable réalisé et d'ensemble infini non dénombrable réalisé...

A la suite, il énonce les propriétés suivantes : un ensemble non dénombrable peut être de mesure nulle mais tout ensemble de mesure non nulle est non dénombrable¹¹¹ :

¹¹¹ Cette conclusion émerge du théorème sur la mesure nulle de l'ensemble des rationnels compris entre 0 et 1 (voir chapitre suivant).

« *La mesure d'un ensemble ne sera jamais une quantité négative ; mais un ensemble peut avoir pour mesure zéro et avoir la puissance du continu.* »

Comme Borel le signale, cela découle de son "théorème fondamental" énoncé et démontré à la page 43 des *Leçons* :

« *Si l'on a sur une droite une infinité d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur [Borel exclu les extrémités] à l'un au moins des intervalles, **il existe un NOMBRE LIMITE** d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété (tout point de la droite est intérieur à au moins l'un d'eux.* »

Ce théorème est au cœur de sa théorie de la mesure. Borel l'a énoncé pour la première fois dans sa thèse de 1895. Nous aborderons en détail ce point dans le chapitre 3 de la présente partie. Aussi, contentons-nous ici de résumer sa définition de la mesure et les propriétés de ce concept.

Principe "métamathématique" ⁽¹¹²⁾ :

1° - Le continu arithmétique est *donné* dans l'intuition (sans construction effective) par analogie avec le continu géométrique, *i.e.* : les réels sont considérés comme étant en correspondance avec les points de la droite géométrique (sans précision de la nature ni de la forme de cette correspondance).

¹¹² Le terme "métamathématique" est ici à entendre dans le sens naïf (préhilbertien) : un principe métamathématique n'est pas un axiome mais une conception puisant sa justification hors de la sphère du langage-objet mathématique.

“Axiomes” méta-arithmétiques (113) :

2° - La mesure d'un intervalle du continu arithmétique se déduit directement de la longueur du segment correspondant du continu géométrique.

$$mes(Interv) : long[Seg]$$

$$\text{En particulier } mes(0,1) = long[0,1] = 1$$

3° - Si la *longueur* (totale) d'une réunion infinie dénombrable de segments géométriques deux à deux disjoints a pour valeur s , alors la réunion infinie dénombrable des ensembles-segments correspondants dans le continu arithmétique est dit de *mesure* s .

$$mes\left(\bigcup_{\infty} Interv_i\right) = long\left[\bigcup_{\infty} Seg_i\right]$$

Définition (arithmétiques) de la mesure des ensembles :

4° - Un ensemble mesurable est un ensemble formé de nombres réels.

5° - La réunion de deux ensembles disjoint de mesure s et s' est un ensemble mesurable de mesure $s+s'$.

$$mes(E \cup E') = mes(E) + mes(E')$$

$$\text{avec } E \cap E' = \emptyset$$

¹¹³ Ici, il s'agit d'axiomes mathématiques.

6° - La réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux disjoints est un ensemble mesurable de mesure égale à la somme des mesures de chaque ensemble.

$$mes\left(\bigcup_{\infty} E_i\right) = \sum_{\infty} mes(E_i)$$

avec $\bigcap_{\infty} E_i = \emptyset$

7° - Si E' mesurable de mesure s' est inclus dans E mesurable de mesure s , alors la mesure de E amputée des points de E' est l'ensemble mesurable noté $(E - E')$ de mesure $s - s'$.

$$mes(E - E') = mes(E) - mes(E')$$

avec $E' \subset E$

Propriétés des ensembles mesurables :

8° - La mesure d'un ensemble est toujours positive

9° - Tout ensemble de mesure non nulle n'est pas dénombrable

10° - La réciproque est fautive : un ensemble qui n'est pas dénombrable peut être de mesure nulle.

Cette construction d'un nouveau concept (la mesure) se situe à cheval entre le domaine géométrique et le domaine arithmétique. Plus

précisément :

1) Le point 1° est un principe méta-mathématique : il se situe dans la sphère phénoménologique et n'est fondé que sur l'intuition¹¹⁴.

2) Les points 2° à 3° sont des axiomes mathématiques justifiés par le principe 1°, qui établissent la correspondance entre la mesure arithmétique des ensembles et la longueur géométrique des segments.

3) Les points 4° à 7° sont des définitions purement arithmétiques sur les ensembles mesurables qui découlent, du point de vue de Borel, de la correspondance instituée par les points 1° à 3°.

4) Les points 8° à 10° sont des propriétés de la mesure découlant, du point de vue de Borel, des points 1° à 7°.

Notons ici que l'exposé de Borel doit être considéré comme constructif dans le sens suivant : sa définition des ensembles mesurables est construite pour ainsi dire dans le sens "bottom-up" : à partir d'une base située dans l'intuition (l'existence d'un continu arithmétique) et au moyen d'une montée progressive vers l'abstraction à l'aide d'actes d'intuition qui prolongent les prémisses et garantissent la légitimité (dans l'intuition) de la conclusion. Ainsi : il instaure d'abord un principe non mathématique d'analogie entre le géométrique et l'arithmétique. Ce principe *sui generis* est basé sur l'intuition pure et considéré comme fondé par elle. De cette analogie découle ("axiome" 2°) l'analogie "longueur du segment AB \leftrightarrow mesure de l'intervalle AB". Le principe 1° garantit le bien-fondé de

¹¹⁴ Nous verrons ci-dessous comment Borel a tenté de réintroduire ce principe dans la sphère arithmétique (Borel-1912)

l'axiome 2° par un acte de particularisation de cette base intuitive. Remarquons que dans les axiomes 2° et 3°, c'est l'intuition du géométrique qui sert d'appui à l'intuition arithmétique. Son troisième axiome, bien que situé dans le langage mathématique, fait appel à un nouvel acte d'intuition : l'extension de l'intuition "analogie géométrique-arithmétique" au domaine de l'infini dénombrable. L'infini dénombrable appartient à la théorie des nombres, il repose donc sur une intuition de type arithmétique : ici c'est l'intuition arithmétique qui sert d'appui à l'intuition géométrique.

Une fois accompli ce double mouvement de déplacement horizontal de l'intuition, la base obtenue devient l'appui d'une construction verticale strictement mathématique : la définition de la mesure se construit dans le langage-objet par transports successifs de l'intuition de base, au moyen d'inférences *claires et non problématiques*. Si l'on admet la validité ontologique du principe métamathématique (1°) et des axiomes méta-arithmétiques de départ (2° et 3°), le concept de mesure est non-problématique et la question de l'existence de la classe des ensembles mesurables (i.e. le fait que cette classe est non vide) ne se pose pas.

2°- Analyse de l'extrait de Borel

Nous en arrivons à l'extrait qui nous intéresse (Borel-1898, p.48-49) :

« Les ensembles dont on peut définir la mesure en vertu des définitions précédentes seront dit par nous mesurables, *sans que nous entendions impliquer par là qu'il n'est pas possible de donner*

une définition de la mesure d'autres ensembles ; mais une telle définition nous serait inutile ; elle pourrait même nous gêner, si elle ne laissait pas à la mesure les propriétés fondamentales que nous lui avons attribuées dans les définitions que nous avons données.

*Ces propriétés essentielles, que nous résumons ici parce qu'elles nous seront utiles, sont les suivantes : la mesure de la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles est égale à la somme de leurs mesures ; la somme de la différence de deux ensembles est égale à la différence de leurs mesures [en note 2, Borel précise : "Bien entendu quand on parle de la somme de plusieurs ensembles, on suppose qu'ils n'ont, deux à deux, aucun élément commun et, quand on parle de la différence, on suppose que l'un d'eux renferme tous les éléments de l'autre."] ; la mesure n'est jamais négative ; tout ensemble dont la mesure n'est pas nulle n'est pas dénombrable. C'est surtout de cette dernière propriété que nous ferons usage. **Il est d'ailleurs expressément entendu que nous ne parlerons de mesure qu'à propos des ensembles que nous avons appelé mesurables. Cependant, si un ensemble E contient tous les éléments d'un ensemble mesurable E_1 , de mesure α , nous pourrions dire que la mesure de E est supérieure à α , sans nous inquiéter si E est mesurable ou non. Inversement, si E_1 contient tous les éléments de E , nous dirons que la mesure de E est inférieure à α . Les mots supérieure et inférieure n'excluent d'ailleurs pas l'égalité. Il est aisé de voir que les propriétés essentielles s'étendent, avec des modifications convenables, à ces nouvelles définitions : en quelque sorte, un calcul d'égalités se trouve remplacé par un calcul d'inégalités qui peut parfois rendre les mêmes services. »***

La partie en gras, qui est l'extrait commenté par Denjoy, instaure

deux nouvelles propriétés de la mesure :

11°- la mesure d'un ensemble E quelconque inclus dans un ensemble mesurable est inférieure ou égale à la mesure de ce dernier.

12°- la mesure d'un ensemble E quelconque contenant un ensemble mesurable est supérieure ou égale à la mesure de ce dernier.

En l'état, nous n'avons pas de caractérisation plus précise de cet ensemble E "quelconque", à part la condition $E_2 \subset E \subset E_1$, avec E_1 et E_2 mesurables. Aussi, les propriétés 11° et 12° définissent la mesure de certains ensembles de manière descriptive et non constructive¹¹⁵. Etant donnée la méthode utilisée jusque-là pour définir la mesure des ensembles, ces nouvelles définitions semblent parfaitement parachutées car ne découlant pas de ce qui précède. Nous verrons ici que Borel avait en tête des ensembles quelconques... bien particuliers.

Il est intéressant de noter que ces deux nouvelles propriétés dérogent en partie, mais en partie seulement, au principe de constructivité qui a présidé à l'établissement des définitions et propriétés des ensembles mesurables. De fait, la rupture de la chaîne d'intuition intervient au niveau du concept d'"ensemble quelconque" qui n'est identifiable à aucune notion/image ancrée dans l'intuition. En revanche, les inférences

$$E_{\text{quelconque}} \subset E'_{\text{mesurable B}}$$

et

$$[E_{\text{quelconque}} \subset E'_{\text{mesurable B}}] \Rightarrow [\text{mesure de } E_{\text{quelconque}} \leq \text{mes}_B(E')]$$

¹¹⁵ Selon les mots de Borel, ma méthode descriptive consiste à « *définir les éléments nouveaux qu'on introduit, à l'aide de leurs propriétés essentielles, c'est-à-dire celles qui sont strictement indispensables pour les raisonnements qui doivent suivre.* » In *Leçons*, p.48, note 1.

s'appuient sur l'intuition héritée (construite) d'une part des propriétés générales d'inclusion des ensembles, d'autre part des axiomes, définitions et propriétés de la mesure.

Ce qui est étrange *in fine* dans cette citation, c'est que Borel rompt la chaîne constructive en amont de l'arrêt de son geste et qu'il arrête son geste alors que, l'inférence problématique ayant déjà été faite, il aurait pu poursuivre sur un mode constructif : en effet, une fois introduit l'ensemble E quelconque, il y a une chaîne constructive entre les inférences :

↓ $E \subset E_1$ et $E_2 \subset E$

↓ $E_2 \subset E \subset E_1$

↓ $\text{mes}_B(E_2) = \text{mes}_B(E_1) = \alpha$

↓ $\alpha \leq \text{mesure}_{\text{Borel}} \text{ de } E \leq \alpha$

↓ $\text{mesure}_{\text{Borel}} \text{ de } E = \alpha$

↓ E mesurable

↓ Extension de la catégorie des ensembles mesurables

Le texte séminal est d'autant plus étrange pour deux raisons :

1) Borel commence par annoncer que toute définition différente de sa définition des ensembles mesurables B serait inutile voire gênante si elle modifiait les propriétés de la mesure B , alors qu'il s'apprête justement à élargir cette définition à des ensembles non mesurables B . On en déduit que Borel trouve inutile et gênant d'ajouter les propriétés 11° et 12°. Cela a néanmoins un sens si on l'interprète ainsi : l'ajout de ces propriétés est, pour lui, inutile *pour* sa théorie de la mesure – mais fort utile ailleurs... Et c'est gênant au sens qu'il pollue sa théorie constructive.

2) la phrase (qui précède l'extrait en gras) « *il est d'ailleurs expressément entendu que nous ne parlerons de mesure qu'à propos des ensembles que nous avons appelé mesurables* » est proprement incompréhensible : pourquoi Borel impose-t-il cette limite au concept d'ensemble mesurable alors même qu'il s'apprête à élargir au-delà sa définition de la mesure ? Si Borel avait écrit "nous ne parlerons que de la mesure des ensembles que nous avons appelé mesurable", alors, il s'agirait de limiter le champ de son investigation à un cas restreint, mais le « *nous ne parlerons de mesure que* » semble signifier que Borel envisage une limitation du concept lui-même de mesure et non de l'"agent" (Borel) qui l'étudie¹¹⁶...

Après ces considérations "lexicales", il convient de donner un visage à ces curieux ensembles "quelconques" de Borel.

3°- Les ensembles "quelconques" de Borel

On pourrait certes s'en tenir à la définition descriptive déjà donnée : il s'agit d'ensembles non mesurables B formés d'éléments de même nature que les ensembles mesurables B , c'est-à-dire de points de la droite réelle, dont on peut établir une relation d'inclusion avec les ensembles mesurables B . D'un point de vue descriptif, il n'y a pas besoin de plus pour donner une existence à ces ensembles mesurables non mesurables B ...

¹¹⁶ Quand nous parlons de "limitation du concept lui-même de mesure et non de l'"agent" qui l'étudie", cela ne renvoie pas à une conception platoniste des mathématiques où un concept aurait une existence indépendante de l'agent. On se place toujours du point de vue de l'agent : celui-ci considère que son concept est complet vs. il considère que son concept est incomplet.

Mais Borel est un constructiviste – du moins, c’est ainsi qu’il apparaît dans sa méthode d’exposition des *Leçons* (excepté le paragraphe problématique). Si sa définition des ensembles mesurables non mesurables B est exposée ici de manière descriptive et sans justification apparente, ces ensembles “quelconques” cachent en réalité des ensembles bien particuliers, et ayant un caractère plus constructif qu’on ne le pense, qui ne sont pas mesurables B mais auxquels Borel a absolument besoin de pouvoir attribuer une mesure nulle. De fait, ces ensembles découlent d’une construction... mais dans une autre théorie. Dans les *Leçons*, on les trouve à la page 67, au *Chapitre V - Sur la convergence de certaines séries réelles*¹¹⁷ qui traite de la convergence de séries particulières de type

$$\sum \frac{A_n}{(x - a_n)^{m_n}}$$

avec x , A_n et a_n réels et m_n entier positif.

Ces ensembles quelconques sont typiquement constitués de l’infinité des points de divergence x de ces séries considérées sous l’angle de l’infini réalisé, ensemble que Borel a rencontré dans sa thèse de 1895 et dont il *devait* rendre nulle la mesure, afin de justifier sa méthode de prolongement des fonctions analytiques... Disons, en nous avançant un peu, que ces ensembles ne sont pas “un exemple” d’ensembles non mesurables B, ils sont la cause même de la “montée” de Borel vers la mesure¹¹⁸. Mais le mode d’exposition des *Leçons* que Borel a donné occulte ce processus historique de “montée” vers la bonne définition de la mesure des ensembles (voir le plan au début de cette section III).

De l’ensemble des points de divergence de la série $\sum \frac{A_n}{(x - a_n)^{m_n}}$ (avec x , A_n et a_n réels et m_n entier positif) sur le segment $(0,1)$, on ne sait

¹¹⁷ *Leçons*, p.62-79

¹¹⁸ Voir la section IV de cette Partie.

qu'une chose : il est le complémentaire, dans $(0,1)$, d'un ensemble de points non nécessairement mesurable B mais qui contient un ensemble mesurable B de mesure égale ou supérieure à $1 - \varepsilon$, avec ε aussi petit qu'on veut. Borel écrit alors (p.67) :

« tout ce qu'on peut affirmer, c'est que l'ensemble des valeurs de x pour lesquels la série n'est pas convergente a pour mesure zéro et que par la suite, l'ensemble des points de convergence est partout dense. » Et Borel renvoie en note 1 : *« Nous ne sommes d'ailleurs pas assurés que cet ensemble [celui des points de divergence de la suite] soit mesurable ; en employant le langage expliqué p.48, nous devrions dire que sa mesure est inférieure ou égale à zéro ; mais la mesure n'est jamais négative. »*

Concrètement :

- Soit A et A' deux ensembles quelconques complémentaires dans $(0,1)$
- Soit E ensemble mesurable B tel que $E \subset A$
- Si $\forall \varepsilon \in \Upsilon$, $m_B(E) = 1 - \varepsilon$, alors
- $\forall \varepsilon \in \Upsilon : 0 \leq \text{mesure}_{\text{Borel}} \text{ de } A' \leq 0 + \varepsilon$
- d'où $\text{mesure}_{\text{Borel}} \text{ de } A' = 0$

Notons néanmoins que si Borel, à la p.48, n'avait pas explicitement exprimé l'inférence :

$$[\alpha \leq \text{mesure}_{\text{Borel}} \text{ de } E \text{ (quelconque)} \leq \alpha] \Rightarrow [\text{mesure}_{\text{Borel}} \text{ de } E = \alpha]$$

Ici (p.67), il s'y résout, en déclarant qu'*« on peut affirmer [...] que [l'ensemble A'] a pour mesure zéro »*, tout en renvoyant en note 1 le

commentaire suivant : « *nous devrions dire que sa mesure est inférieure ou égale à zéro ; mais la mesure n'est jamais négative.* » Nous sommes déjà familiarisés avec les pirouettes linguistiques d'un Borel qui ne peut faire entrer constructivement ces ensembles quelconques dans la classe des ensembles mesurables B (de mesure nulle)...

Aussi, les précautions oratoires de Borel ont pour effet d'exclure ce type d'ensemble des règles de composition des ensembles mesurables B : on a le droit de considérer une mesure pour de tels ensembles mais de manière indirecte, c'est-à-dire en passant par un encapsulement par des ensembles mesurables B qui les inclut (ou qu'ils incluent).

Pourtant, comme le montrera Lebesgue – et que Borel confirmera plus tard – leur inclusion de plain-pied dans la catégorie des ensembles mesurables n'entraîne aucun changement dans les règles de composition interne ni aucune incohérence de nature mathématique. Son "bridage" est uniquement motivé par des raisons épistémologiques, qui nous apparaîtront par la suite.

4°- Lebesgue

Donnons maintenant la parole à Lebesgue-1902¹¹⁹ : dans le paragraphe numéroté 1. (p.208), le jeune mathématicien pose une définition de la mesure des ensembles bornés¹²⁰ :

¹¹⁹ **Lebesgue**, *Intégrale, longueur, aire*.

¹²⁰ Plus loin (proposition 2.), Lebesgue démontre que la question de l'appartenance ou non des bornes à l'ensemble est neutre pour la mesure de cet ensemble.

« Nous nous proposons d'attacher à chaque ensemble borné un nombre positif ou nul que nous appellerons sa mesure et satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle.
2. Deux ensembles égaux ont même mesure.
3. La mesure de la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points communs deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles. »

La définition de Lebesgue comporte donc 4 propositions :

A - E ensemble borné,

B- $\text{mes}_L(E) \in \mathbb{N}$

C - $\exists E, \text{mes}_L(E) \neq 0$;

D - Soient E et E' : $E = E' \rightarrow \text{mes}_L(E) = \text{mes}_L(E')$;

E - Soit (E_i) ensembles deux à deux disjoints,

$$\text{mes}_L\left(\bigcup_{\infty} E_i\right) = \sum_{\infty} m_L(E_i)$$

La proposition A constitue la seule contrainte sur les ensembles mesurables de Lebesgue : être bornés. La proposition C est l'axiome (non constructif) d'existence de la catégorie des ensembles mesurables, la proposition D est l'axiome d'unicité de la mesure (la réciproque étant bien entendu fausse), et la proposition E est l'axiome d'additivité dénombrable de la mesure.

Notons que la définition de Lebesgue ne comporte pas d'axiome de correspondance géométrique-arithmétique, contrairement à la définition de Borel. Pour Lebesgue, cette correspondance est hors du domaine de sa définition, strictement arithmétique. De fait, elle figure dans ses commentaires introductifs – en tant que principe motivant sa définition – et dans sa démonstration du caractère non vide de la classe définie axiomatiquement ci-dessus – en tant qu'élément de base de la construction d'un ensemble de cette classe.

Ainsi, dans l'introduction de sa thèse (p.204), il écrit :

« Dans l'étude des questions relatives à la théorie des fonctions de variables réelles on reconnaît souvent qu'il serait commode de pouvoir attacher aux ensembles de points des nombres jouissant de certaines propriétés des longueurs des segments ou des aires de polygones. »

L'analogie – transfert de l'intuition géométrique dans le domaine arithmétique – est ici fondatrice mais ne revêt en aucun cas le statut d'un axiome métamathématique. N'étant pas intégrée à la théorie sous forme d'une assertion mathématique ou métamathématique (contrairement aux axiomes 1° à 3° de Borel), l'analogie est hors du domaine d'étude de Lebesgue, et n'a donc pas à être justifiée.

Mais l'utilisation explicite d'une correspondance géométrique-arithmétique intervient après la définition, quand Lebesgue passe à la caractérisation constructive de ces ensembles mesurables L (p.209) pour résoudre le problème de la mesure posée par ses axiomes : après avoir démontré qu'un ensemble formé d'un seul point est de mesure nulle en vertu de la proposition E (sinon tout ensemble borné formé d'une infinité de points serait de mesure infinie), Lebesgue se sert des concepts

géométriques de segment et de longueur (et de toutes leurs propriétés) pour "remplir" sa définition axiomatique sur la mesure des ensembles arithmétiques. Par exemple, il écrit :

« Choisissons un segment MN et attribuons-lui 1 pour mesure. On sait que si l'on prend MN pour unité de longueur on peut attacher à chaque segment PQ un nombre, sa longueur ; ce nombre est aussi la mesure de l'ensemble des points PQ. »

Lebesgue résout le problème de la mesure posé par sa définition en s'appuyant sur des concepts importés de la géométrie et développés par Jourdan, en particulier ceux de mesure intérieure et extérieure, eux-mêmes issus de l'ancienne méthode d'exhaustion d'Archimède. Il exhibe ainsi toute une collection d'ensembles mesurables dans le sens de sa définition, prouvant que la classe de ces ensembles n'est pas vide. Lebesgue est bien moins regardant que Borel sur la question du "passage" géométrique-arithmétique : pour lui ce passage, immédiat et non problématique, est une source d'inspiration mais n'a pas à figurer dans ses définitions, lesquelles font figure d'axiomes. La grande "désinvolture" de Lebesgue et l'extrême circonspection de Borel sont caractéristiques du mode de pensée des deux mathématiciens, opposition qui acquiert sa force dramatique à l'occasion de l'extension de la définition de la mesure par Lebesgue.

Il est impressionnant de voir l'absolue liberté que prend Lebesgue quant aux contraintes épistémologiques qui semblent proprement torturer Borel et l'empêcher de se mouvoir : dans l'extrait cité ci-dessus, Lebesgue mélange concepts géométriques (segment, longueur) et concepts arithmétiques (mesure, ensemble de points), attribuant au segment MN une mesure et en même temps une longueur, sans s'en émouvoir le moins

du monde. Lebesgue fait l'effet d'un jeune athlète prêt à se jeter dans l'eau face à un Borel qui hésite et doute tant qu'il en devient paralysé.

Cette "désinvolture" est la marque du mode descriptif, qui affranchit le mathématicien d'une recherche des "origines" intuitives des définitions sur lesquelles construire celles-ci : Lebesgue postule l'existence d'une classe d'ensembles définie par les axiomes (avant d'en exhiber un exemplaire), axiomes qui sont "sans passé" – la filiation intuitive étant évacuée de la théorie, contrairement à la démarche de Borel qui expose sur un mode constructif et doit donc s'assurer d'une chaîne causale irréprochable menant de l'intuition à la définition. Même si le mode d'exposition écrite d'une théorie ne dit rien sur les processus de pensée qui ont conduit l'auteur à établir cette théorie, le choix méthodologique d'exposition – descriptif pour Lebesgue, constructif pour Borel – conduit à une différence *dans le langage-objet* entre les résultats obtenus par l'un et par l'autre. Borel se fend d'une définition constructive des ensembles mesurables et d'un addenda descriptif qui interrompt l'élargissement de sa définition, tandis que Lebesgue, en adoptant le mode exclusivement descriptif, peut tirer les conséquences de cet addenda.

Néanmoins, dans sa thèse, Lebesgue attribue à Borel la paternité de la définition des ensembles mesurables L. En effet, dans la proposition 7. (p.213) du premier chapitre de sa thèse, Lebesgue écrit :

*« Tout ensemble mesurable [au sens L] est contenu dans un ensemble E_1 et contient un ensemble E_2 , E_1 et E_2 étant mesurables (B) et de même mesure. **Les ensembles que nous appelons mesurables sont donc ceux que les procédés de M. Borel permettent de mesurer, à condition de tenir compte des remarques énoncées à la fin de la page 48** [en note Lebesgue cite*

les "remarques" de Borel : "*Cependant, si un ensemble E contient tous les éléments d'un ensemble mesurable E_1 , de mesure α , nous pourrions dire que la mesure de E est supérieure à α , sans nous inquiéter si E est mesurable ou non. Inversement... Les mots supérieure et inférieure n'excluent d'ailleurs pas l'égalité.*"] ».

Lebesgue-1902 ne commet pas d'erreur en précisant que "*les ensembles que nous appelons mesurables sont donc ceux que les procédés de M. Borel permettent de mesurer*", car dans son esprit, bien moins chargé de contraintes constructives, l'inférence est immédiate : de " $\alpha \leq \text{mesure de } E \leq \alpha$ " découle immédiatement " $m(E)=\alpha$ " et l'extension du domaine de la mesure.

Avec Lebesgue, nous nous trouvons sur la "rive droite du Rubicon".

5°- Définitions constructives vs. descriptives

Nous en sommes venus à utiliser les concepts de constructivité et descriptivité des définitions de Borel et de Lebesgue par une sorte de "mimétisme lexical" avec ces auteurs. Mais nous n'avons pas défini leur sens. Et pour cause ! La tentative d'explicitation de ces concepts se heurte à un problème autant historiographique qu'épistémologique. En effet, ce n'est qu'à partir de 1905, avec l'irruption du paradoxe de Richard et la discussion entre Borel, Lebesgue et Hadamard autour de la fonction de choix de Zermelo que les auteurs préciseront le sens de ces concepts (à travers les questions du "nommé", du "défini", etc.). A l'époque précoce dont nous nous occupons (entre 1898 et 1902), ils sont utilisés de manière intuitive et vague. Par ailleurs, du point de vue épistémologique,

s'attaquer au concept de constructivité, c'est ouvrir un nouveau terrain de recherche très vaste, mettant en jeu des théories et conceptions mathématiques s'étalant sur un siècle (de Russell, Brouwer, Heyting à Kripke, Martin-Löf, etc.) qui se sont développées selon un double axe, celui de la recherche formelle et celui de l'investigation épistémologique. Si nous ne pensons pas qu'il soit possible de se passer d'une analyse approfondie du concept lorsqu'on veut traiter d'effectivité, il nous semble évident que cette analyse ne serait pas à sa place dans cette étude de la période précoce : c'est en abordant l'histoire de l'effectivité dans sa globalité, qu'une telle analyse aurait toute sa légitimité. Aussi, allons-nous tenter de dégager le sens intuitif que Borel et Lebesgue donnaient à ces concepts à l'époque au moyen des déclarations des auteurs.

Rappelons brièvement les bases sur lesquelles reposent la théorie "constructive" de la mesure selon Borel et celle "descriptive" de Lebesgue :

Borel

1- Principe "métamathématique" : le continu arithmétique est *donné* dans l'intuition (sans construction effective) par analogie avec le continu géométrique. L'ensemble des réels est l'"image" arithmétique de la droite géométrique. Ce principe se situe dans la sphère phénoménologique et n'est fondé que sur l'intuition.

2- "Axiome" méta-arithmétique, qui se "déduit" du principe précédent : la mesure d'un intervalle du continu arithmétique "découle directement" de la longueur du segment correspondant du continu géométrique. Si la longueur totale d'une réunion infinie dénombrable de segments géométriques deux à deux disjoints a pour valeur s , alors la

réunion infinie dénombrable des intervalles correspondants dans le continu arithmétique est de mesure s .

3- Axiomes rajoutés (réputés non constructifs) : la mesure d'un ensemble E quelconque inclus dans un ensemble mesurable est inférieure ou égale à la mesure de ce dernier. Et la mesure d'un ensemble E quelconque contenant un ensemble mesurable est supérieure ou égale à la mesure de ce dernier.

Lebesgue

1. *Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle.*
2. *Deux ensembles égaux ont même mesure.*
3. *La mesure de la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points communs deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles.* ¹²¹

La définition de Lebesgue ne comporte pas de principe ou d'axiome de correspondance géométrique-arithmétique (car pour lui, cette correspondance est hors du domaine de sa définition, mais elle figure dans ses commentaires introductifs). Chez Lebesgue la filiation intuitive est évacuée de la théorie, contrairement à la démarche de Borel qui expose sur un mode constructif et doit donc s'assurer d'une chaîne causale irréprochable menant de l'intuition à la définition¹²². Même si le mode d'exposition écrite d'une théorie ne dit rien sur les processus de pensée qui ont conduit l'auteur à l'établir, le choix méthodologique d'exposition – descriptif pour Lebesgue, constructif pour Borel – conduit à une réelle différence *dans le langage-objet* entre les résultats obtenus par l'un et par

¹²¹ **Lebesgue**, *Intégrale, longueur, aire*.

¹²² Par ailleurs, dans les *Leçons*, Borel évoque explicitement son interprétation de la *descriptivité* (voir *infra*.)

l'autre. Puisque effectivement, Borel s'est arrêté au milieu du gué.

Mais ce qui ressort des deux modes d'exposition (ci-dessus) des axiomes de la théorie de la mesure, n'est pas encore assez clair. On peut seulement dire, et c'est vraiment peu, que le constructif selon Borel serait basé sur des axiomes intuitifs filtrés par l'histoire et l'usage. Et son mode d'inférence serait vu (par lui) comme le plus près de l'intuition mathématique et le plus élémentaire, permettant un bon contrôle sur les objets mathématiques.

De fait, le Constructivisme de l'époque de Borel est encore très jeune et protéiforme. Il constitue une approche « *en opposition plus ou moins explicite à certaines formes de raisonnement mathématique utilisées par la majorité de leurs collègues.* » écrivent Troelstra et Van Dalen (p.1)¹²³, [...] *Il y a cependant des différences considérables en perspective entre les nombreux constructivismes représentatifs ; le constructivisme au sens large n'est pas du tout homogène, et même les vues exprimées par des représentants différents d'une même "école", ou par un simple mathématicien à des moments différents, ne sont pas toujours homogènes.* »¹²⁴

Pour éviter de tomber dans l'épineuse question de la définition du constructivisme et d'une démonstration constructive, nous allons seulement dessiner progressivement ce que pouvait être le constructivisme *pour* Borel. Mais avant de poursuivre, citons un texte de

¹²³ **Troelstra & van Dalen**, *Constructivism in Mathematics*, vol.1, North-Holland, 1988, p.1-5.

¹²⁴ D'après le "répertoire" établi par Troelstra et Van Dalen (p.2-5), à l'époque précoce de la crise des fondements (disons, avant 1901), il y avait principalement deux grandes formes de constructivisme : le *finitisme* kroneckerien (dont s'inspirera Hilbert pour des objectifs très différents), le *prédicativisme* de Poincaré (puis de Weyl) alimenté par le semi-intuitionnisme des autres membres de l'"Ecole française" (Baire, Borel, Lebesgue).

Lebesgue (1918), *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration*¹²⁵, qui date donc de l'époque de sortie du conflit (jamais résolu) avec son ancien mentor. Et la tonalité formelle qu'a prise le différend sur la question d'antériorité frôle celle d'un contentieux juridique. Lebesgue écrit :

« Dans la Thèse (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1895), M. Borel eut l'occasion de démontrer qu'on ne peut couvrir tous les points d'un intervalle (a, b) à l'aide d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à $b - a$. Il aperçut nettement que la proposition ainsi établie pouvait servir de base pour une définition de la mesure des ensembles avec laquelle on pourrait considérer les divisions de la grandeur à mesurer en une infinité dénombrable de morceaux et non plus en un nombre fini de morceaux.

Dans ses Leçons sur la théorie des fonctions (1898) il esquissa cette théorie de la mesure.

Mes travaux sur cette question et sur l'intégration, commencent en 1901 : l'état de la question avant mes recherches est nettement indiqué dans une Notice sur ses travaux scientifiques publiée par M. Borel à l'occasion de l'élection à l'Académie des Sciences du 18 mars 1901^[126]. Ma première Note est du 29 avril 1901. Dès cette première note, je donnais les définitions de l'intégrale et de la mesure, j'indiquais que ces définitions s'appliquaient à toutes les fonctions de la classification de M. Baire. [...]

En 1912, M. Borel a publié, dans le Journal des Mathématiques, une Mémoire sur le Calcul des intégrales définies : il y expose à

¹²⁵ **Lebesgue**, *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration*, dans les *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, 3e série, tome 35 (1918), p. 191-250. Nous utilisons la version publiée par Gauthier-Villard en 1918, accessible par Internet (Numdam) notamment à l'adresse www.numdam.org/numdam-bin/browse?id=ASENS_1918_3_35_

¹²⁶ Ecrit qu'il nous faudrait interroger.

nouveau les définitions de la mesure et de l'intégrale. M. Borel considère que tous ses travaux appartiennent à une même méthode, que j'appellerais la méthode constructive, méthode qu'il oppose à celle que j'ai suivie. La méthode constructive serait plus naturelle, plus simple, plus directe et plus rapide que la mienne ; elle serait plus générale et cependant ferait connaître plus exactement la portée des résultats, entachés d'une trop grande généralité (apparente) dans mes travaux.[...]

[...] Je dois dire cependant que les conclusions de l'étude qu'on va lire sont en désaccord complet avec les affirmations de M. Borel.

Je m'excuse de la longueur de ce travail ; mais, comme je n'ai pas pu trouver, dans les Mémoires de M. Borel, l'exposé des raisons qui motivent son opinion, ni même l'explication de ce qu'est une définition constructive, j'ai dû examiner toutes les hypothèses auxquelles j'ai pensé. »

Bien évidemment, il nous faudrait poursuivre l'étude de ce texte, mais la priorité revient à Borel.

III- 1901 : Borel et Lebesgue bifurquent

Précisons néanmoins que la "désinvolture" que nous avons attribuée à Lebesgue au sujet des ensembles mesurables non mesurables B de sa thèse n'est là que pour souligner le contraste dans l'attitude des deux mathématiciens vis-à-vis de leur sujet d'étude. Bien évidemment, l'acte de Lebesgue est tout sauf irréfléchi : le pas de Lebesgue n'a pas été franchi sans une réflexion préalable. Nous avons des traces d'une discussion

épistolaire avec Borel sur ce sujet, grâce à trois lettres de Lebesgue à Borel, non datées mais que Jean Lefebvre, qui les découvrit en 1988 au sous-sol de l'IHP, et Denise Lardeux, qui les répertoria, situent aux alentours du printemps 1901, soit avant la fin de la thèse de Lebesgue¹²⁷. Citons quelques passages :

1°- Lettre numérotée I

*« Vous voudrez bien me dire, pour l'époque où je rédigerai [¹²⁸], vous voyez que j'y pense, si vous connaissez d'autres définitions de la mesure et si celle que vous adoptez a déjà été employée. Je crois bien évidemment que c'est celle-là la bonne, puisque j'en ai fait une application ; et il me paraît impossible, comme vous le dites, de renoncer à pouvoir additionner les mesures comme les ensembles. Malheureusement, **il paraît difficile de démontrer que ce sont les seuls que l'on puisse mesurer ou même que ces autres existent** [ici, les éditeurs des lettres écrivent en note : « il semble que Lebesgue pose ici la question de la mesure des ensembles non boréliens, problème qu'il abordera en 1904 » (¹²⁹)]. [...] Recevez tous mes remerciements. »*

Lebesgue, troublé par l'addenda ambigu de Borel, est donc dès 1901 (peut-être avant) mobilisé par la question de l'extension de la définition borélienne des ensembles mesurables, mais il ne considère pas comme

¹²⁷ **Lebesgue**, *Lettres d'Henri Lebesgue à Emile Borel*, in Cahiers du séminaire des mathématiques, t.12 (1991), p.1-4. Les réponses de Borel n'ont pas été retrouvées.

¹²⁸ Lebesgue parle sans doute de sa thèse.

¹²⁹ C'est-à-dire les "ensembles quelconques" de Borel.

acquis que cette extension soit possible, s'interrogeant sur l'existence des ensembles quelconques de Borel – questionnement qui met en lumière un aspect de sa méthode, non visible dans ses publications : Lebesgue, le chantre de la méthode descriptive proto-axiomatique, aborde ses objets d'étude sous l'angle de l'existence. Or, ce concept d'existence dépasse la seule qualité de non contradiction interne des axiomes du système : dans sa lettre, Lebesgue pose la question de l'existence constructive d'un ensemble "quelconque" (ceux de Borel) qui lui permettrait de postuler axiomatiquement l'existence de la classe élargie des ensembles mesurables.

2°- Lettre numérotée II

*« Il est évident que Jordan dit toujours quelque chose, il vous serait facile d'en faire autant et de parler de mesure extérieure et intérieure. **Ce seraient les limites inférieure et supérieure des ensembles comprenant l'ensemble donné** ["quelconque"] **ou compris dans cet ensemble. Ces deux nombres sont entre ceux de Jordan. S'il est possible de mesurer un ensemble non mesurable de façon qu'on puisse ajouter les mesures, on attribuera à tout ensemble un nombre compris entre ces deux-là.** [...] Je crois avoir fini, pour l'instant, de vous ennuyer ; je vous remercie. Bien à vous. »*⁽¹³⁰⁾

Lebesgue suggère donc explicitement l'extension de la classe des ensembles mesurables aux ensembles "quelconques" encapsulables entre

¹³⁰ **Lebesgue**, *Lettres d'Henri Lebesgue à Emile Borel*, in Cahiers du séminaire des mathématiques, t.12 (1991), p.3.

deux ensembles mesurables B (ayant même mesure ou tendant vers la même mesure) par la méthode de Jordan-Archimède. « *S'il est possible de mesurer un ensemble non mesurable de façon qu'on puisse ajouter les mesures, on attribuera à **tout ensemble** un nombre compris entre ces deux-là.* » Lebesgue signale ainsi à Borel l'extraordinaire avantage à admettre de plain-pied l'inférence directe qu'il n'a pas effectuée clairement dans les *Leçons* : en élargissant le concept de mesure aux ensembles quelconques (grâce à la méthode de Jordan, que Lebesgue met entre les mains de Borel : « *il vous serait facile d'en faire autant et de parler de mesure extérieure et intérieure* »), ce sont *tous* les ensembles de points de la droite réelle qui tomberaient dans l'escarcelle du mesurable.

Las ! Même si nous ne possédons pas la réponse de Borel, une lettre, numérotée III, de Lebesgue à Borel montre que ce dernier a donné une fin de non recevoir à la suggestion du premier, marquant le début du conflit entre les deux mathématiciens, qui est le conflit entre deux modes de pensée opposés sur l'existant mathématique : l'existant découlant d'une *inférence logique à contenu mathématique* (Lebesgue) entre les prémisses et la conclusion et l'existant découlant d'une *inférence authentiquement mathématique* véhiculant directement et robustement l'intuition (Borel). Nous détaillerons ces deux concepts dans la partie II de la thèse.

3°- Lettre numérotée III

Cette troisième lettre est plus complexe à analyser, aussi bien du point de vue des relations entre les deux hommes, que dans son contenu mathématique. Nous allons la reproduire *in extenso* pour ne rien perdre de ce monument qui, nous le verrons, marque le véritable décollage du jeune

Lebesgue dans la profession de mathématicien, et, inversement, le "ratage" de son mentor Borel...

« Nous sommes absolument d'accord, je crois. J'ai très légèrement modifié le langage, voilà tout. Si l'on considère un ensemble E mesurable (à mon sens) et qu'on lui ajoute un de ces ensembles (analogue à celui de la page 67) non mesurables à votre sens, mesurable au mien (soit e_1), on a un ensemble $E + e_1$ mesurable à votre sens. e_1 est de mesure nulle (à mon sens). $E + e_1$ a même mesure (à mon sens) que E . De sorte que, avec les remarques des pages 48 et 49, E a une mesure au plus égale à celle de $E + e_1$. D'ailleurs, e_1 fait partie d'un ensemble mesurable à votre sens et de mesure nulle, soit e_2 . De sorte qu'en enlevant de l'ensemble $E + e_2$ l'ensemble e_2 , on a un ensemble E' mesurable à votre sens contenu dans E et de même mesure que $E + e_1$, de sorte que E ayant une mesure au moins égale à celle de E' a exactement pour mesure celle de $E + e_1$. Voilà bien n'est-ce pas ce que vous vouliez me dire. Je me suis peut-être mal exprimé, mais c'est cette petite démonstration que je voulais indiquer en note, mais j'espérais avoir été plus clair que je ne l'ai été, je le vois. Il m'avait semblé utile de préciser que les ensembles que je nommais mesurables n'étaient pas tout à fait ceux que vous appeliez ainsi. Je crois d'ailleurs qu'il n'y a pas d'inconvénient à appeler mesurables (comme je le fais) même ceux que les remarques des pages 48 et 49 permettent de mesurer. Mais cela modifie quelques énoncés, par exemple, celui de la page 110 : l'ensemble des ensembles mesurables a la puissance du continu. Avec ce sens étendu : l'ensemble des ensembles mesurables a la même puissance que celui de tous les ensembles de points, puisqu'il existe des ensembles de mesure nulle qui ont la puissance du continu. [...] Vous êtes aimable de vous intéresser à mes petites affaires. Mille

remerciements. »

Dans cette lettre, Lebesgue montre comment étendre la mesure à tout ensemble de points de la droite des réels à partir des définitions de Borel – à condition d’assumer pleinement le sens de l’addenda. Reprenons dans le détail les propos de la lettre.

1- « ***Si l’on considère un ensemble E mesurable (à mon sens)*** »

Il s’agit des ensembles quelconques de Borel, c’est-à-dire de tout ensemble compris entre deux ensembles mesurables B (et dont on peut faire tendre la mesure vers l’égalité).

Soit donc E un de ces ensembles :

- $\text{mes}_B(E)$: pas défini
- $\text{mes}_L(E) = \alpha \in \Upsilon$

2- « ***et qu’on lui ajoute un de ces ensembles (analogue à celui de la page 67) non mesurables à votre sens, mesurable au mien (soit e1)*** »

Lebesgue renvoie à la p.67 des *Leçons*, dont nous avons déjà parlée : ce sont des ensembles de points de divergence des séries de type

$$\sum \frac{A_n}{(x - a_n)^{m_n}}$$

Soit donc :

- $\text{mes}_B(E)$: pas défini
- $\text{mes}_L(E) = \alpha \in \Upsilon$
- $\text{mes}_B(e1)$: pas défini
- $\text{mes}_L(e1) = \beta \in \Upsilon$
- On forme l’ensemble $E \cup e1$

3- « **on a un ensemble $E + e1$ mesurable à votre sens. $e1$ est de mesure nulle (à mon sens).** »

En effet, la somme de deux ensembles non mesurables B peut être un ensemble mesurable B : A et A' sont "quelconques" (i.e. mesurables non mesurables B) mais complémentaires dans $(0,1)$, donc leur somme est $(0,1)$, qui est un ensemble mesurable B de mesure 1. Comme l'a montré Borel lui-même, les ensembles $Q \cap [0,1]$ et $[0,1] / Q \cap [0,1]$ ne sont pas mesurables au sens de Borel, mais $\{ Q \cap [0,1] \cup [0,1] / Q \cap [0,1] \}$, c'est-à-dire $[0,1]$, l'est.

On a donc :

- $\text{mes}_B(E)$: non défini
- $\text{mes}_L(E) = \alpha \in \Upsilon$
- $\text{mes}_B(e1)$: non défini
- $\text{mes}_L(e1) = \beta$ et $\beta = 0$ car cet ensemble est encapsulé par un ensemble mesurable B limite dont on peut faire tendre la mesure vers 0.
- Et $\text{mes}_B(E \cup e1) = \text{mes}_L(E + e1) = \gamma \in \Upsilon$ ⁽¹³¹⁾

4°- « **$E + e1$ a même mesure (à mon sens) que E . De sorte que, avec les remarques des pages 48 et 49, E a une mesure au plus égale à celle de $E + e1$. D'ailleurs, $e1$ fait partie d'un ensemble mesurable à votre sens et de mesure nulle, soit $e2$.** »

- Donc $\gamma = \alpha$ (car $\beta = 0$)
- $\text{mes}_L(E + e1) = \text{mes}_L(E)$
- $\text{mesure}_{\text{Borel}} \text{ de } E \leq \text{mes}_B(E \cup e1)$ ⁽¹³²⁾

¹³¹ Bien entendu, $\gamma = \alpha + \beta$. Nous utilisons les notations $\text{mes}_B(E \cup e1)$ et $\text{mes}_L(E + e1)$ pour distinguer les cas où les règles de distributivité de la mesure sont utilisables ou non.

¹³² La notation $\text{m}_B(E)$ implique que E est un ensemble mesurable B ; la notation $\text{mesure}_{\text{Borel}} \text{ de } E$ signifie que E est un ensemble quelconque non mesurables B compris entre deux ensembles mesurables B de même mesure (ou tendant vers la même mesure).

- $\exists e_2$ mesurable B / $\text{mes}_B(e_2) = 0$ et $e_1 \subset e_2$

5°- « **De sorte qu'en enlevant de l'ensemble $E + e_2$ [133] l'ensemble e_2 , on a un ensemble E' mesurable à votre sens contenu dans E et de même mesure que $E + e_1$** »

En effet, on a :

- $(E \cup e_1)$ mesurable B
- e_2 mesurable B
- Donc l'ensemble $E' : [(E \cup e_1) - e_2]$ est mesurable B (en vertu de l'axiome de Borel sur la soustraction des mesures)
- Or $E' \subset E$, car $e_1 \subset e_2$
- Et $\text{mes}_B(E') = \text{mes}_B(E \cup e_1)$, car $\text{mes}_B(e_2) = 0$

6°- « **de sorte que E ayant une mesure au moins égale à celle de E' a exactement pour mesure celle de $E + e_1$.** »

On a donc :

- $E' \subset E \subset (E \cup e_1)$
- D'où $\text{mes}_B(E') \leq \text{mesure}_{\text{Borel}} \text{ de } E \leq \text{mes}_B(E \cup e_1)$
- Or $\text{mes}_B(E') = \text{mes}_B(E \cup e_1)$
- Donc $\text{mesure}_{\text{Borel}} \text{ de } E = \text{mes}_L(E)$

Lebesgue semble vouloir pousser Borel à sortir du piège de la définition d'ensembles-non-mesurables-qui-ont-une-mesure dont il ne saisit pas la raison : à ses yeux, il n'y a aucune raison de ne pas étendre la mesure (et ses règles) aux ensembles quelconques coincés entre deux ensembles mesurables B de même mesure.

Il est particulièrement intéressant de dépister dans cette dernière

¹³³ Ici, il y a de toute évidence une coquille (de Lebesgue) non relevée par les éditeurs : il faut lire « De sorte qu'en enlevant de l'ensemble $E + e_1$ »

lettre les signes du démarrage d'un conflit professionnel entre les deux mathématiciens qui s'étendra sur plus d'une décennie, concernant la paternité du bon concept de mesure et de la bonne extension de la catégorie des ensembles mesurables. Comme l'a écrit Denjoy :

« Lebesgue et Borel s'opposèrent dans une violente polémique. Le premier voulait refuser à Borel la découverte de la mesure et, peut-être sous cette inspiration, il présenta la mesure comme une conséquence de l'intégrale. Mais Borel, semblant douter de ses titres de priorité incontestable pour la définition de la mesure, et laissant dédaigneusement à Lebesgue cette découverte, voulut par ailleurs contester la valeur de la nouvelle intégrale. Il prétendait obtenir celle-ci sans utiliser la mesure, en substituant à la fonction-argument f une suite de polynômes intégrée terme à terme et fournissant à la limite l'intégrale de Lebesgue. Mais le recours à ces polynômes est un artifice dénué de tout intérêt. »

Denjoy a raison... sauf dans son jugement sur la volonté de Lebesgue de « refuser à Borel la découverte de la mesure. » La postérité a attribué à Lebesgue cette paternité (en faisant de Borel le "grand-père" inspirateur de Lebesgue) : les ensembles mesurables sont ceux de Lebesgue. Mais, contrairement à ce que dit Denjoy et d'après ce que nous venons de voir, cette paternité n'est pas usurpée : Lebesgue ne s'est approprié ce concept qu'à la suite d'un refus catégorique de Borel, malgré son insistance.

Certes, nous ne possédons pas la lettre de Borel à laquelle répond ici Lebesgue. Mais il serait difficile de ne pas "entendre" dans cette réponse de Lebesgue une tonalité critique voire ironique, que nous attribuons à l'irritation de Lebesgue face au refus de Borel de prendre en considération ses remarques formulées dans la lettre II. Nous pensons même que la

lettre de Borel précédant la lettre III de Lebesgue a dû être déplaisante pour ce dernier, ou du moins ressentie comme telle, comme nous l'indiquent certains indices relevés ici.

« Nous sommes absolument d'accord, je crois. J'ai très légèrement modifié le langage, voilà tout. Si l'on considère un ensemble E mesurable (à mon sens) et qu'on lui ajoute un de ces ensembles (analogue à celui de la page 67) non mesurables à votre sens, mesurable au mien (soit e_1), on a un ensemble $E + e_1$ mesurable à votre sens. e_1 est de mesure nulle (à mon sens). $E + e_1$ a même mesure (à mon sens) que E . De sorte que, avec les remarques des pages 48 et 49, E a une mesure au plus égale à celle de $E + e_1$. D'ailleurs, e_1 fait partie d'un ensemble mesurable à votre sens et de mesure nulle, soit e_2 . De sorte qu'en enlevant de l'ensemble $E + e_2$ l'ensemble e_2 , on a un ensemble E' mesurable à votre sens contenu dans E et de même mesure que $E + e_1$, de sorte que E ayant une mesure au moins égale à celle de E' a exactement pour mesure celle de $E + e_1$. Voilà bien n'est-ce pas ce que vous vouliez me dire. Je me suis peut-être mal exprimé, mais c'est cette petite démonstration que je voulais indiquer en note, mais j'espérais avoir été plus clair que je ne l'ai été, je le vois. Il m'avait semblé utile de préciser que les ensembles que je nommais mesurables n'étaient pas tout à fait ceux que vous appeliez ainsi. Je crois d'ailleurs qu'il n'y a pas d'inconvénient à appeler mesurables (comme je le fais) même ceux que les remarques des pages 48 et 49 permettent de mesurer [...] Vous êtes aimable de vous intéresser à mes petites affaires. Mille remerciements. »

On peut imaginer un Borel de 30 ans – et déjà reconnu professionnellement – répondant avec irritation à un Lebesgue de 25 ans inconnu (encore pour quelques mois) qui, sans doute en toute franchise, se propose d'établir une collaboration intellectuelle fructueuse avec son "mentor" au sujet d'une micro-brèche – très fertile – que ce dernier avait placée dans ses *Leçons* de 1898. Sans doute, Lebesgue n'imaginait-il pas l'abîme épistémologique qui le séparait de Borel quand, dans la lettre II, il écrivait : « *Ce seraient les limites inférieure et supérieure des ensembles comprenant l'ensemble donné ["quelconque"] ou compris dans cet ensemble. Ces deux nombres sont entre ceux de Jordan. S'il est possible de mesurer un ensemble non mesurable de façon qu'on puisse ajouter les mesures, on attribuera à tout ensemble un nombre compris entre ces deux-là. [...]* ». Car Lebesgue touchait là non pas à un problème mathématique mais à un point sensible de Borel, proprement idéologique, qui avait poussé celui-ci à rester vague et ambigu au sujet de certains "objets" (les ensembles quelconques) dont il avait absolument besoin professionnellement mais qui le répugnaient idéologiquement de par leur nature mal définie au sens constructif de la mesure car définis uniquement par leur propriété négative : celle de ne pas être des ensembles mesurables B (mais d'être tenus entre deux d'entre eux de même mesure). Peut-être Borel a-t-il fulminé quand Lebesgue lui a fait part (lettre II) de sa découverte de la brèche descriptive dans la théorie de Borel et des implications qu'elle avait. Dans tous les cas, la réaction irritée de Borel qu'il nous semble percevoir dans la réponse – également irritée – de Lebesgue (« *Nous sommes absolument d'accord, je crois. J'ai très légèrement modifié le langage, voilà tout.* » ; « *Je me suis peut-être mal exprimé, mais c'est cette petite démonstration que je voulais indiquer en note, mais j'espérais avoir été plus clair que je ne l'ai été, je le vois* » etc.) a permis à ce dernier de s'approprier "sa" définition des ensembles mesurables en dissociant bien les deux concepts (« *les ensembles que je*

nommais mesurables n'étaient pas tout à fait ceux que vous appelez ainsi. »).

Les « *mille remerciements* » de Lebesgue sont on ne peut plus justifiés : Borel vient de lui donner une occasion en or – que Lebesgue a pourtant tenté de renvoyer à Borel – de faire un apport majeur à la science mathématique en son nom propre, et en opposition au grand Borel. De fait, même si le ton d'une lettre est plus difficile à "entendre" que le ton d'une discussion, et qu'il nous manque la lettre de Borel ayant provoqué cette réponse de Lebesgue et, enfin, qu'il est méthodologiquement douteux pour un historien d'attribuer un second degré tonal à un écrit, nous croyons pouvoir affirmer qu'ici, véritablement, Lebesgue se détache de Borel.

Quant à Borel, il passera désormais une partie de son temps à tenter de justifier cette "fin de non recevoir" qui a offert une place au génie de Lebesgue dans le paysage mathématique. En 1912 encore, Borel a tenté de s'expliquer là-dessus...

IV- 1912 : Les explications de Borel

1°- Arguments

Borel a souvent voulu justifier ou expliquer son inférence manquée de 1898 en faisant appel à des arguments de constructivité et en opposition à

la démarche descriptive (abstraite, théorique, logique) de Lebesgue. A ce titre, son article de 1912, *Le calcul des intégrales définies* est édifiant. Il a été publié originellement dans le *Journal de mathématiques*¹³⁴ puis inséré en *Note VI* dans la deuxième édition des *Leçons* (1914) sous le titre *Note VI : La théorie de la mesure et la théorie de l'intégration*.

Sur le calcul des intégrales définies (1912) semble avoir été motivé par plusieurs buts, notamment : exposer les acquis de sa théorie de la mesure depuis 1898, la confronter à la théorie de la mesure de Lebesgue, combler certaines lacunes épistémologiques – comme celle de l'utilisation du concept non bien défini de continu arithmétique – par de nouvelles définitions constructives (nombres et fonctions calculables), "reconstruire" la théorie de la mesure à l'aide de ces nouvelles définitions afin de lui donner un meilleur fondement épistémologique et théorique, et enfin, valoriser cette théorie "constructive"¹³⁵ en la rattachant à la théorie de l'intégrale de Lebesgue, déjà installée dans le paysage mathématique. Bref, Borel veut montrer que la puissance de l'outil forgé par Lebesgue (son intégrale) émane non pas de sa méthodologie descriptive, qu'il considère comme artificielle, non nécessaire voire gênante, mais de la force intrinsèque des concepts mathématiques "constructifs" de sa propre théorie de la mesure, qui sous-tendent cette théorie de l'intégrale, et qu'il a lui-même forgés entre 1895 (thèse) et 1898 – niant par-là toute contribution lebesgienne à cette théorie de la mesure.

Borel écrit dans l'introduction (p.223-224)¹³⁶ :

¹³⁴ **Borel**, *Sur le calcul des intégrales définies*, in *Journal de mathématiques*, 1912, 6^e série, t. 8, p.159-210, repris dans les *Œuvres*, t.2, p.827-878.

¹³⁵ Nous utilisons les guillemets pour rappeler la rupture de constructivité que Borel a introduite dans sa théorie dans son assertion ambiguë.

¹³⁶ Pour des raisons de commodité, les références correspondent à la numérotation du texte *Note VI : La théorie de la mesure et la théorie de l'intégration* (2^e édition des *Leçons*, 1914) plutôt qu'à celles

« Depuis [la publication des Leçons-1898], Lebesgue a donné à ces ensembles le nom d'ensembles mesurables B et a considéré d'autres ensembles qu'il a nommés ensembles mesurables. [...] La terminologie que j'avais adoptée dans mes Leçons sur la théorie des fonctions **aurait pu, en effet, avoir l'inconvénient de laisser croire qu'on ne pouvait pas parler de la mesure d'un ensemble ne rentrant pas dans la catégorie des ensembles que j'appelais alors mesurables** et que j'appelle maintenant bien définis ; j'ai cependant indiqué, dans ce Livre même, en vertu de quels principes la définition de la mesure pouvait s'étendre à certains ensembles qui n'étaient pas bien définis (c'est-à-dire non mesurables, avec le langage que j'adoptais alors¹³⁷) ; et j'ai indiqué une application de ces principes à un ensemble de mesure nulle¹³⁸. Lorsque Lebesgue a donné sa définition, il a eu soin de faire observer que tout ensemble mesurable E était compris dans un ensemble bien défini E_1 (mesurable B, dans le langage de Lebesgue) et comprenait un ensemble bien défini E_2 , les ensembles E_1 et E_2 ayant même mesure. Ceci entraîne que la mesure de E est égale à la mesure commune de E_1 et de E_2 ; la mesure des ensembles mesurables [au sens de Lebesgue] se déduit donc de celle des ensembles bien définis [mesurables B], et la classe des

du texte *Le calcul des intégrales définies* (1912). Les deux textes sont identiques.

¹³⁷ Borel renvoie en note la citation de la p.48-49 des *Leçons* : « si un ensemble E contient tous les éléments d'un ensemble mesurable E_1 , de mesure α , nous pourrions dire que la mesure de E est supérieure à α , sans nous inquiéter si E est mesurable ou non. Inversement, si E_1 contient tous les éléments de E, nous dirons que la mesure de E est inférieure à α . Les mots supérieure et inférieure n'excluent d'ailleurs pas l'égalité. ».

¹³⁸ Ici Borel renvoie en note une référence à la p.67 des *Leçons*, dans le *Chapitre V : sur la convergence de certaines séries réelles* (p.62-79) que nous avons évoqué à la section précédente.

ensembles, dont la mesure peut être déduite de mes définitions primitives, est identique à la classe des ensembles, dont la mesure peut être déduite des définitions de Lebesgue. **Ce qui différencie la définition de Lebesgue de la mienne, ce n'est donc pas l'étendue de la catégorie des ensembles auxquels ces définitions s'appliquent (voir ci-après, Chap. I, §V), c'est le fait que Lebesgue indique une marche théorique pour obtenir la mesure d'un ensemble mesurable défini d'une manière quelconque ; tandis que je m'étais occupé seulement d'arriver à la mesure de certains ensembles** [les ensembles "quelconques"], **en utilisant la définition de ces ensembles qui se présentait naturellement à l'occasion de mes recherches de théorie des fonctions.** »¹³⁹

Il y a beaucoup à dire sur ce commentaire *a posteriori* de Borel...

D'abord, Borel-1912 tente de se réapproprier la définition étendue de la mesure des ensembles (celle des ensembles mesurables L non mesurables B) tout en justifiant le "malentendu" (de l'attribution de cette définition à Lebesgue) par des considérations d'ordre lexicales (« *La terminologie que j'avais adoptée dans mes Leçons sur la théorie des fonctions aurait pu, en effet, avoir l'inconvénient de laisser croire qu'on ne pouvait pas parler de la mesure d'un ensemble ne rentrant pas dans la catégorie des ensembles que j'appelais alors mesurables* ») et d'ordre extra-mathématique (« *Ce qui différencie la définition de Lebesgue de la mienne, ce n'est donc pas l'étendue de la catégorie des ensembles auxquels ces définitions s'appliquent [...], c'est le fait que Lebesgue indique une marche **théorique** pour obtenir la mesure d'un ensemble*

¹³⁹ Le soulignement (comme le gras) est de nous.

*mesurable défini d'une manière quelconque ; tandis que je m'étais occupé seulement d'arriver à la mesure de certains ensembles en utilisant la définition de ces ensembles qui se présentait **naturellement** à l'occasion de mes recherches de théorie des fonctions.»).*

Bien évidemment, Borel n'est pas vraiment juste ici car il réinterprète sa remarque ambiguë des *Leçons* dans le sens que Lebesgue avait voulu lui faire prendre une dizaine d'années auparavant et auquel il s'était opposé. Certes, si Borel efface après-coup l'ambiguïté de la phrase en disant qu'elle lui avait servi à définir pleinement une catégorie d'ensembles mesurables plus large que les ensembles mesurables B , alors il n'y a plus de différence entre sa catégorie et celle de Lebesgue – et donc la paternité lui en revient. Bref, selon Borel, lui et Lebesgue auraient donné la même définition de la mesure des ensembles (les ensembles mesurables L), ce dernier l'ayant fait avec 3 ans de retard sur le travail du premier¹⁴⁰... Même si le pas logique est infime entre la définition de la mesure des ensembles par Borel (incluant les ensembles quelconques) et celle de Lebesgue, sans Lebesgue, la mesure des ces ensembles quelconques serait restée une sorte d'excroissance parachutée et à peine visible de la théorie de Borel, excroissance qui ne se serait peut-être pas développée...

Mais dans la citation qui précède, Borel semble aller au-delà de la simple minimisation entre sa théorie et celle de Lebesgue : insistant sur la différence des démarches entre les deux mathématiciens (Lebesgue suit une marche *théorique* et lui, une marche *naturelle*) et sur son attachement au mode constructif par opposition au mode descriptif, il

¹⁴⁰ Métaphoriquement, Borel aurait atteint involontairement l'Amérique par le flanc est en 1898 en cherchant la route des Indes, et Lebesgue l'aurait atteint par le flanc ouest en 1901 motivé par la découverte préalable de Borel : c'est donc bien Borel qui aurait découvert le Nouveau monde

semble annoncer une refondation constructive de la théorie de la mesure étendue (à tous les ensembles). En effet, il écrit : « *ce qui différencie la définition de Lebesgue de la mienne, ce n'est donc pas l'étendue de la catégorie des ensembles auxquels ces définitions s'appliquent (voir ci-après, Chap. I, §V), c'est le fait que Lebesgue indique une marche théorique* » Borel aurait-il réussi à faire entrer constructivement les ensembles mesurables non mesurables B dans le giron d'une théorie constructive de la mesure ?

Il nous faut explorer cette voie en exposant le contenu de la section V du chapitre I (p.237-238).

2°- Les ensembles bien définis de Borel

Il s'agit de la section intitulée *Les ensembles de mesure nulle*. Encore une fois, Borel y évoque des raisons "lexicales" et des raisons plus mathématiques pour rendre compte du "malentendu" ayant brouillé la supposée "équivalence" entre sa définition de la mesure (étendue) et celle de Lebesgue. Nous allons nous concentrer sur les arguments à contenu mathématique – mais relever quelques "perles" des ces raisons lexicales, que nous commenterons au fil du texte.

La section V démarre ainsi :

« D'après ce qui précède, un ensemble bien défini est de mesure nulle, lorsqu'il peut être enfermé, quel que soit ε , à l'intérieur d'ensembles élémentaires de mesure totale inférieure à ε . Inversement, tout ensemble qui a cette propriété fait partie d'un ensemble bien défini de mesure nulle ; on ne peut donc lui

attribuer une mesure autre que zéro. Cette remarque montre que, **si l'on admet qu'il soit possible de considérer des ensembles autres que les ensembles bien définis¹⁴¹**, il peut exister des ensembles qui soient mesurables, en vertu de mes définitions, sans être bien définis ; ce sont les ensembles qu'on obtient en ajoutant à un ensemble bien défini (de mesure non nulle) une **portion arbitraire d'un ensemble bien défini de mesure nulle**. La classe des ensembles mesurables ainsi définie est équivalente à la classe des ensembles que Lebesgue appelle mesurables ; **cette remarque a déjà été faite par Lebesgue ; si je la rappelle ; c'est pour éviter une confusion dont je suis responsable, car elle est la conséquence d'un langage mal choisi¹⁴²** ; j'avais appelé mesurables, dans mes Leçons sur la théorie des fonctions, les ensembles que j'appelle maintenant bien définis ; Lebesgue a donné à ces ensembles le nom de mesurables B et **l'on a cru parfois que je n'avais pas défini la mesure pour les ensembles que je n'appelais pas mesurables¹⁴³**, bien que j'indique dans ce même Ouvrage que, si un ensemble est complètement intérieur à un ensemble mesurable, on devra regarder sa mesure comme inférieure ou égale à celle de l'ensemble mesurable, sans s'inquiéter s'il est mesurable ou non¹⁴⁴. La mesure ainsi définie sera connue avec précision dans le cas où l'on pourra démontrer à la fois qu'elle est supérieure ou égale et qu'elle est inférieure ou égale à un

¹⁴¹ Cette phrase est fort alambiquée et obscure, voire inutile (on pourrait l'effacer) – s'il n'y avait une ambiguïté à cacher.

¹⁴² Autrement dit : tout ça n'est qu'un malencontreux malentendu linguistique.

¹⁴³ Cela est aussi étrange que de dire : « on a cru parfois que j'avais interdit l'entrée de ma propriété parce que j'avais mis une pancarte : "interdiction absolue d'entrer dans ma propriété". »

¹⁴⁴ Aussi logique que : Il est expressément interdit d'entrer dans ma propriété ; veuillez refermer la grille derrière vous.

même nombre ; c'est, en particulier, le cas pour les ensembles faisant partie d'un ensemble bien défini de mesure nulle ; c'est aussi le cas pour tous les ensembles mesurables de Lebesgue. Mais je n'insiste pas sur ce point, tenant à me borner aux ensembles bien définis. »

Nous avons vu que dans les *Leçons*, les ensembles mesurables B ne doivent leur existence qu'au principe métamathématique¹⁴⁵ selon lequel le continu arithmétique est donné dans l'intuition par analogie avec le continu géométrique - les réels étant considérés en correspondance avec les points de la droite géométrique (p.16 des *Leçons* : « nous admettrons que l'ensemble C des nombres compris entre 0 et 1 nous est donné, sans chercher comment il pourrait l'être effectivement. Les ensembles ayant la même puissance que l'ensemble C seront dits avoir la puissance du continu. »). Pour Borel ce principe métamathématique n'est pas adapté à l'idéal de constructivité qui, s'il ne dénie pas à l'intuition le rôle de fondement d'une construction, est sensé réduire cette base à une intuition claire, simple et immédiate. Or, dans les *Leçons*, Borel a montré que le continu arithmétique a des propriétés qui échappent à l'intuition géométrique. Par exemple (*Leçons*, p.44-45) : « Après avoir réfléchi à ce fait, qu'on peut enlever d'une droite tous les points compris dans chacun des intervalles

$$p/q - 1/q^3, p/q + 1/q^3$$

et qu'il reste encore des points, en infinité non dénombrable, on sera moins disposé à croire qu'on sait ce que c'est que le continu et à raisonner sur lui comme sur une notion intuitive et parfaitement claire. » Nous reviendrons en détail sur ce point dans le chapitre 3. Toujours est-il que

¹⁴⁵ Au sens naïf pré-hilbertien

baser toute sa théorie de la mesure sur des ensembles du continu arithmétique dont on sait seulement qu'il est l'image du continu géométrique (dont certaines propriétés sont contre-intuitives), c'est pour lui, une lacune. A ses yeux, il faut mieux définir, dans le langage de l'arithmétique, les propriétés de la "matière" dont sont faits les ensembles mesurables. Pour ce faire, Borel introduit dans son article de 1912 le concept de "nombre calculable" (Introduction - section II - p.217) :

« Nous dirons qu'un nombre α est calculable lorsque, étant donné un nombre entier quelconque n , on sait obtenir un nombre rationnel qui diffère de α de moins de $1/n$. »

Le contenu constructible du continu arithmétique borélien est donc composé des rationnels et des irrationnels approchables à quelque degré que l'on veuille par des rationnels.

Il en déduit le concept de "fonction calculable" (Introduction - section III - p.220) :

« Nous dirons qu'une fonction est calculable lorsque sa valeur est calculable pour toute valeur calculable de sa variable. En d'autres termes, si α est un nombre calculable, on doit savoir calculer la valeur de $f(\alpha)$ à $1/n$ près, quel que soit n . »

Et les "fonctions à définition asymptotique" (p.220-221) :

« Je propose d'appeler ainsi les fonctions dont la valeur, pour une valeur déterminée de la variable, ne dépend que de la manière dont se comporte à l'infini un développement convergent de cette valeur de la variable. [...] La plus classique

des fonctions à définition asymptotique est la fonction [...] égale à 0 ou 1, suivant que la variable est un nombre rationnel ou irrationnel. »

Puis il définit les ensembles *bien définis* comme ceux dont la fonction caractéristique est une fonction calculable (Introduction - section IV - p.222). Ensuite, il affirme que les ensembles bien définis sont, à des ensembles dénombrables près, exactement les ensembles mesurables de ses *Leçons* :

Si « on appelle bien définis les ensembles qui correspondent aux fonctions calculables, on voit que les seuls ensembles bien définis sont ceux dont la définition peut être obtenue au moyen d'intervalles (additifs ou soustractifs), les extrémités des intervalles devant être étudiées à part. Si l'on ne tient pas compte des extrémités, on peut dire que l'ensemble est défini à un ensemble dénombrable près. » (p.222-223).

Plus loin,

« Si l'on néglige les ensembles dénombrables, les ensembles bien définis sont précisément les ensembles que j'ai appelés autrefois ensembles mesurables. » (p.223).

Borel entreprend alors, dans le Chapitre I, l'exposition de la théorie de la mesure : il y rappelle son "théorème fondamental" (section I) – que nous avons cité précédemment et auquel nous reviendrons au chapitre 3 de la présente partie – pour en arriver à la mesure des ensembles *bien définis* (section II), où il expose les définitions de la mesure et explicite le gain "constructif" de la nouvelle définition des ensembles mesurables B

(i.e. construits par les fonctions calculables) :

« on arrive à obtenir la mesure de tout ensemble bien défini par les procédés mêmes au moyen desquels l'ensemble a pu être bien défini. » (p.227).

Puis, il consacre les pages 227 à 233 à démontrer que les définitions ne sont pas contradictoires entre elles. Au cours de cette démonstration, Borel aborde la question des nombres transfinis, de l'ensemble (dénombrable) de ceux qui peuvent être bien définis, il fait appel au concept d'énumérabilité effective et à celui de corps ouvert. La section III de son article est dédiée à l'extension des définitions pour des ensembles à plusieurs dimensions (p.233-234), et la section IV aux ensembles à points multiples (ensembles dont les points figurent plusieurs fois dans l'ensemble, contours fermés), p.235-237.

Borel clôt la section IV (p.236-237) sur la question des séries $S_n(x)$ convergentes (pour $n \rightarrow \infty$) pour toute valeur de x du segment $(0,1)$. Il construit un ensemble bien défini E – dans lequel cette série est uniformément convergente – dont la mesure n'est pas inférieure à σ , σ étant un nombre donné, arbitrairement choisi, inférieur strictement à 1. Nous restons volontairement dans le vague car ce qui nous intéresse pour le moment, c'est la conclusion de la section IV, en substance : on peut isoler/exclure de E les points de la série convergente $S_n(x)$ – en enfermant chacun dans un ensemble bien défini de mesure ε_n et en faisant tendre ε_n vers zéro – sans que cela n'affecte la propriété de la mesure de E , i.e. de ne pas être inférieure à σ .

Nous pouvons dès lors commenter le premier paragraphe de la section V (Leçons, p.237-238) auquel Borel nous avait renvoyé :

« D'après ce qui précède, un ensemble bien défini est de mesure nulle, lorsqu'il peut être enfermé, quelle que soit ε , à l'intérieur d'ensembles élémentaires de mesure totale inférieure à ε . Inversement, tout ensemble qui a cette propriété fait partie d'un ensemble bien défini de mesure nulle ; on ne peut donc lui attribuer une mesure autre que zéro. Cette remarque montre que, **si l'on admet qu'il soit possible de considérer des ensembles autres que les ensembles bien définis**¹⁴⁶, il peut exister des ensembles qui soient mesurables, en vertu de mes définitions, sans être bien définis ; ce sont les ensembles qu'on obtient en ajoutant à un ensemble bien défini (de mesure non nulle) une **portion arbitraire d'un ensemble bien défini de mesure nulle**. La classe des ensembles mesurables ainsi définie est équivalente à la classe des ensembles que Lebesgue appelle mesurables »

Malgré tout ce travail sur les ensembles bien définis, Borel retombe sur le même écueil : il n'arrive pas à intégrer de manière constructive les ensembles mesurables non mesurables B. En effet, quel sens peut avoir le propos « *si l'on admet qu'il soit possible de considérer des ensembles autres que les ensembles bien définis* » et le concept de « *portion arbitraire d'un ensemble bien défini de mesure nulle* » d'un point de vue constructif ? Aucun puisque : 1) définir un ensemble par sa propriété de ne pas être un ensemble bien défini ne lui donne une existence qu'au sens descriptif (et encore !) ; 2) une portion arbitraire d'un ensemble bien défini n'est pas bien défini, ce qui ne donne à ce concept de portion arbitraire qu'une existence descriptive... Borel a déplacé son problème de

¹⁴⁶ Cette phrase est fort alambiquée et obscure, voire inutile (on pourrait l'effacer) – s'il n'y avait une ambiguïté à cacher.

constructivité mais ne l'a pas résolu.

De fait, nous verrons lorsque nous aborderons l'origine du concept de mesure chez Borel, qu'il n'y a pas de "passage" constructif possible entre le concept de mesure borélienne d'un ensemble composé d'une infinité d'intervalles de la droite réelle (ensembles mesurables B) et le concept de mesure d'un ensemble composé également d'une infinité d'intervalles de la droite réelle mais auquel on ajoute un ensemble infini de points "isolés" (dans le sens de non considérés comme inclus dans un intervalle). De fait, ni les ensembles infinis de points de ce type (par exemple, celui des rationnels du segment $(0,1)$), ni les ensembles composés d'intervalles et d'ensembles infinis de points de ce type, ne peuvent se voir attribuer une mesure à partir des définitions de la mesure de Borel, qui porte exclusivement sur des intervalles – de la même manière qu'il est impossible de déduire constructivement le concept de longueur d'un segment géométrique à partir de la définition euclidienne du concept de point géométrique, ce malgré l'axiome euclidien liant le point à la droite¹⁴⁷.

3°- Borel-1898 expliqué par Borel-1912

Avant d'approfondir notre connaissance sur l'origine des ensembles quelconques de Borel, rassemblons tous les extraits que nous avons mis en gras dans l'article de 1912 pour les comparer aux propos des *Leçons*.

¹⁴⁷ Ce n'est d'ailleurs pas une analogie : le problème de constructivité de Borel découle du problème de constructivité d'Euclide.

Texte des Leçons (1898)	Explication (1912)
<p>1) <i>Il est expressément entendu que nous ne parlerons de mesure qu'à propos des ensembles que nous avons appelés mesurables.</i></p>	<p>1) <i>l'on a cru parfois que je n'avais pas défini la mesure pour les ensembles que je n'appelais pas mesurables,</i> OU 1) <i>La terminologie que j'avais adoptée dans mes Leçons sur la théorie des fonctions aurait pu, en effet, avoir l'inconvénient de laisser croire qu'on ne pouvait pas parler de la mesure d'un ensemble ne rentrant pas dans la catégorie des ensembles que j'appelais alors mesurables (p.223)</i></p>
<p>2) <i>Cependant, si un ensemble E contient tous les éléments d'un ensemble mesurable E_1, de mesure α, nous pourrions dire que la mesure de E est supérieure à α, sans nous inquiéter si E est mesurable ou non.</i></p>	<p>2) <i>bien que j'indique dans ce même Ouvrage que, si un ensemble est complètement intérieur à un ensemble mesurable, on devra regarder sa mesure comme inférieure ou égale à celle de l'ensemble mesurable, sans s'inquiéter s'il est mesurable ou non.</i></p>
<p>3) <i>Les mots supérieure et inférieure</i></p>	<p>3) <i>La mesure ainsi définie sera</i></p>

<p><i>n'excluent d'ailleurs pas l'égalité. Il est aisé de voir que les propriétés essentielles s'étendent, avec des modifications convenables, à ces nouvelles définitions : en quelque sorte, un calcul d'égalités se trouve remplacé par un calcul d'inégalités qui peut parfois rendre les mêmes services.</i></p>	<p><i>connue avec précision dans le cas où l'on pourra démontrer à la fois qu'elle est supérieure ou égale et qu'elle est inférieure ou égale à un même nombre ;</i></p>
<p>4)-</p>	<p><i>4) c'est, en particulier, le cas pour les ensembles faisant partie d'un ensemble bien défini de mesure nulle ; c'est aussi le cas pour tous les ensembles mesurables de Lebesgue.</i></p>

Commentaire du point n° 1 : Borel-1898 n'a pas défini la mesure des ensembles non mesurables B au sens où il l'entend dans le texte de 1912, il a seulement défini une *certaine propriété* de cette mesure des ensembles non mesurables B, par des inégalités.

Commentaire du point n° 3 : en comparant les deux écrits, on relève une nouvelle ambiguïté, fort ténue, dans son texte de 1898. En effet, entre « **on devra regarder sa mesure comme inférieure ou égale** » (1912) et « **les mots supérieure et inférieure n'excluent d'ailleurs**

pas l'égalité » (1898), il apparaît comme une hésitation de Borel-1898 qui affleure dans le langage utilisé. Borel dit non pas que les relations *supérieur* et *inférieur* n'excluent pas l'égalité (ce qui est clairement exprimé en 1912), mais que les termes ("*mots*") *supérieure* et *inférieure* sont à prendre au sens large (*supérieure ou égale* et *inférieure ou égale*). C'est comme si Borel avait voulu insister sur le caractère linguistique formel et, donc, faiblement contentuel de son assertion..

Commentaire du point n° 4 : ayant franchi le pas, Borel-1912 n'hésite plus à affirmer l'existence pleine de la mesure des ensembles mesurables L non mesurables B. Il en donne une description : il s'agit d'ensembles arbitraires extraits d'un ensemble bien défini de mesure nulle. Cette description manque dans son texte de 1898. Et pour cause ! S'il les avait "nommés" (décrits) à l'époque, il aurait contrevenu au principe qui préside à ces constructions : n'admettre d'ensembles dénombrables que si l'on peut en donner un principe de construction à partir d'éléments situés dans l'intuition. Cette contrainte est clairement exprimée dans les premières pages des *Leçons*.

4°- Le cœur du problème : les ensembles arbitraires

Résumons en quelques mots : comme cela a déjà été signalé, Borel n'avait pas à l'origine l'intention de résoudre le *problème de la mesure* des ensembles, contrairement à Lebesgue qui s'y est attaqué avec l'idée de prolonger l'œuvre de Jordan. C'est son travail sur le prolongement analytique des fonctions, la question de leur unicité ("*la même fonction*") malgré la variété de leur expression analytique, qui l'a conduit sur cette voie.

Concrètement, la thèse de Borel avait pour objet l'étude du prolongement analytique des fonctions analytiques dont le développement en série infinie de Taylor admet un contour fermé et dense de pôles sur au moins l'un de ses domaines de définition. S'opposant à une analyse de Poincaré¹⁴⁸, qui nie la possibilité de prolonger régulièrement ce type de fonction, Borel prouve qu'une fonction analytique définie sur deux portions du plan dont l'une est ceinturée par un contour fermé peut être prolongée de l'une à l'autre, donc au-delà de ce contour, par des méthodes classiques. Pour cela, Borel adopte un point de vue "local", étudiant les propriétés particulières des points du contour, alors que Poincaré avait raisonné plus globalement. Borel réussit alors à faire passer la fonction "entre les gouttes" (pôles) du contour pour la prolonger vers la portion située hors de l'espace délimité par le contour.

Nous n'allons pas ici parcourir seuls le chemin de Borel vers ce résultat. Nous allons plutôt nous appuyer sur l'excellent travail d'Alain Michel, exposé dans son livre : *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*¹⁴⁹, en y extrayant et développant les points qui nous intéressent.

Comme le précise Michel (p.46) : Borel se propose dans sa thèse de répondre au problème de l'identité d'une fonction d'une variable complexe possédant une seule *expression analytique* mais qui fournit plusieurs

¹⁴⁸ **Poincaré**, *Sur les fonctions à espaces lacunaires*, American Journal of mathematics, t.XIV, repris dans Comptes rendus de l'Académie des sciences, 1883, 1^{er} semestre (t.XCVI, n° 16), p.1134-1136. C'est cette dernière publication qui nous servira de référence.

¹⁴⁹ **Michel**, *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*, Vrin, coll. Mathesis, 1992. Quand nous citerons ou paraphaserons l'ouvrage d'A. Michel, nous utiliserons la police de caractères Times New Roman et nous indiquerons entre parenthèses les pages de référence. Quand nous apporterons nos propres commentaires aux propos de Michel ou que nous approfondirons certains aspects techniques de la démarche de Borel, nous le ferons avec la police de caractères courante.

fonctions analytiques selon les domaines de variation considérés, comme dans le cas de la fonction construite par Weierstrass $f(z)=1/(z^n + z^{-n})$, selon que le module de z est inférieur ou supérieur à 1.

Ainsi, dans l'introduction de sa thèse, Borel écrit (p.9-10) :

« Étant données deux fonctions d'une variable complexe, définies, l'une lorsque la variable est dans un certain domaine, l'autre lorsqu'elle est dans un domaine différent, dans quels cas peut-on dire que c'est la même fonction ? [...] On a la même fonction, pensait-on, lorsqu'on a la même expression analytique. Il est clair que l'existence d'expressions analytiques telle que l'intégrale de Cauchy ⁽¹⁵⁰⁾ [...] conduirait, en partant de cette idée, à des conséquences au moins bizarres : l'expression même fonction dans plusieurs régions du plan aurait un sens tellement large qu'elle ne signifierait plus rien »¹⁵¹.

Ainsi, selon Borel l'unicité de l'expression d'une fonction (sur deux portions distinctes) n'est pas suffisante pour affirmer l'unicité de la fonction elle-même. D'ailleurs, comme il le montre, elle n'est pas même nécessaire : deux expressions analytiques distinctes (sur deux portions distinctes) peuvent référer à la même fonction.

Borel poursuit (p.10)

« La notion de fonction prolongée analytiquement, obtenue à

¹⁵⁰ Nous gardons plutôt l'exemple de la fonction de Weierstrass donné par A. Michel

¹⁵¹ Remarquons en passant que dans la célèbre controverse épistolaire de 1905 sur l'Axiome de choix de Zermelo (version 1904), Lebesgue reprendra mot pour mot cette question ("*la même fonction ?*") au sujet de la fonction de Zermelo (voir Annexe).

l'aide de la série de Taylor, a jeté beaucoup de lumière sur ce point et joué un grand rôle en Analyse ; il est inutile de rappeler ici en quoi elle consiste, ni quelle en est l'importance. Remarquons simplement que cette importance est due surtout à ce théorème fondamental : deux fonctions analytiques qui coïncident dans une région du plan coïncident dans tout le plan ou, du moins, dans toutes les régions que l'on peut atteindre par voie de prolongement. Mais dans le cas où une fonction admet une ligne singulière essentielle fermée, nous ne savons pas ce que l'on doit appeler prolongement analytique de la fonction au-delà de cette ligne. »

La question de l'unicité d'une fonction ayant deux expressions avait donc été résolue au moyen des techniques de prolongement analytique sur leur développement en séries de Taylor. Mais ce résultat ne s'appliquait, avant Borel, qu'au cas particulier où aucun des domaines de définition de la fonction (i.e. de l'une de ses expressions) n'était délimité par une ligne singulière fermée, ou contour, formée de pôles de son développement de Taylor.

*« M. H. Poincaré a même cru pouvoir affirmer que cette expression est nécessairement dénuée de sens [note 1 : voir notamment : H. Poincaré, Sur les fonctions à espace lacunaire (American Journal of Mathematics, t. XIV).]. J'ai repris la question à **un point de vue un peu différent**, et j'ai montré qu'il est possible, dans certains cas, de donner du prolongement analytique au-delà d'une ligne singulière essentielle fermée une définition qui ne soit contradictoire ni avec elle-même, ni avec les notions antérieures.»*

En effet, dans son article *Sur les fonctions à espace lacunaire*¹⁵², Poincaré écrit (p.1134) :

« *Considérons le plan des x comme divisé en deux parties par l'axe des quantités réelles. Soit $f(x)$ une fonction n'existant que dans la partie supérieure et étant partout holomorphe dans cette partie (¹⁵³) ; soit $f_1(x)$ une fonction n'existant que dans la partie inférieure et étant partout holomorphe dans cette partie. La moitié inférieure du plan est pour $f(x)$, [respectivement] la moitié supérieure pour $f_1(x)$, un espace lacunaire. Je dis que je pourrais trouver deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ jouissant des propriétés suivantes : elles existeront dans tout le plan ; la somme $\varphi + \psi$ sera égale à f dans la moitié supérieure du plan et à f_1 dans la moitié inférieure. La fonction φ admettra pour coupure le segment $(-1,+1)$ et la fonction ψ admettra deux coupures $(-\infty, -1)$ et $(+1, +\infty)$. »*

Suivait alors la construction de deux fonctions analytiques ψ et φ . A. Michel (p.46-47) : Soit un contour convexe fermé (C) quelconque du plan complexe, possédant en tout point un rayon de courbure non nul et tel que pour tout point z extérieur à (C), il existe un cercle de centre z tangent à (C). Soit (A_n) une suite de points de (C) dont la répartition est dense sur la courbe (toute portion de (C) contient une infinité de points A_n). Soit enfin a_n la valeur de la variable qui rend infini le $n^{\text{ième}}$ terme de la série (les a_n sont les pôles de la série).

¹⁵² **Poincaré**, *Sur les fonctions à espaces lacunaires*, repris dans Comptes rendus de l'Académie des sciences, 1883, 1^{er} semestre (t.XCVI, n° 16), p.1134-1136.

¹⁵³ Donc la fonction est analytique dans ce domaine, c'est-à-dire : elle est indéfiniment dérivable et est égale au voisinage de tout point de l'ouvert (de son domaine) à la somme de sa série de Taylor.

Si on suppose que la série $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ est convergente ($\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ est absolument convergente), alors la fonction¹⁵⁴ :

$$z \rightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z - a_n}$$

est analytique à l'extérieure de (C), et Poincaré démontre qu'elle ne peut être prolongée analytiquement à l'intérieur de (C)¹⁵⁵.

Et Poincaré de conclure (p.1135) :

« Il est clair d'ailleurs que ce qui précède s'applique au cas où la fonction $f(x)$, au lieu d'être limitée par l'axe des quantités réelles, admettrait un espace lacunaire quelconque [par exemple, la fonction présentée ci-dessus]. Voici le point sur lequel je désirerais attirer l'attention. On pourrait croire qu'il existe une fonction $f_1(x)$ qui serait le prolongement naturel de $f(x)$ dans la moitié inférieure du plan, de telle sorte que, si deux fonctions ψ et φ existant dans tout le plan ont pour somme f dans la moitié supérieure, elles devront avoir pour somme f_1 dans la moitié inférieure. Il n'en est rien ; je puis choisir tout à fait arbitrairement les deux fonctions f et f_1 ; de sorte que f n'a pas à proprement parler de prolongement naturel au delà de l'axe des quantités réelles. »

En d'autres termes, Poincaré montre que le prolongement d'une fonction analytique au-delà de son contour fermé aboutit à la possibilité de prolonger arbitrairement toute fonction analytique au-delà de son

¹⁵⁴ Nous reprenons les notations de Borel, qui diffèrent légèrement de celles de Michel.

¹⁵⁵ Pour les détails de cette démonstration se reporter directement à la thèse de Borel, p.12-19.

contour ou, pour le dire autrement :

$\forall f, g$: fonctions analytiques définies respectivement dans les portions P_f et P_g telles que $P_f \cap P_g = \emptyset$,

$\exists F$, expression analytique définie dans $P_f \cup P_g$ telle que

$$F = f \text{ dans } P_f \text{ et } F = g \text{ dans } P_g$$

Bref, toute collection de fonctions analytiques définies sur des portions strictement distinctes (délimitées par leurs contours fermés) peuvent être artificiellement unifiées sous une même expression analytique, et donc considérées comme des prolongements analytiques les unes des autres. A ce rythme, disait Poincaré, le concept de prolongement analytique n'a plus aucun sens.

Borel va alors montrer dans sa thèse que dans certains cas, une fonction analytique peut être prolongée au-delà de son contour fermé, sans que cela conduise à la conclusion de Poincaré.

Signalons néanmoins que les ensembles que nous allons découvrir ici ne sont pas les ensembles "quelconques" mis en scène dans les *Leçons*. Ils ne sont d'ailleurs absolument pas quelconques : ce sont des ensembles de points bien définis au sens analytique. Ils n'acquerront leur statut de "quelconque" que par un processus de généralisation et de transfert vers la théorie de la mesure (i.e. au regard de la définition des ensembles mesurables B), qui n'existe pas encore en 1895...

De fait, seul le concept de mesure nulle, construit *ad hoc* dans la thèse - *via* le théorème dit "de recouvrement fini"¹⁵⁶ - est présent ici, mais ce concept est intégré au mode de raisonnement analytique du reste de la thèse, si bien que ces ensembles quelconques (de mesure nulle) ne sont ni ambigus ni mal définis analytiquement.

¹⁵⁶ Ce théorème fera l'objet d'une analyse approfondie au chapitre 3 de la présente partie.

S'ils le deviendront plus tard, c'est uniquement parce que Borel autonomisera sa théorie de la mesure, la fondant sur le mode non plus analytique mais ensembliste : Borel devra définir le statut de ces ensembles selon ce mode, ce qui l'obligera à abstraire (ou extraire) ces ensembles analytiques de leur mode d'origine, et à en donner une version bien moins constructive, puisqu'ils seront arbitraires, c'est-à-dire donnés *ad hoc* sans principe de construction.

L'ambiguïté liée aux ensembles quelconques – à leur mesure – dans les *Leçons* découle de l'inversion de leur mode d'engendrement : il devra d'abord les introduire sur le mode ensembliste (et donc plus général et abstrait), avant d'appliquer cela au problème particulier du prolongement analytique. D'une certaine façon, Borel procédera à la manière des "cantoriens", qui fondent l'arithmétique usuelle sur la théorie des ensembles transfinis, et se retrouvera alors "coincé" par la nature peu constructive inhérente à ce type d'inversion hiérarchique.

Dans sa thèse, Borel considère (p.12-14) les fonctions analytiques à variables complexes dont le développement en série de Taylor s'écrit sous la forme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(z - a_n)^{m_n}}$$

où les a_n sont les pôles de la série et les A_n ses coefficients.

Pour que la fonction puisse être prolongée, son développement est soumis aux contraintes suivantes :

- l'ordre de la série est fini : $\exists m / \max(m_n)_{\infty} \leq m$

- la série est absolument et uniformément convergente sur au moins une portion du plan complexe.

Borel ramène alors le problème du prolongement analytique de ce type de fonction à la détermination d'un chemin (arc) du plan complexe sur lequel la fonction considérée peut être prolongée analytiquement, même si elle ne peut l'être de manière générale. Borel écrit (p.18-19) :

« Supposons qu'une fonction donnée par un développement de Taylor admette une ligne singulière essentielle L (fermée ou non) ; une première condition est nécessaire pour qu'elle soit une fonction φ [i.e. prolongeable au-delà de L] : sur tout arc de L, il doit y avoir une infinité de points a tels que la fonction augment indéfiniment lorsque la variable tend vers un de ces points en suivant la normale. Il doit ensuite exister un nombre entier positif m, tel que, dans les mêmes conditions, le produit de la fonction par $(z - \alpha)^m$, α étant l'affixe de a, tende en général vers zéro, sauf en des points isolés pour lesquels il peut se comporter de manière quelconque et en un certain nombre de points a_1, a_2, \dots , formant une suite dénombrable pour chacun desquels il y a une limite déterminée, limites que nous désignerons respectivement par A_1, A_2, \dots

La série $|A_1| + |A_2| + \dots$ doit être convergente, dans le cas où les A sont en nombre infini ; en retranchant de la fonction donnée la fonction

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(z - a_n)^m}$$

on doit obtenir une fonction ayant les mêmes propriétés, le nombre m étant remplacé par m-1. En continuant ainsi, si l'on arrive, après des soustractions successives à une fonction

n'admettant plus L comme ligne singulière, on aura défini le prolongement de la fonction au-delà de cette ligne. »

L'essentiel de la démonstration se trouve dans les pages 24 à 26.
Ainsi, p.24 :

« Nous allons montrer qu'étant donnés deux points P et Q ne coïncidant ni avec un point a , ni avec un point a' [point singulier contenant dans son voisinage une infinité dense de pôles], on peut toujours les réunir par une ligne continue PMQ , telle que sur cette ligne la série considérée soit absolument et uniformément convergente [la convergence uniforme constitue la qualité essentielle permettant à Borel de garantir l'identité de la fonction de part et d'autre de la ligne singulière]. »

Borel va alors montrer qu'on peut retrancher une infinité d'intervalles répartis de manière dense d'un arc reliant les deux points P et Q (intervalles centrés sur les pôles et les points singuliers contenus dans l'arc) sans pour autant altérer la nature continue de cet arc : malgré cette amputation, l'arc a les propriétés du continu arithmétique (infinité non dénombrable de points) et le développement de Taylor, et la fonction, se prolongent continûment de l'un à l'autre. Or cette opération est faite sous l'angle de la longueur ("mesure") qui devient le paramètre fondamental du continu, au détriment de la densité : on peut retrancher une infinité dénombrable d'intervalles d'une ligne sans que cela ne modifie sa longueur. Pris autrement, cela signifie qu'un ensemble de points partout dense (contenant les pôles et les points singuliers de la série) peut être enserré dans un ensemble d'intervalles de longueur totale nulle – ou plutôt : aussi petite qu'on veut. C'est justement ici que les ensembles quelconques de Borel prennent naissance : en effet, pour pouvoir affirmer

que la longueur d'un ensemble de points partout dense est nulle, Borel doit pouvoir encapsuler cet ensemble dans des intervalles possédant la qualité de continu arithmétique, sur lesquels le concept de longueur est bien défini (et qu'il fait tendre vers zéro).

Néanmoins, pour en arriver là, Borel a besoin d'ancrer sa démonstration dans le fini afin de montrer que son raisonnement sur les longueurs des intervalles centrés sur les pôles de la série, raisonnement situé dans l'infini réalisé, est valide au regard de l'intuition classique de longueur (situé dans le fini – infini potentiel). Pour cela, Borel énonce et démontre *effectivement* un théorème fondamental : de tout recouvrement infini (dénombrable) donné d'un segment du continu arithmétique, on peut extraire un recouvrement fini de ce segment. C'est là la justification de la propriété d'additivité infinie dénombrable, qui résout le problème de la mesure de Jordan. Nous reviendrons longuement sur la démonstration "effective" de ce théorème dans le chapitre suivant.

En conclusion, pour valider son résultat sur le prolongement des fonctions analytiques, fort original et inespéré à l'époque, Borel a dû définir une nouvelle grandeur mathématique, dérivée du concept géométrique de longueur, qui lui permet de court-circuiter la barrière de la densité : en rendant nulle la mesure de l'ensemble (dense) de pôles de la série de Taylor, il établit robustement la possibilité de passer "à travers".

Dans sa thèse, l'ensemble des pôles (et des points singuliers) de la série a un caractère parfaitement construit. Et Borel se sert du concept de longueur - la définition générale de la mesure des ensembles ne sera donnée que dans les *Leçons* - pour affaiblir le supposé lien entre le concept de densité et de continu arithmétique (i.e. ce n'est pas le concept de densité mais de longueur qui est la propriété essentielle du continu

arithmétique).

Mais ce gain de "résolution" s'accompagne d'une perte dans cette nouvelle vision du continu : alors que la densité permettait de lier le concept de point au concept de droite (arithmétique), avec la longueur, point et droite se retrouvent séparés : l'ensemble des pôles ne peut se voir attribuer une longueur, qui est une caractéristique exclusive du continu. C'est pourquoi Borel a recours à son encapsulement par un ensemble de même nature que le continu, c'est-à-dire dont la longueur totale est définissable et mesurable, qu'il peut faire tendre vers la longueur zéro.

Ainsi, après sa thèse, Borel est face à deux écueils : d'une part, il doit définir de la manière la plus générale possible cette nouvelle grandeur mathématique (la "longueur" devenant la "mesure"), ensuite il doit montrer que cette nouvelle grandeur définie de manière générale valide son travail sur le prolongement analytique. Il réussira brillamment à résoudre le premier écueil, mais échouera d'un "pas" sur le deuxième – que Lebesgue franchira en s'affranchissant de la contrainte constructive sur les inférences mathématiques.

Exprimé de la sorte, nous comprenons mieux pourquoi le Borel des *Leçons* s'est pris les pieds avec les ensembles quelconques : ayant construit l'embryon d'une théorie "nouvelle" de la mesure - car incluant l'additivité infinie dénombrable (qui émerge de son théorème de recouvrement, voir suite) - afin de valider son travail sur le prolongement analytique, Borel, fidèle à son principe de constructivité, s'est retrouvé coincé par le paradoxe euclidien de l'impossibilité d'un passage constructif entre le concept de point (sans mesure) et celui de droite continue (mesurable).

V- Conclusion

Quand Borel parle d'un "ensemble quelconque" dans son assertion ambiguë des *Leçons*, il réfère donc à un ensemble constructif formé d'éléments du continu arithmétique contenant une infinité de points qui ne sont pas définis dans une relation d'appartenance à des intervalles donnés (de cet ensemble) : ces points, et donc cet ensemble, échappent au domaine des existants mathématiques issus de sa théorie constructive de la mesure. Comme Borel ne peut raisonner directement sur la mesure de cet ensemble, alors qu'il a absolument besoin de montrer que sa mesure est nulle (pour valider son travail sur le prolongement analytique), il se sert d'ensembles mesurables B encapsulant cet ensemble quelconque et dont on peut faire tendre la mesure totale vers zéro. De tels ensembles quelconques "existent" aux yeux de Borel. Mais leur mesure n'est pas définie constructivement. Aussi, Borel les soumet à une contrainte arbitraire : ils ont une propriété de mesure indirecte. Un tel statut est une pure invention extra-mathématique qui n'a aucune assise mathématique. C'est un statut épistémique.

On comprend que Borel-1898 ait gardé son *addendum* plus ou moins caché sous l'ambiguïté. Mais d'une certaine manière, la théorie de la mesure de Borel – chef d'œuvre mathématique – a été motivée et construite pour pouvoir y insérer cet addendum, sans qu'il ait vraiment réussi à l'y fondre naturellement.

In fine, en 1895, pour réussir son prolongement analytique de

fonctions développables en séries de Taylor au-delà du contour fermé partout dense de pôles, Borel a compris que le concept de mesure – surtout de mesure nulle – (inventé *ad hoc*) lui permettait de contourner l'obstacle de la densité – sur lequel Poincaré s'était cogné. Cela a impulsé ses recherches générales sur la mesure. Mais Borel était aux prises avec un ensemble dont la mesure était impossible à définir constructivement, et sa définition de la mesure ne lui a permis de résoudre le problème qu'à l'aide d'un artifice descriptif irréductible : agir sur cet ensemble de points au moyen d'un ensemble (mesurable B) formé de la matière du continu. Cet artifice est de même nature que celui utilisé par Euclide : un axiome décrétant que la droite est composée d'une infinité de points. Comment, dans une mathématique contentuelle, un objet sans dimensions pourrait-il engendrer (de manière donc non inductive) une dimension ?

Mais même si l'on est bien forcé d'admettre, car cela émane des axiomes d'Euclide, qu'un ensemble de points puisse être comparé (dans une relation d'inclusion) à deux ensembles d'intervalles du continu, l'inférence

$$E1 \subset E \subset E2 \Rightarrow \text{mes}_B(E1) \leq \text{mesure de } E \leq \text{mes}_B(E2)$$

qui transforme la relation d'inclusion en une relation entre nombres est pour Borel une entorse supplémentaire – et insoutenable – au bon sens constructif vu qu'une collection infinie *dénombrable* de points sans dimension ne saurait, même aux yeux d'Euclide, engendrer la propriété de longueur. Déchiré entre son absolu besoin de cet artifice et l'évidence de sa nature non constructive, Borel a opté pour une solution médiane : utiliser l'artifice descriptif mais n'en tirer d'autre conséquence que celle lui permettant de clore son travail sur le prolongement analytique. Choix qui n'a d'autre justification qu'épistémologique, et qui est hors de toute règle, principe ou nécessité mathématique.

Dans la mesure où nous nous étions proposés de “débroussailler” les raisons possibles de l’inférence ambiguë de Borel, nous avons atteint notre objectif.

Néanmoins, il demeure encore quelques points obscurs mais centraux dans l’invention de la mesure des ensembles par Borel desquels découle la définition même de cette grandeur, en particulier l’additivité infinie dénombrable des longueurs d’intervalles du continu arithmétique, que Borel a toujours exhibé comme une propriété robuste et inquestionnable car fondée sur une définition effective. La capacité de faire se côtoyer l’infini dénombrable considéré comme réalisé et le concept d’effectivité est une des caractéristiques de l’épistémologie de Borel – et sa manière de “sauver” un peu le paradis de Cantor. A la lumière de ce que nous avons déjà découvert sur la pensée du mathématicien, nous allons explorer cette nouvelle piste... qui finira de nous ouvrir le chemin vers le concept d’effectivité.

.3 – INFINI DENOMBRABLE ET EFFECTIF CHEZ BOREL

I- Introduction

Recommençons l'analyse des *Leçons* de Borel mais en nous focalisant sur son utilisation du concept d'infini.

L'entrée de Borel dans la mesure est bien résumée par Denjoy :

*« C'est la notion d'**ensemble de mesure nulle** qui renferme la clé de toute notion générale de la mesure, et c'est par elle que M. Borel a fait la découverte de la mesure. M. Borel a le premier conçu **de quel point de vue** un ensemble partout dense pouvait être regardé comme ayant la mesure zéro. Il a fait voir la possibilité, que nul n'avait imaginé avant lui, de définir sur le continu linéaire [i.e. arithmétique] des intervalles de longueur totale aussi petite qu'on le veut et renfermant en eux tous les nombres rationnels. »*¹⁵⁷

Fréchet précise :

« En attachant, avec Borel, à chaque point d'abscisse rationnelle r_n un segment de longueur ε/n^2 , on constate que Υ est couvert

¹⁵⁷ Denjoy, *Commentaire sur la mesure des ensembles*, in Borel, *Œuvres complètes*, vol.1, p.210.

par un ensemble d'intervalles dont la longueur totale est $\varepsilon \sum \frac{1}{n^2}$; sa mesure devant intuitivement être inférieure à ce total est aussi petite que l'on veut avec ε . **Borel arrivait ainsi à cette conclusion qui, à l'époque, a paru surprenante, que l'ensemble des nombres rationnels, pourtant dense partout¹⁵⁸, était de mesure nulle. C'est par cet exemple que Borel a été conduit à la notion générale de mesure.** »¹⁵⁹

Ainsi, la découverte de la mesure par Borel, c'est d'abord la découverte d'une nouvelle propriété topologique des ensembles, distincte de la densité : un ensemble peut être partout dense et simultanément avoir une valeur topologique nulle selon un certain "point de vue".

Nous allons étudier en détail ce nouveau "point de vue" dont parle Denjoy, en nous plongeant dans l'écrit où il s'esquisse pour la première fois : sa thèse de 1895, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*. Mais avant cela, nous allons reprendre les points des *Leçons*-1898 où Borel construit un ensemble partout dense $[\Theta \cap (0,1)]$ de mesure nulle, en introduisant le concept d'additivité infinie dénombrable.

Le plan de cette section sera le suivant : après l'Introduction, nous aborderons dans le chapitre II la démonstration de Borel sur la conservation des propriétés du continu arithmétique (segment (0,1)) lorsqu'on l'ampute d'une infinité d'intervalles répartis de manière dense sur ce segment. Cette démonstration se trouve dans les *Leçons* au

¹⁵⁸ $\forall q \in \Theta, \forall \varepsilon > 0, \exists q' \in \Theta / |q - q'| < \varepsilon$

¹⁵⁹ **Fréchet**, *Vie et œuvre d'Emile Borel* in Borel, *Œuvres complètes*, Ed. du CNRS, vol.1, 1972, p.59.

Le gras est de nous.

chapitre III, section II. – Les ensembles parfaits qui ne sont denses dans aucun intervalle (p.39-46).

Au cours de l'exposé, nous devons bifurquer momentanément vers le *chapitre II, section III. – Les recherches de Liouville (p.27 – 30)*, afin de définir les nombres transcendants ξ utilisés dans la démonstration.

La démonstration de Borel nous amènera directement sur son *théorème fondamental* de recouvrement fini du segment du continu arithmétique. L'analyse de la démonstration de ce théorème fera l'objet du chapitre III. Nous comparerons cette démonstration avec celle de sa thèse de 1895, présentée par Borel comme effective. Ce travail nous permettra de "typer" le concept d'effectivité selon les conceptions de Borel en 1898 et, plus largement, de fixer des paramètres généraux d'analyse du concept. Cela clôturera la Partie I de notre thèse : la partie suivante s'appuiera sur ces conclusions pour démarrer l'étude épistémique de l'effectivité.

II- les ensembles de mesure nulle dans les Leçons-1898

1°- Le segment réel (0,1) amputé de ses rationnels : l'ensemble A

Pour aboutir à la propriété d'additivité infinie dénombrable et, *in fine*, à la définition générale de la mesure, Borel construit d'abord le concept de *mesure nulle* d'un ensemble partout dense, dans le *Chapitre III des Leçons, section II. – Les ensembles parfaits qui ne sont denses dans aucun intervalle (p.39-46)*.

« Considérons les nombres rationnels compris entre 0 et 1 et associons à chacun d'eux p/q l'intervalle : $p/q - 1/q^3, p/q + 1/q^3$ situés sur la droite ; nous allons considérer l'ensemble A des points qui sont compris entre 0 et 1 et qui n'appartiennent à aucun de ces intervalles. »¹⁶⁰

A est donc l'ensemble des points de (0,1) amputé de l'infinité dénombrable d'intervalles centrés sur chaque rationnel et de longueur $2/q^3$.

Propriétés de A :

1°- A contient des irrationnels ξ vérifiant la propriété $\forall \frac{p}{q}$

$$\xi \in \mathbb{Q} \cap (0,1), \left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^3} \quad (\text{p.40}) ;$$

2°- A est un ensemble fermé (p.40).

Borel démontre cette propriété à l'aide de l'ensemble dérivé A' (points d'accumulation de A) et du théorème : « tout ensemble fermé ne diffère de son dérivé que par une infinité dénombrable de points », qu'il a précédemment démontré p.37 (¹⁶¹).

3°- A n'est dense dans aucun de ses intervalles (p.40).

Tout intervalle dense de (0,1) contient au moins un point rationnel (p/q), or par définition A n'en contient aucun.

4°- A est un ensemble non dénombrable (p.41).

¹⁶⁰ Leçons, p.39-40.

¹⁶¹ Nous ne détaillons pas la démonstration de cette propriété bien connue.

La démonstration de ce point nous conduira directement à la mesure des ensembles. Nous la détaillons donc.

a) A n'est pas dénombrable : du mode "infini potentiel" au mode "infini actuel"

Cette démonstration qui occupe les p.41 à 44 est subdivisée en deux parties :

1° - Inférence classique (infini potentiel).

Borel démarre avec un raisonnement par récurrence, donc sur le mode infini potentiel, sur la longueur du segment $(0,1)$ amputé d'un nombre fini quelconque d'intervalles (a_n, b_n) deux à deux disjoints. L'objectif étant de montrer que la somme des longueurs $\sum_n \alpha_n$ de ces sous-intervalles est strictement inférieure à la longueur de $(0,1)$ ($\sum_n \alpha_n < 1$), ce qui lui permettra d'affirmer que l'ensemble A contient au moins un élément, d'où il déduit qu'il n'est pas dénombrable (inférence classique). Remarquons que le raisonnement ne se fait plus sur l'ensemble particulier A formé du segment $(0,1)$ amputé des intervalles de type $[p/q - 1/q^3, p/q + 1/q^3]$ mais sur un ensemble A dont les intervalles d'amputation sont plus généraux : (a_n, b_n) (¹⁶²).

2°- Inférence non classique (infini actuel)

Sa démonstration par récurrence lui sert de "preuve" pour étendre le résultat : de $\sum_n \alpha_n < 1$, il infère $\sum_\infty \alpha_n < 1$. Cela lui permettra d'affirmer (par une inférence non classique) qu'il a la puissance du continu, héritée de

¹⁶² Nous allons distinguer ces deux niveaux de description en nommant l'ensemble particulier : "A₀" pour garder la notation "A" dans le cas plus général.

$(0,1)^{163}$.

En effet, il écrit :

« Supposons maintenant que, à chaque nombre entier n , nous faisons correspondre l'intervalle (a_n, b_n) de longueur α_n ; en d'autres termes, que nous supprimions de l'intervalle $(0,1)$ les points d'une **infinité dénombrable d'intervalles** ; supposons, en outre, que la série à termes positifs

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$$

soit convergente et que sa somme s vérifie l'inégalité

$$s < 1$$

que pourrons-nous dire de l'ensemble A formé des points de l'intervalle $(0,1)$ qui n'appartiennent à aucun des intervalles (a_n, b_n) ? »¹⁶⁴

De prime abord, ce glissement du mode "infini potentiel" vers le mode "infini actuel" - l'inférence $\sum_n \alpha_n < 1 \rightarrow \sum_\infty \alpha_n < 1$ - est surprenant, car cette inférence est aux yeux de Borel immédiate et directe, alors qu'il n'y a pas de justification explicite du maintien de la relation d'ordre par passage au mode infini réalisé. Est-ce simplement que Borel s'appuie sur l'usage admis du passage à la limite dans le domaine des séries et fonctions ? L'utilisation du même symbole-concept ("ensemble A ", "série (a_n, b_n) ", etc.) pour désigner des entités de part et d'autre de la coupure épistémique entre l'infini potentiel et l'infini réalisé montre que pour Borel, il s'agit des mêmes entités et non pas de correspondances plus ou moins

¹⁶³ Leçons, p.41

¹⁶⁴ Leçons, p.41-42

directes. Alors que, classiquement, pour les séries et fonctions, cette coupure est implicitement présente dans l'opérateur « lim » (par exemple, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n U_n = \alpha$), ici il n'y a pas de distinction : le mode potentiel et le mode réalisé (dans le domaine du dénombrable) ne sont pas séparés. Borel se situe donc au-delà de l'usage habituel du concept de limite : il ne s'agit pas d'un passage à la limite mais d'un lien direct et immédiat entre ces deux modes qui, du moins aux yeux des kroneckeriens, sont distincts. Comment Borel justifie-t-il cela ?

De fait, Borel a déjà développé une argumentation au début des *Leçons* (Chapitre I, section I, II & III)¹⁶⁵. Citons les passages les plus importants :

*« On peut dire que l'on entend par ensemble une collection d'un nombre fini ou infini d'objets [p.1] ... **Lorsqu'un ensemble est composé d'une infinité d'éléments, quand doit-on le considérer comme donné ?** [p.2] ... [Par exemple, pour les séries] l'on adopte d'habitude la définition suivante : une série infinie $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ est donnée si l'on sait calculer le terme général u_n lorsqu'on connaît son rang n [p.2]... [Donc] on connaît un moyen de calculer successivement, les uns après les autres, tous les termes de la série, en les obtenant d'ailleurs chacun une seule fois. Nous sommes ainsi amenés à proposer la définition suivante : Nous dirons qu'un ensemble [infini actuel] est donné lorsque, **par un moyen quelconque**, on sait déterminer tous les éléments les uns après les autres, sans en excepter un seul et sans répéter aucun d'eux plusieurs fois [p.3] ... Que veulent dire ces mots : Déterminer tous les*

¹⁶⁵ *Leçons*, p.1-7

éléments les uns après les autres ? [p.3] ... *Il est aisé de se rendre compte que c'est le fait d'avoir pu donner un indice à chacun de ces termes, de sorte que chacun d'eux corresponde à un nombre entier positif déterminé par n. Dès lors, la conception que nous avons de l'ensemble des u_n est aussi claire que notre conception de l'ensemble des nombres entiers positifs 1, 2, 3, ..., n, ... Or, ce dernier ensemble nous est très familier ; nous avons certainement le droit de le regarder comme connu. C'est grâce à cette connaissance que les mots : l'ensemble des u_n est donné ont pour nous un sens bien précis* [p.4] »¹⁶⁶

Bref, si l'inférence $\sum_n \alpha_n < 1 \rightarrow \sum_\infty \alpha_n < 1$ est naturelle pour Borel, c'est que pour lui l'existant mathématique¹⁶⁷ inclus l'ensemble \mathbb{N} considéré comme réalisé, lequel transmet le caractère réalisé à d'autres ensembles infinis. Comment ce caractère est-il transmis ? Par un raisonnement sur le mode potentiel : les éléments de l'ensemble infini peuvent être indicés par la suite des entiers¹⁶⁸, c'est-à-dire mis en correspondance biunivoque avec ceux de \mathbb{N} « *par un moyen quelconque* » - ce moyen étant, bien entendu, loin d'être quelconque puisqu'il doit être limité aux opérations de l'arithmétique élémentaire dans le stricte mode "infini potentiel" (incluant le principe d'induction complète).

¹⁶⁶ Le gras est de nous. Nous avons inversé les italiques.

¹⁶⁷ Dans toute la suite, nous utiliserons le terme "existant" (mathématique) pour signaler des éléments du langage-objet qui, aux yeux de Borel, ont la même légitimité que des objets non problématiques (comme celui de nombre entier quelconque). Un existant mathématique peut donc a priori faire l'objet d'un raisonnement mathématique considéré comme légitime et valide.

¹⁶⁸ De fait, Borel inclut dans le champ de l'existant mathématique non pas le concept d'ensemble dénombrable réalisé mais celui d'ensemble effectivement énumérable (réalisé), voire d'ensemble de type d'ordre de 2^e classe quelconque donné (nous y reviendrons).

In fine, Borel fusionne les modes réalisé et potentiel : ce dernier servant de "lieu" démonstratif au premier.

De fait Borel est un cantorien "partiel" qui a parfaitement intégré à sa pensée et à sa pratique une partie de la théorie des ensembles transfinis dans sa version contentuelle ("naïve"). Il adhère au concept d'ensemble infini réalisé, mais seulement dans le domaine du dénombrable¹⁶⁹. Cette adhésion entraînera bien sûr l'extension du domaine de l'effectif au-delà du fini quelconque c'est-à-dire de l'infini potentiel. Borel sera amené, au cours des années suivantes, à tirer les conséquences mathématiques de cette adhésion sous différents points de vue : celui afférent à la théorie des fonctions, à la théorie du transfini... Notamment, pour Borel tout ordinal de deuxième classe et tout ensemble ayant un type d'ordre transfini de deuxième classe sont des existants mathématiques : un ordinal transfini *quelconque donné* est un existant mathématique. Est-ce dire que la classe des ordinaux de deuxième classe est également un existant aux yeux de Borel (en 1898) ? Oui, comme nous le verrons. De même, en 1898, Borel considère que le caractère réalisé de \mathbb{N} (type d'ordre ω) se transmet, non seulement à tout ensemble qui peut être mis en correspondance biunivoque avec \mathbb{N} , mais également à tout ensemble construit par une "procédure" d'indexation sur la *totalité* des éléments de \mathbb{N} ... Mais rapidement, il sera amené à dénier toute existence à ce concept d'ensemble de tous les ordinaux de 2^e classe¹⁷⁰ et, *a fortiori*, à tout ce qui relève des ordinaux de 3^e, 4^e... classes¹⁷¹. Et il questionnera également sa conception d'une procédure sensée s'itérer un nombre infini réalisé de fois (nous verrons cela en Partie II).

¹⁶⁹ Même remarque que ci-dessus.

¹⁷⁰ Équivalent au concept de premier ordinal de la 3^e classe.

¹⁷¹ Ce qui est lié à ses études sur les classes de Baire.

Pour le moment, disons qu'on trouve chez le Borel des *Leçons* une fusion entre des préceptes de Kronecker et des concepts de Cantor : 1) un raisonnement portant sur un ensemble dénombrable se fait dans le mode infini potentiel, 2) grâce à l'effet de levier "N connu en tant que totalité achevée" les conclusions de ce raisonnement peuvent être étendues à l'infini dénombrable réalisé par une inférence directe qui repose sur l'intuition mais non sur une construction liant les deux modes.

Grâce à cet effet de levier, c'est toute l'arithmétique élémentaire (ses objets et ses opérateurs) qui est étendue au domaine de l'infini dénombrable.

Il n'empêche, malgré cette naturalité du passage à l'infini dénombrable réalisé, justifié par Borel dans les premières pages des *Leçons*, sa démonstration du caractère non dénombrable de l'ensemble A vu comme le segment (0,1) amputé d'une infinité dénombrable réalisée d'intervalles lui prendra plusieurs pages : la question de l'existence de A en mode réalisé semble *a priori* "parachutée". En effet, Borel est parti du cas particulier $A_0 : \{ \xi / \xi \in [(0,1) - [p/q - 1/q^3, p/q + 1/q^3], \forall p, q \in \mathbb{N}] \}$ dont il a démontré par un raisonnement dans le mode potentiel qu'il contient au moins un élément. De la proposition portant sur un ensemble A "mesure de A = 1 - s > 0" (pensée en termes de longueur) il a inféré que l'ensemble A contient des éléments de (0,1). La classe des ensembles A définis par l'assertion générale "intervalle (0,1) amputé d'un nombre infini (réalisé) dénombrable d'intervalles (a_n, b_n) deux à deux disjoints (strictement) de longueur totale $\sum_{\infty} \alpha_n < 1$ " contient donc au moins un représentant : A_0 . *A priori*, il n'a pas besoin de plus pour clore sa démonstration. Pourquoi n'affirme-t-il pas d'emblée que sa démonstration par récurrence suffit à affirmer que l'ensemble infini réalisé A a la puissance du continu ?

Il s'en explique ainsi :

« A existe-t-il ? c'est-à-dire : peut-on conclure de l'inégalité $s < 1$ qu'il y a des points n'appartenant à aucun des intervalles (a_n, b_n) ? **Bien que ce point soit à peu près évident, il ne sera pas inutile de le démontrer en toute rigueur, car cela nous fournira l'occasion de faire plusieurs remarques importantes.** »¹⁷²

De fait, si Borel prend le temps de démontrer ce point, c'est qu'il va s'en servir pour introduire les notions-clé de sa théorie de la mesure. Et sa démonstration prendra la forme suivante :

1°) Il considère une série infinie réalisée $\sum_{\infty} (a_n, b_n)$ dont la longueur s est strictement inférieure à 1.

2°) Il fait l'hypothèse par l'absurde (TNDf) : A ne contient aucun point. Donc les points de $(0,1)$ appartiennent tous aux intervalles de la série infinie réalisée $\sum_{\infty} (a_n, b_n)$.

i) Il montre qu'il y a contradiction.

ii) Il conclut : A contient au moins un point de $(0,1)$ qui n'appartient pas aux intervalles de la série infinie.

3°) Il démontre alors que A contient une infinité non dénombrable de points.

¹⁷² Leçons, p.42

CQFD.

Nous pouvons déjà nous étonner de l'utilisation de la version faible du TND (démonstration par l'absurde) sur un raisonnement situé dans le mode « infini réalisé », car Borel est aujourd'hui connu pour son opposition "semi-intuitionniste" à cette pratique. Mais nous sommes en 1898, et le semi-intuitionnisme de Borel ne s'exprimera qu'à partir de 1904-1905, suite à ses réflexions sur la fonction de choix de Zermelo (version 1904) et sur le paradoxe de Richard (1905). Pour l'heure, Borel s'autorise sans même se justifier l'utilisation du TNDf grâce à "l'effet de levier" de N donné simultanément en tant qu'ensemble infini potentiel et que totalité achevée : du raisonnement dans le mode infini potentiel, qui admet traditionnellement le TND, Borel étend sa conclusion au mode infini actuel. Cela confirme que pour Borel, les deux modes sont reliés de manière naturelle, directe, immédiate et non problématique.

b) A est non dénombrable – mode "infini actuel"

Suite de la démonstration¹⁷³ :

Soit A_0^∞ l'ensemble (particulier) des points de $(0,1)$ amputé de l'infinité dénombrable réalisée d'intervalles centrés sur chaque

¹⁷³ Pour distinguer les deux modes de raisonnements infini potentiel (fini quelconque) et infini réalisé, nous allons adopter une notation particulière : lorsque cela ne prête pas à confusion, nous utiliserons l'exposant " ∞ " pour le mode infini actuel : A^∞ , A_0^∞ , $(a_n, b_n)^\infty$, $\sum_{\infty} \dots$, etc. L'indice " N " sera utilisé pour le mode infini potentiel A^N , A_0^N , $(a_n, b_n)^N$, $\sum_N \dots$, etc. Pour ce mode, nous pourrions cependant nous servir également de l'indiciage habituel (« n »).

rationnel et de longueur $2/q^3$: $[p/q - 1/q^3, p/q + 1/q^3]$. On sait déjà que A_0^∞ contient au moins un élément. Et on veut démontrer que A_0^∞ est non dénombrable.

L'ensemble A_0^∞ est défini constructivement *via* la construction de A_0^N et l'inférence *naturelle* "potentiel \rightarrow réalisé". Comme on l'a dit, Borel procède à une généralisation pour en tirer une définition plus générale et descriptive de la classe des ensembles A^∞ . Comme on sait que cette classe contient au moins un élément, l'ensemble A_0^∞ , cette définition descriptive n'est pas problématique (¹⁷⁴).

Soit A^∞ un ensemble quelconque donné du segment (0,1) défini par les propriétés suivantes : soit une suite infinie réalisée d'intervalles $(a_n, b_n)^\infty$ de (0,1) deux à deux disjoints de longueur totale $\sum_n \alpha_n < 1$, A^∞ ne contient aucun intervalle de cette suite. A^∞ est non dénombrable (p.41-44).

C'est ici que Borel pose la question "évidente": « *A existe-t-il ? c'est-à-dire : peut-on conclure de l'inégalité $s < 1$ qu'il y a des points n'appartenant à aucun des intervalles (a_n, b_n) ?* »¹⁷⁵

Evidente, car Borel a affirmé la connexion immédiate entre le mode potentiel et le mode dénombrable réalisé, l'hypothèse $\sum_n \alpha_n < 1$ est elle aussi immédiate. En effet, dans le mode potentiel, on évacue facilement le cas $\sum_n \alpha_n = 1$: si l'on avait $\sum_n \alpha_n = 1$, alors nous pourrions dériver de la série $(a_n, b_n)_N$ une nouvelle série $(a'_n, b'_n)_N$ définie par " $\forall n$, longueur(a'_n, b'_n)

¹⁷⁴ A condition, bien entendu, de ne pas considérer cette classe comme une totalité réalisée.

¹⁷⁵ Leçons, p.42

= $1/2 \text{ longueur}(a_n, b_n)$ ", ce qui entraînerait (en vertu des principes de Borel) l'inégalité $\sum_{\infty} \alpha'_n < 1$, sans que cela ne change la nature des raisonnements sur A.

De fait, la question de l'existence de A^∞ va permettre à Borel d'exposer le "tour de force" accompli dans sa thèse de 1895 : ramener un problème situé dans la sphère de l'infini dénombrable réalisé à la sphère du fini-infini potentiel, grâce à son théorème sur le recouvrement fini d'un segment de la droite réelle. Bien que ce soit ce théorème qui, à notre avis, l'a convaincu du lien naturel et non problématique des modes potentiel et (dénombrable) réalisé, nous voyons bien que dans les *Leçons*, l'affirmation de ce lien précède l'énoncé de ce théorème (et sa démonstration), puisque Borel l'a exposé aux pages 1 à 7.

Soulignons néanmoins que si dans les *Leçons* Borel reconstruit un peu artificiellement la théorie de la mesure en s'interrogeant sur l'existence de A^∞ (pour aborder son théorème de recouvrement fini), cet ensemble, qui est le cas général de l'ensemble A_0^∞ , représente une abstraction de l'ensemble construit dans sa thèse de 1895 : la "ligne" continue reliant deux domaines de définition des fonctions analytiques développables en série de Taylor du type $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_i}{(z - a_i)^m}$, ligne passant à travers le contour fermé de ses pôles.

c) A est non dénombrable : fin de la démonstration

Après avoir défini l'ensemble général (ou la classe d'ensembles) A^∞ par la seule contrainte que la série $(a_n, b_n)^\infty$ a une mesure (longueur) $s < 1$, Borel montre que cet ensemble contient au moins un point, puis en

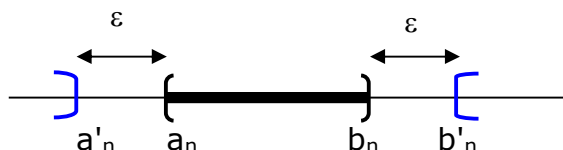
déduit qu'il en contient une infinité non dénombrable, CQFD. C'est l'un des pivots du livre.

Borel suppose que A^∞ ne contient aucun point : les points de $(0,1)$ appartiennent tous à des intervalles (a_n, b_n) , en maintenant l'hypothèse $\sum_{\infty} \alpha_n < 1$: l'hypothèse mènera à une contradiction. Pour cela, il passe par la démonstration du lemme :

"on peut ne considérer comme appartenant à un intervalle que les points intérieurs, à l'exclusion des extrémités" (p.42).

Démonstration du lemme :

Borel construit l'intervalle (a'_n, b'_n) par élargissement de (a_n, b_n) d'une quantité ε de part et d'autre de ses extrémités :



Puisque ce raisonnement porte sur un objet particulier bien défini, il s'autorise l'analogie "mesure=longueur"

$$\text{On a } L(a'_n, b'_n) = (1 + 2\varepsilon) \cdot L(a_n, b_n)$$

Puis le résultat est transposé au mode infini (potentiel/réalisé) :

$$\text{On en déduit } \sum_{\infty} L(a'_n, b'_n) = s' = (1 + 2\varepsilon) \cdot s$$

On peut choisir ε de sorte que $s' < 1$: $\varepsilon < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$, ce qui est permis car $0 < s < 1$.

Aussi, si $\forall \varepsilon$ les points de $(0,1)$ appartiennent tous aux intervalles fermés (a_n, b_n) avec $s < 1$, ils appartiennent également aux intervalles ouverts (a'_n, b'_n) avec $s' < 1$.

Borel va alors montrer que cette conclusion est contradictoire : on ne peut avoir $s' < 1$.

Il lui reste alors se servir du lemme pour démontrer que son hypothèse initiale – A^∞ ne contient aucun point – est fausse. Pour cela, il énonce son théorème (p.43).

i) théorème fondamental

« Si l'on a sur un segment limité de droite une infinité dénombrable d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, il existe un NOMBRE LIMITE d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété (tout point de la droite est intérieur à au moins l'un d'eux). »

Borel renvoie en note 1 (p.43) : *« On trouvera dans ma Thèse [1895] une autre démonstration de ce théorème, démonstration qui donne un moyen au moins théorique de déterminer **effectivement** les intervalles en nombre limité dont il est question. »*

Nous nous pencherons dans la section suivante (III) sur cette démonstration de 1895 après avoir analysé la démonstration donnée dans

les *Leçons*. Signalons cependant l'ambiguïté de l'expression « démonstration qui donne un moyen au moins théorique de déterminer effectivement »... La question (et le statut) de l'effectivité "de principe" (« au moins théorique ») sera analysée dans la Partie II de notre thèse.

La version 1898 du théorème dit donc :

Soit AB un segment de la droite des réels

Soit $\{(a_n, b_n)\}^\infty$ un ensemble infini d'intervalles tel que :

$$\forall p \in AB, \exists n \in \mathbb{N} / p \in (a_n, b_n)$$

Alors

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall p \in AB, \exists k \leq N : p \in (a_k, b_k)$$

Dans ses *Leçons*, Borel démontre ce théorème par l'absurde : il suppose qu'on ne peut trouver aucun nombre entier fixé N tel que tout point du segment AB serait intérieur à un intervalle (a_k, b_k) de l'ensemble $\{(a_n, b_n)\}^\infty$ avec $k \leq N$.

L'hypothèse par l'absurde

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists p \in AB / \forall k \in \mathbb{N} : p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N$$

aboutit à une contradiction...

Nous détaillerons la démonstration de ce théorème dans la section III du présent chapitre. Pour poursuivre l'analyse de la démonstration "A[∞] n'est pas dénombrable" gardons l'énoncé général du théorème fondamental (inspiré de Fréchet-1917)¹⁷⁶ :

Soit S un segment de la droite des réels, si F est une famille

¹⁷⁶ **Fréchet**, *Le théorème de Borel dans la théorie des ensembles abstraits*, Bulletin de la S.M.F., tome 45 (1917), p.1-8.

dénombrable d'ensembles I_n telle que tout élément de S soit intérieur à l'un des I_n , on peut toujours extraire de F une famille F_1 formée d'un nombre fini d'ensembles I_n et telle que tout élément de S est intérieur à l'un des ensembles I_n de la famille F_1 . ⁽¹⁷⁷⁾

ii) fin de la démonstration

Borel a supposé que A^∞ ne contient aucun point : les points de $(0,1)$ appartiennent tous à des intervalles (a_n, b_n) , en maintenant l'hypothèse $\sum_{\infty} \alpha_n < 1$.

Il a démontré le lemme : "on peut ne considérer comme appartenant à un intervalle que les points intérieurs, à l'exclusion des extrémités" (p.42).

Et le théorème fondamental lui a permis de ramener cela au cas fini.

La conclusion du raisonnement est immédiate : on a un nombre fini d'intervalles ouverts (a'_n, b'_n) recouvrant tous les points du segment $(0,1)$ et dont la longueur totale s' est strictement inférieure à la longueur du segment. Comme on raisonne sur une addition finie d'intervalles du segment $(0,1)$, on se retrouve sur un mode classique (en lien direct avec l'intuition géométrique), cette conclusion est éminemment contradictoire.

On en déduit que la proposition "les points du segment $(0,1)$ appartiennent tous aux intervalles d'une série infinie de longueur totale inférieure strictement à 1" est fausse, donc l'hypothèse " A^∞ ne contient aucun point" est fausse (inférence par l'absurde). Donc A^∞ contient au

¹⁷⁷ L'énoncé de Fréchet (un peut plus général) est en page 3 de son article.

moins un point du segment $(0,1)$ qui n'appartient pas aux intervalles de l'ensemble infini dénombrable $(a'_n, b'_n)^\infty$. A^∞ n'est pas vide.

Enfin, Borel montre par l'absurde qu'on ne peut dénombrer ces points de A^∞ (p.44) : sa démonstration s'inspire de la méthode de diagonalisation de Cantor. En effet, si on pouvait dénombrer ces points de A^∞ , on pourrait les ranger dans une liste ordonnée (type d'ordre ω) : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ et entourer chacun d'un intervalle de longueur $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Aussi, la longueur totale amputée à $(0,1)$ serait :

$$s_1 = s + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = s + \varepsilon$$

Or, sans modifier les résultats qui précèdent, nous pouvons choisir ε suffisamment petit pour que s_1 soit inférieur à 1. On a alors une nouvelle série d'intervalles infinie dénombrable (intégrant les intervalles entourant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$) dont la longueur totale est inférieure strictement à 1. Donc il existe un point de $(0,1)$ qui n'y appartient pas, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse du dénombrement de tous les points de A^∞ .

CQFD.

En conclusion, on aura toujours des points qui échapperont à tout "encapsulation" dénombrable par des intervalles : " A^∞ n'est pas dénombrable." (p.44)

Récapitulation de ce qui précède.

Proposition à démontrer :

Le segment de droite $(0,1)$ peut être amputé d'une infinité dénombrable d'intervalles réels (centrés chacun sur un rationnel) sans perdre sa qualité d'ensemble non dénombrable.

Démonstration dans le cas d'un nombre *fini quelconque* d'intervalles (mode infini potentiel).

Démonstration dans le cas d'un nombre *infini dénombrable* réalisé d'intervalles (infini actuel). On fait l'hypothèse (par l'absurde) que A ne contient aucun point : les points du segment appartiennent tous aux intervalles de la série infinie.

On démontre qu'"on peut ne considérer comme appartenant à un intervalle que les points intérieurs, à l'exclusion des extrémités" (p.42).

On démontre le théorème fondamental.

On montre sur le mode infini potentiel que l'hypothèse "A ne contient aucun point" est contradictoire.

Conclusion : si A contient un point, il en contient une infinité non dénombrable.

2°- Le problème du continu et les ensembles de mesure nulle

De la démonstration précédente, il ressort qu'un segment de la droite réelle peut être amputé d'une infinité dénombrable d'intervalles (ayant chacun la puissance du continu) et néanmoins garder une quantité non dénombrable de points. Borel écrit (p.44-45) :

« Après avoir réfléchi à ce fait, qu'on peut enlever d'une droite tous les points compris dans chacun des intervalles

$$p/q - 1/q^3, p/q + 1/q^3$$

et qu'il reste encore des points, en infinité non dénombrable, on sera moins disposé à croire qu'on sait ce que c'est que le continu et à raisonner sur lui comme sur une notion intuitive et parfaitement claire. »

En effet, à l'époque, les propriétés du continu "arithmétique" (droite des réels) sont mal connues. Notamment, la densité est vue comme une propriété non séparable du concept de continu arithmétique, conception liée aux axiomes euclidiens de la géométrie, à savoir qu'un ensemble de points sans dimension ni mesure – serait-il non dénombrable et partout dense – engendre constructivement une droite mesurable. Avec cette démonstration de la non dénombrabilité de A^∞ , Borel fait "d'une pierre deux coups" : 1) il exhibe constructivement¹⁷⁸ une propriété "étrange" de ce continu arithmétique, à savoir qu'un ensemble nulle part dense peut être non dénombrable, ce qui brouille les certitudes sur le rapport entre densité, non dénombrabilité et continu, et permet d'approfondir la connaissance du concept ; 2) il montre le risque de s'en tenir à l'intuition géométrique pour raisonner sur lui.

Mais Borel ne s'arrête pas à ces résultats négatifs : dans les pages qui suivent la fin de la démonstration précédente, il exhibe positivement deux nouvelles propriétés : 1) un ensemble peut être de longueur nulle et partout dense, 2) un ensemble peut être de longueur 1 sur le segment

¹⁷⁸ Si l'on admet l'existence *a priori* de l'objet "continu arithmétique" et des ensembles infinis dénombrable réalisés.

(0,1) et être nulle part dense. Cette séparation entre le concept de longueur et celui de densité justifie l'introduction d'une théorie de la longueur arithmétique et de la mesure des ensembles.

a) La longueur de A (non dénombrable) peut être rendue nulle.

Pour cela, il revient (p.45) au cas particulier des intervalles entourant l'infinité dénombrable de rationnels du segment (0,1).

Soient les intervalles centrés sur les rationnels p/q de (0,1) définis par :

$$\forall n \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{nq^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{nq^3} \right)$$

avec $q = 2, 3, \dots, \infty$ et $p = 1, 2, \dots, q - 1$

La somme de leurs longueurs vaut : $\frac{2}{n} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q-1}{q^3}$ ou $\frac{2}{n} \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^3} \right)$

Comme la série $2 \sum \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^3} \right)_{q \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et bornée, on peut la majorer par un nombre fixe :

$\exists M \in \mathbb{Y} / \forall n \in \mathbb{N}$, la longueur totale de l'infinité dénombrable d'intervalles $\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{nq^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{nq^3} \right)$ est inférieure à M/n .

Soit l'ensemble E_n définit par :

$$E_n : \left\{ \alpha \in (0,1) / \exists p/q \in (0,1) : \alpha \in \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{nq^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{nq^3} \right) \right\}$$

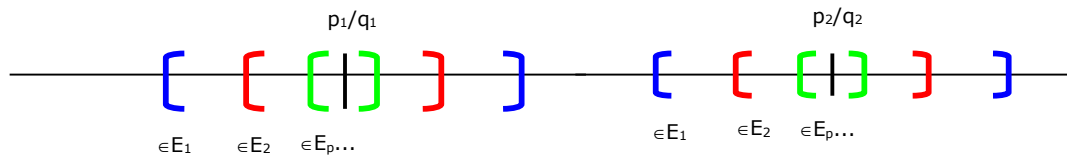
Soit la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, \alpha \in E_n \Rightarrow \alpha \in E_{n-1}$

La suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que $\forall p/q \in (0,1) \forall n \in \mathbb{N}^* :$

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{nq^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{nq^3} \right) \subset \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{(n-1)q^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{(n-1)q^3} \right)$$

chaque intervalle de l'ensemble E_n est inclut dans l'intervalle correspondant (autour de p/q) de l'ensemble $E_{n-1} :$

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \dots \supset E_n \supset \dots$$



Soit E l'ensemble défini par $E : \bigcap_{\infty} E_n$

Quels points de $(0,1)$ appartiennent à E ?

« Cet ensemble comprend assurément tous les points p/q , mais il n'est pas évident qu'il enferme d'autres points. Cet ensemble E a d'ailleurs la propriété remarquable qu'on peut enfermer ses points en une série d'intervalles dont la somme est aussi petite qu'on veut [...] Nous allons montrer que E a la puissance du continu. » (p.45-46).

En effet, si l'on se place sur le mode infini potentiel, la somme des longueurs des intervalles composant E est majorée par M/n , qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini. En transposant à la manière de Borel ce résultat dans le mode infini réalisé, la longueur de E est

nulle.

Focalisons-nous maintenant sur la dernière, et la plus importante partie : « *E a la puissance du continu* ».

b) A a la puissance du continu.

Pour démontrer cela, Borel se sert d'un certain type de nombres transcendants ξ qu'il a introduit dans la section *III- Les recherches de Liouville*¹⁷⁹ des *Leçons*, où il expose une méthode qui permet d'approcher un ξ par des rationnels d'aussi près qu'on veut. Nous n'allons pas entrer dans tous les détails de cette section III des *Leçons*. Contentons-nous d'exposer ce qui nous intéresse pour la suite de la démonstration.

A la page 29 des *Leçons*, Borel donne une expression générale de ces nombres transcendants :

$$\xi = \sum_n \frac{\alpha_n}{10^{n!}} \quad (n > 0)$$

les α_n sont « *des nombres entiers positifs que, pour fixer les idées, je suppose inférieurs à 10, de sorte que ξ est en réalité écrit sous forme de fraction décimale* » (p.29).

Un peu plus loin, Borel écrit :

« *Il est aisé de voir qu'on peut ainsi définir une infinité non dénombrable de nombres transcendants [les ξ] et même, si l'on veut, une infinité ayant la puissance du continu. Posons, en effet,*

¹⁷⁹ **Borel**, *Leçons, Chapitre II. Section III. – Les recherches de Liouville*, p.27-30

$$\xi' = \alpha_1/10 + \alpha_2/10^2 + \alpha_3/10^3 + \dots + \alpha_n/10^n + \dots$$

Si l'on donne aux α toutes les valeurs entières inférieures à 10, ξ' prendra toutes les valeurs comprises entre 0 et 1. Si l'on suppose de plus qu'il y a une infinité de nombres α qui ne sont pas nuls, on exclura en apparence certaines valeurs rationnelles des ξ' ; mais on obtiendra ces valeurs en remarquant que 0,5 par exemple, peut s'écrire 0,49999... et que, dans la série [ci-dessus], on n'a pas exclu le cas où, à partir d'un certain rang, tous les α sont égaux à 9. On a donc un ensemble ayant la puissance du continu. Or, si à chaque élément ξ' de cet ensemble, on fait correspondre le nombre ξ pour lequel les α ont la même valeur [...], on aura défini un ensemble de nombres transcendants ξ ayant la puissance du continu. » (p.29-30).

Avant de regarder d'un peu plus près sa définition d'un nombre ξ et la nature de l'ensemble de tous les ξ , raccordons ce qui précède à la démonstration que A (ici nommé E) est non dénombrable.

Soit l'ensemble E_n avec n quelconque.

Borel a montré précédemment que quel que soit un tel nombre ξ , il existe une infinité de rationnels p/q qui approchent ξ au-delà d'une limite fixée $1/q^m$, avec m entier quelconque donné (l'exposé se trouve p.27-29).

D'après ce qui précède :

- Soit n quelconque donné,
- Soit E_n l'ensemble formé des intervalles $\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{nq^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{nq^3} \right)$,

- Soit $\xi (= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m}{10^{m!}}$ ($m > 0$)) quelconque donné
- Il existe une infinité de rationnels p/q de $(0,1)$ qui vérifient l'inégalité : $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^4}$.
- Si on prend $q > n$, on peut en déduire l'inégalité : $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^4} < \frac{1}{nq^3}$.
- Donc ξ est inclus dans un intervalle $\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{nq^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{nq^3} \right)$
- Puisque E_n contient cet intervalle, ξ appartient (strictement) à l'ensemble E_n .
- Or Borel a montré que l'ensemble des ξ a la puissance du continu.
- Donc E_n a la puissance du continu.
- Comme n est quelconque (en gardant la condition $q > n$), on peut conclure (en passant du mode infini dénombrable potentiel au mode infini dénombrable réalisé) que $E (= \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$ a la puissance du continu.
- Or on a montré que la longueur totale de E est nulle.
- Donc on a un ensemble ayant la puissance du continu et de mesure nulle. CQFD

Cette démonstration n'est pas véritablement satisfaisante, en particulier (mais pas uniquement) parce qu'elle s'appuie sur deux propriétés – l'existence de nombres ξ et la nature continue de l'ensemble de tous ces nombres ξ - qui nous semblent pour le moins contestables, du moins si on l'aborde sur un mode constructif, même au sens de Borel. Cela jette d'ailleurs un éclairage particulier sur la théorie de la mesure de

Borel : la théorie ne tient que sur un mode descriptif... d'où les extraordinaires contorsions de Borel pour faire entrer sa créature dans un moule constructif, trop étroit. Nous en aurons un exemple frappant au chapitre 3 de cette section concernant la démonstration du théorème de recouvrement fini d'un segment de droite. Mais déjà nous pouvons l'illustrer en analysant la construction des nombres ξ et de leur ensemble...

1°- Un problème de constructivité

Reprenons les définitions des nombres ξ et la démonstration de la puissance du continu de leur totalité¹⁸⁰.

$$\xi = \sum_n \frac{\alpha_n}{10^{n!}} \quad (n > 0)$$

Les α_n sont « des nombres entiers positifs que, pour fixer les idées, je suppose inférieurs à 10, de sorte que ξ est en réalité écrit sous forme de fraction décimale. [...] Il est aisé de voir qu'on peut ainsi définir une infinité non dénombrable de nombres transcendants [les ξ] et même, si l'on veut, une infinité ayant la puissance du continu. Posons, en effet,

$$\xi' = \alpha_1/10 + \alpha_2/10^2 + \alpha_3/10^3 + \dots + \alpha_n/10^n + \dots$$

Si l'on donne aux α toutes les valeurs entières inférieures à 10, ξ' prendra toutes les valeurs comprises entre 0 et 1. Si l'on suppose de plus qu'il y a une infinité de nombres α qui ne sont

¹⁸⁰ Leçons, p.27-30

pas nuls, on exclura en apparence certaines valeurs rationnelles des ξ' ; mais on obtiendra ces valeurs en remarquant que 0,5 par exemple, peut s'écrire 0,49999... et que, dans la série [ci-dessus], on n'a pas exclu le cas où, à partir d'un certain rang, tous les α sont égaux à 9. On a donc un ensemble ayant la puissance du continu. Or, si à chaque élément ξ' de cet ensemble, on fait correspondre le nombre ξ pour lequel les α ont la même valeur [...], on aura défini un ensemble de nombres transcendants ξ ayant la puissance du continu. » (p.29-30).

a) Définition d'un nombre ξ

Ce qui pose problème dans ce qui précède, c'est le choix des valeurs des α_n , au regard des considérations de Borel lui-même dans ce même ouvrage.

En effet, nous avons vu précédemment le sens que Borel donne aux ensembles dénombrables réalisés considérés comme existants authentiques : ils ont un type d'ordre donné, voire le type d'ordre ω . Rappelons-le en citant à nouveau ses propos du début des *Leçons* :

« Lorsqu'un ensemble est composé d'une infinité d'éléments, quand doit-on le considérer comme donné ? (p.2) [...] Nous dirons qu'un ensemble [infini actuel] est donné lorsque, **par un moyen quelconque, on sait déterminer tous les éléments les uns après les autres, sans en excepter un seul et sans répéter aucun d'eux plusieurs fois** (p.3) ... *Que veulent dire ces mots : Déterminer tous les éléments les uns après les autres ?* (p.3) ... *Il est aisé de se rendre compte que c'est le fait d'avoir pu donner un indice à chacun de ces*

termes, de sorte que chacun d'eux corresponde à un nombre entier positif déterminé par n . Dès lors, la conception que nous avons de l'ensemble des u_n est aussi claire que notre conception de l'ensemble des nombres entiers positifs $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ [...] C'est grâce à cette connaissance que les mots : l'ensemble des u_n est donné ont pour nous un sens bien précis (p.4). »

Considérons la suite infinie dénombrable $(\alpha_n)^\infty$ des numérateurs du développement d'un nombre ξ . Selon les préceptes de Borel, cette suite doit être considérée comme "donnée" (bien définie, existante au sens constructif) uniquement si l'on sait déterminer le terme α_n pour un n quelconque donné, c'est-à-dire si l'on dispose soit d'une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} qui à n fait correspondre une expression "en n " ($f(n)$) qu'on nomme α_n , soit une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} qui à n associé un élément de \mathbb{N} selon un principe de choix déterminé. Ce dernier cas vaut pour un ensemble fini : le choix peut être effectué *ad hoc* et de manière totalement arbitraire. Dans ce cas, le "principe" de choix est simplement la description exhaustive de chaque correspondance, sans qu'il y ait nécessairement de loi mathématique liant le nombre n et son image α_n . Mais pour un ensemble infini (même potentiel), cette description exhaustive étant impossible (car elle serait infinie), il faut un principe de choix général permettant, quel que soit n , d'identifier l'élément choisi. Dans l'infini, même potentiel, le principe de choix et la correspondance par une fonction entière $f(n)$ ne se distinguent pas (du point de vue constructif)¹⁸¹.

Bref, on retrouve le principe d'énumérabilité effective qui, même s'il n'a pas encore été inventé par Borel, est très proche implicitement de sa

¹⁸¹ Ce qui n'est pas le cas d'un point de vue purement descriptif ou axiomatique.

définition de 1898 d'un ensemble infini dénombrable donné (ci-dessus). Dans celle-ci, il y a (implicitement) une distinction entre le concept général d'ensemble dénombrable infini et le concept général d'ensemble dénombrable infini donné constructivement (par énumérabilité effective).

Or, dans la définition de Borel, on est sur le mode infini réalisé : pour garder la généralité de sa définition, Borel ne peut (et ne doit) pas considérer que pour les valeurs de la suite $(\alpha_n)^\infty$ il y a une loi ou un principe de choix déterminé, puisque s'il y avait un tel principe il limiterait par définition l'ensemble des ξ construits à une sous-classe dénombrable, même si cela lui permettrait de démontrer (par diagonalisation et moyennant quelque extension du concept de constructivité) qu'on ne peut dénombrer exhaustivement les ξ .

Donc la suite $(\alpha_n)^\infty$ doit être considérée comme "aléatoire" ou arbitraire c'est-à-dire émanant d'un choix absolument quelconque et simultanément infini.

Que Borel passe aussi légèrement sur cet aspect aléatoire du choix infini des α_n pour la construction d'un nombre ξ , cela est étonnant.

b) La totalité des nombres ξ a la puissance du continu

Même en supposant qu'un nombre ξ est bien défini, on ne peut que rester perplexe lorsque Borel en déduit : « *On a donc un ensemble ayant la puissance du continu* ». Cela revient à passer de la proposition :

$$\forall (\alpha_n)^\infty / \xi = \alpha_1/10 + \alpha_2/10^2 + \alpha_3/10^3 + \dots + \alpha_n/10^n + \dots$$

à la proposition

$$\{(\alpha_n)^\infty\} \text{ a la puissance du continu}$$

à la manière des cantoriciens. Cela nous surprend moins que le

problème précédant puisque, depuis le début, Borel traduit la propriété "l'ensemble E n'est pas dénombrable" du mode infini potentiel en la propriété "E est non dénombrable" du mode réalisé. Néanmoins, cela se remarque davantage ici car Borel suit dans cette partie une démarche qui se veut particulièrement constructive – et où il ne pose pas l'intuition de la non dénombrabilité de ces nombres comme axiome, contrairement à ce qu'il a fait avec le concept de réel et de points du continu arithmétique.

En d'autres termes, Borel commet deux raccourcis hautement descriptifs – le premier en totale contradiction avec ses propres principes exposés dans les *Leçons*¹⁸², le second très éloigné de l'univers constructif (auquel Borel revendique son appartenance) – dans sa théorie constructive de la mesure.

Cette démonstration de l'existence d'ensembles de mesure nulle ayant la puissance du continu – l'une des grandes et puissantes découvertes de Borel – se place résolument hors du cadre quelque peu constructif sensé délimiter sa théorie de la mesure, cadre qu'il agitera à la face de Lebesgue (et d'autres) pour justifier la robustesse contentuelle de sa théorie au regard de celle des autres.

In fine, la théorie de la mesure de Borel n'est pas constructive, elle est belle et bien descriptive (même dans son exposé de 1912). Dès lors, il est encore plus incompréhensible que Borel ait été bloqué par ses "ensembles quelconques". Il semblerait que dans la hiérarchie de Borel (en 1898), les inférences conduisant de l'infini dénombrable réalisé au transfini non dénombrable soient moins problématiques que l'acceptation

¹⁸² D'ailleurs Borel finira par envoyer dans les limbes du non existant tout concept de suite dénombrable infinie sans loi de formation.

de l'axiome d'Euclide liant le point à la droite¹⁸³

Ces incohérences épistémologiques de Borel – qui ne sont pas des incohérences mathématiques¹⁸⁴ vont se retrouver de manière “dramatique” dans sa démonstration “effective” du théorème fondamental de recouvrement fini d'un segment réel. Voyons cela...

III – Zoom sur l'additivité dénombrable : le théorème fondamental

Nous allons maintenant nous focaliser sur le *théorème fondamental* énoncé dans les Leçons-1898 (p.43). C'est un des plus importants théorèmes d'Analyse de l'époque, et il nous semble nécessaire de le replacer historiquement, ce qu'à très bien fait Maurice Caveing¹⁸⁵ (que nous citerons plus amplement dans la Conclusion de la thèse). Plutôt que de le paraphraser, nous le citons *in extenso* (p.232-234) :

« En considérant la continuité comme essentielle pour le concept de variété, Riemann mettait déjà en oeuvre implicitement ce qui allait devenir la notion de voisinage grâce à l'élaboration ultérieure de la topologie. Il a été dit précédemment comment une approche conceptuelle d'un continu physique avait été tentée par Aristote, qui a recherché les types de relations possibles entre les parties d'un

¹⁸³ Ce qui est logique car sa théorie de la mesure est avant tout en opposition avec cet axiome (transposé dans l'arithmétique).

¹⁸⁴ A condition de ne pas s'interroger sur le mode d'existence des “êtres” mathématiques, et d'adopter un mode descriptif et axiomatique.

¹⁸⁵ **Caveing**, *Le problème des objets dans la pensée mathématique*, Vrin, coll. *Problèmes & Controverses*, 2000, p.232-234.

continu. Cette voie était féconde, mais il convenait de la reprendre en explorant mathématiquement les relations qui font d'un ensemble de points idéaux un continu. Si l'on admet l'isomorphisme de l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels et de la droite réelle qui peut être construite axiomatiquement, on se trouve dans un domaine riche et usuel, dans lequel les relations entre les points de la droite reproduisent les relations entre les éléments de \mathbf{R} , par exemple : \mathbf{R} satisfait au théorème des segments emboîtés (principe de Cantor) qui assure que, pour une famille infinie de segments emboîtés $[a_n, b_n]$ (a_n suite non décroissante, b_n suite non croissante, $0 \leq b_n - a_n$ tendant vers 0 quand n tend vers l'infini) il existe un réel unique x tel que

$$a_n \leq x \leq b_n, \text{ quel que soit } n.$$

Mais pour que cet énoncé, que Cantor posait comme un principe, et donc comme un postulat de continuité, soit démontré, il faut développer une théorie mobilisant un certain nombre de définitions, qui permettront de préciser les relations entre les éléments de \mathbf{R} . On peut, dans \mathbf{R} , définir pour un sous-ensemble la propriété d'être fermé de la façon suivante: si, pour toute suite (x_n) de ses points convergeant dans \mathbf{R} , la limite de la suite lui appartient. Cette définition montre le lien existant entre les concepts topologiques et ceux de l'Analyse; il existe une autre définition purement ensembliste faisant intervenir les concepts de voisinage et de point d'accumulation; le complémentaire d'un fermé est un ouvert. Dans \mathbf{R} les fermés les plus simples sont les segments, notés $[M_1, M_2]$, les ouverts les plus simples sont les intervalles, notés $]M_1, M_2[$, les points M_1 et M_2 en sont les bornes. On rappelle qu'un espace est muni d'une topologie si une famille de ses sous-ensembles ouverts satisfait le système des quatre axiomes : l'ensemble lui-même et l'ensemble

vide sont des ouverts, l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert, la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité d'ouverts est un ouvert.

Dans un sous-ensemble de \mathbf{R} un point est isolé s'il existe un ouvert de \mathbf{R} le contenant et ne contenant aucun autre point de ce sous-ensemble. Un sous-ensemble sans point isolé est dit dense, ce qui correspond à la propriété qu'entre deux réels distincts, il y en a un troisième : \mathbf{R} est partout dense. Mais cette propriété appartient déjà à l'ensemble \mathbf{Q} des nombres rationnels. Entre deux rationnels, il y en a un troisième, mais aussi un irrationnel : \mathbf{Q} est partout dense en lui-même comme dans \mathbf{R} .

Un sous-ensemble d'un espace topologique est connexe s'il ne peut être séparé en deux sous-ensembles disjoints non vides par intersection avec deux ouverts. Les intervalles de \mathbf{R} sont connexes, ainsi que \mathbf{R} lui-même.

Si un ensemble conjoint les deux propriétés d'être dense et fermé, il est dit parfait. Les segments de \mathbf{R} sont donc parfaits. On a d'abord défini un continu comme un parfait connexe, ce qui est le cas des segments de \mathbf{R} et de \mathbf{R} lui-même. Malheureusement cette caractérisation n'est pas intrinsèque puisque la définition d'un ensemble fermé fait référence à un autre ensemble le contenant, et c'est le cas pour un sous-ensemble de \mathbf{R} par rapport à \mathbf{R} . Si l'on veut satisfaire à l'exigence de caractérisation intrinsèque, il faut procéder autrement: si l'on a sur \mathbf{R} une famille infinie d'intervalles telle que tout élément de \mathbf{R} appartienne à l'un au moins de ces intervalles (ils forment un recouvrement ouvert), on peut n'en retenir qu'un nombre fini qui satisfait à cette même condition (**théorème de Borel-Lebesgue**). Cette propriété a permis de définir le concept général d'espace compact : un espace topologique est compact si tout recouvrement ouvert y comporte un sous-recouvrement fini. La

notion ne dépend plus que de la topologie de l'ensemble considéré. Or la propriété est caractéristique des segments de \mathbf{R} . On appelle maintenant continu un compact connexe (et domaine un ouvert connexe). Les continus de \mathbf{R} en sont donc les intervalles fermés bornés. Toutefois \mathbf{R} n'est pas un compact et, par suite, n'est pas un continu au sens moderne du terme.

Sur la question du continu bien des problèmes restent encore en débat. Cette brève incursion dans le domaine de la topologie, limitée au cas des espaces de points (car il y en a d'autres) et parmi eux à la droite réelle, espace métrique à une seule dimension, suffit pourtant à suggérer la complexité des systèmes relationnels qui permettent d'accéder de façon rigoureuse à ces notions. »

Dans ses *Leçons*, Borel énonce ainsi son théorème de recouvrement (p.43) :

*« Si l'on a sur un segment limité de droite une infinité dénombrables d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, **il existe** un NOMBRE LIMITE d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété (tout point de la droite est intérieur à au moins l'un d'eux). »*

Théorème fondamental énoncé dans la thèse de 1895

*« Si l'on a sur une droite une infinité d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, **on peut déterminer effectivement** un NOMBRE LIMITE d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété (tout point de la droite est intérieur à au*

moins l'un d'eux). »⁽¹⁸⁶⁾.

Avant même d'aborder sa démonstration, interrogeons-nous sur le rôle que le théorème a joué (dès 1895) dans les convictions épistémologiques de Borel vis-à-vis de l'infini réalisé.

Nous l'avons dit, ce théorème lie le fini (infini potentiel) à l'infini actuel. Mais il n'est pas une inférence qui construit l'infini actuel à partir du fini-infini potentiel : pour que ce lien puisse se faire, il faut que d'une certaine manière l'infini dénombrable réalisé soit déjà considéré comme un existant. En effet, Borel raisonne constructivement (classiquement) dans le mode infini potentiel (dénombrable), puis il élargit directement ses conclusions dans le mode dénombrable réalisé, en vertu de sa définition des ensembles infinis dénombrables donnés (Leçons, p.1-7). Mais de la même manière que le concept de « fini quelconque » - qu'aucun mathématicien ne remet en question - ouvre la porte cognitive au concept d'infini potentiel (qui n'en est pas l'équivalent exact mais qui en est fort proche), l'établissement d'un lien mathématiquement incontestable, et donc cognitivement robuste, entre le fini strict et l'infini dénombrable peut jouer ce même rôle : un énoncé mettant en scène une infinité dénombrable d'ensembles est ramené à un énoncé portant sur un nombre fini quelconque donné d'ensembles. Cela permet d'adosser cognitivement certains raisonnements et opérations sur cette infinité d'ensembles des raisonnements au mode fini - cela dans le domaine contentuel et non pas, comme avec Hilbert, dans le domaine formel.

Or, puisque le théorème établit un lien contentuel "fini - infini dénombrable", cela peut renforcer l'idée que l'infini dénombrable est un

¹⁸⁶ **Borel**, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, in *Annales scientifiques de l'E.N.S.*, 3^e série, tome 12 (1895), p. 51.

existant légitime – même si ce lien présuppose cet existant. Et, partant, si l'infini, même considéré a priori comme "potentiel", est un existant, le sens de "potentiel" devient ambigu et peut être quasiment assimilé à l'"actuel" (comme l'"infini potentiel" une fois qu'on a admis le concept de "quelconque")...

Est-ce la découverte de ce théorème qui a décidé de la position épistémologique de Borel vis-à-vis de l'infini dénombrable réalisé ? Ou est-ce à l'inverse sa conviction de l'existence mathématique de l'infini dénombrable réalisé qui l'a conduit à chercher une preuve constructive, et ancrée dans l'intuition du fini, de la légitimité des raisonnements impliquant des procédures (additions) infinies ? Nous verrons dans cette section que c'est la deuxième alternative qui est la plus probable...

Dans tous les cas, ce théorème est à la pensée contentuelle de Borel, ce que la métamathématique est à la méthode/pensée formaliste de Hilbert : un puissant levier permettant de dépasser un obstacle supposé infranchissable. Le théorème justifie l'utilisation de procédures infinies (potentielles ou réalisées) dans le domaine de la mesure, reliant constructivement le concept de mesure d'une somme finie de longueurs d'intervalles, dérivé de l'intuition géométrique à celui de mesure donnée par une opération additive infinie. Ce théorème résout donc le problème auquel Jordan et d'autres s'étaient confrontés en tentant de bâtir une théorie de la mesure des ensembles sur la base d'une additivité finie.

1°- Théorème fondamental : démonstration des Leçons-1898

Le théorème dit donc :

Soit AB un segment de la droite des réels

Soit $\{(a_n, b_n)\}^\infty$ un ensemble infini d'intervalles tel que :

$$\forall p \in AB, \exists n \in \mathbb{N} / p \in (a_n, b_n)$$

Alors

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall p \in AB, \exists k \leq N : p \in (a_k, b_k)$$

Ce que Borel démontre par l'absurde. La proposition

$$"\forall N \in \mathbb{N}, \exists p \in AB / \forall k \in \mathbb{N} : p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N"$$

est fautive.

Détaillons cette démonstration telle que Borel la présente dans son écrit de 1898.

a) Démonstration de Borel des Leçons – 1898

Enoncé de départ et début de l'argumentaire de la démonstration (p.43) :

« Si l'on a sur un segment limité de droite une infinité dénombrable d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, il existe un *NOMBRE LIMITE* d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété (tout point de la droite est intérieur à au moins l'un d'eux). *Numérotons nos intervalles d'après une loi quelconque mais déterminée ; je dis qu'il existe un nombre N, tel que tout point de la droite soit à l'intérieur d'un intervalle dont le rang ne dépasse pas N.* »

Ce paragraphe présente une petite ambiguïté dont l'exégèse va nous permettre de préciser la conception de Borel.

Borel suppose $\{(a_n, b_n)\}^\infty$ est donné ce qui signifie, dans son langage, que les éléments de l'ensemble infini sont déjà numérotés par les éléments de \mathbb{N} et donc ordonnés suivant une certaine loi donnée, ou associés à un ordinal de 2^e classe. En effet, nous l'avons dit, Borel ne conçoit des ensembles infinis dénombrables réalisés que s'ils ont une loi d'ordre. Citons-le à nouveau :

« Nous dirons qu'un ensemble [infini actuel] est donné lorsque, **par un moyen quelconque, on sait déterminer tous les éléments les uns après les autres**, sans en excepter un seul et sans répéter aucun d'eux plusieurs fois (p.3) ... *Que veulent dire ces mots : Déterminer tous les éléments les uns après les autres ?* (p.3) ... *Il est aisé de se rendre compte que **c'est le fait d'avoir pu donner un indice à chacun de ces termes, de sorte que chacun d'eux corresponde à un nombre entier positif déterminé par n***. Dès lors, la conception que nous avons de l'ensemble des u_n est aussi claire que notre conception de l'ensemble des nombres entiers positifs $1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Or, ce dernier ensemble nous est très familier ; nous avons certainement le droit de le regarder comme connu. **C'est grâce à cette connaissance que les mots : l'ensemble des u_n est donné ont pour nous un sens bien précis** (p.4) »¹⁸⁷.

Autrement dit, si l'ensemble $\{(a_n, b_n)\}^\infty$ est donné, c'est qu'il est tel qu'on est capable – "du moins en théorie" – d'identifier l'intervalle (a_n, b_n) pour un n quelconque. Aussi, dès lors qu'on considère que AB est recouvert par les intervalles de $\{(a_n, b_n)\}^\infty$, on présuppose que $\{(a_n, b_n)\}^\infty$ existe. Et si on présuppose qu'il existe, c'est donc qu'il est (déjà)

¹⁸⁷ Leçons, p.3-4.

numéroté. Aussi, comment doit-on entendre l'indication : « *Numérotons nos intervalles d'après une loi quelconque mais déterminée* » ? Borel semble faire précéder l'existence de l'ensemble infini réalisé des intervalles recouvrant AB à cette « *numérotation* »... S'agit-il simplement d'une petite maladresse d'expression ou d'un raccourci, ou bien l'ensemble $\{(a_n, b_n)\}^\infty$ étant (déjà) donné (donc numéroté), Borel procède à une "re-numérotation" de ses éléments ? Précisons le sens de cette question.

Il y a deux possibilités :

soit il s'agit en effet d'une redondance maladroite, puisque dans les p.3-4 des Leçons, Borel précise qu'un ensemble dénombrable infini ne peut être considéré comme réalisé (donné) que s'il possède une loi de numérotation. Donc la précision est inutile car on ne saurait se donner un ensemble infini dénombrable réalisé sans présupposer qu'il est numéroté. Dans ce cas, le théorème de Borel a un sens "fort" : quel que soit la loi de numérotation donnant existence à l'ensemble infini dénombrable $\{(a_n, b_n)\}^\infty$ d'intervalles recouvrant un segment AB, il existe toujours un rang N donné *de cette même numérotation* dont les intervalles associés recouvrent entièrement AB.

soit il s'agit d'une re-numérotation en vue de réordonner la succession des intervalles de $\{(a_n, b_n)\}^\infty$ afin de pouvoir fixer ce rang N : quel que soit le recouvrement d'un segment par une infinité d'intervalles partiels ordonnés selon une certaine loi d'indication, on peut extraire un sous-ensemble fini d'intervalles partiels, dont la succession ne suit pas forcément la loi d'indication initiale, qui recouvre entièrement le segment AB. Dans ce cas, le théorème est à entendre au sens "faible", puisqu'il demande une manipulation supplémentaire.

Cependant, Borel précise bien : « Numérotions nos intervalles d'après une loi **quelconque** mais déterminée ». Le *quelconque* annule cette dernière alternative (renumérotation), puisque celle-ci, par définition, ne serait pas quelconque mais particulière (dans le but de pouvoir fixer ce N).

Cela est bien troublant car alors le théorème exclut le cas d'un ensemble $\{(a_n, b_n)\}^\infty$ ayant des points d'accumulation dans Υ : pouvons-nous supposer que Borel, qui n'a pas encore distingué explicitement les concepts de "dénombrable avec un type d'ordre donné" et d'"effectivement énumérable"¹⁸⁸, confonde les deux concepts ? Il nous semble que non, car le terme "quelconque" est très fort : si Borel avait écrit « Numérotions nos intervalles d'après une loi déterminée », le doute aurait été permis¹⁸⁹. Mais ce n'est pas le cas...

A priori, le théorème de Borel tel qu'il le présente en 1898 est donc à prendre au sens fort (sans renumérotation) mais restreint (pas de points d'accumulation). Cela nous fournit déjà une réponse à la question posée préalablement : si le théorème est ici à prendre au sens fort, Borel n'envisage pas le cas d'un ensemble infini dénombrable réalisé ordonné par un ordinal de 2^e classe autre que ω . Car, dans le cas contraire, il faudrait renuméroter cet ensemble¹⁹⁰.

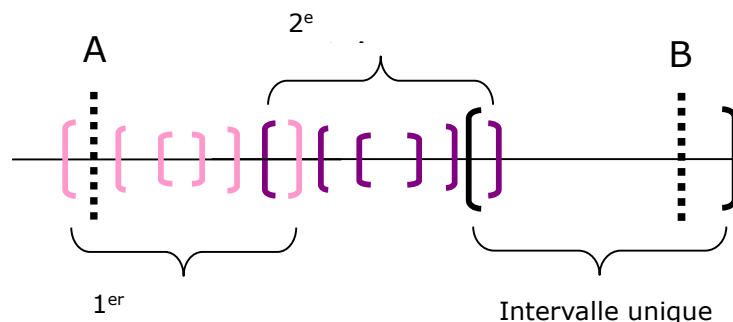
Pourquoi ? Parce que si Borel envisageait ce cas de figure, son théorème serait faux sans cette renumérotation : en effet, considérons que le segment AB est recouvert par un ensemble infini dénombrable de

¹⁸⁸ Qui ne s'applique qu'à un type d'ordre ω .

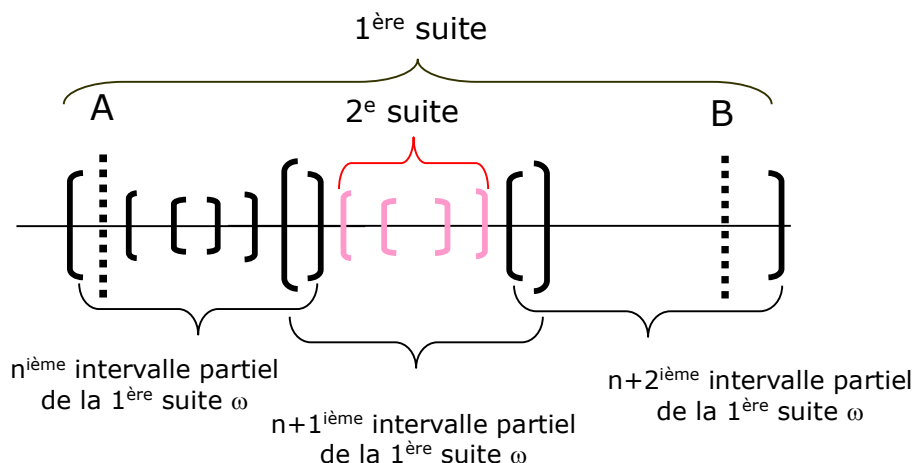
¹⁸⁹ De fait, l'énoncé non problématique aurait été : « il existe une loi de (re)numérotation de l'ensemble telle que... ».

¹⁹⁰ Cela ne contreviendrait pas au principe d'existence de l'ensemble puisque la renumérotation serait simplement une transformation d'une loi arithmétique en n en une loi en n' au moyen d'une application bijective de N sur N .

type d'ordre $2\omega+1$, par exemple celui illustré par la figure ci-dessous :



Alors, il n'existe aucun moyen de recouvrir AB par un nombre fini d'intervalles pris parmi ceux de $\{(a_n, b_n)\}^\infty$ sans re-numéroter l'ensemble par une loi modifiant son type d'ordre, de $2\omega+1$ au type 2ω (par exemple), où un nombre fini d'intervalles recouvrant entièrement AB se trouve dans le premier emboîtement ω (voir figure ci-dessous) :



En conclusion :

Si l'on interprète à la lettre la démonstration présentée dans les *Leçons*, le théorème est à prendre au sens fort (sans renumérotation) et

restreint (pas de "saut transfini") : pour tout ensemble infini dénombrable réalisé d'intervalles numérotés (indilage) recouvrant un segment AB, il existe un rang N à partir duquel AB est entièrement recouvert par les éléments de la suite dont le rang est inférieur. Et, dans ce cas, le « *numérotions nos intervalles d'après une loi quelconque mais déterminée* » de Borel serait, *in fine*, une redondance maladroite (puisque, pour être donné, cet ensemble doit être (déjà) numéroté) – ou peut-être l'expression d'un flou dans sa conception des ensembles infinis dénombrables réalisés... Pourtant, nous verrons que dans la démonstration "effective" qu'il présente dans sa thèse de 1895, Borel démontre seulement la version faible du théorème (renumérotation des intervalles) qui en même temps est plus générale (avec "sauts transfinis"). Il y a là un véritable problème. Nous en discuterons après avoir exposé sa démonstration de 1895.

Revenons à la démonstration par l'absurde de son théorème dans les *Leçons*.

« Numérotions nos intervalles d'après une loi quelconque mais déterminée ; je dis qu'il existe un nombre N, tel que tout point de la droite soit à l'intérieur d'un intervalle dont le rang ne dépasse pas N. »

Autrement dit :

a) Soit AB un segment de la droite des réels

b) Soit $\{(a_n, b_n)\}^\infty$ un ensemble infini d'intervalles tel que :

$$\forall p \in AB, \exists n \in \mathbb{N} / p \in]a_n, b_n[$$

Alors

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall p \in AB, \exists k \leq N : p \in]a_k, b_k[$$

« En effet, nier l'existence du nombre N , c'est affirmer que, quel que soit le nombre donné n , il existe sur la droite un point tel que tous les intervalles qui le renferment ont un numéro supérieur à n . »

En effet, la négation de la proposition :

$$\neg (\exists N \in \mathbb{N} / \forall p \in AB, \exists k \leq N : p \in]a_k, b_k[)$$

s'écrit plus explicitement :

$$\neg [\exists N \in \mathbb{N} , \forall p \in AB , \exists k \in \mathbb{N} : (p \in]a_k, b_k[) \wedge (k \leq N)]$$

Or, le schéma logique

$$\neg [\exists \forall \exists : A \wedge B]$$

équivalent à

$$[\forall \exists \forall : A \Rightarrow \neg B].$$

On a donc bien l'hypothèse par l'absurde :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists p \in AB / \forall k \in \mathbb{N} : p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N$$

« Il est clair d'ailleurs que, si l'on divise le segment de droite en deux segments égaux, l'un au moins de ces segments aura la même propriété ; car, si pour chacun de ces segments il existait un nombre N , soient N' et N'' ces deux nombres, il suffirait de

prendre pour N le plus grand des deux. »

a) Soit AB_1 et B_1B tels que Longueur $AB_1 =$ Longueur B_1B (¹⁹¹)

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists p \in AB_1 / \forall k \in \mathbb{N} : p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N$$

et

$$\text{Longueur}(AB_1) = \frac{1}{2} \text{Longueur}(AB)$$

« Si nous continuons à diviser le segment en deux parties égales et si nous conservons toujours le segment pour lequel il n'existe pas de nombre N (ou l'un d'eux, s'il y en a plusieurs), nous obtiendrons des segments de plus en plus petits, renfermés les uns dans les autres et ayant la propriété suivante : quelque soit le nombre n, chacun d'eux contient au moins un point qui n'est renfermé dans aucun intervalle de rang inférieur à n. »

b) Soit AB_2 et B_2B_1 les deux sous-segments de AB_1 tels que Longueur $AB_2 =$ Longueur B_2B_1 (¹⁹²)

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists p \in B_2B_1 / \forall k \in \mathbb{N} : p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N$$

et

$$\text{Longueur}(B_2B_1) = \frac{1}{4} \text{Longueur}(AB)$$

c) Et ainsi de suite : à la $q^{\text{ième}}$ subdivision de AB en parties égales, il y a toujours au moins l'un des deux sous-segments qui vérifie l'hypothèse " $\neg \exists N$ " :

¹⁹¹ Nous simplifions l'écriture en prenant AB_1 comme segment de référence.

¹⁹² Ici, nous choisissons B_2B_1 comme segment de référence. Dans la suite, le choix du sous-segment est indifférent.

$\forall N \in \mathbb{N}, \exists p \in B_q B_{q'} / \forall k \in \mathbb{N} : p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N$
 et

$$\text{Longueur}(B_q B_{q'}) = \frac{1}{2^q} \text{Longueur}(AB)$$

« Mais ces segments emboîtent les uns dans les autres et dont chacun est égale à la moitié du précédent ont un point limite α ; ce point α est par hypothèse, à l'intérieur d'un intervalle de rang déterminé k , puisque nous avons supposé dénombrable l'ensemble de nos intervalles ; les extrémités $a_k - b_k$ de cet intervalle ne coïncident d'ailleurs pas avec α (à cause du sens restreint que nous attachons à intérieur) ; donc, cet intervalle $a_k - b_k$ comprend tout entier l'un des segments qui ont pour limite α , ce qui est absurde, puisque les points de ce segment seraient ainsi tous compris à l'intérieur de cet intervalle $a_k - b_k$ dont le rang est un nombre fixe. L'existence de N est donc établie. ».

d) La suite $(B_q B_{q'})_{q \in \mathbb{N}}$ est bornée et décroissante (en terme de longueurs), donc :

$$\exists \alpha \in Y \text{ tel que } \lim_{q \rightarrow \infty} (B_q B_{q'}) = \alpha$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } \alpha \in (a_n, b_n) \text{ alors } \alpha \in]a_n, b_n[$$

En effet, puisque $\forall q, \alpha \in B_q B_{q'}$ et que tous les points de AB étant intérieurs à $\{(a_n, b_n)\}^\infty$, cela est *a fortiori* vrai pour tous les points de $B_q B_{q'}$.

Comme :

- 1) les intervalles (a_n, b_n) sont donnés et fixés au départ,
- 2) α ne peut être que strictement intérieur à un intervalle (a_n, b_n) ,

3) α est le point limite de l'empoûtement $B_q B_{q'}$, i.e : $\forall \varepsilon \in \Upsilon \exists q_0$ (et q'_0) / $\forall q > q_0 [B_q B_{q'}] < \varepsilon$.

Alors, on peut toujours trouver un q assez grand de sorte que :

$$B_q B_{q'} \subset]a_k, b_k[$$

On en arrive ainsi à la conclusion que

$$\exists q \in \mathbb{N} / \forall N \in \mathbb{N}, \exists p \in B_q B_{q'} / \forall k \in \mathbb{N} : p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N$$

et

$$\forall p \in B_q B_{q'} : p \in]a_k, b_k[$$

Ce qui implique :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists p \in AB / \forall k \in \mathbb{N} : p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N$$

et

$$\exists N / p \in]a_N, b_N[$$

Autrement dit :

$$(\forall N \in \mathbb{N} / p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N) \wedge (\exists N / p \in]a_N, b_N[)$$

On a donc une contradiction. CQFD

L'hypothèse $\neg [\exists \forall \exists : A \wedge B]$ est fausse.

Donc sa négation logique $\neg \neg [\exists \forall \exists : A \wedge B]$ est vraie.

Soit :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in AB / \exists k \in \mathbb{N} : p \in]a_k, b_k[\text{ et } k \leq N$$

Le théorème est démontré :

e) Soit AB un segment de la droite des réels
f) Soit $\{(a_n, b_n)\}^\infty$ un ensemble infini d'intervalles indexés (suite) sans saut transfini (points d'accumulation) tel que :

$$\forall p \in AB, \exists n \in \mathbb{N} / p \in]a_n, b_n[$$

Alors

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall p \in AB, \exists k \leq N : p \in]a_k, b_k[$$

Bref, pour tout recouvrement d'un segment de droite AB par une suite infinie dénombrable réalisée d'intervalles, il existe un rang N donné de cette suite tel que AB est recouvert par les intervalles de rang inférieur à N... à condition que la suite ne possède aucun saut transfini c'est-à-dire aucun point d'accumulation de sous-parties (infinies) de la suite, ce qui, dans une suite infinie réalisée est le cas le plus général.

En effet, en termes formels, la présence d'un point d'accumulation se répercute dans la démonstration.

La proposition

$$\exists \alpha \in Y / \lim_{q \rightarrow \infty} (B_q B_q) = \alpha$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } \alpha \in (a_n, b_n) \text{ alors } \alpha \in]a_n, b_n[$$

est fautive si α se trouve non pas à l'intérieur d'un intervalle (a_n, b_n) mais à l'intérieur d'un intervalle $(a_{\omega+n}, b_{\omega+n})$, c'est-à-dire un intervalle quelconque contraint néanmoins par la condition suivante : son rang est postérieur à une infinité dénombrable de rangs...

Et donc, tel qu'il est présenté en 1898, le théorème a un caractère "fort" (pas de renumérotation) mais une sphère d'application "faible" (recouvrement infini sans points d'accumulations – type d'ordre limité à ω)... Or, nous le verrons, Borel avait envisagé le cas de figure avec points d'accumulation dans la démonstration du théorème dans sa thèse de 1895, à laquelle il renvoie en note (à la p.43 des Leçons).

Aussi, nous pouvons rétablir facilement ce cas de figure moyennant d'infimes modifications dans l'énoncé et dans la démonstration de 1898. Mais nous modifions ainsi le caractère "fort-faible" – "restreint – général" du théorème, donc sa portée. Par exemple :

b) **Enoncé complété**

Si l'on a sur un segment limité de droite une infinité dénombrable d'intervalles partiels tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, il existe un *NOMBRE LIMITE* d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété (tout point de la droite est intérieur à au moins l'un d'eux). **Renomérotons nos intervalles d'après une loi déterminée** ; je dis qu'il existe un nombre N , tel que tout point de la droite soit à l'intérieur d'un intervalle dont le rang ne dépasse pas N .

c) Soit AB un segment de la droite des réels

d) Soit $\{(a_w, b_w)\}^\infty$ (¹⁹³) un ensemble infini dénombrable d'intervalles de type d'ordre quelconque donné tel que :

¹⁹³ Nous utilisons l'indigage "w" afin de signaler que cet indice appartient non pas à l'ensemble N , mais à un ensemble de type d'ordre de 2^e classe quelconque donné. Ainsi, suivant le type d'ordre donné de l'ensemble $\{(a_w, b_w)\}^\infty$ nous pouvons avoir des intervalles indicés par " $\omega+n$ ", " ω^0+n "... tout indice de type " $\omega^{f(\omega)+p+n}$ ", où f est une expression utilisant le symbole ω , les nombres entiers, la

$$\forall p \in AB, \exists w / p \in]a_w, b_w[$$

Alors

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ et } \exists \{(a_k, b_k)\}^N \subset \{(a_w, b_w)\}^\infty / \forall p \in AB, \exists k \leq N : p \in]a_k, b_k[$$

Ce qui revient à dire qu'on peut extraire de $\{(a_w, b_w)\}^\infty$ un sous-ensemble fini $\{(a_k, b_k)\}^N$ dont on a ré-indiqué les termes par des entiers, tel que tout point de AB est inclus (strictement) dans l'un des intervalles de cet ensemble fini.

Remarquons que cette opération met en jeu implicitement une fonction de choix s'exerçant un nombre fini de fois sur un ensemble infini dénombrable ordonné donc donné (au sens de Borel). Mais contrairement à ce que Borel lui-même reprochera à Zermelo au cours des discussions autour de la première version du théorème du bon ordre (1904), cette fonction n'est pas problématique (ni d'un point de vue constructif, ni du point de vue descriptif de la démonstration du théorème de Borel de 1898).

Hypothèse par l'absurde :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \{(a_k, b_k)\}^N \subset \{(a_w, b_w)\}^\infty, \exists p \in AB / \forall k \in \mathbb{N} : p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N$$

Démonstration

g) Soit AB_1 et B_1B tels que Longueur $AB_1 =$ Longueur B_1B

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \{(a_k, b_k)\}^N \subset \{(a_w, b_w)\}^\infty, \exists p \in AB_1 / \forall k \in \mathbb{N} : p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N$$

et

multiplication et la mise en puissance, p et n sont des entiers.

$$\text{Longueur}(AB_1) = \frac{1}{2} \text{Longueur}(AB)$$

Itération :

h) Soit AB_2 et B_2B_1 les deux sous-segments de AB_1 tels que $\text{Longueur}(AB_2) = \text{Longueur}(B_2B_1)$

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \{(a_k, b_k)\}^N \subset \{(a_w, b_w)\}^\infty, \exists p \in B_2B_1 / \forall k \in \mathbb{N} : p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N$$

et

$$\text{Longueur}(B_2B_1) = \frac{1}{4} \text{Longueur}(AB)$$

i) Et ainsi de suite : à la $q^{\text{ième}}$ subdivision de AB en parties égales, il y a toujours au moins l'un des deux sous-segments qui vérifie l'hypothèse " $\neg \exists N$ " :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \{(a_k, b_k)\}^N \subset \{(a_w, b_w)\}^\infty, \exists p \in B_q B_{q'} / \forall k \in \mathbb{N} : p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N$$

et

$$\text{Longueur}(B_q B_{q'}) = \frac{1}{2^q} \text{Longueur}(AB)$$

Or :

j) La suite $(B_q B_{q'})_{q \in \mathbb{N}}$ est bornée et décroissante (en terme de longueurs), donc :

$$\exists \alpha \in \Upsilon \text{ tel que } \lim_{q \rightarrow \infty} (B_q B_{q'}) = \alpha$$

et

$$\forall w \in \mathbb{N}, \text{ si } \alpha \in (a_w, b_w) \text{ alors } \alpha \in]a_w, b_w[$$

En effet, puisque $\forall q, \alpha \in B_q B_{q'}$ et que tous les points de AB sont intérieurs à $\{(a_w, b_w)\}^\infty$, cela est *a fortiori* vrai pour tous les points de

$B_q B_{q'}$.

Comme :

- 1) les intervalles (a_w, b_w) sont donnés et fixés au départ,
- 2) α ne peut être que strictement intérieur à un intervalle (a_w, b_w) ,
- 3) α est le point limite de l'empoîtement $B_q B_{q'}$, i.e : $\forall \varepsilon \in \Upsilon \exists q_0$ (et q'_0) / $\forall q > q_0 : [B_q B_{q'}] < \varepsilon$.

Donc, on peut toujours trouver un q assez grand de sorte que :

$$B_q B_{q'} \subset]a_w, b_w[$$

On peut ré-indicer $]a_w, b_w[$ par $]a_k, b_k[$ avec $k \leq N$

On en arrive ainsi à la conclusion que

$$\exists q \in \mathbb{N} / \forall N \in \mathbb{N}, \exists p \in B_q B_{q'} / \forall k \in \mathbb{N} : p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N$$

et

$$\forall p \in B_q B_{q'} : p \in]a_k, b_k[$$

Ce qui implique :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \{(a_k, b_k)\}^N \subset \{(a_w, b_w)\}^\infty, \exists p \in AB / \forall k \in \mathbb{N} : p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N$$

et

$$\exists N / p \in]a_N, b_N[$$

Autrement dit :

$$(\forall N \in \mathbb{N}, \forall \{(a_k, b_k)\}^N \subset \{(a_w, b_w)\}^\infty : p \in]a_k, b_k[\Rightarrow k > N) \wedge (\exists N / p \in]a_N, b_N[)$$

On a donc une contradiction. CQFD

Le théorème est démontré :

k) Soit AB un segment de la droite des réels

l) Soit $\{(a_w, b_w)\}^\infty$ un ensemble infini d'intervalles indexés tel que :

$$\forall p \in AB, \exists w / p \in]a_w, b_w[$$

Alors

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ et } \exists \{(a_k, b_k)\}^N \subset \{(a_w, b_w)\}^\infty / \forall p \in AB, \exists k \leq N : p \in]a_k, b_k[$$

Nous voyons que la démonstration de 1898 du théorème de Borel peut être très facilement transformée afin d'inclure les sauts transfinis, au point que l'oubli de Borel du cas de figure "à sauts transfinis" (et la phrase malheureuse : « *Numérotons nos intervalles d'après une loi quelconque mais déterminée* ») peut être mis sur le compte non pas vraiment d'un oubli mais d'un traitement très général (survol) de la démonstration étant donné que (p.43, note 1) :

"On trouvera dans ma Thèse une autre démonstration de ce théorème, démonstration qui donne un moyen au moins théorique de déterminer effectivement les intervalles en nombre limité dont il est question."

Autrement dit, la démonstration de 1898 est simplement un schéma-résumé plus ou moins rapidement écrit d'un résultat robuste obtenu dans les règles de l'art quelques années auparavant¹⁹⁴. On peut donc considérer que le théorème de Borel est totalement validé par la démonstration de

¹⁹⁴ Il est intéressant de constater que Fréchet, dans son article "*Le théorème de Borel dans la théorie des ensembles abstraits*", Bulletin de la S.M.F., tome 45 (1917), p.1-8, procède à une démonstration calquée de celle de Borel 1898 (mais un peu plus générale) où il ignore également le cas des sauts transfinis.

1898, soit que l'on se place d'un point de vue abstrait et descriptif (moyennant la minime modification indiquée), soit que l'on s'inscrit dans une démarche constructiviste en prenant acte que Borel a effectivement démontré son théorème en 1895... Voyons donc ce qu'il en est.

2°- Théorème fondamental : démonstration de la thèse de 1895

"On trouvera dans ma Thèse une autre démonstration de ce théorème, démonstration qui donne un moyen au moins théorique de déterminer effectivement les intervalles en nombre limité dont il est question." (Leçons, p.43, note 1)

A nos yeux modernes (post-Hilbert-Gödel-Church-Turing), cette note laisse espérer que, outre le comblement de la lacune des sauts transfinis, Borel nous renvoie vers une démonstration se passant du schéma de démonstration par l'absurde " $\neg\neg A \rightarrow A$ " dans un raisonnement contenant des inférences sur le transfini non dénombrable. Car aujourd'hui Borel est connu pour sa critique de l'utilisation de TND (fort et faible) dans ce type de raisonnement - notamment au sujet du théorème du bon ordre de Zermelo (1904). Aussi, comme Borel donne une existence robuste aux ensembles infinis dénombrables réalisés ordonnés, l'on espère que, s'il utilise le TNDf, il ne le fait que sur l'infini dénombrable... Nous verrons qu'il n'en est rien : Borel applique le TNDf à un raisonnement incluant le concept de classe de "tous les ordinaux transfinis de 2^e classe" considérée comme réalisée. Cependant, à la décharge de Borel, disons que notre attente est anachronique : le Borel de 1898 n'est pas celui de 1904 ou 1905... Et l'étude de sa démonstration de 1895 nous le prouvera : aux yeux de Borel, l'utilisation du TNDf ne compromet pas l'effectivité de sa

démonstration : le TNDf appliqué au transfini n'est pas, à l'époque, l'ennemi de l'effectif. Mais alors, qu'est-ce que l'effectivité selon Borel ?

Pour répondre, il faut se pencher sur sa thèse puisque sa démonstration de 1895 est qualifiée par lui d'effective : nous disposerons de deux démonstrations du théorème fondamental réputées l'une non effective (1898), l'autre effective (1895) : nous pourrions donc caractériser ce que la notion signifie pour Borel (en 1898).

a) Exposé de la démonstration

Dans les *Leçons*, Borel renvoie donc à sa démonstration effective de 1895 du théorème fondamental. Cette démonstration se trouve en Note dans la thèse¹⁹⁵ (p.50-55). Il énonce :

*« Si l'on a sur une droite une infinité d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, **on peut déterminer effectivement** un NOMBRE LIMITE d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété (tout point de la droite est intérieur à au moins l'un d'eux). »*⁽¹⁹⁶⁾.

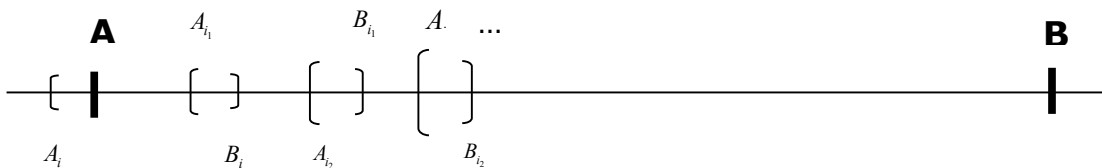
Suivons pas à pas cette démonstration "effective"... qui nous réserve bien des surprises.

« Partons d'une extrémité A de la droite, soit $A_i B_i$ un des

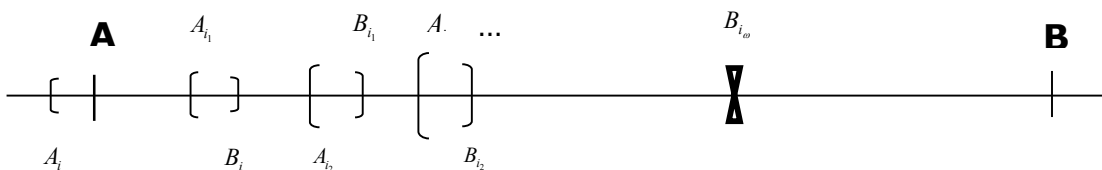
¹⁹⁵ Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, in *Annales scientifiques de l'E.N.S.*, 3^e série, tome 12 (1895), p.9-55.

¹⁹⁶ Ibidem, p.51. Dans l'énoncé des *Leçons* (p.43), Borel remplace "on peut déterminer effectivement" par "il existe", donnant au théorème une formulation plus abstraite.

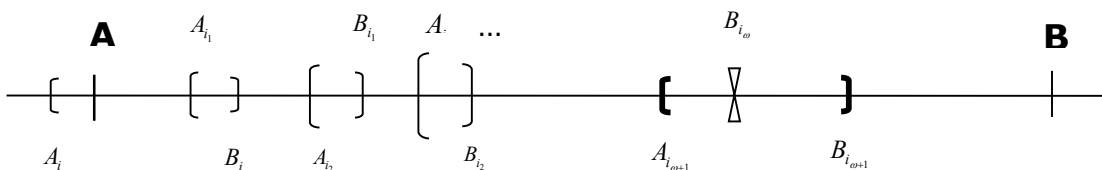
intervalles qui comprennent le point A ; soit de même $A_{i_1} B_{i_1}$ un des intervalles qui comprennent le point B_i , $A_{i_2} B_{i_2}$ un des intervalles qui comprennent le point B_{i_1} , etc. Nous supposons, bien entendu, que A désigne toujours l'extrémité gauche des intervalles, B l'extrémité droite [...] ».



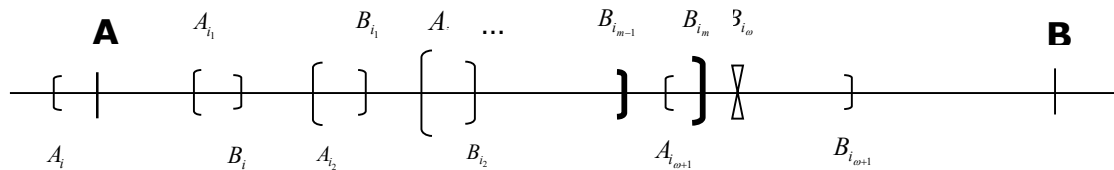
« Les points $B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \dots$, s'ils n'atteignent pas l'extrémité B de la droite, ont une limite B_{i_ω} [...] ».



« et ce point est compris dans un intervalle $A_{i_{\omega+1}} B_{i_{\omega+1}}$ [...] ».



« tel que $A_{i_{\omega+1}}$ tombe, par exemple, entre $B_{i_{m-1}}$ et B_{i_m} [...] ».



« [...] nous pourrons alors ne pas tenir compte des intervalles $A_{i_{m+k}}, B_{i_{m+k}}$, et nous aurons tout de même une suite ininterrompue d'intervalles sur la droite [...] »

Arrêtons nous pour formaliser ce qui précède – en remarquant qu'ici, Borel procède à une renumérotation de ses intervalles donnés afin de contourner l'obstacle des sauts transfinis, ce qui, d'emblée, situe cette démonstration dans le cas le plus général.

Donnés de départ

- Soit AB un segment de la droite des réels
- Soit $\{(A_n, B_n)\}^\infty$ une infinité d'intervalles ⁽¹⁹⁷⁾ partiels telle que :

$$\forall p \in AB, \exists n : p \in]A_n B_n[$$

Démonstration

Comme tous les points du segment AB (extrémités incluses) sont recouverts par un des éléments de $\{(A_n, B_n)\}^\infty$, on peut choisir un intervalle $A_i B_i$ (qu'on indice par i_0)¹⁹⁸ qui contient A :

¹⁹⁷ La notation n'est pas la même que celle de 1898.

¹⁹⁸ Borel ne le fait pas, mais cela simplifie notre écriture.

$$\exists i_0 \in \mathbb{N} / A \in]A_{i_0} B_{i_0} [$$

Comme le point B_{i_0} appartient à AB , on peut choisir un intervalle $A_{i_1} B_{i_1}$ qui contient B_{i_0} :

$$\exists i_1 \in \mathbb{N} / B_{i_0} \in]A_{i_1} B_{i_1} [$$

Comme B_{i_1} appartient à AB , on peut choisir un intervalle $A_{i_2} B_{i_2}$ qui contient B_{i_1} :

$$\exists i_2 \in \mathbb{N} / B_{i_1} \in]A_{i_2} B_{i_2} [$$

Et ainsi de suite...

En résumé : on peut choisir des intervalles particuliers de l'ensemble $\{(A_n, B_n)\}^\infty$, qu'on (re)numérote avec un certain indigage, de la manière suivante :

$$\exists i_0 \in \mathbb{N} / A \in]A_{i_0} B_{i_0} [$$

$$\exists i_1 \in \mathbb{N} / B_{i_0} \in]A_{i_1} B_{i_1} [$$

$$\exists i_2 \in \mathbb{N} / B_{i_1} \in]A_{i_2} B_{i_2} [$$

...

$$\exists i_n \in \mathbb{N} / B_{i_{n-1}} \in]A_{i_n} B_{i_n} [$$

Comme chaque intervalle $A_{i_p} B_{i_p}$ (selon cette nouvelle numérotation) enferme strictement le point-extémité $B_{i_{p-1}}$ de l'intervalle précédent, la suite des points $B_{i_0}, B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \dots$ est strictement croissante. D'où l'alternative :

1^{er} cas : $\exists N \in \mathbb{N} / B_{i_N} > B$, auquel cas cela signifie que la suite $(]A_{i_n} B_{i_n} [)_{0 \leq n \leq N}$ recouvre entièrement le segment AB . Le théorème est démontré.

2^e cas : la suite des points $B_{i_0}, B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \dots$ converge vers un point limite strictement intérieur à AB, qu'on note B_{i_ω} . L'utilisation de l'ordinal ω dans l'indice indique que ce point est la limite de convergence de la suite. Il est surtout là pour marquer que la procédure de renumérotation de certains intervalles de $\{(A_n, B_n)\}^\infty$, si cette procédure est effective - c'est-à-dire menée de proche en proche depuis le premier intervalle choisi $A_{i_0} B_{i_0}$ - ne pourrait atteindre le point B_{i_ω} qu'après un nombre infini dénombrable de pas. Mais, bien sûr, cela ne signifie pas que Borel envisage ici une procédure effective infinie¹⁹⁹. En effet la démonstration qu'une suite $B_{i_0}, B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \dots$ converge vers un point limite intérieur à AB (et l'identification de ce point par un passage à la limite) se fait de la manière la plus classique et usuelle à l'époque - et donc effective aux yeux des constructivistes. Ce passage à la limite permet d'"enclencher" sur le pas suivant de la procédure décrite par Borel. Aussi, la notation i_ω est, à ce stade, une convention d'écriture qui, si elle signale la présence d'un point de convergence/accumulation de la suite, n'agit pas algébriquement dans le contenu de sa démonstration (pour le moment), laquelle demeure donc effective au sens classique²⁰⁰.

Ainsi, si la suite $B_{i_0}, B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \dots$ converge vers le point limite B_{i_ω} strictement intérieur à AB, ce point est nécessairement intérieur à au moins un intervalle $[A_n B_n]$ de l'ensemble $\{(A_n, B_n)\}^\infty$.

Aussi, on peut écrire :

$$\exists m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / B_{i_\omega} \in]A_n B_n[\text{ et } A_n \in]B_{i_{m-1}} B_{i_m}[$$

¹⁹⁹ Mais il le fera plus loin (nous verrons).

²⁰⁰ Si l'on admet, bien entendu, l'existence d'ensembles infinis dénombrables réalisés.

Cela revient en fait à faire un choix simultané et judicieux, d'une part, d'un intervalle $]A_n B_n[$ de $\{(A_n, B_n)\}^\infty$ entourant le point limite B_{i_ω} et, d'autre part, de deux éléments consécutifs de la suite (B_{i_p}) précédemment déterminée dont l'intervalle $]B_{i_{m-1}} B_{i_m}[$ entoure le point A_n , ce qui est possible puisque A_n se trouve par définition avant B_{i_ω} . A partir de là on dispose d'un "raccordement" qui permet à la suite qu'on est en train de construire de "sauter" l'obstacle du point limite.

Pour garder la cohérence des notations, on a le droit de renuméroter $[A_n B_n]$ avec l'indice $i_{\omega+1}$: l'intervalle $[A_n B_n]$ s'appelle désormais $[A_{i_{\omega+1}} B_{i_{\omega+1}}]$. Ici encore, l'utilisation des ω n'est qu'une convention d'écriture qui signale que $[A_{i_{\omega+1}} B_{i_{\omega+1}}]$ est l'intervalle de raccordement.

En effet, le point B_n , nouvellement nommé $B_{i_{\omega+1}}$, se situe par définition "après" B_{i_ω} , aussi nous avons construit la suite ⁽²⁰¹⁾ :

$$B_{i_0}, B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \dots, B_{i_m}, B_{i_{\omega+1}}$$

Bref, la procédure de Borel revient à : 1) repérer s'il y a un point d'accumulation de la suite en construction (B_i) ; 2) le "reboucher" par inclusion dans un intervalle de raccordement ; 3) poursuivre la construction pas à pas.

Revenons maintenant au texte de Borel :

« Nous continuerons de même, en passant à la limite lorsque cela sera nécessaire et montrant alors qu'on peut conserver seulement un nombre fini des intervalles considérés [...] ».

²⁰¹ L'indice i_ω est purement conventionnel : il note en réalité le point de rang $m+1$ de la suite.

De fait, on peut prendre l'intervalle $[A_{i_{\omega+1}} B_{i_{\omega+1}}]$ comme nouveau point de départ pour poursuivre la construction, lui faisant jouer le même rôle que l'intervalle $[A_{i_0} B_{i_0}]$ au début de la construction (B_{i_0} jouant lui le même rôle que A). Et on réitère les pas précédents : on poursuit la construction de la suite $B_{i_0}, B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \dots, B_{i_m}, B_{i_{\omega+1}}$ en lui ajoutant les termes "réguliers" (définis par une loi d'indiciage) $B_{i_{\omega+2}}, B_{i_{\omega+3}}, \dots$ de la même manière qu'on a fait pour les termes B_{i_1}, B_{i_2}, \dots .

D'ou l'alternative :

1^{er} cas : $\exists N \in \mathbb{N} / B_{i_N} > B$, auquel cas cela signifie que la suite $(]A_{i_n} B_{i_n}[)_{0 \leq n \leq N}$ recouvre entièrement le segment AB. Le théorème est démontré.

2^e cas : la suite des points $B_{i_0}, B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \dots, B_{i_m}, B_{i_{\omega+1}}, B_{i_{\omega+2}}, B_{i_{\omega+3}}, \dots$ converge vers un point limite strictement intérieur à AB, qu'on note $B_{i_{2\omega}}$. On refait alors la manipulation précédente pour "sauter" l'obstacle...

In fine, on se retrouve avec une suite de points B de type ⁽²⁰²⁾ :

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_m}, B_{i_\omega}, B_{i_{\omega+1}}, \dots, B_{i_{\omega+p}}, B_{i_{2\omega}}, B_{i_{2\omega+1}}, \dots, B_{i_{2\omega+q}}, B_{i_{3\omega}}, \dots, B_{i_{3\omega+r}},$$

où il n'y a pas de saut transfini (malgré la notation utilisée) et dont les indices $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ sont une convention pour signaler les lieux de raccordement "rebouchant" un point d'accumulation. Ainsi :

²⁰² Borel, dans sa notation, modifie légèrement l'indiciage par rapport à ce qui précède : l'extrémité droite de l'intervalle de raccordement n'est plus notée $B_{i_{\omega+1}}$ mais B_{i_ω} . Nous verrons ci-dessous que cette modification est essentielle.

$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_m}$ contient m éléments
 $B_{i_{\omega}}, B_{i_{\omega+1}}, \dots, B_{i_{\omega+p}}$ contient p éléments

 $B_{i_{2\omega}}, B_{i_{2\omega+1}}, \dots, B_{i_{2\omega+q}}$ contient q éléments
 $B_{i_{3\omega}}, \dots, B_{i_{3\omega+r}}$ contient r éléments
etc.

Ainsi, par exemple, le point $B_{i_{3\omega+1}}$ est le terme de rang $(m + p + q + 2)$ de la suite (B_i) .

Donc la suite

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_m}, B_{i_{\omega}}, B_{i_{\omega+1}}, \dots, B_{i_{\omega+p}}, B_{i_{2\omega}}, B_{i_{2\omega+1}}, \dots, B_{i_{2\omega+q}}, B_{i_{3\omega}}, \dots, B_{i_{3\omega+r}}$$

ne contient que $(m + p + q + r)$ éléments.

Venons-en à la fin de la démonstration de Borel

« Je dis que nous atteindrons nécessairement l'extrémité B de la droite car, si on ne l'atteignait pas, on définirait une série d'intervalles ayant pour extrémités

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_{\omega}}, \dots, B_{i_{2\omega}}, \dots, B_{i_{\omega^2}}, \dots, B_{i_{\omega^{\omega}}, \dots}$$

les indices étant tous les nombres de la seconde classe de nombres (définis par Cantor). Mais ces indices sont aussi dans un certain ordre, les nombres naturels, en tout ou en partie. C'est là une contradiction puisque la seconde classe de nombres

constitue un ensemble de seconde puissance. » (203)

Cette partie de la démonstration est à analyser avec précision car ici Borel semble faire appel aux concepts de Cantor et non pas seulement aux "noms" de ces concepts (conventions).

Comme nous le signalions, Borel a modifié son écriture des indices entre la partie du texte où il indique comment construire l'indigage et la partie où il énonce son hypothèse par l'absurde.

Il écrit d'abord :

« Les points $B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \dots$, s'ils n'atteignent pas l'extrémité B de la droite, ont une limite B_{i_ω} et ce point est compris dans un intervalle $A_{i_{\omega+1}} B_{i_{\omega+1}}$ tel que $A_{i_{\omega+1}}$ tombe, par exemple, entre $B_{i_{m-1}}$ et B_{i_m} ; nous pourrions alors ne pas tenir compte des intervalles $A_{i_{m+k}} B_{i_{m+k}}$, et nous aurons tout de même une suite ininterrompue d'intervalles sur la droite [...] »

Si nous nous en tenons là, sa suite s'écrit :

$$B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_{\omega+1}}, \dots, B_{i_{2\omega+1}}, \dots, B_{i_{\omega^2+1}}, \dots, B_{i_{\omega^{\omega+1}}}, \dots,$$

Mais il enchaîne :

« Je dis que nous atteindrons nécessairement l'extrémité B de la

²⁰³ Leçons, p.51-52

droite car, si on ne l'atteignait pas, on définirait une série d'intervalles ayant pour extrémités

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_\omega}, \dots, B_{i_{2\omega}}, \dots, B_{i_{\omega^2}}, \dots, B_{i_{\omega^\omega}}, \dots,$$

les indices étant tous les nombres de la seconde classe de nombres (définis par Cantor). »

Donc les indices de type $i_{\omega+1}$; i_{ω^2+1} ; $i_{\omega^\omega+1}$... sont devenus i_ω ; i_{ω^2} ; i_{ω^ω} ... Pourquoi cette modification ? C'est une précaution d'écriture car, bien qu'ici ces indices soient des conventions, Borel s'en servira dans un raisonnement faisant appel aux concepts qu'ils véhiculent, et nécessitant cette modification.

Pour le comprendre, formalisons la fin de sa démonstration (avec l'indiçage qu'il a adopté) :

- Notons ω_n le $n^{\text{ième}}$ ordinal transfini de 2^e classe utilisé comme convention pour signaler la présence d'un point d'accumulation des termes précédemment construits de la suite (B_i) et servant d'indice à l'intervalle de raccordement subséquent construit autour de ce point²⁰⁴.

Voici le raisonnement de Borel :

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, B_{i_{\omega_n}} < B$

Alors la convention ω_n épuise toute la notation possible en nombres transfinis de 2^e classe.

Or, la suite (B_i) est, au plus, de cardinal \aleph_0 car, comme on la vu, malgré la notation, on ne sort jamais du domaine de \mathbb{N} .

²⁰⁴ ω_n peut prendre donc les "valeurs" (notations) : $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots, \omega^2, 2\omega^2, 3\omega^2, \dots, \omega^3, 2\omega^3, \dots, \dots, \omega^\omega, 2\omega^\omega, \dots, \omega^{2^\omega}, \text{ etc.}$

Donc, tous les ordinaux de 2^e classe peuvent être nommés par \aleph_0 conventions.

Ce qui signifie que l'ensemble des ordinaux de 2^e classe est "réductible à" (ou projetable dans) un ensemble de première puissance (\aleph_0).

C'est une contradiction car il est de seconde puissance (\aleph_1)²⁰⁵.

Donc on atteint B en un nombre fini de pas.

CQFD

Cette démonstration "effective" du théorème par Borel est bien étonnante, ce pour plusieurs raisons, dont les plus évidentes sont :

1) Elle repose sur un raisonnement par l'absurde sur des objets transfinis.

2) Ces objets sont, d'une part, un ensemble non dénombrable considéré comme réalisé (la classe de tous les ordinaux de 2^e classe), d'autre part, des "méta-objets" transfinis : des procédures effectives à nombre infini dénombrable réalisé d'itérations.

Détaillons cela.

b) Trois problèmes

Il y a non pas un mais trois points (entremêlés) qui nous semblent problématiques : la question d'une procédure effective itérée un nombre transfini de fois ; l'utilisation du TNDf (raisonnement par l'absurde) ; la validité logique de la conclusion de la démonstration.

Premier point : la question d'une procédure effective itérée un

²⁰⁵ Résultat obtenu par diagonalisation et en adoptant le point de vue cantorien ("E ne peut être dénombré" → "E est un ensemble non dénombrable réalisé").

nombre transfini de fois.

La présence d'un certain type d'inférence transfinie dans une démonstration mathématique n'est pas, à l'époque de Borel, une nouveauté ni nécessairement un point litigieux, même pour les constructivistes de type kroneckeriens. En effet, depuis peut-être Leibniz et Newton – surtout depuis Cauchy puis Dedekind –, le concept de point limite d'une suite réalise implicitement une inférence transfinie surtout si le point limite n'appartient pas à la suite (même si l'on pourrait aussi envisager la limite non pas comme une opération mais comme une convention, nous en reparlerons). L'usage a consacré ce type d'inférence dans les démonstrations, inférence qui est donc, à la fin du XIXe siècle, généralement admise. En revanche, la présence d'une telle inférence transfinie sous la forme d'une itération infinie réalisée d'une procédure effective est plus inhabituelle à nos yeux²⁰⁶. Cela mérite donc qu'on s'y attarde.

Borel construit pas à pas la suite (B_j) à partir du point A puis raisonne "transfiniment" sur cette procédure de construction :

*« si on ne l'atteignait pas [le point B], **on définirait** une série d'intervalles ayant pour extrémités*

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_\omega}, \dots, B_{i_{2\omega}}, \dots, B_{i_{\omega^2}}, \dots, B_{i_{\omega^\omega}}, \dots,$$

les indices étant tous les nombres de la seconde classe de nombres (définis par Cantor). »

Autrement dit : Si $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite régulière démarrant avec

²⁰⁶ L'idée d'itération infinie (d'une procédure effective ou d'une machine de Turing) est hors du champ de l'effectivité hilbertienne et post-hilbertienne.

l'intervalle de raccordement $B_{i-1}B_i$, qu'on a construit en entourant le point d'accumulation $B_{i_{\omega_n}}$, converge vers le point d'accumulation $B_{i_{\omega_{n+1}}}$ (207) tel que $B_{i_{\omega_{n+1}}} < B$, alors etc. Bref, on raisonne sur l'idée d'une construction effective non seulement indéfiniment "itérée" au sens potentiel, mais qui s'arrêterait et afficherait un résultat après une infinité de pas réalisés²⁰⁸... En termes d'effectivité (au sens classique), cela n'a aucun sens.

Cette démonstration est donc basée sur un raisonnement transfini portant sur une construction "effective" transfinie réalisée des éléments de la suite (B_i) . Ce raisonnement dépasse en effet le mode "infini potentiel" puisque le cœur de la démonstration repose sur le concept de *construction réalisée* de la suite infinie (B_i) : « *les indices étant tous les nombres de la seconde classe de nombres (définis par Cantor).* » Si Turing avait utilisé ce type de raisonnement, le problème de l'arrêt aurait disparu car il aurait pu dire que sa machine universelle s'arrête lorsqu'elle a réalisé ω opérations²⁰⁹... Bref, en 1895-1898, Borel a une conception de l'effectivité très large : pour lui, la sphère de l'effectif semble s'étendre jusque dans l'infini réalisé – non seulement en termes de "matériau" sur lequel s'exerce la procédure effective (les « éléments » dont parle Kronecker dans sa définition de l'effectivité), mais aussi en termes d'itérations de la procédure (dont le schéma est, lui, fini).

Deuxième point problématique : le raisonnement par l'absurde.

Lors de notre analyse de la démonstration de 1898, nous disions que

²⁰⁷ Attention : l'indice ω_{n+1} signale le point de raccordement qui suit le point de raccordement ω_n .

²⁰⁸ Dans la partie II, nous nommerons ce cas de figure : effectivité virtuelle transfinie, que nous caractériserons.

²⁰⁹ De fait, il n'y aurait pas eu de machine de Turing car cette machine est justement pensée comme ancrée dans le monde physique du "augmentable autant qu'on veut" (infini potentiel) et non du "réalisé dans un infini" (nous excluons la possibilité physique d'un hypercalcul).

le terme "effectif" pouvait faire allusion à une démonstration qui ne contiendrait pas de raisonnement par l'absurde dans la sphère du transfini. Or, dans sa démonstration "effective" de 1895, Borel utilise également le TNDf transfini : « *si on ne l'atteignait pas... [...] C'est là une contradiction puisque...* ». Le TNDf sur le transfini dénombrable – qui plus est : appliqué à un raisonnement faisant intervenir l'itération infinie réalisée de la procédure effective – ne semble pas donc exclu de l'effectivité selon Borel (entre 1895 et 1898).

Troisième point problématique : Borel a-t-il vraiment démontré (par l'absurde) que B est nécessairement atteint par une suite finie – même en considérant comme non problématiques les deux points précédents ?

Cette question est d'ordre mathématique et non épistémologique. Cependant, au cours de l'analyse de la démonstration de 1895, il nous est apparu que Borel avait peut-être commis une erreur de raisonnement. Nous l'exposons ici, sachant qu'elle nous permettra également d'approfondir la connaissance de la notion d'effectivité chez Borel.

3°- Borel a-t-il démontré constructivement son théorème ?

a) Le choix d'indilage

Admettons donc que les deux points précédents ne soient pas problématiques : on a le droit d'appliquer le TNDf sur des objets transfinis et on a le droit de concevoir une itération infinie dénombrable réalisée d'une procédure effective. En utilisant la notation de Cantor des ordinaux

de 2^e classe comme convention pour signaler la présence de raccordements autour des points d'accumulation de la suite, Borel établit une correspondance entre les nombres entiers et les ordinaux transfinis : il "injecte" certains de ces ordinaux (en indice) dans une suite infinie potentielle classique. Puis, passant au mode réalisé, il affirme que tous les ordinaux sont épuisés par cette suite.

Pour bien comprendre ce choix particulier d'indigage et son rôle essentiel dans la démonstration, commençons par donner un contre-exemple : une loi d'indigage des mêmes intervalles, mais qui ne permet pas de conclure comme Borel.

Prenons une suite infinie réalisée donnée (U_n) et renommons un par un chacun de ses termes par l'écriture (V_i) où l'indigage i est, par convention, les ordinaux de 2^e classe suivants : ω ; 2ω ; 3ω ; ... ; ω^2 ; $2\omega^2$; $3\omega^2$; ... ; ω^ω ; $2\omega^\omega$; $3\omega^\omega$; ... ; $\omega^{\omega+1}$; $2\omega^{\omega+1}$; ... ; $\omega^{\omega+2}$; ... ; ... ; $\omega^{2\omega}$; $2\omega^{2\omega}$; ... ; $2\omega^{2\omega+1}$; ... ; $2\omega^{2\omega+2}$; ... ; $\omega^{3\omega}$; ... ; $\omega^{4\omega}$; ... ; $\omega^{5\omega}$; ... ; ω^{ω^2} ; ... ; etc.

Les règles de cet indigage sont les suivantes :

On exclu de l'indigage de (V_i) tous les ordinaux de 2^e classe qui s'écrivent " $n\omega^p + m$ " ($\forall n$ et $m \in \mathbb{N}^*$). En revanche, l'expression "a" utilise des ω , des entiers et les signes "+" et "." (implicite) : $\omega + 1$; $\omega + 2$; 2ω ; $2\omega + 1$; 3ω ; etc. Disons que "a" peut s'exprimer ainsi : " $f(\omega) + p$ " avec f , une application qui utilise des multiplications et des mises en puissance successives, et p un entier quelconque.

De cette manière, on a un exemple (pas le seul) de notation valide pour la suite (B_i) construite par Borel puisqu'on est assuré qu'entre le point B_{i_ω} et le point $B_{i_{2\omega}}$, par exemple, il n'y a qu'un nombre fini possible

de points intermédiaires (ce qui empêche de se retrouver avec des sauts transfinis).

Question : notre indiçage épuise-t-il *tous* les ordinaux de 2^e classe si cette suite (V_i) est pensée comme infinie dénombrable réalisée ?

Il nous semble que la présence d'indices ayant des exposants "a" de type " $f(\omega) + p$ " exclut cette possibilité car, pour un $f(\omega)$ fixé, il y a une infinité dénombrable d'exposants de type " $f(\omega) + p$ " qui permettraient d'indicer l'infinité réalisée des termes de (V_i) . Par exemple, prenons le cas où $f(\omega)$ est la fonction identité : $f(\omega) = \omega$:

La suite d'indices $i_{n\omega^a}$ dont les exposants "a" sont : $\omega+1 ; \omega+2 ; \omega+3 ; \omega+4 ; \omega+5 ; \omega+6 ; \omega+7 ; \dots$ est en quantité infinie et suffit donc à indicer tous les termes de (V_i) , ce pour un $f(\omega)$ fixé...

Donc, dans notre exemple, la considération de tous les termes de (V_i) n'épuise pas tous les indices écrits en termes d'ordinaux... C'est pourquoi Borel limite également les valeurs possibles de "a". Borel procède donc à un double choix.

1° - D'abord, dans son texte, il modifie l'écriture de son indiçage en cours de route (sur les termes soulignés ci-dessous) : alors que dans sa construction de la suite (B_i) , les termes sont indicés $B_{i_1}, B_{i_2}, \underline{B_{i_{\omega+1}}}, \dots, \underline{B_{i_{2\omega+1}}}, \dots, \underline{B_{i_{\omega^2+1}}}, \dots, \underline{B_{i_{\omega^{\omega+1}}}}$, ... dans sa démonstration par l'absurde, ils sont indicés $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, \underline{B_{i_\omega}}, \dots, \underline{B_{i_{2\omega}}}, \dots, \underline{B_{i_{\omega^2}}}, \dots, \underline{B_{i_{\omega^\omega}}}, \dots$

Pour comprendre ce changement, l'attention doit être portée sur les points de la suite (B_i) qui forment les bornes supérieures des intervalles de "raccords" encapsulant les points d'accumulation. Nous ne nous

occuperons donc que de ceux-ci (sauf indication contraire).

En remplaçant les notations initiales de l'indice i : $\omega + 1$; $2\omega + 1$; $3\omega + 1$; ... ; $\omega^2 + 1$; ... ; $\omega^\omega + 1$; ... par les notations ω ; 2ω ; 3ω ; ... ; ω^2 ; $2\omega^2$; ... ; ω^ω ; ..., Borel a un système de notation des points de raccordement ($B_{i_{n\omega^a}}$ plutôt que $B_{i_{n\omega^a+1}}$) qui vise à empêcher qu'on puisse disposer d'une infinité de notations possibles pour les indices des points B_i "réguliers" (qui ne sont pas les bornes supérieures des intervalles de raccordement)²¹⁰. En effet, si le point de raccordement était noté $B_{i_{n\omega^a+1}}$ plutôt que $B_{i_{n\omega^a}}$, cela laisserait la possibilité de noter une infinité de points B_i réguliers avant le point $B_{i_{n\omega^a+1}}$. Or, dans sa démonstration effective, Borel cherche à "verrouiller" tout saut transfini possible dans la construction des indices des points B_i .

2° - Ensuite, Borel fait un choix particulier sur les exposants "a" de l'indice $i_{n\omega^a}$ des points $B_{i_{n\omega^a}}$. En particulier dans les (sous)indices de i (i.e. $n\omega^a$), il limite les exposants "a" aux seules expressions "f(ω)" – et non aux expressions "f(ω) + p". Pour les mêmes raisons qu'en 1°, il verrouille ici toute possibilité de saut transfini dans l'indiciage.

In fine, la suite d'indices utilisés par Borel pour tous les points de la suite, réguliers et de raccordement (soulignés) est :

1 ; 2 ; 3 ; ... ; m ; ω ; 2ω ; 3ω ; 4ω ; ... ; $p\omega$; ω^2 ; ω^3 ; ω^4 ; ω^ω ; $\omega^{2\omega}$; ... ; $\omega^{r\omega}$; ω^{ω^2} ; ω^{ω^3} ; ... ; ω^{ω^s} ; ω^{ω^ω} ; $\omega^{\omega^{2\omega}}$; ... ; $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$; $\omega^{\omega^{\omega^2}}$; etc.

²¹⁰ Autrement dit : les points B_i "réguliers" sont ceux qui suivent un point $B_{i_{n\omega^a+1}}$ et qui précèdent le point $B_{i_{n\omega^a+1}}$

Autrement dit, pour chaque point de raccordement, l'indiciage est le suivant :

Si l'indice du point précédent à un exposant de type $p\omega$: une montée supplémentaire en puissance par le nombre 2 ($p\omega \rightarrow \omega^2$)

Si l'indice du point précédent a un exposant de type p : une utilisation de la notation ω , sans montée en puissance ($p \rightarrow \omega$).

On voit donc qu'il n'y aucune place dans cette règle de notation aux sauts transfinis intermédiaires : les expressions " $; \dots ;$ " renvoient à la sphère du fini quelconque – m, p, r, \dots – mais pas de l'infini réalisé.

Revenons au point central de la démonstration par l'absurde :

« Je dis que nous atteindrons nécessairement l'extrémité B de la droite car, si on ne l'atteignait pas, on définirait une série d'intervalles ayant pour extrémités

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_\omega}, \dots, B_{i_{2\omega}}, \dots, B_{i_{\omega^2}}, \dots, B_{i_{\omega^\omega}}, \dots,$$

les indices étant tous les nombres de la seconde classe de nombres (définis par Cantor). Mais ces indices sont aussi dans un certain ordre, les nombres naturels, en tout ou en partie. C'est là une contradiction puisque la seconde classe de nombres constitue un ensemble de seconde puissance. »

La notation de Borel revient à exclure de sa construction tous les indices de type " $\omega^{f(\omega)+p} + n$ " tels que p et n puissent être en nombre potentiellement infini. Il a le droit de le faire, car ces indices (en nombre infini) peuvent être considérés comme déjà utilisés par les termes convergeant vers les points d'accumulation qu'on a encapsulés par les raccords : ils sont donc exclus de la suite en construction (B_i) sans pour autant cesser d'"exister" comme indices d'intervalles de l'ensemble

$\{(a_n, b_n)\}^\infty$ donné au départ. Aussi, quand on dit que Borel exclu ces indices, cela signifie qu'ils n'apparaissent plus dans le raisonnement mais – si on donne à $\{(a_n, b_n)\}^\infty$ une qualité d'existence – ils sont déjà accaparés. Borel ne commet aucune erreur.

Quel est le cardinal de l'ensemble formé de tous ces sous-ensembles infinis d'indices "exclus" de la suite en construction (B_i) – car déjà utilisés pour des intervalles intérieurs aux intervalles de raccordement ?

- b) Pour f et p fixés, il y a \aleph_0 ordinaux de type $\omega^{f(\omega) + p} + n$.
- c) Pour f et n fixés, il y a \aleph_0 ordinaux de type $\omega^{f(\omega) + p} + n$.
- d) Pour n et p fixés, il y a \aleph_0 expressions possibles de la fonction f (car f réalise une bijection entre une partie de l'ensemble des ordinaux de 2^e classe et \mathbb{N}).

Les éléments exclus par Borel de l'ensemble des ordinaux de 2^e classe forment un ensemble dont la puissance est $\aleph_0 \times \aleph_0 \times \aleph_0$, soit \aleph_0 .

Comme l'ensemble de tous les ordinaux de 2^e classe n'est pas dénombrable, l'opération de Borel sur l'indiciage revient à extraire un ensemble dénombrable (de type d'ordre ω^3) d'un ensemble non dénombrable.

La conclusion s'impose : l'ensemble de départ demeure non dénombrable, et la démonstration de Borel "tombe à l'eau" : dans la catégorie (ou ensemble) formée de *tous* les ordinaux transfinis de 2^e catégorie, on dispose encore d'une infinité non dénombrable d'indices inutilisés. L'affirmation « *les indices étant tous les nombres de la seconde classe de nombres (définis par Cantor)* » est fausse. Il n'y a pas de contradiction. Avec la méthode de Borel, on n'atteindra pas nécessairement le point B avec un ensemble fini d'intervalles de

$\{(a_n, b_n)\}^\infty$.

CQneFpasD

Pour résumer les problèmes "internes" de cette démonstration :

- Borel se sert d'un raisonnement par l'absurde sur des objets transfinis.
- Il envisage la possibilité d'une procédure effective itérée un nombre infini dénombrable réalisé de fois (laquelle est, circonstance aggravante, incluse sous le scope de l'hypothèse par l'absurde)²¹¹.
- Sa conclusion sur la supposée contradiction n'est pas valide.

Ainsi Borel, d'une part, prend donc deux "libertés" épistémologiques sur la contrainte d'effectivité entendue dans le sens classique de Kronecker, d'autre part il commet une erreur de raisonnement de nature strictement mathématique...

Demandons-nous s'il est possible de démontrer le théorème de Borel de manière un peu plus effective, même dans un sens plus "large". Il nous semble que non.

b) Tentative de démonstration "effective" du théorème de 1895

Tentons une démonstration du théorème de Borel (dans sa version 1895) avec les contraintes d'effectivité suivantes :

on admet l'existence de l'ensemble $\{(a_n, b_n)\}^\infty$ donné ⁽²¹²⁾

²¹¹ Cette remarque n'est pertinente que dans la perspective pré-hilbertienne d'une séparation entre objet et méthodes.

²¹² Nous avons repris un indigage en "n", étant entendu que cet indice peut exprimer également des

on admet l'utilisation du TNDf sur des objets transfinis, autrement dit : on relâche la contrainte "globale" d'effectivité de la démonstration.

Mais on refuse le concept de procédure effective aboutissant à un résultat après un nombre infini réalisé de pas (ou itérations), autrement dit : on maintient la contrainte locale d'effectivité dans la démonstration.

« Si l'on a sur une droite une infinité d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, on peut déterminer effectivement un NOMBRE LIMITE d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété (tout point de la droite est intérieur à au moins l'un d'eux). »

—Soit AB un segment de la droite des réels

—Soit $\{(A_n, B_n)\}^\infty$ une infinité d'intervalles partiels telle que :

$$\forall p \in AB, \exists n : p \in]A_n B_n[$$

Alors

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall p \in AB, \exists k \leq N : p \in]A_k, B_k[$$

Démonstration

1°- Reprise du début de la démonstration de 1895 (on raccourcit) :

Comme tous les points du segment AB (extrémités incluses) sont recouverts par un des éléments de $\{(A_n, B_n)\}^\infty$, on peut choisir un intervalle $A_i B_i$ (qu'on indice par i_{i_0})²¹³ qui contient A :

ordinaux de 2^e classe pris comme convention d'écriture.

²¹³ On va modifier les notations de Borel afin d'éliminer les indices transfinis - qui n'avaient d'autre utilité que de mener à la (fausse) conclusion du théorème.

$$\exists i_{1_0} \in \mathbb{N} / A \in]A_{i_{1_0}} B_{i_{1_0}} [$$

Comme le point $B_{i_{1_0}}$ appartient à AB , on peut choisir un intervalle $A_{i_{1_1}} B_{i_{1_1}}$ qui contient $B_{i_{1_0}}$:

$$\exists i_{1_1} \in \mathbb{N} / B_{i_{1_0}} \in]A_{i_{1_1}} B_{i_{1_1}} [$$

Comme $B_{i_{1_1}}$ appartient à AB , on peut choisir un intervalle $A_{i_{1_2}} B_{i_{1_2}}$ qui contient $B_{i_{1_1}}$:

$$\exists i_{1_2} \in \mathbb{N} / B_{i_{1_1}} \in]A_{i_{1_2}} B_{i_{1_2}} [$$

Et ainsi de suite...

Comme chaque intervalle $A_{i_{1_p}} B_{i_{1_p}}$ enferme strictement le point-extrémité $B_{i_{1_{p-1}}}$ de l'intervalle précédent, la suite des points $B_{i_{1_0}}, B_{i_{1_1}}, B_{i_{1_2}}, \dots$ est strictement croissante. D'où l'alternative :

1^{er} cas : $\exists N \in \mathbb{N} / B_{i_{1_N}} > B$, auquel cas cela signifie que la suite $(]A_{i_{1_n}} B_{i_{1_n}} [)_{0 \leq n \leq N}$ recouvre entièrement le segment AB . Le théorème est démontré.

2^e cas : la suite des points $B_{i_{1_0}}, B_{i_{1_1}}, B_{i_{1_2}}, \dots$ converge vers un point limite strictement intérieur à AB , qu'on note $B_{i_{1_\omega}}$. Ce point est nécessairement intérieur à au moins un intervalle (A_n, B_n) de l'ensemble

$\{(A_n, B_n)\}^\infty$, Aussi, on peut écrire :

$$\exists m \in \mathbb{N}^* , \exists n \in \mathbb{N} / B_{i_0} \in]A_n B_n[\text{ et } A_n \in]B_{i_{m-1}} B_{i_m}[$$

On fait alors le "raccordement" qui permet à la suite en construction de "sauter" l'obstacle du point limite.

D'ou la suite :

$$B_{i_0} , B_{i_1} , B_{i_2} , \dots B_{i_m} , (m+1 \text{ éléments})$$

Puis, on réitère les pas précédents : on poursuit la construction de la suite en lui ajoutant les termes "réguliers" $B_{i_{20}} , B_{i_{21}} , \text{ etc.}$

D'ou l'alternative :

1^{er} cas : $\exists N \in \mathbb{N} / B_{i_{2N}} > B$, auquel cas cela signifie que la suite ainsi définie (à $m + N + 2$ éléments) recouvre entièrement le segment AB. Le théorème est démontré.

2^e cas : la suite des points $B_{i_0} , B_{i_1} , B_{i_2} , \dots B_{i_m} , B_{i_{20}} , B_{i_{21}} , \dots$ converge vers un point limite strictement intérieur à AB, qu'on note $B_{i_{2\omega}}$. On refait alors la manipulation précédente pour "sauter" l'obstacle... etc.

2°- Alternatives (on sort de la démonstration de Borel-1895)

Il y a deux possibilités : soit il y a un nombre fini M de points $B_{i_{n\omega}}$ (sauts transfinis), soit il y a une infinité dénombrable de sauts transfinis.

Cas 1 : M sauts transfinis

$\exists M \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N} / B_{i_{MN}} > B$ auquel cas cela signifie que la suite $(]A_{i_{m_n}}, B_{i_{m_n}}[)_{0 \leq n \leq N}^{1 \leq m \leq M}$ recouvre entièrement le segment AB. Le théorème est démontré. CQFD

Cas 2 : une infinité dénombrable de sauts transfinis

C'est le cas le plus problématique (et le plus général) : dans la construction de notre suite, on tombe systématiquement sur des sous-suites d'intervalles de $\{(A_n, B_n)\}^\infty$ dont les extrémités supérieures $B_{i_{m_n}}$ convergent vers des points limites strictement inférieurs à B.

Or, par définition, les points limites notés $B_{i_{i_0}}, B_{i_{i_2}}, \dots, B_{i_{i_{p_0}}}, \dots$ forment une suite infinie strictement croissante et strictement bornée par le point B. Cette suite de points d'accumulation a une limite notée $B_{i_{\omega_0}}$, strictement inférieure à B.

Reprenons maintenant la démonstration mais appliquée au « 2^e degré » : i.e. sur les points d'accumulation des points d'accumulation de la suite (B_i) , que nous nommerons points d'accumulation de 2^e degré. Nous n'allons donner que les grandes lignes, en supposant connues les articulations intermédiaires du raisonnement...

Commençons par le premier point d'accumulation de 2^e ordre rencontré : $B_{i_{\omega_0}}$. Par définition, ce point appartient strictement à au moins un intervalle de l'ensemble $\{(A_n, B_n)\}^\infty$:

$$\exists m \in \mathbb{N}^* , \exists k \in \mathbb{N} / B_{i_{\omega}} \in]A_k B_k[\text{ et } A_k \in]B_{i_{m-1}} B_{i_m}[\text{ (}^{214}\text{)}$$

Cela revient à faire un choix simultané et judicieux, d'une part, d'un intervalle $]A_k B_k[$ de $\{(A_n, B_n)\}^\infty$ entourant le point limite $B_{i_{\omega}}$ et, d'autre part, de deux éléments consécutifs de la suite (B_{i_p}) précédemment construite dont l'intervalle $]B_{i_{m-1}} B_{i_m}[$ entoure le point A_k , ce qui est possible puisque A_k se trouve par définition "avant" $B_{i_{\omega}}$. Dès lors on dispose d'un "raccordement de 2^e degré" qui permet à la suite que l'on construit de "sauter" l'obstacle du point d'accumulation $B_{i_{\omega}}$ des points d'accumulation $B_{i_{\omega_1}}, B_{i_{\omega_2}}, \dots, B_{i_{p\omega}}, \dots$

Autrement dit, on peut stopper arbitrairement la "régression infinie" du processus de construction de notre suite (B_i) qui tombe systématiquement sur des points d'accumulation : on fait jouer le rôle de "pont" à l'un des intervalles prédéfinis de l'ensemble $\{(A_n, B_n)\}^\infty$, ce qui permet de s'extraire du lieu d'accumulation des points d'accumulation des tronçons de la suite (B_i) .

Bien évidemment, une question se pose à nouveau : les points d'accumulation $B_{i_{\omega}}$ de 2^e degré des tronçons de la suite (B_i) sont-ils en nombre fini (avant de dépasser le point B) ?

Si c'est le cas, le théorème est démontré.

Sinon, on doit raisonner au "3^e degré", et la question se reposera...

In fine, nous n'avons qu'une seule question à résoudre :

²¹⁴ Il ne faut pas confondre les indices B_{i_m} et les indices $B_{i_{m_n}}$ qui ne relèvent pas de la même logique.

$$\exists ? n \in \mathbb{N} / [\{(A_n, B_n)\}^\infty]^{(n)} = \{\}$$

où la notation $[E]^{(n)}$ signifie : ensemble dérivé $n^{\text{ième}}$ de E .

La question est connue : un ensemble infini dénombrable partout dense dans Υ (comme Θ) a-t-il une infinité de dérivés ? La réponse est positive...

L'alternative constructive de la démonstration du théorème de Borel "tombe à l'eau".

En comparant les démonstrations de 1898 et de 1895, on a l'impression que Borel a construit une structure sur le sommet d'une colline qu'il déclare atteignable par le bas à l'aide d'une échelle déjà installée, mais on aura beau monter, on n'arrivera jamais au sommet. Il y a comme un "gap" franchissable uniquement par l'idée d'un passage à la limite de l'acte « franchir marche par marche », mais pas par l'acte lui-même.

Plus concrètement :

1) Borel-1898 démontre d'un point de vue "global" ou général que de tout recouvrement infini d'un segment par des intervalles partiels, on peut extraire une famille finie d'intervalles F_1 qui recouvrent ce segment, mais il ne donne aucune indication sur la manière de procéder à cette extraction.

2) Borel-1895 montre "localement" comment on construit progressivement des intervalles de la famille F_1 à partir d'une des extrémités du segment, mais il ne peut faire aboutir sa construction en demeurant dans ce mode local et constructif de raisonnement.

Bref, ce que démontre Borel en 1895 et 1898 c'est que :

il existe (théoriquement/descriptivement) une famille F_1 .

il existe (pratiquement/constructivement) une manière de construire un élément quelconque de F_1 .

Mais les deux propositions ne peuvent se raccorder qu'au moyen d'une inférence modifiant le mode (constructif \rightarrow descriptif). Ce changement de mode, Borel le nomme « *moyen **au moins théorique** de déterminer effectivement* » (*Leçons*, p.43, note 1) , ce "théorique" s'appliquant non pas au niveau mathématique (objets manipulés pour la construction) mais au niveau métamathématique (procédure de construction) : Borel, qui veut justifier robustement (effectivement) l'affirmation d'un existant théorique (au niveau mathématique), ne réussit qu'à déplacer le problème en justifiant cet existant par l'affirmation d'un autre existant théorique (non constructif) situé cette fois dans la sphère métamathématique. Le problème est déplacé mais non résolu.

Autorisons-nous une dernière et courte digression : que peut-on démontrer sans faire appel au concept de procédure effective itérée un nombre infini dénombrable réalisé de fois ni au concept de totalité réalisée des ordinaux de 2^e classe ? La réponse est simple : le recouvrement fini d'un segment par des intervalles extraits d'un ensemble infini dénombrable donné d'intervalles (le recouvrant) ayant un nombre fini quelconque donné de points d'accumulation – ce qui rappelle d'ailleurs le problème de l'intégration d'une fonction ayant une infinité dénombrable de points de discontinuité. La démonstration figure dans la section précédente.

Signalons, bien entendu, que l'impossibilité d'atteindre

constructivement la conclusion du théorème ne signifie pas – loin de là – que le théorème de Borel est invalide. Au contraire, il est valide mais sur un mode où la contrainte d'effectivité locale (une procédure effective itérable un nombre fini quelconque donné de fois) est relâchée : ne reste que l'idée d'effectivité exprimée seulement par la possibilité de construire un schéma de procédure. Mais alors, la notion d'effectivité est si diluée dans une pratique non effective qu'elle n'a plus vraiment de sens.

IV – Conclusions

Tirons dès à présent les quelques renseignements sur la conception de l'effectivité de Borel (dans les années 1895-1898) glanés au cours de l'analyse de ces deux démonstrations.

1°- Domaine de l'effectif et de l'existant chez Borel 1895-1898

Dans l'optique d'une mathématique contentuelle, qui est celle de Borel à l'époque, nous distinguons ici les objets (niveau de langage mathématique) des méthodes (objets du niveau de langage métamathématique). D'après ce qui précède, nous pouvons dire que pour Borel (1895-1898) :

Les ensembles infinis dénombrables réalisés ayant un type d'ordre de 2^e classe quelconque donné sont considérés comme des existants.

Aussi, une démonstration prenant pour objet ce type d'ensemble peut être effective.

Une démonstration utilisant la version faible du TND (démonstration par l'absurde) sur un ensemble infini dénombrable réalisé d'existants peut être effective.

Une démonstration utilisant la version faible du TND sur une classe non dénombrable (la classe de tous les ordinaux de 2^e classe) considérée comme réalisée dont un élément quelconque donné est un existant (un ordinal de 2^e classe quelconque) peut être effective. Par exemple, la démonstration par l'absurde mettant en jeu la classe de tous les ordinaux de 2^e classe (fin de la démonstration de 1895). Cela est *a fortiori* vrai pour une classe non dénombrable d'existants finis (l'ensemble A^∞).

Une démonstration utilisant la version faible du TND qui s'appuie sur le résultat d'une "procédure effective" dont le schéma, portant sur des existants, est itérée une infinité dénombrable réalisée de fois peut être effective (fin de la démonstration de 1895).

Les points ci-dessus abordent trois types d'objets/concepts :

1- Existants (ou éléments du langage-objet contentuel)

Les existants classiques

Un ensemble dénombrable réalisé quelconque donné ayant un type d'ordre (un ordinal de 2^e classe quelconque donné)

Des ensembles non dénombrables réalisés

2- Principes et procédures s'appliquant sur des existants.

Raisonnement par l'absurde (et principe d'induction)

Procédure effective finie itérée une infinité réalisée de fois

La liste ci-dessus pose d'emblée plusieurs questions :

- Quel sens donner au concept de "procédure effective" ?
- Que dire de l'effectivité d'une démonstration où un non-existant est placé sous la contrainte du TNDf ? Par exemple : l'utilisation du concept mathématique de "tous les ordinaux de 2^e classe" dans un raisonnement par l'absurde au cœur d'une démonstration compromet-elle l'effectivité de la démonstration ?

- Que dire de l'effectivité d'une démonstration où une procédure effective itérée une infinité dénombrable de fois est placée sous la contrainte du TNDf ? Par exemple : l'utilisation du concept de "procédure effective itérée une infinité dénombrable de fois" dans un raisonnement par l'absurde au cœur d'une démonstration compromet-elle l'effectivité de la démonstration ?

Abordons les deux dernières questions avant de nous intéresser au concept de procédure effective.

Dès le début des *Leçons*, Borel étend le domaine des existants mathématiques aux ensembles dénombrable de type d'ordre ω (*Leçons*, p.3-7). Nous découvrons alors qu'au cours de la démonstration de 1895 ce domaine d'existants s'étend non seulement à ω mais à des ensembles de type d'ordre un ordinal de 2^e classe *quelconque* donné. Il est donc légitime, du point de vue de Borel, que des démonstrations portant sur ces objets puissent être qualifiées d'effectives.

Puis, au cours de sa démonstration (de 1895 et de 1898), Borel se sert du TNDf appliqué à ces ensembles de type d'ordre de 2^e classe quelconque donné : il est donc clair que pour lui, le TNDf est un schéma qui n'annule pas le caractère effectif d'une démonstration portant sur ce type d'ensemble ou nombre infini. Au regard des "règles d'usage" classiques de l'effectivité cela est cohérent : le TNDf peut être appliqué à de tels ensembles, puisque Borel les considère comme des existants authentiques (au même titre qu'un nombre entier quelconque).

Autrement dit, du point de vue de Borel l'utilisation d'un principe ou d'une méthode (ici le TNDf) classique sur des objets non classiques (ensembles infinis dénombrables réalisés) considérés comme des existants robustes, conserve le caractère effectif du raisonnement. Par exemple : une démonstration par l'absurde sur une proposition portant sur des ensembles dénombrables réalisés peut être effective.

Le problème advient quand on se sert du TNDf (dont on considère qu'il conserve le caractère effectif) sur un objet qu'on considère comme non existant du point de vue constructif. Par exemple, Borel applique le raisonnement par l'absurde à une proposition contenant le concept d'ensemble non dénombrable réalisé de tous les ordinaux de 2^e classe. Pire : il se sert du TNDf sur une opération considérée classiquement comme non effective (même si elle porte sur des existants) : la négation d'une proposition contenant l'opération "itération infinie réalisée" d'une procédure de recouvrement d'un point d'accumulation de la suite (B_i) . Or Borel ne justifie nulle part que le "résultat d'une procédure effective itérée une infinité dénombrable réalisée de fois" est, de son point de vue, un existant robuste (alors qu'il a pris la peine, en 1898, d'argumenter en faveur de l'existence d'ensembles infinis dénombrables réalisés).

Que le TNDf puisse conserver le caractère effectif d'un raisonnement portant sur un existant mathématique, c'est cohérent. Mais que ce principe puisse *rendre* une démonstration effective par l'opération de négation d'une proposition mettant en jeu des objets non constructifs (ou des non existants) – comme l'ensemble de tous les ordinaux de 2^e classe - et/ou des opérations dont rien n'indique qu'elles soient considérées comme effectives (procédure effective itérée une infinité réalisée de fois), c'est, nous semble-t-il, pousser un peu loin la puissance du TNDf.

In fine, les options sont les suivantes : si Borel considère comme effective une démonstration par l'absurde mettant en jeu une procédure effective itérée une infinité réalisée de fois et/ou la classe de tous les ordinaux de 2^e classe, c'est :

soit qu'il considère que cette "procédure effective itérée une infinité réalisée de fois" est effective, et que la classe de tous les ordinaux de 2^e classe est un existant mathématique...

- soit, enfin, que Borel (1895-1898) n'est pas très clair sur la question de l'existant mathématique et de l'effectivité (ou pas très regardant quand cela l'arrange).

C'est, bien sûr, cette dernière option qui est la plus probable (et la moins coûteuse épistémologiquement) : entre 1895 et 1898, l'effectivité et l'existant mathématique ne sont pas encore – loin s'en faut – au centre du débat sur la "santé" des mathématiques. Et Borel, même s'il a déjà développé un embryon de pensée sur la question, se sert de ces notions peut-être seulement pour convaincre de la validité robuste de ses théorèmes... Nous sommes bien là en amont – mais tout près – d'une véritable pensée organique sur ce qui deviendra dans les années suivantes

l'objet central des préoccupations de Borel (du moins concernant sa théorie de la mesure et des ensembles) d'abord pour contrer Lebesgue, ensuite pour contrer la montée vers l'axiomatique hilbertienne comme réponse aux paradoxes.

Il n'empêche, dans ces années 1895-1898, la notion de "démonstration effective" chez Borel semble bien "libérale" puisqu'elle englobe des objets et des opérations qui sont loin, très loin des contraintes kroneckeriennes d'effectivité. D'où la question : qu'entend Borel par effectivité en 1895 et 1898 ? Il nous semble que la seule réponse possible est à chercher du côté de la notion de "procédure effective"

2°- La procédure effective chez Borel 1895-1898

Si pour le Borel de 1895-1898, l'effectivité et l'existant mathématique ne sont pas encore au centre de ses réflexions, et s'il se sert de ces notions comme arguments pour convaincre de la robustesse de ses démonstrations, on ne peut néanmoins nier que ces notions ne sont pas totalement vides de contenu pour lui : quand Borel affirme qu'il a démontré effectivement son théorème, il veut sans doute dire quelque chose... mais quoi exactement ?

Reprenons sa note des Leçons :

*"On trouvera dans ma Thèse une autre démonstration de ce théorème, démonstration qui donne **un moyen au moins théorique de déterminer effectivement les intervalles en***

nombre limité dont il est question." (Leçons, p.43, note 1)

Citons également le paragraphe qui suit sa démonstration "effective" de 1898 :

« Ainsi on arrivera nécessairement, en employant un **procédé régulier**, à déterminer effectivement un nombre fini d'intervalles qui recouvriront toute la droite » (Thèse, p.52)

Ces deux citations renferment une certaine ambiguïté dans l'expression, ambiguïté qui nous fournira la clé du concept d'effectivité chez Borel (1895-1898).

En effet, il y a deux manières d'interpréter les propos (en gras) :

1°- la démonstration donne *les moyens de / un procédé régulier pour* déterminer effectivement le nombre fini d'intervalles recouvrant le segment.

2°- la démonstration donne *les moyens de / un procédé régulier pour* déterminer effectivement un intervalle quelconque faisant partie de l'ensemble fini qui recouvrira le segment.

C'est une question de "scope" de la notion de procédé régulier :

1°- soit ce scope est "global" : le procédé régulier englobe la construction de "l'ensemble fini d'intervalles recouvrant le segment".

2°- soit ce scope est "local" : le procédé régulier concerne seulement la construction d'"un intervalle quelconque" - lequel fait partie d'un

ensemble fini dont la construction n'est pas effective. Ensemble dont on démontre par la suite de manière non effective qu'il recouvre le segment.

Si l'on veut "sauver" la notion d'effectivité – c'est-à-dire montrer qu'elle n'est pas qu'un mot vide de sens pour Borel - et lui donner un contenu robuste et un peu kroneckerien, c'est la seconde alternative qui s'impose : quand Borel parle de démonstration effective, il signifie seulement que sa démonstration comporte un schéma de procédure effective (au sens kroneckerien) de construction d'un certain type d'objet mathématique robuste (un existant authentique), définissant ainsi une classe d'objets constructibles par procédure effective. Mais cette effectivité n'est pas celle de la classe considérée comme un tout réalisé. Pour Borel, la manipulation de cette classe ouverte (c'est-à-dire dont on a donné un principe de construction effective d'un élément quelconque donné) n'est pas elle-même soumise à une contrainte d'effectivité (au sens kroneckerien).

En résumé :

Sous le scope de l'effectivité :

Le schéma de construction d'intervalles de recouvrement quelconques, certains réguliers, d'autres de raccordements (au-dessus des points d'accumulation) ;

Hors du scope de l'effectivité :

- Le résultat obtenu par itération infinie du schéma effectif (l'ensemble infini dénombrable réalisé des intervalles construits).
- La structure démonstrative elle-même, qui peut contenir des principes logiques – comme le TNDf – appliqués à des objets et méthodes

transfinies.

Cette grande lacune d'effectivité d'une démonstration présentée par Borel comme effective a de quoi étonner. Nous pourrions peut-être considérer que l'erreur de raisonnement que nous avons crûe déceler est effectivement une erreur de raisonnement, et que Borel était convaincu en 1898 d'avoir pu construire un par un l'ensemble fini d'intervalles recouvrant AB... Ou alors c'est notre raisonnement sur l'erreur de Borel qui est erroné, et Borel ne s'est pas trompé.

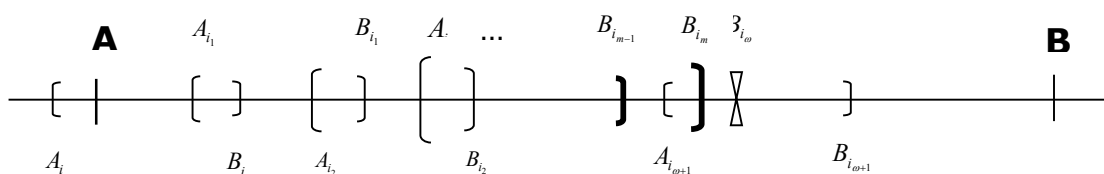
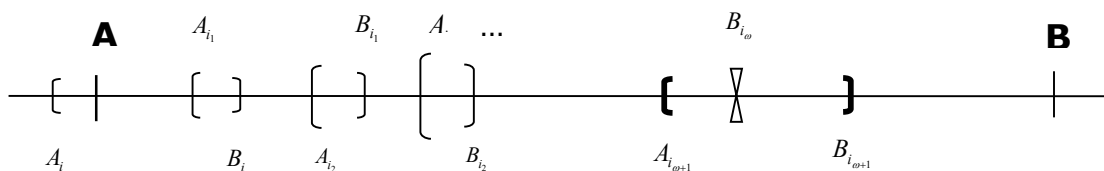
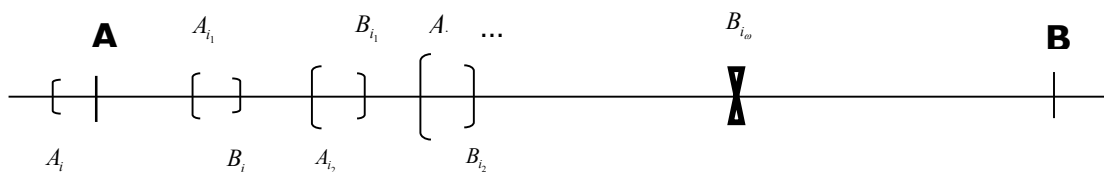
Dans tous les cas, gardons comme caractéristique de l'effectivité selon Borel (en 1898) que celle-ci est une contrainte exclusivement locale : une démonstration est effective si elle contient une procédure effective de construction d'un objet quelconque d'un ensemble sur lequel on peut raisonner sans aucune contrainte d'effectivité. Autrement dit, une démonstration est considérée alors comme (globalement) effective si elle l'est localement...

Métaphoriquement, cela reviendrait au mieux à juger la faisabilité du plan de construction d'un pont sur la seule donnée de la robustesse d'une de ses briques : si celle-ci a une résistance mécanique et une forme adaptées à leur superposition systématique, etc. alors le pont sera viable. Bien sûr, un tel point de vue "local" ignore les contraintes globales liées à l'infrastructure elle-même.

De fait, il est vrai que le processus de construction des briques-intervalles est satisfaisant pour un kroneckerien (à supposer que celui-ci adhère au concept d'ensemble $\{(A_n, B_n)\}^\infty$ réalisé) : en partant d'un matériau de base – le segment AB et l'ensemble $\{(A_n, B_n)\}^\infty$ – Borel montre comment construire deux types de briques de son pont-ensemble fini : les briques régulières et les briques de raccordement. Pour ces

dernières, le processus est celui précédemment cité :

« Les points $B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \dots$, s'ils n'atteignent pas l'extrémité B de la droite, ont une limite B_{i_ω} et ce point est compris dans un intervalle $A_{i_{\omega+1}} B_{i_{\omega+1}}$ tel que $A_{i_{\omega+1}}$ tombe, par exemple, entre $B_{i_{m-1}}$ et B_{i_m} ; nous pourrons alors ne pas tenir compte des intervalles $A_{i_{m+k}} B_{i_{m+k}}$, et nous aurons tout de même une suite ininterrompue d'intervalles sur la droite » (Thèse-1895, p52).



Ce processus de construction comporte donc trois étapes dont chacune fait appel à des opérations classiques (Cauchy). On a bien là un processus « permettant d'obtenir, au moyen d'un nombre fini d'opérations arithmétiques au sens ancien du mot, effectué sur les éléments que l'on envisage, le résultat qu'énonce la proposition à démontrer »

(Kronecker)²¹⁵.

Pour le Borel de 1895-1898 le qualificatif d'effectif s'applique à une démonstration dont l'objet sur laquelle elle porte est construit par une procédure effective au sens de Kronecker (sur les "éléments qu'il envisage"), mais ce qualificatif ne contraint pas la structure démonstrative dans sa globalité. L'effectivité s'identifie avec le concept de procédure effective locale. Il n'y a pas d'effectivité à l'échelle globale de la démonstration.

²¹⁵ **Molk**, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, T.1, réédité par les Editions Gabbay, 1992, p.159.

PARTIE II

.1 - INTRODUCTION

La Partie I a eu pour objet de rassembler du matériel sur la pratique des mathématiques par Borel et sa conception de l'effectivité entre les années 1895 et 1898. Sur cette base, nous allons maintenant initier l'étape proprement épistémologique, la construction de notre "grille" d'analyse de l'effectivité. Nous prendrons comme point de départ les éléments de l'effectivité borélienne dégagés à la fin de la partie précédente.

Le plan est le suivant : nous commencerons par reprendre la classification des paramètres de l'effectivité posée dans la partie précédente, que nous approfondirons (.1- Introduction) ; nous entrerons ensuite dans la partie proprement épistémologique (.2- Fondements épistémologiques de l'effectivité) : nous montrerons (I- Effectivité et Intuitionisme) qu'il est possible d'établir un lien entre procédure effective et preuve intuitionniste (sous certaines conditions que nous préciserons), à partir d'où nous approfondirons la notion de preuve et d'effectivité en appelant des éléments d'une théorie de l'acte cognitif mathématique (II- Effectivité et acte mathématique cognitif) puisée dans les écrits d'auteurs du courant dit "néo-intuitionniste". Enfin (3- Effectivité et modes de la connaissance mathématique) nous aborderons l'effectivité sous un mode plus général où il sera question de sa double nature, locale et globale.

Cela devrait nous conduire à trouver un "lieu" pour penser l'effectivité pré-formelle qui ne soit ni trop général et abstrait ni trop particulier et

limité, apte à servir une étude générale de la notion primitive d'effectivité.

Revenons aux conclusions de la partie I sur l'effectivité selon Borel (1895-1898). A l'époque, nous l'avons constaté, sa conception de l'effectivité n'est pas claire car Borel ne s'y est pas encore penché sérieusement : l'effectivité se présente à lui comme une notion transparente, naturelle et primitive qu'il utilise comme argument pour garantir la robustesse de ses constructions mathématiques au regard de la méthode cantorienne. En effet, ce qui l'intéresse ce n'est pas de définir l'effectivité mais de montrer la solidité de ses travaux – sur le prolongement analytique et sur la théorie de la mesure – et de tenter de les fusionner sous une théorie constructive homogène.

Ce n'est que plus tard qu'il s'y intéressera vraiment et tentera de corriger les incohérences de son usage "large" de la notion, surtout à partir des années 1904–1905, quand l'effectivité aura entamé sa mue en sujet réel et sérieux, mobilisant de plus en plus de mathématiciens sous l'impulsion de l'article de Hilbert, *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, 1904 (²¹⁶), du 1^{er} énoncé de l'axiome de choix de Zermelo (1904) et du paradoxe de Richard (1905), qui lancent véritablement la recherche sur cette notion. Mais en 1898, les attributs que Borel affecte à l'effectivité sont foncièrement non systématiques et parfois contradictoires épistémologiquement.

Cependant Borel, peut-être sans se le proposer ni même le savoir encore, donne déjà (en 1898) à l'effectivité une patine personnelle qui la

²¹⁶ Hilbert, *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, trad. *Sur les fondements de la logique et de l'arithmétique* (1904), dans Rivenc & de Rouilhan, *Logique et fondement des mathématiques – Anthologie (1850 – 1914)*, Bibliothèque scientifique Payot, Editions Payot, 1992, p.245-270.

place hors du cadre kroneckerien et lui fait empiéter dans la sphère du transfini cantorien. D'invisible, car intuitive et naturelle, l'effectivité entame avec Borel – après Kronecker mais avant les autres mathématiciens – un processus de particularisation et donc d'émergence en tant que notion autonome.

A cause de l'aspect "pré-" ou "proto-" formel de cette première période de l'effectivité, toute tentative pour établir une systématique de la notion ne peut qu'aboutir à une classification arbitraire, d'autant plus si l'on maintient – comme nous le ferons tout au long de la thèse – la séparation entre les objets ou "existants" mathématiques (ensemble, fonction, ordinal, etc.) et les méthodes et procédures mathématiques (TND²¹⁷, principe d'induction complète, procédure effective, etc.), séparation artificielle au regard de la théorie de la calculabilité post-hilbertienne, mais naturelle dans l'esprit des mathématiciens de l'époque – point de vue qui est le seul possible si nous voulons en comprendre la pensée.

I- Les existants mathématiques chez Borel (1898) – rappel

Qu'est-ce qu'un élément ou objet mathématique, ou encore un "existant", pour Borel ?

Nous l'avons dit, toute recherche d'une définition rigoureusement formelle nous conduirait nécessairement à constater le caractère arbitraire

²¹⁷ TND : principe du *Tertium non datur*. TNDf : version faible du principe, utilisé dans le schéma de démonstration par l'absurde.

de la séparation entre les concepts d'objet et de méthode mathématiques. Puisque c'est une affaire d'usage de l'époque plus que de définition mathématique, reportons-nous à ce que nous en dit ou suggère Borel dans ses *Leçons* et dressons la liste des "existants" mathématiques, en précisant leur "mode" d'existence.

1°- Liste brute

Dans l'épistémologie embryonnaire de Borel des années 1895-1898, il considère que certains objets mathématiques, les "authentiques", lui sont donnés soit naturellement, soit par l'usage, soit par construction, soit enfin, si leur authenticité n'est ni "naturelle" ni fondée par l'usage ni soutenue par une construction, par une argumentation de type extra-mathématique – ces derniers sont alors admis comme d'authentiques existants mathématiques au même titre que les autres. Nous trouvons ainsi les existants suivants :

- Les existants mathématiques classiques, i.e. ceux obtenus par la méthode de Kronecker et, plus globalement, tous ceux précédant les "existants" cantorians. Parmi ces existants classiques, on trouve les entiers naturels en tant qu'infinité potentielle.
- L'ensemble \mathbb{N} en tant que totalité infinie réalisée.
- Tout ensemble infini réalisé quelconque donné ayant comme type d'ordre un ordinal de 2^e classe donné.
- Tout ordinal de 2^e classe quelconque donné.

- Des ensembles infinis réalisés non dénombrables donnés. C'est le cas, par exemple, de l'ensemble A^∞ dont nous avons parlé dans la partie précédente (Partie I –.3 – II). Plus généralement, la section IV du chapitre I des *Leçons* (p.13-16) est consacrée à la "construction" d'ensembles non dénombrables considérés comme réalisés²¹⁸.
- Le continu arithmétique, ou ensemble des réels, et tout segment ou intervalle quelconque donné de ce continu.
- La totalité des ordinaux transfinis de 2e classe, soit le premier ordinal transfini de 3^e classe – c'est ce qui ressort de la démonstration de 1895 (Partie I –.3 – III). Un tel existant implique également l'existence de la classe des ensembles de puissance \aleph_1 .

Nous verrons très vite Borel exclure ce dernier cas de la sphère des existants mathématiques, rejoignant ainsi d'autres exclus comme :

- La classe de tous les ordinaux de 3^e classe et suivants.
- Les ensembles de puissance \aleph_2 et suivants.

²¹⁸ *Leçons*, p.16 : « [Il résulte d'une démonstration de type diagonalisation de Cantor] que l'ensemble des points compris entre 0 et 1 n'est pas dénombrable, et, par suite, qu'il y a une infinité non dénombrable de points qui n'appartiennent pas à l'ensemble dénombrable considéré. Nous connaissons donc un ensemble non dénombrable. »

2° - Relation avec l'effectivité

- Locale : une procédure effective de construction à partir d'existants déjà donnés engendre un nouvel existant.
- Globale : une démonstration portant sur des existants construits (localement) par une procédure effective est effective.

3° - Classement

Nous avons également constaté que dans les *Leçons* les existants ne se présentent pas tous de la même manière, et qu'ils ont des statuts épistémiques²¹⁹ et des modes de connaissance différents :

Présentation :

- a – Soit ils émanent de déclarations explicites de Borel. Par exemple :
- L'existant N comme totalité réalisée (*Leçons* p.3-7),
 - L'existant "continu arithmétique" (*Leçons* p.16)²²⁰, etc.

²¹⁹ Nous utilisons le terme "épistémique" comme adjectif relatif à la "connaissance" : statut épistémique = statut vis-à-vis de la connaissance du sujet connaissant.

²²⁰ *Leçons*, p.16 : « nous admettrons que l'ensemble C des nombres compris entre 0 et 1 nous est donné, sans chercher comment il pourrait l'être effectivement. Les ensembles ayant même puissance que l'ensemble C seront dits avoir la puissance du continu. » Signalons aussi que la remarque de la p.45 des *Leçons* : « on sera moins disposé à croire qu'on sait ce que c'est que le continu et à raisonner sur lui comme sur une notion intuitive et parfaitement claire » montre que Borel peut concevoir un existant authentique tout en affirmant qu'on puisse ne pas bien le connaître. Ce qui le rapprocherait d'une position "réaliste" (plus du côté du réalisme cognitif que du

b – Soit leur existence découle implicitement de leur utilisation. Par exemple :

- L'existant "classe de tous les ordinaux de 2^e classe", déduit de sa démonstration de 1895 (*Sur quelques points...*)²²¹.

Statut épistémique :

1 - Soit ils sont donnés immédiatement dans l'intuition. Par exemple :

- Le continu arithmétique (par appel direct à l'intuition géométrique)

2 - Soit ils sont construits dans l'intuition sur la base d'existants plus fondamentaux à l'aide d'inférences *extra-mathématiques*²²². Par exemple :

- L'ensemble \mathbb{N} comme totalité réalisée *découle* extra-mathématiquement de la connaissance de l'ensemble potentiellement infini \mathbb{N} .

3 - Soit ils sont construits dans l'intuition à l'aide d'inférences mathématiques. Par exemple :

- Un recouvrement fini d'un segment AB quelconque donné du continu arithmétique (déjà) recouvert par une infinité d'intervalles

platonisme).

²²¹ A priori, l'existant "continu arithmétique" n'est épistémiquement pas équivalent à l'existant "classe de tous les ordinaux de 2^e classe"

²²² Nous disons "inférence extra-mathématique" dans le sens où le passage "N : ensemble potentiellement infini" → "N : ensemble infini actuel" se fait par une argumentation extérieure au langage-objet.

(connaissance acquise à partir d'une procédure effective de construction d'un tel recouvrement fini)²²³.

- Les ensembles non dénombrables réalisés *découlent* d'une démonstration par procédure effective locale (diagonalisation) de non dénombrabilité et de l'existence postulée du continu arithmétique (*Leçons*, p.13-16).

Modes de connaissance :

Nous avons également attribué à Borel des *modes de connaissance* généraux distincts des ensembles, des classes et des séries infinies, voire des procédures (en termes d'itération). Les plus évidents sont :

α - Le mode potentiel.

β - Le mode réalisé (²²⁴).

II- Effectivité et procédure effective (Borel, 1895-1898)

Comme on l'a vu, Borel semble faire usage de l'adjectif "effectif" dans

²²³ Comme nous nous plaçons du point de vue de Borel, nous considérons que la démonstration est effective.

²²⁴ Bien entendu, en terme de modes de connaissance, nous trouvons aussi les antagonistes : mode effectif – mode "théorique".

une seule acception, celle qualifiant le schéma d'un procédé local dans une démonstration²²⁵ : si le schéma est de type kroneckerien, le reste de la démonstration hérite d'une certaine manière du caractère robuste de ce schéma. Reprenons l'exemple de la démonstration du théorème de recouvrement fini dans sa version "effective" de 1895 et poursuivons son analyse.

1°- Effectivité et procédure effective chez Borel

La première partie de la démonstration de 1895 est consacrée à la construction locale d'intervalles, ceux que nous avons nommés "réguliers" et "de raccordements" (au-dessus des sauts transfinis).

« Partons d'une extrémité A de la droite, soit $A_i B_i$ un des intervalles qui comprennent le point A ; soit de même $A_{i_1} B_{i_1}$ un des intervalles qui comprennent le point B_i , $A_{i_2} B_{i_2}$ un des intervalles qui comprennent le point B_{i_1} , etc. [...] **Les points $B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \dots$, s'ils n'atteignent pas l'extrémité B de la droite, ont une limite B_{i_ω} et ce point est compris dans un intervalle $A_{i_{\omega+1}} B_{i_{\omega+1}}$ tel que $A_{i_{\omega+1}}$ tombe, par exemple, entre $B_{i_{m-1}}$ et B_{i_m} ; nous pourrons alors ne pas tenir compte des intervalles $A_{i_{m+k}} B_{i_{m+k}}$, et nous aurons tout de même une suite ininterrompue d'intervalles sur la droite. »²²⁶**

²²⁵ Leçons, p.43, note 1 : "On trouvera dans ma Thèse une autre démonstration de ce théorème, démonstration qui donne un moyen au moins théorique de déterminer effectivement les intervalles en nombre limité dont il est question."

²²⁶ Borel, Sur quelques points de la théorie des fonctions, in Annales scientifiques de l'E.N.S., 3^e série, tome 12, (1895), p.51. Le gras est de nous.

Les opérations évoquées dans ce schéma de procédure sont :

1. l'itération en nombre fini de fois d'un acte de "choix" d'un intervalle particulier de la droite réelle ("*soit $A_i B_i$ un des intervalles qui comprennent le point A...*") pris parmi l'infinité d'intervalles dont le type d'ordre est donné au départ,

2. la "reconnaissance" de la présence d'un point de convergence ("*s'ils n'atteignent pas l'extrémité B de la droite, ont une limite B_{i_∞}* ")²²⁷

Cela peut sembler étrange d'évoquer l'acte de "choix" d'un intervalle particulier parmi une infinité dénombrable déjà donnée et l'acte de "reconnaissance" de la présence d'un point de convergence, mais ce n'est qu'une façon de parler, dans le mode infini actuel qui est celui où Borel situe sa démonstration, de deux types d'opérations classiques sur le mode potentiel : d'une part, la construction d'intervalles du segment réel AB, soit réguliers (loi d'indication), soit arbitraires (chevauchement d'un point d'accumulation) ; d'autre part, le passage à la limite d'une série convergente.

De fait, on peut identifier le schéma de procédure, décrit par Borel sur le mode actuel, à un schéma de procédure effective sous le mode infini potentiel où la contrainte kroneckerienne²²⁸ est respectée : « *un procédé permettant d'obtenir*

- *au moyen d'un nombre fini d'opérations arithmétiques au sens ancien du mot* : il s'agit d'une règle d'indication pour les intervalles

²²⁷ Souvenons-nous que les ordinaux transfinites utilisés dans l'indication (B_{i_∞}) sont, à ce stade, une pure convention d'écriture.

²²⁸ **Molk**, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, T.1, réédité par les Editions Gabbay, 1992, p.159.

réguliers, d'un passage à la limite pour déterminer le point B_i de convergence des intervalles précédemment indicés, et de la construction "à la main" d'un intervalle de raccordement ;

- effectués sur les éléments que l'on envisage : le segment réel $(0,1)$ et des intervalles de ce segment ;

- le résultat qu'énonce la proposition à démontrer » : la possibilité de "sauter" un point d'accumulation pour obtenir une suite (finie quelconque donnée) d'intervalles qui ne converge pas vers une limite supérieure inférieure à 1.

L'itération un nombre fini quelconque donné de fois de ce schéma est une procédure effective au sens de Kronecker (ou du moins, des constructivistes de l'époque). Aussi, même en adoptant un vocabulaire infinitiste réalisé, la seule entorse est que « *les éléments que l'on envisage* » sont ici un ensemble infini réalisé d'intervalles couvrant $(0,1)$ de type d'ordre de 2^e classe donné – entorse qui est plus épistémique que mathématique, et qui pourrait être rendue invisible dans l'écriture mathématique. *In fine*, cette procédure effective de Borel est localement kroneckerienne... Mais la démonstration n'en demeure pas moins non effective.

La démonstration se poursuit ainsi :

« *Nous continuerons de même [le mode est donc infini potentiel], en passant à la limite lorsque cela sera nécessaire et montrant alors qu'on peut conserver seulement un nombre fini des intervalles considérés. Je dis que nous atteindrons nécessairement l'extrémité B de la droite **car, si on ne l'atteignait pas**, on définirait une série d'intervalles [passage au mode infini actuel] ayant pour extrémités*

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_n}, \dots, B_{i_{2^n}}, \dots, B_{i_{2^2}}, \dots, B_{i_{2^m}}, \dots,$$

les indices étant **tous les nombres de la seconde classe de nombres** (définis par Cantor). Mais ces indices sont aussi dans un certain ordre, les nombres naturels, en tout ou en partie. C'est là une contradiction puisque **la seconde classe de nombres constitue un ensemble** de seconde puissance. » ⁽²²⁹⁾

Les opérations évoquées dans cet extrait sont les suivantes : le TNDf (« si on ne l'atteignait pas... c'est là une contradiction... ») appliqué à un raisonnement portant sur l'idée d'une itération infinie réalisée de la procédure et sur le concept d'ensemble de tous les nombres de seconde classe en tant que totalité réalisée (« les indices étant tous les nombres de la seconde classe de nombres (définis par Cantor) »)²³⁰.

Ce qui est troublant dans cette démonstration, c'est que la procédure effective permet de construire l'ensemble fini des intervalles recouvrant le segment en un nombre fini d'opérations, comme le stipule Kronecker, mais l'agent ne peut savoir cela que grâce à un raisonnement où il doit imaginer une itération infinie réalisée située sous le scope du principe de contradiction.

Si l'agent avait un point de vue réaliste, il pourrait distinguer le fait mathématique (la construction d'un nombre fini d'intervalles) du raisonnement mathématique contradictoire, lequel ne représente pas un fait mais une impossibilité mathématique. Alors l'existence de ce recouvrement fini serait établie de manière robuste. Mais si l'agent est anti-réaliste, les deux éléments – le fait et le non-fait – ont le même

²²⁹ Leçons, p.51-52

²³⁰ Les indices sont passés du statut de "convention d'écriture" à celui d'"existants" mathématiques sur lesquels on raisonne.

statut de phénomène cognitif mathématique et sont interdépendants : le fait ne peut "exister" qu'en vertu du non-fait. Ce dernier étant établi à l'aide d'un raisonnement transfini (portant sur l'itération infinie réalisée et sur le concept de totalité des ordinaux de 2^e classe), le recouvrement fini est, d'une certaine manière, engendré par le transfini. Et cela semble clairement sortir du cadre de l'effectif des constructivistes.

En effet, Kronecker avait précisé que les notions dont on doit se servir dans une démonstration (et non plus seulement dans une procédure effective) « *doivent avoir un caractère arithmétique et non logique seulement, en sorte qu'elles ne sauraient porter que sur des groupes dont chaque élément puisse être effectivement obtenu au moyen d'un nombre fini d'opérations* »²³¹. Or, le TNDf semble avoir ici un "caractère logique" seulement puisqu'il porte sur un groupe – tous les nombres transfinis de seconde classe – qu'on ne peut définir au moyen d'un nombre fini d'opérations au sens classique (même par *passage à la limite* classique, nous en parlons ci-dessous).

Néanmoins, pour véritablement pouvoir affirmer que cette partie de la démonstration "effective" de Borel contrevient au principe d'effectivité de Kronecker, il faut lever une ambiguïté dans l'expression de Molk au sujet de la pensée du Maître.

2°- Retour sur Kronecker

Comme on l'a vu, Kronecker, par la voix de Molk, donne une double

²³¹ **Molk**, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, T.1, réédité par les Editions Gabbay, 1992. p.159.

définition de l'effectivité qui ne distingue pas clairement le concept d'effectivité d'une démonstration de celui de procédé effectif qui conduit à un résultat. Pourtant, comme nous l'avons vu avec Borel, ces deux "échelles" de l'effectivité peuvent être disjointes : nous pouvons avoir une démonstration globalement non effective au sens de Kronecker s'appuyant sur des objets construits localement par une procédure effective au sens de Kronecker. A priori, cela devrait nous inciter à séparer les concepts : d'une part la démonstration effective d'un théorème, où peuvent entrer en jeu des principes méta-arithmétiques comme le TNDf, le PIC²³², d'autre part la procédure effective de preuve d'une proposition, sorte de déroulé terre-à-terre et intuitif d'opérations arithmétiques de base.

Mais il nous semble que cette séparation, si elle peut avoir une utilité méthodologique – pour distinguer ces deux niveaux de complexité – ne résisterait pas à l'analyse, puisque la qualification en "non effectif" d'une démonstration se servant du TNDf (hors toute contrainte), renvoie assez immédiatement à l'idée de l'impossibilité de faire aboutir une procédure effective de preuve de l'inexistence d'un choix tiers.

Que signifie alors qu'une procédure effective peut intervenir dans une démonstration sans que celle-ci ne soit effective ? Il nous semble, mais peut-être sommes-nous "post-churchiens" en cela, que parler de "démonstration non effective incluant une procédure effective" revient à distinguer le *schéma* d'une procédure effective de son mode d'*itération* (i.e. de répétition du schéma) : Borel exhibe en effet son schéma de construction d'intervalles, mais raisonne transfiniment sur l'itération de ce schéma.

De fait, l'interprétation des citations de Kronecker nous conduit à distinguer plusieurs cas de figure en termes de schéma et d'itérations. En effet :

²³² Principe d'induction complète.

1) Une démonstration est *globalement* effective si les notions dont on se sert ont « un caractère arithmétique et non logique seulement, en sorte qu'elles ne sauraient porter que sur des groupes dont chaque élément puisse être effectivement obtenu au moyen d'un nombre fini d'opérations. »²³³

2) Un procédé *localement* effectif est « un procédé permettant d'obtenir, au moyen d'un nombre fini d'opérations arithmétiques au sens ancien du mot, effectuées sur les éléments que l'on envisage, le résultat qu'énonce la proposition à démontrer. »²³⁴

Interprétations de la définition 1

L'effectivité globale (*itérations*) porte donc sur les notions (TND fort et faible, PIC, etc.) englobant sous leur scope des fragments de la démonstration où sont sollicités des groupes d'éléments, *i.e.* des objets mathématiques au sens classique. Que signifie précisément dans la démonstration, que les notions doivent « porter [...] sur des groupes dont chaque élément puisse être effectivement obtenu au moyen d'un nombre fini d'opérations » ? Ici, l'expression "chaque élément du groupe" renvoie-t-il à l'idée que dans la démonstration on puisse se contenter de raisonner à l'aide de notions arithmétiques sur un élément *quelconque donné* de ce groupe (interprétation *faible* de 1), ou alors le terme "chaque" signifie-t-il que le raisonnement doive s'effectuer sur tous les éléments du groupe supposés donnés ou construits un par un explicitement (interprétation

²³³ **Molk**, *Encyclopédie des sciences pures et appliquées*, T.1, réédité par les Editions Gabbay, 1992, p.159.

²³⁴ *Ibidem*.

forte de 1) ?

Interprétations de la définition 2

La contrainte locale (*schéma*), elle, porte sur le principe de construction de ces éléments. Il est clair a priori que le schéma doit comporter un nombre fini d'opérations arithmétiques classiques. Mais ces opérations arithmétiques en nombre fini incluent-elles une opération sur le mode infini potentiel ? Et si l'on tient pour existant un objet transfini (ensemble, nombre), cet objet peut-il entrer dans le schéma de la procédure effective ?

Ces questions ne sont pas anachroniques car les mathématiques de l'époque de Kronecker et Borel contenaient déjà des cas admis où un *schéma* de procédure effective suffisait à garantir l'effectivité d'une démonstration malgré l'idée plus ou moins implicite d'une itération infinie potentielle voire actuelle (outre le cas de la démonstration de Borel de 1895). Par exemple, l'opération classique de passage à la limite (voir suite).

Les interprétations possibles des deux concepts (schéma, itération) conduisent de fait à distinguer plusieurs cas possibles d'effectivité, par exemple :

- Une effectivité réalisée dans le fini strict. D'une part, le schéma de la procédure effective n'intègre explicitement ni implicitement aucun objet infini (potentiel ou réalisé) est sa structure est finie. D'autre part, l'itération de la procédure effective est finie au sens strict. Nommons cela : procédure effective *réalisée*.

- Une effectivité qui admet le mode infini potentiel : d'une part, les notions arithmétiques dont on se sert dans la démonstration incluent le mode infini potentiel (n quelconque), d'autre part, la procédure effective est un *schéma* qui porte sur un segment *quelconque* de la démonstration (le schéma se trouve donc également sous le mode infini potentiel). Cette démonstration aboutit (est effective) seulement si l'on admet l'idée d'une itération illimitée infinie potentielle. C'est le cas dans les démonstrations de propositions de type général indicées sur n *quelconque*. C'est de l'effectivité "générale".

- Une effectivité placée sous le mode infini réalisé : les notions arithmétiques dont on se sert peuvent avoir sous leur scope des objets transfinis réalisés, et on admet le principe d'une itération infinie réalisée de la procédure effective à schéma fini. C'est de l'effectivité "virtuelle".

Cela peut sembler étrange d'inclure *a priori* ce cas de figure dans la définition de l'effectivité, mais il suffit de se rappeler que la démonstration effective de Borel (1895) en est justement un exemple. De fait, l'idée d'étendre le champ de l'effectif global et de l'itération des procédures effectives locales au mode infini réalisé semble très éloignée de la pensée de Kronecker. Mais elle ne l'est pas de la pensée de Borel : voulant "sauver" une partie du paradis de Cantor, celui de l'infini dénombrable réalisé et des ordinaux de 2^e classe²³⁵, Borel peut légitimement tenter de les inclure dans le champ de l'effectif en "étirant" la contrainte de Kronecker. Cela est d'autant plus légitime qu'à l'époque de Kronecker, nous l'avons dit, on se sert déjà de procédures classiques certifiées "authentiquement mathématiques" qu'on peut néanmoins considérer comme faisant appel au concept d'infini réalisé. Par exemple l'opération de

²³⁵ En tant qu'on les considère comme quelconques donnés (infini potentiel) et non comme totalité réalisée.

passage à la limite sur une suite convergente bornée : le lien entre l'infini intensif des termes de la suite et l'infini extensif des indices des termes permet de considérer le passage à la limite comme la réalisation d'un infini extensif dénombrable sur les indices.

Puisque cette opération est admise par tous comme classique et effective, il n'y a alors que deux positions cohérentes d'un point de vue épistémologique : soit considérer que la sphère de l'effectif s'étend à un ordinal de 2^e classe quelconque donné ce qui revient à situer les nombres et ensembles transfinis dénombrables en tant qu'objets au mode infini potentiel, soit considérer le passage à la limite non pas comme une opération authentiquement mathématique mais comme une convention adoptée par les mathématiciens depuis le XVIII^e siècle, avec des règles d'usage mais sans fondement constructif... Soit, enfin – et c'est peut être la position des kroneckeriens – considérer que le passage à la limite est la seule opération "infiniste" authentique, mais alors il le serait uniquement par sa vertu historique : l'opération s'étant ancrée dans l'usage, elle est authentique. Mais cela rend un peu arbitraire l'extension du domaine mathématique "authentique" : il suffit que quelque chose se fixe dans l'usage pour devenir dès lors authentique...

Toujours est-il que pour Borel, il ne semble pas y avoir de raisons de ne pas étendre explicitement l'effectivité au domaine du transfini dénombrable, contrairement à d'autres kroneckeriens de l'époque pour qui l'alternative "effectivité virtuelle" aurait sûrement été écartée – en dépit du contre-exemple du "passage à la limite". De fait Borel, en 1898, n'est pas un kroneckerien anti-cantorien, il est plutôt mi-kroneckerien-mi-cantorien, à l'instar de Hilbert mais d'une manière très différente car absolument contentuelle – alors que Hilbert est un "contentuel" prêt à négocier avec le formel pour sauver Cantor.

Il n'empêche, Borel, outre l'idée d'itération infinie réalisée de sa procédure effective de construction des intervalles, fait usage dans sa

démonstration du TNDf appliqué au concept de "totalité des ordinaux de 2^e classe", c'est-à-dire qu'il applique le TNDf à un raisonnement sur des objets en nombre infini non dénombrable. Et cela ne saurait respecter la double contrainte d'effectivité kroneckerienne même au sens faible ! *In fine*, pour Borel (en 1898) une démonstration est effective si elle contient un schéma local de procédure effective. Le reste, même cantorien, n'entame pas ce caractère.

Pour revenir à notre tripartition de l'effectivité en des modes *réalisé*, *général* et *virtuel*, celle-ci ne saurait épuiser toutes les situations possibles. Par exemple : quand on dit, au sujet de l'effectivité réalisée, que *la procédure effective utilisée est nécessairement réalisée en ce sens qu'elle n'a besoin que d'être itérée un certain nombre de fois pour aboutir au résultat*, cela signifie-t-il qu'il suffit de savoir que la procédure effective aboutit au bout de n itérations ou qu'il faut mener cette itération jusqu'au bout ? Si l'on n'effectue pas les itérations, quelle est alors la nature cognitive de notre certitude en l'effectivité de la démonstration ? *Quid* du cas où l'on sait qu'elle doit aboutir mais dont on sait aussi que cet aboutissement n'est matériellement pas atteignable : peut-on encore parler d'effectivité ?

De fait, nous pourrions multiplier les cas de figure – et les questions – en combinant les deux composants de l'effectivité selon les différentes contraintes (forte 1, forte 2, faible 1, faible 2) de chacun et selon le mode (potentiel ou actuel) admis par l'agent, en cherchant à savoir lesquelles doivent être écartées de la sphère de l'effectif – et selon quels critères. C'est ce que nous ferons, mais en nous focalisant d'abord sur le concept de procédure effective.

3°- Types de procédures effectives

Nous allons nous intéresser ici à l'aspect local de l'effectivité, en faisant abstraction de son insertion dans la contrainte globale. Aussi, quand nous parlerons de démonstration d'une proposition, il sera sous-entendu que cette démonstration est entièrement conduite par la procédure effective, comme dans le cas des propositions élémentaires : "247 est premier ou composite" (proposition particulière), "tout nombre entier est premier ou composite" (proposition générale), "le cardinal de \mathbb{N} est équipotent au cardinal de $2^{\mathbb{N}}$ " (proposition transfinie), etc.

Nous avons précédemment dégagé trois types, que nous reformulons en termes de procédure effective :

- **Procédure effective *réalisée***

La proposition est démontrée (ou démontrable) par une procédure effective kroneckerienne au sens fort, c'est-à-dire : 1) son schéma est fini ; 2) son itération est finie (pour aboutir au résultat) ; 3) elle est conduite jusqu'au bout, ou l'on sait qu'elle peut l'être.

Un tel cas de figure présuppose que la proposition à démontrer est de type particulier, c'est-à-dire ne faisant pas intervenir d'une manière explicite ou implicite l'idée d'un nombre n quelconque même donné.

- **Procédure effective *générale***

La proposition est démontrée par : 1) la construction d'un schéma fini et kroneckerien de procédure effective, schéma qui porte explicitement ou implicitement sur un nombre n quelconque donné²³⁶ ; 2) par l'appel

²³⁶ Précisons que dans le schéma, le nombre n , même s'il est quelconque, est fixé ("donné"), ce qui l'assimile à un nombre particulier (du moins d'un point de vue cognitif). Dans le cas où le schéma

explicite ou implicite au principe d'induction qui projette ce schéma dans le mode infini potentiel : le nombre d'itérations réalisées ou à réaliser est considéré comme fini (même si quelconque).

Cela présuppose que la proposition est de type général.

- **Procédure effective virtuelle**

La proposition est démontrée par : 1) la construction d'un schéma fini de procédure effective mais pouvant mettre en scène des objets transfinis, néanmoins le schéma porte explicitement ou implicitement sur un nombre n quelconque donné ; 2) par une inférence extra-mathématique (ou cognitive) qui projette ce schéma dans le mode infini actuel : le nombre d'itérations est considéré comme infini réalisé.

Cela présuppose que la proposition est de type transfini.

Les questions que nous nous sommes posées précédemment nous ont montré que le pouvoir de résolution de cette tripartition est trop grossier pour particulariser les différents cas de figure que nous pourrions rencontrer. Aussi, nous allons segmenter en deux les cas de procédure effective *réalisée* et de procédure effective *virtuelle*. *In fine*, nous proposons les définitions suivantes – accompagnées d'exemples – en modifiant quelque peu leur appellation (que nous considérerons dès lors comme stabilisées) :

1. Procédure effective réalisée

La proposition, de type particulière, est démontrée par une procédure effective kroneckerienne au sens fort, c'est-à-dire : 1) son schéma est

contiendrait lui-même un fragment sur le mode infini potentiel (par exemple, en cas de double indigage : n_m), il suffirait de considérer un sous-schéma (emboîté dans le premier) sur lequel on raisonnerait avec un nombre m quelconque fixé, ce qui nous ramène au cas précédent.

fini ; 2) son itération est finie (pour aboutir au résultat) ; 3) elle est conduite jusqu'au bout.

2. Procédure effective *potentiellement réalisée* ou *potentielle*²³⁷

La proposition, de type particulière, est démontrée si elle est *démontrable* par une procédure effective kroneckerienne au sens fort, c'est-à-dire : 1) son schéma est fini ; 2) son itération est finie ; 3) *on sait qu'on peut* la conduire jusqu'au bout. La démonstration se fait donc au moyen d'une inférence extra-mathématique cognitive qui remplace les inférences mathématiques non effectuées.

Autrement dit, on considère que la proposition est effectivement démontrée si elle est effectivement démontrable par la présentation d'un schéma de procédure effective kroneckerienne et l'affirmation qu'elle conduit nécessairement au résultat en un nombre d'itérations fini dont on sait qu'il est *matériellement* atteignable ("faisabilité"). Cela concerne une proposition particulière ou un segment du schéma d'une proposition générale (où n est fixé).

Donnons comme exemple le cas de la proposition "247 est premier ou composite". Un mathématicien peut très bien affirmer que cette proposition est démontrable effectivement (donc démontrée), en exhibant le schéma de la procédure effective et en disant qu'elle conduit au résultat. En général, cela vaut démonstration.

3. Procédure effective *générale*

Définition inchangée :

La proposition, de type générale, est démontrée par : 1) la construction d'un schéma fini et kroneckerien de procédure effective,

²³⁷ Ce cas de figure, connu, est généralement nommé : *effectivité de principe*.

schéma qui porte explicitement ou implicitement sur un nombre n quelconque donné ; 2) par l'appel explicite ou implicite au principe d'induction qui projette ce schéma dans le mode infini potentiel : le nombre d'itérations réalisées ou à réaliser est considéré comme fini (même si quelconque).

4. Procédure effective virtuelle finie

La proposition, de type particulière, est démontrée si elle est *démontrable* au sens : 1) son schéma est fini ; 2) son itération est finie. Mais la condition 3 (*on sait qu'on peut* la conduire jusqu'au bout) n'est pas satisfaite : on sait qu'*on ne peut pas* la conduire jusqu'au bout ou *on ignore si on peut* la conduire jusqu'au bout. La démonstration se fait donc au moyen d'une inférence extra-mathématique cognitive qui remplace les inférences mathématiques non effectuelles ("non faisables").

Un exemple de Borel datant de 1927 permet d'illustrer ce cas. Dans une lettre à la *Revue de Métaphysique et de Morale* (t.34, p.271-276), intitulée *A propos de la récente discussion entre M. R. Wavre et M. P. Lévy*²³⁸, Borel écrit :

« Envisageons, par exemple, le nombre formé par les quatre premières décimales du nombre π , c'est-à-dire 1415. Nous pouvons considérer ensuite le nombre formé par les 1415 premières décimales de π ; c'est un nombre de 1415 chiffres dont le calcul n'a pas encore été fait et serait certainement très pénible. Mais nous pouvons continuer la même opération et considérer un nombre de décimales précisément égal à ce nombre de 1415 chiffres. Si nous continuons de la même manière

²³⁸ **Borel**, *A propos de la récente discussion entre M. R. Wavre et M. P. Lévy*, in *Œuvres complètes*, p.2387-2392.

seulement un millier de fois, nous arriverons à définir des nombres dont le calcul pratique n'exigerait pas seulement des myriades d'existences humaines, mais dont l'écriture seule, à supposer qu'ils fussent connus, nécessiterait un poids de papier de beaucoup supérieur au poids du globe terrestre.

Doit-on considérer que le dernier des chiffres du millième nombre ainsi défini est pour nous calculable ? »

On a donc une procédure de calcul d'un très grand nombre N_1 , formé des quatre premières décimales de π ($N_1=1415$), puis on construit le nombre N_2 formé par les 1415 premières décimales de π (1415 chiffres), puis on le nombre N_3 formé des N_2 premières décimales de $\pi\dots$ et ainsi de suite, en renouvelant ce procédé un millier de fois. Il est clair que nous disposons d'une procédure effective au sens kroneckerien de calcul du dernier chiffre de N_{1000} , mais il nous est impossible de mener le calcul jusqu'au bout. On ne peut alors soutenir que la seule énonciation d'une procédure effective de calcul de N_{1000} fait de celui-ci un objet de connaissance mathématique authentique : détenir une procédure effective de construction d'un objet mathématique ne conduit pas nécessairement à « *en connaître une propriété mathématique autre que sa définition* », écrit Borel en 1947 (²³⁹) au sujet de ce même exemple (p.979). Une procédure effective ne fournit pas nécessairement une "*connaissance effective*" (selon l'expression de Borel-1947, p.979).

5. Procédure effective virtuelle transfinie

Définition inchangée.

La proposition est démontrée par : 1) la construction d'un schéma fini de procédure effective pouvant mettre en scène des objets transfinis, néanmoins le schéma porte explicitement ou implicitement sur un nombre

²³⁹ Borel, *Sur l'illusion des définitions numériques*, 1947, in *Œuvres complètes*, p.979-981.

n quelconque donné ; 2) par une inférence extra-mathématique (ou cognitive) qui projette ce schéma dans le mode infini actuel : le nombre d'itérations est considéré comme infini réalisé.

La démonstration de Borel 1895 en est un exemple.

Nous arrivons ici à la fin de notre recherche d'un "point d'entrée" dans la notion d'effectivité centrée uniquement dans l'analyse de textes historiques, car nous avons récolté assez de matériau brut : d'une part, nous disposons d'une hypothèse sur la nature double du contrôle de l'engendrement mathématique par la contrainte d'effectivité entendue dans son sens pré-formel, c'est-à-dire cognitif. D'autre part, nous disposons de cinq définitions heuristiques recouvrant une certaine idée du scope possible des procédures effectives – dont nous discuterons par la suite.

Enfin, nous avons rencontré et utilisé au cours de ce travail certaines notions qui demeurent fort vagues : celle de "mathématiques authentiques" et de ses "existants" (ou "objets"), celle de "mode de connaissance" de ces existants, du concept d'"intuition" et de "construction dans l'intuition", etc.

Le besoin d'approfondir notre hypothèse, mais aussi la nature heuristique de notre classification et la lacune en définitions robustes des notions utilisées nous obligent maintenant à poursuivre le travail d'"affinage" dans la sphère épistémologique, à l'aide d'outils conçus par les épistémologues contemporains, quittant donc progressivement le domaine historique.

.2 – FONDEMENTS EPISTEMOLOGIQUES DE L’EFFECTIVITE

Comment définir la notion d’effectivité autrement que par l’usage qu’en font Borel, Kronecker et d’autres ? Puisque qu’elle appartient au domaine de la preuve et de la démonstration, ou du moins elle s’applique à ce domaine, il est naturel de se pencher sur ces concepts pour tenter d’exhumer ce qui fait la particularité d’une preuve ou démonstration effective. Et, comme notre objet d’étude est la notion naïve de l’effectivité dans le cadre d’une mathématique contentuelle et non axiomatique, mode qui présidait à la pratique mathématique avant la généralisation de la méthode axiomatique, c’est d’un point de vue simultanément phénoménologique et mathématique que nous devons aborder ces concepts. Aussi, dans l’éventail des théories traitant des preuves, l’Intuitionisme²⁴⁰ nous semble fournir les outils les plus adaptés à notre investigation. En particulier, nous nous intéresserons au concept de *preuve intuitionniste* et à ses liens possibles avec la notion de procédure effective.

Certes, *a priori* la procédure effective et la preuve intuitionniste appartiennent à des modes de pensée mathématique différents : le premier concept relève d’une épistémologie naïve et peut être appréhendé (mais pas nécessairement *défini*) de manière intuitive alors que le concept intuitionniste de preuve demande, pour être appréhendé et défini, l’immersion dans une théorie de la connaissance sophistiquée. Pourtant la

²⁴⁰ Suivant l’usage, nous orthographierons “Intuitionisme” (avec un seul “n”) mais nous écrirons les adjectifs associés (“intuitionniste”, “intuitionnistiquement”, etc.) avec deux “n”.

procédure effective et la preuve intuitionniste affichent des similitudes, ce qui laisse espérer que la seconde pourrait servir de *definiens* à la première ou du moins de référence. De fait, nous allons consacrer la section I du présent chapitre à tenter d'établir une passerelle entre les deux concepts.

Ce travail de rapprochement de la procédure effective à une certaine interprétation du concept de preuve intuitionniste (section I) nous conduira à approfondir le concept de preuve d'un point de vue épistémique et à en tirer les conséquences pour l'effectivité (sections II et III). Nous comparerons le mode de preuve classique et celui de preuve effective dans la troisième et dernière partie de la thèse (Conclusion).

I – Effectivité et Intuitionisme

Pourquoi s'intéresser à l'Intuitionisme²⁴¹ et à son concept de *preuve* dans le travail de caractérisation de la procédure effective au sens pré- ou proto-formel ? *A priori*, la notion d'effectivité n'est pas plus fondée dans l'Intuitionisme que dans les autres épistémologies de la pratique mathématique : il s'agit toujours d'une notion primitive et vague utilisée comme *definiens* et non comme *definiendum*²⁴². Néanmoins, notre choix

²⁴¹ Nous référons à l'interprétation BHK (Brouwer-Heyting-Kolmogorov), voir suite.

²⁴² Par exemple, chez **Dummett** quand il propose de remplacer, « *comme notion centrale de la théorie du sens* [des propositions mathématiques], *la condition sous laquelle une proposition est vraie, que nous sachions ou puissions savoir quand cette condition est obtenue, par la condition sous laquelle nous reconnaissons la proposition comme [étant] conclusivement établie, condition que nous devons [...] être capables de reconnaître **effectivement** chaque fois qu'elle est obtenue.* » dans *The philosophical basis of intuitionistic logic*, in *Proceedings of the Logic Colloquium*, Bristol, 1973, repris dans **Putnam & Benacerraf** (eds.), *Philosophy of mathematics*, 2nd édition, Cambridge

nous est dicté par deux raisons : d'abord, de manière générale, l'Intuitionisme possède une définition de la preuve orientée par l'idée de *constructions mathématiques mentales*, et non seulement scripturales, ce qui est essentiel quand on tente de saisir le sens d'une notion pré-formelle (i.e. n'ayant pas de définition dans le langage-objet). Ensuite, si la preuve (intuitionniste) semble proche de l'idée de procédure effective, c'est qu'on y retrouve les mêmes problèmes et questionnements, en particulier ceux liés à ce que nous avons nommé procédures effectives *générale*, *potentielle* et *virtuelle*. Ces deux points – la preuve comme construction mentale et le statut des différents types de procédure effective – font l'objet de la présente section.

1°- La preuve intuitionniste et la procédure effective

L'entreprise intuitionniste fondée par Brouwer (mais entrevue par Poincaré), et le concept de "preuve intuitionniste"²⁴³ sont des sujets des plus commentés et débattus en épistémologie et histoire des mathématiques, ce n'est pas ici le lieu d'un tel débat. Contentons-nous de donner une des interprétations possibles des objectifs de l'Intuitionisme (et le néo-Intuitionisme), celle qui nous intéresse ici : ce serait une tentative d'harmoniser la pratique linguistique mathématique avec ses soubassements cognitifs, harmonisation à double-sens, d'une part, il s'agit de fonder les gestes usuels des mathématiciens sur les processus de pensée qui les précèdent, d'autre part, il s'agit de "mathématiser" ces

University Press, 1983, p.97 (nous commenterons cela par la suite).

²⁴³ Désormais, nous nommerons "preuve" ce qui, selon les auteurs est nommé preuve *intuitionniste* ou *canonique* ou *directe* ; et "démonstration", ce qui est souvent nommé *preuve indirecte*, et qui correspond au concept mathématique classique.

processus pré-gestuels en trouvant un moyen de les exprimer dans un langage-objet peut-être élargi mais rigoureusement mathématique, pour éviter de diluer cette science dans de la philosophie.

Nous allons tenter de préciser brièvement des éléments de l'Intuitionisme BHK, et quelque définition du sens de la "preuve" dans cette épistémologie afin de montrer sa proximité avec la notion intuitive de procédure effective – sachant que nous reviendrons longuement sur la preuve dans l'épistémologie *néo*-intuitionniste (sections II et III).

Comme le résumant Troelstra et van Dalen (1988)²⁴⁴, l'Intuitionisme de Brouwer peut être considéré comme une forme de constructivisme, d'un autre genre que le *finitisme* naïf de Kronecker ou formel de Hilbert, que le *prédicativisme* naïf de Poincaré ou systématique de Weyl, etc. (nous en avons parlé en Partie I). En particulier, les auteurs²⁴⁵ écrivent,

« l'Intuitionisme sera entendu ici comme l'approche constructive des mathématiques dans l'esprit de Brouwer (1881 – 1966) et de Heyting (1898 – 1980). Les bases philosophiques de cette approche sont déjà présentes dans la thèse de Brouwer (1907) mais du point de vue des conséquences mathématiques Brouwer (1918) est un point de départ plus approprié. Les principes de base pourraient être résumés ainsi :

- Les mathématiques ont affaire à des constructions mentales, qui sont immédiatement appréhendées par l'esprit ; les mathématiques ne consistent pas en des manipulations formelles de symboles, et l'utilisation du langage mathématique est un phénomène secondaire, induit par nos limitations (quand on compare

²⁴⁴ Troelstra & van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, vol.1, North-Holland, 1988. p.4. La traduction est nôtre.

²⁴⁵ Ibid., p.4.

avec un mathématicien idéal avec une mémoire illimitée et une parfaite [capacité à y accéder]), et le désir de communiquer nos constructions mathématiques aux autres.

*- Cela n'a pas de sens de penser à la vérité ou la fausseté d'une proposition mathématique indépendamment de notre connaissance concernant cette proposition. **Une proposition est vraie si nous en avons une preuve, et fausse si nous pouvons montrer que le postulat que la proposition a une preuve mène à une contradiction.** Pour une proposition arbitraire, nous ne pouvons donc pas dire qu'elle est soit vraie soit fausse.*

- Les mathématiques sont une création libre : ce n'est pas affaire de reconstruction mentale, ou appréhension de vérité sur un objet mathématique existant indépendamment de nous (cela contraste avec, par exemple, les empiristes français²⁴⁶). »

Autrement dit, l'Intuitionisme (dans l'interprétation BHK) est une théorie anti-réaliste de l'acte mental mathématique dont le principe de base est l'inversion hiérarchique entre vérité et preuve... De fait, nous pourrions décrire la preuve en trois points - selon qu'on se place d'un point de vue classique, cognitiviste, etc.²⁴⁷

La preuve est :

- 1- ce qui confère à une proposition sa vérité dans l'intuition ;
- 2- ce qui confère un sens à une proposition ;
- 3- dans le cas des énoncés arithmétiques : un calcul aboutissant au résultat attendu.

Les auteurs poursuivent :

²⁴⁶ Poincaré, Borel, Baire et Lebesgue.

²⁴⁷ Nous y reviendrons amplement dans les sections II et III.

« Il suit de b) qu'il est nécessaire d'adopter une interprétation différente pour les propositions de la forme "il existe un x tel que $A(x)$ " et de la forme "A ou B". En particulier, "A ou non A" ne tient pas dans la lecture intuitionniste [...].

En accord avec - mais pas nécessairement à la suite de - c), l'Intuitionisme permet de considérer des processus qui ne finissent pas : le mathématicien idéal pourra construire des segments initiaux de plus en plus longs $\alpha(0), \dots, \alpha(n)$ d'une séquence infinie d'entiers naturels α où α n'est pas a priori déterminé par quelque processus fixé de production de valeurs, aussi la construction de α n'est jamais finie : α est un exemple de séquence de choix. »

L'Intuitionisme rejette donc le TND *en tant que principe général et toujours applicable* et admet le mode de raisonnement infini potentiel, ce qui le distingue du finitisme strict.

Bref, nous avons-là une théorie mathématique qui est aussi une philosophie anti-réaliste de l'acte mental mathématique, reposant sur le principe de l'inversion hiérarchique entre vérité et preuve, et qui admet au moins le mode infini potentiel. C'est un point de vue qui convient au type d'analyse que nous nous proposons²⁴⁸. Sa définition de la preuve nous intéresse particulièrement, notamment sa composante opératoire, i.e. les conditions réglant l'articulation des preuves entre elles dans une construction mathématique, dont nous rapportons ci-dessous le résumé fait par Troelstra & van Dalen (1988)²⁴⁹ :

La logique intuitionniste suit six stipulations principales :

²⁴⁸ et qui dans ses aspects mathématiques n'est pas étranger au point de vue de Borel lui-même.

²⁴⁹ Troelstra & van Dalen, *op. cit.*, p.9-10.

« H1 : Une preuve de $A \wedge B$ est donnée en présentant une preuve de A et une preuve de B

H2 : Une preuve de $A \vee B$ est donnée en présentant soit une preuve de A soit une preuve de B (et en stipulant que nous voulons considérer la preuve présentée comme une évidence pour $A \vee B$)

H3 : Une preuve de $A \rightarrow B$ est une construction qui nous permet de transformer une preuve de A en une preuve de B .

H4 : L'absurde \perp (contradiction) n'a pas de preuve; une preuve de $\neg A$ est une construction qui transforme une preuve hypothétique de A en une preuve d'une contradiction

H5 : Une preuve de $\forall x A(x)$ est une construction qui transforme une preuve de $d \in D$ (D est le domaine de définition de la variable x) en une preuve de $A(x)$.

H6 : Une preuve de $\exists x A(x)$ est donnée en fournissant $d \in D$ et une preuve de $A(d)$.

Cette explication est informelle et repose elle-même sur notre compréhension de la notion de construction [...]. Dans la clause H4, la notion de contradiction doit être vue comme une notion primitive (non expliquée). »

Ainsi, les six clauses de la logique intuitionniste, construites *ad hoc* à partir du corpus intuitionniste mathématique, ouvrent sur une grande variété d'interprétations formelles ou informelles dépendant du sens donné à la notion de *construction* : scripturale, mentale, linguistique, etc. Ces règles peuvent donc être interprétées en mettant l'accent sur la notion de construction mentale.

Dans son article de 1990, *Brouwerian Intuitionism*, Detlefsen²⁵⁰ détaille ces six stipulations :

« Consultons le locus classicus de l'intuitionisme actuel – nommément, celui de Heyting (1956), où la conception standard des constructions mathématiques comme preuves est introduite comme suit :

"une proposition mathématique **p** demande toujours une construction mathématique avec certaines propriétés données ; elle peut être assertée si et seulement si une construction a été effectuée. Nous disons dans ce cas que la construction prouve la proposition **p** et nous la nommons preuve de **p**."

(Heyting 1956:102)

Ayant ainsi caractérisé la condition de base de la preuve comme la possession d'une construction, Heyting poursuit alors en donnant une description plus détaillée des conditions d'assertion spécifiques appartenant à différents types de propositions composées qui peuvent être formées par application de différentes opérations logiques à des propositions simples. Naturellement, cette description était guidée par une certaine vue de la dynamique de la construction-possession ; autrement dit, une vue des lois générales selon lesquelles la possession d'un ensemble donné de constructions induit la possession d'autres. Alors, est donné un schème inductif établissant comment la possession de constructions pour des propositions composées logiquement est reliée à la possession de constructions pour des propositions simples. En se servant de " $\pi(\chi, A)$ " pour exprimer " χ est une construction qui prouve A ", ce schème est à peu près le suivant :

²⁵⁰ Detlefsen, *Brouwerian Intuitionism*, 1990, in Detlefsen (ed.), *Proof and Knowledge in Mathematics*, Routledge, 1992, p.208-250. La traduction est nôtre.

- (a) $\pi(\chi, A \& B)$ ssi²⁵¹ $\chi = \langle \chi A, \chi B \rangle$ et $\pi(\chi A, A)$ et $\pi(\chi B, B)$.
- (b) $\pi(\chi, A \vee B)$ ssi $\chi = \langle \chi A, \chi B \rangle$ et $\pi(\chi A, A)$ ou $\pi(\chi B, B)$.
- (c) $\pi(\chi, A \rightarrow B)$ ssi pour toutes les constructions κ , si $\pi(\kappa, A)$, alors $\pi(\chi(\kappa), B)$.
- (d) $\pi(\chi, \neg A)$ ssi pour toutes les constructions κ , si $\pi(\kappa, A)$, alors $\pi(\chi(\kappa), \perp)$, où l'on convient que \perp est une proposition intuitionnistiquement réfutable.
- (e) $\pi(\chi, \exists x Ax)$ ssi il y a un (terme-)construction τ et une (preuve-)construction K , tels que $\chi = \langle K, \tau \rangle$ et $\pi(\chi, A(\tau))$.
- (f) $\pi(\chi, \forall x Ax)$ ssi pour chaque nombre n , $\pi(\chi(n), A(n))$, où "n" est le terme numérique standard correspondant à n .

A la base de ces conditions qui ont pour objet d'énoncer les lois qui régulent l'interaction entre les constructions-possessions des propositions simples et la construction-possession pour des propositions composées, il y a un ensemble de contraintes structurelles induites sur le domaine des constructions intuitionnistes par les conditions générales suivantes : (i) que tout couple de deux constructions peut être "apparié" pour conduire à une nouvelle construction, (ii) que les constructions constituant les preuves de propositions composées peuvent être décomposées de manière à produire des constructions des propositions simples choisies, et (iii) qu'il y a des constructions qui peuvent être appliquées à des constructions de manière à produire des constructions. » (Detlefsen-1990, p.234-235)

Reprenons et détaillons les six stipulations de la logique intuitionniste en nous appuyant sur Troelstra & van Dalen et Detlefsen :

²⁵¹ Si et seulement si

(i) $\pi(\chi, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ ssi, $\chi = [\chi_A, \chi_B]$ et $\pi(\chi_A, \mathbf{A})$ et $\pi(\chi_B, \mathbf{B})$,

ce qui textuellement se lit : χ est une construction qui prouve $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ si, et seulement si, cette construction est composée de (ou décomposable en) une construction χ_A qui prouve \mathbf{A} et une construction χ_B qui prouve \mathbf{B} .

(ii) $\pi(\chi, \mathbf{A} \vee \mathbf{B})$ si et seulement si, $\chi = [\chi_A, \chi_B]$ et $\pi(\chi_A, \mathbf{A})$ ou $\pi(\chi_B, \mathbf{B})$,

se lit : χ est une construction qui prouve $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ ssi, χ est composé d'une construction (χ_A) qui prouve \mathbf{A} ou χ est composé d'une construction (χ_B) qui prouve \mathbf{B} . La condition nécessaire est néanmoins assortie d'une contrainte supplémentaire : une preuve de \mathbf{A} ou une preuve de \mathbf{B} est une preuve de $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ à condition de stipuler que nous voulons considérer la preuve présentée comme une évidence pour $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ (Troelstra&van Dalen).

(iii) $\pi(\chi, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ si, ssi, pour toutes les constructions κ , si $\pi(\kappa, \mathbf{A})$ alors $\pi(\chi(\kappa), \mathbf{B})$,

se lit : χ est une construction prouvant $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ ssi, pour toute construction κ , si κ prouve \mathbf{A} alors la construction χ instantiée par (ou appliquée à) la construction κ prouvant \mathbf{A} est une construction qui prouve de \mathbf{B} (χ transforme toute preuve de \mathbf{A} en une preuve de \mathbf{B}).

(iv) $\pi(\chi, \neg \mathbf{A})$ ssi, pour toute construction κ , si $\pi(\kappa, \mathbf{A})$ alors $\pi(\chi(\kappa), \perp)$ ou \perp est une proposition intuitivement (et intuitionnistiquement) réfutable,

se lit : χ est une construction qui prouve $\neg \mathbf{A}$ ssi, pour toute construction κ , si κ est supposée prouver \mathbf{A} alors la construction χ appliquée à κ transforme \mathbf{A} en une construction \perp dont on sait de manière intuitive et immédiate qu'elle est absurde (ou contradictoire). Comme

construction \perp nous pourrions avoir quelque chose du type "1=0", mais attention : l'absurde (contradiction) n'est pas en soi une construction mentale et, donc, n'a pas de preuve car *la notion de contradiction doit être vue comme une notion primitive et non expliquée* (Troelstra&van Dalen).

(v) **$\pi(\chi, \exists x Ax)$ ssi, il existe une construction τ et une construction κ tel que $\chi=[\kappa, \tau]$ et $\chi(\kappa, A(\tau))$,**

se lit : χ est une construction qui prouve $\exists x Ax$ ssi, χ est composé de (ou décomposable en) deux constructions τ et κ telles que τ instancie A et κ prouve $A(\tau)$.

(vi) **$\pi(\chi, \forall x Ax)$ ssi, pour chaque nombre n , $\pi(\chi(n), A(n))$, ou " n " est le terme associé au nombre n ,**

se lit : χ est une preuve de $\forall x Ax$ ssi, pour chaque nombre n , la construction χ instanciée par n est une construction qui prouve A instancié par le terme codé (de manière standard) par n .

Comme l'ont signalé Troelstra et van Dalen ci-dessus, l'explication de ces règles « *repose elle-même sur notre compréhension de la notion de construction* », ce qui nous autorise à poser l'hypothèse de travail suivante : nous considérons que

- ***la procédure effective est une des interprétations possibles de la notion de construction.***

Aussi, sans assimiler *stricto sensu* la preuve intuitionniste à la procédure effective, la seconde peut être vue comme une instance ou une expression possible de la notion de preuve intuitionniste (sous certaines conditions que nous préciserons) :

- ***Une procédure effective est un des modes de la preuve intuitionniste, autrement dit : toute procédure effective est une preuve intuitionniste (la réciproque n'étant pas vraie)***

Si nous admettons ces postulats, nous sommes autorisés à appliquer aux procédures effectives les règles de composition de la logique intuitionniste et, plus généralement, les outils d'analyse intuitionnistes de la preuve, en les particularisant – la naturalité avec laquelle ces outils s'adaptent plaide en faveur de notre postulat.

2°- Générale, potentielle et virtuelle

Avec la preuve, nous retrouvons le questionnement sur ce que nous avons nommé effectivités potentielle, générale et virtuelle. Considérons les propositions arithmétiques :

A : "247 est premier ou composite" ;

B : "10¹⁰¹⁰ + 1 est un nombre premier ou composite"⁽²⁵²⁾

C : "Tout nombre entier est premier ou composite"

Et supposons que l'agent mathématique aux prises avec elles n'a jamais produit aucune preuve directe (par calcul numérique) de A et de B, mais qu'il a produit une démonstration (au sens classique) de la proposition générale C. Si l'agent adhère à l'épistémologie classique, il

²⁵² On suppose que la preuve directe (calcul) de cette proposition dépasse toute capacité de calcul en temps raisonnable des ordinateurs modernes.

pourrait affirmer la vérité de A et de B en vertu de la vérité de C, dont il s'est convaincu par la démonstration²⁵³. Mais si l'agent adhère au point de vue intuitionniste ou a une conception anti-réaliste et mentale des mathématiques de type semi-intuitionniste, il peut considérer que la proposition B, même si elle semble évidente, n'a aucun sens mathématique du fait qu'il a la *certitude* qu'une telle proposition ne peut être prouvée directement et constructivement, c'est-à-dire *effectivement* au sens kroneckerien, tel le cas du nombre M_{1000} de Borel. Cette certitude lui vient de la réflexion que son temps de vie ne suffirait pas à accomplir le calcul²⁵⁴.

Or, voilà : la mise en doute du sens de la proposition B (i.e. de sa prouvabilité intuitionniste) sous l'argument d'impossibilité matérielle ou temporelle d'en produire une preuve directe conduit nécessairement à mettre en doute le jugement de vérité de la proposition A, du moins *tant que A n'a pas été constructivement prouvée* : qu'est-ce qui permet d'affirmer que A est vérifiable et que B n'a pas de sens sans avoir vérifié A ni prouvé que B n'a pas de preuve au sens mathématique c'est-à-dire hors considération de temps ? Ce serait-là contrevenir au principe intuitionniste de la primauté de la preuve sur la vérité... Et cette deuxième mise en doute se répercute à son tour sur la proposition C : en vertu de quel principe peut-on simultanément accepter la démonstration/preuve d'une proposition générale (sur le mode infini potentiel) et rejeter des propositions particulières qu'on considère potentiellement ou *logiquement* incluses dans celle-ci ?

²⁵³ Ici, nous nous servons du vocabulaire de l'épistémologie mathématique classique (la vérité d'une proposition est indépendante et préalable à sa démonstration), lié au point de vue de l'agent classique.

²⁵⁴ Ou, pour être plus moderne, que le calcul par ordinateur dépasserait un *temps raisonnable* (nous reviendrons longuement sur ce concept)

Pourtant aucun mathématicien sérieux ne mettrait en doute la prouvabilité-vérité de A et C – même si certains trouveraient que celle de B est problématique. Mieux, les règles de la logique intuitionniste exposées ci-dessus semblent nous dire que la preuve d’une proposition générale universelle équivaut à la preuve de chacune de ses instances ou, du moins, que d’une telle preuve on déduit la preuve d’une quelconque de ses instances : si C est vraie, alors A et B sont vraies... Mais ce serait là, selon Michael Dummett, fondateur du courant néo-intuitionniste, une mauvaise interprétation des règles intuitionnistes. Dummett s’en est expliqué notamment dans son texte *The philosophical basis of intuitionistic logic*²⁵⁵ de 1973. Dans le cas d’une proposition du type de A, écrit Dummett (p.115),

« la définition de la vérité nous dit, par exemple, que

"598017 + 246532 = 844549" est vraie

seulement dans le cas où 598017 + 246532 = 844549. Nous pouvons effectuer le calcul, et découvrir que 598017 + 246532 est en effet égal à 844549 : mais cela signifie-t-il que l'équation était déjà vraie avant que le calcul ne soit effectué, ou qu'elle aurait été vraie même si le calcul n'avait jamais été effectué ? »

Et concernant le lien entre des propositions de type A (ou B) et de type C, il écrit (p.117) :

« Si une preuve d’une proposition quantifiée universellement est

²⁵⁵ **Dummett**, *The philosophical basis of intuitionistic logic*, in *Proceedings of the Logic Colloquium*, Bristol, 1973, repris dans **Putnam & Benacerraf** (eds.), *Philosophy of mathematics*, 2nd édition, Cambridge University Press, 1983, p.97-129. La traduction est nôtre.

simultanément une preuve de toutes ses instances, il est difficile de voir comment nous pouvons éviter de considérer qu'une démonstration de la validité d'un schéma de la logique des prédicats de premier ordre est simultanément une démonstration de la vérité de toutes ses instances, ou [que] l'acceptation d'un schéma d'induction [est] simultanément l'acceptation de tous les cas induits. »

Il a y donc *a priori* trois écueils dans l'interprétation naïve des règles intuitionnistes : 1) la question de la certitude ou l'évidence de la prouvabilité (vérité) d'une proposition non actuellement prouvée (A, B), 2) la question du rapport entre la preuve (réalisée) d'une proposition universelle et la prouvabilité de propositions particulières pouvant être vues comme des instances de la première, 3) la possibilité que, de deux propositions particulières pouvant être vues comme deux instances d'une même proposition générale prouvée, l'une puisse être vraie (ou vérifiable), l'autre non.

Centrons-nous d'abord sur les propositions A et B : quel est le problème posé ? Si nous considérons que l'agent doit se déclarer ignorant quant à la vérité de ces propositions du fait qu'il n'en détient actuellement aucune preuve directe, cela va à l'encontre du "bon sens" : tout mathématicien sait²⁵⁶ que tout nombre entier est premier ou composite. Mais si nous les acceptons, nous admettons alors qu'il est possible de connaître la vérité d'une proposition sans en construire aucune preuve directe. Ce point de vue, qui fait précéder la connaissance de la vérité d'une proposition à la possession d'une preuve c'est-à-dire qui admet la possibilité d'une primauté de la vérité sur la preuve, n'est acceptable que

²⁵⁶ Une telle connaissance peut lui venir de l'expérience, et ne requiert pas nécessairement d'avoir déjà produit la démonstration de la proposition : "tout nombre entier est premier ou composite".

d'un point de vue réaliste où la vérité de ces propositions serait intrinsèque et indépendante de notre capacité à la connaître, du fait que nous possédons le don de saisir "spontanément" cette qualité de vérité – sorte de réminiscence platonicienne.

Dans son texte, Dummett repousse le point de vue réaliste d'abord par un argument d'"usage" :

« le sens d'un énoncé mathématique détermine et est exhaustivement déterminé par son usage, écrit-il. Le sens d'un tel énoncé ne peut pas être, ni contenir comme ingrédient, quelque chose qui n'est pas manifeste dans l'utilisation qu'on en fait, résidant uniquement dans l'esprit de l'individu qui appréhende son sens : si deux individus s'accordent parfaitement sur l'usage qui est fait d'une proposition, alors ils s'accordent sur son sens. La raison en est que le sens d'une proposition consiste uniquement en son rôle d'instrument de communication entre individus, de la même manière que le pouvoir d'une pièce d'échec consiste uniquement en son rôle dans le jeu en fonction des règles. Un individu ne peut communiquer ce qu'on ne peut le voir communiquer [...] »²⁵⁷.

Certes, la *connaissance* du sens d'une proposition mathématique par un individu demeure en général implicite dans une communication, écrit Dummett (p.99-100), mais elle s'exprime entièrement par la manipulation qu'en fait celui qui l'utilise : les gestes physiques associés à l'utilisation d'une proposition contiennent et transmettent implicitement son sens. En revanche, la conception réaliste, qui implique la possibilité d'une connaissance mathématique acquise mais qui ne s'exprimerait ni ne se transmettrait par l'usage, même implicitement, est un non-sens (p.105-

²⁵⁷ Dummett, *The philosophical basis of intuitionistic logic*, op. cit., p.98.

107). Dans tous les cas, considérant que :

« nous sommes certains de la vérité d'une proposition quand nous possédons des raisons conclusives à son sujet et que nous sommes certains que les raisons que nous avons sont des raisons valides pour elle et qu'elles sont conclusives » ⁽²⁵⁸⁾, Dummett propose de remplacer, *« comme notion centrale de la théorie du sens [des propositions mathématiques], la condition sous laquelle une proposition est vraie, que nous sachions ou puissions savoir quand cette condition est obtenue, par la condition sous laquelle nous reconnaissons la proposition comme [étant] conclusivement établie, condition que nous devons [...] être capables de reconnaître **effectivement** chaque fois qu'elle est obtenue. Puisque nous [parlons] des propositions mathématiques, que nous reconnaissons comme vraies par les moyens d'une preuve (ou, dans les cas simples, d'un calcul), cela [signifie] remplacer la notion de vérité par celle de preuve. »* Ce qui, en termes généraux, revient à remplacer la notion de vérité par celle de *vérification* : *« connaître le sens d'une proposition c'est, de ce point de vue, être capable de reconnaître tout ce qui entre en jeu dans la vérification de la proposition, i.e. comme établissant conclusivement celle-ci comme vraie. »*⁽²⁵⁹⁾

Ainsi, connaître la vérité d'une proposition c'est en posséder une preuve ou du moins en reconnaître ses conditions de vérification. Dans le cas de figure envisagé pour A et B, c'est donc une question de *reconnaissance des conditions de vérification* qui s'applique. La suite du texte nous permet de mieux cerner le sens de cette alternative : Dummett

²⁵⁸ Ibid., p.97.

²⁵⁹ Ibid., p.108-109.

introduit le concept d'«assertabilité»²⁶⁰ d'une proposition, ce qui lui permet de distinguer le prouvé du prouvable et d'étudier les conditions sous lesquelles une proposition non prouvée *directement* peut néanmoins avoir une qualité de *prouvable en principe*. Ainsi, à la p.110, il écrit :

« Une conception du sens [des énoncés] comme déterminé par les conditions de vérité est valable pour tout énoncé lié à une réalité existant indépendamment, alors nous pouvons légitimement admettre, pour chaque énoncé de ce type, qu'il possède une valeur de vérité déterminée, vraie ou fausse, indépendamment de notre connaissance, selon qu'il s'accorde ou non avec la constitution de cette réalité extérieure à laquelle il réfère. Mais, quand les énoncés d'une certaine classe ne réfèrent pas à une telle réalité extérieure, la supposition que chacun d'eux possède une valeur de vérité déterminée est vide, et alors nous ne pouvons pas les considérer comme acquérant un sens par leur simple association à des conditions de vérité ; nous devons, dans de tels cas, faute de mieux²⁶¹, les prendre comme ayant acquis un sens d'une manière différente, concrètement en leur associant des conditions d'un type différent – **conditions que nous sommes capables de reconnaître quand elles se produisent** – c'est-à-dire, ces conditions sous lesquelles nous prenons leur assertion ou leur dénégation comme étant conclusivement justifiée. »

Plus loin (p.121-122), Dummett précise ce concept d'assertabilité et le problème qu'il peut poser dans des cas comme celui de propositions de type B :

²⁶⁰ Nous nous servons des anglicismes "assertabilité", "asserté", pour décliner l'adjectif "assertable" qui, en toute rigueur signifie : assertorique (non apodictique).

²⁶¹ En français dans le texte.

« [En logique intuitionniste] l'explication standard de la disjonction c'est qu'une construction est une preuve de $A \vee B$ seulement dans le cas où elle est une preuve ou de A ou de B . Malgré cela, il n'est pas normalement considéré comme légitime d'asserter une disjonction, disons au cours d'une preuve, uniquement quand nous avons une preuve de l'un ou l'autre des [membres de la disjonction]. En l'occurrence, il serait normal d'asserter que

$10^{10} + 1$ est un premier ou composite

sans être capable de dire laquelle des alternatives est la bonne, et d'en dériver un théorème au moyen d'un argument par cas. Ce qui rend cela légitime, d'un point de vue intuitionniste standard, c'est que **nous avons une méthode qui est effective en principe pour décider laquelle des deux alternatives est correcte** : si nous prenons la peine d'appliquer cette méthode, l'appel à un argument par cas pourrait être dispensé. Aussi, de manière générale, si nous prenons un énoncé comme étant vrai seulement quand nous en possédons réellement une preuve, une assertion d'un énoncé disjonctif ne va pas jusqu'à affirmer qu'il est vrai, mais seulement que nous avons les moyens, effectifs en principe, d'en obtenir une preuve. Cela signifie toutefois que **nous devons distinguer entre une preuve proprement dite, une preuve dans le sens de "preuve" utilisée dans l'explication des constantes logiques, et un argument convaincant**. [...] Cet argument ne sera pas lui-même une preuve, puisque tout segment initial de preuve doit à son tour être une preuve : il indique uniquement une méthode effective par laquelle nous pourrions obtenir une preuve du théorème si nous prenons la peine de l'appliquer. Il nous semble ainsi nécessaire de distinguer entre une preuve proprement dite – une preuve canonique – et un type d'argument qui apparaîtra normalement dans un article

ou un livre mathématique, un argument que nous pourrions appeler une "démonstration". Une démonstration est tout autant convaincante comme base pour l'assertion de sa conclusion que l'est une preuve canonique, et elle est liée à cette dernière ainsi : **une démonstration d'une proposition fournit un moyen effectif pour trouver une preuve canonique.** Mais c'est en termes de notion de preuve canonique que les sens des constantes logiques sont donnés. Les mêmes remarques s'appliquent exactement au quantificateur existentiel.

Il y a une certaine maladresse dans cette manière de regarder la disjonction et la quantification existentielle, i.e. le divorce entre les notions de vérité et d'assertabilité. Il pourrait être répliqué que la signification de l'acte d'assertion n'est pas, en général, uniquement déterminé par la notion de vérité : en l'occurrence, même quand nous considérons la notion de vérité des énoncés mathématiques comme donnée, il faut encore préciser si l'assertion d'un énoncé mathématique revient à l'affirmation de la possession d'une preuve, ou si elle serait légitimement basée sur ce que Polya appelle un "argument plausible" d'un genre non-apodictique. [...] Il n'en demeure pas moins que, si la vérité d'un énoncé mathématique consiste en notre possession d'une preuve canonique, tandis que son assertion ne requiert que d'être basée sur une démonstration, nous sommes forcés d'assumer la gênante conclusion qu'il serait légitime d'asserter un énoncé même quand il est connu comme n'étant pas vrai. »

En résumé, selon le point de vue intuitionniste, la proposition B a un sens du fait qu'elle est assertable, c'est-à-dire que nous possédons une méthode effective qui permettrait *en principe* de produire une preuve canonique.

Avant de poursuivre sur la question de l'assertabilité, attardons-nous brièvement sur le sens que revêt le terme de *méthode effective* dans l'intuitionnisme dummettien, en précisant pourquoi nous ne voyons pas de contradiction (ou d'"imprédicativité") dans l'idée de nous servir de la preuve intuitionniste pour définir la procédure ou méthode effective.

Remarquons d'abord que Dummett se sert de cette notion de *méthode effective en principe* comme donnée primitivement : « *ce qui rend [l'assertion de l'énoncé B] légitime, du point de vue intuitionniste standard, c'est que nous avons une méthode qui est effective en principe pour décider laquelle des deux alternatives est correcte* ». De fait, il y a là deux notions imbriquées : celle de *méthode effective* et celle de *méthode effective en principe* qui en est l'un des modes.

Concernant la première, nous pourrions l'interpréter comme soutenant l'idée d'un *enchaînement correct des règles de la logique intuitionniste*, non pas dans un sens formel mais selon une certaine conception des constructions mathématiques mentales. Une méthode effective serait une succession d'actes mentaux mathématiques de construction (c'est-à-dire d'inférences de preuve) dont la correction est à entendre au sens d'une *nécessité* de nature également mentale. Nécessité qui néanmoins ne remet pas en question la nature indéterminée de la création mathématique puisqu'elle est une *nécessité de notre esprit*, dont la structure et le fonctionnement ne revêtent, en revanche, aucun caractère de nécessité²⁶². Nous pourrions dire, d'une certaine manière, que l'idée de *correction dans l'enchaînement des règles de la logique intuitionniste* signifie simplement que notre système cognitif étant comme il est, notre pensée mathématique, du moins certains principes (dont les

²⁶² En évacuant tout argument de nature religieuse, mystique ou métaphysique.

six stipulations) qui président à nos constructions mathématiques, découlent de certaines contraintes imposées par cette structure (nous approfondirons la question dans la suite).

Néanmoins, il peut sembler étrange que Dummett se serve d'une notion aussi vague et proche du (voire incluse dans le) concept de preuve comme élément dans la définition de ce dernier : dire qu'on possède une preuve quand on a une méthode effective sans définir le sens de cette dernière (indépendamment de la notion de preuve), ce n'est pas satisfaisant. Mais si Dummett met la notion de "méthode effective" du côté du *definiendum*, c'est pour l'associer au qualificatif *en principe*, lequel transforme la méthode effective en un nouveau concept intuitionniste, l'assertabilité, qui lui permet de distinguer entre correction/réalisation d'une procédure effective(-preuve intuitionniste) et la correction de ce que nous avons nommé le *schéma* d'une procédure effective, indépendamment de toute idée de sa réalisation comme preuve (c'est-à-dire son aboutissement au résultat). Distinction qui n'est pas explicitement instituée par les six stipulations de la logique intuitionniste.

Mais revenons maintenant à l'assertabilité...

II - L'assertabilité

1° - Le point de vue anti-réaliste classique

Pour les propositions du type "598017 + 246532 = 844549"
Dummett écrit donc (p.110) :

« nous devons, dans de tels cas, faute de mieux, les prendre comme **ayant acquis un sens d'une manière différente**, concrètement en leur associant des conditions d'un type différent – **conditions que nous sommes capables de reconnaître quand elles se produisent** – c'est-à-dire, ces conditions sous lesquelles nous prenons leur assertion ou leur dénéiation comme étant conclusivement justifiée. »

Et (p.121-122) :

« **nous devons distinguer entre une preuve proprement dite**, une preuve dans le sens de "preuve" utilisée dans l'explications des constantes logiques, **et un argument convaincant** [nommé "démonstration" et qui] fournit un moyen effectif pour trouver une preuve canonique. »

Quelles sont les relations, pour une proposition donnée, entre son assertion établie par sa démonstration, et sa vérité établie par une preuve ?

1) Si une proposition est vraie alors elle est assertable : une proposition dont on possède une preuve est une proposition dont on détient *a fortiori* des arguments convainquants de prouvabilité.

2) L'assertion d'une proposition générale (à quantificateurs non bornés) a valeur de preuve : si elle est assertée elle est vraie.

3) Dans le cas d'une proposition particulière, celle-ci peut être assertée sans être prouvée (cas de A) ni même prouvable (cas de B) : on en possède une démonstration qui donne le schéma d'une procédure effective de preuve, mais cette dernière n'est pas produite et, dans certains cas, n'est pas "produisible" car elle dépasse nos capacités constructives, de sorte que la démonstration de la proposition même si elle est *conclusive* ne produit pas le dernier segment de la preuve canonique.

Ainsi, contrairement à la preuve canonique, qui a toujours un caractère de nécessité *logique*²⁶³, l'assertion peut revêtir un caractère contingent, mais néanmoins mathématique, du fait qu'elle n'est pas forcément prédéterminée par (ou soumis à) la notion de vérité-preuve. Et cette disjonction entre la preuve et la démonstration (entre la vérité d'une proposition et son assertion) pose problème dans le cas limite de propositions particulières dont le dernier segment de preuve ne peut être exhibé pour des raisons, non pas nécessaires-logiques mais contingentes, comme dans le cas de la proposition " $10^{10} + 1$ est premier ou composite" ou du calcul du nombre N_{1000} de Borel.

L'existence de propositions particulières (sans quantificateurs non bornés) assertables non canoniquement prouvables creuse une brèche dans la théorie intuitionniste, théorie qui ne peut se passer de la notion d'assertabilité car celle-ci pondère la contrainte forte de prouvabilité canonique dans les cas de propositions quantifiées universellement et existentiellement – seul moyen pour l'Intuitionisme d'inclure dans son scope le mode infini potentiel et donc de recouvrir au moins le corpus des mathématiques classiques. En effet, comme l'écrit Dummett (p.123-124) :

²⁶³ Au sens intuitionniste, i.e. émanant de nos aptitudes – supposées communes – à articuler et composer d'une certaine manière nos constructions mentales.

« L'idée de Brouwer semble être que, dans une preuve totalement analysée, toutes les opérations desquelles dépend la preuve devront véritablement avoir été exprimées. Voici pourquoi une preuve peut être une structure infinie : une preuve d'un énoncé quantifié universellement sera une opération qui, appliquée à chaque entier naturel, conduira à une preuve de l'instance correspondante ; et si cette opération est effectuée pour chaque entier naturel, nous aurons des preuves d'une quantité dénombrable d'énoncés. La conception de la construction mentale qu'est la preuve totalement analysée comme ayant une structure infinie doit, bien sûr, être interprétée à la lumière du point de vue intuitionniste selon lequel toute infinité est une infinité potentielle : **la construction mentale consiste en la compréhension des principes généraux selon lesquels tout segment fini de la preuve peut être explicitement construit.** [...] Tandis qu'on ne peut être convaincu par une structure de preuve infinie actuelle (puisque'on ne pourrait jamais atteindre la conclusion), on peut être convaincu par une [structure de preuve] potentiellement infinie, parce que cette infinité consiste en notre compréhension des principes gouvernant son analyse. Aussi, on peut raisonnablement dire que la signification intuitionniste standard des quantificateurs universels et conditionnels implique qu'une preuve est une telle structure infinie potentielle. Nonobstant, la notion de preuve totalement analysée, c'est-à-dire, [la notion] de résultat de l'application de chaque opération impliquée, est loin d'être claire [...]. Mais, pour les présents propos, il importe peu de savoir exactement comment la notion de preuve canonique doit être expliquée ^[264]; la seule chose qui compte est que nous avons besoin de distinguer entre les preuves canoniques et les démonstrations, liées l'une à l'autre de

²⁶⁴ Cette explication de la notion de preuve fait l'objet de la section II et III de la présente partie.

la manière qu'il a été dit. Etant entendu qu'une telle distinction est nécessaire, il n'y a pas de raison de refuser de l'appliquer aux cas des disjonctions et des énoncés existentiels. »

Ainsi, dans le cas d'une proposition à quantificateurs (non bornés), la compréhension de ses principes généraux vaut preuve. Du coup, on a deux définitions de la preuve : la preuve d'une proposition sans quantificateurs est une preuve canonique, la preuve d'une proposition à quantificateurs est le schéma d'une preuve canonique. Drôle de bipartition... car elle introduit une scission dans le champ épistémique rendant le concept de preuve bicéphale : l'expérience de la certitude de la vérité d'une proposition est fournie, dans un cas, par la possession d'une procédure effective-preuve canonique, dans un autre cas par la possession d'une procédure effective en principe-assertion (démonstration) – ce qui nous permet d'expérimenter la certitude de pouvoir posséder une preuve qu'on n'expérimente pas.

Comme le signale Detlefsen en note 9 de son article *Brouwerian Intuitionism*²⁶⁵ (que nous auront amplement l'occasion d'aborder), Brouwer écrivait en 1948, dans *Conscience, Philosophie, et Mathématique*²⁶⁶ :

« la vérité réside seulement dans la réalité, i.e. dans les expériences de conscience présentes et passées. Parmi elles il y a des choses, des qualités de choses, des émotions, des règles (règles de l'Etat, règles de coopération, règles de jeu), et des faits (faits matériels, faits de

²⁶⁵ **Detlefsen**, *Brouwerian Intuitionism*, 1990, in **Detlefsen** (ed.), *Proof and Knowledge in Mathematics*, Routledge, 1992, p.208-250. La note 9 est en p.245.

²⁶⁶ **Brouwer**, *Consciousness, Philosophy, and Mathematics*, in *Proceedings of the tenth International Congress of Philosophy*, Amsterdam, 1948, trad. dans **Largeault**, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.419-440.

pensée, faits mathématiques). Mais des expériences attendues et des expériences attribuées à d'autres n'ont qu'une vérité d'anticipation ou d'hypothèse ; dans leur contenu il n'y a point de vérité. »²⁶⁷

On pourrait interpréter ce propos comme signifiant que la possession d'une procédure effective en principe (une démonstration) d'une proposition sans quantificateurs, qui est proprement une construction garantissant une *expérience attendue* de preuve, ne véhicule pas de vérité. Mais ce serait une analyse superficielle puisque, même si elle ne conduit pas à l'expérience de la possession d'une preuve, elle est elle-même une *expérience de conscience présente ou passée* de nature authentiquement mathématique. Autrement dit, l'assertion est, comme la preuve, un concept légitime du point de vue intuitionniste, mais ces deux actes de construction mathématique ne sont pas épistémiquement équivalents : ils ne réalisent pas le même *objet*. Pour le dire autrement, la *démonstration* de la proposition "10¹⁰ + 1 est un premier ou composite" est une preuve de *quelque chose* mais pas celle de la proposition elle-même.

Ce qui vient compliquer l'affaire c'est que pour l'Intuitionisme aucune distinction épistémique entre preuve canonique (d'une proposition particulière) et démonstration (d'une proposition à quantificateurs) *ne doit* être faite, au risque de créer un gap : une définition de la preuve mathématique dans la sphère de l'infini potentiel n'ayant pas valeur de preuve dans celle du fini. Concrètement, le schéma de procédure effective pour déterminer si un nombre entier quelconque est premier ou composite est une preuve de la proposition "tout nombre est premier ou composite"⁽²⁶⁸⁾ mais pas de la proposition "123417 est premier ou

²⁶⁷ Brouwer, *op. cit.*, p.433.

²⁶⁸ Un schéma peut s'énoncer ainsi : "diviser n par tous les nombres qui précèdent la partie entière de $n/2$ et voir si l'une de ces divisions donne un nombre entier, si c'est le cas n est composite sinon n

composite" : là, le schéma ne vaut que comme argument conclusif en principe car il donne seulement une méthode garantissant qu'on peut produire une preuve de la proposition, sans que cette production soit effectuée.

In fine, posséder un schéma de procédure effective prouvant la vérité de l'énoncé C instantié par un nombre entier quelconque donné noté n ne signifie nullement la preuve de la vérité de chaque instance n de la proposition.

Doit-on alors admettre cette bi-partition du concept de vérité d'une proposition en deux sous-genres de constructions mentales, la preuve canonique pour les énoncés particuliers et la démonstration pour les énoncés existentiels et universels (Dummett p.124 : « *nous devons, dans de tels cas, faute de mieux, **les prendre comme ayant acquis un sens d'une manière différente**, concrètement en leur associant des conditions d'un type différent – conditions que nous sommes capables de reconnaître quand elles se produisent – c'est-à-dire, ces conditions sous lesquelles nous prenons leur assertion ou leur dénégaration comme étant conclusivement justifiée.* ») – bi-partition qui 1) présente une solution de continuité épistémique, 2) semble *ad hoc* et sans réelle justification, 3) nous laisse un goût d'arbitraire quand on se réfère au cas d'une proposition de type B^{269} ? On comprend l'embarras de Dummett (p.124) :

« Demandons-nous si nous voulons que la vérité d'un énoncé mathématique consiste en l'existence d'une preuve canonique ou d'une démonstration. Si par l'"existence" d'une preuve ou d'une démonstration nous entendons que nous avons réellement

est premier".

²⁶⁹ A la décharge de l'intuitionisme, cette brèche s'étend au-delà de ce seul cadre puisqu'elle est une émanation du paradoxe du sorite (nous en reparlons ci-dessous)

explicitement effectué cette preuve ou démonstration, alors les deux alternatives nous laissent avec quelques conséquences contre-intuitives. »

2°- Le point de vue anti-réaliste strict

Depuis que Dummett a mis en lumière ces « *conséquences contre-intuitives* » de l'introduction du concept *a priori* non apodictique d'assertabilité, en tant que preuve de propositions à quantificateurs non bornés, la recherche d'une solution a inspiré plusieurs auteurs. Citons un texte de Jacques Dubucs, *Feasibility in Logic*, datant de 2002 (²⁷⁰), qui présente deux avantages : d'une part, il y propose l'esquisse de solution (du point de vue *anti-réaliste strict*), d'autre part, il y expose de manière concise l'état de l'art en matière de réflexion sur l'assertabilité. Nous commenterons de larges extraits du texte.

Dubucs écrit en introduction (p.213) :

« Un des sujets les plus débattus en philosophie contemporaine est le suivant : devons-nous admettre une théorie vériconditionnelle du sens, qui ouvre à des conditions de vérité pouvant transcender notre aptitude à savoir si elles sont remplies ou non, ou, comme le suggère l'anti-réaliste, devons-nous remplacer ces conditions par celles de l'assertabilité dont l'accomplissement, quand il se réalise, ne peut pas ne pas être reconnu ? [...] Dans la mesure où elle professe une doctrine qui diffère sensiblement du réalisme, l'anti-réaliste est [...]

²⁷⁰ Dubucs, *Feasibility in Logic*, Synthese **132**, 2002, p.213-237.

*tenue [de produire] une définition générale des conditions sous lesquelles [nous] sommes capables de reconnaître la vérité d'un énoncé c'est-à-dire de **reconnaître les conditions sous lesquelles un énoncé est assertable en premier lieu par nous***^[271]. »

De fait, l'article cible directement cette brèche ouverte par la bipartition de la définition de la preuve/démonstration qui, nous l'avons dit, s'exprime dramatiquement dans les propositions ayant un schéma de preuve effectif (*effectivité en principe*) mais dont la réalisation (expression du dernier segment de la preuve) est purement virtuelle du fait de l'impossibilité pratique à la produire (énoncés de type B).

Pour combler ce *hiatus* entre preuve totalement réalisée et preuve réalisée en principe, qui pourrait aussi marquer une frontière entre les domaines de l'apodictique et du non-apodictique²⁷², Dubucs propose une solution radicale : instaurer une nouvelle ligne de partage qui viendrait se placer en deçà de celle séparant le décidable du non-décidable (*effectivité*), une nouvelle frontière entre le *décidable en principe par procédure effective* (notamment les énoncés de type B) et le *décidable par procédure effective faisable pratiquement* (énoncés de type A). Le point essentiel de sa proposition étant le postulat suivant : cette nouvelle frontière serait définissable *dans le langage de la logique de 2^e ordre*, ce

²⁷¹ Dummett écrivait en effet (**Dummett**, *The philosophical basis of intuitionistic logic*, op. cit., p.110, voir ci-dessus) que nous devons associer aux propositions « *des conditions d'un type différent – **conditions que nous sommes capables de reconnaître quand elles se produisent** – c'est-à-dire, ces conditions sous lesquelles nous prenons leur assertion ou leur dénégation comme étant conclusivement justifiée.* »

²⁷² **Dummett**, op. cit., p.122 : « *en l'occurrence, même quand nous considérons la notion de vérité des énoncés mathématiques comme donnée, il faut encore préciser si l'assertion d'un énoncé mathématique revient à l'affirmation de la possession d'une preuve, ou si elle serait légitimement basée sur ce que Polya appelle un "argument plausible" d'un genre non-apodictique* »

qui revient à doter l'assertabilité (sous la contrainte de faisabilité) d'un caractère logique/apodictique et non seulement mathématique.

Remarquons que du point de vue mathématique non apodictique, il existe déjà un principe de partage à l'intérieur de la sphère des propositions décidables : les différentes sous-classes de la classe des propositions décidables, instituées par la théorie de la complexité algorithmique : P, NP (dont NP-complet et BPQ), PSPACE, EXPTIME, EXPSPACE, etc.

De fait, le problème entrevu par Borel concernant les très grands nombres a trouvé son expression rigoureuse dans la grille d'analyse des classes de complexité de l'informatique théorique. Il s'agit non plus d'une analyse en termes statiques (une proposition particulière donnée, p.ex B) mais dynamique : une proposition générale dont les instances (en n) particulières sont décidables mais dont les besoins en calcul (en temps ou en espace) croissent selon une fonction de type $f(n) > n$ ($\forall n > n_0$ donné). Le cas de la proposition B s'inclut dès lors dans la famille de propositions particulières de type "n est un nombre premier" aux caractéristiques suivantes : le temps nécessaire pour résoudre l'une quelconque de ces propositions particulières données croît de manière polynomiale non déterministe quand n croit de manière polynomiale (classe NP) – famille qui néanmoins a pu être ramenée à la classe BPQ des problèmes pouvant être résolus en temps polynomial par un algorithme quantique avec une marge d'erreur bornée (inférieure à 25% en moyenne) en 2001. Toutefois, il n'y a pas de raison *a priori* d'identifier ces classes de complexités avec l'objet logique visé par Dubucs, du moins tant que cette identification n'a pas été rigoureusement construite, la nature non apodictique des ces classes de complexité empêchant justement une telle identification *a priori* : le concept de "temps (ou espace) raisonnable" n'ayant pas – jusque-là – de traduction en termes logiques, non pas tant à cause de la variable "temps"

que de la notion de "raisonnable".

Pour revenir à l'article de Dubucs, celui-ci se déploie sur deux axes. Le premier, épistémologique, consiste en la critique du concept traditionnel (depuis Dummett) d'*effectivité en principe* et de son rapport à l'assertabilité : Dubucs y distingue deux modes d'assertabilité, *faible* et *forte*, et montre que seul le mode *forte* échappe d'une part à la tentation réaliste, d'autre part, à la tentation de subjectiviste. Ce mode fort de l'assertabilité devient alors un concept apodictique fondateur, dans le cadre d'une épistémologie anti-réaliste stricte. Le deuxième axe de l'article est l'esquisse d'une logique intégrant et traduisant ce concept d'assertabilité forte. Dubucs, p.214 :

« La thèse que je m'apprête à défendre (à la suite notamment de Wright (1987)) est que la façon dont l'anti-réalisme traditionnel caractérise ces conditions d'assertabilité est dans tous les cas insuffisante, et qu'il serait préférable de remplacer le point de vue dummettien de l'effectivité en principe par celui de la faisabilité pratique. Ensuite, je tenterai de montrer que la version radicale de l'anti-réalisme à laquelle cette perspective conduit nécessairement met en jeu des catégories telles que celles d'un acte justificatif "véritablement à notre portée", qui ne peuvent être analysées dans le cadre habituel des systèmes de type de Hilbert; à la place je considère que des logiques "sub-structurelles" se présentent comme un cadre prometteur pour la définition d'une notion rigoureuse des conditions d'assertabilité bien adapté pour ce genre d'anti-réalisme. »

Néanmoins, dans le cadre de notre travail, nous nous intéresserons exclusivement à l'aspect épistémologique des arguments de l'auteur (en particulier les pages 214 à 221). Dubucs y exprime d'abord les deux

principes qui selon lui régissent le concept d'assertabilité (p.214-215) :

« De manière générale, les conditions d'assertabilité qu'on cherche à définir devraient satisfaire deux exigences distinctes. La première est le

Principe d'immanence : *les conditions sous lesquelles l'assertion d'un énoncé est justifiée doivent toujours être reconnaissables (par nous) quand elles sont satisfaites.*

Il est absolument nécessaire de mentionner la raison qui rend si ardente l'obligation d'immanence, du fait qu'elle découle, comme dit Dummett, de la véritable «nature du cas» (1978, 227): l'anti-réalisme serait une doctrine absurde, si les conditions d'assertabilité qu'il introduit étaient aussi transcendantes, par rapport à nos capacités recognitionnelles, que les conditions de vérité dont il recommande le bannissement.

La deuxième condition est le

Principe d'implicité : *la définition des conditions sous lesquelles l'assertion d'un énoncé est justifiée ne doit pas faire explicitement référence à nos capacités recognitionnelles.*

Ce principe interdit l'immanence d'être purement et simplement stipulé, à savoir obtenu par vim definitionis en vertu d'une clause dans le style suivant : A est assertable si et seulement si (i) une certaine condition C(A) advient et (ii) il est de notre capacité de reconnaître que la vraie condition C(A) advient. Si ce genre de définition était autorisé, nous obtiendrions immédiatement une

solution triviale et peu instructive au problème auquel nous sommes confrontés, en identifiant $C(A)$ aux vraies conditions de vérité de A: bien sûr, on ne peut guère se contenter de cette solution. L'explicandum, comme nous venons de le voir, devrait concerner notre propre condition cognitive, à l'exclusion de tout le reste. L'explicatum, au contraire, devrait être purifié de toute référence explicite à cet élément. »

Il s'agira dans la suite de tirer les conséquences de ces deux principes dans le respect le plus rigoureux de l'épistémologie anti-réaliste.

De fait, une grande place est faite à la discussion autour du *Principe d'immanence* (et la signification à donner à la notion de "reconnaissable") touchant au problème, que nous avons déjà évoqué, des propositions dont le schéma de preuve est effectif mais non faisable pratiquement.

L'analyse du second principe, celui *d'implicité*, occupe bien moins de place tant il semble immédiat : dans les constructions logiques ou mathématiques jamais il n'est fait d'allusion à la structure cognitive de l'agent constructeur. Il est donc *a priori* un marqueur essentiel pour l'épistémologue des mathématiques, situant la ligne qu'il ne doit pas franchir pour rester du côté de sa science-matière référente (en l'occurrence, les mathématiques et la logique). C'est pourquoi ce principe occupe implicitement une place centrale dans l'argumentation de Dubucs et, paradoxalement, c'est elle qui à notre avis mérite surtout d'être analysée. Nous verrons que si le Principe d'implicité ne doit ni ne peut être mis en doute, il est un point de vue d'où son interprétation est ambiguë et doit être précisée.

Aussi, nous allons thématiser notre analyse autour des deux principes, ce qui nous obligera à bouleverser légèrement l'ordre

d'exposition de l'article original (et à agrémenter certaines citations de notre habituel "Nous en parlons dans la suite").

a) Sur le Principe d'immanence

Reprenons la définition de la p.214 et citons la suite, avant de commenter l'ensemble :

« Principe d'immanence : les conditions sous lesquelles l'assertion d'un énoncé est justifiée doivent toujours être reconnaissables (par nous) quand elles sont satisfaites. »

Il est absolument nécessaire de mentionner la raison qui rend l'immanence une si ardente obligation, du fait qu'elle découle, comme dit Dummett, de la véritable «nature du cas» (1978, 227): l'anti-réalisme serait une doctrine absurde, si les conditions d'assertabilité qu'il introduit étaient aussi transcendantes, par rapport à nos capacités recognitionnelles, que les conditions de vérité dont il recommande le bannissement. »

A la p.215, Dubucs précise :

« Concernant les énoncés mathématiques, la définition traditionnelle des conditions d'assertabilité satisfait partiellement la condition d'immanence, et satisfait totalement la condition d'implicité : un énoncé est dit assertable s'il y a une preuve effective pour lui, à savoir s'il y a une suite finie d'énoncés dont l'énoncé en question est le dernier, où chaque élément résulte immédiatement des précédents »

par l'application d'une règle d'inférence, ces règles d'inférence étant elles-mêmes en nombre fini. »

Remarquons ici que le concept d'effectivité est entendu au sens (post-)Churchien : est effectif ce qui est exprimable en un nombre fini de formules bien formées²⁷³ dont l'enchaînement (inférences) respecte un ensemble fini de règles établies à l'avance (système formel fini). Cette définition de l'effectivité découle directement de la thèse de Church-Turing. Or nous pensons justement que la possibilité de définir la faisabilité de manière formelle est compromise *a priori* pour cause de paradoxe. Mais avant d'argumenter en ce sens poursuivons les citations (p.215-217).

« Cette définition est suffisamment stricte pour ne pas laisser de place à des processus de vérification qui seraient réalisables uniquement par des créatures dont les capacités seraient une extension infinie des nôtres et qui seraient capables, par exemple, de baser l'assertion d'un énoncé universel sur l'inspection individuelle d'une infinité de cas particuliers. Un réaliste qui prendrait la vérité comme une forme asymptotique d'assertabilité, ou qui égalerait vérité et assertabilité chez une créature dotée d'une telle puissance recognitionnelle ultime, un tel réaliste ne pourrait, en aucun cas, se sentir à l'aise avec ce genre de notion. Donc, le principe d'immanence se révèle être partiellement satisfait, en ce sens que l'on peut concevoir des capacités recognitionnelles supérieures aux nôtres qui ne seraient pas concernées par cette définition. Pour que ce principe soit entièrement satisfait, il devrait être garanti que nos propres capacités nous permettent de reconnaître sans faute qu'un énoncé est assertable dans ce sens, notamment quand il existe une preuve

²⁷³ Dubucs se sert de cette notion dans un autre paragraphe du texte.

effective de celui-ci. Et c'est là, paix à Dummett, une condition dont on peut douter sérieusement qu'elle puisse vraiment être satisfaite.

[...]

"Reconnaître qu'un énoncé est prouvable" est une expression ambiguë, qui peut être comprise à la fois dans un sens fort (« construire une preuve de celui-ci ») et dans un sens faible (« reconnaître qu'une preuve putative de l'énoncé en est vraiment une preuve »). **Tel qu'on l'entend au sens fort, la reconnaissance est l'acte de construire un objet qui répond à certaines spécifications. Tel qu'on l'entend au sens faible, la reconnaissance est le simple processus de contrôler que les objets qui adviennent sont conformes à ces spécifications.**

[...]

Curieusement c'est un point de discussion [de savoir] si le principe d'immanence exige, comme prétend McGinn (1980), que les conditions d'assertabilité soient fortement reconnaissables, ou si l'on doit se contenter, comme fait valoir Tennant (1987, chap. XI), de leur capacité à être reconnues dans le sens faible^[274]. Un peu d'attention suffit à faire comprendre, et ce sera-là mon premier point, que l'interprétation stricte [i.e. forte] est la seule acceptable.

[...]

Clairement, un énoncé peut être assertable dans le sens [faible] et ne pas l'être dans le sens [fort]. Cela arrive chaque fois que la situation qui justifie l'assertion de l'énoncé ne peut être atteinte qu'au prix d'efforts physiques ou cognitifs beaucoup plus importants que ceux qui seraient nécessaires pour simplement reconnaître la situation

²⁷⁴ Dubucs renvoie en note 3, p.235 : « La plupart des formulations de Dummett s'accordent entièrement avec [ce dernier point de vue] : "Nous comprenons un énoncé donné quand nous savons comment en reconnaître une preuve quand elle est présentée à nous" (1993, 70). »

comme telle, une fois qu'elle a été atteinte. Il est parfaitement possible au réaliste d'admettre qu'il peut toujours y avoir un point de vue à partir duquel des capacités comme la nôtre suffiraient pour reconnaître la vérité d'un énoncé, et en même temps de faire valoir que, pour arriver à ce point de vue, les ressources cognitives ou physiques qui seraient nécessaires sont au-delà de nos limites: par exemple, on pourrait imaginer une impossibilité physiologique absolue pour nous, de placer en un certain endroit d'où l'on ne pourrait cependant pas manquer de voir, si nous devions y être, que l'énoncé est bien correct. Tout compte fait, pour que l'anti-réalisme puisse se distinguer du réalisme sur le point qui revêt une importance cruciale ici, **les circonstances dans lesquelles l'assertion est justifiée doivent être telles que non seulement nous ne puissions manquer de les reconnaître quand elles se présentent à nous, mais qu'également nous puissions toujours avoir la capacité de shifter [275] vers elles quand elles existent.**

[...]. »

Ainsi, l'auteur distingue deux interprétations du concept d'assertabilité (des propositions décidables) : l'interprétation forte selon laquelle une proposition est assertée quand sa preuve est *produite* par procédure effective, l'interprétation faible selon laquelle une proposition est assertée quand une preuve de celle-ci, donnée d'une manière ou d'une autre, est *reconnue* par procédure effective. La théorie de la complexité algorithmique va nous permettre d'illustrer simplement ces deux catégories, puisque ce sont précisément elles qui s'affrontent à la lisière des classes P et NP (nous en parlons ensuite).

²⁷⁵ Anglicisme de plus en plus usuel, que nous nous autorisons donc.

Ainsi la distinction entre les interprétations faible et forte de l'assertabilité proviennent, précise Dubucs, du fait que :

(p.217) « ***l'effectivité des preuves peut être vue de deux manières. L'effectivité est, d'un coté, la propriété qui est demandée pour que les preuves soient ratifiables. En effet, comme Church (1956, 53) l'a remarqué, s'il n'y avait pas de procédure nous permettant de décider si une séquence d'énoncés donnée est conforme aux règles de démonstration, alors le contrôle et la communication des assertions dans une communauté linguistique serait impossible, car il serait toujours possible à certains lecteurs de la preuve de se déclarer eux-mêmes non convaincus. L'effectivité, d'autre part, garantit que les théorèmes peuvent être énumérés, ne serait-ce que par la mise en place, dans l'ordre lexicographique, de la liste de toutes les séquences finies d'énoncés bien formés, et en appliquant à chacune de ces séquences le test de conformité appropriée. Ainsi, la restriction à des méthodes effectives de preuve, initialement pensées pour garantir que les énoncés assertables sont faiblement reconnaissables, peut donc être invoquée pour établir qu'ils le sont fortement [...].*** » Or (p.218) « ***Dummett (1993, 60) estime que, dans le domaine des énoncés décidables "en principe", la condition d'immanence est remplie comme il se doit [...].***

L'anti-réaliste traditionnelle [276] considère que nous avons la capacité de prouver ou de réfuter tout énoncé pour lequel une preuve ou une réfutation effective existe. Selon elle, l'immanence des conditions l'assertabilité est garantie par l'existence d'un processus algorithmique de reconnaissance

²⁷⁶ Nous gardons le genre féminin, en usage dans les textes anglais.

de ces conditions. Dans cette conception, on ne trouve aucun écho de l'effort cognitif ou physique qui doit être fait, dans les sciences empiriques, pour rendre certains les énoncés en concevant et produisant le dispositif expérimental destiné à les justifier. A l'instar des machines de Turing, qui font référence dans ce domaine, nous sommes crédités de compétences de nature strictement recognitionnelles, à savoir la capacité de générer et de contrôler. La seule tâche à accomplir est de méthodiquement énumérer les situations potentielles d'assertabilité ou de réfutabilité et d'identifier leur type, jusqu'à arriver à [p.219] une situation où la reconnaissabilité possède le caractère conclusif que nous cherchions, un évènement qui ne peut pas manquer d'arriver après un nombre fini de pas. Comme ils ne sollicitent aucune capacité physique, de tels pouvoirs d'examen et de ratification nous sont attribués sans limites. **Le fait qu'il est généralement plus long, beaucoup plus long, exponentiellement plus long, de trouver une preuve que d'examiner si une preuve supposée est réellement une preuve, cela est sous-estimé et même considéré comme n'affectant en rien notre capacité à atteindre nos objectifs de connaissance.**

[...]

Certes, il est à l'honneur de cette tradition son respect pour l'exigence d'implicité, car elle repose sur une notion "absolue" d'effectivité dans laquelle toute référence explicite à nos propres capacités recognitionnelles est évacuée. Mais, comme Wright (1980, 127) observe, «cela ne fait pas de différence que les expériences que [nous] ne pouvons faire [nous] soient refusées pour des raisons pratiques ou pour des raisons de principe». En d'autres termes, et comme Dummett (1978, 248-249) lui-même le suspecte, **on ne peut pas exclure que l'anti-réalisme traditionnel soit vulnérable à des objections très semblables aux objections**

qu'il soulève lui-même contre le réalisme. Dans un tel cas, l'anti-réalisme traditionnel doit se confronter au dilemme suivant. Soit ces objections sont incorrectes, et dans ce cas, elles laissent [également] inchangé le réalisme. Soit elles sont correctes, et cela signifie que **la véritable forme d'anti-réalisme que nous cherchons n'est pas l'intuitionisme, mais une philosophie plus radicalement révisionniste, exigeant que les conditions qui définissent l'assertabilité soient reconnaissables dans la pratique et pas seulement en théorie.** Dans les deux cas, l'anti-réalisme traditionnel ne semble pas une doctrine très recommandable [p.220] : au pire, une hétérodoxie sans réel fondement, au mieux une conception instable qui ne peut guère être adoptée que provisoirement, faute de mieux.

[...]

[Pour sortir de l'impasse], il ne suffit pas de supposer, comme fait Dummett, que **la capacité de reconnaître le réseau de connexions déductives peut se révéler tout simplement d'une façon inchoative du simple fait que l'agent est impliqué dans l'exécution d'un processus de preuve.** Tout au plus, cette participation témoigne que l'agent sait à quoi ressemble la situation qui pourrait justifier une assertion, et dans quelle orientation de recherche il devrait se tourner. La simple capacité d'obtenir une piste que l'on est constitutivement incapable de poursuivre jusqu'à la fin ne peut pas être suffisante : en logique, il n'y a pas de place pour de simples débuts.

[...]

Au contraire, nous devons définir les règles logiques de telle sorte que nous soyons en mesure, dans le pire des cas où nous sommes contraints à l'utilisation normale de nos ressources ordinaires, [p.221] de déduire B de Γ dès que cette déduction est possible.

La forme radicale d'anti-réalisme à laquelle conduisent les réflexions ci-dessus suggère de renforcer les réquisits généraux d'effectivité des règles d'inférence afin de veiller à être pratiquement, et pas seulement en principe, en mesure de reconnaître qu'un énoncé est prouvable ou déductible à partir d'une classe donnée d'hypothèses lorsque c'est effectivement le cas [...]. »

Reprenons maintenant l'essentiel des arguments de Dubucs. Suivant le principe d'immanence, il y a deux manières d'interpréter les conditions d'assertabilité d'une proposition décidable : celle de la *production* d'une preuve totalement analysée par procédure effective (version forte) et celle de la *reconnaissance* par procédure effective de la validité d'une preuve (supposée déjà produite d'une manière ou d'une autre).

Comme l'auteur y fait lui même allusion (dans un extrait non cité), cela peut être illustré dans la théorie de la complexité algorithmique. L'exemple archétypique est le problème de la Satisfiabilité (Sat ou N-Sat), qui s'énonce ainsi :

Soit une proposition logique, contenant n variables booléennes (i.e. propositionnelles), formée d'une conjonction de clauses dont chacune contient N variables, prises parmi les n (avec répétition possible), associées par disjonction et/ou négation. Par exemple, une proposition de type 3-Sat est de la forme : $(A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_4 \vee \neg A_5 \vee A_6) \wedge \dots \wedge (A_{16} \vee \neg A_1 \vee A_3)$, où $N=3$ et $n=16$ (on remarque que les variables A_n peuvent se répéter). La question est la suivante : soit une telle proposition donnée (N et n sont fixées), y a-t-il un ensemble de valeurs (V ou F) des variables A_i tel que la proposition peut être rendue vraie ?

En 1971, Stephen Cook et Leonid Levin ont démontré qu'à partir de $N>2$, les problèmes N-Sat sont NP-complet sur l'indice n . Ce qui signifie

deux choses.

1) D'une part, ces problèmes sont NP : un algorithme qui testerait une à une les valeurs de chaque variable propositionnelle ("algorithme de force brute") verrait son temps de calcul augmenter de manière exponentielle avec l'augmentation linéaire (ou linéaire polynomiale) du nombre de variables indicées par n (pour un N quelconque fixé > 2), mais dont une solution, si elle était accidentellement fournie par un processus aléatoire (non déterministe) ou – comme il est d'usage de dire – par un "oracle"²⁷⁷ serait testable en temps polynomial déterministe. Autrement dit : on ne sait pas (ou pas encore) en *produire* la preuve mais on sait la *reconnaître*.

2) D'autre part, le caractère de complétude signifie que leur complexité recouvre celle des autres problèmes NP : si l'on trouvait un algorithme résolvant en temps polynomial déterministe l'un quelconque des problèmes N-Sat (pour N fixé) – ou de tout autre problème de la sous-classe NP-complet – lorsqu'on fait croître linéairement l'indice n , alors tous les problèmes NP seraient résolubles en temps polynomial déterministe par algorithme (ou dérivé).

Cette possibilité s'exprime par la formule "P=NP", qui est l'une des grandes conjectures non encore résolues en mathématiques – précisons que si cette conjecture est encore sans réponse, il y a un certain accord informel (et soumis à variation) dans le milieu des informaticiens pour penser que $NP \neq P$, voire que $NP\text{-complet} \neq BPQ$, ce qui signifie qu'aucune machine de Turing, même quantique, ne peut résoudre ce type de problème en "temps raisonnable". En supposant qu'il n'y ait pas de mode de calcul plus efficace que le calcul quantique dans notre Univers, cela

²⁷⁷ Ou encore, par "hypercalcul".

établit *de facto* une limite universelle à ce qui est calculable, limite strictement incluse dans la classe des propositions décidables par procédure effective au sens algorithmique (churchien). Bref, une limite universelle, objective de faisabilité... et l'on en vient à l'article de Dubucs.

Car les problèmes NP-complet (et généralement NP) sont précisément, par définition, ceux qui répondent aux conditions d'assertabilité faible et dont on ignore s'ils répondent à celles de l'assertabilité forte (tant que la conjecture $P=NP$ n'est pas démontrée ni infirmée). Ils illustrent donc le point de discussion de l'article (à quelques différences près dont nous parlerons) : « *Tout compte fait, pour que l'anti-réalisme puisse se distinguer du réalisme sur le point qui revêt une importance cruciale ici, les circonstances dans lesquelles l'assertion est justifiée doivent être telles que non seulement nous ne puissions manquer de les reconnaître quand elles se présentent à nous, mais également que nous puissions toujours avoir la capacité de shifter vers elles quand elles existent.* » (p.217). Si nous appliquons ces propos au cas des problèmes NP, ils *impliqueraient* (sans nécessairement *équivaloir* à) une résolution de la conjecture $P=NP$ par l'affirmative.

D'où l'immense intérêt de l'entreprise menée par Dubucs et d'autres anti-réalistes stricts qui, en l'absence actuelle d'une preuve mathématique de l'existence d'une limite universelle et objectivement définie au calcul faisable dans notre univers, visent à établir une condition apodictique suffisante d'existence d'une telle limite. Par voie de conséquence, si l'existence d'une limite est établie par des arguments apodictiques alors, logiquement, on pourrait valider la conjecture $P=NP$ sans l'ombre d'un doute, même en l'absence d'une démonstration mathématique de celle-ci. L'enjeu est de taille.

Pourtant, et c'est là notre point, nous pensons que si une limite universelle et objective de faisabilité pratique du calcul existe, cette existence ne pourra en aucun cas être établie sous la forme apodictique du langage logique (mais elle pourrait l'être par raisonnement strictement mathématique). Car dans le cas qui nous intéresse, l'objectivité et l'universalité ne doivent pas être confondues avec le caractère apodictique d'un principe logique : elles doivent être plutôt considérées sous le même statut que les lois de la physique, c'est-à-dire comme faisant référence *implicitement* aux contingences de notre univers (nous tirons les conséquences de cela dans notre analyse du principe d'implicité ci-dessous). Et cela a une répercussion directe sur notre travail, à savoir : la voie de la logique, même intuitionniste, ne peut nous permettre de clarifier le statut des procédures effectives en principe (potentielle, virtuelle, etc.) ni, surtout, de réduire la fracture provoquée par la bipartition du concept de preuve intuitionniste.

Nous allons donner des argumentations qui nous semblent suffisantes pour écarter la piste logique, après quoi donc il nous faudra emprunter une autre voie pour tenter d'appréhender le problème – et le sens – de l'effectivité (sections suivantes).

De fait, le grand acquis de la théorie de la complexité algorithmique est d'avoir réussi à rendre opératoire et à instrumentaliser la notion fondamentale mais vague de "calculable en temps (ou espace) raisonnable". Or, à notre avis, elle ne peut qu'échapper à toute réduction logique, non pas tant à cause du concept de *temps* que de celui de *raisonnable* dont une définition logique se heurterait nécessairement au paradoxe du sorite, comme le concept de nombre raisonnablement petit (par opposition au *très grand nombre*), à savoir répondre à la question : à partir de quelle seconde (ou nombre) peut-on considérer que nous

sommes passés de la sphère du temps raisonnable à celle du temps non raisonnable ?

Certes, nous avons vu que ces notions se traduisent en des concepts mathématiques entièrement satisfaisants, au moyen d'une lecture dynamique : à la place des très grands nombres ou du temps trop long, il est question d'une croissance exponentielle, polynomiale non déterministe, etc., de l'espace ou du temps nécessaire au calcul d'une proposition en fonction de la croissance linéaire (ou polynomiale déterministe) du nombre de ses variables. Et, à l'aune de nos connaissances actuelles, la classe BPQ des problèmes calculables en temps polynomial par des algorithmes quantiques à taux d'erreur borné pourrait marquer la limite du physiquement faisable dans *notre univers*. D'une certaine manière, la théorie de la complexité a contourné le paradoxe du sorite.

L'assise de la théorie de la complexité est donc ce concept dynamique dûment défini qu'on nomme pour faire bref *temps* ou *espace raisonnable*²⁷⁸. Néanmoins, il semble difficile de définir de manière logique, c'est-à-dire apodictique, un concept ayant cette même capacité à contourner le paradoxe du sorite. En effet, il n'y a pas de distinction de nature apodictique entre croissance exponentielle, polynomiale non déterministe, etc., ces catégories n'ayant aucun caractère de nécessité logique, et si elles deviennent si importantes en théorie de la complexité, c'est qu'elles sont des objets de connaissance mathématique qui permettent d'exprimer ou de capter, *a posteriori*, certaines contingences extérieures (à leur champ) et qu'on associe, nous, à une certaine idée du temps ou de l'espace raisonnable. Les concepts d'espace ou de temps

²⁷⁸ Cela dit, la notion de "très grand nombre" (ou de "temps très long") dans son acception statique demeure paradoxale mathématiquement.

raisonnable, tels que définis par la théorie de la complexité, ne semblent donc pas susceptibles d'un fondement logique sans une allusion implicite à la taille de l'univers, au nombre de ses particules ou au temps de vie probable de notre civilisation mathématique – ce qui, bien évidemment, introduirait du non apodictique dans un raisonnement apodictique.

Néanmoins, à aucun moment Dubucs ne prétend fonder son concept logique de faisabilité sur celui mathématique de temps ou espace raisonnable (au sens technique donné plus haut). Et nous ne lui attribuons pas cette intention. Au contraire, l'objet de l'article est plutôt de fonder un concept logique duquel dériverait notamment les bien fondés concepts mathématiques. Bref, il n'y a aucune raison *a priori* pour que l'existence d'une limite apodictique séparant les concepts d'assertabilité forte et faible passe par une traduction plus ou moins directe, ou une abstraction, de ces autres concepts issus de la théorie de la complexité.

Aussi, demandons-nous quelle autre voie permettrait de contourner le paradoxe du sorite dans le champ même où il se pose, c'est-à-dire la logique. Cette voie, nous l'avons dit, devrait être telle qu'elle débouche sur une limite détachée de toute considération physique, qu'il s'agisse des lois naturelles ou de l'état de notre univers, au risque soit de polluer la logique par du non apodictique, soit au contraire d'attribuer une nature apodictique à ces paramètres naturels. Cette dernière alternative, qui constitue la deuxième voie possible, est intenable car même sous l'hypothèse qu'il n'existe qu'un seul univers, le nôtre, adhérer à la conception de sa nécessité serait, nous semble-t-il, frôler la métaphysique ou, du moins se rendre coupable de platonisme, avec le risque philosophique que cela comporte. Cette voie n'est donc pas, elle non plus, celle envisagée par l'auteur.

Mais il nous semble que, une fois écartées les deux (fausses)

solutions ci-dessus, la recherche d'une solution par voie logique aboutit toujours à l'obstacle du paradoxe du sorite. Ce qui nous incite à sacrifier le réquisit fort d'apodicticité et revenir à une analyse anti-réaliste qui respecte moins la pureté des genres mais est plus souple (et donc adaptable) : une analyse anti-réaliste "traditionnelle" qui considère que la capacité à reconnaître les conditions d'assertabilité serait, contrairement au point de vue de Dubucs, liée à « *la capacité de reconnaître le réseau de connexions déductives peut se révéler tout simplement d'une façon inchoative du simple fait que l'agent est impliqué dans l'exécution d'un processus de preuve* » (Dubucs, p.220). Mais cela implique de revoir le Principe d'implicité...

b) Sur le Principe d'implicité

Reprenons la définition du principe d'implicité (p.214) :

« **Principe d'implicité** : la définition des conditions sous lesquelles l'assertion d'un énoncé est justifiée ne doit pas faire explicitement référence à nos capacités recognitionnelles.

Ce principe interdit l'immanence d'être purement et simplement stipulé, à savoir obtenu par vim definitionis en vertu d'une clause dans le style suivant : A est assertable si et seulement si (i) une certaine condition C(A) advient et (ii) il est de notre capacité de reconnaître que la vraie condition C(A) advient. Si ce genre de définition était autorisé, nous obtiendrions immédiatement une solution triviale et peu instructive au problème auquel nous sommes confrontés, en identifiant C(A) aux vraies conditions de vérité de A: bien sûr, on ne peut guère se contenter de cette solution. L'explicandum, comme nous venons de le voir, devrait concerner

notre propre condition cognitive, à l'exclusion de tout le reste. L'explicatum, au contraire, devrait être purifié de toute référence explicite à cet élément. »

Dubucs écrit en p.215 :

« Si nous voulons voir les conditions d'assertabilité jouer le rôle actuellement détenu par les conditions de vérité, qui n'impliquent, quant à elles, aucune composante psychologique, alors nous devons nous garder de définir l'assertabilité en des termes qui présupposent la connaissance préalable de la nature de nos capacités recognitionnelles, et donc nous devons analyser ces capacités dans un langage neutre, non indexical, où ils n'apparaîtraient pas comme nôtres. A l'instar des conditions de vérité qu'elle sont censées remplacer, les conditions d'assertabilité doivent être formellement définies ; en effet il devra être possible de fixer sans ambiguïté les conditions dans lesquelles il est comme automatiquement justifié que nous assertions^[279] un énoncé complexe comme une fonction des conditions qui justifient l'assertion de ses composants immédiats. En conséquence, il ne devrait pas être nécessaire de se demander, à chaque application de l'une des clauses de cette définition récursive, si l'assertion qui est autorisée par la règle est vraiment l'assertion d'un énoncé que seules nos capacités cognitives permettent de reconnaître comme vrai. »

Et à la p.221, il est précisé que :

²⁷⁹ Nous nous autorisons à dériver de l'anglais "to assert" le verbe : asserter.

« *il ne peut pas y avoir, contre l'anti-réalisme radical, d'objection de principe, et la seule qui pourrait être faite porte sur la question de savoir si un système de règles qui serait suffisamment contraint pour éviter la transcendance des conditions de déductibilité à l'égard de nos propres capacités recognitionnelles pourrait néanmoins rester suffisamment générale pour ne pas être réductible à la codification pure et simple de nos propres façons de procéder.* »

Nous adhérons pleinement à l'idée que la prise en compte de considérations d'ordre subjectif ferait sombrer toute cette entreprise épistémologique dans le non sens ou l'imprédictivité d'un concept forgé par *vim definitionis*. Mais en revanche, il nous semble que l'équivalence établie implicitement par l'auteur entre *composante subjective* et *capacités recognitionnelles* doit être agrémentée de quelque nuance. De fait, à l'instar du principe d'immanence, il nous semble que le principe d'implicité peut recevoir deux interprétations, l'une faible, l'autre forte.

En effet, si nous relâchons la contrainte d'apodicticité – limitant notre objectif à simplement trouver une réponse possible au problème de l'effectivité en principe (et virtuelle) – rien ne nous empêche de distinguer entre les deux versions suivantes :

1- **Principe d'implicité faible** : la définition des conditions sous lesquelles l'assertion d'un énoncé est justifiée ne doit pas faire explicitement référence à *l'existence donnée* de nos capacités recognitionnelles.

2- **Principe d'implicité forte** : la définition des conditions sous lesquelles l'assertion d'un énoncé est justifiée ne doit pas faire explicitement référence à nos capacités recognitionnelles *dont la*

description peut être dérivée exclusivement des lois (contingentes) de l'Univers.

Exprimé de la sorte, le non respect de la version forte n'entraîne pas le risque d'imprédicativité ou de trivialité du fait que, si la référence à nos capacités recognitionnelles est explicitement évoquée, elle l'est sous une contrainte épistémologique forte de "physicalité".

Certes, limiter l'exigence d'implicité à sa seule contrainte forte est une perte nette et l'assurance d'une pollution du langage de description. Mais a-t-on le choix ? A notre avis, cette limitation est une conséquence de ce qui précède : si, comme nous le supputons, la question de la faisabilité ne peut être traitée que dans la sphère du non apodictique (point de vue qui permet d'échapper au paradoxe du sorite), c'est qu'elle est un fait qui découle exclusivement de la contingence physique de notre univers, duquel nos capacités cognitives sont directement issues²⁸⁰.

Tant que la prise en compte de ces capacités est robustement et constructivement reliée à cette contingence universelle, et seulement à elle, nous considérons qu'elle est légitime : en effet, d'après ce qui précède, il nous semble que la définition d'une limite de calculabilité effective absolue ne peut que comporter *implicitement* une dépendance aux paramètres particuliers de notre univers. Si donc cette limite dépend des lois et constantes naturelles, comme notre système cognitif, alors aucun argument ne peut justifier qu'on accepte de prendre en compte ces lois et constantes mais qu'on interdise de le faire des lois physiques qui s'expriment dans les règles de fonctionnement de nos systèmes cognitifs.

²⁸⁰ Bien évidemment, nous postulons que les processus cognitifs (réputés communs aux êtres humains) découlent exclusivement des lois naturelles contingentes.

Dans tous les cas, notre hypothèse nous permet de sortir de l'impasse et, peut-être, de résoudre la question posée.

Disons, pour relativiser quelque peu cette opposition anti-réaliste strict – anti-réaliste traditionnel, que nous voyons la recherche d'un principe apodictique de limitation du calcul interne à la classe des propositions décidables, et notre propre recherche d'un principe épistémique du sens de l'effectivité, comme des prolongements du processus historique de transformation ayant abouti à la thèse de Church-Turing.

Il nous semble en effet que les défis auxquels nous sommes confrontés aujourd'hui dans l'épistémologie de l'effectivité découlent de la nature particulière de ce processus historique, du fait qu'il contient dans son dernier acte, i.e. la thèse elle-même, un élément qu'on ne retrouve pas (ou peu) dans d'autres cas de mathématisation d'une intuition : le fait que celle-ci a lié – plutôt que séparé – un phénomène d'ordre cognitif à une définition strictement mathématique. Depuis les années 1930 l'informatique, si elle est devenue absolument autonome en tant que science, ne s'est en revanche jamais totalement libérée dans son épistémologie du spectre de l'analogie entre la machine de Turing (et la théorie de la calculabilité) et certains processus de la pensée humaine – alors que, par exemple, nul géomètre contemporain ne continue à associer ses actes mathématiques à l'idée d'un partage des champs...

La nature purement heuristique de la thèse de Church, *explicitement* postulée afin de *construire une nouvelle théorie* a été soulignée par

Church et Kleene. Citons à nouveau les propos de Kleene de 1943, *Recursive predicates and quantifiers*²⁸¹ (p.60) :

« [...] Dans la mesure où nous avons déjà une notion intuitive de la calculabilité effective (décidabilité effective), **la thèse à le caractère d'une hypothèse - un point souligné par Post et par Church. Si nous considérons la thèse et sa réciproque comme une définition, alors l'hypothèse est une hypothèse sur l'application de la théorie mathématique développée à partir de cette définition. Il y a, comme nous l'avons suggéré, des raisons très convaincantes pour accepter l'hypothèse.** »

La thèse vaut définition mathématique, mais du côté physique, biologique, épistémique, épistémologique l'équivalence "processus effectif (en tant qu'acte cognitif) = processus récursif (en tant que calcul)" n'est qu'une analogie, certes fort prégnante. Elle n'est pas nécessairement fautive – rien ne dit qu'elle ne débouchera pas *in fine* sur une preuve éclatante. Mais elle demeure aujourd'hui une analogie. Aussi, l'acte "effectif=récursif" perpétré par Church, heuristique et arbitraire (en mathématiques un faisceau de présomptions n'a jamais constitué une preuve) mais absolument libre et créateur d'un nouveau pan des mathématiques, n'a pas (ou pas encore) été suivi de l'autonomisation totale de l'épistémologie de la calculabilité vis-à-vis de ses soubassements historiques.

Or il nous semble que cette prégnance originelle de l'"équivalence" entre processus cognitif et calcul rend parfois floues les frontières entre

²⁸¹ **Kleene**, *Recursive predicates and quantifiers*, Transactions of the A.M.S. 53, 1943, p.41-73. La traduction est nôtre.

domaines considérés comme séparés, en particulier entre ce qui relève du contingent (par exemple, les lois de la physique) et ce qui est de nature nécessaire (la tautologie logique). De fait, l'analogie a pris la forme moderne d'une croyance en la "physicalité" de la thèse de Church-Turing. Que celle-ci finisse par être avérée ou non, dans tous les cas l'analogie imprègne en sous main tous nos discours sur l'effectif et l'assertabilité, aussi bien (mais en sens inverse) que, dans les sciences physiques, elle imprègne les discours sur la nature "informationnelle" du monde.

Dans tous les cas, nous sommes toujours face au problème de donner un statut solide, du point de vue de la connaissance, aux procédures effectives *potentiellement réalisées* (constituée d'un schéma de preuve de la proposition et d'une assertion validant sa réalisabilité en tant que preuve totalement analysée), *virtuelle finie* (même chose sauf que cette réalisabilité n'est matériellement pas faisable) et *virtuelle transfinie* (constituée d'un schéma de preuve et d'une assertion validant la conservation de cette qualité de vérité dans le mode infini actuel).

Aussi, nous proposons un retour à une voie plus dummettienne – certes moins satisfaisante pour notre rationalité et notre aspiration à la pureté des genres – consistant à accepter que le principe d'implicité ne soit respecté que partiellement, seulement dans son interprétation faible, et que les *capacités recognitionnelles* de l'agent soient effectivement prises en compte mais dans le respect du *principe d'explicité fort* : la définition des conditions sous lesquelles l'assertion d'un énoncé est justifiée peut faire explicitement référence à nos capacités recognitionnelles dans la mesure où leur description est *dérivée exclusivement des lois (contingentes) de l'Univers*.

III- Effectivité et acte mathématique cognitif

En définitive, la nécessaire introduction du concept d'assertabilité, pour justifier l'entrée de l'infini potentiel dans la sphère intuitionniste, provoque deux failles contiguës : elle laisse posé le problème des énoncés de type B, et elle débouche sur la bi-partition du concept de preuve, car à la construction mentale représentée par une preuve totalement analysée, il faut ajouter un autre mode, qui est celui de « *la construction mentale consist[ant] en la compréhension des principes généraux selon lesquels tout segment fini de la preuve peut être explicitement construit.* »

Si par preuve, l'on entend toute construction mentale mathématique qui *consiste en la compréhension* (Dummett) de quelque chose de mathématique et dont le caractère de certitude est *immédiatement appréhendé par l'esprit* (Troelstra&van Dale), alors, que cette compréhension soit celle qui fait voir comment une certaine inférence permet de passer de **p** à **q** dans un processus de preuve canonique, ou celle qui fait voir comment certains principes généraux gouvernent une assertion, nous sommes face au même phénomène épistémique : celui de notre capacité à reconnaître qu'une preuve est une preuve.

Et puisque ce phénomène est transposable à l'effectivité (il peut y avoir plusieurs définitions, mais un mathématicien est capable de reconnaître immédiatement qu'une procédure ou une démonstration effective est effective selon son point de vue), il nous faut interroger et tenter de définir cet "objet" preuve qui est en même temps notre capacité à le reconnaître.

Cela nous amènera d'ailleurs à répondre à l'autre question laissée en suspens au début de la présente partie : qu'est-ce qu'un "existant authentique" aux yeux de Borel – concept qui semble indissociable de l'effectivité puisque c'est *en partie* par une procédure effective qu'il garantit l'authenticité de son existant ? "En partie" seulement, parce qu'il y a des existants authentiques qui émergent purement de l'intuition (nous l'avons vu). Alors, qu'est-ce qui rend existants ces objets non engendrés par des procédures effectives mais qui ne dénaturent pas la robustesse d'une démonstration effective ? Comment les différencier d'autres objets de l'intuition qui, eux, ne seraient pas du côté de l'effectif ? Bref, il y a des démonstrations effectives, des démonstrations non effectives, des existants authentiques et des objets non authentiques... le tout unifié dans un langage mathématique homogène mais qui pourtant sont distingués par les mathématiciens contentuels comme Borel selon des critères qui ne peuvent pas être subjectifs mais qui, simultanément, ne semblent pas exprimables en langage-objet.

Nous allons nous appuyer sur une théorie de l'acte mathématique cognitif, développée par des auteurs comme Martin-Löf, Tieszen, Sundholm, Detlefsen, etc., à la suite des travaux fondateurs de Dummett. En réalité, l'appellation "théorie" est impropre car elle renvoie à l'idée d'un système cohérent et unitaire, alors qu'il s'agit plutôt d'un point de vue épistémologique à partir duquel les auteurs ont développé des grilles d'analyse de l'activité mathématique. De fait, cette "théorie" embrasse un cadre conceptuel très large puisant ses inspirations, ses concepts et ses techniques aussi bien dans la philosophie de la connaissance – en particulier la phénoménologie husserlienne – que dans l'épistémologie mathématique et logique – en particulier l'intuitionnisme de Brouwer et

ses ramifications logiques (Gentzen, Gödel, etc.) – que dans les sciences cognitives expérimentales, dont elle dessine les soubassements philosophiques... De fait, la théorie cognitive de l'acte mathématique est une conception phénoménologique non formelle mais qui donne lieu chez les auteurs à de nombreuses tentatives de formalisation dans des langages-objet élargis. Néanmoins – insistons là-dessus – nous n'aborderons pas cet aspect formel de la théorie, notre propos étant non pas d'exposer cette théorie, mais seulement de nous servir de certains de ses concepts et définitions pour l'analyse de l'effectivité.

1°- Preuve, intuition, évidence, acte

a) La preuve

Quand nous disons que tel concept mathématique – par exemple, "l'ensemble infini dénombrable réalisé N " – a le statut d'existant aux yeux de Borel, cela signifie pour nous que Borel juge que ce concept se réalise d'une certaine manière dans son intuition, et que ce jugement de réalisation est : 1) de nature mentale, mais 2) n'est pas subjectif, dans le sens où le jugement est lié non pas à la subjectivité de Borel, mais à la nature même du système cognitif humain²⁸² et que de ce fait, le jugement peut être partagé par d'autres mathématiciens.

Précisons néanmoins qu'un jugement de réalisation d'un objet mathématique *dans l'intuition* n'implique pas pour nous un point de vue réaliste des mathématiques, le jugement de réalisation étant un

²⁸² Ou du moins, de tout humain ayant acquis un certain savoir mathématique.

phénomène strictement mental, qui n'est "réfiable" que sous certains postulats restreignant le sens du terme réalisme. De fait, les points 1) et 2) positionnent *a priori* le "lieu" d'où nous étudions l'épistémologie borélienne dans une catégorie proche de ce que l'on nomme "constructivisme cognitif" et que nous définissons ainsi : les connaissances mathématiques émergent de la structure particulière de nos mécanismes de pensée – et de notre structure cérébrale²⁸³ - indépendamment de la connaissance ou de la conscience que nous avons de ces processus producteurs de pensée. La "réalité" de nos productions mentales l'est en tant que phénomène cognitif sous-tendu par des processus physiques, chimiques et biologiques s'inscrivant dans le cadre des théories physiques et évolutionnistes (darwiniennes et néo-darwiniennes). Le concept de "constructivisme cognitif" est donc du côté de la philosophie naturaliste.

Puisque les jugements de réalisation des objets mathématiques, tout en étant purement mentaux, ne sont pas subjectifs, ils sont commun à tous les êtres humains ayant acquis un ensemble de gestes-actes mentaux mathématiques communs par apprentissage du savoir-faire (nous parlerons alors d'"agents cognitifs mathématiques" ou, plus simplement, de mathématiciens) et qu'il existe un mode de transmission, c'est-à-dire un véhicule de partage "inter-cognitif" de ces jugements : soit par argumentation (orale ou écrite) en langage-objet mathématique, soit argumentation en langage extra-mathématique (phénoménologique) *sur* les existants mathématiques sensé prouver le bien-fondé cognitif non subjectif du jugement de réalisation. C'est le cas du jugement de Borel sur la nature réalisée de l'ensemble infini \mathbb{N} :

« Lorsqu'un ensemble est composé d'une infinité d'éléments, quand doit-on le considérer comme donné ? [...] Nous dirons qu'un ensemble

²⁸³ Car l'axiome de base du cognitivisme est l'existence d'un lien direct (non transcendant) entre le substrat matériel de la pensée (cerveau) et le mécanisme/structure/contenu de cette pensée.

[infini actuel] est donné lorsque, par un moyen quelconque, on sait déterminer tous les éléments les uns après les autres, sans en excepter un seul et sans répéter aucun d'eux plusieurs fois [...] Que veulent dire ces mots : Déterminer tous les éléments les uns après les autres ?... Il est aisé de se rendre compte que c'est le fait d'avoir pu donner un indice à chacun de ces termes, de sorte que chacun d'eux corresponde à un nombre entier positif déterminé par n . Dès lors, la conception que nous avons de l'ensemble des u_n est aussi claire que notre conception de l'ensemble des nombres entiers positifs $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ [...] C'est grâce à cette connaissance que les mots : l'ensemble des u_n est donné ont pour nous un sens bien précis. »²⁸⁴

À travers son argumentation, Borel exhibe une sorte de "preuve" de son jugement non nécessairement exprimable en langage-objet, preuve qui est en même temps le moyen de réaliser cet objet dans sa propre intuition et dans l'intuition de l'autre.

Ce que nous voulons dire, c'est que la preuve (du bien-fondé) d'un concept, d'un objet ou d'un acte mathématique n'est pas seulement la preuve classique c'est-à-dire la démonstration écrite en langage-objet : Borel n'exhibe en effet aucune inférence proprement mathématique qui permet de passer du concept d'"ensemble fini des nombres entiers qu'on peut étendre autant qu'on veut" au concept d'"ensemble infini réalisé des nombres entiers". Et pourtant Borel réalise dans son intuition ce dernier concept à partir de la connaissance du premier, par une "inférence" extra-mathématique qui pour lui semble avoir la force d'une inférence mathématique authentique. Or l'idée que le domaine de la preuve mathématique s'étend au-delà du langage-objet est un des concepts clé

²⁸⁴ *Leçons*, p.2-4

de la théorie de l'acte cognitif.

En effet, la théorie de l'acte cognitif fait de la preuve l'élément central de l'activité mathématique en tant que cette preuve est considérée, écrit Richard Tieszen, « *non pas comme un objet syntaxique ni comme un objet abstrait. Plutôt, une preuve est une construction mentale, une séquence d'actes qui sont ou qui peuvent être effectués dans le temps par le mathématicien* » (Tieszen-1991, p.58)²⁸⁵. Dans la philosophie néo-intuitionniste, les mathématiques, avant d'être un langage à contenu réputé ancré sur un noyau de vérités primitives immédiates et intuitives – qui est une conception classique et "statique" –, sont d'abord et surtout constituées d'actes cognitifs dynamiques orientés vers l'obtention de "preuves cognitives", l'écriture n'intervenant que comme support (parfois imparfait voire incomplet) de ces actes.

En quoi consiste une "preuve cognitive" ? Il faut la prendre au sens de séquence d'actes cognitifs :

« La dimension cognitive ou phénoménologique d'une preuve [...] renvoie au rôle de la preuve dans la production d'évidence ou de justification d'une proposition mathématique » (Tieszen, p.58).

Autrement dit, pour la théorie de l'acte cognitif, la preuve est ce qui conduit une proposition mathématique à se réaliser dans l'intuition, réalisation qui s'exprime par le sentiment d'"évidence". Et qu'est-ce que l'évidence ? Selon Tieszen :

« on peut saisir quelque chose du sens du concept d'"évidence" tel

²⁸⁵ Tieszen, *What is a proof*, in Detlefsen (Ed.), *Proof, Logic and Formalization*, Routledge, Dordrecht, 1991, p.57-76. La traduction est nôtre.

que je l'entends en réfléchissant à ce qui est mis en jeu quand on ne se contente pas seulement d'avancer mécaniquement à travers une "preuve" avec peu ou pas de compréhension, mais qu'on "voit", étant donné un ensemble (peut-être vide) d'assertions, qu'une certaine proposition doit être vraie. [...] On pourrait dire qu'une certaine forme d'"insight" [286] ou de "réalisation" est impliquée, comme, dans un certain sens, le fait que la preuve acquière pour nous une "signification" ou un contenu sémantique du fait d'avoir été comprise » (Tieszen, p.58-59).

b) L'intuition

Ce qui précède manque de précision à cause de l'appel aux notions vagues d'"évidence", d'"insight", de "réalisation"... C'est toute la difficulté de définir le pendant cognitif d'un concept, la preuve, ancré dans le langage-objet des mathématiques usuelles.

De fait, la notion sous-jacente à toutes les définitions que nous allons donner est la notion d'intuition, particulièrement rétive à toute définition phénoménologique mais sans laquelle on ne peut rien définir : l'insight, la réalisation, la compréhension, l'évidence... tous ces termes renvoient à l'intuition. "Avoir un insight de" la validité d'une preuve, "réaliser que" c'est une preuve, ou "voir que", "comprendre que", "ressentir l'évidence que" etc., tout cela se passe dans le champ de l'intuition : le mathématicien en a la révélation *dans son intuition*.

Comment alors poursuivre notre analyse de la "*dimension cognitive*

²⁸⁶ Nous gardons le terme anglais, que le dictionnaire Larousse définit ainsi : « insight : nom masculin (anglais *insight*, trad. de l'allemand *Einsicht*) : Fait d'apercevoir de façon soudaine la solution d'un problème, la structure d'une figure ou d'un objet perçu, etc. »

ou phénoménologique de la preuve” (Tieszen, p.58) avec cette lacune de *definiens* qui se répercutera dans tous les *definienda* que nous donnerons par la suite ? En faisant appel, comme les auteurs qui avant nous ont été confrontés à cet obstacle, à l’argument d’usage qui veut que tous ceux qui pratiquent ou ont pratiqué les mathématiques comprennent ce qu’est le phénomène cognitif d’*“appréhension intuitive”* (ou *“intuitionnelle”*) de la validité d’une preuve ou du sens d’une proposition mathématique... A partir de cette expérience, supposée partagée par tous, nous allons pouvoir établir une hiérarchie entre les différentes notions à définir.

c) L’évidence

L’existence de ce type d’intuition étant donc présupposée, la notion d’*“évidence”* est, selon Tieszen, la plus claire parmi tous les autres termes qualifiant le phénomène de *preuve cognitive*²⁸⁷, et peut donc servir de *definiens*. Tieszen justifie ce choix en faisant appel à un autre des grands penseurs de l’acte cognitif mathématique, Per Martin-Löf, qu’il cite ainsi :

(Martin-Löf cité par Tieszen) « *la preuve d’un jugement c’est l’évidence de celui-ci... ainsi preuve est la même chose qu’évidence... la preuve d’un jugement est l’acte même de saisir, d’appréhender, de comprendre ou de voir celui-ci. Ainsi, une preuve est non pas un objet mais un acte. C’est ce que Brouwer voulait signaler en disant que la preuve est une construction mentale, parce que ce qui est mental ou psychique, ce sont précisément nos actes ... et l’acte est d’abord l’acte en train de s’effectuer, seulement après, et de manière irrévocable, il devient l’acte qui a été effectué.* » (Tieszen, p.60).

²⁸⁷ Nous utilisons le raccourci *“preuve cognitive”* pour : « dimension cognitive de la preuve ».

Comme nous y invite Tieszen, reportons-nous à Martin-Löf (1987)²⁸⁸, que nous citons *in extenso*.

« Qu'est-ce qu'un jugement ? et, Qu'est-ce qu'une preuve d'un jugement ? Quand vous avez à faire à ce type de notions de base, il est clair qu'il ne peut être question de les réduire à toute autre notion, plus basique : plutôt, vous devez vous contenter de ce que ces notions sont les mêmes que certaines autres notions que vous exprimez par d'autres mots, et il ne peut être que question de révéler la structure dans laquelle ces notions s'insèrent et trouver les mots qui rendent le plus clair leur nature. [...] Le mot acte, bien sûr, est le mot le plus général que nous utilisons pour tous nos actes, et, de la même manière, le mot objet possède cette généralité. Ainsi, nous avons des actes de conjecturer et de douter et de vouloir et de craindre et ainsi de suite, et nous avons les objets de ces actes, c'est-à-dire, des objets de conjecture et de doute et de vouloir et de crainte et ainsi de suite.

*Un genre particulier d'acte, et, corrélativement, un genre [particulier] d'objets vers lesquels nous dirigeons nous-mêmes ces actes, sont des actes de connaître et des objets de connaissance, respectivement. Ma réponse aux questions Qu'est-ce qu'un jugement ? et, Qu'est-ce qu'une preuve d'un jugement ? est simplement qu'**une preuve d'un jugement est un acte de connaître** et que **le jugement qu'il prouve est l'objet de cet acte de connaître, c'est-à-dire, un objet de connaissance**. Cela est en accord complet avec l'explication standard d'une preuve que vous trouvez dans un dictionnaire ordinaire : ça dit qu'une preuve est ce qui montre la vérité d'une proposition. Néanmoins, j'ai fait attention d'utiliser le*

²⁸⁸ **Martin-Löf**, *Truth of a proposition, evidence of a judgement, validity of a proof*, in *Synthese* **73** (1987), p.407-420. Citation, p.416-418. La traduction est nôtre.

*mot vérité pour les propositions, tandis que j'essaie d'utiliser évidence pour les assertions ou les jugements. Avec cette précaution terminologique, l'explication appropriée de la notion de preuve d'un jugement est qu'une preuve est ce qui rend évident une assertion ou un jugement, ou, si vous préférez, que la preuve d'un jugement est tout simplement l'évidence de celui-ci. Ainsi, preuve et évidence sont une seule et même chose. Et qu'est-ce qui rend un jugement évident pour vous ? Avant que vous ayez compris ou saisi le jugement, il n'est pas évident pour vous, et, quand vous l'avez saisi, il est clair ou évident pour vous. Ainsi, c'est tout simplement votre acte de le comprendre ou de le saisir qui confère l'évidence au jugement, c'est-à-dire, qui vous le rend évident. C'est une des façons de voir que la preuve d'un jugement n'est rien d'autre que l'acte de connaître, ou, peut-être mieux, l'acte de comprendre ou de saisir, et ce que vous saisissez, à savoir **l'objet de connaissance, est la même chose que ce que vous prouvez, à savoir l'assertion ou le jugement.***

Comment peut-on argumenter en faveur d'une telle interprétation des notions primitives de jugement et de preuve? Je ne pense pas qu'on puisse argumenter beaucoup à ce sujet : vous pouvez avoir plusieurs voies vers cet insight, et j'en ai pris deux, je crois, jusqu'ici. Il en existe une troisième, qui part du dictum que Husserl a accolé à toute son oeuvre, que la preuve n'est rien d'autre que l'expérience de la vérité (All. Evidenz ist Erlebnis der Wahrheit). Et quelle est l'expérience de la vérité d'une proposition ? C'est précisément l'acte de comprendre ou de saisir sa vérité, c'est-à-dire, l'acte d'apprendre à connaître sa vérité, et donc nous arrivons à la même conclusion par l'intermédiaire de cette troisième voie, à savoir que la preuve d'un jugement est l'acte même de le connaître. » (Martin-Löf, p.416-417)

Donc selon Martin-Löf :

Preuve – connaissance : *une preuve d'un jugement est un acte de connaître et le jugement qu'il prouve est l'objet de cet acte, c'est-à-dire, un objet de connaissance.* Autrement dit : l'objet de connaissance est la preuve-objet, et celle-ci est l'assertion ou le jugement prouvé.

Preuve – évidence : *une preuve (acte) est ce qui rend évident une assertion ou un jugement et la preuve (objet) d'un jugement est tout simplement l'évidence de celui-ci.*

Nous allons simplifier ces définitions en assignant un seul nom à chaque élément.

A partir d'une proposition écrite en langage mathématique, il y aurait successivement :

- 1) l'acte de transformation d'une **proposition** extérieure en **jugement**,
- 2) l'acte de connaître ce jugement, c'est-à-dire la **preuve-acte**,
- 3) l'accomplissement de l'acte de preuve, qui s'accompagne du sentiment d'**évidence**, se matérialise en une **preuve-objet** du jugement.

d) L'acte – l'objet de l'acte

Le terme de preuve aurait donc deux sens : preuve en tant qu'acte et preuve en tant qu'objet accompli de l'acte. Citons Goran Sundholm²⁸⁹ :

« L'objet d'un acte de preuve, ou mieux, de démonstration, est la connaissance gagnée, le théorème prouvé, ou fait, dans ou par l'acte

²⁸⁹ Sundholm, *Proofs as Acts and Proofs as Objects : Some questions for Dag Prawitz*, in *Theoria*, 64, 187 - 216, (2000). Les pages citées ici : p.192-194. La traduction est nôtre.

de prouver. Cet objet – ou théorème – a la forme
c est une preuve(-objet) de la proposition A
forme qui a déjà été signalée par Heyting [1958, p.278] : « Chaque théorème a la forme (s’il est énoncé sans abréviations) : “Une construction avec telle et telle propriétés a été effectuée par un mathématicien” », aussi bien que par Freudenthal [1937, p.112] , selon lequel, « toute proposition, une fois correctement formulée de manière intuitionniste, inclut automatiquement tous ses éléments de preuve. » **La preuve-objet est la construction-objet, c’est-à-dire, l’objet de la construction-acte qui fait partie de la preuve-acte.** [C’est] en ce point [qu’] une grande confusion peut advenir si les distinctions pertinentes concernant les preuves et les constructions étaient négligées. “La preuve est la construction, autrement dit, l’objet de la construction, qui fait partie de la preuve”²⁹⁰. Toutefois, **la construction, autrement dit, la preuve-objet, et le théorème prouvé, autrement dit, l’objet de la preuve-acte, ne sont pas les seules expressions objectives de l’acte de prouver ; il y a aussi ce que Martin-Löf a appelé la trace, ou le sillon, de la preuve-acte [...]. Cette trace est ce qui demeure quand l’acte a été effectué, notamment, - exemple de Martin-Löf – littéralement le sillon laissé par un tour de piste complet, pouvant comprendre plusieurs sous-sillons [...], dans la course au but final, ou objet, du tour de piste en question [...]. Cette partie matérielle de la trace d’un acte de démonstration mathématique est souvent remplacée par une – non moins objective – partie descriptive sous forme écrite incluse dans un texte mathématique. [...]** Quand un philosophe des mathématiques

²⁹⁰ Note 14 de Sundholm : « ceci est un exemple extrême, spécifiquement donné dans le but d’exhiber les dangers implicites [de la confusion entre preuve et construction], mais des formulations tendant dans cette direction peuvent être dénichées dans des écrits fondateurs de l’intuitionnisme – par des auteurs appartenant à l’un ou l’autre des deux camps opposés »

*parle d'une "preuve", il peut [ou non] désigner une [telle] preuve-trace. [...] Des trois notions de preuve – acte, trace, et objet – les deux premières véhiculent un import épistémologique, mais pas la dernière : **une preuve-objet est un objet mathématique comme un autre** - telle une fonction dans un espace de Banach, ou une intégrale curviligne complexe - lequel, du point de vue épistémologique, n'a pas d'autre contenu que l'objet lui-même » (Goran Sundholm, p.192-194).*

Donc selon Sundholm :

La preuve-objet est la construction-objet, c'est-à-dire, l'objet de la construction-acte qui fait partie de la preuve-acte.

La construction, autrement dit, la preuve-objet, et le théorème prouvé, autrement dit, l'objet de la preuve-acte, ne sont pas les seules expressions objectives de l'acte de prouver.

Une preuve-objet est un objet mathématique comme un autre.

Nous allons dire cela avec nos propres termes, en simplifiant :

La preuve-objet, en tant que construction-objet, fait partie de la preuve-acte mais elle est un objet mathématique. Autrement dit : le résultat d'une preuve-acte accomplie est un objet mathématique.

Arrêtons-nous pour résumer les articulations entre les notions de jugement, de preuve, d'évidence, etc. Supposons donc donnée une proposition mathématique "extérieure" écrite en langage-objet, que nous percevons par la vue (écriture), par l'ouïe (communication orale) ou par tout autre de nos sens. Alors, selon Martin-Löf, Tieszen et Sundholm :

1°- **La notion de preuve contient trois acceptions** : l'acte cognitif

de preuve d'un jugement (preuve-acte), la trace matérielle extérieure, formelle ou non, de cet acte de preuve et l'objet mathématique construit par l'acte-preuve (objet-preuve). Seuls l'acte et la trace véhiculent des éléments d'ordre épistémique (l'objet lui n'en véhicule pas). On peut trouver des traces matérielles de ces actes dans des écrits mathématiques "impurs" (contenant plus que des inférences purement mathématiques – dans le domaine du langage-objet - et exprimés en langage phénoménologique non formel)... Traces et expressions que, nous l'avons vu, Borel inclut souvent dans ses écrits mathématiques – c'est là une de ses richesses qui expliquent notre choix dans l'étude de ces écrits.

2°- **L'acte de juger est l'acte d'intérioriser un élément** du langage-objet extérieur (proposition écrite ou dite), c'est-à-dire de le transformer en objet mental, qu'on nomme *jugement*.

L'acte de jugement est dynamique.

Le jugement est statique.

3° - **La preuve-objet est l'accomplissement d'une preuve-acte.**
Preuve-objet et jugement prouvé sont des synonymes.

4°- **Une preuve-acte est l'acte de connaître un jugement.**
Autrement dit, l'acte de preuve d'un jugement s'accomplit en un objet-preuve, qui le jugement lui-même (prouvé) – après perception d'un élément du langage-objet²⁹¹ extérieur.

5°- **L'accomplissement d'un acte-preuve en un objet-preuve**

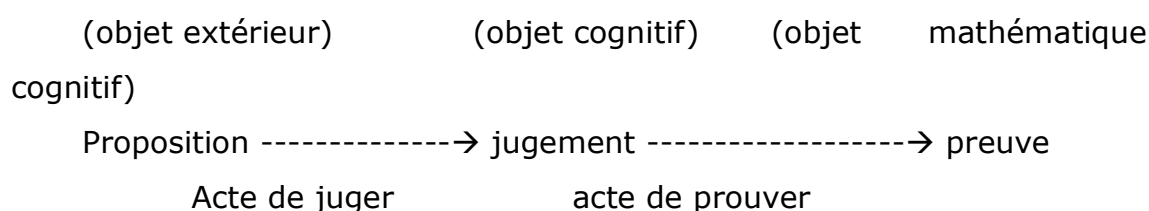
²⁹¹ Nous utilisons donc le terme "objet" dans trois acceptions différentes : 1) l'objet extérieur, c'est-à-dire la proposition mathématique à percevoir ; 2) l'objet cognitif, par exemple, le jugement, qui est le résultat de l'acte de juger ; 3) l'objet mathématique, par exemple, l'objet-preuve, qui est le résultat de l'acte de prouver .

est signalé par le phénomène d'évidence (sentiment) du jugement formé à partir de l'objet extérieur. Selon Martin-Löf, preuve-objet et évidence (d'un jugement) sont des synonymes. Mais pour nous, plus que des synonymes, preuve-objet et évidence sont des faits cognitifs accolés mais différents : la preuve est un objet de connaissance, l'évidence est un sentiment.

La preuve-objet est statique.

L'évidence est dynamique.

Gardons donc en mémoire le schéma suivant²⁹² :



Quelles sont les caractéristiques de l'acte de preuve ?

6°- L'acte de preuve se dirige vers l'objet de connaissance.
Autrement dit : l'acte de preuve d'un jugement part de la perception-jugement de la proposition extérieure et est dirigé vers l'objet de connaissance.

²⁹² Pour éviter les confusions et simplifier l'écriture, nous utilisons indifféremment preuve-objet et objet-preuve, acte-preuve et preuve-acte. Par ailleurs, lorsque le terme "preuve" n'est accolé à aucun autre terme, il faut entendre "preuve-objet"

7°- **L'acte de preuve d'un jugement est l'expérience de la vérité d'une proposition** (extérieure). Et l'expérience de la vérité d'une proposition est l'acte de preuve d'un jugement (cognitif). Dummett exprime la même idée lorsqu'il écrit "*Nous sommes certains de la vérité d'un énoncé quand nous en possédons des raisons ["grounds"] concluantes*" (Dummett, p.97)²⁹³. On a vu que l'évidence naît de l'acte de connaître un objet mathématique, c'est-à-dire d'en posséder une preuve. Donc ignorer si une proposition mathématique est vraie ne peut que signifier, du point de vue intuitionniste, ignorer si cette proposition peut être prouvée : la vérité n'est pas une qualité qui transcende notre connaissance, elle en dépend.

Dans tous les cas, Martin-Löf établit une sorte de "passage" entre les concepts de la sphère phénoménologique cognitive et ceux de la sphère du langage-objet. Soit :

- expérience de la vérité d'une proposition \Leftrightarrow acte de preuve
- proposition vraie \Leftrightarrow objet cognitif accompli par l'acte de preuve

Il s'agit d'une correspondance entre des faits du langage des mathématiques ("vérité", "vrai") et des faits cognitifs ("acte", "accomplissement")²⁹⁴.

Ces premières définitions étant posées. Poursuivons notre

²⁹³ Dummett, *The philosophical basis of intuitionistic logic*, in *Proceedings of the Logic Colloquium*, Bristol, 1973, repris dans Putnam & Benacerraf (eds.), *Philosophy of mathematics*, 2nd edition, Cambridge University Press, 1983, p.97-129.

²⁹⁴ Nous adoptons la dichotomie établie par Martin-Löf entre le concept de "proposition" et celui de "jugement" (ou d'"assertion") : la proposition réfère à un objet linguistique extérieur, le jugement réfère à l'image cognitive de la proposition (indépendamment du fait que cet acte se réalise en une preuve cognitive).

introduction à la théorie de l'acte mathématique cognitif.

2°- Intentionnalité de l'acte, contenu de l'acte

Le pivot de toutes les définitions qui précèdent est l'utilisation de la notion d'*évidence* comme "marqueur" de l'acte (réussi) de transformation d'un jugement en une preuve(-objet de connaissance). Il nous faut donc approfondir cette notion, lui trouver une définition. Pour ce faire, poursuivons l'analyse du texte de Tieszen (p.60-62) :

« Dans le travail d'où est extrait ce passage [295], Martin-Löf souligne le point de vue intuitionniste selon lequel la preuve est un processus cognitif mené par étapes dans le temps, un processus qui mobilise certains actes mentaux dans lesquels nous venons à "voir" ou à "avoir l'intuition de" quelque chose. La preuve, dans cette conception, est en premier lieu un acte ou un processus ; seulement après il devient un objet. La conception de la preuve que Martin-Löf décrit se trouve de manière très frappante, comme il l'indique, dans l'identification que fait Heyting des preuves (ou constructions) à

²⁹⁵ Il s'agit de l'extrait de Martin-Löf cité par **Tieszen**, *op. cit.*, p.34 : « la preuve d'un jugement c'est l'évidence de celui-ci... ainsi preuve est la même chose qu'évidence... la preuve d'un jugement est l'acte même de saisir, d'appréhender, de comprendre ou de voir celui-ci. Ainsi, une preuve est non pas un objet mais un acte. C'est ce que Brouwer voulait signaler en disant que la preuve est une construction mentale, parce que ce qui est mental ou psychique, ce sont précisément nos actes ... et l'acte est d'abord l'acte en train de s'effectuer, seulement après, et de manière irrévocable, il devient l'acte qui a été effectué. » (voir précédemment).

*l'accomplissement des intentions dans le sens de la philosophie de Husserl (Heyting 1931). Selon ce point de vue, **la possession d'évidence renvoie à l'accomplissement d'intentions mathématiques**. Je suis complètement d'accord avec la remarque de Martin-Löf (Martin-Löf 1983-4 : 240-1) selon laquelle Heyting n'a pas seulement emprunté ces termes à Husserl, il les a aussi correctement appliqués. Aussi, en première approche, je propose de répondre à notre question de départ ["Qu'est-ce qu'une preuve ?"] ainsi :*

- Une preuve est l'accomplissement d'une intention mathématique.

*Ainsi, la prouvabilité doit être entendue en termes d'accomplissabilité [296]. En un seul coup on incorpore la notion de preuve dans une riche théorie phénoménologique d'actes mentaux, d'intentionnalité, d'évidence, et de connaissance. Pour comprendre philosophiquement ce qu'est une preuve, il faut comprendre ce qu'est l'accomplissement d'une intention mathématique. Considérons donc d'abord le concept d'intention mathématique. [P.61] Le concept d'intention doit être compris en termes de théorie de l'intentionnalité. De nombreux cognitivistes et philosophes de la pensée croient que l'intentionnalité est une caractéristique basique, irréductible, de la cognition, certainement l'une des formes les plus théoriques de celle-ci. **L'intentionnalité est la caractéristique de "aboutness" ou "directedness" [297] possédée par de nombreux types d'actes***

²⁹⁶ Il s'agit d'un néologisme.

²⁹⁷ Nous gardons les néologismes anglais "aboutness" et "directedness", plus élégants que leurs traductions possibles en français : "aboutness" : "dans-le-but-de-tion" ; "directedness" : "dirigé-tion". Plus clairement : caractéristique d'"être dirigée vers".

mentaux. Elle a été caractérisée en disant que la conscience est toujours la conscience de quelque chose. On peut voir ça très clairement en mathématiques, où les croyances mathématiques, par exemple, sont des croyances au sujet des nombres, des ensembles, des fonctions, des groupes, des espaces, et ainsi de suite. En vertu de leur "directedness" ou caractère référentiel, **les actes mentaux qui sont intentionnels sont supposés être ceux qui confèrent un sens, ou un contenu sémantique.**

Une façon standard d'analyser ce concept d'intentionnalité est de dire que **les actes de cognition sont dirigés vers, ou réfèrent à, un objet via le "contenu" de chaque acte, l'objet de l'acte pouvant ou non exister.** Nous pouvons figurer la structure générale de l'intentionnalité de la manière suivante :

$$\text{Acte}(\text{Contenu}) \rightarrow [\text{objet}],$$

où nous mettons "entre crochets" l'objet parce que nous ne présumons pas que l'objet d'un acte existe toujours. Les phénoménologues sont célèbres pour avoir suggéré que nous mettions "entre crochets" l'objet, et qu'ainsi nous puissions focaliser notre attention sur l'acte (noésis) et le contenu de l'acte (ou noéma), que nous pensons à un acte comme dirigé vers un objet particulier via son contenu (ou noéma). **Que l'objet existe ou non dépend de notre possession d'une évidence de son existence**, évidence qui serait donnée par des actes effectués dans le temps.

Nous pouvons saisir ce qui est essentiel (pour notre propos) dans la distinction entre acte et contenu en considérant les cas suivants : un mathématicien M pourrait croire que Φ , ou savoir que Φ , ou se souvenir que Φ , où Φ est une certaine proposition mathématique. Dans ces cas, différents types d'actes cognitifs

*sont en jeu – croire, savoir, se souvenir – mais ils ont le même contenu, exprimé par Φ . Le caractère de l'acte change, mais son contenu demeure le même. Bien sûr à l'inverse le contenu peut varier tandis que le caractère de l'acte demeure le même. Le contenu lui-même peut avoir une structure. Aussi, quand nous disons que le contenu est "exprimé" par Φ nous voulons dire que **la proposition mathématique Φ est une expression du contenu d'un acte cognitif particulier**²⁹⁸. Ainsi, il existe un parallèle direct entre l'intentionnalité, fait de langage ou expression, et l'intentionnalité, fait de la cognition, dans la mesure où [p.62] nous restreignons notre attention à ces expressions qui sont des expressions d'actes cognitifs. » (Tieszen, p.60-62)*

Résumons ce qui précède.

Qu'est-ce qu'une preuve mathématique interprétée à la lumière de la théorie de l'acte cognitif ? Contrairement à la conception classique, qui la considère comme une expression (suite de formules) à contenu lié à un noyau de vérités primitives immédiates et intuitives – qui est une conception "statique" –, la théorie de l'acte cognitif en donne une interprétation "dynamique" centrée sur le concept *d'intentionnalité d'un acte de cognition dirigée vers (ou référant à) un objet mathématique par le biais du contenu de l'acte* (Tieszen) : la preuve(-objet) est alors *l'accomplissement* de cette intention, et l'évidence en est son "symptôme".

Détaillons le sens des termes – en numérotant ces définitions à la suite de celles données dans la partie 2° qui précède :

²⁹⁸ Nous profitons ici pour souligner (et rappeler) que "le contenu exprimé par Φ " réfère non pas à la proposition Φ en tant qu'elle est un objet extérieur, mais, selon le vocabulaire que nous avons adopté, à son "jugement" c'est-à-dire son "image" cognitive.

8- **Une preuve est l'accomplissement d'une intention mathématique.** Et cet accomplissement est la preuve-objet. Donc : le jugement d'une proposition Φ devient une preuve s'il y a accomplissement d'une intention mathématique. L'agent cognitif (le mathématicien) considère alors que la proposition Φ est vraie.

9- **Le sentiment ("possession") d'évidence signale l'accomplissement d'intentions mathématiques.** C'est une première caractérisation du terme "évidence" si important pour définir la transformation d'un jugement en une preuve-objet de connaissance, *via* l'acte de preuve. L'évidence survient si l'acte cognitif accomplit une intention mathématique. De la même manière que nous avons hiérarchisé l'articulation entre preuve et évidence (définition 3 de la précédente partie), nous allons établir une hiérarchie : le sentiment d'évidence est sous-tendu par l'accomplissement d'une intention mathématique.

10- **L'intentionnalité (mathématique) est une caractéristique de la conscience en tant que celle-ci est toujours une conscience dirigée vers quelque chose.** Autrement dit, les actes mentaux mathématiques font partie de la catégorie des actes mentaux intentionnels c'est-à-dire dirigés vers l'obtention de quelque chose. L'intentionnalité est la caractéristique de directionnalité dynamique du système cognitif.

11- **L'intentionnalité est ce qui dirige l'acte de cognition vers un objet de connaissance *via* le contenu de cet acte.** Ce vers quoi est dirigé l'acte mental mathématique est un objet de connaissance. Et c'est précisément ce mouvement dirigé (d'un acte) vers un objet de connaissance qui donne sens au contenu de l'acte. Autrement dit, l'acte

mathématique est à contenu mathématique *parce qu'il* est dirigé vers l'obtention d'un objet mathématique de connaissance. Ou encore : l'intentionnalité mathématique est l'"orientateur" d'un acte mathématique vers un objet de connaissance mathématique *via* le contenu mathématique que l'acte (dirigé par l'intentionnalité) véhicule.

12- L'objet de connaissance vers lequel l'intentionnalité dirige l'acte mathématique peut ne pas exister. Si tout acte mathématique est dirigé par une intention d'accomplissement en un objet mathématique (*via* son contenu), tout acte mathématique dirigé n'aboutit pas nécessairement à l'accomplissement de l'objet. Alors l'objet n'existe pas, même si l'acte, son orientation et donc son contenu existent (sont des faits cognitifs).

Comment articuler toutes ces définitions en une "narration" cohérente qui démarrerait à la lecture d'une proposition mathématique écrite (bien formée) par un agent cognitif mathématique (un mathématicien) ?

Il faudrait d'abord commencer par une étape préalable qui n'a pas été évoquée dans ce qui précède : l'agent transforme Φ en un jugement, qui est donc l'image cognitive de Φ . Puis on enchaînerait avec les étapes du processus de preuve proprement dit. Cela ajoute donc un nouveau type d'acte cognitif, qui pose question : puisque tout acte mental conscient est mû par une intentionnalité, et que cette intentionnalité confère un contenu à l'acte, quel serait le contenu de l'acte qui transforme une impression visuelle en jugement ? Ce n'est pas le jugement lui-même puisque qu'il est l'objet final, c'est-à-dire celui marquant l'accomplissement de l'intention. La question est intéressante car elle situe le niveau d'analyse dans une 1^{ère} "couche" du système cognitif, celui où une impression extérieure se transforme en percept. Mais nous n'allons pas approfondir la

question, qui s'écarte de notre sujet. Adoptons donc l'interprétation en un seul "temps" : (objet extérieur)jugement \rightarrow preuve ou non.

Soit Φ une proposition mathématique écrite bien formée lue par l'agent cognitif.

Celui-ci soumet le jugement (objet cognitif) à un **acte de preuve** mû par une **intentionnalité mathématique** qui a pour objectif d'**accomplir** ce jugement, c'est-à-dire de le transformer en une **preuve-objet de connaissance**. C'est au cours de ce processus que le jugement acquiert un **contenu**, c'est-à-dire un sens (par le seul fait qu'il est soumis à une intention d'accomplissement). Mais bien que le jugement ait acquis un contenu *via* l'acte-preuve, il n'est pas nécessairement devenu une preuve-objet. Pour cela, il faut que l'intention s'accomplisse, ce que l'agent appréhende sous la forme d'un sentiment d'**évidence** : seulement alors il est en possession d'une preuve-objet et considère que la proposition Φ est **vraie**. Si l'intention ne s'accomplit pas, le jugement ne devient pas une preuve, mais cela ne signifie pas qu'il n'a pas de contenu cognitif puisque celui-ci est acquis *durant* le processus de preuve et non pas au stade final de l'accomplissement.

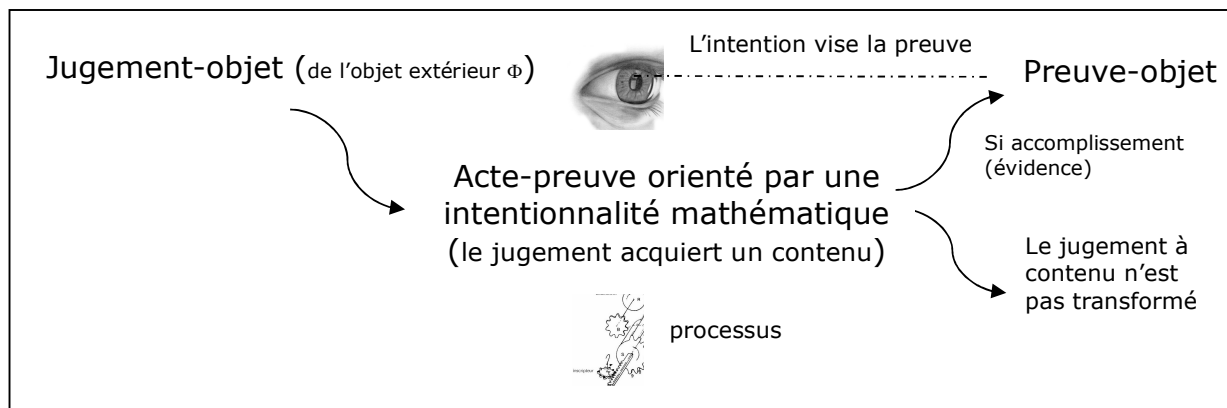
Toutefois, il nous semble plus adéquat de parler non pas de proposition mais d'inférence lors d'un "raisonnement" mathématique (démonstration), pour signaler que le processus décrit ci-dessus peut se répéter un certain nombre de fois dans la preuve (au sens traditionnel) d'une proposition mathématique – sans qu'il soit nécessaire que ce schéma itéré coïncide avec le déroulement formel de la preuve²⁹⁹.

Dans tous les cas, nous pouvons illustrer le processus par le schéma

²⁹⁹ En effet, certaines étapes cognitives peuvent ne pas apparaître dans la mise en écrit de la démonstration.

suisant :

Schéma 1



3°- Application du schéma à 9 cas pratiques

Nous allons tenter d'interpréter ce schéma théorique à l'aide d'exemples concrets de propositions mathématiques. Ces exemples nous obligeront à préciser le sens du schéma 1 et à relever ses lacunes.

Soient les propositions suivantes :

- $\Phi 1$: après tout nombre premier, il y en a un autre ;
- $\Phi 2$: tout nombre entier est premier ;
- $\Phi 3$: la puissance du continu est 2^{\aleph_0} et elle suit immédiatement \aleph_0 ;

- $\Phi 4$: **323797 est facteur de deux nombres premiers³⁰⁰ ;**
- $\Phi 5$: **$10^{10^0} + 1$ est premier ;**
- $\Phi 6$: **4 est premier ou composite ;**
- $\Phi 7$: **247 est premier ou composite ;**
- $\Phi 8$: **tout nombre entier est premier ou composite ;**
- $\Phi 9$: **$10^{10^0} + 1$ est premier ou composite.**

Toutes ces propositions ont un contenu mathématique, c'est-à-dire un sens - ce qui indique qu'en les lisant, on a déclenché une intentionnalité mathématique cherchant à s'accomplir en une preuve-objet de connaissance. Mais toutes ne se réalisent pas en un tel objet. Nous allons les étudier à la lumière du schéma.

$\Phi 1$: "après tout nombre premier, il y en a un autre"

Servons-nous de cet exemple pour commencer à donner un sens concret aux concepts précédemment définis... Il n'est pas problématique de dire que la proposition $\Phi 1$ est *évidente* pour tout mathématicien, en vertu de sa connaissance de la démonstration élémentaire d'Euclide. Cette évidence signale donc que le jugement s'est transformé en une preuve-objet *via* un acte-preuve mû par une intentionnalité, qui a donné un contenu au jugement et l'a accompli. Néanmoins, cet acte-preuve peut simplement être un processus de réactualisation ou remémoration de l'insight-trace de la démonstration d'Euclide que nous avons fait dans le passé (je me souviens que Φ).

Quel est le contenu de cet acte ? Le fait d'appréhender le sens

³⁰⁰ On suppose que cela signifie que 323797 n'est pas premier (le nombre 1 est donc exclu des facteurs premiers).

mathématique de cette proposition, ce qui permet ensuite de déclencher l'acte de remémoration. C'est en ce sens que nous disons que **le mouvement qui accole un contenu au jugement, durant l'acte de preuve, est préalable au phénomène d'accomplissement/évidence** (il faut d'abord comprendre ce qu'on lit pour pouvoir juger de sa validité).

Φ2 : "tout nombre entier est premier"

Si nous suivons le schéma, le processus serait le suivant : quand nous l'avons lue, la proposition a acquis un sens, c'est-à-dire un contenu mathématique, car l'acte de preuve est déjà en cours. Mais l'acte ne s'est pas accompli en une preuve-objet de connaissance, puisque *évidemment* tout nombre entier n'est pas premier.

Evidemment... cette proposition procure un sentiment d'évidence : sa fausseté. Or s'il y a évidence, c'est qu'il y a accomplissement d'une intentionnalité mathématique en un objet de connaissance – en l'occurrence : « "tout nombre entier est premier" est une proposition fausse ».

Bref, d'un côté le schéma théorique semble nous dire qu'il ne devrait pas y avoir d'évidence, d'autre part l'expérience nous montre qu'il y en a une, même si elle n'émerge pas directement du contenu de la proposition.

Si l'on dit que la proposition accomplit une intentionnalité mathématique – l'évidence de sa fausseté nous apparaît immédiatement – alors on peut dire que tout jugement d'une proposition mathématique bien formée relativement simple accomplit une intentionnalité mathématique c'est-à-dire se réalise en une preuve-objet de connaissance... **Mais cet objet n'est pas nécessairement l'affirmation du contenu du jugement.** C'est un point qui nous avait échappé dans la définition

théorique.

Or cela semble affaiblir le concept de preuve cognitive : si en jugeant une proposition fautive nous réalisons une preuve, c'est-à-dire nous construisons un objet de connaissance (ce qui est indéniable), le lien entre preuve cognitive et vérité de la proposition, indiqué dans le point 6°, se dilue... Nous discuterons de la question dans l'analyse de la proposition 4.

Φ3 : "la puissance du continu est 2^{\aleph_0} et elle suit immédiatement \aleph_0 "

Même si on suppose que le mathématicien aux prises avec cette proposition a déjà travaillé dans ce domaine et, soit a pris son parti entre le point de vue cantorien et le point de vue constructiviste, soit s'est rangé du côté neutre d'une relativisation axiomatique, cette proposition pose un problème au regard des définitions données ci-dessus.

Dans le premier cas, celle d'une mathématique contentuelle où s'opposeraient les points de vue cantorien et constructiviste, cette proposition (jugement) a un contenu, c'est-à-dire un sens, même si le constructiviste affirmerait qu'elle « est vide de sens ». De fait, c'est l'accomplissement de ce jugement qui est en question : pour l'un, elle s'accomplit en un objet de connaissance (même s'il est vague car la proposition ne peut être démontrée ni infirmée), pas pour l'autre. Cela semble induire une variabilité du concept d'accomplissement d'une intentionnalité mathématique de nature non pas cognitive mais proprement subjective : selon les convictions épistémologiques de l'agent cognitif, un même contenu acquis durant un acte-preuve peut conduire ce dernier à s'accomplir ou non. Comment sortir du piège du subjectif ?

On peut arguer que dans le domaine de la connaissance mathématique, les agents peuvent avoir des modes cognitifs différents. L'opposition entre réalisme et anti-réalisme étant récurrente, nous pourrions postuler l'existence de ces deux grandes modalités d'organisation cognitive, incommensurables entre elles où le schéma du processus d'accomplissement de l'intention mathématique s'applique mais ne conduit pas aux mêmes résultats. Las ! Entre un réalisme cantorien et anti-réalisme constructiviste, il existe un éventail d'autres positions épistémologiques ou épistémiques (i.e. liées à l'appareil cognitif), qui, si on veut éviter de mettre à mal la nature universelle du jugement mathématique, montrent que l'interprétation du schéma 1 n'est pas suffisante pour résoudre le problème.

La question est donc posée de l'existence de modalités de la connaissance mathématique expliquant comment le schéma 1 peut s'appliquer aussi bien au réaliste qui ressent l'évidence du sens de la proposition 3, qu'à l'anti-réaliste qui ressent l'évidence qu'une telle proposition n'en a pas...

Considérons maintenant le point de vue axiomatique selon lequel un système formel contenant l'axiome du continu est aussi valable qu'un système contenant sa négation. Peut-on dire que la proposition "la puissance du continu 2^{\aleph_0} suit immédiatement \aleph_0 " accomplit ou non une intentionnalité mathématique ? L'évidence ici est que cette proposition ne peut être qualifiée hors de la connaissance du système formel de référence. L'acte mathématique aurait-il un contenu et accomplirait-il une intention mathématique en un objet de connaissance du type "ça dépend" ou "dit comme ça, ça n'a pas de sens" ? L'objet de l'accomplissement serait-il une connaissance du type "une telle proposition, isolée de toute hypothèse préalable, peut être valide ou non" ? Cela nous semble

douteux. D'autant plus que l'adhésion à la méthode axiomatique n'est pas de même nature cognitive que la croyance réaliste ou anti-réaliste : elle est un choix intellectuel permettant de libérer la pratique mathématique de la croyance, c'est-à-dire du pli naturel du mathématicien vers un certain mode de connaissance (réaliste, anti-réaliste, etc.). Plutôt, la méthode axiomatique installe une instance supplémentaire qui permet d'instrumentaliser le jeu entre différents modes de croyance.

Dans tous les cas, la proposition 3 jette une ombre sur la simplicité apparente du processus que nous avons exposé.

Φ4 : "323797 est facteur de deux nombres premiers"

On est dans le cas d'une proposition qui a un contenu mais qui n'engendre pas immédiatement une évidence. On sait comment résoudre la question au moyen d'une procédure de calcul simple (crible d'Eratostène ou autre), qu'il faut dérouler en une série d'itérations simples chacune pouvant être incluse dans le schéma 1. Et on sait qu'à chaque itération, une évidence surgira, jusqu'à l'évidence finale.

En effet, supposons que le premier pas est l'opération : 323797 divisé par 3. Cela peut être mis sous la forme d'une proposition "323797 est divisible par 3". Cette proposition est fautive : $323797/3=107932,33\dots$ Doit-on alors parler de non accomplissement de l'acte dont le contenu réfère à la proposition "323797 est divisible par 3" ou d'accomplissement de l'acte dont le contenu réfère à la proposition « "323797 est divisible par 3" est faux » ou "323797 n'est pas divisible par 3". Le résultat de l'opération (107932,33...) – même effectuée par une calculatrice – procure une évidence qui va dans le sens de ce que nous cherchons : aucun des facteurs premiers de 323797 n'est 3. C'est un objet de connaissance positif en ce sens qu'il augmente l'insight global sur la "factorisabilité" du

nombre, même s'il n'accomplit pas le contenu de l'acte local.

Aussi, il nous faut revoir le sens du Schéma 1. L'acte orienté par l'intentionnalité mathématique vers l'accomplissement de la preuve a un contenu (la compréhension d'une proposition écrite), mais cet acte mû par une intentionnalité mathématique cherche à s'accomplir en un objet de connaissance qui est non pas la transformation du contenu de la proposition *stricto sensu* en objet de connaissance mais l'acquisition d'une connaissance (preuve-objet) mathématique dont la spécificité déborde le contenu de cette proposition. Posé autrement, que ce soit pour la proposition "tout nombre entier est premier" ou pour " la puissance du continu 2^{\aleph_0} suit immédiatement \aleph_0 " ou encore "323797 est facteur de deux nombres premiers", dire que le jugement (intériorisation de la proposition) acquiert un contenu-sens par son orientation par une intentionnalité mathématique ne signifie pas que l'assertion reflétée par la proposition est le contenu de l'acte. **Le contenu de l'acte ne sollicite pas seulement le contenu propositionnel : il mobilise tout le domaine de connaissance auquel appartient le jugement de la proposition.** Bref, il nous semble que la seule manière d'interpréter le schéma 1 est de dire que "comprendre une proposition écrite" (attribuer un contenu à la proposition) c'est avoir une compréhension qui met en jeu tout le domaine de connaissance auquel appartient le jugement : comprendre une proposition, c'est l'insérer dans un champ de connaissances formé d'objets-preuves préalablement accomplis.

Nous approfondirons la notion de domaine ou de champ de connaissance dans la section qui suit.

Le contenu de l'acte est donc composite : le jugement de la proposition est mis en rapport avec un réseau d'objets de connaissance dont le sens est acquis et réactualisé. Quand cela arrive, la preuve-objet qui accomplit l'intention est un objet (nouveau ou réactualisé) de ce tissu

d'objets. Certains problèmes soulevés dans l'analyse des propositions précédentes s'évanouissent : autant "après tout nombre premier, il y en a un autre" (évident) que "tout nombre entier est premier" que "323797 est divisible par 3" s'accomplissent en une preuve-objet sans pour autant que cette preuve soit une validation directe de l'assertion : il suffit qu'elle soit un objet de connaissance du domaine dans lequel s'intègre cette assertion.

En effet, le jugement de la proposition "tout nombre entier est premier" entraîne un acte mental (orienté) s'accomplissant en une preuve qui est la négation de cette assertion ou plutôt l'affirmation que cette assertion n'est pas valide ou encore que tout nombre entier n'est pas premier ou encore qu'il existe un nombre entier qui est divisible... C'est bien là un objet de connaissance du domaine auquel appartient l'assertion d'origine.

Le jugement de la proposition "323797 est divisible par 3" entraîne un acte mental (orienté) qui s'accomplit en une preuve c'est-à-dire un objet de connaissance du domaine auquel appartient cette proposition. L'objet-preuve de connaissance étant : 3 n'est pas un facteur premier de 323797 ou encore les facteurs premiers de 323797 sont supérieurs à 3.

Néanmoins, pour élargir le sens donné au concept de "contenu de l'acte" nous avons fait appel au concept de "mise en rapport avec le domaine de connaissance dans lequel s'intègre l'assertion reflétée par la proposition" qui lui-même demeure vague à ce stade. Qu'est-ce que cette "mise en rapport" ? Qu'est-ce que "le domaine de connaissance" dans lequel l'assertion s'intègre ? Nous aborderons cela par la suite.

Grâce à l'élargissement que nous venons de faire, nous pouvons dire, concernant la proposition 4 ("323797 est facteur de deux nombres premiers"), que chaque itération du crible d'Eratostène peut être associé

au schéma 1 de la preuve cognitive et interprété comme un acte qui s'accomplit. Nous allons d'ailleurs élargir cette conclusion non seulement à toutes les propositions de ce type (faisant appel à des procédures connues) mais également au cas où le mathématicien lit une démonstration et la comprend : à chaque inférence, le schéma 1 s'accomplit entièrement jusqu'à la conclusion.

A ce stade donc, il reste deux questions ouvertes : 1- qu'est-ce qu'un domaine de connaissances ? Et comment celui-ci se lie-t-il dynamiquement, via l'acte mû par l'intentionnalité, avec le contenu de l'assertion ? ; 2) peut-il y avoir plusieurs modes de connaissance mathématique différents (cas de la proposition " la puissance du continu 2^{\aleph_0} suit immédiatement \aleph_0 ") ?

Φ5: " $10^{10^{10}} + 1$ est premier".

Ici, c'est le problème classique des "très grands nombres" que Borel a largement abordé dans ses écrits et dont nous parlerons en détail dans le chapitre suivant³⁰¹. Il pose la question de la temporalité. Nous supposons ici, qu'aucun moyen de calcul ne peut par principe prouver (mécaniquement) cette proposition. A priori, si on interprète mécaniquement le schéma 1, qui exprime un processus "local", une telle proposition est "inatteignable" : nous pourrions avoir des preuves-objets de connaissance intermédiaires (à chaque itération du schéma 1) mais pas de preuve-objet finale. De même pour une proposition indécidable. Néanmoins, le mathématicien peut obtenir la preuve, au sens du schéma 1, des propositions "trop longues" ou indécidables c'est-à-dire accomplir une intention mathématique en un objet de connaissance. En l'occurrence,

³⁰¹ Voir la note ci-dessus sur les classes de complexité.

la connaissance de la nature inatteignable ou indécidable d'une proposition, et donc son absence d'accomplissement possible. L'objet-preuve de connaissance étant du type : cette proposition est vide de sens car je n'ai aucun moyen matériel de la prouver (ou l'infirmier), ou encore : cette proposition est indécidable (affirmation qui émerge de la preuve elle-même)

Résumons :

1- Le contenu de l'acte est multiple : ce que l'on appelle "le sens de la proposition" est un fait cognitif complexe qui met *en rapport* le contenu stricto sensu de l'assertion avec les *objets du domaine de connaissance* auquel il appartient (dont le sens est acquis et réactualisé). Désormais, quand nous parlerons de contenu de l'acte, nous référerons à cet ensemble de connexions. Aussi, l'accomplissement de l'acte est l'accomplissement d'un acte dont le contenu est cet ensemble de connexions d'un domaine de connaissance dans lequel s'insère le contenu *stricto sensu* de la proposition : la preuve-objet qui accomplit l'intention (quand cela arrive) est un objet (nouveau ou déjà là) de ce tissu d'objets. D'où la question : **qu'est-ce qu'un domaine de connaissances et comment il se lie dynamiquement, via l'acte mû par l'intentionnalité, avec ce que nous avons appelé le sens strict de la proposition ?**

2- Dans le cas de la proposition 3, nous avons vu que le schéma 1 peut s'appliquer aussi bien au réaliste qui ressent l'évidence de la vérité de la proposition, qu'à l'anti-réaliste qui ressent l'évidence qu'une telle proposition n'a pas (ou pas encore) de preuve et qu'en l'état elle est vide de "sens" (i.e. elle ne s'accomplit en aucune preuve-objet). Ce qui pose

une question sur les modalités de la connaissance mathématique : **y a-t-il plusieurs modes de connaissance incommensurables et/ou incompatibles, comme celles du réaliste et de l'anti-réaliste ?**

3- Nous voudrions attirer l'attention sur le fait que nous n'avons considéré qu'un seul type de situation où un mathématicien "passif" lit un enchaînement de propositions mathématiques. L'analyse qui précède ne dit rien sur le processus d'un mathématicien en train de créer des connaissances mathématiques nouvelles et d'élargir le champ des mathématiques. **A quel cadre appliquer le schéma 1 dans le cas d'une création mathématique ?**

Avant de chercher à répondre aux questions posées ci-dessus, concluons par une remarque sur la nature du concept d'*intentionnalité d'un acte de cognition dirigé vers (ou référant à) un objet mathématique par le biais du contenu de l'acte*. Elle intègre des éléments qui semblent hors de toute sphère mathématique comme l'*intentionnalité*, l'*acte de cognition*. Elle intègre également des éléments de la sphère mathématique comme les *objets de connaissance* et les *contenus des actes*. Nous ne disons pas que ces objets de connaissance et contenus sont nécessairement des objets mathématiques au sens d'exprimables en langage-objet, mais ce sont des éléments qui font partie de la sphère mathématique, dans l'optique néo-intuitionniste de la théorie de l'acte cognitif. De fait, cette théorie élargit le domaine des mathématiques à une sphère phénoménologique (phénomènes cognitifs), bien en amont du langage symbolique avec sa spécificité opérationnelle. Ainsi, l'intuitionnisme considère la mathématique comme une activité principalement a-linguistique, non pas dans le sens d'indescriptible dans tout langage (puisque'on peut la décrire cognitivement), mais dans le sens que – si l'on s'intéresse au fonctionnement cognitif – le langage-objet

reflète des actes mathématiques déjà faits et ne dit rien des actes en train de se faire.

Considérons les quatre propositions restantes, dont nous nous demanderons comment les inscrire dans le concept de preuve donné par le schéma 1.

- **$\Phi 6$: 4 est premier ou composite**
- **$\Phi 7$: 247 est premier ou composite**
- **$\Phi 8$: tout nombre entier est premier ou composite**
- **$\Phi 9$: $10^{10^0} + 1$ est premier ou composite**

Tel que nous avons défini la preuve-objet d'un jugement (assertion) reflétant une proposition mathématique,

- $\Phi 6$ est évident : il s'accomplit quasiment immédiatement en une preuve(-objet de connaissance) : il est évident que 4 est un nombre composite, et a fortiori est premier ou composite.

- $\Phi 7$: ce qui est évident pour nous c'est que le jugement de cette proposition ne peut que s'accomplir en une preuve-objet de connaissance, même si cette preuve-objet n'est pas actuellement donnée. Autrement dit : selon une interprétation stricte du schéma 1, pour réaliser la preuve-objet de connaissance que 247 est premier ou composite, il faudrait effectuer une itération du schéma 1 comme dans le cas de la proposition "323797 est facteur de deux nombres premiers" jusqu'à obtenir l'objet final de connaissance. Mais dans le cas présent, l'évidence que le nombre 247 est premier ou composite est immédiate : « je suis absolument certain (évidence) que 247 est premier ou composite », connaissance qui

émerge d'une seule itération du schéma 1 puisque le contenu de l'acte – mise en rapport du jugement avec le domaine de connaissance auquel il appartient – s'accomplit en une preuve qui est, d'une part, l'idée générale que tout nombre entier est nécessairement premier ou composite, d'autre part, l'idée que j'entrevois de manière parfaitement claire comment je pourrais montrer cela en particulier pour le nombre 247 (crible d'Eratostène). Nul besoin dès lors d'effectuer une itération du schéma 1.

C'est comme si l'on détenait une preuve(-objet de connaissance) de "second ordre" à savoir : je sais que le jugement s'accomplit en une preuve même si je n'ai pas effectué l'acte (ou les actes) cognitif transformant ce jugement en preuve-objet. L'objet de connaissance est donc du type : il est actuellement et quasi-immédiatement évident que le jugement de la proposition "247 est premier ou composite" s'accomplit en une preuve, ou il est évident que, si je procédais à une série d'actes mentaux, j'obtiendrais l'évidence que 247 est un nombre premier ou composite. Nommons Φ_{7bis} la proposition "il est sûr que 247 est premier ou composite" : Φ_{7bis} est évident (c'est-à-dire s'accomplit en une preuve-objet de connaissance de manière quasi-immédiate). Bref, on peut dire que le jugement de Φ_{7bis} s'accomplit en une preuve même si le jugement de Φ_7 ne s'accomplit pas (tant qu'on n'a pas procédé à l'itération du schéma 1). **Pouvons-nous dire que la preuve du jugement de Φ_{7bis} est celle de Φ_7 ? Ou doit-on distinguer la preuve de Φ_{7bis} (accomplie) du jugement Φ_7 non accomplie (actuellement) en une preuve, ce qui signifierait que l'objet de connaissance associé à la proposition "il est évident que 247 est premier ou composite" n'est pas le même que l'objet de connaissance associé à la proposition "247 est premier ou composite" (en supposant qu'on l'accomplisse actuellement) ?** Nous laissons la question en suspend...

- Φ_8 : Tout entier est premier ou composite. Pour un mathématicien

cette proposition est évidente. Pourquoi ? Soit parce que dans sa longue pratique des mathématiques il a été confronté à la démonstration générale formelle $\forall n \in \mathbb{N}, (\exists n' < n, n/n' \in \mathbb{N}) \vee (\forall n' < n, n/n' \notin \mathbb{N})$, soit parce que sa pratique des nombres entiers lui a donné de manière informelle cette connaissance, qu'il a ensuite (éventuellement) formalisée sous la forme précédente. **Remarquons néanmoins que nous n'avons pas jusqu'ici traité le cas d'une connaissance de type "général" (tout entier est premier ou composite) dans la perspective de la preuve cognitive, la question du lien entre objet de connaissance général et objet de connaissance particulier (247 est premier ou composite).** Nous y reviendrons ci-dessous.

- $\Phi 9$: $10^{10^{10}} + 1$ est premier ou composite. Nous sommes confrontés à un problème similaire que celui posé par la proposition " $10^{10^{10}} \square 1$ est premier" à ce "détail" près que nous savons que tout nombre entier donné est premier ou composite - qui est un objet de connaissance du domaine où s'intègre la proposition $\Phi 8$. Bref, tout en sachant qu'aucun nombre entier donné (donc fini) ne peut échapper à l'alternative premier ou composite (premier ou non-premier), nous savons aussi qu'on ne peut obtenir une preuve directe de la proposition $\Phi 9$. **Le jugement de la proposition " $10^{10^{10}} + 1$ est premier ou composite" s'accomplit-il dans une preuve ou non ?**

Nous voyons donc que le concept de preuve (cognitive) représenté par le schéma 1 ouvre sur de nombreuses questions quand nous le confrontons à des exemples pratiques relativement simples.

Mais au-delà de ces questions relatives au schéma 1, d'autres plus générales se posent. Qu'est-ce que connaître un "objet" mathématique ?

Qu'est-ce qui permet à un mathématicien d'étendre sa connaissance ? Comment qualifier rigoureusement ce "gap" entre le mode de pensée réaliste et anti-réaliste, entre un mode infinitiste actuel et finitiste-infinatiste potentiel, etc. ? Et, surtout, quelle définition phénoménologique (i.e. non formelle) donner aux concepts d'effectivité et de procédure effective ? Nous tenterons de donner un début de réponse dans les sections suivantes – la première (III) consacrée au lien entre le concept de preuve intuitionniste et celui d'effectivité, la seconde (IV) centrée sur la question de la modalité des connaissances mathématiques.

4°- Preuve intuitionniste et effectivité : cinq cas

Suivant notre postulat liant la procédure effective à la preuve intuitionniste, nous voudrions nous servir du classement des évidences-preuves ci-dessus pour l'appliquer à l'effectivité, en suivant l'exemple donné par la preuve de la proposition Φ_{Borel} . Nous allons donc interpréter en termes de "modes de preuve" les définitions que nous avons données aux modes des procédures effectives.

Connaître un objet mathématique c'est, nous l'avons dit, réaliser la preuve-acte d'un jugement-acte reflétant une proposition mathématique Φ , c'est-à-dire accomplir une intention mathématique *via* le contenu de l'acte. Cet accomplissement est signalé par l'effet d'évidence ("credential effect")... Las, cette définition est si générale qu'on pourrait aussi bien l'appliquer à la pensée philosophique qu'à toute activité cognitive qui construit des objets de connaissance dans l'intuition : elle ne distingue pas la particularité de la connaissance mathématique vis-à-vis de tout autre type de connaissance.

De plus, la définition que nous avons donnée passe sous silence un phénomène connu de tout mathématicien : la gradualité de l'accomplissement d'une connaissance mathématique, gradualité qui est autant temporelle que thématique.

Du point de vue temporel, le mathématicien construit ses objets de connaissance dans le temps. Par exemple : une preuve dont le support écrit est présenté au mathématicien ne conduit généralement pas "du premier coup" à son accomplissement dans son intuition, même quand le mathématicien appréhende "localement" ou "ponctuellement" chaque inférence de la preuve. Un mathématicien qui prend connaissance d'une preuve doit répéter le "geste" probatoire un certain nombre de fois avant que son intuition se saisisse de la totalité de la preuve, donc de l'objet de connaissance en tant qu'il s'insère dans un tissu de connaissance préalablement établi. Cette gradualité est donc liée *a priori* à l'idée de répétition dans le temps d'un geste probatoire, ce que nous analyserons dans la section suivante.

Par ailleurs, quel que soit le domaine de connaissance auquel appartient un contenu propositionnel, ou le mode auquel appartient le contenu de l'acte, il y a également une gradualité "thématique" de l'accomplissement d'une preuve mathématique : l'évidence, tout en étant un marqueur cognitif pauvre, n'est pas dénuée de teintes. Certaines propositions (ou jugements de propositions) nous paraîtront "plus évidentes" que d'autres, autrement dit leur preuve s'accomplira plus "immédiatement" et/ou plus "directement". Revenons aux cinq propositions Φ_6 à Φ_9 et classons-les selon une typologie heuristique de l'accomplissement de la preuve en fonction de l'accessibilité à l'effet d'évidence.

- $\Phi 6$: **4 est premier ou composite**
- $\Phi 7$: **247 est premier ou composite**
- $\Phi 8$: **tout nombre entier est premier ou composite**
- $\Phi 9$: $10^{10^0} + 1$ **est premier ou composite**

i) évidence d'une *preuve directe* (i.e. preuve qui s'accomplit directement)

La *preuve directe* c'est la preuve qui s'accomplit au sens entier du terme et dont l'objet de connaissance ainsi construit est en rapport direct avec le contenu (ou le jugement) de la proposition à prouver : elle l'affirme.

Prenons la proposition $\Phi 6$ "**4 est premier ou composite**" : sa preuve (i.e. la preuve du jugement de $\Phi 6$) est un objet de connaissance qui s'accomplit dans l'intuition de manière directe et immédiate. Son évidence nous apparaît (quasiment) spontanément et la preuve (4 est composite) affirme que $\Phi 6$.

Mais l'évidence d'une preuve directe n'est pas nécessairement immédiate. Par exemple, la proposition $\Phi 7$ "**247 est premier ou composite**" peut recevoir une preuve directe, qui se fera par exemple par application du crible d'Eratosthène ou de tout autre moyen de ce genre (i.e. constructif). L'évidence accompagnant cette preuve directe (dont l'accomplissement est que 247 est le produit de 13 par 19 donc il est composite) puisera sa source ailleurs que l'évidence de $\Phi 6$: la première est immédiate et intuitive, la seconde lente et raisonnée.

ii) évidence d'une *preuve potentielle*

Considérons à nouveau la proposition Φ_7 "**247 est premier ou composite**". Si l'évidence produite par l'accomplissement de sa preuve directe émerge d'un processus lent de raisonnement, en revanche, cette proposition peut déclencher un effet d'évidence immédiat qu'on pourrait exprimer ainsi : il est évident (immédiatement) que si j'en prenais l'énoncé, j'aurais une évidence (par un processus lent de raisonnement) du jugement direct de la proposition. Puisque nous avons lié l'évidence à l'accomplissement d'une preuve, l'évidence immédiate – nommons-là "de deuxième ordre" – signale l'accomplissement d'un jugement en preuve. Lequel ? Il ne s'agit pas de la preuve directe puisque cette évidence de 2^e ordre ne s'accompagne pas de la connaissance particulière "247 est composite donc il est premier ou composite". C'est, nous pourrions dire, l'évidence de l'accomplissement du jugement (en preuve) de la *prouvabilité* directe de la proposition (ou de son jugement). Nous nommons cela l'évidence d'une *preuve potentielle*, ce qui met l'accent non pas sur la preuve directe (de la prouvabilité de la proposition), mais sur cette prouvabilité qui s'accomplit en puissance mais non en acte.

De plus, nous semble-t-il, dans l'évocation de "l'évidence que j'aurais si je me donnais les moyens de conduire la preuve directe", le mot *évidence* (nommons-la "de premier ordre") pourrait ne pas être neutre cognitivement. Il ne s'agirait pas nécessairement d'une formule vide : cette évidence de 1^{er} ordre que le mathématicien évoque pourrait être liée à l'esquisse mentale (nous serions même tenté de dire : l'esquisse du geste mental) du processus de preuve directe, esquisse qui lui donnerait la certitude qu'il pourrait prouver directement la proposition.

Une autre possibilité serait que l'évidence de 2^e ordre, qui accomplit donc la preuve potentielle, soit un effet lié au fait que le mathématicien, supposé savoir que tout nombre entier est premier ou composite, sait donc quasi-immédiatement qu'il n'y a pas d'autre possibilité. L'évidence de

2^e ordre, c'est-à-dire l'accomplissement de la preuve potentielle, serait donc liée à une sorte de principe du tiers-exclu mais d'une nature cognitive fort différente de celle du principe logique (dont l'utilisation, remarquons-le, serait totalement légitime dans le domaine de la pensée finitiste dans lequel s'insère la proposition $\Phi 7$). Pourquoi ? Parce que l'évidence de 2^e ordre reflète l'accomplissement de la preuve potentielle, c'est-à-dire reflète un acte cognitif qui n'est pas de nature logique : ce principe du tiers-exclu "primaire" n'a pas le caractère de raccourci qu'a le principe classique (même dans le domaine du fini), sinon l'évidence ne serait pas immédiate. Nous pensons donc que ce principe du tiers-exclu primaire a un caractère mathématique non logique.

Enfin, l'évidence de la preuve potentielle pourrait être liée simultanément aux deux possibilités ci-dessus – d'ailleurs, on ne peut affirmer que celles-ci ne sont pas *in fine* une même chose du point de vue cognitif.

iii) évidence d'une *preuve générale*

Considérons la proposition $\Phi 8$ "**tout nombre entier est premier ou composite**". Ici, nous entrons dans le domaine du fini quelconque c'est-à-dire de l'infini potentiel³⁰². C'est une proposition arithmétique générale dont l'évidence de l'accomplissement de sa preuve n'est pas immédiate³⁰³.

³⁰² Est-ce un infini potentiel exclusivement "dénombrable" ? Pas nécessairement, étant entendu que nous séparons ici les objets mathématiques des méthodes de preuve mathématique (nous nous positionnons dans un cadre de pensée contentuel). Les ensembles sur lesquels nous raisonnons peuvent être infinis non-dénombrables potentiels, mais les méthodes de preuves sont supposées être énumérables. Ces méthodes peuvent-elles être néanmoins potentiellement infinies ? Nous répondrons par la suite.

³⁰³ Cette fois nous supposons que le mathématicien ne *sait* pas que tout nombre est premier ou composite, c'est-à-dire n'a jamais accompli cette preuve. Si cette proposition pose un doute sur la

La preuve émerge alors nécessairement, nous semble-t-il, de la construction d'un processus, à l'instar de la construction de la preuve directe de la proposition Φ_7 : par exemple, à l'aide d'un raisonnement de type "régression finie potentielle" sur les nombres c'est-à-dire avec un point d'arrêt "potentiel" en 0, ou alors au moyen d'un raisonnement par récurrence (application particulière du Principe d'induction complète), ou tout autre moyen de ce type (i.e. constructif). Ce qu'il importe de remarquer ici, c'est que l'évidence, c'est-à-dire l'accomplissement de la preuve de la proposition, n'est pas du même type que celle des propositions particulières précédentes : elle est précédée d'une évidence (preuve) locale. Par exemple, l'évidence-preuve locale est celle qui survient lorsque le mathématicien, ayant "fixé" mentalement l'entier n comme s'il s'agissait d'un nombre particulier, raisonne sur celui-ci :

1 et 2 sont premiers

Soit $n > 2$ donné

n est divisible par 2 ?

si oui, alors n est composite

si non, n est divisible par 3 ?

si oui, alors n est composite

si non, n est divisible par 5 ?

si oui, alors n est composite

si non, n est divisible par 7 ?

et ainsi de suite...

n est divisible par $\frac{n-1}{2}$?

si oui, alors n est composite

si non, alors n est premier

catégorie que nous voulons illustrer, il suffit de la remplacer par tout autre proposition de type fini quelconque, c'est-à-dire à quantificateurs sur un ensemble infini potentiel.

Mais l'accomplissement de la preuve de la proposition lui-même ne survient que lorsque le mathématicien, relâchant la contrainte mentale de fixité de n , donne une valeur générale à cette conclusion (« je n'ai pas fait d'hypothèse sur n , alors elle vaut pour tous les entiers non nuls. »)

Si l'on raisonnait à l'aide du principe de récurrence, la preuve locale consisterait à fixer mentalement la valeur de n , de supposer que n (ou que l'objet indicé par n) vérifie la propriété à démontrer, et de démontrer que cette propriété est héritée par $n+1$ (ou par l'objet indicé par $n+1$). Le raisonnement s'accomplit alors sur un mode proche du mode particulier, et c'est l'idée que « je n'ai pas fait d'hypothèse sur n , alors la conclusion vaut pour tous les entiers non nuls », qui relâche la contrainte de fixité de n et donne au mathématicien l'évidence de la preuve générale.

Certes, l'évidence-preuve générale suit presque immédiatement l'évidence-preuve locale, mais si le mathématicien a pu raisonner et faire des opérations sur n c'est uniquement parce qu'il l'a contrainte mentalement à se fixer, c'est-à-dire à être vue comme un nombre particulier. Si, du point de vue de l'écriture mathématique, la preuve locale suffit (le mathématicien se contentant d'écrire à la suite « CQFD »), du point de vue cognitif, il y a une inférence quasi-invisible qui le fait passer du mode particulier fini au mode général infini potentiel : c'est cette inférence qui donne la certitude de la preuve (générale) de la proposition.

L'exemple-type de ce genre d'inférence local(fini)-général(infini potentiel) transportant le caractère effectif d'une procédure locale à toute la proposition est donné par le Principe d'induction complète (principe de récurrence en arithmétique) qui sert classiquement de preuve de l'effectivité d'une proposition générale. Poincaré a tenté d'argumenter en ce sens dans *La Science et l'hypothèse* (1902), notamment au chapitre VI.

« [La preuve d'une proposition générale donnée par un raisonnement

par récurrence ne peut] nous venir de l'expérience ; ce que l'expérience pourrait nous apprendre, c'est que la règle est vraie pour les dix, pour les cent premiers nombres par exemple, elle ne peut atteindre la suite indéfinie des nombres, mais seulement une portion plus ou moins longue mais toujours limitée de cette suite.

Or, s'il ne s'agissait que de cela, le principe de contradiction suffirait, il nous permettrait toujours de développer autant de syllogismes que nous voudrions, c'est seulement quand il s'agit d'en enfermer une infinité dans une seule formule, c'est seulement devant l'infini que ce principe échoue, c'est également là que l'expérience devient impuissante. Cette règle, inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique a priori. On ne saurait d'autre part songer à y voir une convention, comme pour quelques-uns des postulats de la géométrie.

Pourquoi donc ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir **la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible**. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience.

Mais, dira-t-on, si l'expérience brute ne peut légitimer le raisonnement par récurrence, en est-il de même de l'expérience aidée de l'induction ? Nous voyons successivement qu'un théorème est vrai du nombre 1, du nombre 2, du nombre 3 et ainsi de suite, la loi est manifeste, disons- nous [...]. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose [...] nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même. »

Même s'il y a un appel au Deus ex-machina d'une propriété de

l'esprit lui-même", il faut se rendre à l'argument d'usage : une procédure effective locale (comme le raisonnement par récurrence) peut servir de preuve à une proposition générale.

Ainsi, une preuve générale est accompagnée d'une succession de deux évidences, l'une émanant d'un raisonnement sur le mode particulier fini, l'autre de l'inférence cognitive vers le mode infini potentiel donnant à ce raisonnement une valeur générale.

iv) évidence d'une *preuve virtuelle finie*

Considérons la proposition Φ_9 " $10^{10} + 1$ **est premier ou composite**". En principe, sa preuve est potentielle car elle ne diffère pas de celle de la proposition "**247 est premier ou composite**" : c'est une proposition particulière dont l'évidence directe est celle de la *prouvabilité* du jugement de la proposition (il est évident que si j'en prenais la peine, j'aurais une évidence du jugement de la proposition). Mais cette prouvabilité ("si j'en prenais la peine") est impossible à mettre en œuvre réellement³⁰⁴. Dans ce cas, l'évidence "de deuxième ordre" ("il est évident que...") signale un accomplissement qui est en contradiction avec l'impossibilité d'obtenir l'évidence-preuve de premier ordre de la proposition ("j'aurais une évidence du jugement de la proposition") : la preuve de la prouvabilité de la proposition s'accomplit alors que la preuve de la proposition ne s'accomplit pas. Alors, preuve ou pas preuve ? Pour certains mathématiciens, comme Borel (nous le verrons), cette proposition ne s'accomplit en aucun objet de connaissance (« elle est vide de sens » dirait-il), tandis que pour d'autres l'évidence de cette proposition est

³⁰⁴ On suppose qu'aucun moyen, manuel ou mécanique, ne peut venir à bout de la démonstration en un "temps raisonnable".

authentique, et sa preuve (virtuelle) peut prendre les deux formes suivantes :

1) Je sais que tout nombre est premier ou composite (on suppose que le mathématicien a déjà accompli la preuve générale de cette proposition), donc le nombre particulier $10^{10^{10}} + 1$ est *a fortiori* premier ou composite.

2) Je peux énoncer une méthode qui conduit forcément à la preuve de cette proposition (même si je ne peux l'effectuer matériellement).

v) évidence d'une *preuve virtuelle infinie*

Prenons maintenant la proposition générale "l'ensemble des réels n'est pas dénombrable" et considérons que le concept d'ensemble infini actuel n'est pas problématique. La démonstration de cette proposition se fait par diagonalisation sur un ensemble infini de suites infinies d'entiers. Si l'on admet l'existence d'ensembles infinis actuels, le processus de diagonalisation sur cet ensemble de suites d'entiers comprend plusieurs preuves imbriquées.

La première est locale : on raisonne en fixant mentalement les variables n, p, r (nous utilisons un double indigage : a_s^t est le nombre placé en $t^{\text{ème}}$ position dans la $s^{\text{ème}}$ suite). Comme ce raisonnement est local, c'est-à-dire lié à l'intuition des nombres entiers particuliers, c'est le mode fini-infini potentiel qui est en jeu :

A_1	= $\boxed{a_1^1}$	$a_1^2 \dots$	$a_1^n \dots$	$a_1^{n+p} \dots$	$a_1^{n+p+r} \dots$
A_2	= a_2^1	$\boxed{a_2^2} \dots$	$a_2^n \dots$	$a_2^{n+p} \dots$	$a_2^{n+p+r} \dots$
...					
A_n	= a_n^1	$a_n^2 \dots$	$\boxed{a_n^n} \dots$	$a_n^{n+p} \dots$	$a_n^{n+p+r} \dots$

$$\begin{array}{l}
\dots \\
A_{n+p} = a_{n+p}^1 \quad a_{n+p}^2 \dots \quad a_{n+p}^n \dots \quad \boxed{a_{n+p}^{n+p}} \dots \quad a_{n+p}^{n+p+r} \dots \\
\dots \\
A_{n+p+r} = a_{n+p+r}^1 \quad a_{n+p+r}^2 \dots \quad a_{n+p+r}^n \dots \quad a_{n+p+r}^{n+p} \dots \quad \boxed{a_{n+p+r}^{n+p+r}} \dots \\
\dots \\
\hline
B = b^1 \quad b^2 \dots \quad b^n \dots \quad b^{n+p} \dots \quad b^{n+p+r} \dots
\end{array}$$

Avec

$$b^1 \neq a_1^1$$

$$b^2 \neq a_2^2$$

...

$$b^n \neq a_n^n$$

...

$$b^{n+p} \neq a_{n+p}^{n+p}$$

...

$$b^{n+p+r} \neq a_{n+p+r}^{n+p+r}$$

...

C'est une preuve car elle conduit à l'évidence que la suite B diffère de chacune des suites A_n par au moins un élément. Puis on libère mentalement les contraintes de fixité sur n , p et r , ce qui conduit à l'évidence de la preuve générale sur un mode infini potentiel. Puis, enfin, on infère ce résultat dans le mode infini réalisé, ce qui conduit à l'évidence que quelle que soit l'ensemble infini dénombrable considéré, on peut construire un élément qui n'y appartient pas.

Ici nous retrouvons le type d'évidence des preuves générales, mais augmentée d'une inférence faisant passer du mode fini-infini potentiel au mode infini réalisé qui conduit à une évidence-preuve sur le mode infini réalisé. Or cette dernière inférence, nous semble-t-il, contient d'une

manière ou d'une autre l'idée d'une itération infinie dénombrable réalisée de fois de la méthode utilisée dans la première partie du raisonnement (qui lui, est du type preuve générale). On retrouve ce même type d'inférence dans la dernière partie de la démonstration de Borel-1895 :

« *Nous continuerons de même, en passant à la limite lorsque cela sera nécessaire et montrant alors qu'on peut conserver seulement un nombre fini des intervalles considérés. Je dis que nous atteindrons nécessairement l'extrémité B de la droite car, si on ne l'atteignait pas, on définirait une série d'intervalles ayant pour extrémités*

$$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_\omega}, \dots, B_{i_{2\omega}}, \dots, B_{i_{2^2}}, \dots, B_{i_{\omega^2}}, \dots$$

les indices étant tous les nombres de la seconde classe de nombres (définis par Cantor). Mais ces indices sont aussi dans un certain ordre, les nombres naturels, en tout ou en partie. C'est là une contradiction puisque la seconde classe de nombres constitue un ensemble de seconde puissance. » ⁽³⁰⁵⁾

Aussi, l'idée d'une itération un nombre infini dénombrable réalisé de fois d'une méthode utilisée habituellement dans la preuve d'une démonstration générale (située dans le domaine de l'infini potentiel) peut conduire à une preuve-évidence. Nous l'incluons dans la catégorie "preuve virtuelle".

Ce classement en quatre catégories de preuves-évidences que nous avons imaginé d'après les préceptes de la théorie de l'acte cognitif (et le schéma 1 qui en est un résumé) nous semble constituer une base de départ pour un classement de l'effectivité – ou du moins des procédures effectives – bien qu'il soit, en l'état, insuffisant car il laisse ouvert

³⁰⁵ **Borel**, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, in *Annales scientifiques de l'E.N.S.*, 3^e série, tome 12, (1895), p.51-52

plusieurs questions. En effet, mis ensemble, les cas ii), iii) et iv) posent un problème que nous ne savons pas résoudre sur la seule base de l'analyse de la preuve cognitive représentée par le schéma 1. Ainsi :

- Preuve potentielle : doit-on considérer que la preuve de $\Phi 7$: "**247 est premier ou composite**" s'accomplit du moment que la preuve d'une proposition de type $\Phi 7$ bis : "**il est sûr/évident que 247 est premier ou composite**" s'accomplit ? Autrement dit : est-ce que la preuve de $\Phi 7$ bis équivaut à ou implique, du point de vue cognitif, la preuve de $\Phi 7$? (la réciproque est triviale). Si, comme Borel, nous rejetons toute preuve de la proposition $\Phi 9$ " $10^{10} + 1$ **est premier ou composite**" à cause de son caractère non faisable, ce malgré l'évidence de deuxième ordre que $10^{10} + 1$ serait prouvable directement par quelqu'un qui en aurait les moyens (un super-agent cognitif), alors : en vertu de quel principe cognitif pourrions nous voir la preuve de $\Phi 7$ bis comme une preuve de $\Phi 7$? Surtout que, dans l'usage, beaucoup de mathématiciens la voient la proposition $\Phi 7$ et $\Phi 9$ comme similairement prouvables – évacuant la question de la faisabilité de la preuve hors du domaine des évidences-preuves mathématiques ?

- Par ailleurs, si l'on rejette hors de la sphère de la preuve les preuves virtuelles, comment admettre la possibilité d'accomplir la preuve de la proposition générale $\Phi 8$: "**tout nombre entier est premier ou composite**", tout en refusant que cet accomplissement se réalise pour la proposition $\Phi 9$ " $10^{10} + 1$ **est premier ou composite**" qui semble en être un cas particulier, du moins du point de vue de l'inférence logique ?

Si l'on adopte le point de vue intuitionniste tel que l'expose Detlefsen (principe de conservation épistémique, illégitimité de l'inférence logique à contenu mathématique), il nous semble que le cas de la proposition $\Phi 9$

“ $10^{10^0} + 1$ **est premier ou composite**” montre qu’il peut y avoir une dissociation (menant à une contradiction cognitive) entre l’évidence de 2^e ordre d’avoir un jugement prouvable et l’impossibilité d’obtenir l’évidence directe de ce jugement (qui n’accomplit jamais une intentionnalité). Mais alors, encore une fois, selon quels principes un mathématicien qui rejette la preuve de $\Phi 9$ peut-il admettre celle de $\Phi 7$ (via $\Phi 7$ bis) ? A partir de quelle valeur d’un entier, la preuve d’une proposition qui le contient passe du statut de potentiel à virtuel ? C’est évidemment le problème posé par le paradoxe du sorite. Mais, nous ne pouvons pas évoquer ce paradoxe si, comme nous l’avons fait jusqu’ici, nous tenons à rester dans le cadre d’une analyse du contenu de l’acte cognitif mathématique et non de l’acte mathématique à contenu propositionnel car le paradoxe du sorite est typiquement un paradoxe qui émerge via des inférences logiques à contenu propositionnel. En termes cognitifs, nous semble-t-il, $\Phi 7$ et $\Phi 9$ ne sont pas de même nature. De même, l’idée que $\Phi 9$ est un cas particulier de $\Phi 8$ est l’effet d’une inférence logique : de “**tout nombre entier est premier ou composite**”, on infère logiquement que “ $10^{10^0} + 1$ **est premier ou composite**”, mais cette inférence est aveugle à la transformation du mode de connaissance de chacune des propositions. On pourrait dire que $\Phi 7$ et $\Phi 9$ appartiennent à un mode différent que $\Phi 8$, qu’il n’y a pas de conservation épistémique entre ces deux modes, et que dans le mode de $\Phi 7$ et $\Phi 8$ – mode de type “particulier”, $\Phi 7$ s’accomplit en une preuve potentielle qui vaut preuve directe tandis que $\Phi 8$ ne peut s’accomplir sans passer par une inférence logique qui exporte son contenu propositionnel dans un autre mode. En l’état, et selon l’épistémologie intuitionniste, $\Phi 8$ est un jugement-acte mathématique qui n’accomplit aucune intentionnalité mathématique.

Admettons pour l’heure notre classement heuristique des preuves-

évidences. Ne pourrions-nous pas nous servir de lui pour l'effectivité ? Par exemple en disant qu'il existe *a priori* quatre modes d'effectivité possibles : l'effectivité réalisée, l'effectivité potentielle ou de principe, l'effectivité (d'une proposition) générale et l'effectivité virtuelle ? Prenons la proposition de Borel :

Φ_{Borel} : **"Quel que soit une suite S infinie dénombrable donnée d'intervalles couvrant le segment AB, si une sous-suite S' quelconque donnée strictement croissante de S a un point limite P strictement intérieur à AB, on peut déterminer un intervalle I de la suite S tel que P est strictement intérieur à I"**

Nous avons vu que cette proposition peut être démontrée par construction d'une procédure effective au sens de Borel, c'est-à-dire localement kroneckerienne sur le mode infini potentiel (« *Partons d'une extrémité A de la droite, soit $A_i B_i$ un des intervalles qui comprennent le point A ; soit de même $A_{i_1} B_{i_1}$ un des intervalles qui comprennent le point B_i , $A_{i_2} B_{i_2}$ un des intervalles qui comprennent le point B_{i_1} , etc. [...] Les points $B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \dots$, s'ils n'atteignent pas l'extrémité B de la droite, **ont une limite** B_{i_ω} et ce point est compris dans un intervalle $A_{i_{\omega+1}} B_{i_{\omega+1}}$ tel que $A_{i_{\omega+1}}$ tombe, par exemple, entre $B_{i_{m-1}}$ et B_{i_m} ; nous pourrions alors ne pas tenir compte des intervalles $A_{i_{m+k}} B_{i_{m+k}}$, et nous aurons tout de même une suite ininterrompue d'intervalles sur la droite »)³⁰⁶.*

Dans quel type de preuve du classement heuristique pouvons-nous ranger la preuve de Borel de la proposition Φ_{Borel} ? La démonstration contient trois quantificateurs ($\forall S, \forall S', \exists I$) sur des ensembles dont le

³⁰⁶ **Borel**, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, in *Annales scientifiques de l'E.N.S.*, 3^e série, tome 12, (1895), p.51. Le gras est de nous. Comme nous l'avons dit dans la Partie I, les indices en ω peuvent être considérés, à ce stade de la démonstration, comme une notation sans contenu mathématique. Le raisonnement est donc du type infini potentiel.

caractère infini peut être réduit au mode potentiel car le raisonnement est local et s'appuie sur la fixation des indices (mode particulier) puis leur relâchement (mode général). La démonstration donnée par Borel est classique et kroneckerienne. Aussi, il ne nous semble pas illégitime de considérer que la preuve de cette proposition, qui est une procédure effective au sens de Borel, entre dans le cadre des *preuves-évidences générales* à l'instar de la proposition "**tout nombre entier est premier ou composite**". Certes, l'énoncé de la proposition Φ_{Borel} est sur le mode infini (dénombrable) actuel, mais sa démonstration est exclusivement sur le mode infini potentiel, ce qui nous permet de ne pas la classer dans la catégorie *preuve virtuelle* ³⁰⁷.

Nous voyons réapparaître la tripartition réalisée/potentielle/virtuelle. En effet, du point de vue intuitionniste, il y a trois cas possibles pour notre connaissance d'une proposition décidable : soit nous en possédons une preuve, auquel cas la proposition est vérifiable ; soit nous possédons une démonstration concluante c'est-à-dire nous savons que la proposition assertable est vérifiable ; soit nous disposons d'une démonstration assertable mais que nous ne pouvons vérifier, i.e dont la conclusion de la preuve se trouve, pour notre connaissance, dans un infini potentiel. On rejoint le point de vue de Borel pour qui, "*lorsque le fini devient très grand, il soulève les mêmes difficultés que l'infini*" (Borel-1947, p979).

³⁰⁷ Par ailleurs, on pourrait modifier la proposition et la démonstration pour les faire entrer pleinement dans le mode du fini-infini potentiel, sans que cela modifie notre analyse.

.3 – MODES DE CONNAISSANCE

Nous allons nous appuyer sur l'analyse de Michael Detlefsen exposée dans deux articles : *Brouwerian Intuitionism* (1990)³⁰⁸ et *Poincaré against the Logicians* (1992)³⁰⁹ - que nous noterons respectivement Detlefsen-1990 et Detlefsen-1992 - centrés sur les conceptions de Brouwer et de Poincaré, qui débouchent sur une typologie de la connaissance mathématique, dans le cadre de la théorie de l'acte cognitif.

La présente sous-section III s'articule ainsi :

La première partie (1°) est consacrée au Principe de conservation épistémique, concept nommé ainsi par Detlefsen-1990, sous-tendant l'épistémologie pré-intuitionniste de Poincaré et intuitionniste de Brouwer.

La deuxième partie (2°) est un exposé de l'épistémologie sous-jacente à la conception classique des mathématiques selon Detlefsen-1990, que l'auteur compare principalement à l'épistémologie intuitionniste.

La partie 3° sera consacrée à clarifier, grâce au texte de Detlefsen-1992, l'idée d'extension d'un domaine de connaissance, que nous fusionnerons et intégrerons à la théorie de l'acte cognitif telle qu'exposée précédemment.

Avec cela, nous disposerons de tous les outils conceptuels nécessaires

³⁰⁸ **Detlefsen**, *Brouwerian Intuitionism*, 1990, in **Detlefsen** (ed.), *Proof and Knowledge in Mathematics*, Routledge, 1992, p.208-250.

³⁰⁹ **Detlefsen**, *Poincaré against the Logicians*, in *Synthese* **90** : 349-378, 1992.

pour reprendre l'analyse du concept d'effectivité chez Borel, et son évolution entre 1898 et 1912 (Partie III de la thèse)...

I - Le principe de conservation épistémique

La présente section empruntera de nombreuses citations au texte de Detlefsen-1990, *Brouwerian Intuitionism*, ce qui nous donnera une base de réflexion pour répondre aux questions que nous nous sommes posées jusqu'ici.

« Ce que nous avons à dire sur la première partie [de l'article] peut, sans trop d'incohérences, être résumé en deux thèses, la première étant que la critique intuitionniste des mathématiques classiques peut être vue comme basée principalement sur des considérations épistémologiques plutôt que sur des considérations relatives à la théorie de la signification [vérificationniste], et la deuxième étant que l'objection majeure de l'intuitionniste sur l'utilisation de la logique par le mathématicien classique ne se centre pas sur l'utilisation de certains principes logiques particuliers (notamment, la loi du tiers exclu et consorts), mais plutôt sur le rôle général (i.e. quels que soient les principes particuliers utilisés) que le mathématicien classique attribue (ou du moins étend) à la logique dans la production de preuves mathématiques. » (Detlefsen, p.208)

De fait, Detlefsen considère que la critique intuitionniste des mathématiques classiques et du rôle généralement attribué à la logique dans la production d'une preuve mathématique porte

centralement sur la question de la transmission de l'intuition (ou insight) au moyen de l'inférence logique. En focalisant l'attention sur cette hypothèse, on est capable « *de rendre compte de la différence apparente dans les conditions épistémiques entre les prouveurs³¹⁰ dont le raisonnement est basé sur un "insight"³¹¹ authentique lié au sujet-matière³¹² qu'ils étudient, et les réputés prouveurs dont le raisonnement ne se fonde pas sur un tel insight, mais plutôt sur des principes d'inférence qui servent indifféremment pour tout type de sujet-matière. Poincaré a souligné ce point à plusieurs reprises, mais, avec le développement rapide de la logique durant [le XXe] siècle, il semble avoir été oublié. Je pense que cela mérite plus d'attention qu'il n'en a reçu et que, s'il est bien compris, il fournit une « nouvelle » base pour une épistémologie mathématique partageant de nombreuses caractéristiques avec l'intuitionnisme Brouwerien. L'idée de Poincaré suggère une épistémologie qui opère selon **un principe de conservation épistémique : il ne peut y avoir d'augmentation de connaissance authentique sur un sujet mathématique spécifique sans augmentation sous-jacente de l'insight spécifique à (i.e. de la compréhension intuitionnelle de) ce sujet.** Ainsi, la nécessité de l'intuition ne peut être évacuée en mathématiques, même [après avoir] fourni un ensemble d'axiomes. Par conséquent, l'inférence purement logique ne peut ajouter [quelque chose] à notre connaissance authentiquement mathématique, et donc ne peut se voir attribuer un rôle très important dans la preuve. [...] Cette nouvelle (i.e. non classique) épistémologie exige une nouvelle conception de l'inférence, pour laquelle pour qu'une vérité puisse être prouvée, il faut qu'elle puisse*

³¹⁰ Néologisme de Detlefsen

³¹¹ Comme indiqué précédemment, nous gardons le terme anglais.

³¹² Nous utilisons une traduction littérale de l'expression "subject-matter" (objet).

être "expérimentée" d'une certaine façon. Et cette nouvelle conception de l'inférence limite sévèrement le rôle de l'inférence logique dans la preuve. Au moyen d'une analyse ou inférence logique (classique), on peut extraire toutes sortes de propositions à partir d'une proposition "expérimentée". Mais seules certaines de ces propositions extraites sont elles-mêmes "expérimentables" de manière appropriée (comme dans le cas des vérités empiriquement perçues, où seules certaines de leurs conséquences logiques sont elles-mêmes empiriquement percevables). Et aucune d'entre elles n'est expérimentée de manière appropriée par le seul fait d'être vue comme reliée aux prémisses par des moyens logiques. » (Detlefsen, p.209)

Autrement dit, dans un domaine de connaissance mathématique particulier, le raisonnement authentiquement mathématique est celui dans lequel l'inférence mathématique augmente la compréhension de ce domaine. Selon Detlefsen, c'est le respect de ce principe, dit de "conservation épistémique" (énoncé par Poincaré avant Brouwer) permettant d'étendre la connaissance mathématique du domaine considéré qui serait à la base de l'épistémologie intuitionniste.

Le terme "domaine de connaissance" n'est pas encore bien défini à ce stade, mais nous l'associons d'ores et déjà avec le sens que nous lui avons donné dans la section précédente : un tissu d'objets de connaissances reliés de manière dynamique entre eux et avec le contenu d'un acte en train de s'accomplir, sans nécessairement qu'il aboutisse à une nouvelle preuve-objet de connaissance. En ce sens, un domaine de connaissance ne coïncide pas nécessairement avec une théorie mathématique au sens classique, c'est-à-dire un ensemble de connaissances qui ont en commun des contenus propositionnels, comme la théorie des nombres, la théorie

des ensembles et des nombres transfinis, etc. Le concept de domaine de connaissance fait plutôt référence à un corps de connaissances liées par leur "mode" cognitif. Nous précisons cela au cours de la présente section.

Qu'est-ce qu'on entend par l'idée que l'inférence authentiquement mathématique est celle qui augmente la "compréhension intuitionnelle" de du domaine étudié ? Selon Detlefsen, l'interprétation diffère entre Poincaré et Brouwer.

Detlefsen résume le point de vue de Poincaré par une expérience de pensée :

« Imaginez deux agents cognitifs M et L. M a le type de connaissance ou de compréhension d'un objet mathématique donné S que nous associons habituellement au mathématicien aguerri. L, d'autre part, a le genre de maîtrise épistémique de S qui est typique de celui dont la maîtrise épistémique de S consiste en une connaissance d'un ensemble d'axiomes de S, plus une capacité (peut-être supérieure) pour manipuler ou traiter ces axiomes selon des moyens logiques reconnus. Question : Est-ce qu'il y a une différence importante entre l'état épistémique de M et l'état épistémique de L vis-à-vis de leur statut de connaisseurs mathématiques ?

Selon Poincaré, la réponse est «Oui». Même une parfaite maîtrise logique d'un corps d'axiomes ne représenterait pas, à son avis, une authentique maîtrise mathématique des mathématiques ainsi axiomatisées. De fait, ce ne serait pas en soi le signe d'un quelconque degré appréciable de connaissances mathématiques : la connaissance d'un ensemble de propositions mathématiques, plus la maîtrise de leur manipulation logique, n'équivaut pas à la connaissance mathématique de ces propositions ni des propositions logiquement

dérivées d'elles.

Ainsi, selon le point de vue de Poincaré, le raisonnement mathématique authentique ne procède pas par étapes de «taille logique», mais plutôt par de plus grandes étapes - étapes nécessitant un insight authentique sur l'objet mathématique en train d'être inférentiellement³¹³ développé. Ce qui est le contraire du raisonnement logique qui, par son caractère véritablement neutre [vis-à-vis du sujet considéré]³¹⁴, ne demande ni même n'autorise l'utilisation de tels insights dans le déroulement des inférences. En renonçant ainsi à tout appel à l'information découlant des particularités de l'objet spécifique à l'étude, le raisonnement logique renonce aussi au pas facile et à grandes foulées de celui qui est familier des méandres d'un certain terrain local, et opte plutôt pour le pas hésitant de celui qui est aveugle aux caractéristiques particulières de tout type de terrain, et qui doit donc faire seulement les pas qui seraient les plus sûrs dans tous [les terrains]. Pour Poincaré, la sûreté ainsi atteinte ne peut compenser l'aveuglement qui en résulte. L'astuce logique peut empêcher quelqu'un de tomber dans une fosse, mais avoir une canne pour suivre sa route à tâtons c'est un pauvre substitut [au fait d'] être capable de voir. » (Detlefsen, p.210-211)

Ainsi, dans *La valeur de la science* (1905), Poincaré écrit³¹⁵ :

« Le logicien décompose pour ainsi dire chaque démonstration en un

³¹³ Néologisme

³¹⁴ Le terme "topic-neutral" que nous exprimons maladroitement par « neutre vis-à-vis du sujet considéré » signifie plus précisément que l'inférence logique est aveugle au contenu particulier (mathématique) sur lequel elle opère. Désormais, nous garderons le terme anglais.

³¹⁵ **Poincaré**, *La valeur de la science*, 1905, Chapitre V. Cité par Detlefsen p.211 dans sa traduction anglaise, mais que nous reprenons en version originale (français) dans sa mise en page par Alain Blachair, p.15 (accessible à www.ac-nancy-metz.fr/enseign/philo/textesph/Valeurdelascience.pdf).

très grand nombre d'opérations élémentaires ; quand on aura examiné ces opérations les unes après les autres et qu'on aura constaté que chacune d'elles est correcte, croira-t-on avoir compris le véritable sens de la démonstration ? L'aura-t-on compris même quand, par un effort de mémoire, on sera devenu capable de répéter cette démonstration en reproduisant toutes ces opérations élémentaires dans l'ordre même où les avait rangées l'inventeur ?

*Evidemment non, nous ne posséderons pas encore la réalité tout entière, **ce je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration nous échappera complètement.***

*L'Analyse pure met à notre disposition une foule de procédés dont elle nous garantit l'infaillibilité ; elle nous ouvre mille chemins différents où nous pouvons nous engager en toute confiance ; nous sommes assurés de n'y pas rencontrer d'obstacles ; mais, de tous ces chemins, quel est celui qui nous mènera le plus promptement au but ? Qui nous dira lequel il faut choisir ? **Il nous faut une faculté qui nous fasse voir le but de loin, et, cette faculté, c'est l'intuition.** Elle est nécessaire à l'explorateur pour choisir sa route, elle ne l'est pas moins à celui qui marche sur ses traces et qui veut savoir pourquoi il l'a choisie.*

*Si vous assistez à une partie d'échecs, il ne vous suffira pas, pour comprendre la partie, de savoir les règles de la marche des pièces. Cela vous permettrait seulement de reconnaître que chaque coup a été joué conformément à ces règles et cet avantage aurait vraiment bien peu de prix. C'est pourtant ce que ferait le lecteur d'un livre de mathématiques, s'il n'était que logicien. Comprendre la partie, c'est tout autre chose ; c'est savoir pourquoi le joueur avance telle pièce plutôt que telle autre qu'il aurait pu faire mouvoir sans violer les règles du jeu. **C'est apercevoir la raison intime qui fait de cette série de coups successifs une sorte de tout organisé.** A plus*

forte raison, cette faculté est-elle nécessaire au joueur lui-même, c'est-à-dire à l'inventeur. »

D'une certaine manière, la problématique est proche de celle, plus moderne, mise en scène dans l'expérience de pensée de la Chambre chinoise de Searle. Mais poursuivons avec Detlefsen (p.211-212).

Après avoir cité un extrait de *La science et l'hypothèse* de Poincaré où celui-ci discute de la nature synthétique *a priori* ou analytique *a priori* du raisonnement mathématique, Detlefsen expose l'apport essentiel de Poincaré dans la critique intuitionniste des mathématiques classiques, i.e. la question de la nature "modale" de la construction de la connaissance mathématique. Detlefsen écrit :

*« [Poincaré soulève une problématique qui a] des effets importants sur la conception de la connaissance mathématique. L'un de ces effets est d'ouvrir vers ce qu'on pourrait appeler une forme modale, par opposition à subjectivale³¹⁶, de construction des connaissances mathématiques. Dans la forme subjectivale de construction, la typologie des connaissances suit un schème de classification qui organise la connaissance en fonction du sujet-matière de son contenu. Ainsi, pour que la connaissance que **p** [un agent sait que **p**] soit une K-connaissance (une connaissance de type K), tout ce qui est requis c'est que **p** soit une vérité du sujet-matière K. Dans un tel modèle, la connaissance mathématique devient tout simplement la connaissance d'une vérité mathématique (i.e. la connaissance d'une vérité appartenant à un sujet-matière mathématique).*

*« Dans ce que nous appelons la conception modale [...], la typologie de la connaissance ne suit pas un classement par sujet-matière des propositions connues. Elle marque plutôt certaines **différences dans***

³¹⁶ Néologisme

l'attitude cognitive particulière prise. Ainsi, la connaissance mathématique devient plus qu'une simple connaissance d'une proposition mathématique, elle se distingue par un certain mode ou type d'état cognitif.

*C'est, bien sûr, une question difficile de dire exactement ce qui distingue ce mode particulier de connaissance qu'est la connaissance mathématique des autres modes de connaissance. En effet, il y a un espace de discussion à ce sujet à l'intérieur du camp des modalistes. Poincaré, par exemple, pensait que cela avait surtout à voir avec **la capacité [de l'agent] à voir le rôle ou la position qu'une certaine proposition joue dans le sujet plus large à laquelle elle appartient** ; que l'on vien[drait] à connaître mathématiquement quelque chose [par le fait d'avoir] une vision globale de la place de cette proposition au sein d'une entreprises épistémique plus large. Brouwer, de son côté, croyait que connaître mathématiquement c'était «l'expérimenter» d'une certaine manière. [...]. »*

A la fin du paragraphe, Detlefsen renvoie en note 2 (p.242) une précision importante : si Poincaré et Brouwer ont en commun d'attribuer au mode particulier de la connaissance mathématique un lien avec l'«intuition», ils ont une conception différente de ce qu'est cette «intuition».

*« Pour Poincaré [...] l'intuition est considérée comme constituée par une sorte de connaissance intégrée – qui a un caractère fondamentalement plus théorique que pratique – qui permet au mathématicien connaisseur de **voir comment une certaine preuve ou théorème se lie à d'autres preuves et théorèmes, et comment, dans ce fait de se lier, elle contribue aux objectifs d'une certaine quête plus large à laquelle tous appartiennent,** et pour laquelle [quête] ils sont sollicités. Pour Brouwer [...] le trait*

épistémiquement saillant et distinctif de l'intuition, c'est qu'il est un type de connaissance née de l'expérience de nature essentiellement pratique, et qu'on ne peut donc fondamentalement pas étendre par inférence logique. »

Bien entendu, ce n'est pas un hasard si nous retrouvons sous la plume de Detlefsen une interprétation de la pensée de Poincaré qui s'approche de notre concept dynamique de "contenu de l'acte", et selon lequel l'acte acquiert son contenu, c'est-à-dire devient un jugement, en tant qu'il lie un percept (la proposition intériorisée) à un tissu de connaissances d'un certain mode. C'est la lecture de l'analyse de Detlefsen qui nous a mis sur cette voie... (Detlefsen, p.213-214)

Comme Detlefsen le signale, ce qui est essentiel ici, ce sont les implications que le point de vue modal et le principe *de conservation épistémique*, esquissés en premier par Poincaré, ont dans la question de savoir

« comment nous devons concevoir la croissance ou l'extension de la connaissance mathématique.

*Et, comme nous le verrons, l'utilisation de l'inférence logique dans la production d'une connaissance mathématique est seulement compatible avec ces conceptions modalistes faibles qui prennent des caractéristiques distinctives grossières et relativement à grande échelle (par exemple, le haut degré de certitude ou a priorité) comme traits distinguant la connaissance mathématique. Comme nous l'avons déjà dit, l'idée-clé de la conception modale est que : avoir une connaissance mathématique d'une certaine proposition **p** c'est avoir un certain type de connaissance que **p**. Ainsi, si un certain type de connaissance de **p** doit être étendu à une autre proposition **q** par le biais d'une inférence de **p** à **q**, alors cette inférence doit préserver les*

*caractéristiques spéciales de la connaissance de **p** qui sont responsables de son type [i.e. que p soit de ce type]. Ainsi, si une connaissance d'un type particulier K doit être étendue par le biais d'une inférence logique, alors cette inférence logique doit préserver les traits de ce domaine de connaissance qui la font être de type K-connaissance. Pour le dire autrement : si la K-connaissance de **p** doit être étendue à la K-connaissance de **q** au moyen d'une inférence logique de **p** à **q**, alors les traits qui caractérisent la K-connaissance doivent être inclus dans les propriétés qui sont préservées par l'inférence logique. » (Detlefsen, p.214-215).*

Pour illustrer concrètement ce qu'est un mode de connaissance et montrer en quoi l'inférence logique ne préserve pas un mode particulier, Detlefsen donne notamment un exemple "numérique". Nous allons l'exposer, puis nous donnerons notre propre exemple, qui nous semble plus proche des mathématiques.

« Un ouvrier d'un stade de basket sait, pour les avoir comptées (partiellement) au fur et à mesure qu'ils passaient la porte, qu'il y a au moins 25 personnes assises dans sa section. Afin de déterminer comment les personnes assises dans sa section se sont réparties entre les gradins du haut et les gradins du bas, il décide de compter celles qui sont assises dans les gradins du haut. Il en dénombre zéro. Il sait donc, par décompte ordinaire, qu'il y a au moins 25 personnes assises dans sa section et qu'il n'y en a aucune dans les gradins du haut. De là, il s'ensuit logiquement qu'il y a au moins 25 personnes assises dans les gradins du bas. Il n'est pas vrai néanmoins que cela est connu par un décompte ordinaire (partiel) de celles occupant les gradins du bas, puisque l'ouvrier est arrivé à cette conclusion sans avoir réellement compté (dans ce que nous appelons le "sens

ordinaire) les personnes assises dans les gradins du bas. »
(Detlefsen, p.215).

L'exemple nous semble un peu "court", même s'il contient en germe tous les éléments qui sont entrés en jeu lors de la querelle autour de la démonstration de Cantor de l'existence d'ensembles non dénombrables par diagonalisation : certains constructivistes considérant que cette démonstration ne dit rien de plus que "pour tout ensemble infini dénombrable ordonné de réels donné, on peut toujours construire un réel qui n'appartient pas à l'ensemble", alors que Cantor et les "cantoriens" considèrent que de la conclusion des constructivistes on peut inférer (*logiquement* dirait Detlefsen) que "les réels forment un ensemble infini non dénombrable réalisé"... Toujours est-il que nous allons illustrer ce que peuvent être différents modes de connaissance mathématique.

Considérons la proposition " $9 \times 3 = 27$ ". Nous voulons montrer que selon la personne qui la lit, cette proposition écrite se transforme en un jugement puis en un objet-preuve, mais que ce processus peut se faire selon plusieurs modes de connaissance distincts.

Par exemple, l'un d'eux peut être de type "mémoriel" : si l'on présente cette proposition à un enfant qui a récemment appris par cœur et assimilé la table de multiplication, la connaissance (objet-preuve) de la validité de la proposition émerge par appel à une connaissance mémorisée.

Un autre mode possible pourrait être qualifié de "symbolico-calculatoire" : un autre enfant à la mémoire plus paresseuse – futur mathématicien – a remarqué lors de l'apprentissage de la table de multiplication qu'il y a une astuce pour les multiples de 9 : tout nombre à un chiffre multiplié par 9 est égal au nombre formé par le chiffre initial auquel on ajoute le chiffre "zéro" à droite et auquel nombre on soustrait

une fois le nombre initial (par exemple : $3 \times 9 \rightarrow "3"$ et $"0" \rightarrow 30 \rightarrow 30-3 \rightarrow 27$). Un telle procédure mélange manipulation sur des signes (chiffres) et soustraction (qui fait appel à la mémoire ou a une autre fonction de connaissance des tables de soustraction), mais il est assez clair nous semble-t-il qu'entre l'agent qui juge (et prouve) la proposition " $9 \times 3 = 27$ " selon le mode mémoriel et celui qui juge et prouve la proposition selon l'"astuce" ci-dessus, le mode de connaissance de la preuve-objet " $9 \times 3 = 27$ " n'est pas le même, bien que les deux agents éprouvent également le sentiment d'évidence de la preuve de la proposition.

Nous pourrions illustrer cela avec d'autres exemples simples, comme le mode de connaissance du nombre d'allumettes d'un tas : certains agents l'acquerront par décompte, d'autres en acquerront la connaissance directement par le mode visuel (en supposant que ce nombre ne dépasse pas 5 ou 6)³¹⁷.

Ce que nous voulons souligner par ces exemples, c'est qu'une même proposition mathématique peut être transformée en un acte mental à contenu qui s'accomplit en une preuve-objet selon plusieurs modes de connaissance possibles.

Poursuivons l'exposé de Detlefsen :

« Ce que nous venons de dire sur la connaissance par perception directe et par décompte ordinaire peut aussi être dit pour d'autres types de connaissance. De fait, comme nous le verrons plus loin, cela s'applique spécifiquement à la conception de la connaissance mathématique de Brouwer, que celui-ci considère comme formée d'une sorte d'"expérience" (ou intuition). Dans chaque cas, la question essentielle est de savoir si un type de mode cognitif (perception sensorielle directe, décompte ordinaire, intuition

³¹⁷ Le cas des autistes-savants capables de "voir" immédiatement le nombre d'unités d'un grand tas, décrits par la littérature neuropsychiatrique, en est l'exemple extrême.

mathématique brouwerienne, etc.) peut être manipulé ou contrôlé de telle manière qu'on puisse garantir qu'il se reproduit dans toutes les propositions logiquement dérivables d'une proposition décrivant le contenu d'un tel état. Et, dans chaque cas, la réponse est "non". Nous n'avons pas la capacité pratique de manipuler la possession de ce type d'état mental dans toute la gamme de manière à manipuler logiquement leurs contenus. Il s'ensuit que l'inférence logique ne préserve pas le mode cognitif. Ainsi, la manipulation logique du contenu d'un état mental est une chose, la manipulation pratique de son mode cognitif en est une autre. Aussi, l'hypothèse que la connaissance mathématique peut être étendue au moyen du raisonnement logique n'est pas innocente. La seule capacité claire de l'inférence logique est celle d'un dispositif abstrait, c'est-à-dire un dispositif séparant le contenu d'un certain état cognitif de son mode d'occurrence, et soumettant ce contenu à plusieurs sortes d'analyses qui débouchent sur la production de nouveaux contenus. En tant que tel, ce n'est pas une extension ou une continuation automatique de l'état cognitif duquel le contenu a été séparé, mais plutôt une réflexion centrée sur son contenu. Centré ainsi sur le contenu plutôt que sur le mode cognitif, on peut s'attendre à ce [que l'inférence logique] transforme le contenu d'un certain morceau de connaissance, mais sans aucune garantie que le contenu ainsi transformé se produise dans le même mode cognitif que l'original. Une telle incapacité à étendre le mode cognitif d'un certain morceau de connaissance n'est, bien entendu, pas une tragédie si son occurrence [i.e. l'occurrence du contenu] dans ce mode est accessoire, ou du moins pas essentiel, pour son caractère et/ou valeur épistémique global. Et cela pourrait être le cas dans certains de nos exemples (i.e. connaissance par décompte ordinaire). Cependant Brouwer et son prédécesseur "pré-intuitionniste" Poincaré

ne pensaient pas que [c'était accessoire] dans le cas de la connaissance mathématique en général, et leur croyance était enracinée dans cette remarque que nous avons nommée le "problème de Poincaré" : à savoir, que la condition épistémique de quelqu'un qui a acquis une maîtrise logique ou axiomatique sur un sujet mathématique donné est inférieure à celle de quelqu'un qui a acquis une maîtrise mathématique authentique. » (Detlefsen, 216-217)

Avant de poursuivre, précisons quelques points de vocabulaire : quand Detlefsen se sert du terme "contenu d'un mode cognitif", cela ne coïncide pas exactement avec notre utilisation du terme "contenu d'un acte mathématique". Il serait plutôt à rapprocher du sens de "contenu mathématique de l'acte" suivant l'expression de Sundholm (voir section précédente), c'est-à-dire l'acceptation courante de ce que l'on nomme "sens mathématique d'une proposition". C'est un concept statique un peu éloigné de notre concept dynamique de contenu de l'acte mathématique (mise en lien avec un tissu de connaissances). De même, le terme "mode cognitif" utilisé par Detlefsen fait référence à l'"état d'esprit" que l'agent cognitif en question attache au contenu mathématique sur lequel il opère. C'est également un concept statique car il désigne non pas un processus mais un état (même si celui-ci peut transmettre dynamiquement au moyen d'une inférence authentiquement mathématique). Il nous semble que nous pouvons faire un lien entre le concept de Detlefsen et le notre en disant que le "mode cognitif" serait, en première approche, le contour global du tissu de connaissances sollicité par l'acte à contenu mathématique en train de se faire, indépendamment de sa dynamique interne (i.e. le jeu fluctuant de connexions et l'apparition de nouveaux objets de ce tissu au cours d'une itération du schéma 1). Nous gardons pour le moment cette définition.

Le principe de conservation épistémique – il n’y a extension authentique de la connaissance mathématique, *via* l'inférence, que si celle-ci préserve le mode cognitif de connaissance de la prémisse – est une application particulière et une mise en pratique de l'épistémologie constructiviste selon laquelle, comme l'a écrit Vuillemin, l'évidence ou l'intuition de l'existence d'un objet mathématique nous est donné quand nous disposons en même temps "*des modes par lesquels notre connaissance nous permet d'y accéder*" (Vuillemin, p.169-170).

Tentons d'illustrer tout ce qui précède avec l'exemple simple de la démonstration de l'infinité des nombres premiers, déjà exposé dans la Partie I (voir .1 – I – 1° - b). Considérons deux agents cognitifs, l'un adhérent à l'épistémologie classique, l'autre à l'épistémologie intuitionniste.

Du point de vue de l'épistémologie classique, la démonstration de l'assertion "l'ensemble des nombres premiers est infini" se déroule de la manière suivante :

- 1) On suppose que l'ensemble des premiers est fini
- 2) On considère alors qu'il possède un grand élément noté P
- 3) On construit le nombre $N = P\# + 1$ (ou $P\# = 2.3.5.7.11.13...P$)
- 4) On montre que N est premier
Si N n'est pas premier
Alors on peut écrire $N=Q.R$ avec R premier $\neq 1$ et Q entier
R est supérieur à tous les P_i et à P, et la proposition est démontrée.
En effet, si R est égal à l'un des P_i ($P_i \neq 1$)
 $Q.P_i = P_1.P_2.P_3...P_j.P + 1$

$$Q = (P_1.P_2.P_3...P_j.P)/P_i + 1/P_i$$

Or $(P_1.P_2.P_3...P_j.P)/P_i$ est un entier car P_i fait partie de $P_1.P_2.P_3...P_j.P$

Or $1/P_i$ n'est pas entier.

Donc Q n'est pas entier, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc N est premier (et supérieur à P)

5) Comme N est supérieur à P , on en déduit que l'hypothèse "l'ensemble des nombres premiers est fini" est fausse

6) Donc l'ensemble des nombres premiers est infini, CQFD.

Pour l'intuitionniste, cette démonstration présente une rupture de la chaîne actionnelle, c'est-à-dire un non respect du principe de conservation. Où se situe la fêlure ?

La démonstration quasiment dans son ensemble peut être vue par l'agent intuitionniste comme légitime : l'objet "ensemble fini ordonné de nombres premiers" est un objet de connaissance authentique. Qu'un tel ensemble ait un plus grand élément, c'est une inférence dont le mode de connaissance est le même que celui de la connaissance d'un ensemble fini ordonné de nombres : ce plus grand élément est le plus grand nombre de l'ensemble. La construction d'un nouveau nombre $(P\# + 1)$ est une opération arithmétique et donc appartient à ce mode. La démonstration que ce nombre est premier fait encore appel au mode de connaissance des nombres premiers et des propriétés d'addition et de divisibilité des nombres entiers. De plus l'utilisation du principe du tiers-exclu faible (TNDf : démonstration par l'absurde) est tolérée car elle se fait dans le cadre finitiste d'un nombre P certes quelconque mais donné, c'est-à-dire fixé cognitivement tel un nombre entier particulier. Dans tout le raisonnement, nous ne sommes pas sortis du mode de connaissance

ensembliste-calculatoire auquel notre pratique plus ou moins prolongée de l'arithmétique élémentaire nous a habitués. Mais la rupture intuitionnelle se produit dans l'inférence 5) \rightarrow 6) : l'hypothèse "l'ensemble des nombres premiers est fini" est fautive \rightarrow l'ensemble des nombres premiers est infini. Ce n'est pas l'utilisation du TNDf en soi qui pose problème : ce principe appliqué à 5) se fait dans un cadre finitiste. C'est son utilisation pour une inférence liant le mode fini au mode infini. Il n'y a pas conservation *du mode par lequel notre connaissance nous a permis d'accéder aux connaissances* précédentes. Les prémisses étant sur le mode fini, la conclusion doit rester sur ce mode. Elle serait alors : « après tout nombre premier donné, il y en a un autre », voire « après tout nombre premier, il y en a un autre » si l'agent admet un énoncé du mode fini-infini potentiel. La conclusion 6) de l'agent classique applique l'inférence du TNDf – bien définie sur le mode fini comme raccourci pratique – d'une manière qui pourrait être considérée soit comme générative du concept d'ensemble infini, soit plus vraisemblablement, comme raccourci étant donnée : *sa croyance préalable* en l'existence d'ensembles infinis engendrés à partir d'ensembles finis toujours augmentables – alors que ce sont les ensembles finis qui sont construits à partir du postulat d'existence des ensembles infinis (processus top-down).

Résumons ce qui précède :

Pourquoi l'inférence logique à contenu mathématique contrevient au principe de conservation épistémique ?³¹⁸ C'est parce qu'elle est "insensible" ou "aveugle" (*topic-neutral*) au mode cognitif associé aux

³¹⁸ Il est indispensable de comprendre néanmoins qu'on dénie à l'inférence logique seulement la capacité d'étendre le champ de la connaissance authentiquement *mathématique* et non pas la capacité d'étendre le champ de la connaissance *logique* - qui est une activité cognitive authentique soumise à ses propres règles et mode cognitif (sous-mode du mode mathématique).

contenus. C'est cette insensibilité de l'inférence logique (vis-à-vis du mode cognitif spécifique de connaissance mathématique de la prémisse) qui est, pour Detlefsen, l'objet véritable de la critique de Poincaré puis de Brouwer : en provoquant une *rupture* dans le processus de transmission du mode cognitif entre deux propositions *via* l'acte d'inférence, la logique rompt la chaîne d'intuition (ou "compréhension intuitionnelle") dans le raisonnement mathématique. Il n'est dès lors pas garanti que la conclusion de l'inférence possède le même mode que la prémisse.

Si l'on considère que le mode cognitif, c'est-à-dire le contour du tissu de connaissances mis en jeu dans la compréhension d'une proposition mathématique, joue le rôle de cadre cognitif permettant de jauger la valeur d'un jugement mathématique particulier (supposé appartenir à ce cadre), alors : lors d'une inférence purement logique, une des instances de contrôle cognitif *interne* à l'activité mathématique, et qui agit de manière particulière sur chaque raisonnement mathématique particulier, est annulée et remplacée par un autre dispositif de contrôle plus global mais aveugle aux particularités.

Un outil suffisant (le contrôle exercé par l'appartenance ou non au mode cognitif) cède la place à un outil nécessaire (mais pas nécessairement suffisant), ce qui entraîne un relâchement du contrôle : une conclusion nécessaire (logique) peut ne pas être suffisante du point de vue de la connaissance mathématique authentique.

C'est le cas, du point de vue des intuitionnistes et constructivistes du début du XXe siècle, du principe du tiers-exclu (fort et faible) appliqué à des raisonnements mettant en jeu des infinis actuels (Baire) ou des infinis actuels de cardinal supérieur à \aleph_0 (tel Borel dans ses écrits postérieurs aux *Leçons*, voir chapitre suivant). Prenons le cas archétypique de la démonstration de Cantor de l'existence d'ensembles non dénombrables

par diagonalisation³¹⁹, qui est constructive dans son articulation mais qui fait appel au concept d'infini actuel : pour un mathématicien qui n'admet pas l'existence (authentique) de la totalité réalisée des nombres entiers (Baire), la démonstration dans son ensemble est illusoire et vide de sens. En revanche, pour un mathématicien qui admet cette existence mais pas celle d'une infinité non dénombrable réalisée (ce sera le cas de Borel après 1898), tout le processus de démonstration est valide jusqu'à la conclusion : "Pour tout ensemble infini dénombrable ordonné, on peut construire un nombre qui n'y appartient pas". Mais l'inférence qui de cette affirmation conduit à la conclusion "il existe des ensembles infinis réalisés non dénombrables" est impropre car purement logique (application du tiers-exclu).

En effet, l'inférence apparaît à ce mathématicien comme purement logique car le mode de connaissance change entre la prémisse et la conclusion : le mode sur lequel s'appuie la prémisse ("Pour tout ensemble infini dénombrable ordonné, on peut construire un nombre qui n'y appartient pas") est le mode infini dénombrable réalisé, alors que le mode de la conclusion ("il existe des ensembles infinis réalisés non dénombrables") est *exclusivement* de type "infini non dénombrable réalisé". Par "exclusivement" nous voulons dire que c'est bien là un mode différent et non pas une extension interne au mode infini dénombrable réalisé, via une inférence qui préserverait ce mode de départ. En effet, le nombre construit par le processus de diagonalisation (n'appartenant pas à l'ensemble ordonné de départ) est une suite infinie dénombrable réalisée de chiffres, et il n'y a rien dans les prémisses qui fasse appel à autre chose que l'idée de l'existence d'un infini dénombrable réalisé : le nombre construit est obtenu en effectuant un nombre infini dénombrable de fois l'acte "remplacer le $n^{\text{ième}}$ chiffre du $n^{\text{ième}}$ nombre de la liste par son

³¹⁹ Nous supposons connue cette démonstration

successeur"³²⁰. Ce nombre, ainsi que le concept d'une procédure simple (opération successeur) effectuée une infinité dénombrable de fois, ne sollicite jamais l'idée d'une totalité non dénombrable réalisée. Donc, aux yeux de ce mathématicien, entre "pour tout ensemble infini dénombrable ordonné, on peut construire un nombre qui n'y appartient pas" et "il existe des ensembles infinis réalisés non dénombrables", il y a ce "gap" que signale Detlefsen où se produit une rupture de transmission du mode.

Cette rupture est qualitativement du même type que celle intervenant dans l'inférence ["tout nombre entier donné a un successeur" → "l'ensemble des nombres entiers est actuellement infini dénombrable"] aux yeux d'un mathématicien qui refuserait l'authenticité de tout concept mettant en jeu l'infini actuel – tel Baire – car elle transforme le mode de connaissance de type "fini-infini potentiel" au mode infini dénombrable réalisé. Bref, entre un mathématicien qui dénie le caractère authentiquement mathématique d'une inférence faisant passer du mode [infini dénombrable potentiel] au mode [infini dénombrable réalisé], et un autre qui le dénie pour une inférence faisant passer du mode [infini dénombrable réalisé] au mode [infini non dénombrable réalisé], il y a malgré les apparences, un même respect du principe de conservation.

Qu'est-ce qui distingue alors les deux points de vue ? L'état épistémique du mathématicien, ou son "affinité" cognitive, à une certaine extension du tissu-domaine cognitif : c'est parce que le second mathématicien considère comme authentiquement mathématique l'existence de l'infini actuelle des nombres entiers – conviction acquise avant et par d'autres moyens que l'inférence présente – que l'inférence faisant le passage entre "ensemble fini de nombres entiers extensible à volonté" et "ensemble infini actuel de nombres entiers" lui apparaît, dans

³²⁰ Avec la règle du cas où c'est un "9".

la démonstration de Cantor, comme une extension de la connaissance sans changement de mode (ce qui rend l'inférence authentiquement mathématique puisque *intra*-modale). Ainsi, un troisième mathématicien dont l'état épistémique l'aurait préalablement conduit à considérer les ensembles infinis non dénombrables réalisés comme authentiquement mathématiques aurait toutes les raisons de voir l'inférence ["pour tout ensemble infini dénombrable ordonné, on peut construire un nombre qui n'y appartient pas" → "il existe des ensembles infinis réalisés non dénombrables"] comme une extension authentique de la connaissance mathématique (sans changement de mode). Dans la discussion entre les trois mathématiciens sur ce qui est ou non authentiquement mathématique, le point de vue de chacun aurait autant de légitimité.

Il découle de ce qui précède, un principe de "relativité" quelque peu dérangent car, d'une part il rend irréductibles ou incommensurables les affinités cognitives des différents mathématiciens, d'autre part, il présuppose que cette affinité ne découle pas de l'acte d'inférence mathématique mais le précède, enfin, il place l'affinité cognitive au rang de trait "physique" du système cognitif agissant sur l'acte mathématique mais qui n'est pas affecté par lui. Pourtant, c'est bien la pratique mathématique qui conduit un mathématicien à construire des croyances sur les existants authentiquement mathématiques et, nous le verrons avec Borel, ces croyances peuvent changer au cours du temps par cette même pratique mathématique (ce qui est le cas de toute croyance).

Il nous semble donc que nous n'avons appréhendé qu'une partie du problème, celle où l'extension d'une connaissance mathématique se fait à *l'intérieur* d'un domaine de connaissance dont les contours ont été antérieurement prédéfinis par une croyance afin de "recevoir" une nouvelle connaissance : je crois par affinité cognitive à l'existence de l'infini non dénombrable réalisé, donc je prouve par inférence authentiquement mathématique (respect du principe de conservation

épistémique) l'existence d'un ensemble non dénombrable réalisé. Une telle articulation a l'inconvénient d'être unidirectionnelle [croyance mathématique → preuve mathématique], et contient deux limites essentielles (très liées entre elles) :

- elle ne tient pas compte de l'action de la pratique mathématique sur l'évolution des croyances (affinité cognitive) ;
- elle n'explique pas (autrement que par l'appel à la notion arbitraire et mal définie d'affinité cognitive) la dynamique qui permet de créer par la pratique mathématique de nouvelles connaissances mathématiques situées au-delà des frontières prédéfinies d'un domaine de connaissance, voire de créer de nouveaux domaines de connaissances.

En d'autres termes, cette analyse ne nous dit rien sur la créativité mathématique. Detlefsen l'aborde seulement en marge et de manière elliptique dans la note 4 (p.243) du présent texte, mais la question deviendra centrale dans son article de 1992 : "*Poincaré against the Logicians*" (1992).

Citons néanmoins cette note 4 :

*« le Problème de Poincaré peut aussi être vu comme un problème concernant la compatibilité entre **l'utilité épistémique (i.e. la capacité d'une preuve à servir de moyen pour étendre notre connaissance)** et ce qui pourrait être nommé la conception logique de la rigueur. Selon cette conception de la rigueur, la dissimulation d'hypothèses dans une preuve doit être bloquée en faisant que chacun de ses pas ou inférences soient si "petits" qu'ils ne requièrent aucun insight sur l'objet de la preuve pour les vérifier. C'est seulement de cette façon qu'on peut être assurés de ne dissimuler aucune hypothèse matérielle sur le sujet, qui resterait [et se*

propagerait de manière] indétectée. Néanmoins, en faisant des pas d'une preuve si petits, cela peut compromettre l'utilité épistémique de celle-ci. Après tout, le cas le plus évident d'une preuve rigoureuse ou totalement exempte de sauts est celle d'un argument circulaire où la conclusion est simplement une des prémisses. De telles preuves sont néanmoins des cas clairs de raisonnements épistémiquement inutiles. Donc, la contrainte minimale sur l'utilité épistémique d'une preuve est que celle-ci ne soit pas circulaire. Mais bien que la non-circularité soit une condition nécessaire pour [que la preuve ait] une utilité épistémique, ce ne semble pas être une condition suffisante. Il est douteux par exemple qu'on puisse transformer un argument circulaire avec un petit nombre de prémisses simples en [un argument] utile épistémiquement rien qu'en y adjoignant les prémisses et en les remplaçant par la conjonction qui en résulte. L'argument obtenu par une telle procédure n'est pas circulaire au sens strict du terme car sa conclusion n'est pas littéralement la même proposition qu'une quelconque de ses prémisses. Mais son utilité épistémique est également douteuse car on peut clairement voir que l'affirmation de la conclusion fait partie de ce qui est nécessaire pour l'affirmation de la prémisse. En effet, quelqu'un voudrait-il "affiner" l'argument (i.e. éliminer des prémisses ce qui est clairement inutile pour sa validité), qu'il finirait par se retrouver avec un argument dont la seule prémisse est la conclusion elle-même. En règle générale, il semble que tout argument possédant [une forme] reconnue comme étant circulaire manque essentiellement d'utilité épistémique. » (Detlefsen, note 4, p.243)

L'"utilité épistémique" d'une preuve, définie par Detlefsen comme sa capacité à étendre la connaissance mathématique, est un concept que nous approfondirons dans la section suivante.

II- L'inférence logique à contenu mathématique

Dans la suite du texte de 1990, Detlefsen analyse l'épistémologie sous-jacente à la conception classique des mathématiques, que l'auteur compare principalement à l'épistémologie brouwerienne puis à l'Intuitionisme de manière générale (post-Brouwer). Nous allons suivre une partie de ce cheminement, ce qui nous permettra *in fine* de fixer une définition épistémique du concept d'effectivité. Nous clarifierons ensuite, grâce au texte de 1992, l'idée d'extension d'un domaine de connaissance, que nous fusionnerons et intégrerons à la théorie de l'acte cognitif telle qu'exposée précédemment. Avec cela, nous disposerons de tous les outils conceptuels nécessaires pour reprendre l'analyse du concept d'effectivité chez Borel, et de son évolution entre 1898 et 1912 (chap. III)...

Selon Detlefsen (p.217) :

« l'épistémologie sous-tendue par les mathématiques classiques (à laquelle, pour faire bref, nous nous référerons sous l'appellation d'épistémologie classique) insiste sur l'ingrédient contentuel de la connaissance, et "dé-insiste" sur la question de son mode cognitif. Selon elle, le connaisseur mathématique s'appuierait sur une expérience introspective (ou intuition) d'un certain genre pour arriver aux propositions initiales de son édifice épistémique, mais à partir de là il est libre de s'abstraire de, ou d'ignorer, les aspects non-contentuels de cette expérience, pour se concentrer plutôt sur ses

composants contentuels. Ce qui, dans ce qui précède, est d'une importance épistémique première au sujet du mode cognitif d'un événement épistémique donné est ce qu'on pourrait nommer l'"effet crédentiel" [de l'événement épistémique] ; c'est-à-dire le degré de certitude [que l'événement ou l'intuition d'un certain genre] confère à la proposition exprimant son contenu. Mais puisque beaucoup de modes cognitifs différents sont capables d'avoir le même effet crédentiel, le fait d'identifier l'importance épistémique d'un mode cognitif à son effet crédentiel produit une épistémologie qui tend à réduire le nombre de différences épistémiquement significatives entre les modes cognitifs. » (Detlefsen, p.217)

Clarifions par l'exemple le sens du concept d'"effet crédentiel", en reprenant certaines des propositions analysées précédemment :

- $\Phi 3$: la puissance du continu 2^{\aleph_0} suit immédiatement \aleph_0
- $\Phi 6$: 4 est premier ou composite ;
- $\Phi 7$: 247 est premier ou composite ;
- $\Phi 8$: tout nombre entier est premier ou composite ;
- $\Phi 9$: $10^{10^9} + 1$ est premier ou composite.
- $\Phi 10$: "9 x 3 = 27"

Considérons d'abord $\Phi 6$, $\Phi 7$, $\Phi 8$ et $\Phi 9$. Si l'on adopte le point de vue classique, c'est-à-dire exclusivement contentuel, « l'intuition d'un certain genre » (Detlefsen-1990, p.217) nous pousse à dire qu'on est sûr et certain que 4 est premier ou composite car on sait (quasi-immédiatement) que 4 est composite. De même cette intuition nous permet de dire qu'on est sûr et certain que 247 est premier ou composite même si l'on ne sait pas (encore) lequel des deux est le bon, mais l'on sait sans l'ombre d'un doute que l'on pourrait prouver cette proposition, dans le sens de

l'accomplir dans l'intuition, en donnant le bon statut du nombre 247 (nous avons déjà fait remarquer que la proposition soulève un problème car elle peut recevoir deux preuves – au sens cognitif - : celle, quasi-immédiate, de savoir qu'on sait comment s'y prendre pour trancher la question de la primauté ou non de 247, et celle de savoir si 247 est premier ou non).

Par ailleurs, *on est sûr et certain que tout nombre entier est premier ou composite*, par exemple parce que, partant d'une intuition d'un certain genre, on a déjà produit dans le passé une preuve classique de cette proposition générale et que l'on se souvient assez clairement comment il faut s'y prendre pour la re-prouver. Quant à affirmer qu'*on est sûr et certain que $10^{10^0} + 1$ est premier ou composite*, cela dépend si on a été sensibilisé au problème des très grands nombres ou pas, ou si l'on a un point de vue réaliste ou anti-réaliste, etc. Prenons le cas où l'on adopte un point de vue réaliste, alors *on est sûr et certain que $10^{10^0} + 1$ est premier ou composite* car on sait que ce nombre existe et que de ce fait, il ne peut qu'être premier ou composite étant donné que tout nombre est nécessairement premier ou composite (appel à la connaissance de la proposition générale précédente).

Bref, pour ces quatre propositions, la certitude est totale et, partant, de même intensité au regard de l'épistémologie classique, en ce sens que l'épistémologie classique ne donne pas la possibilité de différentier les modes de croyance "savoir immédiatement que **p**" ($\Phi 6$), "savoir immédiatement qu'on peut savoir que **p**" ($\Phi 7$), "savoir immédiatement qu'on se souvient qu'on sait que **p**" ($\Phi 8$) et "savoir immédiatement qu'il n'y pas d'autre possibilité que **p**" ($\Phi 9$), puisque d'un point de vue purement contentuel (qui est celui de l'épistémologie classique), il n'y a que **p** qui est porteur d'une valeur entrant dans la sphère mathématique. On peut alors dire que $\Phi 6$, $\Phi 7$, $\Phi 8$ et $\Phi 9$ produisent le même effet crédentiel.

Maintenant, si l'on considère $\Phi 3$: " la puissance du continu 2^{\aleph_0} suit

immédiatement \aleph_0 ", le même mathématicien (classique et réaliste) dirait qu'il est possible que la puissance du continu 2^{\aleph_0} suive immédiatement \aleph_0 . Entre cette croyance et celle de Φ_6 , Φ_7 , Φ_8 ou Φ_9 , il y a une différence dans l'effet crédentiel : l'un est une possibilité qui demande à être vérifiée, l'autre est une certitude.

Enfin, pour la proposition Φ_{10} : " $9 \times 3 = 27$ " l'effet crédentiel est total (« je sais que **p** ») aussi bien pour l'agent qui acquiert cette certitude sur un mode mémoriel (intuition d'un certain genre) que pour celui qui l'acquiert sur un mode symbolico-calculatoire (intuition + procédure classique)...

En bref, l'effet crédentiel 1) ne distingue pas les modes de connaissance d'un même contenu propositionnel (cas Φ_{10}), 2) peut ne pas distinguer plusieurs contenus propositionnels ayant des modes de connaissance distincts (Φ_6 , Φ_7 , Φ_8 et Φ_9), 3) ne distingue *in fine* que des grandes catégories de croyance portées par les contenus propositionnels : je sais que, je crois que, je doute que, etc. (cas des propositions Φ_3 et Φ_6). C'est en ce sens, nous semble-t-il, qu'il faut comprendre l'énoncé de Detlefsen selon qui « *le fait d'identifier l'importance épistémologique d'un mode cognitif à son effet crédentiel produit une épistémologie qui tend à réduire le nombre de différences épistémologiquement significatives entre les modes cognitifs.* » (Detlefsen-1990, p.217)

Reprenons la suite du texte (p.217-218) :

« Cela, à son tour, conduit à une vision de l'inférence qui voit celle-ci comme ayant une obligation relativement petite de préserver les caractéristiques du mode cognitif des prémisses (puisque très peu d'entre elles sont [pour l'épistémologie classique] d'une quelconque importance épistémologique). Sous couvert d'effet crédentiel, l'épistémologie mathématique classique, au moins dans certaines de

ses variantes, ferait une place à des caractéristiques du mode cognitif à très large échelle [très globaux] comme l'aprioricité/aposterioricité. Toutefois, la sensibilité à des caractéristiques à si large échelle ne permettra certainement pas d'obtenir une grille suffisamment fine pour particulariser les démarcations à petite échelle – notamment, la particularité de la démarcation entre les raisonnements logique et mathématique décrits dans la section précédente – que Brouwer et Poincaré voyaient comme étant de première importance pour une épistémologie mathématique bien faite. Du point de vue classique, donc, la preuve ou l'inférence est une procédure du type suivant : le connaisseur mathématique commence avec une connaissance survenant dans un certain mode cognitif ; il évacue alors toutes les caractéristiques de ce mode cognitif qu'il tient pour non pertinentes épistémiquement, gardant seulement pour l'assister certains de ces traits comme l'effet crédentiel et, nous l'avons dit, l'aprioricité/aposterioricité ; ayant ainsi étroitement restreint l'étendu de ses préoccupations épistémiques, il a en conséquence élargi les horizons de l'inférence en lui donnant la possibilité d'étendre sa connaissance à toute nouvelle proposition qui peut être obtenue à partir de la proposition exprimant le contenu de son ancien savoir par des moyens capables de préserver (suffisamment la plupart de) ses desiderata épistémiques ponctuels étroitement restreints (c'est-à-dire, son effet crédentiel et l'aprioricité/aposterioricité). »

Reprenons le cas de la proposition Φ_9 : " $10^{10} + 1$ est premier ou composite". Nous pouvons illustrer les propos de Detlefsen de la manière suivante.

1- « *Le connaisseur mathématique commence avec une connaissance survenant dans un certain mode cognitif* » : par exemple le "connaisseur mathématique" (agent) pourrait partir de sa "vieille" connaissance que

tout nombre n est premier ou composite (connaissance elle-même acquise dans le passé au moyen d'inférences classiques appuyées sur une vieille connaissance, par exemple : tous les nombres entiers sur lesquels je me suis penché jusqu'ici sont premiers ou composites). C'est un mode de connaissance de type "général" (sur n).

2- « *Il évacue alors toutes les caractéristiques de ce mode cognitif qu'il tient pour non pertinentes épistémiquement, gardant seulement pour l'assister certains de ces traits comme l'effet crédentiel et, nous l'avons dit, l'aprioricité/aposterioricité.* » L'agent garde la certitude (effet crédentiel) que tout nombre n est premier ou composite mais évacue la caractéristique du mode cognitif (mode général) dans lequel cette certitude s'est produite : le raisonnement prouvant que tout n est premier ou composite appartient au mode général et ne fait appel à aucune connaissance particulière d'un nombre entier donné, c'est-à-dire ne se place pas dans le domaine de connaissance des nombres entiers particuliers (contrairement au cas "247 est premier ou composite").

3- « *Ayant ainsi étroitement restreint l'étendu de ses préoccupations épistémiques, il a en conséquence élargi les horizons de l'inférence en lui donnant la possibilité d'étendre sa connaissance à toute nouvelle proposition qui peut être obtenue à partir de la proposition exprimant le contenu de son ancien savoir par des moyens capables de préserver (suffisamment la plupart de) ses desiderata épistémiques ponctuels étroitement restreints (c'est-à-dire, son effet crédentiel et l'aprioricité/aposterioricité).* » N'ayant pas gardé la nature exclusivement générale du mode d'occurrence de la certitude que tout nombre n est premier ou composite, l'agent s'autorise une inférence passant de ce mode au mode particulier auquel appartient le contenu de la proposition " $10^{10^0} + 1$ est premier ou composite" : puisque tout nombre n est premier ou composite (de manière générale) et que $10^{10^0} + 1$ est un nombre (particulier) alors $10^{10^0} + 1$ est premier ou composite. L'effet crédentiel (certitude) a été

préservé entre les prémisses et la conclusion, pas les modes d'occurrence de cette certitude (général – particulier).

In fine, (p.219) :

*« l'inférence logique (par laquelle la connaissance mathématique est étendue) est essentiellement une réflexion comparative sur les contenus, où ces contenus sont considérés comme relativement indépendants des processus ou activités épistémiques auxquels ils sont attachés. Elle ne reflète ni n'exprime les caractéristiques des activités épistémiques sous-tendant ces contenus d'une manière qui forcerait les relations logiques à inclure les relations pratiques [i.e. les modes] entre [les contenus]. L'idée de base de l'épistémologie classique est ainsi que les caractéristiques épistémiquement significatives d'une expérience ou d'une pièce d'activité intellectuelle donnée sont **détachables** de cette dernière. La mémoire, ou quelque autre capacité de même type, est sollicitée afin de soutenir les effets et la puissance épistémiques d'une pièce d'activité mentale donnée longtemps après que l'activité elle-même ait cessé d'exister comme expérience. Ces capacités de type mémoriel servent à "retenir" le contenu et la **garantie** d'une expérience (ou d'une autre activité garantissable³²¹) qui peuvent ainsi être transmis à des contenus propositionnels ne se produisant pas sur [le même] mode cognitif. L'analyse logique "détache" ainsi les résultats contentuels de processus épistémiques des processus eux-mêmes, et les traite comme des entités indépendantes, le résultat étant que l'inférence ou la connaissance logique est considérée comme consistant en une manipulation de contenus garantis plutôt que de processus garantissant. Ainsi, dans l'épistémologie classique, l'effet épistémique*

³²¹ Néologisme.

d'un garant est suffisamment stable – étant conservé [malgré] des transformations qui [poussent] les caractéristiques des processus particuliers qui avaient originellement produit le garant à s'altérer fortement. [...] L'idée de base derrière cette vision est que, bien que la connaissance puisse commencer avec l'"intuition" ou l'expérience d'un certain type, elle peut néanmoins – et dans de nombreux cas elle doit et devrait – être étendue sans une extension correspondante de cette intuition ou expérience. Ainsi, bien que l'expérience puisse être nécessaire afin de faire démarrer la connaissance, elle a une valeur [fortement] limitée comme moyen d'étendre la connaissance. »

Il est intéressant de voir que le reproche fait ici à l'inférence logique à contenu mathématique n'est pas d'être un processus qui manipule des symboles en étant aveugle aux contenus, mais un processus qui manipule des contenus en restant aveugle aux modes cognitifs de génération de ces contenus et qui y sont attachés - c'est justement ce qui fait la différence entre la *pensée* logique classique à contenu mathématique (manipulation de contenus) et la *machine* logique (manipulation de symboles). Dans la discussion sur la pensée intuitionniste ou constructive, il faut donc veiller à ne pas confondre ces deux niveaux : si Searle a raison de reprocher à la machine logique son aveuglement concernant les contenus, la métaphore de la Chambre chinoise ne s'applique pas à la pensée logique (à contenu mathématique) : ce n'est pas une question d'accès au sens-contenu, c'est une question d'accès au sens-mode cognitif.

Par ailleurs, ce que Detlefsen nomme "effet crédentiel" peut être rapproché du concept d'"évidence" (ou de "certitude", qui en est son synonyme) défini dans la section précédente : dans l'épistémologie classique – qui, nous semble-t-il, est celle adoptée naturellement par un

mathématicien pratiquant des mathématiques – l'évidence/certitude d'une preuve (au sens cognitif de Tieszen³²²) peut être partitionnée en degrés marqués par l'effet crédentiel : la preuve du jugement « il est possible que **p** » possède un effet crédentiel différent que la preuve du jugement « je sais que **p** » (ou « je sais que je peux savoir que **p** », etc.).

On voit également se dessiner une "stratigraphie" entre, d'une part, l'analyse de Poincaré et Brouwer selon laquelle le "sens" d'une proposition mathématique s'ancre dans un niveau mettant en jeu le mode cognitif d'accès à la connaissance de cette proposition, et, d'autre part, le point de vue classique – pour lequel le sens d'une proposition s'ancre dans un niveau cognitif mettant en jeu la connaissance du "contenu mathématique" de la proposition et à certaines traces de l'activité cognitive originelle (i.e. son mode d'occurrence) qui a été "filtrée" par le tamis des inférences logiques (à contenu mathématique). Dans la description de l'activité mathématique, on peut alors voir une sorte de processus d'"épuration logico-cognitif" à trois niveaux :

1) Une intuition mathématique (ou une connaissance mathématique *primaire*) naît dans un niveau profond du "terreau" cognitif dans lequel interviennent des processus dynamiques mus par des intentionnalités d'accomplissement à l'intérieur de modes dont chacun est compartimenté (incommensurabilité des modes). Pour l'intuitionniste, la contrainte de compartimentation, régie par le principe de conservation épistémique, doit être respectée non seulement au démarrage de la connaissance mathématique mais également dans toute activité mathématique postérieure.

³²² Marquant donc l'accomplissement d'une intention mathématique d'un acte mental via son contenu.

2) Une fois cette intuition transformée en une connaissance mathématique du contenu propositionnel (à l'aide du langage-objet propositionnel), celle-ci peut quitter ce terreau originel pour un milieu moins contraint, *via* des inférences logiques véhiculant seulement le degré de certitude (ou son souvenir) de cette connaissance, sorte de certificat de garantie d'origine. A ce deuxième niveau, les connaissances portant leur certificat de garantie peuvent s'articuler entre-elles *via* des inférences logiques qui les contiennent, lesquelles inférences respectent les contraintes crédentielles et d'aprioricité/aposterioricité. Pour un constructiviste non intuitionniste et pour tout mathématicien classique, le raisonnement mathématique se fait alors à ce niveau – ouvrant ainsi l'accès à de nouvelles connaissances mathématiques par un processus qui s'autorise l'inter-modalité. Les nouvelles connaissances sont, non pas détachées d'un mode cognitif donné (sans enracinement dans un mode cognitif, il n'y a pas de connaissance), mais détachées des modes cognitifs originels des prémisses de cette nouvelle connaissance. Un intuitionniste, en revanche, pourra considérer ces nouvelles connaissances comme non authentiques (et si elles sont authentiques, c'est de manière contingente et accidentelle).

3) Enfin - pour faire le lien avec la machine logique - toutes les connaissances mathématiques acquises peuvent être exportées vers un domaine libre de toute contrainte cognitive (crédentielle, aprioricité/aposterioricité) afin d'être manipulées par de seules contraintes linguistiques, qui sont les règles combinatoires du langage-objet mathématique. Mais là, il n'est plus question de connaissance (sauf quand le résultat des opérations est réinjecté dans l'un des niveaux précédents et avalisé par l'agent – i.e. le résultat du calcul automatique est ré-intériorisé au moyen des sens).

Maintenant que nous avons exposé très largement les grands principes de l'analyse de Detlefsen, nous allons poursuivre l'étude du texte en restreignant l'étendue des citations (le texte intégral se trouve en annexe à la thèse).

Comme le fait remarquer Detlefsen (p.220-221), les moyens sollicités dans les niveaux 1) et 2) ne sont pas de même "coût" cognitifs : le relâchement des contraintes "fluidifie" et allège les transports de contenus mathématiques : pour éviter de devoir payer un coût cognitif exorbitant en exerçant des inférences qui sollicitent chacune un transport du mode cognitif des prémisses – sans pour autant être assurés que l'inférence conduise à une connaissance intéressante –, le mathématicien met en marche l'instrument logique et effectue ses inférences sur ce mode unique, afin de disposer facilement (et rapidement) d'une arborescence de **représentations** des conclusions possibles, à partir desquelles il choisit (en réinvestissant les conclusions d'un mode cognitif associé) celle qui lui semble la plus intéressante au regard de son intention d'étendre le champ de sa connaissance mathématique. Ainsi, l'agent se sert « *de manipulations logiques relativement non [coûteuses] des représentations (propositions) plutôt que de manipulations expérimentielles³²³ [coûteuses] des états [cognitifs] correspondants* » (p.221) dans le but de déterminer quelles seraient les conséquences des actes mathématiques s'il les faisait.

Mais en agissant de la sorte, l'agent augmente le risque d'un relâchement du contrôle cognitif sur les résultats obtenus (une connaissance obtenue au moyen d'une inférence logique à contenu mathématique peut sembler intéressante mais se révéler incohérente ou paradoxale, comme dans le cas du paradoxe de la sphère de Banach-Tarski). Entre les épistémologies intuitionniste et classique, c'est *in fine* le paramètre coût/risque qui est en jeu : l'intuitionniste voyant les

³²³ Néologisme

mathématiques comme un domaine devant minimiser les risques de perte de contrôle cognitif sur ses objets, moyennant le prix d'un grand coût cognitif, le mathématicien classique considérant, lui, que une certaine perte de contrôle cognitif au profit d'une plus grande volatilité du raisonnement, est inhérent (voire nécessaire) à l'activité mathématique.

Il est donc normal que, du côté des intuitionnistes, l'étendue du champ de connaissances mathématique soit plus restreint, et que du côté des mathématiciens classiques, on puisse subir quelques dérapages incontrôlés (paradoxes).

L'inférence logique (à contenu mathématique) est ainsi un dispositif de raisonnement dont l'utilité est de permettre une économie de l'effort cognitif : il permet une représentation des résultats possibles en évitant au mathématicien l'effort de recréer, à chaque raisonnement, le mode cognitif par lequel il accéderait authentiquement à la connaissance. P.221-222 :

« L'extension de la connaissance dans toute la gamme de situations [possibles] au regard de laquelle on désire [réaliser] une telle extension est simplement trop difficile à gérer si nous tenons à impliquer une extension de notre activité constructionnelle³²⁴ réelle. En conséquence, nous cherchons un moyen de projeter épistémiquement notre expérience sans l'étendre réellement [... O]n en arrive ainsi au point de vue classique, qu'on peut résumer comme suit : la connaissance mathématique peut commencer avec un type d'intuition ou pratique, mais pour un ensemble de raisons (qui ont à voir avec les limitations pratiques concernant des choses comme notre sensibilité à la douleur et le manque de temps disponible, d'effort possible, de force, de ressources matérielles, etc. que nous devons investir dans des entreprises comme les activités

³²⁴ Néologisme

constructionnelles de base des mathématiques) cette expérience est insuffisamment "plastique" pour pouvoir être étendue pratiquement à toute la variété de propositions vers laquelle nous aimerions [développer] notre connaissance ; aussi, à la place de la relative rigidité pratique [...] de l'intuition mathématique, nous substituons un schème plus souple de manipulations logiques de ses contenus. C'est ainsi qu'une expérience vient à être représentée par une proposition exprimant son contenu. Et, comme avec tout bon schème de représentation, on effectue des opérations sur le représentés [le représentant], mieux praticables (i.e. moins dangereuses, coûteuses, etc.), pour obtenir le même effet épistémique de base que les moins praticables opérations sur le representada [le représenté]. Telle est la conception logique ou représentationnelle intensive³²⁵ générale de l'extension épistémique que nous pensons avoir été la cible principale des attaques de Brouwer aux mathématiques classiques. »

Ainsi, à première vue, nous pourrions dire qu'il y a deux forces antagonistes qui alimentent la dynamique des processus cognitifs liés à la pratique mathématique : l'une pousse à diminuer le risque de perte d'emprise cognitive sur l'acte mathématique d'inférence en y investissant un grand coût en termes d'efforts (ou d'énergie) cognitifs, c'est le principe de conservation épistémique, l'autre pousse à diminuer le coût en énergie cognitive sur l'acte mathématique d'inférence en relâchant le contrôle cognitif (pour ne garder que certains marqueurs de garantie) ce qui augmente le risque d'une perte de compréhension intuitionnelle sur le résultat, c'est un principe d'économie cognitive dont l'opérateur est

³²⁵ A entendre dans le même sens que la définition "par intension" d'un ensemble (plutôt que par extension) : la conception logique ou représentationnelle de l'inférence mathématique est à la conception modale, ce que la définition intensive d'un ensemble est à sa définition extensive : un raccourci.

l'inférence logique à contenu mathématique.

Nous pouvons faire en quelques lignes un résumé de tout ce qui précède :

- L'acte mathématique d'inférence est mû par une intentionnalité mathématique cherchant à s'accomplir (en une preuve-objet) *via* le contenu de l'acte.

- L'acte mathématique d'inférence est soumis à deux forces antagonistes, l'une (le principe de conservation épistémique) cherchant à conserver en conclusion le mode de connaissance des prémisses, l'autre (le principe d'économie de l'effort cognitif) cherchant à libérer l'inférence du poids du mode de connaissance des prémisses (en gardant certains garants liés aux contenus propositionnels). Nous allons renommer ce dernier principe afin de mettre l'accent sur sa capacité à étendre un certain type de connaissance mathématique (la connaissance des contenus propositionnels) *via* l'inférence logique à contenu mathématique : nous parlerons désormais de "principe de généralisation inter-modal" (ou simplement "principe de généralisation"), soulignant ainsi que le principe d'économie de l'effort cognitif dans l'extension de la connaissance mathématique permet à la pensée contentuelle de "traverser" les modes (ce que n'autorise pas le principe de conservation).

Les questions qui se posent sont de deux ordres :

- 1) Comment articuler ces deux points entre eux ? c'est-à-dire exprimer la dynamique des deux principes antagonistes en termes d'intentionnalité mathématique cherchant à s'accomplir *via* le contenu de l'acte, sachant que le sens donné au terme "contenu" n'est pas le même dans les deux propositions : dans la seconde, il s'agit du "contenu propositionnel" au sens classique, qui est une notion *statique* ; dans la

première, il s'agit du contenu de l'acte qui fait référence à une *dynamique cognitive* de mise en rapport du contenu propositionnel avec le tissu de connaissance du domaine auquel il appartient... La difficulté est grande car l'analyse en termes d'intentionnalité que nous avons exposée ne s'applique que dans un schème intra-modal : il n'est pas directement transposable à une dynamique inter-modale telle qu'elle se dessine dans les actes d'inférence logique à contenu mathématique.

2) L'antagonisme Principe de conservation–Principe de généralisation suffit-il, même en supposant qu'on puisse l'intégrer dans une description dynamique d'intentionnalité mathématique, à rendre compte du processus d'extension de la connaissance mathématique (intra- et inter-modale) ?

3) Comment lier tout cela au concept d'effectivité, dont nous n'avons pour le moment donné aucune définition dans le cadre d'une théorie de l'acte mathématique ?

La suite du texte de Detlefsen nous donnera la possibilité de commencer à répondre à ces questions, en fixant une définition intuitionniste de l'effectivité et en abordant le problème de l'extension intra-modale de la connaissance mathématique. Le second texte de Detlefsen nous permettra d'approfondir ce dernier point.

III- Accessibilité actionnelle

Detlefsen, p.224-225 :

« *La thèse centrale de Brouwer, alors, est celle, générale et large, qui affirme le caractère d'«expérience»-intensive - et dénie le [caractère] logique-intensif - de la connaissance mathématique et de son accroissement³²⁶ : la connaissance mathématique est une forme d'expérience ou activité, et alors l'accroissement de la connaissance mathématique nécessite un accroissement de cette activité [ou expérience]. Ainsi, si la connaissance mathématique d'une proposition **p** doit être étendue à la connaissance mathématique d'une proposition **q**, l'expérience ou l'activité dont le contenu est **p** [i.e. **p** est le contenu de l'acte mathématique] doit être transformée en une expérience ou activité dont le contenu est **q**. A l'opposé du modèle classique de l'accroissement épistémique, donc, l'épistémologie brouwerienne ne présente pas le prouveur [i.e. l'agent] comme raisonnant sur les contenus, engendrant du nouveau à partir de l'ancien via cette réflexion logique, et ainsi transférant la garantie de l'ancien vers le nouveau (par appel au garant-de-préservation des modes de l'analyse contentuelle utilisée³²⁷). Plutôt - et il serait difficile d'insister davantage sur l'importance de cette différence dans la présente discussion - le mathématicien transforme d'anciennes preuves-expériences ou preuves-activités en de nouvelles et peut témoigner de l'extension de sa connaissance à de nouvelles propositions quand ladite proposition émerge comme le contenu de la preuve-expérience nouvellement créée. Ce qui est crucial et fondamental donc est la création d'une nouvelle preuve-expérience. Si une telle expérience existe [i.e. peut se réaliser ou s'accomplir], la connaissance pourra être étendue à tout ce qui*

³²⁶ Nous traduisons littéralement l'expression de Detlefsen : "expérience-intensive", pour dire que la connaissance mathématique et son extension sont définies par intention comme une expérience plutôt que comme un raisonnement logique.

³²⁷ Ces garants de préservation sont, comme nous l'avons dit plus haut, les effets crédentiels, l'aprioricité/aposterioricité, etc.

constitue son contenu. Ce que le contenu de cette expérience nouvellement créée pourrait avoir comme relation logique avec [le contenu] de l'ancienne [expérience], c'est un point secondaire. Ainsi, l'extension de la connaissance procède non pas par extraction logique de nouvelles propositions [à partir] de propositions déjà connues, mais plutôt par la transformation phénoménologique [i.e. pratique] d'une preuve-expérience en une autre – le nouveau contenu émergeant comme le contenu de la nouvelle expérience produite par cette transformation. Ainsi, l'inférence ou la preuve mathématique suit le chemin des [mises en] relation possibles des activités mathématiques, plutôt que la chaîne de connexions déterminées par quelque analyse logico-linguistique du contenu (propositionnel) de ces activités, comme l'affirme l'épistémologie classique. » (328)

Dans cet extrait, Detlefsen distingue bien les deux sens du terme "contenu" sur lesquels nous avons attiré l'attention précédemment. Le contenu d'un acte mathématique de preuve (que Detlefsen nomme preuve-activité ou preuve-expérience) est ce qui émerge comme sous-produit d'une mise en relation d'expériences (actes) mathématiques. Et un nouveau contenu (extension de la connaissance) est ce qui émerge de la transformation d'une ancienne expérience (acte déjà accompli) en une nouvelle expérience (qui s'accomplit alors simultanément avec l'émergence de ce contenu) et qui est une des possibilités expérimentales non prédéterminées sur lesquelles peut ouvrir l'ancienne expérience. Quant à caractériser plus explicitement la nature de ce contenu "qui

³²⁸ Il est intéressant de comparer cette citation de Brouwer à celle de **Dubucs**, *op. cit.*, p.220 : « [Pour sortir de l'impasse], *il ne suffit pas de supposer, comme fait Dummett, que la capacité de reconnaître le réseau de connexions déductives peut se révéler tout simplement d'une façon inchoative du simple fait que l'agent est impliqué dans l'exécution d'un processus de preuve.* »

émerge comme sous-produit” de l’invention d’un nouveau “geste” mathématique, Detlefsen en parle dans la suite (p.225) :

« Pour le brouwerien, une preuve est plus (et aussi moins) que de simples séries de prises d’attitude épistémiques dont les contenus sont reliés entre eux. [La preuve] suit plutôt une **mise en ordre d’activités** où ce qui pourrait être appelé l’“accessibilité actionnelle” d’une activité constructionnelle à une autre est plus important que l’accessibilité logique du contenu de l’un [i.e la conclusion] à partir du contenu de l’autre [i.e. la prémisse]. ». Ainsi (p.229-230), « la présentation de l’épistémologie brouwerienne telle que nous l’avons esquissée jusqu’ici met en avant en tant que trait important de la connaissance mathématique les effets induits par la prépondérance que [cette épistémologie] donne de l’occurrence [de nouvelles connaissances] dans le mode expérientiel. Cette mise en avant peut néanmoins apparaître comme manquant de raisons. Pour combler cette lacune, nous devons maintenant sonder quelques thèmes plus profonds de l’épistémologie brouwerienne. Commençons par rappeler un item de l’intuitionnisme maintes fois cité qui constitue la pierre angulaire de la vision de Brouwer. Cet item est l’idée trompeusement simple, car en réalité foncièrement radicale, que les mathématiques sont dans leur essence une forme d’activité mentale. Nous proposons de prendre au sérieux notre insistance sur le caractère actionnel ou pratique des mathématiques, et, partant, d’étudier la possibilité de traiter l’épistémologie brouwerienne comme basée sur une conception de la connaissance mathématique pratique plutôt que théorique. De ce point de vue, **les mathématiques sont un corps d’actions ou de capacités à l’action, plutôt qu’un corps de vérités** (i.e. une science, au sens traditionnel). De la même manière, **la connaissance mathématique est un genre de savoir-faire**

pratique pour effectuer certaines actions, plutôt qu'une réflexion rationnelle au sujet de plusieurs propositions et subséquente reconnaissance intellectuelle qu'elles soient vraies. Nous nous proposons également de considérer cette distinction entre la connaissance pratique et théorique comme [irréductible]. C'est-à-dire, nous proposons de l'interpréter comme impliquant l'inconvertibilité, du moins au niveau de l'équivalence épistémologique, du premier type de connaissance [i.e. savoir-faire pratique] en le second [i.e. savoir théorique]. Les activités mentales de l'intuitionniste, à l'instar des prises d'attitude ou "acceptations" de l'épistémologie conventionnelle, peuvent être pensées comme ayant de contenus propositionnels. Mais, du fait qu'ils soient vécus ou expérimentés, **ces contenus sont "enregistrés" épistémiquement d'une manière qui n'est pas réductible – du moins sans perte épistémique – à un quelconque genre de compréhension purement intellectuelle.** L'accent mis sur [cet aspect] "vécu" ou "expérimenté" est une manière d'exprimer le caractère pratique de la connaissance impliquée. Nous "vivons" nos activités. Ainsi, puisque la connaissance mathématique est en définitive une activité ou une capacité à l'activité, elle se manifestera finalement à travers l'expérimentation de notre vie pratique. (Nota bene. En plus de cela, l'accent mis sur l'expérience pourrait aussi être en partie une tentative pour exprimer l'idée qu'il existe d'une certaine manière quelque chose de plus grande valeur dans un genre de connaissance qui véhicule avec elle une aptitude à faire quelque chose que dans un genre de connaissance qui consiste uniquement en une "reconnaissance" ou "acceptation" intellectuelle d'une proposition. La connaissance authentique [...] anime et rend possible. Elle pousse à l'action. [...] **La connaissance pratique pénètre donc à un niveau de notre être cognitif auquel n'accède pas**

typiquement la connaissance théorique ou purement intellectuelle. »

En nous gardant d'établir une hiérarchie de valeurs entre le savoir et le savoir-faire, nous pouvons dire que l'hypothèse selon laquelle les mathématiques sont un corpus de savoirs-faire semble nous ouvrir des perspectives dans notre analyse de l'effectivité.

De fait, l'idée d'analyser les constructions mathématiques – et l'effectivité – au crible de l'action plutôt qu'à celui de l'articulation logique (à contenu mathématique) est, comme le signale Detlefsen, la conséquence logique et ultime de l'épistémologie intuitionniste. Mais elle est aussi, pour nous, une manière légitime d'aborder les mathématiques sans tomber dans le sillon de l'analyse formaliste et axiomatique – non pas que cette dernière présente moins d'intérêt mais parce que, nous l'avons dit dans l'introduction générale, une telle analyse conduit nécessairement à refaire le parcours ayant mené vers l'assimilation de l'effectivité à la récursivité générale (et autres équivalents), ce qui n'est pas le propos de cette thèse.

Detlefsen établit une distinction essentielle que nous voudrions approfondir : dans le raisonnement à inférences logiques (à contenu mathématique), celui-ci s'appuie sur un corpus de savoirs-faire – celui de la logique (sous domaine des mathématiques) – fixé une fois pour toutes et à l'intérieur duquel on peut faire varier à l'infini des contenus propositionnels dépouillés de la plupart de leur charge modale (à part certains garants). Cette position épistémique, nous l'avons dit, permet simultanément une économie de l'effort cognitif et une "dés-imperméabilisation" des frontières des différents domaines cognitifs mathématiques. Mais la fixation de la variable "corpus de savoirs-faire" au

seul mode logique, transforme une activité *a priori* multi-modale en une activité mono-modale (logique) dont le centre de gravité se déplace du système cognitif moteur au système symbolique : si, dans l'interprétation intuitionniste, l'activité mathématique est majoritairement *motrice-gestuelle* et peut puiser sa matière (contenus des actes) parmi un grand nombre de corpus-modes différents (mais sans saut de l'un à l'autre)³²⁹, dans l'interprétation classique, elle est majoritairement *symbolico-linguistique*, l'aspect gestuel étant réduit au savoir-faire du domaine logique, et peut puiser sa matière (contenus propositionnels) dans une collection de contenus ayant tous le même type réduit de caractères modaux (les garants). Cette collection est une sorte de projection sur un support bidimensionnel (effet crédentiel, aprioricité/apostériorité) du contenu d'un espace multidimensionnel composé de domaines de connaissance différents. L'aspect irréductible de l'un à l'autre – comme le pointe Detlefsen – émerge de la différence des attitudes cognitives entre un mode d'être actionnel multi-modal à faible charge symbolique et un mode d'être symbolique où l'aspect actionnel est réduit au seul mode logique - ce qui ne signifie pas qu'on ne puisse pas passer de l'un à l'autre, mais ce uniquement de manière sérielle : autrement dit, ces deux modes ne peuvent être actionnés simultanément dans une même inférence.

Que pouvons-nous dire de l'activité mathématique (et de l'acte mental mathématique) sous l'angle *pratique* (multi-modal) ? Quelle description *actionnelle* donner à nos concepts de "contenu de l'acte", de "mode de connaissance" et de "tissus de connaissances d'un mode donné"

³²⁹ Cela ne signifie pas qu'une activité mathématique développée selon les principes intuitionnistes est vouée à rester sur un mode fixé et inamovible : elle peut étendre *par l'intérieur* un mode de connaissance jusqu'à établir un pont actionnel (un point de jonction) avec un mode considéré jusqu'alors comme distinct. Le pont ainsi construit et la fusion de deux modes en un seul sont alors l'expression d'une création mathématique. Nous analyserons cela plus loin.

(et son aspect dynamique) ?

Detlefsen écrit (p.230-231) :

« [...] dans l'épistémologie esquissée ici, **une aire de pensée mathématique** (le pendant, dans la conception classique, d'une théorie mathématique) doit être vue comme un **corps d'actions organisé par un schème de connections actionnelles reflétant une sorte de disposition pratique à passer d'un acte à un autre**, plutôt qu'un corps de vérités organisé par un réseau de relations logiques. [...] Dans ce schème actionnel] il y a un parcours de développement pratique qui [peut être] vu comme la transformation pratique d'un acte en un autre de telle manière à mettre l'ensemble de l'activité mathématique en plus grande conformité avec **un réseau ou un courant d'actions vu comme représentant l'idéal d'une vie mathématique abondante**. Ainsi, autant le but que le processus de développement épistémique changent quand on passe d'une conception théorique [ou théorétique] à une conception pratique de la connaissance mathématique. A la place de l'objectif [consistant à obtenir] une connaissance théorique "complète", nous avons l'idéal d'une vie pratique abondante, non pas jaugée (du moins pas en priorité) en termes de propriétés logiques (i.e. consistance, complétude) de l'ensemble des propositions données, mais plutôt en termes de **puissance pratique** que ces activités représentent. Et à la place de l'extension épistémique du domaine de nos "acceptations" intellectuelles d'une proposition à une autre via l'inférence logique, il y a une extension de nos capacités pratiques basée sur l'acquisition et la réalisation de dispositions qui lient une activité mathématique à une autre. **Ainsi, nos preuves-activités "locales" ou individuelles viennent à être réunies ensemble à l'intérieur**

d'un tout global (une vie) par un schème de relations qui sont constituées non pas par les accointances logiques qui prévalent entre leurs résultats propositionnels, mais plutôt par leurs affinités actionnelles ou comportementales de l'une à l'autre [preuve-activité]. Les différentes preuves-activités locales doivent ainsi être vues comme entretenant non seulement une relation logique entre leurs contenus [³³⁰], mais aussi comme un lien global d'"ajustement" ou de "continuité" qui reflète une **disposition pratique à passer de l'effectuation d'un acte à l'effectuation d'un autre de sorte qu'il se rapproche de l'idéal d'une vie mathématique abondante – définie également en termes d'accomplissement et capacités pratiques. La bonne orientation en un lieu donné (i.e. pour une preuve-activité locale donnée) est ainsi une affaire d'activité locale en passe d'être reliée dispositionnellement à une autre preuve-activité de telle manière que, si on les laisse se développer de manière naturelle, elles évolueront en un corps de preuves-activités ayant le type de puissance pratique vue comme constitutive de la maturité mathématique.** »

Selon l'auteur, le modèle de la connaissance mathématique de Brouwer peut être interprété même au sens théorique – où il est question de vérité d'un contenu propositionnel plutôt que de preuve d'un jugement – comme (p.232-233) :

*« mettant l'accent sur la "localité" d'une certaine connaissance théorique. Basiquement, l'idée est la suivante : une connaissance d'une vérité mathématique **p** est mathématique dans la mesure où*

³³⁰ Bien évidemment, la relation logique entre les contenus propositionnels est nécessaire. Mais elle n'est pas suffisante.

elle est basée sur une familiarité "locale" [...] avec le(s) sujet(s) mathématique(s) auquel(s) p appartient. Cette insistance sur le caractère local d'une connaissance mathématique semble être seulement une autre manière d'exprimer le point de vue de Brouwer concernant l'"autonomie" de la pensée mathématique, [point de vue] selon lequel nous devrions faire attention à bien distinguer les connexions entre propositions émergeant de la représentation linguistique des raisonnements mathématiques des connexions entre propositions qui caractérisent le raisonnement lui-même, et ainsi ne pas attribuer au raisonnement mathématique "les régularités dans le langage qui l'accompagnent" (cf. Brouwer (1955), pp.551-2). Les "régularités de langage" sont attendues être d'un caractère global, car les langages sont destinés à constituer des schèmes globaux de représentation ; c'est-à-dire, des schèmes de représentation conçus non pas avec la représentation d'un certain corps de pensée, mais de tous les corps de pensée en général. Il n'est ainsi pas question que la représentation linguistique de la pensée mathématique puisse induire une structure logique globale de ces théorèmes. Il n'est pas non plus question d'un dommage fait par [cette propriété globalisante du langage] à condition qu'on se souvienne que cette structure logique induite (qui réellement mérite d'être appelée logique à cause de son caractère global) est à prendre comme une structure imposée par l'instrument de représentation [i.e. la langue], et non comme la structure de la pensée représentée. Comme l'a dit Brouwer, "le langage mathématique, en particulier logique, ne peut jamais par lui-même ... déduire un état mathématique des choses" (cf. (1954), p.524).

Quelle que soit la structure exhibée par des raisonnements mathématiques authentiques, elle semble être d'un caractère plus "local", déterminée par le sujet de la pensée constructionnelle en

question. Cette pensée constructionnelle pourrait, bien sûr, être divisée en étapes ou parties en de nombreuses manières. Mais la question est quelles décompositions en étapes correspondent réellement à la structure par étapes exhibée par un morceau de raisonnement authentiquement mathématique, et lesquelles représentent seulement différentes manières non authentiquement mathématiques de décomposition systématique du même complexe de pensées. L'émphase mise par Brouwer sur l'"autonomie" des mathématiques par rapport à la logique suggère que même si les structures logiques peuvent parfois se surimposer sur les raisonnements mathématiques complexes, elles ne représentent qu'une sorte de "mise ensemble" d'affirmations mathématiques (cf. (1933), p.443) qui est "coextensive", si elle l'est, au raisonnement mathématique authentique sur lequel elle est surimposée. Néanmoins, elles ne reflètent généralement pas la structure de ce raisonnement considéré comme un raisonnement authentiquement mathématique.

[...] L'élément clé à la base de [la répudiation brouwerienne de la logique classique] n'est rien d'autre que le point de vue de Poincaré concernant la "localité" de la pensée authentiquement mathématique. »

Le texte de Detlefsen est très riche en idées qui peuvent nous servir à mieux cadrer nos concepts. L'insistance de l'auteur sur l'aspect local de l'acte mathématique vu sous l'angle actionnel souligne ce que nous avons esquissé avant la présente citation, à savoir que nous passons d'une description globalisatrice a-topique permise par l'outil de l'inférence logique (à contenu mathématique) – lequel outil lisse les dénivellations topologiques entre les différents domaines de connaissance pour ne garder que quelques marqueurs globaux de terrain (les garants) -, à une

analyse "topologique" locale de l'acte mathématique cognitif qu'oblige le point de vue actionnel : la circulation des actes mathématiques colle à la forme du terrain cognitif parcouru et ne peut donc passer d'un contenu modal à un autre si l'espace qui les sépare présente une disjonction cognitive. Au contraire, les inférences logiques à contenu mathématique circulent dans un seul type de terrain – celui du mode logique (inclus dans les mathématiques) –, dans lequel est projeté le contenu des actes sous la forme lissée de contenus propositionnels : il n'y a plus de jonctions à réaliser, tout au plus quelques contraintes de ce terrain particulier à respecter, la circulation y est plus facile. Mais, du point de vue de l'analyse cognitive, un tel terrain (avec sa dynamique de circulation) offre moins d'intérêt.

Analysons le concept d'*aire de pensée mathématique* évoqué dans l'extrait préalable : c'est ainsi que Detlefsen nomme ce que nous avons appelé "tissu de connaissances d'un mode donné", qu'il oppose à la conception classique de "théorie mathématique" (théorie des ensembles, arithmétique, etc.). C'est, selon l'auteur, un corps d'actions organisées par un schème de *connections actionnelles* reflétant une sorte de disposition pratique à passer d'un acte à un autre. L'idée de définir ce tissu dans un espace dynamique plutôt que statique – à l'instar d'un espace vectoriel au regard d'un espace affine – nous semble pertinent : notre tissu de connaissances est plutôt un tissu (dans l'espace actionnel dynamique) d'actes mentaux dont les connections répondent à un schème qui reflète la « *disposition pratique à passer d'un acte à un autre* » orienté par « *un courant d'actions vus comme l'idéal d'une vie mathématique abondante* ». Ce dernier concept – courant d'actions / idéal d'une vie mathématique abondante – est difficile à saisir, mais à notre avis il pourrait être relié au concept d'intentionnalité mathématique évoqué dans la section précédente. L'intentionnalité mathématique est un moteur de l'action

pratique (cognitive) qui oriente les courants actionnels et permet de relier des actes mathématiques selon un certain schème représentant un idéal pratique – comme l'intentionnalité du menuisier lui permet d'effectuer une série d'actes physiques sur une collection de matériaux, actes orientés par un idéal pratique, par exemple, la construction d'une certaine table. Mais attention, nous sommes dans une description dynamique : l'idéal d'une vie abondante, ce n'est pas l'idée de la "table", c'est l'idée de "la construction de la table".

De fait, la métaphore du menuisier permet peut-être de mieux saisir le statut du "contenu de l'acte" (mais elle a aussi ses limites) : professionnellement, un menuisier n'est reconnu comme tel que par la qualité des objets réalisés (table, bibliothèque, chaise...). Un homme qui aurait acquis le savoir-faire technique du menuisier mais qui, après l'apprentissage, n'aurait jamais rien construit n'est donc pas un menuisier au sens comportemental. En revanche, à condition de réaliser effectivement des objets de menuiserie, la qualité de menuisier est définie par l'ensemble des actes qu'il est capable d'effectuer grâce à son savoir-faire, pour construire un objet en bois quelconque donné (telle table particulière, ou chaise, etc.) s'inscrivant dans un idéal actionnel. Ainsi, le menuisier se réalise professionnellement exclusivement par l'accomplissement matériel des objets, mais ce n'est pas tant la nature particulière de l'objet ni celle des matériaux de construction dont il se sert pour le construire (planches de pin, plaque de contreplaqué, etc.), ni la forme de ceux-ci, ni leur utilité, ni leur dureté, etc. qui fait de lui un menuisier : c'est la série d'actes particuliers, puisée dans son tissu de savoir-faire actionnels, qui lui permet, à partir d'une collection de matériaux quelconques donnés au départ, de réaliser l'objet fini quelconque qu'il s'est donné comme but de construire (idéal). Bref, d'un certain point de vue, la construction matérielle d'un objet particulier

quelconque à partir d'une collection de matériaux particuliers quelconques donnés peut être considérée comme une conséquence (certes absolument nécessaire) de ce qui fait véritablement de cet homme un menuisier : la mise au point d'un schème d'actes (applicables sur ces matériaux particuliers) puisé dans le corpus de son savoir-faire orienté par un idéal de réalisation. La particularité des métamorphoses que les matériaux de départ subissent jusqu'à l'objet final sont certes une expression de son métier, mais ce dernier est défini par la suite d'actions physiques que le corps du menuisier effectue afin d'obtenir l'objet souhaité. Autrement dit, si les matériaux de départ et l'objet d'arrivée sont essentiels pour définir les caractéristiques d'un schème d'actes de construction particuliers, c'est la capacité actionnelle de l'homme de passer d'un acte au suivant afin de réaliser un idéal quelconque donné qui est au cœur de ce schème (et de son métier).

Pour revenir aux mathématiques, les contenus particuliers des actes mathématiques d'inférence, qui transforment ces contenus (contenus essentiels pour construire une nouvelle connaissance mathématique) sont néanmoins une expression secondaire de ce qui constitue véritablement l'acte mathématique, c'est-à-dire (pour reprendre les expressions de Detlefsen) : *un schème de connections actionnelles reflétant une sorte de disposition pratique à passer d'un acte à un autre réunis ensemble à l'intérieur d'un tout global (une vie), schème dont les relations sont non pas constituées par les accointances logiques qui prévalent entre leurs résultats propositionnels, mais plutôt par leurs affinités actionnelles ou comportementales d'un acte à l'autre.*

L'on pourrait pousser la métaphore du menuisier jusqu'au bout en disant (sans approfondir) que la réalisation d'un objet mathématique à l'aide d'inférences logiques à contenu mathématique pourrait ressembler au processus de construction d'un meuble IKEA par un particulier : ayant

a disposition une collection de matériaux de départ dont il est garanti (grâce à un savoir-faire qui s'est exprimé dans le passé) qu'ils sont le résultat d'un savoir-faire en menuiserie, et possédant un schème simple d'assemblage faisant appel à un sous-ensemble réduit et assez immédiat de l'ensemble des savoirs-faire en menuiserie (visser, assembler), on obtient l'objet final...

Bien entendu, cette métaphore ne vaut que pour illustrer simplement la différence entre les contenus des actes mathématiques (subordonnés aux dispositions actionnelles) et les contenus propositionnels (garantis mais dont l'enchaînement n'est pas aussi bien contrôlé). En effet, il y a un point qui semble plus facile à exprimer dans le cas du menuisier que dans celui du mathématicien : l'idéal de vie abondante / intentionnalité mathématique d'extension de la connaissance qui oriente les courants actionnels du savoir-faire. Celui du menuisier, est de construire, avec tout matériel en bois donné au départ, tout type d'objet de menuiserie qui rempli une fonction prédéterminée – objectif qui le pousse néanmoins à étendre son corpus de savoirs-faire car même s'il a déjà construit ce même type d'objet, aucun matériau de départ n'est identique à un autre, et une part d'improvisation est toujours nécessaire. Fort bien... Mais en ce qui concerne le mathématicien, en vertu de quels principes exprimer l'idéal de vie mathématique abondante ? Est-ce, contrairement au menuisier, celui d'être toujours en train de créer de nouveaux types de preuve-objet ? Si oui, à quelle *nécessité* cognitive cela répond-t-il et quel avantage cognitif peut-il y avoir là-dedans ? Pour le moment, nous laissons la question sans réponse...

Dans tous les cas, la dynamique mise en lumière par Detlefsen oblige à préciser plus finement la "topologie" des *aires de pensée mathématique*. Si nous nous en tenons à l'idée naïve que les mathématiques sont formées

d'un certain nombre d'aires, à l'image des théories (au sens classique), et si nous prenons au pied de la lettre le principe de conservation épistémique, nous arrivons à un schéma totalement impraticable et sans rapport avec les faits.

En effet, supposons qu'il y ait, au moins, quelques grandes catégories d'aires comme celle de la pensée géométrique, celle de la pensée arithmétique, celle de la pensée algébrique... Ou encore, l'aire de la pensée du continu et celle de la pensée du discret, etc. Bref, postulons qu'il existe bel et bien quelques aires cognitives dont les modes actionnels sont distincts. Le principe de conservation interdit le passage d'une aire à l'autre – i.e. des prémisses (actes-preuves-objets) appartenant à l'une ne peuvent conduire à une conclusion (acte-preuve-objet) appartenant à l'autre en conservant le mode de connaissance – aussi, il ne peut y avoir de passages entre elles autrement que par des inférences logiques à contenu mathématique. Le problème, c'est que cela est en totale contradiction avec la pratique des mathématiques : une grande part de la création mathématique consiste justement à établir des ponts entre différents systèmes de pensée mathématique : la géométrie analytique, la géométrie algébrique, l'analyse discrète, etc. ne seraient alors pas des domaines authentiquement mathématiques du point de vue intuitionniste - ce qui est en contradiction avec la réalité.

De plus, s'il n'y avait pas de passage cognitif entre ces aires (par actes cognitifs respectant le principe de conservation), le développement de chacune serait indépendant du développement des autres, comme s'il s'agissait de savoirs-faire aussi différents que l'est la menuiserie de l'horlogerie, et reviendrait à nier l'unité de l'activité mathématique comme mode (ou activité) particulier de pensée.

L'idée donc de séparer les mathématiques en modes distincts doit être nuancée. On peut déjà présupposer qu'il existe, sans avoir à le décrire, un mode cognitif unique qui rassemble toutes les activités mathématiques. Cela est "prouvé" par l'usage, puisque tous les mathématiciens savent que, malgré les différences entre différents types de pensée mathématique, les mathématiques sont une activité particulière et bien définie. Néanmoins, ce grand mode cognitif peut être supposé subdivisé en aires de pensée au sens donné par Detlefsen : des schèmes actionnels, sortes de motifs dessinés dans le substrat dynamique du mode mathématique global, qui canalisent et orientent chacun les actions. Ainsi, si l'on admet l'existence d'un certain nombre de "modalités" différentes (aires), on peut postuler que chaque schème est défini par des dispositions pratiques particulières à passer d'un acte à un autre, dispositions qui sont des affinités actionnelles ou comportementales.

C'est comme si toute l'activité mathématique avait pris place dans un réseau cognitif donné pré-existant (mais non prédéterminé pour l'activité mathématique), dont certains lieux ont été investis par une structure signant une unité actionnelle particulière du type général mathématique – un peu comme la structure des dunes d'une région signe les propriétés conjointes du sable et du vent de cette région : chaque structure topologique locale reflète la dynamique actionnelle particulière qui s'y exerce. Cet investissement s'est fait au cours de l'apprentissage des mathématiques.

Du point de vue de la création mathématique, une structure de ce substrat peut librement s'étendre dans le domaine général c'est-à-dire étendre leur topologie actionnelle vers des zones non investies (par un schème de pensée mathématique) ou alors effectuer des jonctions avec d'autres structures de pensée mathématique déjà présentes.

Mais cela pose un problème au regard du principe de conservation

épistémique : si l'on admet que les différentes structures (aires) ont des modes actionnels différents, et que le principe de conservation est strict, il ne peut y avoir de jonction entre deux aires (car les aires sont structurées différemment). Or la pratique mathématique montre bien, nous l'avons dit, que souvent la création mathématique consiste à (ou passe par) relier deux domaines jusque-là séparés cognitivement, à l'aide d'un pont actionnel c'est-à-dire d'un (ou plusieurs) actes mathématiques. Il y a là une difficulté comparable à celle rencontrée par Aristote pour décrire le passage entre l'immobilité et le mouvement, et donc unifier ces deux modes de connaissance liés à ces deux états cinétiques des solides, modes de connaissance semblablement incompatibles (injoignables). Il faut donc préciser plus finement ce que signifie la conservation du mode de connaissance.

De fait, le paradoxe est le suivant : d'une part il semble nécessaire que dans un acte mathématique, il y ait *quelque chose* qui ne soit pas conservé entre le mode actionnel qui a permis de construire la connaissance des prémisses (à partir d'autres prémisses) et le mode actionnel qui permet de construire la conclusion (à partir des prémisses). Et d'autre part, l'idée de base qui nous a permis de postuler l'existence d'aires différentes s'appuie sur le postulat d'existence d'une unité actionnelle particulière dans chaque aire (qui la définit), donc une disjonction actionnelle entre deux aires... La situation est bloquée.

Une façon de trouver la sortie serait d'étudier plus finement le principe de conservation épistémique, et de le nuancer afin qu'il cesse d'être un obstacle à toute jonction d'aires actionnelles différentes.

Cela explique la nature locale attribuée par Detlefsen au principe de conservation épistémique : c'est à l'échelle d'un acte et non du tissu actionnel entier que ce principe agit. Autrement dit, le principe de

conservation n'implique pas qu'une aire de pensée mathématique ait un mode (structure) actionnel uniforme. Il ne parle que du passage (local) d'un acte de preuve à un autre. Le problème se réduit donc à trouver la manière d'expliquer, par exemple, que si le principe est respecté de **p** à **q** et de **q** à **r**, cela ne signifie pas que le mode de connaissance de **p** soit exactement le même que celui de **r**.

Mais il ne faut pas non plus que la contrainte de conservation se relâche, au risque de ruiner la distinction essentielle entre l'épistémologie classique et l'épistémologie intuitionniste par effacement de la différence *qualitative* entre l'acte mathématique d'inférence au sens intuitionniste et l'acte d'inférence logique à contenu mathématique. Bref, on ne peut pas se contenter de l'affirmation : dans l'acte d'inférence "authentique", le mode actionnel se conserve *un peu*, alors qu'il ne se conserve *presque* pas dans l'acte d'inférence logique à contenu mathématique...

L'enjeu de ce questionnement se situe probablement dans l'interprétation des concepts de "mode ou aire de connaissance" et de "principe de conservation épistémique" à cheval entre, d'une part, l'acte local de preuve, et d'autre part, le mode global de l'activité mathématique. En effet, il semble indéniable que le principe de conservation, qui agit au niveau local, est un principe qui également signe l'appartenance d'un acte au domaine global de la pensée mathématique, domaine en constante évolution puisque, du point de vue extensif, il est formé de toutes les aires actionnelles particulières, et du point de vue intensif, il regroupe toutes les aires de connaissance possédant *quelque chose* en commun que, dans l'usage, nous nommons les mathématiques - et que nous pourrions qualifier aussi d'intentionnalité mathématique. D'autre part, il nous semble qu'une aire actionnelle n'a pas une structure (ou schème) fixe et prédéterminée : elle n'est définie que par les actes accidentels qui se sont enchaînés par affinités actionnelles - mus par cette

intentionnalité - et qui lui ont donné un certain pli. Autrement dit, la seule nécessité du domaine de la pensée mathématique, du moins du point de vue intuitionniste, est le respect d'une contrainte locale, le principe de conservation, contrainte définie par des forces fluctuantes impulsées par l'intentionnalité mathématique globale et mettant en jeu tout le domaine de la pensée mathématique - domaine uniquement constitué de l'ensemble des schèmes actionnels existants à un moment donné. Pour des raisons contingentes, des aires différentes de pensée mathématique - par exemple la pensée géométrique et la pensée arithmétique - se sont constituées sur un substrat qui n'était pas prédéterminé à cet usage cognitif. L'intentionnalité mathématique a - préalablement ou postérieurement ou simultanément - orienté le développement de ces aires dans un double idéal: d'extension et de jonction de ces aires (ce que Detlefsen nomme *l'idéal d'une vie mathématique abondante*). Agissant à l'échelle locale mais piloté par l'ensemble des schèmes constitués, le principe de conservation est, comme le dit Detlefsen, « un lien d'ajustement ou de continuité » entre deux actes (localité) dans la perspective d'une vie mathématique (globalité) mais certainement pas un principe d'équivalence entre la signature actionnelle des prémisses et celle de la conclusion.

Pour résoudre ce problème, nous allons examiner un autre texte de Detlefsen, *Poincaré against the Logicians* (1992), où l'auteur approfondit la dynamique d'extension des aires actionnelles, en s'inspirant des écrits de Poincaré.

IV- Les architectures de Poincaré (Detlefsen-1992)

Dans son texte de 1992 : *Poincaré against the Logicians*, Detlefsen explore l'épistémologie de Poincaré, qui débouche sur une typologie de ce que nous avons nommé les *aires* locales de la connaissance mathématique. Nous avons vu dans le chapitre précédent que pour Poincaré, selon Detlefsen, le phénomène d'augmentation de la "compréhension intuitionnelle" que procure l'inférence authentiquement mathématique (acte-preuve) serait en rapport « avec **la capacité [de l'agent] à voir le rôle ou la position qu'une certaine proposition joue dans le sujet plus large à laquelle elle appartient ; que l'on vien[drait] à connaître mathématiquement quelque chose [par le fait d'avoir] une vision globale de la place de cette proposition au sein d'une entreprise épistémique plus large.** » (Detlefsen-1990, p.214). Dans son texte de 1992, l'auteur précise l'idée.

Ainsi écrit-il (Detlefsen-1992, p.349-351) :

« Contrairement à la critique usuelle du logicisme [...], la critique de Poincaré ne se focalisait pas sur la question du statut des "lois de base" des systèmes des logicistes, trouvant des difficultés à les voir comme des principes authentiquement logiques. Plutôt, [la critique de Poincaré] était dominée par l'idée bien différente qu'il y a peu de place, s'il y en a une, pour l'inférence logique dans la preuve mathématique – de telles inférences étant épistémologiquement trop incolores pour faire partie d'un quelconque raisonnement authentiquement mathématique. L'inférence logique, de par sa vraie nature, s'applique partout, et donc ne requiert ni ne reflète aucune

connaissance mathématique particulière [³³¹] ; et pour cette raison, on ne peut s'attendre à ce qu'elle serve de moyen d'étendre authentiquement la connaissance mathématique.

La défense de ce point de vue de Poincaré reposait sur l'appel à ce qu'il voyait comme une donnée ["datum"] du "sens commun" mathématique. Quiconque a une expérience mathématique, soutenait-il, perçoit clairement une large et importante différence entre la condition épistémique de quelqu'un dont le raisonnement est basé sur les étapes aveugles [à la "matière" mathématique] de l'inférence logique (c'est-à-dire, le modus ponens et consorts), et quelqu'un dont le raisonnement est basé sur la pénétration spécifique [à la "matière" mathématique] d'un sujet mathématique particulier. Les inférences du mathématicien découlent de et reflètent une connaissance de l'"architecture" locale (expression de Poincaré) du sujet particulier qui les concerne, tandis que celles du logicien représentent seulement une forme valide et neutre [à la "matière" mathématique] (et, partant, insensible localement !) de connaissance. Selon l'image même de Poincaré, le "logicien" est comme un écrivain qui a une bonne maîtrise de la grammaire, mais pas d'idées.

[... p.351] Nous aboutissons à une épistémologie centrée sur deux principes complémentaires. L'un d'eux est un principe de typification épistémique selon lequel la connaissance est vue comme divisée en plusieurs types, mais des types dont la division ne suit pas celle entre sujets communément utilisés pour délimiter les mathématiques des

³³¹ A l'époque de Poincaré, la logique était considérée comme un champ différent de celui des mathématiques, ce qui permettait à Poincaré de dénier à l'inférence logique tout caractère mathématique. Nous dirions aujourd'hui que l'inférence logique est une inférence de type mathématique, mais que l'inférence logique à *contenu mathématique* (autre qu'un contenu logique) est dénuée du caractère mathématique propre au domaine auquel appartient ce contenu propositionnel.

*non mathématiques. L'autre est un principe de conservation épistémique qui dit, en effet, que l'inférence ne peut être épistémiquement "créative" – c'est-à-dire, elle ne peut donner lieu à une connaissance appartenant à un type donné - sans elle-même **constituer une connaissance de ce type**. Dans le cas de la connaissance mathématique, ce second principe implique que si un raisonnement vers une conclusion à partir d'un groupe de prémisses est capable de produire une connaissance mathématique de cette conclusion, alors, en plus des prémisses mathématiquement connues, [il faut que] les **inférences utilisées pour conduire la preuve constituent elles-mêmes une connaissance mathématique**. Selon le point de vue de Poincaré, c'est cette dernière condition qui est violée par l'utilisation d'inférences purement logiques dans le raisonnement mathématique. »*

Nous voyons émerger de cet extrait un nouveau sens du principe de conservation épistémique que nous n'avions pas auparavant : le principe implique que s'il y a production d'une nouvelle connaissance mathématique ("création mathématique") à partir de prémisses, alors c'est que les inférences utilisées pour conduire la preuve constituent elles-mêmes une connaissance mathématique.

Dans quel sens faut-il entendre ce dernier propos ? Cela signifie-t-il que l'inférence mathématique apporte des informations propositionnelles supplémentaires (quantifiables en langage-objet) aux informations contenues dans les prémisses, et qui sont nécessaires pour inférer la conclusion ? Non, car les informations contenues dans les prémisses seraient *logiquement* insuffisantes pour inférer la conclusion : un tel gap serait mis en évidence immédiatement par l'impossibilité d'effectuer une inférence logique à partir du contenu propositionnel des prémisses et conduisant à la conclusion – c'est là la grande vertu des inférences

logiques à contenu mathématique : établir tout ce qu'il est possible d'inférer. Car, comme nous l'avons déjà dit, la validité de l'inférence logique à contenu mathématique est une condition nécessaire (mais non suffisante) de toute inférence authentiquement mathématique : étant donné un ensemble de prémisses, une inférence authentiquement mathématique réalise une des conclusions possibles parmi toutes celles données par l'inférence logique ayant le même contenu propositionnel (nous y reviendrons par la suite).

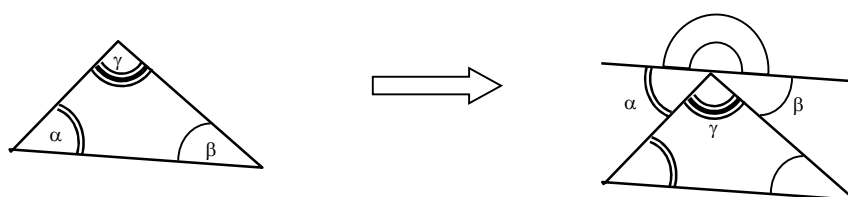
La question des connaissances contenues par l'inférence mathématique elle-même renvoie à l'une des problématiques très étudiées par les philosophes des mathématiques – Polya et d'autres – sur la nature du jugement synthétique *a priori* des raisonnements mathématiques³³². Pour nous en tenir à notre propos, disons que cette connaissance constituée par l'inférence mathématique elle-même ne peut être exprimable dans le langage-objet propositionnel car alors elle conduirait au paradoxe d'avoir une inférence authentiquement mathématique qui ne puisse être traduite en une inférence logique à contenu mathématique.

Alors de quel type de connaissance s'agit-il ? Prenons un exemple de raisonnement selon les règles des mathématiques authentiques, par

³³² Dummett en a donné un contre-exemple amusant dans *The philosophical basis of intuitionistic logic*. Il illustre ainsi le cas où la conclusion d'une inférence fait appel à une information extérieure aux prémisses (paramètre caché) qui est exprimable dans le langage-objet : supposons que Castro s'apprête à rencontrer Carter, on peut affirmer que le premier soit insultera le second soit lui parlera poliment. Cependant on est incapable de trancher car il nous manque une information supplémentaire qui est, dans l'exemple de Dummett, relative au lieu où la rencontre doit s'effectuer. Si Castro rencontre Carter à Cuba alors, pour des raisons de crédibilité interne et de rapport de force en sa faveur, Castro l'insultera. S'ils se rencontrent en dehors de Cuba, alors Castro parlera poliment à Carter. Michael **Dummett**, *The philosophical basis of intuitionistic logic*, *op. cit.*, p. 126-127.

exemple, la démonstration du théorème : (dans l'espace euclidien) la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.

Les axiomes de la géométrie euclidienne servent de prémisses (le raisonnement fait également appel à la connaissance dans l'intuition et sur le papier d'un triangle quelconque). Le pivot de la démonstration repose sur l'idée d'introduire une droite parallèle à une base du triangle passant par le sommet opposé : cela n'ajoute aucune information qui ne soit déjà contenue dans les prémisses puisque l'un des axiomes d'Euclide postule l'existence d'une unique parallèle à une droite quelconque donnée passant par un point quelconque donné situé hors de cette droite quelconque. Néanmoins, l'apparition de cette parallèle passant par ce point augmente la connaissance intuitionnelle du problème posé : cette nouvelle construction peut faire *voir* la solution.



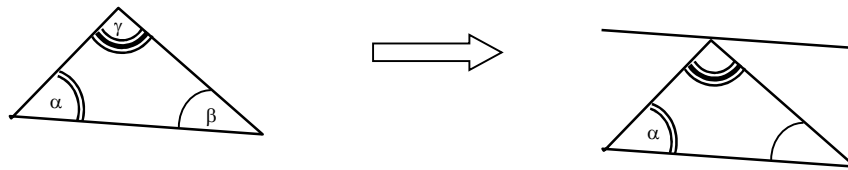
Quand on dit que l'inférence menant des prémisses à la conclusion contient elle-même une connaissance mathématique, cela doit être interprété en termes d'actes mathématiques. Aussi, nous ne devons pas nous en tenir au langage propositionnel car, justement, nous cherchons à mettre en évidence quel type de connaissance non exprimable en un tel langage est contenu dans une inférence menant d'une prémisses à une conclusion. Pour exprimer cette inférence, nous utilisons donc un langage phénoménologique. De manière un peu synthétique :

Les prémisses sont la connaissance des axiomes de la géométrie et d'un triangle quelconque [représenté par un dessin].

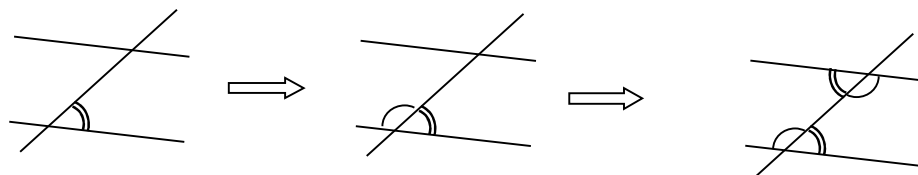
La conclusion est du type : si je trace la parallèle à l'un des sommets, les trois angles du triangle se retrouvent côte à côte pour former un angle plat.

Certes, l'inférence menant à l'objet preuve de la conclusion devrait être en réalité subdivisé en plusieurs inférences menant à des conclusions partielles données successivement dans le temps jusqu'à la conclusion finale. Par exemple, des intermédiaires pourraient s'exprimer ainsi : 1) si on trace une parallèle passant par le sommet γ , on peut appliquer les axiomes de la géométrie pour déduire les deux angles α et β entre les cotés et cette parallèle ; 2) les trois angles α , β et γ se trouvent côte à côte et s'additionnent pour donner l'angle plat.

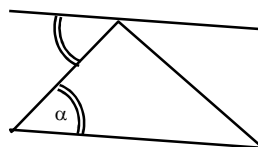
On peut subdiviser encore : 1') si on trace une parallèle passant par le sommet γ , et on regarde ce qui se passe du côté de α en appliquant les axiomes des parallèles et des angles complémentaires, on en déduit que l'angle α se retrouve aussi du côté de la parallèle, etc.



Or (selon les axiomes)



donc



On fait de même avec l'angle β , etc.

Prenons donc les prémisses de départ et la conclusion partielle 1') : si on trace une parallèle passant par le sommet γ , et on regarde ce qui se passe du côté de α en appliquant les axiomes des parallèles et des angles complémentaires, on en déduit que l'angle α se retrouve aussi du côté de la parallèle, etc.

Il est clair qu'entre les prémisses et cette conclusion, il y a quelque chose de nouveau qui ne s'exprime pas en langage propositionnel (sinon, on tombe sur le paradoxe d'une inférence authentiquement mathématique qui, traduite en langage logique à contenu mathématique, comporte un gap) mais qui *fait voir* le chemin vers la preuve : l'*idée* de tracer cette parallèle – acte mathématique cognitif qui n'ajoute rien en termes d'informations, car la possibilité de tracer cette parallèle est contenue dans les prémisses de départ, mais qui *trace* le chemin vers la conclusion de la démonstration. Selon l'épistémologie de Poincaré présentée par Detlefsen, l'acte qui permet de créer ce chemin a le statut d'une véritable connaissance mathématique qui ne se chiffre pas en informations exprimables en langage-objet propositionnel.

La connaissance mathématique englobe donc des phénomènes dynamiques (actes) de deux ordres :

1) la compréhension/jugement du sens des propositions,

2) l'acte de **voir le rôle, ou la position, que ces jugements jouent dans le sujet plus large auxquels ils appartiennent**, de sorte que l'on en vienne à connaître mathématiquement quelque chose du fait que l'on possède alors *une vision globale de la place de ce jugement au sein d'une entreprise épistémique plus large* (pour reprendre les expressions de Detlefsen-1990, p.214). Le fait de voir cela découle d'un

acte proprement mathématique, de nature locale au regard du problème posé (il faut que je trace cette parallèle particulière) descriptible uniquement en termes d'acte cognitif ou de savoirs-faire pratiques, mais qui n'ont pas d'image dans le langage propositionnel.

Selon Detlefsen (p.351-352) :

« Le fait d'adopter un tel point de vue concernant la place de l'inférence logique dans une preuve mathématique [i.e. la connaissance mathématique constituée par l'inférence mathématique est violée par l'utilisation d'inférences purement logiques dans le raisonnement mathématique] a de sérieuses conséquences, dont le "clash" avec le point de vue standard sur la rigueur est le plus évident et important. Un des triomphes les plus célébrés de la "logicisation" du raisonnement mathématique par Frege, Peano, Russell et Whitehead, a été le nouveau et apparemment incontournable standard de rigueur qu'elle apportait avec elle ; standard qui continue de guider le travail sur les fondements jusqu'à aujourd'hui. Dans cette approche, une preuve rigoureuse est celle pour laquelle toute information substantive (i.e., spécifique [à la matière mathématique particulière]) a été évacuée des inférences et des axiomes, pour être explicitement enregistrée dans les prémisses de la preuve dans laquelle elle est utilisée. Le résultat final – ou tel est, dans tous les cas, le vœu pieu – est un registre clair et précis des croyances sur lequel une conclusion donnée est basée.

Ce résultat est, toutefois, obtenu uniquement en réduisant toutes les inférences à des inférences logiques puisque ce sont seulement ces dernières qui, étant neutres [à la matière mathématique particulière], ne peuvent elles-mêmes contenir une quelconque information substantive (i.e., spécifique [à la matière mathématique

particulière]). *Les pas de taille logique ["logi-sized steps"] de l'inférence sont ainsi exactement ce que semble demander la rigueur, car c'est seulement en utilisant de tels pas que toute information substantive utilisée dans une preuve donnée est forcée d'être explicitement déclarée dans les prémisses.*

Cette conception traditionnelle de la rigueur dépend ainsi [du fait] qu'il y ait des formes globalement valides, neutres d'inférence [dans] lesquelles peuvent être moulées les inférences appartenant à un sujet donné. Sans cela, nous courons le risque [d'avoir] des informations non déclarées – et, partant, non reconnues – de contrebande dans nos preuves. Le Poincaréen³³³ est ainsi mis au défi de montrer comment la rigueur peut être obtenue quand les inférences logiques globalement valides, neutres, sont bannies et remplacées par les inférences localement valides, spécifiques du "mathématicien".

Sa réponse est aussi radicale que simple. La rigueur sera obtenue non par l'élimination des lacunes logiques ou informationnelles séparant les prémisses des conclusions (donc, l'élimination d'inférences substantives) mais, plutôt, par l'élimination des lacunes dans notre compréhension mathématique (donc, par l'élimination des inférences dans lesquelles la prémisse ne constitue pas une bonne raison mathématique pour la conclusion). Vue de cette manière, une inférence est rigoureuse si et seulement si, elle reflète une compréhension mathématique authentique ; et une telle vue est une véritable antithèse de la conception standard, car elle requiert de l'inférence qu'elle soit substantive plutôt que logique pour être rigoureuse. »

La suite de l'article de Detlefsen consistera à expliciter ce point de vue sur la rigueur mathématique basé sur le principe de localité et de

³³³ Néologisme de Detlefsen.

spécificité de l'inférence authentiquement mathématique.

L'auteur reprend, p.353, un extrait de Poincaré dans *La science et l'hypothèse* qu'il a déjà cité dans son article de 1990 (mais que nous n'avons pas reporté dans le chapitre précédent). Poincaré, p.31 :

« La possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble. Si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ? Si, au contraire, toutes les propositions qu'elle énonce peuvent découler les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie ? Le syllogisme ne peut rien nous apprendre d'essentiellement nouveau et, si tout devait sortir du principe d'identité, tout devrait aussi pouvoir s'y ramener. Admettra-t-on donc que les énoncés de tous ces théorèmes qui remplissent tant de volumes ne soient que des manières détournées de dire que A est A ? »

Pour Detlefsen, ce texte de Poincaré vise une conception ou épistémologie particulière, qui est celle du logicisme d'inspiration leibnizienne. Detlefsen présente ainsi (p.353) l'"insoluble contradiction" de la connaissance mathématique soulevée par Poincaré :

- (I) Les mathématiques sont parfaitement rigoureuses
- (II) Les théorèmes mathématiques ne sont pas de simples vérités logiques ou tautologies.

Ces affirmations sont contradictoires, écrit Detlefsen (p.353-355), *« seulement si (I) est considéré comme impliquant quelque chose*

qu'elles n'impliquent clairement pas, à savoir que les théorèmes des mathématiques sont tous des tautologies. En vérité, ce que (I) semble dire n'est pas que tous les théorèmes des mathématiques sont des vérités logiques, mais que toutes les inférences dans une preuve mathématique sont des inférences logiques. Alors, la seconde question que pose Poincaré dans la remarque ci-dessus (à savoir, "Si toutes les propositions qu'elle énonce peuvent découler les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie ?"), qui est supposée ne pas avoir (encore) de réponse, semblerait réellement en avoir une facile [qui serait] : "Parce que les axiomes par lesquels les déductions commencent ne sont eux-mêmes pas des vérités logiques". Cela ne semblerait néanmoins pas avoir la force que Poincaré souhaitait qu'elle ait.

L'"insoluble contradiction" de Poincaré est-elle basée sur une défaillance évidente à reconnaître ce point élémentaire ? Le paragraphe qui suit directement celui cité ci-dessus suggère que ce n'est pas le cas.

[Poincaré :] Sans doute, on peut remonter aux axiomes qui sont à la source de tous les raisonnements. Si on juge qu'on ne peut les réduire au principe de contradiction, si on ne veut pas non plus y voir des faits expérimentaux qui ne pourraient participer à la nécessité mathématique, on a encore la ressource de les classer parmi les jugements synthétiques a priori. Ce n'est pas résoudre la difficulté, c'est seulement la baptiser ; et **lors même que la nature des jugements synthétiques n'aurait plus pour nous de mystère, la contradiction ne se serait pas évanouie, elle n'aurait fait que reculer ; le raisonnement syllogistique reste incapable de rien ajouter aux données qu'on lui fournit ; ces données se**

réduisent à quelques axiomes et on ne devrait pas retrouver autre chose dans les conclusions.

Il était ainsi clair pour Poincaré que l'inférence allant du fait que les mathématiques sont parfaitement rigoureuses à l'assertion que les théorèmes mathématiques sont des tautologies peut être bloquée en adoptant la position, ouverte aux non-logicistes si ce n'est aux logicistes, que les axiomes ne sont pas des tautologies. Il n'empêche que, insiste-t-il, le problème qu'il a en tête n'est pas résolu par un tel [argument]. C'est parce que, explique-t-il, même si (contrairement au logicisme) il était garanti que les axiomes ne sont pas des vérités logiques, on ferait encore face au problème d'expliquer comment les théorèmes des mathématiques peuvent constituer une extension authentique des axiomes si les seuls principes d'inférence utilisés sont tels qu'ils ont un caractère purement logique. Le propos de Poincaré est alors que, si seules des inférences purement logiques sont utilisées dans une preuve, la connaissance du théorème prouvé ainsi acquise ne peut constituer l'extension d'une quelconque connaissance mathématique pouvant être représentée par la connaissance des axiomes utilisés pour le prouver. Mais, malgré cela, il pensait que les conclusions de preuves mathématiques représentent typiquement des extensions épistémiques de leurs prémisses. En conséquence, il a été conduit à conclure que les inférences appartenant à une preuve mathématique typique [i.e. authentique] ne peuvent pas toutes être d'un caractère purement logique.

Là où Poincaré voyait une authentique contradiction, donc, c'est entre les deux principes suivants :

(I') Toutes les inférences utilisées dans une preuve mathématique

sont d'un caractère purement logique.

(II') Les conclusions de preuves mathématiques peuvent, et c'est souvent le cas, constituer des extensions de la connaissance mathématique représentée par les prémisses.

Le conflit entre (I') et (II') donne lieu à un conflit similaire entre (I) et (II) seulement si (I) est considéré comme impliquant (I'). Cela, toutefois, Poincaré le refusait (cf. Poincaré 1908, ch.III), recommandant à la place une conception alternative de la rigueur mathématique selon laquelle elle consiste en l'absence de "sauts" dans la compréhension mathématique.

On n'a pas à avoir peur de perdre des éléments dans une inférence mathématique pourvu qu'on appréhende la raison mathématique derrière [cette inférence]. Le raisonnement mathématique peut ainsi procéder par pas plus-larges-que-de-taille-logique dans la mesure où la compréhension mathématique le permet.

[...] Selon Poincaré, la fausseté de (I') est évidente de par le fait que, si elle était vraie

[Poincaré, p.31] : "aucun théorème ne devrait être nouveau si dans sa démonstration n'intervenait un axiome nouveau ; le raisonnement ne pourrait nous rendre que les vérités immédiatement évidentes empruntées à l'intuition directe ; il ne serait plus qu'un intermédiaire parasite et dès lors n'aurait-on pas lieu de se demander si tout l'appareil syllogistique ne sert pas uniquement à dissimuler notre emprunt ?"

Puisque, toutefois, le raisonnement mathématique peut, et il le fait, apporter une nouvelle connaissance sans l'intervention de nouveaux axiomes, il s'ensuit que (I') est faux. [...]

[Poincaré, p.31] : "le raisonnement mathématique a par lui-même une sorte de vertu créatrice et par conséquent il se distingue du

syllogisme.” »

Détlefsen-1992, p.356 : « [Poincaré, dont le propos] *était en premier lieu de défier [...] non seulement le logicisme mais, surtout, la "logicisation" de la preuve mathématique [...] pensait qu'il y a plusieurs formes mathématiquement distinctes d'inférences, desquelles peut-être la plus claire et importante est l'induction mathématique.* »

La question du principe d'induction complète (que nous nommerons PIC) a fait, nous le savons, couler beaucoup d'encre, notamment entre Poincaré et Hilbert, par articles interposés. Dans les textes parus dans la *Revue de métaphysique et de morale* entre 1905 et 1906³³⁴ - *Les mathématiques et la logique* (1905) ; *Les mathématiques et la logique* - Les logiques nouvelles (1906) ; *Les mathématiques et la logique* - Les derniers efforts des logisticiens (1906) ; *A propos de la logistique* (1906) - Poincaré a critiqué les tentatives de Hilbert pour fonder ce principe sur des prémisses logiques (notamment dans Hilbert-1904 : *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, trad. *Sur les fondements de la logique et de l'arithmétique*). Poincaré a argumenté contre Hilbert en montrant que le raisonnement de celui-ci pour fonder formellement le PIC est circulaire et non prédicatif car il s'appuie sur l'intuition même de ce principe – ne faisant d'ailleurs pas la distinction entre le PIC et le principe d'induction intuitif.

Bien sûr, il nous faudrait exposer cette controverse de manière plus circonstanciée, mais cela alourdirait la thèse. Poursuivons donc seulement avec les extraits de Poincaré cités par Detlefsen (p.356).

³³⁴ Poincaré, 1905 : *Les mathématiques et la logique* ; 1906 : *Les mathématiques et la logique* (Les logiques nouvelles) ; 1906 : *Les mathématiques et la logique* (Les derniers efforts des logisticiens) ; 1906 : *A propos de la logistique*.

« [Poincaré] *croyait* [que le fait d'admettre la pluralité des formes d'inférences mathématiques] *est la clé pour répondre à l'observation kantienne concernant la "créativité" épistémique de la preuve mathématique. Ces vues l'ont amené dans un sévère conflit avec les logicistes, qui pensaient non seulement que la logicisation est nécessaire pour [obtenir] une forme optimale de rigueur, mais aussi que **la pensée rationnelle est essentiellement d'un caractère homogène et non modulaire (i.e. non local).***

[... p.358] *Les lois de base de la pensée identifiées par le logicisme, alors, doivent toutes être de ce caractère [pour pouvoir être] qualifiées de principes fondamentaux de la pensée rationnelle. [Au contraire] le point de vue de Poincaré était que la pensée mathématique possède ses propres principes de raisonnement distinctifs qui ne sont pas des principes fondamentaux de la pensée rationnelle per se mais, plutôt, des principes d'une logique plus localisée.* »

Poincaré revendique donc l'hétérogénéité-localité-modularité des connaissances et des raisonnements mathématiques, suivant le type de sujet traité, s'opposant ainsi à la conception logiciste d'une homogénéité-globalité de la pensée mathématique nécessairement soumise à une structure logique.

Remarquons que cette opposition hétérogénéité-localité-modularité des inférences mathématiques authentiques / homogénéité-globalité des inférences logiques à contenu mathématique permet d'éclairer l'évolution des concepts d'effectivité et de procédure effective entre sa version "naïve" pré-hilbertienne et sa version "réursive".

Considérons les procédures effectives dans la version naïve. La connaissance mise en jeu dans la recherche d'une procédure effective

respecte le présupposé d'hétérogénéité (et le principe de conservation épistémique) en restant liée à l'architecture particulière du mode mis en jeu dans le raisonnement : les savoirs-faire d'où découle une procédure effective sont soumis au même principe de conservation que les objets.

En ce qui concerne l'effectivité globale (en jeu dans les démonstrations), dans la version naïve ses principes semblent s'appliquer à tous les domaines des mathématiques : pas d'utilisation de notions mettant en jeu le transfini et pas d'utilisation de notions admises dans le fini (par exemple, le raisonnement par l'absurde) à des éléments transfinis ou du moins à des éléments considérés comme non existants. On pourrait dire que les contraintes d'effectivité globale sont "trans-modales".

De manière générale, dans la version naïve l'effectivité (effectivité globale + procédures effectives locales) est une notion épistémique "trans-modale" qui produit notamment un instrument/méthode de connaissance locale (la procédure effective) interne à l'architecture du sujet étudié.

Dans sa version récursive (après inversion des quantificateurs), les niveaux trans-modal et modal de l'effectivité sont fusionnés en une définition mathématique unique apte à produire de manière homogène toutes les procédures effectives possibles, qui donc ignorent ou sont insensibles aux particularités des architectures de chaque mode de connaissance mathématique. En d'autres termes, la transformation opérée dans les années 20 a *particularisé* le concept d'effectivité globale et *globalisé* celui de procédure effective locale, les réunissant sous une forme standard à toute la mathématique.

Pour en revenir à Poincaré, il y a donc chez lui, selon Detlefsen, l'idée que la pensée logique, homogène et globalisante, n'a pas le même mode

que la pensée mathématique (les pensées mathématiques), laquelle est hétérogène/modulaire s'exerçant localement. Detlefsen, p.360-361 :

« *La pierre angulaire [de la conception de Poincaré est] la division de la pensée rationnelle en **des domaines locaux hétérogènes irréductibles, chacun avec sa propre logique distinctive***³³⁵ [...]. **Cette hétérogénéité se situe, de plus, non seulement au niveau des axiomes ou des premières vérités de la pensée mathématique, mais aussi au niveau de l'inférence.** Ainsi, l'hétérogénéité poincaréenne est plus complète que celle consistant en ces "paquets" d'intuition utilisés pour sécuriser la connaissance des premières vérités ou axiomes d'un corps de pensée mathématique. Elle **reflète aussi bien l'utilisation de l'intuition dans l'inférence**, dont l'effet est d'induire une logique distincte dans un domaine local donné de pensée, et ainsi permettre au – en fait obliger le – raisonneur de procéder par des moyens autres que des pas d'inférence globalement valides.

[...] Mais si la pensée rationnelle est ainsi hétérogène, **qu'est-ce qui crée cette orientation locale** [propre à chaque domaine/mode] ? Une des choses que suggère Poincaré est le besoin que nous avons de **condenseurs épistémiques - c'est-à-dire, de dispositifs servant à abrégé nos raisonnements et nos calculs** (cf. Poincaré 1908, p.440) en empaquetant des séries complètes de ce qui pourrait être [un ensemble d'] inférences logiques dans l'espace d'une seule inférence (non logique), et nous déchargeant ainsi du fardeau de faire dépendre notre connaissance de l'achèvement d'un

³³⁵ Même si aujourd'hui la logique est vue comme un sous-domaine des mathématiques, ce propos demeure pertinent, à condition de le traduire ainsi : l'inférence logique est un des modes de la pensée mathématique. Cette inférence a pour caractère d'être – dans son domaine – globalisante. Le point essentiel étant de ne pas assimiler la logique ou la pensée rationnelle comme mode général de la pensée humaine, mais uniquement comme l'un de ses modes particuliers.

encombrant raisonnement logique non abrégé. Une telle condensation signifie - et rend même possible - une compréhension de l'"architecture" d'un sujet, ce que Poincaré considérait comme un ingrédient absolument indispensable de toute véritable compréhension scientifique d'un domaine donné de recherche »

Cette idée d'une hétérogénéité non seulement des objets mathématiques mais des inférences elles-mêmes, i.e. une pluralité de modes distincts, est certainement le point essentiel de la question. Cette particularité de l'inférence mathématique découlerait de l'orientation d'un domaine particulier imprimée par la présence d'un condenseur épistémique.

Pour expliciter ce concept de condenseur épistémique, Detlefsen renvoie à un extrait de Poincaré-1908. Mais nous allons d'abord citer *La science et l'hypothèse* (1902) – chapitres V et VI – où Poincaré esquisse déjà ce concept en prenant comme exemple de *type* d'inférence authentiquement mathématique irréductible à la logique le principe d'induction :

*« Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence c'est qu'**il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes.** Pour qu'on s'en puisse mieux rendre compte, je vais énoncer les uns après les autres ces syllogismes qui sont, si l'on veut me passer l'expression, disposés en cascade. Ce sont bien entendu des syllogismes hypothétiques.*

Le théorème est vrai du nombre 1.

Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2.

Donc il est vrai de 2.

Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3. Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite. On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineure au suivant.

De plus les majeures de tous nos syllogismes peuvent être ramenées à une formule unique.

Si le théorème est vrai de $n - 1$, il l'est de n .

On voit donc que, dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme, et la formule générale qui contient comme cas particuliers toutes les majeures. Cette suite de syllogismes qui ne finirait jamais se trouve ainsi réduite à une phrase de quelques lignes.

Il est facile maintenant de comprendre pourquoi toute conséquence particulière d'un théorème peut, comme je l'ai expliqué plus haut, être vérifiée par des procédés purement analytiques.

Si au lieu de montrer que notre théorème est vrai de tous les nombres, nous voulons seulement faire voir qu'il est vrai du nombre 6 par exemple, il nous suffira d'établir les 5 premiers syllogismes de notre cascade ; il nous en faudrait 9 si nous voulions démontrer le théorème pour le nombre 10 ; il nous en faudrait davantage encore pour un nombre plus grand ; mais quelque grand que soit ce nombre nous finirions toujours par l'atteindre, et la vérification analytique serait possible.

*Et cependant, quelque loin que nous allions ainsi, nous ne nous élèverions jamais jusqu'au théorème général, applicable à tous les nombres, qui seul peut être objet de science. **Pour y arriver, il faudrait une infinité de syllogismes, il faudrait franchir un abîme que la patience de l'analyste, réduit aux seules ressources de la logique formelle, ne parviendra jamais à***

comblé.

*Je demandais au début pourquoi on ne saurait concevoir un esprit assez puissant pour apercevoir d'un seul coup d'oeil l'ensemble des vérités mathématiques. La réponse est aisée maintenant ; un joueur d'échecs peut combiner quatre coups, cinq coups d'avance, mais, si extraordinaire qu'on le suppose, il n'en préparera jamais qu'un nombre fini ; s'il applique ses facultés à l'arithmétique, il ne pourra en apercevoir les vérités générales d'une seule intuition directe ; pour parvenir au plus petit théorème, il ne pourra s'affranchir de l'aide du raisonnement par récurrence parce que **c'est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini.***

*Cet instrument est toujours utile, puisque, **nous faisant franchir d'un bond autant d'étapes que nous le voulons**, il nous dispense de vérifications longues, fastidieuses et monotones qui deviendraient rapidement impraticables. Mais il devient indispensable dès qu'on vise au théorème général, dont la vérification analytique nous rapprocherait sans cesse, sans nous permettre de l'atteindre.*

Dans ce domaine de l'arithmétique, on peut se croire bien loin de l'analyse infinitésimale, et, cependant, nous venons de le voir, l'idée de l'infini mathématique joue déjà un rôle prépondérant, et sans elle il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général.

[Chp. VI] *Le jugement sur lequel repose le raisonnement par récurrence peut être mis sous d'autres formes ; on peut dire par exemple que dans une collection infinie de nombres entiers différents, il y en a toujours un qui est plus petit que tous les autres.*

On pourra passer facilement d'un énoncé à l'autre et se donner ainsi l'illusion qu'on a démontré la légitimité du raisonnement par récurrence. Mais on sera toujours arrêté, on arrivera toujours à un axiome indémontrable qui ne sera au fond que la proposition à

démontrer traduite dans un autre langage.

On ne peut donc se soustraire à cette conclusion que la règle du raisonnement par récurrence est irréductible au principe de contradiction.

Cette règle ne peut non plus nous venir de l'expérience ; ce que l'expérience pourrait nous apprendre, c'est que la règle est vraie pour les dix, pour les cent premiers nombres par exemple, elle ne peut atteindre la suite indéfinie des nombres, mais seulement une portion plus ou moins longue mais toujours limitée de cette suite.

Or, s'il ne s'agissait que de cela, le principe de contradiction suffirait, il nous permettrait toujours de développer autant de syllogismes que nous voudrions, c'est seulement quand il s'agit d'en enfermer une infinité dans une seule formule, c'est seulement devant l'infini que ce principe échoue, c'est également là que l'expérience devient impuissante. **Cette règle, inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique a priori.** On ne saurait d'autre part songer à y voir une convention, comme pour quelques-uns des postulats de la géométrie. Pourquoi donc ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience.

Mais, dira-t-on, si l'expérience brute ne peut légitimer le raisonnement par récurrence, en est-il de même de l'expérience aidée de l'induction ? Nous voyons successivement qu'un théorème est vrai du nombre 1, du nombre 2, du nombre 3 et ainsi de suite, la loi est manifeste, disons- nous, et elle l'est au même titre que toute

loi physique appuyée sur des observations dont le nombre est très grand, mais limité.

*On ne saurait méconnaître qu'il y a là une analogie frappante avec les procédés habituels de l'induction. Mais une différence essentielle subsiste. L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est en dehors de nous. **L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même.** »*

Venons-en maintenant à l'extrait de Poincaré donné par Detlefsen, tiré de *Science et méthode* (1908), Chapitre II, point 6. ⁽³³⁶⁾ :

« Notre corps est formé de cellules et les cellules d'atomes ; ces cellules et ces atomes sont-ils donc toute la réalité du corps humain ? La façon dont ces cellules sont agencées, et d'où résulte l'unité de l'individu, n'est-elle pas aussi une réalité et beaucoup plus intéressante ?

Un naturaliste qui n'aurait jamais étudié l'éléphant qu'au microscope croirait-il connaître suffisamment cet animal ?

Il en est de même en mathématiques. Quand le logicien aura décomposé chaque démonstration en une foule d'opérations élémentaires, toutes correctes, il ne possédera pas encore la réalité toute entière ; et je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration lui échappera complètement.

Dans les édifices élevés par nos maîtres, à quoi bon admirer l'oeuvre du maçon si nous ne pouvons comprendre le plan de

³³⁶ Nous utilisons comme ouvrage de référence, Poincaré, *Science et Méthode*, Editions Kimé, Paris, 1999, p.110-111.

I'architecte ? Or, cette vue d'ensemble, la logique pure ne peut nous la donner, c'est à l'intuition qu'il faut la demander. »

Detlefsen poursuit (p.361) :

« La condensation épistémique représentée par une inférence locale non logique donnée signifie non pas tant un gain en efficacité (bien que cela aussi pourrait faire partie de son importance) qu'**une compréhension de ce que le résultat ainsi inféré apporte à une entreprise plus large à laquelle le domaine local d'investigation donné appartient**. Ou, peut-être mieux, elle signifie une compréhension de **comment le mouvement des prémisses vers la conclusion contribue au "développement" de quelque thème architectural du sujet local**. En bref, elle marque la présence d'un "universel" de compréhension (i.e, ce que nous appelons un plan ou thème architectural du domaine local en question) dans les "différences" (i.e, les états de son développement signifiés par les prémisses et la conclusion, respectivement) à travers lesquelles [l'"universel"] persiste. »

Detlefsen passe ensuite à une description plus symbolique ou formelle de cette conception (p.361-362) :

« Vue de cette manière, une inférence mathématique **I** est composée de trois éléments : (i) un universel, $U_{I,T}$, qui exprime un thème architectural de la théorie locale **T** à laquelle il appartient, et qui sert de module de comparaison pour les prémisses et la conclusion de **I** ; (ii) un ensemble de prémisses, **p**, qui marque une certaine "position" ou "stade" $\sigma_{U(p)}$ dans le développement de $U_{I,T}$; et (iii) une conclusion, **c**, qui marque une position ou état "subséquent" du

développement $\sigma_{U(p)}$ de $U_{I,T}$. En conséquence, deux inférences **I** et **I'**, exprimées en termes de deux théories **T** et **T'**, sont les mêmes seulement quand $U_{I,T} = U_{I',T'}$, $\sigma_{U(p)} = \sigma_{U(p')}$ et $\sigma_{U(c)} = \sigma_{U(c')}$ [Note 27, p.376 insérée à la fin de cette phrase : « Cette conception de l'inférence traite l'universel $U_{I,T}$ au moins comme induisant (si ce n'est littéralement comme identique à) un ensemble Σ de "stades " ou "positions" de sa réalisation, associé à un ordre (ou un ordre partiel) O défini sur Σ . Ainsi, quand deux universels $U(=U_{I,T})$ et $U'(=U_{I',T'})$ sont identifiés, cela signifie (au moins) que $\Sigma = \Sigma'$ et $O = O'$. »]. Et les inférences mathématiques seront typiquement distinctes des inférences logiques, puisqu'elles seront basées sur différents types d'universels. **Ainsi, une théorie de l'inférence mathématique, si elle devait exister, consisterait en une spécification des différents universels ou architectures qui servent à organiser ou unifier la pensée mathématique et un exposé de la manière dont les universels de cette classe restreinte affectent les différences par lesquelles ils persistent. De même, une théorie de l'inférence logique [...] consisterait en une spécification d'une classe d'architectures cognitives qui appartient au raisonnement neutre, et un exposé sur la manière dont [ces architectures] affectent les différences par lesquelles elles persistent. »**

A la fin des termes « *Ainsi, une théorie de l'inférence mathématique, si elle devait exister* » Detlefsen renvoie à la notre 28 (p.376), où il fait le commentaire suivant :

« *Et, il n'est pas du tout clair qu'elle existe, puisque cela dépend du fait qu'il y ait quelque figure essentielle commune à toutes les architectures mathématiques. Il se pourrait qu'à la place [de cette figure commune] les diverses branches des mathématiques aient*

chacune une architecture distinctive propre, et que chacune donne lieu alors à sa propre théorie de l'inférence. Ceci n'est pas en désaccord avec ce que Poincaré dit sur le raisonnement mathématique puisque son propos est simplement que le mathématicien fait toujours usage de quelque connaissance ou "intuition" architecturale locale dans ses inférences, et non pas que celui-ci fait usage de la même [connaissance architecturale locale]. De ce point de vue, il faudrait compter sur quelque chose comme la notion de "famille de ressemblances" pour rendre compte de toute communauté qui pourrait être pensée comme unissant le raisonnement mathématique comme un tout, puisque il semble qu'on ait affaire à une similitude qui n'est pas métrisable³³⁷ (sous peine de ruiner les distinctions locales en question). » (Detlefsen, p.361-362)

Tout ce qui précède est riche en concepts et idées nouvelles que nous allons reprendre et expliquer.

Condenseurs épistémiques

Detlefsen attribue donc à Poincaré l'idée d'existence de ce qu'il nomme "condenseurs épistémiques", instruments cognitifs présents dans la pensée mathématique authentique qui serviraient à abréger nos raisonnements et calculs, rassemblant en une seule inférence mathématique un ensemble (fini ou infini – voir ci-dessus citation de Poincaré sur le principe d'induction) d'inférences logiques. Cette inférence mathématique unique permise par le condenseur n'est donc pas logique – puisque si elle l'était, on se retrouverait avec une inférence logique capable de remplacer un ensemble d'inférences logiques, ce qui contredit le caractère "atomique" de l'inférence logique.

³³⁷ Néologisme.

Signalons déjà qu'un tel postulat soulève quelque question. D'abord, dans le cas où le condenseur fusionnerait un nombre fini d'inférences logiques, l'inférence unique elle-même ne serait certes pas logique au sens d'"atomique" mais elle aurait le même caractère qu'une suite d'inférences logiques. Si l'on s'en tient à cette équivalence stricte (inférence mathématique = \sum_1^N inférences logiques), nous ne voyons pas comment la première pourrait se distinguer de la seconde au point de créer une séparation qualitative entre le raisonnement authentiquement mathématique et le raisonnement logique (à contenu mathématique) – ce qui est pourtant le propos même de l'analyse.

A moins d'évoquer un principe applicable au système cognitif du type "le tout est plus que la somme de ses parties", c'est-à-dire faire appel à une propriété cognitive "émergente" qui émanerait du groupe, la définition du condenseur épistémique comme simple rassemblement d'un nombre fini d'inférences logiques n'est pas suffisante ni satisfaisante. Car si, en effet, nous postulons que ce rassemblement change l'orientation et la nature du mode d'inférence – rendant celle-ci locale et sensible à la matière mathématique – cela ne fait que déplacer le problème puisqu'il faudrait expliquer comment cela se produit.

Bref, comment décrire en termes cognitifs qu'une fusion d'actes d'inférences logiques (à supposer qu'on sache définir ce que "fusion" signifie) puisse conduire à un acte d'inférence mathématique dont les caractéristiques cognitives sont qualitativement distinctes (voire incompatibles) de celles des inférences logiques qui la constituent ?

Et si le condenseur épistémique remplaçait une infinité d'inférences logiques par une seule inférence mathématique, comme le prétend Poincaré concernant le principe d'induction ? L'évocation de l'infini ouvre quelque liberté à l'analyse du phénomène – à condition d'expliquer

comment et avec quels outils conceptuels on peut décrire des phénomènes cognitifs soumis à une algèbre infinitiste. Il nous semble que quand Poincaré évoque l'idée d'une inférence mathématique émergeant de la condensation d'une infinité d'inférences logiques, il s'appuie implicitement sur une analogie mathématique qu'il exporte à la sphère cognitive. De fait, la différence qualitative entre l'acte d'inférence authentiquement mathématique (local, sensible au sujet, etc.) et l'acte d'inférence logique (global, aveugle, etc.) serait ainsi un analogue du "passage à la limite" (considéré du point de vue de l'infini actuel) où, par exemple, la somme infinie de nombres *rationnels* $\sum_{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est le nombre *irrationnel* $\ln 2$. Ici, effectivement, on voit surgir une propriété qualitativement distincte : l'irrationalité du résultat émerge de la nature infinie actuelle des opérations³³⁸ et non des propriétés des objets opérés... Mais ce n'est là qu'une analogie n'ayant pas de valeur démonstrative puisque un raisonnement sur la nature du raisonnement mathématique n'a pas à suivre *a priori* une théorie mathématique – il n'appartient qu'à la sphère cognitive.

Donc, en quoi le fait de "condenser" des actes d'inférence logique – globaux, aveugles, neutres – peut-il expliquer l'apparition d'un type d'acte qualitativement distinct car dépendant de la matière mathématique au point d'en épouser l'orientation et/ou de la lui donner ?

Pour défendre le point de vue de Detlefsen-Poincaré, nous pourrions peut-être nous reporter à la physique : sans aller jusqu'à dire que les phénomènes cognitifs sont directement exprimables en termes de lois

³³⁸ Cela ne fonctionne pas si l'on s'en tient au point de vue infini potentiel, car il ne s'agit plus d'une égalité mathématique mais d'une convention mathématique de la notation $\sum_{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ signifiant qu'on s'approche autant qu'on veut de cette valeur, mais sans l'égaliser véritablement.

physiques, il suffit de rappeler le présupposé philosophique minimal des sciences cognitives à savoir que le fonctionnement de l'appareil cognitif a des soubassements physiques. Alors, le raisonnement mathématique, pris au sens phénoménologique cognitif, serait le siège de phénomènes émergents (sur la base d'une collection finie ou infinie) d'actes logiques, comme par exemple de pouvoir attribuer un sens robuste et authentiquement mathématique (mais non exprimable à l'aide d'inférences logiques) à une inférence menant du mode infini potentiel au mode actuel, ou du mode fini particulier (ensemble fini de nombres) au mode infini potentiel général. Comme l'exprimait Poincaré dans la citation ci-dessus, la connaissance du particulier (transport d'une propriété d'un nombre donné à un autre) ne peut aboutir à une connaissance générale (transport d'une propriété sur tous les nombres *via* le principe d'induction) à l'aide d'inférences logiques : de la connaissance "je sais par expérience que cette propriété se conserve d'un nombre donné A à un nombre donné B, et ce, pour *beaucoup* de nombres A et B" à la connaissance "je sais grâce au principe d'induction que la propriété se conserve pour *tous* les nombres", il y a une inférence authentiquement mathématique qui n'est ni descriptible en langage-objet mathématique ni exprimable en un autre langage que phénoménologique.

L'idée qui émerge de cette conception de l'orientation locale de la pensée mathématique du fait de la présence de condenseurs épistémiques n'est pas sans rappeler certains processus physiques bien connus en cristallographie (ou en ferromagnétisme)³³⁹ : au démarrage du processus de cristallisation d'un solide amorphe ou d'un liquide, des germes cristallins orientés aléatoirement impriment des orientations locales à la dynamique globale de cristallisation... Cette analogie physique/cognitive rend quelque peu suspect – car susceptible de raccourci abusif – le concept de condenseur épistémique.

³³⁹ Domaines de Weiss

En fin de compte, tout cela est spéculatif et, surtout, très vague... Pour pouvoir affirmer l'existence et l'action de ces condenseurs épistémiques tels qu'ils ont été décrits, il faudrait développer une théorie cognitive robuste qui manque encore – et qui n'est pas le propos de cette thèse. Bref, la nature cognitive des supposés "condenseurs épistémiques" est absolument inconnue – ou du moins ne trouve aucune explication dans l'argumentaire développé par Detlefsen-Poincaré. Faut-il rejeter alors ces conceptions ?

Pas nécessairement, car si l'on évacue l'idée qu'il y a des actes cognitifs mathématiques d'inférence qui *condensent* des actes cognitifs logiques d'inférence, on peut postuler plus simplement qu'il existe non pas des condenseurs mais des "opérateurs" cognitifs propres à la pensée mathématique authentique, capables de conduire à un type de sentiment d'évidence qui n'émergerait pas d'une (ou plusieurs) inférences logiques à contenu mathématique. Nous pouvons aussi garder l'idée que ces opérateurs servent de raccourcis à la pensée, mais dans un sens bien déterminé : non pas en tant qu'ils condensent un certain nombre d'inférences logiques en une seule inférence non logique, mais en tant qu'ils orientent la pensée mathématique vers l'un des accomplissements que la pensée logique rend certes possible en termes de contenu propositionnel mais pas davantage que d'autres possibilités d'accomplissement sur lesquelles ce même contenu propositionnel ouvre.

In fine, ces opérateurs épistémiques, que Detlefsen nomme "universels de compréhension" ont deux propriétés : l'une de permettre des inférences non logiques, l'autre d'orienter le raisonnement mathématique dans une certaine voie parmi toutes celles dessinées par une arborescence logique.

Analysons donc la description de ces universels de compréhension.

Universels de compréhension

Detlefsen écrit (p.361-362) :

« Vue de cette manière, une inférence mathématique **I** est composée de trois éléments : (i) un universel, $U_{I,T}$, qui exprime un thème architectural de la théorie locale **T** à laquelle il appartient, et qui sert de module de comparaison pour les prémisses et la conclusion de **I** ; (ii) un ensemble de prémisses, **p**, qui marque une certaine "position" ou "stade" $\sigma_{U(p)}$ dans le développement de $U_{I,T}$; et (iii) une conclusion, **c**, qui marque une position ou état "subséquent" du développement $\sigma_{U(p)}$ de $U_{I,T}$. En conséquence, deux inférences **I** et **I'**, exprimées en termes de deux théories **T** et **T'**, sont les mêmes seulement quand $U_{I,T} = U_{I',T'}$, $\sigma_{U(p)} = \sigma_{U(p')}$ et $\sigma_{U(c)} = \sigma_{U(c')}$ [Note 27, p.376 insérée à la fin de cette phrase : « Cette conception de l'inférence traite l'universel $U_{I,T}$ au moins comme induisant (si ce n'est littéralement comme identique à) un ensemble Σ de "stades" ou "positions" de sa réalisation, associé à un ordre (ou un ordre partiel) O défini sur Σ . Ainsi, quand deux universels $U(=U_{I,T})$ et $U'(=U_{I',T'})$ sont identifiés, cela signifie (au moins) que $\Sigma = \Sigma'$ et $O = O'$. » fin de la Note 27]. Et les inférences mathématiques seront typiquement distinctes des inférences logiques, puisqu'elles seront basées sur différents types d'universels. Ainsi, une théorie de l'inférence mathématique, si elle devait exister, consisterait en une spécification des différents universels ou architectures qui servent à organiser ou unifier la pensée mathématique et un exposé de la manière dont les universels de cette classe restreinte affectent les différences par lesquelles ils persistent. De même, une théorie de l'inférence logique (en supposant qu'il y ait une raison pour considérer une telle

catégorie d'inférences) consisterait en une spécification d'une classe d'architectures cognitives qui appartient au raisonnement neutre, et un exposé sur la manière dont [ces architectures] affectent les différences par lesquelles elles persistent. »

Soit I une inférence authentiquement mathématique.

Soient P et C , les prémisses et la conclusion de l'inférence I .

Soit $U_{I,T}$ l'opérateur épistémique : $U_{I,T}$ oriente I selon le thème architectural du domaine local T (nous dirons : thème modal).

Selon Detlefsen, le thème modal T peut contenir plusieurs opérateurs épistémiques, dont U en est un particulier. Ainsi, même si T est qualifié de local (au regard de la conception logiciste), on peut se positionner à l'échelle d'un mode et considérer que U a un caractère local par rapport au thème modal, qui est donc général au regard de U .

Detlefsen considère alors que l'inférence locale I de P à C est orientée par l'opérateur $U_{I,T}$ selon le thème modal général. Il considère également que l'acte d'inférence alimente le développement de U : U évolue donc chaque fois qu'il est appliqué à une inférence, ce qui présuppose également que T (l'architecture globale du mode) se modifie à chaque inférence (voir ci-dessous). Qu'est-ce qui modifie l'état de développement de U ? L'aboutissement de l'inférence, c'est-à-dire l'obtention de C .

Durant le processus d'inférence I , nous voyons U comme, d'une part, soumis à un champ de force global T , d'autre part, ancré dans la matière mathématique au point particulier formé des prémisses.

Nous pourrions décrire le processus ainsi :

On suppose qu'il existe déjà un thème modal T et un universel de

compréhension U de ce thème.

On suppose également que ni U ni T n'ont un caractère prédéfini : cela correspond à un principe d'indétermination et de libre création mathématiques. Ce qui implique que U et T se modifient au cours du temps en fonction des connaissances acquises, c'est-à-dire de l'accomplissement des preuves (i.e. des inférences), *via* le contenu de l'acte, accomplissement mû par une intentionnalité mathématique.

Alors,

1) L'inférence I-matière est influencée par l'état de développement local σ de U, lequel U reflète à son échelle le thème global de l'architecture T-champ, ce qui implique également que la conclusion C-matière de l'inférence est orientée par l'état local de U (avant inférence) $\sigma_U(P)$ qui reflète le thème global de l'architecture T-champ.

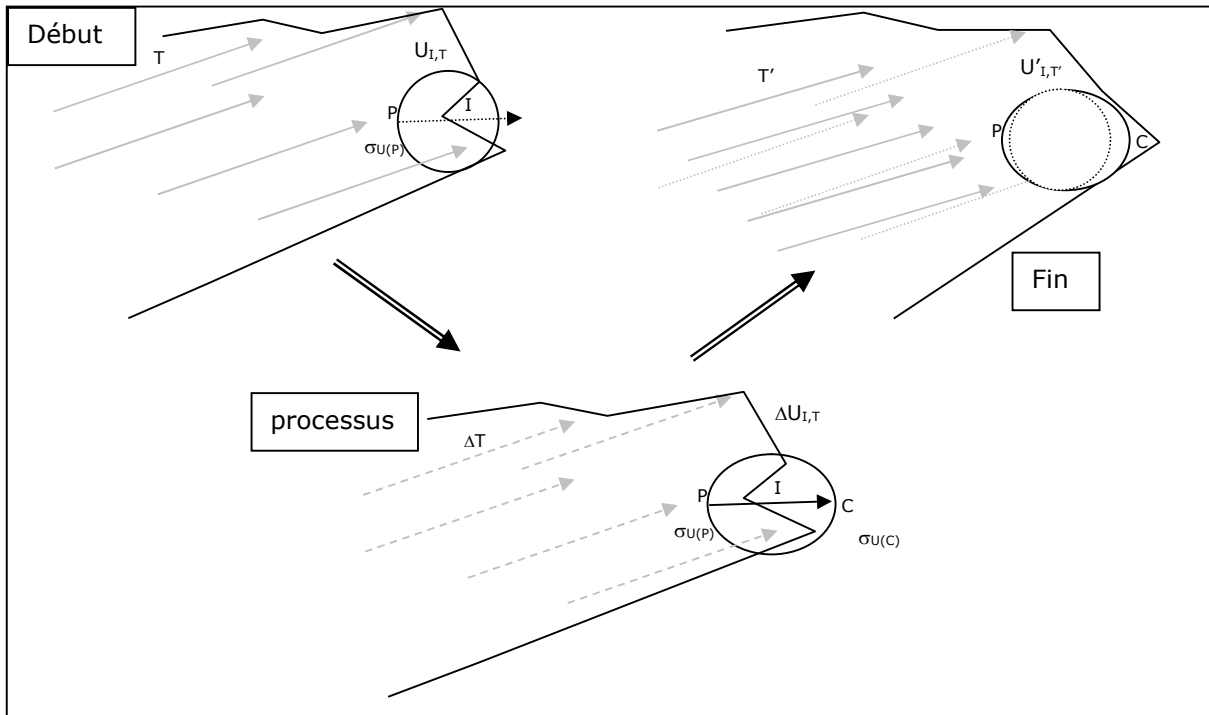
2) Une fois l'inférence accomplie, c'est-à-dire la conclusion C-matière obtenue, le développement $\sigma_U(C)$ de la compréhension a augmenté : $\sigma_U(C) - \sigma_U(P) > 0$.

3) Ce gain de développement de la compréhension locale se traduit par une croissance de U, ce qui nécessairement entraîne une modification de l'architecture globale du thème modal T-champ (si l'architecture ne se modifiait pas, la création mathématique serait alors prédéterminée).

Ce processus avec feedback ressemble, comme nous l'avons déjà signalé, à des processus physiques de type orientation individuelle d'un spin d'un domaine de Weiss d'un matériau ferromagnétique sous l'influence du champ global engendré par l'ensemble des spins de ce domaine. C'est pourquoi nous devons faire particulièrement attention avec ce type d'analogie. En toute logique, il faudrait sortir de la métaphore mécanique-physique pour décrire le processus avec les outils conceptuels

du cognitivisme. Mais nous nous en tiendrons là dans le présent travail. Aussi, nous allons illustrer ce processus par le schéma (naïf) suivant :

Schéma 2



Il est important de souligner qu'il n'y a pas de prédétermination du sens de l'inférence en fonction de l'orientation générale du thème (ce qui est représenté par un non parallélisme entre la flèche de l'inférence I et les flèches du thème T). Si l'inférence est orientée par l'universel de compréhension lui-même soumis à l'orientation de l'architecture globale du domaine, cette inférence vise l'accomplissement d'un nouvel objet de connaissance indéterminé à l'avance et qui donc peut modifier l'orientation globale. Ce qui pose une question : qu'est-ce qui détermine le choix d'une

orientation particulière de l'inférence ? Nous pensons que cela fait intervenir le concept plus général d'intentionnalité mathématique (moteur de toutes les inférences de tous les domaines) d'une "vie mathématique abondante" que nous ne savons ni définir ni caractériser...

Résumons :

- Chaque domaine modal de connaissance mathématique possède des opérateurs épistémiques produisant des inférences locales non logiques. Quand elles s'accomplissent en une nouvelle preuve-objet de connaissance, ces inférences, orientées par un de ces opérateurs liés à l'architecture générale du domaine, contribuent en retour à la compréhension du thème architectural du domaine modal et cette modification de la compréhension s'exprime par une ré-orientation de l'architecture du domaine³⁴⁰.

- Les domaines locaux de connaissance mathématique ne possèdent pas des architectures définies à l'avance par les universels. La conception déterministe va à l'encontre d'une des idées fondamentales de l'intuitionnisme qui est que la création mathématique est libre et indéterminée. Il faut plutôt envisager l'extension d'un domaine local de connaissances mathématiques comme résultant des influences réciproques entre la dynamique "globale" de développement orienté de

³⁴⁰ Nous nous risquons à avancer une interprétation selon une grille de lecture "évolutionniste" des condenseurs épistémiques. La spécialisation des domaines cognitifs (par création de condenseurs épistémiques), qui les rend inaptes à traiter tout type de tâches, serait une conséquence de la manière dont tout notre appareil cognitif s'est structuré, dans une logique de la performance du point de vue adaptatif. Un tel système serait donc plus performant qu'un système non spécialisé pouvant traiter globalement toutes les tâches qui se présentent. Il faut donc croire qu'à temps de réponse égal, l'effort cognitif total fourni (l'énergie cognitive totale consommée) par un système à spécialisations locales est inférieur à celui fourni par un système global non-spécialisé.

l'architecture elle-même et les contraintes imposées au niveau des inférences : l'orientation du développement de l'architecture est tributaire des inférences qu'elle produit mais ces dernières dépendent de l'orientation générale de l'architecture.

In fine, l'orientation du développement d'un domaine local de connaissance mathématique est influencée par notre compréhension intuitionnelle globale du sujet considéré (à un moment donné) mais cette compréhension se modifie à mesure et sous l'effet des développements ponctuels du domaine.

Néanmoins, selon Detlefsen (p.362), il nous est possible d'accéder intuitionnellement aux universels (de compréhension) des architectures, universels qui représentent aussi bien une sorte de "paramètre topologique" qu'un opérateur sur la topologie de chaque domaine particulier de connaissance mathématique, laquelle topologie est donc variable. Nous nous servons du terme "topologique" pour signifier que l'intuition des universels est une intuition du "champs de contraintes" cognitives dans lequel se développe l'architecture du domaine.

(p.362) « *une théorie de l'inférence mathématique [...] consisterait en une spécification des différents universels ou architectures qui servent à organiser ou unifier la pensée mathématique et un exposé de la manière dont les universels de cette classe restreinte affectent les différences par lesquelles ils persistent.* » (Detlefsen)

L'analyse du texte de Detlefsen touche à sa fin, car nous y avons exposé l'essentiel de sa thèse, que nous prolongerons à notre manière dans la partie III – Conclusion. Résumons néanmoins la suite du texte.

Qu'entend-t-on par "développement" d'une architecture ? On entend *"le prolongement potentiel de la pensée qui présuppose un but et une notion de ce qu'il faut pour que ce but puisse être approché"* (ibid.). Il est essentiel, pour la suite de notre propos, de comprendre en quoi le développement d'un domaine mathématique local est soumis à un champ (non prédéterminant) de contraintes "topologiques" locales qui s'exerce sur la connaissance mais ne la détermine pas.

Nous avons vu que l'extension de la connaissance mathématique dans un domaine local est :

i) liée à une compréhension intuitionnelle de la contribution des inférences au développement orienté de l'architecture,

ii) cette compréhension dépend à son tour d'une compréhension intuitionnelle de l'orientation dans laquelle se fait le développement de l'architecture.

Ainsi, si la compréhension intuitionnelle de l'orientation de l'architecture impose une contrainte "globale"³⁴¹ sur l'acte de preuve, la compréhension intuitionnelle de la contribution d'une inférence mathématique impose une contrainte locale qui influence le cheminement du raisonnement vers la conclusion de la preuve, dans le respect de l'orientation globale.

Analysons plus précisément le sens de i) et ii).

i) Detlefsen explique la compréhension intuitionnelle de la

³⁴¹ Il s'agit d'une globalité circonscrite au domaine modal. A ne pas confondre avec la globalité du raisonnement logique (à contenu mathématique) qui est trans-modale.

contribution d'une inférence au développement orienté de l'architecture par la capacité de l'inférence (ou par notre capacité dans l'inférence) à "*mettre ensemble*" les prémisses et la conclusion "*de manière à voir le mouvement du premier au second comme un "développement" d'une architecture*" (p.363). C'est la raison d'être du principe de conservation du mode cognitif de connaissance, car en effet "*avant qu'une inférence de p à q puisse être considérée comme véritablement mathématique, elle doit d'abord être intégrée à ou insérée dans ["fitted into"] une architecture mathématique*" (ibid.), ce qui nous ramène au ii).

ii) Concernant la compréhension intuitionnelle de l'orientation dans laquelle se fait le développement d'une architecture, celle-ci est, non seulement la "*capacité de dire d'une preuve donnée [...] si elle contribue ou pas au développement du champ en question*", mais aussi - et surtout - un guide "*dans la découverte de preuves qui contribuent au développement du champ*" (p.364). Detlefsen compare les mathématiques à un jeu stratégique. La compréhension intuitionnelle de l'orientation du développement d'une architecture peut être rapprochée à la connaissance d'une stratégie de jeu, caractérisée par : 1) la possession d'un but (sans la connaissance totale de la manière de l'atteindre) ; 2) la capacité de juger si une activité probatoire en cours est en conformité avec le but ; 3) la capacité de découvrir des activités-preuves particulières en conformité avec le but (ibid.).

Mais à la différence du jeu, la mathématique trouve son essence et son sens dans la stratégie elle-même : faire des mathématiques c'est trouver les moyens en termes d'activités-preuves d'atteindre des buts locaux (qui se renouvellent) dans une intention constante de développement orienté de l'architecture. Comme l'exprime Detlefsen "*ne pas se servir d'une stratégie mathématique (i.e., une stratégie qui incarne*

["embodies"] un insight mathématique authentique [...] c'est simplement ne pas réussir du tout à faire des mathématiques" (p.365).

Ainsi, sans la connaissance intuitionnelle de l'architecture mathématique, i.e sans une connaissance intuitionnelle de la stratégie, il ne peut y avoir d'extension de la connaissance, car c'est la connaissance de l'architecture qui permet de lier *"ensemble les prémisses et la conclusion d'une inférence dans une sorte d'"unité" qui est nécessaire pour en faire une inférence plutôt qu'une simple séquence de propositions ou jugements"* (p.365). En effet, une proposition ne devient une inférence que si elle est actuellement attachée ou liée à une intentionnalité stratégique qui est donnée par (la connaissance du sens de développement de) l'architecture.

L'essence de la connaissance mathématique c'est la compréhension intuitionnelle du **lien-intentionnel-en-train-de-se-faire** entre l'inférence et l'architecture, et non pas la connaissance que ce lien a existé ou peut exister dans l'esprit à un moment donné (ce qui est le rôle de la logique). Nous en arrivons ainsi à notre Conclusion.

Partie III

COMMENT PENSER L'EFFECTIVITE

Jusqu'ici nous avons abordé certains thèmes et ouvert quelques clairières dans le terrain, relativement vierge, de l'analyse phénoménologique de l'effectivité au sens pré-formel. L'idée a été surtout d'établir une base historique et méthodologique pour un programme d'étude plus vaste qu'idéalement nous voudrions poursuivre après la thèse.

Nous y avons abordé notre objet, l'effectivité, sous les angles historique et épistémologique, le premier servant à isoler des problématiques concrètes sur l'utilisation de la notion, que nous avons ensuite soumis à des outils d'analyse épistémologiques inspirés d'auteurs contemporains. Néanmoins, pour achever ce travail, il nous manque une synthèse.

Comme nous l'avons dit au chapitre sur *l'assertabilité* (Partie II - .2-II), l'orientation résolument épistémique de notre analyse entraîne une perte en "pureté" des méthodes, mais rend néanmoins saisissables certaines conséquences de la formalisation de l'effectivité achevée par la thèse de Church-Turing. Concrètement, nous avons séparé la conception formalisante et "internaliste" de l'émergence de la notion d'effectivité de son aspect phénoménologique (phénomène de pensée non formelle), et avons montré qu'il n'est pas illégitime de se placer dans le champ

épistémique pour étudier ce phénomène conceptuel et historique. Nous allons tenter ici de caractériser davantage ce "lieu" et le type d'analyse qu'il rend possible et, enfin, finir de délimiter les contours de la notion : c'est l'objet du chapitre .2 de la présente Conclusion, *Comment penser l'effectivité*.

Toutefois l'étude historique de la notion, abordée en première partie, s'est arrêtée au tournant du XIXe et XXe siècles, ne donnant pas les clés de l'évolution de la pensée de Borel dans les années qui ont suivi la rédaction de ses *Leçons*. La conséquence en est une image quelque peu figée et "primitive" de la pensée de Borel sur cette notion qui ne rend pas justice à ce grand mathématicien dont les conceptions ont connu de grandes évolutions et affinages, surtout à partir des années 1904 et 1905 autour des discussions sur la fonction de choix de Zermelo (premier énoncé, 1904) et sur le paradoxe de Richard (1905). Il nous semble surtout que sans la poursuite de cette étude historique nous ne pouvons pas éclairer rigoureusement la conviction, qui traverse tout notre travail que le chemin suivi par la transformation de la notion d'effectivité jusqu'à Church, Kleene et Turing ne relève d'aucun déterminisme *interne* aux mathématiques (du type " le concept de machine était déjà présente d'une certaine manière dans la notion primitive de l'effectivité"). Peut-être que l'évolution de la pensée de Borel sur l'effectivité nous permettrait de prouver que l'histoire de la notion aurait pu être autre, et nous serions alors à même de jauger toute l'importance des choix arbitraires, c'est-à-dire libres, ayant conduit les "pères fondateurs" de la théorie de la calculabilité à inventer cette nouvelle discipline mathématique dont les répercussions techniques, philosophiques et culturelles ont orienté la pensée et les sociétés modernes.

Toutefois une telle analyse, qui devrait s'étendre sur une période

allant de 1899 à 1905 voire au-delà³⁴², serait nécessairement longue, et puisqu'une thèse doit avoir une fin, nous nous sommes contentés de renvoyer en annexe l'esquisse de cette analyse manquante, afin de baliser le terrain pour un travail ultérieur. Cette esquisse d'une cinquantaine de pages, accompagnant la thèse brochée, est intitulée *Borel : La montée vers l'effectivité 1898-1905*.

Nous avons dit précédemment que l'effectivité apparaît comme un outil particulier de contrôle sur les actes mathématiques *au sein* d'une pratique globalement libre, i.e. mettant en jeu des axiomes, des objets mathématiques non constructifs, des inférences logiques à contenu, etc. : un processus effectif serait un fragment de "mathématique authentique" – au sens donné par Detlefsen de respect du *principe de conservation épistémique*. Par exemple, dans la démonstration du théorème fondamental de Borel de 1895, le caractère effectif de la méthode de construction d'un intervalle quelconque donné ne se révèle que par contraste avec le reste de la démonstration (et davantage encore en contraste avec la démonstration de 1898). Ainsi, au sein d'une démonstration mathématique, un processus effectif est vécu comme une *garantie supplémentaire* de la validité de la démonstration (ou d'un fragment de celle-ci) qui mobiliserait certains *savoir-faire particulièrement robustes*, ce aussi bien à l'échelle de l'inférence qu'à celle de l'objet global de connaissance à construire (ici, la suite finie)... Mais qu'entend-t-on par mobiliser des savoir-faire particulièrement robustes qui "sur-garantissent"

³⁴² Il nous semble que 1908 serait une date plus appropriée car elle marque l'entrée dans le langage mathématique du concept borélien d'ensemble effectivement énumérable, premier objet mathématique clairement défini à l'aide du concept d'effectivité, point d'aboutissement de la réflexion de Borel sur ce sujet.

la validité de la démonstration" ? C'est ce que nous allons tenter de clarifier.

Tant que nous nous référons à l'effectivité au sens naïf non formel, et donc que nous nous interdisons l'allusion à la machine de Turing, la métaphore "artisanale" (outil, robustesse, savoir-faire, etc.) semble bien adaptée pour capter la particularité de l'effectif au regard de l'autre pratique démonstrative, celle menée par inférences logiques à contenu mathématique. Poincaré déjà ne parlait-il pas de maçonnerie et d'architecture pour les comparer ? Citons-le à nouveau (voir Partie II .2 – IV – 4°)³⁴³ :

« Quand le logicien aura décomposé chaque démonstration en une foule d'opérations élémentaires, toutes correctes, il ne possédera pas encore la réalité toute entière ; et je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration lui échappera complètement.

Dans les édifices élevés par nos maîtres, à quoi bon admirer l'oeuvre du maçon si nous ne pouvons comprendre le plan de l'architecte ? Or, cette vue d'ensemble, la logique pure ne peut nous la donner, c'est à l'intuition qu'il faut la demander. »

Comme nous l'avons vu également, Detlefsen a repris cette image pour définir à travers de Poincaré sa propre conception des mathématiques : les "architectures de Poincaré"³⁴⁴. Selon sa métaphore, l'inférence logique à contenu mathématique serait associée au maçon – supposé appliquer des procédures standards locales quel que soit l'édifice à construire – tandis que l'inférence "authentique" serait associée à

³⁴³ Poincaré, *Science et Méthode*, Editions Kimé, Paris, 1999. La citation appartient au chapitre II, point 6, p.110-111

³⁴⁴ Voir Partie II - .2 – IV – 4°

l'architecte – supposé accomplir son geste local dans une vision globale de l'édifice à construire. Ainsi, l'architecte-mathématicien intégrerait localement l'orientation globale de l'architecture du mode auquel appartient l'inférence, tandis que le maçon-mathématicien serait aveugle à cette orientation et ne "verrait" que les correspondances à l'échelle *atomique* sur laquelle il agit... Le maçon serait *in fine* le pendant non formel de la machine de Turing.

Mais justement, hors de la métaphore mécanique il est possible de donner à la pratique mathématique par inférence logique une interprétation plus large, en disant que le maçon, à l'instar de l'architecte, jouit d'une intention globale qui oriente ses actes locaux vers l'accomplissement de l'objet désiré... seulement, cette intention n'est pas la même que celle de l'architecte. *In fine*, si le couple *inférence locale/intention globale* est séparable grâce au concept de machine de Turing, il nous semble, et ce sera l'objet de ce chapitre, que toute pratique mathématique humaine, qu'elle se fasse par inférence logique à contenu ou par inférence authentique c'est-à-dire effective, intègre ce double point de vue local-global. Ce qui les différencierait, en revanche, c'est la nature des contraintes épistémiques (globale et locales) qui s'exercent sur chacune des deux pratiques.

Pour justifier cela, il nous faut définir ce que nous entendons par gestes et savoir-faire (du maçon et de l'architecte) dans la pratique mathématique.

.1 – GESTES AUTHENTIQUES

Dans notre exposé de la théorie de l'acte cognitif, nous avons amplement utilisé la terminologie artisanale... Qu'est-ce qui nous autorise à parler des mathématiques comme une affaire de *savoir-faire* plutôt que de *savoirs* ? Nous allons interroger certains philosophes sur la question, ce qui nous permettra de mieux distinguer la pratique authentique-effective de la pratique logique à contenu mathématique. De fait, Jean Cavailles et Gilles Chatelêt nous fourniront une réponse qui nous conduira vers notre conclusion. Mais avant, Maurice Caveing nous éclairera sur la nature des objets mathématiques, que nous n'avons pas caractérisé, et sur le concept de "champ thématique", inventé par Cavailles, auquel nous serons confrontés dans l'analyse de ses écrits.

I- Les objets dans la pensée mathématique – Maurice Caveing

Dans son livre *Le problème des objets dans la pensée mathématique*³⁴⁵, Maurice Caveing, à la suite de Desanti, aborde l'ensemble des concepts issus de l'hypothèse de l'acte mathématique sous l'éclairage de la phénoménologie de Husserl, mais qu'il dépouille du concept central chez Husserl du sujet ou de la conscience transcendantale.

³⁴⁵ **Caveing**, *Le problème des objets dans la pensée mathématique*, Vrin, coll. *Problèmes & Controverses*, 2000.

Dans la section *De la vertu cognitive des la réeffectuation* du Chapitre I, Caveing écrit (p.29-33) :

« Au lieu d'opposer l'attitude opératoire et l'attitude contemplative, mieux vaut se demander quels rapports se nouent entre la nécessité d'opérer et la connaissance, c'est-à-dire la connaissance des propriétés de l'objet sur lequel ou en relation avec lequel on opère. **En effet si l'effectuation de la procédure opératoire est seule à procurer la connaissance des propriétés de l'objet, alors on admettra qu'on ne puisse se saisir du sens d'une détermination en tant qu'elle est propriété d'un objet qu'en réeffectuant pour soi-même les gestes par lesquels le mathématicien y a accédé.**

[...] **L'acte opératoire procure immédiatement et par définition la connaissance de la potentialité qu'il actualise et dont l'objet est porteur, laquelle est une de ses propriétés. C'est ainsi que se nouent l'un à l'autre geste et savoir mathématiques.** Mais ce savoir dans son immédiateté n'est pas nécessairement explicité pour autant sur le mode prédicatif. Il faut donc dire que son mode d'existence est celui de l'intuition au sens d'une prescience des possibles latents dans l'objet qui peut aussi bien se présenter avec la clarté de l'évidence qu'avec le poids de l'implicite, c'est-à-dire un surplus de déterminations inaperçues. **C'est donc une intuition ambiguë qui prend naissance au niveau de l'effectivité des opérations de la pratique mathématicienne,** et qui ne livre rien d'autre que l'intelligence, au moins partielle, de ce qui rend l'opération possible et nécessaire. **Il y a ainsi quelque chose qui s'expérimente directement dans le processus opératoire lui-même et qui se sédimente en expérience par la**

répétition. Par suite, c'est à la condition de réeffectuer toujours à nouveau pour soi les opérations des calculs ou celles qui sont incluses dans des démonstrations que l'on «comprend» les mathématiques, c'est-à-dire qu'on s'approprie vraiment la pensée qui y est en œuvre. Il en va de même dans le cas des démonstrations informelles où les actes de prédication et d'enchaînements de propositions doivent être réeffectués pour soi afin que par l'intuition ainsi acquise des liaisons conceptuelles un accès soit ouvert à la force probatrice du discours. »

Plus loin (p.42-43) :

« On lit sous la plume de Paul Valéry :

Quand les contenus sont créés par les opérations mêmes, c'est-à-dire quand des opérations remarquées sont désignées, isolées et qu'on en forme des combinaisons, alors on est en mathématiques.

Et plus loin :

... on peut se demander si les actes doivent définir les choses ou bien les choses et leurs combinaisons observées définir les actes. Le premier cas est celui précisément des mathématiques.

Et finalement :

La mathématique est science des actes sans choses – et par là des choses que l'on peut définir par des actes. Faire, pouvoir sont ses mots essentiels.

Des conversations de Paul Valéry avec Émile Borel ne sont mentionnées dans la partie « Mathématiques » des Cahiers que pour les années 1924-1925 et 1935. C'est donc de façon indépendante que Valéry incline pour la prééminence des actes sur les objets pour aboutir à la résorption complète, semble-t-il, des choses dans les actes. Il est vrai que l'on peut se demander si les objets mathématiques sont des choses, ce qui montre qu'à tout le moins

la thèse radicale de Valéry a le mérite de poser le problème. Jean Largeault qui, le premier, a cité le troisième texte de Valéry le dit conforme à l'esprit de Brouwer, mais ni Brouwer ni l'intuitionnisme ne sont cités par Valéry. »

La question des relations hiérarchiques d'imbrication entre les notions intuitives d'actes opératoires et d'objets mathématiques conduit Caveing à unifier les deux sous le concept de "M-objet" dont la définition doit rendre compatibles la nature dynamique de l'acte et la nature statique ou thématique de l'objet. Le Chapitre III de son livre est consacrée à cette définition, qu'il présente comme un prolongement de la thèse de Desanti dans *Les idéalités mathématiques*³⁴⁶. Caveing écrit (p.76-82) :

« [P.76] Comment cette expression [i.e. : "objet"], que nous avons employée jusqu'ici sans précaution, se justifie-t-elle? Il existe en mathématiques des entités qui, dénuées de la consistance matérielle, sont néanmoins douées d'unité interne et d'individualité, sont aussi manipulables selon diverses modalités de la pensée opératoire, et de plus paraissent être porteuses de déterminations qui leur sont propres, toutes caractéristiques par lesquelles elles semblent imiter le mode d'être des objets usuels, et mériter par conséquent de se voir appliquer analogiquement le même terme. Certaines d'entre elles – mais il est vrai dans une forme élémentaire des mathématiques – sont même susceptibles de représentation par des graphismes objets de perception, ce qui a pu contribuer à accréditer le terme de façon quelque peu amphibologique. »

D'où la désignation de M-objet qui distingue cette entité

³⁴⁶ Desanti, *Les idéalités mathématiques*, Paris, Seuil, 1968.

mathématique des objets qui ne sont pas ceux de la perception externe, mais qui semblent avoir un statut cognitif aussi robuste. Caveing en appelle alors à Desanti (p.77) :

« Nous avons précédemment posé le caractère idéal des M-objets. Le moment est venu de préciser, à titre préliminaire, ce que nous entendrons par «idéalité» dans les analyses qui vont suivre. Celles-ci emprunteront quelques concepts fondamentaux à l'ouvrage de J.-T. Desanti, Les Idéalités mathématiques. Ainsi nous entendrons par «idéalité» : « un «être» qui "n'est jamais offert par sa simple présence, mais par la médiation du système réglé des désignations qui permettent d'en disposer" [Caveing renvoie à la référence] ».

Desanti écrit en effet (p.238-239):

« L'expression [champ de conscience] désigne une « idéalité », c'est-à-dire un « être » qui, comme « $\sqrt{2}$ » par exemple, n'est jamais offert par sa simple présence, mais par la médiation du système réglé des désignations qui permettent d'en disposer : si bien que l'objet ($\sqrt{2}$, par exemple) n'est que l'index des enchaînements de possibilités permettant de telles désignations. Nous dirons de même du « champ » qu'il est index » pour le système des médiations d'horizon qui permettent le maintien et le renouvellement d'un pôle idéal explicite (un enchaînement de propriétés de $\sqrt{2}$, par exemple) : il n'est jamais simplement présent, mais toujours produit et reproduit dans le mouvement des médiations qu'il permet. Autrement dit, il ne se présente jamais que dans le moment où, du fait de la position d'un pôle explicite, il exerce sa fonction d'index des médiations permises. »

Caveing donne de l'équation : $a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos\alpha$ comme exemple de M-objet en précisant que si a, b, c sont des mesures de segment, l'équation peut être interprétée comme l'expression algébrique d'un triangle rectangle (sous certaines conditions).

« [p.78] *De plus la formule semble avoir pris sens en ceci que j'apprends qu'elle s'applique à une figure géométrique familière, mais c'est le sens d'une énigme puisque je n'aperçoit nullement du même coup ce qui peut justifier une telle situation. En réalité, pour pouvoir « disposer » de la formule, il faut pouvoir dénouer l'énigme, et pour cela déployer le réseau des médiations par lesquelles est obtenue, en fin de parcours, ladite formule, c'est-à-dire effectuer pas à pas un certain nombre d'opérations formant une suite réglée, effectuation sans laquelle on ne peut actualiser la certitude qu'il en est bien ainsi pour un triangle, c'est-à-dire se rendre présentes les « raisons » pour lesquelles il en est bien ainsi. »*

Caveing poursuit en exposant son interprétation élargie des concepts de "pôle d'idéalité", "domaine du M-objet" et leurs relations. Nous allons citer ce passage *in extenso* afin de faire le lien entre Desanti et Caveing. Nous mettons en gras les passages essentiels :

« [p.79-82] **nous dirons que ladite formule représente selon une terminologie introduite par Desanti, un « pôle d'idéalité » pour le M-objet « triangle »**, elle exprime en effet, en toute généralité, sous la forme algébrique, une propriété, d'ordre métrique, des M-objets géométriques – segments et angles – dont les relations, dans l'espace du plan euclidien, constituent le triangle. **Ce pôle d'idéalité renvoie à un domaine dans lequel prend sens la formule énigmatique : celui des figures de la géométrie plane**

euclidienne. Cela veut dire que dans ce cas, [...] ce domaine paraît en quelque sorte plus « naturel » que le domaine symbolique des relations algébriques qui paraît plus « formel ». Dire qu'en lui, la formule « prend sens », c'est dire **qu'elle s'articule sur un des M-objets du domaine pour lequel sa médiation est requise.** En effet le domaine naturel s'offre comme le lieu de synthèses inachevées : y sont posés des M-objets élémentaires, points et 1 lignes, engagés dans un réseau de relations spatiales-, il renvoie donc au noyau indéterminé de ses propres possibles, métriques aussi bien que topologiques : il est un chantier perpétuellement en devenir. [...]

Mais il faut bien voir que chacun des pôles – idéal [algébrique] et naturel [géométrique] - n'est effectif que si s'est déjà exercée en lui la médiation de l'autre. Ainsi, entre les deux pôles, se déploie un rapport circulaire, une double médiation réciproque, particulièrement bien mise en lumière par les analyses de Desanti (en d'autres domaines des mathématiques), et dont il écrit qu'elle constitue **la vie du contenu de l'objet** (c'est-à-dire du M-objet) : cette bipolarité est, à vrai dire, le M-objet lui-même, ici le triangle. C'est qu'un M-objet « n'est pas un spectacle passivement reçu, livré tout constitué à une "conscience" qui n'aurait d'autre fonction que d'en être le contenant ». Si le triangle n'est qu'une représentation d'origine visuelle, ou encore la mémorisation d'une définition, dans l'un ou l'autre cas laissée inerte par la pure réceptivité passive, alors il n'est pas -ou pas encore - un M-objet. Au contraire **le champ de conscience immanent aux actes de position des M-objets est de nature, «réflexif» c'est-à-dire que dans ce champ le M-objet est tout à la fois maintenu à titre de thème et jamais laissé en repos, en raison de la bipolarité avec laquelle il s'offre dans le champ lui-même. Dès lors, ce qui est visé, à travers toute position de M-objet, c'est ce mouvement de double**

médiation de chacun des pôles par l'autre qui, pour employer une terminologie phénoménologique, formera le noyau intentionnel de la conscience d'objet, « synthèse mobile d'intentionnalités ». Là se trouve la racine du caractère opératoire de la pensée mathématique. Il s'agit de ce moment où la conscience saisit le M-objet comme « l'unité essentielle d'une norme et d'un inachèvement », moment synthétique où celui-ci manifeste « la relation circulaire de son idéalité et de son devenir » . Dans notre exemple, cette circularité se montre en ce que d'une part la formule ne prend vie que par la médiation du pôle « naturel », c'est-à-dire la constitution d'un système déterminé de relations entre éléments géométriques (points et lignes), et que d'autre part se manifeste aussitôt l'exigence que soit vérifiée, dans une conscience actuelle, l'attribution de ladite propriété à la concrétion géométrique nommée « triangle », c'est-à-dire l'exigence d'avoir à se rendre présentes les chaînes d'évidences potentielles requises pour effectuer complètement à partir du noyau de signification « triangle » le sens de la formule : $a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos\alpha$, en un mot d'avoir à la démontrer. «Démontrer», en effet, signifie « mobiliser ces évidences potentielles en réveillant, dans une modalité de conscience à chaque pas actuelle et vérifiante, les possibilités de positions d'objets, ou de propriétés, ou les possibilités opératoires, comme autant de médiations requises pour l'actualisation de ces évidences ». **Ainsi le mouvement par lequel devait se dénouer l'énigme, et qui n'est autre que celui de la démonstration, se trouve lui-même enveloppé dans le mouvement de double médiation «circulaire» entre les deux pôles, qui constitue la vie du M-objet.** Cette tâche d'avoir à expliciter les noyaux de sens médiateurs, ne signifie nullement qu'il faille supposer l'être des idéalités préconstitué dans un univers intelligible, et pas davantage

qu'il faille chercher quelque secret de leur constitution dans le champ réflexif, comme lieu originaire. »³⁴⁷

De fait, Caveing et Desanti sont intéressés ici par la structure intentionnelle conduisant à l'engendrement d'un M-objet, ce qui se situe en amont de – et complète donc – notre propre étude qui n'a pas abordé ce point. De fait, Caveing reprend Desanti pour poser le principe de la modalité de la pensée mathématique et l'existence de domaines dans lesquels la structure des connexions internes réalisent un M-objet, comme il l'écrit (p.84-90) :

*« [p84] Les M-objets n'ont donc d'existence qu'« intra-théorique» , c'est-à-dire qu'il **appartient à leur structure intentionnelle d'être saisis dans le champ d'une «théorie» qui constitue leur domaine d'existence.** [...]*

[p.88] Rappelons d'abord qu'on entendra par « point » du champ une possibilité d'effectuation d'objet (M-objet) dont la théorie délimite l'horizon de possibilité et assure les modalités de reproduction réglée. Dès lors qu'en est-il de la connexion entre points du champ, c'est-à-dire de ce qui constitue la texture même de la théorie [³⁴⁸] ? [...]

*[p.89] C'est ici que s'introduit un nouveau concept, celui **de « domaine de connexion »**, défini par Desanti comme le système des valeurs de connexion résultant de n points distingués appartenant au champ d'une idéalité donnée, domaine qui est lui-même délimité par une forme à double composante. La composante spectrale délimite un domaine de co-présence potentielle de ces*

³⁴⁷ Pour les citations, Caveing renvoie à **Desanti**, *Les idéalités mathématiques*, p.91-93.

³⁴⁸ Caveing renvoie à **Desanti**, *Les idéalités mathématiques*, p.251 et sq.

idéalités-points; la composante d'horizon trace les chemins de médiations et offre les idéalités-points en une chaîne signifiante ordonnée, c'est-à-dire que chaque signe de médiation n'exerce sa fonction à l'égard de son successeur que s'il est lui-même médié [³⁴⁹]. [...]

[p.90] *De l'une vers l'autre les cheminements sont variables, sans que ces variations soient arbitraires. **Par conséquent un domaine de connexion, non seulement définit une suite potentielle de médiations ponctuelles, mais aussi un système ouvert et normé de possibilités de connexion entre ses régions différenciées**, lequel système constitue à son tour, pour ces possibilités, un nouveau domaine de connexion, de second ordre, par rapport aux connexions «ponctuelles» du premier ordre. »*

Desanti puis Caveing ont approfondi la question de l'émergence des M-objets en décrivant la dynamique intra-domaine actionnée par des intentionnalités mobiles entre les deux pôles, le cheminement des connexions entre deux idéalités d'un même domaine, la transgression d'un domaine, qui crée un nouveau pôle d'idéalité, etc. Bien évidemment, cela va bien plus loin que notre propre analyse (d'ailleurs, inspirée de ces deux auteurs notamment) qui présente un "pouvoir de résolution" moins fin car le but est non pas d'établir une généalogie des M-objets en mais de caractériser la notion d'effectivité. Néanmoins, nous poursuivons l'exposé des citations de Caveing car elles nous conduiront aux concepts cavallésiens, notamment celui de "champ thématique", sur lesquels nous fonderons notre conclusion. Ainsi, Caveing écrit (p.90-102) :

« [p.90-91] *Revenons aux nombres complexes : extraire la racine carrée d'un nombre négatif **suppose, non seulement***

³⁴⁹ Caveing renvoie à **Desanti**, *op.cit.*, p.256.

L'explicitation de systèmes d'idéalités pour lesquels une telle «opération» soit exigée, mais aussi que le concept d'opération soit « idéalisé», c'est-à-dire débarrassé de la restriction dont il était grevé, et que le M-objet nouveau, le nombre imaginaire $\sqrt{-3}$, soit posé comme pôle idéal thématique, c'est-à-dire « thématisé », ce qui exige le déploiement de spectres de structure plus riche. On sait que les deux moments de l'« idéalisation » et de la « thématisation », prises en ce sens, ont été identifiées par J. Cavailles, et nous y reviendrons puisque ce sont eux qui permettent de donner un sens mathématique précis aux processus recouverts par le terme apparemment vague et général d'« abstraction ». [...]

[p.98] ***Le processus d'idéalisation consiste à éliminer des limitations qui étaient imposées à un certain acte mathématique. Cavailles, en une formule heureuse, l'a caractérisé ainsi: c'est « raboter l'extrinsèque»*** ^[350]. Par là est manifestée la diversité des M-objets concernés par cet acte même, et du même coup une certaine « forme» est dégagée. Dès lors les règles qui gouvernaient de façon limitative l'acte initial sont transformées en fonction de la diversité des M-objets concernés et laissent apparaître les propriétés de cette « forme» Rechercher, regrouper, systématiser ces propriétés, c'est constituer cette « forme» en un nouvel M-objet : une « structure », c'est la thématiser. On voit que les deux processus : idéalisation et thématisation posent des M-objets nouveaux de type différent. L'idéalisation étend le champ opératoire initial à des

³⁵⁰ Caveing renvoie à **Cavaillès**, *Sur la logique et la théorie des sciences*, Paris, Vrin, 1997, p.81. Voici l'extrait de Cavailles : « La mathématisation n'intervient que comme coordination de prévisions spontanées, surtout élimination de ce qui en elles est inutile grâce à l'idéalisation infinie. Qu'est-ce en effet qu'idéaliser, sinon raboter l'extrinsèque, ce qui est lié pour la pensée du savant au factice (c'est-à-dire sortant du fait) de son actualisation présente et n'aurait de sens que relativement à lui. »

*éléments idéaux, qui font violence aux intuitions antérieures. **La thématization dégage la structure grâce à laquelle éléments anciens et nouveaux peuvent être opératoirement composés, c'est-à-dire intégrés à un unique champ opératoire, former un unique ensemble d'éléments** : elle fait donc passer à un niveau «supérieur» où le système des propriétés d'une opération désormais abstraite est à son tour posé comme M-objet, et exige des concepts d'un ordre d'abstraction plus élevé. **Si l'idéalisation étend le domaine, la thématization construit l'édifice.** [...]*

[p.102] **Le M-objet n'apparaît finalement que comme un moment thématique dans le parcours du réseau des relations, un repos provisoire entre deux enchaînements d'actes.** Mais d'un autre côté, nous avons vu aussi apparaître les M-objets, en tant que produits de l'idéalisation et de la thématization, sous l'effet de la transformation des règles opératoires et de l'explicitation de nouvelles relations de structure. Leur apparition est événement historique, leur disparition est effet de l'analyse, mais ce double phénomène suggère que le M-objet n'existe que dans le système de renvois entre points distingués dans le champ d'une idéalité donnée, constituant un domaine de connexion, de ce qui signifie – rappelons-le – qu'il n'a d'existence qu'intra-théorique. »

Pour la suite de notre étude, nous garderons cette définition du concept de "champ thématique", cet unique champ où « *les éléments anciens et nouveaux peuvent être opératoirement composés* ».

Dans les chapitres suivants, Caveing aborde des thèmes qui éclaireraient parfaitement certains de nos propos. En particulier, dans le Chapitre IV, le philosophe aborde la question de l'universalité et l'unité des mathématiques dans une Phénoménologie d'où a été évacuée la

“conscience transcendantale” de Husserl. Des concepts que Caveing propose pour combler la lacune, celui d’“omnisubjectivité” nous semble particulièrement intéressant pour l’étude des écrits ultérieurs de Borel (période 1900-1905)³⁵¹, car Borel fait souvent référence à la communauté des mathématiciens comme instance régulatrice, une communauté idéalisée qui se rapprocherait du concept d’agent cognitif mathématicien – pendant phénoménologique de la machine de Turing. En ce qui concerne l’unité des mathématiques malgré sa multi-modalité (question que nous avons abordé dans la Partie .2 – IV – 4°), Caveing fait appel à trois critères donnés par Alain Connes³⁵².

Néanmoins, nous interrompons l’étude de Caveing pour laisser place à celle de Cavailles où apparaît le concept de champ thématique – nous reviendrons à Caveing par la suite.

II- Nature du geste – Jean Cavailles

Nous nous étions demandé ce qui nous autorise à parler des mathématiques comme une affaire de *savoir-faire* plutôt que de *savoirs*.

³⁵¹ Dont l’esquisse est annexée à la thèse.

³⁵² Cités par **Jean-Pierre Bourguignon**, *Géométrie et Physique*, dans *Encyclopédie Philosophique Universelle*, A. Jacob (dir.), t.1 : *L’Univers philosophique*, Paris, P.U.F., 1989, p.1079. Caveing p.135 :
« - la possibilité de classier exhaustivement les objets définis par une axiomatique, qui témoignerait de l’existence de contraintes objectives par lesquelles les univers de possibles seraient nécessités ;
- la cohérence et l’harmonie inter-théoriques globales des théories mathématiques, attestées par les faits d’intertraductibilité, ce qui témoigne pour l’unité des mathématiques, laquelle d’ailleurs ne saurait être conçue comme une possibilité de les réduire à un calcul unique ;
- le fait que les théories mathématiques intéressantes ont un contenu informationnel infini. »

De fait l'hypothèse que les mathématiques sont un corpus de savoir-faire plus ou moins hétérogènes (unifiés par l'idéal d'une vie mathématique pratique abondante comme dit Detlefsen) s'inscrit dans la conception d'une "mathématique du geste" – ou du "geste des mathématiques" – explorée en particulier par Jean Cavailles dans sa thèse de 1937, *Méthode axiomatique et formalisme*³⁵³ (p.176-178). A la question :

« Mais où situer les expériences, à quoi reconnaître l'existence effective des objets ?

Il répond :

« Il n'y a pas de définition et de justification d'objets mathématiques qui ne soit les mathématiques mêmes, c'est-à-dire, comme faisait Brouwer, déroulement [...] n'est pas situé dans une région de la conscience caractérisée par une intuition sui generis [...]. L'intuition ici en cause n'est que le prolongement de l'intuition sensible véritable non figée dans les premiers stades d'une conscience fragmentaire : l'élargissement de la conscience et le développement dialectique de l'expérience coïncident. Ils donnent lieu à l'engendrement indéfini des objets dans ce que nous appellerons le champ thématique [...]. La nécessité de l'engendrement d'un objet n'est jamais saisissable qu'à travers la constatation d'une réussite ; l'existence dans le champ thématique n'a de sens qu'en tant que corrélat d'un acte effectif. [...] Doublant le champ thématique se trouve le système des méthodes impossibles à préciser autrement que par l'intuition centrale qui dirige les variations de leurs applications et qui constitue l'unité profonde – mais cette fois saisissable dans l'action – d'une théorie [...];

³⁵³ Jean Cavailles, *Méthode axiomatique et Formalisme*, Paris, Hermann, réédition de 1981, p.176-178.

comprendre est en attraper le geste et pouvoir continuer. »

Malgré "l'obsession embryogénique" contre lequel Bloch met en garde³⁵⁴, les propos de Cavailles nous semblent contenir, repliés en quelques phrases, les principes de la théorie de l'acte cognitif que nous avons exposé dans la partie précédente.

Cavaillès écrit que « *la nécessité de l'engendrement d'un objet n'est jamais saisissable qu'à travers la constatation d'une réussite ; l'existence dans le champ thématique n'a de sens qu'en tant que corrélat d'un acte effectif.* » Cela nous renvoie à l'idée que l'objet-preuve est l'accomplissement (la "réussite") d'un acte effectif, et qu'il n'advient dans le "champ thématique", c'est-à-dire dans le champ opératoire, qu'en tant que "corrélat" de l'acte-preuve qui s'est accompli. L'objet mathématique, qui est au centre de l'épistémologie classique de l'inférence logique à contenu mathématique, n'est alors qu'un effet collatéral de l'activité mathématique laquelle est avant tout un geste cognitif.

Et quand Cavailles affirme que « *l'élargissement de la conscience et le développement dialectique de l'expérience coïncident* », comment ne pas rapprocher cela de l'idée de "vie pratique abondante" exprimée par Detlefsen ? Cette nécessité d'engendrer une vie mathématique chaque fois plus abondante est, en d'autres mots, la nécessité d'élargir notre conscience – processus qui est du ressort de l'expérience, de la pratique, du *faire* et du *savoir comment faire* « *dans l'action* », et non d'une pensée aux prises avec des objets statiques du "champ thématique", qu'elle manipulerait et combinerait selon des règles logiques.

³⁵⁴ **Bloch**, *Apologie pour l'histoire*, Librairie Armand Colin, Paris, 1974, p.39 : ce démon des origines est « *peut-être seulement un avatar de cet autre satanique ennemi de la véritable histoire : la manie du jugement* »

A priori donc, l'engendrement mathématique aurait affaire à deux classes d'activités épistémiques. D'une part, l'activité "logique à contenu", qui serait centrée sur l'acte de manipulation de *savoirs-objets* du champ thématique – ce qui demande d'admettre qu'au départ certains objets de ce champ sont donnés *a priori* dans l'intuition. Au contraire, l'engendrement par inférence "authentique" serait centré sur la mise en action de *savoir-faire* lesquels génèrent, par effet collatéral, les savoirs-objets. Bref, nous retrouvons l'opposition "classique" entre une conception de la pensée mathématique orientée objet, et celle d'une pensée orientée action...

Mais le concept de *geste* change, ou précise, leur interprétation : si toute pensée est un acte cognitif – toute autre hypothèse serait absurde³⁵⁵ – , la pensée mathématique authentique, telle que définie par le principe de conservation épistémique (voir Partie II) serait caractérisée par la prégnance de "*l'intuition sensible*" i.e. une intuition émanant d'une sphère cognitive liée au *corps en interaction avec le monde* – que nous nommerons sphère "cognitive-corporelle". Et cette prégnance serait absente, ou plutôt moins forte, dans la pensée logique à contenu mathématique. Nous allons tenter de caractériser cette prégnance et ce défaut de prégnance.

Ainsi, aux propos de Poincaré³⁵⁶, qui écrivait « *dans les édifices élevés par nos maîtres, à quoi bon admirer l'oeuvre du maçon si nous ne pouvons comprendre le plan de l'architecte ? Or, cette vue d'ensemble, la logique pure ne peut nous la donner, c'est à l'intuition qu'il faut la demander* » Cavailles semble répondre : « *l'intuition ici en cause n'est que*

³⁵⁵ Il serait en effet absurde de soutenir qu'une pensée n'est pas "incorporée", ne serait-ce que par le fait évident que, même dans l'hypothèse extrême où le cerveau serait le seul organe sollicité dans la pensée, celui-ci est un élément du corps.

³⁵⁶ **Poincaré**, *Science et Méthode*, p.110-111

*le prolongement de l'intuition sensible véritable... »*³⁵⁷ Comment comprendre cela ?

Les sciences physiques se prêtent peut-être plus facilement que les mathématiques à l'illustration du propos : par exemple, si nous considérons la théorie newtonienne de la gravitation, selon le point de vue cavallésien celle-ci serait le "prolongement" de l'intuition cognitive-corporelle qui anticipe par exemple le mouvement d'une balle, pour l'attraper en vol... « *Comprendre est en attraper le geste et pouvoir continuer* » : la théorie de la gravitation continue le geste cognitif-corporel d'anticipation du trajet de la balle...

Mais les intuitions mathématiques... de quels gestes cognitifs-corporels seraient-elles le *prolongement* ? Et comment ce prolongement se réalise-t-il dans le geste proprement mathématique ? La question est difficile et pour y répondre nous ne pouvons que brosser des hypothèses.

Au sujet de l'intuition géométrique, Cavallès écrit, dans *Transfini et continu*³⁵⁸ :

« *Le problème du continu [arithmétique] reste comme au temps de Leibniz, une "croix" ou la croix de la philosophie mathématique. Il semblait que l'arithmétisation effectuée au XIXe siècle réussissait à en donner une définition dépourvue de tout élément intuitif. Mais pour une critique plus avertie, le doute subsiste d'une part si une telle prétention est justifiée, c'est-à-dire **si l'effectif de la définition n'utilise pas subrepticement des intuitions sensibles, d'autre***

³⁵⁷ Cavallès, *Méthode Axiomatique...*, p.76-78.

³⁵⁸ Cavallès, *Transfini et continu*, Hermann, Paris, 1947. Ecrit datant de 1940-1941 mais publié trois ans après sa mort prématurée (1944). Nous nous référons à l'édition de 1967, p.254-274.

part s'il n'y a pas là plutôt représentation que réduction, c'est-à-dire si, en fait, ne reste comme base une image géométrique latente, fondant l'originalité et l'unité du représenté par rapport aux relations arithmétiques accidentellement réunies pour lui dans un enchaînement extrinsèque. »³⁵⁹

Quand Cavallès dit que l'effectif de la définition du continu arithmétique utiliserait comme base subreptice *des intuitions sensibles* et une *image géométrique* latente irréductible à l'arithmétique (qu'on enroberait *a posteriori* d'un enchaînement extrinsèque), cette image géométrique ne réfère pas à une intuition émanant de la pratique de la géométrie, en tant que domaine de savoir-faire mathématiques. En effet, à moins de considérer que la géométrie est une manifestation directe des intuitions sensibles, les propos de Cavallès renvoient à une chose plus fondamentale ou *primordiale* qui fonderait la géométrie : cette "intuition sensible" appartiendrait à la sphère du "cognitif-corporel" dont la syntaxe est une dynamique composée de *gestes mentaux* dessinant le paysage du ressenti du monde et de la préparation à l'action sur lui. Caveing parle de « *phénoménalité psycho-physique* » au sujet des objets de la perception liés aux M-objets de la géométrie, ce qui pour nous désigne un concept proche, voire inclut, dans celui que nous avons nommé cognitif-corporel. Ainsi Caveing écrit (p.135-136)³⁶⁰ :

« Une sorte de parenté phénoménologique, [...] au moins dans le domaine visuel, est instituée entre objets de la perception et M-objets «naturels» géométriques. Cette parenté est source de croyance à une certaine « réalité » assignable aux M-objets géométriques sur le modèle des objets perçus. Henri Poincaré lui-même a tenté de donner

³⁵⁹ Cavallès, *op. cit.*, p.255.

³⁶⁰ Caveing, *Le problème des objets dans la pensée mathématique*, *op. cit.*

corps à l'idée d'un « espace représentatif », ce qui revient à admettre l'existence d'un espace perçu. Celui-ci selon son analyse est un « continu physique » fondé sur l'indiscernabilité de deux impressions sensorielles correspondant cependant à des stimuli distincts. **Cela même montre déjà qu'il faut entendre par «physique », non pas ce qui relève des lois de la Physique, mais ce qui est de l'ordre de la phénoménalité psycho-physique** et qui fournit le matériau de la perception, soit dans le domaine **proprioceptif**, soit dans le domaine des données des sens externes. »

A la p.145, Caveing précise :

De fait, Caveing nous fournit une piste (p.145) :

« Il est [...] naïf de croire que seraient appréhendées, à titre purement impressionnel, et de façon immédiate, des données en provenance du complexe psycho-physique du corps propre, et des organes sensoriels. **En réalité cette couche de l'expérience n'est jamais donnée que redoublée par la parole intérieure qui l'accompagne de façon incessante.** Sans ce redoublement cette couche ne serait pas consciente : elle appartiendrait au subconscient, ou au préconscient, non à la conscience, laquelle implique un premier degré de réflexivité «naturelle» liée à la présence originaire de la parole intérieure, du langage : c'est cette présence qui offre en soi la possibilité du «je sens» lequel rend consciente la sensation. »

Ce que nous avons appelé la couche cognitive-corporelle est donc composée du « complexe psycho-physique » auquel s'adjoint la « parole intérieure » qui rend consciente la sensation.

En généralisant cette idée, le terme unique d'*intuition* (géométrie, arithmétique, du continu, etc.) cacherait en réalité deux concepts référant à deux niveaux cognitifs distincts : d'une part, le niveau où siègent les gestes mathématiques proprement dits, acquis, développés ou élaborés par l'agent-mathématicien dans un certain domaine, comme la géométrie ou l'arithmétique, grâce à un apprentissage ; d'autre part un niveau *primordial* sensible, le "cognitif-corporel", où siègent les gestes communs à tous les individus en interaction avec le monde. Et selon Cavailles, le niveau mathématique serait « *le prolongement* » du niveau primordial : les gestes mathématiques se seraient installés sans solution de continuité *sur* le système gestuel cognitif-corporel (*primordial*) – hypothèse qui affirme seulement que le développement des mathématiques (et de tout corpus de connaissances techniques élaborées) serait intervenu historiquement sur la base d'un appareillage cognitif humain déjà présent.

In fine, selon la théorie du geste, la dynamique d'engendrement mathématique, qui résiderait non pas dans le *champ thématique* du savoir mais dans le champ gestuel des savoir-faire, aurait hérité d'une gestuelle *primordiale* préexistante, commune et non mathématique. Et le champ thématique – ce lieu où résident les contenus des théories mathématiques au sens classique – n'existerait dans l'intellect que comme une sécrétion d'un système dynamique de gestuelles mathématiques, système qui prolonge les gestes cognitifs primordiaux liés au corps aux prises avec le monde physique. Partant, l'entendement et l'engendrement mathématiques seraient un prolongement du ressenti corporel et de la préparation à l'action sur le monde. Tentons d'en savoir plus.

III- Théâtralité du geste – Gilles Châtelet

A partir de la même citation de Cavallès (p.178), le philosophe Gilles Châtelet écrivait en 1993 dans *Les enjeux du mobile*³⁶¹ (p.31-33) :

« Ce concept de geste nous semble crucial pour approcher le mouvement d'abstraction amplifiante des mathématiques, qui échappe aux **paraphrases rationalisantes** – toujours trop lentes –, aux métaphores et à leurs fascinations confuses et enfin, surtout, aux systèmes formels qui voudraient boucler une grammaire des gestes : Gödel a bien montré que des énoncés rebelles – vrais, mais non prouvables – sont aussitôt secrétés par une syntaxe un tant soit peu ambitieuse.

Ce geste ne se laisse pas "attraper" devant nous – **il ne lance pas des ponts entre nous et les choses** – ni "derrière" nous – aucun algorithme ne commande sa mise en scène. **Il faudrait plutôt parler d'une propulsion, qui se referme en une impulsion**, d'un même geste qui décape une structure et réveille en nous d'autres gestes.

Il convient de souligner aussi que :

- **le geste n'est pas substantiel : il gagne de l'amplitude en se déterminant**. Sa souveraineté est à la mesure de sa pénétration et c'est pourquoi on évoque la "sûreté" du geste : le retentissement de son adresse est gagé par la précision de sa frappe. **Le geste inaugure une lignée de gestes, alors que la règle n'énonce que des "instructions", qu'un protocole de décomposition de l'action en actes répétables indéfiniment**. Le geste possède une exemplarité historique : si l'on peut parler d'accumulation du savoir au

³⁶¹ Gilles Châtelet, *Les enjeux du mobile*, Seuil, coll. Des Travaux, 1993.

cours de la succession de générations, on doit parler de gestes inaugurant des dynasties de problèmes ;

- le geste n'est pas un simple déplacement spatial : il décide, libère et propose une nouvelle modalité du "se mouvoir". Hugues de Saint-Victor définissait le geste comme "le mouvement et la figuration des membres du corps selon la mesure et les modalités de toute action et attitude". Le geste renvoie à une discipline de distribution de la mobilité avant tout transfert : on se pénètre du geste avant de le savoir ;

- le geste est élastique : il peut se ramasser sur lui-même, sauter au-delà de lui-même et retentir, alors que la fonction ne donne que la forme du transit d'un terme extérieur à un autre terme extérieur, alors que l'acte s'épuise dans son résultat. Le geste a donc à voir avec le pôle implicite de la relation ;

- le geste enveloppe avant de saisir et esquisse son déploiement bien avant de dénoter ou d'exemplifier : ce sont les gestes déjà domestiqués qui font référence ;

- un geste réveille d'autres gestes : il sait mettre en réserve toutes les virtualités provocatrices de l'allusion, sans la dégrader en abréviation. »

A l'instar de Cavallès, Châtelet exprime de manière concise et brillante ce que nous tentons d'appréhender – et nous permet d'effectuer un pas supplémentaire. Ainsi, nous retrouvons le concept d'"affinités actionnelles" de Detlefsen dans la citation qui précède. « *Le geste inaugure une lignée de gestes [... et donc] une dynastie de problèmes. [...] Un geste réveille d'autres gestes : il sait mettre en réserve toutes les virtualités provocatrices de l'allusion, sans la dégrader en abréviation* » : le geste s'étend par affinités ("allusion"), et cette extension n'est pas un enchaînement d'équivalences qui ne feraient que se remplacer les unes les

autres ("abréviations").

Pour Châtelet, le déploiement du geste – ce « *mouvement et figuration des membres du corps selon la mesure et les modalités de toute action et attitude* » – précède toute dénotation, i.e. toute référence objectale, laquelle n'est qu'une référence aux « *gestes déjà domestiqués* ». Et il « *n'est pas substantiel : il gagne de l'amplitude en se déterminant* » : sa nature est mouvement (action) et non contenu (objet-preuve), lequel est seulement son *corrélat* (Cavaillès). Il est « *une propulsion, qui se referme en une impulsion* », c'est-à-dire une pulsion vers l'avant qui se vise lui-même, une intentionnalité orientée vers un but qui n'existe pas avant que la pulsion s'assouvisse, et c'est pour cela que le geste mathématique est *sûr* : il n'est pas *un moyen* d'atteindre un objet, il est *ce par quoi* l'objet advient. Le geste lui-même *élargit la conscience* (Cavaillès), mais qu'il s'accomplisse ou non en un objet de connaissance, c'est-à-dire qu'il finisse par alimenter le *champ thématique* (Cavaillès), c'est là un phénomène d'une autre nature : quand l'objet de connaissance se réalise par un geste, il n'est déjà plus du domaine du geste.

La présence du corps – ou, comme le dit Châtelet, *figuration* [cognitive] *des membres du corps* – dans la pratique mathématique est indispensable pour comprendre le rôle de l'effectivité car, nous semble-t-il, c'est cette figuration qui, à l'échelle cognitive, fournit la sensation de sûreté, de robustesse d'un raisonnement effectif : le corps – sa figuration – apportant des *marqueurs* à l'intuition mathématique enracinés dans notre ressenti primordial du monde physique. Chez Borel (et d'autres constructivistes), l'effectivité qualifierait cette présence indirecte – par le biais de ce que nous nommons des "marqueurs" – du geste corporel dans un raisonnement (une inférence) mathématique, surtout si ce raisonnement comporte également des éléments moins *incarnés* : ceux

qui s'articulent par affinités non pas actionnelles mais logiques.

IV- Embryogenèse des modes mathématiques

Prenons un *cas d'école* pour questionner l'applicabilité de ce qui précède : celui des deux grandes figures communément admises de l'intuition mathématique (mais pas les seules), l'intuition du continu et l'intuition du nombre. Il est d'usage d'associer ces deux intuitions mathématiques aux sensations primordiales de *flux* et d'*unités séparables*. Admettons cela *a priori* et essayons de décrire en termes de gestes le processus de prolongement du niveau primordial au niveau mathématique.

Comment décrire la gestuelle cognitive-corporelle (ou sensation) des *unités séparables* qui serait à la base de l'intuition des nombres et, plus généralement, du discret arithmétique ?

Nous pourrions postuler qu'elle émane du système cognitif gérant aussi bien l'input des capteurs (visuel, tactile, sonore, etc.) permettant de reconnaître des objets séparés (individus) que l'output des effecteurs agissant sur eux. Ce système intègre certains modes d'être dynamiques (savoir-faire) de ces unités séparées (superpositions-additions, extractions-soustractions, etc.) selon les informations perçues, qu'il reproduit dans la préparation à l'action. Cet ensemble de modes (savoir-faire) est alors une "représentation" gestuelle-cognitive du monde extérieur – cela signifie notamment qu'en termes cognitifs, la perception est autant un geste cognitif que la préparation à l'action.

De la même manière, la gestuelle primordiale du *flux*, réputée à la base de l'intuition du continu, émanerait du réseau de réaction/action cognitive lié à la sensation du non unitaire, du non séparé, de l'ininterrompu (qu'on peut néanmoins casser, dévider ou interrompre arbitrairement).

Alors, quand Cavailles dit que « *l'intuition [mathématique] n'est que le prolongement de l'intuition sensible véritable non figée dans les premiers stades d'une conscience fragmentaire* »³⁶², cette intuition sensible véritable pourrait être associée au type de système de gestes décrit ci-dessus. Et quand le philosophe se demande « *si l'effectif de la définition [du continu arithmétique] n'utilise pas subrepticement des intuitions sensibles, d'autre part s'il n'y a pas là plutôt représentation que réduction, c'est-à-dire si, en fait, ne reste comme base une image géométrique latente* », cette image géométrique latente serait peut-être une intuition (une marque, un *marqueur*) provenant directement du système gestuel primordial du *flux* – plutôt que d'une gestuelle géométrique mathématique plus élaborée.

Mais ce qui précède est fort spéculatif et non dénué *d'a-priori* implicites. Par exemple, nous avons considéré *de facto* que les deux systèmes de gestuelles primordiales, *unité – flux*, étaient séparées, ce qui constituerait une origine fort commode à notre postulat de modes mathématiques incommensurables régis par le principe de conservation ("*le mouvement et la figuration des membres du corps selon la mesure et les modalités de toute action et attitude*" - Châtelet). Mais pouvons-nous vraiment justifier cette idée de fragmentation primordiale ?

Avec la pauvreté de nos hypothèses de base, cela semble difficile : la

³⁶² Op. cit., p.178.

réalité de la pratique mathématique nous contredirait immédiatement. En effet, telles que les mathématiques se présentent à nous, une même pratique semble puiser simultanément aux deux gestuelles postulées comme *primordiales* : le maniement mental de figures dans un raisonnement géométrique utilise aussi bien l'intuition de l'unité séparée (objet qu'on déplace) que du flux (longueur, angle, surface, etc.). Et, du point de vue historique, la géométrie était chez les Grecs comme Pythagore et Archimède, autant une science des figures *géométriques* idéales qu'une science des proportions *numériques* harmonieuses : l'intuition du continu de ces lignes, surfaces et volumes étant alors jumelée à l'intuition du nombre incarnant ces proportions. Que dire alors des fondements euclidiens de la géométrie, qui s'appuient sur les concepts de *ligne continue* et de *point séparable*, dont le moins qu'on puisse dire est qu'ils collisionnent les deux intuitions, et donc les deux orientations gestuelles primordiales qu'on a voulu dissocier ? En l'état, il nous est donc difficile de relever le défi posé par ces contre-exemples.

Néanmoins, nous voudrions souligner que l'exemple des définitions d'Euclide instituant le point et la ligne se distingue des deux autres (maniement des figures, pratique des Grecs Anciens). Car ces axiomes ont gardé un parfum de non constructivité se manifestant dans la relation du *point* à la *ligne* : si, comme il est écrit dans les *Eléments*³⁶³, « *un point est ce dont il n'y a aucune partie* » et « *une ligne est une longueur sans largeur* », comment une collection d'objets sans parties (point) peut-il engendrer une longueur ?⁽³⁶⁴⁾ – raison pour laquelle on parle aujourd'hui d'axiomes.

³⁶³ **Euclide**, *Les éléments*, Livre I, Définitions. Nous nous reportons à la traduction de B. Vitrac, *Euclide, Les éléments*, volume 1, coll. Bibliothèque d'histoire des sciences, PUF, Paris 1990, p.151.

³⁶⁴ La même question se pose pour la ligne qui engendre la surface.

In fine, l'idée que la modalité de la pensée mathématique serait le "miroir" d'une modalité préexistante des systèmes gestuels primordiaux eux-mêmes est trop simpliste ou pas assez étayée. Mais les cas où des "images géométriques" (intuition du flux) et des "images arithmétiques" (intuition de l'unité) ne peuvent pas être rendus compatibles au sein d'un même domaine gestuel mathématique montrent qu'il faudrait nuancer et approfondir cette hypothèse, plutôt que la rejeter.

Nous allons donc poser une nouvelle hypothèse *médiane* : la couche primordiale est fragmentée en diverses familles de gestuelles correspondant à des savoir-faire dans des domaines psycho-physiques divers ; la couche mathématique authentique est elle-même fragmentée en domaines, et chacun d'eux hérite d'un ensemble spécifique de marqueurs de la couche primordiale, marqueurs qui influencent l'orientation générale de l'architecture particulière du mode – mais nous ne faisons pas d'hypothèse sur l'appartenance ou non de ces marqueurs à un seul mode gestuel primordial.

.2 –L’INFERENCE LOGIQUE A CONTENU

Fort heureusement les cas d’incompatibilité entre pensées gestuelles du nombre et du continu sont contournés par une pensée moins soumise au dictat de l’intuition (des *marqueurs*) corporelle : la pensée logique à contenu mathématique. Sans elle la géométrie, l’analyse et l’ensemble des mathématiques auraient eu du mal à se développer aussi librement. Ce mode semble donc, du moins historiquement, aussi co-substantiel aux mathématiques que le mode authentique. Et en toute rigueur, le raisonnement mathématique par inférence logique devrait également être considéré comme dessinant un domaine cognitif-gestuel, ne serait-ce que par respect pour l’hypothèse naturaliste qui colore notre travail : à l’instar des modes authentiques, il serait absurde de considérer que cette capacité cognitive, aussi “symbolique” soit-elle, serait apparue *ex-nihilo* au cours de l’évolution sans se construire également sur des bases gestuelles primordiales déjà présentes.

Mais ce qui semble moins en prise avec ces gestuelles primordiales dans un raisonnement par inférence logique c’est le contenu mathématique *quelconque* : les inférences logiques puisent dans le champ thématique des objets engendrés par différentes gestuelles authentiques, mais ils n’en conservent pas la trace – hormis l’effet crédentiel (voir partie II) – puisque, nous l’avons dit, l’objet une fois engendré n’est plus du domaine du geste. Ces objets du champ thématique, “effet collatéraux” selon Cavallès de la véritable pensée-action mathématique, deviennent dès lors la matière première sur laquelle s’exerce une gestuelle

particulière et unique, celle de la pensée logique, s'appliquant sur tous les objets du champ thématique quelles que soient leurs origines gestuelles. Le cas du "pas franchi" par Lebesgue donnant *a priori* la mesure d'un ensemble dont on n'a pas défini la propriété de mesure (mais qui, au contraire, sera définie à partir de lui) est l'exemple d'un tel acte d'inférence logique à contenu mathématique (nous y reviendrons).

I- Comparaison

Il y aurait donc deux différences, l'une quantitative l'autre qualitative, entre le système de pensée mathématique authentique et celui logique à contenu mathématique.

1- Quantitativement : l'application d'une gestuelle unique à tous les objets du champ thématique vs. une mosaïque de domaines gestuels sécrétant une multitude d'objets.

2- Qualitativement et corrélativement : dans le système logique, l'activité mathématique n'est plus l'action des gestes *sur eux-mêmes*, mouvement d'auto-amplification qui vise l'élargissement des savoir-faire, mais une action gestuelle *sur des savoirs*, c'est-à-dire des objets de connaissance du champ thématique.

Il nous semble que cette double distinction permet de comprendre ce que Chatelêt entend par « *paraphrases rationalisantes* » qui lancent « **des ponts entre nous et les choses.** » Si « *le geste est élastique : il peut se ramasser sur lui-même, sauter au-delà de lui-même et retentir, [...] la fonction ne donne que la forme du **transit d'un terme extérieur à un***

autre terme extérieur » ou quand Cavailles se demande s'il ne reste comme base à la définition du continu arithmétique une image géométrique latente « *par rapport aux relations arithmétiques accidentellement réunies [...] dans un enchaînement extrinsèque.* » Certes, dans les propos de Cavailles, l'enchaînement extrinsèque réfère à l'aspect *ad hoc* de la justification arithmétique du continu, mais aussi, c'est notre interprétation, à la sortie d'une économie du "geste sur lui même" pour celle du "geste sur l'objet" : l'enchaînement puise ailleurs que dans le domaine mathématique gestuel particulier de l'arithmétique – ce que Chatelêt qualifie de « *pont entre nous et les choses* ».

Selon cette interprétation, le champ thématique se situerait dans la sphère de la *représentation* en termes d'objets mentaux, nécessairement *extériorisée*, de ce qui fut geste.

Pour comprendre réellement ce qui distingue ces deux catégories, il est essentiel de ne pas réduire le concept de geste cognitif (mathématique) à un synonyme d'entité perceptuelle (ou percept), qui serait transformée, *via* un acte de symbolisation, en un objet conceptuel (concept). En effet, l'idée d'une pensée mathématique reflétant *quelque chose* du monde extérieur et partitionnée en deux pans perceptuel et objectal, le premier alimentant le second, n'est pas nouvelle. Déjà, en 1925, Hilbert y adhérait (ayant intégré dans son épistémologie les critiques de Poincaré sur la "primordialité" du principe d'induction complète et certains concepts de l'Intuitionisme). Il écrivait en effet (p.228)³⁶⁵ :

³⁶⁵ Hilbert, *Über das Unendliche*, in *Math. Annal.*, 95, (1925)1926. Traduction française par J. Largeault, *Sur l'infini*, in *Logique mathématique*. Textes. Armand Colin, coll. U, Paris, 1972.

« Nous avons déjà constaté plus haut que dans l'univers physique l'infini ne se rencontre nulle part, quelles que soient les expériences, les observations ou la discipline scientifique mise en œuvre. Est-il croyable que notre pensée des choses ait si peu de ressemblance avec les processus dans lesquels les choses sont impliquées, et qu'elle se comporte de manière tellement différente et éloignée de la réalité ? N'est-il pas plutôt évident que lorsque nous présumons reconnaître la réalité de l'infini (dans l'un quelconque des sens du mot réalité), nous nous sommes simplement laissés imposer par cette circonstance que dans le réel physique nous nous trouvons très souvent en présence de dimensions incommensurables en grandeur ou petitesse ? Et le raisonnement logique à contenu mathématique nous a-t-il jamais trompés ou abandonnés quand nous l'appliquons à des objets ou des processus réels ? Non point, le raisonnement logique à contenu est indispensable. Il ne nous a fourvoyé que parce que nous avons admis des concepts abstraits arbitrairement formés, notamment des concepts qui ont pour extension un nombre infini d'objets, et qu'ensuite nous l'avons appliqué illégitimement, en manquant de tenir compte des conditions préalables nécessaires à son applicabilité. En reconnaissant l'existence de ces conditions et la nécessité de les observer, nous sommes d'accord avec les philosophes, spécialement avec Kant. Celui-ci avait déjà pour doctrine que les mathématiques ont un contenu indépendant de la logique et qu'elles ne peuvent donc pas être fondées par la logique seulement ; c'est ce qui condamnait d'avance à l'échec les tentatives de Frege et de Dedekind. **La condition préalable de l'application d'inférences logiques et de l'effectuation d'opérations logiques est l'existence d'une donnée dans la perception : à savoir l'existence de certains objets concrets extra-logiques qui en tant que sensations immédiates précèdent toute pensée.** Pour

que le raisonnement logique soit sûr, il faut que ces objets soient perçus dans toutes leurs parties et que leur occurrence, leur caractère distinct, leur succession ou leur juxtaposition se présentent à l'intuition en même temps que ces objets, comme quelque chose d'immédiat et qui ne se réduit pas ou n'a pas besoin d'être réduit à quoi que ce soit d'autre. Telle est la conception philosophique fondamentale qu'à mon sens exigent les mathématiques et d'ailleurs toute pensée, toute compréhension et toute communication scientifiques. »

Hilbert exprime la conception "classique" de la dichotomie de la pensée mathématique : les éléments premiers de la pensée mathématique sont perceptuels, et ce sont eux qui forment les premiers contenus (irréductibles) des raisonnements logiques (à contenu) permettant d'engendrer de nouveaux objets - ou les premières méthodes (également irréductibles) applicables à ces raisonnements, comme le principe d'induction complète ou le principe du tiers exclu³⁶⁶.

La conception classique de la dichotomie de la pensée mathématique entre des bases perceptuelles contraintes par le monde physique et un raisonnement logique à contenu qu'on appliquerait sur ou à partir d'elles est d'autant moins soutenable que les objets de connaissance ne reflétant

³⁶⁶ Néanmoins, on doit apporter un bémol à cette analyse, car la pensée de Hilbert est bien plus complexe, comme nous le savons : sa profession de foi épistémologique évoquée ci-dessus aurait plus une fonction anti-polémique (i.e. l'infini n'existe pas dans notre représentation du monde, donc il ne saurait être pris comme intuition perceptuelle première), car par la suite Hilbert introduit ses *idéaux* supposés non signifiants (dont l'infini) mais qu'on peut soumettre à un raisonnement formel (sans pour autant leur donner le statut de contenus mathématiques) en se servant des contenus et méthodes authentiquement mathématiques. Hors, il est douteux (ou du moins soumis à discussion) que Hilbert ait réellement rejeté les concepts cantorien dans la sphère du non signifiant : sa méthodologie était de prêcher le consensuel et de s'en servir comme bras de levier pour impulser les mathématiques vers le paradis de Cantor.

aucune réalité physique trouvent – fort heureusement – leur pleine légitimation mathématique, comme l’infini dénombrable de Borel (voir Partie I)...

Si, d’une part, on rejette l’interprétation classique et, d’autre part, on admet la nature gestuelle de l’inférence logique à contenu, qu’est-ce qui explique alors que les mathématiques effectives, qui délimitent le cadre de l’“authentique” à l’intérieur d’un espace plus large non contraint, procurent à Borel, Hilbert et d’autres, un ressenti cognitif si différent de ceux des raisonnements logiques à contenu mathématique – ce, quelle que soit l’étendue attribuée à ce cadre³⁶⁷ ?

Ce qui distingue une démonstration effective d’une démonstration quelconque³⁶⁸ aux yeux de Borel (par exemple les démonstrations de 1895 et 1898) n’est pas affaire de validité mais, de *sûreté*, de *robustesse* de cette validité. Et si l’on considère que l’effectuation (valide) d’une démonstration (effective ou non) s’accompagne toujours d’un *sentiment* de certitude (voir Partie II - .2 - III), le *renforcement* de cette certitude nous semble se ranger du côté des *sensations*, une robustesse en lien avec le ressenti du monde. Et cela ne peut se comprendre en termes d’*objets* perçus dans le monde extérieur.

Nous pouvons dès lors résumer ce qui, à nos yeux, constitue la véritable différence entre les deux systèmes de pensée mathématique :

- Les mathématiques authentiques (effectives), de nature mosaïque et formées sur la base de marqueurs de ressentis-actions sur le monde extérieur, répondent à une économie de l’auto-amplification des

³⁶⁷ Qu’il s’agisse du cadre finitiste de Hilbert, du cadre Intuitionniste, borélien, etc.

³⁶⁸ Au sens le plus mathématique.

gestes sur eux-mêmes dont le but est l'élaboration de nouveaux savoir-faire – les savoirs engendrés n'étant qu'un corrélat.

- Les raisonnements logiques à contenu mathématique, unifiés au sein d'une seule gestuelle (la logique)³⁶⁹, reposent sur une économie du geste sur des objets "extrinsèques" (des savoirs).

Ainsi, contrairement à l'interprétation classique, ce seraient les deux systèmes, et pas seulement le premier, qui sont en prise avec le monde, ou plutôt avec notre *être dans le monde*, dans le sens suivant : le premier système a hérité d'une multiplicité de groupes de marqueurs de dynamiques gestuelles cognitives-corporelles (ressenti-action), le second a hérité d'un seul groupe de marqueurs de dynamique gestuelle, et sa particularité est d'être capable de manipuler cognitivement des *représentations "extériorisées"* (objets, savoirs, etc.).

Deux système donc : l'un à plusieurs familles de gestuelles auto-amplifiantes, l'autre à gestuelle unique objectivante ou "extériorisante" – l'une et l'autre sièges d'intuitions, la première de nature cognitive-corporelle, la seconde *rationnelle* – et ne répondant pas aux mêmes principes épistémiques.

II- Nature et dynamique des gestes logiques à contenu

Ainsi, de la même manière que nous avons tenté de dessiner le paysage épistémique de la pensée mathématique authentique, nous

³⁶⁹ Gestes qui émanent du système précédent, du moins quand la pensée logique agit sur elle-même et non sur des contenus mathématiques.

pourrions esquisser quelque hypothèse sur la gestuelle de la pensée logique à contenu.

Il est d'usage d'attribuer à l'inférence logique en général une gestuelle de type *combinatoire* répondant à des règles d'*équivalence* (ou *coïncidence*) *des formes*, et dont l'économie générale serait l'amplification de "savoir-faire-s'équivaloir". Nous pourrions nous risquer à utiliser une terminologie plus épistémique : il s'agirait d'un type de geste consistant à interchanger, dans l'espace thématique, des objets mentaux (savoirs) selon certaines règles locales d'inférence (coïncidences de forme), dans une architecture orientée globalement par une intentionnalité "tautologique" (i.e. après l'échange des contenus, la forme demeure la même)... Cela est vague et réducteur, mais poursuivons un peu dans cette voie.

Donc les inférences logiques (contraintes localement) viseraient globalement à obtenir la réalisation d'une tautologie. En admettant l'hypothèse déjà formulée que les inférences logiques à contenu émanent du même domaine gestuel que celui de la logique (en tant que discipline mathématique), nous manquons d'outils pour analyser ce cas : en effet, dans la partie consacrée à la théorie de l'acte cognitif (Partie II), nous avons parlé du *contenu de l'acte*, que nous avons distingué du *contenu* au sens classique, i.e. l'objet-preuve (du champ thématique). Ainsi, nous pouvons toujours dire que dans le domaine logique, l'acte cognitif vise l'accomplissement d'une tautologie *via* des inférences tenues par des règles de coïncidence de forme... Mais ici, vient se superposer à cette dynamique la particularité du geste logique à *contenu*, qui est de combiner des contenus de type objet-preuve (du champ thématique) par l'acte même d'inférence logique. Cette nature "mixte" de l'inférence logique à contenu n'avait pas été analysée... Néanmoins, nous pouvons

postuler sans risque de (trop) nous tromper que : l'accomplissement d'un acte logique (tautologie) *via* des inférences à contenu mathématique (tenues par des règles de coïncidence de forme), n'implique pas que l'objet engendré dans le champ thématique soit lui-même de nature "tautologique" : c'est uniquement le geste qui l'est. L'idée de geste tautologique (mû par une intentionnalité de même nature) doit s'entendre dans le sens suivant : interchanger les pièces d'une forme donnée dans un certain domaine mathématique par d'autres pièces faites d'un matériau (contenu) différent, c'est-à-dire émanant d'un autre domaine, mais qui laissent la forme inchangée dans son domaine d'appartenance. Prenons le cas de l'inférence raté de Borel, où E est un ensemble non mesurable B et a est la mesure d'un ensemble mesurable B :

$$(a \leq \text{mesure de } E \leq a) \quad \Rightarrow \quad (\text{mesure de } E = a)$$

Pour réaliser cette inférence, la forme est considérée comme appartenant au domaine mathématique de l'algèbre des nombres réels, et bien que les contenus émanent d'un autre domaine, celui des ensembles mesurables, le geste associé à cette inférence demeure du domaine de l'algèbre des réels : dans ce domaine $(a \leq b \leq a)$ et $(b = a)$ sont équivalents. La forme n'a pas changée, le geste est tautologique. Mais les contenus sont extérieurs au domaine auquel appartient la forme : l'inférence est "extrinsèque".

Bref, l'objet engendré par cet acte n'est pas, quand on l'interprète du point de vue mathématique, une simple identité (nous y reviendrons).

Bien entendu, pour justifier cela, il faudrait déjà clarifier le sens de ce que nous avons appelé *règles de coïncidence de forme*, en précisant la distinction entre le *contenu* mathématique d'un objet et sa *forme* logique. Mais nous allons poursuivre en admettant sans plus notre postulat.

Ainsi, une gestuelle mathématique authentique, qui vise donc à amplifier le domaine de ses savoir-faire, secrète un nouvel objet de connaissance *forgée* par cette gestuelle particulière. En admettant que chaque domaine de savoir-faire mathématique possède son propre jeu de marqueurs émanant des domaines primordiaux cognitifs-corporels, l'objet façonné par cette gestuelle porte d'une certaine manière la trace (ténue) de ces marqueurs cognitifs-corporels. Mais le geste logique à contenu mathématique agit sur la forme de ces contenus, quels qu'ils soient, selon son seul savoir-faire logique, générant indifféremment des objets de tous les domaines au moyen d'un seul type de geste : tous les objets du champ thématique engendrés par inférence logique à contenu ne portent que la trace (l'intuition) de la coïncidence de formes.

Bref, la pensée logique à contenu mathématique enrichit le champ thématique en objets mais au prix d'un appauvrissement en termes de marqueurs cognitifs-corporels sollicités. Et si l'agent juge ses constructions à l'aune de son intuition corporelle liée aux particularités de ces constructions, il considérera les résultats mathématiques de ses raisonnements logiques "moins sûrs".

III- Sûreté et robustesse

Quel est le "bilan gains-pertes" entre ces deux modes de pensée ?

D'un côté, le mode logique (à contenu) enrichit d'objets le champ thématique mathématique d'une manière très libre, mais il le fait au détriment du nombre de marqueurs corporels sollicités. D'un autre côté, le

mode gestuel authentique est riche en sollicitation de marqueurs cognitifs-corporels, mais cela se fait au détriment de *l'efficacité* d'engendrement d'objets dans le champ thématique – la pratique par inférence authentique rendant plus coûteuse et donc moins facile l'extension de ce champ. Aussi, il nous semble que pour Borel, le mode authentique, parce qu'il est *corporellement* plus sûr, vaut mieux que le mode logique, qui l'est moins³⁷⁰.

Mais en quoi la sensation cognitive-corporelle de sûreté est-elle une garantie *mathématique* ?

Dans le cas de Borel, et pour tout mathématicien en général, la figure à éviter est bien entendu le paradoxe. Son refus de l'axiomatique, sa méfiance à l'égard de la généralisation de la pensée par inférence logique à contenu, sa revendication constructiviste stricte et son appel à l'effectivité (surtout à partir des années 1898, voir suite) s'entendent à l'aune de la croisade contre les paradoxes. Or, semble nous dire Borel, le corps est un bon rempart : sur le mode authentique, la multiplicité de marqueurs corporels sollicités pour remplir le champ thématique formerait comme une "trame" renforçant la solidité de ce champ au regard du risque de paradoxes, lesquels ne peuvent émaner que de ce champ et non pas de la gestuelle authentique. Pourquoi ? Parce que cette trame est liée par les sensations et, partant, par notre représentation gestuelle (sensible) des contraintes du monde physique. Et cette représentation gestuelle du monde physique ne peut être paradoxale...

Hilbert n'affirmait-il pas cela en 1925 ?

³⁷⁰ Peut-être aussi que la sollicitation d'un plus grand nombre de marqueurs corporels se traduit pour lui par une sensation de plus grand plaisir. Mais d'autres éprouveront plus de plaisir à étendre le champ thématique en exerçant uniquement leur geste rationnel (logique)...

« J'ai toujours pensé qu'il n'y avait que les propositions et les hypothèses qui, parce qu'elles conduisent à d'autres propositions, fussent capables de se contredire, et l'idée que l'état des choses et les événements pussent être contradictoires entre eux me paraît le comble de l'insanité. »³⁷¹

Certes, plutôt que d'attribuer au monde physique une propriété logico-mathématique intrinsèque, il est préférable d'attribuer cette propriété à notre représentation gestuelle (sensible) du monde – forgée dans et par notre interaction corporelle avec les éléments physiques. Néanmoins, un tel postulat de *non paradoxe physique* est implicitement à la base de l'idée même de théorie physique : un paradoxe mathématique dans une théorie physique est signe d'invalidité (par exemple, l'hypothèse de "trous de vers" spatio-temporels macroscopiques est invalidée par la mise en lumière du paradoxe logique du "grand-père"). Quant à la possibilité que la nature (telle qu'elle est *imprimée* gestuellement dans notre sensibilité) puisse engendrer des phénomènes physiques paradoxaux (au sens mathématique), cela ne s'est jamais vu et relève du non-sens³⁷². Et si le paradoxe est absent de notre représentation sensible des phénomènes physiques, car c'est un fait (de notre représentation sensible) du monde, alors Hilbert a raison : le paradoxe est une erreur de la pensée logique à contenu mathématique (voire à contenu épistémique en général) et donc il émerge exclusivement du champ thématique.

Encore une fois, nous allons admettre comme un postulat une telle affirmation – qui devrait (et devra) faire l'objet d'une large justification. Mais nous pouvons l'illustrer encore par un exemple, qui vaut métaphore : les célèbres dessins "paradoxaux" d'Eischer ne le sont pas quand on les

³⁷¹ Hilbert, *Sur l'infini*, 1925, p.

³⁷² Les supposés *paradoxes* de la physique quantique ne sont pas des paradoxes mathématiques (puisque la théorie quantique est consistante), ce seraient plutôt des incapacités de représentation objectale.

considère comme le phénomène physique de dépôt d'encre sur un support en papier. Ils le deviennent seulement s'ils sont associés épistémiquement, dans le champ thématique, aux objets physiques qu'ils *représentent*.

Ainsi, l'appréhension d'un tracé d'encre sur une surface en papier est du domaine du geste primordial cognitif-corporel, en revanche, l'association épistémique aux objets physiques représentés est typiquement une inférence combinatoire respectant une coïncidence de forme et visant la tautologie (on a modifié les contenus sans toucher à la structure logique, on a donc respecté la tautologie)

.3 – CONCLUSION

Résumons en quatre points ce qui précède :

1- Nous avons considéré l'effectivité comme une expression de la mathématique authentique, i.e. contrainte par le *principe de conservation épistémique*, au sein d'une pratique non contrainte : une démonstration effective, ou un fragment effectif dans une démonstration, est un îlot de mathématique authentique.

2- Nous avons attribué à la pensée mathématique authentique une fragmentation en plusieurs domaines, chacun régis par une syntaxe gestuelle dont la dynamique est l'auto-amplification³⁷³ ; alors que la pensée logique à contenu mathématique a été définie comme un domaine unifié sous une seule gestuelle "extériorisante", i.e. agissant sur les formes des objets du champ thématique³⁷⁴.

3- Nous avons postulé l'existence dans chaque domaine de la pensée mathématique authentique d'un groupe de "marqueurs cognitifs-

³⁷³ **Châtelet**, *Les enjeux du mobile*, p.31-33 : « Ce concept de geste nous semble crucial pour approcher le mouvement d'abstraction amplifiante des mathématiques, qui échappe aux paraphrases rationalisantes [...]. Il faudrait plutôt parler d'une propulsion, qui se referme en une impulsion, d'un même geste qui décape une structure et réveille en nous d'autres gestes. [...]: il gagne de l'amplitude en se déterminant. »

³⁷⁴ Établissant « des ponts entre nous et les choses » (**Châtelet**, *op. cit.*, p.31-33), réunissant des relations arithmétiques « dans un enchaînement extrinsèque » (**Cavallès**, *Méthode axiomatique et Formalisme*, p.178), etc.

corporels" spécifiques³⁷⁵ émanant d'une couche gestuelle cognitive-corporelle que nous avons nommée *primordiale* - ce *mouvement et figuration des membres du corps* dont parle Châtelet - liée à la représentation sensible du monde physique. Et nous avons également postulé un lien entre ces marqueurs spécifiques et la gestuelle mathématique particulière d'un domaine : les premiers influençant l'orientation de cette gestuelle.

4- Enfin, nous avons considéré que le caractère "sûr" ou "robuste" attribué aux raisonnements mathématiques authentiques découlait de la présence des marqueurs cognitifs-corporels spécifiques à chaque domaine sollicité, contrairement au raisonnement logique à contenu qui s'appuie, pour tous les engendremens dans le champ thématique, sur les seuls marqueurs spécifiques au mode logique.

Les prémisses ci-dessus conduisent à la conclusion que l'effectivité exprime la prégnance sous-jacente (sous forme de marqueurs) de la gestuelle primordiale cognitive-corporelle.

Il nous faut donc arriver à notre conclusion.

I- Le mode logique à contenu

La gestuelle du mode logique à contenu mathématique est *marquée* par le geste de *recherche de coïncidences de forme* "extérieure"

³⁷⁵ Il serait sans doute intéressant de pouvoir rapprocher ces "groupes de marqueurs" des "universels de compréhension" dont parle Detlefsen (voir Partie II)

permettant de combiner des contenus sans varier la forme globale (intentionnalité tautologique).

Par exemple, le pas franchi par Lebesgue (et par Borel, mais honteusement) relève d'un acte logique. De la proposition :

“tout ensemble d'intervalles ou de points de Υ peut être encadré par deux ensembles mesurables (méthode d'Archimède)”

à la proposition :

“on peut déterminer la mesure (approchée ou exacte) de tout ensemble d'intervalles ou de points de Υ , même s'il n'est pas mesurable”,

l'inférence est impossible sous le mode authentique du fait que la *mesure d'un ensemble quelconque* n'est pas un objet du champ thématique pouvant être secrété par la gestuelle du mode dans lequel s'est placé Borel pour sa théorie des ensembles mesurables. Lebesgue (et Borel !) ont donc puisé dans le champ thématique un objet appartenant à un autre mode (par exemple, à celui sollicité dans la pratique de prolongement de fonctions au-delà de leur contour) : l'inférence est extrinsèque (comme nous l'avons déjà dit).

La pensée par inférence logique à contenu représente donc un gain d'autonomie : un mathématicien peut créer dans le champ thématique des objets contraires ou indépendants de ses intuitions cognitives-corporelles c'est-à-dire de tout groupe de marqueurs... Le raisonnement logique à contenu mathématique a donc libéré la pratique mathématique de la dictature des représentations gestuelles du monde physique et, partant, du monde physique lui-même (dans la mesure où notre représentation

contient la seule réalité à laquelle nous puissions accéder)³⁷⁶. Et l'axiomatique a permis de circonvenir les erreurs d'une telle pratique en se prémunissant contre ses propres paradoxes : l'adjonction d'un objet dont le contenu thématique est la limitation d'une certaine propriété mathématique (sur les contenus), ce qui est un geste authentiquement logique. Mais à l'échelle des contenus, cela n'a pas d'équivalent dans le mode authentique : il est donc *ressenti* comme arbitraire et artificiel dans le domaine particulier dans lequel le contenu de cet acte formel s'insérerait en tant qu'objet potentiellement secrété...

Que signifie que le contenu thématique résultant d'une inférence logique *s'insère dans un domaine particulier (authentique) en tant qu'objet potentiellement secrété intrinsèquement* ? De fait, nous touchons-là une lacune explicative. De manière générale, les propriétés que nous avons assignées à l'inférence logique à contenu impliquent que cette gestuelle est sensible au mouvement de *variation* des contenus (d'une forme globale invariante), aux formes de ces contenus, mais elle est aveugle aux contenus eux-mêmes en tant qu'ils sont composés de "matière" mathématique : quand un mathématicien effectue une inférence logique à contenu mathématique, par exemple $(a \leq \text{mesure de } E \leq a) \Rightarrow (\text{mesure de } E = a)$, il oublie pour ainsi dire "momentanément" la nature voire le sens authentique des M-objets contenus dans l'inférence – l'inférence effectuée est du domaine de l'algèbre des réels alors que les contenus ne le sont pas nécessairement. Pourtant, il faut bien que le mathématicien qui pratique par inférence logique ait accès au *sens mathématique* de son résultat (contenu) : l'interprétation du résultat par

³⁷⁶ Remarquons que cet argument de "détachement" des mathématiques vis-à-vis des contraintes physiques perçues ne rend pas *irraisonnable l'efficacité des mathématiques* (Wheeler) dans le domaine de la Physique car toute l'activité cognitive humaine (et animale) a été structurée sur les contraintes du monde physique, qu'elle reflète donc structurellement : la pensée mathématique "détachée" du monde physique est efficace en Physique car la pensée dans son ensemble émane d'un organe (le corps) qui s'est structuré entièrement sous les contraintes des lois du monde physique (dont la sélection naturelle).

Lebesgue est ensembliste puisqu'il s'agit de l'extension du domaine des ensembles mesurables. En l'état, il manque donc dans notre analyse l'explicitation de cette dernière étape où le mathématicien "sort" du mode logique à contenu pour réinsérer le résultat dans son domaine d'appartenance – bien qu'il ait été engendré extrinsèquement... Nous y arrivons.

II- Le mode effectif-authentique

Un mathématicien qui qualifie d'effective une procédure (quelle que soit sa conception ou définition de l'effectivité), vit une expérience ancrée dans son système cognitif-corporel – celui qui subit les lois de la matière et prépare le geste physique de son contrôle – *via* des marqueurs spécifiques (présents dans le domaine mathématique particulier où il s'est placé). Alors qu'une procédure ou raisonnement non effectif (i.e. logique à contenu) – par exemple, si le mathématicien est un finitiste, une procédure faisant intervenir le TND faible (raisonnement par l'absurde) sur des objets infinis réalisés³⁷⁷ – renvoie à une expérience plutôt ancrée dans le champ thématique.

Le *principe de conservation épistémique*, qui caractérise une expérience authentique ou effective, pourrait être alors compris comme

³⁷⁷ Nous aurions pu prendre Borel comme exemple, pas le Borel de la démonstration "effective" du théorème fondamental 1895 mais celui d'après 1898 (nous en parlons dans l'annexe de la thèse). En effet, nous l'avons vu dans la Partie I - .3 – III que, même si sa procédure effective de construction d'intervalles est effective au sens kroneckerien, son application itérée un nombre infini dénombrable réalisé de fois ainsi que l'application du TND faible à un raisonnement mettant en jeu la totalité des nombres transfinis de 2^e classe, fait perdre à la démonstration son caractère d'effectivité au sens kroneckerien.

reflétant en quelque sorte une des caractéristiques de notre action physique dans le monde. En effet, la contrainte imposée par ce principe, une inférence ne doit pas modifier la nature de la "matière" entre la prémisse et la conclusion, est peut-être l'image au niveau mathématique de l'expérience représentationnelle gestuelle du monde où, quelle que soit l'action sur une matière physique (par exemple, la taille d'une pierre), elle ne transforme pas la *nature* particulière de cette matière : la matière pierre, bien que taillée, demeure pierre. Dans ce sens, une procédure (ou une démonstration) effective est un morceau d'action cognitive fortement contrainte par les lois de la matière.

Dans l'Introduction de la thèse, nous avons dit que l'*effectivité* se rapporte à la question du *contrôle* de l'acte ou geste mathématique. Nous pouvons maintenant en donner une définition plus précise :

L'effectivité est une instance de *sur-contrôle*, opéré par le système cognitif lié aux contraintes physiques de la matière, sur un raisonnement mathématique logiquement valide, c'est-à-dire garanti par la famille de gestuelles logiques à contenu mathématique du système cognitif mathématique.

L'effectivité agit alors comme une garantie "matérielle" au raisonnement mathématique : dire "c'est *effectivement* démontré" reviendrait à dire, dans la vie quotidienne, "c'est *vraiment* vrai, parce que je l'ai vécu".

III- Coopération

Si nous nous en tenions à ce qui précède, nous ne pourrions pas encore rendre compte de ce qui fait l'unité épistémique de la pensée mathématique malgré la dichotomie *mathématique authentique – logique à contenu mathématique*. En particulier, si cette dernière peut puiser dans le champ thématique secrété par la première, sa gestuelle reste logique : elle s'accomplit (et s'achève) en une tautologie de forme. Mais il faut bien que le mathématicien qui pratique par inférence logique ait accès au *sens mathématique* de son résultat (contenu). Autrement dit, une fois le geste logique accompli, il doit être capable d'interpréter *mathématiquement* le contenu de cette forme pour que cette dernière devienne *résultat mathématique*.

Par exemple, une fois que Lebesgue et Borel ont procédé à l'inférence logique : "tout ensemble d'intervalles ou de points de Υ peut être encadré par deux ensembles mesurables (méthode d'Archimède)" \rightarrow "on peut déterminer la mesure (approchée ou exacte) de tout ensemble d'intervalles ou de points de Υ , même s'il n'est pas mesurable", le geste logique $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ est achevé : la matière mathématique encapsulée dans \mathbf{q} ne regarde pas ce mode.

Pour en arriver au sens mathématique de ce nouvel objet du champ thématique (i.e. les ensembles mesurables non mesurables B), il faut *interpréter* ce contenu. C'est ce que fait Lebesgue : il le voit comme un objet mathématique relié au domaine particulier dans lequel il s'est placé pour penser le concept de mesure, domaine qui du coup s'en trouve élargi. Cela signifie qu'un objet engendré dans le champ thématique par inférence logique, pour être réellement vécu comme mathématique,

demande en retour un acte cognitif afin, d'une part, que ce nouvel objet puisse être cognitivement relié à une expérience proprement mathématique, d'autre part, que l'engendrement de nouveaux objets par la gestuelle de ce domaine puisse prendre en compte cette nouvelle donnée. Le nouveau savoir engendré par l'acte logique à contenu doit d'une manière ou d'une autre se refléter dans un domaine particulier de savoir-faire afin d'être vécu *a posteriori* comme une sécrétion de celui-ci (seule manière de le relier aux autres objets émanant du même domaine).

Il nous semble donc que pour être intégré à la pratique mathématique en général, un nouveau savoir qui fait irruption dans le champ thématique induit un nouveau geste dans un domaine "authentique" particulier, lequel voit ainsi s'élargir sa famille gestuelle.

Ainsi, fort heureusement, les domaines gestuels ne sont pas figés, et entre les deux modes de pensée *authentique* – *logique à contenu* il y a non pas étanchéité, mais coopération. Mais il y a aussi concurrence pour la domination – la contrainte d'effectivité rend dominant, du moins durant cette phase, le système cognitif-corporel, plus frustré mais plus sûr, sur le système thématique, plus volatile.

IV- La formalisation de l'effectivité

L'activité d'un mathématicien se ferait ainsi dans un équilibre relatif, mais pas nécessairement médian, entre la dynamique favorisant le type d'inférence logique sur des contenus propositionnels, et la dynamique gestuelle, favorisant le type d'inférence authentiquement mathématique.

Dans la mesure où nous supposons que la pensée mathématique émerge d'une coopération entre les deux, nous pourrions dès lors décrire différentes épistémologies mathématiques comme reflétant le jeu de domination entre les deux systèmes. Le mathématicien qui raisonne selon le principe d'authenticité (qu'il soit intuitionniste, finitiste, etc.) subit une domination du système cognitif-corporel sur le système logique à contenu, et c'est l'inverse pour celui qui a une pratique de type logiciste³⁷⁸... Nous avons-là un axe, certes fort grossier, sur lequel répartir les différentes croyances, ou plutôt les différents penchant cognitifs, des mathématiciens "contentuels", c'est-à-dire ceux de l'ancienne école (Poincaré, Borel, Hadamard, Cantor, Hilbert...).

La dominance d'un des systèmes sur l'autre n'est ni prédéterminée ni figée chez un individu. Si la possibilité de ces deux systèmes est une donnée de départ de l'organisation cognitive humaine, les penchants individuels favorisent, nous semble-t-il, la dominance de l'un sur l'autre. C'est une question de formation, d'acquisition d'expérience et de "vécu" de l'individu... Mais c'est aussi une question de conviction.

En effet, la capacité à ressentir la "robustesse physique" d'une construction mathématique faite sur le mode authentique est universelle : en raisonnant sur le mode authentique, un mathématicien peut toujours ressentir la *corporalité* de ses gestes. Mais il peut aussi considérer ces sensations comme parasites, secondaires ou malvenues et hors du propos des mathématiques qui est, selon ce point de vue, non pas de garder un enracinement corporel très coûteux épistémiquement et qui bride la liberté de raisonnement mais au contraire d'étendre au mieux le champ thématique des mathématiques. La raison gagne en liberté mathématique ce que la sensibilité lâche en contrôle.

Et de ce point de vue, la thèse de Church-Turing a été aux

³⁷⁸ Idem pour le finitiste stricte et le cantorien, l'anti-réaliste et le réaliste, etc.

mathématiques ce que, par exemple, la théorie de la relativité a été aux sciences physiques du XXe siècle, un acte libérateur au regard d'une trop grande soumission aux intuitions sensibles, un acte (peut-être le dernier) d'autonomisation des mathématiques par rapport à leur origine corporelle : l'extériorisation de la représentation interne du corps par la machine, i.e. la formalisation de l'effectivité en récursivité, a été une "extériorisation" dans le champ thématique de cette représentation. Dans la mesure où cet objet du champ thématique est vu comme une objectivation mathématique de l'effectivité, c'est-à-dire de la mathématique authentique, il n'est dès lors plus besoin d'interroger l'univers sombre et mouvant du ressenti mathématique. Ainsi, paradoxalement, en transformant le contrôle sensible du raisonnement mathématique (effectivité) en un objet parfaitement contrôlé par la raison (récursivité), la thèse de Church-Turing a permis de libérer les mathématiques de l'arbitraire de ce contrôle sensible...

C'est donc l'aboutissement du mouvement d'axiomatisation initié au XIXe siècle, du moins quand on l'interprète au sens de Caveing (p.229) :

*« L'axiomatisation hilbertienne effectue la déréalisation complète de ce M-objet «naturel» au profit d'un système de relations antérieur à tous et à chacun des objets particuliers : point, droite, plan, et à leurs composés, qu'elles définissent implicitement. Ce faisant **elle libère les idéalités géométriques des liens qui les enchaînaient aux idéalités morphologiques caractéristiques de l'espace de la représentation**. Cet espace-là, aux similitudes près, coïncide avec le champ de la perception des graphismes, dont les supports ont été constitués techniquement dans le monde de la culture comme une restriction bidimensionnelle du champ perceptif, dans sa modalité visuelle. C'est dans ce champ que le geste humain fait apparaître le*

tracé approximatif d'une droite, par exemple, comme une anticipation de ce qui sera explicité dans la géométrie euclidienne, geste qui s'accomplit selon un schématisme qui porte en lui une première mathématisation du perçu. »

Mais, comme nous l'avons dit dans le chapitre sur l'assertabilité, cet acte de libération du champ mathématique a eu un effet inverse dans le champ épistémologique: alors que la thèse de Church-Turing a eu pour résultat de libérer les mathématiques du joug cognitif-physique (ou cognitif-corporel), elle a été prise paradoxalement comme une métaphore du monde physique, qui serait donc de nature informationnelle – métaphore qui, en l'état actuel des connaissances et malgré sa prégnance de plus en plus forte dans les sciences physiques et biologiques, n'a été ni prouvée ni infirmée... et reste donc du domaine de la croyance.

Bibliographie

1. **Blanché, Dubucs**, *La logique et son histoire*, coll. "U", série Philosophie, Armand Colin/Masson, 1996, p.382.
2. **Bloch**, *Apologie pour l'histoire*, Librairie Armand Colin, Paris, 1974.
3. **Borel**, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, in *Annales scientifiques de l'E.N.S.*, 3^e série, tome 12 (1895).
4. **Borel**, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, 1898.
5. **Borel**, *A propos de l'"infini nouveau"*, *Revue philosophique*, 1900 (1899), t. 48, p.383-390. Repris dans **Œuvres complètes**, p.2113-2120.
6. **Borel**, *L'antinomie du transfini*, *Revue philosophique*, 1900, t.49, p.378-383. Repris dans *Œuvres complètes*, p.2121-2127.
7. **Borel**, *Sur le calcul des intégrales définies*, in *Journal de mathématiques*, 1912, 6^e série, t. 8, p.159-210, repris dans les *Œuvres*, t.2, p.827-878.
8. **Borel**, *A propos de la récente discussion entre M. R. Wavre et M. P. Lévy*, in *Œuvres complètes* p.2387-2392.
9. **Borel**, *Sur l'illusion des définitions numériques*, 1947, in *Œuvres*

complètes, p.979-981.

10. **Brouwer**, *Consciousness, Philosophy, and Mathematics*, in *Proceedings of the tenth International Congress of Philosophy*, Amsterdam, 1948, trad. dans **Largeault**, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.419-440.
11. **Burali-Forti**, "Una questione sui numeri transfiniti", in *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **11** (1897): 154-164.
12. **Cantor**, *Briefe*, .
13. **Cavaillès**, *Transfinito et continuo*, in *Revue Philosophique*, septembre 1941, réédité dans *Jean Cavaillès, Philosophie Mathématique*, Hermann, 1962.
14. **Cavaillès**, *Méthode axiomatique et Formalisme*, Paris, Hermann, 1981.
15. **Cavaillès**, *Sur la logique et la théorie des sciences*, Paris, Vrin, 1997.
16. **Cave Brown**, *La guerre secrète*, Ed. Pygmalion, 1981.
17. **Caveing**, *Le problème des objets dans la pensée mathématique*, Vrin, coll. *Problèmes & Controverses*, 2000
18. **Châtelet**, *Les enjeux du mobile*, Seuil, coll. Des Travaux, 1993.

19. **Church**, *A Note on the Entscheidungsproblem*, in *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1, 1936
20. **Church**, *Correction to a Note on the Entscheidungsproblem*.
21. **Dedekind**, *Was sind und was sollen die Zahlen*, in Ewald 1996, p.790.
22. **Denjoy**, *Commentaire sur la mesure des ensembles*, in Borel, *Œuvres*, Paris, CNRS, 1972, vol.1.
23. **Desanti**, *Les idéalités mathématiques*, Paris, Seuil, 1968
24. **Detlefsen**, *Hilbert's program : an essay on mathematical instrumentalism*, Kluwer Academic, Dordrecht, Boston, 1986.
25. **Detlefsen**, *Brouwerian Intuitionism*, 1990, in **Detlefsen** (ed.), *Proof and Knowledge in Mathematics*, Routledge, 1992, p.208-250.
26. **Detlefsen**, *Poincaré against the Logicians*, in *Synthese* **90** : 349-378, 1992.
27. **Dosen**, *Le programme de Hilbert*, in *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, **Sallantin & Szczeciniarz** (eds), Nouvelle Encyclopédie Diderot, Presses Universitaires de France, Paris, 1999, pp. 87-106
28. **Dubucs**, *Feasibility in Logic*, *Synthese* **132**, 2002, p.213-237.
29. **Dummett**, *The philosophical basis of intuitionistic logic*, in

Proceedings of the Logic Colloquium, Bristol, 1973, repris dans **Putnam & Benacerraf** (eds.), *Philosophy of mathematics*, 2nd edition, Cambridge University Press, 1983, p.97-129.

30. **Euclide**, *Les éléments*, Livre I, traduction de B. Vitrac, *Euclide, Les éléments*, volume 1, coll. Bibliothèque d'histoire des sciences, PUF, Paris 1990.
31. **Ewald**, *From Kant to Hilbert, A source book in the foundations of mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1996.
32. **Fréchet**, *Vie et œuvre d'Emile Borel* in Borel, *Œuvres*, Ed. du CNRS, vol.1, 1972, p.59.
33. **Fréchet**, *Le théorème de Borel dans la théorie des ensembles abstraits*, Bulletin de la S.M.F., tome 45 (1917), p.1-8.
34. **Gandy**, "On Axiomatic Systems in Mathematics and Theories in Physics", 1953 et suiv.
35. **Gochet & Gribomont**, *Logique, méthodes pour l'informatique fondamentale, Vol.1*, Hermes, 1990.
36. **Heinzmann**, *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité*, Paris, Blanchard, 1986.
37. **Hilbert**, *Sur les problèmes futurs des mathématiques, les 23 problèmes*, dans *Compte rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiques tenu à Paris du 6 au 12 août*

1900, Gauthier-Villard, 1902. Réédité par les Editions Jacques Gabay, 1990.

38. **Hilbert**, *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, in *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg*, 1904, p.174–185. Traduction française dans **Rivenc & de Rouilhan**, *Sur les fondements de la logique et de l'arithmétique*, in *Logique et fondements des mathématiques – Anthologie (1850 – 1914)*, Bibliothèque scientifique Payot, Payot, 1992, p.245-270.
39. **Hilbert**, *Axiomatisches Denken* in *Mathematische Annalen* **78**: (1917)1918, p.405-415. Trad. anglaise par W. **Ewald**, *Axiomatic Thought*, in *From Kant to Hilbert*, vol.II, Clarendon Press, Oxford, 1996, p.1105-1115.
40. **Hilbert**, *Probleme der mathematischen Logik*, 1920, traduit par **Ewald** dans *From Kant to Hilbert*, vol.II, Clarendon Press, Oxford, 1996, p.943-946.
41. **Hilbert**, *Neubegründung der Mathematik : Erste Mitteilung* in *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 1, 1922, p.157–177. Traduction française par J. **Largeault**, *Nouvelle fondation des mathématiques : Première communication*, in *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.107-130.
42. **Hilbert**, *Über das Unendliche*, in *Math. Annal.*, 95, (1925)1926, p. 161-190. Traduction française par J. **Largeault**, *Sur l'infini*, in *Logique mathématique. Textes*. Armand Colin, coll.

U, Paris, 1972.

43. **Kleene**, *Recursive predicates and quantifiers*, Transactions of the A.M.S. 53, 1943, p.41-73.
44. **Lacombe**, *La théorie des fonctions récursives et ses applications*, in Bulletin de la société mathématique de France, 88, 1960, p.393-468.
45. **Largeault**, *La logique*, coll. *Que s'ais-je ?*, PUF 1998.
46. **Largeault**, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992.
47. **Largeault**, *La logique*, coll. *Que sais-je ?*, P.U.F., 1993, p.54.
48. **Lebesgue**, *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, C. R. Acad. Sci. **132** (1901), p.1025-1028
49. **Lebesgue**, *Intégrale, longueur, aire*, thèse soutenue à Nancy, 1902.
50. **Lebesgue**, *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration*, dans les *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, 3e série, tome 35 (1918), Gauthier-Villard, p. 191-250. Accessible par Internet notamment à l'adresse (Numdam) :www.numdam.org/numdam-bin/browse?id=ASENS_1918_3_35
51. **Lebesgue**, *Lettres d'Henri Lebesgue à Emile Borel*, in Cahiers du séminaire des mathématiques, t.12 (1991).

52. **Leibniz**, *Recherches générales sur l'analyse des notions et des vérités*, J.B. Rauzy (éd.), coll. *Epiméthée*, P.U.F, 1998.
53. **Martin-Löf**, *Truth of a proposition, evidence of a judgement, validity of a proof*, in *Synthese* **73** (1987), p.407-420.
54. **Michel**, *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*, col. *Mathesis*, Vrin, 1992.
55. **Molk**, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, T.1, réédité par les Editions Gabbay, 1992, p.159. le gras est de nous.
56. **Poincaré**, *Sur les fonctions à espaces lacunaires*, *American Journal of mathematics*, t.XIV, repris dans *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 1883, 1^{er} semestre (t.XCVI, n° **16**), p.1134-1136. C'est cette dernière publication qui nous servira de référence.
57. **Poincaré**, *Les mathématiques et la Logique*, in *Revue de Métaphysique et de Morale*, années 1905, p. 815-835, 1906, p. 17-38, et p. 294-317. Réédités par **Heinzmann**, *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédictivité*, Paris, Blanchard, 1986.
- a. 1905 : *Les mathématiques et la logique* ;
 - b. 1906 : *Les mathématiques et la logique* (Les logiques nouvelles) ;
 - c. 1906 : *Les mathématiques et la logique* (Les derniers efforts

des logisticiens) ;

58. **Poincaré**, 1906 : *A propos de la logistique*.
59. **Poincaré**, *Science et Méthode*, Editions Kimé, Paris, 1999.
60. **Poincaré**, *La valeur de la science*, 1905.
61. **Putnam & Benacerraf** (eds.), *Philosophy of mathematics*, 2nd edition, Cambridge University Press, 1983.
62. **Richard**, *Les principes des mathématiques et le problème des ensembles*, in *Revue générale des sciences*, 30 juin 1905, traduit et commenté par Jean Mosconi dans **Rivenc & de Rouilhan**, *Logique et fondements des mathématiques : anthologie (1850-1914)*, (sous la direction de), Bibliothèque scientifique Payot, 1992, p.271-275.
63. **Rivenc, de Rouilhan**, *Logique et fondements des mathématiques : anthologie (1850-1914)*, (sous la direction de), Bibliothèque scientifique Payot, 1992, p.294-307.
64. **Ruyer**, *Logique*, PUF, 1990.
65. **Sundholm**, *Proofs as Acts and Proofs as Objects : Some questions for Dag Prawitz*, in *Theoria*, 64, 187 - 216, 2000.
66. **Tieszen**, *What is a proof*, in Michael Detlefsen (Ed.), *Proof, Logic and Formalization*, Routledge, Dordrecht, 1991, p.57-76.

67. **Troelstra, van Dalen**, *Constructivism in Mathematics – An Introduction*, vol.1, North-Holland, 1988.
68. **Turing**, *On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, in *Proceedings of the Mathematical Society*, 2, vol.42 (1936-1937), pp.230-265. Repris dans Turing, Girard, *La machine de Turing*, Sources du Savoir, Seuil, 1995, pp.42-104.
69. **Turing**, *Computing Machinery and Intelligence*, *Mind*, 1950, vol. LXI, n°236, traduit par *Les ordinateurs et l'intelligence*, in Turing&Girard, *La machine de Turing*, Seuil, coll. Sources du Savoir, 1995, p.135-175.
70. **Wagner**, *La machine en logique*, PUF, coll. Science, histoire et société, 1998.
71. **Zermelo**, *Beweis daß jede Menge wohlgeordnet kann*, in *Math. Annalen* 59, 1904, p.514-516.
72. **Zermelo**, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, 1908, traduit par *Nouvelle démonstration de la possibilité du bon ordre*, traduit et commenté par F. Longy dans **Rivenc, de Rouilhan**, *Logique et fondements des mathématiques : anthologie (1850-1914)*, (sous la direction de), Bibliothèque scientifique Payot, 1992, p.342-366.

TEXTES NON CITÉS

Pour écrire cette thèse, nous avons lu et étudié un grand nombre de textes dont seuls quelques-uns ont été cités nommément. Tous les autres ont influencé notre réflexion préparatoire mais n'ont pas trouvé leur place dans le cadre de la thèse. Néanmoins, ils se trouvent, d'une manière ou d'une autre, intégrés à notre pensée. Nous leur rendons ici leur place explicite :

73. **Borel**, *Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles*, 1905, reproduit dans **Rivenc-Rouilhan**, p.294-295.
74. **Borel**, *Cinq lettres de Baire, Borel, Hadamard et Lebesgue sur la théorie des ensembles*, 1905, in **Rivenc-Rouilhan**, p.295-307
75. **Borel**, *Sur les principes de la théorie des ensembles*, 1908, in *Œuvres complètes*, p.1267-1269.
76. **Borel**, *Les « paradoxes » de la théorie des ensembles*, 1908, in *Œuvres complètes*, p.1271-1276.
77. **Borel**, *L'infini mathématique et la réalité*, 1914, in *Œuvres complètes*, p.2137-2150.
78. **Borel**, *La théorie de la mesure et la théorie de l'intégration*, 1914, in *Œuvres complètes*, p.214-253.

79. **Borel**, *La théorie de la mesure et la théorie de l'intégration*, 1914, in *Œuvres complètes*, p.214-253.
80. **Borel**, *Sur les ensembles effectivement énumérables et sur les définitions effectives*, 1919, in *Œuvres complètes*, p.1361-1363.
81. **Borel**, *Sur les définitions analytiques et sur l'illusion du transfini*, 1919, in *Œuvres complètes*, p.229-233.
82. **Brouwer**, *Les principes logiques ne sont pas sûrs*, 1908, traduit et commenté par J. **Bouveresse** dans **Rivenc, de Rouilhan**, *Logique et fondements des mathématiques : anthologie (1850-1914)*, (sous la direction de), Bibliothèque scientifique Payot, 1992, p.379-392.
83. **Brouwer**, *Intuitionisme et formalisme*, 1912, traduit, commenté et édité par **Largeault**, , *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.39-53.
84. **Brouwer**, *Sur le rôle du principe du tiers exclu dans les mathématiques, spécialement en théorie des fonctions*, 1923, traduit, commenté et édité par **Largeault**, , *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.197-205.
85. **Brouwer**, *Dissociation intuitioniste de notions fondamentales des mathématiques*, 1925, traduit, commenté et édité par **Largeault**, , *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.223-228.

86. **Brouwer**, *Remarques intuitionistes sur le formalisme*, 1928, traduit, commenté et édité par **Largeault**, , *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.239-251.
87. **Brouwer**, *Mathématique, science, et langage*, 1929, traduit, commenté et édité par **Largeault**, , *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.253-269.
88. **Brouwer**, *Principes directeurs de la mathématique intuitioniste*, 1947, traduit, commenté et édité par **Largeault**, , *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.415-417.
89. **Brouwer**, *Conscience, philosophie et mathématiques*, 1948, traduit, commenté et édité par **Largeault**, , *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.419-440.
90. **Brouwer**, *Les propriétés essentiellement négatives*, 1948, traduit, commenté et édité par **Largeault**, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.441-444.
91. **Brouwer**, *Base historique, principes et méthodes de l'intuitionisme*, 1952, traduit, commenté et édité par **Largeault**, , *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.445-463.
92. **Choquet**, *Épistémologie du transfini*, dans Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, **1**, 1980, Université Pierre et Marie Curie.

93. **Dummett**, *Frege Philosophy of Mathematics*, London, Duckworth, 1991.
94. **Dummett**, *Elements of Intuitionism* (2nd Edition), Clarendon Press, 2000.
95. **Feferman**, *Mathematical Intuition vs. Mathematical Monsters*, *Synthese* **125** (2000), 317-332.
96. **Frege**, *Begriffsschrift* (1879), traduit et commenté par M.A. Sinaceur dans **Rivenc, de Rouilhan**, *Logique et fondements des mathématiques : anthologie (1850-1914)*, (sous la direction de), Bibliothèque scientifique Payot, 1992, p.93-129.
97. **Frege**, *Écrits logiques et philosophiques* (1879-1925), Seuil, coll. Points Essais, 1994.
98. **Frege/Hilbert**, *Correspondance* (1900), traduit et commenté par J. Dubucs, dans **Rivenc, de Rouilhan**, *Logique et fondements des mathématiques : anthologie (1850-1914)*, (sous la direction de), Bibliothèque scientifique Payot, 1992, p.215-235.
99. **Gentzen**, *Etat présent de la recherche sur les fondements des mathématiques*, 1938, traduit, commenté et édité par **Largeault**, , *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.395-414.
100. **Gödel, Girard, Nagel, Newman**, *Le théorème de Gödel*, Seuil, coll. Sources du savoir, 1989.

101. **Herbrand**, *Les bases de la logique hilbertienne*, 1930, dans *Écrits logiques*, P.U.F., 1968
102. **Heyting**, *Intuitionism, an introduction*, North-Holland Publishing Compagny, 1971.
103. **Hilbert**, *Les fondements des mathématiques*, 1927, traduit, commenté et édité par **Largeault**, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.145-163.
104. **Hilbert**, *Problèmes de fondation des mathématiques*, 1928, traduit, commenté et édité par **Largeault**, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.175-185.
105. **Hilbert**, *Le fondement de l'arithmétique élémentaire*, 1930, traduit, commenté et édité par **Largeault**, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.187-196.
106. **Kleene**, *Introduction to Metamathematics*, North-Holland Publishing Compagny, 1967.
107. **Kreisel**, *Le programme de Hilbert*, traduit, commenté et édité par **Largeault**, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.465-500.
108. **Lebesgue**, *Sur les fonctions représentables analytiquement* (1905), Éditions Gabay, 1996.
109. **Lebesgue**, *Sur certaines démonstrations d'existence* (1917), dans *Oeuvres scientifiques*, Institut Mathématique-Université de

- Genève (Ed.), Coll. *L'Enseignement Mathématique*, 1972, t.2, p.279-290.
110. **Lebesgue**, *Du choix des définitions* (1934), dans *Oeuvres scientifiques*, Institut Mathématique-Université de Genève (Ed.), Coll. *L'Enseignement Mathématique*, 1972, t. 3, p.248-260.
111. **Lebesgue**, *Les controverses sur la théorie des ensembles et la question des fondements* (1941), dans *Oeuvres scientifiques*, Institut Mathématique-Université de Genève (Ed.), Coll. *L'Enseignement Mathématique*, 1972, t.5, p.287-300.
112. **Lebesgue**, *Sur la mesure des grandeurs* (édition 1956), réédité chez Blanchard, Paris, 1975.
113. **Lusin**, *Leçons sur les ensembles analytiques* (1930), Éditions Gabay, 1996.
114. **Mitchell**, *Dummett's Intuitionism is not Strict Finitism*, in *Synthese* **90** (1992), 437-458.
115. **Monna**, *The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue*, in *Archive for History of exact Sciences*, Vol. 7, 1972, 57-84.
116. **Parsons**, *Reason and Intuition*, *Synthese* **125** (2000), 299-315.
117. **Poincaré**, *Reflexion sur les deux notes précédentes*, 1909,

- dans **Heinzmann**, p.224-229.
118. **Poincaré**, *On transfinite numbers*, 1910, dans **Ewald**, p.1071-1074.
119. **Poincaré**, *La logique de l'infini*, 1912, dans **Heinzmann**, p.305-315.
120. **Proust**, Joëlle, *A Plea for Mental Acts*, *Synthese* **129** (2001), 105-128.
121. **Russell**, *Le Réalisme Analytique*, 1911, traduit et édité par **Heinzmann**, p.296-304.
122. **Skolem**, *The foundations of elementary arithmetic established by means of the recursive mode of thought, without the use of apparent variables over infinite domains*, 1923, édité et commenté par **Van Heijenoort**, *From Frege to Godel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931 (Source Books in History of Sciences)*, Harvard University Press, 1967, p302-333.
123. **Sundholm**, *Proof theory and meaning*, in *Handbook of Philosophical Logic, Vol.III : Alternatives to Classical Logic*, Reidel Publishing Compagny, 1986, p.471-507.
124. **Thirion**, *Les mathématiques et le réel*, IREM – Histoire des mathématiques, Ellipses, 1999.
125. **Van Heijenoort**, *From Frege to Godel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931 (Source Books in History of*

Sciences), Harvard University Press, 1967.

126. **Van Heijenoort**, *L'œuvre logique de Jacques Herbrand et son contexte historique*, in *Proceedings of the Herbrand Symposium Logic Colloquium '81*, publié par North-Holland Publishing Compagny, 1982, p.57-85.
127. **Vuillemin**, *La philosophie de l'algèbre*, Tome Premier, P.U.F., 1962.
128. **Weyl**, *Sur la crise contemporaine des fondements des mathématiques*, 1921, traduit, commenté et édité par **Largeault**, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, 1992, p.55-105.
129. **Wright**, *Strict Finitism*, in *Synthese* **51** (1982) 203-282.
130. **Youschkevitch**, *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*, *Archive for History of exact Sciences*, Vol. 16, 1976, 37-85.

TEXTES GENERAUX :

131. **Belna**, *Cantor*, Les belles lettres, 2000.
132. **Cassou-Noguès**, *Hilbert*, Les belles lettres, 2001.
133. **Delahaye**, *Information, complexité et hasard*, Hermes

Sciences Publications, 2^e ed., 1999.

134. **Dowek**, *Les métamorphoses du calcul*, Le Pommier, 2007.
135. **Hodges**, *Alan Turing ou l'énigme de l'intelligence*, Bibliothèque scientifique Payot, 1988.
136. **Leff & Rex**, *Maxwell's Demon : Entropy - Information - Computing*, IOP Publishing Ltd, Adam Hilger - Bristol, 1990.
137. **Parrochia**, *Cosmologie de l'information*, Hermes, 1994.
138. **Penrose**, *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and The Laws of Physics*, Oxford University Press, 1989.
139. **Wang**, *Kurt Gödel*, Armand Colin, 1990.

Table des matières élargie

AVANT PROPOS	9
I - Pourquoi l'effectivité	9
II- Objectifs programmatiques et problématique de la thèse.....	17
III- Pourquoi Borel et ses Leçons - 1898 ?.....	19

Partie I - Histoire

.1 - INTRODUCTION	23
I- Contexte historique.....	23
1°- Kronecker et Cantor.....	24
<i>a) Kronecker</i>	<i>24</i>
<i>b) Cantor.....</i>	<i>31</i>
2°- De Hilbert à Turing et Church	35
<i>a) Hilbert</i>	<i>35</i>
<i>b) Récursivité</i>	<i>55</i>
3°- Fenêtre historique	66
II- Problématique épistémologique.....	69
1°- Une description heuristique	71
2°- Choix de la méthodologie.....	74
III- Plan de la thèse.....	82

.2 - "FRANCHIR LE PAS" OU TRAVERSER LE RUBICON ?	85
I- Problématique	86
II- Borel (et Lebesgue) dans le texte.....	93
1°- La définition des ensembles mesurables.....	93
2°- Analyse de l'extrait de Borel	101
3°- Les ensembles "quelconques" de Borel.....	105
4°- Lebesgue	108
5°- Définitions constructives vs. descriptives.....	113
III- 1901 : Borel et Lebesgue bifurquent	118
1°- Lettre numérotée I.....	119
2°- Lettre numérotée II	120
3°- Lettre numérotée III	121
IV- 1912 : Les explications de Borel.....	129
1°- Arguments	129
2°- Les ensembles bien définis de Borel.....	134
3°- Borel-1898 expliqué par Borel-1912	141
4°- Le cœur du problème : les ensembles arbitraires.....	144
V- Conclusion	156
.3 –INFINI DENOMBRABLE ET EFFECTIF CHEZ BOREL	159
I- Introduction.....	159
II- les ensembles de mesure nulle dans les Leçons-1898	161
1°- Le segment réel (0,1) amputé de ses rationnels : l'ensemble A.....	161
<i>a) A n'est pas dénombrable : du mode "infini potentiel" au mode "infini actuel"</i>	<i>163</i>
<i>b) A est non dénombrable – mode "infini actuel"</i>	<i>170</i>
<i>c) A est non dénombrable : fin de la démonstration</i>	<i>172</i>
i) théorème fondamental	174
ii) fin de la démonstration.....	176
2°- Le problème du continu et les ensembles de mesure nulle.....	178
<i>a) La longueur de A (non dénombrable) peut être rendue nulle.....</i>	<i>180</i>
<i>b) A a la puissance du continu.....</i>	<i>182</i>
1°- Un problème de constructivité.....	185
<i>a) Définition d'un nombre ξ.....</i>	<i>186</i>

<i>b) La totalité des nombres ξ a la puissance du continu.....</i>	188
III – Zoom sur l’additivité dénombrable : le théorème fondamental.....	190
1°- Théorème fondamental : démonstration des Leçons-1898.....	195
<i>a) Démonstration de Borel des Leçons – 1898.....</i>	196
<i>b) Enoncé complété.....</i>	207
2°- Théorème fondamental : démonstration de la thèse de 1895.....	212
<i>a) Exposé de la démonstration</i>	213
<i>b) Trois problèmes</i>	223
3°- Borel a-t-il démontré constructivement son théorème ?.....	226
<i>a) Le choix d’indication</i>	226
<i>b) Tentative de démonstration “effective” du théorème de 1895</i>	232
IV – Conclusions	240
1°- Domaine de l’effectif et de l’existant chez Borel 1895-1898.....	240
2°- La procédure effective chez Borel 1895-1898.....	245

Partie II - Épistémologie

.1 - INTRODUCTION	252
I- Les existants mathématiques chez Borel (1898) – rappel.....	254
1°- Liste brute	255
2° - Relation avec l’effectivité.....	257
3° - Classement	257
II- Effectivité et procédure effective (Borel, 1895-1898)	259
1°- Effectivité et procédure effective chez Borel.....	260
2°- Retour sur Kronecker.....	264
3°- Types de procédures effectives	271
.2 –FONDEMENTS EPISTEMOLOGIQUES DE L’EFFECTIVITE.....	277
I – Effectivité et Intuitionisme	278
1°- La preuve intuitionniste et la procédure effective	279

2°- Générale, potentielle et virtuelle.....	288
II - L'assertabilité.....	298
1°- Le point de vue anti-réaliste classique.....	298
2°- Le point de vue anti-réaliste strict.....	305
<i>a) Sur le Principe d'immanence</i>	<i>311</i>
<i>b) Sur le Principe d'implicité</i>	<i>324</i>
III- Effectivité et acte mathématique cognitif	331
1°- Preuve, intuition, évidence, acte	333
2°- Intentionnalité de l'acte, contenu de l'acte	347
3°- Application du schéma à 9 cas pratiques	354
4°- Preuve intuitionniste et effectivité : cinq cas	368
.3 – MODES DE CONNAISSANCE	384
I - Le principe de conservation épistémique.....	385
II- L'inférence logique à contenu mathématique.....	408
III- Accessibilité actionnelle	422
IV- Les architectures de Poincaré (Detlefsen-1992).....	442

Partie III - Conclusion

.1 – GESTES AUTHENTIQUES	486
I- Les objets dans la pensée mathématique – Maurice Caveing.....	486
II- Nature du geste – Jean Cavailles	498
III- Théâtralité du geste – Gilles Châtelet.....	506
IV- Embryogenèse des modes mathématiques	509
.2 – L'INFERENCE LOGIQUE A CONTENU.....	513
I- Comparaison	514
II- Nature et dynamique des gestes logiques à contenu.....	519
III- Sûreté et robustesse	522

.3 – CONCLUSION	526
I- Le mode logique à contenu.....	527
II- Le mode effectif-authentique.....	530
III- Coopération	532
IV- La formalisation de l’effectivité	533

ANNEXE 1

Textes en version originale (anglais)

P.2 : **Ewald**, *From Kant to Hilbert, A source book in the foundations of mathematics* (1996)

P.5 : **Troelstra & van Dalen**, *Constructivism in Mathematics – An Introduction* (1988)

P.14 : **Hilbert**, *Axiomatisches Denken* (1918)

P.16 : **Kleene**, *Recursive predicates and quantifiers* (1943)

P.19 : **Dummett**, *The philosophical basis of intuitionistic logic* (1973)

P.37 : **Detlefsen**, *Brouwerian Intuitionism* (1990)

P.59 : **Dubucs**, *Feasibility in Logic* (2002)

P.68 : **Tieszen**, *What is a Proof ?* (1991)

P.73 : **Martin-Löf**, *Truth of a proposition, evidence of a judgement, validity of a proof* (1987)

P.76 : **Sundholm**, *Proofs as Acts and Proofs as Objects : Some questions for Dag Prawitz* (2000)

P.79 : **Detlefsen**, *Poincaré against the Logicians* (1992)

WILLIAM EWALD

*From Kant to Hilbert,
A source book in the foundations of
mathematics*

1996

Clarendon Press, Oxford, 1996.

(Extraits : p.942; p.944 ; p.1106-1107)

p.942 :

"Kronecker held strong opinions about mathematical ontology : in his view, only the natural numbers genuinely exist; all other legitimate mathematical objects must be constructed from them in a finite number of steps. He had no tolerance for completed infinite collections or for non-constructive definitions."

p.944 :

"Kronecker fights against every concept to the extent that it makes statements possible whose correctness is not decidable in a finite number of operations. For example he allows the concept of the irreducibility of an entire rational function (with integral coefficients) only under the condition that a finite process is given for deciding the irreducibility. Kronecker told me personally that the statement that there are infinitely many prime numbers makes no sense until one has shown that after every prime number there is another prime number within a determinable numerical interval - as Euclid did, when he proved that there must be at least one prime number between a prime p and the number $p! + 2$. Propositions like the theorem of Dirichlet, that in every arithmetic progression (where the difference is not divisible by the initial element) there are infinitely many prime numbers, he declares to be inadmissible and in need of supplementation.

And Kronecker restricts logic as well. Just as he forbids arbitrary operation with the concepts 'reducible', 'irreducible', etc., so he stands towards the purely logical propositions like the *tertium non datur*, whose applicability he admits only

under the condition that there is the possibility of deciding the existential question by a finite procedure.”

p.1106 :

“Hilbert in the following lecture does not directly grapple with technical problems raised by these developments; nor was he to do so in print until his proof-theory papers of 1922. Brouwer and Weyl, who were to be prominent targets in his later articles, are not mentioned; Cantor, Poincaré, and the paradoxes are touched on only briefly. Instead, Hilbert surveys the role of axiomatization in mathematics and the physical sciences; he restates and refines his account of the axiomatic method and, in the wake of the *Principia* and of Zermelo's axiomatization, points again to the need for a direct proof of the consistency of number theory and set theory. He also seeks to turn the attention of mathematicians to the study of *proof*, and in addition to the consistency and independence of the axiom, proposes the problems of the *decidability* in a finite number of steps of mathematical problems, the criteria for the *simplicity* of a proof, the relationship between the *content* and the *formalism* of mathematics, and the *solubility in principle* of every mathematical problem. As Hilbert admits, his suggestions here are programmatic, and all the details remain to be worked out.”

p.1107 :

“As the present selection makes clear, Hilbert viewed formal axiom systems instrumentally, as a powerful tool for mathematical research, a tool to be employed when a field had reached a point of sufficient ripeness. But he nowhere suggests that the whole of mathematics can simply be *identified* with the study of formal systems; and indeed in his proof-theoretical writings he took considerable pains to point out that the genuine mathematics - *inhaltliche Mathematik* - takes place, not in the formalism, but in the metalanguage. For all these reasons, Hilbert himself rejected the label 'formalist' (see, for example,

Hilbert 1931a, §35), and students of his thought would do well to follow his example.”

**A.S. TROELSTRA
&
D. VAN DALEN**

Constructivism in mathematics
An introduction
Volume I

1988

North-Holland.

(Extraits: p.1 – 11 ; p.16-19)

8. Intuitionistic second-order logic and arithmetic	160
9. Higher-order logic and arithmetic	168
10. Notes	174
Exercises	177
4. Non-classical axioms	185
1. Preliminaries	186
2. Choice axioms	189
3. Church's thesis	192
4. Realizability	195
5. Markov's principle	203
6. Choice sequences and continuity axioms	206
7. The fan theorem	217
8. Bar induction and generalized inductive definitions	223
9. Uniformity principles and Kripke's schema	234
10. Notes	238
Exercises	242
5. Real numbers	251
1. Introduction	251
2. Cauchy reals and their ordering	253
3. Arithmetic on \mathbb{R}	260
4. Completeness properties and relativization	266
5. Dedekind reals	270
6. Arithmetic of Dedekind reals and extended reals	277
7. Two metamathematical digressions	280
8. Notes	284
Exercises	286
6. Some elementary analysis	291
1. Intermediate-value and supremum theorems	291
2. Differentiation and integration	295
3. Consequences of WC-N and FAN	303
4. Analysis in CRM: consequences of CT_0 , ECT_0 , MP	307
5. Notes	320
Exercises	322
Bibliography	327
Index	I
List of symbols	XI

CHAPTER 1

INTRODUCTION

In this chapter we first present a brief characterization of the various forms of constructivism which shall play a role in the book later on. After the review of constructivist trends, we illustrate the idea of constructivity by means of some simple and quite elementary examples in section 2; most of the points discussed will receive a more thorough treatment in later chapters. Section 3 introduces the Brouwer–Heyting–Kolmogorov interpretation of the logical operators, and the method of weak counterexamples. Section 4 gives a brief historical survey.

1. Constructivism

1.1. Time and again, over the last hundred years certain mathematicians have defended an approach to mathematics which might be called “constructive” in the broad sense used in this book, in more or less explicit opposition to certain forms of mathematical reasoning used by the majority of their colleagues. Some of these critics of the mathematics of their (our) time not only criticized contemporary mathematical practice, but actually endeavoured to show how mathematics could be rebuilt on constructivist principles.

There are, however, considerable differences in outlook between the various representatives of constructivism; constructivism in the broad sense is by no means homogeneous, and even the views expressed by different representatives of one “school”, or by a single mathematician at different times are not always homogeneous. Our descriptions below present a simplified picture of this complex reality. We shall attempt a brief characterization of the principal constructivist “trends” or “schools” playing a role in this book.

In our discussions we shall use the adjective “classical” for logical and mathematical reasoning based on the usual two-valued logic, in which every meaningful statement is assumed to be either true or false.

1.2. Finitism. The principal tenets of finitism are:

(a) only concretely (finitely) representable structures are objects of mathematics; operations on such structures are to be combinatorial in nature and hence, of course, effective.

(b) abstract notions such as (arbitrary) set, operation, construction etc. have no place in finitist mathematics.

Kronecker (1823–1891), who with some justification may be regarded as “the first constructivist”, may perhaps more specifically be regarded as a precursor of the finitist approach. Finitism is characteristically represented by Skolem in his paper (1923) and in two books by Goodstein (1957, 1961).

Finitism also plays a role in Hilbert’s programme: for methods regarded by all mathematicians as incontrovertible, to be used in a proof of freedom of contradiction of (the bulk of) existing mathematics, Hilbert wanted to draw on finitist mathematics; this of course does not mean that Hilbert is to be regarded as a finitist.

A formal system which is regarded as codifying a typical part of finitist mathematics is PRA, the system of primitive recursive arithmetic, to be discussed briefly in section 3.2.

1.3. Predicativism. This may be regarded as “constructivism with respect to definitions”. In predicativism:

(a) Definitions of mathematical objects should be predicative, that is to say it is not permissible to define an object d by referring to a collection D of which the object d is to be an element; in particular, quantification over D in defining d is not permitted (avoidance of a “vicious circle” in definitions).

(b) The demand for predicative definitions is regarded as compatible with traditional logic, that is to say mathematical statements are assumed to be true or false – regardless of human knowledge (this in contrast to intuitionism, described in the next subsection).

As a rule the set of natural numbers \mathbb{N} is regarded as unproblematic from a predicativist point of view. This means that one accepts quantification over \mathbb{N} and thus arithmetically defined predicates as predicatively meaningful.

Having thus grasped the idea of an arithmetically defined set or predicate (sets of level 1), we may quantify over such sets in constructing predicatively defined sets of level 2, etcetera.

On the other hand, defining the least upper bound of a set X of reals (defined as Dedekind (left) cuts) as the intersection of all left cuts which are

upper bounds for X is not permissible: the least upper bound itself occurs among the collection of upper bounds.

The first to show that parts of analysis could be developed predicatively was Weyl in his monograph “Das Kontinuum” (1918). More recently Lorenzen in his books (1955, 1965) has given a predicative development of analysis. Lorenzen (1955), however, does not accept classical logic outright, but justifies its use relative to constructive logic.

Poincaré and the French “empiricists” such as Borel may be regarded as precursors of predicativism, but they did not develop parts of mathematics predicatively in a systematic way (cf. also 4.2).

Predicativism as such does not play a role in this book, but the demands of predicativism may or may not be combined with the demands of intuitionism and Bishop constructivism and thus the issue of predicativity occasionally crops up in other constructivist trends as well.

1.4. Bishop’s *Constructive Mathematics* (“BCM”). This approach is typically represented by Bishop’s book “Foundations of constructive analysis” (1967). In the work of this school there are few discussions of philosophical principles, the emphasis is entirely on the practice of constructive mathematics, instead of on its philosophy.

(a) The key phrase is that “mathematical statements should have numerical meaning”. This means, in particular, that existential statements must, in principle, be capable of being made explicit (and also, in asserting $A \vee B$, the choice between A or B must be possible in principle): one can only show that an object exists by giving a finite routine for finding it.

(b) In BCM it is not assumed that all mathematical objects are to be given in the form of an algorithm (in the mathematically precise sense of recursive function theory). Choice sequences (cf. 1.6 below) are not admitted as legitimate objects. Bishop does not hesitate to accept abstract concepts such as “rule” or “operation”.

In BCM no definite position is taken with respect to the admissibility of impredicative definitions; in practice, generalized inductive definitions are admitted (Bishop 1967, p. 68); for a discussion of this type of definition see section 4.8.

1.5. *Constructive Recursive Mathematics* (“CRM”). This is a form of constructivism developed by Markov (1903–1979) from ca. 1950 onwards. In the sense we understand it here it is typically represented by the writings of Markov, Shanin and their students in the period 1950–1967.

A feature CRM has in common with finitism is that mathematical objects should be finitely representable. More specifically:

- (a) The objects of mathematics are *algorithms*, understood in a *mathematically precise sense*: algorithms can be presented as "words" in some finite alphabet of symbols.
- (b) Limitations due to finite memory capacity are disregarded, the length of symbol strings is unbounded (though always finite).
- (c) Logically compound statements not involving \exists , \forall are understood in a direct way, but existential statements and disjunctions always have to be made explicit.
- (d) If it is impossible that an algorithmic computation does not terminate, we may assume that it *does* terminate ("Markov's principle").

1.6. Intuitionism. Intuitionism will be understood here as the constructive approach to mathematics in the spirit of Brouwer (1881–1966) and Heyting (1898–1980). The philosophical basis of this approach is already present in Brouwer's thesis (1907) but with respect to the mathematical consequences Brouwer (1918) is a more appropriate starting point. The basic tenets may be summarized as follows.

- (a) Mathematics deals with mental constructions, which are immediately grasped by the mind; mathematics does not consist in the formal manipulation of symbols, and the use of mathematical language is a secondary phenomenon, induced by our limitations (when compared with an ideal mathematician with unlimited memory and perfect recall), and the wish to communicate our mathematical constructions to others.
- (b) It does not make sense to think of truth or falsity of a mathematical statement independently of our knowledge concerning the statement. A statement is *true* if we have proof of it, and *false* if we can show that the assumption that there is a proof for the statement leads to a contradiction. For an arbitrary statement we can therefore not assert that it is either true or false.
- (c) Mathematics is a *free* creation: it is not a matter of mentally reconstructing, or grasping the truth about mathematical objects existing independently of us (this is in contrast to e.g. the French empiricists; cf. 4.2).

It follows from (b) that it is necessary to adopt a different interpretation of statements of the form "there exists an x such that $A(x)$ holds" and " A or B holds". In particular, " A or not A " does not generally hold on the intuitionistic reading of "or" and "not"; we return to this in section 3.

In agreement with, but not necessarily following from (c), intuitionism permits consideration of unfinished processes: the ideal mathematician may construct longer and longer initial segments $\alpha(0), \dots, \alpha(n)$ of an infinite sequence of natural numbers α where α is not a priori determined by some fixed process of producing the values, so the construction of α is never finished: α is an example of a *choice sequence*. We return to this topic in section 4.6.

Unfinishable objects such as choice sequences clearly do not fit into the framework of CRM, the viewpoint described in the preceding subsection.

On the other hand, "Markov's principle", mentioned under (d) in 1.5, is not considered as intuitionistically valid. In fact, it is difficult to decide the validity of Markov's principle by informal analysis alone. We shall return to Markov's principle in section 4.5.

1.7. In this book we shall have frequent occasion to refer to intuitionism, CRM and BCM in particular. However, the present book is not written from the viewpoint of any particular school or trend mentioned above, inasmuch we shall not accept any of these views as *normative* for mathematics.

We do present constructive mathematics (in the wide sense) as a legitimate part of mathematics, containing material which is mathematically interesting, regardless of any philosophical bias.

Constructive mathematics, and especially its logic and its metamathematics are of considerable interest for the philosophy of mathematics. There are some indications that intuitionistic logic can be useful in other parts of mathematics too, such as topos theory (see e.g. Johnstone 1977, 1982), or theoretical computer science (see for example Constable et al. 1986).

2. Constructivity

2.1. In this section we shall attempt to illustrate the idea of constructivity by means of some quite elementary examples. Most of the points discussed will receive a more thorough treatment in later chapters.

Which objects can be said to exist as (mental) constructions? Natural numbers are usually regarded as unproblematic from a constructive point of view; they correspond to very simple mental constructions: start thinking of an abstract unit, think of another unit distinct from the first one and

consider the combination ("think them together"). The indefinite repetition of this process generates the collection \mathbb{N} of natural numbers.

It should be pointed out that already here an element of idealization enters. We regard 5, 1000 and $10^{10^{10}}$ as objects of "the same sort" though our mental picture in each of these cases is different: we can grasp "five" immediately as a collection of units, while on the other hand $10^{10^{10}}$ can only be handled *via* the notion of exponentiation; 1000 represents an intermediate case. Visualizing $10^{10^{10}}$ as a sequence of units is out of the question. Exponentiation as an always performable *operation* on the natural numbers involves a more abstract idea than is given with the generation of \mathbb{N} .

Certain mathematicians, such as A. S. Eskin-Volpin have tried to distinguish between "reasonably" small and "unreasonably" large numbers, and between different "natural number structures" according to the principles needed to generate them. Permitting exponentiation may result in a bigger number sequence with a more complex structure, than in the case where exponentiation is not considered, although addition and multiplication are accepted. This approach might be described as *ultra-finitism*. The name "ultra-intuitionism" has sometimes been used, but seems less appropriate. There are considerable obstacles to be overcome for a coherent and systematic development of ultra-finitism, and in our opinion no satisfactory development exists at present. In this volume we shall therefore refrain from any further discussion of ultra-finitism except for some remarks in 4.8.

Thus all the constructivist schools described in section 1 contain elements of idealization, that is to say their description of constructive mathematical principles contains "theoretical" elements. In particular, we regard Brouwer's intuitionism and Markov's constructivism as "theories about mathematics". It is also for this reason that one cannot identify intuitionism with a psychological approach to mathematics.

2.2. A non-constructive definition. Let A be any mathematical statement which at present has been neither proved nor refuted (e.g., $A \equiv$ "there are infinitely many twin primes"). Ordinarily one permits in mathematics descriptions (definitions) of natural numbers such as the following

$$p = \begin{cases} 1 & \text{if } A \text{ holds,} \\ 2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Constructively this is unacceptable as the description of a natural number since, as long as the truth of A has not been decided, we cannot identify p

with either 1 or 2; in other words we do not know how to obtain p by "thinking some abstract units together", since we do not know whether to stop at one unit or to go on till we have two distinct units.

2.3. Once having accepted the natural numbers, there is also no objection to accepting pairs of natural numbers, pairs of pairs etc. as constructive objects; and this permits us to define \mathbb{Z} (the integers) and \mathbb{Q} (the rationals) in the usual way as pairs of natural numbers and pairs of integers respectively, each modulo suitable equivalence relations.

Infinite sequences of natural numbers, integers or rationals may be constructively given by some process enabling us to determine the n th term (value for n) for each natural number n ; in particular, one may think of sequences given by a law (or recipe) for determining all its values (terms).

Thus a real number can be specified by a fundamental sequence of rationals together with a Cauchy modulus, that is to say we specify a sequence $\langle r_n \rangle_n \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ and a sequence $\alpha \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (the modulus) such that for all $k \in \mathbb{N}$ and all $m, m' \geq \alpha k$

$$|r_m - r_{m'}| \leq 2^{-k}.$$

Two such sequences $\langle r_n \rangle_n, \langle s_n \rangle_n$ are said to be *equivalent* (equal as real numbers) if for all $k \in \mathbb{N}$ there is an $n \in \mathbb{N}$ such that for all m

$$|r_{n+m} - s_{n+m}| \leq 2^{-k}.$$

Much of the elementary theory of real numbers can then be developed in exactly the same way as usual; we shall do this in chapter 5.

We now give an often quoted example of a non-constructive proof for the following

PROPOSITION. *There exist two irrational real-numbers a, b such that a^b is rational.*

PROOF. $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ is either rational, and then we can take $a = b = \sqrt{2}$, or $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ is irrational, and then we can take $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$. \square

This proof does not enable us to construct a as a real number, that is to say we cannot compute a with any desired degree of accuracy, as required by our description of what it means to be given a real number. In other words, we do not know how to find an arbitrarily close rational approximation. Note however, that our objections to the proof depend on reading "there exist" as "one can construct".

A constructive proof of the proposition above is possible, e.g. by an appeal to Gelfond's theorem: if $a \notin \{0, 1\}$, a algebraic, b irrational algebraic, then a^b is irrational (even transcendental). Cf. e.g. Gelfond (1960, p. 106, theorem 2).

As a second example of a non-constructive argument, we consider the classical proof of König's lemma.

2.4. PROPOSITION (König's lemma). *Let T be an infinite, finitely branching tree, then T has an infinite branch.*

PROOF. We "construct" the infinite branch $\alpha \in \mathbb{N} \rightarrow T$ as follows. For $\alpha 0$ we take the root of T . Suppose αn to have been constructed such that αn has infinitely many successors. Among the finite set of immediate successors t_0, \dots, t_k of αn there is at least one t_i such that t_i has infinitely many successors; take $\alpha(n+1) := t_i$. Clearly we can continue this process indefinitely and an infinite branch is generated. \square

Given some ordering of the nodes, we can make the description of α in the proof more definite by taking for $\alpha(n+1)$ the first t_i having infinitely many successors. Nevertheless, this "construction" of α is not constructive, since we do not know, in general, how to decide whether a finite sequence in T has infinitely many successors or not; so the proof above does not give us a recipe for producing αn for each n .

The preceding examples of non-constructive proofs show that the natural constructive reading of " A or B " and " $\exists x A(x)$ " as "we can decide between A and B " and "we can construct an x such that $A(x)$ " respectively does not agree with all the laws of classical logic. In particular, " A or $\neg A$ " does not hold if we read "or" as above: we have no reason to assume that we can always decide, for any assertion A , whether A is true or refutable.

In actual mathematical practice, one is often interested in constructivizing "locally", e.g. making existential statements of a *specific* theorem explicit by estimating bounds etc. In contrast, we shall mostly investigate *globally* constructive theories, where our logic can consistently be interpreted as permitting *explicit* realizations of all existential statements, and all theories should be read with a strong constructive meaning of \exists and \forall .

3. Weak counterexamples

In 1908 Brouwer introduced for the first time "weak counterexamples", for the purpose of showing that certain classically acceptable statements are

constructively unacceptable (Brouwer 1908). Too much emphasis on these examples has sometimes created the false impression that refuting claims of classical mathematics is the principal aim of intuitionism.

Nevertheless, the weak counterexamples are pedagogically useful and may serve to motivate e.g. Kripke semantics, which we shall introduce in the next chapter. Before we can explain these counterexamples we must explain in a more systematic way the constructive interpretation of the logical operators.

In discussing pure logic we shall treat "constructive" and "intuitionistic" as synonymous.

3.1. Logical operations: the BHK-interpretation. In the actual building of constructive mathematics we do not need logic; nevertheless we find it convenient to use logical symbolism. We shall explain the use of the logical operations in a constructive context by the following stipulations (going back to Heyting 1934), which tell us what forms proofs of logically compound statements take in terms of the proofs of the constituents.

- (H1) A proof of $A \wedge B$ is given by presenting a proof of A and a proof of B .
- (H2) A proof of $A \vee B$ is given by presenting either a proof of A or a proof of B (plus the stipulation that we want to regard the proof presented as evidence for $A \vee B$).
- (H3) A proof of $A \rightarrow B$ is a construction which permits us to transform any proof of A into a proof of B .
- (H4) Absurdity \perp (contradiction) has no proof; a proof of $\neg A$ is a construction which transforms any hypothetical proof of A into a proof of a contradiction.
- (H5) A proof of $\forall x A(x)$ is a construction which transforms a proof of $d \in D$ (D the intended range of the variable x) into a proof of $A(d)$.
- (H6) A proof of $\exists x A(x)$ is given by providing $d \in D$, and a proof of $A(d)$.

This explanation is quite informal and resists itself on our understanding of the notion of construction and, implicitly, the notion of mapping; it is not hard to show that, on a very "classical" interpretation of construction and mapping, H1–6 justify the principles of two-valued (classical) logic (cf. E1.3.4). In clause H4 the notion of a contradiction is to be regarded as a primitive (unexplained) notion.

If, in the clauses H5, H6 the domain D is "simple" enough, it may happen that any d in D so to speak represents its own proof of belonging to D (d is presented to us as an object of D). \mathbb{N} is an example: a natural number is given to us as such, we do not need a separate proof of this fact.

For such simple domains, the reference to "a proof of $d \in D$ " in H5 and H6 may be dropped. The clauses H5 and H6 then read

- (H5') A proof of $\forall xA(x)$ is a construction which transforms any $d \in D$ into a proof of $A(d)$.
 (H6') A proof of $\exists xA(x)$ is given by presenting a $d \in D$ and a proof of $A(d)$.

In the sequel we shall refer to the clauses H1-6 above as the "Brouwer-Heyting-Kolmogorov interpretation" (BHK-interpretation, see 5.3).

3.2. Even if the explanations H1-6 leave a lot of questions open, they suffice to show that certain logical principles should be generally acceptable from a constructive point of view, while some other principles from classical logic are not acceptable.

As a positive example, consider the statement $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, for arbitrary mathematical statements A, B . There is a very general proof, obtained as follows. Suppose a proves A . Then $\lambda b.a$, the constant function which assigns a to each argument, transforms a hypothetical proof of B always into a proof of A ; so $\lambda b.a$ proves $B \rightarrow A$. Therefore if a proves A , then $\lambda b.a$ proves $B \rightarrow A$; and so the mapping $\lambda a.[\lambda b.a]$, which assigns to a the constant mapping $\lambda b.a$, transforms a proof of A into a proof of $B \rightarrow A$; hence $\lambda a.[\lambda b.a]$ is a proof of $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.

Another consequence is that $\perp \rightarrow A$ is generally provable: since there is no proof of \perp , $\lambda a.a$ (or any other mapping) may count as a proof of $\perp \rightarrow A$, since it has to be applied to an empty domain. The principle $\perp \rightarrow A$ ("ex falso sequitur quodlibet") has sometimes been rejected as non-constructive (Johansson 1937); Heyting (1956, 7.1.3) regards it as an extra stipulation fixing the meaning and use of \perp , \rightarrow .

The rejection of $\perp \rightarrow A$ means that one regards \perp as a proposition not known to be provable (but which may turn out to be provable, if our mathematical world is inconsistent). This position leads to *minimal* logic; the difference with intuitionistic logic based on H1-6 is slight (cf. 10.5.2). On the negative side, consider the Principle of the Excluded Middle (PEM, or "tertium non datur")

PEM $A \vee \neg A$,

which is generally valid in classical logic. Constructively, accepting PEM as a general principle means that we have a universal method for obtaining, for any proposition A , either a proof of A or a proof of $\neg A$, i.e. a method for obtaining a contradiction from a hypothetical proof of A .

But if such a universal method were available, we could also decide a statement A the truth of which has not been decided yet (e.g. the example of the infinitely many twin primes in subsection 2.2), which is not the case. Thus we cannot accept PEM as a universally valid principle on the BHK-interpretation.

The preceding argument is typically a "weak counterexample": PEM is not refuted, that is to say, we have not shown how to derive an actual contradiction from the assumption that PEM is valid. Instead, we have only shown PEM to be unacceptable as a BHK-valid principle of reasoning, since accepting it means that we ought to have certain knowledge (i.e. a decision as to the truth of A) which in fact we do not possess. One might also say that the "weak counterexample" makes the validity of PEM for the BHK-interpretation highly implausible.

3.3. In fact, we cannot hope to refute any individual instance of PEM, that is to say we cannot find a mathematical statement A such that $\neg(A \vee \neg A)$. This is impossible, since $\neg\neg(A \vee \neg A)$ holds universally: it is an intuitionistic logical law. This may be seen on the basis of the BHK-interpretation as follows. Suppose

$$c \text{ establishes } \neg(A \vee \neg A). \quad (1)$$

Hence,

$$\text{if } d \text{ establishes } A \vee \neg A, c(d) \text{ proves } \perp.$$

Clearly, there are operations $e \mapsto e_0, f \mapsto f_1$ such that

$$e \text{ establishes } A \Rightarrow e_0 \text{ establishes } A \vee \neg A,$$

$$f \text{ establishes } \neg A \Rightarrow f_1 \text{ establishes } A \vee \neg A.$$

Therefore if (1) holds, $g: e \mapsto c(e_0)$ (i.e. $g \equiv \lambda e.c(e_0)$) is a construction for $A \rightarrow \perp \equiv \neg A$ and $h: f \mapsto c(f_1)$ (or $h \equiv \lambda f.c(f_1)$) for $\neg A \rightarrow \perp$. Therefore $h(g)$ is a construction for \perp , so the mapping $c \mapsto h(g)$ establishes $\neg\neg(A \vee \neg A)$.

3.4. In the chapters dealing with examples from constructive mathematics we shall often appeal to a number of simple logical laws valid on the

on the basis of constructive logic, as shown by the example of “finite” and “finitely indexed” in the preceding subsection. Constructively, one has also to distinguish between “finitely indexed set” and “subset of a finite set” (E1.3.2).

Yet another example is the distinction between “non-empty set” and “inhabited set”: X is non-empty iff $\neg\exists x(x \in X)$, and inhabited iff $\exists x(x \in X)$.

A more delicate example is the distinction between inequality and *apartness* between reals: $x \neq y$ simply means that x and y are not equal, but $x \# y$ (“ x is apart from y ”) means that there is a positive distance between x and y :

$$x \# y := \exists r \in \mathbf{Q}(x - y| > r > 0).$$

Intuitionistically these notions are distinct, but not in CRM (cf. 4.5.4).

One might expect that the splitting of notions leads to an enormous proliferation of results in the various parts of constructive mathematics when compared with their classical counterparts. In practice, usually only very few constructive versions of a classical notion are worth developing, since other variants do not lead to a mathematically satisfactory theory.

4. A brief history of constructivism

The conscious practice of constructive mathematics is a relatively young phenomenon. Before the introduction of highly abstract notions, going hand in hand with abstract proofs, i.e. proofs that went beyond well-trusted tangible procedures, there was no need for a separate domain of the constructive. Of course, with hindsight, we can locate non-constructive proofs in the older mathematics but it would be a historical injustice to project our mathematical culture on our forefathers.

To mention one example that from our point of view personalities non-constructive reasoning, proof by contradiction was universally accepted and employed. There is one particular domain where proof by contradiction is almost a trademark: geometry. From Euclid’s *Elements* to Hilbert’s *Grundlagen* proof by contradiction is required to set the deductive machinery working. It seems plausible that partly on the authority of Aristotle’s logic, partly on idealized and imperfect knowledge of the mathematical universe, the principle of the excluded middle in particular for identity, but more generally for arbitrary notions was taken for granted.

In this chapter we will sketch some of the main trends in constructive mathematics. We will outline the basic ideas and the underlying philosophies, historic details of specific mathematical or logical notions or developments are to be found in the final section (“notes”) of each chapter.

In our exposition we have as a rule adopted the terminology that prevails today, the reader should be aware however that in the older literature terms like neo-intuitionist (for intuitionist), empiricist (for semi-intuitionist), etc. occur.

4.1. Kronecker and the arithmetization of mathematics. A first clearcut manifest of constructive mathematics was issued by Kronecker (1823–1891), best known for his work in number theory and algebra.

Kronecker’s constructivism is most easily recognized in his views on the status of certain mathematical objects. In his essay “(Über den Zahlbegriff)” (1887) he outlined the project of “arithmetizing” Algebra and Analysis; that is, to found these disciplines on the most fundamental notion of number. He explicitly, with a reference to Gauss, restricted this arithmetization to analysis and algebra: geometry and mechanics were left an independent existence, as not being purely determined by our mind, but referring to a certain reality outside our mind.

In a number of lectures Kronecker developed a unified theory of numbers, posthumously published by Hensel (Kronecker 1901), in which numbers, congruences, polynomials and rational functions are treated on an equal footing. In the spirit of this tradition he obtains the integers from the natural numbers by considering $\mathbb{N}[x] \bmod (x + 1)$.

Similarly rational numbers are introduced by considering congruences (Kronecker 1887, p. 261).

The introduction of algebraic numbers is also based on modulus arithmetic, a procedure that is now universally adopted. One consequence of Kronecker’s arithmetization project was that he considered a definition (in number theory and algebra) acceptable only if it could be checked in a finite number of steps whether a given number falls under it or not. This viewpoint naturally led to his criticism of “pure” existence proofs. He stated that an existence proof for a number could only then be considered to be totally exact if it also contained a method to find the number whose existence was proven, (Kronecker 1901, p. vi). In Kronecker’s published works there is a minimum of philosophizing: apart from a few remarks on the nature of his programme he consistently sticks to actual mathematical practice. Some of his remarks belong to mathematical folklore, and they capture fairly well his basic outlook. Best known is his widely reported

statement that, "the Lord made the natural numbers (ganze Zahlen), everything else is the work of men", and the following statement reiterates the same idea: "I consider mathematics only as an abstraction of the arithmetical reality".

Kronecker's programme was taken up by Jules Molk. In a long paper (1885) he makes a few remarks along the line of Kronecker. On the topic of definitions he says that "definitions should be algebraic and not just logical. It is not sufficient to say: something is or it is not". He points out that a logical definition, like "an irreducible function is by definition not reducible" is not much help. In algebra a definition of irreducible should allow one to test in a finite number of steps that a function does not factorize in nontrivial factors. Only such a test will give meaning to the words *reductible* and *irreductible*.

It must be pointed out that Molk does not contest the *truth* of statements like "a bounded set of numbers has a least upper bound", he views this statement as a logical truth that does not belong to algebra. In the light of Kronecker's remarks on the nature of mathematical objects and proofs it seems likely that Kronecker would reject the above statement as meaningless.

4.2. The French semi-intuitionists. The next stage in the evolution of constructive mathematics was the discussion about Zermelo's proof of the well-ordering theorem. Zermelo's use of the axiom of choice in its full strength raised a mixed variety of objections. In particular a group of French mathematicians expressed criticism based on more or less clearly articulated constructive views. We will not go into the details of the axiom-of-choice controversy, but instead concentrate on some of the constructive issues. The main representatives of constructive tendencies in this controversy were Baire, Borel, Lebesgue, Lusin and Poincaré. They did not offer a definite philosophical doctrine, but rather a mixture of views on mathematics with constructive tendencies.

Poincaré (1854–1913). Poincaré's views are well-known, he forcefully attacked set theory (Cantorism) and "logistics"/(i.e. mathematical logic). Strictly speaking one cannot count him as a constructivist; his direct influence on later developments in constructive mathematics is mostly restricted to his views on intuition closely tied up with his criticism of logic. He was sceptical of both Aristotelian logic – "a syllogism cannot teach us anything essentially new" (1902, chapter I) – and the newer variants of Russell, Frege and Peano.

Poincaré argues that in mathematics one needs more than logic, one needs intuition. He mentions three kinds of *intuition* (1905, chapter I): the appeal to the senses and the imagination, generalization by induction, and finally the intuition of pure number. The latter one guarantees the exactness of mathematics. Mathematics has its specific methods of proof, and the method *par excellence* is the principle of induction, which is according to Poincaré a synthetic judgement a priori ("Les derniers efforts des logisticiens", in 1908).

In a number of ways Poincaré is a forerunner of the later constructivists: his recognition of the principle of mathematical induction as an unprovable fact, his criticism of the "creative role" of logic, his rejection of the Cantorian *actual infinite* and his embracement of intuition in mathematics. One should not, however, expect too much consistency in Poincaré's philosophical writings, (cf. Mooij 1966); in his essay "Les mathématiques et la logique" (in 1908) he defended, for example, the rather platonic view that "Existence can mean only one thing: freedom from contradiction".

The paradoxes around the turn of the century were, in his view, caused by impredicative reasoning, vicious circles. In a number of publications he defended a predicative version of mathematics. Discussing Richard's paradox, he wrote "E is the set of all numbers one can define with finitely many words, *without introducing the set E itself*. Without this (restriction) the definition of E will contain a vicious circle; one cannot define E through the set E itself" ("Les derniers efforts des logisticiens", in 1908).

This is the familiar syntactic formulation of the predicative restriction. In "La logique de l'infini" (in 1913) he provided a mathematical criterion: the definition of a set should be such that adding more elements to the universe under consideration does change the set.

Emile Borel (1871–1956). Emile Borel was the most pronounced spokesman of the semi-intuitionists, he was closer to Kronecker's position on a number of issues than Poincaré. He maintained, for example, that only effectively defined (i.e. by finitely many words) objects exist in the domain of science (1914, p. 171, 175), consistency does not suffice for existence. However, compared to Kronecker's "verifiability in finitely many steps" this "finite definability" is clearly a more liberal notion. It allows one, for example, to consider the functions f with $f(x) = 0$ for rational x and $f(x) = 1$ for irrational x , as well-defined and existing.

Lebesgue shared Borel's views on this point. From Borel's point of view individual real numbers had to be given by a finite definition, so as a set they could never get beyond the countable. Realizing how awkward a

DAVID HILBERT

Axiomatisches Denken

(1917) 1918

Traduit en "Axiomatic thought" dans **Ewald**, *From Kant to Hilbert,
A source book in the foundations of mathematics*, Clarendon
Press, Oxford, 1996, p.1105-1115

(Extraits : p.1113 et 1115)

P.1113 :

"[43] Among the mentioned questions, the last – namely, the one concerning decidability in a finite number of operations – is the best-known and the most discussed; for it goes to the essence of mathematical thought."

P.1115 :

"[54] All such questions of principle, which I characterized above and of which the question just discussed—that is, the question about decidability in a finite number of operations—was only the last, seem to me to form an important new field of research which remains to be developed. To conquer this field we must, I am persuaded, make the concept of specifically mathematical proof itself into an object of investigation, just as the astronomer considers the movement of his position, the physicist studies the theory of his apparatus, and the philosopher criticizes reason itself."

STEPHEN C. KLEENE

*RECURSIVE PREDICATES AND
QUANTIFIERS*

1943

in Transactions of the A.M.S. 53, 1943, p.41-73.

(Extrait p.60)

" This last property of the second predicate we designate as the property of being effectively decidable.

Of course the original predicate becomes effectively decidable, in a derivative sense, as soon as we have its equivalence to the second; extensionally, the two are the same. But while our terminology is ordinarily extensional, at this point the essential matter can be emphasized by using the intentional language. The reader may if he wishes write in more explicit statements referring to the (generally) differing objects or processes with which the two predicates are concerned.

Now, the recognition that we are dealing with a well defined process which for each set of values of the independent variables surely terminates so as to afford a definite answer, "Yes" or "No," to a certain question about the manner of termination, in other words, the recognition of effective decidability in a predicate, is a subjective affair. Likewise, the recognition of what may be called effective calculability in a function. We may assume, to begin with, an intuitive ability to recognize various individual instances of these notions. In particular, we do recognize the general recursive functions as being effectively calculable, and hence recognize the general recursive predicates as being effectively decidable.

Conversely, as a heuristic principle, such functions (predicates) as have been recognized as being effectively calculable (effectively decidable), and for which the question has been investigated, have turned out always to be general recursive, or, in the intentional language, equivalent to general recursive functions (general recursive predicates). This heuristic fact, as well as certain reflections on the nature of symbolic algorithmic processes, led Church to state the following thesis (22). The same thesis is implicit in Turing's description of computing machines (23).

THESES I. Every effectively calculable function (effectively decidable predicate) is general recursive.

Since a precise mathematical definition of the term effectively calculable (effectively decidable) has been wanting, we can take this thesis, together with the principle already accepted to which it is converse, as a definition of it for the purpose of developing a mathematical theory about the term. To the extent that we have already an intuitive

notion of effective calculability (effective decidability), the thesis has the character of an hypothesis—a point emphasized by Post and by Church (24). If we consider the thesis and its converse as definition, then the hypothesis is an hypothesis about the application of the mathematical theory developed from the definition. For the acceptance of the hypothesis, there are, as we have suggested, quite compelling grounds. ”

- (22) **Church**, An unsolvable problem of elementary number theory, Amer. J. Math. vol. 58 (1936) pp. 345-363.
- (23) **Turing**, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proc. London Math. Soc. (2) vol. 42 (1937) pp. 230-265.
- (24) **Post** [p. 105], *Finite combinatory processes — formulation I*, J. Symbolic Logic vol. 1 (1936) pp. 103-105. And **Church**, *The constructive second number class*, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 44 (1938) pp. 224-232.

MICHAEL DUMMETT
*The philosophical basis of intuitionistic
logic*

1973

in **Putnam & Benacerraf** (eds.), *Philosophy of mathematics*, 2nd edition,
Cambridge University Press, 1983, p.97-129.

ferent from a and from 1, of a remainder. Likewise, for two real numbers a and b the relation $a \geq b$ introduced above as an absurdity of a constructive property can be formulated constructively as follows: Let a_1, a_2, \dots and b_1, b_2, \dots be convergent infinite sequences of rational numbers defining a and b respectively. Then, for any natural number n , a natural number m can be calculated such that $a_r - b_r \leq -2^{-n}$ for $r \geq m$.

On the other hand there seems to be little hope for reducing irrationality of a real number a , or one of the relations $a \neq b$ and $a > b$ for real numbers a and b , to a constructive property, if we remark that a direct checking-number of a drift whose kernel is rational and whose counting-numbers are irrational, is irrational without lying apart from the species of rational numbers; further that a direct checking-number of an arbitrary drift differs from the kernel of the drift without lying apart from it, and that a direct checking-number of a right-winged drift lies to the right of the kernel of the drift without lying apart from it.

It occurs that within some species of mathematical entities some non-contradictories of constructive properties ζ can be given either a constructive form (possibly, but not necessarily, in consequence of reciprocity of complementarity holding for ζ) or the form of an absurdity of a constructive property. E.g. for real numbers a and b the non-contradictoriness of $a = b$ is equivalent to $a = b$, and the non-contradictoriness of $a = b$ or $a > b$, is equivalent to $a \geq b$; further the non-contradictoriness of $a > b$ is equivalent to the absurdity of $a \leq b$ as well as to the absurdity of: either $a = b$ or $a < b$.

On the other hand, if we think of the property of non-contradictoriness of rationality existing for all direct checking-numbers of drifts whose counting-numbers are rational, there seems to be little hope for reducing non-contradictoriness of rationality of a real number to a constructive property or to an absurdity of a constructive property.

If we understand by the *simple absurdity* of the property η the absurdity of η , and by the $(n+1)$ -fold absurdity of η the absurdity of the n -fold absurdity of η , then a theorem established above expresses that *threefold absurdity is equivalent to simple absurdity*. And a corollary of this theorem is that *n -fold absurdity is equivalent to simple or to double absurdity according as n is odd or even*.

I should like to terminate here. I hope I have made clear that intuitionism on the one hand subtilizes logic, on the other hand denounces logic as a source of truth. Further that intuitionistic mathematics is inner architecture, and that research in foundations of mathematics is inner inquiry with revealing and liberating consequences, also in non-mathematical domains of thought.

The philosophical basis of intuitionistic logic

MICHAEL DUMMETT

The question with which I am here concerned is: What plausible rationale can there be for repudiating, within mathematical reasoning, the canons of classical logic in favour of those of intuitionistic logic? I am, thus, not concerned with justifications of intuitionistic mathematics from an eclectic point of view, that is, from one which would admit intuitionistic mathematics as a legitimate and interesting form of mathematics alongside classical mathematics: I am concerned only with the standpoint of the intuitionists themselves, namely that classical mathematics employs forms of reasoning which are not valid on any legitimate way of constructing mathematical statements (save, occasionally, by accident, as it were, under a quite unintended reinterpretation). Nor am I concerned with excerpts of the writings of Brouwer or of Heyting: the question is what forms of justification of intuitionistic mathematics will stand up, not what particular writers, however eminent, had in mind. And, finally, I am concerned only with the most fundamental feature of intuitionistic mathematics, its underlying logic, and not with the other respects (such as the theory of free choice sequences) in which it differs from classical mathematics. It will therefore be possible to conduct the discussion wholly at the level of elementary number theory. Since we are, in effect, solely concerned with the logical constants – with the sentential operators and the first-order quantifiers – our interest lies only with the most general features of the notion of a mathematical construction, although it will be seen that we need to consider these in a somewhat delicate way.

Any justification for adopting one logic rather than another as the logic for mathematics must turn on questions of *meaning*. It would be impossible to contrive such a justification which took meaning for granted, and represented the question as turning on knowledge or certainty. We are certain of the truth of a statement when we have *arsive* grounds for it and are certain that the grounds which we have *are* valid grounds for it and *are* conclusive. If classical arguments for mathematical statements are called in question, this cannot possibly be because

Reprinted with the kind permission of the author, the editors, and the publisher from *Proceedings of the Logic Colloquium, Bristol, July 1973*, H. E. Rose and J. C. Shepherdson, eds., North-Holland 1975, pp. 5–40.

it is thought that we are, in general, unable to tell with certainty whether an argument is classically valid, unless it is also intuitionistically valid: rather, it must be that what is being put in doubt is whether arguments which are valid by classical but not by intuitionistic criteria are absolutely valid, that is, whether they really do conclusively establish their conclusions as true. Even if it were held that classical arguments, while not in general absolutely valid, nevertheless always conferred a high probability on their conclusions, it would be wrong to characterise the motive for employing only intuitionistic arguments as lying in a desire to attain knowledge in place of mere probable opinion in mathematics, since the very thesis that the use of classical arguments did not lead to knowledge would represent the crucial departure from the classical conception, beside which the question of whether or not one continued to make use of classical arguments as mere probabilistic reasoning is comparatively insignificant. (In any case, within standard intuitionistic mathematics, there is no reason whatever why the existence of a classical proof of it should render a statement probable, since if, e.g., it is a statement of analysis, its being a classical theorem does not prevent it from being intuitionistically disprovable.)

So far as I am able to see, there are just two lines of argument for repudiating classical reasoning in mathematics in favour of intuitionistic reasoning. The first runs along the following lines. The meaning of a mathematical statement determines and is exhaustively determined by its use. The meaning of such a statement cannot be, or contain as an ingredient, anything which is not manifest in the use made of it, lying solely in the mind of the individual who apprehends that meaning: if two individuals agree completely about the use to be made of the statement, then they agree about its meaning. The reason is that the meaning of a statement consists solely in its rôle as an instrument of communication between individuals, just as the powers of a chess-piece consist solely in its rôle in the game according to the rules. An individual cannot communicate what he cannot be observed to communicate: if one individual associated with a mathematical symbol or formula some mental content, where the association did not lie in the use he made of the symbol or formula, then he could not convey that content by means of the symbol or formula, for his audience would be unaware of the association and would have no means of becoming aware of it.

The argument may be expressed in terms of the *knowledge* of meaning, i.e. of understanding. A model of meaning is a model of understanding, i.e. a representation of what it is that is known when an individual knows the meaning. Now knowledge of the meaning of a particular symbol or expression is frequently verbalisable knowledge, that is, knowledge which

The philosophical basis of intuitionistic logic

consists in the ability to state the rules in accordance with which the expression or symbol is used or the way in which it may be replaced by an equivalent expression or sequence of symbols. But to suppose that, in general, a knowledge of meaning consisted in verbalisable knowledge would involve an infinite regress: if a grasp of the meaning of an expression consisted, in general, in the ability to state its meaning, then it would be impossible for anyone to learn a language who was not already equipped with a fairly extensive language. Hence that knowledge which, in general, constitutes the understanding of the language of mathematics must be implicit knowledge. Implicit knowledge cannot, however, meaningfully be ascribed to someone unless it is possible to say in what the manifestation of that knowledge consists: there must be an observable difference between the behaviour or capacities of someone who is said to have that knowledge and someone who is said to lack it. Hence it follows, once more, that a grasp of the meaning of a mathematical statement must, in general, consist of a capacity to use that statement in a certain way, or to respond in a certain way to its use by others.

Another approach is via the idea of learning mathematics. When we learn a mathematical notation, or mathematical expressions, or, more generally, the language of a mathematical theory, what we learn to do is to make use of the statements of that language: we learn when they may be established by computation, and how to carry out the relevant computations, we learn from what they may be inferred and what may be inferred from them, that is, what rôle they play in mathematical proofs and how they can be applied in extra-mathematical contexts, and perhaps we learn also what plausible arguments can render them probable. These things are all that we are shown when we are learning the meanings of the expressions of the language of the mathematical theory in question, because they are all that we can be shown: and, likewise, our proficiency in making the correct use of the statements and expressions of the language is all that others have from which to judge whether or not we have acquired a grasp of their meanings. Hence it can only be in the capacity to make a correct use of the statements of the language that a grasp of their meanings, and those of the symbols and expressions which they contain, can consist. To suppose that there is an ingredient of meaning which transcends the use that is made of that which carries the meaning is to suppose that someone might have learned all that is directly taught when the language of a mathematical theory is taught to him, and might then behave in every way like someone who understood the language, and yet not actually understand it, or understand it only incorrectly. But to suppose this is to make meaning ineffable, that is, in principle incommunicable. If this is possible, then no one individual ever has a guarantee

that he is understood by any other individual; for all he knows, or can ever know, everyone else may attach to his words or to the symbols which he employs a meaning quite different from that which he attaches to them. A notion of meaning so private to the individual is one that has become completely irrelevant to mathematics as it is actually practised, namely as a body of theory on which many individuals are corporately engaged, an enquiry within which each can communicate his results to others.

It might seem that an approach to meaning which regarded it as exhaustively determined by use would rule out any form of revisionism. If use constitutes meaning, then, it might seem, use is beyond criticism: there can be no place for rejecting any established mathematical practice, such as the use of certain forms of argument or modes of proof, since that practice, together with all others which are generally accepted, is simply constitutive of the meanings of our mathematical statements, and we surely have the right to make our statements mean whatever we choose that they shall mean. Such an attitude is one possible development of the thesis that use exhaustively determines meaning: it is, however, one which can, ultimately, be supported only by the adoption of a holistic view of language. On such a view, it is illegitimate to ask after the content of any single statement, or even after that of any one theory, say a mathematical or a physical theory; the significance of each statement or of each deductively systematised body of statements is modified by the multiple connections which it has, direct and remote, with other statements in other areas of our language taken as a whole, and so there is no adequate way of understanding the statement short of knowing the entire language. Or, rather, even this image is false to the facts: it is not that a statement or even a theory has, as it were, a primal meaning which then gets modified by the interconnections that are established with other statements and other theories; rather, its meaning simply consists in the place which it occupies in the complicated network which constitutes the totality of our linguistic practices. The only thing to which a definite content may be attributed is the totality of all that we are, at a given time, prepared to assert; and there can be no simple model of the content which that totality of assertions embodies; nothing short of a complete knowledge of the language can reveal it.

Frequently such a holistic view is modified to the extent of admitting a class of observation statements which can be regarded as more or less directly registering our immediate experience, and hence as each carrying a determinate individual content. These observation statements lie, in Quine's famous image of language, at the periphery of the articulated structure formed by all the sentences of our language, where alone expe-

The philosophical basis of intuitionistic logic

rience impinges. To these peripheral sentences, meanings may be ascribed in a more or less straightforward manner, in terms of the observational stimuli which prompt assent to and dissent from them. No comparable model of meaning is available for the sentences which lie further towards the interior of the structure: an understanding of them consists solely in a grasp of their place in the structure as a whole and their interaction with its other constituent sentences. Thus, on such a view, we may accept a mathematical theory, and admit its theorems as true, only because we find in practice that it serves as a convenient substructure deep in the interior of the complex structure which forms the total theory; there can be no question of giving a representation of the truth-conditions of the statements of the mathematical theory under which they may be judged individually as acceptable, or otherwise, in isolation from the rest of language.

Such a conception bears an evident analogy with Hilbert's view of classical mathematics; or, more accurately, with Boole's view of his logical calculus. For Hilbert, a definite individual content, according to which they may be individually judged as correct or incorrect, may legitimately be ascribed only to a very narrow range of statements of elementary number theory: these correspond to the observation statements of the holistic conception of language. All other statements of mathematics are devoid of such a content, and serve only as auxiliaries, though psychologically indispensable auxiliaries, to the recognition as correct of the finitistic statements which alone are individually meaningful. The other mathematical statements are not, on such a view, devoid of significance; but their significance lies wholly in the rôle which they play within the mathematical theories to which they belong, and which are themselves significant precisely because they enable us to establish the correctness of finitistic statements. Boole likewise distinguished, amongst the formulas of his logical calculus, those which were interpretable from those which were uninterpretable: a deduction might lead from some interpretable formulas as premisses, via uninterpretable formulas as intermediate steps, to a conclusion which was once more interpretable.

The immediately obvious difficulty about such a manner of construing a mathematical, or any other, theory is to know how it can be justified. How can we be sure that the statements or formulas to which we ascribe a content, and which are derived by such a means, are true? The difference between Hilbert and Boole, in this respect, was that Hilbert took the demand for justification seriously, and saw the business of answering it as the prime task for his philosophy of mathematics, while Boole simply ignored the question. Of course, the most obvious way to find a justification is to extend the interpretation to all the statements or formulas with

which we are concerned, and, in the case of Boole's calculus, this is very readily done, and indeed yields a great simplification of the calculus. Even in Hilbert's case, the consistency proof, once found, does yield an interpretation of the infinitistic statements, though one which is relative to the particular proof in which they occur, not one uniform for all contexts. Without such a justification, the operation of the mechanism of the theory or the language remains quite opaque to us; and it is because the holist is oblivious of the demand for justification, or of the unease which the lack of one causes us, that I said that he is to be compared to Boole rather than to Hilbert. In his case, the question would become: With what right do we feel an assurance that the observation statements deduced with the help of the complex theories, mathematical, scientific and otherwise, embedded in the interior of the total linguistic structure, are true, when these observation statements are interpreted in terms of their stimulus meanings? To this the holist attempts no answer, save a generalised appeal to induction: these theories have 'worked' in the past, in the sense of having for the most part yielded true observation statements, and so we have confidence that they will continue to work in the future.

The path of thought which leads from the thesis that use exhaustively determines meaning to an acceptance of intuitionistic logic as the correct logic for mathematics is one which rejects a holistic view of mathematics and insists that each statement of any mathematical theory must have a determinate individual content. A grasp of this content cannot, in general, consist of a piece of verbalisable knowledge, but must be capable of being fully manifested by the use of the statement: but that does not imply that every aspect of its existing use is sacrosanct. An existing practice in the use of a certain fragment of language is capable of being subjected to criticism if it is impossible to systematise it, that is, to frame a model whereby each sentence carries a determinate content which can, in turn, be explained in terms of the use of that sentence. What makes it possible that such a practice may prove to be incoherent and therefore in need of revision is that there are different aspects to the use of a sentence; if the whole practice is to be capable of systematisation in the present sense, there must be a certain harmony between these different aspects. This is already apparent from the holistic examples already cited. One aspect of the use of observation statements lies in the propensities we have acquired to assent to and dissent from them under certain types of stimuli; another lies in the possibility of deducing them by means of non-observational statements, including highly theoretical ones. If the linguistic system as a whole is to be coherent, there must be harmony between these two aspects: it must not be possible to deduce observation

The philosophical basis of intuitionistic logic

statements from which the perceptual stimuli require dissent. Indeed, if the observation statements are to retain their status as observation statements, a stronger demand must be made: of an observational statement deduced by means of theory, it must hold that we can place ourselves in a situation in which stimuli occur which require assent to it. This condition is thus a demand that, in a certain sense, the language as a whole be a conservative extension of that fragment of the language containing only observational statements. In just the same way, Hilbert's philosophy of mathematics requires that classical number theory, or even classical analysis, be a conservative extension of finitistic number theory.

For utterances considered quite generally, the bifurcation between the two aspects of their use lies in the distinction between the conventions governing the occasions on which the utterance is appropriately made and those governing both the responses of the hearer and what the speaker commits himself to by making the utterance: schematically, between the *conditions for* the utterance and the *consequences of it*. Where, as in mathematics, the utterances with which we are concerned are *statements*, that is, utterances by means of which assertions can be effected, this becomes the distinction between the grounds on which the statement can be asserted and its inferential consequences, the conclusions that can be inferred from it. Plainly, the requirement of harmony between these in respect of some type of statement is the requirement that the addition of statements of that type to the language produces a conservative extension of the language; i.e., that it is not possible, by going via statements of this type as intermediaries, to deduce from premises not of that type conclusions, also not of that type, which could not have been deduced before. In the case of the logical constants, a loose way of putting the requirement is to say that there must be a harmony between the introduction and elimination rules; but, of course, this is not accurate, since the whole system has to be considered (in classical logic, for example, it is possible to infer a disjunctive statement, say by double negation elimination, without appeal to the rule of disjunction introduction). An alternative way of viewing the dichotomy between the two principal aspects of the use of statements is as a contrast between *direct* and *indirect* means of establishing them. So far as a logically complex statement is concerned, the introduction rules governing the logical constants occurring in the statement display the most direct means of establishing the statement, step by step in accordance with its logical structure; but the statement may be accepted on the basis of a complicated deduction which relies also on elimination rules, and we require a harmony which obtains only if a statement that has been indirectly established always could (in some sense of 'could') have been established directly.

Here again the demand is that the admission of the more complex inferences yield a conservative extension of the language. When only introduction rules are used, the inference involves only statements of logical complexity no greater than that of the conclusion: we require that the derivation of a statement by inferences involving statements of greater logical complexity shall be possible only when its derivation by the more direct means is in some sense already possible.

On any molecular view of language – any view on which individual sentences carry a content which belongs to them in accordance with the way they are compounded out of their own constituents, independently of other sentences of the language not involving those constituents – there must be some demand for harmony between the various aspects of the use of sentences, and hence some possibility of criticising or rejecting existing practice when it does not display the required harmony. Exactly what the harmony is which is demanded depends upon the theory of meaning accepted for the language, that is, the general model of that in which the content of an individual sentence consists; that is why I rendered the above remarks vague by the insertion of phrases like 'in some sense'. It will always be legitimate to demand, of any expression or form of sentence belonging to the language, that its addition to the language should yield a conservative extension; but, in order to make the notion of a conservative extension precise, we need to appeal to some concept such as that of truth or that of being assertible or capable in principle of being established, or the like; and just which concept is to be selected, and how it is to be explained, will depend upon the theory of meaning that is adopted.

A theory of meaning, at least of the kind with which we are mostly familiar, seizes upon some one general feature of sentences (at least of assertoric sentences, which is all we need be concerned with when considering the language of mathematics) as central: the notion of the content of an individual sentence is then to be explained in terms of this central feature. The selection of some one such feature of sentences as central to the theory of meaning is what is registered by philosophical dicta of the form, 'Meaning is ...' – e.g., 'The meaning of a sentence is the method of its verification', 'The meaning of a sentence is determined by its truth-conditions', etc. (The slogan 'Meaning is use' is, however, of a different character: the 'use' of a sentence is not, in this sense, a *single* feature; the slogan simply restricts the *kind* of feature that may legitimately be appealed to as constituting or determining meaning.) The justification for thus selecting some one single feature of sentences as central – as being that in which their individual meanings consist – is that it is hoped that every other feature of the use of sentences can be derived.

in a uniform manner, from this central one. If, e.g., the notion of truth is taken as central to the theory of meaning, then the meanings of individual expressions will consist in the manner in which they contribute to determining the truth-conditions of sentences in which they occur; but this conception of meaning will be justified only if it is possible, for an arbitrary assertoric sentence whose truth-conditions are taken as known, to describe, in terms of the notion of truth, our actual practice in the use of such a sentence; that is, to give a general characterisation of the linguistic practice of making assertions, of the conditions under which they are made and the responses which they elicit. Obviously, we are very far from being able to construct such a general theory of the use of sentences, of the practice of speaking a language; equally obviously, it is likely that, if we ever do attain such an account, it will involve a considerable modification of the ideal pattern under which the account will take a quite general form, irrespective of the individual content of the sentence as given in terms of whatever is taken as the central notion of the theory of meaning. But it is only to the extent that we shall eventually be able to approximate to such a pattern that it is possible to give substance to the claim that it is in terms of some *one* feature, such as truth or verification, that the individual meanings of sentences and of their component expressions are to be given.

It is the multiplicity of the different features of the use of sentences, and the consequent legitimacy of the demand, given a molecular view of language, for harmony between them, that makes it possible to criticise existing practice, to call in question uses that are actually made of sentences of the language. The thesis with which we started, that use exhaustively determines meaning, does not, therefore, conflict with a revisionary attitude to some aspect of language: what it does do is to restrict the selection of the feature of sentences which is to be treated as central to the theory of meaning. On a platonistic interpretation of a mathematical theory, the central notion is that of truth: a grasp of the meaning of a sentence belonging to the language of the theory consists in a knowledge of what it is for that sentence to be true. Since, in general, the sentences of the language will not be ones whose truth-value we are capable of effectively deciding, the condition for the truth of such a sentence will be one which we are not, in general, capable of recognising as obtaining whenever it obtains, or of getting ourselves into a position in which we can so recognise it. Nevertheless, on the theory of meaning which underlies platonism, an individual's grasp of the meaning of such a sentence consists in his knowledge of what the condition is which has to obtain for the sentence to be true, even though the condition is one which he cannot, in general, recognise as obtaining when it does obtain.

This conception violates the principle that use exhaustively determines meaning: or, at least, if it does not, a strong case can be put up that it does, and it is this case which constitutes the first type of ground which appears to exist for repudiating classical in favour of intuitionistic logic for mathematics. For, if the knowledge that constitutes a grasp of the meaning of a sentence has to be capable of being manifested in actual linguistic practice, it is quite obscure in what the knowledge of the condition under which a sentence is true can consist, when that condition is not one which is always capable of being recognised as obtaining. In particular cases, of course, there may be no problem, namely when the knowledge in question may be taken as verbalisable knowledge, i.e. when the speaker is able to *state*, in other words, what the condition is for the truth of the sentence; but, as we have already noted, this cannot be the general case. An ability to state the condition for the truth of a sentence is, in effect, no more than an ability to express the content of the sentence in other words. We accept such a capacity as evidence of a grasp of the meaning of the original sentence on the presumption that the speaker understands the words in which he is stating its truth-condition; but at some point it must be possible to break out of the circle: even if it were always possible to find an equivalent, understanding plainly cannot in general consist in the ability to find a synonymous expression. Thus the knowledge in which, on the platonistic view, a grasp of the meaning of a mathematical statement consists must, in general, be implicit knowledge, knowledge which does not reside in the capacity to state that which is known. But, at least on the thesis that use exhaustively determines meaning, and perhaps on any view whatever, the ascription of implicit knowledge to someone is meaningful only if he is capable, in suitable circumstances, of fully manifesting that knowledge. (Compare Wittgenstein's question why a dog cannot be said to expect that his master will come home next week.) When the sentence is one which we have a method for effectively deciding, there is again no problem: a grasp of the condition under which the sentence is true may be said to be manifested by a mastery of the decision procedure, for the individual may, by that means, get himself into a position in which he can recognise that the condition for the truth of the sentence obtains or does not obtain, and we may reasonably suppose that, in this position, he displays by his linguistic behaviour his recognition that the sentence is, respectively, true or false. But, when the sentence is one which is not in this way effectively decidable, as is the case with the vast majority of sentences of any interesting mathematical theory, the situation is different. Since the sentence is, by hypothesis, effectively undecidable, the condition which must, in general, obtain for it to be true is not one which we are capable of recog-

The philosophical basis of intuitionistic logic

ning whenever it obtains, or of getting ourselves in a position to do so. Hence any behaviour which displays a capacity for acknowledging the sentence as being true in all cases in which the condition for its truth can be recognised as obtaining will fall short of being a full manifestation of the knowledge of the condition for its truth: it shows only that the condition can be recognised in certain cases, not that we have a grasp of what, in general, it is for that condition to obtain even in those cases when we are incapable of recognising that it does. It is, in fact, plain that the knowledge which is being ascribed to one who is said to understand the sentence is knowledge which transcends the capacity to manifest that knowledge by the way in which the sentence is used. The platonistic theory of meaning cannot be a theory in which meaning is fully determined by use.

If to know the meaning of a mathematical statement is to grasp its use; if we learn the meaning by learning the use, and our knowledge of its meaning is a knowledge which we must be capable of manifesting by the use we make of it: then the notion of *truth*, considered as a feature which each mathematical statement either determinately possesses or determinately lacks, independently of our means of recognising its truth-value, cannot be the central notion for a theory of the meanings of mathematical statements. Rather, we have to look at those things which are actually features of the use which we learn to make of mathematical statements. What we actually learn to do, when we learn some part of the language of mathematics, is to recognise, for each statement, what counts as establishing that statement as true or as false. In the case of very simple statements, we learn some computation procedure which decides their truth or falsity: for more complex statements, we learn to recognise what is to be counted as a proof or a disproof of them. That is the practice of which we acquire a mastery: and it is in the mastery of that practice that our grasp of the meanings of the statements must consist. We must, therefore, replace the notion of truth, as the central notion of the theory of meaning for mathematical statements, by the notion of *proof*: a grasp of the meaning of a statement consists in a capacity to recognise a proof of it when one is presented to us, and a grasp of the meaning of any expression smaller than a sentence must consist in a knowledge of the way in which its presence in a sentence contributes to determining what is to count as a proof of that sentence. This does not mean that we are obliged uncritically to accept the canons of proof as conventionally acknowledged. On the contrary, as soon as we construe the logical constants in terms of this conception of meaning, we become aware that certain forms of reasoning which are conventionally accepted are devoid of justification. Just because the conception of meaning in

terms of proof is as much a molecular, as opposed to holistic, theory of meaning as that of meaning in terms of truth-conditions, forms of inference stand in need of justification, and are open to being rejected as unjustified. Our mathematical practice has been disfigured by a false conception of what our understanding of mathematical theories consisted in.

This sketch of one possible route to an account of why, within mathematics, classical logic must be abandoned in favour of intuitionistic logic obviously leans heavily upon Wittgensteinian ideas about language. Precisely because it rests upon taking with full seriousness the view of language as an instrument of social communication, it looks very unlike traditional intuitionist accounts, which, notoriously, accord a minimum of importance to language or to symbolism as a means of transmitting thought, and are constantly disposed to slide in the direction of solipsism. However, I said at the outset that my concern in this paper was not in the least with the exegesis of actual intuitionist writings: however little it may jibe with the view of the intuitionists themselves, the considerations that I have sketched appear to me to form one possible type of argument in favour of adopting an intuitionistic version of mathematics in place of a classical one (at least as far as the logic employed is concerned), and, moreover, an argument of considerable power. I shall not take the time here to attempt an evaluation of the argument, which would necessitate enquiring how the platonist might reply to it, and how the debate between them would then proceed: my interest lies, rather, in asking whether this is the only legitimate route to the adoption of an intuitionistic logic for mathematics.

Now the first thing that ought to strike us about the form of argument which I have sketched is that it is virtually independent of any considerations relating specifically to the *mathematical* character of the statements under discussion. The argument involved only certain considerations within the theory of meaning of a high degree of generality, and could, therefore, just as well have been applied to any statements whatever, in whatever area of language. The argument told in favour of replacing, as the central notion for the theory of meaning, the condition under which a statement is true, whether we know or can know when that condition obtains, by the condition under which we acknowledge the statement as conclusively established, a condition which we must, by the nature of the case, be capable of effectively recognising whenever it obtains. Since we were concerned with mathematical statements, which we recognise as true by means of a proof (or, in simple cases, a computation), this meant replacing the notion of truth by that of proof: evidently, the appropriate generalisation of this, for statements of an arbitrary kind, would be the

The philosophical basis of intuitionistic logic

replacement of the notion of truth, as the central notion of the theory of meaning, by that of verification; to know the meaning of a statement is, on such a view, to be capable of recognising whatever counts as verifying the statement, i.e. as conclusively establishing it as true. Here, of course, the verification would not ordinarily consist in the bare occurrence of some sequence of sense-experiences, as on the positivist conception of the verification of a statement. In the mathematical case, that which establishes a statement as true is the production of a deductive argument terminating in that statement as conclusion; in the general case, a statement will, in general, also be established as true by a process of reasoning, though here the reasoning will not usually be purely deductive in character, and the premisses of the argument will be based on observation; only for a restricted class of statements – the observation statements – will their verification be of a purely observational kind, without the mediation of any chain of reasoning or any other mental, linguistic or symbolic process.

It follows that, in so far as an intuitionist position in the philosophy of mathematics (or, at least, the acceptance of an intuitionistic logic for mathematics) is supported by an argument of this first type, similar, though not necessarily identical, revisions must be made in the logic accepted for statements of other kinds. What is involved is a thesis in the theory of meaning of the highest possible level of generality. Such a thesis is vulnerable in many places: if it should prove that it cannot be coherently applied to any one region of discourse, to any one class of statements, then the thesis cannot be generally true, and the general argument in favour of it must be fallacious. Constructed in this way, therefore, a position in the philosophy of mathematics will be capable of being undermined by considerations which have nothing directly to do with mathematics at all.

Is there, then, any alternative defence of the rejection, for mathematics, of classical in favour of intuitionistic logic? Is there any such defence which turns on the fact that we are dealing with *mathematical* statements in particular, and leaves it entirely open whether or not we wish to extend the argument to statements of any other general class?

Such a defence must start from some thesis about mathematical statements the analogue of which we are free to reject for statements of other kinds. It is plain what this thesis must be: namely the celebrated thesis that mathematical statements do not relate to an objective mathematical reality existing independently of us. The adoption of such a view apparently leaves us free either to reject or to adopt an analogous view for statements of any other kind. For instance, if we are realists about the physical universe, then we may contrast mathematical statements with

statements ascribing physical properties to material objects: on this combination of views, material-object statements do relate to an objective reality existing independently of ourselves, and are rendered true or false, independently of our knowledge of their truth-values or of our ability to attain such knowledge or the particular means, if any, by which we do so, by that independently existing reality; the assertion that mathematical statements relate to no such external reality gains its substance by contrast with the physical case. Unlike material objects, mathematical objects are, on this thesis, creations of the human mind: they are objects of thought, not merely in the sense that they can be thought about, but in the sense that their being is to be thought of; for them, *esse est concipi*.

On such a view, a conception of meaning as determined by truth-conditions is available for any statements which do relate to an independently existing reality. For then we may legitimately assume, of each such statement, that it possesses a determinate truth-value, true or false, independently of our knowledge, according as it does or does not agree with the constitution of that external reality which it is about. But, when the statements of some class do not relate to such an external reality, the supposition that each of them possesses such a determinate truth-value is empty, and we therefore cannot regard them as being given meanings by associating truth-conditions with them; we have, in such a case, *faute de mieux*, to take them as having been given meaning in a different kind way, namely by associating with them conditions of a different kind – conditions that we are capable of recognising when they obtain – namely, those conditions under which we take their assertion or their denial as being conclusively justified.

The first type of justification of intuitionistic logic which we considered conformed to Kreisel's dictum, "The point is not the existence of mathematical objects, but the objectivity of mathematical truth": it bore directly upon the claim that mathematical statements possess objective truth-values, without raising the question of the ontological status of mathematical objects or the metaphysical character of mathematical reality. But a justification of the second type violates the dictum: it makes the question whether mathematical statements possess objective truth-values depend upon a prior decision as to the being of mathematical objects. And the difficulty about it lies in knowing on what we are to base the premiss that mathematical objects are the creations of human thought in advance of deciding what is the correct model for the meanings of mathematical statements or what is the correct conception of truth as relating to them. It appears that, on this view, before deciding whether a grasp of the meaning of a mathematical statement is to be considered as consisting in a knowledge of what has to be the case for it to be

The philosophical basis of intuitionistic logic

true or in a capacity to recognise a proof of it when one is presented, we have first to resolve the metaphysical question whether mathematical objects – natural numbers, for example – are, as on the constructivist view, creations of the human mind, or, as on the platonist view, independently existing abstract objects. And the puzzle is to know on what basis we could possibly resolve this metaphysical question, at a stage at which we do not even know what model to use for our understanding of mathematical statements. We are, after all, being asked to choose between two metaphors, two pictures. The platonist metaphor assimilates mathematical enquiry to the investigations of the astronomer: mathematical structures, like galaxies, exist, independently of us, in a realm of reality which we do not inhabit but which those of us who have the skill are capable of observing and reporting on. The constructivist metaphor assimilates mathematical activity to that of the artificer fashioning objects in accordance with the creative power of his imagination. Neither metaphor seems, at first sight, especially apt, nor one more apt than the other: the activities of the mathematician seem strikingly unlike those either of the astronomer or of the artist. What basis can exist for deciding which metaphor is to be preferred? How are we to know in which respects the metaphors are to be taken seriously, how the pictures are to be used?

Preliminary reflection suggests that the metaphysical question ought not to be answered first: we cannot, as the second type of approach would have us do, *first* decide the ontological status of mathematical objects, and then, with that as premiss, deduce the character of mathematical truth or the correct model of meaning for mathematical statements. Rather, we have first to decide on the correct model of meaning – either an intuitionistic one, on the basis of an argument of the first type, or a platonistic one, on the basis of some rebuttal of it; and then one or other picture of the metaphysical character of mathematical reality will force itself on us. If we have decided upon a model of the meanings of mathematical statements according to which we have to repudiate a notion of truth considered as determinately attaching, or failing to attach, to such statements independently of whether we can now, or ever will be able to, prove or disprove them, then we shall be unable to use the picture of mathematical reality as external to us and waiting to be discovered. Instead, we shall inevitably adopt the picture of that reality as being the product of our thought, or, at least, as coming into existence only as it is thought. Conversely, if we admit a notion of truth as attaching objectively to our mathematical statements independently of our knowledge, then, likewise, the picture of mathematical reality as existing, like the galaxies, independently of our observation of it will force

itself on us in an equally irresistible manner. But, when we approach the matter in this way, there is no puzzle over the interpretation of these metaphors: psychologically inescapable as they may be, their non-metaphorical content will consist entirely in the two contrasting models of the meanings of mathematical statements, and the issue between them will become simply the issue as to which of these two models is correct. If, however, a view as to the ontological status of mathematical objects is to be treated as a *premiss* for deciding between the two models of meaning, then the metaphors cannot without circularity be explained solely by reference to those models; and it is obscure how else they are to be explained.

These considerations appear, at first sight, to be reinforced by reflection upon Frege's dictum, 'Only in the context of a sentence does a name stand for anything'. We cannot refer to an object save in the course of saying something about it. Hence, any thesis concerning the ontological status of objects of a given kind must be, at the same time, a thesis about what makes a statement involving reference to such objects true, in other words, a thesis about what properties an object of that kind can have. Thus, to say that fictional characters are the creations of the imagination is to say that a statement about a fictional character can be true only if it is imagined as being true, that a fictional character can have only those properties which it is part of the story that he has; to say that something is an object of sense – that for it *esse est percipi* – is to say that it has only those properties it is perceived as having: in both cases, the ontological thesis is a ground for rejecting the law of excluded middle as applied to statements about those objects. Thus we cannot separate the question of the ontological status of a class of objects from the question of the correct notion of truth for statements about those objects, i.e. of the kind of thing in virtue of which such statements are true, when they are true. This conclusion corroborates the idea that an answer to the former question cannot serve as a premiss for the latter one.

Nevertheless, the position is not so straightforward as all this would make it appear. From the possibility of an argument of the first type for the use of intuitionistic logic in mathematics, it is evident that a model of the meanings of mathematical statements in terms of proof rather than of truth need not rest upon any particular view about the ontological character of mathematical objects. There is no substantial disagreement between the two models of meaning so long as we are dealing only with decidable statements: the crucial divergence occurs when we consider ones which are not effectively decidable, and the linguistic operation which first enables us to frame effectively undecidable mathematical statements is that of quantification over infinite totalities, in the first

The philosophical basis of intuitionistic logic

place over the totality of natural numbers. Now suppose someone who has, on whatever grounds, been convinced by the platonist claim that we do not create the natural numbers, and yet that reference to natural numbers is not a mere *façon de parler*, but is a genuine instance of reference to objects: he believes, with the platonist, that natural numbers are abstract objects, existing timelessly and independently of our knowledge of them. Such a person may, nevertheless, when he comes to consider the meaning of existential and universal quantification over the natural numbers, be convinced by a line of reasoning such as that which I sketched as constituting the first type of justification for replacing classical by intuitionistic logic. He may come to the conclusion that quantification over a denumerable totality cannot be construed in terms of our grasp of the conditions under which a quantified statement is true, but must, rather, be understood in terms of our ability to recognise a proof or disproof of such a statement. He will therefore reject a classical logic for number-theoretic statements in general, admitting only intuitionistically valid arguments involving them. Such a person would be accepting a platonistic view of the existence of mathematical objects (at least the objects of number theory), but rejecting a platonistic view of the objectivity of mathematical statements.

Our question is, rather, whether the opposite combination of views is possible: whether one may consistently hold that natural numbers are the creations of human thought, but yet believe that there is a notion of truth under which each number-theoretic statement is determinately either true or false, and that it is in terms of our grasp of their truth-conditions that our understanding of number-theoretic statements is to be explained. If such a combination is possible, then, it appears, there can be no route from the ontological thesis that mathematical objects are the creations of our thought to the model of the meanings of mathematical statements which underlies the adoption of an intuitionistic logic.

This is not the only question before us: for, even if these two views cannot be consistently combined, it would not follow that the ontological thesis could serve as a premiss for the constructivist view of the meanings of mathematical statements; our difficulty was to understand how the ontological thesis could have any substance if it were not merely a picture encapsulating that conception of meaning. The answer is surely this: that, while it is surely correct that a thesis about the ontological status of objects of a given kind, e.g. natural numbers, must be understood as a thesis about that in which the truth of certain statements about those objects consists, it need not be taken as, in the first place, a thesis about the entire class of such statements; it may, instead, be understood as a thesis only about some restricted subclass of such statements, those

which are basic to the very possibility of making reference to those objects. Thus, for example, the thesis that natural numbers are creations of human thought may be taken as a thesis about the sort of thing which makes a numerical equation or inequality true, or, more generally, a statement formed from such equations by the sentential operators and bounded quantification. To say that the only notion of truth we can have for number-theoretic statements generally is that which equates truth with our capacity to prove a statement is to prejudge the issue about the correct model of meaning for such statements, and therefore cannot serve as a premiss for the constructivist view of meaning. But to say that, for decidable number-theoretic statements, truth consists in provability, is not in itself to prejudge the question in what the truth of undecidable statements, involving unbounded quantification, consists: and hence the possibility is open that a view about the one might serve as a premiss for a view about the other. Our problem is to discover whether it can do so in fact: whether there is any legitimate route from the thesis that natural numbers are creations of human thought, construed as a thesis about the sort of thing which makes decidable number-theoretic statements true, to a view of the meanings of number-theoretic statements generally which would require the adoption for them of an intuitionistic rather than a classical logic.

In order to resolve this question, it is necessary for us to take a rather closer look at the notion of truth for mathematical statements, as understood intuitionistically. The most obvious suggestion that comes to mind in this connection is that the intuitionistic notion of truth conforms, just as does the classical notion, to Tarski's schema:

(T) S is true iff A ,

where an instance of the schema is to be formed by replacing ' A ' by some number-theoretic statement and ' S ' by a canonical name of that sentence, as, e.g., in:

'There are infinitely many twin primes' is true iff there are infinitely many twin primes.

It is necessary to admit counter-examples to the schema (T) in any case in which we wish to hold that there exist sentences which are neither true nor false: for if we replace ' A ' by such a sentence, the left-hand side of the biconditional becomes false (on the assumption that, if the negation of a sentence is true, that sentence is false), although, by hypothesis, the right-hand side is not false. But, in intuitionistic logic, that semantic principle holds good which stands to the double negation of the law of

excluded middle as the law of bivalence stands to the law of excluded middle itself: it is inconsistent to assert of any statement that it is neither true nor false; and hence there seems no obstacle to admitting the correctness of the schema (T). Of course, in doing so, we must construe the statement which appears on the right-hand side of any instance of the schema in an intuitionistic manner. Provided we do this, a truth-definition for the sentences of an intuitionistic language, say that of Heyting arithmetic, may be constructed precisely on Tarski's lines, and will yield, as a consequence, each instance of the schema (T).

However, notoriously, such an approach leaves many philosophical problems unresolved. The truth-definition tells us, for example, that

' $598017 + 246532 = 844549$ ' is true

just in the case in which $598017 + 246532 = 844549$. We may perform the computation, and discover that $598017 + 246532$ does indeed equal 844549 : but does that mean that the equation was already true before the computation was performed, or that it would have been true even if the computation had never been performed? The truth-definition leaves such questions quite unanswered, because it does not provide for inflections of tense or mood of the predicate 'is true': it has been introduced only as a predicate as devoid of tense as are all ordinary mathematical predicates, but its role in our language does not reveal why such inflections of tense or even of mood should be forbidden.

These difficulties raise their heads as soon as we make the attempt to introduce tense into mathematics, as intuitionism provides us with some inclination to do; this can be seen from the problems surrounding the theory of the creative subject. These problems are well brought out in Troelstra's discussion of the topic. It is evident that we ought to admit as an axiom

(a) $(\neg \neg A) \rightarrow A$;

if we know that, at any stage, A has been (or will be) proved, then we are certainly entitled to assert A . But ought we to admit the converse in the form

(b) $A \rightarrow \exists n(\neg \neg A)^?$

Its double negation

(c) $A \rightarrow \neg \neg \exists n(\neg \neg A)$

is certainly acceptable: if we know that A is true, then we shall certainly never be able to assert, at least on purely mathematical grounds, that it

will never be proved. But can we equate truth with the obtaining of a proof at some stage, in the past or in the future, as the equivalence:

$$(\delta) \quad A \leftrightarrow \exists n(\neg_n A)$$

requires us to do? (To speak of 'truth' here seems legitimate, since, while Tarski's truth-predicate is a predicate of sentences, the sentential operator to which it corresponds is a redundant one, which can be inserted before or deleted from in front of any clause without change of truth-value.)

If we accept the axiom (β), and hence the equivalence (δ), we run into certain difficulties, on which Troelstra comments. The operator ' $\exists n(\neg_n \dots)$ ' becomes a redundant truth-operator, and hence may be distributed across any logical constant, as in

$$(\epsilon) \quad (\neg_k \forall m A(m)) \rightarrow \forall m \exists n(\neg_n A(m)).$$

As Troelstra observes, this appears to have the consequence that, if we have once proved a universally quantified statement, we are in some way committed to producing, at some time in the future, individual proofs of all its instances, whereas, palpably, we are under no such constraint. The solution to which he inclines is that proposed by Kripke, namely that the operator ' \neg_n ' must be so construed that a proof, at stage n , of a universally quantified statement counts as being, at the same time, a proof of each instance, so that we could assert the stronger thesis

$$(\zeta) \quad (\neg_k \forall m A(m)) \rightarrow \forall m(\neg_k A(m)).$$

(Troelstra in fact recommends this interpretation on separate grounds, as enabling us to escape a paradox about constructive functions; he himself points out, however, that this paradox can alternatively be avoided by introducing distinctions of level which seem intrinsically plausible.) The difficulty about this solution is that it must be extended to every recognised logical consequence. From

$$(\eta) \quad (m \leq n \ \& \ (\neg_m A)) \rightarrow (\neg_n A)$$

we have

$$(\theta) \quad (n = \max(m, k) \ \& \ (\neg_m A) \ \& \ (\neg_k C)) \rightarrow ((\neg_n A) \ \& \ (\neg_n C)),$$

while from (δ) we obtain

$$(\iota) \quad (\neg_m A) \ \& \ (\neg_k(A \rightarrow B)) \rightarrow \exists n(\neg_n B).$$

We could in the same way complain that this committed us, whenever we had proved a statement A and had recognised some other statement B as being a consequence of A , to actually drawing that consequence some

time in the future; and, if our interpretation of the operator ' \neg_n ' is to be capable of dealing with this difficulty in the same way as with the special case of instances of a universally quantified statement, we should have to allow that a proof that a theorem had a certain consequence was, at the same time, a proof of that consequence, and, likewise, that a proof of a statement already known to have a certain consequence was, at the same time, a proof of that consequence; we should, that is, have to accept the law

$$(\kappa) \quad (n = \max(m, k) \ \& \ (\neg_m A) \ \& \ (\neg_k(A \rightarrow B))) \rightarrow (\neg_n B).$$

We should thus have so to construe the notion of proof that a proof of a statement is taken as simultaneously constituting a proof of anything that has already been recognised as a consequence of that statement. We can, no doubt, escape having to say that it is simultaneously a proof of whatever, in a platonic sense, is as a matter of fact an intuitionistic consequence of the statement: but when are we to be said to have recognised that one statement is a consequence of another? If a proof of a universally quantified statement is simultaneously a proof of all its instances, it is difficult to see how we can avoid conceding that a demonstration of the validity of a schema of first-order predicate logic is simultaneously a demonstration of the truth of all its instances, or an acceptance of the induction schema simultaneously an acceptance of all cases of induction. The resulting notion of proof would be far removed indeed from actual mathematical experience, and could not be explained as no more than an idealisation of it.

The trouble with all this is that, as a representation of actual mathematical experience, we are operating with too simplified a notion of proof. The axiom (η) is acceptable in the sense that, prescinding from the occasional accident, once a theorem has been proved, it always remains available to be subsequently appealed to: but the idea that, having acknowledged the two premisses of a modus ponens, we have *thereby* recognised the truth of the conclusion, is plausible only in a case in which we are simultaneously bearing in mind the truth of the two premisses. To have once proved a statement is not thereafter to be continuously aware of its truth: if it were, then we should indeed always know the logical consequences of everything which we know, and should have no need of proof.

Acceptance of axiom (β) leads to the conclusion that we shall eventually prove every logical consequence of everything we prove. This, as a representation of the intuitionist notion of proof, is an improvement upon Beth trees, as normally presented: for these are set up in such a way that, at any stage (node), every logical consequence of statements true at

that stage is already true; the Beth trees are adapted only to situations, such as those involving free choice sequences, where new information is coming in that is not derived from the information we have at earlier stages. But the idea that we shall eventually establish every logical consequence of everything we know is implausible and arbitrary: and it cannot be rescued by construing each proof as, implicitly, a proof also of the consequences of the statement proved, save at the cost of perverting the whole conception. If we wish to do so, there seems no reason why we should not take the stages represented by the numerical subscripts as punctuated by proofs, however short the stages thereby become, and the notion of proof as relating only to what is quite explicitly proved, so that, at each stage, one and only new statement is proved, and consider what axioms hold under the resulting interpretation of the symbol ' \neg '. It thus appears that, under this interpretation, the axiom (β) must be rejected in favour of the weaker axiom (γ).

Looked at in another way, however, the stronger axiom (β) seems entirely acceptable. If, that is, we interpret the implication sign in its intuitionistic sense, the axiom merely says that, given a proof of A , we can effectively find a proof that A was proved at some stage; and this seems totally innocuous and banal. But, if axiom (β) is innocuous, how did we arrive at our earlier difficulties? The only possibility seems to be that our logical laws are themselves at fault. For instance, the law

$$(\lambda) \quad \forall x A(x) \rightarrow A(m)$$

leads, via axiom (β), to the conclusion

$$(\mu) \quad \forall x A(x) \rightarrow \exists n (\neg_n A(m)),$$

which appears, on the present interpretation of ' \neg ', to say that we shall explicitly prove every instance of every universally quantified statement which we prove; so perhaps the error lies in the law (λ) itself. A law such as (λ) is ordinarily justified by saying that, given a proof of $\forall x A(x)$, we can, for each m , effectively find a proof of $A(m)$. If this is to remain a sufficient justification of (μ), then (μ) must be construed as saying that, given a proof of $\forall x A(x)$, then (μ) must be construed as saying that, given a proof of $\forall x A(x)$, we can effectively find a proof that $A(m)$ will be proved at some stage. How can we do this, for given m ? Obviously, by proving $A(m)$ and noting the stage at which we do so. This means, then, that the existentially quantified statement

$$(\nu) \quad \exists n (\neg_n A(m))$$

is to be so understood that its assertion does not amount to a claim that we shall, as a matter of fact, prove $A(m)$ at some stage n , but only that we are capable of bringing it about that $A(m)$ is proved at some stage.

The philosophical basis of intuitionistic logic

Our difficulties thus appear to have arisen from understanding the existential quantifier in (β) in an excessively classical or realistic manner, namely as meaning that there will in fact be a stage n at which the statement is proved, rather than as meaning that we have an effective means, if we choose to apply it, of making it the case that there is such a stage. The point here is that it is not merely a question of interpreting the existential quantifier intuitionistically rather than classically in the sense that we can assert that there is a stage n at which a statement will be proved only if we have an effective means for identifying a particular such stage. Rather, if quantification over temporal stages is to be introduced into mathematical statements, then it must be treated like quantification over mathematical objects and mathematical constructions: the assertion that there is a stage n at which such-and-such will hold is justified provided that we possess an enduring capability of bringing about such a stage, regardless of whether we ever exercise this capability or not.

The confusions concerning the theory of the creative subject which we have been engaged in disentangling arose in part from a perfectly legitimate desire, to relate the intuitionistic truth of a mathematical statement with a use of the logical constants which is alien to intuitionistic mathematics. Troelstra's difficulties sprang from his desire to construe the expression ' $\exists n (\neg_n A)$ ' as meaning that A would in fact be proved at some stage; but, whether we interpret the existential quantifier classically or constructively, such a way of construing it fails to jibe with the way it and the other logical constants are construed within ordinary mathematical statements, and hence, however we try to modify our notion of a statement's being proved, we shall not obtain anything equivalent to the mathematical statement A itself. Nevertheless, the desire to express the condition for the intuitionistic truth of a mathematical statement in terms which do not presuppose an understanding of the intuitionistic logical constants as used within mathematical statements is entirely licit. Indeed, if it were impossible to do so, intuitionists would have no way of conveying to platonist mathematicians what it was that they were about: we should have a situation quite different from that which in fact obtains, namely one in which some people found it natural to extend basic computational mathematics in a classical direction, and others found it natural to extend it in an intuitionistic direction, and neither could gain a glimmering of what the other was at. That we are not in this situation is because intuitionists and platonists can find a common ground, namely statements, both mathematical and non-mathematical, which are, in the view of both, decidable, and about whose meaning there is therefore no serious dispute and which both sides agree obey a classical logic. Each party can, accordingly, by use of and reference to

these unproblematic statements, explain to the other what his conception of meaning is for those mathematical statements which are in dispute. Such an explanation may not be accepted as legitimate by the other side (the whole point of the intuitionist position is that undecidable mathematical statements cannot legitimately be given a meaning by laying down truth-conditions for them in the platonistic manner); but at least the conception of meaning held by each party is not wholly opaque to the other.

This dispute between platonists and intuitionists is a dispute over whether or not a realist interpretation is legitimate for mathematical statements: and the situation I have just indicated is quite characteristic for disputes concerning the legitimacy of a realist interpretation of some class of statements, and is what allows a *dispute* to take place at all. Typically, in such a dispute there is some auxiliary class of statements about which both sides agree that a realist interpretation is possible (depending upon the grounds offered by the anti-realists for rejecting a realist interpretation for statements of the disputed class, this auxiliary class may or may not consist of statements agreed to be effectively decidable); and, typically, it is in terms of the truth-conditions of statements of this auxiliary class that the anti-realist frames his conception of meaning, while the realist very often appeals to statements of the auxiliary class as providing an analogy for his conception of meaning for statements of the disputed class. Thus, when the dispute concerns statements about the future, statements about the present will form the auxiliary class; when it concerns statements about material objects, the auxiliary class will consist of sense-data statements; when the dispute concerns statements about character-traits, the auxiliary class will consist of statements about actual or hypothetical behaviour; and so on.

If the intuitionistic notion of truth for mathematical statements can be explained only by a Tarski-type truth-definition which takes for granted the meanings of the intuitionistic logical constants, then the intuitionist notion of truth, and hence of meaning, cannot be so much as conveyed to anyone who does not accept it already, and no debate between intuitionists and platonists is possible, because they cannot communicate with one another. It is therefore wholly legitimate, and, indeed, essential, to frame the condition for the intuitionistic truth of a mathematical statement in terms which are intelligible to a platonist and do not beg any questions, because they employ only notions which are not in dispute.

The obvious way to do this is to say that a mathematical statement is intuitionistically true if there exists an (intuitionistic) proof of it, where the existence of a proof does not consist in its platonistic existence in a

The philosophical basis of intuitionistic logic

realm outside space and time, but in our actual possession of it. Such a notion of truth, obvious as it is, already departs at once from that supplied by the analogue of the Tarski-type truth-definition, since the predicate 'is true', thus explained, is significantly tensed: a statement not now true may later become true. For this reason, when 'true' is so construed, the schema (T) is incorrect: for the negation of the right-hand side of any instance will be a mathematical statement, while the negation of the left-hand side will be a non-mathematical statement, to the effect that we do not as yet possess a proof of a certain mathematical statement, and hence the two sides cannot be equivalent. We might, indeed, seek to restore the equivalence by replacing 'is true' on the left-hand side by 'is or will be true': but this would lead us back into the difficulties we encountered with the theory of the creative subject, and I shall not further explore it.

What does require exploration is the notion of proof being appealed to, and that also of the existence of a proof. It has often, and, I think, correctly, been held that the notion of proof needs to be specialised if it is to supply a non-circular account of the meanings of the intuitionistic logical constants. It is possible to see this by considering disjunction and existential quantification. The standard explanation of disjunction is that a construction is a proof of $A \vee B$ just in case it is a proof either of A or of B . Despite this, it is not normally considered legitimate to assert a disjunction, say in the course of a proof, only when we actually have a proof of one or other disjunct. For instance, it would be quite in order to assert that

$$10^{10^{10}} + 1 \text{ is either prime or composite}$$

without being able to say which alternative held good, and to derive some theorem by means of an argument by cases. What makes this legitimate, on the standard intuitionist view, is that we have a method which is in principle effective for deciding which of the two alternatives is correct: if we were to take the trouble to apply this method, the appeal to an argument by cases could be dispensed with. Generally speaking, therefore, if we take a statement as being true only when we actually possess a proof of it, an assertion of a disjunctive statement will not amount to a claim that it is true, but only to a claim that we have a means, effective in principle, for obtaining a proof of it. This means, however, that we have to distinguish between a proof proper, a proof in the sense of "proof" used in the explanations of the logical constants, and a cogent argument. In the course of a cogent argument for the assertibility of a mathematical statement, a disjunction of which we do not possess, an actual proof may be asserted, and an argument by cases based upon this disjunction. This argument will not itself be a proof, since any initial segment of a proof

must again be a proof: it merely indicates an effective method by which we might obtain a proof of the theorem if we cared to apply it. We thus appear to require a distinction between a proof proper – a canonical proof – and the sort of argument which will normally appear in a mathematical article or textbook, an argument which we may call a ‘demonstration’. A demonstration is just as cogent a ground for the assertion of its conclusion as is a canonical proof, and is related to it in this way: that a demonstration of a proposition provides an effective means for finding a canonical proof. But it is in terms of the notion of a canonical proof that the meanings of the logical constants are given. Exactly similar remarks apply to the existential quantifier.

There is some awkwardness about this way of looking at disjunction and existential quantification, namely in the divorce between the notions of truth and of assertibility. It might be replied that the significance of the act of assertion is not, in general, uniquely determined by the notion of truth: for instance, even when we take the notion of truth for mathematical statements as given, it still needs to be stipulated whether the assertion of a mathematical statement amounts to a claim to have a proof of it, or whether it may legitimately be based on what Polya calls a ‘plausible argument’ of a non-apodictic kind. (We can imagine people whose mathematics wholly resembles ours, save that they do not construe an assertion as embodying a claim to have more than a plausible argument.) It nevertheless remains that, if the truth of a mathematical statement consists in our possession of a canonical proof of it, while its assertion need be based on possession of no more than a demonstration, we are forced to embrace the awkward conclusion that it may be legitimate to assert a statement even though it is *known* not to be true. Still, if the sign of disjunction and the existential quantifier were the only logical constants whose explanation appeared to call for a distinction between canonical proofs and demonstrations, the distinction might be avoided altogether by modifying their explanations, to allow that a proof of a disjunction consisted in any construction of which we could recognise that it would effectively yield a proof of one or other disjunct, and similarly for existential quantification: we should then be able to say that a statement could be asserted only when it was (known to be) true.

However, the distinction is unavoidable if the explanations of universal quantification, implication and negation are to escape circularity. The standard explanation of implication is that a proof of $A \rightarrow B$ is a construction of which we can recognise that, applied to any proof of A , it would yield a proof of B . It is plain that the notion of proof being used here cannot be one which admits unrestricted use of modus ponens: for,

The philosophical basis of intuitionistic logic

if it did, the explanation would be quite empty. We could admit anything we liked as constituting a proof of $A \rightarrow B$, and it would remain the case that, given such a proof, we had an effective method of converting any proof of A into a proof of B , namely by adding the proof of $A \rightarrow B$ and performing a single inference by modus ponens. Obviously, this is not what is intended: what is intended is that the proof of $A \rightarrow B$ should supply a means of converting a proof of A into a proof of B without appeal to modus ponens, at least, without appeal to any modus ponens containing $A \rightarrow B$ as a premiss. The kind of proof in terms of which the explanation of implication is being given is, therefore, one of a restricted kind. On the assumption that we have, or can effectively obtain, a proof of $A \rightarrow B$ of this restricted kind, an inference from $A \rightarrow B$ by modus ponens is justified, because it is in principle unnecessary. The same must, by parity of reasoning, hold good for any other application of modus ponens in the main (though not in any subordinate) deduction of any proof. Thus, if the intuitionistic explanation of implication is to escape, not merely circularity, but total vacuousness, there must be a restricted type of proof – canonical proof – in terms of which the explanation is given, and which does not admit modus ponens save in subordinate deductions. Arguments employing modus ponens will be perfectly valid and compelling, but they will, again, not be proofs in this restricted sense: they will be demonstrations, related to canonical proofs as supplying a means effective in principle for finding canonical proofs. Exactly similar remarks apply to universal quantification *vis-à-vis* universal instantiation and to negation *vis-à-vis* the rule *ex falso quodlibet*: the explanations of these operators presuppose a restricted type of proof in which the corresponding elimination rules do not occur within the main deduction.

What exactly the notion of a canonical proof amounts to is obscure. The deletion of elimination rules from a canonical proof suggests a comparison with the notion of a normalised deduction. On the other hand, Brouwer’s celebrated remarks about fully analysed proofs in connection with the bar theorem do not suggest that such a proof is one from which unnecessary detours have been cut out – the proof of the bar theorem consists in great part in cutting out such detours from a proof taken already to be in ‘fully analysed’ form. Rather, Brouwer’s idea appears to be that, in a fully analysed proof, all operations on which the proof depends will actually have been carried out. That is why such a proof may be an infinite structure: a proof of a universally quantified statement will be an operation which, applied to each natural number, will yield a proof of the corresponding instance; and, if this operation is carried out for each natural number, we shall have proofs of

denumerably many statements. The conception of the mental construction which is the fully analysed proof as being an infinite structure must, of course, be interpreted in the light of the intuitionist view that all infinity is potential infinity: the mental construction consists of a grasp of general principles according to which any finite segment of the proof could be explicitly constructed. The direction of analysis runs counter to the direction of deduction; while one could not be convinced by an actually infinite proof-structure (because one would never reach the conclusion), one may be convinced by a potentially infinite one, because its infinity consists in our grasp of the principles governing its analysis. Indeed, it might reasonably be said that the standard intuitionistic meanings of the universal and conditional quantifiers involve that a proof is such a potentially infinite structure. Nevertheless, the notion of a fully analysed proof, that is, of the result of applying every operation involved in the proof, is far from clear, because it is obscure what the effect of the analysis would be on conditionals and negative statements. We can systematically display the results of applying the operation which constitutes a proof of a statement involving universal quantification over the natural numbers, because we can generate each natural number in sequence. But the corresponding application of the operation which institutes the proof of a statement of the form $A \rightarrow B$ would consist in running through all putative canonical proofs of A and either showing, in each case, that it was not a proof of A , or transforming it into a proof of B ; and, at least without a firm grasp upon the notion of a canonical proof, we have no idea how to generate all the possible candidates for being a proof of A .

The notion of canonical proof thus lies in some obscurity; and this state of affairs is not indefinitely tolerable, because, unless it is possible to find a coherent and relatively sharp explanation of the notion, the viability of the intuitionist explanations of the logical constants must remain in doubt. But, for present purposes, it does not matter just how the notion of canonical proof is to be explained; all that matters is that we require some distinction between canonical proofs and demonstrations, a distinction is necessary, there is no motivation for refusing to apply it to the case of disjunctions and existential statements.

Let us now ask whether we want the intuitionist truth of a mathematical statement to consist in the existence of a canonical proof or of a mean that we have actually carried out, then either choice leaves us with certain counter-intuitive consequences. On either view, naturally, a valid rule of inference will not always lead from true pre-

issues to a true conclusion, namely if we have not explicitly drawn the inference: this will always be so on any view which equates truth with our actual possession of some kind of proof. If we take the stricter line, and hold a statement to be true only when we possess a canonical proof of it, then, as we have seen, we shall have to allow that a statement may be asserted even though it is known not to be true. If, on the other hand, we allow that a statement is true when we possess merely a demonstration of it, then truth will not distribute over disjunction: we may possess a demonstration of $A \vee B$ without having a demonstration either of A or of B . Now, admittedly, once we have admitted a significant tense for the predicate 'is true', then, as we have noted, the schema (T) cannot be maintained as in all cases correct: but our instinct is to permit as little divergence from it as possible, and it is for this reason that we are uneasy about a notion of truth which is not distributive over disjunction or existential quantification.

A natural emendation is to relax slightly the requirement that a proof or demonstration should have been explicitly given. The question is how far we may consistently go along this path. If we say merely that a mathematical statement is true just in case we are aware that we have an effective means of obtaining a canonical proof of it, this will not be significantly different from equating truth with our actual possession of a demonstration. It might be allowed that there would be some cases when we had demonstrated the premisses of, say, an inference by modus ponens in which we were aware that we could draw the conclusion, though we had not quite explicitly done so; but there will naturally be others in which we were not aware of this, i.e. had not noticed it; if it were not so, we could never discover new demonstrations. It is therefore tempting to go one step further, and say that a statement is true provided that we are in fact in possession of a means of obtaining a canonical proof of it, whether or not we are aware of the fact. Would such a step be a betrayal of intuitionist principles?

In which cases would it be correct to say that we possess an effective means of finding a canonical proof of a statement, although we do not know that we have such a means? Unless we are to suppose that we can attain so sharp a notion of a canonical proof that it would be possible to enumerate effectively all putative such proofs of a given statement (the supposition whose implausibility causes our difficulty over the notion of a fully analysed proof), there is only one such case: that in which we possess a demonstration of a disjunctive or existential statement. Such a demonstration provides us with what we recognise as an effective means (in principle) for finding a canonical proof of the disjunctive or existential statement demonstrated. Such a canonical proof, when found, will

be a proof of one or other disjunct, or of one instance of the existentially quantified statement: but we cannot, in general, tell which. For example, when $A(x)$ is a decidable predicate, the decision procedure constitutes a demonstration of the disjunction ' $A(\bar{n}) \vee \neg A(\bar{n})$ ', for specific n ; but, until we apply the procedure, we do not know which of the two disjuncts we can prove. It is very difficult for us to resist the temptation to suppose that there is already, unknown to us, a determinate answer to the question which of the two disjuncts we should obtain a proof of, were we to apply the decision procedure; that, for example, that it is already the case either that, if we were to test it out, we should find that $10^{10^{10}} + 1$ is prime, or that, if we were to test it out, we should find that it was composite. What is involved here is the passage from a subjunctive conditional of the form:

$$A \rightarrow (B \vee C)$$

to a disjunction of subjunctive conditionals of the form

$$(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C).$$

Where the conditional is interpreted intuitionistically, this transition is, of course, invalid: but the subjunctive conditional of natural language does not coincide with the conditional of intuitionistic mathematics. It is, indeed, the case that the transition is not in general valid for the subjunctive conditional of natural language either: but, when we reflect on the cases in which the inference fails, it is difficult to avoid thinking that the present case is not one of them.

There are two obvious kinds of counter-example to this form of inference for ordinary subjunctive conditionals: perhaps they are really two sub-varieties of a single type. One is the case in which the antecedent A requires supplementation before it will yield a determinate one of the disjuncts B and C . For instance, we may safely agree that, if Fidel Castro were to meet President Carter, he would either insult him or speak politely to him; but it might not be determinately true, of either of those things, that he would do it, since it might depend upon some so far unspecified further condition, such as whether the meeting took place in Cuba or outside. Schematically, this kind of case is one in which we can assert:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow (B \vee C), \\ (A \ \& \ Q) &\rightarrow B, \\ (A \ \& \ \neg Q) &\rightarrow C, \end{aligned}$$

but in which the subjunctive antecedent A neither implies nor presupposes either Q or its negation; in such a case, we cannot assert either

$A \rightarrow B$ or $A \rightarrow C$. The other kind of counter-example is that in which we do not consider the disjuncts to be determined by anything at all: no supplementation of the antecedent would be sufficient to decide between them in advance. If that light-beam were to fall upon an atom, either it would assume a higher energy level, or it would remain in its ground state; but nothing can determine for certain in advance which would happen. Similar cases will arise, for those who believe in free will in the traditional sense, in respect of human actions.

If we were to carry out the decision procedure for determining the primality or otherwise of some specific large number N , we should either obtain the result that N is prime or obtain the result that N is composite. Is this, or is it not, a case in which we may conclude that it either holds good that, if we were to carry out the procedure, we should find that N is prime, or that, if we were to carry out the procedure, we should find that N is composite? The difficulty of resisting the conclusion that it is such a case stems from the fact that it does not display either of the characteristics found in the two readily admitted types of counter-example to the form of inference we are considering. No further circumstance could be relevant to the result of the procedure – this is part of what is meant by calling it a computation; and, since at each step the outcome of the procedure is determined, how can we deny that the overall outcome is determinate also?

If we yield to this line of thought, then we must hold that every statement formed by applying a decidable predicate to a specific natural number already has a definite truth-value, true or false, although we may not know it. And, if we hold this, it makes no difference whether we chose at the outset to say that natural numbers are creations of the human mind or that they are eternally existing abstract objects. Which ever we say, our decision how to interpret undecidable statements of number theory, and, in the first place, statements of the forms $\forall x A(x)$ and $\exists x A(x)$, where $A(x)$ is decidable, will be independent of our view about the ontological status of natural numbers. For, on this view of the truth of mathematical statements, each decidable number-theoretic statement will already be determinately true or false, independently of our knowledge, just as it is on a platonistic view; any thesis about the ontological character of natural numbers will then be quite irrelevant to the interpretation of the quantifiers. As we noted, it would be possible for someone to be prepared to regard natural numbers as timeless abstract objects, and to regard decidable predicates as being determinately true or false of them, and yet to be convinced by an argument of the first type, based on quite general considerations concerning meaning, that unbounded quantification over natural numbers was not an operation

which in all cases preserved the property of possessing a determinate truth-value, and therefore to fall back upon a constructivist interpretation of it. Conversely, if someone who thought of the natural numbers as creations of human thought also believed, for the reasons just indicated, that each decidable predicate was determinately true or false of each of them, he might accept a classical interpretation of the quantifiers. He would do so if he was unconvinced by the general considerations about meaning which we reviewed, i.e., by the first type of argument for the adoption of an intuitionistic logic for mathematics: the fact that he was prepared to concede that the natural numbers come into existence only in virtue of our thinking about them would play no part in his reflections on the meanings of the quantifiers. Dedekind, who declared that mathematical structures are free creations of the human mind, but nevertheless appears to have construed statements about them in a wholly platonistic manner, may perhaps be an instance of just such a combination of ideas.

One who rejects the idea that there is already a determinate outcome for the application, to any specific case, of an effective procedure is, however, in a completely different position. If someone holds that the only acceptable sense in which a mathematical statement, even one that is effectively decidable, can be said to be true is that in which this means that we presently possess an actual proof or demonstration of it, then a classical interpretation of unbounded quantification over the natural numbers is simply unavailable to him. As is frequently remarked, the classical or platonistic conception is that such quantification represents an infinite conjunction or disjunction: the truth-value of the quantified statement is determined as the infinite sum or product of the truth-values of the denumerably many instances. Whether or not this be regarded as an acceptable means of determining the meaning of these operators, the explanation presupposes that all the instances of the quantified statement themselves already possess determinate truth-values: if they do not, it is impossible to take the infinite sum or product of these. But if, for example, we do not hold that such a predicate as ' x is odd $\rightarrow x$ is not perfect' already has a determinate application to each natural number, though we do not know it, then it is just not open to us to think that, by attaching a quantifier to this predicate, we obtain a statement that is determinately true or false.

One question which we asked earlier was this: Can the thesis that natural numbers are creations of human thought be taken as a premiss for the adoption of an intuitionistic logic for number-theoretic statements? And another question was: What content can be given to the thesis that natural numbers are creations of human thought that does not prejudge the question what is the correct notion of truth for number-

The philosophical basis of intuitionistic logic

theoretic statements in general? The tentative answer which we gave to this latter question was that the thesis might be taken as relating to the appropriate notion of truth for a restricted class of number-theoretic statements, say numerical equations, or, more generally, decidable statements. From what we have said about the intuitionistic notion of truth for mathematical statements, it has now become apparent that there is one way in which the thesis that natural numbers are creations of the human mind might be taken, namely as relating precisely to the appropriate notion of truth for decidable statements of arithmetic, which would provide a ground for rejecting a platonistic interpretation of number-theoretic statements generally, without appeal to any general thesis concerning the notion of meaning. This way of taking the thesis would amount to holding that there is no notion of truth applicable even to numerical equations save that in which a statement is true when we have actually performed a computation (or effected a proof) which justifies that statement. Such a claim must rest, as we have seen, on the most resolute scepticism concerning subjunctive conditionals: it must deny that there exists any proposition which is now true about what the result of a computation which has not yet been performed would be if it were to be performed. Anyone who can hang on to a view as hard-headed as this has no temptation at all to accept a platonistic view of number-theoretic statements involving unbounded quantification: he has a rationale for an intuitionistic interpretation of them which rests upon considerations relating solely to mathematics, and demanding no extension to other realms of discourse (save in so far as the subjunctive conditional is involved in explanations of the meanings of statements in these other realms). But, for anyone who is not prepared to be quite as hard-headed as that, the route to a defence of an intuitionistic interpretation of mathematical statements which begins from the ontological status of mathematical objects is closed; the only path that he can take to this goal is that which I sketched at the outset: one turning on the answers given to general questions in the theory of meaning.

MICHAEL DETLEFSEN

Brouwerian Intuitionism

1990

in **Detlefsen** (ed.), *Proof and Knowledge in Mathematics*, Routledge, 1992,

p.208-250.

p.208

"What we have to say on the first score can, without too much inaccuracy, be compressed into two theses, the first being that the intuitionistic critique of classical mathematics can be seen as based primarily on epistemological rather than on meaning-theoretic considerations, and the second being that the intuitionist's chief objection to the classical mathematician's use of logic does *not* center on *the use of particular logical principles* (in particular, the law of excluded middle and its ilk), but rather on the *role* the classical mathematician assigns (or at least extends) generally (i.e. regardless of the *particular* principles used) to the use of logic in the production of mathematical proofs. »

p.209

"some restriction of the role of logical inference in mathematical proof such as that mentioned above is necessary if one is to account for the seeming difference in the epistemic conditions of provers whose reasoning is based on genuine insight into the subject-matter being investigated, and would-be provers whose reasoning is based not on such insight, but rather on principles of inference which hold of every subject-matter indifferently. Poincaré urged this point repeatedly, but, in the rapid development of logic in this century, it seems to have been forgotten. I think it deserves more attention than it has received and that, when properly taken into account, it provides an interesting "new" ground for a mathematical epistemology sharing many of the features of Brouwerian intuitionism. Poincaré's insight suggests an epistemology which operates according to a principle of epistemic conservation: there can be no increase in genuine knowledge of a specific mathematical subject without an underlying increase in subject-specific insight into (i.e. intuitional grasp of) that subject. Thus, the need

for intuition cannot be avoided in mathematics even if it has supplied a set of axioms. Hence, purely logical inference cannot add to our genuinely mathematical knowledge, and thus cannot be given a very' important role in proof. [...] This new (i.e. non classical) epistemology requires a new conception of inference, for in order for a truth to be proven it requires that it be "experienced" in a certain way. And this new conception of inference severely restricts the role of logical inference in proof. By (classical) logical analysis or inference, one can extract all kinds of propositions from a given experienced proposition. But only some of these extracted propositions are themselves "experienceable" in the appropriate way (just as, in the case of empirically perceived truths, only some of their logical consequences are themselves empirically perceivable). And none of them are experienced in the appropriate way solely by their being shown to be related to the premises by logical means."

p.210-211

"Imagine two cognitive agents M and L. M has the kind of knowledge or understanding of a given mathematical subject S that we typically associate with the master mathematician. L, on the other hand, has the sort of epistemic mastery of S that is typical of one whose epistemic command of S consists in a knowledge of a set of axioms for S plus an ability (possibly superb) to manipulate or process those axioms according to acknowledged *logical* means. Query: Is there any significant difference between the epistemic condition of M and the epistemic condition of L *vis-à-vis* their status as mathematical knowers ?

In Poincaré's view, the answer is "Yes." Even perfect *logical* mastery of a body of axioms would not, in his view, represent genuine mathematical mastery of the mathematics thus axiomatized. Indeed it would not in itself be indicative of any appreciable degree of mathematical knowledge at all:

knowledge of a body of mathematical propositions, plus mastery over their logical manipulation, does not amount to mathematical knowledge either of those propositions or of the propositions logically derived from them.

On Poincaré's view, then, genuine mathematical reasoning does not proceed in "logic-sized" steps, but rather in bigger steps — steps requiring genuine insight into the given mathematical subject being inferentially developed. This sets it at odds with logical reasoning which, *by its very topic-neutral character*, neither requires nor even admits use of such insight in the making of inferences. In thus forswearing all appeal to information that derives from the particularities of the specific subject-matter under investigation, logical reasoning also fore-swears the easy, loping stride of one familiar with the twists and turns of a given local terrain, and opts instead for the halting step of one who is blind to the special features of a] localities, and who must therefore take only such steps as would be safe in *any*. In Poincaré's view, the security thereby attained cannot make up for the blindness which it reflects. Logical astuteness may keep one from falling into a pit, but having a cane with which to feel one's way is a poor substitute for being able to see. »

p.213-214

“Taken seriously, this problematic promises to have some important effects on one's conception of mathematical knowledge. One such effort is that of implying what might be called a *modal -as* opposed to a *subjectival* - construal of mathematical knowledge. On the subjectival construal, the typology of knowledge follows a classification scheme which sorts knowledge according to the subject-matter of its content. Thus, in order for one's knowledge that p to count as K -knowledge (i.e. knowledge of type K), all that is required is that p be a truth of *subject-matter* K . On such a model, mathematical knowledge becomes simply knowledge of a *mathematical* truth (i.e. knowledge of a truth belonging to a mathematical

subject-matter).

On what we are calling the *modal* conception, on the other hand, the typology of knowledge does not follow a subject-matter classification of the propositions known. It marks as well certain differences in the particular cognitive attitude taken. Thus, mathematical knowledge becomes more than simply knowledge of a mathematical proposition, and is distinguished by a certain *mode* or *kind* of cognitive state as well.

It is, of course, a difficult question to say what exactly it is that is to distinguish that special mode of knowledge known as mathematical knowledge from other modes of knowledge. Indeed, there is room for dispute over this within the modalist camp. Poincaré, for example, believed that it had primarily to do with one's ability to see the role or position that a given proposition plays in the larger subject to which it belongs; so that one comes to know something mathematically by having a global vision of the place of that proposition within some larger epistemic enterprise. Brouwer, on the other hand, believed that to mathematically know a truth was to "experience" it in a certain way. [...]"

p.214-215

"Of particular importance to us in this connection are certain implications regarding how we are to conceive of the *growth* or *extension* of mathematical knowledge under a generally modalist mathematical epistemology. And, as we shall see shortly, the use of logical inference in the production of mathematical knowledge is only compatible with such weak modalist conceptions as take relatively large-scale, coarsely differentiating features (e.g. high degree of certainty or *a priority*) as the distinguishing features of mathematical knowledge.

As already noted, the key idea of the modalist conception is that to have mathematical knowledge of a given proposition *p* is to have a certain *kind* of knowledge that *p*. Thus, if a given kind of knowledge of *p* is to be

extended to another proposition q by means of an inference from p to q , then that inference must preserve the special characteristics of knowledge of p that are responsible for its being of that kind. Therefore, if knowledge of a particular kind K is to be extended by means of *logical* inference, then logical inference must preserve those features of a given piece of knowledge that make it K -knowledge. To put it another way: if K -knowledge of p is to be extended to K -knowledge of q by means of a logical inference from p to q , then the distinguishing features of K -knowledge must be included among those properties of beliefs that are preserved by logical inference."

p.215

"A ticket-taker at a basketball game knows, by having (partially) counted them as they entered the gate, that there are at least 25 people seated in his section. In order to determine how the people seated in his section are distributed over lower versus upper arena seats, he decides to count those seated in upper arena seats. He counts zero people seated there. He thus knows by ordinary counting that there are at least 25 people seated in his section and that there is no one seated in an upper arena sect. From this it logically follows that there are at least 25 people seated in the lower arena seats. It is not true, however, that this is known by an ordinary (partial) counting of those occupying lower arena seats, since the ticket-taker arrived at his conclusion without having actually counted (in what we are calling the "ordinary sense") the occupants of the lower arena seats."

216-217

"What has just been said of knowledge by direct perception and knowledge by ordinary counting can also be said of other types of knowledge. Indeed, as we shall see later, it applies specifically to Brouwer's conception of mathematical knowledge, which he takes to be constituted by

a kind of "experience" (or intuition). In each case, the crucial issue is whether a given kind of cognitive mode (direct sensory perception, ordinary counting, Brouwerian mathematical intuition, etc.) can be manipulated or controlled in such a way as to be guaranteedly reproduced at all the propositions that are logically derivable from a proposition describing the content of a given such state. And, in each case, the answer is "no." We do not have the practical capacity to manipulate the having of such kinds of mental states in the full range of ways that we can *logically* manipulate their *contents*. Therefore, logical inference does not preserve cognitive mode. *Logical manipulation* of the content of a mental state is thus one thing, and *practical manipulation* of its cognitive mode another. Therefore, the assumption that mathematical knowledge is extendable by logical reasoning is not an innocent one. The only clear capacity of logical inference is that of an abstractive device; that is, a device for *separating off* the *content* of a given cognitive state from its *mode of occurrence*, and submitting that content to various sorts of analyses which issue in the production of new contents. As such, it is not automatically an extension or continuation of the cognitive state from which the content was separated, but rather a focused *reflection on* its content. Being thus focused on content rather than on cognitive mode, it may be expected to carry forward the content of a given piece of knowledge, but without any corresponding guarantee that the content thus forwarded occurs in the same cognitive mode as the original. Such failure to extend the cognitive mode of a given piece of knowledge is, of course, no tragedy if occurrence in that mode is incidental, or at least inessential, to its overall epistemic character and/or value. And this may be the case in some of our examples (e.g. knowledge by ordinary counting). Brouwer and his "preintuitionist"³ predecessor Poincaré did not, however, believe that it is so in the case of mathematical knowledge generally, and their belief was rooted in that observation which we are referring to here as "Poincaré's Concern": namely, that the

epistemic condition *of* one who has gained a logical or axiomatic mastery over a given mathematical subject is inferior to that of one who has a genuine mathematical mastery of it."

p.217

"The epistemology underlying classical mathematics (which, for brevity, we shall refer to as classical epistemology) emphasizes the contentual ingredient of knowledge, and de-emphasizes the matter of its cognitive mode. According to it, the mathematical knower may rely on introspective experience (or intuition) of some sort to arrive at the initial propositions of his epistemic edifice, but from that point on he is free to abstract away from or ignore the *non-contentual* aspects of that experience, and concentrate instead on its contentual component. What, on this account, is of primary epistemic importance concerning the cognitive mode of a given epistemic event is what might be called its credential effect; that is, the degree of certitude it confers upon the proposition expressing its content. But since widely different cognitive modes are capable of having the same credential effect, identifying the epistemic significance of a cognitive mode with its credential effect produces an epistemology which tends to reduce the number of epistemically significant differences between cognitive modes."

p.217-218

"This, in turn, leads to a view of inference which sees it as having relatively little obligation to preserve the features of the cognitive mode of the premises (since so few of them are of any epistemic significance). Beyond credential effect, classical mathematical epistemology, at least in some of its variants, may make room for such large-scale characteristics of cognitive mode as its aprioricity/aposterioricity. However, sensitivity to such large-scale features will surely not provide a grid fine enough to make the

sorts of small-scale demarcations — in particular, the sort of demarcation between logical and mathematical reasoning described in the preceding section — that Brouwer and Poincaré regarded as being of prime importance to a well-developed mathematical epistemology. On the classical view, then, proof or inference is a procedure of the following sort: the mathematical knower begins with knowledge occurring in a certain cognitive mode; he then abstracts away from all characteristics of that cognitive mode that he regards as epistemically irrelevant, leaving him with only such of its features as credential effect and, say, *apriority/aposteriority* to attend to; having thus narrowly restricted the focus of his epistemic concern, he has correspondingly widened the horizons of inference by making it possible to extend his knowledge to any *new* proposition which can be obtained from the proposition expressing the content of his old knowledge by means capable of preserving (sufficiently much of) his narrowly restricted focal epistemic desiderata (namely its credential effect and *apriority/aposteriority*.)”

p.219

“On the above analysis, then, logical inference (by which mathematical knowledge is to be extended) is essentially a comparative reflection on *contents*, where these contents are taken to be relatively independent of the epistemic processes or activities to which they are attached. It does not *reflect* or *express* the characteristics of the epistemic activities underlying those contents in such a way as to force logical relations to imply practical relations between them. The basic idea of classical epistemology is thus that the epistemically relevant characteristics of a given experience or piece of intellectual activity are separable or detachable from it. Memory, or some like capacity, is called upon to sustain the epistemic effects and potency of a given piece of mental activity long after the activity itself has ceased to exist in experience. That memory-like capacity functions to “retain” the

content and warrant of an experience (or other warranting activity) so that it can be passed on to propositional contents not occurring in that cognitive mode. *Logical* analysis then "detaches" the contentual results of epistemic processes from those processes themselves, and treats them as independent entities, the result being that logical inference or knowledge is taken to consist in a manipulation of *warrant contents* rather than of *warranting processes*. □ In classical epistemology, then, the epistemic effect of a warrant is quite stable - being preserved under transformations that allow the characteristics of the particular process(es) that originally produced the warrant to be greatly altered. □ Motivating this classical epistemology of inference is a certain conception of language and of the epistemological enterprise generally that we shall call the *logic-intensive* or *representation-intensive* view. The basic idea behind this view is that, though knowledge may perhaps begin with "intuition" or experience of some kind, it nonetheless can, and in many cases must and should, be extended without a corresponding extension of that intuition or experience. Thus, though experience may be necessary in order for knowledge to *begin*, it has strictly limited value as a means of *extending* knowledge."

p.220-222

Sometimes these "costs and difficulties" may take the form of sheer danger. While considering whether to dry my hair with my acetylene torch, it occurs to me that it may do to my head something like what it did to the pipe I cut with it last night. How do I decide what to do? I'm pretty sure that I do not want it to do to my head what it did to the pipe, but how do I find out if it will? I need to extend my knowledge in such a way as to decide whether the torch will cut my head like it cut the pipe. But I clearly do not want to do so by actually extending my experience in the appropriate way; that is, by actually trying out the torch on my head and observing what happens. The most elementary considerations of utility counsel against this,

the disutility connected with failure being too high compared with the utility connected with success to make such trial-and-error experimentation rational. But how, then, do I extend my knowledge in the desired way *without* extending my experience?

The answer, roughly, is that I substitute a logically manipulated system of hypotheses for the physical act of applying the torch to my head. That is, I revert to a scheme of *representation* wherein the various states of my head and the torch are represented by propositions expressing those states, and the consequences of these states are then retrieved by retrieving the logical consequences of their representing propositions. For the *act* or *experience* of actually placing my head in the torch's flame, I thus substitute the *proposition* whose content is that I do so. And in the place of an experientially determined set of consequences of that act (i.e. the resulting burning sensation, the smell of burning hair and flesh, etc.), I substitute a set of propositions (representing those consequences) obtained by logical derivation from the proposition

[221]

expressing the content of that act (together, typically, with certain auxiliary hypotheses representing the circumstances in which the act takes place and whatever natural laws may pertain thereto). I thus rely on a relatively painless *logical* manipulation of *representations* (propositions) rather than a potentially painful *experiential* manipulation of the corresponding *physical states* in order to determine what the consequences of drying my hair with the blowtorch would be. The happy outcome, as Popper once put it, is that I "permit my hypotheses to die in my stead."

An equally important, if less dramatic, illustration of the supposed need for the representational point of view is suggested by an empirico-constructional conception of geometrical thought like that found in Lorenzen (1984, 1985). On this conception, geometrical knowledge has its origins in a body of experiential constructional activities. For a variety of

practical reasons, we are called upon to engage in such activities as the grinding of surfaces against one another to render them coplanar, the construction of planar figures using pencil, compass, and straightedge, the folding of planar objects to obtain other planar (or solid) objects, the rotation of these objects in various ways about the axes determined by such foldings, the construction of composite objects having a particular planar or solid character (e.g. that of being square) from component objects having another (e.g. that of being triangular), and so on.

The range and variation of such practical constructional activity, however, is strictly limited. Compass and straightedge can be practically managed only for planar objects of relatively small size; foldings and various other "reflection" operations must cope with such things as the tensile strength of the materials involved, the strength and accuracy of the folder, the length of her appendages, and so on. As a consequence of these limitations, we are not well situated to experientially determine what the result of folding, say, a one-block-on-a-side square of paper or a one-inch-on-a-side square of titanium will be. In short, our ability to actually extend our constructional activity to a wide variety of sizes and material-types of objects is strictly limited. To put it still another way, extension of knowledge over the full range of situations with respect to which we might desire such extension is simply too difficult to manage if we insist that it involve an extension of our actual constructional activity. Consequently, we seek a means of epistemically *projecting* our experience without actually *extending* it,

[222]

so that our geometrical knowledge need not be bounded by the limitations of size, time, strength, etc. which limit our activities as actual line-drawers, paper-folders, planar-object-rotators, etc.

Extending this view beyond geometry to mathematics generally, we arrive at the classical viewpoint, which may be summarized as, follows:

mathematical knowledge may begin with a type of intuition or practice, but for a variety of reasons (having to do with the practical limitations concerning such things as our susceptibility to pain and the restrictedness of the time, effort, strength, material resources, etc. that we have to invest in such enterprises as the basic constructional activities of mathematics) this experience is, insufficiently "plastic" to be practically extendable to the full variety of propositions over which we should like our knowledge to range; therefore, in place of the relatively impliant *practical or causal massaging* of mathematical *intuition*, we substitute a more pliant scheme of *logical* manipulations of its *contents*.

Thus it is that an experience comes to be represented by a proposition expressing its content. And, as with any good scheme of representation, one then uses more practicable (i.e. less dangerous, costly, etc.) operations on the *representens* to bring about the same basic epistemic effect as the less practicable operations on the *representanda*. This then is the general logic-intensive or representation-intensive conception of epistemic extension that we believe to have been the chief target of Brouwer's attack on classical mathematics.

p.224-225

"Brouwer's central thesis, then, is the general and sweeping one asserting the experience-intensive - and denying the logic-intensive - character of mathematical knowledge and its growth: mathematical knowledge is a form of experience or activity, and growth of mathematical knowledge therefore requires growth of that activity. Thus, if mathematical knowledge of a proposition p is to be extended to mathematical knowledge of a proposition q, the experience or activity whose content is p must be

transformed into an experience or activity whose content is q . In contradistinction to the classical model of epistemic growth, then, Brouwerian epistemology does not present the prover as reflecting on contents, generating new from old by this logical reflection, and thence transferring the warrant for the old to the new (by appeal to the warrant-preservingness of the modes of contentual analysis employed). Rather-and it is hard to overemphasize the importance of this difference to the present discussion- the mathematician transforms old proof-experiences or proof-activities into new ones and thus witnesses the extension of her knowledge to new propositions when such a proposition emerges as the content of the newly created proof-experience. What is thus crucial and basic is the creation of a new proof-experience. For once such experience exists, knowledge may be extended to whatever its content is. What logical relation the content of this newly created experience might bear to that of the old is a matter of secondary concern. For knowledge-extension proceeds not by the logical extraction of new propositions from ones already known, but rather by the phenomenological transformation of one proof-experience into another - the new content emerging as the content of the new experience produced by this transformation. Mathematical inference or proof thus follows the path of the possibilities relating mathematical activities, rather than the chain of connections determined by some logico-linguistic analysis of the (propositional) contents of such activities, as classical epistemology maintains.

[...]

For the Brouwerian, a proof is more (and also less) than just a series of epistemic attitude-takings whose contents are logically related. It follows instead an ordering of activities where what might be called the 'actional accessibility' of one constructional activity from another is more important than the logical accessibility of the content of the one from the content of the other"

p.229-230

"The account of Brouwerian epistemology as sketched up to this point emphasizes the effects brought about by the prominence it gives to occurrence in the *experiential mode* as an important trait of mathematical knowledge. That emphasis may, however, appear to be lacking in motivation. To address that need, we must now sound some deeper themes of Brouwerian epistemology. Let us begin by recalling an oft-recited tenet of intuitionism that forms the cornerstone of Brouwer's outlook. This tenet is the deceptively simple, though in truth quite radical, idea that mathematics, in its essence, is a form of mental *activity*. We propose to take this emphasis on the *actional* or *practical* character of mathematics seriously, and thus to investigate the possibility of treating Brouwerian epistemology as based on a *practical* rather than a *theoretical* conception of mathematical knowledge.

On this way of looking at it, mathematics is a body of actions or capacities for action, rather than a body of truths (i.e. a science, in the traditional sense). Similarly, mathematical knowledge is a type of practically-knowing-how to perform certain actions, rather than a rational reflection on various propositions and a subsequent intellectual-recognition-that they are true. We also intend to take this distinction between practical and theoretical knowledge as ultimate. That is, we propose to interpret it in such a way as to imply the inconvertibility, at least to the point of epistemological equivalence, of the former sort of knowledge into the latter. The mental activities of the intuitionist, like the attitude-takings or 'acceptances' of conventional epistemology, may be thought of as having propositional contents. But, in being lived or experienced, those contents are epistemically 'registered' in a way that is not reducible-at least not without epistemic loss-to any kind of purely intellectual grasp of them. The

emphasis on this 'lived-ness' or 'experienced-ness' is a way of expressing the practical character of the knowledge involved. We 'live' our activities. Thus, since mathematical knowledge is ultimately an activity or capacity for activity, it will ultimately manifest itself through our experiencing of our practical lives. (NB. In addition to this, the emphasis on experience may also be partly an attempt to express the idea that there is somehow something of greater value in a kind of knowledge that brings with it a capacity to do something than in a kind of knowledge which consists solely in an intellectual 'acknowledgement' or 'acceptance' of a proposition. Genuine knowledge- so the idea would go-enlivens and enables. It moves to action. It is more than just the doffing of one's intellectual hat to a proposition. Practical knowledge therefore penetrates to a level of our cognitive being to which theoretical or purely intellectual knowledge typically does not.)"

p.230-231

"[...] on the epistemology being sketched here, an area of mathematical thought (the correlate of a mathematical theory under the traditional conception) is to be thought of as a body of actions organized by a scheme of actional connections reflecting some sort of practical disposition to pass from one act to another, rather than a body of truths organized by a network of logical relations. Likewise, in place of a plan for epistemic growth which sees it as a march from one intellectual 'acceptance' to another via the steady logical exploitation of the propositions thus accepted, towards a goal of 'complete' acceptance (that is, acceptance of the complete set of truths pertaining to the subject-matter of the science in question), there is a course of practical development which is seen as consisting in the practical transformation of one act into another in such a way as to bring one's overall mathematical activity into closer conformity to a network or 'stream' of actions which is taken to represent the ideal of an

abundant mathematical life. Both the goal and procedure of epistemic development thus change when one moves from a theoretical to a practical conception of mathematical knowledge. In place of a goal of 'complete' theoretical knowledge, we have the ideal of an abundant practical life, reckoned not (or at least not primarily) in terms of the logical properties (e.g. consistency, completeness) of the set of propositions known, but rather in terms of the practical power which its activities represent. And, in place of epistemic extension of the domain of our intellectual 'acceptances' from one proposition to another via logical inference, there is the extension of our practical capacities which is based on the acquisition and realization of dispositions which link one mathematical activity to another. Thus, our 'local' or individual proof-activities come to be bound together into a global whole (a life) by a scheme of relations which are not constituted by the logical relations which prevail among their propositional results, but rather by their actional or behavioural affinities to one another. Different local proof-activities are thus to be seen as exhibiting not only a logical relationship between their contents, but also a global relationship of 'fit' or 'continuity' which reflects a practical disposition to move from performance of one act to performance of another in such a way as to draw nearer to the ideal of an abundant mathematical life – defined too in terms of practical accomplishments and capacities. Correct global orientation at a given locale (i.e. for a given local proof-activity) is thus a matter of that local activity's being dispositionally related to other local proof-activities in such a way that, allowed to develop in a natural way, they would grow into a body of proof-activities having the sort of practical potency that is seen as being constitutive of mathematical maturity"

p.232-233

"On this model, the emphasis on the 'experienced-ness' or 'lived-ness' as

the distinctive cognitive mode of mathematical knowledge, which figured so prominently in the practical-knowledge model, is replaced by an emphasis on the 'locality' of one's theoretical knowledge. Basically, the idea is this: one's knowledge of a mathematical truth p is *mathematical* to the extent that it is based on a 'local' familiarity (in the sense discussed above in section 2) with the mathematical subject(s) to which p belongs. This emphasis on the 'local' character of mathematical knowledge seems to be but another way of putting Brouwer's point concerning the 'autonomy' of mathematical thought, which was that we ought to be careful to distinguish the connections between propositions which arise from the *linguistic representation of* mathematical reasoning from the connections between propositions which characterize that reasoning itself, and therefore not attribute to mathematical reasoning 'regularities in the language which accompany it' (cf. Brouwer (1955), pp. 551-2). 'Regularities of language' are to be expected to be of a global character, since languages are intended to constitute global schemes of representation; that is, schemes of representation designed not with the representation of some one body of thought in mind, but rather of *all* bodies of thought generally. It is therefore not to be wondered that the linguistic representation of mathematical thought should induce a global logical structure on its theorems. Nor is any harm done by this so long as it is remembered that this induced logical structure (which truly deserves to be called logical because of its global character) is to be taken as a structure imposed by the representing device, and not as the structure of the thought being represented. As Brouwer said, 'Mathematical language, in particular logic, can never by itself... deduce a mathematical state of things' (cf. (1954), p. 524).

Whatever structure is exhibited by genuinely mathematical reasonings thus appears to be of a more 'local' character, determined by the subject of the constructional thinking in question. Such constructional thinking may,

of course, be divisible into steps or parts in a variety of ways. But the question is which decompositions into steps actually correspond to the step-structure exhibited by a genuinely mathematical piece of reasoning, and which merely represent different not-genuinely-mathematical ways of systematically decomposing the same complex thoughts. Brouwer's emphasis on the 'autonomy' of mathematics with respect to logic, suggests that though logical structures may sometimes be superimposed on complex mathematical reasonings, they just represent a sort of 'tacking together' of mathematical affirmations (cf. (1933), p. 443) that is 'coextensional', as it were, with the genuine mathematical reasoning on which it is superimposed. They do not, however, generally reflect the structure of that reasoning *considered as genuinely mathematical reasoning*.

There is thus an epistemological basis for a Brouwerian repudiation of classical logic even if one inclines to a theoretical rather than a practical conception of mathematical knowledge, and one also wishes to avoid any appeal to private phenomenological characteristics of such theoretically conceived knowledge. And the key element of that basis is nothing other than Poincare's point concerning the 'locality' of genuinely mathematical knowledge. Hence our emphasis on Poincare's point as furnishing a basis for Brouwerian epistemology."

p.234-235

"To begin our discussion, let us consult the *locus classicus* of present-day intuitionism - namely, Heyting (1956), where the standard conception of mathematical constructions as proofs is introduced as follows:

a mathematical proposition p always demands a mathematical construction with certain given properties; it can be asserted as soon as such a construction has been carried out. We say in this case that the construction *proves* the proposition p and call it a *proof* of p .

(Heyting 1956: 102)

Having thus characterized the basic condition of proof as possession of a construction, Heyting then went on to give a more detailed description of the specific assertion-conditions pertaining to the different kinds of compound propositions that can be formed by applying the various logical operations to simpler propositions. Naturally, this description was guided by a certain view of the dynamics of construction-possession; that is, a view of the general laws according to which possession of a given set of constructions induces possession of others. Thus, an inductive scheme stating how possession of constructions for logically compound propositions is related to possession of constructions for simpler propositions is given. Using " $\pi(X, A)$ " to stand for "x is a construction which proves A," that scheme is something like the following:

[suivent les énoncés a), b), c), d), e) et f) des règles de logique intuitionniste (voir these)]

Basic to these conditions, which purport to state the laws that regulate the interaction between construction-possession for simple

[235]

propositions and construction-possession for compound propositions, are a set of structural constraints induced upon the domain of intuitionistic constructions by the following general conditions:

(i) that any two constructions can be "paired" in order to yield a new construction, (ii) that constructions constituting proofs for compound propositions can be decomposed in such a way as to yield constructions for select simpler propositions, and (iii) that there are constructions that can be applied to constructions in order to yield constructions.

p.242, note 2

"It may be helpful to say just a few words comparing the positions of Brouwer and Poincaré on this point. Both describe the special mode characterizing mathematical knowledge as knowledge by "intuition." However, they do not mean the same thing by that. For Poincaré, as was mentioned above, intuition is taken to be constituted by some sort of integrated knowledge - ultimately theoretical rather than practical in character - which enables the mathematical knower to see how a certain proof or theorem relates to other proofs and theorems, and how, in thus relating, it contributes towards the goals of some larger inquiry to which they all belong, and for the sake of which they are pursued. For Brouwer, on the other hand, the epistemically salient and distinguishing feature of intuition is that it is a type of knowledge borne of experience of an ultimately practical nature, and thus basically incapable of extension by logical inference."

p.243, note 4

"Poincaré's Concern can also be seen as a problem concerning the compatibility of epistemic utility (i.e. the ability of proof to serve as a means of extending our knowledge) and what might be called the *logical conception of rigor*. According to this conception of rigor, concealment of assumptions in a proof is to be blocked by making every one of its steps or inferences so "small" as not to require any insight into the subject of the proof in order to verify it. Only in this way can one be assured that the steps do not conceal material assumptions concerning the subject that will then go undetected. Making the steps of a proof too small, however, may compromise its epistemic utility. The clearest case, after all, of a fully "gapless" or rigorous proof is that of a circular argument, where the

conclusion simply *is* one of the premises. Such proofs, however, are equally clear cases of epistemically useless reasoning. Thus, a minimal constraint on the epistemic utility of a proof is that it not be circular. But though noncircularity is a necessary condition for epistemic utility, it seems not to be sufficient. It is doubtful, for instance, that one can turn a circular argument with a small number of simple premises into an epistemically useful one just by conjoining the premises and replacing them by the resulting conjunction. The argument obtained by such a procedure is not circular in the strict sense, since its conclusion is not literally the same proposition as any of its premises. But its epistemic utility is still doubtful, since one can clearly see that affirmation of the conclusion is part of what is needed for affirmation of the premise. Indeed, were one to "sharpen" the argument (i.e. to eliminate from the premises what is clearly unnecessary to its validity), one would end up with an argument whose only premise is the conclusion itself. As a general rule, it seems that any argument possessing recognized sharpenings that are circular is essentially lacking in epistemic utility."

JACQUES DUBUCS

Feasibility in Logic

2002

in *Synthese* **132**, 2002, p.213-237.

(Extraits p.213-225)

JACQUES DUBUCS

FEASIBILITY IN LOGIC

"A proof is, not an object, but an act (...), and the act is primarily the act as it is being performed, only secondarily, and irrevocably, does it become the act that has been performed." (Martin-Löf)

1. INTRODUCTION

One of the most disputed issues in contemporary philosophy is the following: should we admit a vericonditional theory of meaning, which makes room for truth-conditions that possibly transcend our ability to know whether they are fulfilled or not, or rather, as the anti-realist suggests, should we replace these conditions by assertability-conditions whose fulfillment, when obtaining, cannot fail to be recognized? I will not declare myself in this debate, which is notoriously difficult to adjudicate and which tends to look like a dialogue of the deaf on the own confession of some of its protagonists (Wright 1986, 252). For a long time – and one is still in the habit of summing up the matter this way – the controversy has been taken as essentially dealing with the *general* possibility, for truth, to transcend the recognizability of truth: what the realist would admit, and what the anti-realist, for her part, would deny, is the possibility for a sentence to be true and yet *generally* not to be likely to be recognized as such. By now however, that demarcation is widely considered inadequate. As Dummett himself eventually recognized in his 1972 postscript to 'Truth' (1978, 23–24), a realist could very well accept the principle of non-transcendence for truth by granting that any truth ought to be recognizable as such, if not by us, at least by some hypothetical being whose intellectual capacities and observing powers would exceed at will those with which we are endowed. As far as she professes a doctrine that significantly differs from realism, the anti-realist is therefore committed to a general definition of the conditions under which, contrary to creatures that could be more or less emancipated from our cognitive or physical limitations, we are *ourselves*, we human beings are able to recognize the truth of a sentence, that is to recognize the conditions under which a sentence is assertable *by us* in the first place. In the sequel I shall confine myself to that only question. In other words, I shall not examine whether it might be legitimate or necessary to wholly

or partly replace truth-conditions by assertability-conditions, but I will merely consider what the latter should look like for such a replacement to be entertained in its own right.

The thesis I am willing to defend (following, among others, Wright (1987)) is that the way traditional anti-realism proceeds to characterize these assertability-conditions is in any case inadequate, and that it would be better to replace the Dummettian perspective of effectiveness *in principle by that of practical feasibility*. Then, I shall try to show that the radical brand of anti-realism to which this perspective leads necessarily involves such categories as that of a justificative act "really within our reach", which cannot be analyzed in the usual layout of Hilbert-type systems; instead I consider that "substructural" logics stand as a promising framework for the definition of a rigorous notion of assertability-conditions well-suited or that variety of anti-realism.

2. TWO REQUIREMENTS ON ASSERTABILITY-CONDITIONS

Generally speaking, the assertability-conditions one wants to define should satisfy two distinct requirements. The first is the

Immanence Principle: the conditions under which the assertion of a sentence is justified ever ought to be recognizable (by us) when they are satisfied.

It is hardly necessary to mention what makes immanence an ardent obligation, for it flows, as Dummett says, from the very "nature of the case" (1978, 227): anti-realism would be an absurd doctrine if the assertability-conditions it brings forward were as transcendent, with respect to our recognitional abilities, as the truth-conditions of which it recommends the banishment.

The second requirement is the

Implicitness Principle: the definition of the conditions under which the assertion of a sentence is justified ought not to explicitly refer to our recognitional abilities.

This principle forbids immanence to be simply and solely stipulated, namely obtained *per vim definitionis*, in virtue of a clause in the following style: A is assertable if and only if (i) a certain condition C(A) obtains and (ii) it is within our capacity to recognize that the very condition C(A) obtains. If such a style of definition were allowed, we would immediately

obtain a trivial and uninformative solution to the problem we are faced with by identifying C(A) to the very truth-conditions of A: of course, we can hardly be satisfied with that proposal. The *explicitandum*, as we have just seen, should concern our own cognitive condition, to the exclusion of anything else. The *explicitandum*, on the contrary, should be purified from any explicit reference to that element. If we want to see the assertability-conditions play the role that is currently held by the truth-conditions, which involve, as for them, no psychological component, then we ought to refrain from defining assertability in terms that presuppose the nature of our recognitional abilities to be known beforehand, and therefore we ought to *analyze* these abilities in a neutral, non-indexical language, where they would not appear as *ours*. Like the truth-conditions they are meant to replace, the assertability-conditions are to be *formally* defined; indeed it should be possible to fix without ambiguity the conditions under which we are as it were *automatically* justified to assert a complex sentence as a function of the conditions that justify the assertion of its immediate components. As a consequence it should not be necessary to keep wondering, at each application of one of the clauses of this recursive definition, whether the assertion that is licensed by the rule really is the assertion of a sentence that our cognitive capacities alone would enable us to recognize as true.

3. TRADITIONAL ANTI-REALISM AS A DEADLOCK

As regards mathematical sentences, the traditional definition of the assertability-conditions *partially* satisfies the immanence condition, and *totally* satisfies the implicitness condition: a sentence is said to be assertable if there is an effective proof for it, namely if there is some finite sequence of sentences the sentence in question is the last of which, where each item immediately results from former items by application of an inference rule, these inference rules being themselves finite in number. This definition is strict enough to make no allowance for verification processes which would be suitable only for creatures whose capacities would be an infinite extension of ours and who would be able, for example, to ground the assertion of a universal sentence on the separate inspection of infinitely many particular cases. A realist who would take truth as an *asymptotic* form of assertability, or who would equate truth with assertability by a creature equipped with such an *ultimate* recognitional power, such a realist could not, in any case, feel comfortable with that kind of notion.¹ So the immanence principle turns out to be partially satisfied, in the sense that one can conceive of recognitional abilities higher than ours which would not be concerned by this definition. In order for this principle to be entirely met, it should be

granted that our own capacities enable us to recognize without fail that a sentence is assertable in this sense when it is so, namely when there exists an effective proof of it. And that, peace to Dummett, is a condition one can seriously doubt to be truly satisfied.

3.1. "To Recognize that Something is the Case": An Ambiguous Expression

"To recognize that a sentence is provable" is an ambiguous expression, which can be understood both in a strong sense ("to build a proof of it") and in a weak sense ("to recognize, of a putative proof of the sentence, that it is really such a proof"). As understood in the strong sense, recognition is the act of building an object that meets certain specifications. As understood in the weak sense, recognition is the mere process of controlling that the objects which occur are conform to these specifications (I will admit without discussion that the strong sense is at least as strong as the weak one, namely that we could never entertain doubts as to the correctness of the (correct) proofs we have built²).

3.2. The Principle of Strict Immanence

Oddly enough this a moot point whether the immanence principle requires, as McGinn (1980) claims, that the assertability-conditions be strongly recognizable, or whether one should be content, as Tennant (1987, chap. XI) argues, with their ability to be recognized in the weak sense.³ A little attention is enough to make clear, and this will be my first point, that the strictest reading is the only one acceptable. The following principle, however, is jointly acknowledged: any situation that justifies the assertion of a given sentence ought to be such that an individual who is suitably related to that situation should be in a position to recognize that it justifies the assertion of the sentence in question.⁴ To put it into symbols, since we reach the limits of the tortures that can be inflicted to natural language:

$$(1) \quad \forall s \forall x \forall y [(Justif(s, x) \& Rel(y, s)) \supset \diamond K_y (Justif(s, y))]$$

Now, the defender of the weak conception maintains that assertability only requires the existence of such a situation:

$$(2) \quad x \text{ is assertable if and only if } \exists s \text{ Justif}(s, x),$$

whereas her opponent requires also that it should always be possible, for a given agent, to enter into the suitable relation to that situation:

$$(3) \quad x \text{ is assertable if and only if } \exists s \forall y (Justif(s, x) \& \diamond Rel(y, s))$$

Clearly, a sentence may be assertable in sense (2) and while not in sense (3). That happens so long as the situation which justifies the assertion of the sentence can be reached only at the cost of cognitive or physical efforts extensively more important than those which would be required simply to recognize the situation as such, once it has been reached. It is perfectly open to the realist to admit that there ever ought to be a standpoint from which capacities like ours would suffice to recognize the truth of the sentence, and at the same time to argue that, in order to get to that standpoint, cognitive or physical resources would be required that are beyond our compass: for instance, one could imagine an absolute physiological impossibility for us to move on to some location where we would however never fail to realize, were we to get there, that the sentence is thoroughly correct. Altogether, in order for anti-realism to be distinguishable from realism on the point that crucially matters here, the circumstances in which the assertion is justified ought to be such not only that we could not fail to recognize them when they are in front of us, but also that we should always have the capacity to shift to them when they exist.

3.3. The Traditional Notion of Deduction as a Sequence of Sentence-Types

It is pretty straightforward to discern the reasons why that the traditional anti-realist shows some hesitation on the crucial score above. As far as mathematics are concerned, the way she plans out to guarantee that the assertability-conditions be weakly recognizable also seems to guarantee that they be strongly so. For effectiveness of proofs may be viewed in two ways. Effectiveness is, on one hand, the property that is required in order for proofs to be *ratifiable*. Indeed, as Church (1956, 53) remarks, were there no routine procedure allowing us to decide whether a given sequence of sentences is conform to the demonstration rules, then control and communication of the assertions in a linguistic community would be impossible; for it would always be open to some readers of the proof to declare themselves unconvinced. Effectiveness, on the other hand, guarantees that the theorems can be enumerated, if only by setting up, in lexicographical order, the list of all finite sequences of well-formed sentences, and by applying to each such sequence the appropriate conformity test. So restriction to effective methods of proof, initially intended to guarantee that the assertable sentences be weakly recognizable, may therefore be invoked to establish that they are strongly so. These very objects in which we cannot fail to recognize proofs, whenever we encounter them, are also, after all, and by the same token, objects that we cannot fail to encounter at all, when they exist. According to that conception therefore, there should

be, in mathematics, no counterpart to these mountains that are both abso-
lutely impassable and yet such that, should we succeed in climbing them,
there would be no further hindrance for us to come up to our knowledge
standards: by itself, the horizon of proof should never be obstructed.

3.4. *Traditional Anti-Realism and Decidability "in Principle"*

The immanence principle has a negative aspect, as pressing as the other
one: if the conditions under which the assertion of a sentence is justified are
not satisfied, then we ought to be in a position to recognize this fact. Effect-
iveness of proofs guarantees that it is really the case when "to recognize"
is taken in the weak sense: if a sequence of well-formed sentences is not
a proof, that means that one of the transitions from a sentence to the other
is not conform to the rules, and in that case the conformity test provides a
negative answer. It is generally not so with respect to recognizability in the
strong sense: if the sentence is not assertable, the enumerating process can
continue indefinitely without ever yielding any verdict. That is a reason
to consider as meaningful only the sentences that are *decidable*, namely
those for which an effective proof or refutation exists. In that situation, an
effective enumeration of the sequences of sentences will yield a verdict
that is affirmative or negative, according to the case, in any circumstance.
In that case, the predicates *s* justifies the assertion of *x* and *x* is a justified
assertion, which is the existential projection of the former, have the same
status: the assertability-conditions are recognizable in the strong as in the
weak sense, positively as negatively. Dummett (1993, 60) considers that,
in the realm of sentences that are decidable "in principle", the immanence
condition is fulfilled as it should be, and no dispute with the realist is likely
to arise on this ground.

3.5. *Decidability "in Principle" versus Decidability "in Practice"*

The traditional anti-realist considers that we have the capacity to prove or
disprove any sentence for which an effective proof or an effective refuta-
tion exists. According to her, the immanence of the assertability-conditions
is secured by the existence of an *algorithmic* process of recognition of
these conditions. In this conception one finds no echo of the cognitive
or physical effort that ought to be made, within the empirical sciences,
to *ascertain* the sentences by designing and laying out the experimental
apparatus intended to justify them. As well as Turing machines, which
serve as a reference in this domain, we are credited with skills of a strictly
recognitional kind, namely with the ability to generate and control. The
only task before us is to methodically enumerate the potential situations
of assertability or refutability and to identify their type, until we get to

a situation that recognizably possesses the conclusive character we were
looking for, an event which cannot fail to happen after a finite number of
steps. As they involve no physical capacity, such examination and ratifi-
cation powers are allocated to us with no limit. The fact that it is generally
longer, much longer, exponentially longer, to find a proof than to examine
whether a putative proof is really a proof, is underestimated and even
considered to affect to no extent our ability to achieve our knowledge
targets: as Dummett (1993, 60) puts it, while this allocation is admittedly
"generous", it is only a point of "relatively minor importance". Now, an
algorithmic process that requires 2^n steps to deal with an n -sized item can
certainly not, in practice, be carried out to completion when applied to an
item whose size is higher than 100.⁵ In particular, the general problem of
recognizing whether B is a propositional consequence of Γ or not (namely
of recognizing whether the set $\Gamma \cup \{\neg B\}$ is unsatisfiable in the sense of
propositional calculus or not) is typically a problem whose solution is pos-
sible "in principle" while it is not so "in practice", for it leads to a process
which requires 2^n steps if n distinct propositional letters are involved in Γ
and B . While this process is effective, the idealization according to which a
cognitive agent could complete such work with respect to wide data Γ and
 B is therefore not significantly less radical than the idealization according
to which the agent in question could achieve non-effective tasks.

According to traditional anti-realism, the meaning of a mathematical
sentence is to be defined in terms of actions that can be done *in principle*,
and it is of no importance that some of these actions are too complex or
too long for a human being, or even for the whole human race collab-
orating, to carry them through *in practice*. Admittedly, it is to the credit
of this tradition that it respects the implicitness requirement, as it rests
on an "absolute" notion of effectiveness in which any explicit reference
to our own recognitional abilities is avoided. But, as Wright (1980, 127)
observes, «it makes absolutely no difference whether experiences which
[we] cannot have are withheld from [us] for practical reasons or for reasons
of principle». In other words, and as Dummett (1978, 248-249) himself
suspects, one cannot rule out that traditional anti-realism is vulnerable
to objections which are very similar to the objections that it raises itself
against realism. In such a case, traditional anti-realism has to stand up to
the following dilemma. Either these objections are incorrect, and in that
case they leave realism unaffected. Or they are correct, and that means that
the genuine form of anti-realism that we are after is not intuitionism, but
a more radically revisionist philosophy, which requires that the conditions
that define assertability be recognizable in practice and not only in theory.
In both cases, traditional anti-realism does not appear as a very recom-

mendable doctrine: at worst some heterodoxy with no real ground, at best an unstable conception which can hardly be adopted unless provisionally, for lack of anything better.

4. FROM EFFECTIVENESS TO FEASIBILITY

We may be unable to carry out an operation for which we have algorithmic directives, so that the mere existence of a decision procedure cannot ensure that the assertability-conditions are recognizable as they ought to be for anti-realism to make sense, namely in the strict sense of the word "recognition". To solve this question, it is not enough to allow, as Dummett does, that the ability to recognize the network of deductive connections may reveal itself simply in the performance of a proof process. At the very most, this involvement testifies that the agent knows what the situation which should justify an assertion looks like, and which direction of research he should look to. The mere capacity to get on a track that one is constitutively unable to pursue to the very end cannot be sufficient: in logic, there is no room for mere beginnings. Since it is only by constructing a deduction from Γ to B up to its end that we are able to recognize that B is a consequence of Γ , it would be absurd for such a deduction to exist yet for us not to be able to perform it entirely. It would mean, to paraphrase Dummett (1978, 226–227), that the very condition by which we acknowledge that B is a consequence of Γ is not even recognizable when it obtains. Neither can we, on that score, rely on the happy occasions where we have the *good fortune* to come up with the inferential moves that prove the most appropriate, namely these occasions for which designing the proof amounts to writing it from dictation by an oracle. On the contrary, we ought to define the logical rules in such a way that we should be in a position, *in the worst case* where we are left to the ordinary use of our ordinary resources, to deduce B from Γ as soon as such a deduction is possible.

The radical form of anti-realism the above reflections lead to suggests to strengthen the general requirement concerning the effectiveness of the inference rules, in order to ensure that we are practically, and not only in principle, able to recognize that a sentence is provable or deducible from a given class of hypotheses when it is actually the case. At first, this suggestion comes up against two sorts of objections. The first deals with its *legitimacy*, and it especially concerns the threat this kind of move seems to put on the purity of logic, as understood as a normative discipline. The second one deals with the possible *vacuity* of the suggestion, for it is, one could allege, a mere platitude that any Turing machine can be physically

realized, and, then, that any effective rule can be executed by a material system like our own organism.

4.1. The «Pollution» of Logic

As a matter of fact, the first objection draws its whole strength from the second one. For the conditions under which a sentence is provable (or deducible from a class Γ of hypotheses) *exactly* differ from the conditions under which the sentence in question is logically valid (or logical consequence of Γ) in that they ought to be recognized as such when they obtain. To confine myself to the most general case, the deductibility relation *cannot* be defined independently of the kind of process the agents of a certain class are able to perform: the definition of this relation is, *anyway*, compelled to satisfy both a semantic requirement of *correctness* (a deduction ought to transmit to its conclusion the potential truth of their premises, in such a way that whatever is deducible from Γ is also consequence of Γ) and an epistemic requirement of *feasibility* (if there is a deduction Π of B from Γ , then the agents of the class in question should be in a position to produce a specimen of Π by means of their own cognitive resources). Contrary to the semantic concepts that are, as it were, *essentially immaculate*, the syntactical notions are therefore *naturally impure*, insofar as they ought to take the whole range of the recognitional capacities of a certain class of agents into account. So there cannot be, against radical anti-realism, any objection *in principle*, and the only one that could be raised deals with the question whether a system of rules that would be constrained enough to avoid the transcendence of the deductibility conditions with respect to *our own* recognitional abilities could still remain general enough not to be reducible to the pure and simple codification of our *own* ways of proceeding. In other words, the first objection, when suitably stated, has less to do with the legitimacy of the objectives of radical anti-realism than with the possibility of achieving them with the same degree of rigor and generality as that of intuitionistic logic: for intuitionistic logic is rightly considered as correctly reflecting, i.e., in compliance with the implicitness requirement, the very idea of recognizability «in principles». While it is plain that this objection can only be answered by exhibiting a system of rules that both satisfies these properties of generality and feasibility, it should henceforth to be clear, however, that such an objective cannot be reached, so long as one requires that the assertability or deductibility conditions the system in question defines be recognizable by each of us in any circumstances, and that all the differences of celerity, experience, attention, endurance or obstinacy which distinguish one another be taken into account. Short of polluting the logic by psychological considerations

without assignable term, we certainly have to shut our eyes to the exact detail of the recognitional abilities of each one, and even to admit as legitimate some deductions we could only perform if our relevant resources were higher than they actually are. But at least we ought to subordinate this assumption to the explicit and actual provision that this hypothetical increase of resources be attributed to us *without* any major change in the most fundamental physical and physiological laws; that is we have at least to require that it be *nomologically possible* ever to recognize the assertibility or deductibility conditions to be satisfied when they are. As Wright (1987, 124 sq.) grants in discussing a similar suggestion, we are awkwardly dependent, in delineating the contours of this nomological possibility, upon the way current physics or biochemistry state these «most fundamental laws». But it is unquestionably possible for us, I will admit it here, to elude the risk of major revisions in that field by turning towards extremely general principles that deal with the capacities and limitations of *any* material system: the principles of thermodynamics, like the impossibility of *perpetuum mobile*, provide fair examples of these irremovable laws.

4.2. *The Myth of the Physical Feasibility of the Effective Procedures*

Most of the discussions about mechanism in psychology turn on whether it is not abusively *reducing* to conceive of the intellectual abilities of human being by reference to the computational power of a Turing machine, but on the other hand they seem to take for granted that we possess capacities that are *at least equal* to the power of these machines. For example, the defenders of mechanism and their opponents, when they are quarreling about the philosophical significance of Gödel's incompleteness results, disagree on the question whether we can, or not, outclass a machine that enumerates the theorems of number theory by our ability to recognize as correct Gödel's undecidable sentence, but they agree in admitting that we are, in any event, able to recognize these theorems as such. In the same vein, it might be difficult, in the huge literature concerning the «multiple realizability» of the abstract automata, to get a genuine demonstration that each Turing machine possesses *at least one* physical realization.⁶ That omission is by no way surprising, for the corresponding affirmation might well, on further examination, turn out to be different from a platitude, and even from a truth. It is indeed out of contest that any effective rule can certainly be executed *at least one time* by a suitable engine, but it comes naturally to some of these rules that their execution cannot be *indefinitely iterated* by any device. In other words, while the iteration of an effective rule is always an effective procedure, the iterated execution of a rule which is physically feasible is generally not a physically feasible

process. One should even specify that this very physical impossibility can be understood in two distinct ways. The first sense is trivial, and it has to do with all the rules: contrary to Turing machines, that are ideal, and, thus, everlasting entities, the devices that realize these «machines» could not be more than *transitory* embodiments of them, for their permanent components can hardly fail, in the long run, to gradually alter until they become unable to keep doing their job. The second sense is more determinate and has to do with some particular rules only. Let us look at the example of a photocopier, taken as realizing the Turing machine that duplicates the sequence of symbols that is written on its tape. The copier is described as capable, *in the appropriate circumstances* (e.g., after the paper-box has been furnished in supplies), to regularly pass from an initial state in which it is waiting for a document to a final state in which a copy of the document appears in the out-box. But it is clear, other things being equal, *i.e., without taking into account the unavoidable wearing or the permanent components of the device*, that each execution of the copying process leads the engine closer to a situation in which the circumstances will no longer be suitable for the performance: once the paper-box is out of paper, the copying process becomes impossible. Now, limitations of the same kind, namely limitations that are *intrinsically* linked to the execution of the instructions, certainly bear on some of the inferential moves licensed by the current logical rules (including rules that are intuitionistically correct), like the inference from A to A & A: no material architecture is able to be the medium of a causal transition from *one* occurrence of A to one occurrence of A & A indefinitely. As far as the concrete application of an inference rule means a *nomologically possible* causal transition from one occurrence of the premises to one occurrence of the conclusion, the effectiveness of the rules does not consequently ensure their physical feasibility.

4.3. *Explicit and Implicit Feasibility*

While no rule can be applied indefinitely, it is essential that one distinguishes between the impossibilities which simply result, so to speak, from the unavoidable corruption of everything, and those which arise from some perversity of the rule itself. In the first case, one cannot plausibly blame the rule for its inapplicability *in the long run*, nor seriously question its legitimacy for that reason. On the other hand, a rule that would be *constitutively* inefficient, namely a rule whose iterated application would inevitably, *by itself*, deprive an individual of the capacity to follow it, such a rule is bound to fall into disuse: to keep it up in force by considering that it is applicable to the average man by means of some very lenient *ceteris paribus* clause would amount to admitting that it was promulgated only for a scarce class

of *Ubernenschen*. That is in fact the risk the traditional logician takes: by proposing effective but infeasible rules, she devises a notion of deduction which matches the abilities of supra-physical agents, with respect to whom ordinary agents unavoidably look as infra-rational. Now, the latter are obviously rational, insofar as they are as much rational as they could be.

Once the need of a *reform* of the logical rules acknowledged, still a major obstacle stands across the way: any effective rule is humanly performable in the case of a single application, in such a way that the only aspect of the rule which requires modification deals with the possible iteration of its application. That amounts to saying that the reform could only consist, not in modifying the rule itself, but in adjoining an application decree to it, and that such a decree, in turn, could consist only in a unique clause, namely the clause that the rule *ought not* to be applied in the circumstances where it is *in fact* inapplicable. Let us term «explicitly feasible» such rules, that explicitly define the limits of their application conditions. The main shortcoming of these rules lies not so much in the fact that they blur the distinction between what is *de jure* and what is *de facto* – for that is, deep down, the very objective – than the fact that *they do not get us any further*, as such they stand merely as an authentication of the way the agents proceed. One would prefer amendments doing their job in full generality, without explicit consideration of the actual features of the agent over whom they rule: to sum up, one would prefer «implicitly feasible» rules the agents could comply with, without any explicit stipulation to that effect.

4.4. The Limits of the Traditional Notion of Deduction

It is not possible, in the traditional frame in which a deduction is viewed as a sequence of types of sentences, to formulate feasible rules that satisfy the implicitness condition above. That layout only registers the result of the application of the rule, it keeps silent on the very identity of the rule which is applied. It permits, for example, to distinguish between the inference from $A \& B$ to A and that from $A \& B$ to B , but not between the inference from $A \& A$ to A which conserves the left occurrence and that which conserves the right occurrence. A minimal reform requires therefore that one keep the track of the process by which the sentences have been inserted in the proof, and that one adopts the style of annotated deduction, as

- (1) $A \& A$ (hypothesis)
 (2) $A \& B \supset A$ (axiom)

- (3) $A \& A \supset A$ (2) + sub B/A
 (4) A (1), (3) + (*modus ponens*)

The result one obtains however (on the left, the result of the act, on the right, the rule according to which the act has been performed) is a chimerical mixture of object language and meta-language that cannot receive any logical status. As Church (1956, 53, fn. 121) aptly notices, assuming on that score the traditional viewpoint in a perfectly coherent way:

Perhaps at first sight it will be thought that the proof as so modified might consist of something more than merely a sequence of well-formed formulas. For instance there might be put in at various places indications in the meta-language as to which rule of inference justifies the inclusion of a particular formula as immediately inferred from preceding formulas, or as to which preceding formulas are the premises of the immediate inference. But as a matter of fact we consider this inadmissible. For our program is to express proofs (as well as theorems) in a fully formalized object language, and, as long as any part of the proof remains in an unformalized meta-language, the logical analysis must be held to be incomplete. A statement in the meta-language, e.g., that a particular formula is immediately inferred from particular preceding formulas) if it is not superfluous and therefore simply omittible – must always be replaced in some way by one or more sentences in the object language (...). The object language shall be an independent language capable, without continued support and supplementation from the meta-language, of expressing those things for which it was designed.

The traditional notion of deduction is only able to make evident the result of the application of the rules. As the modalities of their applications have to remain hidden here, no (implicitly) feasible rule can be defined in this frame.

5. PROOFS: FROM RATIFICATION TO VERIFICATION

Let us first put together the argumentation above:

- (1) By the very nature of the case, the assertability criteria anti-realism is looking for have to be strictly immanent, that is to say that the «real subjects» ever ought to be able *in practice* to recognize them as satisfied when they obtain (Section 1).
 (2) The assertability of a sentence E ought to lie in the existence of an object $\Pi(E)$ with the following property: not only the «real subjects» should not possibly fail to recognize $\Pi(E)$ when they have a token of it in front of them, but they ought to be practically in a position to *produce* it when such a construction is possible in principle (Section 2.2).

NOTES

- 1 Zermelo (1932) was such a realist. He attributed Gödel's incompleteness results to a notion of assertability deeply perverted by the "finitistic prejudice"; he himself pleaded for a form of infinitary logic located far away from the "imperfect" and "misleading" methods used by our finite understanding, but in which every true sentence would be provable as well.
- 2 That is *not* self-evident. According to most intuitionists, a proof of $A \supset B$, namely a construction Π which transforms every proof of A into a proof of B , should always be ratified by a meta-proof establishing that Π really satisfies that property. Cf. Sundholm (1983).
- 3 Most formulations by Dummett entirely agree with that: "We understand a given statement when we know how to recognize a proof of it when one is presented to us" (1993, 70).
- 4 Cf. Wright (1987, 53): "the ability to recognize, *if appropriately placed*, circumstances which do, or do not, fulfill the truth-conditions of a sentence" (my italics).
- 5 Even if the performance of each step only required the time taken by light to go through a proton, the whole process would necessitate more time than has elapsed since the big bang.

REFERENCES

- 6 That question is regularly confined with one that is so to speak dual, namely whether any material system may be considered, at least under one of its descriptions, as the realization of a Turing machine. To this last question, the answer is of course affirmative: anything can be seen as the trivial machine that computes a constant function. . . .
- 7 If one likes, explicit feasibility is to effectiveness what computability by linear bounded automata is to Turing computability, given that the LBA-computable functions are defined as the Turing computable functions whose computation can be performed without taking up too much space on the tape (exactly: the computation of the output ought not to take up more space than the input itself) (Hogeproof and Ullman 1979, 225). The current literature in the field of artificial intelligence contains abundant examples of explicitly feasible rules. As an illustration, one may refer to Kolnigge (1986), who proposes to only consider as deducible only those sentences that are deducible by means of n applications of *modus ponens* at most. That stipulation, to keep silent on the logical aspect of the question, obviously come up against the difficulty of determining a suitable integer n : we are certainly able to carry out a λ -line deduction, and our deductive resources are elastic enough (or imprecise enough in their frontiers) to let us perform $n + 1$ inferences so long as we are able to perform n of them. . . .
- 8 Cf. however note 6 above.
- 9 To tell the truth, and as Detlefsen (1992, 239) shows, this affirmation only holds *cum grano salis*, for an extra effort might be required to put the two justifications on a par.
- 10 By the way, the intuitionistic tradition has often been reluctant to accept certain principles that have eventually been integrated at all costs to the λ -calculus, but that have raised some reluctance from several founders of intuitionism in the very spirit of ω -arbitrariness. One may think, for example, of the law \perp / A (*ex falso quodlibet*), that has been sanctioned by Prawitz (1965, 20), but which Kolmogorov (1925, 421) thought to have no possible intuitive foundation since it asserts something about the consequences of something impossible: we have to accept B if the true judgment A is regarded as false.
- Wueller, L. E. J.: 1998, 'Der konstruktive Charakter der logische Prinzipien', Engl. transl. «The Unreliability of the Logical Principles», in E. Heijting (ed.), *L. E. J. Brouwer's Collected Works. I. Philosophy and Foundations of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam (1980), pp. 107–111.
- Church, A.: 1956, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, Princeton, 6th edn (1970).
- Detlefsen, M.: 1992, 'Brouwerian Intuitionism', in M. Detlefsen (ed.), *Proof and Knowledge in Mathematics*, Routledge, London and New York.
- Jensen, K.: 1989, 'Logical Constants as Punctuating Marks', *Nordic Journal of Formal Logic* 30, 362–379.
- Innocent, M. A. E.: 1993, *The Seas of Language*, Clarendon Press, Oxford.
- Innocent, M. A. E.: 1978, *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, London.
- Intenzen, G.: 1956, 'Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie', Engl. transl. «The Consistency of Elementary Number Theory», in M. E. Szabo (ed.), *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, Amsterdam (1969), pp. 132–213.
- van der Vlist, J. Y.: 1987, 'Linear Logic', *Theoretical Computer Science* 41, 1–102.
- Hogeproof, J. E. and J. F. Ullman: 1979, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Kolmogorov, A. N.: 1925, 'On the Principle of Excluded Middle', in I. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge, 2nd edn (1971), pp. 414–437.
- Kolnigge, K.: 1986, *A Deduction Model of Belief*, Morgan Kaufmann, Los Altos, CA.
- McGinn, C.: 1980, 'Truth and Use', in M. Pears (ed.), *Reference, Truth, and Reality*, Routledge & Kegan Paul, London, pp. 19–40.
- Prawitz, D.: 1965, *Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study*, Acta Stockholmiensia, Studies in Philosophy 3, Almqvist & Wiksell, Stockholm.
- Stockholm, Prawitz, D.: 1975, 'Ideas and Results in Proof Theory', in J. E. Fenstad (ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, North-Holland, Amsterdam.
- Sundholm, G.: 1983, 'Constructions, Proofs, and the Meaning of Logical Constants', *Journal of Philosophical Logic* 12, 151–172.
- Tennant, N.: 1987, *Anti-Realism and Logic*, Clarendon Press, Oxford.
- Ullman, J. F.: 1980, *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, London: Duckworth, London.
- Wright, C.: 1986, 'A Gentzen Argument Against Private Language?', in Ph. Petit and J. McDowell (eds.), *Subject, Thought, and Context*, Clarendon Press, Oxford.
- Wright, C.: 1987, *Reason, Meaning, and Truth*, Basil Blackwell, Oxford.
- Zermelo, E.: 1932, 'Über Stellen der Quantifikation und die Logik des Unendlichen', *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 41, 85–88.
- Institut d'Histoire et de Philosophie des Sciences et des Techniques
C.N.R.S./Université de Paris I
I.H.P.S.T., 13, rue du Four, 75006 Paris
France
E-mail: jacques.dubucs@cns-dfr.fr

RICHARD TIESZEN

What is a Proof ?

1991

in Michael Detlefsen (Ed.), *Proof, Logic and Formalization*, Routledge,
Dordrecht, 1991, p.57-76.

(Extraits : p.58-62)

p.58

"For an intuitionist, a proof is neither a syntactic object nor an abstract object. Rather, a proof is a mental construction, a sequence of acts that is or could be carried out in time by the mathematician.

[...]

The cognitive or phenomenological dimension of a proof [...] concerns the role of proof in providing evidence or justification for a mathematical proposition.

[...]

One can get some sense of the concept of "evidence" that I get in mind by reflecting on what is involved when one does not just mechanically step through a "proof" with little or no understanding, but when one "sees", given a (possibly empty) set of assumptions, that a certain proposition must be true. [...] One might say that some form of "insight" or "realization" is involved as is, in some sense, the fact that the proof acquires "meaning" or semantic content for us upon being understood."

p.60-62

"Martin-Löf says that

« the proof of a judgment is the evidence for it... thus proof is the same as evidence... the proof of a judgment is the very act of grasping, comprehending , understanding or seeing it. Thus a proof is not an object but an act. This is what Brouwer wanted to stress by saying that a proof is a mental construction, because what is mental, or psychic, is precisely our acts... and the act is primarily the act as it is being performed, only secondarily, and irrevocably, does it become the act that has been performed. »

In the work from which this passage is drawn Martin-Löf is emphasizing

the intuitionistic view that a proof is a cognitive process carried out in stages in time, a process of engaging in some mental acts in which we come to "see" or to "intuit" something. Proof, on this conception, is in the first instance an act or a process; only secondarily does it become an object. The conception of proof that Martin-Löf is describing is found very strikingly, as he notes, in Heyting's identification of proofs (or constructions) with fulfilments of intentions in the sense of Husserl's philosophy (Heyting 1931). On this view, the possession of evidence amounts to the fulfilment of mathematical intentions. I agree completely with Martin-Löf's remark (Martin-Löf 1983-4:240-1) that Heyting did not just borrow these terms from Husserl but that he also applied them appropriately. Thus, as a first approximation, I propose to answer our opening question as follows:

1- A *proof* is a fulfilment of a mathematical intention.

Likewise, provability is to be understood in terms of fulfillability. In one fell swoop this embeds the concept of proof in a rich phenomenological theory of mental acts, intentionality, evidence, and knowledge. To understand philosophically what a proof is one must understand what the fulfilment of a mathematical intention is. Let us therefore first consider the concept of a mathematical intention.

[p.61]

The concept of an intention is to be understood in terms of a theory of intentionality. Many cognitive scientists and philosophers of mind believe that intentionality is a basic, irreducible feature of cognition, certainly of the more theoretical forms of cognition. Intentionality is the characteristic of "aboutness" or "directedness" possessed by various kinds of mental acts. It has been formulated by saying that consciousness is always consciousness of something. One sees this very clearly in mathematics, for

mathematical beliefs, for example, are beliefs about numbers, sets, functions, groups, spaces, and so on. By virtue of their "directedness" or referential character, mental acts that are intentional are supposed to be responsible for bestowing meaning, or semantic content.

A standard way to analyze the concept of intentionality is to say that acts of cognition are directed toward, or refer to object by way of the "content" of each act, where the object of the act may or may not exist. We might picture the general structure of intentionality in the following way:

$$\text{Act}(\text{Content}) \rightarrow [\text{object}],$$

where we "bracket" the object because we do not assume that the object of an act always exists. Phenomenologists are famous for suggesting that we "bracket" the object, and that we then focus our attention on the act (noesis) and act-content (or noema), where we think of an act as directed toward a particular object by way of its content (or noema). Whether the object exists or not depends on whether we have evidence for its existence, and such evidence would be given in further acts carried out through time.

We can capture what is essential (for our purposes) to the distinction between act and content by considering the following cases: a mathematician M might believe that Φ , or know that Φ , or remember that Φ , where Φ is some mathematical proposition. In these cases different types of cognitive acts are involved - believing, knowing, remembering - but they have the same content, expressed by Φ . The act-character changes, but the content is the same. Of course the content may also vary while the act-character remains the same. The content itself can have a structure that is quite complex. Also, when we say that the content is "expressed" by Φ we shall mean that the mathematical proposition Φ is an expression of the content of a particular cognitive act. Thus, there is a

direct parallel between intentionality, a feature of language or expression, and intentionality, a feature of cognition, insofar as we

[p.62]

are restricting attention to those expressions which are expressions of cognitive acts.”

PER MARTIN-LÖF

*Truth of a proposition, evidence of a
judgement, validity of a proof*

1987

in Synthese **73** (1987), p.407-420.

(Extraits : p.416-417)

p.416-417

“What is a judgement ? and, What is a proof of a judgement ? When you are dealing with such basic notions, it is clear that there can be no question of reducing them to any other, more basic notions : rather, you have to satisfy yourself that these notions are the same as certain other notions that you use other words to express, and there can only be the question of revealing the structure into which these notions fit and finding the words for them which make most clear their nature. [...] The word act, of course, is the most general word that we use for all of our acts, and, similarly, the word object has that complete generality. Thus, we have acts of conjecturing and doubting and wishing and fearing and so on, and we have the objects of those acts, that is, objects of conjecture and doubt and wish and fear and so on. One particular kind of acts, and, correlatively, kind of objects that we direct ourselves toward in those acts, are acts of knowing and objects of knowledge, respectively. My answer to the questions, What is a judgement ? and, What is a proof of a judgement ? is simply that a proof of a judgement is an act of knowing and that the judgement which it proves is the object of that act of knowing, that is, an object of knowledge. This fits completely with the standard explanation of a proof that you get out of an ordinary dictionary : it says that a proof is what shows the truth of a statement. Now, I have been careful to use the word truth in connection with propositions, whereas I try to use evidence in connection with assertions or judgements. With that terminological precaution, the proper explanation of the notion of proof of a judgement is that a proof is that which makes an assertion or judgement evident, or, if you prefer, simply that a proof of a judgement is the evidence for it. Thus proof and evidence are the same. And what is it that makes a judgement evident to you ? Before you have understood or grasped the judgement, it is not evident to you, and, when you have grasped it, it is obvious or evident to you. Thus it is simply your act of understanding or grasping it

which confers evidence on the judgement, that is, which makes it evident to von. This is one way of seeing that the proof of a judgement is nothing but the act of knowing, or, perhaps better, the act of understanding or grasping, and that what you grasp, namely, the object of knowledge, is the same as what you prove, namely, the assertion or judgement. How can you argue for such an interpretation of the primitive notions of judgement and evidence? I do not think that you can really argue very much about it: you can have different paths to this insight, and I have taken two, I think, so far. There is a third one, starting from the dictum, which again Husserl stuck to in all of his work, that evidence is nothing but experience of the truth (Ger. Evidenz ist Erlebnis der Wahrheit). And what is the experience of the truth of a proposition? That is precisely the act of understanding or grasping its truth, that is, the act of getting to know its truth, and hence we arrive at the same conclusion via this third path, namely, that the evidence for a judgement is the very act of knowing it.”

GORAN SUNDHOLM

*Proofs as Acts and Proofs as Objects :
Some questions for Dag Prawitz*

2000

in Theoria, **64**, 187 - 216, 2000.

(Extraits : p.92-94)

p.192-194

"The proof-act/proof-object distinction that forms the topic of the present discussion must not be confused with the act/object distinction applied to proofs. The object of an act of proof, or better, demonstration, is the knowledge gained, the theorem proved, or made, in, or by, the act of proving. This object - or theorem - has the form the construction(-object)

c is a proof(-object) for the proposition A,

which form was hinted at already by Heyting: « Every theorem has the form {if enunciated without abbreviations): "A construction with such and such properties has been effected by a mathematician" », as well as by Freudenthal, according to whom « jeder Satz, wenn man ihn erst einmal intuitionistisch eindwandfrei formuliert, automatisch seinen ganzen Beweis enthält. » The proof-object is the construction-object, that is, the object of the construction-act that forms part of the proof-act. At this point, great confusion would result if the relevant distinctions with respect to proofs and constructions were neglected. "The proof is the construction, that is, the object of the construction, which is part of the proof." [note 14]³⁷⁹ However, the construction, that is, the proof-object, and the theorem proved, that is, the object of the proof-act, are not the only objective features of the act of proving; there is also what Per Martin-Lof has called the trace, or track, of the proof-act [...]. This trace is what remains when the act has been completed, for instance, - Martin-Löfs example - literally the track resulting from a completed skiing-tour, possibly comprising several sub-tracks [...] in the race to the final goal, or object, of the skiing-tour in question. [...] This material part of the trace of an act of mathematical demonstration is often supplemented with a - no less objective - descriptive part in written form as a piece of mathematical text. [...] When a philosopher of mathematics speaks about a "proof", as often as

³⁷⁹ Note 14 : "This is an extreme example, specifically designed for the purpose of exhibiting the implicit dangers, but formulations tending in this direction can be found in foundational writings on intuitionism - by writers belonging to both opposing camps."

not, he means a proof-trace. [...] Of the three notions of proof - act, trace, and object - the former two carry an epistemological import, whereas the last one does not : a proof-object is a mathematical object like any other, say, a function in a Banach space, or a complex contour-integral, whence, from an epistemological point of view, it is no more forcing than such objects."

MICHAEL DETLEFSEN

Poincaré against the logicians

1992

in Synthese **90** : 349-378, 1992.

POINCARÉ AGAINST THE LOGICIANS*

ABSTRACT. Poincaré was a persistent critic of logicism. Unlike most critics of logicism, however, he did not focus his attention on the basic laws of the logicians or the question of their genuinely logical status. Instead, he directed his remarks against the piece accorded to logical *inference* in the logicist's conception of mathematical proof. Following Leibniz, traditional logicist dogma (and this is explicit in Frege) has held that reasoning or inference is everywhere the same – that there are no principles of inference specific to a given local topic. Poincaré, a Kantian, disagreed with this. Indeed, he believed that the use of non-logical reasoning was essential to genuinely mathematical reasoning (proof). In this essay, I try to isolate and clarify this idea and to describe the mathematical epistemology which underlies it. Central to this epistemology (which is basically Kantian in orientation, and closely similar to that advocated by Brouwer) is a principle of epistemic conservation which says that knowledge of a given type cannot be extended by means of an inference unless that inference itself constitutes knowledge belonging to the given type.

1.

In the philosophy of mathematics, Poincaré is probably best known for his disagreement with the logicians – in particular, with Russell, with whom he carried on a running debate in the early years of this century.¹ Unlike the usual criticisms of logicism, however, Poincaré's critique did not focus on the question of the status of the 'basic laws' of the logicist's systems, finding difficulties in seeing them as genuinely *logical* principles. Rather, it was dominated by the quite different idea that there is little, if any, place for logical *inference* in mathematical proof – such inferences being epistemically too colorless to be a part of any genuinely mathematical reasoning. Logical inference, by its very nature, applies everywhere, and so neither requires nor reflects any distinctively *mathematical* knowledge; and, for that reason, it cannot be expected to serve as means of *extending* genuinely mathematical knowledge.

Poincaré's defense of these views rested on an appeal to what he took to be a datum of mathematical 'common sense'. Anyone with mathematical experience would, he maintained, clearly perceive a large and important difference between the epistemic condition of one whose reasoning is based on the topic-blind steps of logical inference (e.g.,

Synthese 90: 349–378, 1992.
© 1992 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

modus ponens and the like), and one whose reasoning is based on topic-specific penetration of a particular mathematical subject. The mathematician's inferences stem from and reflect a knowledge of the local "architecture" (Poincaré's term) of the particular subject with which they are concerned, while those of the logician represent only a globally valid, 'topic-neutral (and, therefore, locally insensitive!)' form of knowledge.² Using Poincaré's own figure, the "logician" is like a writer who is well-versed in grammar, but has no ideas.³

This, in brief, is Poincaré's view of the place of logic in mathematical reasoning. But though interesting and distinctive, and an absolutely central part of Poincaré's philosophy of mathematics, it has never been developed in any systematic way. The chief task of this paper is to take steps toward remedying this deficiency, with the hope that, the philosophical basis of Poincaré's views having been more clearly formulated, their interest might be more deeply appreciated, and their plausibility and importance more accurately judged.

The views offered here differ sharply with other recent attempts – most notably, that by Warren Goldfarb in 'Poincaré Against the Logicians'⁴ – to elaborate Poincaré's philosophical ideas. Goldfarb claims that what marks Poincaré's conception of foundations and sets it apart from the rival conception of the logicians is its concern with providing a psychologically realistic account of mathematical knowledge and reasoning; that is, an account of mathematical knowledge which describes, in a psychologically realistic way, how it is that we come to have it.

This attempt to make psychological plausibility the focus of the dispute between Poincaré and the logicians is tempting not least because the preeminent logicians, Frege and Russell (and, to a lesser extent, Cantor), are well known for their anti-psychologist bent in foundations. Though quite different from one another, they nonetheless both held views which agree in seeing the task of mathematical epistemology as set by metaphysics rather than psychology. In Russell's case it is a metaphysics of objects and propositions (cf. Russell 1903, p. 427). In Frege's case it is a metaphysical ordering of truths, which is seen as capturing the relations of (objectively metaphysical) "sufficient reason" obtaining among them.⁵ In neither case is psychological plausibility anything but a 'red herring': mathematical epistemology, on their views, is properly obligated to facts of mathematical being, not to facts of mathematical believing.

But though there are serious differences between the logicist and

Poincaréan conceptions of the foundational enterprise (some of the more important of which will be discussed in what follows), we do not see these differences as centering on the question of whether foundations should be psychologically realistic.⁶ Thus, we disagree with Goldfarb's interpretation of Poincaréan foundations. As we see it, Poincaré's viewpoint is characterized not by a concern for the *psychological* differences between the Poincaréan prover and his 'logician' counterpart but, rather, by a concern for their *epistemological* differences. Hence, the issue is not whether a mathematical epistemology yields a psychologically accurate description of the mathematical knower but, rather, whether it provides a plausible account of the epistemological differences separating the knowledge of the mathematical knower from that of the 'logician'. Such, at any rate, is the view that we will be defending in this essay.

Structurally, what we end up with is an epistemology centering on two complementary principles. One of these is a *principle of epistemic typification* according to which knowledge is to be seen as divided into types, but types whose division does not follow the divisions between subject-matters that are commonly used to demarcate mathematics from non-mathematics.⁷ The other is a *principle of epistemic conservation* which says, in effect, that inference cannot be *epistemically* 'creative' – that is, that it cannot give rise to knowledge belonging to a given type unless it itself constitutes knowledge of that type. In the case of mathematical knowledge, this second principle implies that if reasoning to a mathematical conclusion from a group of premises is to be capable of producing mathematical knowledge of that conclusion, then, in addition to the premises being mathematically known, it must also be the case that the inferences used in conducting the proof themselves constitute *mathematical* knowledge. In Poincaré's view, it is this latter condition that is violated by the use of purely *logical* inference in mathematical reasoning.

Adopting such a view concerning the place of logical inference in mathematical proof has serious consequences, among which the clash with standard views of rigor is among the more noticeable and important. One of the celebrated triumphs of the 'logicization' of mathematical reasoning by Frege, Peano, and Russell and Whitehead was the new and seemingly unimpeachable standard of rigor that it brought with it; a standard which continues to guide foundational work to the present day. On this approach, a rigorous proof is one in which all

substantive (i.e., topic-specific) information has been driven out of the inferences and into the axioms, thence to be explicitly registered in the premises of the proofs in which it is used. The end result – or such, at any rate, is the pious hope – is a clear and accurate record of the beliefs upon which a given conclusion is based.

This end is, however, achieved only by reducing all inferences to *logical* ones since it is only such inferences which, being topic-neutral, cannot themselves contain any substantive (i.e., topic-specific) information. Logic-sized steps of inference are thus exactly what rigor seems to demand, since it is only through using such steps that all substantive information used in a given proof is forced to be explicitly declared in the premises.

This traditional conception of rigor thus depends on there being globally valid, topic-neutral forms of inference in terms of which the inferences pertaining to a given subject can be cast. Without this, we run the risk of smuggling undeclared – and, therefore, unrecognized – information into our proofs. The Poincaréan is thus challenged to show how rigor can be achieved when the globally valid, topic-neutral inferences of logic are banished and replaced with the locally valid, topic-specific inferences of the 'mathematician'.

This response is as radical as it is simple. Rigor will be achieved not by the elimination of logical or informational gaps separating premises from conclusions (hence, the elimination of substantive inference) but, rather, by the elimination of gaps in *our mathematical understanding* (and, hence, the elimination of inferences in which the premises do not constitute a good *mathematical* reason for the conclusion).⁸ Seen in this way, an inference is rigorous when, and only when, it reflects genuine mathematical understanding; and such a view is the very antithesis of the standard one, since it requires inference to be substantive *rather than* logical in order to be rigorous.

This then, in outline, is the argument of the present paper. Its chief objectives are the elaboration of the ideas which we take to underlie the Poincaréan viewpoint in the philosophy of mathematics.

2. THE 'INSOLUBLE CONTRADICTION' OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE

In a manner reminiscent of Kant's opening remarks to *The First Part* of the *Transcendental Problem* of the *Prolegomena*,⁹ Poincaré opens *Science and Hypothesis* with these words:

The very possibility of the science of mathematics seems an insoluble contradiction. If this science is deductive only in appearance, whence does it derive that perfect rigor no one dreams of doubting? If, on the contrary, all the propositions it enunciates can be deduced from one another by the rules of normal logic, why is not mathematics reduced to an immense tautology? The syllogism can teach us nothing essentially new, and, if everything is to spring from the principle of identity, everything should be capable of being reduced to it. Shall we then admit that the enunciations of all those theorems which fill so many volumes are nothing but devious ways of saying A is A ? (Poincaré 1902, p. 31)

There are, however, some important differences between Kant and Poincaré. Both recognize what might be called the 'epistemic substantiality' of mathematics (i.e., the fact that it constitutes a significant and substantial body of knowledge) as a datum for mathematical epistemology. However, while for Kant it is the "apodictic certainty" of mathematics that is presented as the competitor of epistemic substantiality, for Poincaré it is its "perfect rigor".

A closer reading, however, raises the possibility that Poincaré was not so much intending to pose a dilemma (between epistemic substantiality and perfect rigor) for mathematical epistemology generally as he was to give a critique of one particular form that such an epistemology had taken; namely, that of a Leibniz-style logicism.¹⁰ For though what Poincaré presents as contradictory are the claims that

- (I) Mathematics is perfectly rigorous,
- and
- (II) Mathematical theorems are not merely logical truths or tautologies.

these claims are contradictory (even loosely speaking) only if (I) is taken to imply something which it clearly does not; namely, that the theorems of mathematics are all tautologies. In truth, what (I) seems to require is not that all *theorems* of mathematics be *logical truths* but, rather, that all *inferences* in a mathematical proof be *logical inferences*. Thus, the second question which Poincaré asks in the above-quoted remark (viz., "If all the propositions it enunciates can be deduced from one another by the rules of formal logic, why is not mathematics reduced to an immense tautology?"), which is supposed to have no (ready) answer, would actually appear to have an easy one: namely, "Because the *axioms* with which the deductions begin are not themselves logical truths". It would not, therefore, appear to have the force that Poincaré wanted it to have.

Is Poincaré's 'insoluble contradiction' based on a simple-minded failure to recognize this elementary point? The paragraph directly succeeding the one quoted above suggests that this is not so.¹¹

Without doubt, we can go back to the axioms, which are the source of all these reasonings. If we decide that these cannot be reduced to the principle of contradiction, if still less we see in their experimental facts which could not partake of mathematical necessity, we have yet the resource of classing them among synthetic *a priori* judgements. This is not to solve the difficulty, but to baptize it; and even if the nature of synthetic judgements were for us no mystery, the contradiction would not have disappeared, it would only have moved back; syllogistic reasoning remains incapable of adding anything to the data given it; these data reduce themselves to a few axioms, and we should find nothing else in the conclusions.

It was thus clear to Poincaré that the inference from the given fact that mathematics is perfectly rigorous to the further assertion that mathematical theorems are tautologies can be blocked by adopting the position, open to non-logicists if not to logicists, that the axioms are not tautologies. Still, he insists, the problem he has in mind would not be avoided by such a move. This is so, he explains, because even if (contrary to logicism) it were granted that the axioms are not logical truths, one still faces the problem of explaining how the *theorems* of mathematics could constitute a genuine extension of the *axioms* if the only principles of inference used are such as have a purely logical character. Poincaré's contention, then, is that, if only purely logical inferences are used in a proof, knowledge thus gained of the theorem proven cannot constitute extensions of whatever *mathematical* knowledge might be represented by one's knowledge of the axioms used to prove it. Yet, despite this, he believed that the conclusions of *mathematical* proofs typically *do* represent epistemic extensions of their premises. Consequently, he was led to conclude that not all the inferences belonging to a typical mathematical proof can be of a purely logical character.

Where Poincaré saw a genuine contradiction, then, is between the following two principles.

- (I') All the inferences used in mathematical proof are of a purely logical character,
- and
- (II') Conclusions of mathematical proofs can, and often do, con-

stitute extensions of the mathematical knowledge represented by the premises.

The conflict between (I') and (II') gives rise to a like conflict between (I) and (II) only if (I) is taken to imply (I'). This, however, Poincaré denied (cf. Poincaré 1908, ch. III (p. 385 in the Halsted translation)), recommending instead an alternative conception of mathematical rigor according to which it consists in the lack of 'gaps' in mathematical understanding. One need have no fear of missing elements in a mathematical inference provided that one grasps the mathematical reason behind it. Mathematical reasoning can thus proceed in larger-than-logic-sized steps to the extent that mathematical understanding permits it to.

Adopting this non-logical conception of rigor¹² allowed Poincaré to retain (I), which he held to be true, while rejecting (I'), which he held to be false. According to Poincaré, the falsehood of (I') is evident from the fact that, were it to be true

no theorem could be new if no new axiom intervened in its demonstration: reasoning could give us only the immediately evident verities borrowed from direct intuition; it would be only an intermediary parasite, and therefore should we not have good reason to ask whether the whole syllogistic apparatus did not serve solely to disguise our borrowing. (Poincaré 1902, p. 31)

Since, however, mathematical reasoning can, and typically does, yield new knowledge *without* the intervention of new axioms, it follows that (I') is false. Hence, mathematical reasoning must typically make use of inferences that are not purely logical in character. In his own words:

Mathematical reasoning has of itself a sort of creative virtue and consequently differs from the syllogism. (Poincaré 1902, p. 32)

In Poincaré's view, then, the non-logical character of mathematical inference is necessary for the explanation of (II'), which he accepted as a datum for mathematical epistemology.

The apparently 'insoluble contradiction' of which Poincaré speaks in the opening passage of *Science and Hypothesis* is thus not to be taken as representing a conflict between (I) and (II), though this might at first sight appear to be the gist of his misstated question inquiring how mathematics could be anything but an immense tautology, if, as the logicians would have it, all the propositions of mathematics were deduced from one another by purely logical reasoning. Nor is it to be

confused with the conflict between (I') and (II'), which Poincaré believed to be entirely genuine and unresolvable. Rather, it is that which exists between (I) and (II'), both of which Poincaré held to be true, and whose compatibility he sought to make plain through his rejection of the 'logician's' conception of rigor in favor of one which emphasizes the importance of mathematical rather than logical acumen.

3. THE NATURE OF MATHEMATICAL PROOF

What Poincaré primarily was concerned to challenge, then, was not just logicism but, rather, the 'logicization' of mathematical proof – by which we mean the reduction of all inferences occurring within a mathematical proof to logical inferences.¹³ He believed that there are distinctively mathematical forms of inference, of which perhaps the clearest and most important is mathematical induction.¹⁴ He believed, moreover, that realizing this fact is the key to sustaining the Kantian observation concerning the epistemic 'creativity' of mathematical proof. These views brought him into sharp conflict with the logicians, who believed not only that such logicization is necessary for the optimal form of rigor, but also that rational thought is essentially homogeneous or non-modular (i.e., non-local) in character. Such a doctrine, of course, implies that mathematical reasoning – including reasoning by mathematical induction – is essentially the same as all other thought and, so, at bottom, purely logical in character. As Frege put it:

Thought is in essentials the same everywhere: it is not true that there are different kinds of laws of thought to suit the different kinds of objects thought about. . . .

The present work will make it clear that even an inference like that from n to $n + 1$, which on the face of it is peculiar to mathematics, is based on the general laws of logic, and that there is no need of special laws for aggregative thought. (Frege 1884, pp. III–IV)

Logicism thus seeks to do away with 'local' differences in reasoning. According to it, such differences are superficial, and disappear once one penetrates sufficiently deeply into the basic nature of the thought in question. Thus, at the epistemologically most important and revealing levels of depth, what is remarkable about mathematics is its homogeneity with the rest of rational thought – not the 'local' character of its forms of reasoning.

This theme of homogeneity also figures prominently in the thought

of Frege's forerunner, Leibniz, who took the view that mathematical truths are nothing but disguised forms of logical identities, and that their proofs should therefore be nothing but the analytical 'unwindings' (by application of definitions) of concepts which trace the theorem proved back to the elemental and paradigmatic cases of conceptual containment – namely, analytical truths of the form 'A is A'.

Frege refined this viewpoint both by enriching the assumed logical basis and by restricting its scope. He divided mathematics into two parts: a 'science of number', or 'arithmetic', on the one hand, and a science of spatial intuition, or geometry, on the other; and he distinguished both of these from empirical science. His logicist claim was then focused exclusively on the arithmetic part. In the words of paragraph 14 of the *Grundgesetze*:

Empirical laws hold good of what is physically and psychologically actual, the truths of geometry govern all that is spatially intuitable, whether actual or product of our fancy. The wildest visions of delirium, the boldest inventions of legend and poetry, where animals speak and stars stand still, where men are turned into stone and trees turn into men, where the drowning haul themselves out of swamps by their own topknots – all these remain so long as they remain intuitable, still subject to the axioms of geometry. Conceptual thought alone can after a fashion shake off this yoke, when it assumes, say, a space of four dimensions or positive curvature For purposes of conceptual thought we can always assume the contrary of some one or other of the geometrical axioms without involving ourselves in any self-contradiction when we proceed to our deductions, despite the conflict between our assumptions and our intuition. The fact that this is possible shows that the axioms of geometry are independent of one another and of the primitive laws of logic, and consequently are synthetic. Can the same be said of the fundamental propositions of the science of number? Here we have only to try to deny any one of them, and complete confusion ensues. Even to think at all seems no longer possible. The basis of arithmetic lies deeper, it seems, than that of any of the empirical sciences, and even that of geometry. The truths of arithmetic govern all that is numerable. That is the widest domain of all: for to it belongs not only the actual, not only the intuitable, but everything thinkable. Should not the laws of number, then, be connected very intimately with the laws of thought? (Frege 1884, pp. 20–21)¹⁵

Frege's view of the basic laws of arithmetic as being logical in character is thus made plain by his insistence that denial of an arithmetic law results in a global failure of rational thought.

Such a view, however, not only asserts a basic homogeneity of arithmetic thought with the other areas of rational thought, but also requires a homogeneity of the laws of logic with each other! For it demands that there be no subsystem of the basic laws that is both conceptually independent of the remaining laws and also strong enough to deserve

to be called a body of rational thought. Thus, execution of Frege's logicist program would clearly require more than what logicism is commonly understood to require: namely, the location of a set of principles *basic* enough to be regarded as laws of rational thought and *powerful* enough to imply the laws of arithmetic. It would require as well either that there be no substantial independence or 'separability' among the basic logical laws, or that substantially all of them are required for the derivation of each and every law of arithmetic. Otherwise, there would be a threat of heterogeneity within the basic laws themselves. I am not sure that Frege saw this as clearly as he should have (although it may be what he had in mind in his otherwise curious insistence that the basic laws of thought be kept to a 'small' number (cf. Frege 1884, section 90; Frege 1967, p. 2)).¹⁶ But regardless of whether Frege saw it, it is surely a serious concern for the logicist.

The basic laws of thought identified by logicism, then, must all be of such a character as to qualify them as *fundamental* principles of rational thought. And it is precisely this which produces the basic conflict between Poincaré and the logicists.¹⁷ For, as stated above, Poincaré's view was that mathematical thought possesses its own distinctive principles of reasoning which are *not* fundamental principles of rational thought *per se* but, rather, principles of a more localized logic.¹⁸ Furthermore, he believed that knowledge of such locally distinctive patterns of reasoning is essential to genuine mathematical knowledge, while the logicists believed that the deepest, most genuinely mathematical knowledge is that which consists in a grasp of the reduction of mathematical truths to their logical roots and, hence, to principles whose very essence is their *global* validity.¹⁹ Thus, there is a deep and profound conflict between the epistemological ideals of Poincaré and those of the logicists. As suggested earlier, however, this conflict centers not on the question of whether foundations are to be psychologically realistic but, rather, on the question of whether rational thought is homogeneous (whether, that is, sufficient reason in mathematics comes in one or many different varieties).

It is important for our purposes, however, that Poincaré's basic disagreement with logicism not be confused with that which typifies much of the more recent literature on the subject and takes as central the question whether the *axioms* of the proposed logicist schemes (in particular, axioms which postulate the existence of things – for example, infinite sets) are truly logical in character. For, as was noted in the

previous section, Poincaré expressly disclaimed this as his main concern (cf. Poincaré 1902, pp. 31–32), and focused on the methods of inference rather than on the axioms.²⁰ Moreover, even there his point was not what one might expect – namely, that the inferences used are not purely logical in character. Rather, it was quite the opposite: namely, that they *are* purely logical, and for that very reason cannot be used to produce conclusions that constitute an extension of the mathematical knowledge represented by the premises.

Verification [which is Poincaré's word for logical proof] differs from true demonstration precisely because it is purely analytic and because it is sterile. It is sterile because the conclusion is nothing but the premises translated into another language. On the contrary, true demonstration is fruitful because the conclusion here is in a sense more general than the premises. (Poincaré 1902, p. 33; brackets mine)

This may make it sound as if the point is this: a *logical transform* $\lambda(S)$ of a sentence S is just like a *definitional transform* of S . Definitional transforms are, of course, *conservative* in a strong sense: that is, the application to S of a definition δ of some expression contained in S can only produce a sentence $\delta(S)$ that expresses the same proposition as that expressed by S . Hence, if logical inference is essentially definitional transformation (that is, if the conclusion of an analytic inference is nothing but the “premises translated into another language”), then the application to S of a logical form of inference λ must result in the production of a sentence $\lambda(S)$ which expresses the same proposition as that expressed by S . This being so, logical inference would not be capable of extending knowledge since it could not produce a conclusion expressing a different proposition from that expressed by the premises.²¹

Such an argument might apply to a Leibnizian form of logicism which holds that the truths of mathematics are derivable from logical identities sheerly by application of the appropriate definitions. It would not, however, count against the types of logicism that Frege and Russell advocated, since they explicitly allowed for forms of inference whose conclusions are (or express) different propositions from their premises, and Russell even insisted on the synthetic character of logic.²² Moreover – and this is the important point – Poincaré's aim was not to establish that logical inference is incapable of yielding any epistemic extension of knowledge whatsoever. Rather, it was that it could not be expected to yield an extension of genuine *mathematical* knowledge.

Thus, the epistemic impotence or non-productivity that Poincaré ascribed to logical inference was specific rather than general, applying only to its use as a means of extending mathematical knowledge. Like Kant before him, then, Poincaré, too, was free to admit that the conclusions of logical inferences might be buried so deeply in their premises as to make them candidates for new knowledge (of a non-mathematical variety) when retrieved through analysis.²³ Thus, to repeat, his point was not that logical inference is epistemically fruitless *simpliciter*, but rather only that it is fruitless as a means of extending mathematical knowledge.

Hopefully, these remarks will help guard against misunderstanding by distinguishing the Poincaréan objection to logical inference from others with which it might be confused. These possible confusions having now been noted, let us turn to the more positive task of developing a few of the key ideas of this Poincaréan viewpoint.

Its cornerstone is the anti-logicist doctrine mentioned earlier; namely, the division of rational thought into irreducibly *heterogeneous* local domains, each with its own distinctive ‘logic’, if you will. This heterogeneity occurs, moreover, not only at the level of the axioms or first truths of mathematical thought, but also at the level of inference. Thus, Poincaréan heterogeneity is more thoroughgoing than that which would arise solely from those ‘pockets’ of intuition used to secure knowledge of the first truths or axioms of a body of mathematical thought. It reflects as well the use of intuition in inference, the effect of which is to induce a distinctive logic on a given local domain of thought, thus permitting – indeed obliging – the reasoner to proceed by means other than globally valid steps of inference. Thus, we are reminded once again that Poincaré was not so much opposed to logicism as to the logicization of mathematical proof. For even if the logical status of the logicist's axioms were to be established, this would not provide a way around Poincaré's objection to the use of logical inference in mathematical proof.²⁴

But, if rational thought is thus heterogeneous, what is it that creates this local orientation? One thing Poincaré suggests is the need we have for *epistemic condensers* – that is, devices which serve to “abridge our reasonings and our calculations” (cf. Poincaré 1908, p. 440) by packing a whole series of what would be *logical* inferences into the space of a single (non-logical) inference and thus relieving us of the burden of having our knowledge depend on the completion of the cumbersome

unabridged logical reasoning. Such condensation signifies – and may even make possible – a grasp of the ‘architecture’ of a subject, something which Poincaré regarded as an absolutely indispensable ingredient of any truly scientific understanding of a given domain of inquiry. He introduced this notion by means of analogy in the following way:

Our body is formed of cells, and the cells of atoms: are these cells and these atoms then all the reality of the human body? The way these cells are arranged, whence results the unity of the individual, is it not also a reality and much more interesting?

A naturalist who never had studied the elephant except in a microscope, would he think he knew the animal adequately? It is the same in mathematics. When the logician shall have broken up each demonstration into a multitude of elementary operations, all correct, he still will not possess the whole reality: this I know not what which makes the unity of the demonstration will completely escape him.

In the edifices built up by our masters, of what use to admire the work of the mason if we cannot comprehend the plan of the architect? Now pure logic cannot give us this appreciation of the total effect: this we must ask of intuition. (Poincaré 1908: p. 436)²⁵

The epistemic condensation represented by a given non-logical local inference thus signifies not so much a gain in efficiency (though that, too, may be part of its importance) as a grasp of the contribution that the result thus inferred makes to some larger enterprise to which the given local domain of inquiry belongs. Or, perhaps better, it signifies a grasp of how the movement from premises to conclusion contributes to the ‘development’ of some architectural theme of the local subject-matter. In short, it marks the presence of a comprehending ‘universal’ (viz., what we are calling a plan or architectural theme of the local domain in question) in the ‘differences’ (viz., the states of its development signified by the premises and the conclusion, respectively) through which it persists.²⁶

Seen in this way, a mathematical inference **I** is composed of three elements: (i) a universal, $U_{I,T}$, which expresses an architectural theme of the local theory **T** to which **I** belongs, and which serves as the modulus of comparison for the premises and the conclusion of **I**; (ii) a premise-set, **p**, which marks a certain ‘position’ or ‘stage’ $\sigma_{U(p)}$ in the development of $U_{I,T}$; and (iii) a conclusion, **c**, which marks a ‘subsequent’ position or stage of development $\sigma_{U(c)}$ of $U_{I,T}$. Consequently, two inferences **I** and **I'**, expressed in the terms of two theories **T** and **T'**, are the same only when $U_{I,T} = U_{I',T'}$, $\sigma_{U(p)} = \sigma_{U(p')}$, and $\sigma_{U(c)} = \sigma_{U(c')}$.²⁷ And mathematical inferences will typically be distinct from logical inferences, since they will be based on different kinds of univer-

sals. Thus, a theory of *mathematical* inference, should one exist,²⁸ would consist in a specification of the various universals or architectures that serve to organize or unify mathematical thinking and an account of the ways in which the universals in this restricted class affect the differences through which they persist. Likewise, a theory of *logical* inference (assuming that there would be a point to allowing for such a category of inferences) would consist in a specification of a class of cognitive architectures that pertain to topic-neutral reasoning, together with an account of how they affect the differences through which they persist.²⁹

Theories of mathematical and logical inference would thus stand side-by-side, rather than in some vertical relationship (signifying subsumption of the former by the latter) to one another. And, it is unlikely that there would be anything like a *general* theory of inference, since it is doubtful that there is sufficient in common among *all* effects of *all* universals on the differences through which they persist to give rise to anything rich and interesting enough to be called a general theory of inference.³⁰ This is, of course, just a way of articulating the Kantian, anti-logicist theme of Poincaréan epistemology sounded earlier; namely, that rational thought is essentially heterogeneous rather than homogeneous.

The difference between mathematical and logical inference, on this view, is thus one that centers on the choice of universals or architectures under which the premises and the conclusion are to be united: a mathematical inference being one which unites premises and conclusion as a ‘development’ under a *mathematical* architecture or theme, and a logical inference being one which unites premises and conclusion as a ‘development’ under a *logical* architecture (if such there be). Our earlier use of the metaphor of ‘size’ is therefore to some extent misleading. The difference between logical and mathematical inference is not essentially one of ‘size’ but, rather, of over-arching architecture. Size enters only because the desired topic-neutrality of logical inference forces it to forego appeal to any topic-specific architecture and thus reduces its size to one that is dictated not by a topical architecture but, rather, by a semantical criterion used to individuate propositions generally (since, without a topic-specific architecture to appeal to, all that is left to ‘mark’ inferential movement is *semantical* change).

The essential distinction between mathematical and logical inferences is thus not well got at by appealing, as Poincaré himself did, to a

supposed distinction between analytic and synthetic inference which treats the former as inference in which the conclusion is 'contained in' the premises, and the latter as inference in which the conclusion goes beyond the premises. On the view sketched above, all inference is synthetic, since it all involves a 'putting together' of the premises and conclusion of an inference in such a way as to see the movement from the former to the latter as a 'development' of an architecture.³¹ Likewise, all inference is analytic since it involves seeing how the conclusion can be extracted from the premises as a 'development' of the architecture in which they are embedded. Thus, a conclusion's constituting a development of an architecture with respect to a set of premises is sufficient to make it both go beyond and be contained in them.

Hopefully, this account of inference helps clarify the basis for the principle of epistemic conservation which, as noted at the outset of this paper, is the chief structural element of Poincaré's epistemology of proof. According to that principle, an inference from p to q cannot be used to extend mathematical knowledge from p to q unless it itself constitutes mathematical knowledge. The basis for that principle, on the present view, is the fact that before an inference from p to q can be counted as truly mathematical, it must first be fitted into a mathematical architecture. Knowledge of this architecture is the quintessential form of mathematical knowledge. Hence, it is clear both that and why the principle of epistemic conservation holds under the conception of inference sketched here. And, because of that, it is also clear that it is equipped to accommodate Poincaré's basic 'data for mathematical epistemology': namely, the seeming differences between the epistemic conditions of the logician and the mathematician, and the relative scarcity of mathematical as opposed to logical expertise.

So far, we have only described the 'universals' or 'architectures', which are the key elements of the Poincaréan conception of proof, in terms of their epistemic function or role, which is that of dividing up mathematical thinking into stages or positions and thence to (partially) order those stages into something that can be regarded as a 'development' (i.e., a potential continuation of thought that presupposes a goal and a notion of what it is for that goal to be approached). But, what is it to have knowledge of such an ordering of a potential body of mathematical thought? This is a difficult general question, and one that we can only partially answer here. However, one thing seems sure, and

that is that the knowledge in question is not to be seen as consisting merely in a knowledge of the specific proofs and theorems that would constitute a 'development' of the area of thought in question. Grasping an 'architecture' is not a matter of seeing the specific results subsumed under it.

Does it, then, consist simply in an ability to tell of a given proof, when presented with it, whether or not it contributes to the development of the field in question? Seemingly not, since having a grasp of an architecture is supposed to function not only to control the mathematician's reactions to possible proofs of which she may become aware, but also to *guide* her in the *discovery* of proofs which contribute to the development of the field. Hence, Poincaréan architectures are to serve not only as standards with which our epistemic choices are to accord, but also as guides which direct those choices.³²

Knowledge of an architecture is thus something like knowledge of a strategy for playing a game, though not knowledge which presupposes a *complete* knowledge of how to get from one's present circumstances to the goal. It thus presupposes (i) the having of a goal, and the ability both to (ii) determine of a given course of proof-activity whether or not it is in conformity with that goal, and (iii) to discover particular proof-activities that are in conformity with it.

Thus, mathematics may be seen as a combination of special goals and special strategies for attaining them. Still, it is no game. In part this is no doubt due to the 'seriousness' of its overall goal as a science – namely, the development of our epistemic holdings. But, even more, it may be due to the fact that the strategies of mathematics have a sort of *regulative* status that strategies in games do not generally have. In a game, it is not strategies but *rules* and *goals* that have regulative status. I cannot be said to be playing chess if I move my bishops in straight lines, or if I adopt as my goal the mating of my own king. I can, however, play it without having a good strategy for mating my opponent's king. Playing the game *well* requires the employment of a good strategy: playing the game *at all* does not. To play the game at all requires only that I operate within the boundaries of the rules and that I make an appropriate choice of goals; it does not require that I make use of a good strategy.

On the Poincaréan view of mathematics, however, things are different. There, the strategies do have regulative force. They *are* rules. Not

to employ a mathematical strategy (i.e., a strategy which embodies some genuine mathematical – as opposed to general, multi-purpose – insight) is simply to fail to do mathematics at all. One can, of course, do mathematics less well than it might be done – and also less well than others actually do do it. One can, perhaps, even do it poorly – though that's a trickier matter.³³ But this only means that not all genuinely mathematical strategies are on a par with each other as means of pursuing a given mathematical goal, and that some of them might even be downright bad.³⁴ It does not convert the basic claim that, in mathematics, strategies have regulative status.

None of this should, of course, be taken as implying that without a grasp of a mathematical architecture there can be no inferential extension of *any* kind of knowledge (even knowledge of mathematical propositions). That would be both rash and incorrect. Rather, what we have been arguing is that without a grasp of a mathematical architecture there can be no inferential extension of mathematical knowledge. Inference, as we have presented it, is fundamentally a case of similarity through change. Moving from premises to conclusion brings a change; however, if the inference is to be valid, the premises must somehow be 'reflected' in the conclusion and thus persist *through* the transition to the conclusion. Such binding of premises to conclusion is basic to anything that truly is to count as inference, and it is the particular 'way' or 'mode' in which the premises are reflected in the conclusion (e.g., logically, mathematically, etc.) that determines what *kind* of inference an inference is.

In the Poincaréan epistemology that we have been sketching here, the similarity through change of truly *mathematical* inference is to be accounted for by subsumption of the premises and conclusion under a common *mathematical* architecture. One thus finds the premises reflected in the conclusion in a *mathematical* way. Subsumption under other kinds of architectures would give rise to different kinds of reflection. Architectures thus function as universals, binding the premises and conclusion of an inference together into the sort of 'unit' that is necessary to make it an *inference* rather than a mere *sequence* of propositions or judgments. Knowledge of architectural binding is, consequently, an essential part of that which is required for extension of a given *kind* or *type* of knowledge by means of inference. Knowledge of binding by a mathematical architecture – rather than such things as

preservation of certainty and/or *a priority* – is thus the crucial difference separating mathematical from non-mathematical inference, and is the distinctive feature of mathematical proof.

4. THE NATURE OF MATHEMATICAL RIGOR

The view of proof sketched in the last section brings with it the need to develop an accompanying conception of rigor since the standard *logical* conception of rigor can no longer be applied. On the Poincaréan account, mathematical proof no longer proceeds in logic-sized steps but, rather, in steps determined by the 'metric' of a given mathematical architecture. The inferences in a proof themselves comprise substantive pieces of mathematical insight, and this is something that runs counter to the very core of the modern, logical conception of rigor.

In conceiving of a mathematical inference as the joint participation of its premises and conclusion in a distinctively *mathematical* universal, the Poincaréan conception of proof builds non-logicality into the very essence of mathematical inference. It regards the 'filtration' of topic-specific knowledge from mathematical inference as tantamount to destroying it. Consequently, it stands squarely opposed to the modern, logical account of how rigor in proof is to be achieved, and it must therefore provide an alternative account.

This it does by offering a different *conception* of rigor altogether. On this new conception, the basic ideal is the same: namely, to eliminate 'gaps' in mathematical reasoning. However, both the conception of what constitutes a 'gap' and, consequently, the prescribed method for achieving their elimination are different. A gap is no longer a *logical* gap but, rather, a gap in *mathematical understanding*. Gaps of these two types are by no means equivalent, since it is possible both for there to be a logical gap where there is no gap in mathematical understanding and for there to be a logically gapless sequence of propositions that is nonetheless not bound together by any mathematical understanding. The elimination of gaps thus no longer calls for the *exclusion* of topic-specific information in an inference (which is what logical gaplessness demands) but, rather, for the *inclusion* of a mathematical universal to fill what would otherwise be a mathematical gap between the premises and the conclusion.

But, is it then not clear that the Poincaréan criterion of rigor fails to guarantee a complete and fully explicit identification of those propositions upon which the conclusion of a proof rests? And, if this is so, is it not also clear that there is a serious deficiency in the Poincaréan conception of rigor, since the whole point of pursuing proof rigorously is to gain a clear understanding of that upon which justified belief in a given mathematical proposition can be made to rest?

It is, we believe, possible to answer both questions in the negative. To see that this is so, however, it is important to distinguish the notion of a proposition's *mathematically* resting on another from that of a proposition's *logically* resting on another. Propositions that belong to the logical basis of a proposition need not belong to its mathematical basis. Thus, if P mathematically guarantees C, then, whether or not P logically guarantees C, it (i.e., P) constitutes a complete set of propositions upon which C mathematically rests.³⁵ Hence, in specifying it, one need leave no propositions out of the relevant basis for C; and this means that it is possible to obtain a full account of those propositions upon which a given mathematical belief rests, without thereby obtaining a logically complete basis for it.

The above remarks should not, however, be taken as suggesting that logical rigor has no role whatsoever to play in the improvement of mathematical knowledge. Indeed, we believe that it does. Specifically, in times of epistemic crisis, when it becomes necessary to revise epistemic holdings which, judged from a purely mathematical point of view, seem unimpeachable, generating logically complete bases may prove to be the only, or at least the optimal, way of proceeding. Such a procedure has the advantage of explicitly exposing certain assumptions which mathematical rigor does not bring to light. And, in so doing, it may turn up something implausible and, hence, something defensible, in our tacit assumptions. But whether or not this is the result, the generation of logically gapless bases for theorems will tend to enlarge the range of potential candidates for revision and, other things being equal, this is a virtue in situations where revision is demanded. It is important to realize, however, that even here it is logical rigor that serves the interests of mathematical rigor and not the other way around. For the point of such 'logification' is not to replace mathematical proof but, rather, to correct it – not to abandon the use of mathematical universals but, rather, to perfect it.

5. CONCLUDING REMARKS

Let us close with a few remarks intended to guard against misunderstanding and, at the same time, to deepen certain parts of our analysis. Central to our concerns here is a potential misunderstanding which arises from a natural response to the epistemology of proof sketched above. The basic idea behind this response is that it should be possible somehow to 'express' or 'encode' every universal or architecture appealed to in the course of a Poincaréan proof as an axiom and, that done, to make every inference into a purely logical inference. The process for carrying this out consists of the following two steps: (1) express each Poincaréan inference as an axiom in conditional form (the antecedent being the premise, and the consequent the conclusion of the inference being codified); and (ii) replace that inference by an instance of modus ponens. In this way, the reasoning goes, every Poincaréan proof can be transformed, without epistemic loss, into a purely 'logical' proof (i.e., a proof whose *inferences* are purely logical).

We believe that this argument turns on a failure to recognize a subtle, yet crucially important, difference between the Poincaréan proof and (what we might call) its *modus ponens counterpart*: a difference which can only be got at by probing more deeply into the epistemic mechanisms underlying the two. Let us turn, then, to a more careful examination of each, so that we may more fully appreciate the differences between the grounds which each provides for its conclusion.

In the case of a Poincaréan proof, the key feature is the grasping or intuiting of a mathematical architecture between **p** and **c**. **p** is seen to bear an architectural connection to **c**, and it is the grasping of this architecture – and seeing that it joins **c** to **p** – that is crucial to the Poincaréan inference from **p** to **c**. This is different from simply recognizing the *warrant for* connecting **p** and **c**, which is supplied by a grasp of the subsisting architecture. Grasping an architecture linking **p** and **c** surely provides one with a warrant for connecting **p** and **c**. And this warrant surely makes acceptable both the inference from **p** to **c** and the conditional proposition 'if **p**, then **c**'. Grasping an architecture is not, however, epistemically reducible to the provision of such warrant; it does more than simply justify (or justify with certitude, or justify with certitude *a priori*, etc.) the belief that if **p**, then **c**. It reveals **p** and **c** as *mathematically* connected.

The epistemology of (what we are calling) logical proof is entirely different. Logical relations between propositions, at least on the classical view, are essentially relations between their truth-values. Likewise, the essential function of a warrant is to establish what the truth-value a given proposition is. Thus, with the truth-value of a given proposition **p** having been established, the recognition of a logical relationship between **p** and another proposition **c** essentially amounts to one's having the ability to establish the truth-value of **c**. Thus, logical inference is, epistemologically speaking, a means of extending the ability to determine truth-value from one proposition to another.³⁶

This is essentially the epistemology of the modus ponens counterpart of a Poincaréan proof. It shows us why, even if knowledge of the premise 'if **p**, then **c**' is based on a grasp of the mathematical architecture linking **p** to **c**, the Poincaréan proof and its modus ponens counterpart are essentially different. For even though the warrant for 'if **p**, then **c**' may be based on a grasp of a mathematical architecture linking **c** with **p**, the modus ponens counterpart nonetheless *abstracts away from* this grasp of architecture itself and focuses instead on its net classical effect; that is, on the classical semantico-epistemic status (e.g., truth, certitude of truth, *a priori* certitude of truth, etc.) and logical form of the belief (viz., 'if **p** then **c**') which it warrants. It seeks to replace grasp of a mathematical architecture connecting **p** and **c** with *recognition of* its classical effects (i.e., the semantico-epistemic status and logical form of 'if **p** then **c**'). It treats grasp of an architect as merely the means by which the classical semantico-epistemic status of 'if **p**, then **c**' is established while viewing the semantico-epistemic status itself, rather than the means of establishing it, as the matter of primary epistemic importance.

This leads us to certain observations concerning the nature of what we are here referring to as 'logical proof'. The first is that, by an act of abstraction, it separates or detaches the net classical effect of a warrant or justification from that warrant or justification itself. It then replaces the actual grasp or comprehension of the underlying justification with *reflection on* the semantic or epistemic status thus abstracted from it. In addition to this, the 'net effects' with which it is concerned (e.g., truth, warrantableness, unwarrantableness, warrantableness to degree **n**, warrantableness with certainty, warrantableness *a priori*, and so on) show too little sensitivity to the particular characteristics of the war-

ranting processes producing them to be expected to distinguish a mathematical from a non-mathematical grasp of a connection between propositions in the Poincaréan sense. The 'logician' who would replace a Poincaréan proof with its modus ponens counterpart can have all the certitude or *a priori* certitude for his beliefs that Poincaré's mathematician does. Still, though he may enjoy the net classical effects of architectural grasp, and though those effects may be abstracted from that grasp, it is not that grasp itself (but, rather, a reflection on the *logical* connections between the propositions making up his inference, and how these connections provide for the transfer of the requisite classical semantico-epistemic attributes between these propositions) which guides his inference. Indeed, it is precisely this which is omitted through the core act of abstraction which gives rise to a 'logical' proof.

It is, of course, entirely natural that logic should abstract away from and, hence, be insensitive to, all but a very few characteristics of warrants. Otherwise, it could not achieve that universal scope of applicability which, by its very nature, logic is supposed to have. Thus, abstraction away from all but such relatively coarse epistemic features as truth and degree of certainty is programmed into logic by the very nature of its goals. As we hope the above remarks suggest, this programmed insensitivity is the point of departure of the Poincaréan's critique of attempts to 'logicize' genuinely mathematical proofs. Grasp of a mathematical universal linking **p** and **c** is not epistemically reducible to – and, hence, not epistemically replaceable by – reflection on its classical effects. This, as we see it, is the essential point behind the *principle of epistemic conservation*, which was identified earlier as a key feature of the Poincaréan conception of proof.

Thus, we see that the central epistemological categories of the Poincaréan conception of proof are to a significant extent different from those of the traditional 'logical' conception. It would, of course, be nice to provide a more illuminating description of those categories than that which is captured in such phrases as "grasping a mathematical universal" and "mathematical intuition". That, however, may not be possible since such notions may simply form the primitives from which a Poincaréan mathematical epistemology must proceed. But primitive or not, such categories appear to be necessary if, as Poincaréan epistemology would have it, we are to be able to account for the seeming differences separating the epistemic condition of the 'logician' from that of the genuine mathematician.

NOTES

* The author would like to thank the Alexander von Humboldt Foundation for its generous financial support. Thanks also to Dick Foley for useful comments on an earlier draft.

¹ Cf. Poincaré (1902, 1905, 1906, 1908, 1913), and Russell (1905, 1906). But though, historically speaking, Poincaré's debate was carried on with Russell, his ideas find a more striking and worthy opposite in the writings of Frege, whose philosophical defense of logicism I regard as superior to that of Russell's. For this reason, I will give Frege's ideas a prevalence that the reader might otherwise regard as surprising given Poincaré's seeming ignorance of them.

² This is a theme that is sounded repeatedly in Poincaré's writings. Cf. 1905, ch. 1 (in particular, pp. 13–26, 29–31, and 36–37); 1908, Intro., ch. 3, bk. I: chs. 2, 3, bk. II. Throughout this essay, English translations (along with accompanying page references) of passages from 1902, 1905, and 1908 are from the authorized translations of those works collected in Haisted. A propos 1913, the translation and pagination are from the translation by Bolduc.

³ Cf. Poincaré 1908, ch. 2, bk. II (p. 438, Haisted). These ideas of Poincaré's resonate with some of Brouwer's philosophical views. For more on this, see Detlefsen (1990).

⁴ Cf. Kitcher and Aspray, pp. 61–81.

⁵ Cf. Frege (1884, p. 23) where he cites the views of Leibniz with approval. Leibniz (cf. Bk. IV, ch. vii, par. 9) maintained that there is a "natural order of truths" that is not to be confused with the order of discovery or awareness or belief. Rather, the ordering of this "natural order" is an objective, metaphysical ordering wherein a given known truth is not only the basis of our judging another proposition to be true, but also the "cause" of that proposition's truth.

A reason is a known truth whose connection with some less well-known truth leads us to give our assent to the latter. But it is called a reason especially and *par excellence*, if it is the cause not only of our judgement but also of the truth itself. (Leibniz, bk. IV, ch. xvii, par. 3)

⁶ We say this despite the fact that Poincaré himself once made an unfavorable comparison between the views of Hermite and those of the so-called Cantorians (cf. 1913, pp. 72–74) on the grounds that the latter put too much emphasis on "epistemology" and not enough on "psychology". However, the "epistemology" of these remarks is not the epistemology of the present discussion; nor is the "psychology" the psychology which was opposed by the logicists. Rather, the "epistemology" is a radically anti-Kantian affair which denies that "all that we can know of [a reality that is exterior to and independent of us] depends on us" (cf. p. 74; brackets mine). Complementarily, the "psychology" consists in the recognition of a Kantian mental element (like the categories of thought) in knowledge.

⁷ On a simple subjectival typification, one starts with a sorting of propositions according to subject-matter, and then constructs an epistemic typification on that by sorting knowledge according to the subject-matter of its content. Thus, knowledge of a proposition *p* would be classified as belonging to a certain epistemic type just in case *p* were classified as belonging to a certain subject-matter. Applied to the case we're interested in – namely, mathematical knowledge – such a classification scheme would work like this: *p* is

mathematical knowledge just in case (i) *p* is known, and (ii) *p* is a proposition of mathematics.

Modifications of a subjectival typification can be obtained by modifying its non-subjectival clause. Thus, for example, one could obtain a modification of the above subjectively typified characterization of mathematical knowledge by altering clause (i) to require that *p* be known with certainty, and/or *a priori*. The principle of typification which we will suggest as a basis for Poincaréan epistemology belongs to this general category of modified subjectival typifications. That is, it treats subjectival considerations as necessary but not sufficient conditions for mathematical knowledge. Hence, it demands more of mathematical knowledge than simply that it be knowledge whose content is mathematical. It sees certain features of what might be called *noetic mode* as being as important a part of mathematical knowledge as content.

Its chosen variant of noetic mode, however, is not merely some combination of the classical ones mentioned above (i.e., certainty, and/or *a priori*). Indeed, it is different in spirit from such traditionally accepted properties of mathematical knowledge. For the traditionally accepted properties apply as well (and perhaps even better!) to logical knowledge as to what is more properly mathematical. Yet Poincaré's conception of noetic mode is intended to exclude logical knowledge. More on this later.

⁸ What Poincaré actually says (cf. 1908, ch. 3, bk. I (p. 385, Haisted)) is this: "if one can 'perceive at a glance the reasoning as a whole', then she 'need no longer fear lest [she] forget one of the elements for each of them will take its allotted place in the array' (brackets mine). Given the larger context in which this remark occurs, however, it is not altogether clear whether it is to be taken as stating the view expressed above, or a view according to which eliminating gaps in understanding leads to the elimination of logical gaps. We prefer our reading because it seems to fit better with Poincaré's belief in the essential non-logicality of mathematical reasoning. (Why, if mathematical reasoning is non-logical, should perfecting mathematical understanding lead to the elimination of logical gaps in a proof? And why should this be regarded as something desirable?)
⁹ The paragraph referred to is headed by the question "How is Pure Mathematics Possible?". The text is as follows:

Here is a great and established branch of knowledge, encompassing even now a wonderfully large domain and promising an unlimited extension in the future. Yet it carries with it thoroughly apodictic certainty, i.e. absolute necessity, which therefore rests upon no empirical grounds. Consequently it is a pure product of reason, and moreover is thoroughly synthetic. [Here the question arises:]
"How then is it possible for human reason to produce a cognition of this nature entirely *a priori*?"

¹⁰ By a Leibnizian form of logicism we mean a strong form of logicism which does not put set-theoretic principles like Frege's or type-theoretic principles like Russell's into the logical foundations. Rather, it claims to use only such immediately logical or analytical principles as the so-called law of identity and the principles of syllogism. Thus, Poincaré's fundamental opposition to logicism was not based on a suspicion of the less clearly analytic principles (e.g., axioms of comprehension, infinity and reducibility) that Frege and/or Russell put into their "logical" bases. Rather, it rested on what Poincaré regarded

as an unacceptable consequence of its success; namely, that the whole of mathematics would thereby be reduced to a body of 'tautologies'.

¹¹ Cf. also 1908, chs. III, IV (pp. 452, 462, Halsted).

¹² What is here, by inference, being termed the 'logical' conception of rigor might also be called the 'logist's' conception of rigor. This is so because it was introduced not for the sake of exposing and eliminating steps in our reasoning for which our mathematical understanding does not provide a warrant but, rather, to force all elements of that understanding out into the open so that their *logicality* might be determined. This is part of the logist's task, since he must show that every truth of mathematics can be established on purely logical grounds.

¹³ To put it another way, Poincaré's primary challenge to Russell and Cantor was not to defend the distinctively logist idea that the basic laws of mathematics are logical in a character but, rather, to defend the accompanying view (shared by many non-logicists as well) that the logicization of mathematical proof represents an ideal of mathematical rigor and, hence, something to which mathematical practice ought to aspire.

¹⁴ To my knowledge, Poincaré never gave another specific example of a distinctively mathematical form of inference. Still, he believed that there were kinds of intuition other than arithmetical (cf. his remarks on *analysis situs* in 1913, pp. 25ff.), and this suggests that the existence of other kinds of distinctively mathematical inferences would not be foreign to his thought. Indeed, he says (1908, Bk. II, ch. III, sec. III (p. 452, Halsted)) that he did not mean to suggest in his earlier writings that all mathematical reasoning can be reduced to induction, but only that it is the simplest example of the general type of reasoning that he has in mind, and that all other representatives of this kind share the same "essential characteristics". It may, however, be that he believed mathematical induction to enjoy a place of special distinction because of its newly confirmed "centrality" – a centrality made apparent by the impressive efforts of Dedekind and Weierstrass to "arithmetize" analysis. This moved (second-order Peano) arithmetic and, with it, (second-order) mathematical induction much closer to the center of the mathematical arena. Hence, it gave mathematical induction a certain prominence among mathematical forms of inference.

This may have been the reason why Poincaré made mathematical induction the focal case of a distinctively mathematical inference. Still, we should not lose sight of the fact that he also emphasized the fact that there are limitations to how fully the founding ideas and conceptions of topology and analysis can truly be arithmetized (cf. 1913, p. 29).

¹⁵ Though Frege sided with Leibniz on the nature of arithmetic, he sided with Kant on the nature of geometry, saying

... I consider Kant did a great service in drawing the distinction between synthetic and analytic judgements. In calling the truths of geometry synthetic and a priori, he revealed their true nature. And this is still worth repeating, since even today it is often not recognized. If Kant was wrong about arithmetic that does not seriously detract, in my opinion, from the value of his work. His point was that there are such things as synthetic judgements a priori; whether they are to be found in geometry only, or in arithmetic as well, is of less importance. (Frege 1884, pp. 101–102)

¹⁶ Roughly, the idea here is that if the number of basic laws is kept 'small', then there is less chance that any proper subsystem of them would amount to anything substantial

enough to be regarded as an autonomous domain of reasoning. Hence, removal of any one of them would effectively destroy reasoning as we know and think of it, and so *substantially* all of them would have to be involved in the proof of each theorem. Of course, for such argument to work, one has to make various auxiliary assumptions (e.g., that no basic law is used only in the derivation of a relatively small and/or unimportant portion of the entire system of theorems).

Another task that Frege seems not to have seen too clearly is the need to keep the basic laws of thought from being *too powerful*; specifically, from being powerful enough to serve as a basis for geometry as well as arithmetic. For if they were to become this powerful, then Frege would not be able to sustain his agreement with Kant concerning the synthetic *a priori* character of the laws of geometry, since the posited difference in revisability of geometrical and arithmetical laws could not then be accounted for. This may actually be a serious problem for Frege, since the 'science of number' for which he intends to provide a logist basis is apparently supposed to be strong enough to include such real number theory as would be necessary for an analytic version of geometry. Of course, one must be able to get the apt representation of spatially given continua and transformations thereupon by their analytically described counterparts. However, it is not clear – at least not to me – that this requires spatial intuition rather than what Frege would have regarded as purely conceptual thinking. But whatever the case, it seems clear that Frege owes us some explanation.

¹⁷ Something like this basic point holds for Russellian as well as for Fregean logicism. For Russell, too, intended his basic principles to be ubiquitously manifested features of rational thought, or at least of *mathematical* thought.

¹⁸ Could an emphasis like Poincaré's on the importance of locally distinguishing features of an area of thought perhaps be *combined with* an emphasis like the logist's on the ultimate reducibility of all local areas of thought to global principles of rational thinking? That is, might it be possible to have *both* a set of locally distinctive derived results *and* a globally valid set of ultimate axioms? The answer, I think, is 'No'. For assuming that the theorems were derivable using only globally valid principles of reasoning, as the logicians insist, they (i.e., the theorems) would be derivable from globally valid axioms using globally valid principles of inference. There is some intuitive force to saying that this would make the theorems globally valid, too. Still, I don't know how to prove such a claim generally, nor even in the case of Poincaréan epistemology. Allow me to explain.

If one assumes a Tarskian notion of consequence, the claim is easy to prove. For then a theorem resulting from the application of globally valid rules of inference to globally valid premises must itself be globally valid (i.e., true in every interpretation of its language).

One can even see how to put together a proof for someone like Frege who had a rather more epistemic conception of consequence. On his conception, a proposition is not to be identified with its set of models, as is the case in Tarskian semantics but, rather, with its set of ideally rational believing agents, where these agents are to be thought of as demarcated by the *a posteriori* and *synthetic a priori* information they have. Hence, a globally valid axiom is one that is believed by all ideally rational agents regardless of the *synthetic a posteriori* information they possess; and a globally valid principle of inference is one such that every ideally rational agent who believes its premise(s) will also believe its conclusion. It follows, therefore, that the conclusion of a globally valid inference with

globally valid premises will itself be globally valid (i.e., believed by all the ideally rational agents regardless of their *synthetic a posteriori* information).

Poincaré, too, had an epistemic notion of consequence, but it was radically different from Frege's. His epistemic states (or attitudes) were typed so that it is not only sheer preservation of belief per se but also preservation of belief-type that must be considered in connection with inference. Moreover, his epistemic types were more finely demarcated than those (viz. the *a priori* vs. the *a posteriori*) which Frege took over (with modification) from Kant. In particular, he seems to have had a category of distinctively mathematical information marked, at least typically, by its very lack of globality. Because of this, his epistemic conception of consequence would have to be radically different from that of the Fregean. For extending the Fregean conception would mean counting a conclusion as mathematically known if the premises were mathematically known and the inference taking one from the premises to the conclusion were logically valid (i.e., such that every ideally rational agent who believed the premises must also believe the conclusion). This is so because the mathematical believers would form a subset of the class of ideally rational agents and, hence, would form the class of believers of the conclusion, making (on the Fregean conception) the conclusion a mathematical belief... contrary to the way Poincaré seemed to think of things. Hence, on Poincaré's scheme it does not seem possible to represent a mathematical belief simply as (a belief shared by) the (or a) class of mathematical believers, as is suggested by the Fregean model. Indeed, it seems as if mathematical knowers might best be represented as believers *lacking* certain beliefs (e.g., those not marked by a distinctively local validity). If this is so, then the correctness – may, even the coherence – of the idea that the application of globally valid rules of inference to globally valid premises guarantees globally valid conclusions is unclear. For there is seemingly no convincing way to argue for a connection between non-belief in P and non-belief in (P, Q) (i.e., an inference from P to Q), on the one hand, and non-belief in Q, on the other. Hence, as was remarked earlier, there is no way to show in general that the application of globally valid principles of inference to globally valid premises results in globally valid conclusions. Specifically (and ironically), there is no way of doing so for the Poincaréan viewpoint.

¹⁹ As was noted above, in the view of both Leibniz and Frege there is an objective, metaphysical ordering of the truths of mathematics. According to them, one's epistemic mastery of a subject is optimal when she grasps the objective relation which orders its truths. Correspondingly, truths are epistemically mastered when their place within the objective hierarchy is determined, and those proofs are epistemically optimal which display that segment of the hierarchy connecting the truth being proved with the foundational – globally valid – truths. Similar views are espoused in Aristotle (cf. Book I, chs. 1–3) and Bolzano (cf. paras. 198, 401 and 525).

²⁰ It should perhaps be noted that Poincaré's opposition to logicism would therefore extend even to such neologicist programs as might give up claiming analyticity for the axioms, but still obliterate the 'local' structure of mathematical reasoning.

²¹ When more than one premise is involved, I am assuming that the point would be this: the concluding sentence produced by applying an analytic form of inference would have to be equivalent either to one of the premises or to some conjunction of them.

²² When we speak of a conclusion of an inference expressing a different proposition from its premises, what we mean is that it does not express the same proposition as is expressed by any conjunction of its premises.

²³ Cf. secs. 36–37 of Kant's *Logic*.

²⁴ The logicist is, of course, also committed to the use of logical inference in mathematical proof. Nor is this only a reflection of his general belief in the homogeneity of rational thought, for he also takes it as necessary for attaining the kind of rigor he requires of his proofs. His proofs must be conducted in such a way as to eliminate the threat of non-logical assumptions surreptitiously entering his inferences. Hence, his inferences must themselves be of a logical character.

²⁵ Cf. Poincaré (1905, ch. I (pp. 217–18, Häksted)) for a similar point.

²⁶ How about an example of an 'architecture'? The only one that Poincaré himself provided is that concerning the natural numbers. Grasping the architecture of the natural numbers supplies one with that form of inference which Poincaré regarded as mathematical reasoning *par excellence* – namely, mathematical induction. However, this kind of architecture (which may be thought of as the architecture of a domain of *objects*) is at least conceptually distinguishable from an architecture of a field of thought (which is a family of *results*, not objects). Poincaré did not explicitly distinguish these two kinds of architectures, and this despite the fact that much of what he said seems to depend on there being such a distinction. Perhaps this was because the two types of architectures are clearly related, and that it is architectures of results that are of ultimate concern to an epistemology such as his. Architectures for domains of objects will typically induce inferential ordering of propositions effected by mathematical induction – an inferential ordering of propositions that is only made possible by the inductive ordering of the natural numbers. Whether all inferential orderings are ultimately based on some feature of an object ordering is a difficult question, and one that we do not know how to answer. But it seems clear that we would have no reason to pay less attention to architectures on domains of results that might arise from other sources.

²⁷ This conception of inference treats the universal $U_{1,1}$ as at least including (if not being literally identical with) a set Σ of 'stages' or 'positions' of its realization, together with an ordering (or partial ordering) O defined on Σ . Thus, when the two universals $U = U_{1,1}$ and $U' = U_{1,1'}$ are identified, this means (at least) that $\Sigma = \Sigma'$ and $O = O'$.

²⁸ And, it is by no means clear that it does, since that depends on whether there is some essential feature common to all mathematical architectures. It might be instead that the various branches of mathematics each have a distinctive architecture of their own, and that each therefore gives rise to its own theory of inference. This is in keeping with what Poincaré has to say about mathematical reasoning since his point is simply that the mathematician always makes use of *some* local architectural knowledge or 'intuition' in her inferences, not that she always makes use of the *same* one. On this view, one would have to rely on something like a notion of 'family resemblance' to account for any commonality that might be thought to bind mathematical reasoning together as a whole, since one seems to be dealing with a similarity that is not metrizable (on pain of collapsing the local distinctions in question).

²⁹ It may be that a logical architecture is distinguishable primarily by what it lacks rather than what it has. That is, its only distinguishing features may be its preservation of such relatively coarse epistemic features as *a priori* and/or approximate degree of certainty, and its attempt to base a metric for epistemic development or 'advance on a *semantic* criterion for individuating propositions.

³⁰ The only thing like a general theory of inference would be the general account of the basic elements or structure of inference sketched above. But that is not what we're thinking of as a general theory of inference. The general account of the structure of

inference only says that every inference makes use of an architecture, and a way of parsing and ordering that architecture into stages of 'development'. But it does not presume any significant commonality either among the architectures or the scheme of stages associated with each. What we are referring to as a general *theory* of inference would do precisely that.

³¹ This is in addition to the fact that all inference is also synthetic in the sense that it involves uniting (possibly) several premises into a single 'message' (the conclusion).

³² If the ability in question is understood in such a way as to stify infallibility, the condition would also be too strong. In mathematics, as elsewhere, development can include some false starts. Thus, allowance must be made for a kind of grasp of architecture which does not rule out the possibility of false starts, but which nonetheless gives one *some* guidance. Architectural grasp thus appears to admit of degrees. Hence, in the final analysis, Poincaréan epistemology may also produce a conception of mathematical knowledge which admits of degrees.

³³ It is trickier because at some point it becomes hard to see the difference between doing mathematics poorly and not doing it at all. Just as, I suppose, there comes a point where it is hard to make out a difference between one who plays chess very poorly and one who doesn't really play it at all. The clearest cases of not playing chess are probably where either the rules for moving the pieces are broken, or where one does not play according to the goals of the game (e.g., where one would seek to put himself into checkmate rather than his opponent). But one can approach, in effect, the latter of these paradigmatic failures simply by being a consummately poor strategist. There comes a point where one's strategy is so bad that it is *as if* her intention were to make herself. (There would, of course, be a difference in the intentions of the poor strategist and the chooser of false goals. However, that may only tell us that there is a difference between actually playing chess and sincerely intending to.) Perhaps the same is true of mathematics (as conceived by the Poincaréan) – there may come a point where one's choice of strategies is so poor that there is no meaningful difference between doing mathematics poorly and not doing it at all.

³⁴ Actually, it doesn't even mean that. For failure to do as well as might have been done might be due to poor execution of the strategy selected rather than poor choice of strategy.

³⁵ There may, of course, be no such thing as *the* set of propositions upon which *C* rests. The same, however, is true of the axiomatic approach, since it does not guarantee existence of a single, unique proof of any theorem and, indeed, in some cases (e.g., cases where the theory is not finitely axiomatizable, where not every axiom is used in every proof, or where the axioms of the theory are not independent), a *plurality* of proofs may be necessitated. We should also like to point out that though we speak here as if inferences are composed of propositions, we are not officially committing ourselves to such a view. What we have to say could be made to fit as well with conceptions of inference which see it as composed of beliefs or judgments. Such an alteration would only force us to speak of the relationship between the contents of the various beliefs or judgments making up an inference.

³⁶ Modifying this to say that it is a means of extending the ability of one to determine a *priori* truth-value from one proposition to another does not change the view for our purposes. For just as the Poincaréan would insist that there is more to mathematical knowledge than merely determining the truth-value of a mathematical proposition, so, too, would she insist that there is more to mathematical knowledge than, say, the certain

determination, or the *a priori* determination with certitude, of the truth-value of a mathematical proposition. No such modification shows any promise as a means of capturing what Poincaré seems to have had in mind by grasp of an architecture. Thus, viewed from the vantage of the categories of classical mathematical epistemology, Poincaré's notion of grasping an architecture appears to be a primitive notion.

REFERENCES

- Aristotle: 1975, *Posterior Analytics*, trans. with notes by Jonathan Barnes, Clarendon Press, Oxford.
- Bolzano, B.: 1973, *Theory of Science*, ed. with an introd. by Jan Berg, English trans. by Burnham Terrell, D. Reidel, Dordrecht.
- Detlefsen, M.: 1990, 'Brouwerian Intuitionism', *Mind* 99, 501–34.
- Frege, G.: 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik*, in *The Foundations of Arithmetic*, trans. by J. L. Austin, Basil Blackwell, Oxford [reprint 1950].
- Frege, G.: 1893, *Grundgesetze der Arithmetik*, Vol. I, H. Pohle, Jena.
- Frege, G.: 1967, *The Basic Laws of Arithmetic*, English trans. by M. Furch of parts of Frege 1893, University of California Press, Los Angeles.
- Goldfarb, W.: 1988, 'Poincaré Against the Logicians', in Kitcher and Aspray, pp. 61–81.
- Haisted, G.: 1946, *The Foundations of Science*, authorized trans. of Poincaré's *Science and Hypothesis*, *The Value of Science*, and *Science and Method*; special preface by Poincaré with introd. by Josiah Royce, The Science Press, Lancaster PA.
- Kant, I.: 1974, *Logic*, English trans. with introd. by R. Hartman and W. Schwarz, Bobbs-Merrill, Indianapolis.
- Kant, I.: 1977, *Prolegomena to any Future Metaphysics*, Carus trans., revised by J. W. Ellington, Haackert, Indianapolis.
- Kitcher, P. and W. Aspray (eds.): 1988, *History and Philosophy of Modern Mathematics*, University of Minnesota Press, Minneapolis.
- Leibniz, G.: 1982, *New Essays on Human Understanding*, trans. and ed. by P. Remnant and Jonathan Bennett, Cambridge University Press, Cambridge.
- Poincaré, H.: 1902, *La Science et l'Hypothèse*, Ernest Flammarion, Paris.
- Poincaré, H.: 1905, *La valeur de la science*, Ernest Flammarion, Paris.
- Poincaré, H.: 1906, 'M. Poincaré's *Science et l'hypothèse*', *Mind* 15, 141–43. (This is a reply to Russell 1905.)
- Poincaré, H.: 1908, *Science et méthode*, Ernest Flammarion, Paris.
- Poincaré, H.: 1913, *Dernières pensées*, Ernest Flammarion, Paris [trans. by J. W. Bolduc as *Mathematics and Science: Last Essay*, Dover, New York, 1963].
- Russell, B.: 1903, *The Principles of Mathematics*, George Allen and Unwin, London.
- Russell, B.: 1905, 'Review of *Science and Hypothesis* by H. Poincaré', *Mind* 14, 412–18.
- Russell, B.: 1906, 'Rejoinder to Poincaré [1906]', *Mind* 15, 143.

Dept. of Philosophy
University of Notre Dame
Notre Dame, IN 46556
U.S.A.

