



Analyse et manipulation d'objets discrets

Phuc Ngo

► To cite this version:

Phuc Ngo. Analyse et manipulation d'objets discrets. Informatique. Université de Lorraine, 2022. tel-03920382v2

HAL Id: tel-03920382

<https://hal.science/tel-03920382v2>

Submitted on 1 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse et manipulation d'objets discrets

Digital shape analysis and manipulation

MÉMOIRE

Soutenue le 19 décembre 2022

pour l'obtention d'une

**Habilitation à Diriger des Recherches
de l'Université de Lorraine**

en informatique

par

Hoai Diem Phuc Ngo

Composition du jury

Présidente :

Laure TOUGNE RODET

Professeure, LIRIS, Université Lyon 2

Rapporteurs :

Laurent WENDLING

Professeur, LIPADE, Université Paris Descartes

Éric ANDRÈS

Professeur, XLIM, Université de Poitiers

Jacques-Olivier LACHAUD

Professeur, LAMA, Université de Savoie

Examinatrice & Examineurs :

Isabelle DEBLED-RENNESSON

Professeure, LORIA, Université de Lorraine

Fabien FESCHET

Professeur, LIMOS, Université Clermont Auvergne

David COEURJOLLY

Directeur de Recherche, LIRIS, CNRS

Mis en page avec la classe thesul.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Définitions introductives de géométrie et topologie discrète	7
2.1	Pavage et espace discrets	7
2.2	Connexité et courbes discrètes	8
2.3	Processus de discrétisation	9
3	Aspects topologiques et géométriques de mouvement rigide sur $\mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z}^3$	13
3.1	Contexte et problématique	14
3.2	Notions de base	17
3.2.1	Image numérique	17
3.2.2	Topologie discrète et image bien composée	17
3.2.3	Convexité discrète	19
3.2.4	Mouvement rigide discrétisé	21
3.3	Travaux existants	23
3.4	Apports	27
3.5	Caractérisations topologiques	29
3.5.1	Invariant topologique	29
3.5.2	Régularité	31
3.5.3	Caractérisation d'images régulières	35
3.5.4	Régularisation d'images	36
3.5.5	Expérimentations	38
3.5.6	Discussion : Extension en 3D	43
3.6	Caractérisations géométriques	44
3.6.1	Quasi- r -régularité	44
3.6.2	Caractérisation du polygone quasi-régulier	47
3.6.3	Modèle de transformation basé sur des polygones	52
3.6.4	Modèle de transformation basé sur l'axe médian	57
3.7	Expérimentations	57

3.7.1	Préservation de la convexité	59
3.7.2	Extension aux objets non convexes	59
3.8	Extension de la quasi- r -régularité en 3D	64
3.9	Généralisation de la quasi- r -régularité	70
3.10	Conclusion et perspectives	71
4	Outils d'analyse des courbes discrètes bruitées	75
4.1	Introduction	76
4.2	Notions de base	79
4.2.1	Droite et segment discrets	79
4.2.2	Segment flou	81
4.2.3	Estimation d'échelle et d'épaisseur significatives	82
4.3	Analyse géométrique des courbes bruitées	87
4.3.1	Couverture tangentielle d'épaisseur ν	88
4.3.2	Couverture tangentielle adaptative	90
4.3.3	Estimateurs géométriques des courbes discrètes	92
4.3.4	Extension aux courbes 3D bruitées	99
4.4	Applications pour l'analyse et la représentation de formes	107
4.4.1	Détection des points dominants	108
4.4.2	Représentation polygonale	112
4.4.3	Décomposition de courbe en arcs et segments	115
4.4.4	Vectorisation d'images	119
4.4.5	Reconnaissance des gestes de la main	121
4.5	Balayage directionnel et applications	124
4.5.1	Définitions	124
4.5.2	Détection des segments épais dans des images en niveaux de gris	125
4.5.3	Extraction de structures linéaires dans les données LiDAR brutes	127
4.6	Conclusion et perspectives	136
5	Traitement et analyse d'images du bois	141
5.1	Introduction	141
5.2	Extraction des caractéristiques du bois dans des images de grumes	144
5.2.1	Contexte et problème	144
5.2.2	Détection de la moelle	147
5.2.3	Filtres directionnels pour l'analyse des cernes	150
5.2.4	Segmentation du duramen	158
5.2.5	Expérimentations	163

5.3	Extraction automatique des défauts sur écorce de troncs d'arbres	169
5.3.1	Contexte et travaux existants	169
5.3.2	Outils géométriques	172
5.3.3	Carte de reliefs de la surface du tronc	175
5.3.4	Segmentation automatique de défauts externes	178
5.3.5	Expérimentations	182
5.4	Conclusion et perspectives	182
6	Conclusion et perspectives	189
6.1	Synthèse des contributions	189
6.2	Perspectives et projets de recherche	191
A	Liste de publications	195
B	Curriculum vitae	201
B.1	Résumé	202
B.1.1	État civil	202
B.1.2	Formation universitaire	202
B.1.3	Parcours professionnel	202
B.1.4	Autres expériences	202
B.2	Activités pédagogiques et administratives	204
B.2.1	Enseignements réalisés	204
B.2.2	Responsabilités pédagogiques	205
B.2.3	Activités administratives	205
B.3	Activités liées à la recherche	205
B.3.1	Projets de recherche	205
B.3.2	Expertises scientifiques	207
B.3.3	Participation aux groupes de travail	207
B.3.4	Responsabilités scientifiques	208
B.3.5	Séminaires et exposés	208
B.3.6	Diffusion logicielle	208
B.4	Encadrements de la recherche	209
B.4.1	Co-encadrement de post-doctorat	209
B.4.2	Co-encadrements de thèses	210
B.4.3	Co-encadrements de Master 2	212
B.4.4	Autres encadrements	214
	Références externes	217

Table des figures

1.1	Différents types d'intersection entre deux droites discrètes non parallèles	2
2.1	Différents pavages régulières avec la représentation duale par maillage	8
2.2	Objet discret avec sa grille en 2D et 3D	8
2.3	Différents voisinages sur la grille de \mathbb{Z}^d	9
2.4	Exemple de courbe discrète correspondant au contour d'objet	10
2.5	Différents modèles de discrétisation : IGQ, BBQ et OBQ	10
2.6	Discrétisation de Gauss en 2D/3D avec la représentation par pixels/voxels	11
2.7	Illustration de l'altération topologique par la discrétisation de Gauss	11
3.1	Illustration de l'altération topologique par un mouvement rigide discrétisé	15
3.2	Exemple de l'altération topologique et géométrique des objets discrets par mou- vements rigides discrétisés	16
3.3	Une image rétinienne binaire (a) et l'image résultante par mouvement rigide (b) ne préserve ni la topologie ni la géométrie	16
3.4	Exemple d'images binaires (non) bien composées	19
3.5	La convexité définie sur \mathbb{R}^2 n'est pas utilisable sur \mathbb{Z}^2 du fait de la discrétisation	20
3.6	Exemples de non injectivité et de non surjectivité de mouvement rigide discrétisé	22
3.7	Illustration des effets de l'interpolation sur images binaires par une rotation de 5°	24
3.8	Illustration des effets de l'interpolation sur image en couleur par des rotations aléatoires successives	25
3.9	Exemple d'objets (non) r -réguliers en 2D et 3D	26
3.10	Exemples de la r -demi-régularité, r -régularisation et r -stabilité	27
3.11	Illustration du problème géométrique du modèle de transformation point par point	28
3.12	Exemple de l'arbre d'adjacence associé à l'image binaire et ses composantes connexes	30
3.13	Exemples d'image singulière et faiblement-composée, singulière et bien composée, ni singulière ni bien composée, et non singulière mais bien composée	31
3.14	Exemples de l'image régulière et l'image 1- ni 0-régulière	32
3.15	Les configurations interdites de $\mathcal{WC}_{\mathbb{B}}$ et de $\mathcal{REG}_{\mathbb{B}}^0$	35
3.16	La détection des configurations interdites (\mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3) à la régularité, et les résultats après régularisation homotopique itérative	39
3.17	La régularisation des images bien composées (binaire, en niveaux gris et couleur) par sur-échantillonnage	40
3.18	Résultat de la régularisation de l'image en niveaux de gris par sur-échantillonnage	42
3.19	Résultat de la régularisation de l'image étiquetée par sur-échantillonnage	42
3.20	Un contre-exemple à la préservation de la topologie d'objet régulier 3D soumis à un mouvement rigide	43

3.21	Un autre contre-exemple de l'invariant topologique d'image régulière en 3D . . .	44
3.22	Exemple d'objets (non) quasi-1-réguliers	45
3.23	La construction de $P_{\square}(X) \subset \mathbb{R}^2$ de $X \subset \mathbb{Z}^2$, et de $P_{\square}(X_2)$ avec X_2 est l'objet sur-échantillonné de X par un facteur 2	46
3.24	Exemple de polygones (non) quasi-1-réguliers discrets	48
3.25	Contre-exemple d'un polygone quasi- r -régulier mais pas quasi- r -régulier discret. .	49
3.26	Exemples de polygone quasi régulier et non quasi régulier	52
3.27	Modèle de transformation basé sur des polygones	53
3.28	La représentation par demi-plans d'un objet discret H-convexe	54
3.29	Une séquence de mouvements rigides $\mathcal{R}_{\text{Conv}}$ sur un objet discret convexe $X \subset \mathbb{Z}^2$.	56
3.30	Modèle de transformation basé sur l'axe médian	58
3.31	Discrétisation de Gauss d'objet discret par la décomposition en parties convexes .	62
3.32	Objets discrets non convexes utilisés pour les expérimentations de la <i>Section 3.7.1</i> .	63
3.33	La décomposition en parties convexes du polygone issu des objets de la <i>Figure 3.32</i> et sa discrétisation de Gauss	64
3.34	Exemple de l'arbre de concavités construit à partir de ces polygones non convexes d'un objet discret	65
3.35	Comparaisons entre $\mathcal{R}_{\text{Point}}$ et $\mathcal{R}_{\text{Poly}}$ pour les objets de la <i>Figure 3.32</i> sur les deux mesures géométriques : l'aire et le périmètre	65
3.36	Illustration de l'altération topologique et géométrique par mouvement rigide discrétisé en 3D	66
3.37	Un objet H-convexe X dont $\text{Conv}(X)$ est quasi-1-régulier, et le résultat de transformation par $\mathcal{R}_{\text{point}}$ et $\mathcal{R}_{\text{Conv}}$	69
3.38	La décomposition des objets non convexes en ensembles H-convexes et quasi-1-réguliers et le résultat de la transformation par $\mathcal{R}_{\text{point}}$ et $\mathcal{R}_{\text{Conv}}$	69
3.39	Mouvement rigide préservant le type d'homotopie avec les complexe cellulaire . .	74
4.1	Exemples des caractères scannés à différentes résolutions avec leur contours extraits des images correspondantes	76
4.2	Exemples de couverture tangentielle des courbes extraites du contour de l'objet .	77
4.3	Exemples de droites discrètes : droite naïve, droite standard et droite épaisse . .	80
4.4	Exemple de la couverture tangentielle du contour C de l'objet dans la <i>Figure 4.2</i>	81
4.5	Exemples de la droite englobante optimale et le segment flou maximal	82
4.6	Illustration du calcul de la longueur des segments maximaux	84
4.7	Exemples de profils multi-échelles sur deux images irrégulièrement bruités	85
4.8	Détection de bruit par échelles significatives	86
4.9	Exemple de profils multi-épaisseurs sur un contour irrégulièrement bruité	86
4.10	Comparaison des profils multi-échelles et multi-épaisseurs	87
4.11	Comparaison entre échelles et épaisseurs significatives	88
4.12	Exemples de couverture tangentielle sur une forme bruitée	89
4.13	Exemple de la couverture tangentielle adaptative pour la courbe C de la <i>Figure 4.5</i>	91
4.14	Illustration de l' <i>Algorithme</i> de construction de la couverture tangentielle adaptative	93
4.15	Images de tests.	94
4.16	ATC_{MT} calculée sur les contours extraits des formes de la <i>Figure 4.15</i>	95
4.17	Illustration du principe de l'estimateur λ -MST défini à partir de l'ATC.	96
4.18	Résultat de l'estimateur de la tangente λ -MST avec ATC_{MT}	97
4.19	Résultat du détecteur de parties convexes et concaves des formes de la <i>Figure 4.15</i>	98
4.20	Exemples de droites discrètes 3D en 6- et 26-connexe	100

4.21	Exemple de la couverture tangentielle d'épaisseur ν en 3D	101
4.22	Exemple de l'ATC 3D sur une courbe sans et avec bruit	101
4.23	Exemple de l'ATC 3D sur une courbe bruitée avec la valeur maximale et le médian de bruits détectés sur les trois plans de projection	102
4.24	Exemple de reconnaissance de segment flou avec les plans de projection	103
4.25	Estimateur de la tangente λ -MST 3D définie à partir de l'ATC 3D de la courbe de la <i>Figure 4.22</i>	104
4.26	Estimateur de la tangente λ -MST 3D sur une courbe Flower bruitée	105
4.27	Estimateur de la tangente λ -MST 3D sur une courbe Astroid bruitée	106
4.28	Exemple de la détection de points dominants sur une courbe \mathbf{C} avec 2.5-TC	109
4.29	Amélioration de résultats par rapport à la méthode de Nguyen	111
4.30	Illustration de l'algorithme de détection des points dominants avec la couverture tangentielle adaptative dans la <i>Figure 4.14</i>	112
4.31	Comparaison de la détection des points dominants avec $\bar{\eta}$ -TC et ATC_{MT}	112
4.32	Exemple de calcul du poids pour les points dominants dans la <i>Figure 4.28</i>	114
4.33	Comparaison de la simplification polygonale avec $\bar{\eta}$ -TC et ATC_{MT}	116
4.34	Représentation par l'espaces de tangentes $E(\mathbf{P})$ de \mathbf{P}	117
4.35	Classification des points centraux dans l'espace des tangentes.	118
4.36	Processus de décomposition en arcs et segments d'un contour discret.	119
4.37	Décomposition en arcs et segments des courbes bruitées	119
4.38	Extraction d'isocontours de l'image et l'échantillonnage de points résultants	120
4.39	Processus de vectorisation d'une image.	120
4.40	Différentes techniques de reconstruction pour la vectorisation d'images.	121
4.41	Résultats de la méthode de vectorisation proposée sur l'image Lena avec trois différents algorithmes de polygonalisation.	122
4.42	Images de profondeur isolées des gestes de chiffres et d'alphabets de la langue des signes américaine	123
4.43	Processus de reconnaissance des gestes de la main.	123
4.44	Exemples de balayage directionnel et balayage directionnel adaptatif	125
4.45	Processus de la détection de segment épais.	126
4.46	Comparaison de la détection de segments sur l'une des 102 images de la base de données York Urban	127
4.47	Processus d'extraction automatique de routes forestières.	129
4.48	Illustration du processus d'extraction de routes forestières	130
4.49	Intégration du nuage de points 3D du LiDAR dans une grille \mathcal{G}	131
4.50	Modèle de route forestière à partir d'un profil altimétrique	131
4.51	Résultats de la détection des routes forestières sur le secteur Grand-Rupt	133
4.52	Modèle de structure en forme de crête à partir d'un profil altimétrique.	134
4.53	Détection de structures curvilignes en forme de crête	135
4.54	Analyse de la structure de l'ancien mur médiéval	136
4.55	Exemples d'ATC avec le détecteur d'épaisseurs significatives des contours discrets de différents formes	137
4.56	Exemples de courbes 3D pour l'analyse des caractéristiques géométriques	138
4.57	Exemples de segmentation de surface discrète en plans discrets naïfs	139
4.58	Illustration de l'approche locale sectorielle sur une surface concave par un décou- pages en secteurs planaires avec différentes épaisseurs	140
5.1	Exemple d'images de sections transversales de grume	142

5.2	Exemples de défaut du bois : cicatrices de branches, picot et broussin	144
5.3	Exemple d'images issues d'un scanner à rayon X	145
5.4	Caractéristiques géométriques et biologiques sur image d'extrémité de la grume .	146
5.5	Exemples d'images obtenues dans une zone de stockage des bois	147
5.6	Processus d'extraction de la moelle sur l'image de grume.	148
5.7	Suppression des marques de sciage et estimation des orientations locales	149
5.8	Exemple de segment droit épais	152
5.9	Construction des segments droits à partir de l'arbre de Stren-Brocot	152
5.10	Illustration du calcul des segments naïfs les plus longs en un point donné	155
5.11	Estimateurs géométriques sur image binaire calculés à partir du filtre directionnel	156
5.12	Architecture de l'U-Net pour la segmentation sémantique	160
5.13	Modèle proposé de la porte d'attention morphologique	162
5.14	Nouvelle architecture pour la segmentation du duramen basée sur l'U-Net	163
5.15	Détection de la moelle sur des images brutes des extrémités de grume	164
5.16	Images binaires de test pour les estimateurs géométriques avec les filtres directionnels	166
5.17	Extraction des caractéristiques géométriques sur images binaires avec les filtres directionnels	166
5.18	Comparaisons des estimations d'orientation locale sur des images en niveaux de gris avec les filtres directionnels	168
5.19	Comparaisons des filtres directionnels sur une image réelle	168
5.20	Exemples de données pour la détection du duramen. La première ligne est constituée d'images du jeu de données <i>logyard</i> . La deuxième ligne est du jeu de données <i>sawmill</i>	169
5.21	Détection des défauts à la surface de tronc d'arbres	170
5.22	Illustration de l'algorithme de calcul de la ligne centrale	173
5.23	Extraction de la ligne centrale à partir d'un maillage	173
5.24	Illustration de changement de coordonnées Cartésiennes en cylindriques avec la ligne centrale	175
5.25	Exemple de calcul de distance delta à partir d'un patch local	175
5.26	Exemples de la carte de reliefs calculée avec la distance de référence et la distance delta	177
5.27	Illustration de l'analyse multi-résolution sur la carte de reliefs	177
5.28	Exemples de carte de reliefs	178
5.29	Pipeline de la méthode proposée pour segmenter des défauts externes	179
5.30	Architecture utilisée pour la détection des défauts externes basée U-Net	180
5.31	Illustration de la génération d'images pour l'entraînement du réseau	181
5.32	Exemples de données d'entraînement.	181
5.33	Résultats de la détection de zone de défauts externes	182
5.34	Exemples d'estimation erronée de la moelle (croix verte) par la méthode proposée.	184
5.35	Images extraites des images d'extrémités de la grume	184
5.36	Exemples de filtre directionnel sur image contenant des cercles de croissance . . .	184
5.37	Détection des cernes de croissance avec une analyse de profil	185
5.38	Exemples de cartes de normales de tronc d'arbres	186
5.39	Exemples de défauts de tronc d'arbres avec la carte de reliefs et de normales . . .	187
B.1	Responsabilités pédagogiques et administratives	203
B.2	Activités de recherches	203
B.3	Publications et communications	203

Liste des tableaux

3.1	Expérimentation de préservation de la géométrie et de la topologie sur un disque	60
3.2	Expérimentation de préservation de la géométrie et de la topologie sur un carré	61
4.1	Différents niveaux de bruit détectés par l'estimateur MT	94
4.2	Comparaison des différents estimateurs de tangente	97
4.3	Résultat d'estimateur de longueur des formes	99
4.4	Mesure d'erreurs de l'estimateur de la tangente λ -MST 3D	106
4.5	Mesure d'erreurs de l'estimateur de courbures 3D	107
4.6	Comparaisons de la reconnaissance des gestes de la main avec d'autres méthodes sur le jeu de données NTU	124
4.7	Comparaisons de résultats de la détection de segments avec d'autres méthodes sur le jeu de données York Urban	127
4.8	Mesures de performance de l'extraction des routes forestières.	134
5.1	Comparaison du nombre de paramètres utilisés dans différentes architectures.	162
5.2	Comparaison de résultats de la détection de la moelle avec d'autres méthodes	164
5.3	Comparaison de MCC scores par validation croisée de différentes architectures sur les deux jeux de données : Logyard et Sawmill.	169
5.4	Comparaison de résultats de détection de défauts d'écorce de tronc d'arbres.	183
A.1	Récapitulatif des publications dans les revues et conférences internationales.	195
B.1	Récapitulatif des différents enseignements effectués par année.	204
B.2	Récapitulatif des encadrements de post-doc, thèse et Master 2.	209

Liste des algorithmes

1	Vérification de la quasi-régularité de polygones basée sur l'axe médian.	51
2	Calcul de la couverture tangentielle adaptative.	92
3	Détection des points dominants avec la mesure d'angle.	110
4	Simplification polygonale automatique à partir des points dominants.	115
5	Détection d'un plateau de route forestière.	132
6	Calcul des segments les plus longs en un point (dans le premier octant).	153
7	Calcul de la suite de Stern-Brocot	154
8	Calcul d'image érodée par le filtre directionnel (dans le premier octant).	157

1

Introduction

Ce mémoire, rédigé dans le but d’obtenir l’Habilitation à Diriger des Recherches de l’Université de Lorraine, présente le bilan des travaux de recherche que j’ai effectués après ma thèse (2013), ainsi que les travaux depuis mon arrivée au LORIA (Laboratoire Lorrain de Recherche en Informatique et ses Applications) en 2014. Ces recherches se situent dans le domaine de la géométrie discrète et de l’analyse d’images numériques. Elles s’inscrivent, d’une part, dans la continuité des travaux réalisés pendant ma thèse au LIGM (Laboratoire Informatique Gaspard Monge) – Université Paris-Est, et d’autre part, dans les axes de recherche de l’équipe ADAGIo (Algorithmique Discrète et ses Applications à la Génomique et à l’Imagerie) du LORIA, au sein de laquelle je travaille depuis mon recrutement sur le poste de maître de conférences.

Avec la disponibilité croissante des systèmes d’acquisition, le nombre de données numériques a augmenté très vite au cours des dernières années. Parmi elles, la production d’images numérique. Ces données diffèrent des données continues de par leur nature discrète, à savoir leurs valeurs numériques. De tels objets sont, généralement, stockés, traités et manipulés par ordinateur qui est, lui-même, une machine discrète dans laquelle des notions telles que le continu ou l’infini sont hors de portée. Ce sont les débuts de la *géométrie discrète* en informatique. Il s’agit de la branche des mathématiques qui a pour but de développer un cadre formel – une modélisation géométrique – pour l’étude d’objets discrets, en essayant de conserver une analogie avec la géométrie euclidienne. De telles études ne sont pas seulement théoriques, mais ont aussi des applications pratiques, par exemple dans l’analyse et le traitement d’images numériques dans lesquels les images peuvent être vues comme un ensemble de *pixels/voxels* représenté par des points discrets de $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^3$.

Dans le cadre de mes travaux, je me suis intéressée aux objets discrets définis dans un sous-espace discret fini de \mathbb{Z}^d . Il faut savoir que ces objets ont des propriétés et comportements très différents de ceux des objets euclidiens de \mathbb{R}^d . Un exemple typique, une droite D dans un plan 2D est un objet *infinitement fin* et se compose d’un *ensemble infini* de points défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}.$$

Une droite discrète D est le résultat de la *numérisation/discrétisation* de D dans l’espace

discret de \mathbb{Z}^2 qui peut se déterminer¹ par l'ensemble de points entiers :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq ax + by + c < \omega\}.$$

Sur l'écran d'ordinateur, D est représentée par un ensemble d'entités élémentaires, aussi appelés *pixels*. En géométrie euclidienne, il est bien connu que deux droites non parallèles du plan s'intersectent en un unique point. Cependant, dans l'espace discret, cette affirmation n'est pas toujours vraie comme illustrée dans la Figure 1.1.

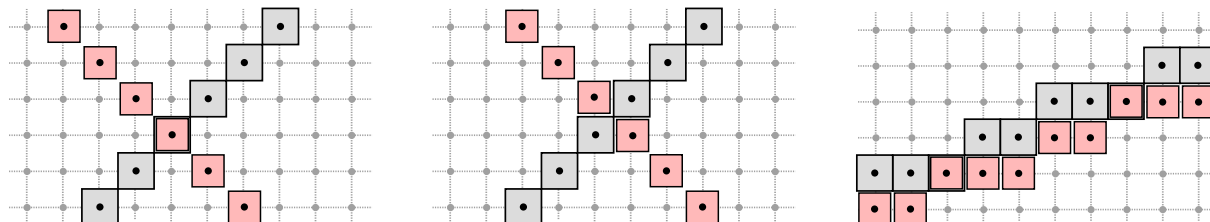


FIGURE 1.1 – L'intersection entre deux droites discrètes non parallèles peut être composée d'un point (gauche), d'aucun point (milieu) ou d'un ensemble de points (droite).

Afin de s'affranchir des contraintes spécifiquement liées aux espaces discrets des images numériques, il devient nécessaire d'introduire des nouvelles notions ainsi qu'un cadre théorique – l'aspect géométrique et topologique – appropriés à la nature discrète de données/objets à traiter. Il est aussi important de développer de nouvelles approches pour la modélisation et le traitement de ces objets dans \mathbb{Z}^d , et notamment des algorithmes exacts avec des calculs en nombres entiers. Dans ce contexte, de nombreuses études ont déjà été menées pour définir un espace de travail propre avec des structures fondamentales, des primitives géométriques et leurs propriétés géométriques et topologiques associées [208]. Ces thèmes forment un des axes de recherche directeur de l'équipe d'ADAGIo portant sur l'algorithmique discrète et l'étude des diverses propriétés des modèles discrets d'objets : le plan mathématique et les structures discrètes telles que graphes, mots, arbres, ensembles de points dans un espace, *etc.*

Les travaux présentés dans ce manuscrit s'inscrivent dans cet axe de recherche et participent à améliorer notre compréhension sur la manipulation et l'analyse des objets discrets dans différents contextes. Parmi les différents travaux et résultats obtenus, j'ai choisi de détailler principalement trois sujets :

Mouvements rigides discrétisés. Le *chapitre 3* présente nos contributions sur les mouvements rigides, composés de rotations et translations, dans le contexte de l'imagerie numérique. Dans l'espace continu de \mathbb{R}^d , un mouvement rigide est défini par une isométrie directe et donc une transformation bijective qui conserve la forme et les propriétés géométriques et topologiques des objets dans \mathbb{R}^d . Ces transformations font partie des plus fondamentales dans de nombreuses applications de traitement et d'analyse d'images. Lorsqu'elles s'appliquent aux images définies sur \mathbb{Z}^d , une discrétisation est nécessaire afin d'obtenir un résultat dans l'espace discret. En raison de la discrétisation, ces transformations discrétisées perdent, dans la plupart des cas, leurs *bonnes* propriétés par rapport à leurs homologues continues. Dans ce contexte, nous explorons les relations entre la géométrie et la topologie des mouvements rigides sur \mathbb{Z}^d avec $d = 2, 3$. Plus précisément, la *section 3.1* présente le contexte et les problèmes liés aux mouvements rigides dans l'espace discret des images. Les notions de bases de la géométrie et topologie discrète sont

1. Il s'agit de la définition de droite discrète arithmétique introduite par Jean-Pierre Réveilles [344] où l'on note ω l'épaisseur de la droite.

rappelées dans la *section* 3.2, suivies par un état de l’art dans la *section* 3.3. Nos contributions sont résumées dans la *section* 3.4 et les détails sont présentés dans les sections suivantes. Nous étudions dans la *section* 3.5 le problème spécifique lié à l’invariant topologique du modèle de transformation point par point. En particulier, nous présentons nos résultats sur la *régularité* qui caractérise la préservation topologique des images numériques par les mouvements rigides. Ce résultat est généralisé en terme de modèles topologiques (la double adjacence et la bonne composition) et en termes de valeurs d’images (images binaires, de niveaux de gris et étiquetées). Différents algorithmes efficaces ont été également développés pour analyser et pré-traiter des images pour les rendre régulières. Même si le modèle de transformation point-par-point est simple et efficace pour l’invariant topologique, il altère généralement la forme *globale* de l’objet transformé. Pour répondre à ce problème, dans la *section* 3.6, nous proposons d’appliquer le mouvement rigide sur un objet discret dans son ensemble afin de mieux conserver la forme globale des objets. Plus spécifiquement, nous considérons des modèles intermédiaires (continus) d’objets numériques. En particulier, ces modèles doivent capturer la géométrie globale de l’objet, la définir analytiquement et présenter de bonnes propriétés de différentiabilité pour l’objet considéré. Afin de mieux préserver la forme de l’objet, le mouvement rigide est appliqué sur son modèle continu, et suivi par une discrétisation pour avoir un résultat final dans \mathbb{Z}^d . Il faut noter que la préservation de la géométrie n’implique pas toujours la préservation de la topologie dans \mathbb{Z}^d , ce qui est différent de \mathbb{R}^d . Pour cela, nous introduisons la condition de la *quasi-régularité* afin de garantir la préservation de la connexité d’objets transformés discrétisés. Avec la notion de la quasi-régularité, cette étude contribue à résoudre un problème classique de la géométrie discrète : préserver topologiquement des objets euclidiens lors du processus de discrétisation. Les expérimentations ainsi que les discussions de l’extension de ces résultats aux dimensions supérieures sont données dans les *sections* 3.7, 3.8 et 3.9.

Analyse d’objets discrets bruités. Le *chapitre* 4 présente nos contributions portant sur les études des structures discrètes bruitées qui correspondent aux contours/bords d’objets présents dans une image numérique. Durant l’acquisition jusqu’à l’enregistrement, les images peuvent subir des fluctuations parasites ou des dégradations qui engendrent ensuite du bruit sur l’image. Pour de nombreuses applications en vision par ordinateur, la présence de bruit peut rendre difficile la tâche d’analyse, et affecter considérablement les résultats finaux. En lien avec ce sujet, nous nous intéressons aux différents outils géométriques efficaces permettant d’analyser et d’étudier des courbes discrètes bruitées. Dans le domaine de la géométrie discrète, la primitive de *segment droit maximal* a été largement utilisée pour décrire et analyser les propriétés géométriques des courbes discrètes. En se basant sur cette notion, Isabelle Debled-Rennesson a introduit la primitive de *segment flous* de droite discrète avec un paramètre de l’épaisseur ν permettant de prendre en compte un certain niveau de bruit présent dans le segment. Ces primitives possèdent des propriétés intéressantes, notamment par rapport à la convergence asymptotique. Elles sont beaucoup utilisées pour l’analyse des formes discrètes ainsi que pour détecter du bruit sur la courbe. Dans ce chapitre, après une introduction sur le contexte de cette étude (*Section* 4.1), nous rappelons les notions mentionnées précédemment dans la *section* 4.2. En nous basant sur la primitive de segment flous, nous présentons dans la *section* 4.3 deux structures discrètes : la première est appelée la *couverture tangentielle d’épaisseur ν* qui est composé des segments flous d’épaisseur fixe, et la deuxième est la *couverture tangentielle adaptative* qui compose des segments flous d’épaisseurs variées qui s’adaptent automatiquement et localement au bruit présent sur la courbe. Dans la *section* 4.4, nous montrons des applications de ces structures dans le domaine de l’analyse d’images et de reconnaissance de formes telles que la représentation de formes, la vectorisation d’images, la décomposition de courbes, *etc.* D’autres exploitations de la primitive de segments flous, dans les domaines d’applications dans lesquels les données ne sont

pas forcément entières, sont présentées dans la *section* 4.5. En particulier, nous détaillons deux applications : la détection de droites épaisses dans des images en niveaux de gris avec l'image du gradient, et l'extraction de structures linéaires avec le nuage de points 3D acquis par LiDAR (Light Detection And Ranging).

Caractéristiques géométriques et biologiques du bois. Le *chapitre* 5 présente nos contributions dans le cadre applicatif du domaine du traitement et de l'analyse d'images du bois. Ces travaux sont réalisés en collaboration avec des chercheurs de l'Institut National de Recherche pour l'Agriculture, l'Alimentation et l'Environnement (INRAE) à Champenoux qui travaillent sur l'estimation de la qualité du bois à partir des caractéristiques géométriques et biologiques extraites sur les données acquises du bois (image numérique, nuage de points de type LiDAR, *etc.*). Ce problème s'inscrit dans le cadre de deux projets en cours : le projet ANR² TreeTrace (commencé en octobre 2018) et le projet ANR WoodSeer (commencé en octobre 2019). Une brève présentation de ces deux projets est donnée dans la *section* 5.1. Nous détaillons ensuite, dans la *section* 5.2, nos contributions en analyse d'images liées au projet ANR TreeTrace qui consistent à développer des outils pour extraire automatiquement les différentes caractéristiques géométriques et biologiques sur des images d'extrémités de grumes de bois avant la découpe en scierie, afin d'aider les experts à les classer dans différentes classes de qualité. Parmi les caractérisations de la qualité du bois, on s'intéresse à la moelle, la distance entre la moelle et le centre géométrique de la grume, la quantité de duramen³, les informations relatives aux cernes de croissance comme le nombre de cernes, la largeur moyenne, *etc.* Trois méthodes ont été proposées pour extraire ces informations : la moelle avec l'approche basée sur l'algorithme des colonies de fourmis, l'analyse de cernes avec des outils de la morphologie mathématique et la géométrie discrète pour la segmentation du duramen avec l'approche basée sur des réseaux profonds de convolution et sur le suivi de contour à l'aide des cernes. Dans la *section* 5.3, nous discutons des récents résultats liés au projet ANR WoodSeer portant sur la prédiction de défauts internes des grumes à partir de leurs caractéristiques corticales. Plus précisément, notre objectif est de caractériser automatiquement les défauts d'écorces de troncs d'arbres et d'établir leur relation avec les caractéristiques de la partie intérieure de l'arbre. En particulier, nous nous intéressons à la segmentation et à la classification de différents types de défauts liés à la ramification tel que les nœuds, les cicatrices de branche, les picots, les broussins, *etc.* à partir des nuages de points LiDAR de la surface des troncs d'arbres. Nous décrivons les premiers résultats liés à la segmentation de défauts. Une nouvelle approche a été proposée qui est basée sur des algorithmes récents d'apprentissage profond combinés avec la caractérisation géométrique pour guider ce processus d'apprentissage. Une telle combinaison est un élément clé. À notre connaissance, très peu de travaux ont été réalisés dans cette direction. D'autres travaux sont en cours sur l'étude pour l'étude de la robustesse de la méthode ainsi que sur la mise en œuvre d'une segmentation sémantique pour la classification des défauts détectés.

Il faut mentionner que la recherche reproductible est aussi un objectif important de notre travail. Cela se voit dans des différents résultats présentés dans ce mémoire. Pour faciliter la reproductibilité et la diffusion de nos résultats de recherche, les démonstrations sont mis à disposition en ligne sur le site [IPOL](https://ipol.github.io), les codes sources des nombreux algorithmes sont également disponibles sur [Github](https://github.com/ngophuc) : <https://github.com/ngophuc>. Le lecteur est invité à se référer aux articles cités et à tester les dépôts [Github](https://github.com) associés. En lien avec l'aspect de reproductibilité, les définitions sont illustrées avec du code issu de la bibliothèque [DGtal](https://github.com).

2. Agence Nationale de la Recherche

3. Appelé également *bois de cœur* : il s'agit de la partie interne du bois, correspondant aux zones d'accroissement les plus anciennement formées, qui ne comportent plus de cellules vivantes.

Les résultats présentés dans ce mémoire sont le fruit de nombreuses collaborations avec des chercheur-se-s, post-doctorant-e-s, doctorant-e-s et stagiaires. Je n’y serai pas arrivée sans l’aide de ces personnes et je tiens à les remercier. Les échanges et interactions avec ces collaborateurs furent de précieuses contributions dans mes activités de recherche.

Ce mémoire est complété par un bilan du travail effectué et les perspectives envisageables sur l’ensemble des thèmes de recherche abordés dans le *Chapitre 6*, ainsi que par la liste complète des publications et par un CV fournis en annexe.

2

Définitions introductives de géométrie et topologie discrète

Sommaire

2.1 Pavage et espace discrets	7
2.2 Connexité et courbes discrètes	8
2.3 Processus de discrétisation	9

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et notions de topologie et de géométrie discrète qui seront utilisées dans différentes parties de ce mémoire.

2.1 Pavage et espace discrets

Un espace discret est un pavage régulier du plan en dimension 2 ou supérieur. Il s'agit de la partition de l'espace continu \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, en cellules élémentaires, appelées *pavés*. Le centre de chaque pavé est un *point discret*. Un pavage peut être représenté par un graphe dual tel que les sommets correspondent aux points discrets, et les points ayant un bord en commun sont reliés par une arête : ce graphe est appelé *maillage*. La *Figure 2.1* illustre les pavages du plan avec des pavés triangulaires, carrés et hexagonaux. Le maillage d'un pavage carré est aussi un maillage carré tandis que le pavage triangulaire donne un maillage hexagonal et vice-versa.

Les pavages engendrés par des carrés ou des cubes multi-dimensionnels sont les plus utilisés car ils sont compatibles avec la base canonique de l'espace \mathbb{R}^d , et en particulier la plupart des appareils d'acquisition/écrans numériques sont basés sur un échantillonnage cartésien (Cartesian sampling en anglais), par exemple les scanners d'imagerie médicale ou les images optiques de télédétection (remote sensing optical images en anglais). Pour la suite de ce manuscrit, nous travaillons principalement avec ces pavages. Sans perte de généralité, nous supposons que les coordonnées des centres des pavés sont à coordonnées entières, donc les points de \mathbb{Z}^d avec $d \geq 2$.

Pour $d = 2$ et du point de vue de l'imagerie, le point $\mathbf{p} = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est associé à un *pixel* (c'est-à-dire un carré unitaire $[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}] \times [y - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}]$ correspondant aux cellules de Voronoï de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{R}^2). De même façon, pour $d = 3$, on parle de *voxel* (des cubes unitaires de cellules de \mathbb{Z}^3 dans \mathbb{R}^3). Un *objet discret* est un ensemble de points discrets, noté par $\mathbf{X} \subset \mathbb{Z}^d$. Les illustrations d'objets discrets en 2D et 3D sont sur la *Figure 2.2*.

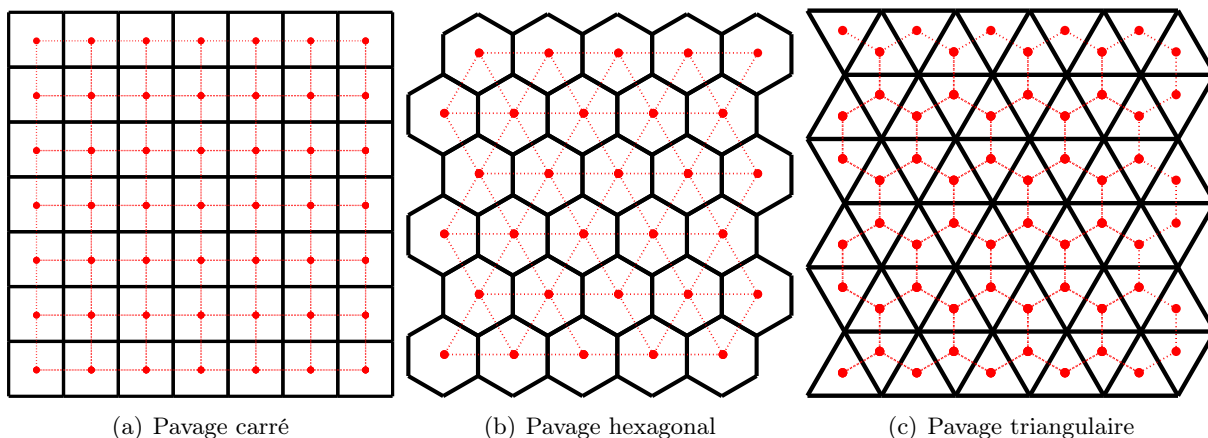


FIGURE 2.1 – Pavages régulières (en noir) du plan par carrés (a), hexagones (b) et triangles (c) avec la représentation duale par maillage (en rouge).

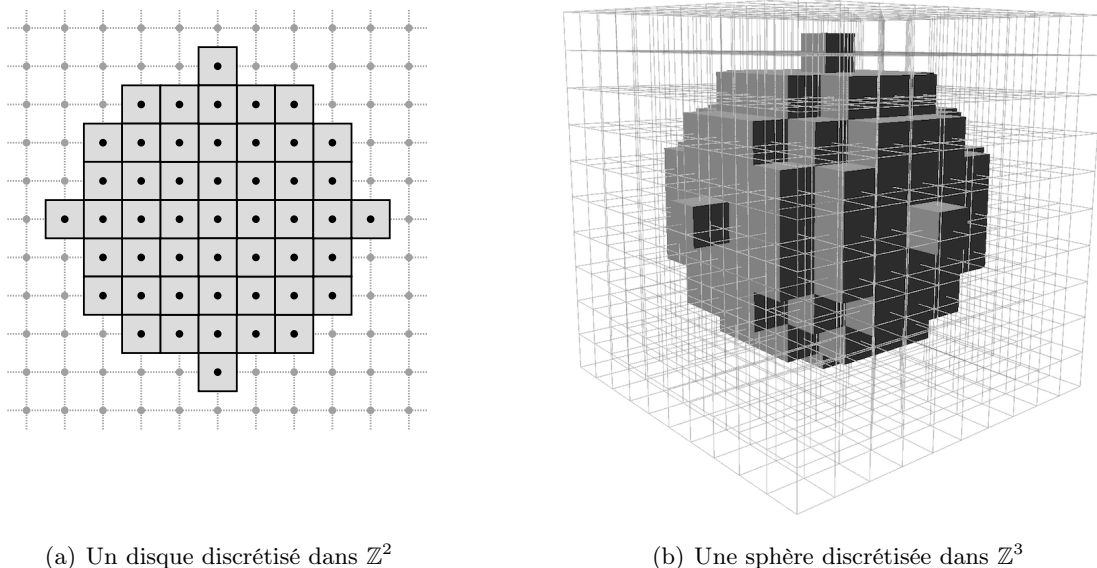


FIGURE 2.2 – Objet discret avec sa grille : (a) en 2D avec les pixels et (b) en 3D avec les voxels.

2.2 Connexité et courbes discrètes

Dans l'espace considéré \mathbb{Z}^d , les notions de la topologie discrète [214] sont introduites et permettent un cadre simple pour mieux gérer des objets discrets. En reposant sur la représentation dual de l'espace discret, la notion de voisinage a été introduite : deux points distincts $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d$ sont dits *k-voisins* (ou *k-adjacents*) si

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|_\ell \leq 1 \quad (2.1)$$

avec $k = 2d$ (resp. $3^d - 1$) pour $\ell = 1$ (resp. ∞). Si deux points $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d$ sont *k-voisins*, alors on le note $\mathbf{p} \curvearrowright_k \mathbf{q}$. Pour $d = 2$ (resp. $d = 3$), nous avons les 4- et 8-voisinages, et pour $d = 3$ les 6- et 26-voisinages¹.

1. Dans le cas 3D, il existe aussi les 18-voisinages pour les adjacences par arêtes.

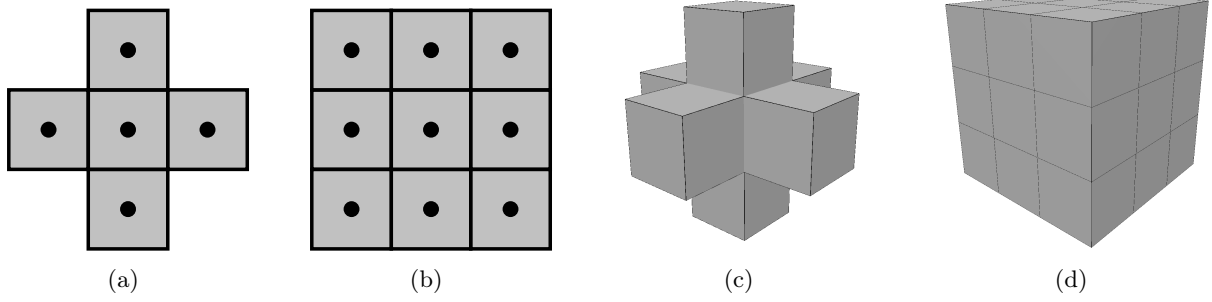


FIGURE 2.3 – Différents voisinages sur la grille de \mathbb{Z}^d : (a, b) $d = 2$ et (c, d) $d = 3$. De gauche à droite : 4-voisinage, 8-voisinage, 6-voisinage, 26-voisinage.

Définition 1 (k -chemin). Une k -chemin dans un objet discret $X \subset \mathbb{Z}^d$ est une suite de points discrets $\{p_i\}_{i=0}^{i=n-1}$ de X telle que deux points $p_i, p_j \in X$ sont k -voisins avec $|i - j| = 1$.

À partir de la clôture réflexive-transitive de la relation sur X , on dérive la relation k -connexe sur X , et notée \sim_k . Deux points p, q sont k -connexes sur X si $p \sim_k q$. Un objet discret X est k -connexe si, pour toute paire de points de X , il existe un k -chemin reliant ces points dans X . Il s'agit d'une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont appelées k -composants connexes de X , et l'ensemble des k -composants connexes est noté X/\sim_k . En raison du paradoxe de connexité liés à la version discrète du théorème de Jordan [267], il est suffisant d'utiliser une connexité différente pour X et son complément $\bar{X} = \mathbb{Z}^d \setminus X$, à savoir les (k, \bar{k}) -adjacences [351], où $(k, \bar{k}) = (2d, 3^d - 1)$ ou $(3^d - 1, 2d)$.

Une *courbe discrète* est une séquence ordonnée de n points discrets, notée $C = \{C_i\}_{i=0}^{i=n-1}$, telle que la ligne polygonale qui les traverse, dans le même l'ordre, est un polygone simple. Lorsque les deux points C_0 et C_{n-1} sont identiques, la courbe est dite *fermée* et elle admet un intérieur bien défini grâce au théorème de Jordan.

Définition 2 (Courbe discrète k -connexe). Une courbe discrète fermée C est dite k -connexe si et seulement si C est une k -composante connexe et chaque point $C_i \in C$ possède exactement deux k -voisins appartenant à C .

La courbe discrète peut être aussi définie comme la séquence de points associés à la frontière inter-pixel de l'objet discret [229], appelé *contour discret*, comme illustré sur la Figure 2.4.

2.3 Processus de discrétisation

La discrétisation est un processus permettant de générer un objet dans l'espace discret $X \subset \mathbb{Z}^d$ à partir d'un objet euclidien $X \subset \mathbb{R}^d$. Différents modèles de discrétisation ont été proposés dans la littérature [62, 208] : pour les courbes, il y a la discrétisation par l'intersection de grille (Intersect Grid Quantization (IGQ) en anglais) ou la discrétisation par super-couverture (Discretization of Supercover Simplex (DSS) en anglais), et pour les objets (et non les courbes) il y a la discrétisation interne ou la discrétisation de Gauss (Object Boundary Quantization (OBQ) en anglais) et la discrétisation externe (Background Boundary Quantization (BBQ) en anglais). Quelques exemples sont donnés dans la Figure 2.5.

Dans la suite de ce manuscrit, nous nous intéressons plus particulièrement à la discrétisation de Gauss, noté \mathfrak{D} , qui est tout simplement l'intersection d'un ensemble connexe et borné X avec

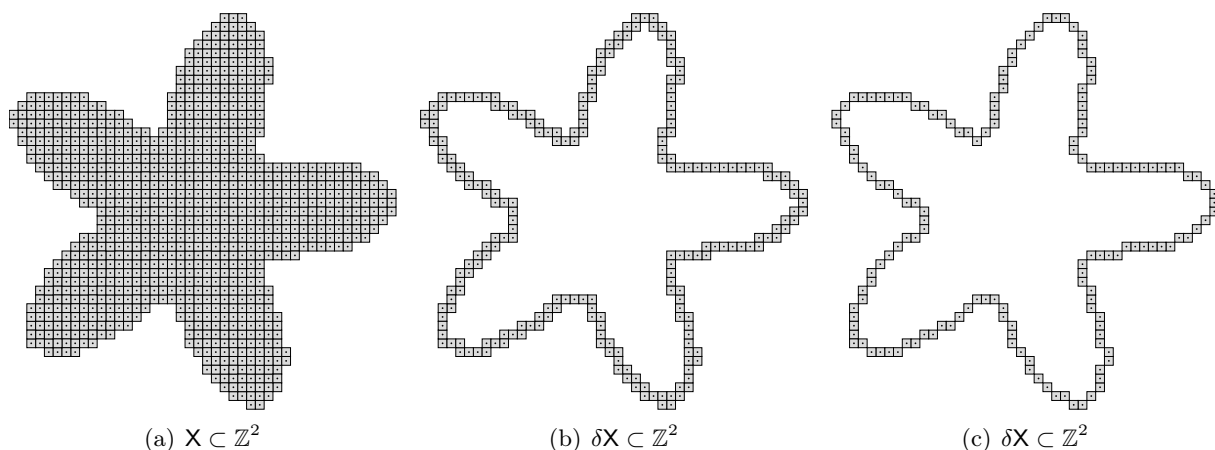


FIGURE 2.4 – Exemple de courbe discrète correspondant au contour d'objet : (a) Objet d'entrée X , (b) contour de 4-connexe et (c) contour de 8-connexe extrait de X .

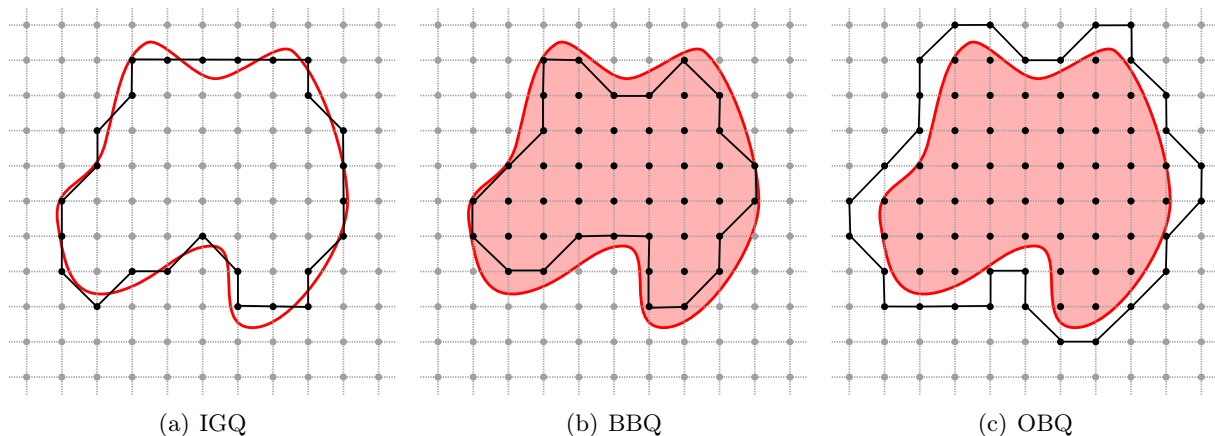


FIGURE 2.5 – Processus de discrétisation classiques : (a) la discrétisation d'une courbe par l'intersection de grille, (b) la discrétisation de Gauss et (c) la discrétisation externe d'objet. L'objet continu est en rouge, le résultat de discrétisation est en noir, et la grille est en gris.

\mathbb{Z}^d . Ce modèle de discrétisation est donc compatible avec le choix de pavage par carrés et aussi à des grilles de \mathbb{Z}^d .

Définition 3 (Discrétisation de Gauss [208]). *Soit $X \subset \mathbb{R}^d$, avec $d \geq 2$, un objet continu, la discrétisation de Gauss de X est un objet discret défini par*

$$X = X \cap \mathbb{Z}^d. \quad (2.2)$$

L'objet résultant X est un sous-ensemble de \mathbb{Z}^d , et fini si X est borné. La Figure 2.6 illustre la discrétisation de Gauss \mathfrak{D} en dimension 2 et 3 dans lesquels l'objet discret peut être vu comme un ensemble de pixels (en 2D) ou voxels (en 3D), dont le centre correspond au point de X .

Il faut savoir que, par ce processus de discrétisation \mathfrak{D} , l'objet résultant peut avoir des propriétés différentes de celles de l'objet continu d'origine. Comme illustré dans la Figure 2.7,

3. The Stanford Bunny : <http://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/>

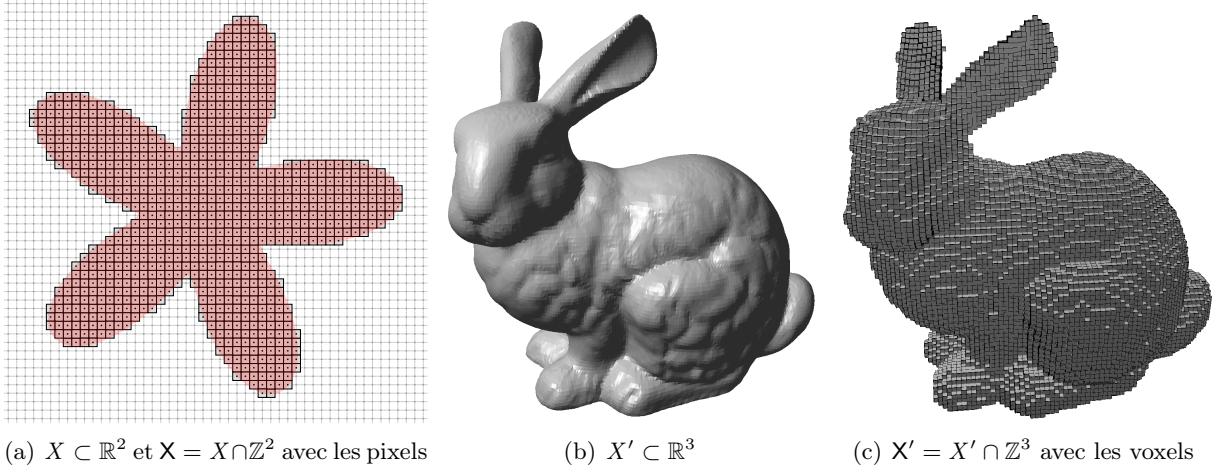


FIGURE 2.6 – Illustration de la discrétisation de Gauss : (a) un objet continu $X \subset \mathbb{R}^2$ (en rouge) et sa discrétisation $\mathbf{X} \subset \mathbb{Z}^2$ (points noirs) représentée par les pixels (carrés gris), (b) un maillage triangulaire du Bunny de Stanford $X' \subset \mathbb{R}^3$ et (c) sa discrétisation $\mathbf{X}' \subset \mathbb{Z}^3$ représentée par les voxels.

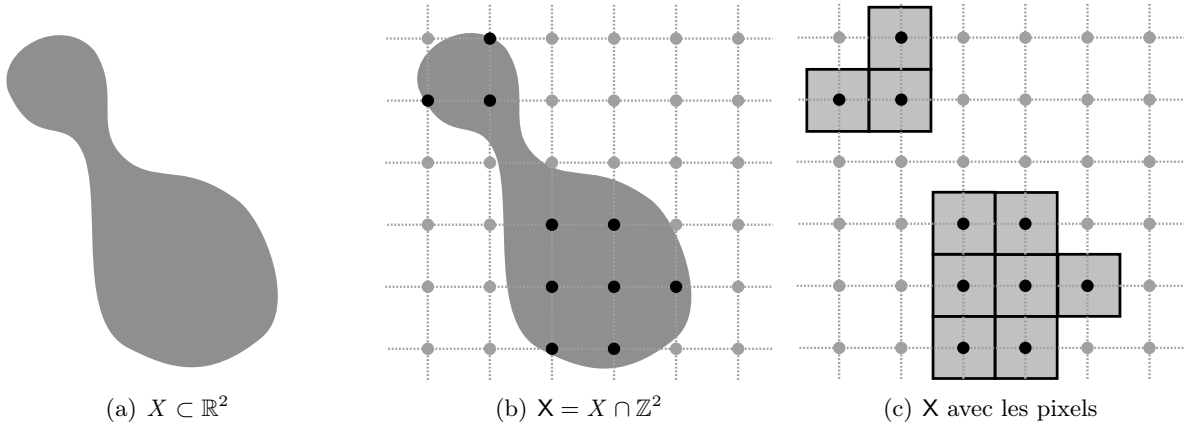


FIGURE 2.7 – (a) Un objet euclidien X dans \mathbb{R}^2 . (b) L'objet discrétisé \mathbf{X} de X par la discrétisation de Gauss ; $\mathbf{X} \subset \mathbb{Z}^2$ est composé par les points entiers dans X . (c) La représentation de \mathbf{X} par pixels. Les objets X et \mathbf{X} ne sont pas topologiquement équivalents : X est connexe, tandis que \mathbf{X} ne l'est pas.

l'objet continu connexe X devient l'objet non connexe \mathbf{X} après \mathfrak{D} , en raison de la résolution de la grille \mathbb{Z}^2 qui n'est pas assez fine pour la forme de X .

3

Aspects topologiques et géométriques de mouvement rigide sur $\mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z}^3$

Sommaire

3.1	Contexte et problématique	14
3.2	Notions de base	17
3.2.1	Image numérique	17
3.2.2	Topologie discrète et image bien composée	17
3.2.3	Convexité discrète	19
3.2.4	Mouvement rigide discrétisé	21
3.3	Travaux existants	23
3.4	Apports	27
3.5	Caractérisations topologiques	29
3.5.1	Invariant topologique	29
3.5.2	Régularité	31
3.5.3	Caractérisation d'images régulières	35
3.5.4	Régularisation d'images	36
3.5.5	Expérimentations	38
3.5.6	Discussion : Extension en 3D	43
3.6	Caractérisations géométriques	44
3.6.1	Quasi- r -régularité	44
3.6.2	Caractérisation du polygone quasi-régulier	47
3.6.3	Modèle de transformation basé sur des polygones	52
3.6.4	Modèle de transformation basé sur l'axe médian	57
3.7	Expérimentations	57
3.7.1	Préservation de la convexité	59
3.7.2	Extension aux objets non convexes	59
3.8	Extension de la quasi-r-régularité en 3D	64
3.9	Généralisation de la quasi-r-régularité	70
3.10	Conclusion et perspectives	71

Ce chapitre porte sur l'étude des propriétés géométriques et topologiques des objets discrets par mouvements rigides. Plus précisément, il s'agit de la classe de transformations permettant de déplacer un objet de manière linéaire (translation), de manière angulaire (rotation) ou à la fois de manière linéaire et angulaire, *sans déformer* l'objet. La motivation de cette étude est multiple, non seulement du point de vue théorique mais aussi en pratique car elle s'intéresse à de nombreuses applications de traitement et d'analyse d'images. Ces travaux s'inscrivent dans la continuité de mes travaux de thèse. Les résultats obtenus ont été réalisés en collaboration avec Nicolas Passat (CRESTIC – Université de Reims Champagne-Ardenne), Yukiko Kenmochi (LIGM – Université Gustave Eiffel) et Isabelle Debled-Rennesson de l'équipe ADAGIo.

La difficulté ici est que les mouvements rigides effectués dans l'espace discret de \mathbb{Z}^d perdent généralement les propriétés importantes que possèdent leurs homologues continus de \mathbb{R}^d du fait de la discrétisation qui est requise pour revenir sur la grille Cartésienne de \mathbb{Z}^d . En particulier, cette discrétisation conduit à des altérations géométriques et topologiques dans l'espace transformé. Dans ce contexte, notre objectif est de proposer un cadre de travail pour pouvoir réaliser ces transformations sur les images numériques tout en préservant les propriétés topologiques et géométriques des objets dans l'image. Avant de décrire l'idée générale des approches proposées, nous présentons dans la partie qui suit plus en détails le contexte, le problème et des différents travaux existants sur ce sujet.

3.1 Contexte et problématique

Un mouvement rigide, composé d'une translation et d'une rotation, est défini par une fonction bijective de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d . Il est bien connu que ces transformations conservent la forme et par les propriétés géométriques et topologiques des objets grâce à leur isométrie directe dans \mathbb{R}^d .

Les mouvements rigides sont fréquemment utilisés dans les applications de traitement et d'analyse. Dans la plupart des applications sur les images numériques, ces transformations sont généralement calculées dans leur espace continu puis suivies d'un processus de discrétisation afin d'obtenir un résultat dans \mathbb{Z}^d ; de telles transformations sont alors nommées *mouvements rigides discrétisés*. Par conséquent, les mouvements rigides dans \mathbb{Z}^d induisent des propriétés différentes par rapport à leurs analogues continus, et aussi de la perte d'informations [156].

Plus précisément, cette discrétisation conduit à des altérations géométriques et topologiques dans l'image résultante comme illustré dans la *Figure 3.1*. Nous avons deux objets discrets (en points noirs/pixels gris) dans l'image d'entrée (*Figure 3.1 (a)*), après avoir appliqué le mouvement rigide suivi par une discrétisation. Dans l'image résultante (*Figure 3.1 (b)*) les deux objets ont fusionné et la forme a également changé. Plus d'exemples en 2D et 3D sont donnés dans les *Figures 3.2* et *3.3*. Nous pouvons y observer que la topologie et la géométrie des objets discrets ne sont pas toujours conservées, même lorsque les formes initiales sont très simples (un cercle en 2D ou un plan en 3D). Dans la *Figure 3.2 (b)*, le demi-plan 2D préserve sa topologie après la transformation mais pas toujours sa géométrie. Pour la *Figure 3.3*, les vaisseaux rétiniens deviennent non connexes et *bruités* par la transformation discrétisée.

Dans ce contexte, nous nous intéressons aux mouvements rigides discrétisés dans l'espace discret $\mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z}^3$, et en particulier à la préservation topologique et géométrique par ces transformations.

Dans le domaine de l'imagerie, la préservation des propriétés topologiques et géométriques est une question cruciale. D'une part, d'un point de vue esthétique, il est visuellement inconfortable d'observer l'apparition de trous, du fractionnement ou de fusions d'objets dans les images obtenues (voir *Figure 3.2*). D'autre part, au-delà de ces considérations qualitatives, les propriétés

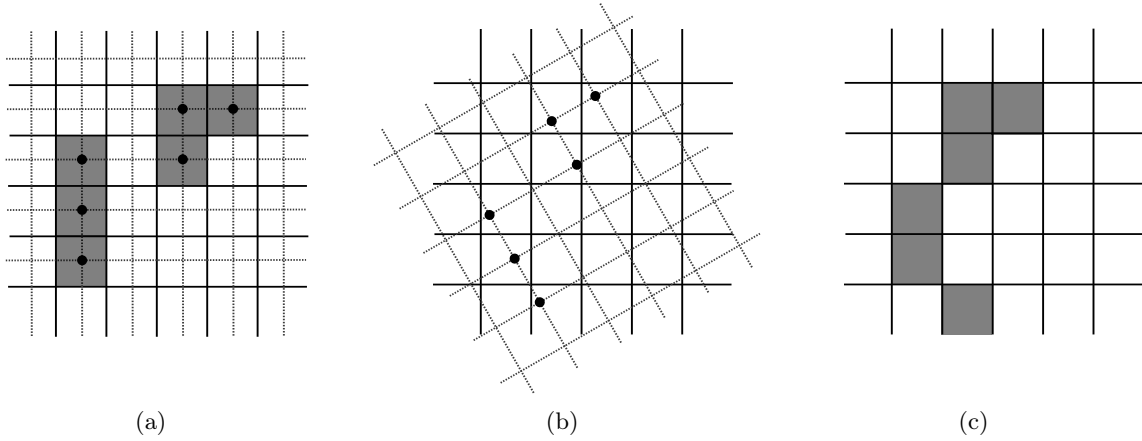


FIGURE 3.1 – (a) Image numérique d’entrée et la grille modélisant sa structure discrète ; après un mouvement rigide discrétisé (b), l’image résultante (c) possède des propriétés topologiques et géométriques différentes en raison de la discrétisation.

topologiques fournissent des informations importantes et des descripteurs utiles pour les tâches de traitement et d’analyse d’images telles que la segmentation [35], la classification [31], le recalage d’images [449] ou le suivi de mouvement [442]. Cela ne concerne pas que la 3D (par exemple en imagerie médicale [315]) mais aussi les données 2D (par exemple en système de télédétection [392] ou en vision par ordinateur [356]).

Le problème de la préservation géométrique et topologique par les transformations géométriques a été peu étudié jusqu’à présent. En particulier, la préservation de la topologie – pionnière il y a près de cinquante ans [111, 354] – a été étudiée dans le cadre de la transformation d’image, tant du point de vue de recalage [30] (registration en anglais) et gauchissement [123] (warping en anglais) d’images. Pour cette tâche, les efforts ont été principalement consacrés à des transformations complexes, tandis que les plus simples sont restées largement sous-considérées. Le traitement de telles transformations (par exemple, les translations et les rotations) est souvent supposé être presque trivial. En effet, dans \mathbb{R}^d , elles préservent la topologie, alors que ce n’est pas nécessairement le cas des complexes (par exemple, le recalage non rigide [303]). Dans ce contexte, on suppose souvent que les transformations simples ne posent aucun problème topologiques dans \mathbb{Z}^d . Ce n’est pas vrai.

Dans le cas des mouvements rigides sur $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^3$ [T1], [J12], [320] – y compris les rotations [16, 308, 344, 345, 411] – certains problèmes topologiques ont été identifiés dans [C16], [C28], [319, 307]. Ils sont principalement causés par l’opérateur de discrétisation.

Au regard de ces considérations, nous nous intéressons à la question suivante : “*Peut-on caractériser des images numériques permettant la préservation des propriétés topologiques et géométriques par mouvement rigide dans $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^3$?*”, et de façon plus générale : “*Quelle est la condition pour qu’un objet discret préserve la topologie (et la géométrie) par la discrétisation ?*”. Pour répondre à ces questions, nous introduisons un cadre purement discret pour les mouvements rigides sur $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^3$, en nous appuyant sur des concepts de géométrie et de topologie discrètes. Nous proposons également des schémas algorithmiques permettant la modélisation et la manipulation des mouvements rigides, adaptés aux espaces discrets des images numériques, tout en préservant les propriétés géométriques – la convexité et la concavité – et topologiques des objets transformés.

Pour la suite, nous allons concentrer notre étude sur \mathbb{Z}^2 dans un premier temps, l’extension à \mathbb{Z}^3 sera présentée et discutée dans les parties correspondantes.

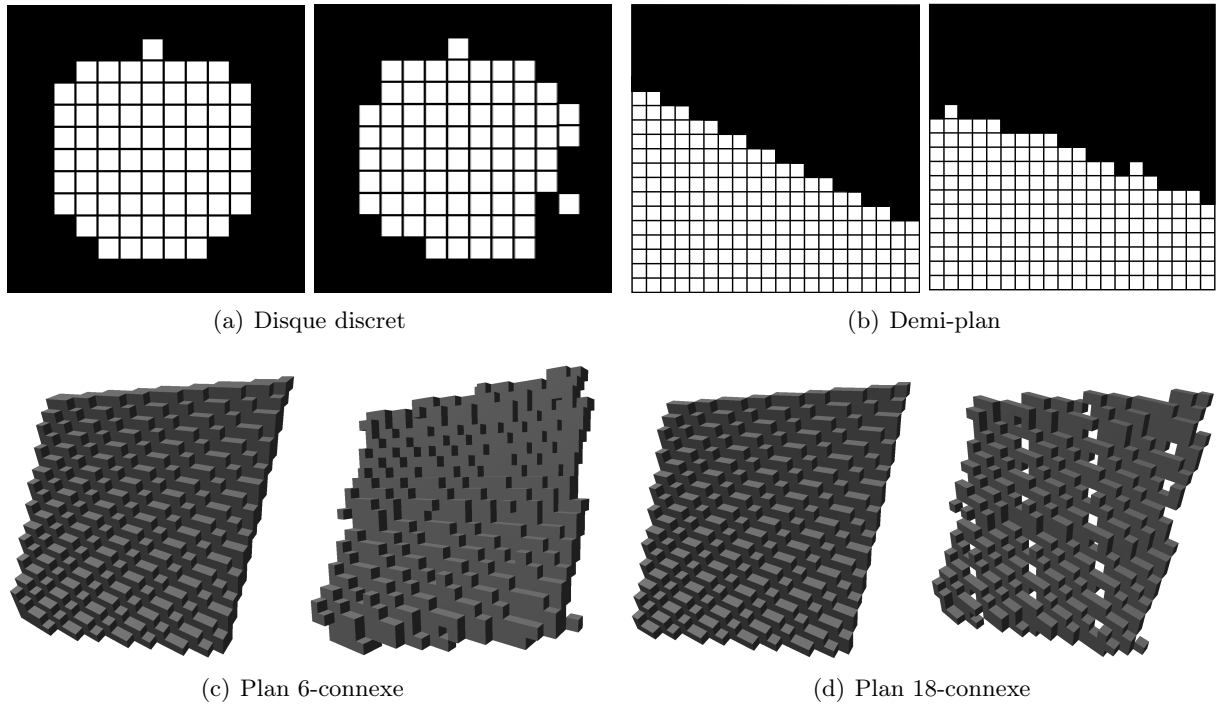


FIGURE 3.2 – Illustration des altérations topologiques et géométriques : images avec leurs transformées. Première ligne, cas 2D : (a) un disque discret et (b) un demi plan. Deuxième ligne, cas 3D : (c) un plan épais (6-connexe, nommé *plan standard*) et (d) un plan plus fin (18-connexe, nommé *plan naïf*).

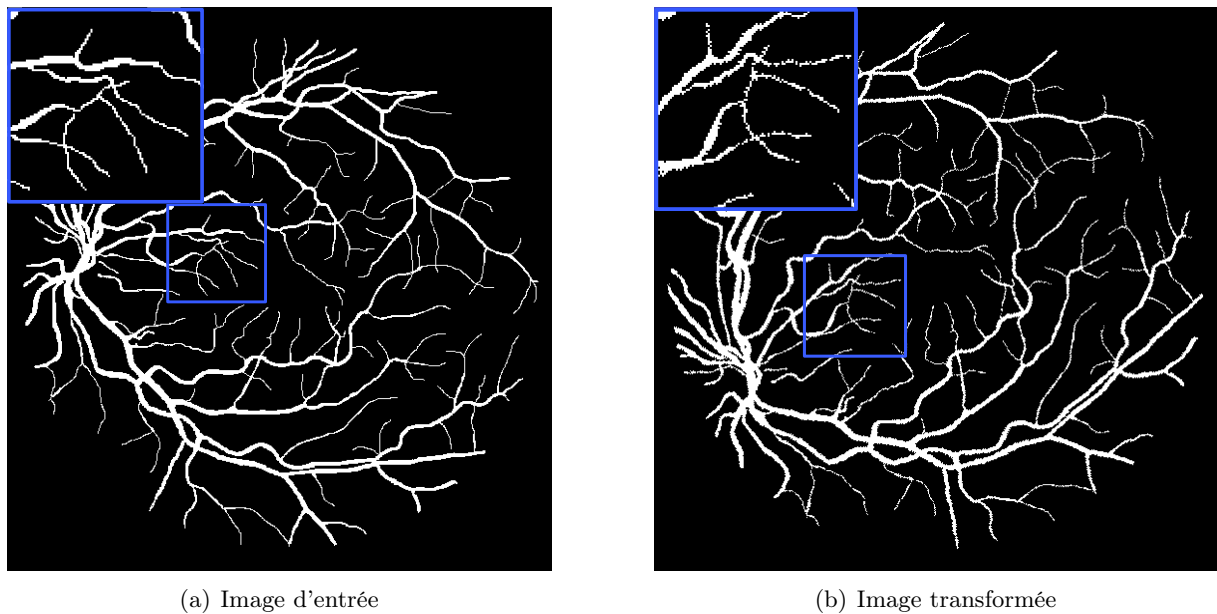


FIGURE 3.3 – Une image rétinienne binaire (a) et l'image résultante par mouvement rigide (b) ne préserve ni la topologie ni la géométrie. Le cadre bleu présente des parties agrandies de l'image.

3.2 Notions de base

Nous introduisons ci-dessous quelques notions et propriétés importantes qui sont essentielles pour la compréhension des résultats présentés dans la suite de ce chapitre.

3.2.1 Image numérique

Une *image numérique* peut être définie comme une fonction $I : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{V}$ avec \mathbb{V} est un *espace de valeurs*, contenant au moins deux éléments dont un, noté \perp , correspond à la valeur sémantique du *fond*.

Nous considérons fréquemment les ensembles suivants pour \mathbb{V} :

- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$
- $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{Z}$ ou \mathbb{R} (équipé d'un ordre total \leq)
- \mathbb{L} étant n'importe quel ensemble arbitraire (non nécessairement équipé d'un ordre).

Le premier cas ($\mathbb{V} = \mathbb{B}$) correspond aux images binaires. Nous notons l'ensemble des images binaires par $\mathcal{IM}_{\mathbb{B}}$, et sans perte de généralité, supposons que $\perp = 0$. Le deuxième cas ($\mathbb{V} = \mathbb{G}$) correspond aux images en niveaux de gris. L'ensemble des ces images est noté par $\mathcal{IM}_{\mathbb{G}}$, et nous supposons que $\perp = \bigwedge^{\leq} \mathbb{G}$. Le dernier cas ($\mathbb{V} = \mathbb{L}$) correspond aux images étiquetées et l'ensemble des ces images est noté par $\mathcal{IM}_{\mathbb{L}}$.

En pratique, les images traitées sont de *taille* finie, c'est-à-dire $I^{-1}(\mathbb{V} \setminus \{\perp\}) \subseteq \mathbb{S} = [0, N-1]^2$ pour $N \in \mathbb{N}$. L'ensemble \mathbb{S} s'appelle *support* de I et N s'appelle *taille* de I . Dans ce qui suit, on mettra parfois $I : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{V}$, au lieu de $I : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{V}$.

3.2.2 Topologie discrète et image bien composée

Dans l'espace discret des images numériques, plusieurs modèles de topologie discrète ont été introduits, comme par exemple le grille de Khalimsky [203], les complexes cellulaires abstraits [217], la topologie définie sur les surfaces de Jordan [169]. Il est montré dans [271] que, dans l'espace \mathbb{Z}^2 , ces différents modèles peuvent être pratiquement unifiés à l'approche basée sur les graphes d'adjacences proposés par Tat Yung Kong et Azriel Rosenfeld dans [214]. Nous considérons dans la suite la topologie discrète associée aux graphes d'adjacences avec les relations de voisinage/adjacence comme introduites dans la *Section 2.2*.

Dans le cas de \mathbb{Z}^2 , on utilise généralement les deux relations de 4- et 8-voisinages. Nous rappelons que les deux points $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^2$ sont 4- (resp. 8-) voisins, noté $\mathbf{p} \curvearrowright_4 \mathbf{q}$ (resp. $\mathbf{p} \curvearrowright_8 \mathbf{q}$), si

$$\mathbf{p} \curvearrowright_4 \mathbf{q} \iff \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|_1 = 1 \quad (3.1)$$

$$(\text{resp. } \mathbf{p} \curvearrowright_8 \mathbf{q} \iff \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|_{\infty} = 1) \quad (3.2)$$

Dans le cadre d'images binaires, l'espace discret associé à l'image est divisé en deux graphes, sur lesquels on définit les relations k -connexes entre les points $\mathbf{X} = I^{-1}(\{1\})$ (appelé l'objet dont les points sont noirs), et \bar{k} -connexes pour les points $\bar{\mathbf{X}} = I^{-1}(\{0\})$ (appelé le fond dont les points sont blancs). Pour avoir un équivalent discret du théorème de Jordan, certaines paires de connexités sont considérées pour l'objet et le fond dont le (4, 8)- ou (8, 4)-voisin, appelé *double adjacence* (dual adjacency en anglais).

Définition 4 (Double adjacence [351]). *Soit $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{B}}$, $\mathbf{X} = I^{-1}(\{1\})$ et $\bar{\mathbf{X}} = I^{-1}(\{0\})$. On dit que I est une (4, 8)- (resp. (8, 4)-) image si \mathbf{X} est équipé de \curvearrowright_4 (resp. \curvearrowright_8), tandis que $\bar{\mathbf{X}}$ est équipé*

de \sim_8 (resp. \sim_4). On définit l'ensemble des composantes connexes du $(4, 8)$ - (resp. $(8, 4)$ -) image I comme

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{(4,8)}[I] &= I^{-1}(\{1\})/\sim_4 \cup I^{-1}(\{0\})/\sim_8 \\ (\text{resp. } \mathcal{C}^{(8,4)}[I] &= I^{-1}(\{1\})/\sim_8 \cup I^{-1}(\{0\})/\sim_4) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pour simplifier l'écriture, nous utilisons (k, \bar{k}) comme une notation unifiée pour $(8, 4)$ et $(4, 8)$.

Dans ce contexte, la notion d'*ensemble bien composé* (well-composed set en anglais), est introduite afin de caractériser l'objet discret 2D dont la structure évite les problèmes topologiques liés au théorème de Jordan.

Définition 5 (Ensemble bien composé [234]). *Un ensemble $X \subset \mathbb{Z}^2$ est dit faiblement composé (weakly well-composed en anglais) si toute composante 8-connexe de X est aussi composante 4-connexe. On dit que X est bien composé si X et son complément \bar{X} sont tous les deux faiblement composés.*

Cette notion implique que le bord ou la frontière¹ (boundary en anglais) de X est un ensemble de 1-variétés (1-manifolds en anglais) pour X un ensemble bien composé.

Cette définition peut s'appliquer facilement aux images binaires $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{B}}$: L'image I est dite *bien composée* (notée *wc-*) image si

$$\forall v \in \mathbb{B}, I^{-1}(\{v\})/\sim_8 = I^{-1}(\{v\})/\sim_4 \quad (3.4)$$

On définit aussi l'ensemble des composantes connexes de la *wc*-image I comme

$$\mathcal{C}^{wc}[I] = I^{-1}(\{1\})/\sim_4 \cup I^{-1}(\{0\})/\sim_4 \quad (3.5)$$

L'ensemble des images binaires bien composées est noté $\mathcal{WC}_{\mathbb{B}}$. Les exemples sont donnés sur la Figure 3.4. Dans le premier exemple, l'image d'entrée $I_1 \in \mathcal{IM}_{\mathbb{B}}$ est sur (a). Si nous considérons I_1 comme une $(8, 4)$ -image, dans (b) les composantes 8-connexes de $X = I_1^{-1}(\{1\})$ sont représentées en bleu, violet et rouge, tandis que les composantes 4-connexes de $\bar{X} = I_1^{-1}(\{0\})$ sont représentées en jaune et vert. Si nous considérons I_1 comme une $(4, 8)$ -image, dans (c) les composantes 4-connexes de $X = I_1^{-1}(\{1\})$ sont représentées en bleu, violet et rouge, tandis que les composantes 8-connexes de $\bar{X} = I_1^{-1}(\{0\})$ sont représentées en jaune et vert. Puisque I_1 a la même structure topologique qu'une $(8, 4)$ -image et qu'une $(4, 8)$ -image, elle appartient donc au modèle bien composé. Les bords partagés par les régions de l'objet et du fond, représentés en vert dans (d), sont des 1-variétés. Dans le deuxième exemple, l'image d'entrée $I_2 \in \mathcal{IM}_{\mathbb{B}}$ est sur (e). Si nous considérons I_2 comme une $(8, 4)$ -image, dans (f) les composantes 8-connexes de $X = I_2^{-1}(\{1\})$ sont en violet et rouge, tandis que les composantes 4-connexes de $\bar{X} = I_2^{-1}(\{0\})$ sont représentées en jaune, cyan, bleu et vert. Si nous considérons I_2 comme une $(4, 8)$ -image, dans (g) les composantes 8-connexes de $X = I_2^{-1}(\{1\})$ sont bleu, violet et rouge, tandis que les composantes 4-connexes de $\bar{X} = I_2^{-1}(\{0\})$ sont représentées en jaune et vert. Parce que I_2 n'a pas la même structure topologique qu'une $(8, 4)$ -image et qu'une $(4, 8)$ -image, alors I_2 est faiblement-composé. Les bords partagés par les régions de l'objet et du fond, représentées en vert dans (h), ne sont pas des 1-variétés aux points rouges.

En outre, il est prouvé que $\mathcal{WC}_{\mathbb{B}}$ peut être caractérisé localement par les patches de taille 2×2 pixels.

1. La frontière de X est définie ici comme la frontière de l'objet continu obtenu par l'union des cellules de Voronoi associées aux points de X dans \mathbb{R}^2 .

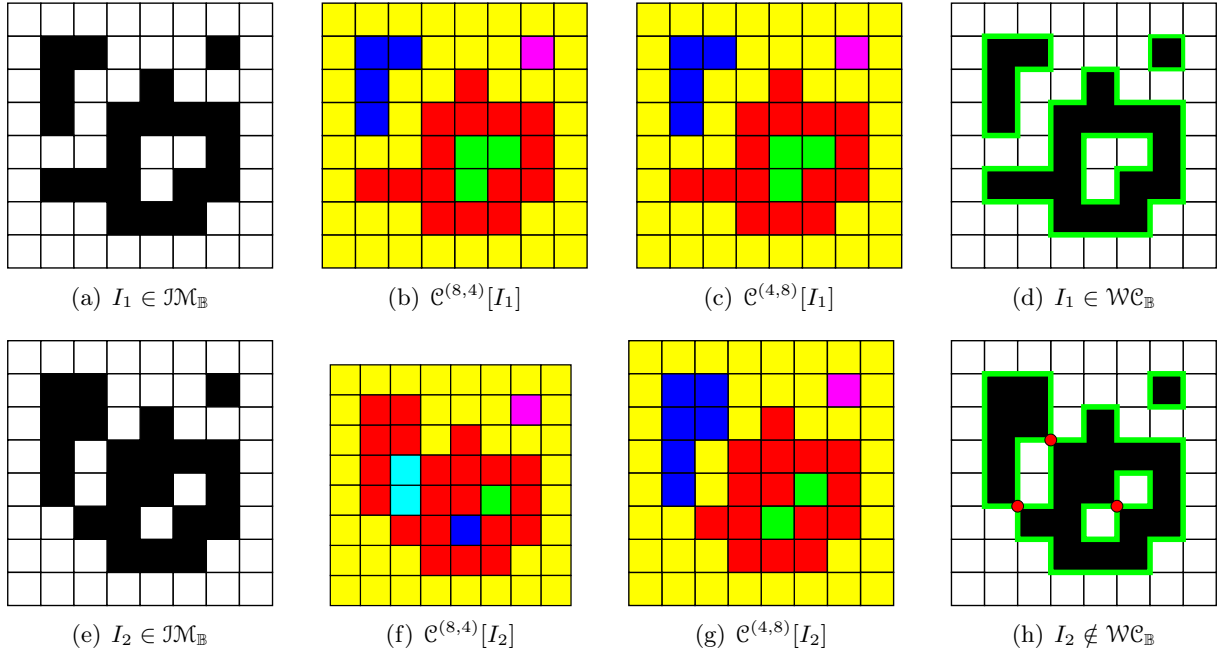



FIGURE 3.4 – Exemple d’images binaire bien composée I_1 (première ligne) et non bien composée I_2 (deuxième ligne) dans cette dernière nous trouvons la configuration \mathfrak{C}_1 (aux points rouges) du Théorème 6. (a, d, e, h) : X est en noir et \bar{X} en blanc. (b, c, f, g) : chaque composante connexe est représentée par une couleur différente. (d, h) : le bord entre l’objet et le fond est en vert.

Théorème 6 ([234]). Une image binaire $I \in \mathcal{M}_{\mathbb{B}}$, I n’est pas bien composée, $I \notin \mathcal{WC}_{\mathbb{B}}$, si et seulement s’il existe des points distincts $p, q, r, s \in \mathbb{Z}^2$, avec $p \curvearrowright_4 q \curvearrowright_4 r \curvearrowright_4 s \curvearrowright_4 p$, qui vérifient

$$I(p) \neq I(q) \neq I(r) \neq I(s) \quad (3.6)$$

En d’autres termes, une image binaire $I \in \mathcal{M}_{\mathbb{B}}$ est *bien composée* si et seulement si elle ne contient pas la configuration  (modulo la rotation de $\frac{\pi}{2}$, la symétrie et l’inversion de valeurs), nommée \mathfrak{C}_1 (voir Figure 3.4).

Remarque 7. Le modèle de l’ensemble bien composé est plus restrictif que la double adjacence. En effet, $I \in \mathcal{M}_{\mathbb{B}}$ peut être considérée dans le modèle de la double adjacence, mais pas nécessairement dans celui de l’ensemble bien composé : $\mathcal{WC}_{\mathbb{B}} \subset \mathcal{M}_{\mathbb{B}}$.

3.2.3 Convexité discrète

Dans l’espace euclidien de \mathbb{R}^2 , un objet X est dit *convexe* si, pour toute paire de points $x, y \in X$, le segment de ligne joignant x et y , défini par

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}, \quad (3.7)$$

est inclus dans X (voir Figure 3.5(a)).

Cependant, cette définition ne peut pas être appliquée directement sur des objets discrets $X \subset \mathbb{Z}^2$. En effet, le segment qui joint deux points dans X n’est généralement pas inclus dans X .

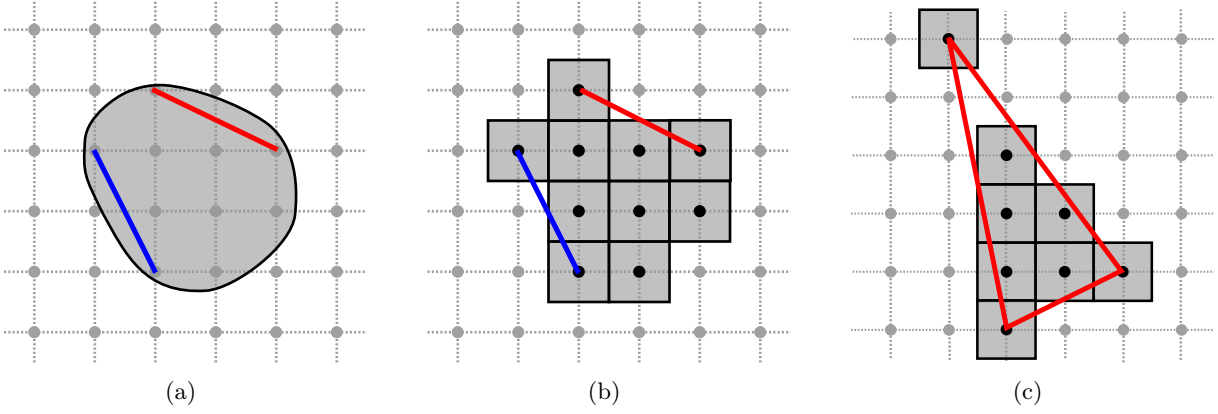


FIGURE 3.5 – La notion de convexité définie sur \mathbb{R}^2 (a) n'est pas utilisable sur \mathbb{Z}^2 (b) du fait de la discrétisation. La H-convexité n'implique pas la connexité dans l'objet discret (c).

Un exemple est donné dans la Figure 3.5 (b), pour l'objet discret X et deux points $p, q \in X$ et avec $p \neq q$, on a $[p, q] \not\subset \mathbb{Z}^2$ (le segment rouge ou bleu sur la figure).

Afin de résoudre ce problème, diverses extensions de la notion de convexité ont été proposées pour l'espace discret de \mathbb{Z}^2 . Nous pouvons citer, par exemple, la *MP-convexité* [279] qui est une simple extension de la notion dans \mathbb{R}^2 , la *S-convexité* [389] qui utilise des objets convexes dans \mathbb{R}^2 pour déterminer la convexité des objets dans \mathbb{Z}^2 , la *H-convexité*² [115, 205] qui est une version géométrique de la S-convexité en utilisant l'enveloppe convexe d'objet discret, et la *D-convexité* [204] qui repose sur la notion de droite discrète.

Dans le cas de la 4-adjacence des objets discrets, les deux définitions MP-convexité et H-convexité ont été prouvés équivalents dans [205, Théorème 5]. Les résultats similaires sous l'hypothèse de 8-adjacence sont trouvés dans [115] via la propriété de la corde (chord property en anglais) qui relie la MP-convexité, la H-convexité et la D-convexité. À la condition que X n'ait pas de point isolé (*i.e.* un point qui n'est adjacent à aucun autre point de X), il a ensuite été prouvé dans [205, Théorème 4] que X est H-convexe si et seulement s'il est S-convexe. Une description plus complète des différentes notions de convexité numérique peut être trouvée dans [83, Chapitre 9].

Dans la suite, nous considérons la H-convexité pour deux raisons : d'une part, sa compatibilité avec les autres types de convexité dans le cas des objets 4-connexes (et, a fortiori, bien composé), d'autre part, sa définition basée sur l'enveloppe convexe de l'objet, permettant d'appliquer des mouvements rigides sur des objets discrets convexes tout en préservant les propriétés de connexité et de convexité. Un tel objet polygonal nous fournit un modèle continu qui peut être impliqué dans la partie continue de notre processus algorithmique du mouvement rigide.

Nous rappelons ci-dessous la définition de l'enveloppe convexe d'un objet discret X , noté $\text{Conv}(X)$, puis donnons la définition formelle de la H-convexité :

$$\text{Conv}(X) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \sum_{i=1}^{|X|} \lambda_i p_i \wedge \sum_{i=1}^{|X|} \lambda_i = 1 \wedge \lambda_i \geq 0 \wedge p_i \in X \right\} \quad (3.8)$$

Définition 8 (H-convexe [205]). *Un objet discret $X \subset \mathbb{Z}^2$ est H-convexe si $X = \text{Conv}(X) \cap \mathbb{Z}^2$.*

2. Kim a introduit dans [205] la définition de *convexité cellulaire* (cellular convexity en anglais) et a prouvé l'équivalence à celle utilisant l'enveloppe convexe [205, Lemma 10]. Dans [115], Eckhardt reformula et renomma cette notion de la *H-convexité*.

Plus explicitement, un objet discret X est H -convexe si son enveloppe convexe contient exactement les points de X . Dans la suite du manuscrit, le terme de convexité désignera la H -convexité.

Il est important de mentionner que la H -convexité reste préservée par intersection, sous la condition de connexité, comme prouvé dans [83, Corollaire 3.5.1].

Propriété 9 ([83]). *Soit X et Y deux objets discrets. Si X et Y sont H -convexe et $X \cap Y$ est connexe, alors $X \cap Y$ est H -convexe.*

Il faut aussi noter que, dans \mathbb{R}^2 , la définition de la convexité implique intrinsèquement la connexité. En revanche, dans \mathbb{Z}^2 , la notion de H -convexité (comme diverses autres notions de convexité discrète) ne garantit pas toujours la connexité par rapport à la 4- et 8-adjacence. Afin d'illustrer ce fait, nous considérons l'exemple de la Figure 3.5 (c) : un objet discret X qui est composé de 8 points/pixels et H -convexe. Par définition, son enveloppe convexe $\text{Conv}(X)$ ne contient que des points de X . On peut voir que X n'est pas connexe (ni 4-, ni 8-adjacent). Un tel phénomène est principalement causé par des facteurs angulaires ou métriques : chaque fois qu'un angle du polygone d'enveloppe convexe est trop aigu, ou lorsqu'un bord est trop court, de telles déconnexions peuvent se produire. Sur la figure, il s'agit de l'angle aigu au sommet le plus élevé de $\text{Conv}(X)$ qui permet au polygone de passer entre deux points 4-adjacents dans le complémentaire de X . On peut noter que la notion H -convexe utilisée dans ce manuscrit est équivalente à celle de *entièrement convexe* (fully convex en anglais) proposée dans [185] qui est une généralisation de la convexité discrète en dimension arbitraire.

3.2.4 Mouvement rigide discrétisé

Un mouvement rigide \mathfrak{R} dans l'espace euclidien \mathbb{R}^2 est défini, pour tout point $\mathbf{p} = {}^t(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\mathfrak{R}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

où $\theta \in [0, 2\pi[$ est l'angle de rotation, et $t = {}^t(t_x, t_y) \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur donnant la translation de l'origine. On note \mathfrak{R}^{-1} la fonction inverse de \mathfrak{R} qui est aussi un mouvement rigide. Les deux transformations \mathfrak{R} et \mathfrak{R}^{-1} sont alors bijectives, isométriques et préservent l'orientation. Par conséquent, si on transforme un objet $X \subset \mathbb{R}^2$ par un mouvement rigide, l'objet transformé $\mathfrak{R}(X)$ a la même forme – les mêmes propriétés géométriques et topologiques – que X . Nous notons $\mathcal{RIG}_{\mathbb{R}^2}$ l'ensemble de tous les mouvements rigides de \mathbb{R}^2 .

Considérons maintenant ce mouvement rigide dans l'espace discret de \mathbb{Z}^2 , c'est-à-dire que nous appliquons \mathfrak{R} (équation (3.9)) à un objet discret $X \subset \mathbb{Z}^2$. Nous constatons que l'objet transformé $\mathfrak{R}(X) \not\subset \mathbb{Z}^2$. Afin d'obtenir un résultat dans l'espace discret de \mathbb{Z}^2 , nous avons besoin de la discrétisation \mathfrak{D}

$$\left| \begin{array}{ll} \mathfrak{D} : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ \mathbf{p} = (p_x, p_y) & \longmapsto \mathbf{q} = (q_x, q_y) = (\lfloor p_x + \frac{1}{2} \rfloor, \lfloor p_y + \frac{1}{2} \rfloor) \end{array} \right. \quad (3.10)$$

avec $\lfloor x \rfloor$ désignant le plus grand entier non supérieur à x .

De cette façon, l'analogie numérique de \mathfrak{R} , nommé *mouvement rigide discrétisé* et noté \mathcal{R} , est défini par

$$\mathcal{R} = \mathfrak{D} \circ \mathfrak{R}|_{\mathbb{Z}^2} \quad (3.11)$$

Nous notons $\mathcal{RIG}_{\mathbb{Z}^2}$ l'ensemble de tous les mouvements rigides discrétisés définis sur \mathbb{Z}^2 .

Contrairement aux mouvements rigides sur \mathbb{R}^2 , les mouvements rigides discrétisés ne sont, en général, ni injectifs ni surjectifs. En particulier, ils peuvent engendrer des résultats indésirables

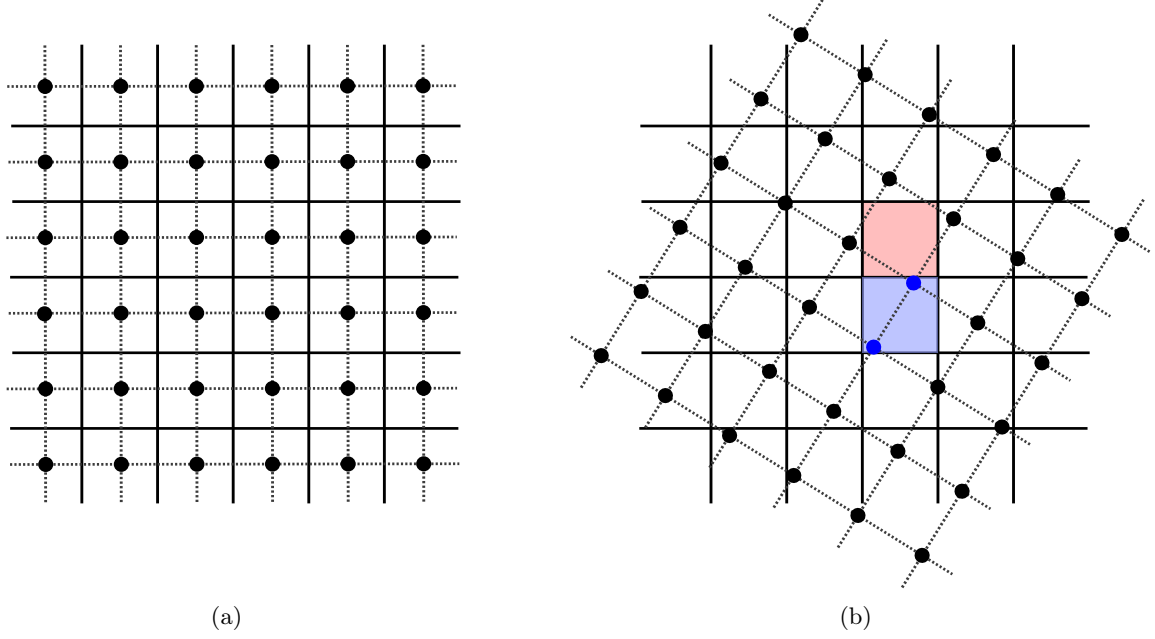


FIGURE 3.6 – Exemples de non injectivité et de non surjectivité de mouvement rigide discrétisé. (a) La grille \mathbb{Z}^2 avec points discrets (en noirs), et les cellules de Voronoï associées. (b) Le mouvement rigide suivi par la discrétisation appliquée sur la grille (a) ; les pixels rouge et bleu correspondent respectivement à des cas de non surjectivité et de non injectivité.

lors de la transformation, tels que des pixels en double ou vides (voir Figure 3.6). Pour éviter ce problème, nous pouvons considérer la transformation inverse de \mathcal{R} en définissant :

$$\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{D} \circ (\mathfrak{R}^{-1})|_{\mathbb{Z}^2} \quad (3.12)$$

Au regard de cette considération, étant donnés une image numérique I et un mouvement rigide discrétisé $\mathcal{R} \in \mathcal{RIG}_{\mathbb{Z}^2}$ (intrinsèquement associé à un mouvement rigide continu $\mathfrak{R} \in \mathcal{RIG}_{\mathbb{R}^2}$), l'image transformée $I_{\mathcal{R}} \subset \mathbb{Z}^2$ est définie par

$$I_{\mathcal{R}} = I \circ \mathcal{D} \circ (\mathfrak{R}^{-1})|_{\mathbb{Z}^2} = I \circ \mathcal{R}^{-1} \quad (3.13)$$

Comme \mathcal{R}^{-1} est surjective, l'image résultante $I_{\mathcal{R}}$ ne possède ni de pixel en double ou vide.

Pour $I \in \mathcal{M}_{\mathbb{B}}$, en définissant $\mathbf{X} = I^{-1}(\{1\})$, $\bar{\mathbf{X}} = I^{-1}(\{0\})$, $\mathbf{X}_{\mathcal{R}} = I_{\mathcal{R}}^{-1}(\{1\})$, et $\bar{\mathbf{X}}_{\mathcal{R}} = I_{\mathcal{R}}^{-1}(\{0\})$, l'équation (3.13) peut être ré-écrite comme

$$\mathbf{X}_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z}^2 \cap \mathfrak{R}^{-1}(\mathbf{X} \oplus \square) \quad (3.14)$$

$$\bar{\mathbf{X}}_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z}^2 \cap \mathfrak{R}^{-1}(\bar{\mathbf{X}} \oplus \square) \quad (3.15)$$

où \oplus est l'opérateur de dilatation et $\square \subset \mathbb{R}^2$ est le carré unitaire d'un pixel.

Remarque 10. Nous rappelons ci-dessous quelques opérateurs classiques de la morphologie mathématique [168, 348, 375].

On note par \oplus et \ominus les opérateurs classiques de dilatation et d'érosion, correspondant à l'addition de Minkowski, et sa soustraction associée

$$X \oplus Y = \bigcup_{y \in Y} X_y = \bigcup_{x \in X} Y_x \quad (3.16)$$

$$X \ominus Y = \bigcap_{y \in Y} X_{-y} \quad (3.17)$$

où $X_y = \{x + y \mid x \in X\}$. On note aussi par \circ la composition de l'érosion et de la dilatation, nommée ouverture (*opening* en anglais)

$$X \circ Y = (X \ominus Y) \oplus Y. \quad (3.18)$$

Remarque 11. Afin d'effectuer des mouvements rigides avec des calculs exacts – sans aucune approximation numérique – on ne peut considérer que des mouvements rigides avec des paramètres rationnels, appelé mouvement rigide rationnel. En le faisant, seuls des calculs avec des entiers sont impliqués. Il faut dire que cela ne constitue pas une restriction applicative, en raison de la densité des valeurs rationnelles dans l'espace des paramètres de rotation et de translation.

Nous supposons ci-dessous que tous les paramètres d'un mouvement rigide \mathfrak{R} sont rationnels (voir équation (3.9)). Plus précisément, nous considérons uniquement les angles de rotation θ dans le sous-ensemble de $[0, 2\pi[$ qui contient des valeurs construites à partir de triplets de Pythagore³ [21], appelées rotations rationnelles. Plus formellement, pour un tel θ , il existe un triple $(p, q, r) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $p^2 + q^2 = r^2$, qui satisfait $\cos \theta = \frac{p}{r}$, $\sin \theta = \frac{q}{r}$ (et $\tan \theta = \frac{q}{p}$). En d'autres termes, $\cos \theta = \frac{p}{r}$ et $\sin \theta = \frac{q}{r} \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Par conséquent, nous avons la garantie que $\cos \theta, \sin \theta$ sont des rationnels. De plus, nous supposerons également que le vecteur de translation $t = {}^t(t_x, t_y) \in \mathbb{Q}^2$. Alors, le mouvement rigide dans l'équation (3.9) peut être ré-écrit à partir de $(\frac{p}{r}, \frac{q}{r}, t_x, t_y) \in \mathbb{Q}^4$, pour tout $\mathbf{p} = {}^t(p_x, p_y) \in \mathbb{Q}^2$, nous avons :

$$\mathfrak{R}(\mathbf{p}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2 \quad (3.19)$$

3.3 Travaux existants

En infographie et en traitement d'images, il existe différentes techniques d'interpolation qui sont appliquées aux images (binaires/en niveaux de gris/couleurs) en pratique pour leurs transformations géométriques (par exemple le redimensionnement et la rotation [144, 151, 312]). Le processus crée alors une *nouvelle image* transformée en interpolant – ajouter/modifier – la couleur et aussi la nature de l'image d'origine. Ceci peut générer des artefacts et entraîner des *biais* indésirables de connexité et de géométrie dans l'image résultante. Nous pouvons observer des biais (visuels) engendrés par l'interpolation linéaire et cubique [151] dans l'image transformée sur la Figure 3.7. Sur cette figure, le bord du carré dans I_1 devient *flou*, tandis que les cercles concentriques dans I_2 sont complètement déformés après la transformation avec l'interpolation, et déconnectés dans le cas sans interpolation. La Figure 3.8 montre un autre exemple avec l'image en couleurs de taille 220×282 . Dix rotations aléatoires successives ont été appliquées sur l'image avec l'algorithme d'interpolation linéaire, en utilisant le logiciel GIMP. On observe un très fort flou dans l'image résultante.

3. Il est également montré dans [21] que nous pouvons toujours trouver des valeurs rationnelles aussi proches que souhaitées de toutes les valeurs réelles pour définir un tel triplet de Pythagore.

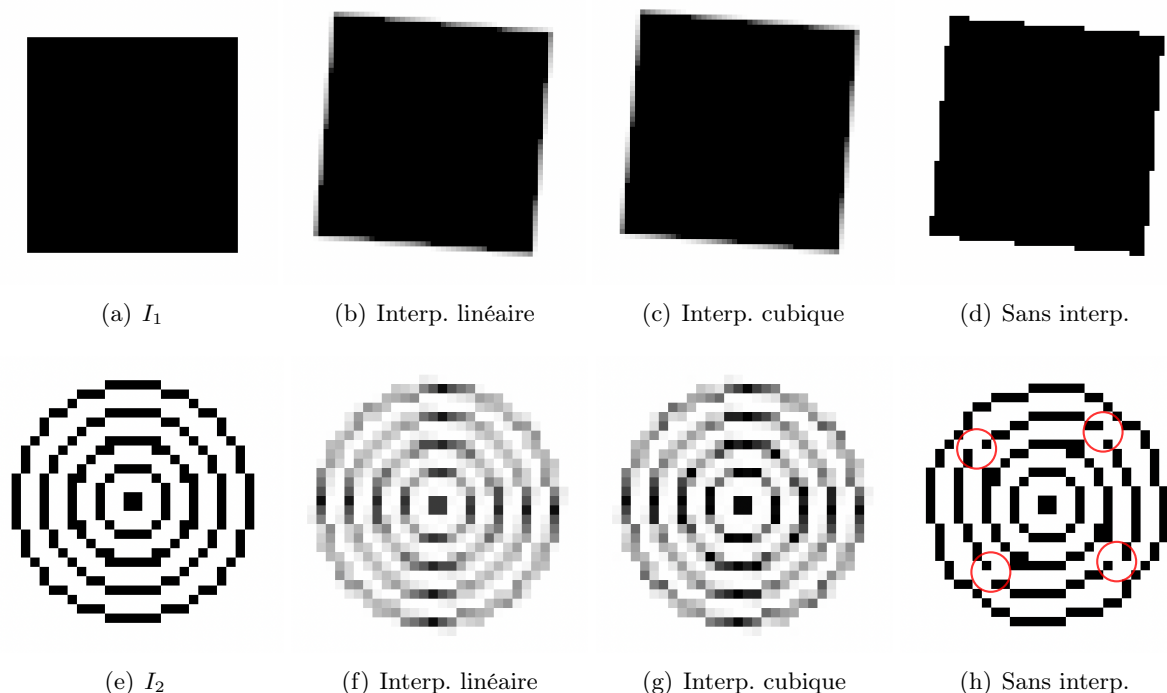


FIGURE 3.7 – Les images binaires d’entrée (première colonne) deviennent des images en niveaux de gris après une rotation de 5° avec l’interpolation linéaire (deuxième colonne) ou cubique (troisième colonne). Les problèmes topologiques comme la perte de connexité (cercles rouges) peuvent apparaître dans l’image résultante sans interpolation (dernière colonne, deuxième ligne). Transformations réalisées avec le logiciel GIMP (<https://www.gimp.org/>).

Par ailleurs, l’évaluation de la qualité d’une méthode d’interpolation est généralement faite avec une mesure basée sur le traitement du signal, telle que l’erreur quadratique moyenne [259]. Par conséquent, la préservation des propriétés topologiques (et géométriques) associées aux contenus d’images numériques n’est pas correctement évaluée. À notre connaissance, très peu d’études sont faites directement dans l’espace discret associé à l’image numérique et avec des concepts de géométrie et de topologie discrètes.

Durant ma thèse [T1], intitulée “*Transformations rigides sur les images numériques 2D Analyse combinatoire et topologique*”, nous avons développé une nouvelle approche permettant de modéliser et manipuler les mouvements rigides des images numériques 2D. Plus précisément, les mouvements rigides d’un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^2 se regroupent en *classes d’équivalence* correspondant chacune à une seule image transformée. Nous avons montré que les relations entre ces classes peuvent être modélisées par une structure de graphe [J12], noté \mathcal{G} . Il est également prouvé que \mathcal{G} a une complexité spatiale de $\mathcal{O}(N^9)$, où $N \times N$ correspond à la taille d’image considérée. En particulier, l’utilisation de \mathcal{G} permet de générer tous les mouvements rigides discrétisés d’une image de taille finie. Le graphe \mathcal{G} est utilisé pour évaluer globalement le comportement topologique des images numériques soumis à des mouvements rigides. Plus important encore, en construisant \mathcal{G} avec la caractérisation locale de points simples [146], une approche locale par *patch* a été développée dans [J10] pour caractériser l’invariant topologique d’images par mouvement rigide. Plus précisément, un ensemble des configurations topologiquement invariantes est trouvé et stocké dans une table de correspondance (Look-Up-Table (LUT) en anglais) pour ensuite être



FIGURE 3.8 – Illustration d’interpolation pour les images en couleurs : Image origine (gauche) et image transformée (droite) par des rotations aléatoires successives avec le logiciel GIMP. Images issues de [156].

utilisé dans la vérification de l’invariant topologique. La méthode a cependant une complexité liée à la taille de l’image mais aussi à la taille de LUT.

Pour répondre à la question de l’invariant topologique par le processus de discrétisation, plusieurs travaux ont été proposés dans la littérature [236, 312, 375, 398]. En particulier, Pavlidis, dans les années 1980, peut être considéré comme le pionnier de la condition de préservation de la topologie des objets discrets. Il a proposé la notion de *r-régularité* (*r-regularity* en anglais) et aussi établi les liens topologiques entre l’objet euclidien et son homologue discret.

Définition 12 (*r-regularité* [312]). *Soit $r > 0$. Un ensemble borné $X \subset \mathbb{R}^2$ est r -régulier si pour chaque $x \in \delta X$, il existe deux disques $B_r(x_i) \subset X$ et $B_r(x_e) \subset \overline{X}$, tel que $B_r(x_i) \cap B_r(x_e) = \{x\}$, où $B_r(c)$ est le disque de centre c et de rayon r .*

En termes simples, l’objet X est dit r -régulier si pour chaque point x appartenant au bord de X , il y a deux disques osculateurs de rayon r dont l’un est inclus entièrement dans X et l’autre dans son complémentaire \overline{X} . L’exemple de la r -régularité (en 2D et l’extension en 3D) est illustré sur la Figure 3.9. Une re-formulation de cette notion avec la morphologie mathématique sera donnée dans la Section 3.6.1.

La r -régularité est basée sur des concepts classiques de la géométrie différentielle. En particulier, elle est fortement liée aux valeurs bornées de courbure qui sont paramétrées par la résolution de la grille de discrétisation (*digitization sampling* en anglais). Pavlidis a prouvé l’équivalence topologique d’un objet continu r -régulier et lisse (*smooth* en anglais) X et de l’objet discrétisé correspondant X , pour un échantillonnage dense.

Proposition 13 ([312]). *Un objet r -régulier $X \subset \mathbb{R}^2$ a la même structure topologique que l’objet discrétisé $X = X \cap \mathbb{Z}^2$ si $r \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.*

Dans [312], il est précisé que la même structure topologique entre deux objets signifie qu’il existe un homéomorphisme entre les deux. Il a été montré dans [236] que la discrétisation de Gauss d’un objet r -régulier donne un objet bien composé, dont la définition repose sur des concepts classiques de la topologie discrète.

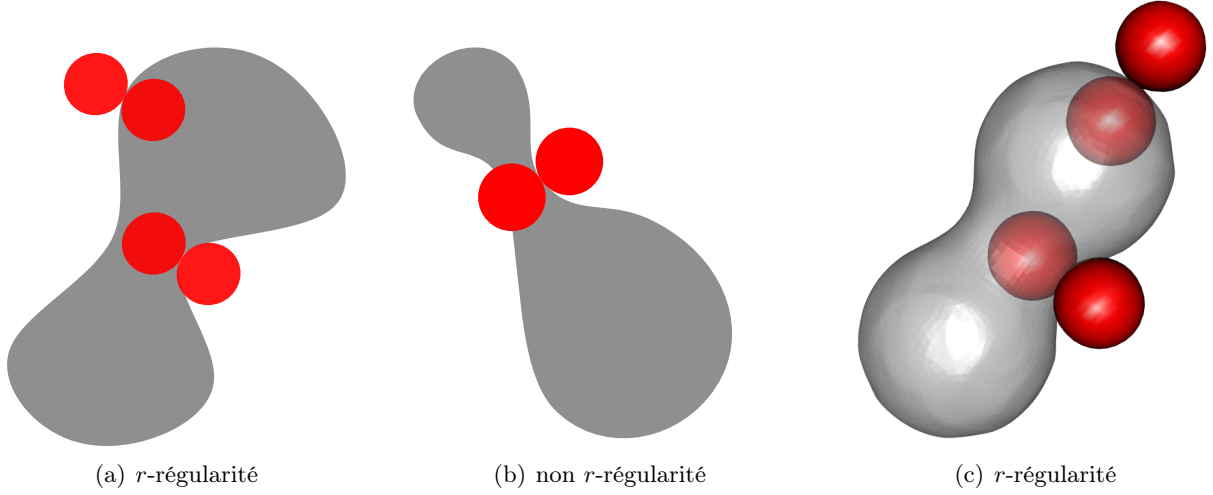


FIGURE 3.9 – Illustration de r -régularité : (a) un objet r -régulier en 2D, (b) un objet non r -régulier en 2D, et (c) un objet r -régulier en 3D. Les disques/boules de rayon r sont en rouge.

Proposition 14 ([236]). *Si un objet euclidien $X \subset \mathbb{R}^2$ est r -régulier, avec $r \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors l'objet discrétisé $X = X \cap \mathbb{Z}^2$ est bien composé.*

Par définition, les objets r -réguliers X doivent vérifier deux conditions : le bord de X est *lisse*, c'est-à-dire différentiable, et X a une *épaisseur* minimale positive. Autrement, la r -régularité n'inclut pas des objets ayant des coins (corners en anglais) comme les polygones. Pour lever cette limitation, P. Stelldinger and K. Terzic ont proposé dans [399] une régularisation, nommé *r -demi-régularité* (*r -halfregularity* en anglais), afin de transformer certaines classes d'objets en classe r -régulière.

Définition 15 (*r -demi-régularité* [399]). *Un ensemble fini $X \subset \mathbb{R}^2$ est dit r -demi-régulier si pour chaque $x \in \delta X$, il existe au moins un disque osculateur, de centre x_c et de rayon r , $B_r(x_c)$ de x tel que $B_r(x_c) \subset X$ ou $B_r(x_c) \subset \bar{X}$.*

La *r -demi-régularité* est une extension de la r -régularité pour des objets avec des bords non différentiables (voir Figure 3.10 (a)). En effet, elle demande seulement l'un des deux disques osculateurs pour chaque point au bord de X . Toujours dans [399], il est montré que la r -demi-régularité permet un objet discrétisé topologiquement correct en utilisant une étape supplémentaire de réparation/correction, nommée *r -régularisation*, pour transformer un objet r -régulier (voir Figure 3.10 (b)).

Plus tard, Meine *et al.* présentent dans [274] une nouvelle définition, nommé *r -stabilité* (*r -stability* en anglais), généralisée de la r -demi-régularité pour l'invariant topologique des objets euclidiens par discrétisation.

Définition 16 (*r -stabilité* [274]). *Un ensemble fini $X \subset \mathbb{R}^2$ est dit r -stable si δX peut être dilaté avec un disque fermé de rayon s sans changer son type d'homotopie pour $s \leq r$.*

L'exemple de la r -stabilité est donné sur la Figure 3.10 (c). Il faut savoir que les deux notions, r -demi-régularité et r -stabilité, ne donnent aucune garantie que l'objet discrétisé soit bien composé, mais seulement l'équivalence d'homotopie. Elles ne permettent pas de contrôler la géométrie de l'objet résultant non plus.

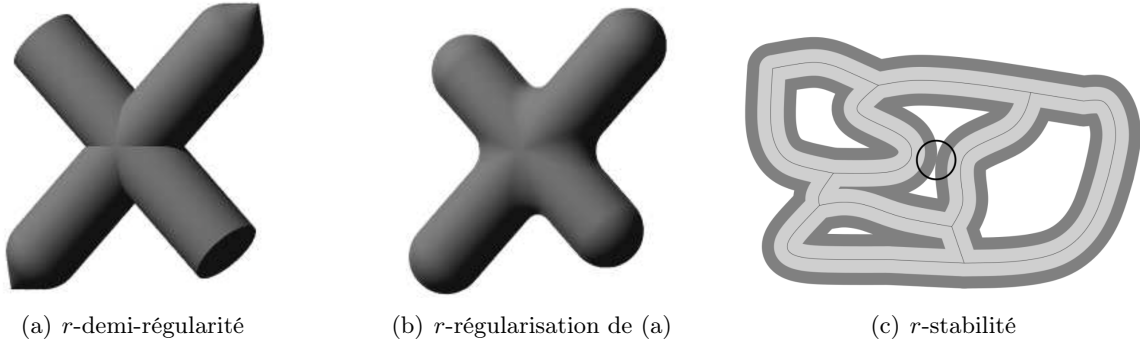


FIGURE 3.10 – (a) Exemple d'un objet r -demi-régulier et (b) la r -régularisation de (a) et (c) un objet r -stable. Les images (a) et (b) sont issues de [399] et (c) de [274].

Récemment, Le Quentrec *et al.* dans [239] ont présenté la notion de *courbe délimitée localement* (locally turn-bounded curve (LTB) en anglais) et dérivé des propriétés liées à sa discrétisation.

Définition 17 (Courbe délimitée localement [239]). *Soit $\theta \geq 0, \delta \geq 0$. Une courbe de Jordan \mathcal{C} est (θ, δ) -délimitée localement, noté (θ, δ) -LTB, si pour les deux points $x, y \in \mathcal{C}$, telle que la distance euclidienne $d(x, y) < \delta$, l'angle d'un des arcs de \mathcal{C} connectant x et y est plus petit ou égal à θ .*

Proposition 18 ([239]). *Soit \mathcal{C} une (θ, δ) -LTB courbe avec $\theta \leq \frac{\pi}{2}$. La discrétisation de Gauss de \mathcal{C} est bien composée avec une grille de taille compatible avec \mathcal{C} .*

Il est mentionné dans [239] que LTB exclut des courbes pour lesquelles l'estimation géométrique n'est pas possible, par exemple les courbes contenant de petites oscillations.

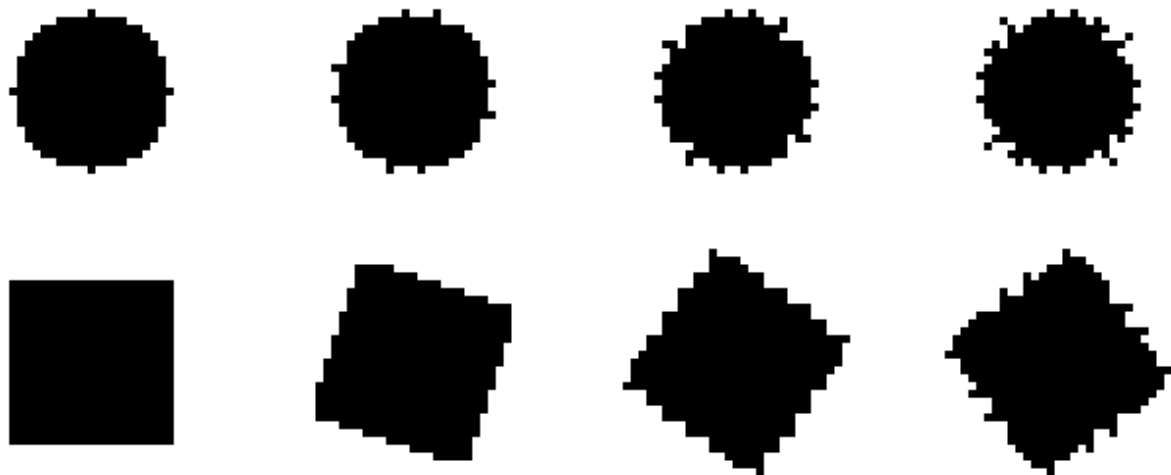
C'est dans ce contexte que nous positionnons notre travail sur l'étude des propriétés topologiques et géométriques des objets digitaux par mouvements rigides dans l'espace discret de $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^3$. La partie suivante présente une synthèse de travaux réalisés sur le sujet.

3.4 Apports

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, les mouvements rigides discrétisés \mathcal{R} altèrent généralement les propriétés topologiques et géométriques dans l'espace transformé à cause du processus de discrétisation \mathfrak{D} . Au regard de ces problèmes, nous cherchons à mieux les comprendre, et ensuite proposons quelques solutions qui abordent une partie des problèmes mentionnés. En particulier, nous nous intéressons au développement de nouvelles approches pour la modélisation et la manipulation des mouvements rigides qui sont adaptés aux espaces discrets des images numériques avec des algorithmes exacts⁴ pour éviter les approximations liées à l'arithmétique à virgule flottante.

L'étude est principalement divisée en deux parties. Dans un premier temps, nous étudions des conditions sur les images numériques permettant de préserver leurs propriétés topologiques lorsqu'on leur applique des mouvements rigides arbitraires. Dans ce travail, nous choisissons la notion d'arbre d'adjacence pour l'invariant topologique parce qu'elle permet, d'un part, la préservation de la topologie de manière *globale*, et d'autre part des modifications/vérifications

4. Ce sont les algorithmes n'utilisant notamment que des calculs en nombres entiers.



(e) Image d'entrée

FIGURE 3.11 – Illustration du problème géométrique du modèle de transformation point par point. De gauche à droite : l'image d'entrée, et les images tournées par un angle de $\frac{\pi}{10}$, $\frac{2\pi}{10}$ et $\frac{3\pi}{10}$.

locales de la structure topologique de l'image (voir plus de détails dans la *Section 3.5.1*). Basé sur un résultat théorique sur la condition d'invariant topologique sur \mathbb{Z}^2 dans la *Section 3.5.2*, une classe d'images, nommée *images régulières*, est identifiée comme celles permettant la préservation topologique par tous les mouvements rigides. Ce résultat est généralisé en terme de modèles topologiques (la double adjacence et la bonne composition) et aussi les valeurs d'images (images binaires, de niveaux de gris et étiquetées). Différents algorithmes ont été également développés dans les *Sections 3.5.3* et *3.5.4* pour analyser et pré-traiter des images avant la transformation. En particulier, nous montrons que, en doublant la résolution (*i.e.* en associant un carré de 2×2 pixels à chaque pixel d'image), les images bien composées deviennent nécessairement régulières. Ceci conduit à la proposition d'un algorithme efficace pour la *régularisation d'images* basée sur un sur-échantillonnage (up-sampling en anglais) d'images. Il faut mentionner que cette stratégie de sur-échantillonnage dans \mathbb{Z}^2 ne peut pas être directement étendue à \mathbb{Z}^3 car elle conduit à des problèmes topologiques ouverts induits par des mouvements rigides discrétisés 3D [30] (voir plus de détails dans la *Section 3.5.6*).

Même si très simple et efficace pour la préservation topologique, la notion de la régularité sur \mathbb{Z}^2 n'aborde pas la question de l'altération de la géométrie. En effet, le modèle de mouvement rigide, tel que défini dans les *équations (3.14)–(3.15)* de la *Section 3.2.4*, transforme indépendamment chaque point de l'objet discret. Il est alors incapable de préserver la cohérence globale de l'objet, conduisant ainsi à un résultat *bruité*, en particulier pour le bord de l'objet comme dans l'exemple sur la *Figure 3.11* pour un disque de rayon 10 pixels et un carré de taille 21×21 .

Au regard de cette limitation du modèle point par point, nous présentons un nouveau modèle de mouvement rigide sur \mathbb{Z}^2 permettant de préserver à la fois les propriétés topologiques et géométriques. L'idée principale est d'appliquer le mouvement rigide sur un objet dans son ensemble, mais pas point par point, en utilisant les *modèles continus* comme intermédiaires, *i.e.* un paradigme mixte entre discret et continu.

Plusieurs voies ont été exploitées. Une des solutions est d'utiliser les représentations polygonales des objets discrets, partant de l'hypothèse que le polygone peut capturer de manière

pertinente la géométrie de l'objet considéré. L'approche est très simple. Elle repose notamment sur trois étapes : (1) calculer une représentation polygonale de l'objet discret, (2) transformer le polygone et (3) discrétiser le résultat pour avoir un objet dans \mathbb{Z}^2 . Il faut cependant faire attention à la troisième étape. En effet, comme mentionné dans la *Section 2.3* la connexité X peut être modifiée à cause de \mathfrak{D} (voir *Figure 2.7*). Il s'agit d'un sujet classique de la géométrie discrète : la caractérisation des objets euclidiens préserve ses propriétés topologiques par la discrétisation.

Pour répondre à ce problème, nous introduisons une notion, appelée *quasi- r -régularité*, généralisée de la r -régularité de Pavlidis [312] pour les objets dont le bord n'est pas forcément différentiable. Cette notion est appliquée aux polygones représentés des objets discrets et permet de garantir la préservation de la connexité de l'objet discrétisé (voir plus de détails dans la *Section 3.6.1*).

Dans cette approche, la discrétisation de Gauss du polygone doit nous ramener à l'objet discret initial (voir *Section 3.6.3*). En d'autres termes, la *forme globale* de l'objet – donc la *succession des parties convexe et concave* de son bord – doit être capturée par le processus de polygonalisation. Cela signifie qu'un objet discret convexe de \mathbb{Z}^2 conduira à un polygone convexe, et cette propriété est également conservée pour l'objet transformé discrétisé. La notion de quasi- r -régularité et l'approche proposée sont facilement étendues en \mathbb{Z}^3 .

En résumé, notre contribution sur ce sujet, du point de vue théorique, est de mieux comprendre les relations topologiques et géométriques par mouvement rigide dans l'espace discret des images. D'un point de vue pratique, nous proposons des solutions simples permettant de traiter ces propriétés dans l'espace discret de \mathbb{Z}^2 et aussi l'extension aux dimensions supérieures.

Dans la suite du chapitre, nous expliquerons en détail les notions et les résultats théoriques décrits précédemment. Les méthodes proposées ainsi que les résultats expérimentaux seront également présentés et discutés dans les parties correspondantes.

3.5 Caractérisations topologiques

Étant donnée une image $I \in \mathcal{IM}_V$, une transformation $\mathcal{R} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, et l'image transformée $I_{\mathcal{R}} \in \mathcal{IM}_V$, résultat de I par \mathcal{R} , une question fréquemment soulevée dans l'analyse d'images est : “ \mathcal{R} conserve-t-il la topologie entre I et $I_{\mathcal{R}}$?”. On peut répondre à cette question en observant les invariants topologiques de ces images.

Dans cette partie, nous nous intéressons à ce problème d'invariant topologique. De manière plus précise, notre objectif est d'étudier des conditions dans lesquelles les images numériques conservent leurs propriétés topologiques lorsqu'on leur applique des mouvements rigides arbitraires. Pour cela, une question cruciale est le choix de l'invariant topologique utilisé pour formaliser ce problème.

3.5.1 Invariant topologique

Nous introduisons ci-dessous notre définition de l'invariant topologique pour la préservation topologique des images numériques par mouvement rigide.

Parmi les invariants topologiques, les plus simples figurent la caractéristique d'Euler-Poincaré [157] et les nombres de Betti [431]. Cependant, ceux-ci sont trop faibles pour modéliser avec précision la notion de *préservation de la topologie* entre les images numériques [267]. Par conséquent, il est nécessaire de considérer des invariants topologiques plus forts, par exemple le groupe fondamental (numérique) [214], le type homotopique (considéré via la notion de points simples [146, 148, 80]), ou l'arbre d'adjacence (adjacency tree en anglais) [350]. Pour la suite, nous consi-

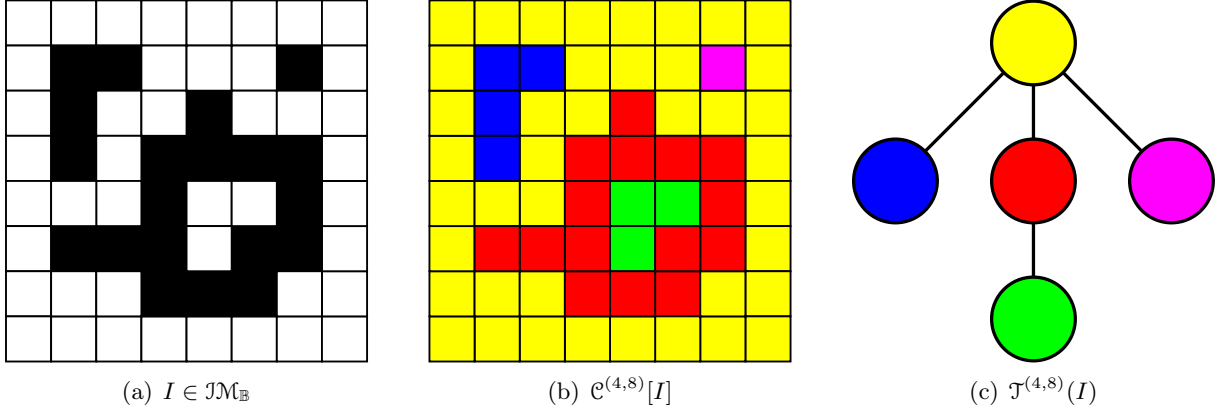


FIGURE 3.12 – Exemple de l'arbre d'adjacence (c) associé à l'image binaire (a) et ses composantes connexes (b).

dérons le dernier comme un invariant (global) topologique. La motivation de ce choix est double : (i) la compréhension de cet invariant topologique est probablement le plus facile ; et (ii) dans le cas 2D, sa préservation est équivalente [353] à celle des types homotopiques (homotopy-type en anglais) qui est l'invariant topologique le plus couramment utilisé dans le traitement d'images.

Soit $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{B}}$ (resp. $\mathcal{WC}_{\mathbb{B}}$), $X_1, X_2 \in \mathcal{C}^{(k, \bar{k})}[I]$ (resp. $\mathcal{C}^{wc}[I]$), avec $X_1 \neq X_2$. On note $X_1 \curvearrowright_I^{(k, \bar{k})} X_2$ (resp. $X_1 \curvearrowright_I^{wc} X_2$) s'il existe $p \in X_1$ and $q \in X_2$ tel que $p \curvearrowright_4 q$. Il est évident que $\curvearrowright_I^{(k, \bar{k})}$ (resp. \curvearrowright_I^{wc}) est une relation d'adjacence, et que $X_1 \curvearrowright_I^{(k, \bar{k})} X_2$ implique $X_1 \in I^{-1}(\{1\})/\sim_k$ et $X_2 \in I^{-1}(\{0\})/\sim_{\bar{k}}$ ou inversement. On définit maintenant le (k, \bar{k}) - (resp. wc -) *graphe d'adjacence* de I comme $\mathcal{G}^{(k, \bar{k})}(I) = (\mathcal{C}^{(k, \bar{k})}[I], \curvearrowright_I^{(k, \bar{k})})$ (resp. $\mathcal{G}^{wc}(I) = (\mathcal{C}^{wc}[I], \curvearrowright_I^{wc})$). Ce graphe est connexe et acyclique, en particulier donc est un arbre. Il peut être équipé d'une racine qui est la (seule) composante connexe infinie de $\mathcal{C}^{(k, \bar{k})}[I]$ (resp. $\mathcal{C}^{wc}[I]$) qui correspond à la partie de fond de I .

Définition 19 (Arbre d'adjacence [350]). Soit $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{B}}$ (resp. $\mathcal{WC}_{\mathbb{B}}$). Le (k, \bar{k}) - (resp. wc -) arbre d'adjacence de I est un triplet

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(k, \bar{k})}(I) &= (\mathcal{C}^{(k, \bar{k})}[I], \curvearrowright_I^{(k, \bar{k})}, B_I^{(k, \bar{k})}) \\ (\text{resp. } \mathcal{T}^{wc}(I) &= (\mathcal{C}^{wc}[I], \curvearrowright_I^{wc}, B_I^{wc})) \end{aligned} \quad (3.20)$$

où $B_I^{(k, \bar{k})} \in \mathcal{C}^{(k, \bar{k})}[I]$ (resp. $B_I^{wc} \in \mathcal{C}^{wc}[I]$) est l'unique composante connexe infinie de I .

Un exemple d'arbre d'adjacence est donné dans la Figure 3.12 : l'image binaire d'entrée est dans (a), les composantes connexes de l'objet (en rouge, bleu et violet) et du fond (en jaune et vert) sont dans (b), et l'arbre d'adjacence associé est représenté dans (c) dans lequel chaque nœud coloré correspond à une composante connexe de (a, b), tandis que chaque arête correspond à la relation d'adjacence entre deux composantes connexes.

Maintenant que la topologie associée à l'image est définie, nous pouvons présenter notre définition de la préservation de la topologie par mouvements rigides.

Définition 20 (Invariant topologique). Soit $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{B}}$ (resp. $\mathcal{WC}_{\mathbb{B}}$). I est dit (k, \bar{k}) - (resp. wc -) topologiquement invariant si $I_{\mathcal{R}} = I \circ \mathcal{R} \in \mathcal{IM}_{\mathbb{B}}$ (resp. $\mathcal{WC}_{\mathbb{B}}$) et pour toute $\mathcal{R} \in \mathcal{RJS}_{\mathbb{Z}^2}$ induit un isomorphisme entre $\mathcal{T}^{(k, \bar{k})}(I)$ (resp. $\mathcal{T}^{wc}(I)$) et $\mathcal{T}^{(k, \bar{k})}(I \circ \mathcal{R})$ (resp. $\mathcal{T}^{wc}(I \circ \mathcal{R})$).

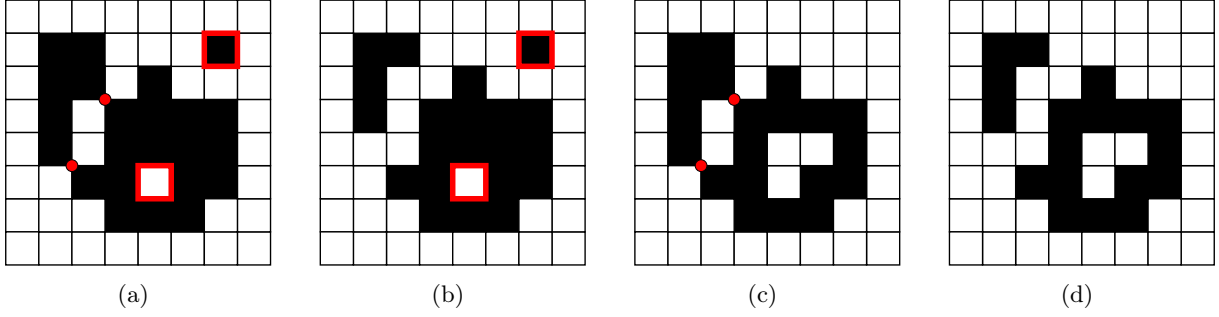


FIGURE 3.13 – Exemples d’images (a) singulière et faiblement-composée, (b) singulière et bien composée, (c) ni singulière ni bien composée, et (d) non singulière mais bien composée. Les points rouges indiquent la faible composition, tandis que les carrés rouges indiquent les singularités.

On note $\mathcal{INV}_{\mathbb{B}}^{(k, \bar{k})}$ (resp. $\mathcal{INV}_{\mathbb{B}}^{wc}$) l’ensemble de toutes les (k, \bar{k}) - (resp. wc -) images binaires topologiquement invariantes pour toute \mathcal{R} .

En termes simples, une image binaire I est dite *topologiquement invariante* si, pour toute image transformée $I_{\mathcal{R}}$, son arbre d’adjacence est isomorphe à celui de I .

Dans la suite, nous proposons la condition, nommée *régularité*, pour atteindre notre objectif d’invariant topologique.

3.5.2 Régularité

Tout d’abord, nous limitons notre étude de (k, \bar{k}) -invariant topologique avec les images binaires $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{B}}$, et en particulier le sous-espace $I \in \mathcal{WC}_{\mathbb{B}} \subset \mathcal{IM}_{\mathbb{B}}$, parce que les images $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{B}} \setminus \mathcal{WC}_{\mathbb{B}}$, présentent des configurations (\mathfrak{C}_1 , Théorème 6), et donc ne sont pas conformes à la définition de l’invariant topologique (voir Définition 20).

Nous introduisons maintenant la notion de *singularité* (singularity en anglais), et établissons que les images *singulières* ne peuvent pas être topologiquement invariantes. Ceci réduit encore la classe d’images à considérer.

Définition 21 (Image (non) singulière). *Soit $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{B}}$. L’image I est dite singulière si*

$$\exists p \in \mathbb{Z}^2, \forall q \in \mathbb{Z}^2, (q \curvearrowright_4 p) \implies (I(p) \neq I(q)), \quad (3.21)$$

sinon I est dite non singulière.

On note $\mathcal{NS}_{\mathbb{B}}$ l’ensemble des images bien composées et non singulières. En termes simples, les images non singulières sont celles qui ne contiennent pas de pixels *isolés*. Des exemples d’images singulières et non singulières sont donnés sur la Figure 3.13.

La non invariabilité topologique des images singulières est dérivée de la non surjectivité de certains mouvements rigides de $\mathcal{RG}_{\mathbb{Z}^2}$ [C28], [307]. En effet, certaines de ces transformations peuvent supprimer des composantes connexes qui sont composées exactement d’un pixel. Plus précisément, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 22 ([J11]).

$$\mathcal{INV}_{\mathbb{B}}^{wc} \subseteq (\mathcal{INV}_{\mathbb{B}}^{(k, \bar{k})} \cap \mathcal{WC}_{\mathbb{B}}) \subseteq \mathcal{NS}_{\mathbb{B}}. \quad (3.22)$$

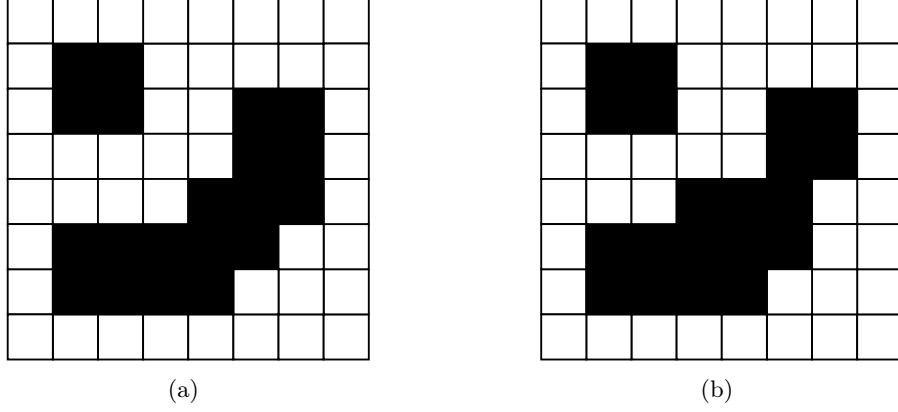


FIGURE 3.14 – (a) Une image régulière. (b) Une image qui n'est ni 1- ni 0-régulière, mais pourtant identique à son ouverture par l'élément structurant \boxplus , à la fois pour les points noirs et blancs.

Pour la suite, l'étude de l'invariant topologique est réalisée sur l'ensemble des images non singulières bien composées, indépendamment du modèle considéré (la double adjacence ou la bonne composition).

Nous introduisons maintenant la notion de *régularité* qui renforce la bonne composition.

Définition 23 (Régularité). *Soit $I \in \mathcal{NS}_{\mathbb{B}}$ et $v \in \{0, 1\}$. L'image I est dite v -régulière si pour tout $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in I^{-1}(\{v\})$, on a*

$$(\mathbf{p} \frown_4 \mathbf{q}) \implies (\exists \boxplus \subseteq I^{-1}(\{v\}), \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \boxplus), \quad (3.23)$$

où $\boxplus = \{x, x+1\} \times \{y, y+1\}$, pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que I est régulière si elle est à la fois 0- et 1-régulières.

On note $\mathcal{REG}_{\mathbb{B}}^1$ (resp. $\mathcal{REG}_{\mathbb{B}}^0$, resp. $\mathcal{REG}_{\mathbb{B}}$) l'ensemble des images binaires 1-régulières (resp. 0-régulières, resp. régulières). Un exemple d'image régulière est donné dans la Figure 3.14 (a).

Suivant la terminologie de la morphologie mathématique [286, Chapitre 1], si I est 1- (resp. 0-) régulière, alors $\mathbf{X} = I^{-1}(\{1\})$ (resp. $I^{-1}(\{0\})$) est la même que son ouverture par l'élément structurant \boxplus , c'est-à-dire

$$\gamma_{\boxplus}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \ominus \boxplus \oplus \boxplus = \mathbf{X} \circ \boxplus = \mathbf{X}. \quad (3.24)$$

Il faut noter que la réciproque n'est pas vrai, comme illustré sur la Figure 3.14 (b) dans laquelle $\gamma_{\boxplus}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ mais \mathbf{X} n'est pas régulier.

Nous établissons maintenant notre résultat théorique lié à la régularité pour l'invariant topologique pour les images binaires.

Théorème 24 ([J11]).

$$\mathcal{REG}_{\mathbb{B}}^0 \subseteq \mathcal{INV}_{\mathbb{B}}^{(8,4)} \quad (3.25)$$

$$\mathcal{REG}_{\mathbb{B}}^1 \subseteq \mathcal{INV}_{\mathbb{B}}^{(4,8)} \quad (3.26)$$

$$\mathcal{REG}_{\mathbb{B}} \subseteq \mathcal{INV}_{\mathbb{B}}^{wc}. \quad (3.27)$$

Ce résultat est directement étendu aux images en niveaux de gris et aux images étiquetées. Plus de détails, ainsi que les preuves et les démonstrations sont donnés dans [J11], [C27].

Extension aux images en niveaux de gris

Une image en niveaux de gris $I : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{G}$ tel que \mathbb{G} est un sous-ensemble fini et totalement ordonné de \mathbb{Z} ou \mathbb{R} . Elle est alors isomorphe à $I : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{G}$, où $\mathbb{G} = \llbracket 0, m \rrbracket \subset \mathbb{Z}$ et $\perp = 0$. Sans perte de généralité, nous nous concentrons alors sur ces images dans la suite.

Une image en niveaux de gris $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{G}}$ peut être modélisée par l'ensemble fini d'images binaires de niveau (binary level-set images en anglais) $\lambda_v(I) \in \mathcal{IM}_{\mathbb{B}}$ qui est défini, pour tout $v \in \mathbb{G}$, par

$$\left| \begin{array}{lcl} \lambda_v(I) & : & \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{B} \\ & & \mathbf{p} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } v \leq I(\mathbf{p}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.28)$$

L'image I est alors reconstruite comme le supremum de ces images binaires de niveaux, par rapport à l'ordre \leq sur les fonctions induites par l'ordre \leq sur \mathbb{G} , c'est-à-dire

$$I = \bigvee_{v \in \mathbb{V}}^{\leq} v \cdot \lambda_v(I) \quad (3.29)$$

Sur la base de cette modélisation de $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{G}}$ par $\{\lambda_v(I)\}_{v \in \mathbb{G}}$, les notions précédemment introduites pour les images binaires peuvent être étendues aux niveaux de gris⁵ comme suit :

$$\mathcal{WC}_{\mathbb{G}} = \{I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{G}} \mid \forall v \in \mathbb{G}, \lambda_v(I) \in \mathcal{WC}_{\mathbb{B}}\} \quad (3.30)$$

$$\mathcal{NS}_{\mathbb{G}} = \{I \in \mathcal{WC}_{\mathbb{G}} \mid \forall v \in \mathbb{G}, \lambda_v(I) \in \mathcal{NS}_{\mathbb{B}}\} \quad (3.31)$$

De plus, on peut définir les analogues des notions binaires d'invariant topologique (*Définition 20*) et de la régularité (*Définition 23*).

Définition 25 (Invariant topologique pour image en niveaux de gris). *Une image $I \in \mathcal{NS}_{\mathbb{G}}$ est (k, \bar{k}) - (resp. wc -) invariante topologiquement si pour tout $v \in \mathbb{G}$, $\lambda_v(I) \in \mathcal{INV}_{\mathbb{B}}^{(k, \bar{k})}$ (resp. $\mathcal{INV}_{\mathbb{B}}^{wc}$).*

On note $\mathcal{INV}_{\mathbb{G}}^{(k, \bar{k})}$ (resp. $\mathcal{INV}_{\mathbb{G}}^{wc}$) l'ensemble de toutes les (k, \bar{k}) - (resp. wc -) images aux niveaux de gris topologiquement invariantes.

Définition 26 (Régularité pour image en niveaux de gris). *Une image $I \in \mathcal{NS}_{\mathbb{G}}$ est 1-régulière (resp. 0-régulière, resp. régulière) si pour tout $v \in \mathbb{G}$, $\lambda_v(I) \in \mathcal{REG}_{\mathbb{B}}^1$ (resp. $\mathcal{REG}_{\mathbb{B}}^0$, resp. $\mathcal{REG}_{\mathbb{B}}$).*

On note $\mathcal{REG}_{\mathbb{G}}^1$ (resp. $\mathcal{REG}_{\mathbb{G}}^0$, resp. $\mathcal{REG}_{\mathbb{G}}$) l'ensemble de toutes images en niveaux de gris 1-régulière (resp. 0-régulières, resp. régulières).

Le théorème suivant est analogue au *Théorème 24*, dérive directement de celui-ci, s'appuie sur les *Définitions 25* et *26* et s'applique aux images en niveaux de gris.

Théorème 27 ([J11]).

$$\mathcal{REG}_{\mathbb{G}}^0 \subseteq \mathcal{INV}_{\mathbb{G}}^{(8,4)} \quad (3.32)$$

$$\mathcal{REG}_{\mathbb{G}}^1 \subseteq \mathcal{INV}_{\mathbb{G}}^{(4,8)} \quad (3.33)$$

$$\mathcal{REG}_{\mathbb{G}} \subseteq \mathcal{INV}_{\mathbb{G}}^{wc} \quad (3.34)$$

5. Une notion de bonne composition en niveaux de gris a également été proposée dans [262].

L'invariabilité topologique de $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{G}}$ conduit également à la préservation de la hiérarchie de ses composantes connexes entre niveaux successifs. Plus précisément, le (k, \bar{k}) - (resp. wc -) invariant topologique implique que pour tout $\mathcal{R} \in \mathcal{RJG}_{\mathbb{Z}^2}$, les images I et $I_{\mathcal{R}}$ ont des arbres de composantes connexes isomorphes [286, 362, 363]. La preuve de cette affirmation est basée sur le fait que : (i) \mathcal{R} établit une bijection entre les composantes connexes des images de niveau initial et transformé et (ii) \mathcal{R} préserve, par construction (équations (3.11), (3.28) et (3.29)), la relation d'inclusion entre ces composantes à des niveaux successifs.

Extension aux images étiquetées

Une image étiquetée $I : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{L}$ tel que \mathbb{L} est fini et $\perp \in \mathbb{L}$. Plusieurs cadres topologiques ont été proposés pour les images étiquetées [30, 76, 87, 233]. Nous suivons une proposition récente et générale [268, 269] qui consiste à considérer les valeurs de \mathbb{L} , et tous ses sous-ensembles.

Une image étiquetée $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{L}}$ peut être modélisée par l'ensemble fini de ses images binaires $\chi_{\Lambda}(I) \in \mathcal{IM}_{\mathbb{B}}$ qui est défini, pour tout $\Lambda \in 2^{\mathbb{L}}$, par

$$\left| \begin{array}{lcl} \chi_{\Lambda}(I) & : & \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{B} \\ & & \mathbf{p} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } I(\mathbf{p}) \in \Lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.35)$$

En particulier, en identifiant des ensembles $\{l\}_{l \in \mathbb{L}}$ et $\{\{l\}\}_{l \in \mathbb{L}}$, et les monoïdes $(\{0, 1\}, \cdot)$ (resp. $(\{\mathbb{L}, \emptyset\}, \cup)$), l'image I peut être reconstruite comme le minimum de ces images binaires, par rapport à l'ordre \sqsubseteq sur les fonctions induites par l'ordre d'inclusion \subseteq sur $2^{\mathbb{L}}$, c'est-à-dire

$$I = \bigwedge_{\Lambda \in 2^{\mathbb{L}}} \Lambda \cdot \chi_{\Lambda}(I) \quad (3.36)$$

Sur la base de cette modélisation de $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{L}}$ par $\{\chi_{\Lambda}(I)\}_{\Lambda \in 2^{\mathbb{L}}}$, les notions précédemment introduites pour les images binaires peuvent être étendues⁶ aux images étiquetées comme suit :

$$\mathcal{WC}_{\mathbb{L}} = \{I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{L}} \mid \forall \Lambda \in 2^{\mathbb{L}}, \chi_{\Lambda}(I) \in \mathcal{WC}_{\mathbb{B}}\} \quad (3.37)$$

$$\mathcal{NS}_{\mathbb{L}} = \{I \in \mathcal{WC}_{\mathbb{L}} \mid \forall \Lambda \in 2^{\mathbb{L}}, \chi_{\Lambda}(I) \in \mathcal{NS}_{\mathbb{B}}\} \quad (3.38)$$

De plus, on peut définir les analogues des notions binaires d'invariant topologique (*Définition 20*) et de la régularité (*Définition 23*).

Définition 28 (Invariant topologique pour image étiquetée). *Une image $I \in \mathcal{NS}_{\mathbb{L}}$ est (k, \bar{k}) - (resp. wc -) invariante topologiquement si pour tout $\Lambda \in 2^{\mathbb{L}}$, $\chi_{\Lambda}(I) \in \mathcal{INV}_{\mathbb{B}}^{(k, \bar{k})}$ (resp. $\mathcal{INV}_{\mathbb{B}}^{wc}$). On note $\mathcal{INV}_{\mathbb{L}}^{(k, \bar{k})}$ (resp. $\mathcal{INV}_{\mathbb{L}}^{wc}$) l'ensemble des (k, \bar{k}) - (resp. wc -) images étiquetées topologiquement invariantes.*

Dans la suite, nous restreignons notre étude sur le cas de wc -invariant topologique des images étiquetées parce que l'invariabilité topologique (k, \bar{k}) peut être prouvée égale à l'invariabilité topologique wc . Ceci est vrai pour toutes les définitions suivantes.

Définition 29 (Régularité pour image étiquetée). *Une image $I \in \mathcal{NS}_{\mathbb{L}}$ est régulière si pour tout $\Lambda \in 2^{\mathbb{L}}$, $\chi_{\Lambda}(I) \in \mathcal{REG}_{\mathbb{B}}$. On note $\mathcal{REG}_{\mathbb{L}}$ l'ensemble de toutes les images étiquetées régulières.*

6. La définition proposée de la bonne composition pour les images étiquetées est plus restrictive que celle introduite dans [233], cela ne nécessite que $\chi_{\{1\}}(I) \in \mathcal{WC}_{\mathbb{B}}$ pour les étiquettes $I \in \mathbb{L}$.

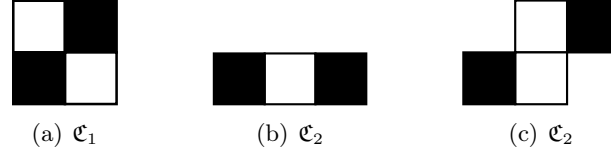


FIGURE 3.15 – Les configurations interdites de $\mathcal{WC}_{\mathbb{B}}$ (a) et de $\mathcal{REG}_{\mathbb{B}}^0$ (a–c), modulo la rotation de $\pi/2$ et les symétries. Les configurations interdites de $\mathcal{REG}_{\mathbb{B}}^1$ sont obtenues à partir de (a–c) par inversion de valeur. Les pixels noirs (resp. blancs) correspondent à la valeur 1 (resp. 0).

Le théorème suivant, qui est l’analogie pour l’image étiquetée du *Théorème 24*, dérive directement de ce dernier théorème et les *Définitions 28* et *29*.

Théorème 30 ([J11]).

$$\mathcal{REG}_{\mathbb{L}} \subseteq \mathcal{INV}_{\mathbb{L}}^{wc} \quad (3.39)$$

Dans la suite, nous présentons la caractérisation des images régulières (*Section 3.5.3*). Ensuite, dans la *Section 3.5.4*, nous introduisons deux approches de régularisation permettant de créer des images régulières à partir d’images non régulières. Pour finir, la *Section 3.5.5* montrera les résultats expérimentaux.

3.5.3 Caractérisation d’images régulières

À partir de la notion de régularité, nous avons établi une condition pour garantir l’invariance topologique des images numériques par mouvement rigide. Nous proposons maintenant un algorithme permettant de les caractériser. Plus précisément, la régularité des images peut être localement vérifiée en considérant un petit ensemble de configurations spécifiques. Ce résultat conduit à un algorithme avec une complexité en temps et en espace optimale.

Tout d’abord, les images régulières sont forcément bien composées, ce qui peut être facilement prouvé en considérant la configuration de 2×2 [234]. En se basant sur la *Théorème 6* et les *Définitions 25* et *28*, nous dérivons la caractérisation de la bonne composition d’images en niveaux de gris et d’images étiquetées comme suit.

Corollaire 31. *Soit $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{G}}$, $I \notin \mathcal{WC}_{\mathbb{G}}$ si et seulement s’il existe des points distincts $p, q, r, s \in \mathbb{Z}^2$, avec $p \curvearrowright_4 q \curvearrowright_4 r \curvearrowright_4 s \curvearrowright_4 p$, qui vérifient*

$$I(p) > I(q) < I(r) > I(s) < I(p) \quad (3.40)$$

Corollaire 32. *Soit $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{L}}$, $I \notin \mathcal{WC}_{\mathbb{L}}$ si et seulement s’il existe des points distincts $p, q, r, s \in \mathbb{Z}^2$, avec $p \curvearrowright_4 q \curvearrowright_4 r \curvearrowright_4 s \curvearrowright_4 p$, qui vérifient*

$$I(p) \neq I(q) \neq I(r) \neq I(s) \neq I(p) \quad (3.41)$$

En d’autres termes, la caractérisation de la bonne composition d’images binaires, en niveaux de gris et étiquetées peut alors être réalisée en vérifiant simplement qu’elles ne contiennent pas la configuration interdite introduite dans la *Figure 3.15* (a).

Nous proposons maintenant une caractérisation d’images binaires régulières basée sur des configurations.

Proposition 33 ([J11]). *Soit $I \in \mathcal{WC}_{\mathbb{B}}$, $I \notin \mathcal{REG}_{\mathbb{B}}^1$ (resp. $\mathcal{REG}_{\mathbb{B}}^0$) – et a fortiori $\mathcal{REG}_{\mathbb{B}}$ – si et seulement s’il existe $\mathbf{p} \in I^{-1}(\{1\})$ (resp. $I^{-1}(\{0\})$) qui satisfait au moins une des deux conditions suivantes (modulo la rotation de $\pi/2$ et les symétries) :*

$$I(\mathbf{p} - (1, 0)) \neq I(\mathbf{p}) \neq I(\mathbf{p} + (1, 0)) \quad (3.42)$$

$$I(\mathbf{p} + (0, 1)) = I(\mathbf{p}) \neq I(\mathbf{p} - (1, 0)) = I(\mathbf{p} + (1, 1)) \quad (3.43)$$

En effet, l’équation (3.42) est une ré-écriture de $I \notin \mathcal{NS}_{\mathbb{B}}$, tandis que l’équation (3.43) est une ré-écriture de la négation de l’équation (3.23).

En se basant sur la Proposition 33 et les Définitions 25 et 28, nous dérivons directement la caractérisation de la régularité d’images en niveaux de gris et d’images étiquetées comme suit.

Corollaire 34. *Soit $I \in \mathcal{WC}_{\mathbb{G}}$, $I \notin \mathcal{REG}_{\mathbb{G}}^1$ (resp. $\mathcal{REG}_{\mathbb{G}}^0$) – et a fortiori $\mathcal{REG}_{\mathbb{G}}$ – si et seulement s’il existe $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2$ qui satisfait au moins une des deux conditions suivantes (modulo la rotation de $\pi/2$ et les symétries) :*

$$I(\mathbf{p} - (1, 0)) < I(\mathbf{p}) > I(\mathbf{p} + (1, 0)) \quad (3.44)$$

$$(resp. I(\mathbf{p} - (1, 0)) > I(\mathbf{p}) < I(\mathbf{p} + (1, 0)))$$

$$I(\mathbf{p} + (0, 1)) \geq I(\mathbf{p}) > I(\mathbf{p} - (1, 0)) \geq I(\mathbf{p} + (1, 1)) \quad (3.45)$$

$$(resp. I(\mathbf{p} + (0, 1)) \leq I(\mathbf{p}) < I(\mathbf{p} - (1, 0)) \leq I(\mathbf{p} + (1, 1)))$$

Corollaire 35. *Soit $I \in \mathcal{WC}_{\mathbb{L}}$, $I \notin \mathcal{REG}_{\mathbb{L}}$ si et seulement s’il existe $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}$ qui satisfait au moins une des deux conditions suivantes (modulo la rotation de $\pi/2$ et les symétries) :*

$$I(\mathbf{p} - (1, 0)) \neq I(\mathbf{p}) \neq I(\mathbf{p} + (1, 0)) \quad (3.46)$$

$$I(\mathbf{p}) \neq I(\mathbf{p} - (1, 0)) \neq I(\mathbf{p} + (0, 1)) \neq I(\mathbf{p} + (1, 1)) \neq I(\mathbf{p}) \quad (3.47)$$

En termes simples, la caractérisation d’images régulières (binaires, en niveaux de gris et étiquetées) peut alors être réalisée en vérifiant simplement qu’elles ne contiennent pas les configurations interdites introduites dans la Figure 3.15.

Le résultat suivant, concernant la complexité, dérive directement du Théorème 6, la Proposition 33, et de leurs corollaires respectifs.

Proposition 36 ([J11]). *Soit $I \in \mathcal{WC}_{\mathbb{V}}$ (avec $\mathbb{V} = \mathbb{B}, \mathbb{G}$ ou \mathbb{L}). Soit $\mathbb{S} \subset \mathbb{Z}^2$ tel que $I^{-1}(\mathbb{V} \setminus \{\perp\}) \subseteq \mathbb{S}$. La caractérisation de la régularité de I a une complexité $\mathcal{O}(|\mathbb{S}|)$ en temps et $\mathcal{O}(1)$ en espace.*

3.5.4 Régularisation d’images

Dans la suite de cette section, nous présentons deux stratégies de pré-traitement des images afin d’obtenir des images régulières avant de poursuivre le mouvement rigide. De telles stratégies permettent donc de préserver les propriétés topologiques des images, et autant que possible leurs propriétés géométriques.

Régularisation par transformation homotopique

Une première stratégie consiste à modifier localement l’image pour éliminer les configurations interdites définies dans les équations (3.6), (3.47) et la Figure 3.15.

Soit $I \in \mathcal{M}_{\mathbb{V}}$ (ou $\mathcal{WC}_{\mathbb{V}}$ pour la régularité, mais pas seulement 1- ou 0-régularité). Le problème peut être exprimé sous la forme d'une optimisation contrainte comme suit :

$$R(I) = \arg \min_{\mathcal{REG}_{\mathbb{V}}^*(I)} D_I \quad (3.48)$$

où $R(I)$ est la régularisation de I , $\mathcal{REG}_{\mathbb{V}}^*(I)$ est le sous-ensemble de $\mathcal{REG}_{\mathbb{V}}^* \in \{\mathcal{REG}_{\mathbb{V}}^k, \mathcal{REG}_{\mathbb{V}}^{\bar{k}}, \mathcal{REG}_{\mathbb{V}}\}$ composé par les images qui ont la même topologie que I , et $D_I : \mathcal{M}_{\mathbb{V}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de coût qui décrit une distance par rapport à I , d'un point de vue géométrique. (La définition de D_I dépend en fait de l'application ciblée, et peut compter, par exemple, sur la distance de Hausdorff, ou sur toute mesure de (dis)similarité standard.)

Dans des applications vraies, I est définie sur un ensemble fini $\mathbb{S} \subset \mathbb{Z}^2$, tout comme l'espace des solutions (potentielles) de l'équation (3.48). Cependant, la taille $\mathcal{O}(|\mathbb{V}|^{|\mathbb{S}|})$ de cet espace est énorme. Il est alors possible de se contenter d'une solution approximative de l'équation (3.48). Dans ce contexte, une stratégie traitable consiste à considérer l'approche guidée par l'homotopie initialement développée pour les algorithmes d'amincissement (thinning algorithm en anglais) [89], puis adaptée aux modèles géométriques déformables (geometric deformable models en anglais) [87, 123, 161, 261].

Plus précisément, la méthode part de l'image I , et élimine de manière itérative les configurations interdites en modifiant la valeur d'un point $\mathbf{p} \in \mathbb{S}$ à chaque itération, jusqu'à stabilité. Cette modification de valeur peut être interprétée comme un balayage de fond vers l'objet, ou l'inverse pour \mathbb{G} ou \mathbb{L} en termes de décomposition en images binaires. Le choix de \mathbf{p} est guidé par D_I , par exemple en suivant une approche de descente de gradient, et en choisissant \mathbf{p} comme un point simple. Ceci est faisable pour $\mathbb{V} = \mathbb{B}$, \mathbb{G} ou \mathbb{L} puisque des notions de points simples ont été proposées pour les images binaires [80], en niveaux de gris [81, 82] et étiquetées [269].

L'algorithme obtenu peut être vu comme une extension de ceux présentés dans [353, 380] pour réparer la bonne composition, et dans notre cas pour la régularité. En particulier, il présente les mêmes forces et faiblesses. En effet, dans la plupart des cas d'application, il convergera en temps linéaire par rapport au nombre de configurations interdites. Néanmoins, dans le pire des cas, par exemple en présence de textures fines (voir Section 3.5.4, Figure 3.17), l'algorithme peut ne pas converger, voire échouer. Pour faire face à ce problème, nous proposons ci-dessous une stratégie alternative de régularisation.

Régularisation par sur-échantillonnage

La deuxième méthode de régularisation consiste à effectuer un sur-échantillonnage sur image. Plus précisément, soit $I \in \mathcal{M}_{\mathbb{V}}$ (avec $\mathbb{V} = \mathbb{B}$ ou \mathbb{G}) une (k, \bar{k}) -image. Il faut noter que, même avant la question de la régularisation, il peut arriver que I ne puisse pas être modifié en une image bien composée et topologiquement équivalente, lors de l'utilisation d'une stratégie telle que présentée ci-dessus. Il est alors possible de sur-échantillonner I en représentant explicitement sa structure topologique inter-pixel. Cela peut être fait en intégrant I dans l'espace de Khalimsky [203], noté I_K , puis en conduisant à une nouvelle image $I_K^{(k, \bar{k})}$ définie comme suit :

$$\left| \begin{array}{lll} I_K^{(4,8)} : \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{V} \\ & 2.\mathbf{p} & \mapsto I(\mathbf{p}) \\ & 2.\mathbf{p} + (0, 1) & \mapsto \bigvee^{\leq} I(\mathbf{p} + \{0\} \times \{0, 1\}) \\ & 2.\mathbf{p} + (1, 0) & \mapsto \bigvee^{\leq} I(\mathbf{p} + \{0, 1\} \times \{0\}) \\ & 2.\mathbf{p} + (1, 1) & \mapsto \bigvee^{\leq} I(\mathbf{p} + \{0, 1\} \times \{0, 1\}) \end{array} \right. \quad (3.49)$$

L'image $I_K^{(8,4)}$ est définie en remplaçant \vee par \wedge dans l'équation (3.49).

Nous dérivons le résultat suivant à partir de ces définitions.

Proposition 37 ([J11]). *Soit $I \in \mathcal{IM}_{\mathbb{V}}$ (avec $\mathbb{V} = \mathbb{B}$ ou \mathbb{G}). Nous avons $I_K^{(k,\bar{k})} \in \mathcal{WC}_{\mathbb{V}}$. De plus, $I_K^{(k,\bar{k})}$ et I ont le même type d'homotopie, lorsqu'elles sont considérées comme (k, \bar{k}) -images.*

Dans la suite, nous supposons alors que $I \in \mathcal{WC}_{\mathbb{V}}$ (avec $\mathbb{V} = \mathbb{B}$, \mathbb{G} ou \mathbb{L}). Comme indiqué précédemment, même dans ce cas, I ne peut toujours pas être modifiée en une image régulière lors de la régularisation itérative par les transformations homotopiques. Une fois encore, une stratégie de sur-échantillonnage peut être proposée en alternative. Cette stratégie ne repose plus sur une intégration de l'espace de Khalinsky, mais sur un 2×2 sur-échantillonnage. Plus précisément, à partir de $I \in \mathcal{WC}_{\mathbb{V}}$, nous définissons une nouvelle image

$$\left| \begin{array}{lll} I_{2 \times 2} & : & \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{V} \\ \mathbf{p} = (x, y) & \mapsto & I(\lfloor x/2 \rfloor, \lfloor y/2 \rfloor) \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Le résultat suivant dérive directement de cette définition.

Proposition 38 ([J11]). *Soit $I \in \mathcal{WC}_{\mathbb{V}}$ (avec $\mathbb{V} = \mathbb{B}$, \mathbb{G} ou \mathbb{L}). Nous avons $I_{2 \times 2} \in \mathcal{REG}_{\mathbb{V}}$. De plus, $I_{2 \times 2}$ et I ont le même type d'homotopie lorsqu'elles sont considérées comme (k, \bar{k}) - (resp. wc -) images.*

Enfin, les équations (3.49)–(3.50) fournissent une stratégie globale de sur-échantillonnage qui permet de rediffuser toute (k, \bar{k}) - ou wc -image comme régulière, et donc topologiquement invariable. Cette stratégie présente l'avantage d'être déterministe et géométriquement conservatrice (jusqu'à l'épaississement de l'espace inter-pixel). Son principal inconvénient, par rapport à la première stratégie, est son coût spatial plus élevé, car elle modélise une image de taille $|\mathbb{S}|$ comme une nouvelle de taille $4|\mathbb{S}|$ (et $16|\mathbb{S}|$ dans le pire des cas). Cela peut cependant rester acceptable pour de nombreuses applications, compte tenu des spécifications de la mémoire et de la progression des ordinateurs actuels.

3.5.5 Expérimentations

Dans cette section, nous présentons un aperçu des résultats obtenus avec la notion de régularité proposée. Ces résultats sont extraits des articles [J11], [C27].

Caractérisation de la régularité

Dans un premier temps, nous montrons les résultats pour la caractérisation de régularité décrite dans la Section 3.5.3. Plus précisément, cela consiste à rechercher des motifs spécifiques susceptibles d'interdire la préservation de la topologie des images lors d'un mouvement rigide ; *i.e.* les configurations de la Figure 3.15. La Figure 3.16 montre les résultats obtenus. Dans la Figure 3.16 (a), les images binaires des lettres “e”, “n”, “a” et “c” sont bien composées mais ni 1- ni 0-régulières (les pixels de valeur 1 et 0 sont représentés respectivement en noir et blanc). Les configurations interdites identifiées correspondant à ce défaut de régularité sont détectées et montrées dans la Figure 3.16 (b). Leur présence indique que la structure topologique de ces images est susceptible d'être modifiée lors de l'application d'un mouvement rigide discrétisé, comme illustré dans la Figure 3.16 (c). En particulier, la partie noire des images, qui sont 4-connexes dans la Figure 3.16 (a), est divisée en plusieurs composantes 4-connexes. Les composantes 8-connexes formant les trous à l'intérieur des lettres “a” et “e” dans la Figure 3.16 (a) sont fusionnées avec le fond après la transformation dans la Figure 3.16 (c).

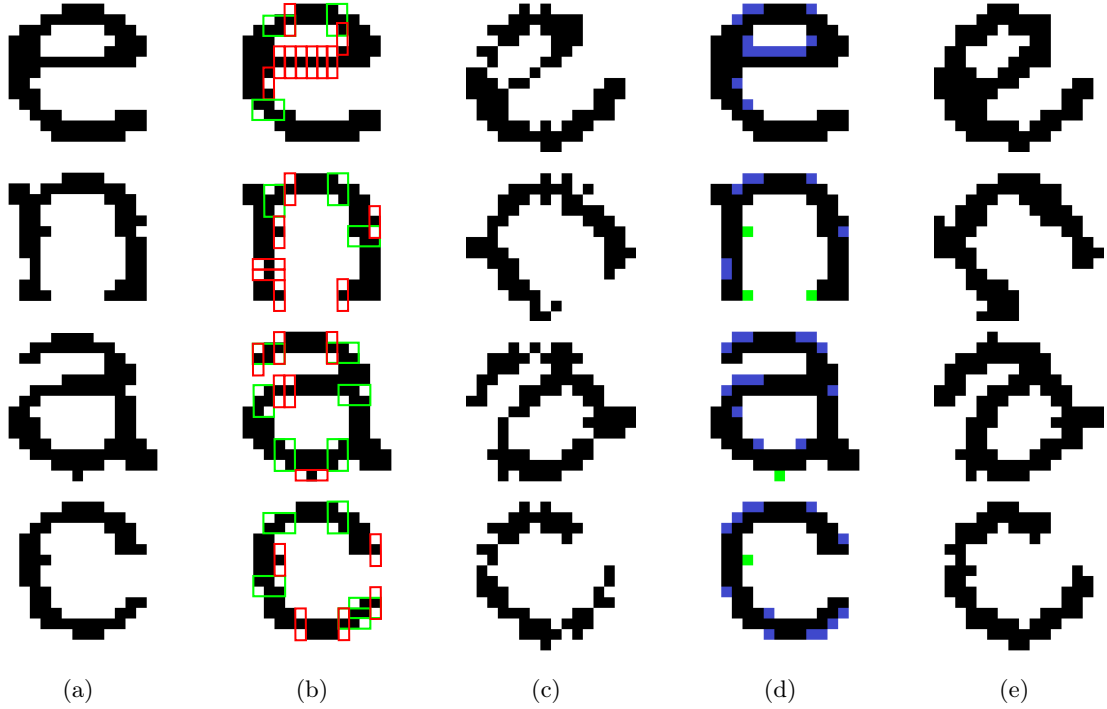


FIGURE 3.16 – (a) Quatre images bien composées d’entrée mais ni 1- ni 0-régulières. (b) La détection des configurations interdites à la régularité : \mathfrak{C}_2 (cadres rouges) et \mathfrak{C}_3 (cadres verts). (c) Exemples de mouvement rigide où les images résultantes ont une topologie différente de celle de (a). (d) Résultats après la régularisation homotopique itérative de (a). (e) Pour la même transformation que (c), les images résultantes ont la même topologie que celle de (d).

Régularisation par transformation homotopique

Nous présentons ci-dessous des expérimentations réalisées sur les images de la *Figure 3.16* pour la régularisation. Nous considérons la première stratégie de régularisation proposée dans la *Section 3.5.4* par le processus itératif de transformation homotopique à partir de la caractérisation de la régularité présentée dans la section précédente. Plus précisément, on commence avec quatre images binaires et bien composées des lettres “e”, “n”, “a” et “c” (*Figure 3.16 (a)*), la stratégie considérée permute progressivement la valeur binaire (noire ou blanche) de points simples jusqu’à ce que l’image devienne régulière avec le même type d’homotopie et qu’une similitude géométrique suffisante soit obtenue. Les résultats sont montrés dans la *Figure 3.16 (d)*. Les pixels passant du blanc au noir sont colorés en bleus, ceux passant du noir au blanc sont colorés en verts. Le nombre de pixels modifiés dans les images est respectivement 14, 10, 15 et 14, et la distance de Hausdorff⁷ entre l’image initiale et régularisée est de 1 dans chaque cas. La *Figure 3.16 (e)* illustre les résultats de transformation de l’image régularisée. Il peut être observé que, pour le même mouvement rigide que ceux de la *Figure 3.16 (c)*, les images transformées ont la même structure topologique que les images initiales dans la *Figure 3.16 (a)*.

Comme évoqué précédemment dans la *Section 3.5.4*, cette stratégie par transformation ho-

7. La distance de Hausdorff entre deux ensemble X et Y est définie par $d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X) \right\}$ où $d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b)$ quantifie la distance de point a à l’ensemble B , *sup* et *inf* représentent la borne supérieure (ou le supremum) et inférieure (ou l’infimum).

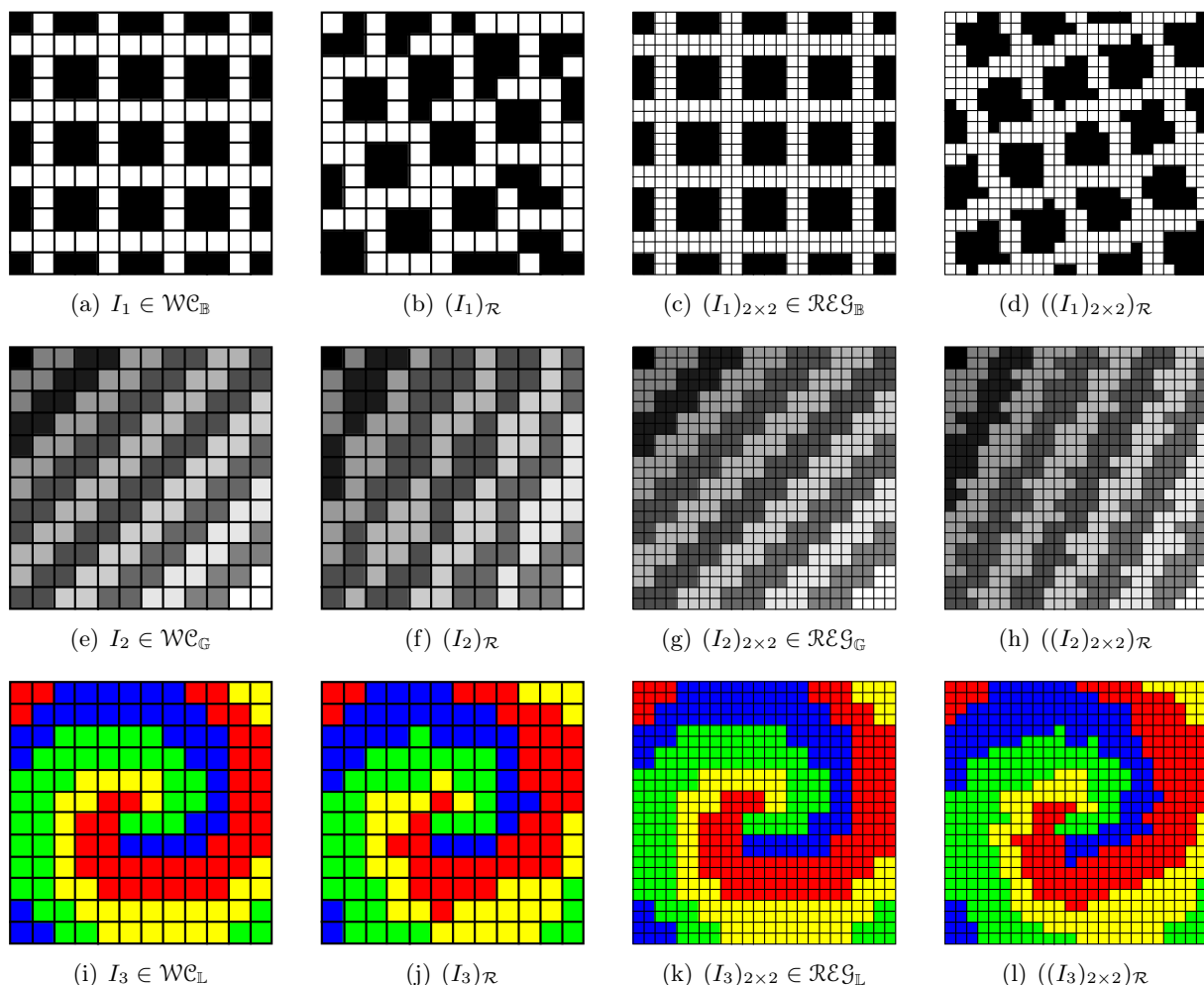


FIGURE 3.17 – De gauche à droite : les images d’entrée bien composées mais non régulières, les images transformées de celles à gauche par un mouvement rigide avec une topologie différente de l’image initiale, les images régularisées par sur-échantillonnage, et les images transformées de l’image régularisée par le même mouvement rigide que la deuxième colonne ; ces dernières images sont topologiquement préservées par rapport à l’image initiale et celle régularisée.

motopique peut, dans le pire des cas, ne pas converger voire échouer. Face à cette limitation, nous considérons une autre alternative à travers le sur-échantillonnage d’images avec les résultats étendus aux images en niveaux de gris et aux images étiquetées.

Régularisation par sur-échantillonnage

Considérons maintenant les trois images synthétiques représentées sur la *Figure 3.17* : (a) une image binaire bien composée qui n’est pas 0-régulière ; les pixels de valeur 1 et 0 sont représentés respectivement en noirs et blancs, (e) une image en niveaux de gris bien composée qui n’est ni 1- ni 0-régulière et (i) une image étiquetée bien composée qui n’est pas régulière. Les images de la *Figure 3.17* (b), (f) et (j) sont respectivement transformées des images (a), (e) et (i), ces dernières sont topologiquement modifiées par rapport à l’image initiale. Il faut mentionner que la régularisation homotopique itérative présentée dans la section précédente sur ces images ne

converge pas en raison d'effets de textures fines. Dans ce cas, il est alors pertinent de considérer la deuxième stratégie de régularisation avec le sur-échantillonnage proposé dans la *Section 3.5.4*.

Les trois images sont déjà bien composées, il n'est pas nécessaire d'effectuer la première étape de la régularisation, à savoir l'intégration de la grille de Khalimsky (*équation (3.49)*). Après la deuxième étape, à savoir le sur-échantillonnage 2×2 (*équation (3.50)*), nous obtenons de nouvelles images régulières, donc topologiquement invariantes, représentées dans la *Figure 3.17 (c), (g) et (k)*. Un exemple d'image transformée est illustré dans la *Figure 3.17 (d), (h) et (l)* avec les mêmes paramètres de transformation que dans la *Figure 3.17 (b), (f) et (j)*.

Nous fournissons maintenant un aperçu des résultats sur des images réelles. Le premier exemple consiste à régulariser l'image biomédicale d'une rétine en niveaux de gris illustrée dans la *Figure 3.18 (a)* (du jeu de données DRIVE [396]). Cette image n'est ni régulière ni bien composée. En conséquence, un mouvement rigide conduit à une image qui présente des altérations topologiques, comme illustré dans la *Figure 3.18 (b)*.

La régularisation est appliquée sur la *Figure 3.18 (a)* afin de supprimer non seulement les configurations représentées sur la *Figure 3.15 (b) et (c)* qui interdisent la régularité, mais aussi celles correspondant à la *Figure 3.15 (a)* qui interdisent plus généralement la bonne composition. L'image régularisée est montrée dans la *Figure 3.18 (c)*. En clair, cette image est légèrement modifiée par rapport à l'image d'origine. En effet, du fait de l'intégration dans la grille de Khalimsky [203], qui confère une épaisseur à la zone inter-pixel, la 1-régularisation conduit à une image qui se dilate de manière comparable aux opérations plates définies en morphologie mathématique [286, Chapitre 1]. Le comportement dual est obtenu pour la 0-régularisation. En particulier, la *Figure 3.18 (c)* est un peu plus brillante que la *Figure 3.18 (a)*. De plus, cette image présente des dimensions 4 fois plus élevées que celles de la *Figure 3.18 (a)*.

Contrairement à l'image transformée de la *Figure 3.18 (b)*, en appliquant la même transformation sur l'image régularisée (*Figure 3.18 (c)*), nous obtenons l'image résultante (*Figure 3.18 (h)*) qui a la même topologie que l'image régularisée. Ce comportement topologique a des conséquences directes sur la qualité visuelle globale de l'image comme sa capacité à être analysée efficacement. Ceci est plus facilement quantifiable lorsque l'on considère des images binaires obtenues par seuillage, comme illustré sur la *Figure 3.18 (e)–(h)*.

Le deuxième exemple consiste à régulariser l'image satellitaire⁸ d'une zone urbaine, illustrée dans la *Figure 3.19 (a)* (du jeu de données Urban images datasets [224]). Cette image a été obtenue par segmentation et regroupement de données de télédétection multi-spectrale. Elle est bien composée mais pas régulière. Par conséquent, un mouvement rigide conduit à une image qui présente des altérations topologiques, comme illustré dans la *Figure 3.19 (c)*.

Lors de l'application de la régularisation par sur-échantillonnage sur la *Figure 3.19 (a)*, elle élimine toute configuration dans la *Figure 3.15 (b) et (c)*, comme illustré sur la *Figure 3.19 (b)*. Comme la *Figure 3.19 (a)* est déjà bien composée, la première étape de la régularisation, à savoir l'intégration de la grille de Khalimsky, n'a pas besoin d'être effectuée. Alors, la *Figure 3.19 (b)* présente des dimensions qui ne sont que 2 fois plus grandes que la *Figure 3.19 (a)*, contrairement au cas de niveau de gris de la *Figure 3.18*.

Contrairement à l'image transformée de la *Figure 3.19 (c)*, en appliquant le même mouvement rigide sur l'image régularisée (*Figure 3.19 (b)*), on obtient l'image résultante (*Figure 3.19 (d)*) qui a la même topologie que l'image régularisée. Un tel comportement topologique est notamment souhaitable, par exemple pour analyser différents objets dans l'image avec l'approche fondée sur le raisonnement spatial [183], ou pour effectuer des procédures de composition [391].

8. Image optique à très haute résolution spatiale (very high spatial resolution optical image en anglais).

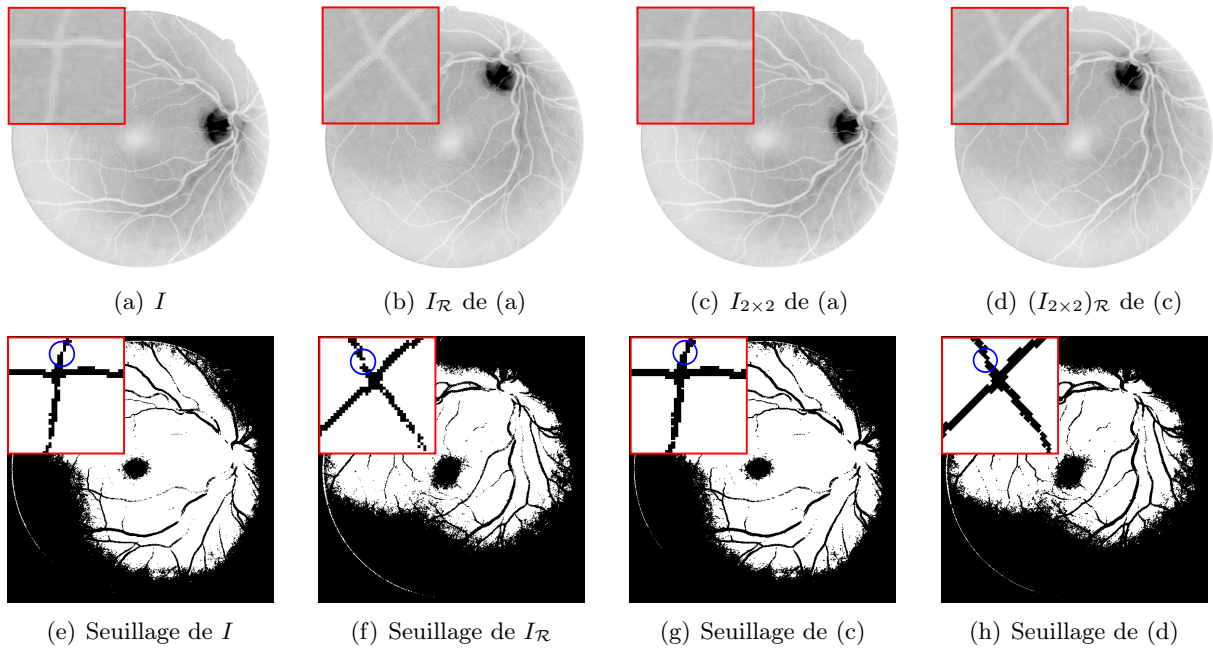


FIGURE 3.18 – (a) Image en niveaux de gris de taille 554×554 [396] (et un échantillon de taille 40×40 en cadre rouge) ; l'image n'est pas bien composée, et a fortiori non 1-régulière. (b) Image obtenue de (a) par un mouvement rigide ; elle est topologiquement modifiée par rapport à (a). (c) Image 1-régulière de taille 2216×2216 , obtenue de (a) par régularisation sur-échantillonnage. (d) Image obtenue (c) par le même mouvement rigide que (b) ; elle est topologiquement préservée par rapport à (c). (e)–(h) Images seuillées de de (a)–(d) respectivement.

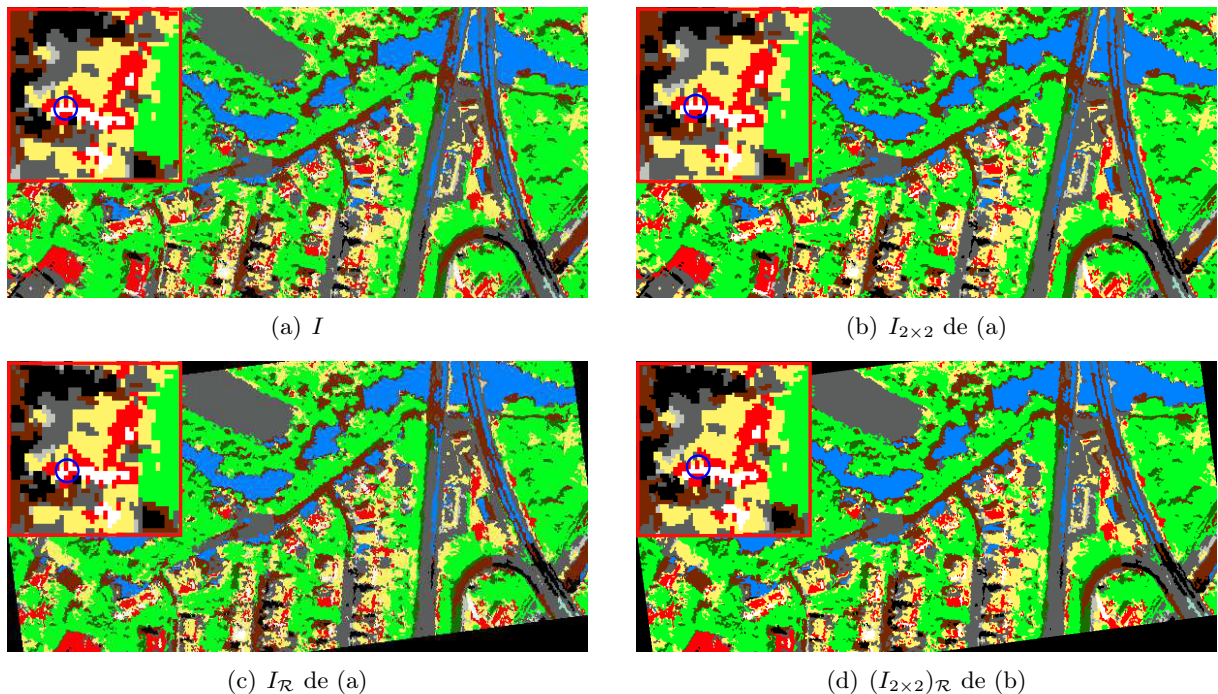


FIGURE 3.19 – (a) Image étiquetée de taille 600×300 [224] (et un échantillon de taille 40×40 en cadre rouge) ; elle est bien composée mais pas régulière. (b) Image régularisée de taille 1200×600 , obtenue à partir de (a) par régularisation sur-échantillonnage. (c) Image obtenue de (a) par un mouvement rigide ; elle est topologiquement modifiée par rapport à (a). (d) Image obtenue de (b) par le même mouvement rigide que (c) ; elle est topologiquement préservée par rapport à (b).

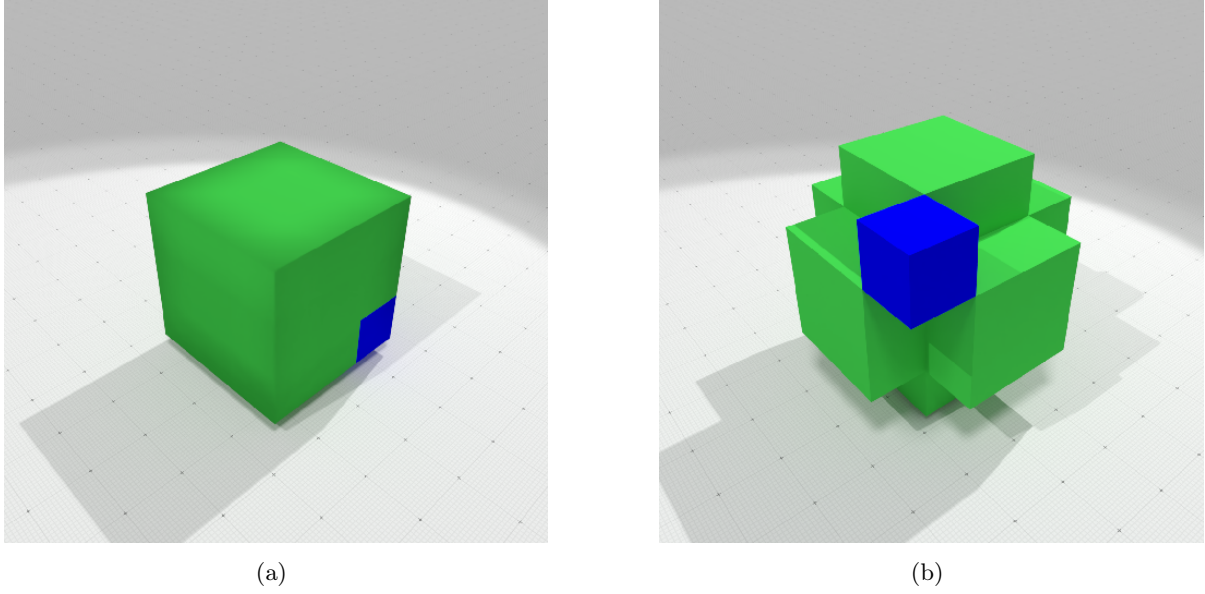


FIGURE 3.20 – Un contre-exemple à la préservation de la topologie d’un objet régulier 3D soumis à un mouvement rigide : (a) un ensemble discret régulier, représenté avec les voxels, qui est 6-connexe et (b) l’ensemble transformé qui n’est plus 6-connexe (voir le voxel bleu).

3.5.6 Discussion : Extension en 3D

Suivant la *Définition 23*, un objet régulier $X \subset \mathbb{Z}^2$ a des carrées de 2×2 qui doivent se chevaucher localement partout. Intuitivement, l’extension en 3D de cette définition consisterait à envisager une couverture des cubes $2 \times 2 \times 2$ qui se chevauchent localement partout. On peut s’attendre à ce qu’un objet régulier dans \mathbb{Z}^3 soit également topologiquement invariant. Cependant, c’est faux, en général. Un exemple tout simple est donné sur la *Figure 3.20* (a) avec un objet discret $X \subset \mathbb{Z}^3$ formé par $3 \times 3 \times 3$ voxels, X est régulier et 6-connexe. La *Figure 3.20* (b) est l’objet transformé de X par un mouvement rigide, cet objet n’est plus 6-connexe, donc la topologie a été modifiée.

On peut expliquer ce résultat comme suit. Pour une image régulière I contenant un ensemble connexe X (composé d’au moins un cube $2 \times 2 \times 2$), on peut trouver une transformation ad hoc \mathcal{R} et un point $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^3$ tel que $I_{\mathcal{R}}(\mathbf{p}) = 1$ alors que, pour tout $\mathbf{q} \frown_6 \mathbf{p}$, $I_{\mathcal{R}}(\mathbf{q}) = 0$. Autrement dit, l’approche de sur-échantillonnage ne peut pas être directement étendue à \mathbb{Z}^3 car elle conduit à des problèmes topologiques de mouvement rigide discrétisé en 3D [30].

Un autre exemple est donné sur la *Figure 3.21*. La *Figure 3.21* (a) montre un objet $X \subset \mathbb{Z}^3$ régulier et 6-connexe. En faisant attention aux voxels \mathbf{p} bleu, jaune et rose de cette figure, on s’aperçoit qu’il existe – au moins – un mouvement rigide \mathfrak{R}^{-1} de \mathbb{Z}^3 telle que $[\mathfrak{D} \circ (\mathfrak{R}^{-1})]^{-1}(\mathbf{p})$ n’est pas 6-connexe comme illustré dans la *Figure 3.21* (b).

Ce résultat implique que la notion de régularité atteint sa limite de validité dans \mathbb{Z}^2 . De plus, la notion d’invariant topologique dans la *Définition 20* est également insuffisante dans \mathbb{Z}^3 . En effet, la structure d’arbre d’adjacence pour l’invariant topologique ne peut pas modéliser les caractérisations topologiques qui apparaissent dans \mathbb{Z}^3 , tels que les tunnels – par exemple, une sphère et un tore ont des arbres d’adjacence isomorphes. Par conséquent, la considération d’invariants topologiques plus forts, comme le type d’homotopie ou le groupe fondamental, devient obligatoire. Des approches alternatives sont alors nécessaires pour traiter le cas de la préservation de la topologie pour des mouvements rigides dans des dimensions plus élevées.

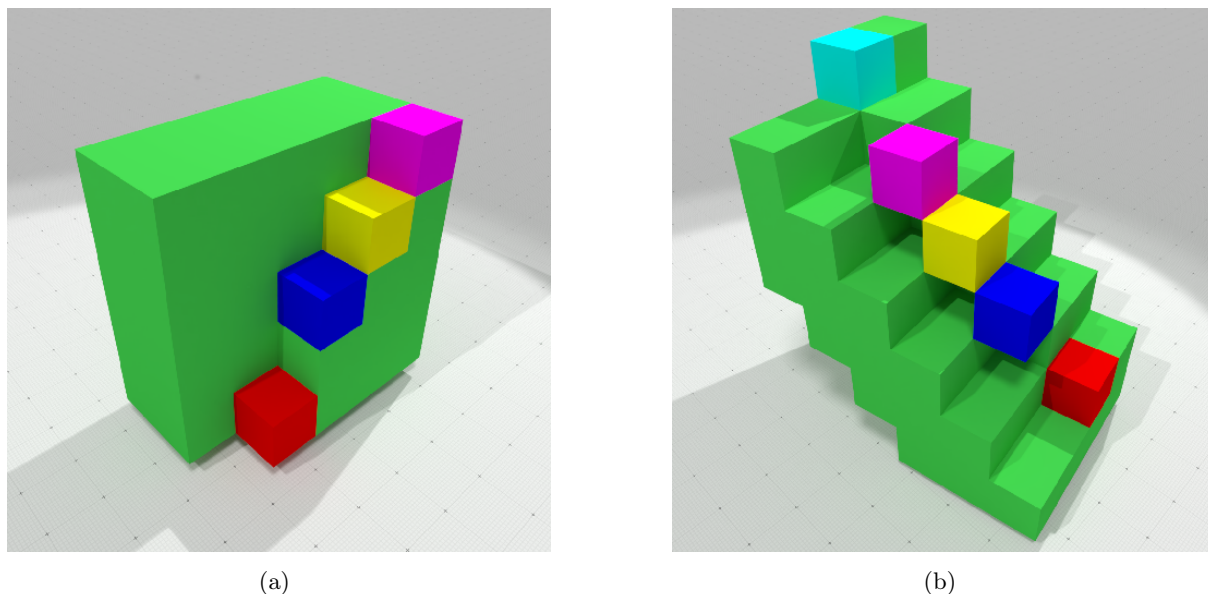


FIGURE 3.21 – Un autre contre-exemple de l’invariant topologique d’image régulière en 3D : (a) un ensemble régulier et 6-connexe et (b) l’ensemble transformé qui n’est plus 6-connexe (voir les voxels bleus, jaunes et roses).

3.6 Caractérisations géométriques

Les travaux présents dans cette section s’inscrivent dans la suite de la section précédente avec une solution de l’invariabilité topologique pour les dimensions supérieures et en particulier, les propriétés géométriques d’objets discrets par des mouvements rigides. Il faut savoir que l’approche proposée précédemment avec la régularité ne permet pas de conserver globalement des propriétés géométriques. En effet, cette faiblesse est principalement due au fait que les mouvements rigides sont effectués point par point ; chaque point $p \in X$ est transformé indépendamment. En conséquence, la transformation peut induire des discontinuités et ainsi altérer la forme *globale* de l’objet transformé.

Sur la base de cette observation, notre idée est d’appliquer le mouvement rigide sur un objet discret dans son ensemble, mais pas point par point. Cela va permettre de mieux conserver la forme globale de l’objet. Par ailleurs, pour la préservation topologique, nous proposons une nouvelle condition, nommée *quasi- r -régularité*, qui peut être considérée comme une généralisation de la r -régularité proposée par Pavlidis [312]. Elle est une condition suffisante pour garantir la préservation de la connexité d’objets discrets lors du processus de discrétisation.

3.6.1 Quasi- r -régularité

Nous présentons ci-dessous la définition de la *quasi- r -régularité* (quasi- r -regularity en anglais) pour des objets euclidiens de \mathbb{R}^2 , et en particulier des polygones. Nous nous concentrons au cas des objets simplement connexes, *i.e.* des objets discrets connexes et sans trous. Le cas des objets non connexes avec des trous peut être traité sans trop de difficulté à partir de ceci.

Définition 39 (Quasi- r -régularité). *Soit $X \subset \mathbb{R}^2$ un objet borné et simplement connexe. L’objet X est dit quasi- r -régulier, avec $r > 0$, s’il satisfait les quatre propriétés suivantes :*

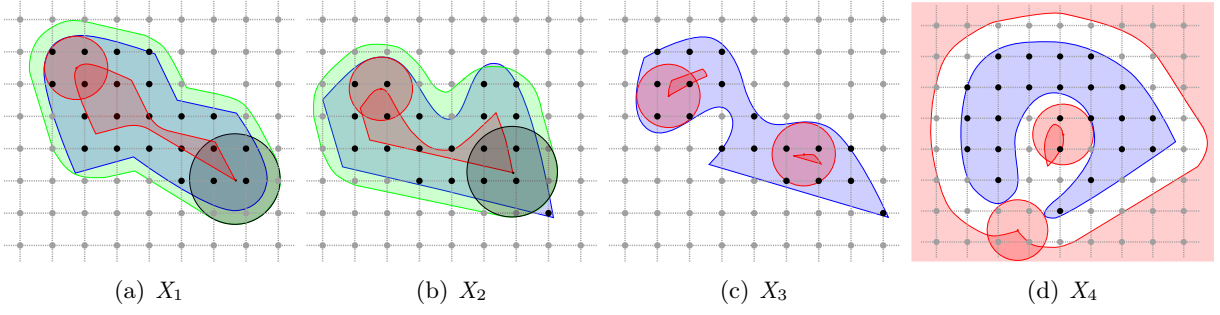


FIGURE 3.22 – Exemple d’objets quasi-régulier (a) et non quasi-réguliers (b, c, d). Les objets $X_i \subset \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3, 4$, sont en bleus, les disques B_1 sont en rouges et les disques $B_{\sqrt{2}}$ sont en noirs, les érosions $X \ominus B_1$ sont en rouges et les ouvertures $(X_i \ominus B_1) \oplus B_{\sqrt{2}}$ sont en verts.

- (i) $X \ominus B_r$ est non vide et connexe ;
- (ii) $\overline{X} \ominus B_r$ est connexe ;
- (iii) $X \subseteq (X \ominus B_r) \oplus B_{r\sqrt{2}}$;
- (iv) $\overline{X} \subseteq (\overline{X} \ominus B_r) \oplus B_{r\sqrt{2}}$;

où $\overline{X} = \mathbb{R}^2 \setminus X$, \oplus et \ominus sont les opérateurs de dilatation et d’érosion, et $B_r \subset \mathbb{R}^2$ un disque de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon $r > 0$.

Cette définition ne nécessite pas d’hypothèse spécifique sur le bord δX de X . En particulier, il n’a pas besoin d’être différentiable.

Dans le contexte de l’invariabilité topologique, la valeur de $r = 1$ est considérée pour la quasi- r -régularité (alors appelée *quasi-régularité*, pour alléger l’écriture). La quasi-régularité est prouvée comme une condition suffisante pour préserver la connexité de l’objet continu par la discrétisation de Gauss (voir [J5], [C20] pour plus de détails).

Proposition 40. *Si $X \subset \mathbb{R}^2$ est quasi-régulier, alors $\mathbf{X} = X \cap \mathbb{Z}^2$ et $\overline{\mathbf{X}} = \overline{X} \cap \mathbb{Z}^2$ sont tous les deux 4-connexes. En particulier, \mathbf{X} est bien composé.*

Des exemples de (non) quasi-réguliers objets sont donné sur la Figure 3.22. L’image (a) est un objet quasi-régulier X_1 (en rouge) selon la Définition 39, nous observons que sa discrétisation $\mathbf{X}_1 = X_1 \cap \mathbb{Z}^2$ (points noirs) est bien composée. Au contraire, les objets X_2 , X_3 et X_4 dans les images (b), (c) et (d) ne sont pas quasi-réguliers par la Définition 39, et leur discrétisation, comme illustrée sur la figure, n’est pas bien composée. Plus précisément, l’objet X_2 de l’image (b) a $X_2 \not\subseteq (X_2 \ominus B_1) \oplus B_{\sqrt{2}}$, l’objet X_3 de l’image (c) a $X_3 \ominus B_1$ n’est pas connexe et l’objet X_4 de l’image (d) a $\overline{X}_4 \ominus B_1$ n’est pas connexe.

La caractérisation de la quasi-régularité donnée dans la Définition 23 fournit un **cadre théorique** pour garantir la préservation du type d’homotopie entre un objet continu $X \subset \mathbb{R}^2$ et son analogue numérique $\mathbf{X} = \mathcal{D}(X) \subset \mathbb{Z}^2$ par la discrétisation de Gauss \mathcal{D} .

On peut alors considérer la quasi-régularité comme un outil topologique utile lorsqu’un objet polygonal doit être numérisé. C’est notamment le cas lors des procédures de rasterisation (rasterization procedures en anglais) [318], qui sont des tâches fréquentes et cruciales, par exemple dans les applications d’infographie ou la construction d’images numériques.

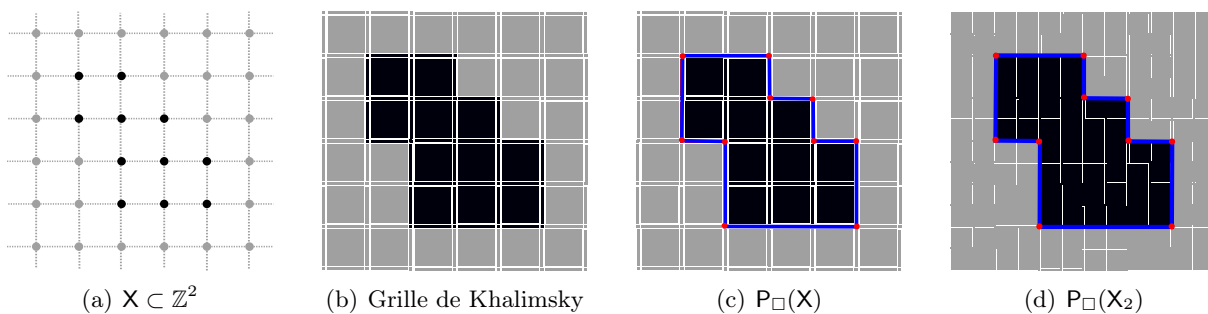


FIGURE 3.23 – (a) Objet discret X avec la grille de \mathbb{Z}^2 . (b) La grille de Khalimsky de (a). (c) Le polygone $P_{\square}(X)$ (segments bleus et points rouges) calculé à partir de (b). (d) La construction de $P_{\square}(X_2)$ avec X_2 est l’objet sur-échantillonné de X par un facteur 2.

Relation entre quasi- r -régularité et r -régularité

Afin de comparer les deux notions de quasi- r -régularité et de r -régularité de Pavlidis [312], nous ré-écrivons ci-dessous la définition de r -régularité.

Définition 41 (r -régularité). *Soit $X \subset \mathbb{R}^2$ un objet borné et simplement connexe. L’objet X est r -régulier si :*

- (i) $X \ominus B_r$ est non vide et connexe ;
- (ii) $\overline{X} \ominus B_r$ est connexe ;
- (iii) $X = (X \ominus B_r) \oplus B_r$;
- (iv) $\overline{X} = (\overline{X} \ominus B_r) \oplus B_r$.

On peut observer que la r -régularité est un sous-ensemble de la quasi- r -régularité. En particulier, la principale différence entre les deux notions est le fait que la correspondance entre X (resp. \overline{X}) et son ouverture doit être lisse – différentiable – en cas de r -régularité, tandis qu’une *marge* est autorisée dans le cas d’une quasi- r -régularité, permettant ainsi un bord non lisse comme le cas des polygones par exemple.

Relation entre quasi-régularité et régularité

Pour comparer les deux notions de quasi-régularité et de régularité présentée dans la Section 3.5.2), nous considérons l’objet continu $P_{\square}(X) = X \oplus \square \subset \mathbb{R}^2$ associé à l’objet discret $X \subset \mathbb{Z}^2$, avec $\square \subset \mathbb{R}^2$ le carré unitaire fermé centré sur $0_{\mathbb{R}^2}$. Par définition, $P_{\square}(X) \cap \mathbb{Z}^2 = X$.

Nous étudions donc la question suivante : “Un objet discret régulier X conduit-t-il à un polygone quasi-régulier $P_{\square}(X)$ et inversement ?”. Les résultats suivants sont prouvés dans [C16].

Propriété 42. *La régularité d’un ensemble simplement connexe $X \subset \mathbb{Z}^2$ n’implique pas la quasi-régularité de $P_{\square}(X)$.*

Un contre exemple est donnée dans la Figure 3.23 dans laquelle l’objet $X \subset \mathbb{Z}^2$ est régulier (voir Définition 23). Pour calculer $P_{\square}(X)$, nous pouvons, par exemple, intégrer X dans la grille de Khalimsky [203], et $P_{\square}(X)$ correspond aux 0- et 1-cellules du bord de X . Nous pouvons observer que $P_{\square}(X)$ n’est pas quasi-1-régulier, en particulier la condition (i) dans la Définition 41 – $X \ominus B_r$ est connexe – n’est pas satisfaite.

Dans [J11], une stratégie pour construire un objet régulier à partir d'un objet bien composé X a été proposée. Elle consiste à sur-échantillonner X avec un facteur 2 (voir Section 3.5.4). On obtient donc un nouvel objet $X_2 \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(x, y) \in X \Leftrightarrow (2x, 2y) + \{0, 1\} \times \{0, 1\} \subseteq X_2$. En appliquant la même stratégie sur un objet régulier X , on obtient l'objet $X_2 \subset \mathbb{Z}^2$ qui est toujours régulier, mais aussi quasi-régulier (voir Figure 3.23 (d)).

Proposition 43. *Si un objet simplement connexe $X \subset \mathbb{Z}^2$ est régulier, alors $X_2 \subset \mathbb{Z}^2$ est aussi régulier et $P_{\square}(X_2) \subset \mathbb{R}^2$ est quasi-régulier.*

Cette notion de quasi-régularité sera utilisée dans la Section 3.6.3 pour garantir la préservation des propriétés topologiques des objets discrets lors de mouvements rigides, via leur représentation polygonale. Plus précisément, un schéma de mouvement rigide sur \mathbb{Z}^2 est proposé dans lequel l'objet bien composé restera bien composé et sa géométrie globale sera approximativement préservée après la transformation.

3.6.2 Caractérisation du polygone quasi-régulier

La notion de quasi-régularité présentée dans la section précédente nous fournit une condition suffisante pour garantir la préservation de la 4-connexité lors du processus de discrétisation d'un objet continu dont la frontière n'est pas nécessairement différentiable. La quasi-régularité est définie, initialement, par les opérateurs morphologiques – l'érosion et la dilatation – basés sur des ensembles. Toutefois, cette notion est difficile à vérifier/évaluer sur le plan algorithmique, même pour les objets simples comme les polygones.

Quasi-régularité discrète

Pour répondre à ce problème, nous proposons un cadre traitable pour une classe restreinte d'objets quasi- r -réguliers : les polygones. Plus précisément, nous présentons la notion de *quasi- r -régularité discrète* spécialement conçue pour un sous-ensemble de polygones quasi- r -réguliers. Cette nouvelle notion permet une vérification géométrique simple, basée sur la mesure des longueurs et des angles des polygones.

Définition 44 (Quasi- r -régularité discrète). *Soit P un polygone simple de \mathbb{R}^2 , V et E sont respectivement l'ensemble des sommets et des arêtes de P . Le polygone P est dit quasi- r -régulier discret, s'il satisfait les deux propriétés suivantes :*

- (i) $\forall v = e_1 \cap e_2 \in V$ avec $e_1, e_2 \in E$, $\forall e \in E \setminus \{e_1, e_2\}$, $d(v, e) \geq 2r$,
- (ii) $\forall v = e_1 \cap e_2 \in V$ avec $e_1, e_2 \in E$, $n(e_1).n(e_2) \geq 0$,

où $d(v, e)$ dénote la distance euclidienne entre le sommet v et l'arête e , $n(e)$ dénote le vecteur normal à e dirigé vers l'extérieur de P , et le “.” désigne le produit scalaire entre deux vecteurs.

En d'autres termes, P est quasi- r -régulier discret si, pour tout sommet $v \in V$: (i) v a une distance au moins $2r$ à tout bord qui ne contient pas v , et (ii) l'angle en v est entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Un exemple de polygones quasi-1-régulier discret, appelé encore *quasi-régulier discret*, et non quasi-1-réguliers est donné sur la Figure 3.24. L'image (a) montre un polygone quasi-régulier discret P_1 (en bleu), nous observons que sa discrétisation, à savoir $P_1 \cap \mathbb{Z}^2$ (points noirs), est bien composée. Au contraire, les polygones P_2 et P_3 (en bleu) dans les images (b) et (c) ne sont pas quasi-réguliers discrets par la Définition 44. Plus précisément, l'image (b) a la condition d'angle non satisfaite et l'image (c) a les deux conditions d'angle et de distance non satisfaites. Leur discrétisation (points noirs), comme illustrée sur la figure, n'est pas bien composée.

Les résultats suivants ont été prouvés dans [C18].

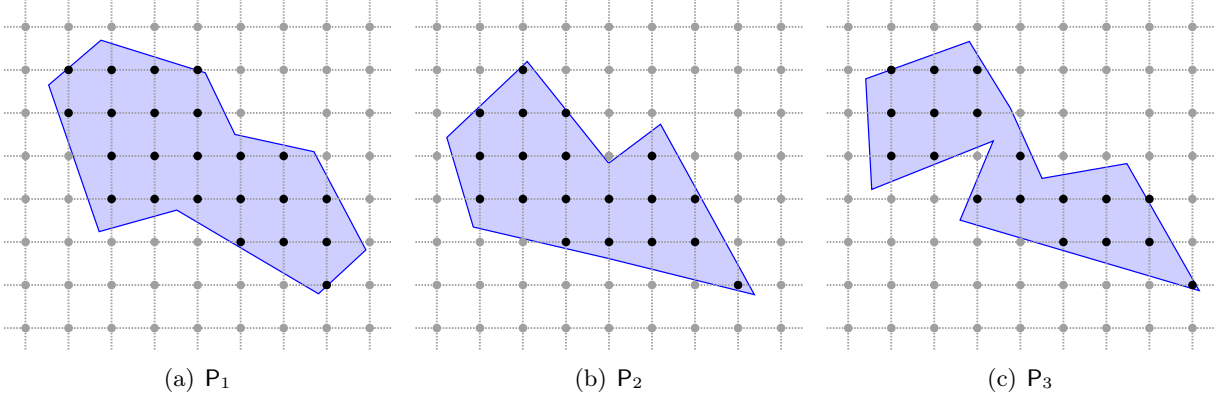


FIGURE 3.24 – Exemple de polygones quasi-régulier discret (a) et non quasi-réguliers discrets (b, c).

Proposition 45. Soit $P \subset \mathbb{R}^2$ un polygone simple. Si P est quasi- r -régulier discret, alors P est quasi- r -régulier.

Corollaire 46. Soit $P \subset \mathbb{R}^2$ un polygone simple, et E l'ensemble des arêtes de P . Si P est quasi- r -régulier discret, alors $\forall e \in E$, $l(e) \geq 2r$ où $l(e)$ est la longueur de l'arête e .

Il faut noter que la quasi- r -régularité discrète est une sous-classe de la quasi- r -régularité. En d'autres termes, elle est une condition suffisante, mais pas nécessaire, de la quasi-régularité. D'une part, les objets quasi- r -réguliers peuvent avoir des contours non lisses (voir Figures 3.22 – 3.24), tandis que les objets quasi- r -réguliers discrets ne sont limités qu'aux polygones. D'autre part, un objet polygonal quasi- r -régulier ne peut pas être quasi- r -régulier discret comme illustré sur la Figure 3.25. Sur cette figure, nous avons un polygone quasi- r -régulier $P \subset \mathbb{R}^2$ (en bleu) qui a son bord compris entre $(P \ominus B_r) \oplus B_r$ (en jaune) et $(P \ominus B_r) \oplus B_{r\sqrt{2}}$ (en vert). Ce polygone P n'est pas quasi- r -régulier discret selon la Définition 44 : les deux conditions de distance et d'angle aux sommets ne sont pas satisfaites.

En nous basant sur la Proposition 45 et le Corollaire 46, nous obtenons une condition suffisante de polygones quasi-réguliers discrets, un sous-ensemble de la quasi-régularité. Elle permet une vérification géométrique simple de tels objets en utilisant les mesures des angles et des longueurs du polygone.

Comme nous avons mentionné dans la Section 3.4, le modèle de transformation point par point est une approche inadéquate pour préserver la géométrie de l'objet. Il faut dire que trouver des mouvements rigides sur $\mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z}^3$ préservant la géométrie est toujours un problème ouvert. Notre solution pour aborder cette question est de considérer une représentation intermédiaire et continue de l'objet discret lors la transformation. Plus précisément, grâce à la classe des polygones quasi-réguliers discrets, nous proposons un nouveau modèle de mouvement rigide en se basant sur la représentation polygonale d'un objet discret. Cette approche permet donc la préservation de la forme globale des objets par transformation sur \mathbb{Z}^2 . En particulier, elle est facilement extensible en 3D.

Quasi-régularité par axe médian

La notion de quasi-régularité permet de fournir des conditions suffisantes pour la préservation de la topologie de l'objet obtenu par la discrétisation de Gauss. La vérification de la quasi-régularité est, cependant, difficile en raison des conditions (iii) et (iv) dans la Définition 39 qui

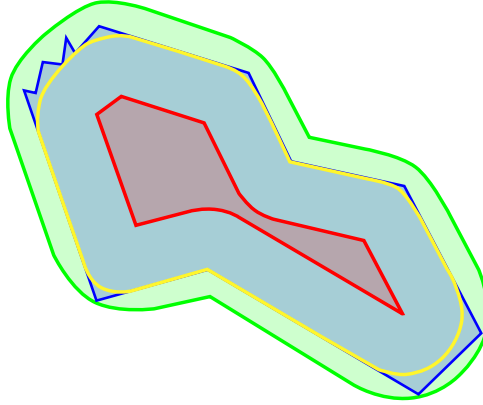


FIGURE 3.25 – Contre-exemple d'un polygone P quasi- r -régulier mais pas quasi- r -régulier discret. L'objet $P \ominus B_r$ est en rouge, $(P \ominus B_r) \oplus B_r$ est délimité par la courbe jaune et $(P \ominus B_r) \oplus B_{r\sqrt{2}}$ est en vert.

nécessitent de calculer les érosions et dilatations des ensembles et de les comparer par rapport à l'inclusion. Avec cette définition, la quasi-régularité est algorithmiquement difficile à évaluer même pour les objets simples comme les polygones. Malgré l'intérêt de la définition de la quasi-régularité discrète introduite dans la section précédente, les polygones quasi-réguliers discrets excluent certains polygones quasi-réguliers comme montré dans la *Figure 3.25*.

Sur la base des liens entre la quasi-régularité et la notion d'axe médian (medial axis en anglais) [41], nous proposons ci-dessous une méthode pour évaluer la quasi-régularité d'un objet polygonal, conduisant ainsi à un algorithme traitable pour la vérification et une application dans le contexte des mouvements rigides préservant la topologie et la géométrie des objets discrets.

Dans un premier temps, nous allons définir l'axe médian d'un objet $X \subset \mathbb{R}^2$, puis établirons les relations que possèdent cette notion avec la quasi-régularité pour les polygones simples.

Soit $X \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble fermé et borné tel que le bord ∂X de X est une 1-variété. On note $B(c, r)$ la boule euclidienne de centre $c \in \mathbb{R}^2$ et rayon $r \in \mathbb{R}_+$. Soit $x \in X$, on fixe $r(x) \in \mathbb{R}_+$ comme le rayon de la boule euclidienne maximale de centre x , incluse complètement dans X :

$$r(x) = \max\{r \mid B(x, r) \subseteq X\} \quad (3.51)$$

L'axe médian d'un objet, introduit par Blum [41], est défini comme l'ensemble de tous les points ayant plus d'un point le plus proche sur le bord de l'objet.

Définition 47 (Axe médian [41]). *Soit $X \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble fermé et borné dont le bord est une 1-variété. L'axe médian de X , noté par $\mathcal{M}(X)$, est défini par*

$$\mathcal{M}(X) = \{x \in X \mid |B(x, r(x)) \cap \partial X| > 1\} \quad (3.52)$$

Alternativement, l'axe médian de X peut être défini comme le lieu des centres des boules maximales incluses dans X :

$$\mathcal{M}(X) = \{x \in X \mid \nexists y \in X, B(x, r(x)) \subset B(y, r(y))\} \quad (3.53)$$

La légère différence entre ces deux définitions réside dans le cas des points non différentiables de ∂X . Pour de tels points, la boule euclidienne maximale a un rayon nul. En conséquence, ces points appartiennent à l'axe médian par rapport à l'équation (3.53) mais pas à l'équation (3.52). Cependant, les deux axes médians sont égaux jusqu'à la fermeture.

De la définition de l'axe médian, on a $\mathcal{M}(X) \subseteq X$ et

$$X = \bigcup_{x \in \mathcal{M}(X)} B(x, r(x)) \quad (3.54)$$

En d'autres termes, X peut être reconstruit à partir de $\mathcal{M}(X)$. On définit maintenant à partir de $\mathcal{M}(X)$ l'axe médian de niveau- λ (λ -level medial axis en anglais), noté par $\mathcal{M}_\lambda(X)$, comme :

$$\mathcal{M}_\lambda(X) = \{x \in \mathcal{M}(X) \mid r(x) \geq \lambda\} \quad (3.55)$$

En particulier, nous avons $\lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow \mathcal{M}_{\lambda_2}(X) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda_1}(X)$, et $\mathcal{M}_0(X) = \mathcal{M}(X)$. On peut aussi définir :

$$\mathcal{M}_{\lambda_1}^{\lambda_2}(X) = \{x \in \mathcal{M}(X) \mid \lambda_1 \leq r(x) \leq \lambda_2\} \quad (3.56)$$

Nous énonçons ci-dessous deux résultats importants qui seront utilisés dans la suite.

Proposition 48 ([246]). *X and $\mathcal{M}(X)$ ont le même type d'homotopie.*

Dans [246], la proposition est établie pour X ouvert. Ici, il reste valable pour X fermé, puisque nous supposons que ∂X est une 1-variété. On note $X \frown Y$ si X et Y ont le même type d'homotopie.

Proposition 49 ([375]). *Soit B_λ la boule euclidienne du centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon $\lambda \geq 0$. Nous avons*

$$X \ominus B_\lambda = \bigcup_{x \in \mathcal{M}_\lambda(X)} B(x, r(x) - \lambda) \quad (3.57)$$

$$X \oplus B_\lambda = \bigcup_{x \in \mathcal{M}(X)} B(x, r(x) + \lambda) \quad (3.58)$$

$$\mathcal{M}(X \ominus B_\lambda) = \mathcal{M}_\lambda(X) \quad (3.59)$$

Les résultats ci-dessus sont valables pour tous les objets de \mathbb{R}^2 . Par la suite, nous nous concentrons sur les objets polygonaux dans le but d'évaluer la quasi-régularité dans la Définition 39.

Propriété 50. *Soit $X \subset \mathbb{R}^2$ un polygone simplement connexe. Si $\mathcal{M}(X) \frown \mathcal{M}_1(X)$ et $\mathcal{M}(\overline{X}) \frown \mathcal{M}_1(\overline{X})$ alors les conditions (i) et (ii) de la Définition 39 sont tenues.*

Dans la suite, Y peut être soit X ou \overline{X} . Considérons l'objet $Y \circ B_1 = Y \ominus B_1 \oplus B_1$, à savoir l'ouverture de Y par B_1 . Suivant la Proposition 49, nous avons

$$Y \circ B_1 = \bigcup_{x \in \mathcal{M}_1(Y)} B(x, r(x)) \subseteq Y \subseteq Y \ominus B_1 \oplus B_{\sqrt{2}} \quad (3.60)$$

Soit $M \subseteq \mathcal{M}_0^1(Y)$ une composante connexe de $\mathcal{M}_0^1(Y)$. Selon la Propriété 50, il existe un unique point $y \in M$ tel que $r(y) = 1$. Comme Y a une forme polygonale, l'ensemble M contient k points terminaux ($k \geq 1$), notés z_i ($1 \leq i \leq k$) tels que $r(z_i) = 0$. Ces points sont des sommets convexes du polygone.

Nous notons $\text{Conv}(M) \subset \mathbb{R}^2$ l'enveloppe convexe de $B(y, 1) \cup \{z_i\}_{i=1}^k$. Nous avons alors

$$\bigcup_{x \in M} B(x, r(x)) \subseteq \text{Conv}(M) \quad (3.61)$$

Algorithme 1 : Vérification de la quasi-régularité de polygones basée sur l'axe médian.

Entrée : Un objet polygonal $X \subset \mathbb{R}^2$ simplement connexe
Sortie : Un booléen indiquant si X est quasi-régulier

```

1 Début
2   Pour  $Y \in \{X, \bar{X}\}$  faire
3     Si  $\neg(\mathcal{M}(Y) \frown \mathcal{M}_1(Y))$  alors //  $Y$  et  $Y \ominus B_1$  n'ont pas le même type homotopie
4       retourner Faux
5     FinSi
6     Pour chaque composante connexe  $M \in \mathcal{M}_0^1(Y)$  faire // Vérification de  $(\mathfrak{P})$ 
7       Soit  $y \in M$  t.q.  $r(y) = 1$ 
8       Pour chaque  $z_i \in M$  t.q.  $r(z_i) = 0$  faire
9         Si  $\|y - z_i\|_2^2 > 2$  alors
10           retourner Faux
11         FinSi
12       FinPour
13     FinPour
14   FinPour
15 Fin
16 Retourner Vrai
  
```

En particulier, si l'on suppose que $(\mathfrak{P}) \forall 1 \leq i \leq k, \|y - z_i\|_2 \leq \sqrt{2}$, il s'ensuit que $\text{Conv}(M) \subseteq B(y, \sqrt{2})$. Comme $y \in Y \ominus B_1$, nous avons

$$(\mathfrak{P}) \Rightarrow \bigcup_{x \in M} B(x, r(x)) \subseteq Y \ominus B_1 \oplus B_{\sqrt{2}} \quad (3.62)$$

Nous obtenons alors la proposition suivante.

Proposition 51. *Soit $X \subset \mathbb{R}^2$ un polygone simplement connexe. Supposons que $\mathcal{M}(X) \frown \mathcal{M}_1(X)$, $\mathcal{M}(\bar{X}) \frown \mathcal{M}_1(\bar{X})$ et que pour chaque composante connexe de $\mathcal{M}_0^1(X)$ et $\mathcal{M}_0^1(\bar{X})$, la propriété (\mathfrak{P}) tient. Alors, X est quasi-régulier.*

Le processus de vérification est résumé dans l'Algorithme 1. Quelques illustrations pour la Proposition 51 sont données dans la Figure 3.26 avec trois objets : X_1 , X_2 et X_3 . Sur cette figure, X_1 et \bar{X}_1 ont le même type d'homotopie; ce n'est pas le cas pour X_2 et \bar{X}_2 (resp. X_3 et \bar{X}_3). En effet, seulement X_1 est quasi-régulier, X_2 ne satisfait ni (i) or (iii) et X_3 satisfait (i) mais pas (iii) de la Définition 39. On voit sur la troisième colonne que X_1 satisfait la Propriété 51; X_2 ne l'est pas ($\mathcal{M}_1(X_2)$ n'est pas connexe); X_3 non plus ((\mathfrak{P}) n'est pas satisfait).

La Proposition 51 nous fournit des conditions pour vérifier la quasi-régularité d'un objet polygonal X à l'aide de son axe médian. Elle consiste à vérifier les deux conditions suivantes :

1. $\mathcal{M}(Y) \frown \mathcal{M}_1(Y)$
2. (\mathfrak{P}) est valable pour chaque composante connexe de $\mathcal{M}_0^1(Y)$.

Les preuves ainsi que des détails sur l'implémentation de la méthode de vérification des polygones quasi-réguliers en utilisant la structure de l'axe médian sont détaillés dans [C3].

Dans l'objectif de réaliser un mouvement rigide tout en préservant la forme globale d'un objet discret $X \subset \mathbb{Z}^2$ ainsi que les propriétés topologiques, notre solution est de considérer une représentation intermédiaire et continue de X . Considérant les résultats présentés précédemment, nous proposons ci-dessous deux modèles de transformation : l'un basé sur les représentations polygonales, et l'autre basé sur l'axe médian de l'objet considéré.

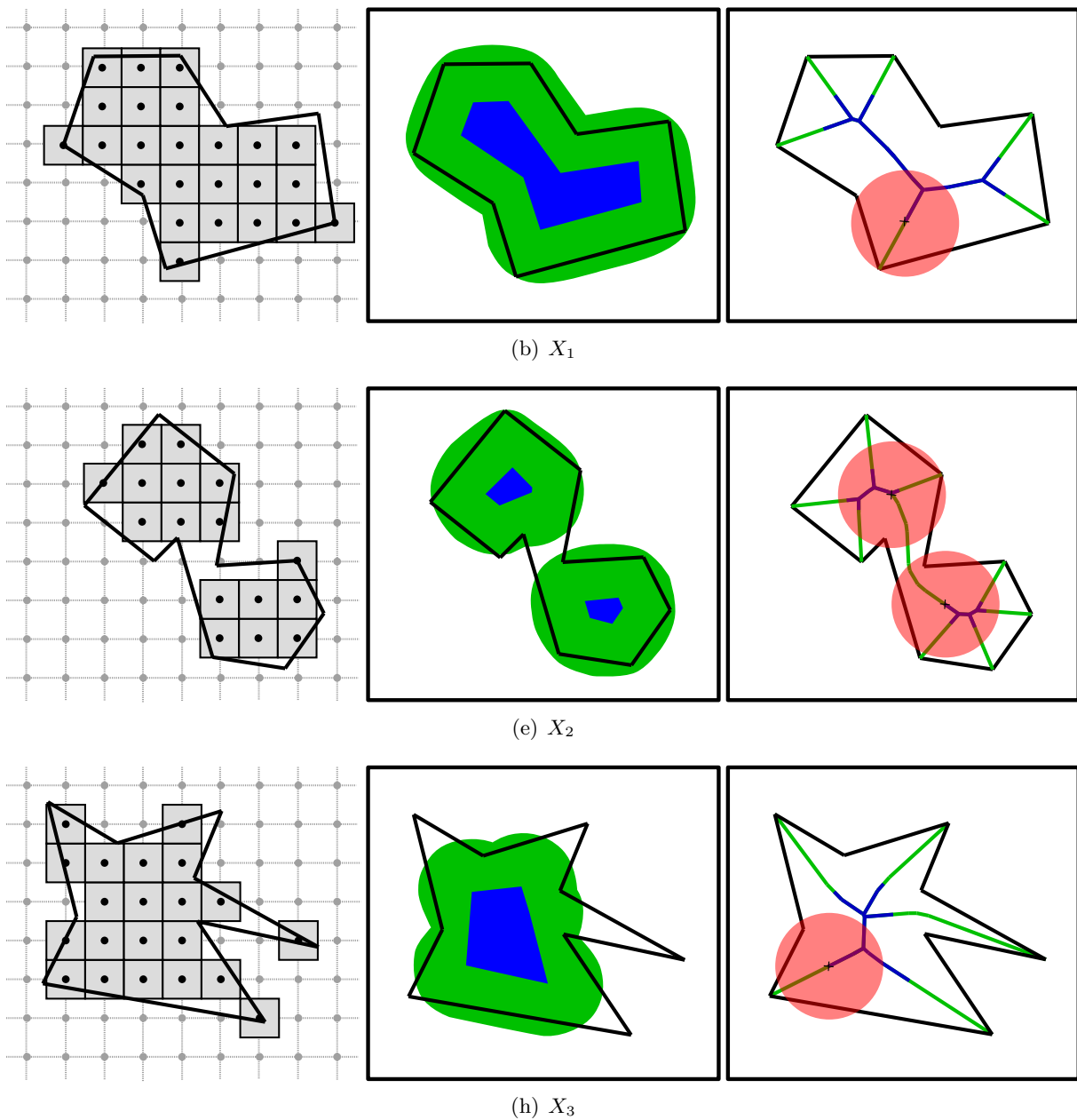


FIGURE 3.26 – Exemples de polygone quasi régulier et non quasi régulier. Gauche : le polygone $X_i \subset \mathbb{R}^2$ entouré d'une ligne polygonale noire et de sa discrétisation de Gauss $X_i = X_i \cap \mathbb{Z}^2$ (pixels gris). Centre : analyse de quasi-régularité basée sur la *Définition 39*; en bleu : $X_i \ominus B_1$ (condition (i)), en vert : $X_i \ominus B_1 \oplus B_{\sqrt{2}}$ (condition (iii)). Droite : analyse de quasi-régularité basée sur la *Proposition 51*; en bleu : $\mathcal{M}_1(X)$, en vert : $\mathcal{M}_0^1(X)$, en rouge : des boules $B(y, \sqrt{2})$ de centre y et rayon $r(y) = 1$.

3.6.3 Modèle de transformation basé sur des polygones

Ce premier modèle repose sur l'hypothèse que X peut être considéré comme la discrétisation d'un objet affine par morceaux, à savoir le polygone $P(X) \subset \mathbb{R}^2$ de X . Ce modèle présente

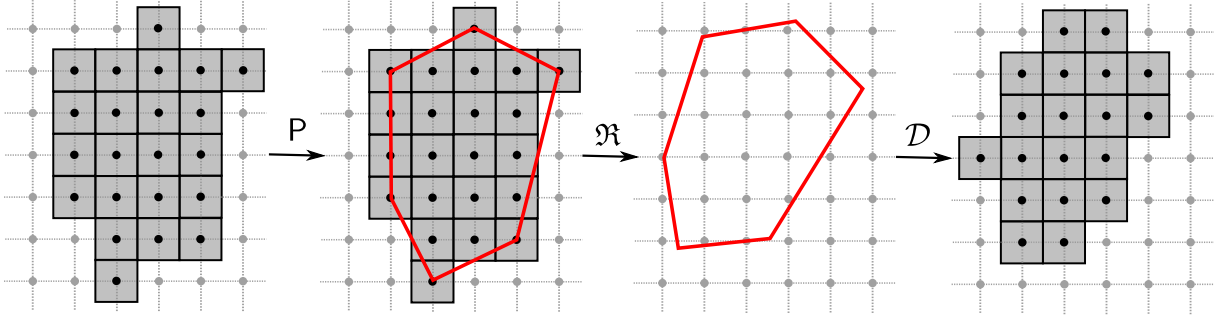


FIGURE 3.27 – Modèle de transformation via l’objet intermédiaire affine par morceaux : les polygones. De gauche à droite : l’objet d’entrée $X \subset \mathbb{Z}^2$, le polygone P de X par un processus de polygonalisation, le mouvement rigide est \mathfrak{R} appliqué sur P et l’objet discret résultant de la discrétisation de Gauss \mathcal{D} du polygone transformé.

plusieurs avantages. Premièrement, cela nous permet d’appliquer le mouvement rigide dans \mathbb{R}^2 , avec les garanties géométriques et topologiques dans cet espace. Deuxièmement, un polygone a aussi une représentation discrète ; il peut être traité avec les calculs exacts, en considérant des transformations basées sur des entiers (ou, de manière équivalente, sur des rationnels).

Dans ce contexte, le polygone $P(X)$ doit capturer de manière pertinente la géométrie de l’objet X , mais aussi $P(X) \cap \mathbb{Z}^2 = X$. En d’autres termes, la forme globale de X – la succession des parties convexes et concaves de son bord – doit être capturée par le processus de polygonalisation. Cela signifie qu’un objet discret convexe conduira à un polygone convexe. Dans ce cas, nous choisirons comme modèle de polygone pertinent l’enveloppe convexe de X . Dans les autres cas, le polygone dépendra de la politique de polygonalisation de l’utilisateur. Nous discutons plus en détails différentes techniques de polygonalisation possibles dans la *Section 3.7.2*.

Sur la base de ces hypothèses, nous proposons une méthode pour les mouvements rigides d’objets discrets de \mathbb{Z}^2 . Elle repose sur trois étapes successives :

1. la polygonalisation de l’objet discret ;
2. la transformation de l’objet intermédiaire affine par morceaux (polygone) de \mathbb{R}^2 ; et
3. la discrétisation de Gauss du polygone transformé pour récupérer un résultat dans \mathbb{Z}^2 .

Le schéma dans la *Figure 3.27* résume le processus proposé pour le modèle de transformation basé sur des polygones.

Notons que dans le cas d’un objet initial convexe, la méthode fournit un objet discret qui est également convexe. Dans les autres cas, on observe expérimentalement que la forme des objets est correctement conservée. Plus précisément, une telle observation peut être faite qualitativement et quantitativement, par exemple en regardant des propriétés géométriques comme l’aire ou le périmètre (voir *Section 3.7*).

Dans \mathbb{R}^2 , préserver la géométrie implique également de conserver la topologie. Ce n’est pas le cas dans \mathbb{Z}^2 . Pour cela, nous considérons la notion de quasi-régularité proposée dans la *Section 3.6.1* définie pour des objets continus, et en particulier pour les polygones. Elle fournit des conditions suffisantes à remplir par un objet continu pour garantir la préservation de la topologie lors de sa discrétisation.

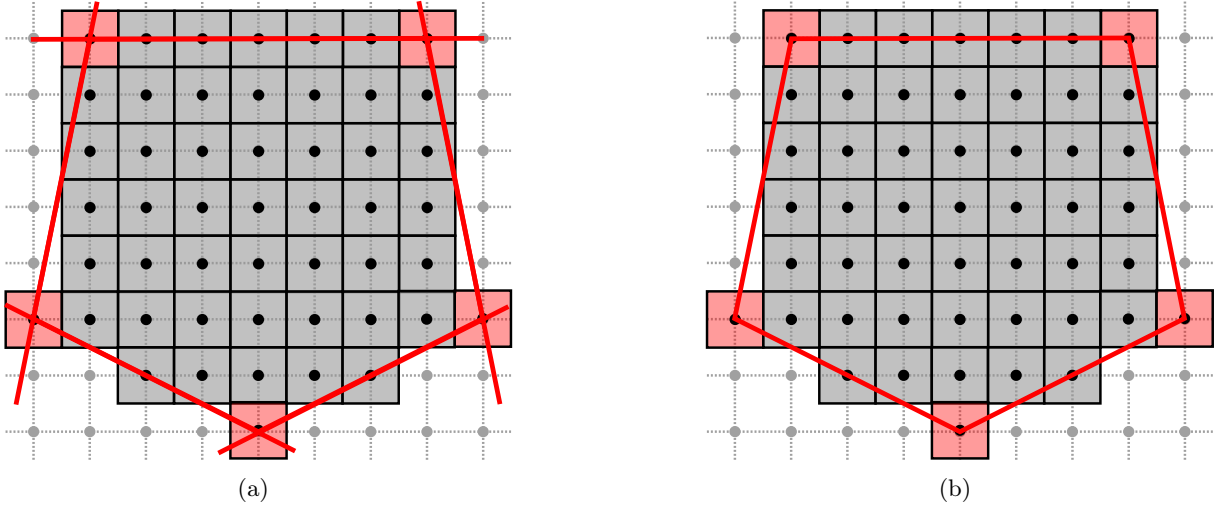


FIGURE 3.28 – (a) La représentation par demi-plans d'un objet discret H-convexe $X \subset \mathbb{Z}^2$ (points noirs et pixels gris) ; les demi-plans sont représentés par les cinq lignes droites (et points) de support rouges. (b) L'enveloppe convexe $\text{Conv}(X) \subset \mathbb{R}^2$; elle est définie comme le polygone dont les sommets sont les points rouges de X .

Convexité par mouvement rigide

La convexité joue un rôle important dans la géométrie. Dans cette section, nous abordons le cas particulier d'un objet discret X qui est H-convexe (voir *Section 3.2.3*). Pour le polygone $P(X)$ de X , nous considérons son enveloppe convexe, notée $\text{Conv}(X)$. Ensuite, le mouvement rigide est appliqué sur ce polygone, puis la discrétisation de Gauss \mathcal{D} pour récupérer l'objet transformé final. Nous montrons que, par ce procédé, la connexité est préservée si $\text{Conv}(X)$ est quasi-régulier.

La première étape du processus est donc de calculer l'enveloppe convexe. Soit $X \subset \mathbb{Z}^2$ un objet H-convexe contenant au moins trois points non alignés. Son enveloppe convexe $\text{Conv}(X)$ est un polygone convexe dont les sommets sont des points de X . Comme ces sommets sont, par définition, des points de \mathbb{Z}^2 , le polygone $\text{Conv}(X)$ est défini comme l'intersection de demi-plans avec des coefficients entiers

$$\text{Conv}(X) = \bigcap_{H \in R(\text{Conv}(X))} H \quad (3.63)$$

où $R(P)$ est l'ensemble minimal des demi-plans constituant un polygone convexe P , et H est un demi-plan de P déterminé par les paires de sommets consécutifs de $\text{Conv}(X)$, comme illustré dans la *Figure 3.28*. Puisque les coordonnées de ces sommets sont des entiers, H peut donc avoir aussi des coefficients entiers, à savoir

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c \leq 0, a, b, c \in \mathbb{Z}, \text{pgcd}(a, b) = 1\} \quad (3.64)$$

À partir de la *Définition 8* et de la *Propriété 9*, $X \subset \mathbb{Z}^2$ peut être déterminé par :

$$X = \left(\bigcap_{H \in R(\text{Conv}(X))} H \right) \cap \mathbb{Z}^2 = \bigcap_{H \in R(\text{Conv}(X))} (H \cap \mathbb{Z}^2). \quad (3.65)$$

En utilisant la représentation d'un objet H -convexe X par des demi-plans, on définit le mouvement rigide $\mathcal{R}_{\text{Conv}}$ de X sur \mathbb{Z}^2 par

$$\mathcal{R}_{\text{Conv}}(X) = \mathfrak{R}(\text{Conv}(X)) \cap \mathbb{Z}^2 = \mathfrak{R}\left(\bigcap_{H \in \mathcal{R}(X)} H\right) \cap \mathbb{Z}^2 \quad (3.66)$$

L'idée est que le mouvement rigide \mathfrak{R} est appliqué sur chaque demi-plan formant l'enveloppe convexe $\text{Conv}(X)$ de X et est suivi par une discrétisation sur l'intersection des demi-plans transformés afin de retrouver l'objet discret transformé final.

Il faut savoir qu'un demi-plan H (équation (3.64)) est transformé par un mouvement rigide rationnel (équation (3.19)) comme suit

$$\mathfrak{R}(H) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha x + \beta y + \gamma \leq 0\} \quad (3.67)$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ sont donnés par ${}^t(\alpha \ \beta) = R^t(a \ b)$ et $\gamma = c + \alpha t_1 + \beta t_2$, avec R la matrice de rotation. Comme cela conduit à un demi-plan rationnel, alors l'objet transformé peut être facilement ré-écrit sous la forme de l'équation (3.64). En particulier, nous avons ainsi

$$\mathfrak{R}\left(\bigcap_{H \in \mathcal{R}(X)} H\right) \cap \mathbb{Z}^2 = \left(\bigcap_{H \in \mathcal{R}(X)} \mathfrak{R}(H)\right) \cap \mathbb{Z}^2 = \bigcap_{H \in \mathcal{R}(X)} (\mathfrak{R}(H) \cap \mathbb{Z}^2) \quad (3.68)$$

Il faut dire que la discrétisation de Gauss de chaque demi-plan rationnel $\mathfrak{R}(H)$, à savoir $\mathfrak{R}(H) \cap \mathbb{Z}^2$, peut être facilement obtenue en vérifiant, avec des calculs exacts, l'inégalité dans l'équation (3.67).

Par construction, $\mathcal{R}_{\text{Conv}}(X)$ permet de préserver la H -convexité de l'objet discret H -convexe X . La proposition suivante est alors un corollaire de la *Propriété 9*.

Proposition 52. *Soit $X \subset \mathbb{Z}^2$, $\mathcal{R}_{\text{Conv}}$ un mouvement rigide rationnel basé sur des polygones. Si X est H -convexe, alors $\mathcal{R}_{\text{Conv}}(X)$ est H -convexe.*

Le polygone correspondant à l'enveloppe convexe de $\mathcal{R}_{\text{Conv}}(X)$ n'est pas égal, en général, à l'enveloppe convexe transformée de X . Cependant, nous avons la relation d'inclusion suivante :

$$\text{Conv}(\mathcal{R}_{\text{Conv}}(X)) \subseteq \mathfrak{R}(\text{Conv}(X)) \quad (3.69)$$

Premièrement, cela signifie que la cardinalité de $\mathcal{R}_{\text{Conv}}(X)$ est inférieure (souvent strictement) à celle de X . En d'autres termes, $\mathcal{R}_{\text{Conv}}$ est un opérateur qui fait décroître la cardinalité de l'objet discret d'entrée. Une conséquence simple est que $\mathcal{R}_{\text{Conv}}$ n'est pas bijective, en général. Deuxièmement, cela signifie que les polygones des deux enveloppes convexes des objets discrets d'entrée et de sortie peuvent être distincts, que l'on regarde leur cardinal, la taille des arêtes ou les angles aux sommets. Cependant, la convexité des objets est préservée, ce qui était la propriété fondamentale à satisfaire. Ces faits sont illustrés dans la *Figure 3.29* et observés expérimentalement dans la *Section 3.7*.

Dans \mathbb{R}^2 , la définition continue de la convexité implique intrinsèquement la connexité. En revanche, dans \mathbb{Z}^2 la notion de H -convexité n'offre pas toujours des garanties de connexité (voir *Figure 3.5*). En plus, pour des garanties géométriques de convexité – via la H -convexité des objets discrets – lors de l'application d'un mouvement rigide sur un objet discret, il est souhaitable de fournir également des garanties de topologie, et en particulier de connexité.

Pour atteindre cet objectif, nous utilisons la notion de quasi-régularité introduite dans la *Section 3.6.1*. Cette notion nous fournit les conditions suffisantes pour garantir qu'un objet discret H -convexe restera non seulement H -convexe mais également connexe après mouvement rigide sur \mathbb{Z}^2 .

En particulier, les résultats suivants sont des corollaires des *Propositions 40* et *52*.

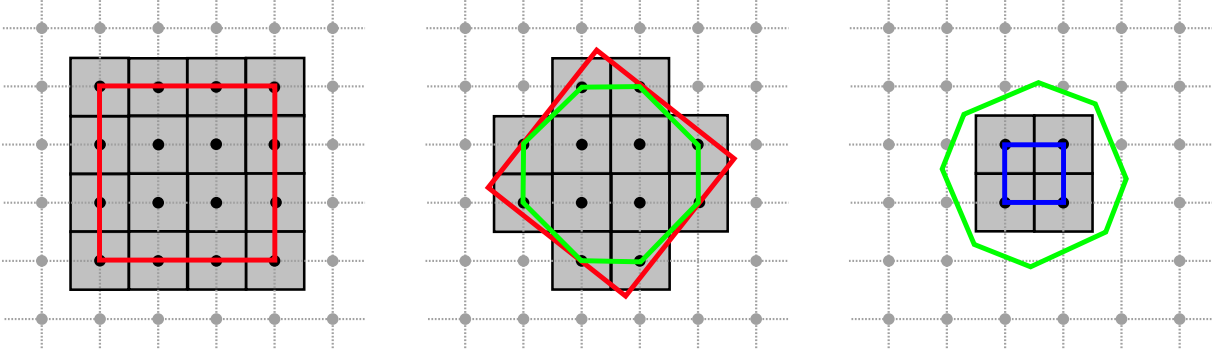


FIGURE 3.29 – Une séquence de mouvements rigides $\mathcal{R}_{\text{Conv}}$ sur un objet discret convexe X . L’enveloppe convexe de l’objet résultant $\mathcal{R}_{\text{Conv}}(X)$ est inclus dans l’enveloppe convexe transformée de X et la cardinalité de $\mathcal{R}_{\text{Conv}}(X) \cap \mathbb{Z}^2$ est plus petite que celle de X .

Proposition 53. *Soit $X \subset \mathbb{Z}^2$ un objet discret H -convexe et connexe. Si $\text{Conv}(X)$ est quasi-régulier, alors $\mathcal{R}_{\text{Conv}}(X)$ est H -convexe, 4-connexe et bien composé.*

Propriété 54. *Si $\text{Conv}(X)$ est quasi-régulier, alors l’objet discret initial X est aussi 4-connexe et bien composé.*

Convexité et concavité par mouvement rigide

Nous abordons maintenant le mouvement rigide des objets discrets sans hypothèse de convexité. Dans ce cas, nous ne pouvons pas considérer la représentation par demi-plans, comme cela a été fait précédemment. Nous utilisons alors une représentation de polygones par sommets : nous modélisons un polygone via la séquence des sommets successifs sur son bord.

Dans le cas où les sommets du polygone $P(X)$ de $X \subset \mathbb{Z}^2$ sont des points entiers (ou rationnels), ceux du polygone transformé le seront aussi, parce qu’on considère un mouvement rigide rationnel \mathfrak{R} (voir Section 3.2.4). Le mouvement rigide rationnel $\mathfrak{R}(P(X))$ de $P(X)$ peut être réalisé en appliquant simplement \mathfrak{R} sur chaque sommet du $P(X)$, et en conservant la séquence des sommets.

Après avoir calculé $\mathfrak{R}(P(X))$, l’objet résultant, désigné par $\mathcal{R}_{\text{Poly}}(X)$ est calculé via la discrétisation de Gauss comme suit :

$$\mathcal{R}_{\text{Poly}}(X) = \mathfrak{R}(P(X)) \cap \mathbb{Z}^2 \quad (3.70)$$

Afin d’assurer la connexité de X nous avons besoin, comme pour le cas H -convexe, que le polygone $P(X)$ de X soit quasi-régulier.

Proposition 55. *Soit $X \subset \mathbb{Z}^2$ un objet discret, et $P(X) \subset \mathbb{R}^2$ un polygone tel que $P(X) \cap \mathbb{Z}^2 = X$. Si $P(X)$ est quasi-régulier alors $\mathcal{R}_{\text{Poly}}(X)$ est 4-connexe et bien composé.*

Ce procédé de mouvement rigide sur \mathbb{Z}^2 via la représentation polygonale $P(X)$ de X permet, par construction, de conserver la forme globale de l’objet transformé, et en particulier la séquence des parties convexes et concaves du bord.

Comme indiqué ci-dessus, $P(X)$ peut être défini en suivant diverses stratégies. Il existe de nombreux (en fait un nombre infini de) polygones dont la discrétisation est égal à X . En particulier, il peut arriver que $P(X)$ ne soit pas quasi-régulier tandis que X et $\mathcal{R}_{\text{Poly}}(X)$ sont 4-connexes et bien composés. Ce cas de figure souligne l’importance de choisir judicieusement une politique de polygonalisation. Dans ce contexte, diverses propriétés peuvent être ciblées de manière pertinente.

Une première propriété est liée à la préservation de l'aire ou de la superficie. En effet, du fait de la procédure de discrétisation du polygone réalisée par un échantillonnage régulier par rapport à \mathbb{Z}^2 , il peut être utile que $P(X)$ possède une superficie dans \mathbb{R}^2 de même ordre que la cardinalité $|X|$. Il s'agit d'une stratégie heuristique, car nous ne pouvons garantir que le résultat de la discrétisation aura exactement la même surface que l'objet discret initial. Elle est cependant justifiée par le fait que chaque pixel associé à chaque point de \mathbb{Z}^2 a une superficie de 1 dans \mathbb{R}^2 . Par conséquent, pour les objets discrets suffisamment grands, l'analogie entre la surface et le nombre de points numériques a du sens. Pour les objets plus petits, où les points limites ne sont plus négligeables par rapport à l'ensemble global des points, cette heuristique peut être affinée en considérant des formules plus précises, par exemple via le théorème de Pick [316].

Une deuxième propriété est liée au positionnement de $P(X)$ par rapport à X . Plus précisément, il peut être pertinent que le barycentre de $P(X)$ et celui de X soit le même. Par ailleurs, le décalage entre les deux peut induire statistiquement un biais de translation dans le résultat transformé.

3.6.4 Modèle de transformation basé sur l'axe médian

Cette approche se base aussi sur la représentation polygonale d'un objet discret avec laquelle nous allons calculer son axe médian pour vérifier la propriété de la quasi-régularité comme expliqué dans la *Section* 3.6.2. En particulier, nous utilisons l'axe médian du polygone de l'objet comme le modèle continu intermédiaire pour réaliser le mouvement rigide sur \mathbb{Z}^2 .

Le processus de transformer un objet discret $X \subset \mathbb{Z}^2$ par un mouvement rigide \mathfrak{R} est composé de trois étapes :

1. calculer un polygone $P(X)$, qui est une représentation pertinente de X , et l'axe médian $\mathcal{M}(P(X))$ de $P(X)$,
2. transformer $\mathcal{M}(P(X))$ par \mathfrak{R} et reconstruire le polygone transformé P' de $\mathfrak{R}(\mathcal{M}(P(X)))$,
3. discrétiser P' par la discrétisation de Gauss : $X_{\mathfrak{R}} = P' \cap \mathbb{Z}^2$.

D'une part, suivant l'équation (3.54), le polygone P (resp. $P' = \mathfrak{R}(\mathcal{M}(P))$) peut être reconstruit à partir de $\mathcal{M}(P)$ (resp. $\mathcal{M}(P')$). D'autre part, par définition, nous avons $X \subset P(X) \subset \mathcal{M}(P(X))$ et $\mathcal{M}(P(X)) \subset \mathfrak{R}(\mathcal{M}(P(X)))$. Il suffit de garantir que P est quasi-régulier pour assurer le mouvement rigide préservant le type d'homotopie entre deux objets X et $X_{\mathfrak{R}}$.

Il faut noter que, par construction, le résultat obtenu par l'axe médian est exactement le même que par la représentation polygonale de X . En effet, nous transformons l'axe médian du polygone $P(X)$ de X . Par conséquent, ce modèle basé sur l'axe médian permet les mêmes préservations géométriques que le modèle basé sur des polygones dans la *Section* 3.6.3.

Un aperçu du résultat est donné dans la *Figure* 3.30. Les objets $X \subset \mathbb{Z}^2$ sont représentés avec leur représentation polygonale $P(X) \subset \mathbb{R}^2$. Sur cette figure, à la première ligne, l'objet dont le polygone est quasi-régulier a le résultat avec des garanties de préservation de type d'homotopie par mouvement rigide. À l'inverse, dans les deuxième et troisième lignes, nous observons des altérations topologiques liées à la non quasi-régularité du polygone : la deuxième ligne avec la création de trous et la troisième avec un type d'homotopie différent dans l'objet transformé et une perte de la connexité. D'autres résultats sont disponibles dans [C3].

3.7 Expérimentations

Dans cette section, nous présentons des résultats obtenus avec les schémas algorithmiques proposés. D'autres résultats et discussions sont également disponibles dans les articles associés

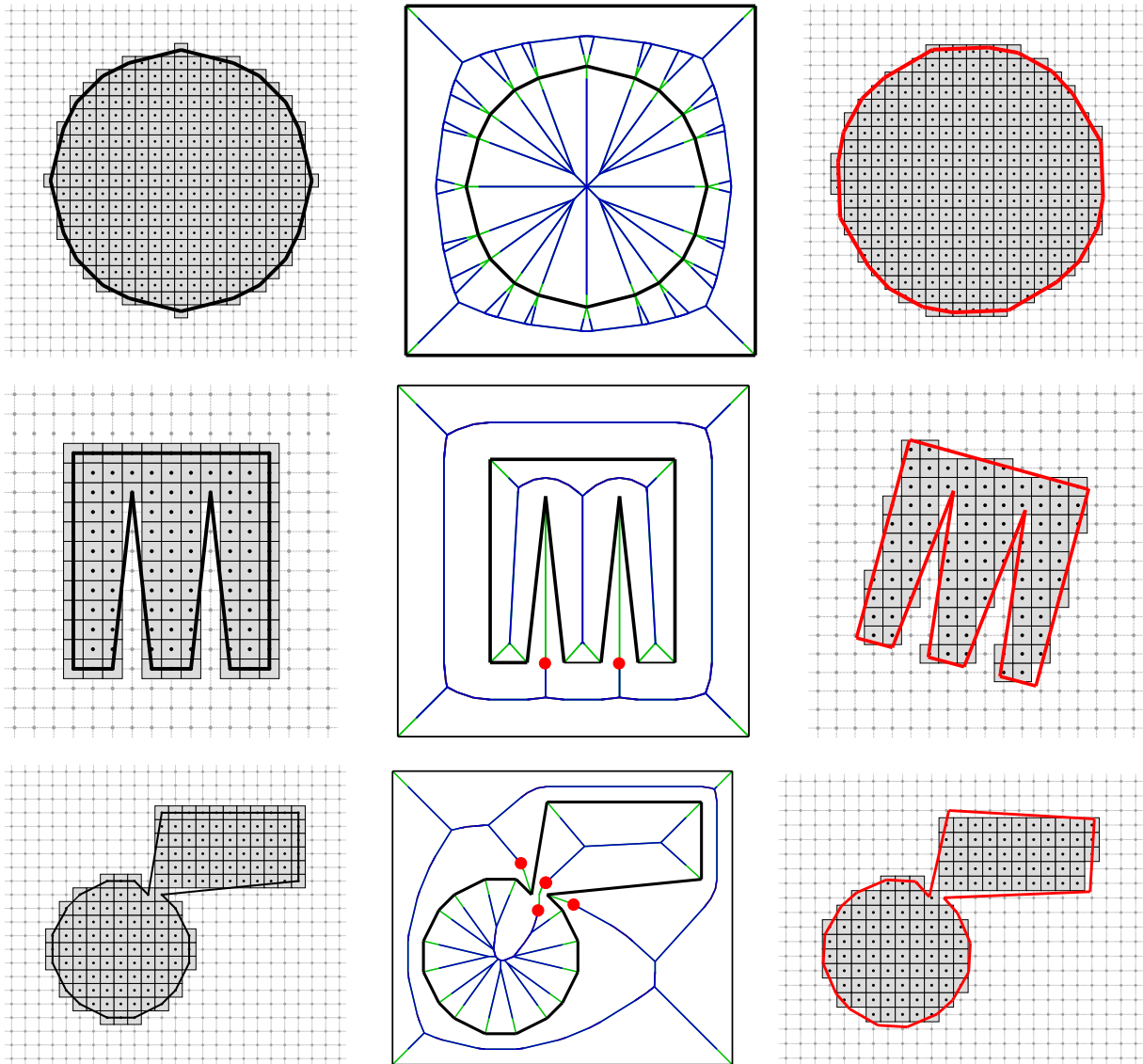


FIGURE 3.30 – Gauche : les objets d'entrée X avec leur polygone P (en noir). Centre : la vérification de la quasi-régularité de P en utilisant son axe médian $\mathcal{M}(P)$ avec $\mathcal{M}_1(P)$ (en bleu) et $\mathcal{M}_0^1(P)$ (en vert). Les points rouges correspondent à une propriété (\mathfrak{P}) non satisfaite ou lorsque des déconnexions se produisent. Droite : les objets obtenus par la discrétisation de Gauss du polygone P' (en rouge), le résultat de la reconstruction de $\mathfrak{R}(\mathcal{M}(P))$.

à cette partie [J5], [C18], [C20]. L'implémentation associée est disponible sur *GitHub*⁹ et une démonstration en ligne est donnée à l'adresse suivante :

https://ipol-geometryhost.loria.fr/~phuc/ipol_demo/RigidMotion2D/

9. <https://github.com/ngophuc/QuasiRegularRigidMotion>

3.7.1 Préservation de la convexité

De nombreuses méthodes peuvent être utilisées pour calculer l'enveloppe convexe $\text{Conv}(X)$ d'un objet $X \subset \mathbb{Z}^2$. Nous pouvons citer par exemple [53, 92, 114]. Pour un calcul efficace, nous utilisons la version discrète de l'algorithme de Melkman [275] pour calculer l'enveloppe convexe $\text{Conv}(X)$ d'un objet H-convexe X . Cet algorithme a une complexité linéaire par rapport au nombre de points de X .

Pour la comparaison, nous notons $\mathcal{R}_{\text{Point}}$ le modèle de transformation point par point défini par l'équation (3.11) dans la Section 3.2.4. Il convient de mentionner que les polygones associés aux objets utilisés dans les expérimentations sont tous quasi-réguliers. Dans la suite, nous fournissons une évaluation de la performance des mouvements rigides à l'aide de trois modèles de transformation : $\mathcal{R}_{\text{Point}}$, $\mathcal{R}_{\text{Conv}}$ et $\mathcal{R}_{\text{Poly}}$ (voir Section 3.7.2). Nous observons, dans les résultats expérimentaux, les propriétés de convexité, d'aire discrète (en terme de cardinalité) ainsi que les effets sur le bord des objets transformés par mouvement rigide.

Tout d'abord, nous expérimentons nos méthodes sur 2 objets H-convexes, à savoir un disque de rayon 10 et un carré de côté 21. Les méthodes sont testées sur une séquence de rotations successives autour de l'origine (centre des objets), pour évaluer les altérations topologiques accumulées dans les images transformées. Le processus est le suivant : une rotation est appliquée sur l'image d'entrée ; puis l'image transformée est utilisée comme entrée pour la rotation suivante, et ainsi de suite.

Les Tableaux 3.1 et 3.2 présentent les résultats visuels des images transformées par les trois modèles sur le disque et le carré, respectivement. D'après les deux expérimentations, nous observons que le modèle $\mathcal{R}_{\text{Point}}$ modifie le bord des objets et ne préserve pas du tout la convexité et la connexité. En effet, le disque et le carré initiaux sont bien composés et H-convexes, cependant les objets transformés ne le sont pas. En revanche, le modèle $\mathcal{R}_{\text{Conv}}$ permet de conserver la topologie avec la convexité, comme indiqué dans la Proposition 53, dans la mesure où $\text{Conv}(X)$ est quasi-régulier. En particulier, comme mentionné par l'équation (3.69), $\mathcal{R}_{\text{Conv}}$ est un opérateur décroissant par rapport à la cardinalité de l'objet d'entrée.

3.7.2 Extension aux objets non convexes

Avant de montrer le comportement des méthodes sur les objets non convexes, nous discutons ci-dessous de deux étapes nécessaires pour l'expérimentation : la polygonalisation et la discrétisation.

Polygonalisation d'un objet discret

Il existe différentes méthodes pour la polygonalisation d'un objet discret. En général, les approches utilisent les courbes extraites du contour de l'objet, et chaque méthode calcule une représentation polygonale de l'objet discret avec des propriétés particulières. Dans [104, 384], les auteurs présentent les méthodes inversibles pour calculer des polygones euclidiens dont la discrétisation est égale au contour discret d'origine. Ces méthodes utilisent l'algorithme de Vittone [426] dans l'espace de pré-image pour la reconnaissance de droites discrètes. Dans [108, 109, 129, 358], l'algorithme de reconnaissance arithmétique des droites discrètes [96] est utilisé pour décomposer un contour discret et en déduire une représentation polygonale. Ces méthodes reposent sur la couverture tangentielle du contour [128] qui est composée d'une séquence de segments de droites maximaux.

Dans [108, 109, 358], l'objectif était différent. Il consistait à déterminer un polygone réversible qui représente bien les parties convexes et concaves du bord de l'objet discret. La méthode de

















	 $\#Points=317$				
	$\theta = \frac{\pi}{10}$	$\theta = \frac{2\pi}{10}$	$\theta = \frac{3\pi}{10}$	$\theta = \frac{4\pi}{10}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
\mathcal{R}_{Point}	 $\#Points=317$	 $\#Points=317$	 $\#Points=317$	 $\#Points=317$	 $\#Points=317$
\mathcal{R}_{Conv}	 $\#Points=297$	 $\#Points=273$	 $\#Points=257$	 $\#Points=237$	 $\#Points=213$
\mathcal{R}_{Poly}	 $\#Points=297$	 $\#Points=297$	 $\#Points=297$	 $\#Points=297$	 $\#Points=317$

TABLE 3.1 – Expérimentation de préservation de la géométrie et de la topologie sur un disque de rayon 10 pour les rotations successives où le centre de rotation est le centre du disque.

polygonalisation proposée dans [C25], [295] exploite également l'idée de primitive de segments de droites maximaux. Elle permet d'identifier les points caractéristiques d'un contour, appelés *points dominants*, et de construire un polygone représentant le contour donné.

Une autre technique présentée dans [142] est la décomposition de la courbe en primitives. Elle utilise les primitives analytiques, appelées *couches de niveau numériques* (digital level layers (DLL) en anglais), pour décomposer un contour donné et obtenir une représentation analytique. Un autre algorithme est proposé dans [382] pour calculer la simplification polygonale d'une courbe telle que la distance de Fréchet [134] entre le polygone simplifié et la courbe d'origine soit inférieure à une valeur donnée.

Il faut mentionner que, pour un objet discret X , différents résultats peuvent être obtenus à partir de ces différentes techniques de polygonalisation. En d'autres termes, la représentation polygonale d'un objet discret n'est pas unique. Cependant, la propriété cruciale à satisfaire est que le polygone P de X soit cohérent à la discrétisation, à savoir $P \cap \mathbb{Z}^2 = X$; cette condition est appelée *réversibilité digitale* (digital reversibility en anglais). Une deuxième propriété importante, dans notre cadre de géométrie discrète et de calcul exact, est que les sommets de P aient des coordonnées entières ou rationnelles.

















	 #Points=441				
	$\theta = \frac{\pi}{10}$	$\theta = \frac{2\pi}{10}$	$\theta = \frac{3\pi}{10}$	$\theta = \frac{4\pi}{10}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
$\mathcal{R}_{\text{Point}}$	 #Points=445	 #Points=437	 #Points=437	 #Points=445	 #Points=441
$\mathcal{R}_{\text{Conv}}$	 #Points=397	 #Points=385	 #Points=373	 #Points=357	 #Points=349
$\mathcal{R}_{\text{Poly}}$	 #Points=397	 #Points=409	 #Points=409	 #Points=397	 #Points=441

TABLE 3.2 – Expérimentation de préservation de la géométrie et de la topologie sur un carré de taille 21×21 pour les rotations successives et le centre de rotation est le barycentre du carré.

La plupart des méthodes citées précédemment calculent un polygone simplifié du contour de l'objet avec des critères à minimiser. Ils ne répondent pas complètement aux deux propriétés mentionnées. Pour cela, nous proposons une nouvelle méthode de polygonalisation basée sur les points du bord de X et sur son enveloppe convexe qui garantit ces deux propriétés. Plus précisément, la méthode pour calculer la représentation polygonale P de X consiste à, tout d'abord, extraire le contour 8-connexe de X , noté C , puis calculer l'enveloppe convexe de X à partir de C (voir *Figure 3.31* (a)–(c)). On initialise ensuite le polygone P avec l'ensemble de sommets ordonnés (dans le sens des aiguilles d'une montre) de l'enveloppe convexe de X . Pour chaque paire de sommets consécutifs p_1 et p_2 de P , nous considérons l'ensemble des points de contour de C entre p_1 et p_2 , noté $C(p_1, p_2)$. Nous choisissons $p_3 \in C(p_1, p_2) \setminus P$ tel que

$$p_3 = \arg \max_{q \in C(p_1, p_2) \setminus P} \{d(p_1, q) \mid (\Delta p_1 q r \cap \mathbb{Z}^2) \cap \bar{X} = \emptyset \text{ pour } r \in C(p_1, q)\} \quad (3.71)$$

où $d(p_1, q)$ est la distance euclidienne entre p_1 et q , et $\Delta p_1 q r$ est le triangle dont les sommets sont p_1 , q et r . Si un tel p_3 existe, on l'ajoute dans P entre p_1 et p_2 . Nous répétons ce processus jusqu'à ce qu'aucun point ne soit ajouté dans P (voir *Figure 3.31* (d)). Notez que les sommets

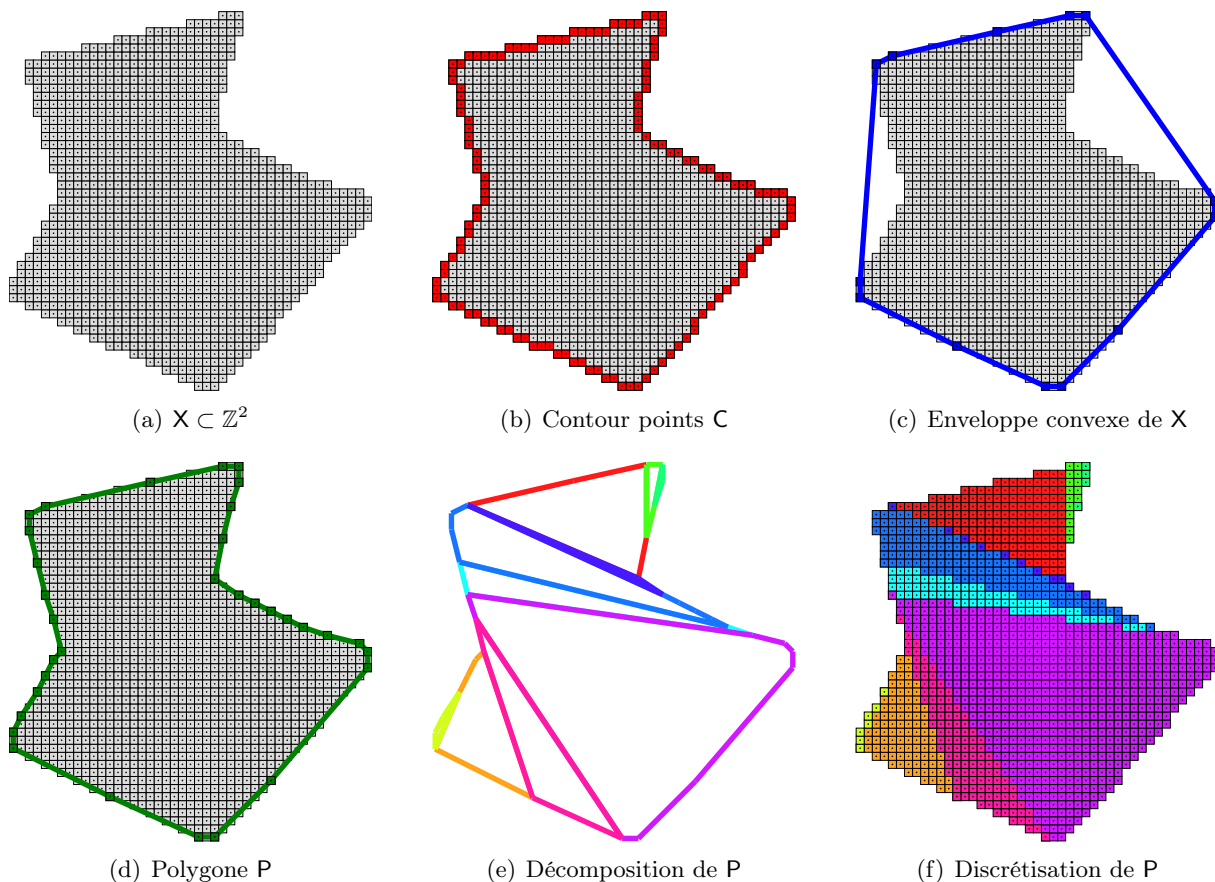


FIGURE 3.31 – (a) Un objet discret X . (b) Le contour 8-connexe C extrait de X (pixels rouges). (c) L’enveloppe convexe (lignes bleues) calculée à partir de C . (d) Le polygone P (en vert) calculé à partir de l’enveloppe convexe et les points de C de telle sorte que $X = P \cap \mathbb{Z}^2$. (e) La décomposition de P en parties convexes P_i tel que $P = \bigcup_{i=1..m} P_i$. (f) La discrétisation de la décomposition tel que $X = P \cap \mathbb{Z}^2 = \bigcup_{i=1..m} (P_i \cap \mathbb{Z}^2)$.

de P sont des points discrets de l’objet X . Par construction, cet algorithme implique un calcul exact avec des entiers et le polygone obtenu a des sommets entiers.

Pour calculer efficacement P , nous utilisons l’algorithme de traçage des frontières proposé dans [150] et appliquons la version discrète de l’algorithme de Melkman [275] pour calculer l’enveloppe convexe des points de bords. Les deux méthodes ont une complexité linéaire en temps par rapport au nombre de points de bord.

Nous rappelons que toute autre méthode de polygonalisation peut être utilisée pour calculer P de X dans la mesure où la méthode est réversible discret et les sommets de P ont des coordonnées rationnelles ; par exemple, nous avons considéré dans [J7] une approche basée sur la détection du point dominant pour P .

Discrétisation des polygones

Une fois calculé le polygone P de X , nous effectuons la transformation \mathcal{R}_P sur P (voir équation (3.70)) et obtenons le polygone transformé $\mathfrak{R}(P)$. Puis, nous réalisons la discrétisation de Gauss \mathcal{D} sur $\mathfrak{R}(P)$ afin d’obtenir un résultat dans \mathbb{Z}^2 . Différents moyens existent pour réaliser

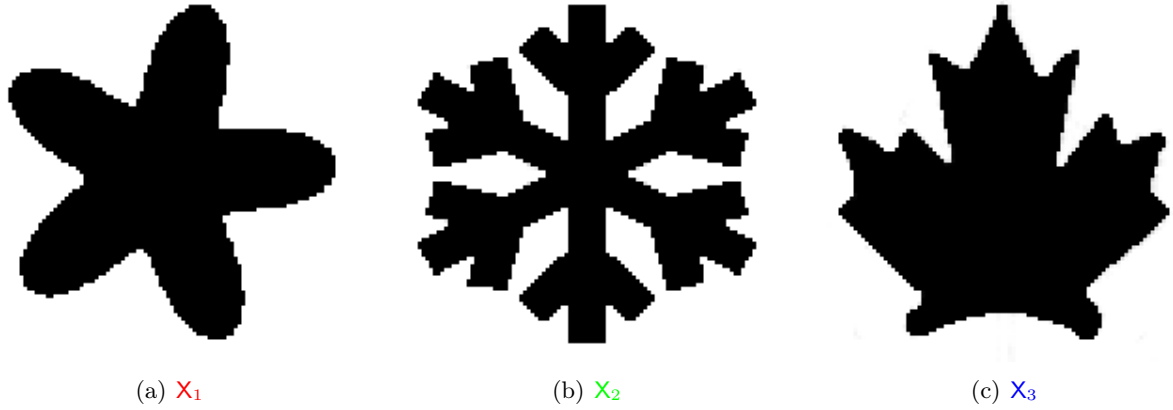


FIGURE 3.32 – Objets discrets non convexes utilisés pour les expérimentations de la Section 3.7.1.

ce processus de manière exacte. Par exemple, dans [C18] pour le mouvement rigide préservant la géométrie, nous appliquons une décomposition pour subdiviser P en parties convexes P_i , $i = 1..m$, tel que $P = \bigcup_{i=1..m} P_i$ (voir Figure 3.31 (e)). Par conséquent, nous avons :

$$X = P \cap \mathbb{Z}^2 = \left(\bigcup_{i=1..m} P_i \right) \cap \mathbb{Z}^2 = \bigcup_{i=1..m} (P_i \cap \mathbb{Z}^2). \quad (3.72)$$

Comme chaque partie P_i (resp. $\mathfrak{R}(P_i)$) est un polygone convexe, nous pouvons réutiliser la représentation en demi-plans décrite dans la Section 3.6.3 pour la discrétisation de P (resp. $\mathfrak{R}(P)$) (voir Figure 3.31 (f)).

Pour la décomposition en parties convexes, nous utilisons l'algorithme ACD (Approximate Convex Decomposition) proposé par Lien *et al.* [245]. La méthode est basée sur une stratégie hiérarchique pour effectuer la décomposition et a une complexité de $\mathcal{O}(nr)$ où n et r sont respectivement le nombre de sommets et de parties non convexes du polygone.

La Figure 3.33 montre un aperçu de résultat avec l'approche proposée. Pour les expérimentations, nous définissons les paramètres de la méthode d'ACD pour éviter toute approximation de la décomposition. Plus de détails sur l'algorithme et les paramètres sont donnés dans [C18]. Une implémentation permettant de reproduire les résultats est aussi disponible sur *Github* :

<https://github.com/ngophuc/RigidTransformAcd2D>

Pour les objets polygonaux simplement connexes, cette étape peut être réalisée différemment en utilisant les sommets rationnels de P ou $\mathfrak{R}(P)$; par exemple, utiliser un variant de la méthode de lancer de rayons (ray casting en anglais) présenté dans [R1].

Dans d'autres cas, nous pouvons utiliser la structure de l'arbre de concavité [388] d'un objet discret comme dans [N6]. Il s'agit d'une représentation hiérarchique des parties convexes et concaves de l'objet avec différents niveaux de détails (voir Figure 3.34). Cette structure arborescente a été utilisée dans le cadre d'applications telles que le calcul de polygones à périmètre minimum [207], l'analyse de forme hiérarchique [44], ou encore l'approximation polygonale [10].

Il faut mentionner que, quelque soit la méthode utilisée pour la discrétisation, le résultat est le même et égal à $X = P \cap \mathbb{Z}^2$ avec P est la représentation polygonale de l'objet discret X .

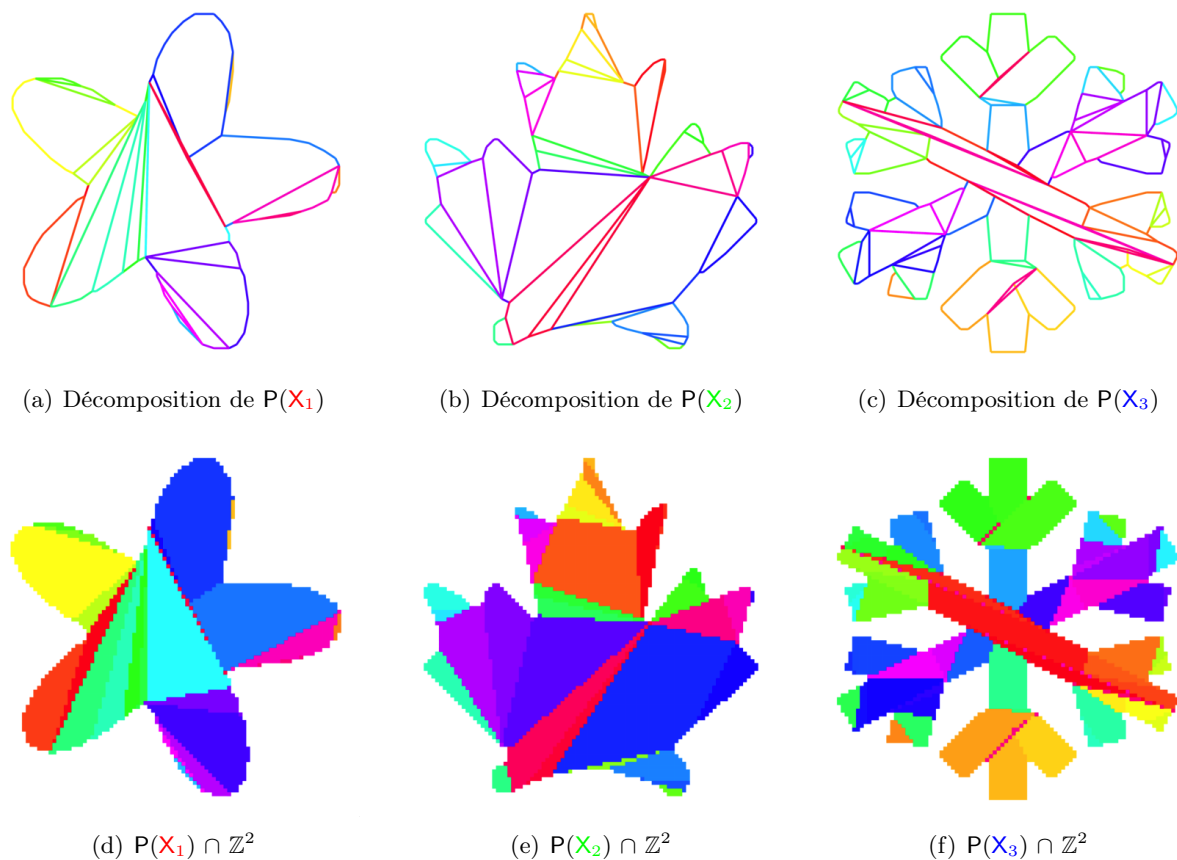


FIGURE 3.33 – La décomposition en parties convexes du polygone issu des objets de la Figure 3.32 (première ligne) et la discrétisation de Gauss via la décomposition (deuxième ligne).

Expérimentations : Préservation de l'aire et du périmètre

En utilisant la polygonalisation et la discrétisation décrites précédemment, nous présentons ci-dessous d'autres expérimentations sur différents objets discrets (voir Figure 3.32) pour comparer les modèles \mathcal{R}_{Point} et \mathcal{R}_{Poly} . Pour cela, nous cherchons à quantifier expérimentalement la précision et la stabilité des mesures géométriques des objets transformés avec ces deux modèles. Plus précisément, nous observons deux mesures : l'aire et le périmètre. L'aire est calculée comme le nombre de points discrets dans l'objet [209] et le calcul du périmètre est basé sur les segments maximaux de la courbe 4-connexe extraite de l'objet [216]. Il a été prouvé que ces estimateurs ont des propriétés de convergence multi-grilles [72]. Les résultats sont affichés dans la Figure 3.35, pour les mouvements rigides générés aléatoirement avec des angles de rotation $\theta \in [0, 2\pi[$ et la translation $t_1, t_2 \in [0, 1[$. On peut observer que \mathcal{R}_{Point} et \mathcal{R}_{Poly} ont tous un comportement stable par rapport à la mesure de l'aire, et \mathcal{R}_{Poly} préserve mieux le périmètre que \mathcal{R}_{Point} . (D'autres résultats sont disponibles dans l'article associé [J5].)

3.8 Extension de la quasi- r -régularité en 3D

Les données volumiques, présentées par les voxels, sont fréquemment impliquées dans l'infographie (*e.g.* l'animation dans les jeux, les simulations) et le traitement d'images 3D (*e.g.* suivi

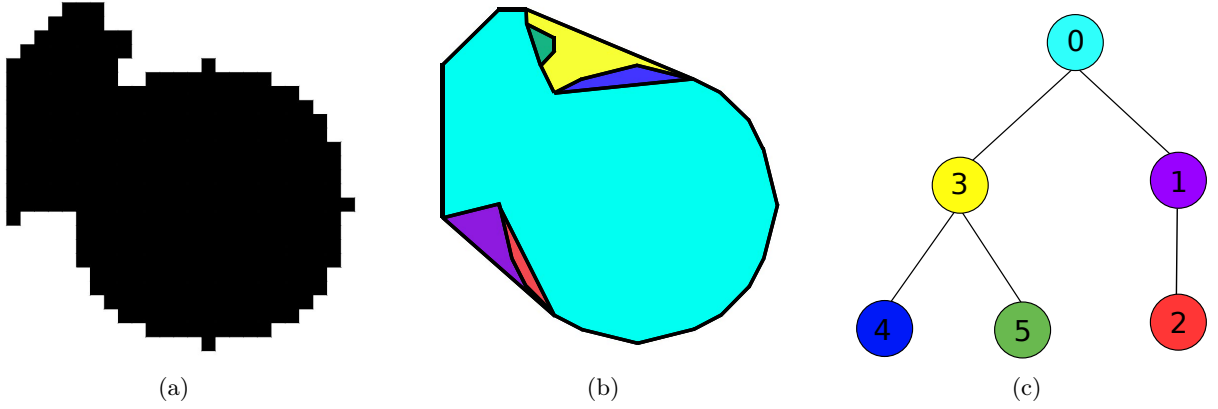


FIGURE 3.34 – Exemple de l'arbre de concavités (c) construit à partir de ces polygones non convexes (b) de l'objet discret (a).

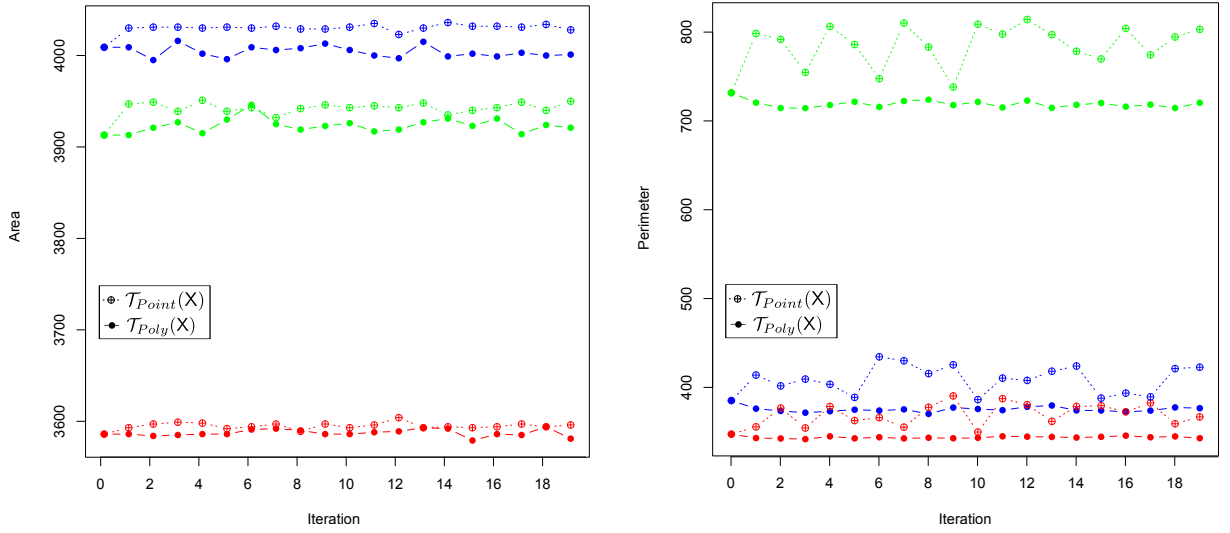


FIGURE 3.35 – Comparaisons entre \mathcal{R}_{Point} et \mathcal{R}_{Poly} pour les trois objets X_1 , X_2 et X_3 de la Figure 3.32 sur les deux mesures géométriques : l'aire (à gauche) et le périmètre (à droite).

d'objet, reconnaissance de formes, traitement d'images médicales). Dans ces applications, les données par voxels nécessitent souvent des manipulations dans l'espace de \mathbb{Z}^3 et, parmi les opérations simples, le mouvement rigide est souvent considéré.

Sans perte de généralité, un mouvement rigide \mathfrak{R} en 3D peut être défini par :

$$\left| \begin{array}{lcl} \mathfrak{R} & : & \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ & & x \mapsto Rx + t \end{array} \right. \quad (3.73)$$

où R est la matrice de rotation et $t \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur de translation.

Comme pour les expériences dans \mathbb{Z}^2 , les mouvements rigides discrétisés sur \mathbb{Z}^3 , notés $\mathcal{R}_{point} = \mathcal{D} \circ \mathfrak{R}|_{\mathbb{Z}^3}$, ne conservent ni la géométrie ni la topologie de l'objet à cause de la discrétisation de Gauss \mathcal{D} . Une illustration est donnée sur la Figure 3.36. En considérant une partie convexe de l'objet d'entrée $X \subset \mathbb{Z}^3$ (Figure 3.36 (e)), nous réalisons \mathcal{R}_{point} sur X , et obtenons l'objet résultant dans la Figure 3.36 (f) qui n'est ni connexe et ni convexe (la topologie et la géométrie sont modifiées).

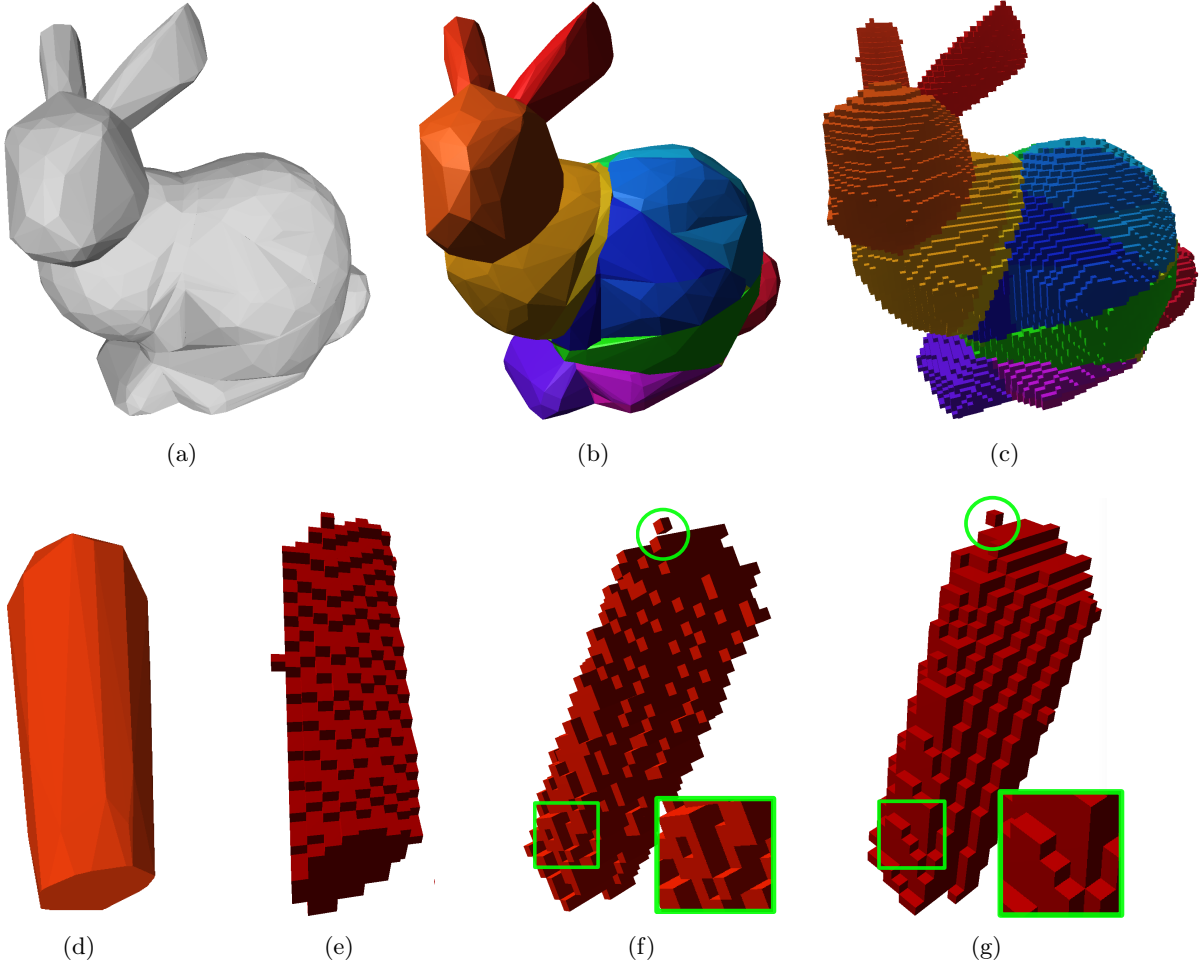


FIGURE 3.36 – Illustration de l’altération topologique et géométrique par mouvement rigide sur \mathbb{Z}^3 . Première ligne : (a) le maillage d’entrée, (b) une décomposition en parties convexes de (a), (c) la discrétisation de (b) présentée par voxels. Deuxième ligne : (d) une partie convexe – l’oreille droite – de (b), (e) la discrétisation de (d) par voxels, (f) le mouvement rigide de (e) suivi par discrétisation pour laquelle la connexité et la convexité sont toutes perdues (voir les zones vertes), (g) le mouvement rigide de (e) avec l’utilisation de la représentation par demi-plans de (d) pour laquelle la convexité est préservée mais pas la connexité (voir la zone cerclée en verte).

Dans ce contexte, nous nous intéressons au problème de mouvement rigide sur \mathbb{Z}^3 préservant les propriétés géométriques globales de l’objet avec des garanties topologiques. Pour cela, nous proposons une méthode basée sur l’extension en 3D de la notion standard de H-convexité et de la quasi- r -régularité proposée précédemment.

La notion de H-convexité, définie initialement en 2D [204], nous permet de développer une méthode, basée sur la représentation en demi-espace de polyèdres convexes, pour des mouvements rigides préservant la convexité d’objets discret 3D.

Définition 56 (H-convexité 3D). *Un objet discret $X \subset \mathbb{Z}^3$ est H-convexe si $X = \text{Conv}(X) \cap \mathbb{Z}^3$ avec $\text{Conv}(X)$ est l’enveloppe convexe de X et définie par*

$$\text{Conv}(X) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \sum_{p \in X} \lambda_p p \wedge \sum_{p \in X} \lambda_p = 1 \wedge \forall p \in X, \lambda_p \geq 0\}. \quad (3.74)$$

La H-convexité n'implique pas la connexité, comme illustré dans la *Figure 3.36* (g). Cela nécessite l'hypothèse que l'objet discret que nous traitons soit également connexe sur \mathbb{Z}^3 . Cette propriété supplémentaire de connexité de l'objet est cruciale pour garantir davantage la préservation de la H-convexité pendant les mouvements rigides et nous permettra d'obtenir une forme pertinente de l'objet transformé.

Afin de garantir la connexité de l'objet transformé, nous introduisons la définition de la quasi- r -régularité pour les objets continus $X \subset \mathbb{R}^3$, y compris les polyèdres.

Définition 57 (Quasi- r -régularité 3D). *Soit $X \subset \mathbb{R}^3$ un objet borné et simplement connexe (c'est-à-dire connexe, sans tunnels ni trous). L'objet X est dit quasi- r -régulier, avec $r > 0$, s'il satisfait les quatre propriétés suivantes :*

- (i) $X \ominus B_r$ est non vide et connexe ;
- (ii) $\overline{X} \ominus B_r$ est connexe ;
- (iii) $X \subseteq (X \ominus B_r) \oplus B_{r\frac{2}{\sqrt{3}}}$;
- (iv) $\overline{X} \subseteq (\overline{X} \ominus B_r) \oplus B_{r\frac{2}{\sqrt{3}}}$;

où $\overline{X} = \mathbb{R}^3 \setminus X$, \oplus et \ominus sont les opérateurs de dilatation et d'érosion, et $B_r \subset \mathbb{R}^3$ une boule de centre $0_{\mathbb{R}^3}$ et de rayon $r > 0$.

Pour $r = 1$, nous avons la condition suffisante de la *quasi-régularité* pour garantir la connexité de X par la discrétisation de Gauss. (Plus de détails sur la preuve de la quasi-régularité en 3D sont donnés dans [C16], [C17].)

Proposition 58. *Si $X \subset \mathbb{R}^3$ est quasi-régulier, alors $\mathbf{X} = X \cap \mathbb{Z}^3$ et $\overline{\mathbf{X}} = \overline{X} \cap \mathbb{Z}^3$ sont tous les deux 6-connexes.*

À partir de ce résultat, nous considérons le mouvement rigide sur \mathbb{Z}^3 via ce modèle continu intermédiaire d'un objet discret H-convexe \mathbf{X} , à savoir un polyèdre quasi-régulier. Cette méthode permet de préserver la convexité et la connexité de l'objet transformé. Plus précisément, elle est basée sur la représentation de \mathbf{X} par des demi-espaces via son enveloppe convexe. Sur la base de cette représentation, nous établissons des propriétés sur l'enveloppe convexe de \mathbf{X} qui permettent la préservation de la convexité et de la connexité sous des mouvements rigides.

La méthode est similaire à celle en 2D décrite dans la *Section 3.6.3*. Plus précisément, nous considérons un objet discret H-convexe $\mathbf{X} \subset \mathbb{Z}^3$ contenant au moins quatre points non coplanaires de \mathbb{Z}^3 , de sorte que $\text{Conv}(\mathbf{X})$ a un volume non nul. Par construction, les coefficients des demi-espaces modélisant le polyèdre $\text{Conv}(\mathbf{X})$ sont des nombres entiers ; nous les appelons les *demi-espaces entiers*. Ils sont calculés à partir de l'enveloppe convexe $\text{Conv}(\mathbf{X})$ de \mathbf{X} . En particulier, les sommets de $\text{Conv}(\mathbf{X})$ sont des points de \mathbf{X} .

$$\text{Conv}(\mathbf{X}) = \bigcap_{H \in \mathbf{R}(\text{Conv}(\mathbf{X}))} H, \quad (3.75)$$

où $\mathbf{R}(\mathbf{P})$ est l'ensemble minimal des demi-espaces fermés constituant le polyèdre convexe \mathbf{P} .

Suivant la *Définition 56* (équation (3.75)), si \mathbf{X} est H-convexe, nous avons

$$\mathbf{X} = \left(\bigcap_{H \in \mathbf{R}(\text{Conv}(\mathbf{X}))} H \right) \cap \mathbb{Z}^3 = \bigcap_{H \in \mathbf{R}(\text{Conv}(\mathbf{X}))} \left(H \cap \mathbb{Z}^3 \right) \quad (3.76)$$

où $H \cap \mathbb{Z}^3$ est appelé *demi-espace discret*. Il est évident que tout demi-espace discret est H-convexe.

Le mouvement rigide discrétisé d'un demi-espace $H \cap \mathbb{Z}^3$ peut être exprimé comme suit :

$$\mathcal{R}(H \cap \mathbb{Z}^3) = \mathfrak{R}(H) \cap \mathbb{Z}^3 \quad (3.77)$$

où $\mathfrak{R}(H)$ est le mouvement rigide appliqué sur H .

L'objet H -convexe X est représenté par intersection d'un ensemble fini de demi-espaces discrets générés à partir de son enveloppe convexe, comme indiqué dans l'équation (3.76). Nous pouvons définir un mouvement rigide sur \mathbb{Z}^3 de X via ses demi-espaces discrets associés comme suit :

$$\mathcal{R}_{\text{Conv}}(X) = \mathfrak{R}\left(\bigcap_{H \in R(\text{Conv}(X))} H\right) \cap \mathbb{Z}^3 = \left(\bigcap_{H \in R(\text{Conv}(X))} \mathfrak{R}(H)\right) \cap \mathbb{Z}^3. \quad (3.78)$$

Le mouvement rigide $\mathcal{R}_{\text{Conv}}(X)$ est dit *convexe préservant*. Plus spécifiquement, nous transformons tous les $H \in R(\text{Conv}(X))$ par \mathfrak{R} . L'intersection de tous les $\mathfrak{R}(H)$ forme aussi un polyèdre convexe P tel que $P = \bigcap_{H \in R(\text{Conv}(X))} \mathfrak{R}(H)$. Ensuite, nous discrétisons P afin d'obtenir l'objet discret transformé $\mathcal{R}_{\text{Conv}}(X)$. Cela conduit à la propriété suivante.

Propriété 59. *Si $X \subset \mathbb{Z}^3$ est H -convexe, $\mathcal{R}_{\text{Conv}}(X)$ est H -convexe.*

En particulier, $\mathcal{R}_{\text{Conv}}(X)$ est H -convexe et connexe sous la condition de quasi-1-régularité du polyèdre convexe $\text{Conv}(X)$.

Proposition 60. *Soit $X \subset \mathbb{Z}^3$ un objet discret H -convexe et connexe. Si $\text{Conv}(X)$ est quasi-1-régulier, alors $\mathcal{R}_{\text{Conv}}(X)$ est H -convexe et 6-connexe.*

Un algorithme efficace et simple a été proposé dans [29, 273] pour calculer l'enveloppe convexe d'ensembles de points dans \mathbb{R}^3 , à savoir l'algorithme *Quickhull*. Il est basé sur une approche *diviser pour régner* qui est similaire au tri rapide. L'algorithme a une complexité moyenne de $\mathcal{O}(n \log r)$ avec n le nombre de points d'entrée et r est le nombre de sommets de sortie (dans le pire des cas, l'algorithme a une complexité de $\mathcal{O}(n^2)$). Cet algorithme est implémenté non seulement pour $X \subset \mathbb{Z}^3$ mais plus généralement pour $X \subset \mathbb{R}^3$ dans la bibliothèque CGAL [1].

La Figure 3.37 montre un aperçu de résultat avec la méthode $\mathcal{R}_{\text{Conv}}$ par rapport à $\mathcal{R}_{\text{point}}$ sur un objet H -convexe $X \subset \mathbb{Z}^3$. On peut observer que $\mathcal{R}_{\text{Conv}}$ permet une meilleure préservation de la forme et, en particulier, de la convexité de l'objet transformé.

La Figure 3.38 illustre d'autres résultats de $\mathcal{R}_{\text{Conv}}$ et $\mathcal{R}_{\text{Point}}$ pour les objets non convexes via un processus de décomposition en parties convexes de l'objet [260]. D'autres approches peuvent être utilisées pour manipuler des objets non convexes, en utilisant la représentation d'objet hiérarchique, par exemple la notion d'arbre de concavité en 3D [388].

Une implémentation de la méthode est disponible sur *GitHub*¹⁰ ainsi qu'une démonstration en ligne pour les cas 2D et 3D à l'adresse suivante :

https://ipol-geometry.loria.fr/~phuc/ipol_demo/DecompConvexRigidMotion/

Discussion : Régularité et quasi-régularité en 3D

Dans cette partie, nous discutons brièvement des liens entre la régularité (Section 3.5.2) et la quasi-régularité (Section 3.6.1) dans \mathbb{Z}^3 via deux modèles simples de la polyédrisation – la

10. <https://github.com/ngophuc/RigidTransformAcd3D>

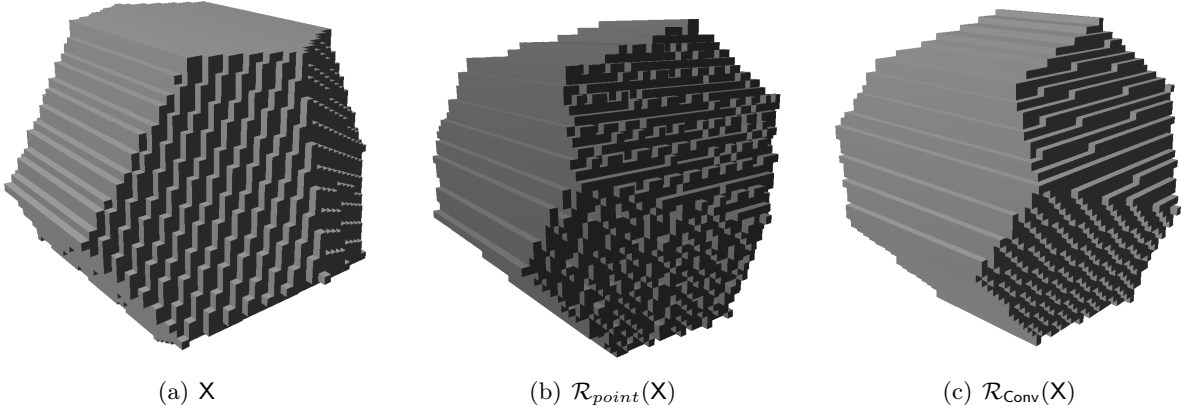


FIGURE 3.37 – (a) Un objet H-convexe X dont $\text{Conv}(X)$ est quasi-1-régulier, et le résultat de transformation par \mathcal{R}_{point} (b) et par \mathcal{R}_{Conv} (c).

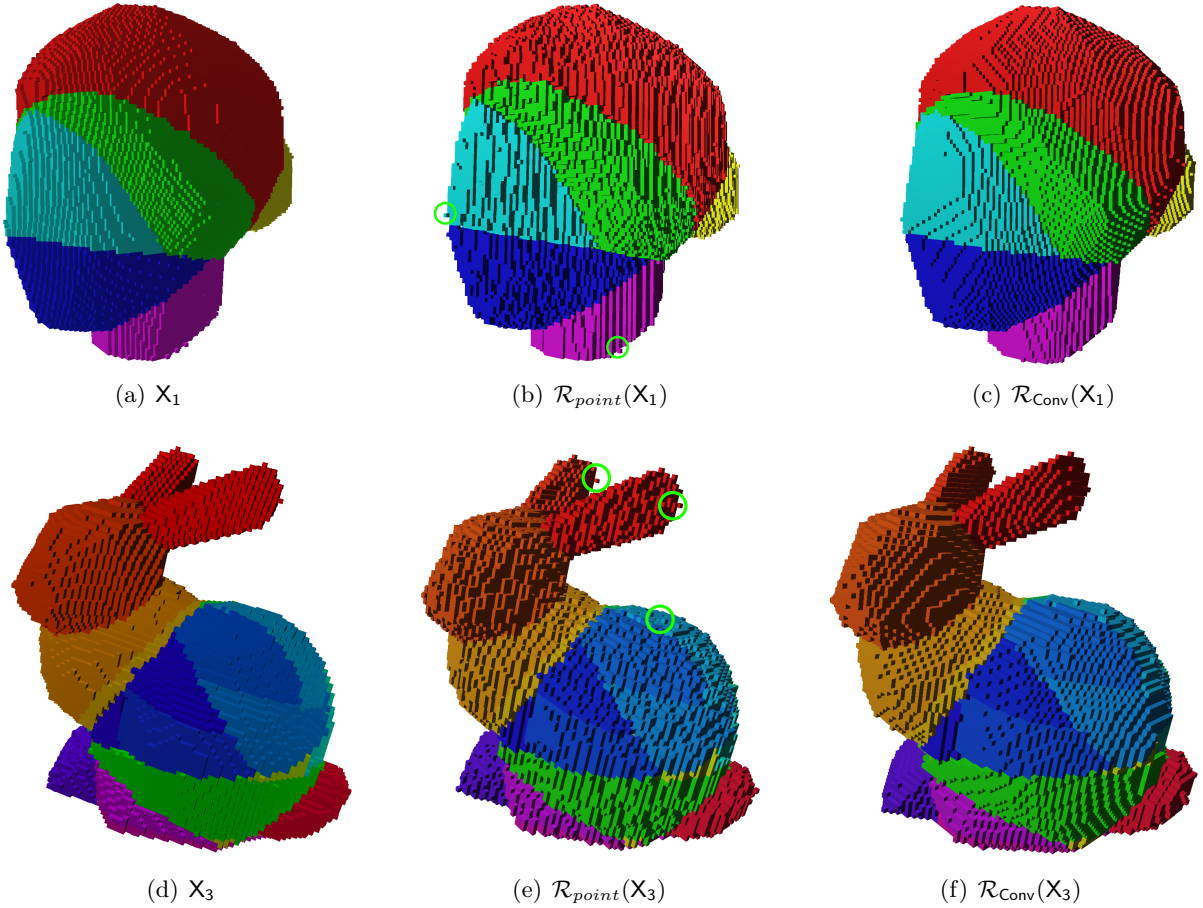


FIGURE 3.38 – La décomposition des objets non convexes en ensembles H-convexes et quasi-1-réguliers (a,d), et leurs résultats de la transformation par \mathcal{R}_{point} (b,e) et \mathcal{R}_{Conv} (c,f). Dans ces derniers, en plus d'altérations géométriques, quelques aperçus d'altérations topologiques de \mathcal{R}_{point} sont dénotés par les cercles verts.

polyédrisation cubique et le marching cube – d’un objet $X \subset \mathbb{Z}^3$. Les preuves ainsi que les détails des résultats mentionnés ci-dessous sont donnés dans l’article associé [C16].

1. Le modèle de polyédrisation cubique

Comme déjà observé dans la Section 3.5.6, l’extension de la notion de régularité à \mathbb{Z}^3 conduit à des ensembles réguliers qui ne sont pas topologiquement invariants. Avec la notion de la quasi-régularité, nous avons un résultat encore plus fort.

Propriété 61. *Soit $X \subset \mathbb{Z}^3$ un ensemble régulier et simplement connexe. Soit $P_{\square}(X) = X \oplus \square$, avec $\square \subset \mathbb{R}^3$ un cube centré à $(0, 0, 0)$. Alors $P_{\square}(X)$ n’est jamais quasi-régulier.*

2. Le modèle de marching cube

De même que le résultat dans le cas de la polyédrisation cubique, on observe que la méthode standard de marching cubes [253] ne parvient pas non plus à générer un polyèdre quasi-régulier à partir d’un ensemble régulier.

Propriété 62. *Soit $X \subset \mathbb{Z}^3$ un ensemble régulier et simplement connexe. Soit $P_{\diamond}(X)$ le polyèdre généré à partir de X par la méthode de marching cubes. Alors $P_{\diamond}(X)$ n’est jamais quasi-régulier.*

3.9 Généralisation de la quasi- r -régularité

Sans perte de caractéristiques, la définition de la quasi- r -régularité (Définition 39) présentée précédemment peut être généralisée.

Définition 63 (Quasi- r -régularité). *Soit $X \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, un ensemble borné et simplement connexe. L’objet X est dit quasi- r -régulier avec la marge $r' - r$ (pour $r' \geq r > 0$) s’il satisfait les quatre propriétés suivantes :*

- (i) $X \ominus B_r$ est non vide et connexe,
- (ii) $\overline{X} \ominus B_r$ est connexe,
- (iii) $X \subseteq X \ominus B_r \oplus B_{r'}$,
- (iv) $\overline{X} \subseteq \overline{X} \ominus B_r \oplus B_{r'}$,

où \oplus, \ominus sont les opérateurs de dilatation et d’érosion et $B_r, B_{r'} \subset \mathbb{R}^d$ sont respectivement les boules de rayon r et r' .

Nous avons montré dans la Section 3.6.1 que, pour la dimension $d = 2$, la discrétisation de Gauss d’un objet quasi-1-régulier $X \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble bien composé et simplement connexe qui préserve ses propriétés topologiques de \mathbb{R}^2 à \mathbb{Z}^2 . Ce résultat (Proposition 40) peut être ré-écrit avec la Définition 63 comme suit :

Proposition 64. *Si $X \subset \mathbb{R}^2$ est quasi-1-régulier avec la marge $\sqrt{2} - 1$, alors $X = X \cap \mathbb{Z}^2$ et $\overline{X} = \overline{X} \cap \mathbb{Z}^2$ sont tous les deux 4-connexes. En particulier, X est bien composé.*

De même en dimension $d = 3$, la Proposition 58 peut être ré-écrite comme suit :

Proposition 65. *Si $X \subset \mathbb{R}^3$ est quasi-1-régulier avec la marge $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$, alors $X = X \cap \mathbb{Z}^3$ et $\overline{X} = \overline{X} \cap \mathbb{Z}^3$ sont tous deux 6-connexes.*

Nous observons que la valeur r' dans la Définition 63, nécessaire pour définir la marge $r' - 1$ pour la quasi-1-régularité, est $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ dans \mathbb{Z}^2 (Proposition 64) et $\frac{2}{\sqrt{3}}$ dans \mathbb{Z}^3 (Proposition 65). Ceci induit à la remarque suivante pour la dimension supérieure de \mathbb{Z}^d .

Remarque 66. Dans \mathbb{Z}^d , la valeur requise de r' est $\frac{2}{\sqrt{d}}$. En effet, la partie cruciale de la preuve est de s'assurer qu'un point \mathbf{p} de $X \setminus (X \circ B_1) \cap \mathbb{Z}^d$ reste $2d$ -adjacent aux points de $(X \circ B_1) \cap \mathbb{Z}^d$. Pour cela, nous considérons un $(d-1)$ -simplexe de \mathbb{R}^d , dont les sommets sont organisés spatialement comme les n points induits par la base orthonormée de \mathbb{R}^d . Ce $(d-1)$ -simplexe doit être englobé par la $(d-2)$ -sphère S qui est l'intersection entre la $(d-1)$ -sphère $S_1(\mathbf{p})$, de centre \mathbf{p} et de rayon 1, et l'hyperplan orthogonal au segment $[\mathbf{p}b]$ et équidistant au point \mathbf{p} et aussi au point $b \in X \ominus B_1$, ce dernier est défini comme le centre d'une boule $B_{\frac{2}{\sqrt{d}}}(\mathbf{p})$ contenant \mathbf{p} . Notez que, par construction, \mathbf{p} est à distance r' de b . La distance entre le barycentre de ce $(d-1)$ -simplexe et ses sommets, c'est-à-dire le rayon de la $(d-1)$ -sphère C est $\sqrt{1 - \frac{1}{d}}$. Chaque point de S est à distance 1 de \mathbf{p} tandis que le centre de S est sur le segment $[\mathbf{p}b]$, à une distance $\frac{r'}{2}$ de \mathbf{p} , il s'ensuit que la distance entre \mathbf{p} et b , à savoir r' , est $\frac{2}{\sqrt{d}}$.

Plus de détails ainsi que les preuves sont données dans les articles associés [C16], [C27].

La propriété suivante est un corollaire direct de cette remarque, et fournit une limite dimensionnelle de validité pour la notion de quasi-1-régularité.

Propriété 67. Dans \mathbb{Z}^4 , la valeur r' nécessaire pour la quasi-1-régularité est $\frac{2}{\sqrt{4}} = 1$. La marge $r' - r$ est égale à 0. En d'autres termes, aucune marge n'est autorisée. La notion de quasi-régularité devient alors similaire à celle de r -régularité [312]. En particulier, seuls des ensembles lisses (c'est-à-dire différentiables) de \mathbb{R}^4 sont autorisés pour la quasi-1-régularité.

3.10 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons étudié les propriétés des images numériques soumises à des transformations discrétisées. Plus précisément, nous avons introduit la notion de *régularité* comme une condition suffisante pour s'assurer de la préservation des propriétés topologiques des images 2D (binaires, en niveaux de gris et étiquetées) soumise à mouvement rigide arbitraire. Sur la base de résultats théoriques établis, des algorithmes efficaces ont été développés pour analyser et pré-traiter ces images. Comme mentionné, la notion de régularité est une condition suffisante de l'invariant topologique, nous cherchons aussi à prouver qu'elle est également nécessaire (c'est-à-dire le symbole \subseteq dans les *Théorèmes* 24, 27 et 30 est en effet $=$). Pour cela, il faudra définir un invariant topologique *local* pertinent, en s'appuyant par exemple sur la structure topologique définie sur des pavages de \mathbb{Z}^2 induits par des mouvements rigides. Il faut savoir que la régularité a été prouvée dans [C27] comme une condition nécessaire et suffisante pour les images 2D binaires bien composées. Un autre aspect intéressant repose sur une interprétation morphologique de la régularité. En effet, les images régulières sont ouvertes pour les éléments structurants carrés. Une classe spécifique d'images, dont l'ouverture repose sur des érosions et des dilations homotopiques, peut être envisagée et comparée à la famille des images régulières, dans un cadre morpho-topologique [49, 349, 376].

Malgré des utilisations efficaces de la régularité dans des applications réelles de traitement et d'analyse d'images, comme discuté dans la *Section* 3.5.6, cette notion n'est pas extensible en 3D dans le cadre de la topologie discrète. En étudiant les liens entre la régularité, établis dans un cadre discret, et certains résultats obtenus sur la discrétisation des objets continus, nous cherchons à fusionner intrinsèquement des cadres discrets et continus. En effet, comme le suggère les *équations* (3.14) – (3.15), le mouvement rigide d'une image numérique peut être interprété comme la *re-discrétisation* de sa représentation continue associée à base de pixels. À l'égard de cette considération, la notion de régularité peut être vue comme un analogue discret de la notion

de r -régularité développée dans [154, 236] à des fins de discrétisation préservant la topologie. Ces liens sont assez intuitifs mais moins triviaux à établir formellement.

Il faut mentionner que, la r -régularité est destinée aux objets dont le bord est différentiable, les polyèdres ne sont donc pas r -réguliers par définition. Suite à cette limitation, nous avons proposé une généralisation de r -régularité, appelée *quasi- r -régularité*, pour l'invariant topologique des objets euclidiens par la discrétisation de Gauss. Cette notion est définie avec les opérateurs morphologiques et peuvent être étendue en 3D (en 4D elle devient la même que la r -régularité). Grâce à la quasi- r -régularité, nous pouvons effectuer des mouvements rigides sur des objets discrets en 2D et 3D tout en préservant leur forme globale, sachant que cette préservation de forme s'exprimait en termes de topologie, et aussi de géométrie. Plus précisément, nous considérons un modèle continu intermédiaire de l'objet discret, puis le transformons avec un mouvement rigide standard, et enfin nous discrétisons le résultat pour obtenir l'objet discret transformé. De cette façon, le modèle intermédiaire va capturer de manière pertinente la géométrie de l'objet et permettre de mieux conserver sa forme globale par le mouvement rigide. Afin de gérer correctement l'étape de discrétisation obligatoire induite par l'utilisation d'un modèle continu intermédiaire, la notion de quasi-1-régularité est en effet nécessaire pour garantir la connexité de l'objet discrétisé final.

Dans les travaux réalisés, nous utilisons des objets affines par morceaux, à savoir les polygones en 2D et les polyèdres en 3D, comme modèle intermédiaire $P(X) \subset \mathbb{R}^n$ représentant un objet discret $X \subset \mathbb{Z}^n$ avec $n = 2, 3$. Clairement, le résultat obtenu avec l'approche proposée dépend de $P(X)$. Selon la méthode utilisée pour calculer $P(X)$, la condition de quasi- r -régularité sur $P(X)$ peut ne pas être satisfaite. Il est donc important d'étudier la pertinence des différentes méthodes de polygonalisation pour construire $P(X)$ à partir de X , afin d'identifier celles qui sont les mieux adaptées à l'approche de transformation proposée.

Une autre perspective rejoint la précédente mais l'idée serait d'utiliser les modèles intermédiaires plus *lisses* (autres que objets affines par morceaux) pour modéliser un objet discret. Par exemple en 2D, nous pouvons considérer les primitives comme les arcs circulaires, les courbes de Bézières, *etc.* ces objets peuvent être obtenus avec les techniques de vectorisation d'images [143, 200, 378]. Une autre représentation utilisée est l'axe médian ou le squelette [41, 42] de l'objet. Cette notion est fréquemment utilisée dans le domaine de l'analyse d'images et de l'infographie [23, 172, 175, 377]. En 2D, l'axe médian d'une forme $X \subset \mathbb{R}^2$ est défini comme le lieu des centres des boules maximales incluses dans X . Dans [63], cette notion de l'axe médian dans l'espace discret de \mathbb{Z}^2 (et \mathbb{Z}^3) est présentée. L'intérêt de ce modèle est multiple. D'une part, il permet d'avoir une représentation compacte et simple de l'objet. Il faut savoir que l'objet d'entrée et son axe médian ont le même type d'homotopie [246] et que l'on peut reconstruire l'objet à partir de son axe médian. D'autre part, les opérateurs morphologiques, à savoir l'érosion et la dilatation, peuvent être définis avec l'axe médian [375]. En se basant sur cette considération, nous avons proposé un algorithme efficace pour vérifier la quasi-régularité des polygones simples, ainsi qu'un cadre de mouvement rigide sur \mathbb{Z}^2 préservant la connexité et la forme globale de l'objet. Les travaux en perspective consisteront à évaluer la quasi- r -régularité pour des objets plus complexes, par exemple les hiérarchies de polygones imbriqués. À plus long terme, nous chercherons à traiter également des extensions potentielles de cette approche à des dimensions supérieures.

Un autre aspect particulièrement intéressant est d'étudier les objets discrets qui correspondent à des cas limites, juste au-delà de la validité de la quasi-régularité. En effet, certains de ces objets (souvent fins ou de petite taille) peuvent conserver certaines propriétés topologiques, bien que n'étant pas quasi-réguliers. L'étude de ces cas limites pourrait nous donner une caractérisation complète des objets euclidiens préservant leurs propriétés topologiques par la discrétisation, et

des apports pour l'invariabilité topologique des objets discrets soumis à un mouvement rigide. Une autre piste intéressante à explorer est le lien entre différentes notions de régularité. En particulier, nous pourrions envisager une nouvelle définition qui englobe à la fois la r -régularité et la quasi- r -régularité. Une telle notion pourrait nous permettre de mieux comprendre – et gérer – les mécanismes intrinsèques de la discrétisation préservant la topologie, dans diverses grilles régulières, modèles d'adjacence et dimensions de l'espace [36, 231, 235].

Un autre travail futur est la préservation de la géométrie de l'objet discret par mouvement rigide. Nous avons examiné notre approche sur des propriétés globales de la forme (la convexité, l'aire et le périmètre). Une étude de la préservation géométrique générale avec les estimateurs locaux [74, 230] sera également étudiée de manière plus approfondie afin de mieux évaluer l'approche proposée.

Une autre manière d'aborder ce problème du mouvement rigide sur \mathbb{Z}^d en respectant la topologie et la géométrie peut consister à se focaliser sur la grille qui est vue comme un pavage de l'espace pour la transformation. Nous pourrions considérer, par exemple, l'intersection entre la grille déformée (initiale) et la grille cartésienne (finale) qui conduit à une subdivision plus fine. Ensuite, nous reformulons le mouvement rigide discret comme l'homéomorphisme dans cette grille plus fine. Ce paradigme a été développé dans le cadre de modèles numériques déformables [353, 87, 123]. Plus concrètement, considérons un objet discret X et un mouvement rigide \mathfrak{R} . On cherche à calculer un objet discret transformé $X_{\mathfrak{R}} \subset \mathbb{Z}^d$ qui : (1) a la même topologie que X et (2) est *aussi semblable que possible* à l'image transformée de X par \mathfrak{R} . Ceci peut être formalisé en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$X_{\mathfrak{R}} = \arg \min_{Y \subset \mathbb{Z}^d} \mathcal{E}_{\mathfrak{R}, X}(Y) \quad (3.79)$$

où $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}, X} : 2^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une mesure d'erreur (paramétrée par \mathfrak{R} et X) qui nous permet d'estimer la (dis)similarités entre X et Y , et le processus d'optimisation doit garantir l'équivalence topologique entre ces deux objets.

Pour atteindre cet objectif, nous pourrions intégrer nos objets discrets dans l'espace euclidien et les traiter dans l'espace (continu mais discret) des complexes cellulaires [217]. Cela nous permettrait de modéliser/manipuler ces objets de manière conforme à la fois à leur nature discrète et à leur interprétation continue (notamment d'un point de vue topologique) [271, 272], mais aussi de réaliser des transformations géométriques à une échelle plus fine que celle de \mathbb{Z}^d .

Une première tentative pour les images 2D binaires a été proposée dans [C6] dont l'idée principale repose sur une stratégie d'optimisation sous contraintes topologiques. Plus précisément, soit $X \subset \mathbb{Z}^2$ un objet discret, $X \subset \mathbb{R}^2$ la représentation par pixels de X , alors $X = \square(X) = X \oplus \square$ où \oplus est l'opérateur de dilatation et \square est l'élément structurant $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2 \subset \mathbb{R}^2$. On note $X_{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}(X) = \{\mathfrak{R}(x) \mid x \in X\} \subset \mathbb{R}^2$ et l'objet discret transformé $X_{\mathfrak{R}} = X_{\mathfrak{R}} \cap \mathbb{Z}^2$ avec \mathfrak{R} un mouvement rigide. Deux mesures d'erreur $\mathcal{E}_{\mathfrak{R}, X}$ (équation (3.79)) suivantes sont considérées :

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{R}, X}^{\square}(Y) = |\square(\mathfrak{R}(\square(X))) \setminus Y| + |Y \setminus \square(\mathfrak{R}(\square(X)))| \quad (3.80)$$

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{R}, X}^{\square}(Y) = |\mathfrak{R}(\square(X)) \setminus \square(Y)| + |\square(Y) \setminus \mathfrak{R}(\square(X))| \quad (3.81)$$

où $|\cdot|$ est le cardinal des ensembles discrets (équation (3.80)), et la surface des objets continus (équation (3.81)). En termes simples, le premier et second correspondent respectivement à la discrétisation de Gauss et au vote majoritaire. Une illustration de la méthode avec discrétisation de Gauss est donnée sur la Figure 3.39.

Le processus d'optimisation est ensuite réalisé en déformant progressivement dans l'espace des complexes cellulaires pour atteindre un objet transformé de la même topologie par une

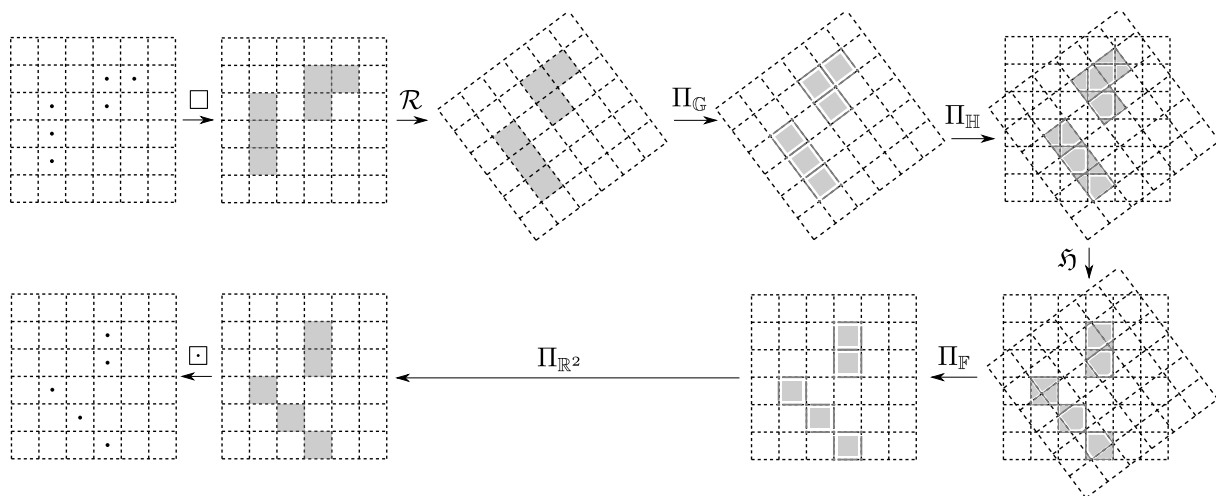


FIGURE 3.39 – Mouvement rigide préservant le type d'homotopie avec les complexe cellulaire.

transformation homotopique. Plus précisément, il s'agit d'ajouter ou de supprimer de manière itérative des cellules simples [353, 39] de façon à minimiser la fonction de coût de l'équation (3.79).

Bien que cela semble simple en 2D, quelques problèmes ont été mentionnés dans [J2] et [C6], par exemple ces contraintes topologiques peuvent conduire à une non convergence de la méthode lorsque la structure de l'objet est trop proche de la résolution du maillage, ou l'inexistence d'une solution dans le contexte d'une image à support fini. Pour cela, les solutions nécessitent parfois de prendre en compte des problématiques liées à la résolution de la grille. En d'autres termes, la préservation de la topologie peut être obtenue au prix d'une augmentation de la résolution d'image. Même si l'approche a encore des limites à considérer, elle ouvre de nombreuses perspectives pour les transformations dans l'espace discret de \mathbb{Z}^d comme l'extension aux transformations plus riches comme les transformations affines.

De manière plus générale, il serait également intéressant d'étudier d'autres modèles topologiques [203, 214, 217, 228], mais aussi avec d'autres images non binaires, comme les images en niveaux de gris, en couleurs, étiquetées, *etc.* D'autres travaux consisteront à étudier les transformations dans des dimensions supérieures ou pour d'autres familles de transformations [40, 184, 270].

4

Outils d'analyse des courbes discrètes bruitées

Sommaire

4.1	Introduction	76
4.2	Notions de base	79
4.2.1	Droite et segment discrets	79
4.2.2	Segment flou	81
4.2.3	Estimation d'échelle et d'épaisseur significatives	82
4.3	Analyse géométrique des courbes bruitées	87
4.3.1	Couverture tangentielle d'épaisseur ν	88
4.3.2	Couverture tangentielle adaptative	90
4.3.3	Estimateurs géométriques des courbes discrètes	92
4.3.4	Extension aux courbes 3D bruitées	99
4.4	Applications pour l'analyse et la représentation de formes	107
4.4.1	Détection des points dominants	108
4.4.2	Représentation polygonale	112
4.4.3	Décomposition de courbe en arcs et segments	115
4.4.4	Vectorisation d'images	119
4.4.5	Reconnaissance des gestes de la main	121
4.5	Balayage directionnel et applications	124
4.5.1	Définitions	124
4.5.2	Détection des segments épais dans des images en niveaux de gris	125
4.5.3	Extraction de structures linéaires dans les données LiDAR brutes	127
4.6	Conclusion et perspectives	136

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse géométrique des courbes discrètes extraites des images numériques ; il s'agit en général des contours des objets discrets présents dans l'image. La difficulté est que les images sont souvent corrompues durant leur acquisition. Cela induit la présence de bruit, et par conséquent les courbes extraites seront aussi bruitées. La présence de bruit peut être un obstacle important pour analyser/étudier ces courbes.

L'intégration à l'équipe ADAGIo du LORIA m'a conduite à ce thème de recherche sur l'étude de la géométrie des objets discrets irrégulièrement bruités, notamment des courbes discrètes. Les principaux résultats, dans ce chapitre, ont été faits dans le cadre de la thèse de Hayat Nasser sous la direction de Isabelle Debled-Rennesson et moi-même, et les travaux récents avec Bertrand Kerautret (LIRIS – Université Lumière Lyon 2) et Philippe Even (ADAGIo).

4.1 Introduction

Avec la disponibilité croissante des images numériques dans lesquelles les objets sont numérisés et enregistrés – sur un ordinateur ou sur un appareil photo numérique – il devient nécessaire de considérer/étudier les approches appropriées à ces données numériques. Dans ce contexte, nous nous intéressons aux objets discrets présents sur les images numériques, en particulier le contour de ces objets. Ces courbes, issues des contours d'objets dans des images ou obtenues par des processus d'impression ou d'acquisition, peuvent contenir du bruit induit par les propriétés physiques inhérentes aux dispositifs utilisés. La présence de bruit peut rendre la tâche d'analyse de ces courbes difficile.

Un exemple est donné sur la *Figure 4.1* de la discrétisation binaires des lettres “nt” à différentes résolutions. Ces lettres sont écrites dans une police de type Roman de taille 14 pt. Le texte a été imprimé à 600 dpi sur une imprimante laser et ensuite scanné à deux résolutions croissantes : 200 dpi et 400 dpi. Nous observons la présence de bruit poivre et sel sur l'image scannée, même lorsqu'on les considère en grande résolution. Par conséquent, le contour extrait des lettres dégradées présente des irrégularités qui sont très visibles dans les deux résolutions.

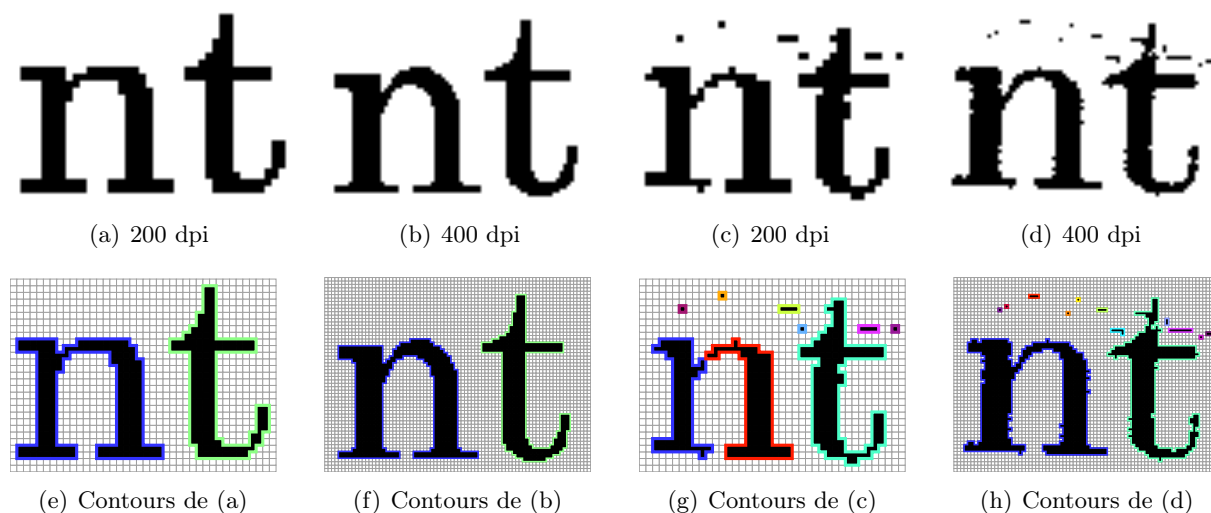


FIGURE 4.1 – Première ligne : Les lettres “nt” scannées à différentes résolutions ; (a) et (b) sont les images des lettres sans bruit à 200 dpi et 400 dpi respectivement, (c) et (d) sont les images scannées contenant le bruit à 200 dpi et 400 dpi respectivement. Deuxième ligne : Les contours extraits des images correspondantes. Les images de la première ligne sont issues de [193]. Les contours extraits dans la deuxième ligne sont obtenus avec la bibliothèque DGtal [2].

Dans les applications de traitement d'images comme la reconnaissance ou la classification d'objets [34, 280, 281], la correspondance de forme [22, 238] (shape matching en anglais), l'analyse géométrique du contour d'objet est une tâche fondamentale. Dans ce contexte, les courbes

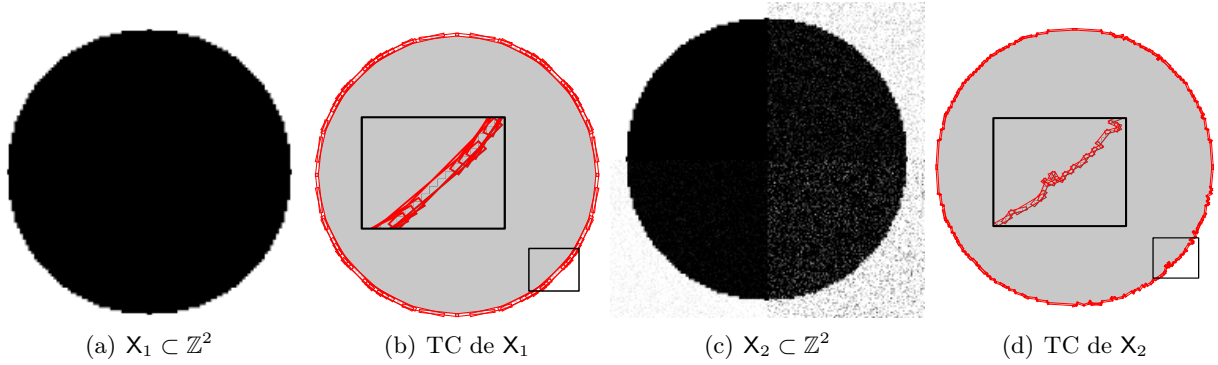


FIGURE 4.2 – Exemples de couverture tangentielle des courbes discrètes extraites du contour de l’objet : (a) Un disque discret sans bruit X_1 et (b) la couverture tangentielle composée des segments standards maximaux du contour de X_1 , (c) un disque bruité X_2 et (d) la couverture tangentielle du contour de X_2 .

discrètes sont souvent représentées par une liste de points. Cependant, avec cette modélisation, les informations géométriques comme la courbure ou la tangente n’apparaissent pas.

Depuis plus de dix ans, dans le domaine de la géométrie discrète, la notion de *segment droit maximal* (maximal digital straight segment (DSS) en anglais) a été largement utilisée pour décrire et analyser les propriétés géométriques des courbes discrètes. Cette notion est basée sur la définition de *droite discrète arithmétique* proposée par Jean-Pierre Réveilles [344]. Plusieurs outils d’analyse géométrique ont été élaborés en utilisant les DSS pour extraire des caractéristiques géométriques sur des courbes discrètes correspondant aux contours de formes. Parmi eux, nous pouvons mentionner la couverture d’un contour discret par la suite de tous les segments maximaux : cette structure est appelée *couverture tangentielle* (tangent cover (TC) en anglais).

Les segments maximaux et la couverture tangentielle (voir Figure 4.2 (a) et (b)) possèdent de nombreuses propriétés intéressantes pour l’analyse des formes discrètes. Dans le domaine de l’analyse géométrique de contours discrets, plusieurs études ont été menées sur ces notions. F. Feschet dans [130] a fait une étude des courbes discrètes avec la couverture tangentielle sur \mathbb{Z}^2 . Il a montré que cette structure a la propriété d’être unique et canonique lorsqu’elle est calculée sur des courbes fermées. L’auteur a aussi proposé dans [128] un algorithme efficace pour calculer la couverture tangentielle de la courbe $C \subset \mathbb{Z}^2$ en complexité $\mathcal{O}(n)$ avec n le nombre de points de C . Une autre propriété importante des segments maximaux est la convergence multi-grilles. Plusieurs travaux ont été faits sur ce sujet [73, 90]. Grâce à cette propriété, la couverture tangentielle et les segments maximaux ont été utilisés dans de nombreux estimateurs géométriques discrets (voir [74, 230] pour un état de l’art) : des estimateurs de longueur, de tangente, de courbure, la détection de parties convexes ou concaves d’une courbe, la longueur minimale d’une courbe polygonale d’un contour numérique, *etc.* Beaucoup d’autres travaux exploitent également ces outils pour analyser les courbes discrètes. Nous pouvons mentionner, par exemple, la segmentation d’une courbe discrète [96], la caractérisation de parties convexes et concaves [108, 130], l’analyse de la multi-résolution [132], la détection du bruit [198, 199], *etc.*

La couverture tangentielle est un outil bien connu pour étudier les caractéristiques géométriques de courbes discrètes. Cependant, telle qu’elle est définie avec les DSS arithmétiques [344], elle n’est pas adaptée pour traiter des objets bruités. Une illustration est donnée sur la Figure 4.2 (c) et (d). Contrairement à la couverture tangentielle d’une courbe *sans bruit*, celle contenant du bruit engendre plein de petits segments courts surtout dans les zones bruitées du contour.

Pour répondre à cette limitation par rapport à la sensibilité au bruit, plusieurs méthodes basées sur des primitives non DSS ont été présentées ; par exemple, dans [84], une approche a été développée avec des matrices de covariance de cellules de Voronoï, appelée *Voronoi Covariance Measure* (VCM), pour les estimateurs géométriques qui sont robustes aux points aberrants et au bruit, ou dans [258], une méthode, basée sur des calculs de convolutions avec uniquement des opérations arithmétiques, a été proposée pour estimer la dérivée des courbes discrétisées contenant du bruit. Il existe également d'autres approches qui ont été proposées pour obtenir un meilleur modèle de couverture tangentielle adapté au bruit. On peut mentionner, en particulier, la primitive de *segment flou* (blurred segment en anglais) introduite par I. Debled-Rennesson *et al.* [95]. Il s'agit d'une extension des segments maximaux avec un paramètre d'épaisseur ν permettant de tenir compte d'un certain niveau de bruit que peut présenter le segment. Les segments flous peuvent être détectés en temps linéaire par un algorithme de reconnaissance basé sur une croissance incrémentale de l'enveloppe convexe [91]. Cette primitive a été utilisée dans des approches différentes [95, 346, 424] pour mieux s'adapter aux courbes bruitées ; en particulier, la proposition de la *couverture tangentielle d'épaisseur ν* qui est composée de segments flous maximaux d'épaisseur ν . Il est montré dans [125] que cette structure pour une courbe discrète $C \subset \mathbb{Z}^2$ est calculée en $\mathcal{O}(n \log n)$ avec n le nombre de points de C . Elle est aussi beaucoup utilisée pour analyser et étudier des courbes bruitées comme l'estimateur de la courbure [291], la segmentation d'une courbe [95], la détection de points dominants [295], la décomposition d'une courbe en arcs et segments [294, 296], l'estimation de bruit [199, 201], *etc.*

Même si la structure proposée est efficace pour traiter les objets bruités, elle présente deux inconvénients. Le premier est le paramètre d'épaisseur ν des segments flous ; dans les applications mentionnées, ν est fixé tout le long de la courbe et souvent ajusté manuellement de façon à prendre en compte le bruit présent *régulièrement* sur la courbe. Le deuxième inconvénient vient du fait que le bruit, en général, n'est pas uniforme sur l'image ce qui peut engendrer des contours avec des niveaux de bruit variés. L'utilisation d'une valeur unique d'épaisseur ν est inadéquate dans le cas de courbes irrégulièrement bruitées, ce qui est fréquemment le cas sur des contours extraits d'images numériques.

Pour répondre à ces limitations, nous généralisons la notion de couverture tangentielle utilisée en géométrie discrète afin d'utiliser différentes épaisseurs lors de sa construction. Nous proposons donc une nouvelle structure (sans paramètre), nommé *couverture tangentielle adaptative* (adaptive tangent cover (ATC) en anglais). Plus précisément, l'ATC est composée de segments flous d'épaisseurs variables adaptées aux différents bruits présents le long d'une courbe. L'ATC est intégrée avec l'estimateur de bruit de l'*épaisseur significative* proposé par B. Kerautret *et al.* [201]. Cet estimateur calcule le niveau de bruit en chaque point de la courbe, ce qui permet de déterminer des épaisseurs appropriées de segments flous maximaux composant l'ATC.

Cet outil a montré son efficacité et sa robustesse pour le traitement et la manipulation des courbes bruitées 2D. En particulier, nous appliquons l'ATC pour extraire les informations géométriques des contours d'objets bruités. Comme elle est utilisée pour détecter des points dominants sur la courbe, ceci a mené à la proposition d'un estimateur de longueur pour les courbes bruitées. De plus, en se basant sur le λ -MST [226, 227], un estimateur de la tangente est présenté. En utilisant les pentes des segments flous successifs de l'ATC, un détecteur de parties convexes et concaves d'un contour est également proposé. Cette structure est aussi utilisée dans les applications d'analyse et de traitement d'images pour la simplification polygonale d'une forme, la reconnaissance des gestes de la main, *etc.* Le dernier sujet s'inscrit dans le cadre d'une collaboration avec des collègues de l'Université de Jadavpur à Kolkata en Inde.

D'autres travaux ont été proposés avec l'ATC, par exemple la décomposition d'une courbe en primitives (segments, arcs de cercle, courbes de Bézier, *etc.*), la vectorisation des images

numériques, la classification des formes, *etc.* En utilisant les plans de projection, une extension de la notion d'ATC en 3D est aussi proposée avec l'utilisation de la primitive de segments flous 3D [93]. Cette structure de l'ATC 3D nous conduit à l'étude et à l'analyse des propriétés géométriques locales des courbes 3D bruitées.

La suite de ce chapitre est organisée de la façon suivante. Dans la section qui suit (*Section 4.2*) nous rappelons quelques définitions de la géométrie discrète qui sont essentielles pour la compréhension des résultats présentés dans ce chapitre. La *Section 4.3* présente deux variantes de la couverture tangentielle 2D basés sur les segments flous maximaux pour étudier les courbes bruitées : la couverture tangentielle d'épaisseur ν et la couverture tangentielle adaptative. L'extension en 3D de la couverture tangentielle adaptative sera également introduite dans cette section. Nous montrerons les applications mentionnées précédemment avec ces deux structures dans la *Section 4.4*. Les résultats expérimentaux seront aussi présentés dans cette section pour illustrer l'efficacité et la robustesse de ces structures. Nous montrons d'ailleurs des comparaisons avec d'autres méthodes sur les courbes bruitées pour valider les approches proposées.

Dans la *Section 4.5*, il s'agira de montrer une exploitation de la primitive de segments flous dans d'autres domaines d'application dans lesquels les données d'entrées ne sont pas forcément entières. En particulier, nous présentons deux applications : (1) la détection de droites épaisses dans des images en niveaux de gris basée sur les segments flous avec l'image du gradient, et (2) l'extraction de structures linéaires avec les données 3D de points LiDAR.

4.2 Notions de base

4.2.1 Droite et segment discrets

Nous rappelons ci-dessous la notion de droite discrète arithmétique introduite par Jean-Pierre Réveilles [344].

Définition 68 (Droite discrète arithmétique [344]). *Une droite discrète arithmétique de borne inférieur μ , d'épaisseur arithmétique ω et de vecteur directeur (b, a) (de pente $\frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$) est l'ensemble de points discrets $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant la double inégalité*

$$\mu \leq ax - by < \mu + \omega, \quad (4.1)$$

avec $a, b, \mu, \omega \in \mathbb{Z}$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Cette droite est notée $\mathcal{L}(a, b, \mu, \omega)$.

Nous notons $\mathbf{V}(\mathcal{L}) = (b, a)$ le vecteur directeur de \mathcal{L} , $h(\mathcal{L}) = -\mu$ son ordonnée à l'origine, $w(\mathcal{L}) = \omega$ son épaisseur arithmétique, et $p(\mathcal{L}) = \max(|a|, |b|)$ sa période (c'est-à-dire la longueur de son schéma périodique). Les droites réelles d'équation $ax - by = \mu$ et $ax - by = \mu + \omega - 1$ sont appelées respectivement *droites d'appuis* supérieure et inférieure. Les points discrets appartenant à ces droites sont nommés *points d'appuis*.

Une droite discrète est dite *naïve* et notée $\mathcal{L}(a, b, \mu)$, lorsque $\omega = p(\mathcal{L}) = \max(|a|, |b|)$. Dans le cas où $\omega = |a| + |b|$ alors la droite est dite *standard*. Ces deux types de droites correspondent à la 8-connexité (droite naïve) et à la 4-connexité (droite standard). Elles sont beaucoup étudiées dans la littérature car elles correspondent aux notions topologiques associées au bord d'objets discrets. Lorsque $\omega > |a| + |b|$, la droite est dite *épaisse*. Des exemples de droites discrètes sont donnés sur la *Figure 4.3*, les droites d'appuis supérieures (resp. inférieures) sont représentées en rouge (resp. bleu), et les points d'appuis sont représentés avec les mêmes couleurs respectives.

Un segment de droite discret est un sous-ensemble fini et borné d'une droite arithmétique.

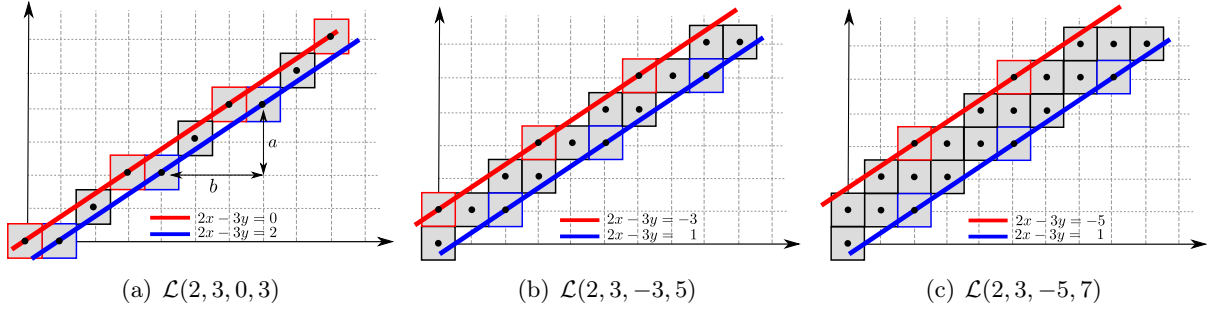


FIGURE 4.3 – Exemples de droite discrète : (a) une droite naïve, (b) une droite standard et (c) une droite épaisse.

Définition 69 (Segment discret [344]). Une suite de points discrets $\{\mathcal{S}_k \in \mathbb{Z}^2\}_{k=i}^{k=j}$, $i < j$ est appelée segment discret et notée par $\mathcal{S}_{i,j}$, si et seulement si les points \mathcal{S}_k appartiennent à une droite discrète \mathcal{L} . Plus formellement,

$$\exists \mathcal{L}(a, b, \mu, \omega) \text{ tel que } \forall \mathcal{S}_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{Z}^2 \text{ pour } \forall k \in \llbracket i, j \rrbracket : \mu \leq ax_k - by_k < \mu + \omega \quad (4.2)$$

où $\llbracket a, b \rrbracket$ est l'intervalle des entiers relatifs compris entre a et b .

Par la suite, nous considérons une courbe discrète $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_i\}_{i=0}^{i=n-1}$ qui est composée d'une suite ordonnée de n points discrets de \mathbb{Z}^2 . Les points \mathcal{C}_i de \mathcal{C} sont numérotés de façon consécutive et $\mathcal{C}_{i,j}$ est la suite de points de \mathcal{C} qui sont indicés, par ordre croissant, de i à j . Nous notons par $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(i, j)$ le prédicat “ $\mathcal{C}_{i,j}$ est un segment discret” suivant la Définition 69.

Définition 70 (Segment discret maximal [128]). Une suite de points discrets $\mathcal{C}_{i,j}$ de \mathcal{C} est appelée segment discret maximal si et seulement si $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(i, j) \wedge \neg \mathcal{P}_{\mathcal{D}}(i-1, j) \wedge \neg \mathcal{P}_{\mathcal{D}}(i, j+1)$. Les segments maximaux sont ainsi les segments de droites discrètes inextensibles de \mathcal{C} .

Pour la définition de segment maximal, la notion de *tangente discrète* pour chaque point de la courbe \mathcal{C} est proposée dans [130]. Plus précisément, la tangente en un point discret $\mathcal{C}_i \in \mathcal{C}$, notée $T_{\mathcal{C}_i}$, est définie par les segments maximaux de \mathcal{C} couvrant \mathcal{C}_i . Le calcul de la tangente discrète est donc équivalent à la reconnaissance de segments maximaux et peut être résolu en temps linéaire par rapport au nombre de points de \mathcal{C} . En particulier, l'ensemble des tangentes discrètes de \mathcal{C} est appelé *couverture tangentielle*.

Définition 71 (Couverture tangentielle [130]). Soit $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_i\}_{i=0}^{i=n-1}$ une courbe discrète. La couverture tangentielle de \mathcal{C} , notée $TC(\mathcal{C})$, est l'ensemble de toutes les tangentes discrètes de \mathcal{C} .

$$TC(\mathcal{C}) = \{T_{\mathcal{C}_i} \mid i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \mathcal{C}_i \in \mathcal{C}\} \quad (4.3)$$

où $T_{\mathcal{C}_i}$ est la tangente discrète associée au point \mathcal{C}_i de la courbe \mathcal{C} .

Sans perte de généralité, on considère $TC(\mathcal{C})$ dans l'orientation positive de la courbe \mathcal{C} . Dans [130], on prouve que la couverture tangentielle est la structure de cardinalité minimale des segments discrets maximaux couvrant \mathcal{C} , et la taille de $TC(\mathcal{C})$ est inférieure au nombre de points de \mathcal{C} ; $|TC(\mathcal{C})| \leq n$. En particulier, plus la forme de \mathcal{C} est linéaire, plus le nombre de segments maximaux dans $TC(\mathcal{C})$ est petit par rapport à n . La Figure 4.4 (a) et (b) illustrent, respectivement, la couverture tangentielle en un point et sur toute la courbe. Dans [128], un algorithme incrémental et optimal est proposé pour calculer $TC(\mathcal{C})$ avec une complexité linéaire $\mathcal{O}(n)$ en ne parcourant qu'une seule fois la suite de points de \mathcal{C} .

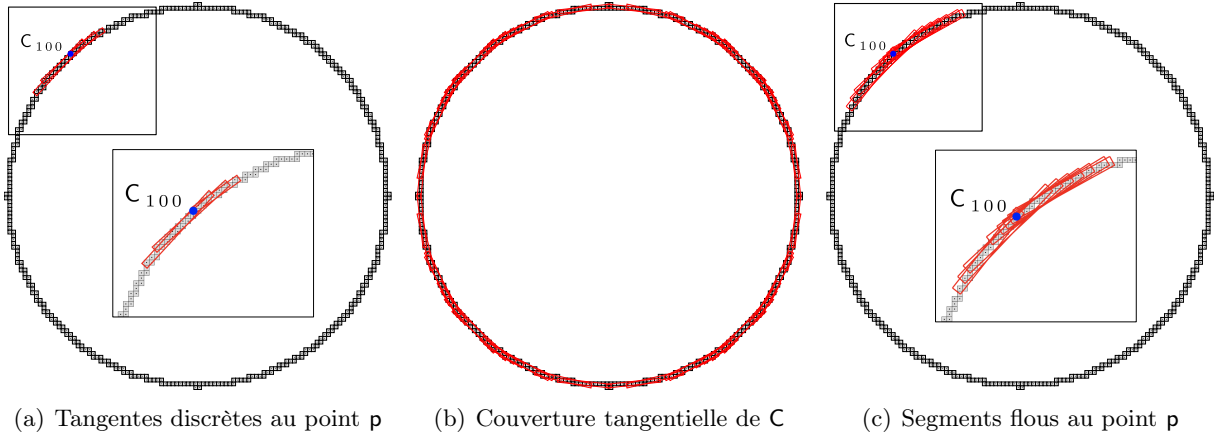


FIGURE 4.4 – Exemple de la couverture tangentielle du contour C de l'objet X_1 dans la Figure 4.2 : (a) l'ensemble des tangentes discrètes avec les segments standards maximaux au point $C_{100} \in C$ (en bleu), (b) la couverture tangentielle de C , (c) l'ensemble des segments flous maximaux d'épaisseur 2 couvrant le point $C_{100} \in C$.

Les notions de segment maximal et de couverture tangentielle possèdent de bonnes propriétés géométriques, en particulier celle de la convergence multi-grilles [228]. Elles sont utilisées dans des estimateurs différents pour déterminer les caractéristiques géométriques d'une courbe discrète. Ces outils, cependant, sont assez sensibles aux perturbations – au bruit – présentes sur la courbe. En effet, des résultats insatisfaisants sont observés lorsqu'on travaille sur les données discrètes bruitées. Cela est lié au fait que des petits segments sont produits le long de la couverture tangentielle à cause du bruit comme illustré dans la Figure 4.2 (d).

4.2.2 Segment flou

Afin de mieux étudier des courbes discrètes bruitées, I. Debled-Rennesson *et al.* [94, 95] ont introduit la primitive de *segment flou* basé sur la définition de droite discrète avec une épaisseur variée. Plus précisément, deux définitions ont été proposées; la première, basée sur une approche arithmétique, utilise la droite englobante optimale, et la seconde, basée sur une approche géométrique, repose sur le calcul de l'enveloppe convexe des points de la droite. Cette dernière est considérée dans la suite de ce manuscrit. Ci-dessous, nous notons S une suite de points discrets pas forcément connexe. Les points S_i de S sont numérotés de façon consécutive et $S_{i,j}$ est la suite de points de S qui sont indexés, par ordre croissant, de i à j .

Définition 72 (Droite englobante [94]). Une droite $\mathcal{L}(a, b, \mu, \omega)$ est dite englobante d'une suite de points S si tout les points de S appartiennent à \mathcal{L} .

Définition 73 (Droite englobante optimale [94]). Une droite englobante $\mathcal{L}(a, b, \mu, \omega)$ de S est dite optimale si sa distance verticale (ou horizontale) est minimale, i.e. la valeur $\frac{\omega-1}{\max(|a|, |b|)}$ est égale à l'épaisseur verticale (ou horizontale) de l'enveloppe convexe de S .

Cette définition est illustrée dans la Figure 4.5 (a) et conduit à la définition de segment flou ci-dessous.

Définition 74 (Segment flou [94]). Une suite de points S est un segment flou d'épaisseur ν s'il existe une droite discrète $\mathcal{L}(a, b, \mu, \omega)$ telle que tous les points de S appartiennent à \mathcal{L} et $\frac{\omega-1}{\max(|a|, |b|)} \leq \nu$.

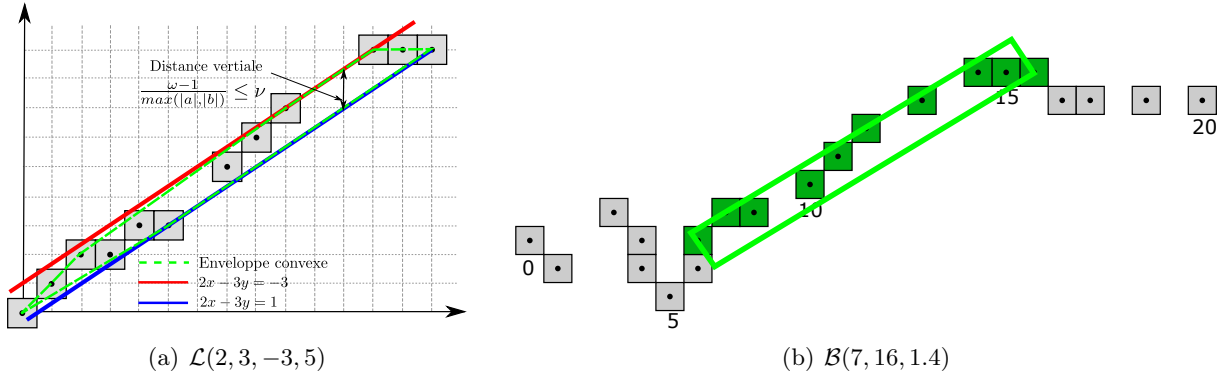


FIGURE 4.5 – (a) La droite englobante optimale de la suite de points S (en gris), S est un segment flou d'épaisseur $\nu = 1.5$ appartenant à la droite discrète \mathcal{L} dont la distance verticale est $\frac{10}{7} = 1.42$. (b) Segment flou maximal (en vert) \mathcal{B} sur une suite de points non connexes.

Nous notons par $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(i, j, \nu)$, pour une suite de points $S_{i,j}$, le prédicat “ $S_{i,j}$ est un segment flou d'épaisseur ν ”.

Définition 75 (Segment flou maximal [94]). *La suite $S_{i,j}$ est appelée un segment flou maximal d'épaisseur ν , noté $\mathcal{B}(i, j, \nu)$, si et seulement si $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(i, j, \nu) \wedge \neg \mathcal{P}_{\mathcal{B}}(i, j + 1, \nu) \wedge \neg \mathcal{P}_{\mathcal{B}}(i - 1, j, \nu)$.*

Une illustration est donnée dans la Figure 4.5. De cette définition, un algorithme en temps $\mathcal{O}(n)$ a été proposé dans [91] pour reconnaître si une suite de n points est un segment flou d'épaisseur ν . La méthode est basée sur une croissance incrémentale de l'enveloppe convexe de points ajoutés au segment, ainsi que sur le calcul de l'épaisseur verticale et horizontale. En particulier, cet algorithme de reconnaissance peut aussi être appliqué sur des suites de points non connexes et à coordonnées réelles. De plus, il est montré dans [125] que la couverture tangentielle d'une courbe C par des segments flous maximaux peut s'effectuer en temps $\mathcal{O}(n \log n)$ par rapport au nombre de points de C .

4.2.3 Estimation d'échelle et d'épaisseur significatives

Les contours des formes extraites d'images numériques peuvent contenir du bruit. Pour répondre à ce problème, B. Kerautret *et al.* [193, 198, 199, 201] ont proposé deux estimateurs de bruit basés sur les segments de droites maximaux dont nous rappelons la définition ci-dessous.

Basée sur l'étude des propriétés asymptotiques des longueurs discrètes¹ des segments maximaux, la notion d'*échelle significative* (meaningful scale (MS), en anglais) a été introduite dans [198, 199]. Elle permet d'estimer localement quelle est la meilleure échelle pour analyser un contour. Plus précisément, J-O. Lachaud *et al.* ont montré dans [227, 228] que la longueur L des segments de droites maximaux a un comportement asymptotique au regard du critère de convergence multi-grilles.

Définition 76 (Convergence multi-grilles [228]). *Un estimateur fonctionnel discret $E_{\mathcal{T}}$ d'une fonction géométrique \mathcal{T} est multi-grille convergent pour une famille de forme \mathbb{F} et un processus de discrétisation $\mathfrak{D}(\cdot, \cdot)$ si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{F}$, pour tout point x du bord de X ($x \in \delta X$), il existe un pas de discrétisation $h_X > 0$ tel que la fonction estimée $E_{\mathcal{T}}(\mathfrak{D}(X, h), \cdot)$*

1. La longueur discrète d'un segment est définie par le nombre de points de la grille appartenant au segment.

est définie en tout point du bord de $\delta\mathcal{D}(X, h)$ pour tout pas $h < h_X$ et

$$\forall y \in \delta\mathcal{D}(X, h) \text{ avec } \|y - x\|_1 \leq h, |E_{\mathcal{T}}(\mathcal{D}(X, h), y) - \mathcal{T}(X, x)| \leq \tau_x(h),$$

où τ_x est une fonction, dépendante de x , définie sur \mathbb{R}^+ à valeur dans \mathbb{R}^+ de limite nulle au point 0. Cette fonction définit la vitesse de convergence de $E_{\mathcal{T}}$ vers \mathcal{T} au point x .

Proposition 77 ([197]). Soit $X \subset \mathbb{R}^2$ une forme simplement connexe avec un bord C^3 par morceau. Soit x un point du bord δX de X . Considérons un voisinage ouvert connexe U de x dans δX . Soit (L_j^h) les longueurs discrètes des segments maximaux couvrant x sur le bord de $\mathcal{D}(X, h)$ avec h le pas de discrétisation. Si U est strictement concave ou strictement convexe alors :

$$\Omega\left(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}\right) \leq L_j^h \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}\right). \quad (4.4)$$

Si U a une courbure nulle partout alors :

$$\Omega\left(\frac{1}{h}\right) \leq L_j^h \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right). \quad (4.5)$$

Autrement dit, soit un point $x \in \delta X$ avec X un objet continu avec un bord C^3 par morceau, $\mathbf{X} = X \cap h\mathbb{Z} \times h\mathbb{Z}$ la discrétisation de Gauss de X avec le pas de discrétisation h , $\mathbf{p} \in \delta\mathbf{X}$ le point discret de x . La longueur des segments maximaux couvrant \mathbf{p} doit être comprise entre $\Omega(1/h^{\frac{1}{3}})$ et $\mathcal{O}(1/h^{\frac{1}{2}})$ si \mathbf{p} est situé sur une partie strictement concave ou strictement convexe, et près de $\mathcal{O}(1/h)$ ailleurs sur des parties plates – de courbure nulle. Ce résultat théorique est défini et calculé sur des tailles de grille de plus en plus fines. En prenant l’approche inverse (à partir du sous-échantillonnage), une analyse de profils multi-échelles a été proposée pour estimer le bruit à chaque point de la courbe.

Définition 78 (Profil multi-échelles [199]). Le profil multi-échelles $\mathcal{P}_n(\mathbf{p})$ d’un point \mathbf{p} sur le bord d’un objet discret est la suite des échantillons

$$(\log(i), \log(\bar{L}^{h_i}))_{i=1, \dots, n}$$

où \bar{L}^{h_i} est la longueur moyenne des segments maximaux couvrant \mathbf{p} pour la taille de grille h_i .

En particulier, il est montré dans [199] que ces valeurs peuvent être correctement approchées avec un modèle affine. Le calcul de la longueur de segments maximaux avec des tailles de grille plus grandes est illustré dans la Figure 4.6 (a)–(c). La Figure 4.7 montre quelques exemples de profils multi-échelles sur deux contours bruités. Plus précisément, différents niveaux de bruit Gaussien ont été ajoutés sur les images d’entrées (voir Figure 4.7 (a)–(b)) avec les déviations standards $\sigma_1 = 0$ (partie sans bruit, le quart en haut à gauche), $\sigma_2 = 75$ (partie légèrement perturbée, le quart en bas à gauche) et $\sigma_3 = 175$ (partie fortement perturbée, la moitié à droite). Dans chaque partie, on considère un point \mathbf{p} et on étudie ses profils multi-échelles $\mathcal{P}_{15}(\mathbf{p})$ (voir Figure 4.7 (c)–(d)) par rapport au critère de convergence multi-grilles.

Le profil multi-échelles $\mathcal{P}_n(\mathbf{p})$ peut être utilisé pour détecter le bruit à chaque point P du contour. Plus précisément, si $\mathcal{P}_n(\mathbf{p})$ n’est pas l’approximation d’une fonction affine avec une pente négative, alors la géométrie locale autour de \mathbf{p} n’est pas plate, ni courbe ; \mathbf{p} est situé sur une zone bruitée. Autrement, \mathbf{p} est sur une zone courbée. Pour distinguer entre ces deux zones, un seuil associé au bruit t_m a été introduit, et la notion d’échelle *significative* est définie comme la première échelle pour laquelle la partie du contour peut être considérée comme significative.

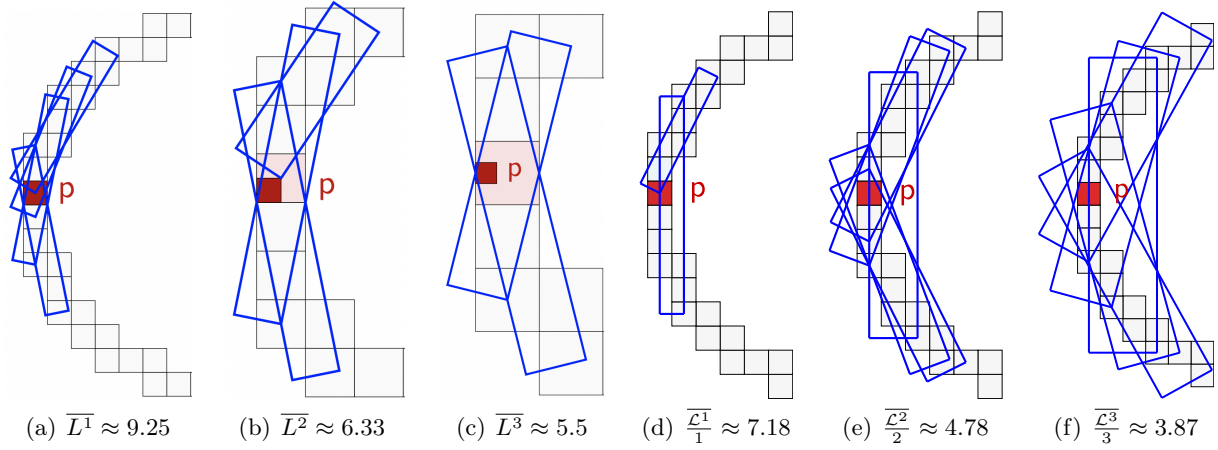


FIGURE 4.6 – Calcul de la longueur des segments maximaux. (a–c) L’ensemble des segments standards passant par le point P avec leur longueur discrète moyenne \overline{L}^h à différentes échelles h pour l’analyse multi-échelles ; (a) $h = 1$, (b) $h = 2$ et (c) $h = 3$. (d–f) L’équivalent avec les segments flous de différentes épaisseurs ν pour l’analyse multi-épaisseurs avec $\overline{\mathcal{L}}^k$ la longueur euclidienne moyenne des boîtes englobantes des segments ; (d) $\nu = 1$, (e) $\nu = 2$ et (f) $\nu = 3$.

Définition 79 (Échelle significative [198]). Une échelle significative d’un profil multi-échelles $(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, n}$ est définie par une paire (i_1, i_2) , $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n$ telle que pour tout i , $i_1 \leq i < i_2$:

$$\frac{Y_{i+1} - Y_i}{X_{i+1} - X_i} \leq t_m,$$

et telle que la propriété n’est pas vraie pour $i_1 - 1$ et i_2 .

Selon les analyses et les expérimentations montrées dans [197], le seuil $t_m = 0$ permet une détection précise et pertinente du bruit localement sur des zones plates et courbes. Plus particulièrement, à partir de l’échelle significative, un niveau de bruit peut être déduit et associé à chaque point du contour comme la première échelle significative du point (voir Figure 4.8).

La détection précédente a été étendue pour des courbes non nécessairement connexes, ou à coordonnées non entières en utilisant la primitive de segments flous. Plus précisément, la définition de l’épaisseur significative (meaningful thickness (MT) en anglais) [193, 201] est introduite avec la même idée de regarder des propriétés asymptotiques mais d’utiliser des variations d’épaisseurs de segments flous maximaux comme notion d’échelle. Par conséquent, nous n’avons plus besoin de recalculer des représentations de contours multi-échelles par le processus de sous-échantillonnage, mais simplement une analyse des longueurs des segments flous à différentes épaisseurs. Il faut savoir que la longueur considérée pour l’épaisseur significative est la longueur euclidienne \mathcal{L} de la boîte englobante des segments flous. Une telle stratégie présente comme avantage d’être plus facile à mettre en œuvre sans devoir appliquer différents sous-échantillonnages. Une étude a été réalisée dans [193] sur la variation de longueur des segments flous maximaux sur les séquences croissantes d’épaisseurs réelles $t_i = i * k\sqrt{2}$ où k est la moyenne des distances entre les sommets consécutifs de l’enveloppe convexe des segments. Le résultat suivant est obtenu.

Propriété 80 ([193]). Soit $(\mathcal{L}_j^{t_i})_{j=1, \dots, l_i}$ la longueur de segments flous couvrant un point p . Le tracé des longueurs $\frac{\mathcal{L}_j^{t_i}}{t_i}$ en échelle logarithmique est approximativement affine avec une pente négative située entre $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$ pour une zone courbe et autour de -1 pour une zone plate.

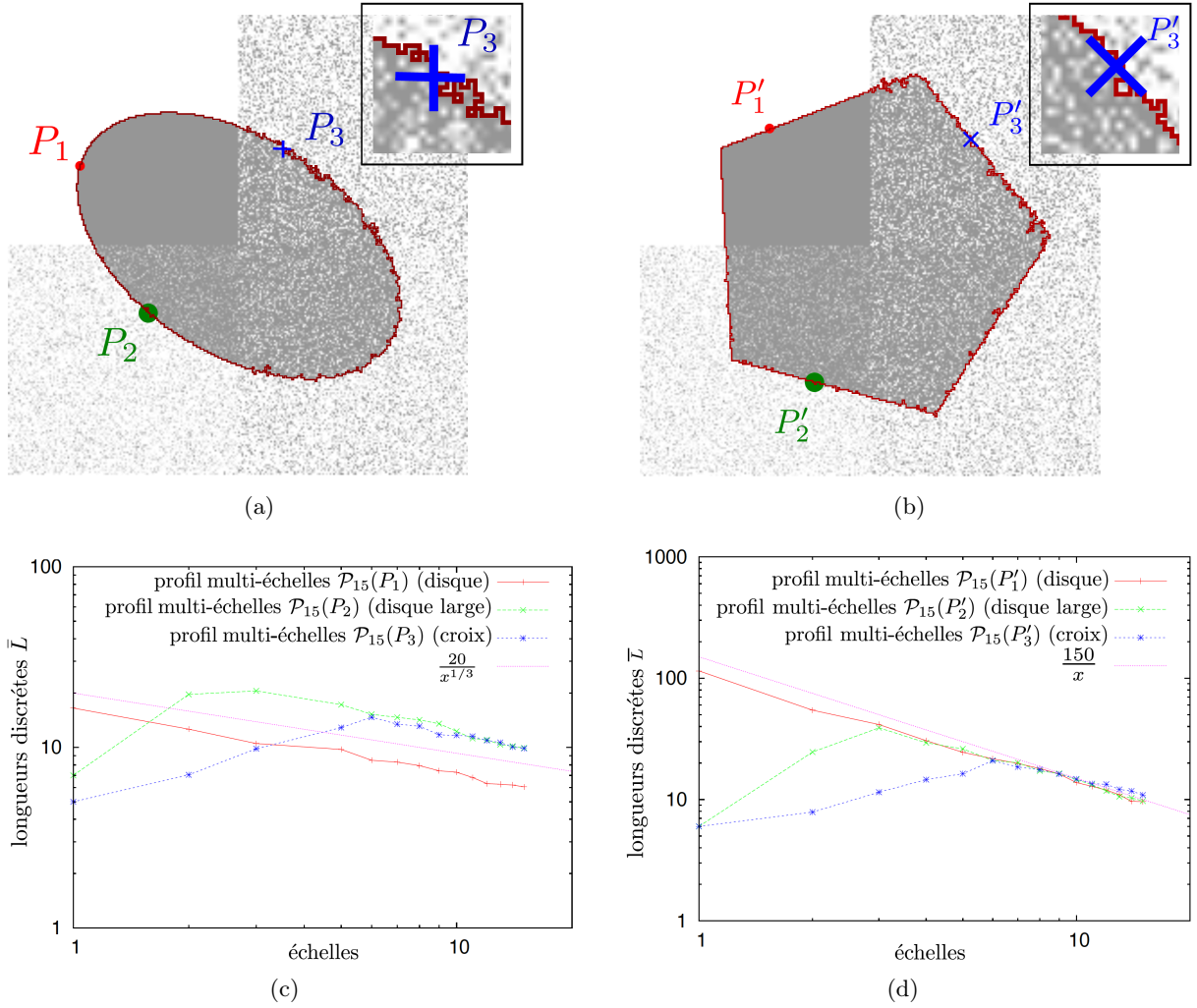


FIGURE 4.7 – Exemples de profils multi-échelles sur deux images irrégulièrement bruitées : une ellipse (a) et un pentagone (b). Le comportement de profils multi-échelles \mathcal{P}_{15} des points situés dans différentes parties du contour d'éclipse (c) (resp. du pentagone (d)) : P_1 (resp. P'_1) situé sur la partie non bruitée, tandis que P_2 (resp. P'_2) sur la partie légèrement perturbée, P_3 (resp. P'_3) sur la partie fortement perturbée du contour. Images issues de [193].

Figure 4.6 (d-f) illustre le principe de calcul des longueurs pour différentes épaisseurs, et les Figure 4.9 et 4.10 montrent le comportement asymptotique des longueurs à travers la décomposition multi-épaisseurs.

En reprenant le même principe que pour les échelles significatives, le profil multi-épaisseurs d'un point \mathbf{p} , noté $\mathbf{p}_n(\mathbf{p})$, est défini comme le graphe

$$(\log(t_i), \log(\bar{\mathcal{L}}^{t_i}/t_i))_{i=1,\dots,n}$$

avec $\bar{\mathcal{L}}^{t_i}$ la moyenne des longueurs euclidiennes des segments flous d'épaisseur t_i . Cette notion est illustrée sur la Figure 4.9. Nous avons les profils multi-épaisseurs \mathcal{P}_{15} de différents points sur le contour : \mathbf{p}_j situé sur la partie sans bruit, \mathbf{p}_k sur la partie légèrement bruitée et \mathbf{p}_l sur la partie fortement bruitée du contour.

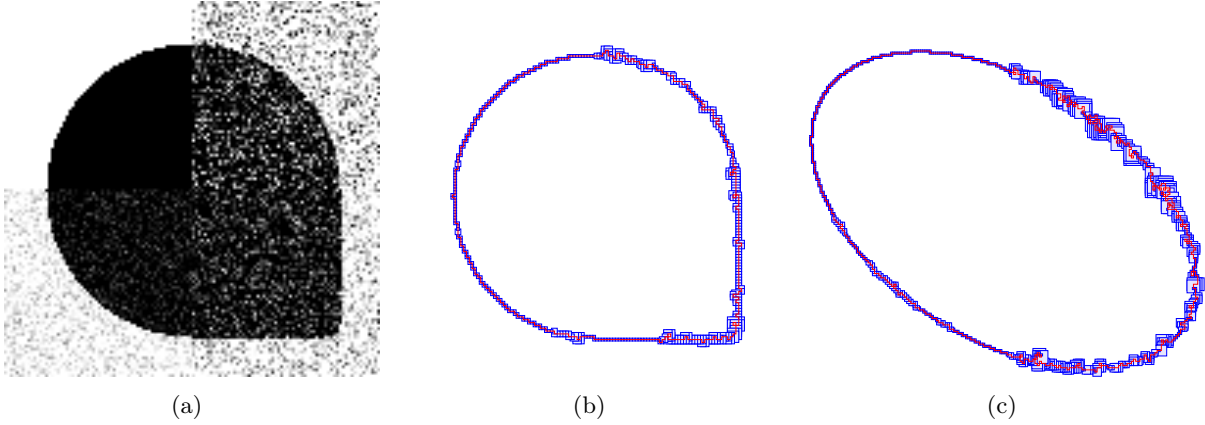


FIGURE 4.8 – Détection de bruit par échelles significatives : (a) image d'entrée, (b) le résultat de la détection sur le contour extrait dans (a), et (c) le résultat du contour dans la Figure 4.7 (a). Le contour est dessiné par la ligne polygonale rouge, et la taille des carrés bleus sur chaque pixel du contour correspond à la première échelle significative détectée. Images obtenues via la démonstration en ligne : <http://demo.ipol.im/demo/75/>.

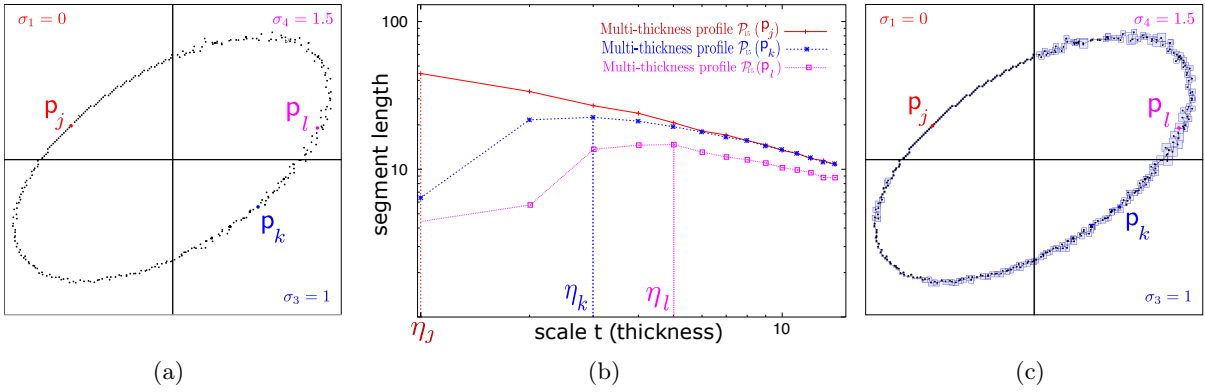


FIGURE 4.9 – Exemple de profils multi-épaisseurs sur un contour irrégulièrement bruité (a). Les profils multi-épaisseurs \mathcal{P}_{15} des points p_j , p_k et p_l sont représentés sur (b) et le résultat de la détection du bruit avec l'épaisseur significative est sur (c), la taille des carrés bleus sur chaque point du contour correspond à la première épaisseur significative détectée. Images issues de [J7].

Tout comme précédemment, la définition de l'épaisseur *significative* a été proposée avec un seuil associé au bruit t_m (la même que pour l'échelle significative, $t_m = 0$ par défaut).

Définition 81 (Épaisseur significative [201]). Une épaisseur significative d'un profil multi-épaisseurs $(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, n}$ est définie par la paire (i_1, i_2) , $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n$ telle que pour tout i , $i_1 \leq i < i_2$, on a :

$$\frac{Y_{i+1} - Y_i}{X_{i+1} X_i} \leq t_m,$$

et telle que la propriété n'est pas vraie pour $i_1 - 1$ et i_2 .

La première épaisseur significative d'un point p est considérée comme son niveau de bruit. Quelques exemples sont donnés dans la Figure 4.9 avec η_j , η_k et η_l correspondant, respectivement, à la première épaisseur significative des points p_j , p_k et p_l du contour.

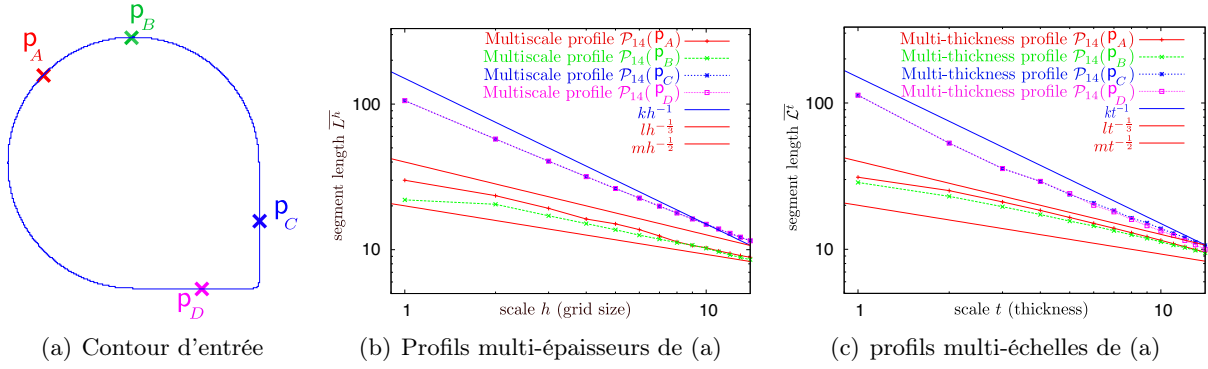


FIGURE 4.10 – Comparaison des profils multi-échelles (b) et multi-épaisseurs (c) aux différents points du contour (a) contenant des parties courbées (les points p_A et p_B) et des parties plates (les points p_C et p_D). Images issues de [J7].

La Figure 4.10 montre une comparaison entre des profils multi-échelles et multi-épaisseurs sur un contour non bruité contenant les parties courbées et plates. On observe que des variations de longueur obtenues avec les segments de droites maximaux (dans les profils multi-échelles) et avec les segments flous maximaux (dans les profils multi-épaisseurs) présentent des pentes équivalentes qui appartiennent au même intervalle.

Les deux estimateurs de bruit par échelles et par épaisseurs significatives sont comparés sur la Figure 4.11. Cette figure montre les niveaux de bruit obtenus avec les deux estimateurs. Nous pouvons constater que la qualité des deux estimations est assez proche, il y a de légères différences au niveau de certains coins du contour, comme montré dans les zooms. Dans ces zones, les valeurs d'épaisseurs significatives montent légèrement par rapport à celle d'échelles significatives. Ceci est lié au fait que la détection d'épaisseurs significatives présente un meilleur respect des discontinuités sur le contour qui ne sont pas vues comme du bruit. Il faut rappeler que l'avantage des épaisseurs significatives est de pouvoir traiter des contours non connexes et des coordonnées non entières.

Dans la suite, nous allons utiliser l'estimateur de bruit local d'échelles significatives avec la primitive de segments flous pour définir la couverture tangentielle des contours bruités.

4.3 Analyse géométrique des courbes bruitées

La notion de couverture tangentielle [128], basée sur la primitive de segments de droites standards ou naïves maximaux, est un outil bien connu pour étudier les caractéristiques géométriques des courbes discrètes [228]. Cependant, cet outil ne traite que les courbes 4- et 8- connexes pour les segments standards et naïfs, respectivement – et les coordonnées entières. Ceci présente un handicap majeur pour les courbes bruitées non connexes. De plus, il est sensible aux perturbations qui peuvent présenter la courbe. Ce qui est souvent le cas pour les contours discrets extraits d'images numériques qui contiennent généralement du bruit.

Dans cette section, nous étudions deux variants de la couverture tangentielle pour les courbes discrètes bruitées qui peuvent être éventuellement non connexes. Ces deux structures sont basées sur la primitive de segments flous maximaux proposée par I. Debled-Rennesson *et al.* [95]. De plus, pour mieux choisir la valeur de l'épaisseur ν des segments flous, nous considérons l'estimateur de bruit local défini par l'épaisseur significative proposé par B. Kerautret *et al.* [201].

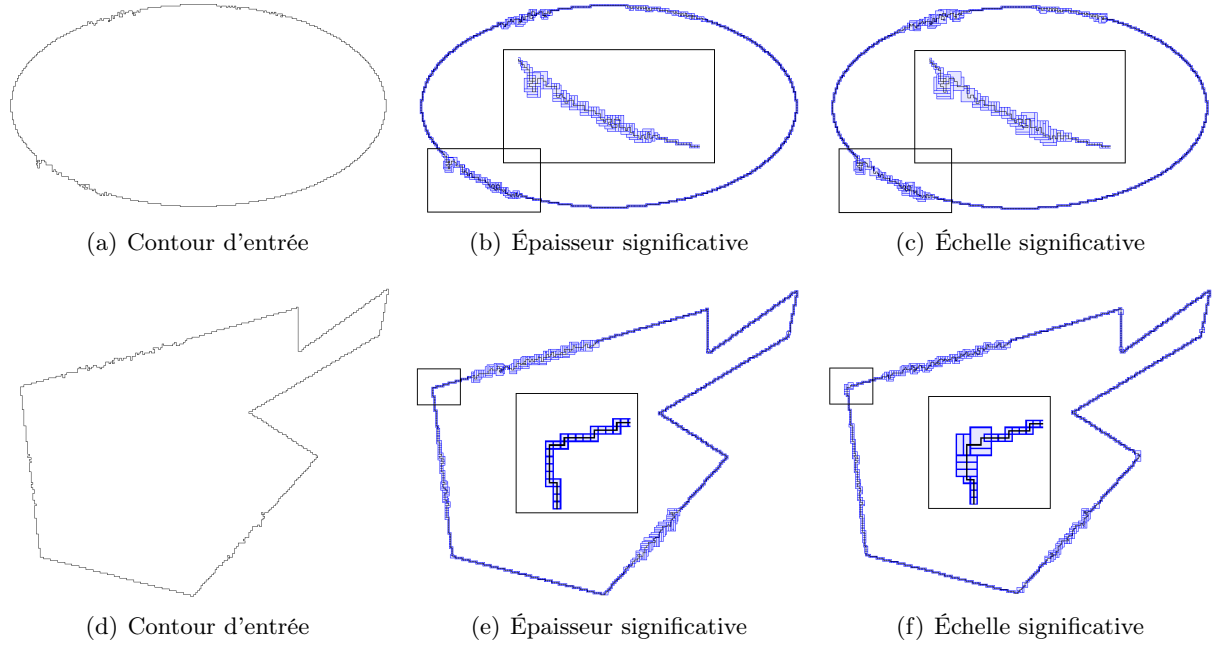


FIGURE 4.11 – Comparaison entre échelles et épaisseurs significatives. Première colonne : contours d'entrées, deuxième colonne : la détection d'échelles significatives et troisième colonne : la détection d'épaisseurs significatives. Images issues de [193].

4.3.1 Couverture tangentielle d'épaisseur ν

La notion de couverture tangentielle a été introduite par F. Feschet et L. Tougne dans [128] et elle est utilisée pour obtenir un profil de courbure et une approximation polygonale rapide [131] des courbes discrètes. Pour étudier les courbes bruitées, une extension de cette notion avec les segments flous maximaux, appelée *couverture tangentielle d'épaisseur ν* , a été proposée.

Définition 82 (ν -Couverture tangentielle [289]). *Soit C une courbe discrète. La ν -couverture tangentielle de $C \subset \mathbb{Z}^2$, notée $TC_\nu(C)$, est la suite de segments flous maximaux d'épaisseur fixe ν qui constitue la courbe C .*

$$TC_\nu(C) = \{\mathcal{B}(B_0, E_0, \nu), \mathcal{B}(B_1, E_1, \nu), \dots, \mathcal{B}(B_{m-1}, E_{m-1}, \nu)\} \quad (4.6)$$

avec $\mathcal{B}(B_i, E_i, \nu)$ le segment flou maximal d'épaisseur ν contenant la suite de points de C indexés de B_i à E_i .

La propriété suivante a été prouvée dans [291] pour la couverture tangentielle $TC_\nu(C)$.

Propriété 83 ([289]). *Soit $TC_\nu(C)$ la ν -couverture tangentielle de la courbe C . Si $TC_\nu(C) = \{\mathcal{B}(B_0, E_0, \nu), \mathcal{B}(B_1, E_1, \nu), \dots, \mathcal{B}(B_{m-1}, E_{m-1}, \nu)\}$ et $B_0 < B_1 < \dots < B_{m-1}$ alors $E_0 < E_1 < \dots < E_{m-1}$.*

On déduit de cette propriété un algorithme incrémental dans [289] pour déterminer l'ensemble de tous les segments flous maximaux d'épaisseur ν d'une courbe discrète C . L'idée principale est de conserver un segment flou lorsqu'un point est ajouté (ou supprimé) à (de) celui-ci. La méthode permet de calculer $TC_\nu(C)$ en complexité quasi-linéaire $\mathcal{O}(n \log n)$ avec n le nombre de points de la courbe C .

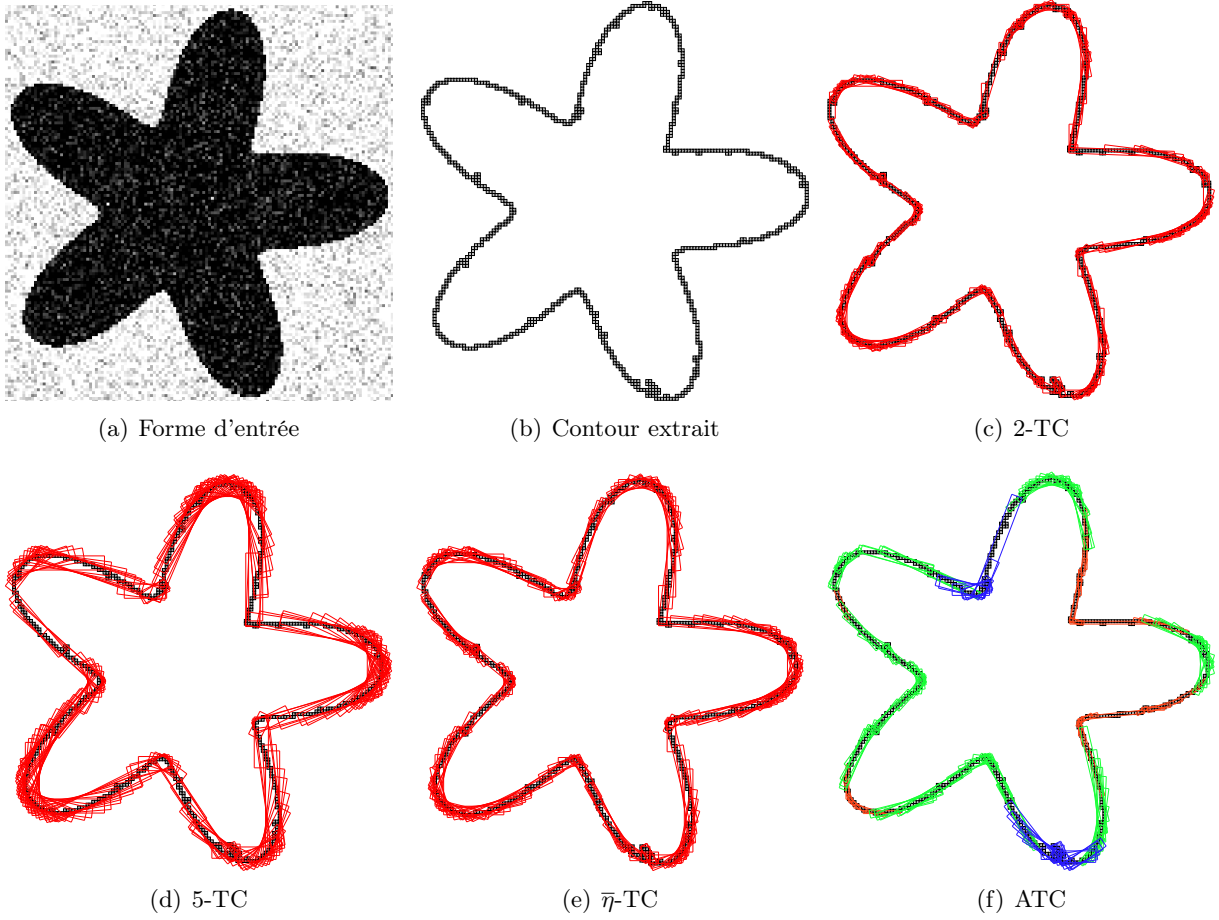


FIGURE 4.12 – Exemples de couverture tangentielle sur une forme discrète bruitée (a) et le contour extrait (b). (c–e) Les couvertures tangentielles de (b); ν -TC composée des segments flous maximaux de l'épaisseur fixée : (c) $\nu = 2$, (d) $\nu = 5$ et (e) $\nu = \bar{\eta}$ la moyenne des valeurs d'épaisseurs significatives détectées. (f) ATC composée des segments flous maximaux d'épaisseur variée en fonction du bruit détecté sur la courbe.

La ν -TC d'une courbe présente des informations importantes sur la structure géométrique de la courbe étudiée C . L'épaisseur ν des segments flous maximaux permet de prendre en compte le bruit éventuellement présent sur C . Cette structure est utilisée dans de nombreuses applications pour les études et analyses des courbes discrètes bruitées. Nous pouvons citer par exemple l'estimateur de longueur, de tangente [94] et de courbure [289], la décomposition polygonale de la courbe en parties convexes et concaves [94], la détection de cercles [94] et d'ellipses [295]. Il faut savoir que la valeur de l'épaisseur ν permet de tenir compte de la quantité de bruit présent dans les contours et qu'elle peut avoir une grande influence sur le résultat d'analyse sur ces contours. Les exemples de la ν -TC sont illustrés sur la Figure 4.12 (c)–(e). On observe qu'un petit ν permet à la couverture tangentielle de mieux capturer les détails de la courbe mais aussi le bruit ; au contraire, un grand ν réduit l'influence du bruit le long de la courbe mais fait aussi perdre des informations géométriques importantes. Par conséquent, il est important de déterminer une valeur appropriée de ν pour une courbe donnée. Pour cela, plusieurs stratégies sont possibles. Dans [94], une approche *multi-échelles* est considérée, qui consiste à utiliser différentes épaisseurs ν pour étudier la courbe. Lorsque le bruit est régulièrement distribué le long de la courbe, il est

proposé dans [296] d'utiliser l'estimateur de bruit de l'épaisseur significative [198, 199, 201] pour fixer ν . En particulier, $\nu = \bar{\eta}$ la moyenne des épaisseurs significatives détectées (voir Figure 4.12 (e)). Malgré ces différentes approches, il est difficile de choisir une valeur appropriée de ν par rapport au bruit. De plus, il est possible que le bruit n'apparaisse pas de façon régulière le long du contour, utiliser une valeur fixe de ν peut donc être inadéquat. Un exemple est donné sur la Figure 4.11 dans laquelle différents niveaux de bruit sont détectés sur le contour. C'est par rapport à cette limitation que nous proposons une nouvelle structure, appelée *couverture tangentielle adaptative*, qui est une couverture tangentielle d'épaisseur non constante.

4.3.2 Couverture tangentielle adaptative

Pour mieux gérer les contours discrets irrégulièrement bruités, nous présentons dans cette section un nouveau concept de *couverture tangentielle adaptative* (adaptive tangential cover (ATC) en anglais) avec l'utilisation d'un estimateur de bruit local \mathcal{E} . L'idée est d'adapter automatiquement et localement l'épaisseur des segments flous le long de la courbe selon le bruit présent. Plus précisément, la structure de l'ATC est composée de segments flous maximaux avec différentes épaisseurs déduites des valeurs de bruit localement estimées par \mathcal{E} en chaque point du contour.

Avant de donner la définition de l'ATC, nous introduisons d'abord la notion d'inclusion entre deux segments flous maximaux et le segment le plus grand. Soit $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ une courbe discrète 2D, notons par $\mathcal{B}(B_i, E_i, \cdot)$ un segment flou maximal d'épaisseur quelconque avec B_i (resp. E_i) l'indice de point de départ (resp. point d'arrivée), avec $B_i, E_i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Définition 84 (Inclusion de segment flou). *Soit \mathbf{C} une courbe discrète, et $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}(B_i, E_i, \cdot)$, $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}(B_j, E_j, \cdot)$ avec $i \neq j$ deux segments flous maximaux distincts sur \mathbf{C} . Le segment \mathcal{B}_j est dit être inclus dans \mathcal{B}_i si $B_i \leq B_j$ et $E_i \geq E_j$, et noté par $\mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{B}_i$.*

Définition 85 (Segment maximal). *Soit $\mathcal{B}(\mathbf{C})$ un ensemble de segments flous maximaux d'une courbe discrète \mathbf{C} . Le segment $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}(B_i, E_i, \cdot) \in \mathcal{B}(\mathbf{C})$ est dit maximal (pour l'inclusion) si pour tout $\mathcal{B}_j \in \mathcal{B}(\mathbf{C})$ avec $i \neq j$, $\mathcal{B}_j \not\subseteq \mathcal{B}_i$.*

La couverture tangentielle adaptative associée à un estimateur de bruit \mathcal{E} est définie comme la suite des segments maximaux pour l'inclusion obtenue à partir des ν -TC.

Définition 86 (Couverture tangentielle adaptative). *Soit $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ une courbe discrète et $\eta = (\eta_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ le vecteur des niveaux de bruit associé à chaque point $\mathbf{C}_i \in \mathbf{C}$, obtenu avec un estimateur de bruit \mathcal{E} . Soit $\mathcal{B}(\mathbf{C}) = \{TC_{\nu_k}(\mathbf{C})\}$ un ensemble de ν_k -couvertures tangentielles pour $\nu_k \in \eta$. La couverture tangentielle adaptative associée à \mathcal{E} , notée $ATC_{\mathcal{E}}$, est définie par :*

$$ATC_{\mathcal{E}}(\mathbf{C}) = \{\mathcal{B}_j = \mathcal{B}(B_j, E_j, \nu_k) \in \mathcal{B}(\mathbf{C}) \mid \nu_k = f\{\eta_t \mid t \in \llbracket B_j, E_j \rrbracket\} \wedge \mathcal{B}_j \not\subseteq \mathcal{B}_i \text{ pour } i \neq j\}.$$

où f est la fonction d'association des niveaux de bruit pour un segment \mathcal{B}_j .

Un exemple de l'ATC est donné sur la Figure 4.13 avec trois niveaux de bruit détectés qui correspondent respectivement à trois épaisseurs de segments flous $\nu = 1, 1.4$ et 2.5 .

Par construction, l'ATC possède la même propriété que la ν -TC.

Propriété 87. *Soit $ATC_{\mathcal{E}}(\mathbf{C})$ la couverture tangentielle adaptative de la courbe \mathbf{C} . Si $ATC_{\mathcal{E}}(\mathbf{C}) = \{\mathcal{B}(B_0, E_0, \cdot), \mathcal{B}(B_1, E_1, \cdot), \dots, \mathcal{B}(B_{m-1}, E_{m-1}, \cdot)\}$ et $B_0 < B_1 < \dots < B_{m-1}$ alors $E_0 < E_1 < \dots < E_{m-1}$.*

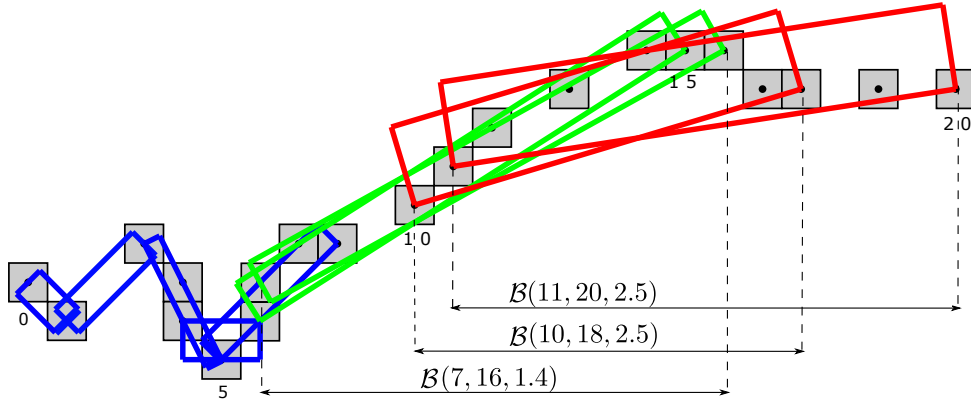


FIGURE 4.13 – Exemple de la couverture tangentielle adaptative pour la courbe C dans la Figure 4.5 (b) avec des segments flous maximaux d'épaisseur $\nu = 1, 1.4$ et 2.5 (respectivement en bleus, verts et rouges).

Un estimateur de niveau de bruit local \mathcal{E} est ainsi intégré dans la construction de $ATC_{\mathcal{E}}(C)$ pour fournir des indications de bruit le long de la courbe C . Plus précisément, $ATC_{\mathcal{E}}(C)$ contient les segments flous maximaux d'épaisseur variant en fonction de \mathcal{E} . Puisque les niveaux de bruit peuvent être différents le long de C , $ATC_{\mathcal{E}}(C)$ est censé avoir de grandes valeurs de l'épaisseur dans les zones bruitées et de plus faibles valeurs dans les zones moins bruitées ou sans bruit.

L'Algorithme 2 décrit le calcul de $ATC_{\mathcal{E}}$ d'une courbe C , avec la fonction d'association de niveau de bruit $f = \max$. Cet algorithme est divisé en deux étapes :

1. Étiqueter les points avec la valeur de l'estimateur de bruit \mathcal{E} , et
2. Construire $ATC_{\mathcal{E}}$ de C à partir des étiquettes obtenues de la première étape.

Plus précisément, l'algorithme est initialisé avec un $ATC_{\mathcal{E}}$ vide et l'étiquette associée à chaque point $C_i \in C$ est la même que le vecteur η des niveaux de bruit estimés par \mathcal{E} (lignes 2–3). Dans la première étape (lignes 4–8), les ν -TC, à savoir TC_{ν_k} avec $\nu_k \in \nu$, correspondant à différents niveaux de bruit dans η , sont considérées afin de trouver l'étiquette pour chaque point $C_i \in C$. À chaque niveau ν_k , l'étiquette d'un point est mis à jour par la valeur ν_k si le segment flou maximal passant par le point a la valeur maximale du niveau de bruit égale à ν_k . Il convient de noter que le nombre des niveaux de bruit présent dans C est beaucoup plus petit que le nombre de points de C , et que le nombre de TC_{ν_k} considérées est souvent petit. Ensuite, dans la deuxième étape (lignes 12–15), $ATC_{\mathcal{E}}$ est composée des segments flous maximaux avec des épaisseurs correspondant aux étiquettes des points constituant le segment.

Il faut noter que la construction de $ATC_{\mathcal{E}}$ est sans paramètre, seul le choix de \mathcal{E} doit être fait. La notion d'épaisseur significative (voir Section 4.2.3) permet d'estimer localement le niveau de bruit en chaque point de C . Pour la suite de ce mémoire, nous utilisons les épaisseurs significatives données par l'estimateur de bruit et nous notons ATC_{MT} la couverture tangentielle adaptative associée à l'épaisseur significative. Un exemple de ATC_{MT} est donnée dans la Figure 4.12 (f).

La Figure 4.14 illustre l'algorithme de construction de ATC_{MT} pour la courbe C (Figure 4.14 (a)) et les niveaux de bruits pour chaque point de C détecté par MT (Figure 4.14 (b)) ; le rouge, le vert et le violet correspondent aux épaisseurs significatives 1, 2 et 3, respectivement. L'étiquette de chaque point C_i est initialisé par son η_i correspondant. La Figure 4.14 (c) montre trois couvertures tangentielles d'épaisseurs différentes TC_{ν_k} avec $\nu_k = 1, 2$ et 3 (respectivement en jaune, bleu et cyan). Les Figures 4.14 (d–f) illustrent la propagation des niveaux de bruits les plus élevés le long des segments pour chaque point $C_i \in C$ en fonction de ν_k et TC_{ν_k} . Les valeurs des étiquettes

Algorithme 2 : Calcul de la couverture tangentielle adaptative.

Entrées : $C = (C_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ une courbe discrète,
 \mathcal{E} l'estimateur de niveau de bruit local,
 $\eta = (\eta_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ le vecteur des niveaux de bruit, estimé par \mathcal{E} , pour chaque $C_i \in C$,
 $\nu = \{\nu_k \mid \nu_k \in \eta\}_{0 \leq k \leq m-1}$ l'ensemble ordonné de m valeurs de η ,
 $\mathcal{B}(C) = \{TC_{\nu_k}(C) \mid \nu_k \in \nu\}_{0 \leq k \leq m-1}$ l'ensemble de ν_k -TC de C

Sortie : $ATC_{\mathcal{E}}(C)$ la couverture tangentielle adaptative de C associée à \mathcal{E}

Variables : α la valeur maximale de η dans un intervalle donné
 $\gamma = (\gamma_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ le vecteur des étiquettes associées à chaque $C_i \in C$ selon $\mathcal{B}(C)$

```

1 Début
  /* Initialisation */
2  $ATC_{\mathcal{E}}(C) = \emptyset$ 
3  $\gamma_i = \eta_i$  pour  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ 
  /* Étape 1 : Étiqueter chaque point  $C_i \in C$  avec la valeur maximale de bruit
  par rapport au segment flou d'épaisseur  $\nu_k$  passant par  $C_i$  */
4 Pour chaque  $\nu_k \in \nu$  (dans l'ordre décroissant) faire
5   Pour chaque  $\mathcal{B}(B_i, E_i, \nu_k) \in \mathcal{B}_{\nu_k}(C)$  faire
6      $\alpha = \max\{\eta_i \mid i \in \llbracket B_i, E_i \rrbracket\}$ 
7     Si  $\alpha = \nu_k$  alors
8        $\gamma_i = \nu_k$  for  $i \in \llbracket B_i, E_i \rrbracket$ 
9     FinSi
10  FinPour
11 FinPour
  /* Étape 2 : Calculer  $ATC_{\mathcal{E}}$  en gardant le segment flou qui contient au moins
  un point dont l'étiquette est égale à l'épaisseur du segment */
12 Pour chaque  $\nu_k \in \nu$  faire
13   Pour chaque  $\mathcal{B}(B_i, E_i, \nu_k) \in \mathcal{B}_{\nu_k}(C)$  faire
14     Si  $\exists \gamma_i$ , pour  $i \in \llbracket B_i, E_i \rrbracket$ , tel que  $\gamma_i = \nu_k$  alors
15        $ATC_{\mathcal{E}}(C) = ATC_{\mathcal{E}}(C) \cup \{MBS(B_i, E_i, \nu_k)\}$ 
16     FinSi
17   FinPour
18 FinPour
19 Fin
```

γ_i final pour chaque C_i sont données sur la *Figure 4.14* (g). La couverture tangentielle adaptative obtenue à partir des TC_{ν_k} et des étiquettes γ_i est donnée sur la *Figure 4.14* (h).

L'implémentation associée est disponible sur *GitHub* à l'adresse suivante :

<https://github.com/ngophuc/AdaptativeTangentCover>

L'extension en 3D de cette notion de couverture tangentielle adaptative sera présentée dans la *Section 4.3.4*.

4.3.3 Estimateurs géométriques des courbes discrètes

Dans cette section, nous montrons différents estimateurs géométriques en utilisant la couverture tangentielle d'épaisseur ν (ν -TC) et la couverture tangentielle adaptative avec épaisseur significative (ATC_{MT}) présentées précédemment pour étudier les courbes bruitées. Un aperçu des résultats obtenus à partir de ces estimateurs est également présenté. D'autres résultats peuvent être produits avec la démonstration en ligne :

https://ipol-geometryhost.loria.fr/~phuc/ipol_demo/ATC_LMST_IPOLDemo/

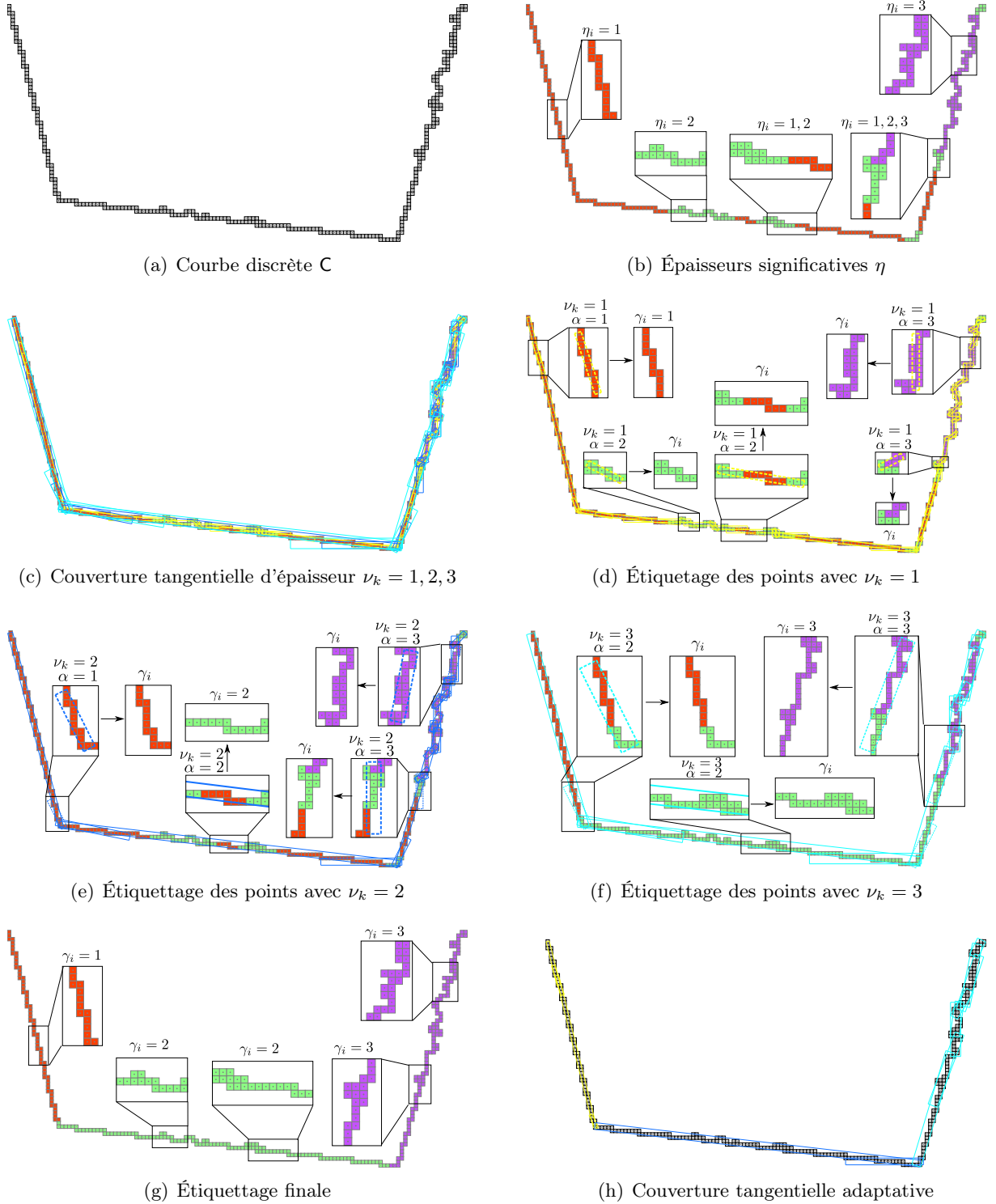


FIGURE 4.14 – Illustration de l'Algorithme 2 de construction de la couverture tangentielle adaptative $ATC_{\mathcal{E}}$ avec l'estimateur de bruit d'échelle significative $\mathcal{E} = MT$ et avec la fonction d'association de niveau de bruit $f = \max$.

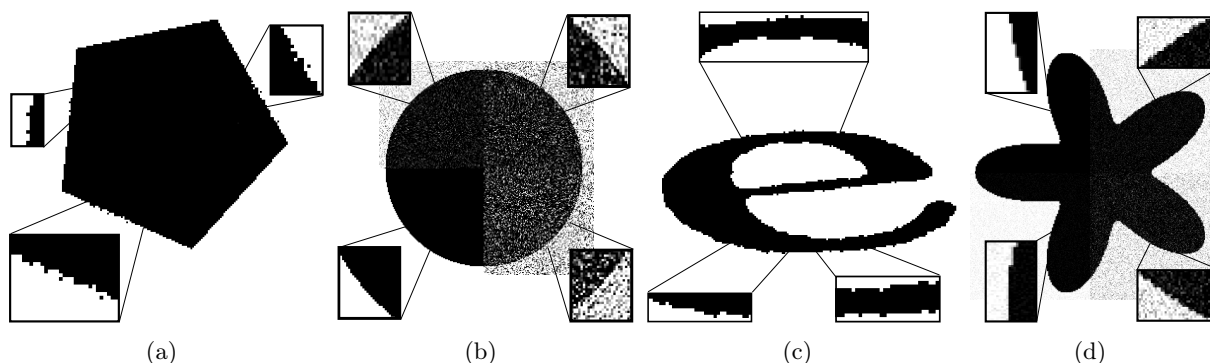


FIGURE 4.15 – Images de tests.

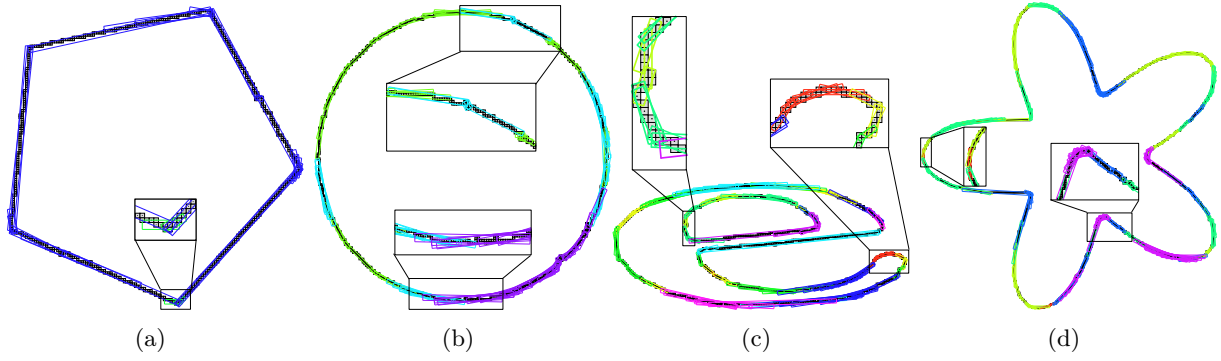
Les expérimentations sont effectuées sur les objets bruités dans la *Figure 4.15* avec différents caractéristiques. La *Figure 4.15 (a)* contient des zones manuellement bruitées tandis que la *Figure 4.15 (b)* possède des zones bruitées de façon naturelle (ces images sont issues de [198]). Les *Figures 4.15 (c)* et *(d)* sont générées en utilisant le modèle de dégradation de document Kanugo [190] implémenté dans le programme `imgAddNoise` du projet *DGtalTools* [3]. Le contour de ces objets est obtenu en utilisant l'algorithme d'extraction de frontière de régions connexes [69]. Les différents niveaux de bruit détectés par l'estimateur MT sont présentés dans le *Tableau 4.1*. Les ATC_{MT} associées aux contours extraits de ces images sont représentées dans la *Figure 4.16*. Les couleurs des segments flous correspondent aux niveaux de bruit détectés avec l'estimateur MT, par exemple, les segments flous d'épaisseur 1.5 et 2 sont en bleu et vert, respectivement.

Contour	Niveaux de bruit					
	1	1.5	2	2.5	3	3.5
<i>Figure 4.15 (a)</i>	x	x	x			
<i>Figure 4.15 (b)</i>	x	x	x	x		
<i>Figure 4.15 (c)</i>	x	x	x	x	x	x
<i>Figure 4.15 (d)</i>	x	x	x	x	x	

 TABLE 4.1 – Différents niveaux de bruits détectés par l'estimateur MT sur les images de la *Figure 4.15*.

Estimateur de la tangente

Le premier estimateur géométrique auquel nous nous intéressons est la tangente à chaque point du contour. Il faut savoir que la plupart des estimateurs géométriques ont une sensibilité élevée aux contours perturbés par le bruit. Dans ce cas, ATC_{MT} peut être utilisée pour améliorer la précision des estimateurs de tangentes existantes en présence de bruit. En particulier, nous nous concentrons sur un estimateur de la tangente 2D appelé λ -tangente maximale du segment (λ -maximal segment tangent (λ -MST) en anglais) [226, 227]. Cet estimateur possède de bonnes propriétés comme la convergence multi-grilles, une complexité linéaire de calcul et des résultats précis [227]. Cet estimateur, à l'origine, est basé sur la couverture tangentielle des segments de droites maximaux. Pour mieux gérer le bruit, nous appliquons λ -MST sur la couverture

FIGURE 4.16 – ATC_{MT} calculée sur les contours extraits des formes de la Figure 4.15.

tangentielle composée de segments flous. Plus précisément, l'estimation des tangentes est obtenue en définissant un *faisceau de segments flous maximaux* $\mathcal{F}(k) = \{\mathcal{B}_i = \mathcal{B}(B_i, E_i, .), \text{ avec } B_i \leq k \leq E_i\}$ passant par le point C_k de la courbe C ainsi qu'une fonction de mappage λ définie sur $[0, 1]$ et à valeurs dans \mathbb{R}^+ . À partir de ce faisceau, une notion d'excentricité est introduite afin de répartir les poids sur tous les segments couvrant le point considéré. Plus formellement, l'excentricité a été définie comme [226] :

$$e_i(k) = \begin{cases} \frac{\|C_k - C_{E_i}\|}{L_i} & \text{si } i \in \mathcal{F}(k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.7)$$

avec $L_i = \|C_{E_i} - C_{B_i}\|$. La direction de tangente $\theta(k)$ du point $C_k \in C$ est calculée à partir des directions θ_i des $\mathcal{B}(B_i, E_i, .)$ couvrants C_k avec :

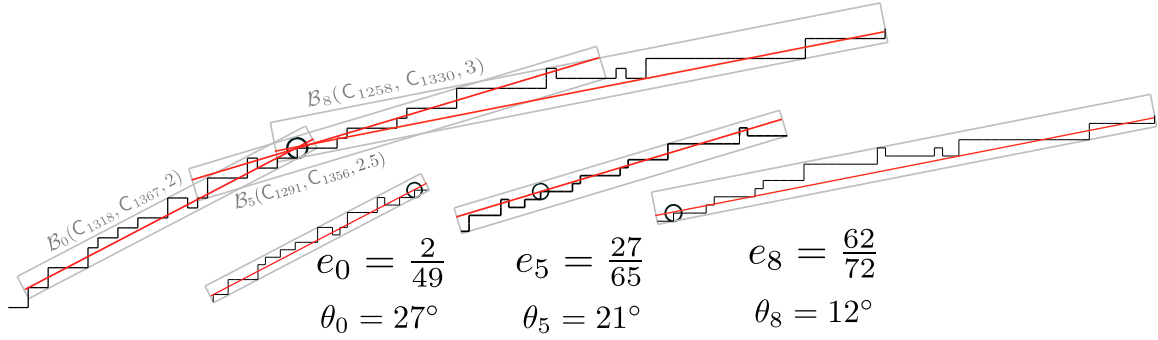
$$\theta(k) = \frac{\sum_{i \in \mathcal{F}(k)} \lambda(e_i(k)) \theta_i}{\sum_{i \in \mathcal{F}(k)} \lambda(e_i(k))} \quad (4.8)$$

Notons que pour les expérimentations présentées, nous avons utilisé la fonction lambda suivante : $\lambda = 64x^3(-x^3 + 3x^2 - 3x + 1)$. Il est facile d'adapter cet estimateur en incluant l'ATC dans la définition du faisceau \mathcal{F} qui contient un ensemble de segments flous d'épaisseurs différentes.

La Figure 4.17 illustre l'idée principale de cet estimateur λ -MST basé sur ATC_{MT} . Sur l'image, on considère par exemple le point C_{1320} (marqué par le cercle noir) du contour bruité $C \subset \mathbb{Z}^2$. Les segments flous maximaux passant par C_{1320} sont : \mathcal{B}_0 , \mathcal{B}_5 et \mathcal{B}_8 (ils sont affichés en gris). À partir de la position relative de C_{1320} , par rapport à l'indice E_i , on peut calculer l'excentricité de C_{1320} dans chaque segment flou qui le couvre (voir équation (4.7)), et on peut alors déduire les poids de la fonction lambda. Enfin, la direction de tangente $\theta(k)$ peut être calculée à partir des différentes valeurs de θ_i avec leurs poids associés (voir équation (4.8)). Sur la figure, l'excentricité est donnée avec l'angle tangent associé ; pour \mathcal{B}_0 , on a $e_0 = \frac{2}{49}$ et $\theta_0 = 27^\circ$, pour \mathcal{B}_5 , on a $e_5 = \frac{27}{65}$ et $\theta_5 = 21^\circ$ et pour \mathcal{B}_8 , on a $e_8 = \frac{62}{72}$ et $\theta_8 = 12^\circ$.

Un aperçu des résultats est donné sur la Figure 4.18, dans laquelle les vecteurs normaux obtenus par l'estimateur tangent λ -MST avec ATC_{MT} sont affichés. Ces résultats montrent que la combinaison de l'estimateur λ -MST avec ATC_{MT} améliore globalement la stabilité des tangentes estimées. Elle préserve localement les discontinuités polygonales lorsqu'il n'y a pas de bruit et elle lisse les directions de tangentes lorsque des variations apparaissent (même si un certain bruit peut localement subsister en raison des limites de l'estimateur d'épaisseur significative).

Nous avons également comparé notre méthode avec l'estimateur λ -MST défini par les ν -TC, avec $\nu = 1, 2, 3$ et 4, l'estimateur basé sur l'échelle significative (Meaningful Scale Maximal


 FIGURE 4.17 – Illustration du principe de l'estimateur λ -MST défini à partir de l'ATC.

Segment Tangent – MSMST) [198], la méthode de convolution binomiale (Binomial Convolution – BC) [258] et la mesure de covariance de Voronoï (Voronoi-Based Curvature – VCM) [84].

L'estimateur MSMST [198] est proposé par B. Kerautret et J-O. Lachaud. La méthode consiste à calculer, en chaque point \mathbf{p} du contour, la tangente λ -MST à l'échelle définie par l'échelle significative de \mathbf{p} . Les deux autres méthodes [84, 258] ne sont pas basées sur la reconnaissance de segments de droites discrètes. Plus précisément, pour l'approche BC [258], R. Malgouyres *et al.* ont proposé un estimateur de dérivée pour des objets discrets bruités en utilisant uniquement les opérations arithmétiques exactes. Les auteurs ont défini un produit de convolution discrète et l'ont utilisé pour construire un estimateur de la tangente. Dans le cas de VCM [84], L. Cuel *et al.* généralisent la notion de covariance de Voronoï à n'importe quelle distance et montrent que la nouvelle notion est résiliente au bruit de Hausdorff (la distance maximale de Hausdorff quand chaque point \mathbf{p} de la courbe C peut être déplacé aléatoirement à une distance inférieure à cette distance maximale) et aux valeurs aberrantes, fournissant ainsi un outil pour estimer des normales robustes à partir d'une approximation de nuage de points.

Les résultats de comparaisons sont présentés dans le *Tableau 4.2* avec les meilleurs scores en gras. Ces résultats ont été obtenus à partir des implémentations dans DGtalTools [3] avec la bibliothèque DGtal [2]. Pour les méthodes BC et VCM, les paramètres utilisés sont indiqués dans les indices avec le nom de la méthode.

Les comparaisons ont été effectuées en calculant la moyenne de l'erreur absolue définie par l'écart d'angle tangent entre les tangentes estimées et les tangentes réelles qui sont déduites du point le plus proche de la forme de référence. Le pourcentage de points ayant de petites erreurs inférieures à 0.1 est également calculé pour mettre en évidence la quantité estimée de vecteurs tangents avec précision (notée $P_{<0.1}$).

Dans le *Tableau 4.2*, pour l'image de la forme polygonale (*Figure 4.15 (a)*), l'estimateur λ -MST basé sur ATC_{MT} montre le deuxième meilleur résultat après l'estimateur MSMST qui utilise l'échelle significative (qui donne une meilleure détection de bruit que l'épaisseur significative sur cette forme). Pour l'image du cercle (*Figure 4.15 (b)*) le résultat apparaît également meilleur que l'estimateur 1-, 2- et 3-TC. Les estimateurs 4-TC, $VCM_{20,5}$ et BC donnent de meilleurs résultats par rapport à l'estimateur λ -MST basé sur ATC_{MT} et MSMST. Cependant, ces configurations ne sont pas complètement significatives puisque la forme circulaire n'est pas trop déformée par un paramètre de lissage trop important. Précisons que ATC_{MT} est une approche sans paramètre et tenant compte du niveau de bruit présent sur le contour.

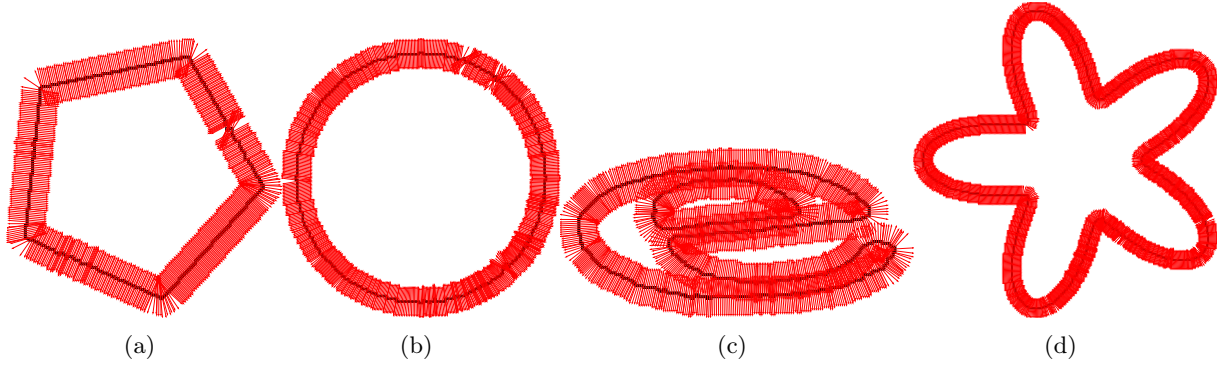


FIGURE 4.18 – Résultat de l'estimateur de la tangente λ -MST avec ATC_{MT} pour les formes de la Figure 4.15. Sur l'image, les vecteurs normaux (en rouge) sont affichés.

Contour	Erreur absolue	Méthodes										
		ATC_{MT}	1-TC	2-TC	3-TC	4-TC	MSMST	$VCM_{5,2}$	$VCM_{10,3}$	$VCM_{20,5}$	BC_1	BC_4
Fig. 4.15(a)	Moyenne	0.065	0.11	0.065	0.071	0.084	0.02	0.097	0.068	0.066	0.074	0.063
	$P_{<0.1}$	82.1	40.4	77.9	79.5	75.5	94	36.7	60.1	77.1	74.9	78.8
Fig. 4.15(b)	Moyenne	0.072	0.283	0.107	0.081	0.061	0.089	0.129	0.079	0.052	0.049	0.05
	$P_{<0.1}$	83	27.1	72	80	86.8	74.8	47.5	71.3	88.5	96.3	93.4

TABLE 4.2 – Comparaison des différents estimateurs de tangentes sur les formes de la Figure 4.15.

Détecteur des parties concaves/convexes

La convexité des contours extraits des formes discrètes est déjà étudiée dans la littérature, nous pouvons citer par exemple [108, 230]. Plus spécifiquement, en se basant sur la convexité discrète [204], une forme numérique $X \subset \mathbb{Z}^2$ est dite convexe si et seulement si X est 4-connexe et la discrétisation de Gauss de son enveloppe convexe est égale à X , c'est à dire $X = \text{Conv}(X) \cap \mathbb{Z}^2$. L'information globale de convexité peut être déduite par des segments maximaux du contour étudié. De plus, les parties convexes et concaves du contour de la forme peuvent également être détectées à partir des segments maximaux successifs de sa couverture tangentielle. H. Dorksen-Reiter et I. Debled-Rennesson ont prouvé dans [108] que le contour d'un polyomino est convexe (resp. concave) si les pentes de ses segments maximaux successifs est croissantes (resp. décroissantes). À partir de ce résultat, un détecteur de parties convexes et concaves sur un contour d'une forme discrète est proposé dans [108]. La méthode consiste à déterminer la suite des segments maximaux successifs sur la couverture tangentielle qui ont des pentes monotones. En particulier, les segments maximaux, dont les directions des pentes augmentent d'un côté et diminuent de l'autre, sont dans des zones de transition, et séparent les parties convexes et concaves du contour.

On rappelle que ATC_{MT} est une extension de la notion de couverture tangentielle avec des segments flous maximaux. Alors la méthode de détection des parties concaves et convexes dans [108] peut être utilisée avec ATC_{MT} . Plus spécifiquement, nous considérons la même stratégie avec les directions des pentes successives des segments flous maximaux dans ATC_{MT} .

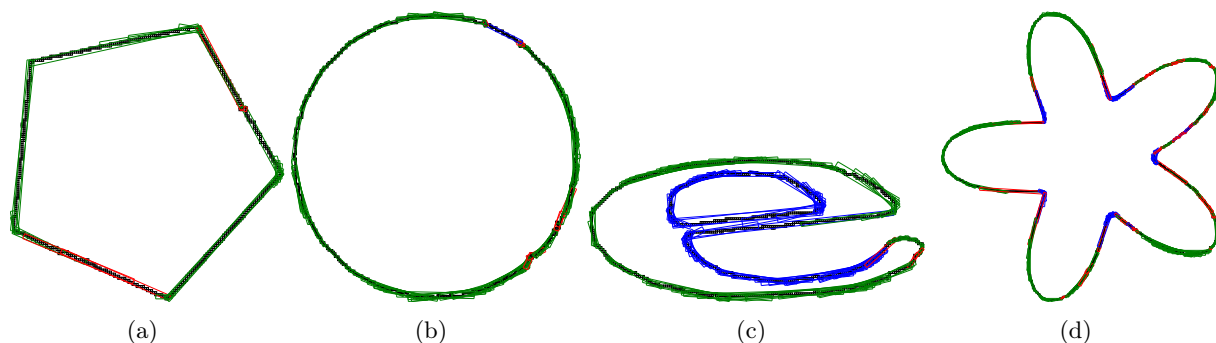


FIGURE 4.19 – Résultat du détecteur de parties convexes et concaves des formes de la Figure 4.15. Les segments verts et bleus correspondent respectivement aux parties convexes et concaves de la forme, et les segments rouges correspondent à la transition entre les parties convexes et concaves.

Définition 88. Soit C une courbe discrète, et $ATC(C) = (\mathcal{B}_j)_{j=0}^{j=m-1}$ la couverture tangentielle adaptative de C . Soit $\mathcal{B}_{i,j} = (\mathcal{B}_i, \dots, \mathcal{B}_j) \subset ATC(C)$ des segments flous maximaux successifs de $ATC(C)$. $\mathcal{B}_{i,j}$ est dit **convexe** (resp. **concave**) si la suite des pentes des segments successifs de $\mathcal{B}_{i,j}$ est croissante (resp. décroissante).

L'approche a été testée sur les formes de la Figure 4.15 afin de vérifier le comportement de la suite des segments flous dans ATC_{MT} . Les résultats sont affichés sur la Figure 4.19. Sur la figure, les segments en vert et en bleu indiquent respectivement les parties convexes et concaves, alors que les segments rouges indiquent une transition entre les parties convexes et concaves. Pour la forme avec un contour faiblement bruité (Figure 4.19 (c)), les directions de pente des segments flous dans ATC_{MT} localisent bien les parties convexes et concaves de la forme. Pour les formes plus bruitées (Figure 4.19 (a) et (d)), même si les zones de transition sont plus grandes, les parties convexes et concaves sont correctement détectées. Dans d'autres cas, lorsque le bruit est irrégulièrement réparti (Figure 4.19 (b)), de petites perturbations dans la direction de la pente induisent de fausses détections de convexité ou de concavité sur de petites parties du contour.

Estimateur de la longueur

Nous présentons ci-dessous une estimation de la longueur basée sur l'approximation polygonale de la forme. Cet estimateur est déduit naturellement de l'algorithme de polygonalisation d'un contour discret à partir de sa couverture tangentielle [295]. Globalement, la méthode détecte sur le contour d'entrée C un ensemble de points dont la courbure est localement maximale, ces points s'appellent les *points dominants*. La suite de ces points forme une courbe polygonale représentative de C . Le périmètre de cette courbe polygonale nous fournit une estimation de la longueur de C . En particulier, l'utilisation ATC_{MT} pour la détection des points dominants permet de réduire les effets de bruit sur le contour étudié.

Le Tableau 4.3 montre les résultats expérimentaux en utilisant ATC_{MT} et ν -TC avec $\nu = 1, 2, 3$ et 4 [295]. Notez que d'autres estimateurs de longueur de contour pourraient être adaptés avec la couverture tangentielle adaptative proposée notamment en intégrant un vecteur normal comme décrit dans [70]. Une telle possibilité pourrait être réalisée en exploitant par exemple l'estimateur λ -MST décrit dans la section précédente.

Contour	Longueur réelle	Longueur estimée				
		ATC_{MT}	1-TC	2-TC	3-TC	4-TC
Figure 4.15 (a)	411.4497	411.594	414.416	412.046	415.639	417.09
Figure 4.15 (b)	565.4867	565.419	573.874	568.044	563.393	558.178

TABLE 4.3 – Résultat d'estimateur de longueur des formes de la Figure 4.15.

4.3.4 Extension aux courbes 3D bruitées

Un premier travail a été proposé dans [J7] pour étendre la notion de couverture tangentielle adaptative en 3D, appelée ATC 3D, pour des courbes 3D bruitées qui sont définies par une suite des points discrets de \mathbb{Z}^3 . L'ATC 3D est basée sur la primitive de segments flous 3D [93] en utilisant les plans de projection. Avant de définir un segment flou 3D, nous devons rappeler la notion de la droite discrète 3D qui est construite à partir de ses deux droites discrètes 2D projetées. Sans perte de généralité, nous supposons que le vecteur directeur de la droite discrète 3D est $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ avec $a \geq b \geq c$. Les définitions pour les coefficients différemment ordonnés s'obtiennent par une permutation de x , y et z ainsi que les coefficients.

Définition 89 (Droite discrète 3D [93]). Une droite discrète 3D, notée $\mathcal{L}_{3D}(a, b, c, \mu, \mu', e, e')$, de vecteur directeur (a, b, c) avec $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ et $a \geq b \geq c$, est définie comme l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ qui vérifie :

$$\mathcal{L}_{3D} = \left\{ \begin{array}{l} \mu \leq cx - az < \mu + e \\ \mu' \leq bx - ay < \mu' + e' \end{array} \right.$$

avec $\mu, \mu', e, e' \in \mathbb{Z}$, e et e' sont appelées épaisseurs arithmétiques de \mathcal{L}_{3D} .

Les épaisseurs e et e' permettent de contrôler la connexité de la droite discrète 3D [93]. Plus précisément, $\mathcal{L}_{3D}(a, b, c, \mu, \mu', e, e')$ est

- 6-connexe si $e \geq a + c$ et $e' \geq a + b$
- 18-connexe si $e \geq a + c$ et $a \leq e' < a + b$ ou $e' \leq a + b$ et $a \leq e < a + c$
- 26-connexe si $a \leq e < a + c$ et $a \leq e' < a + b$
- non connexe si $e < e$ ou $e' < a$.

Des exemples de droite discrète 3D sont donnés sur la Figure 4.20. Selon la définition, une droite discrète 3D se projette bijectivement dans au moins deux plans de projection en deux droites discrètes arithmétiques 2D. De cette propriété, la définition de droite discrète 3D englobante pour une suite de points discrets est ainsi introduite.

Définition 90 (Segment discret 3D [94]). Soit S_{3D} une suite de points de \mathbb{Z}^3 . S_{3D} est appelé segment discret 3D si et seulement s'il existe une droite discrète 3D $\mathcal{L}_{3D}(a, b, c, \mu, \mu', e, e')$ contenant tous les points de S_{3D} . La droite \mathcal{L}_{3D} est alors dite englobante pour S_{3D} .

En considérant les projections de la suite de points – pas forcément connexe – dans les plans de projection, l'extension de la primitive de segment flou en 3D a été proposée dans [94].

Définition 91 (Segment flou 3D d'épaisseur ν [94]). Soit S_{3D} une suite de points de \mathbb{Z}^3 . S_{3D} est un segment flou 3D d'épaisseur ν s'il possède une droite discrète englobante $\mathcal{L}_{3D}(a, b, c, \mu, \mu', \omega, \omega')$ telle que

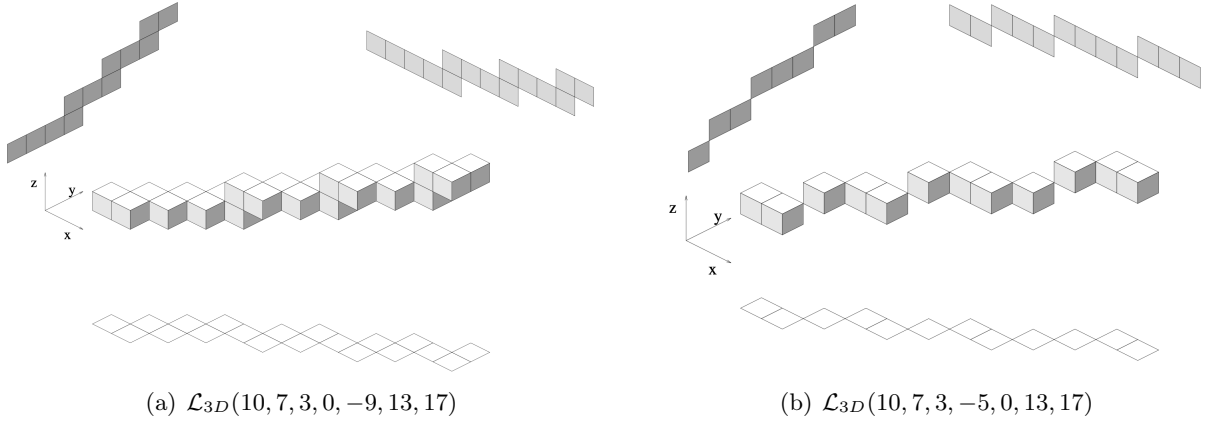


FIGURE 4.20 – Droites discrètes 3D : (a) une droite de 6-connexe $\mathcal{L}_{3D}(10, 7, 3, 0, -9, 13, 17)$ avec les droites de projection dans les plans (Oxy) et (Oxz) sont 4-connexes et (b) une droite de 26-connexes, appelée *droite naïve 3D* et notée $\mathcal{L}_{3D}(10, 7, 3, -5, 0, 13, 17)$. Images issues de [67].

- $\mathcal{L}(a, b, \mu, \omega)$ est englobante et optimale pour la suite des projections de points de S_{3D} dans le plan (Oxz) et $\frac{\omega-1}{\max(|a|, |b|)} \leq \nu$,
- $\mathcal{L}(a, c, \mu', \omega')$ est englobante et optimale pour la suite des projections de points de S_{3D} dans le plan (Oxy) et $\frac{\omega'-1}{\max(|a|, |c|)} \leq \nu'$.

Des algorithmes linéaires de reconnaissance de segments flous 3D ont été déduits de la *Définition* 91 avec l'algorithme de reconnaissance de segments flou 2D dans les plans de projection. Les caractéristiques du segment flou 3D sont ensuite déterminées à partir des segments 2D obtenus dans les plans de projection (voir [94] pour plus de détails). Avec cette primitive de segment flou 3D, la structure de la couverture tangentielle d'épaisseur ν pour les courbes 3D est également présentée avec la décomposition de la courbe d'entrée en une suite de segments flous 3D [94, 290, 291]. Un algorithme de décomposition d'une courbe 3D $C = \{C_i \in \mathbb{Z}^3\}_{i=0}^n$ en segments flous maximaux 3D, appelée *couverture tangentielle (3D) d'épaisseur ν* , est proposé dans [290] avec une complexité en $\mathcal{O}(n \log^2 n)$. Deux exemples de couverture tangentielle d'épaisseur ν en 3D sont donnés dans la *Figure* 4.21 avec des segments flous 3D d'épaisseur $\nu = 2$ et 4.

Des études des estimateurs géométriques pour les courbes 3D basées sur cette structure sont également proposées. Plus de détails peuvent être trouvés dans [94, 291].

Avec la primitive de segment flou 3D et la couverture tangentielle d'épaisseur ν en 3D, l'algorithme de construction de la couverture tangentielle adaptative s'étend naturellement à la dimension 3 en considérant les projections de la suite de points d'une courbe discrète 3D dans les plans de projection.

Concernant les niveaux de bruit, nous appliquons séparément l'estimation du bruit sur chaque plan de projection. Plusieurs stratégies sont ensuite étudiées pour déterminer le bruit associé à chaque point de la courbe 3D à partir de ses projections. Une solution primaire, présentée dans [J7], consiste à prendre tout simplement la valeur maximale du bruit détecté sur les trois plans de projections. Il faut noter que, dans [J7], la courbe $C \subset \mathbb{Z}^3$ est supposée avoir *exactement* deux plans de projections *fonctionnels*². L'ATC est ensuite construite à partir des deux segments flous 2D des plans fonctionnels, appelées *projections valides*, de C . La *Figure* 4.22 illustre l'ATC

2. Un plan de projection est dit *fonctionnel* si les points 3D de la courbe sont projetés bijectivement sur le plan. Autrement dit, il n'y a pas deux points 3D de la courbe ayant la même projection sur le plan 2D.

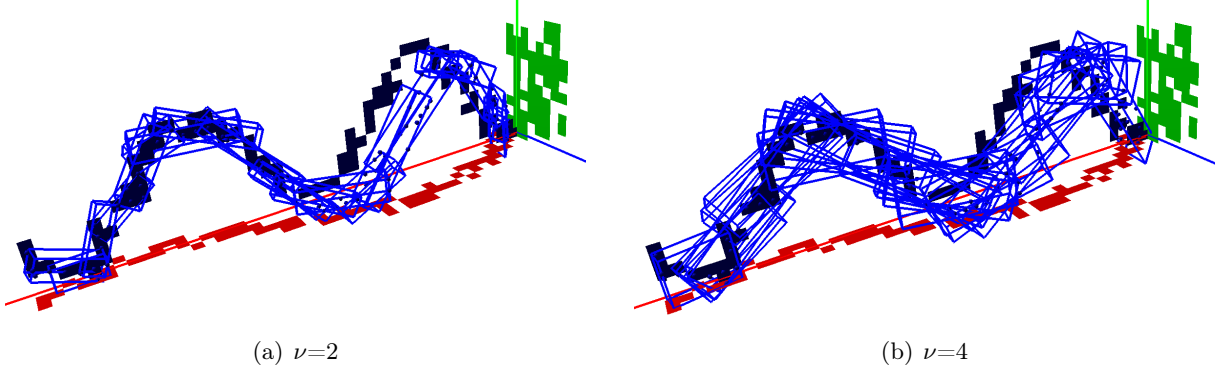


FIGURE 4.21 – Exemple de la couverture tangentielle d'épaisseur $\nu=2$ et 4 (en bleu) sur une courbe sinusoïdale discrétisée 3D bruitée. Les carrés rouges, bleus foncés et verts sont les projections des points de la courbes 3D sur les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz) respectivement.

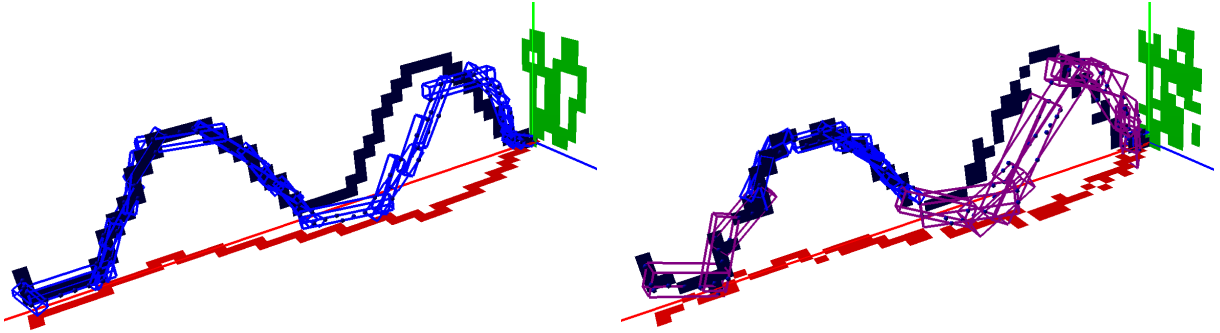


FIGURE 4.22 – Exemple de l'ATC 3D sur la courbe sinusoïdale discrétisée 3D sans bruit (gauche) et avec bruit (droite). Les segments flous maximaux en bleu et violet ont des épaisseurs correspondant respectivement aux niveaux de bruit 1 (en bleu) et 2 (en mauve).

des courbes 3D sans bruit et avec bruit en utilisant la valeur maximale du bruit détecté. Cette stratégie fonctionne assez bien pour les courbes simples et contenant peu de bruit. Cependant, en cas d'apparition de différents niveaux de bruits avec de fortes variations, cette stratégie propage très vite le niveau de bruit et fait perdre des informations caractéristiques de la courbe. De plus, la condition d'avoir des projections fonctionnelles ne serait plus convenable pour les courbes bruitées ; l'algorithme de reconnaissance de segment flou s'arrêterait très rapidement et créerait des petits segments dans l'ATC.

Durant le stage de Master 2 de Hugo Ambrozik, d'autres stratégies ont été exploitées pour les courbes bruitées quelconques – à savoir que les courbes dont la composition en segments segments flous a des projections valides pouvant évoluer durant la construction de l'ATC. Un algorithme de construction performant est aussi proposé. Pour le bruit, nous considérons différentes combinaisons des niveaux de bruits détectés sur les trois plans pour avoir une construction plus précise et proche de la courbe 3D. Nous associons par exemple le bruit d'un point avec la valeur minimale, le médian ou encore la moyenne des niveaux de bruits détectés sur les trois plans de projection. Parmi les stratégies énoncées, le médian permet un bon compromis pour mieux approcher localement la courbe avec ATC 3D sans perdre ses caractéristiques géométriques tout en prenant en compte différents niveaux de bruit sur la courbe. Une comparaison de deux stratégies – la valeur maximale proposée dans [J7] et la valeur médian de bruits détectés sur les trois

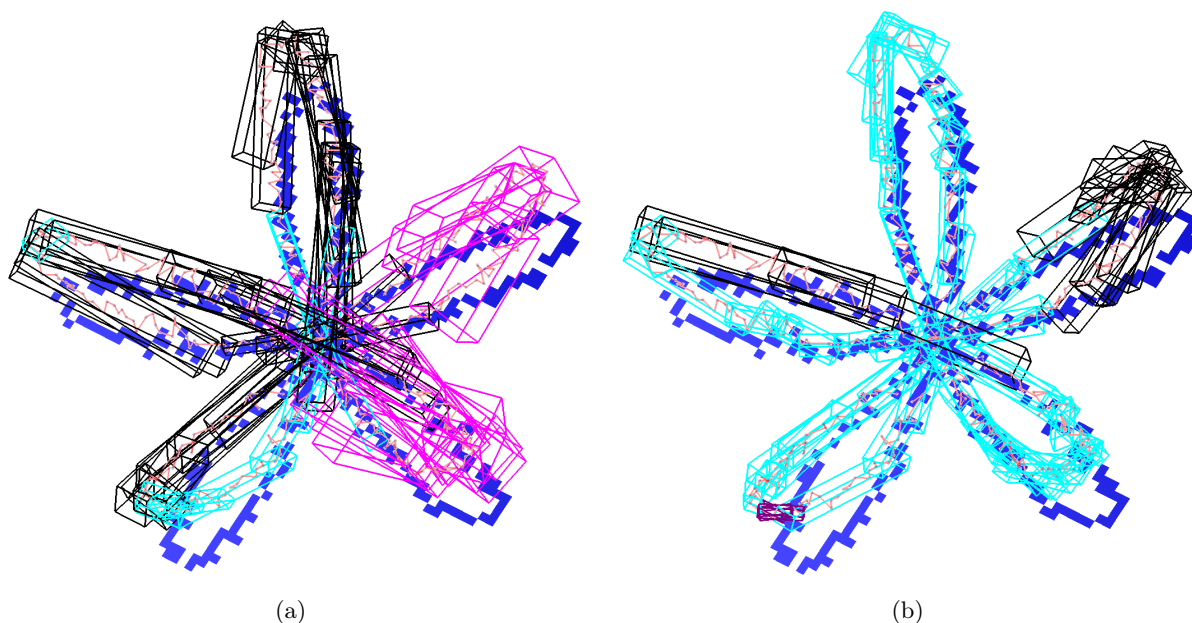


FIGURE 4.23 – Exemple de l'ATC 3D sur une courbe bruitée (en bleu) avec deux stratégies de détermination du niveau de bruit associé à chaque point 3D de la courbe à partir des trois plans de projection : (a) avec la valeur maximale et (b) avec la valeur médiane de bruits détectés. Les niveaux de bruits sont : 1 (en mauve), 2 (en cyan), 3 (en noir) et 4 (en rose).

plans de projection – sur une courbe bruitée est donnée dans la *Figure 4.23*. On peut observer que le médian permet une construction plus proche de la courbe 3D que le maximum.

Contrairement à la reconnaissance des droites 3D [75, 94, 290, 323], nous relaxons la condition avec *au moins* deux projections valides puisque ce n'est pas convenable au cas général des courbes bruitées. En effet, considérons l'exemple pour la suite de points 3D sur la *Figure 4.24* (a) dans laquelle nous avons un segment flou 3D avec les deux projections valides (Oxy) (en rouge) et (Oyz) (en vert). Le plan (Oxz) (en bleu foncé) ne forme pas un segment flou 2D valide, ce qui nous donne le segment affiché avec sa boîte englobante 3D (en mauve). Une découpe de la suite de points en plusieurs segments flous aurait été préférable ici. Pour construire les segments qui s'adaptent mieux aux courbes bruitées, nous avons besoin de changer ce critère d'arrêt de la reconnaissance. Plus précisément, pour chaque ajout d'un point discret 3D dans le segment, l'algorithme de reconnaissance vérifie : (i) l'épaisseur des segments flous 2D dans les plans de projection et (ii) si le point appartient au segment flou 2D dans *les trois* plans de projection. Une fois qu'une suite de points 3D est reconnue comme un segment flou, on peut calculer les caractéristiques du segment 3D à partir des deux segments 2D les plus longs en distance euclidienne. Cela a donné de meilleurs résultats de construction comme illustré dans la *Figure 4.24* (b).

Dans la suite, nous présentons deux applications de l'ATC 3D [C1], avec la valeur médiane et le changement du critère d'arrêt, dans des estimateurs géométriques – de la tangente et de la courbure – pour l'étude et l'analyse des propriétés géométriques locales des courbes 3D bruitées.

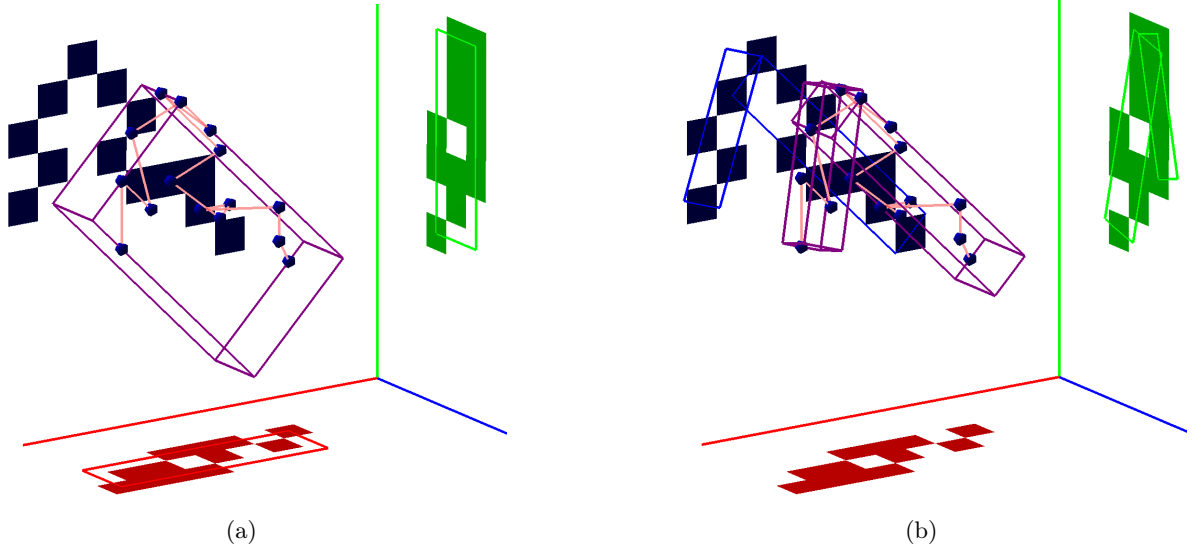


FIGURE 4.24 – Exemple de reconnaissance de segment flou d'épaisseur $\nu = 2$ (en mauve). (a) Résultat de l'algorithme qui ne requiert que deux projections valides : le segment flou 3D final (en mauve) est obtenu avec les segments flous 2D de deux projections valides, à savoir les plans (Oxy) (en rouge) et (Oyz) (en vert). (b) Résultat de l'algorithme qui requiert trois projections valides : le segment flou 3D final (en mauve) est obtenu avec les segments flous 2D les plus longs des projections valides, à savoir les plans (Oxz) (en bleu) et (Oyz) (en vert).

Estimateur de la tangente

Dans [323], un estimateur de la tangente a été proposée pour les courbes discrètes 3D k -connexes ($k=6, 18$ ou 26), appelé λ -MST 3D – une extension de la λ -MST 2D [227] – avec l'utilisation de la couverture tangentielle avec les segments maximaux 3D. Il est montré que l'estimateur proposé a de très bonnes propriétés telles qu'une complexité linéaire en temps de calcul et des résultats précis, mais aussi le même comportement asymptotique, observé expérimentalement, que l'estimateur 2D d'origine.

Soit $C = (C_i)_{i=0}^{i=n}$ une courbe discrète 3D. Afin de déterminer la tangente en chaque point $C_i \in C$, l'estimateur λ -MST 3D [323] le calcul à partir de l'ensemble des segments maximaux qui couvrent C_i . Ces segments peuvent être facilement obtenus grâce à la couverture tangentielle de C . Notons $\mathcal{F}(C_i) = \{M_j | C_i \in M_j\}$ l'ensemble des segments maximaux $M_j = (C_{m_j, n_j}) \subset C$ couvrent C_i , $\mathcal{F}(C_i)$ est appelé *faisceau* de C_i . L'excentricité de C_i par rapport à M_j est sa position relative par rapport aux extrémités de M_j telle que

$$e_j(C_i) = \begin{cases} \frac{|i-m_j|}{L_j} & \text{si } M_j \in \mathcal{F}(C_i), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.9)$$

avec $L_j = |n_j - m_j|$. La tangente est ainsi estimée par la combinaison des directions des segments maximaux pondérés par une fonction λ qui est une fonction continue définie sur $[0, 1]$ et à valeurs dans \mathbb{R}^+ nulle en 0 et 1 et strictement positive ailleurs. Dans [323], la fonction lambda utilisée est : $\lambda = 64x^3(-x^2 + 3x^2 - 3x^1 + 1)$.

Définition 92 (λ -MST 3D [323]). Soit $C = (C_i)_{i=0}^{i=n} \subset \mathbb{Z}^3$ une courbe k -connexe. La direction de la tangente λ -MST 3D d'un point $C_i \in C$ est définie comme une combinaison pondérée des

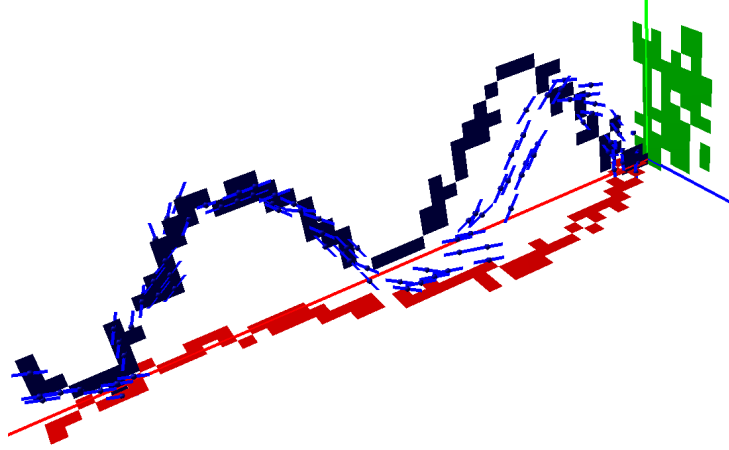


FIGURE 4.25 – Estimateur de la tangente λ -MST 3D définie à partir de l'ATC 3D de la courbe bruitée de la Figure 4.22. Les tangentes estimées sont représentées par les segments bleus en chaque point de la courbe.

vecteurs directeurs t_j des segments maximaux M_j couvrants C_i telle que

$$t(C_i) = \frac{\sum_{M_j \in \mathcal{F}(C_i)} \lambda(e_j(C_i)) \frac{t_j}{\|t_j\|}}{\sum_{M_j \in \mathcal{F}(C_i)} \lambda(e_j(x))} \quad (4.10)$$

Il est aisé d'adapter cet estimateur λ -MST 3D à la structure de l'ATC pour les courbes 3D bruitées. Pour cela, le calcul d'excentricité d'un point $C_i \in C$ par rapport à un segment flou maximal $\mathcal{B}_j = (C_{m_j, n_j}) \subset C$ de la couverture tangentiel adaptative de C devient

$$e_j(C_i) = \begin{cases} \frac{\|C_i - C_{m_j}\|}{L_j} & \text{si } \mathcal{B}_j \in \mathcal{F}(C_i), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.11)$$

avec $L_j = \|C_{n_j} - C_{m_j}\|$ la longueur du segment \mathcal{B}_j et $\mathcal{F}(C_i)$ le faisceau du point C_i de C .

La Figure 4.25 montre le résultat obtenu de l'estimateur λ -MST 3D avec l'ATC sur les courbes bruitées de la Figure 4.22.

Pour évaluer l'estimateur de la tangente λ -MST 3D, nous mesurons l'erreur entre la tangente théorique attendue et celle estimée sur deux courbes 3D : Flower et Astroid. La première courbe est une courbe lisse, tandis que la seconde est une courbe pointue à 4 pointes. Les deux courbes sont définies, respectivement, par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 2 \cos(t) \cos(5t) \\ y = 2 \sin(t) \cos(5t) \\ z = \cos^2(5t) \end{cases} \quad (4.12)$$

et

$$\begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \\ z = t \end{cases} \quad (4.13)$$

Ces courbes continues sont discrétisées en utilisant la classe `NaiveParametricCurveDigitizer3D` de la bibliothèque `DGtal` [2] afin d'obtenir une courbe discrète 26-connexe. Pour générer du bruit, un processus aléatoire avec une distribution uniforme est considéré pour déplacer les points de la courbe discrète d'une unité, ± 1 , suivant un de axes (Ox) , (Oy) et (Oz) . Trente courbes avec du bruit aléatoire sont générées pour la mesure d'erreurs. Un résultat visuel de l'estimateur λ -MST 3D sur les courbes bruitées est montré dans les Figures 4.26 – 4.27. Différentes mesures d'erreurs

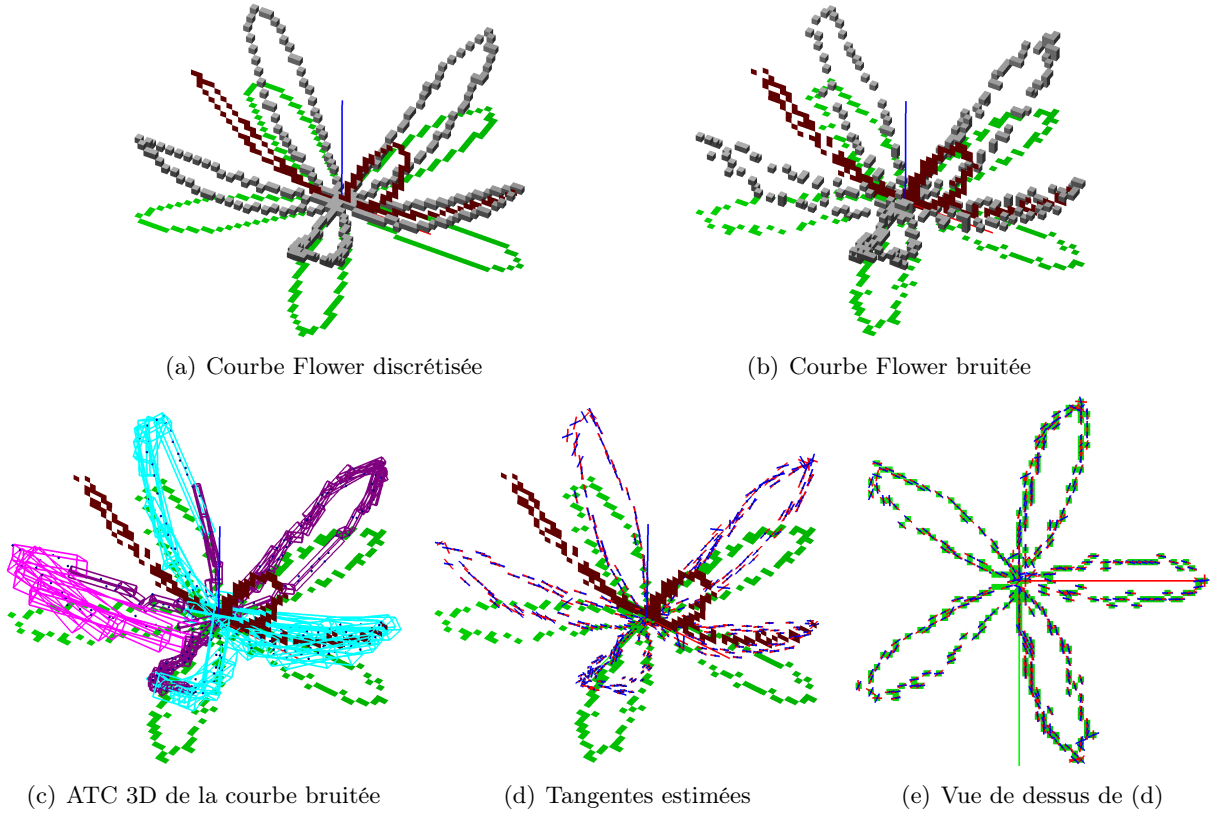


FIGURE 4.26 – Estimateur de la tangente λ -MST 3D : (a) la courbe Flower discrétisée (équation 4.12), (b) une courbe bruitée de (a), (c) l'ATC 3D de la courbe bruitée (b), (d) les tangentes estimées pour chaque point de la courbe par λ -MST 3D avec ATC et (e) vue de dessus des tangentes : les tangentes réelles (segments rouges) et les tangentes estimées (segments bleus).

ont également été effectuées entre la tangente théorique (dédue du point discret le plus proche de la courbe avant le processus aléatoire) et celle estimée – avec λ -MST 3D sur ATC_{MT} et ν -TC – pour les trente courbes générées. Les valeurs moyennes des mesures d'erreurs sur les courbes de tests sont présentées dans le *Tableau 4.4*, et le résultat montre que l'estimation de tangentes avec l'estimateur λ -MST 3D avec l'ATC donne de bons résultats – les meilleurs ou très proche du meilleur – sur des courbes discrètes bruitées.

Estimateur de courbure

Dans le cadre de l'étude des caractéristiques géométriques des courbes discrètes 3D, D. Coeurjolly and S. Svensson [75] ont proposé le principe du calcul de courbure discrète en se reposant sur le cercle osculateur avec les droites naïves 3D. En reprenant cette idée, T-P. Nguyen et I. Debled-Rennesson [290] ont présenté un estimateur de courbure en utilisant les segments flous maximaux 3D. Plus précisément, la méthode calcule, tout d'abord, la couverture tangentielle 3D d'épaisseur ν , avec les segments flous maximaux 3D d'épaisseur ν , pour une courbe d'entrée $C = (C_i)_{i=0}^n$. À partir de la couverture tangentielle, on construit, pour chaque point $C_i \in C$, son faisceau $\mathcal{F}(C_i) = \{M_j = (C_{m_j}, n_j) \subset C \mid C_i \in M_j\}$, avec M_j un segment flou maximal 3D d'épaisseur ν de C . Notons C_{m_l} (resp. C_{n_r}) le point le plus à gauche (resp. à droite) de $\mathcal{F}(C_i)$. La courbure du point C_i est estimée grâce au rayon $R_\nu(C_i)$ du cercle circonscrit du triangle formé

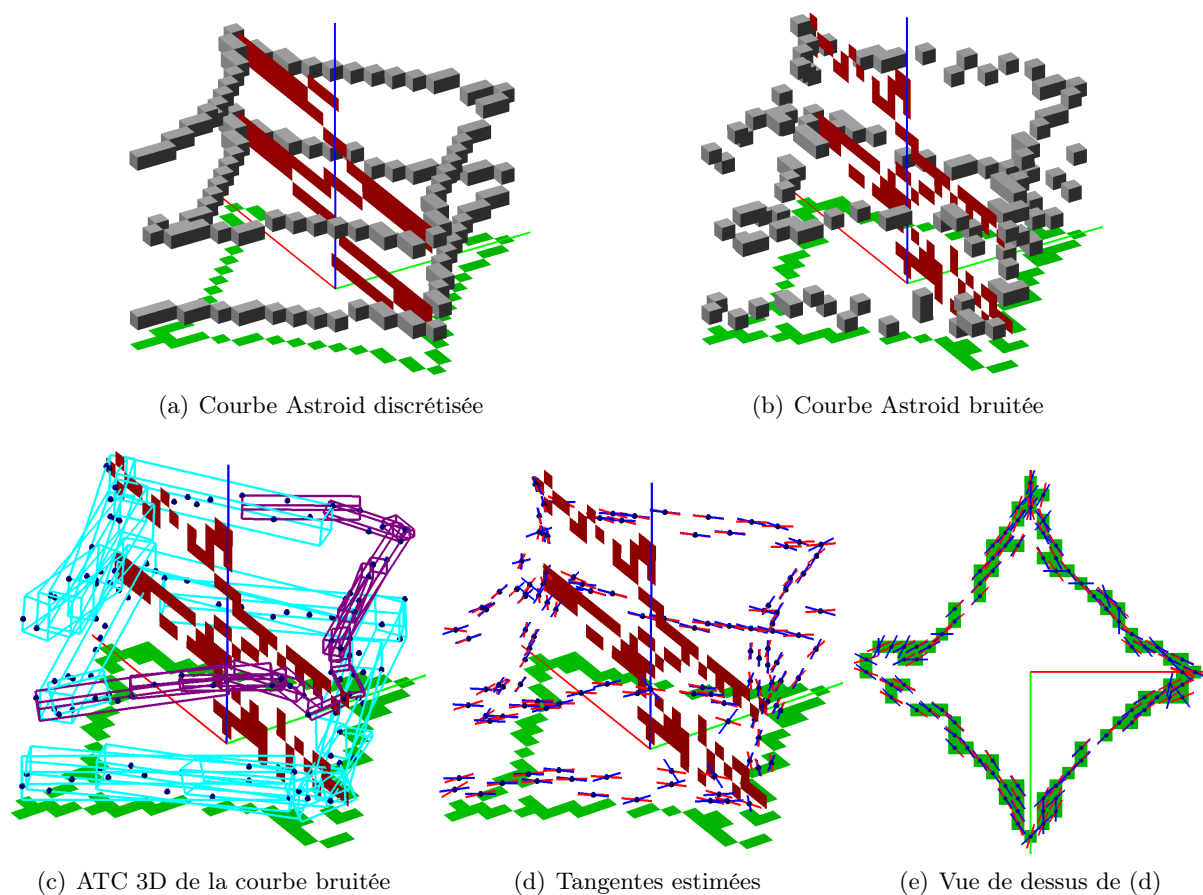


FIGURE 4.27 – Estimateur de la tangente λ -MST 3D : (a) la courbe Astroid discrétisée (équation 4.13), (b) une courbe bruitée de (a), (c) l'ATC 3D de la courbe bruitée (b), (d) les tangentes estimées pour chaque point de la courbe par λ -MST 3D avec ATC et (e) vue de dessus des tangentes : les tangentes réelles (segments rouges) et les tangentes estimées (segments bleus).

Courbes		Erreur des tangentes estimées					
		ATC_{MT}	1-TC	2-TC	3-TC	4-TC	5-TC
Flower	Erreur moyenne	0.220012	0.369261	0.222374	0.283572	0.320565	0.343145
	Écart-type	0.214158	0.250986	0.193687	0.211761	0.225935	0.23631
	Erreur max	1.26362	1.26657	1.25397	1.29662	1.29617	1.30408
	Erreur min	0.007598	0.009127	0.006171	0.009534	0.01173	0.012831
Astroid	Erreur moyenne	0.293318	0.379116	0.295132	0.302137	0.309408	0.344594
	Écart-type	0.216065	0.285028	0.234184	0.222423	0.231388	0.24023
	Erreur max	1.06834	1.22489	1.13035	1.06979	1.04051	1.05925
	Erreur min	0.019332	0.032144	0.030774	0.019132	0.021839	0.024387

TABLE 4.4 – Mesure d'erreurs de l'estimateur de la tangente λ -MST sur des courbes de Flower (équation 4.12) et d'Astroid (équation 4.13) discrétisées bruitées avec différentes couvertures tangentielles. Sur les courbes d'entrées, il y a 5 niveaux de bruits détectés qui varient de 1 à 5.

par trois points C_{m_l}, C_i et C_{n_r} :

$$R_\nu(C_i) = \frac{s_1 s_2 s_3}{\sqrt{(s_1 + s_2 + s_3)(s_1 + s_2 - s_3)(s_1 - s_2 + s_3)(s_2 + s_3 - s_1)}} \quad (4.14)$$

avec $s_1 = \|\overrightarrow{C_i C_{n_r}}\|$, $s_2 = \|\overrightarrow{C_i C_{m_l}}\|$ et $s_3 = \|\overrightarrow{C_{m_l} C_{n_r}}\|$. La courbure de C_i est alors calculée par :

$$c_\nu(C_i) = \frac{s}{R_\nu(C_i)} \quad (4.15)$$

où $s = \text{signe}(\det(\overrightarrow{C_i C_{n_r}}, \overrightarrow{C_i C_{m_l}}))$ indiquant la concavité ou la convexité de la courbe. Il est montré dans [290] que cette méthode a une complexité en $O(n \log^2 n)$ avec n le nombre de points de C .

Cet estimateur de la courbure peut facilement être adapté à notre structure d'ATC pour les courbes irrégulièrement bruitées. La différence est que, dans notre cas, le faisceau associé à un point de la courbe contient des segments flous maximaux d'épaisseurs différentes. Nous utilisons les trente courbes de la section précédente en ajoutant du bruit aléatoire pour la mesure d'erreurs. La valeur moyenne des mesures d'erreurs sur les courbes de tests sont présentées dans le *Tableau 4.5* avec les meilleurs scores en gras. L'estimateur avec l'ATC ne donne pas toujours de meilleurs résultats mais nous obtenons des résultats assez précis de courbures avec l'approche proposée.

Courbes		Erreur des courbures estimées					
		ATC_{MT}	1-TC	2-TC	3-TC	4-TC	5-TC
Flower	Erreur moyenne	0.042239	0.192657	0.043795	0.041935	0.045646	0.048014
	Écart-type	0.118326	0.173881	0.108671	0.125055	0.130469	0.131886
	Erreur max	1.05404	1.906708	0.977172	1.08214	1.11167	1.11805
	Erreur min	0.000042	0.000561	0.000068	0.000039	0.000044	0.000043
Astroid	Erreur moyenne	0.026844	0.202735	0.043616	0.024496	0.024548	0.028414
	Écart-type	0.015149	0.176366	0.058435	0.016437	0.016609	0.017491
	Erreur max	0.439742	0.828724	0.349773	0.08767	0.078456	0.078618
	Erreur min	0.000548	0.001191	0.000267	0.00041	0.000371	0.000512

TABLE 4.5 – Mesure d'erreurs de l'estimateur de courbures sur des courbes de Flower (*équation 4.12*) et d'Astroid (*équation 4.13*) bruitées avec différentes couvertures tangentielles.

4.4 Applications pour l'analyse et la représentation de formes

L'ensemble des segments flous maximaux dans la structure de couverture tangentielle fournit des informations importantes sur la structure géométrique de la courbe étudiée. En plus des estimateurs géométriques pour l'analyse et l'étude des courbes bruitées présentés dans la section précédente, nous cherchons aussi à exploiter ces structures dans le contexte des applications d'analyse d'images, d'appariement de formes, ou de représentation d'objets.

Dans la suite, nous allons montrer les premières applications que l'on peut directement réaliser en utilisant la structure de couverture tangentielle. Plus précisément, la *Section 4.4.1* présente la détection des points dominants de contours de formes extraites d'images numériques. Un processus de simplification est appliqué sur la courbe polygonale obtenue par des points dominants afin d'avoir une représentation compacte de la forme. Cette représentation est ensuite utilisée dans la *Section 4.4.2* pour la décomposition d'une courbe en arcs de cercles et segments de droites (*Section 4.4.3*). Ensuite, nous montrons deux autres applications liées à une autre exploitation du résultat de la simplification polygonale pour la vectorisation d'images en niveaux de gris (*Section 4.4.4*) et la reconnaissance des gestes de la main (*Section 4.4.5*).

4.4.1 Détection des points dominants

Dans une étude sur la perception visuelle, F. Attneave dans [24] a mentionné que la stimulation visuelle est généralement concentrée sur le contour (*i.e.* regions dont la couleur/intensité change brusquement) et davantage concentrée aux points du contour où sa direction change le plus rapidement. Ces points sont appelés *points dominants* (dominant points (DP) en anglais).

Définition 93 (Point dominant). *Les points dominants d'une courbe discrète sont définis comme ceux ayant la courbure maximale sur la courbe.*

Ces points représentent des informations riches qui sont suffisantes pour modéliser une courbe. Par conséquent, les points dominants sont considérés comme des points caractéristiques et représentatifs du contour de l'objet dans des images numériques, parce qu'ils préservent les caractéristiques significatives des courbes discrètes. Plus spécifiquement, ils jouent un rôle essentiel dans l'approximation des courbes, la reconnaissance et la correspondance d'images et également dans d'autres domaines de vision par ordinateur.

À partir d'une courbe discrète extraite de l'objet dans l'image, les méthodes de détection de points dominants choisissent des points de la courbe pour la représenter efficacement en utilisant moins de points. La courbe est alors représentée par la courbe polygonale des points dominants, obtenu en reliant les points dominants (les sommets) adjacents. De plus, les points dominants peuvent aussi être utilisés pour segmenter le contour.

De nombreux travaux ont été menés concernant la détection de points dominants dans lesquels plusieurs problèmes ont été identifiés : l'efficacité en temps de calcul, le nombre de paramètres, la robustesse vis-à-vis du bruit ou de la transformation d'images, *etc.*

Dans la littérature, un grand nombre d'algorithmes de détection de points dominants a été proposé. Ces méthodes utilisent différents paradigmes de programmation comme la programmation dynamique [139, 213, 313], d'autres utilisent la division [110, 338] et la fusion [237]. D'autres méthodes encore considèrent les segments de droites discrètes [38, 295], ou la courbure et la convexité [409, 340, 436]. (Voir [327] pour plus de détails.)

La plupart des méthodes mentionnées considèrent une notion de *région de support* (region of support (ROS) en anglais) [409, 263, 326, 340, 352] à chaque point de la courbe d'entrée C . En termes simples, une région de support d'un point de C est définie via ses points voisins sur C . Ensuite, pour chaque point de C , une mesure de courbure est calculée en relation avec sa région de support. Les points dits non dominants sont ceux avec les valeurs de mesure les plus basses, les points dominants sont ceux de courbure localement maximale. Dans ce contexte, il existe beaucoup de travaux qui utilisent une approximation de la courbure [409, 340, 436] pour déterminer les points dominants. D'autres méthodes utilisent le principe de la suppression des points de rupture [110, 139, 263, 265, 326, 338] pour obtenir des points dominants.

En utilisant les deux structures – la ν -couverture tangentielle (ν -TC) et la couverture tangentielle adaptative (ATC) – présentées dans la Section 4.3, nous présentons ci-dessous deux méthodes de détection des points dominants. En particulier, ces structures, par définition, permettent de traiter les courbes bruitées grâce à la décomposition en segments flous d'épaisseur fixée ou variée.

Points dominants avec la ν -couverture tangentielle

La ν -TC fournit des informations sur la structure géométrique de la courbe étudiée C . Dans [295], Nguyen *et al.* ont proposé un algorithme de détection des points dominants qui repose sur la ν -TC. En particulier, la valeur d'épaisseur ν des segments flous maximaux permet de travailler

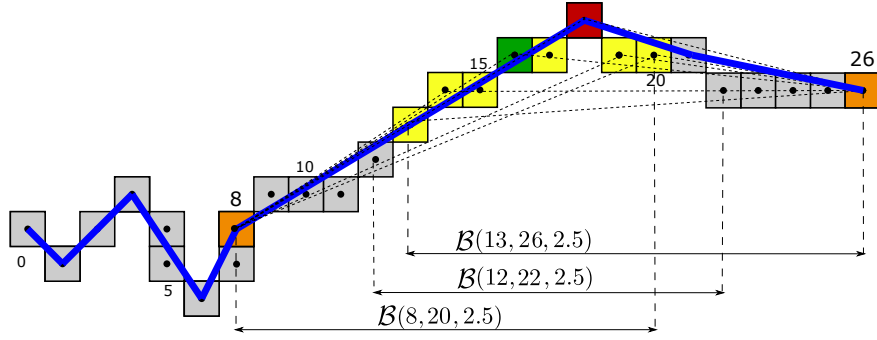


FIGURE 4.28 – Exemple de la détection de points dominants sur une courbe C avec la 2.5-TC. Considérons la partie $C_{13,20}$ dont la zone commune (en jaune) est $C_{11,16}$, le point au milieu C_{16} (en vert) de cette zone est détecté comme point dominant suivant la méthode de Nguyen [295], le point C_{18} (en rouge) est le point ayant la plus petite mesure d'angle par rapport aux deux extrémités (en orange) et détecté comme point dominant par l'algorithme modifié. La suite des points dominants de C forme une ligne polygonale (en bleu).

à différentes échelles et de considérer le bruit éventuellement présent dans C . La méthode est invariante par choix du point de départ et fonctionne avec des courbes discrètes pouvant être bruitées ou non connexes. Cependant à la fin de la méthode, le choix des points dominants est fait par une stratégie heuristique. En s'inspirant de cette méthode, nous proposons ci-dessous une amélioration pour qu'elle soit non heuristique, avec un choix plus efficace de points dominants en considérant une simple mesure d'angle.

Nous rappelons d'abord la méthode proposée dans [295]. L'idée principale de la méthode est que les points dominants d'une courbe discrète C sont caractérisés par des segments flous maximaux successifs d'épaisseur ν de C qui ont au moins un point en commun. Plus précisément, en étudiant la relation entre les points dominants et la suite des segments flous maximaux, les résultats suivants ont été prouvés dans [295].

Proposition 94 ([295]). *Les points dominants de la courbe sont dans une zone commune de segments flous maximaux successifs.*

Proposition 95 ([295]). *La plus petite zone commune des segments flous successifs d'épaisseur ν , dont les pentes sont toutes croissantes ou décroissantes, contient un candidat comme point dominant.*

Propriété 96 ([295]). *Un segment flou contient au plus deux points dominants.*

Sur la base de ces résultats, l'algorithme proposé dans [295] consiste à trouver la plus petite zone commune qui contient les candidats de point dominant. Par une stratégie heuristique, le point dominant est identifié comme le point au milieu de cette zone.

La Figure 4.28 montre une illustration de la méthode pour la courbe C en utilisant la ν -TC avec $\nu = 2.5$. Considérons la zone commune $C_{13,20}$ de C déterminée par les trois segments flous maximaux $B(8, 20, 2.5)$, $B(12, 22, 2.5)$ et $B(13, 26, 2.5)$ de ν -TC. Le point central C_{16} est alors identifié comme le point dominant dans cette zone commune $C_{11,16}$.

Puisque le but de la détection des points dominants est de détecter des points significatifs avec des extrema de courbure, nous proposons une nouvelle stratégie de prise de décision de point dominant dans les zones communes. Pour cela, nous utilisons une mesure simple, sous forme de pseudo-courbure, estimée pour chaque point situé dans les régions d'intérêt. Inspiré par la mesure

Algorithme 3 : Détection des points dominants avec la mesure d'angle.

Entrées : $C = (C_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ une courbe discrète et ν l'épaisseur des segments flous
Sortie : \mathcal{D} l'ensemble des points dominants détectés

```

1 Début
2   Construire  $\mathcal{B}_\nu = \{\mathcal{B}(B_i, E_i, \nu)\}_{i=0}^{m-1}$  //  $\nu$ -TC de  $C$ 
3    $q = 0, p = 1, \mathcal{D} = \emptyset$ 
4   Tant que  $p < m$  faire // Calculer les zones communes des segments flous
5     Tant que  $E_q > B_p$  faire
6        $p++$ 
7     FinTantque
8     /* Ajouter le point de plus petit angle dans l'ensemble  $\mathcal{D}$  */
9      $\mathcal{D} = \mathcal{D} \cup \min\{\text{Angle}(C_{B_q}, C_i, C_{E_{p-1}}) \mid i \in [B_{p-1}, E_q]\}$ 
10     $q = p - 1$ 
11  FinTantque
12 Fin
```

k -cosine proposée dans [352], nous utilisons une mesure d'angle adaptée à la décomposition en segments flous d'épaisseur ν de la courbe d'entrée. Plus précisément, il s'agit de l'angle entre le point considéré et les deux extrémités gauche et droite des segments flous maximaux gauche et droit qui sont impliqués dans la localisation de la zone commune étudiée et passant par le point. Il faut mentionner que cette mesure d'angle n'est généralement pas symétrique en ROS (Region Of Support), contrairement à la mesure k -cosine.

Définition 97. Soit $C = (C_i)_{i=0}^{i=n-1}$ une courbe discrète, $ATC(C) = (\mathcal{B}_j)_{j=0}^{j=m-1}$ la couverture tangentielle adaptative de C . Soit $\mathcal{F}(k) = \{\mathcal{B}_i = (B_i, E_i, \cdot) \in ATC(C) \mid C_k \in \mathcal{B}_i\}$ le faisceau du point $C_k \in C$. Notons B_l (resp. E_r) le point le plus à gauche (resp. droite) de $\mathcal{F}(k)$, la **mesure d'angle** du point C_k est définie par

$$\text{angle}(C_k) = \angle(B_l C_k E_r).$$

Plus la mesure d'angle est petit, plus la courbure est grande. Par conséquent, le point dominant est identifié comme le point, dans la zone commune, ayant une mesure d'angle locale minimale.

Un exemple est donné sur la Figure 4.28. Pour la même zone commune $C_{13,20}$, l'angle des points de C_{13} à C_{20} par rapport aux deux extrémités C_8 et C_{26} sont respectivement 153.43° , 146.3° , 150.26° , 142.28° , 144.6° , **135°** , 147.43° et 147.93° . Le point C_{18} est celui ayant la plus petite mesure d'angle, il est donc identifié comme le point dominant de $C_{13,20}$.

La méthode modifiée est donnée dans l'Algorithme 3. La complexité de la méthode est en $\mathcal{O}(n \log n)$ qui est identique à celle de [295]. Elle dépend de la complexité pour calculer ν -TC d'une courbe C de n points qui est $\mathcal{O}(n \log n)$ [128].

La Figure 4.29 montre un aperçu de la comparaison avec la méthode de Nguyen [295] pour $\nu = 1.5$. La différence entre les deux algorithmes est mise en évidence par les boîtes noires sur la figure. Les points verts et rouges sont respectivement des points dominants détectés par l'algorithme de Nguyen [295] et l'algorithme modifié. Les points bleus sont des points candidats en tant que points dominants dans les régions d'intérêt (zones communes). Les segments en vert (resp. en rouge) sont l'approximation polygonale à partir des points dominants détectés par l'algorithme de Nguyen [295] (resp. Algorithme 3). On peut observer que la sélection du point au milieu de la zone commune n'est pas toujours une stratégie pertinente, en particulier dans les zones de grande courbure. D'autres résultats avec des détails sur les algorithmes sont présents dans [J6], [C25].

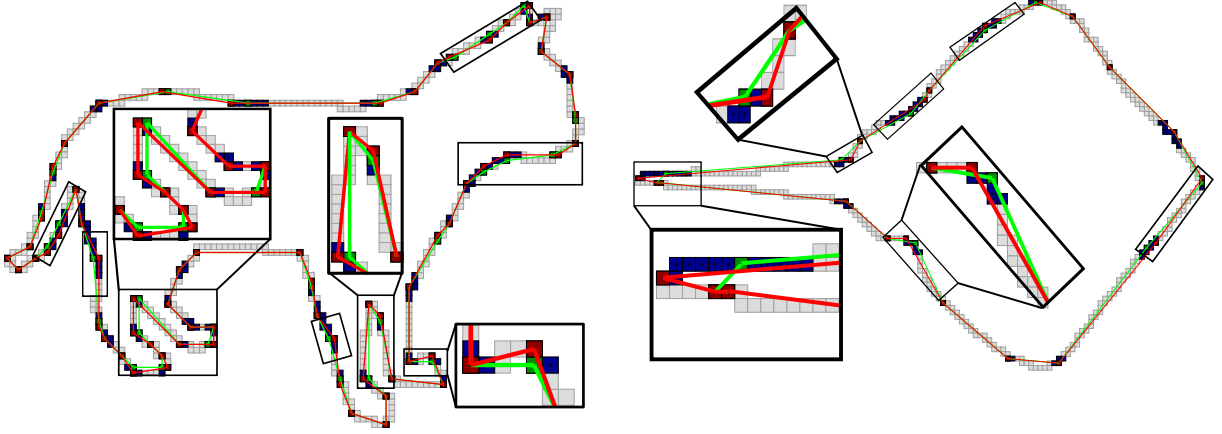


FIGURE 4.29 – Améliorations par rapport à la méthode de Nguyen [295]. En vert, le résultat par [295] et en rouge par l'Algorithme 3.

Points dominants avec couverture tangentielle adaptative

Les approches présentées précédemment nécessitent de connaître la valeur du paramètre ν pour l'épaisseur du segment flou maximal de la courbe C . Plus précisément, si ν est petite, l'algorithme capte plus de détails de C , y compris le bruit, et si ν est très grande, elle permet une détection de point dominant plus lisse et réduit l'influence du bruit le long de la courbe. Pour les courbes avec un bruit uniforme et régulièrement distribué, il est proposé dans [296] d'utiliser la moyenne des valeurs d'épaisseur significatives pour ν , noté $\bar{\eta}$ -TC. Dans le cas de courbes *irrégulièrement* bruitées, alors nous pouvons utiliser l'ATC pour la détection des points dominants. En particulier, en partant de la *Propriété* 87, la zone commune des segments flous composant l'ATC peut être détectée en vérifiant simplement leurs extrémités. La méthode reste la même que dans l'Algorithme 3.

La Figure 4.30 illustre la détection des points dominants avec l'ATC. En considérant les segments flous maximaux $\mathcal{B}(C_{69}, C_{189}, 2)$, $\mathcal{B}(C_{164}, C_{191}, 2)$ et $\mathcal{B}(C_{186}, C_{235}, 3)$, la zone commune déterminée par les trois segments contient quatre points C_{186} , C_{187} , C_{188} et C_{189} (points verts et rouges dans le zoom). Les extrémités gauche et droite de la zone commune sont respectivement C_{69} et C_{235} . Les angles entre chaque point de la zone commune et les deux extrémités sont respectivement de 102.7° , 101.2° , **99.7°** et 100.8° . Le point dominant est celui ayant la plus petite mesure d'angle donc C_{188} (point rouge sur la figure).

Afin de comparer la méthode de détection avec l'ATC qui est sans paramètre, nous considérons dans des expérimentations la $\bar{\eta}$ -TC. La Figure 4.31 donne un aperçu de ce que pourrait donner les deux approches. Les images (b) et (c) sont respectivement les deux couvertures tangentielles $\bar{\eta}$ -TC et ATC_{MT} . Les points dominants détectés avec ces couvertures tangentielles sont superposés dans l'image (d) pour faciliter la comparaison. On peut voir que, dans les zones non bruitées, les deux méthodes donnent des résultats très similaires, la différence se trouvant surtout dans les zones *très* bruitées de la courbe. En particulier, l'ATC permet de mieux s'adapter et de trouver correctement les coins du pentagone, tandis que $\bar{\eta}$ -TC produit une décomposition très proche de la courbe bruitée et détecte trop de points dominants dans les zones bruitées. La couverture tangentielle moyenne $\bar{\eta}$ -TC n'est pas toujours une stratégie pertinente, en particulier pour les courbes irrégulièrement bruitées. Cela est dû au fait que la $\bar{\eta}$ -TC ne capte pas le bruit local sur la courbe, contrairement à ATC_{MT} .

D'autres résultats sont disponibles dans les articles associés [J7], [C24]. L'implémentation

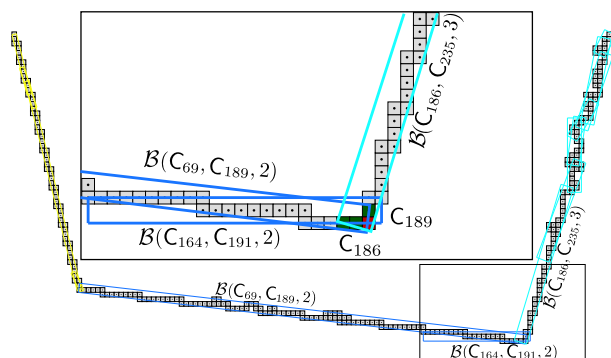


FIGURE 4.30 – Illustration de l'algorithme de détection des points dominants avec la couverture tangentielle adaptative dans la Figure 4.14.

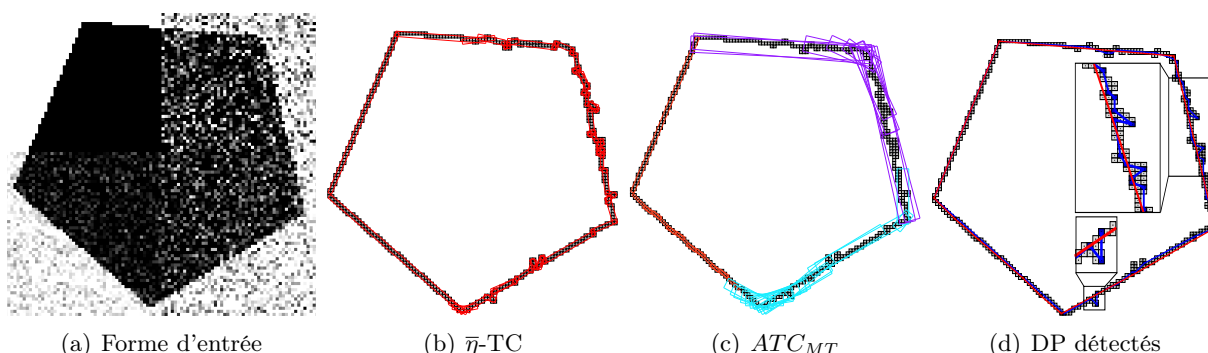


FIGURE 4.31 – Détection des points dominants avec $\bar{\eta}$ -TC (b) et ATC_{MT} (c). Le résultat de la détection de la forme d'entrée (a) est affiché dans (d) avec la courbe polygonale des points dominants bleue (resp. rouge) obtenue par $\bar{\eta}$ -TC (resp. ATC_{MT}).

de la méthode est disponible sur *GitHub*³ et une démonstration en ligne est donnée pour tester la méthode avec n'importe quelle image à l'adresse suivante :

https://ipol-geometryhost.loria.fr/~phuc/ipol_demo/ATC_IPOLDemo/

4.4.2 Représentation polygonale

La représentation polygonale d'objets est très souvent utilisée dans des applications de classification et de reconnaissance de formes. Cette représentation a des avantages par rapport au contour complet d'objets qui contient généralement des données redondantes. Son objectif principal est de réduire la quantité d'informations nécessaires pour représenter un objet sans dévaluer les données de la forme d'origine.

Dans la littérature, l'approximation d'un contour par des segments de droites est aussi connue sous le nom de *simplification polygonale* ou d'*approximation polygonale*. Plus précisément, une approximation polygonale d'une courbe C de n points est définie comme une sous-séquence S de k points de C (en général, $k \ll n$) et la courbe polygonale résultante P est obtenu en connectant les points consécutifs de S . L'approximation polygonale se retrouve dans plusieurs domaines d'applications comme l'analyse d'images médicales [240], la reconnaissance de formes pour les

3. <https://github.com/ngophuc/DominantPointDetection>

robots industriels [401], le pré-traitement des méthodes de vision par ordinateur [394, 432], ou de manière plus générale la détection d'objets et la reconnaissance de formes [221, 281, 407]. Dans ce contexte, plusieurs travaux ont été proposés pour résoudre ce problème qui est considéré souvent comme un problème d'optimisation, par exemple l'optimisation du nombre de segments formant la courbe polygonale (appelé min-#) [113, 317, 369, 421], l'optimisation de la distorsion associée à une approximation polygonale avec un nombre de segments fixé (appelé min- ϵ) [180, 313, 365, 443], ou les algorithmes génétiques [155, 181, 250, 367, 446].

Suivant la détection des points dominants présentée dans la section précédente, en joignant les segments de droites délimités par deux points dominants consécutifs, on obtient une courbe polygonale $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_i)_{0 \leq i \leq m-1}$ représentant la courbe discrète C . Cependant, en raison de la nature des segments flous définis dans la couverture tangentielle de C , \mathcal{D} contient généralement des sommets très proches les uns des autres, ce qui est probablement indésirable pour la simplification polygonale. Cela conduit à un excès de points dominants. La courbe polygonale induite par de tels points n'est pas toujours une solution acceptable de la simplification, où le but est de réduire la quantité d'informations nécessaires pour stocker une courbe, afin d'améliorer son traitement.

Afin d'obtenir une compression élevée de la courbe polygonale d'approximation et une représentation plus efficace de C , nous construisons la courbe $P = (P_i)_{0 \leq i \leq k-1}$ à partir de \mathcal{D} en éliminant certains de ses sommets. Pour cela, on associe à chaque sommet de \mathcal{D} un poids indiquant son importance par rapport à une courbe polygonale d'approximation C . Un tel poids doit : (1) être lié à certains critères d'erreur d'approximation de la courbe polygonale obtenue, et (2) ne pas provoquer de calculs coûteux.

Plusieurs critères peuvent être examinés lors de la simplification. Nous avons d'abord voulu supprimer les sommets *presque* linéaires de la courbe polygonale \mathcal{D} . Ainsi nous considérons la mesure d'angle du sommet par rapport à ses deux voisins sur \mathcal{D} , et supprimons les sommets dont l'angle approche π (c'est-à-dire les zones assez plates). Une autre critère est l'erreur d'approximation. Pour cela, nous utilisons le critère de la somme intégrale des erreurs quadratiques (integral sum of square errors (ISSE) en anglais) qui décrit l'erreur d'approximation de la courbe et permet d'évaluer à quel point de la courbe polygonale approchée est similaire à la courbe d'entrée C . En particulier, un ISSE plus petit signifie une meilleure description de la courbe par la courbe polygonale obtenue. Cette évaluation de l'erreur est adaptée à notre critère de poids associé aux points dominants puisque : (1) nous voudrions éliminer les points qui affectent le moins possible l'erreur (une petite valeur d'ISSE), et (2) l'ISSE peut être calculée autour d'un point en utilisant ses deux points dominants voisins. Plus précisément, soit \mathcal{D}_i un point dominant, v_{i-1} et v_{i+1} sont respectivement les indices sur C des deux points dominants voisins \mathcal{D}_{i-1} et \mathcal{D}_{i+1} de \mathcal{D}_i , nous avons donc

$$ISSE(\mathcal{D}_{i-1}, \mathcal{D}_i, \mathcal{D}_{i+1}) = \sum_{j=v_{i-1}}^{v_{i+1}} d^2(C_j, [\mathcal{D}_{i-1}\mathcal{D}_{i+1}]), \quad (4.16)$$

où $d(P, [AB])$ est la distance du point P au segment $[AB]$.

En d'autres termes, la valeur de l'ISSE associée à \mathcal{D}_i indique l'erreur d'approximation de la courbe par la courbe polygonale avant et après la suppression de \mathcal{D}_i , il ne diffère que de la parité liée à \mathcal{D}_i et ses deux voisins. Cette indication d'ISSE caractérise l'importance du point ; plus la valeur est grande, plus le point est important.

Une illustration est donnée sur la *Figure 4.32*. Nous remarquons que, parfois, le point dominant peut avoir une petite ISSE, mais en ce qui concerne ses voisins, en particulier la relation angulaire, il est peut-être plus important que les autres. Par conséquent, cet angle avec les voisins joue aussi un rôle important dans la décision de supprimer un point. Cela conduit à une prise en compte du poids associé à chaque point dominant détecté qui n'implique pas seulement l'ISSE

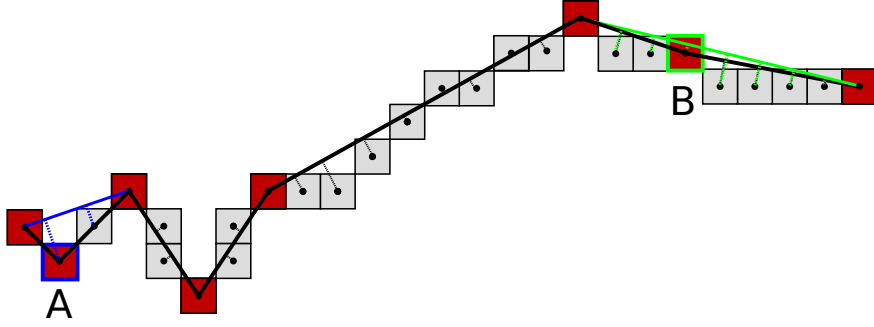


FIGURE 4.32 – Exemple de calcul du poids pour les points dominants dans la Figure 4.28. Le poids associé au point A et B : $score(A) \approx 2/1.57^2 \approx 0.812$ et $score(B) \approx 2.59/3.02^2 \approx 0.284$.

mais aussi l'angle par rapport à ses deux voisins. Pour une équivalence de puissance, le score est calculé pour chaque \mathcal{D}_i comme

$$score(\mathcal{D}_i) = \frac{ISSE(\mathcal{D}_{i-1}, \mathcal{D}_i, \mathcal{D}_{i+1})}{Angle^2(\mathcal{D}_{i-1}, \mathcal{D}_i, \mathcal{D}_{i+1})} \quad (4.17)$$

où $Angle(A, B, C)$ est l'angle entre trois points A, B et C . En d'autres termes, le poids associé à chaque point implique à la fois les critères d'ISSE et d'angle.

Un exemple de calcul de poids est donné sur la Figure 4.32. Les points gris sont ceux de la courbe C . Les points rouges représentent les points dominants détectés par l'Algorithme 3. Les segments noirs reliant les points dominants \mathcal{D} représentent une courbe polygonale approchée de C , alors que les segments pointillés sont des segments perpendiculaires des points de C aux segments de \mathcal{D} , la somme de ces segments définit l'ISSE (équation (4.16)). Pour le point A en bleu (ou B en vert), la suppression de ce point conduit à une modification locale de \mathcal{D} , et donc de l'ISSE. On remarque que l'ISSE de A est plus petit que celle de B , mais selon les voisins et suivant l'angle, A est plus important que B . En effet, de l'équation (4.17), nous avons $score(A) = 0.812$ et $score(B) = 0.284$.

Une question importante lors de la simplification est : “combien de points doit-on supprimer pour avoir une représentation optimale de la courbe ?”

Pour répondre à cette question, nous avons mis en place deux stratégies :

- (i) La première consiste à fixer le nombre m de points désirés sur la courbe polygonale approchée, le processus de simplification est donc effectué en enlevant un à un les points dominants de poids faibles jusqu'à atteindre m .
- (ii) La deuxième consiste à appliquer une simplification automatique sur les points dominants détectés en fonction d'un critère d'erreur FOM_2 . La simplification est effectuée en supprimant le point dominant de poids le plus faible jusqu'à ce qu'on obtienne un minimum local de la fonction objectif FOM_2 .

Les deux processus sont assez similaires, cependant la deuxième – l'approche automatique – est plus intéressante. Tout d'abord, nous devons rappeler la définition de la figure de mérite (figure of merit (FOM) en anglais). Sarkar a proposé dans [368] un critère d'évaluation de la simplification polygonale $P = (P_i)_{0 \leq i \leq k-1}$ d'une courbe $C = (C_i)_{0 \leq i \leq n-1}$. Le critère est défini par le ratio entre le taux de compression (compression ration (CR) en anglais) et l'ISSE.

$$FOM = \frac{CR}{ISSE} \text{ avec } CR = \frac{|C|}{|P|} = \frac{n}{k} \quad (4.18)$$

Ce critère est un compromis entre l'erreur d'approximation (ISSE) et le bénéfice de la réduction de données (CR). Cependant, plusieurs auteurs [212, 264, 292, 355] montrent que le critère FOM

Algorithme 4 : Simplification polygonale automatique à partir des points dominants.

Entrées : C une courbe discrète et $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_i)_{0 \leq i \leq m-1}$ la suite de points dominants
Sortie : P la courbe polygonale simplifiée

```

1 Début
2    $P = \mathcal{D}$  // Initialiser la courbe polygonale avec les points dominants
    $P = (P_i)_{0 \leq i \leq m-1}$ 
   /* Calculer le poids associé à chaque point  $P_i$  de  $P$  */
3   Pour  $i = 0$  à  $m - 1$  faire
4      $score(P_i) = ISSE(P_{i-1}, P_i, P_{i+1}) / Angle^2(P_{i-1}, P_i, P_{i+1})$ 
5   FinPour
   /* Simplifier  $P$  par rapport au critère de  $FOM_2$  */
6    $F = FOM_2(P)$ 
7   Répéter
8      $F' = F$ 
9      $P_i = \min\{score(P_j) \mid P_j \in P\}$  // Chercher le point de plus petit score
   /* Mettre à jour les scores des points voisins */
10     $score(P_{i-1}) = ISSE(P_{i-2}, P_{i-1}, P_{i+1}) / Angle^2(P_{i-2}, P_{i-1}, P_{i+1})$ 
11     $score(P_{i+1}) = ISSE(P_{i-1}, P_{i+1}, P_{i+2}) / Angle^2(P_{i-1}, P_{i+1}, P_{i+2})$ 
12     $P = P \setminus \{P_i\}$ 
13     $F = FOM_2(P)$ 
14  Jusqu'à  $F < F'$ 
15 Fin

```

n'est pas suffisant pour un équilibre entre l'ISSE et le CR. Sur plusieurs courbes testées, il est observé que l'ISSE change plus rapidement par rapport au CR. Marji *et al.* [264] ont proposé une version modifiée du critère de Sarkar :

$$FOM_p = \frac{(CR)^p}{ISSE} \quad (4.19)$$

où p est utilisé pour réduire le déséquilibre entre le numérateur et le dénominateur. Les valeurs utilisées le plus souvent pour p sont 1, 2 et 3. Dans un travail récent, Poyato *et al.* [326] ont montré que la meilleure performance est obtenue avec $p = 2$ parce que le numérateur et le dénominateur sont de puissance égale. C'est par rapport à cette étude que nous considérons FOM_2 comme fonction objectif dans le processus d'optimisation (maximisation) de la simplification polygonale. Le processus est résumé dans l'Algorithme 4.

La Figure 4.33 illustre quelques résultats obtenus avec l'Algorithme 4. D'autres résultats et comparaisons sont disponibles dans les articles [J6], [C14] et l'implémentation est disponible sur *GitHub*⁴. Une démonstration en ligne est aussi donnée pour d'autres tests à l'adresse suivante :

https://ipol-geometryhost.loria.fr/~phuc/ipol_demo/PAMATC_IPOLDemo/

Dans la suite de cette section, nous montrons les premières applications que l'on peut directement réaliser en exploitant la représentation polygonale d'une forme présentée ci-dessus.

4.4.3 Décomposition de courbe en arcs et segments

L'extraction de caractéristiques significatives du contour des images est un problème important dans la vision par ordinateur. De nombreuses méthodes existantes utilisent des points critiques ou des segments de droites comme caractéristiques significatives pour construire des

4. <https://github.com/ngophuc/ModifiedAdaptiveTagentialCover>

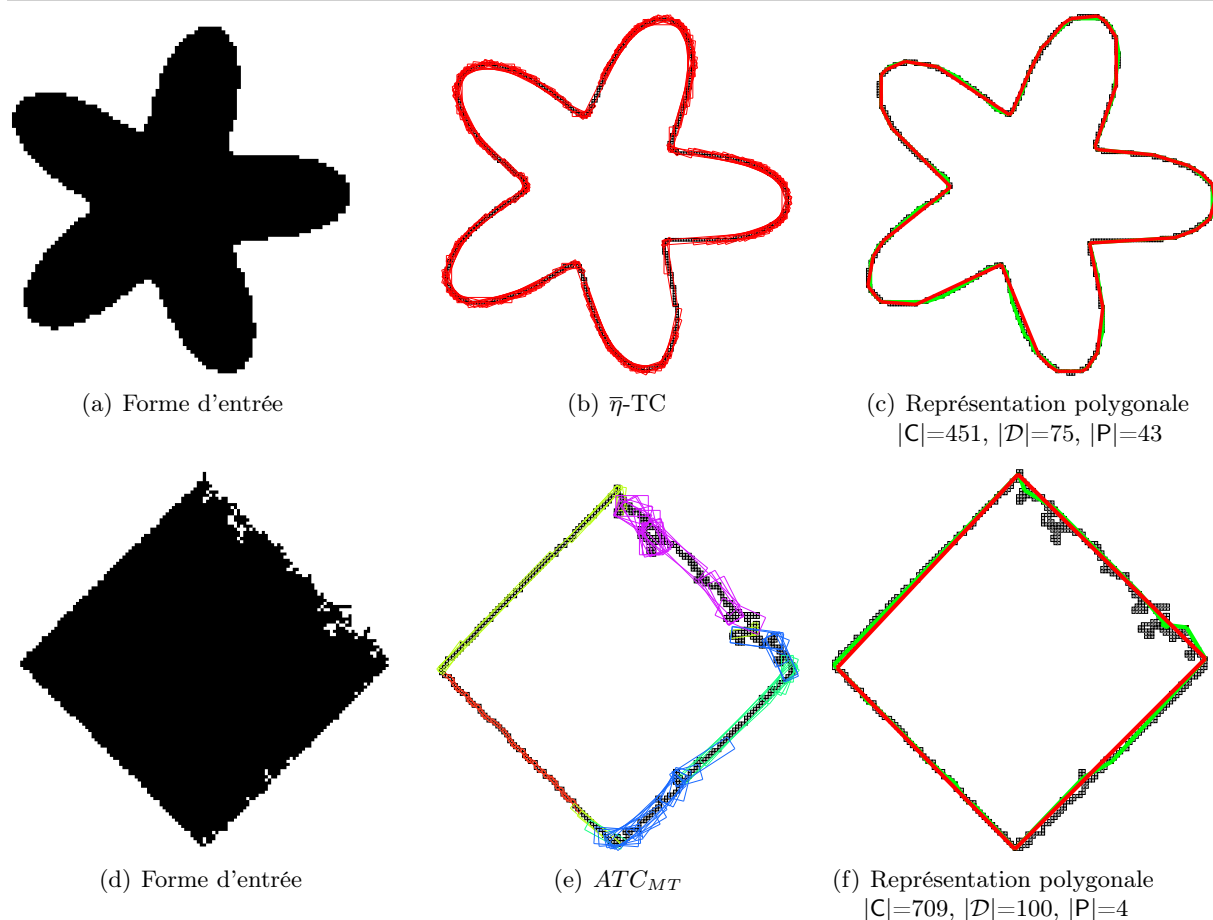
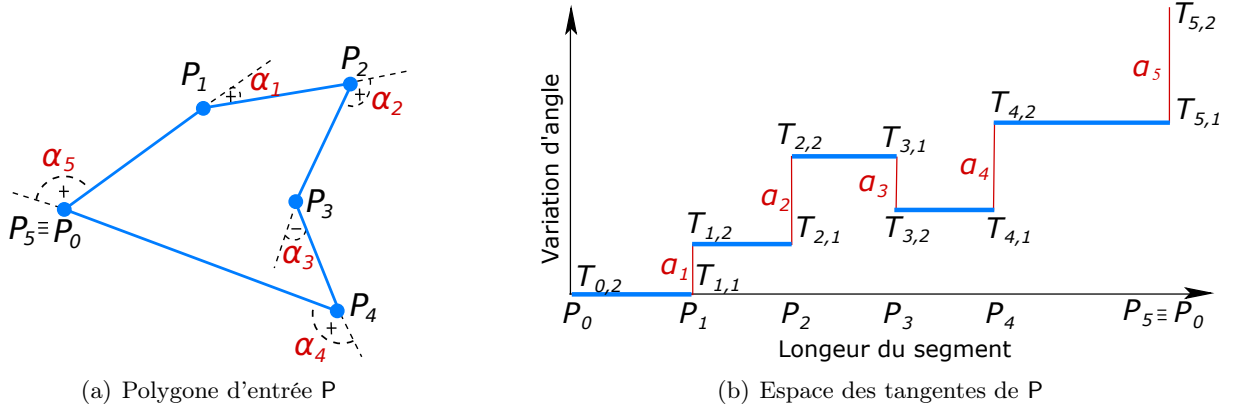


FIGURE 4.33 – Représentation polygonale de contour C extrait de l'image (première colonne) avec les couvertures tangentielles (deuxième colonne) : $\bar{\eta}$ -TC (b) et ATC_{MT} (e). Troisième colonne : le polygone P (en rouge) après la simplification à partir des points dominants \mathcal{D} (en vert).

descripteurs d'images de haut niveau. Parmi les primitives géométriques (droites, cercles, arcs circulaires, ellipses, paraboles, *etc.*), l'arc de cercle et le segment sont ceux qui apparaissent le plus souvent dans images, notamment dans des images de documents graphiques. De plus, une combinaison d'arcs de cercles et de segments est une solution intéressante pour éviter une approximation des arcs par de nombreux segments ou points critiques. Plusieurs méthodes ont été proposées pour décomposer une courbe plane en arcs et segments. Nous pouvons nous référer à l'état de l'art proposé dans [13, 294].

La décomposition d'une courbe discrète en arcs et segments est une première application de la représentation polygonale du contour extrait de l'image que nous allons présenter dans la suite. En s'inspirant de la méthode proposée par Nguyen *et al.* dans [293, 294], le processus de décomposition est réalisé en utilisant un domaine transformé de la courbe polygonale, nommé *espace des tangentes*. En analysant cette nouvelle représentation de la courbe polygonale, nous pouvons déterminer quelles parties de la courbe polygonale appartiennent à des arcs et lesquelles à des segments. Ensuite, un ajustement est effectué sur les parties d'arc pour calculer les meilleurs approximations par rapport à la courbe d'entrée. Ces deux étapes sont détaillées ci-dessous.


 FIGURE 4.34 – Représentation par l'espace des tangentes $E(P)$ de P .

Espace des tangentes

Arkin [22] et Latecki [238] ont proposé cet outil de l'espace des tangentes pour la caractérisation et la comparaison des formes polygonales. Nguyen *et al.* [293, 294] se sont inspirés de ce travail et ont proposé une représentation modifiée de l'espace des tangentes pour la détection des segments et arcs de cercles d'une courbe polygonale.

Définition 98 (Espace des tangentes [294]). Soit $P = \{P_i\}_{i=0}^m$ une courbe polygonale, $l_i = \|\vec{P_i P_{i+1}}\|$ la longueur du segment $P_i P_{i+1}$ et l'angle $\alpha_i = \angle(\vec{P_{i-1} P_i}, \vec{P_i P_{i+1}})$ tel que $\alpha_i > 0$ si P_{i+1} est sur le côté droit de $\vec{P_{i-1} P_i}$ et $\alpha_i < 0$ sinon. L'espace des tangentes $E(P)$ de P est constitué des segments $[T_{i,2} T_{(i+1),1}]$ et $[T_{(i+1),1} T_{(i+1),2}]$ pour $0 \leq i < m$ avec $T_{0,2} = (0, 0)$, $T_{i,1} = (T_{(i-1),2} \cdot x + l_{i-1}, T_{(i-1),2} \cdot y)$ pour $1 \leq i \leq m$ et $T_{i,2} = (T_{i,1} \cdot x, T_{i,1} \cdot y + \alpha_i)$, $1 \leq i \leq (m-1)$.

En d'autres termes, l'espace des tangentes est la représentation des angles extérieurs par rapport aux longueurs des segments de la courbe polygonale. Une illustration est donnée dans la Figure 4.34.

Le résultat suivant est obtenu dans [293, 294] pour la détection d'une séquence des cordes d'un arc dans l'espace des tangentes.

Proposition 99 ([294]). Soit $P = \{P_i\}_{i=0}^m$ une courbe polygonale et $E(P)$ l'espace des tangentes de P . $E(P)$ est constitué des segments $[T_{i,2} T_{(i+1),1}]$ et $[T_{(i+1),1} T_{(i+1),2}]$ pour $0 \leq i < m$, $M = \{M_i\}_{i=0}^{m-1}$ est l'ensemble des points centraux de $\{T_{i,2} T_{(i+1),1}\}_{i=0}^{m-1}$. P est approchée un arc de cercle si et seulement si M forme un ensemble de points approximativement alignés.

Suivant cette proposition, la détection des arcs dans P revient à la vérification si des points centraux de M dans $E(P)$ sont approximativement alignés ou quasi-alignés. Cette vérification est faite avec la reconnaissance du primitif de segments flous d'épaisseur ν dans [294]. Plus précisément, des points centraux de M sont quasi-alignés s'ils appartiennent à un segment flou d'épaisseur ν donnée, et plus il y a de points, plus l'arc est estimé avec *certitude*.

Toujours dans [293, 294], on observe, pour les points centraux non linéaires, que

- un point central est dit *isolé* si la différence de valeurs d'ordonnées entre ce point et l'un des deux points milieux voisins est supérieure à un seuil α . Ce point correspond alors à une jonction de deux primitives dans P ,
- un point central est dit *complètement isolé* si la condition de point isolé est satisfaite pour ses deux voisins, alors ce point correspond à un segment dans P .

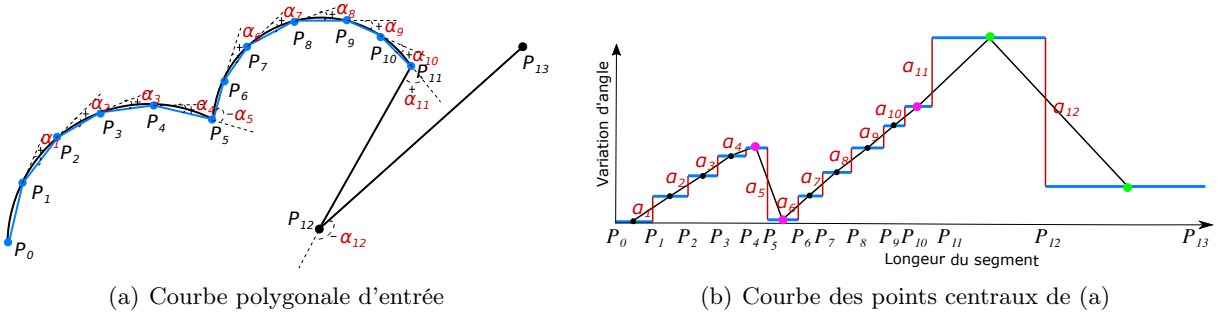


FIGURE 4.35 – Classification des points centraux dans l'espace des tangentes.

Ceci est illustré dans la *Figure 4.35* : les points roses (M_4, M_5, M_{10}) sont les points isolés et correspondant à des jonctions de deux primitives, les points noirs sont les points d'arcs de cercles, et les points verts (M_{11}, M_{12}) sont les points isolés complets et correspondent aux segments.

Approximation d'un arc de cercle

De la *Proposition 99*, nous avons la suite de points appartenant à un arc. Il faut donc maintenant déterminer l'arc de cercle le plus approprié pour ces points. Cette étape est effectuée via un processus d'ajustement au sens des moindres carrés. Il faut mentionner que pour la continuité de la décomposition entre les primitives, nous considérons les jonctions comme des points dominants. Soit M_i à M_j points centraux quasi-alignés dans l'espace des tangentes, $C = (C_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ une courbe discrète, C_{b_i} et C_{e_i} (resp. C_{b_j} et C_{e_j}) des points dominants de début et de fin qui correspondent au point central M_i (resp. M_j), soient C_{b_i} et C_{e_j} les points de jonctions (également points de fin de l'arc). Afin de déterminer un arc pour les points de C_{b_i} à C_{e_j} , nous avons besoin d'au moins trois points. En raison d'un écart angulaire élevé près des extrémités d'un arc, l'arc d'ajustement est effectué en utilisant la distance des moins carrées (least square distance en anglais) avec un point dans la partie centrale d'un tiers de C_{b_i} et C_{e_j} . L'arc, de centre O et de rayon R , le mieux adapté à C_{b_i} et C_{e_j} est noté par $Arc(O, R, \beta_b, \beta_e)$, et calculé comme suit

$$Arc(O, R, \beta_b, \beta_e) = \min_{k \in \left[\left\lfloor \frac{C_{b_i} + 2C_{e_j}}{3} \right\rfloor, \left\lceil \frac{2C_{b_i} + C_{e_j}}{3} \right\rceil \right]} d^2(C_k, \mathcal{C}_{(C_{b_i}, C_k, C_{e_j})}(O, R)) \quad (4.20)$$

où R est le rayon avec les angles allant de β_b à β_e (c'est-à-dire de C_{b_i} à C_{e_j}), $\mathcal{C}_{(C_{b_i}, C_k, C_{e_j})}(O, R)$ est le cercle passant par trois points C_{b_i}, C_k, C_{e_j} de centre O et de rayon R , et $d^2(C_k, \mathcal{C}_{(C_{b_i}, C_k, C_{e_j})}(O, R))$ la distance carrée du point C_k au cercle $\mathcal{C}_{(C_{b_i}, C_k, C_{e_j})}(O, R)$.

Méthode proposée et résultats

Le schéma dans la *Figure 4.36* résume toutes les étapes pour décomposer une courbe discrète bruitée C en arcs de cercles et en segments. Plus de détails de l'algorithme de décomposition ainsi que son implémentation sont décrits dans la publication [C22]. Il est montré dans ce papier que l'algorithme a une complexité de $\mathcal{O}(n \log n + nm)$ où n est le nombre de points de C et m est nombre de sommets de la courbe polygonale représenté C .

La *Figure 4.37* présente quelques exemples obtenus avec cette méthode. D'autres résultats sont disponibles dans les articles [C22], [C23]. L'implémentation associée est disponible sur

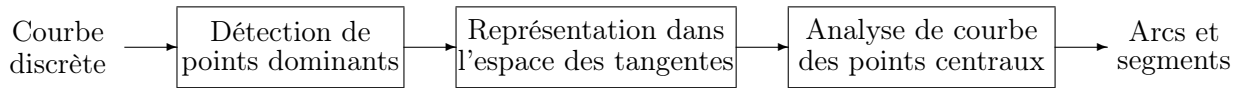


FIGURE 4.36 – Processus de décomposition en arcs et segments d'un contour discret.

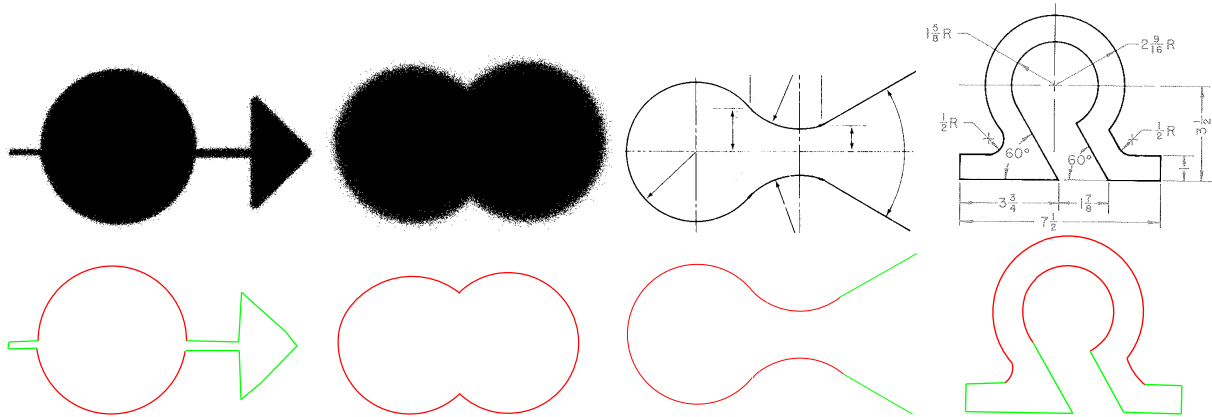


FIGURE 4.37 – Décomposition en arcs et segments de quatre exemples bruités. Première ligne : images d'entrée. Deuxième ligne : résultats de la décomposition. De gauche à droite : deux images avec un bruit Kanungo [190] de 0.5, et deux images scannées de dessin technique.

*GitHub*⁵. Une démonstration en ligne est également disponible pour tester avec n'importe quelle image à l'adresse suivante :

https://ipol-geometryhost.loria.fr/~phuc/ipol_demo/ATC_ArcSegDecom_IPOLDemo/

4.4.4 Vectorisation d'images

Nous avons aussi utilisé des résultats de représentation polygonale de contours discrets pour répondre au problème de vectorisation d'images en niveaux de gris dans un travail commun avec B. Kerautret (LIRIS) , Y. Kenmochi (GREYC) et A. Vacavant (Institut Pascal).

La vectorisation d'images est un problème classique avec des impacts potentiels et des applications dans le domaine de l'infographie. Il s'agit d'un processus qui nous permet de récupérer des primitives géométriques telles que des segments, des arcs de cercles ou des courbes paramétrées à partir d'images. Une telle transformation est souvent exploitée lorsqu'un designer a besoin d'importer une image bitmap dans un logiciel d'infographie tel qu'*Illustrator*⁶ ou *Inkscape*⁷. Ce format permet aussi une représentation efficace d'un objet graphique et est naturellement utilisé dans le domaine de l'impression ou pour la représentation de documents textes ou techniques (voir [79, 170, 417] pour un état de l'art).

Dans ce contexte, différentes avancées ont été proposées notamment en lien avec le domaine d'analyse de documents [170, 364], ou le domaine de la géométrie discrète avec la polygonalisation de contour discret comme l'analyse multi-échelles [133], les grilles isothétiques irrégulières et l'échelle significative [424], ou encore l'approche basée sur la courbure [248], *etc.* Ces avancées

5. <https://github.com/ngophuc/CurveDecomposition>

6. <https://www.adobe.com/fr/products/illustrator.html>

7. <https://inkscape.org/>

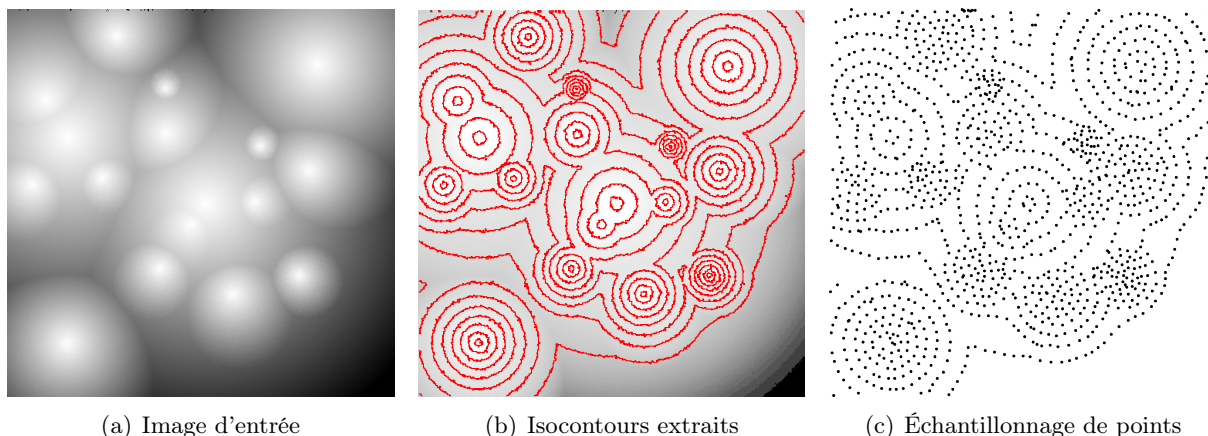


FIGURE 4.38 – Extraction d'isocontours (b) de l'image d'entrée (a) et l'échantillonnage de points des contours résultants (c).

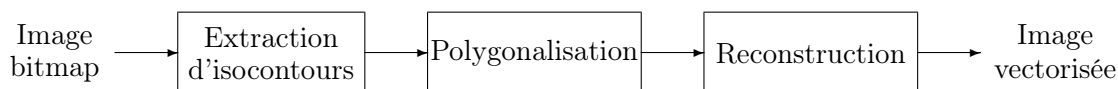


FIGURE 4.39 – Processus de vectorisation d'une image.

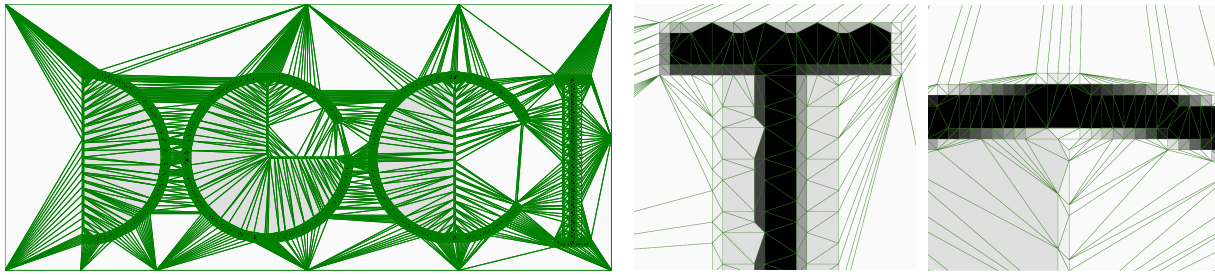
sont seulement applicables à des formes discrètes provenant éventuellement d'images binaires. Même si un contour discret peut être extrait d'une image non binaire (*e.g.* images en niveaux de gris et en couleurs), leur adaptation n'est pas simple.

Afin d'étendre l'utilisation de ces méthodes, nous proposons dans [C19] une nouvelle approche basée sur les outils de la géométrie discrète. L'idée est de pouvoir utiliser au mieux toute l'information géométrique issue des contours d'images, et pour cela, nous considérons la représentation de l'image avec les isocontours des niveaux d'intensité (voir Figure 4.38).

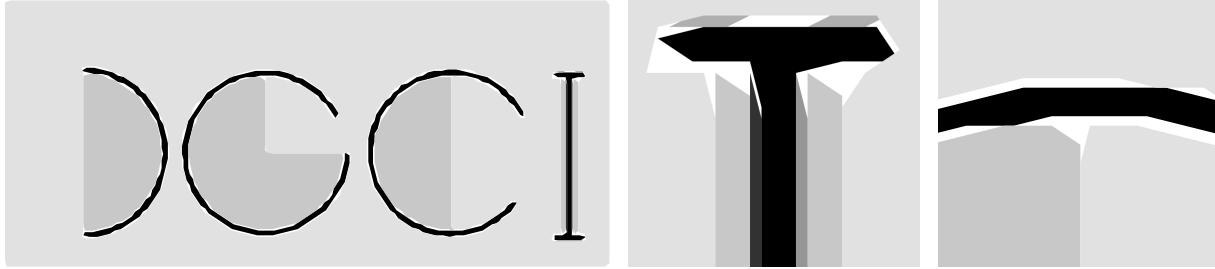
La méthode de vectorisation est composée principalement de trois étapes dont le schéma est donné sur la Figure 4.39. Plus précisément, pour reconstruire l'image vectorielle, l'étape préliminaire consiste à décomposer l'image en un ensemble d'isocontours en utilisant une représentation de l'espace de Khalimski [229] afin de ne perdre aucune information topologique. À partir d'isocontours extraits, on construit ensuite des polygones en prenant en compte localement la géométrie de la forme. Cette deuxième étape peut être faite avec la détection des points dominants ou la représentation polygonale présentée précédemment. D'autres techniques de polygonalisation sont également considérées dans [C19] : la courbure visuelle [248], les couches de niveau numérique (digital level layers (DLL) en anglais) [142, 332] et la polygonalisation basée sur la distance de Fréchet [382, 383]. Après cette seconde étape, plusieurs types de reconstructions ont été envisagées : la triangulation de Delaunay [404], le remplissage d'intervalles d'intensité et l'arbre des composantes connexes [147, 285]. Ces différentes méthodes de reconstructions sont illustrées dans la Figure 4.40.

La Figure 4.41 montre un aperçu des résultats obtenus avec la méthode proposée. D'autres résultats et comparaisons sont présentés dans [C19] et une démonstration en ligne est aussi disponible pour tester sur n'importe quelle image à l'adresse suivante :

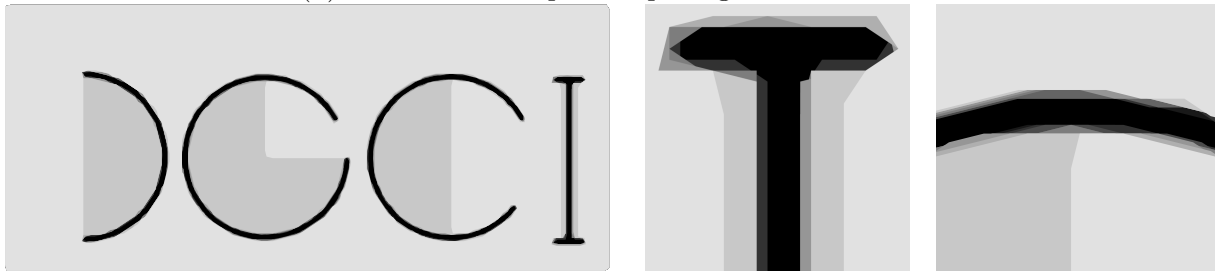
https://ipol-geometryhost.loria.fr/~kerautre/ipol_demo/DGIV_IPOLDemo/



(a) La triangulation Delaunay



(b) Reconstruction par remplissage d'isocontours



(c) Reconstruction avec l'arbre des composantes connexes

FIGURE 4.40 – Différentes techniques de reconstruction pour la vectorisation d'images.

4.4.5 Reconnaissance des gestes de la main

La reconnaissance des gestes de la main a une grande importance pour ses applications potentielles dans le domaine de l'interaction homme-machine (human-computer interaction (HCI) en anglais). Une application majeure est la reconnaissance automatique de la langue des signes pour les personnes avec des personnes malentendantes. Cet axe de recherche est réalisé à travers une collaboration entre l'équipe Adagio, S. Paul, S. Basu et d'autres collègues de l'Université de Jadavpur à Kolkata en Inde.

Dans le domaine de la reconnaissance des gestes de la main, pour mesurer avec précision les principales caractéristiques de la main, certaines techniques nécessitent le port d'un gant électronique [103]. Cependant, le dispositif est coûteux et peu pratique pour les applications domestiques. Certaines autres méthodes utilisent des marqueurs optiques [219] à la place des gants électroniques, mais cela demande une configuration complexe. Dans ce contexte, les systèmes basés sur la profondeur [379] donnent des résultats prometteurs pour la reconnaissance du geste de la main. Plus particulièrement, Microsoft Kinect⁸ est une solution abordable et économique. Il possède des capteurs RVB-D (Red Green Blue - Depth (RGB-D) en anglais) offrant une couleur et une image de profondeur synchronisée. C'est avec cette technique d'imagerie que nous proposons différents descripteurs statistiques et géométriques basés sur le contour de la forme

8. <https://azure.microsoft.com/en-us/services/kinect-dk/>

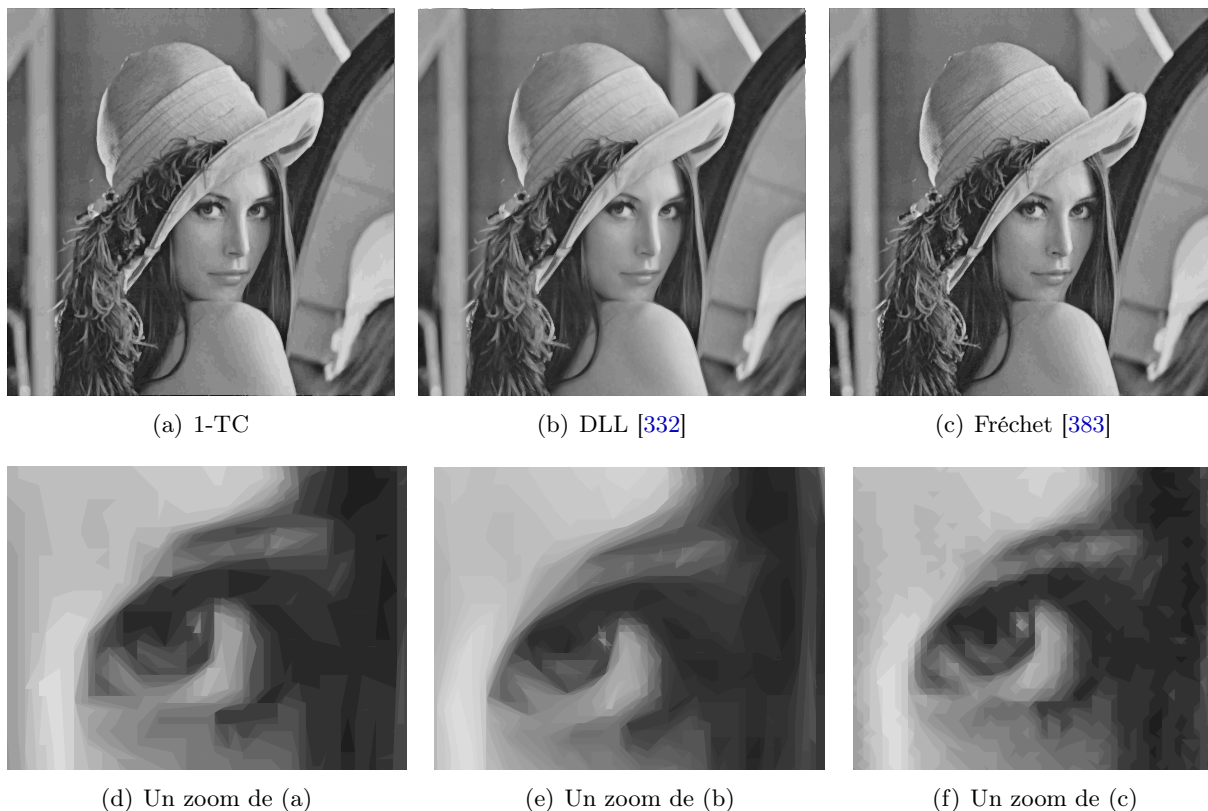


FIGURE 4.41 – Résultats de la méthode de vectorisation proposée sur l'image Lena avec trois différents algorithmes de polygonalisation.

pour la reconnaissance des gestes de la main à l'aide de deux capteurs de profondeur, à faible coût et disponibles sur le marché : Kinect V1 et V2. Une comparaison détaillée de ces deux capteurs est trouvée dans [311].

Dans la littérature, de nombreux algorithmes de reconnaissance des gestes de la main basés sur la vision par ordinateur ont été proposés au cours des dernières années et des revues complètes peuvent être trouvées dans [280]. Parmi eux, certaines méthodes se sont basées sur le modèle de couleur de peau [441] ou sur le modèle de forme de la main [437]. Cependant, elles ne sont pas robustes dans les environnements dynamiques et dépendent fortement des modèles utilisés.

Le développement de caméras de profondeur, telles que Microsoft Kinect, Creative Senz3D ou Mesa Swiss-Ranger, ouvre de nouvelles voies pour la reconnaissance des gestes de la main. Suarez et Robin [402] ont montré comment les informations de profondeur peuvent être utilisées efficacement pour ce problème. Contrairement aux méthodes basées sur la vision qui étaient sensibles aux variations de couleurs de peau et d'éclairage, les caméras de profondeur offrent un moyen beaucoup plus simple pour isoler les mains par un seuillage de profondeur. Des exemples d'images seuillées pour les chiffres et les signes de l'alphabet de la langue des signes américaine (American Sign Language (ASL) en anglais) obtenus avec Kinect V2 sont affichés dans la Figure 4.42.

Après l'étape de localisation et segmentation de la main, plusieurs descripteurs peuvent être considérés, par exemple l'histogramme des faces 3D (Histogram of 3D Facets (H3DF) en anglais) [444], l'histogramme des dégradés orientés (Histogram of Oriented Gradients (HOG) en anglais) ou l'histogramme de la mesure de distance [342, 343].

Dans le travail proposé, nous utilisons une combinaison de différents descripteurs statistiques

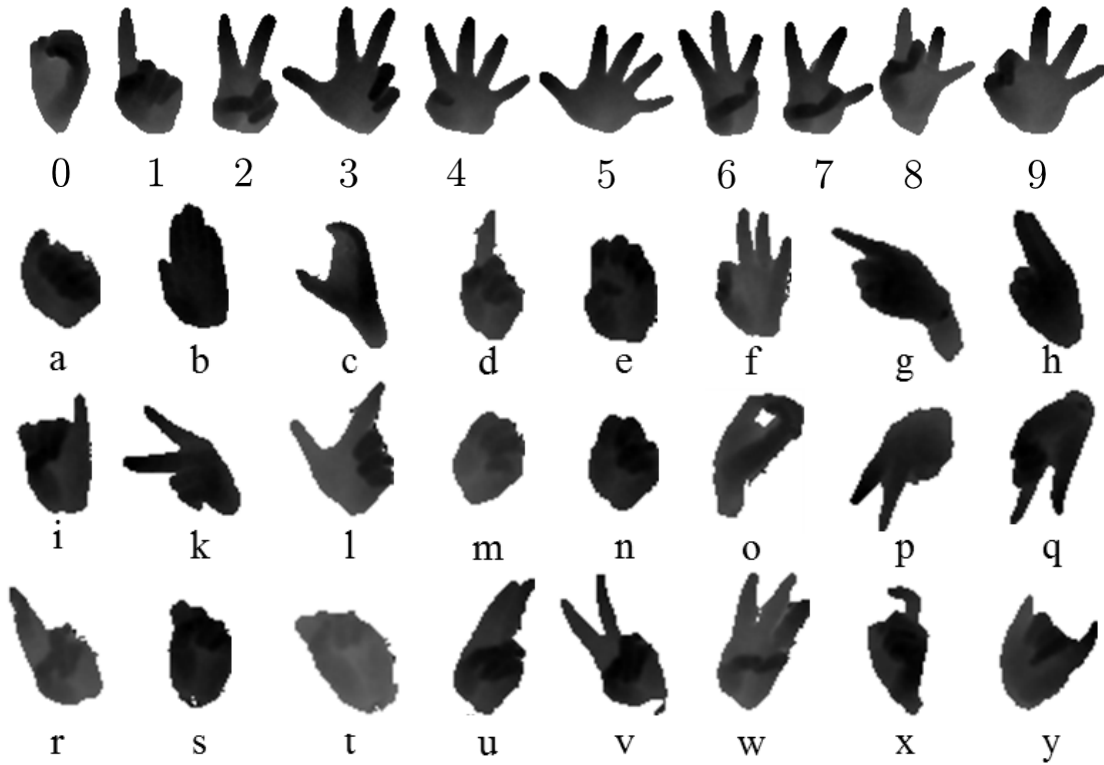


FIGURE 4.42 – Images de profondeur isolées des gestes de chiffres et d’alphabets (‘j’ et ‘z’ sont exclus car ces gestes ne sont pas statiques) de la langue des signes américaine.

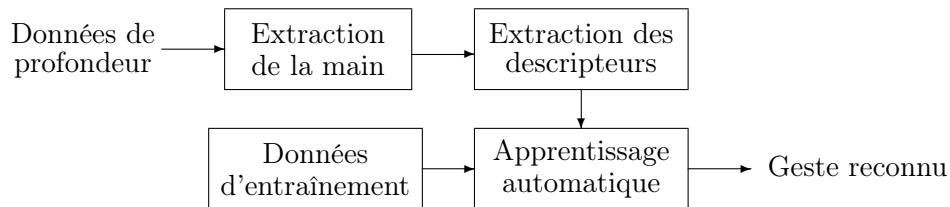


FIGURE 4.43 – Processus de reconnaissance des gestes de la main.

et géométriques qui sont extraits à partir d’images de profondeur. Parmi eux, il y a : les moments géométriques, l’histogramme des angles et des distances de contour (Histogram of Contour Angles (HoCa) and Contour Distances (HoCd) en anglais), les caractéristiques géométriques avec les points dominants, *etc.* Ensuite, nous considérons le classifieur des forêts aléatoires [4] (Random Forest en anglais) comme l’outil d’apprentissage automatique sur les descripteurs extraits. Une description détaillée et complète de ces descripteurs ainsi que de la méthode d’apprentissage sont données dans l’article [C21]. Le schéma dans la Figure 4.43 résume le processus proposé pour la reconnaissance des gestes de la main à partir d’images de profondeur.

L’approche proposée est testée et comparée avec d’autres techniques de reconnaissance sur l’ensemble de données publiques NTU V1 [343]. Dans les expérimentations, la validation croisée (cross-validation (CV) en anglais) *leave-p-out* (LpO) est effectuée pour évaluer la performance de la reconnaissance. Le Tableau 4.6 montre les résultats comparatifs avec d’autres méthodes. Sur cette base de données, la précision moyenne de notre approche est de 98,4%, ce qui dépasse les autres travaux mentionnés dans le tableau. Ce résultat montre que les descripteurs proposés

sont efficaces et conviennent à la reconnaissance rapide des gestes. Des résultats plus récents et des comparaisons sont présents dans des publications associées [J3], [C21].

Algorithmes	Précision moyenne
Skeleton Matching [27]	78.6%
Shape Context without bending cost [32]	83.2%
HOG [86]	93.1%
Near-convex Decomposition+FEMD [343]	93.9%
H3DF [444]	95.5%
Notre méthode	98.4%

TABLE 4.6 – Comparaisons de résultats de la reconnaissance des gestes de la main avec les autres méthodes sur le jeu de données NTU HAND DIGIT DATASET [343].

4.5 Balayage directionnel et applications

En plus de la couverture tangentielle et ses applications, nous avons exploré l'analyse d'images à travers la détection de droites épaisses dans des images en niveaux de gris et pour l'extraction de structures linéaires à partir de données LiDAR brutes. Ces travaux sont le résultat d'une collaboration avec Philippe Even (Adagio) et Bertrand Kerautret (LIRIS).

4.5.1 Définitions

La primitive de droite discrète ainsi que son algorithme de reconnaissance ont été définis sur des contours discrets qui sont généralement extraits dans les images binaires. Dans cette section, nous voulons étendre leur définition pour d'autres domaines d'applications. Tout d'abord, nous introduisons deux notions de *balayage directionnel* (directional scan (DS) en anglais) qui sont basées sur cette primitive des segments de droites discrètes.

Définition 100. Un balayage directionnel statique DS est une partition ordonnée, qui est limitée au domaine de l'image I , d'une droite épaisse \mathcal{L} , appelée bande de balayage (*scan strip en anglais*), en bandes S_i , chacune d'elles étant un segment de droite naïve \mathcal{N}_i , appelé ligne de balayage (*scan line en anglais*), perpendiculaire à \mathcal{L} .

$$DS = \{S_i = \mathcal{L} \cap \mathcal{N}_i \cap I \mid \mathbf{V}(\mathcal{N}_i) \cdot \mathbf{V}(\mathcal{L}) = 0 \wedge h(\mathcal{N}_i) = h(\mathcal{N}_{i-1}) + p(\mathcal{L})\} \quad (4.21)$$

avec $h(\mathcal{N})$ l'ordonnée à l'origine et $p(\mathcal{N})$ la période de la droite \mathcal{N} (voir Définition 68).

Dans cette définition, $\mathbf{V}(\mathcal{N}_i) \cdot \mathbf{V}(\mathcal{L}) = 0$ exprime la contrainte d'orthogonalité entre les lignes de balayage \mathcal{N}_i et la bande de balayage \mathcal{L} . Le décalage de la période $p(\mathcal{L})$ entre les balayages successifs garantit que les points de la bande de balayage sont traversés une et une seule fois.

Les bandes (scans) S_i sont développés de chaque côté d'un scan de départ S_0 , et classés par leur distance à la ligne de départ \mathcal{N}_0 avec un signe positif (resp. négatif) s'ils sont du côté gauche (resp. droit) de \mathcal{N}_0 . Le scan S_i peut être analysé de manière itérative à partir d'une analyse allant de S_0 aux deux extrémités (voir Figure 4.44 (a)).

Un *balayage directionnel adaptatif* est une version dynamique du balayage directionnel avec un suivi dans une direction de recherche en mouvement (voir Figure 4.44 (b)). Comparé aux balayages directionnels statiques (Définition 100) où la bande de balayage reste fixée à la ligne

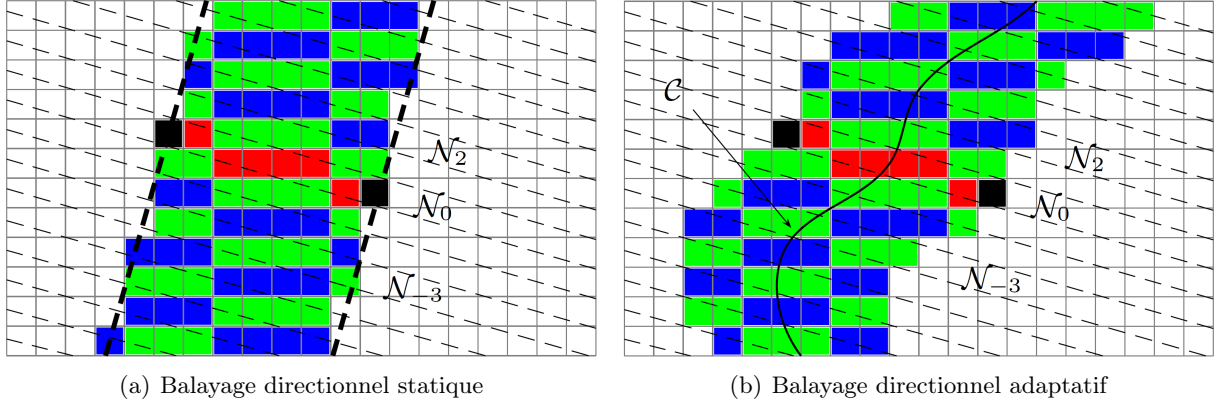


FIGURE 4.44 – (a) Un balayage directionnel avec le balayage initial \mathcal{N}_0 (en rouge), les scans impairs sont en vert, les pairs sont en bleu, le bord des balayages \mathcal{N}_i est en lignes pointillées et le bord de la ligne \mathcal{L} est en lignes en pointillés gras. (b) Un balayage directionnel qui s'adapte dynamiquement à la courbe \mathcal{C} , et les scans sont décalés en conséquence pour couvrir \mathcal{C} .

initiale \mathcal{L}_0 , ici la bande suit une courbe \mathcal{C} tandis que les lignes de balayage restent fixes. Plus formellement, un balayage directionnel adaptatif est défini par :

$$ADS = \left\{ S_i = \mathcal{L}_i \cap \mathcal{N}_i \cap I \left| \begin{array}{l} \mathbf{V}(\mathcal{N}_i) \cdot \mathbf{V}(\mathcal{L}_0) = 0 \\ \wedge h(\mathcal{N}_i) = h(\mathcal{N}_{i-1}) + p(\mathcal{L}_0) \\ \wedge \mathcal{L}_i = \mathcal{L}(\hat{C}_i, w(\mathcal{L}_0)), i > 0 \end{array} \right. \right\} \quad (4.22)$$

où \hat{C}_i est un triplet composé du vecteur directeur (b_i, a_i) et le passage à l'origine ω_i d'une estimation à la position i de la tangente à la courbe \mathcal{C} à suivre. Le segment discret épais obtenu est utilisé pour mettre à jour la bande et les lignes de balayage. La dernière condition exprime la mise à jour des limites d'analyse à l'itération i .

4.5.2 Détection des segments épais dans des images en niveaux de gris

La détection de droites est toujours un sujet actif centré sur la recherche de méthodes encore plus rapides, plus précises ou moins sensibles au bruit [12, 14, 149, 256, 266]. En effet, les droites ou les segments sont couramment utilisées comme caractéristiques visuelles pour de nombreux processus d'analyse d'images ; par exemple, dans des environnements artificiels, elles constituent une alternative appropriée aux points d'orientation de la caméra [100, 438], la reconstruction 3D [310] ou aussi la localisation et la cartographie simultanées [171, 359].

La plupart des méthodes proposées reposent sur l'extraction d'une carte de contours basée sur la magnitude du gradient. L'orientation du gradient est souvent utilisée pour discriminer les candidats et ainsi offrir une meilleure efficacité. Cependant, ils fournissent rarement une mesure exploitable de la qualité des droites de sortie ; par exemple, sur des propriétés intrinsèques telles que la netteté, la connexité ou la diffusion. Ces informations pourraient être utiles pour obtenir un certain niveau de confiance et aider à classer ces fonctionnalités pour une exploitation ultérieure.

Dans ce contexte, nous proposons une extension de la définition des segments flous pour des images en niveaux de gris, ainsi un nouvel outil de détection des droites épaisses – avec les segments flous – basé sur l'image du gradient. Cet outil est appelé *détecteur rapide de segment flou* (Fast Blurred Segment Detector (FBSD) en anglais). Plus précisément, l'approche se base

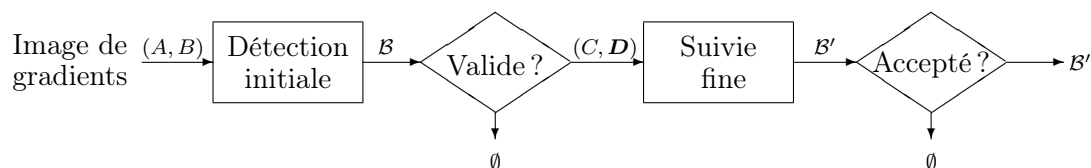


FIGURE 4.45 – Processus de la détection de segment épais.

sur le balayage directionnel défini à partir de deux points A et B , les directions sont ensuite utilisées pour exploiter l'information de l'image de gradients.

Le processus de détection est résumé dans la *Figure 4.45*. Plus précisément, la détection initiale consiste à construire et étendre un segment flou \mathcal{B} d'épaisseur assignée ε_0 , basé sur les points avec la magnitude de gradient la plus élevée trouvée dans chaque balayage directionnel statique défini par un segment d'entrée $[AB]$. L'extension est arrêtée après un certain nombre d'échecs d'ajout de points de chaque côté. Notez que la direction du gradient n'est pas utilisée dans cette étape. Des tests de validité sont ensuite appliqués pour décider de la poursuite de la détection. Ils visent à rejeter des segments trop petits, trop parcimonieux ou ceux avec une orientation proche de $[AB]$.

Dans l'étape de suivie fine, un autre segment flou \mathcal{B}' est construit et étendu avec des points qui correspondent aux maxima locaux du gradient, classés par ordre de grandeur, et avec la direction du gradient proche de celle du point de départ. Lors de cette étape de raffinement, un *contrôle de l'épaisseur assignée* est appliqué et le balayage directionnel adaptatif est utilisé afin d'étendre le segment dans la direction appropriée. Le segment résultant \mathcal{B}' est finalement accepté sur la base des critères de longueur finale et de parcimonie.

L'approche proposée vise à concevoir un outil flexible pour détecter des segments flous avec une épaisseur et une orientation optimales dans des images en niveaux de gris. Elle est utilisée aussi bien dans des contextes supervisés que non supervisés. Dans un contexte supervisé, l'utilisateur dessine un trait d'entrée sur l'image à l'endroit où il souhaite extraire des segments. La méthode de détection décrite précédemment est exécutée et affiche le résultat à la volée sur l'image. Les détails sur ce mode supervisé sont dans [194].

Un mode non supervisé est également proposé pour détecter automatiquement toutes les lignes droites de l'image [C13]. Pour cela, un trait qui traverse toute l'image est balayé dans les deux sens, vertical puis horizontal, du centre vers les bords de l'image. À chaque position, l'algorithme de détection est exécuté pour collecter tous les segments trouvés sous le trait.

Pour évaluer la performance de l'approche proposée, nous réalisons des comparaisons avec d'autres détecteurs de droites récents : LSD (Line Segment Detector) [149], ED-Lines (Edge Drawing Lines) [12] and CannyLines [256]. Les tests sont exécutés sur la base de données York Urban [100], composée de 102 photographies dans les environnements de Manhattan. En plus des images, cette base fournit avec une *vérité terrain* qui contient les segments correspondant au cadre orthogonal 3D, *i.e.* les trois directions principales : hauteur, largeur, profondeur.

Les critères de comparaison sont : le temps d'exécution (T), le taux de couverture (C), le nombre de segments détectés (N), la longueur cumulée des segments détectées (L) et le rapport de longueur moyenne (L/N). Les résultats sont donnés dans le *Tableau 4.7*.

Un exemple d'expérimentation est montré dans la *Figure 4.46*. Sur cette figure, on observe que le détecteur FBSD produit de nombreux petits segments qui pourraient être considérés comme visuellement non significatifs. Les autres détecteurs les éliminent par un test de validation basé sur le principe de Helmholtz [101]. Un tel test n'est pas encore intégré dans notre détecteur. Mais même ainsi, la longueur moyenne des segments de sortie est plus grande. Sauf pour le

Mesures	T (ms)	C (%)	N	L (pixels)	L/N
LSD [149]	63.5 ± 13.6	60.9 ± 11.2	536 ± 193	17745 ± 5337	34.6 ± 7.9
ED-Lines [12]	55.5 ± 9.9	64.0 ± 11.2	570 ± 210	19351 ± 5669	35.8 ± 8.9
CannyLines [256]	69.6 ± 10.5	60.5 ± 10.6	467 ± 138	17679 ± 4398	39.5 ± 10.1
FBSD	66.9 ± 15.6	67.9 ± 9.6	478 ± 110	19472 ± 3914	41.7 ± 7.5

TABLE 4.7 – Comparaisons de résultats de la détection de segments avec d’autres méthodes sur le jeu de données York Urban [100].

temps d’exécution où ED-Lines est premier, les performances globales du nouveau détecteur sont assez similaires et compétitives par rapport aux autres. En outre, il fournit des informations supplémentaires sur la qualité des lignes détectées grâce à l’estimation de leur épaisseur.

D’autres résultats avec des détails de la méthode et les paramètres utilisés dans les expérimentations sont présents dans les articles [R2], [C13]. Les résultats peuvent être reproduits à partir de l’implémentation disponible sur *GitHub*⁹ ou avec la démonstration en ligne :

https://ipol-geometryhost.loria.fr/~kerautre/ipol_demo/FBSD_IPOLDemo/

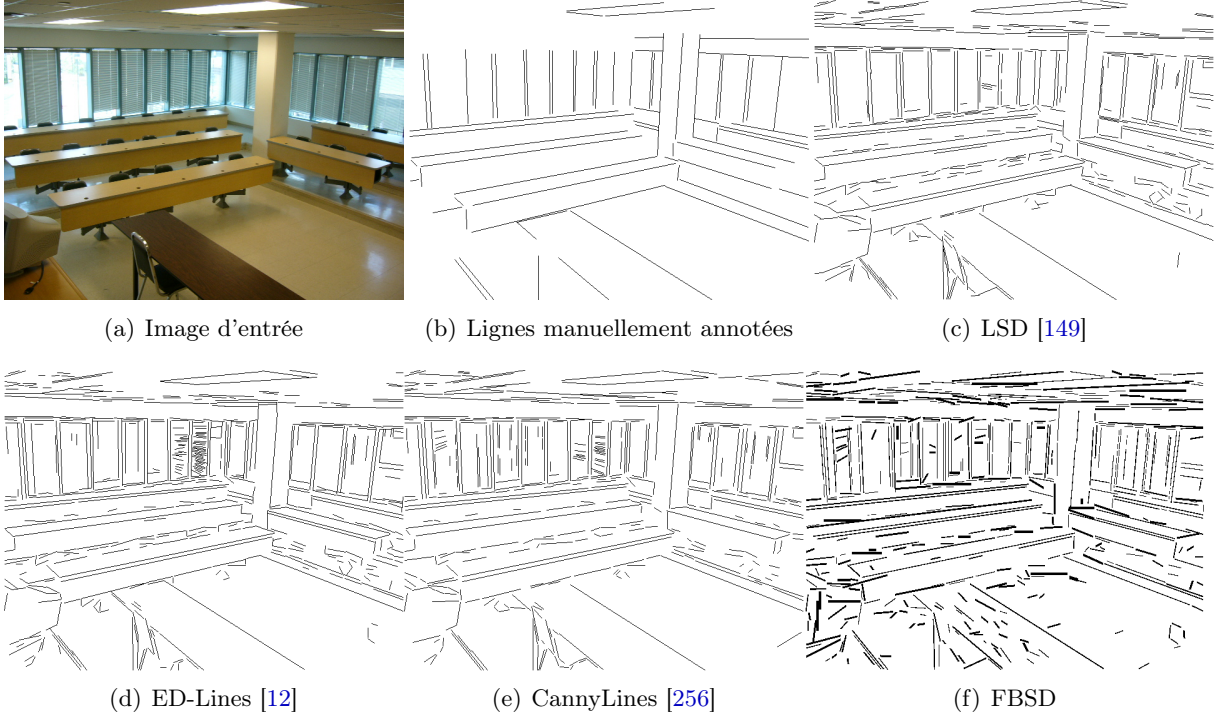


FIGURE 4.46 – Comparaison de la détection de segments sur l’une des 102 images de la base de données York Urban [100].

4.5.3 Extraction de structures linéaires dans les données LiDAR brutes

Dans cette section, nous présentons une nouvelle approche pour l’extraction des structures linéaires à partir de nuages de points. Ce travail s’inscrit dans le cadre du projet **SolHoM-Fossard**

9. <https://github.com/evenp/FBSD>

(interactions Hommes-Milieus et évolution des Sols au cours des deux derniers millénaires dans le massif du Fossard). Il s'agit d'un projet interdisciplinaire de l'Université de Lorraine qui regroupe des chercheurs de différents domaines : des pédologues, des archéologues, des géographes et des informaticiens. Il a pour objectif d'étudier les empreintes des activités humaines historiques sur les sols, exacerbées ou non par certains événements climatiques majeurs.

Le balayage laser aéroporté (Airborne laser scanning ou Light Detection And Ranging (LiDAR) en anglais) est d'une grande aide pour étudier les zones forestières, où les observations sur place sont souvent gênées par la végétation [141, 381]. Il s'agit d'une technique d'acquisition 3D basée sur l'émission d'un faisceau laser balayé sur la zone mesurée et sur la réception d'échos sur les obstacles heurtés. Combiné avec d'autres données de capteurs embarqués ou du GPS relatif, la mesure du temps de trajet du signal fournit un aperçu détaillé du paysage de survol [428]. En milieu forestier, le signal reçu est composé de multiples échos qui correspondent aux obstacles successifs touchés, de la canopée forestière aux niveaux de végétation inférieurs et, enfin, au sol lui-même. Une classification des points est ensuite effectuée pour séparer les points au sol de la végétation basse, moyenne ou élevée et d'autres types de caractéristiques spécifiques, telles que les surfaces d'eau, les bâtiments ou les lignes métalliques. Une surface est construite à partir des points du sol avec des techniques d'optimisation pour produire un modèle numérique de terrain (digital terrain model (DTM) en anglais) [25, 119], qui peut ensuite être affiché à l'aide de différents outils de visualisation [59]. Cependant, des données trop parcimonieuses peuvent produire de grandes approximations, dont les utilisateurs finaux ne sont pas conscients [187]. En particulier, les conifères constituent toujours un obstacle important qui empêche le faisceau laser d'atteindre le sol [102, 322]. Par conséquent, la densité de points obtenue est très hétérogène et cela peut entraîner de grandes approximations dans le DTM. Dans ce travail, nous nous intéressons au nuage de points classés *sol* en complément avec les données DTM. Cela permet de concevoir et de tester une nouvelle approche qui est plus consciente de la distribution des points dans les données brutes.

Dans un premier travail, nous étudions des objets qui ont une forme allongée, en particulier les routes et les pistes forestières. Il faut savoir que l'emplacement et la caractérisation des routes sont importantes à des fins diverses dans la gestion des forêts, telles que la récolte du bois, la construction et l'entretien des routes, le transport, *etc.*

Dans la littérature, plusieurs méthodes ont été développées pour l'extraction de routes à partir de données LiDAR [66, 88, 127, 249, 361, 433]. La plupart d'entre eux s'appuient sur l'analyse de DTM, en utilisant des outils standards de traitement d'images [127, 433], des structures géométriques locales [418, 420] ou des réseaux de neurones à convolution [249, 361]. Quelques approches utilisent directement les données brutes. Dans [66], les routes sont discriminées des surfaces environnantes à l'aide de l'intensité du signal ou des mesures de disparité altimétrique locale, mais pour un contexte urbain où ces caractéristiques sont assez bien contrastées.

Il existe peu de méthodes pour détecter efficacement les pistes forestières dans les zones montagneuses en raison des fortes irrégularités géométriques de ces objets le long de leur parcours. Leurs caractéristiques varient beaucoup en fonction du terrain et aussi de l'usage ; des petites pistes étroites aux routes calibrées récentes très larges avec une voie de circulation sinueuse au milieu et des côtés végétalisés pour le stockage des bois. La surface de la route est plus ou moins rugueuse en fonction de facteurs variables, tels que les conditions d'érosion ou les efforts d'entretien. Le manque de points est dû aux occlusions du signal LiDAR par une végétation dense, en particulier à proximité des plantations de conifères, augmentent considérablement la difficulté de détection.

Pour résoudre ce problème, nous proposons une nouvelle méthode pour extraire (semi-)automatiquement les routes et les pistes forestières en se basant sur les outils de géométrie discrète

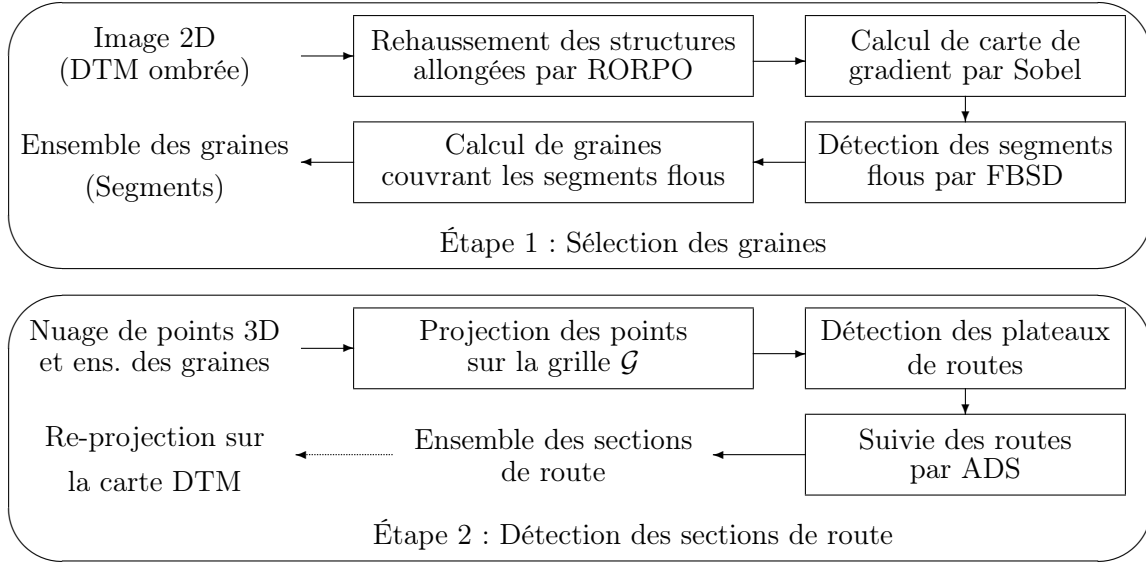


FIGURE 4.47 – Processus d'extraction automatique de routes forestières.

et de morphologie mathématique. Un aperçu de l'ensemble du processus est donné dans la *Figure 4.47* et illustré dans la *Figure 4.48*. La méthode est principalement composée de deux étapes. Tout d'abord, la donnée du DTM, sous forme d'une image 2D en niveaux de gris, est utilisée pour trouver les graines pertinentes pour la détection (*Figure 4.48 (a)–(e)*), ensuite seuls les points 3D classés sol de données LiDAR brutes sont traités pour extraire les tronçons de route à partir des graines (*Figure 4.48 (f)*). En traitant les points 3D du sol, cette approche est plus consciente de la distribution des points dans les données brutes et aide à surmonter les limites de l'interpolation de DTM. Nous allons détailler ces deux étapes dans la suite de cette section.

Sélection de graines à partir du DTM

Le DTM est codé comme une carte vectorielle de normales obtenue par dérivation de la carte de hauteur d'origine. L'ombrage vertical (hill-shading en anglais) est une technique de visualisation classique basée sur des sources lumineuses directionnelles contrôlables (voir *Figure 4.48 (a)*). Pour la détection, nous utilisons plutôt un ombrage de pente (slope-shading en anglais) qui peut être vu comme un éclairage par une source zénitale et est simplement obtenu par la composante vectorielle normale dans la direction (Oz). Il est montré dans [433] que cette méthode assure un bon contraste entre la surface de la route à faible pente et les coupes de route adjacentes abruptes (voir *Figure 4.48 (b)*). À partir de cette carte vectorielle (sous forme d'une image en niveaux de gris), nous réalisons la sélection de l'ensemble des graines pour l'extraction des routes. Ces graines sont des segments de droite qui sont supposés traverser la route pour être détectés. Il faut noter que la qualité de cette étape de sélection des graines est très importante et affecte fortement le résultat de l'extraction complète de la route.

Pour renforcer (enhance en anglais) les structures allongées telles que les routes, nous considérons le filtre de morphologie mathématique RORPO (Ranking the Orientation Responses of Path Operators) proposé par O. Merveille *et al.* [277, 278]. Cet outil repose sur des opérateurs de chemin, et contribue à valoriser les structures allongées sans effet de flou. Bien que RORPO fournisse également une mesure d'orientation locale, seule la carte d'intensité de sortie est utilisée ici (voir *Figure 4.48 (c)*).

Ensuite, le détecteur de segments de droites épaisses sur l'image en niveaux de gris FBSD,

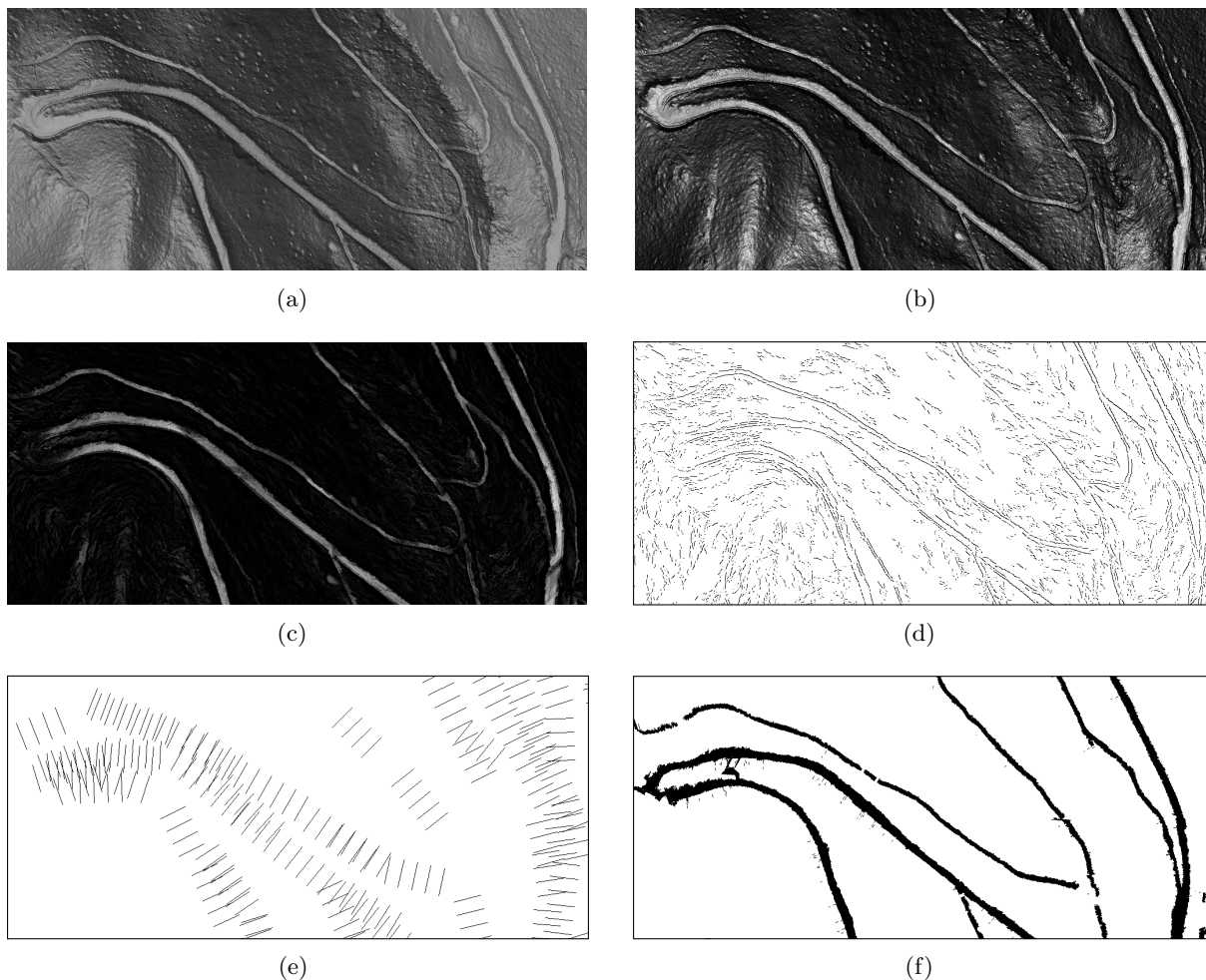


FIGURE 4.48 – Illustration du processus d'extraction de routes forestières : (a) ombrage vertical de DTM, (b) ombrage de pente de DTM, (c) renforcement des structures allongées par RORPO, (d) détection des segments par FBSD, (e) sélection de graines de route et (f) extraction de routes.

proposé dans la *Section 4.5.2*, est utilisé pour extraire des segments sur l'image résultante de RORPO. L'avantage de la méthode est qu'elle peut être exécutée en mode automatique, avec peu de paramètres à régler. Dans le cas présent, le seul réglage est le paramètre d'épaisseur assignée ε_0 . Dans les expérimentations, nous le fixons à 7 pixels afin de faire face à des bords de route légèrement incurvés (voir *Figure 4.48 (d)*). Ainsi seuls les bords longs (plus de 80 pixels) sont conservés pour ce qui suit la détection.

Enfin, les segments orthogonaux sont répartis à intervalles réguliers le long des segments détectés (voir *Figure 4.48 (e)*). Ils constituent les graines de la prochaine étape de l'extraction des routes. Une longueur de graine de 40 pixels (correspondant à 20 mètres dans le jeu de données testé) est sélectionnée pour garantir le franchissement de routes larges avec une marge de sécurité suffisante pour faire face à d'éventuelles courbes de route. Une valeur d'intervalle de 24 pixels est définie comme un bon compromis entre une détection multiple inutile de bouts de route et un risque réduit de manquer certaines sections de route dans les zones occluses du nuage de points.

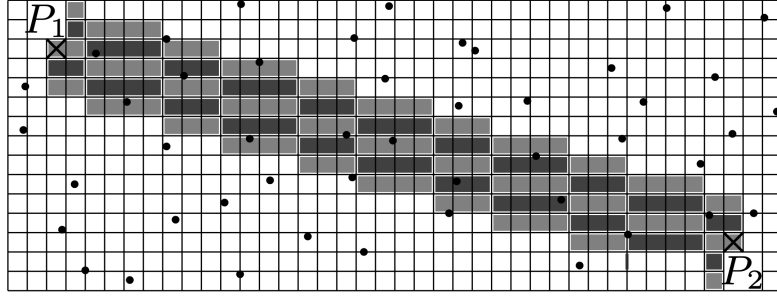


FIGURE 4.49 – Intégration du nuage de points 3D (points noirs) du LiDAR dans une grille \mathcal{G} . Les coupes transversales peuvent être facilement extraites à partir de \mathcal{G} . En gris, une coupe transversale sous le segment naïf de P_1P_2 , et les premiers scans du balayage directionnel adaptatif défini à partir de P_1P_2 .

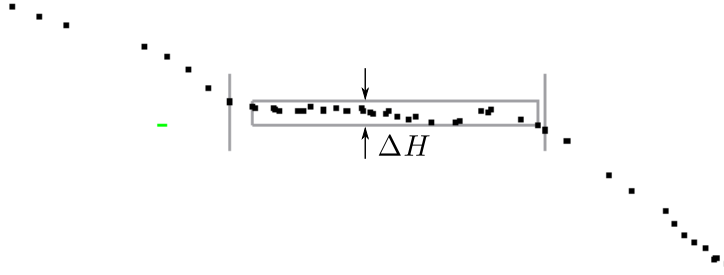


FIGURE 4.50 – Modèle de route forestière à partir d'un profil altimétrique. Une route est modélisée par un plateau contenant plus de points consécutifs dans le profil. Le segment flou d'épaisseur ΔH matérialise ce plateau.

Extraction de route à partir de données LiDAR

Dans cette deuxième étape qui est la partie principale et la plus importante de la méthode, les données LiDAR brutes sont utilisées. Ces données sont stockées sous forme d'un ensemble de points 3D qui couvre toute la zone d'acquisition. Les points classés sol sont ensuite extraits et projetés sur une grille de haute résolution \mathcal{G} (voir Figure 4.49). Cette structure de grille permet des accès faciles et rapides aux points stockés dans chaque cellule et aux coupes transversales (appelées aussi *profils altimétriques*) de \mathcal{G} . Le balayage directionnel adaptatif est ensuite appliqué sur \mathcal{G} à partir des graines sélectionnées pour l'extraction de routes forestières. Plus précisément, une route est composée d'une suite de coupes transversales. Chaque coupe peut être modélisée par un segment flou horizontal d'épaisseur ΔH (voir Figure 4.50). Un tel modèle de profil altimétrique d'une route est assez similaire à celui utilisé dans [127] à des fins de gestion forestière, ce qui s'est révélé bien adapté au contexte du relief montagneux.

Le processus d'extraction comprend deux phases principales : (1) pour chaque graine (sous forme d'un segment), un *profil de plateau de route* est détecté pour la coupe transversale sous le segment, et (2) le profil est suivi des deux côtés pour obtenir une section complète de route.

Une version simplifiée de la première détection de plateau est décrite dans l'*Algorithme 5*. On vérifie tout d'abord qu'un nombre suffisant de points (N_{min}) soit fourni dans la suite de points \mathcal{S} d'une coupe transversale (Ligne 2). On cherche ensuite le segment flou d'épaisseur ΔH contenant le plus de points consécutifs de \mathcal{S} (Lignes 3 – 6). Le segment flou est considéré comme un plateau routier s'il contient suffisamment de points (N_{min}) et a une certaine longueur (D_{min})

Algorithme 5 : Détection d'un plateau de route forestière.

Entrées : \mathcal{S} une coupe transversale – suite de points – triée par distance horizontale
 N_{min} le nombre minimal de points
 D_{min} la longueur minimale

Sortie : Le plateau détecté \mathcal{H} (s'il existe et \emptyset sinon)

```

1 Début
2   Si Taille ( $\mathcal{S}$ )  $\geq N_{min}$  alors
3      $\mathcal{V} \leftarrow \text{TrierParHauteur}(\mathcal{S})$ 
4      $\mathcal{V}_{opt} \leftarrow \text{ChercherHauteurOptimale}(\mathcal{V})$ 
5      $H \leftarrow \text{HauteurMinimale}(\mathcal{V}_{opt})$ 
6      $\mathcal{H} \leftarrow \text{ChercherPlusLongueSequence}(\mathcal{S}, H)$ 
7     Si Taille ( $\mathcal{H}$ )  $\geq N_{min}$  et Longueur ( $\mathcal{H}$ )  $\geq D_{min}$  alors
8       Retourner  $\mathcal{H}$ 
9     alors
10      Retourner  $\emptyset$ 
11   FinSi
12 FinSi
13 Fin
```

(Ligne 7). Pour les expérimentations, on fixe $\Delta H = 0.1$ m (cela suffit pour faire face à la plupart des irrégularités de la chaussée), au moins $N_{min} = 6$ points sont nécessaires pour un plateau comme étant détecté de manière fiable, et $D_{min} = 3$ m pour les routes forestières.

La même procédure est considérée pour détecter les prochains plateaux des deux côtés de la première détection. En particulier, on utilise le balayage directionnel adaptatif pour déterminer les coupes transversales à traiter. Des optimisations peuvent être faites pour cette étape de suivi en exploitant la cohérence spatiale de la détection des profils le long de la courbe. Plus précisément, on considère les points dans l'intervalle de hauteur proche de la détection précédente, et l'on utilise les deux bords de plateau pour limiter la recherche. Par conséquent, moins de points sont traités.

Pour l'extraction automatique de routes forestières, cette étape de détection du premier plateau et de suivi est exécutée pour toutes les graines sélectionnées précédemment. Une description complète de la méthode est donnée dans les articles associés [C7], [C11].

Expérimentations

Nous présentons ci-dessous un aperçu des résultats obtenus avec la méthode proposée. Ces résultats sont extraits de l'article [C7]. Il faut aussi mentionner que nous utilisons une version parallélisée basée sur OpenMP¹⁰ de RORPO afin d'accélérer l'étape d'extraction des graines.

Nous testons notre méthode sur le jeu de données disponibles du projet SolHoM-Fossard. Les données couvrent environ 78 km², soit toute la montagne Fossard. Elles contiennent environ 755 millions de points pour une densité moyenne de 9,65 points/m². Cependant la répartition n'est pas homogène en raison de la présence de nombreuses plantations étroites de conifères.

Dans le cas présent, l'ensemble du traitement du Fossard prend 1747 s (≈ 29 minutes) sur processeur Intel i7, 840 s pour l'étape de sélection des graines et 907 s pour l'extraction finale des routes à partir de données brutes. La plupart des routes détectées sont visuellement correctes (voir un exemple sur la Figure 4.51). Dans l'état actuel, la méthode proposée extrait les routes en détectant simplement les plateaux. Elle n'estime pas la dérive de la route et ne permet pas de

10. <https://www.openmp.org>

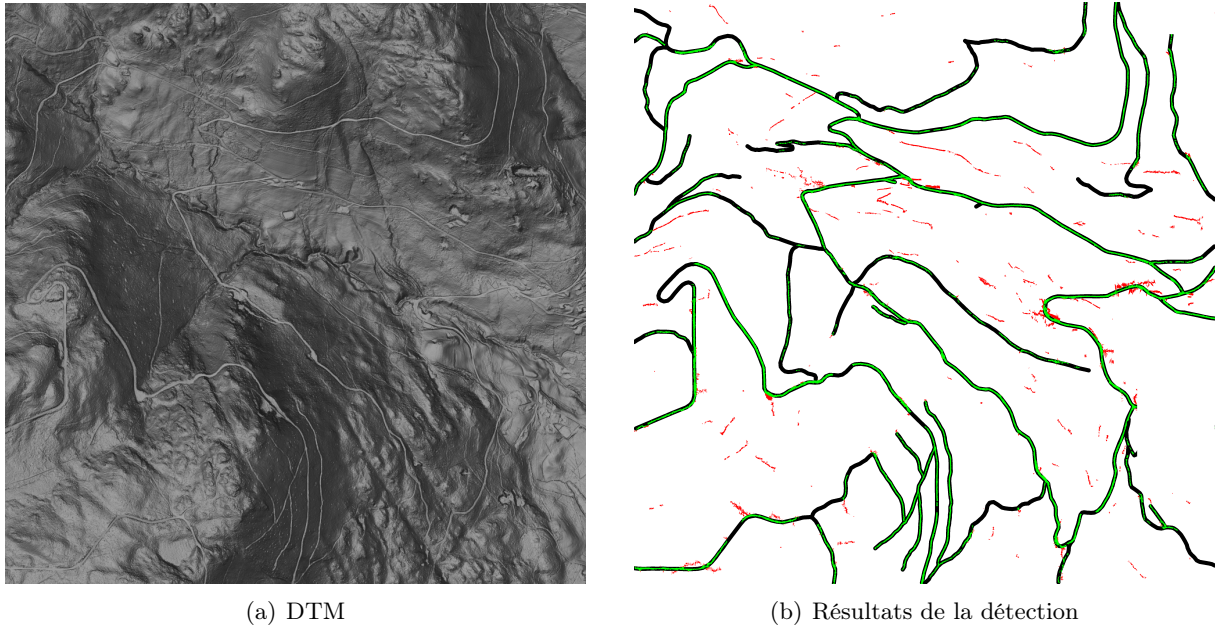


FIGURE 4.51 – Résultats de la détection des routes forestières sur le secteur Grand-Rupt : (a) Image de DTM, (b) carte de précision : vérité terrain dilatée en noir, détection correcte (vrais positifs) en vert et fausse détection (faux positifs) en rouge.

prédire les changements de direction rapides. Par conséquent, de nombreuses courbes serrées ne sont pas détectées. La plupart des fausses détections se produisent dans des zones à fort dénivelé où le modèle de route n'est pas bien adapté, ou le long de certains thalwegs, d'anciennes reliques de route ou de champs aménagés pour la culture. Plus généralement, un filtrage doit être ajouté à la sortie pour fournir des données plus précises telles que la largeur de la route ou la ligne médiane.

Pour une évaluation plus quantitative, d'autres expérimentations sont également effectuées sur quatre secteurs de taille plus petite (environ 4 km²). Deux d'entre eux (*Saint-Mont* et *Tête des Cuveaux*) comprennent des zones aménagées pour la marche avec quelques clairières de bois et une grande variété de pistes près de la vallée urbanisée de la Moselle. Les autres (*Gris-Mouton* et *Grand-Rupt*) correspondent aux secteurs classiques d'exploitation du bois, le dernier comportant des routes plus standardisées.

Le résultat obtenu par la méthode proposée est comparé avec des extractions manuelles des routes les plus saillantes dans les vues DTM des quatre secteurs. Les résultats sont résumés dans le *Tableau 4.8* avec les critères suivants : la densité de points (D), le temps d'exécution (T), le rappel (R), la précision (P) et la F-mesure (F) [325]. Les résultats de précision obtenus (environ 70 %) sont cohérents avec les caractéristiques du secteur local, et tout à fait corrects si l'on considère la diversité des types de routes traitées et surtout la variabilité de leurs caractéristiques géométriques le long de leur parcours. De plus, le mode supervisé peut être utilisé en complément pour compléter les tronçons de route manquants.

Extensions aux objets de structures linéaires

Dans le cadre du projet interdisciplinaire SolHoM-Fossard, nous voulons étudier les impacts passés et présents de l'activité humaine sur le paysage actuel ; pour ce projet, il s'agit de la zone

Secteur	D (pts/m ²)	T (s)	R (%)	P (%)	F (%)
Saint-Mont	8.62	28.70	67.4616	74.8994	70.9862
Gris-Mouton	6.86	30.18	69.8697	88.1259	77.9431
Grand-Rupt	7.47	27.55	73.0137	78.3710	75.5976
Tête des Cuveaux	8.95	32.62	68.7293	80.4931	74.1475

TABLE 4.8 – Mesures de performance de l'extraction des routes forestières.

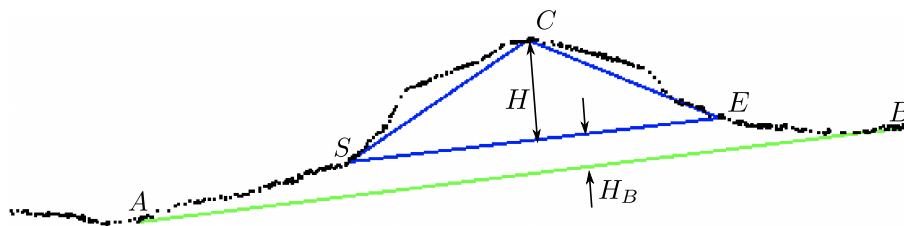


FIGURE 4.52 – Modèle de structure en forme de crête à partir d'un profil altimétrique.

boisée située au cœur de la montagne vosgienne dans l'Est de la France. Plus concrètement, les archéologues recherchent des vestiges de structures artificielles et leur organisation géographique, tandis que les géomorphologues cherchent à distinguer les reliefs naturels des reliefs anthropiques. Plus concrètement, nous nous intéressons aux objets de forme allongée comme les murs, fossés, anciennes pistes, limites de parcelles, bancs agricoles, *etc.*

Dans ce contexte, le but de notre travail est de développer un outil générique et simple pour extraire ces structures linéaires/curvilignes des données LiDAR brutes et permettre une visualisation détaillée de leurs profils sur des vues DTM. L'outil sera ensuite utilisé par les spécialistes afin de les aider à détecter des objets d'intérêt et à les comparer aux enquêtes sur site pour des validations plus fines en collaboration avec des équipes sur le terrain. Une des contraintes demandées de l'outil est que les réponses doivent être rapides pour assurer un niveau d'interaction suffisamment efficace avec ses utilisateurs.

Pour répondre à cet objectif, nous proposons d'adapter la méthode proposée précédemment pour la détection des routes à l'extraction d'objets curvilignes dans un contexte supervisé dans lequel l'utilisateur indique simplement où l'extraction doit avoir lieu. Dans ce cadre, les structures curvilignes en forme de crête peuvent être modélisées par le déplacement d'un profil convexe dans une direction orthogonale le long d'une courbe 3D. Un tel modèle couvre un large éventail de formes à différentes échelles ; par exemple, des petits murs de délimitation communaux de moins d'un mètre de haut, jusqu'aux falaises ou crêtes pouvant atteindre plus de cinquante mètres de haut dans le secteur étudié.

Une illustration du modèle de structure en forme de crête est donnée sur la *Figure 4.52*. Ce modèle est défini par la ligne de base $[AB]$ (obtenue par l'enveloppe convexe des points de la coupe transversale), et le polygone convexe étant à une distance H_B de AB . Ce polygone forme une bosse dont le sommet est C , la ligne de base est SE (parallèle et de distance H_B à AB) et la hauteur H (= distance de C à SE).

La *Figure 4.53* montre un aperçu de ce que pourrait obtenir cette méthode de détection supervisée sur des données réelles. D'autres résultats sont disponibles dans l'article associé [C11]. Tout d'abord, nous effectuons la détection du bord de la plate-forme de Saint-Mont dont la position est bien identifiée et qui présente des angles vifs. Pour cela, quatre segments d'entrée étaient nécessaires pour extraire toute la circonférence de la plate-forme, et une délimitation

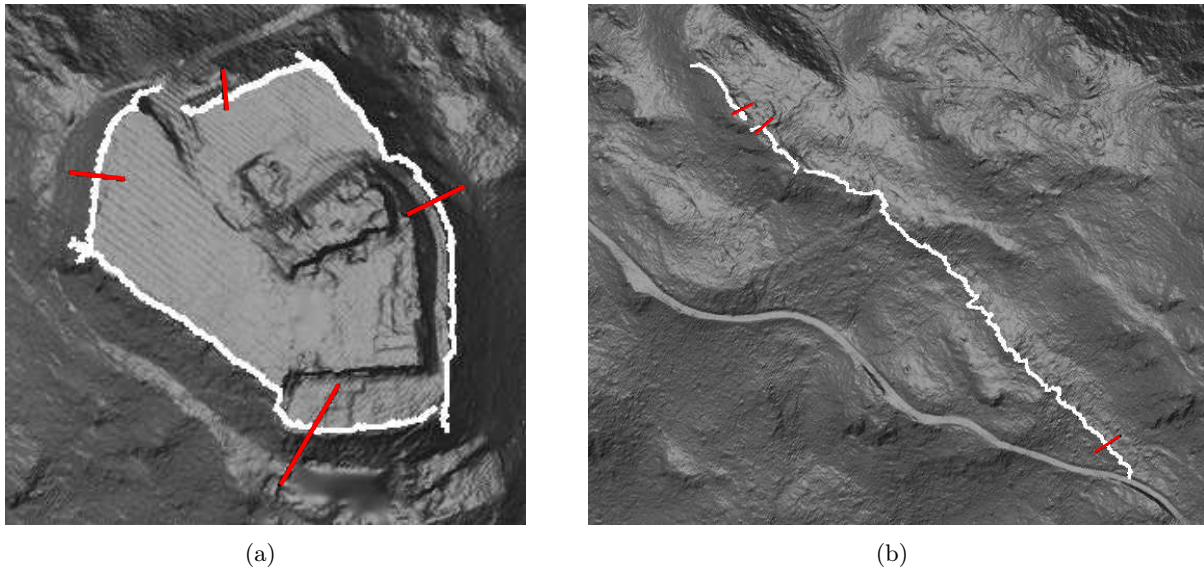


FIGURE 4.53 – Détection de structures curvilignes en forme de crête : (a) les bords de la plateforme de Saint-Mont, et (b) un ancien mur médiéval sur le massif du Fossard. Le résultat de la détection (en blanc) et les segments d'entrée (en rouge) sont affichés sur la carte DTM.

correcte est rapidement obtenue avec l'approche proposée (voir *Figure 4.53 (a)*).

Nous avons également testé la détection de structures plus diffuses comme le reste d'un ancien mur médiéval qui forme un long relief détectable allant jusqu'à 1 m de haut. Des parties de cette structure ont été étudiées par des archéologues et la détection obtenue est bien conforme à la disposition des murs. Pour cet objet, deux segments d'entrée ont été utilisés et le résultat est affiché sur la *Figure 4.53 (b)*.

Ces résultats montrent le potentiel de la méthode proposée pour aider les spécialistes à trouver des domaines d'intérêt à l'aide de données LiDAR. Les résultats expérimentaux des structures détectées sont à valider en les comparant à des enquêtes sur site avec des équipes de spécialistes de terrain. Au-delà de la simple localisation, une certaine quantification de volume peut également être fournie pour les formes de crête dont la ligne de base correspond à la tendance locale du terrain. L'approche proposée pourrait être facilement étendue à la détection des structures creuses en appliquant une symétrie autour de la ligne de base au modèle de crête. Un outil multi-plateforme pour les prospections archéologiques, nommé ILSD [C4] (pour Interactive Linear Structure Detector), a été développé et rendu disponible sous forme de logiciel open-source sur Github¹¹ sous licence GNU GPL. Un exemple de l'interface du logiciel pour l'analyse de la structure extraite est donné dans la *Figure 4.54*.

D'autres collaborations sont en cours avec Jérôme Bock et Anne Jolly de l'Office National des Forêts (ONF) Chambéry qui s'intéressent à la localisation des pistes de montagne et des sentiers, appelés aussi *dessertes*, ainsi qu'à leurs caractérisations géométriques (linéarité, surface, intensité, rugosité, *etc.*) et topologiques (le réseau routier des dessertes) à partir de données LiDAR sur un large secteur alpin (encore plus large que le Fossard). Ceci a pour objectif l'étude des cloisonnements possibles pour rendre les pistes de ski exploitables par le public. Dans ce contexte, nous proposons d'utiliser notre algorithme d'extraction automatique de routes forestières pour la topologie. Plus précisément, nous allons extraire des sections de dessertes sur les données LiDAR,

11. <https://github.com/evenp/ASDmulti>

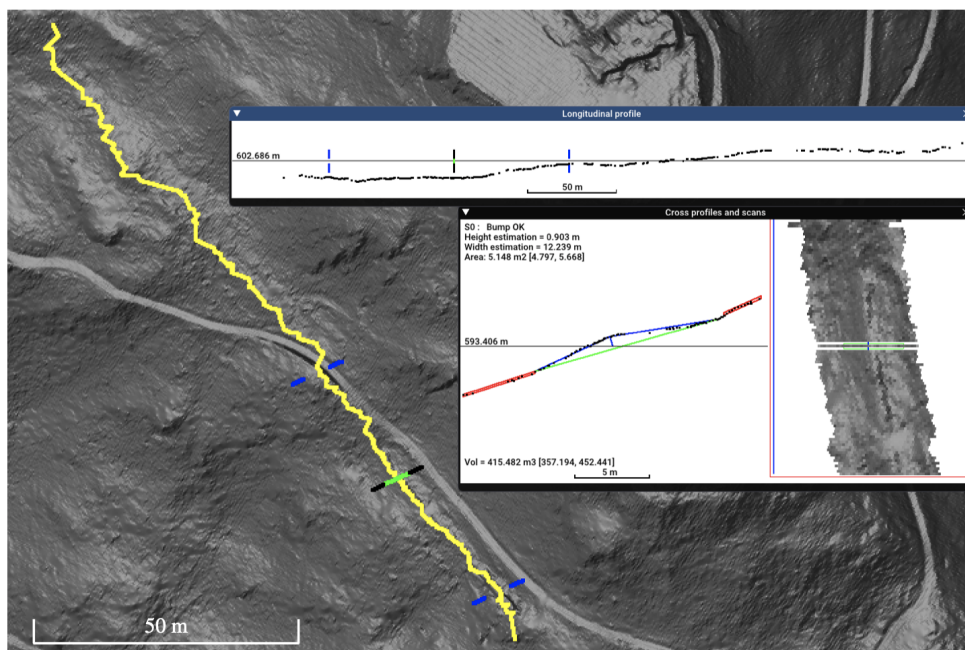


FIGURE 4.54 – Détection et analyse de la structure du ancien mur médiéval de la *Figure 4.53* avec le logiciel ILSD : les tendances locales en rouge, la bosse détectée en bleu, la ligne de base en vert, les limites de mesure en bleus, la tendance d'entrée en vert.

et les assembler en réseau pour ensuite construire un graphe représentant la structure topologique du réseau. Les premiers résultats obtenus sont encourageants. Cependant, différents problèmes ont été identifiés lors de la construction du réseau comme la connexité entre les plateaux détectés, les zones de bifurcations et de virages, ou encore l'intersection de différentes routes, *etc.* Nous continuons à travailler sur le sujet pour élaborer un algorithme de construction plus robuste et plus performant.

4.6 Conclusion et perspectives

Basé sur différents outils dans le domaine de la géométrie discrète, en particulier la primitive de *segment flou* proposée par I. Debled-Renneson [94, 95], nous avons présenté dans ce chapitre des structures géométriques pour l'analyse des courbes discrètes bruitées, à savoir la ν -couverture tangentielle et la couverture tangentielle adaptative (ATC). Plus précisément, ces structures sont construites par une suite de segments flous d'épaisseur fixe ou variable le long d'une courbe, et cette valeur de l'épaisseur permet de prendre en compte le bruit présent sur la courbe. Dans le cas 2D, ces structures ouvrent de nombreuses applications dans le domaine de l'analyse d'images et de la reconnaissance de formes. Une synthèse de différentes applications est également présentée dans ce chapitre pour l'analyse de formes et de contours : les divers estimateurs géométriques, la détection de points dominants, la simplification polygonale, la décomposition d'une courbe en arcs et segments, *etc.*

Il faut mentionner que, en combinant notre outil avec celui de l'analyse de bruit local des épaisseurs significatives (MT) proposé par B. Kerautret [201], la procédure de calcul de ATC_{MT} est sans paramètre. Cet outil permet une analyse géométrique performante et localement adaptée au bruit sur la courbe. Comme déjà mentionné dans la *Section 4.2.3*, les épaisseurs significatives

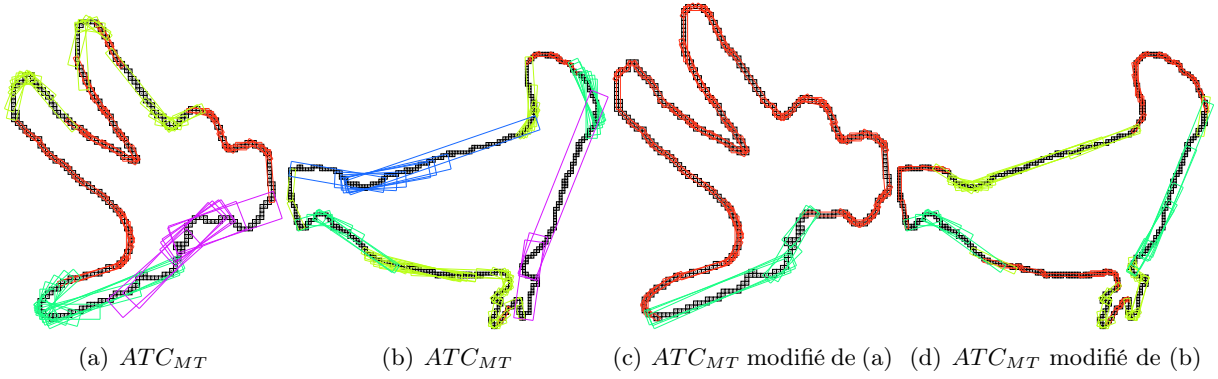


FIGURE 4.55 – Exemples d’ATC avec le détecteur d’épaisseurs significatives des contours discrets de différentes formes. (a) – (b) ATC avec une maximum de bruit qui s’adapte moins bien sur les zones contenant des coins. (c) – (d) ATC avec le niveau de bruit le plus fréquent dans le segment.

sont assez sensibles aux zones *pointues* de la courbe. Avec le calcul de ATC_{MT} par la fonction d’association de niveau de bruit $f = \max$ (Algorithme 2), on observe souvent qu’il existe des segments flous de grande épaisseur qui englobent certains détails significatifs de la courbe, en particulier lorsque celle-ci contient des coins (voir Figure 4.55 (a)–(b)). Par conséquent, la propagation des épaisseurs significatives les plus grandes n’est peut-être pas une stratégie adéquate pour les objets de *forme polygonale*. Nous avons donc réfléchi sur d’autres stratégies plus pertinentes pour l’étape d’étiquetage des points de la courbe. Un premier travail a été réalisé pour améliorer la construction de l’ATC. En se basant sur le principe selon lequel une épaisseur significative élevée dans un coin apparaît principalement comme une valeur singulière tandis que celle causée par le bruit est une valeur répétitive sur la courbe, nous pourrions utiliser l’épaisseur la plus fréquente pour étiqueter les points de segments flous constituant ATC_{MT} . Autrement dit, une épaisseur significative plus fréquente signifie une probabilité plus élevée de présence de bruit. La Figure 4.55 (c)–(d) montre un aperçu de ce que pourrait donner cette stratégie. On peut observer que la nouvelle ATC contient des segments flous qui s’adaptent mieux à la forme que ceux de la précédente.

Toujours sur l’estimateur de bruit, comme mentionné, nous avons étudié l’ATC avec le détecteur de bruit des épaisseurs significatives. Dans les travaux à venir, nous pourrions considérer d’autres estimateurs de bruit pour l’ATC. En effet, dans la Définition 86, l’ATC est définie avec n’importe quel estimateur de bruit \mathcal{E} ; la seule contrainte est que \mathcal{E} doit fournir un vecteur de niveau de bruit pour chaque point du contour. Parmi les méthodes de détection du bruit local, nous pouvons citer le travail de Elder et Zucker [116] qui utilisent un modèle local flou d’un contour de Kervrann [202] avec l’utilisation d’une reconstruction locale par morceau à travers une méthode statistique, ou de Chen [64] qui se base sur la mesure de discontinuité locale, *etc.* Nous pouvons également envisager de concevoir un estimateur de bruit pour l’ATC en étudiant les caractéristiques et propriétés des primitives composées de l’ACT.

De plus, par construction, l’ATC exige le calcul des ν -TC avec différents niveaux de bruit ν détectés sur la courbe, puis l’algorithme élimine certains segments selon des critères d’inclusion. Au final moins de 20% de segments sont retenus pour l’ATC¹². Nous souhaitons élaborer un algorithme de construction plus performant. Pour cela, un travail à court terme est d’étudier des stratégies incrémentales pour la construction de l’ATC, au lieu de calculer les ν -TC pour

12. Ce résultat est observé expérimentalement.

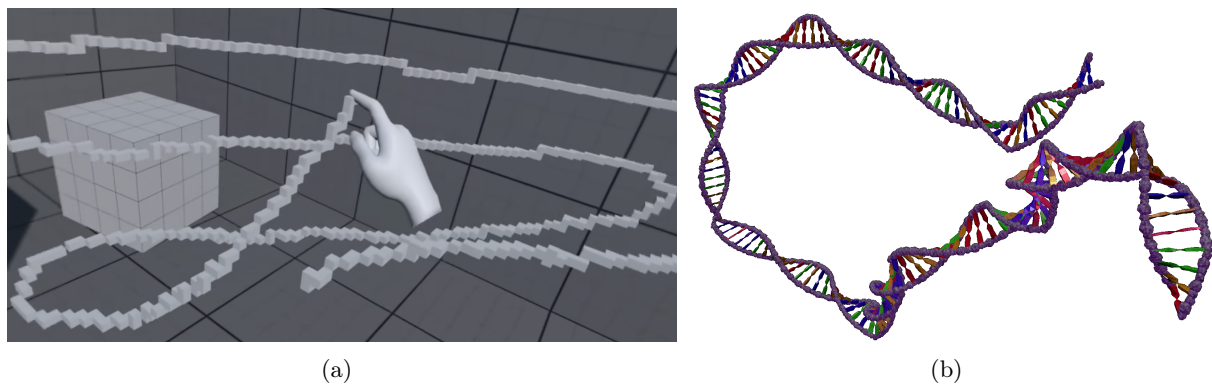


FIGURE 4.56 – Exemples de courbes 3D pour l'analyse des caractéristiques géométriques avec l'outil de l'ATC 3D : (a) une courbe discrète générée à la main dans l'environnement de réalité virtuelle avec Oculus Quest, et (b) le modèle 3D de la structure de l'ADN.

tous les niveaux de bruits. D'autres stratégies peuvent impliquer le parallélisme pour accélérer la détection du bruit et la construction de l'ATC.

Une extension en 3D de la notion d'ATC aux courbes bruitées 3D est également proposée dans ce chapitre. La construction de l'ATC 3D consiste à utiliser les courbes 2D projetées de la courbe 3D dans les plans de projection, à savoir (Oxy), (Oxz) et (Oyz). Pour la détection de bruit, l'estimateur des épaisseurs significatives est appliqué sur les courbes 2D et ensuite combiné pour donner le niveau de bruit associé à chaque point 3D de la courbe d'entrée. Nous avons présenté deux estimateurs de caractéristiques géométriques aux courbes 3D bruitées en utilisant l'ATC 3D : l'estimateur de la tangente et de la courbure. D'autres applications de cet outil sont en cours d'étude, par exemple la segmentation d'une courbe 3D, la détection des points dominants 3D, *etc.* Il est possible d'appliquer l'ATC 3D pour l'analyse des données réelles comme les coordonnées 3D des trajectoires issues de GPS ou des capteurs 3D comme le casque de réalité virtuelle Oculus Quest¹³ (voir *Figure 4.56 (a)*). En bio-informatique, on s'intéresse souvent au calcul de la courbure 3D de l'ADN (Deoxyribonucleic acid (DNA) en anglais) [43, 339]. En effet, la courbure peut constituer un facteur important dans de nombreux processus biologiques comme la transcription ou la réplication de l'ADN. De nombreux travaux ont été menés pour étudier le rôle de la courbure de l'ADN dans la régularisation des gènes [15, 43, 94, 106, 425]. Dans ce contexte, nous voudrions utiliser des outils de géométrie discrète comme l'ATC pour étudier des courbes formées par des modèles discrets des séquences d'ADN (voir *Figure 4.56 (b)*).

En 3D, comme le nombre de segments flous à considérer est plus important qu'en 2D, une construction incrémentale de l'ATC 3D peut être intéressante. Pour cela, nous pourrions, par exemple, construire progressivement les segments flous 3D en ajoutant point par point la courbe 3D et vérifiant les projections valides du segment. De cette façon, nous n'aurions pas besoin de calculer tous les segments flous des ν -TC. Ce cas nécessiterait une nouvelle stratégie pour déterminer le niveau de bruit à chaque point de la courbe 3D.

Une autre perspective rejoignant la précédente est de développer un détecteur de bruit sur des courbes 3D. Un premier travail a commencé avec le stage de Loïc Hormain, encadré par Bertrand Kerautret et Isabelle Debled-Renneson, qui cherche à étendre le principe des échelles significatives sur des courbes 3D en étudiant le comportement de la primitive des segments de droites standards 3D. Les premiers résultats sont encourageants car un comportement similaire

13. <https://www.oculus.com/>

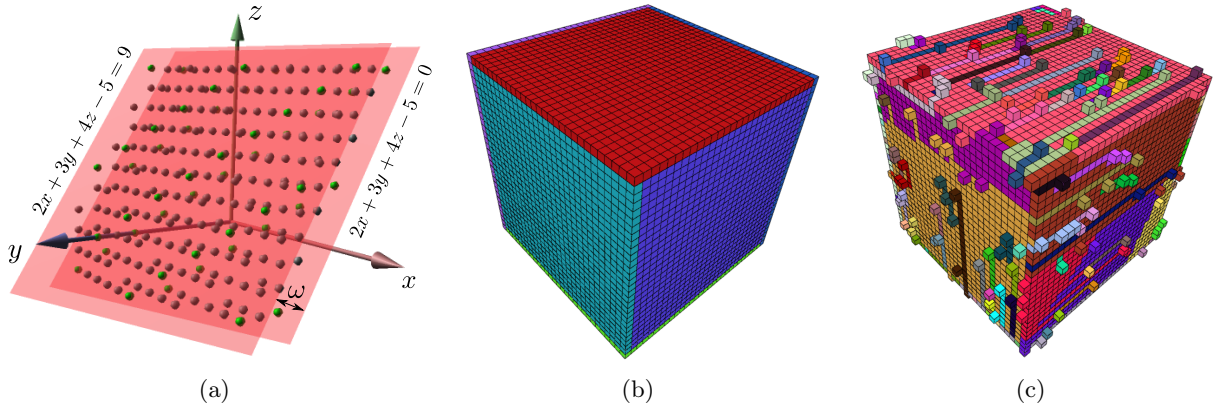


FIGURE 4.57 – (a) Exemple de plan discret analytique $P(2, 3, 4, -5, 10)$. (b – c) Segmentation en plans discrets naïfs de surface discret : (b) d’un cube régulier et d’un cube bruité (c) en utilisant l’algorithme de Digital Surface Decomposition (DSD) [386, 387]. Images (b – c) issues de [330].

est observé pour les segments 2D avec les mêmes bornes de $\Omega(\frac{1}{h^{\frac{3}{2}}})$ et $\mathcal{O}(\frac{1}{h^{\frac{3}{2}}})$ avec h la résolution de la grille. Ce travail pourrait être continué avec les segments flous 3D pour la détection des épaisseurs significatives qui seraient utilisées pour la construction de l’ATC 3D.

Dans la continuité des outils d’analyse d’objets 3D, une perspective intéressante est d’étudier des primitives de plans 3D pour les surfaces discrètes. Dans [118], un plan discret analytique P de coefficients $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$, $\text{pgcd}(a, b, c, d) = 1$ et d’épaisseur $\omega \in \mathbb{N}^*$ est défini par

$$P(a, b, c, d, \omega) = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : 0 \leq ax + by + cz + d < \omega\} \quad (4.23)$$

Un exemple de plan discret est donné sur la Figure 4.57 (a). L’épaisseur ω permet de contrôler la connexité du plan 3D [118, 344]. En particulier, le plan P est dit *naïf* si $\omega = \max(|a|, |b|, |c|)$ et *standard* si $\omega = |a| + |b| + |c|$. Un ensemble de point $S \subset \mathbb{Z}^3$ est un *morceau de plan discret* s’il existe un plan discret $P(a, b, c, d, \omega)$ tel que $S \subset P$. Il faut savoir que la question de la planéité d’un ensemble de points de \mathbb{Z}^3 a été profondément étudiée dans le domaine de la géométrie discrète (voir [52, 68, 118, 94] pour un état de l’art). Des algorithmes efficaces, en temps quasi-linéaire, sont également proposés pour la reconnaissance des plans discrets [55, 56, 60].

À partir de la définition de plan discret, plusieurs outils géométriques ont été proposé pour étudier les propriétés des surfaces discrètes associées aux objets discrets 3D, par exemple des estimateurs de l’aire de la surface [210], de la normale [61], de la courbure [71, 242] en un point du bord de l’objet, ou encore la décomposition en primitives géométriques des surfaces discrètes [137, 386, 387]. Un exemple de la segmentation en plans discrets naïfs par l’algorithme de Digital Surface Decomposition (DSD) [386, 387] est donnée sur la Figure 4.57 (b). On peut observer sur la Figure 4.57 (c) que la méthode est moins pertinente sur des objets bruités. Ce qui est souvent le cas dans des applications avec des données réelles, par exemple des données LiDAR ou des IRM.

Dans le contexte de l’analyse des surfaces discrètes bruitées, la notion de plan flou d’épaisseur ν a été proposée dans [331] avec la même idée que les segments flous. Cette notion permet de mieux s’adapter aux données bruitées. Sur le même principe que la couverture tangentielle en 2D, on cherche à déterminer des primitives de plan maximal qui couvrent la surface de l’objet 3D. Ces plans doivent être caractéristiques de la géométrie locale de la forme ; en particulier, elles doivent agir comme un plan tangent local. Il faut savoir que l’extension à la 3D n’est cependant

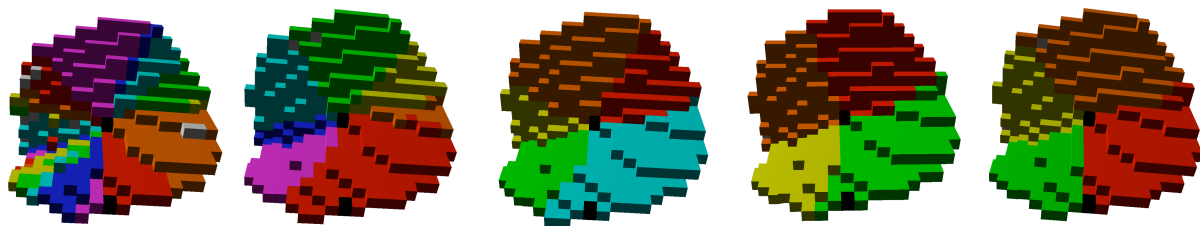


FIGURE 4.58 – Illustration de l’approche locale sectorielle sur une surface concave par un découpages en secteurs planaires avec différentes épaisseurs. De gauche à droite, les épaisseurs des plans varient de 1 à 2 avec un pas de 0.25.

pas triviale parce qu’il n’y a pas d’ordre canonique des points sur une surface discrète. En effet, il a été démontré que ce problème est NP-difficile [385]. Dans la littérature, des approches basées sur des algorithmes gloutons (greedy algorithms en anglais) [54, 137, 210, 331] ou d’analyse locale avec des disques maximaux [61] ont été proposées pour essayer de trouver une décomposition en plans discrets des surfaces 3D. Les résultats obtenus sont déjà très intéressants.

Inspiré par des stratégies utilisées pour classer les surfaces [284], nous pouvons calculer une couverture tangentielle 3D en considérant une *notion progressive de voisinage d’un point*. Plus précisément, nous utilisons des motifs en forme de disque, décomposés en secteurs avec un rayon croissant, et puis testons les secteurs pour la planéité sur laquelle nous introduisons la maximalité par rapport aux inclusions de secteur, appelée *approche locale sectorielle*. Cette construction imite la représentation d’un cube discret à partir de l’un de ses sommets en tant qu’éventail de morceaux de plans. Sur ce sujet, un premier travail a commencé avec le stage de Baptiste Millotte, encadré par F. Festchet, I. Debled-Rennesson et moi-même. Les résultats obtenus sont assez positifs (voir Figure 4.58). D’autres travaux sont en cours avec la thèse d’Aude Marêché. L’approche sectorielle avec des plans maximaux ouvrira de nombreuses perspectives pour l’étude des propriétés géométriques des objets 3D : l’estimateur de la normale et de la courbure en chaque point de la surface, la détection des parties courbées et plates sur la surface ou la décomposition en parties convexes et concaves d’une surface, l’estimation du bruit sur une surface, *etc.*

En combinant notre approche avec d’autres outils comme le balayage directionnel, nous avons développé des applications dans le domaine du traitement et de l’analyse d’images pour la détection et la reconnaissance d’objets, mais également pour le traitement de données 3D comme des nuages de points venant du LiDAR ou des cartes de profondeurs à partir de systèmes d’acquisition de type *Kinect* [®], *etc.*

5

Traitement et analyse d'images du bois

Sommaire

5.1	Introduction	141
5.2	Extraction des caractéristiques du bois dans des images de grumes	144
5.2.1	Contexte et problème	144
5.2.2	Détection de la moelle	147
5.2.3	Filtres directionnels pour l'analyse des cernes	150
5.2.4	Segmentation du duramen	158
5.2.5	Expérimentations	163
5.3	Extraction automatique des défauts sur écorce de troncs d'arbres	169
5.3.1	Contexte et travaux existants	169
5.3.2	Outils géométriques	172
5.3.3	Carte de reliefs de la surface du tronc	175
5.3.4	Segmentation automatique de défauts externes	178
5.3.5	Expérimentations	182
5.4	Conclusion et perspectives	182

Nous présentons dans ce chapitre de travaux récents sur la caractérisation géométrique et biologique d'images de bois. Ces travaux sont issus de la collaboration avec des chercheurs de l'Institut National de Recherche pour l'Agriculture, l'Alimentation et l'Environnement (INRAE) à Champenoux. Cet axe de recherche s'inscrit dans le cadre de deux projets ANR et de deux thèses en cours : le projet **ANR TreeTrace** avec la thèse de Rémi Décelle et le projet **ANR WoodSeer** avec la thèse de Florian Delconte.

5.1 Introduction

Le bois fait partie des matières premières d'origine biologique. Il est un matériau renouvelable qui possède des propriétés favorables d'un point de vue écologique mais également pour une utilisation structurelle. Ses caractéristiques et sa qualité sont très variables en fonction des facteurs génétiques et environnementaux. Dans le domaine de la biologie et des sciences de l'environnement, l'étude de la structure interne et externe du bois permet de comprendre les propriétés physiques, mécaniques et chimiques du bois [158] et aussi les impacts environnementaux [335].



FIGURE 5.1 – Exemple d'images de sections transversales de grume dans le cadre du projet.

Dans un contexte industriel et commercial, l'utilisation du bois comme matériau dépend de sa qualité, et le prix de vente du bois en dépend donc également fortement de sa qualité. En particulier, les arbres développent des *singularités*, appelé aussi *défauts*¹, propres à leur espèce et à leur environnement. L'évaluation de la qualité d'un arbre se fait et à partir de la présence de défauts, de leur nombre, de leur distribution et de leurs dimensions [6]. En général, cette qualité décroît avec le nombre et la taille des défauts. En d'autres termes, la détection et la reconnaissance des défauts sur le tronc est une étape importante pour caractériser et classer les arbres ou les bois ronds. Il faut savoir que cette étape de l'estimation de la qualité et des défauts du bois se fait à l'œil par des experts. Cela peut être une source d'erreur et coûter cher.

Dans ce contexte, les chercheurs de l'INRAE à Champenoux s'intéressent particulièrement à la détection et la reconnaissance des défauts du bois pour l'estimation de sa qualité. En particulier, deux projets ANR sont en cours sur le sujet avec différentes spécificités et méthodes.

Le premier est le projet **ANR TreeTrace**² sur *les empreintes biométriques des arbres : traçabilité de la forêt à la scierie et évaluation précoce de la qualité*. Il s'agit d'un projet international bilatéral (PRCI) regroupant des partenaires français (LORIA, LaBoMaP (Arts et Métiers ParisTech) et INRAE) et autrichiens (Salzburg University of Applied Sciences et Paris-Lodron-Universität Salzburg). Partant de l'hypothèse que les caractéristiques d'une grume de bois sont présentes sur les images en coupe transversale (cross-section (CS) en anglais) de ses extrémités (voir Figure 5.1), le projet s'intéresse à la biométrie des grumes pour la traçabilité et l'évaluation de la qualité du bois à partir de technologies à bas coût et accessibles. Plus spécifiquement, deux problèmes sont étudiés : le premier concerne la question du traçage des grumes d'arbres du site d'exploitation forestière à la scierie en utilisant des techniques de reconnaissance des grumes liées à la biométrie du bois, et le deuxième est la détermination de la qualité du bois à partir des images en coupe transversale en utilisant les méthodes d'analyse et de traitement d'images. Dans ce contexte, plusieurs travaux ont été menés pour la traçabilité des grumes. Les applications vont du poinçonnage, de la coloration ou du codage des extrémités à des techniques plus récemment développées comme les méthodes basées sur les empreintes ADN [99, 254] ou les radio-étiquettes [160, 225] (radio frequency identification (RFID) transponders en anglais). Ces solutions restent cependant limitées dans leurs applications car le marquage physique demande du temps et souffre de coûts supplémentaires [423]. Le projet TreeTrace se concentre sur les approches sans marquage (physique), faciles et peu coûteuses à mettre en œuvre.

1. Les termes de *singularité* ou de *défaut* sont généralement distincts dans le contexte industriel lié à l'utilisation du bois. Par exemple, un *nœud* de l'arbre est une *singularité* d'un point de vue biologique. Dans un contexte industriel, et en particulier dans les domaines où l'esthétique est importante, un nœud peut augmenter la valeur du bois. À contrario, dans les domaines où la résistance aux forces de portée est privilégiée, ce même nœud va en diminuer la valeur. On parle alors de *défauts* plutôt que de singularités. Dans ce manuscrit, nous utilisons plus souvent le mot *défaut* pour indiquer un développement irrégulier sur l'arbre comme des nœuds, des broussins, des branches, etc. Pour la suite de ce document, ces deux termes sont considérés équivalents.

2. <https://anr.fr/Project-ANR-17-CE10-0016>

Dans ce projet, la collaboration de l'INRAE avec l'équipe ADAGIo s'adresse plus particulièrement à la deuxième tâche du projet à travers la thèse de Rémi Decelle co-encadrée par Isabelle Debled-Rennesson, Fleur Longuetaud, Frédéric Mothe (équipe WoodStock, INRAE) et moi-même. Cette thèse a commencé en octobre 2018 et porte sur *l'estimation de la qualité du bois à partir d'images issues de capteurs à bas coût*. L'objectif de la thèse est de développer des outils pour extraire automatiquement les différentes caractéristiques géométriques et biologiques sur des images de grumes de bois avant la découpe en scierie, afin d'aider les experts à les classer dans les différentes classes de qualité. Les caractéristiques pouvant être détectées sont : la moelle, les cernes de croissance, l'aubier, le duramen, *etc.* Pour cette tâche, plusieurs travaux ont été proposés [11, 117, 121, 124, 162, 304, 360]. Cependant, la plupart des méthodes développées sont à base de tomodensitomètres à rayons X [37, 46, 140, 251, 252, 429] (X-ray computerized tomography (CT) scan en anglais), ou de capteurs hyperspectraux et multispectraux (hyperspectral and multispectral imaging sensors (HMS) en anglais) [9, 126, 188, 211]. Généralement, ces appareils coûtent chers, et toutes les scieries (et les laboratoires de recherche) ne peuvent pas s'équiper de ce genre de matériel. De plus, le temps de traitement d'une grume et la formation du personnel à un scanner sont également des facteurs limitants. Comme mentionné précédemment, le projet se concentre sur des approches simples et très peu coûteuses à mettre en œuvre. Pour cela, les images en couleurs des grumes prises par les appareils photo numériques classiques répondent bien aux besoins mentionnés dans le projet. Dans la littérature, seules quelques méthodes ont été proposées pour de telles images [222, 223, 306, 372]. Dans le cadre du projet, il est également demandé que l'outil développé soit robuste, à savoir peu sensible aux différentes formes de bruit présentes sur l'image comme la luminosité ambiante ou encore la terre. Bien que ces techniques soient mises en œuvre pour l'application spécifique d'estimation de la qualité de bois, les algorithmes développés seront applicables à un large éventail d'applications de traitement d'images de bois ainsi que pour des domaines voisins où des questions similaires se posent.

La deuxième projet est l'**ANR WoodSeer**³ sur *la prédiction des défauts internes des grumes à partir de leurs caractéristiques corticales*. Il s'agit d'un Projet de Recherche Collaborative – Entreprise (PRCE) dans le thème : *Usine du futur : homme, organisation, technologies*. Il regroupe de nombreux partenaires comme INRAE, LORIA, LIRIS, GeorgiaTech, ONF, Forêts et Bois de l'Est. D'un point de vue biologique, l'écorce de l'arbre reflète l'histoire et les événements au cours de son développement et en particulier lors de sa ramification ; D'une branche vivante jusqu'à un nœud en duramen, ces différentes étapes ont un impact plus ou moins évident sur la rugosité externe de l'écorce (de légères différences de couleur peuvent également être présentes). En forêt ou dans des parcs boisés, le travail de classement du bois est souvent réalisé par des experts forestiers. Ceci demande généralement des capacités d'analyse humaines renforcées par une forte expérience et le savoir-faire de l'expert. D'autre part, les résultats d'analyse des experts forestiers transférés en aval contiennent un très peu d'informations, souvent limitées à l'espèce et au tuple (longueur, diamètre, grade) [5, 7]. C'est à partir de ces besoins que les objectifs du projet WoodSeer sont définis. Plus précisément, il vise à caractériser automatiquement les défauts des écorces de tronc d'arbres et les lier aux caractéristiques de la partie intérieure de l'arbre en établissant des relations entre eux. Ces informations pourraient être très utiles pour la chaîne d'approvisionnement en bois, et en particulier pour les processus commerciaux, en ajoutant de la transparence et en offrant la possibilité d'attribuer finement des grumes à un usage spécifique pour les clients. La contribution de l'équipe ADAGIo dans ce projet concerne la partie sur la segmentation et la classification automatiques des différents défauts d'écorces de troncs d'arbres (voir *Figure 5.2*) avec des méthodes d'apprentissage profond. Il faut mentionner

3. <https://anr.fr/Projet-ANR-19-CE10-0011>

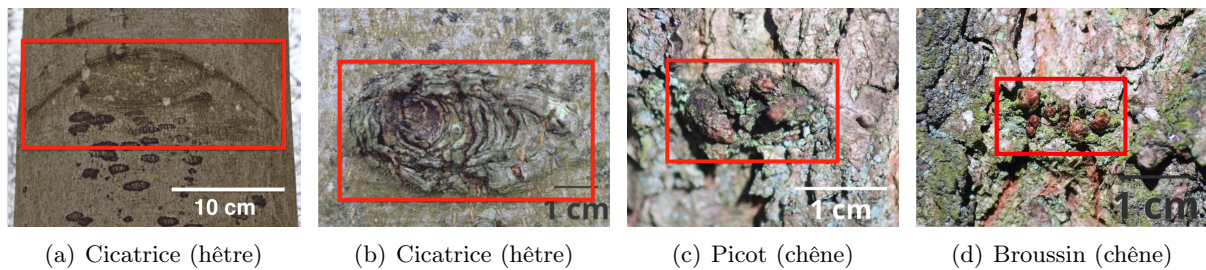


FIGURE 5.2 – Exemples de défaut du bois : cicatrices de branches, picot et broussin composé de bourgerons sur le hêtre et le chêne. Les zones défectueuses sont indiquées avec des cadres rouges.

que cette tâche de détection de défauts sur un arbre vivant n'est pas une tâche facile, car chaque type de singularité présente de nombreuses variations géométriques inter ou intra-espèces. Les *Figure 5.2* (a) et (b) illustrent un même type de défaut sur une même espèce mais présentant une forme géométrique très différente. C'est dans ce contexte que la thèse de Florian Delconte a commencé sous la direction d'Isabelle Debled-Rennesson, Bertrand Kerautret (équipe Imagine, LIRIS) et moi-même. La thèse porte sur *la recherche et la caractérisation automatique des défauts à la surface des grumes de bois*. Elle a pour objectif de développer des moyens automatisés de caractérisation du bois à partir de nuages de points 3D, en apportant une information détaillée sur la nature, la localisation et les dimensions des défauts. Sans que cela soit exclusif, les défauts à détecter sont en particulier les nœuds des branches à l'intérieur du tronc. Plusieurs études ont montré que les défauts externes peuvent être utilisés pour déduire l'information sur les défauts internes [333, 337, 397, 414]. Cependant, les recherches sur la segmentation des défauts à la surface du tronc sont assez peu nombreuses [218, 374, 397, 412, 413]. De plus, ces recherches se sont concentrées sur de larges et grands défauts [412, 413] ou sont semi-automatiques [218, 374, 397]. Il est donc nécessaire de développer une méthode générique permettant de détecter automatiquement tous les types de défauts externes liés à la ramification. Pour répondre à cette question, nous souhaitons, avec la thèse de Florian Delconte, proposer une nouvelle approche se basant sur une stratégie originale combinant apprentissage profond et géométrie pour segmenter et identifier les défauts à la surface d'arbres à partir de données LiDAR terrestres (Scanner Laser Terrestre (TLS) en anglais) à haute résolution. Une telle combinaison est un élément clé et, à notre connaissance, très peu de travaux ont été réalisés dans cette direction. Les avancées obtenues dans ce cadre pourront être néanmoins utilisées dans d'autres domaines.

Nous présentons des détails sur ces deux sujets de recherche ainsi que les premiers résultats obtenus dans la suite de ce chapitre.

5.2 Extraction des caractéristiques du bois dans des images de grumes

5.2.1 Contexte et problème

Avec le nombre croissant d'appareils d'imagerie installés dans les scieries, il est de plus en plus important d'utiliser ces données pour améliorer le flux de travail et augmenter les revenus dans les industries de transformation du bois. Dans ce contexte, des questions difficiles en matière de technologie d'imagerie et de traitement d'image se posent. Dans le cadre du projet **ANR Treetrace**, on s'intéresse particulièrement aux deux problèmes suivants : (1) la traçabilité des grumes d'arbres depuis le site d'exploitation forestière jusqu'à la scierie et (2) la détermination de

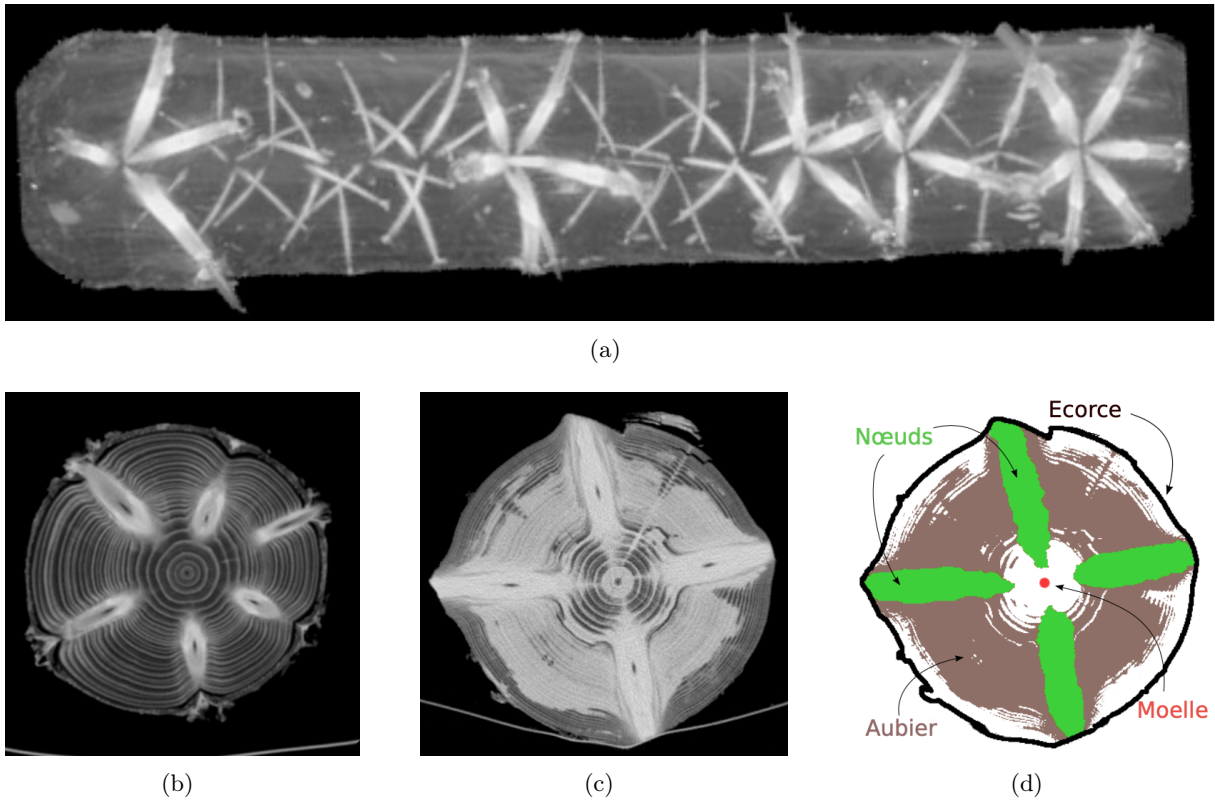


FIGURE 5.3 – Exemple d’images issues d’un scanner à rayon X : (a) le tronc d’arbre complet avec ses nœuds internes, (b) et (c) deux coupes transversales sur du bois sec (b) et humide (c), et (d) différentes caractéristiques extraites de (c). Images issues de [193].

la qualité du bois en forêt ou à la scierie. De toute évidence, ces deux cas partagent de nombreux aspects communs liés à la biométrie des grumes de bois.

En science du bois, la tomographie aux rayons X (X-ray computer tomography (CT) en anglais) est une technologie qui s’est avérée très efficace pour mesurer de manière non destructive les caractéristiques externes et internes des grumes de bois ; par exemple pour mesurer des nœuds, fissures aubier, densité du bois, *etc.* (voir Figure 5.3). Les applications de scanners CT à l’analyse du bois ont été largement étudiées au cours des 30 dernières années et encore récemment [37, 46, 140, 220, 251, 252, 357, 429]. Cependant, cette technologie reste très coûteuse et seules quelques scieries dans le monde peuvent investir dans un tel appareil. En France, une seule grande scierie de résineux en possède un et une deuxième a prévu d’investir dans un tel appareil. Plus encore, la disponibilité de ces scanners n’est pas réaliste dans la forêt.

Le projet vise des modalités plus traditionnelles (et moins coûteuses) pour acquérir des données sur la biométrie du bois comme les capteurs hyperspectraux et multispectraux ou les capteurs couleurs RVG (Red-Green-Blue (RGB) en anglais) classiques. Nous portons une attention plus particulière à ces derniers pour leur utilisation simple et adaptée à tous les terrains (*e.g.* dans l’aire de stockage de la scierie, dans la forêt de l’abatteuse ou au bord de la route). De plus, les caméras actuelles fournissent des images de qualité et de haute résolution, ce qui nous permet d’extraire les caractéristiques du bois sur de telles images en utilisant des méthodes de traitement et d’analyse d’images.

Basée sur l’hypothèse qu’une grume peut être identifiée par les images en coupe transversales

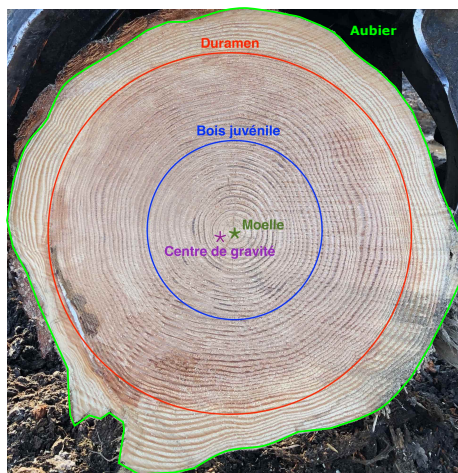


FIGURE 5.4 – Caractéristiques géométriques et biologiques sur image d'extrémité de la grume : le duramen, l'aubier, le bois juvénile, la moelle et le centre de gravité de la grume.

de ses extrémités, cette information peut être appliquée pour suivre les grumes dans la chaîne d'approvisionnement forêt – scierie. De plus, sur ces images des extrémités, nous pouvons extraire des caractéristiques liées à la qualité du bois. Comme illustré sur la *Figure 5.4*, nous pouvons extraire, par exemple, la position de la moelle (le centre d'où partent les cernes), la distance entre la moelle et le centre géométrique de la grume, la quantité de duramen (visible uniquement sur les essences à aubier différencié comme les sapins de Douglas) ainsi que des informations relatives aux cernes de croissance comme leur nombre, leur largeur moyenne ou la quantité de bois juvénile (les 15 premiers cernes).

Dans ce projet, la collaboration entre l'équipe ADAGio avec les deux chercheurs Fleur Longuetaud, Frédéric Mothe (Silva, INRAE) et Rémi Decelle consiste à développer des outils automatiques d'analyse d'images et des algorithmes avancés en vision et en apprentissage profond afin d'extraire des caractéristiques géométriques et biologiques de grumes pour une estimation de la qualité du bois. Plus spécifiquement, on s'intéresse au traitement des images RVB brutes des extrémités de grume afin d'assister l'expert de la scierie dans le classement des grumes aux différentes classes de qualité. Un tel outil pourrait aider les petites et moyennes scieries à devenir plus compétitives en utilisant des technologies plus accessibles que les scanners à rayon X.

Malgré des grands potentiels des images RVB dans ce contexte, très peu travaux ont été proposés [222, 223, 306, 372]. Cela peut être expliqué par des difficultés présentes et le contexte d'application spécifique du traitement d'images du bois. En effet, la détection automatique des caractéristiques sur une image brute des extrémités de grumes est un problème complexe en raison, d'une part, de la diversité des grumes (caractères diffus de leurs formes, variations importantes des caractéristiques géométriques et biologiques intra- et extra-espèces), et d'autre part, de l'information disponible limitée à la colorimétrie de l'extérieur de la grume. Un autre défi à mentionner est la qualité des images d'entrée – liée aux conditions d'acquisition des images – ce qui peut rendre la tâche du traitement et l'analyse de telles images difficiles. En effet, les images prises dans des environnements réels peuvent présenter des saletés sur la grume, des marques de sciages, un éclairage variable, *etc.* Quelques exemples sont donnés sur les *Figures 5.1* et *5.5*. En particulier, dans le cadre du projet, il est demandé que les méthodes développées soient être robustes vis-à-vis de ces conditions. De plus, la contrainte de temps de traitement et la puissance de calcul sont aussi des facteurs importants pour pouvoir les utiliser dans des environnements



FIGURE 5.5 – Exemples d’images capturées dans une zone de stockage des bois. Dans les conditions réelles, les images de grumes peuvent contenir des perturbations : des conditions de luminosité différentes, de la terre ou de la saleté, des marques de sillage.

réels (à la scierie ou au bord de route) et sur les appareils portables à faible coût (la caméra numérique ou le téléphone portable).

Dans la suite, nous présentons les méthodes développées dans le cadre de la thèse de Rémi Decelle pour l’extraction automatique des différentes caractéristiques du bois sur des images d’extrémité de grumes : la moelle (*Section 5.2.2*), le duramen (*Section 5.2.4*) et les cernes de croissance (*Section 5.2.3*). Les résultats expérimentaux sont présentés dans la *Section 5.2.5*.

5.2.2 Détection de la moelle

Le centre des cercles de croissance (ou anneaux annuels), également appelé la *moelle*, est l’une des caractéristiques les plus importantes à détecter car elle fournit une indice sur la qualité du bois [11, 124, 360] et elle permet aussi d’extraire d’autres caractéristiques [117, 121, 162, 304] telles que les cercles de croissance et leurs largeurs, les nœuds, le duramen (ou le bois de cœur) et l’aubier, *etc.*

À notre connaissance, seuls quatre travaux [222, 223, 306, 372] ont été publiés pour la détection de moelle sur des images RVB d’extrémités de grumes brutes et non traitées. Dans [222], une approche basée sur des réseaux de neurones profonds (deep neural network (DNN) en anglais) a été utilisée. Les trois autres méthodes reposent sur une estimation des normales aux tangentes des cernes de croissance (se basant sur l’hypothèse que les cernes les plus proches de la moelle sont assimilables à des cercles concentriques dont le centre est la moelle). Par accumulation des orientations des normales, il est possible de récupérer la moelle en prenant le point avec le plus d’accumulation. Ce principe est similaire à la transformée de Hough [112] pour détecter les droites ou des cercles dans des images. Le principal élément qui diffère entre ces trois travaux mentionnés [223, 306, 372] est le calcul de l’orientation. Norell et Borgfors [306] calculent à l’aide de filtres en quadrature et de symétrie linéaire. Schraml et Uhl [372] utilisent la transformée de Fourier. Kurdthongmee *et al.* [223] estiment l’orientation avec l’histogramme de gradient orienté (histogram of oriented gradient (HOG) en anglais). Il faut mentionner que ces méthodes nécessitent certaines conditions préalables sur les images d’entrée, par exemple, l’image de grume est segmentée avant la détection dans [306], la taille de la coupe transversale de grume et son emplacement dans l’image sont demandés pour initialiser le calcul dans [372]. Dans [223], il est indiqué que l’algorithme ne fournit qu’une approximation de la position de la moelle, et qu’il a besoin de traitements supplémentaires pour l’identifier exactement sur l’image.

Pour répondre à ce problème difficile de détection de la moelle sur l’image d’extrémité de la grume, nous proposons une nouvelle approche. En particulier, dans le cadre applicatif et réel

du projet, les images brutes sont directement traitées sans segmentation ni condition préalable. En bref, la méthode est composée de trois étapes. Tout d'abord, nous considérons une méthode basée sur un gradient lisse pour calculer les orientations locales; cette méthode était à l'origine utilisée pour les images d'empreintes digitales [176]. Ensuite, une approche probabiliste, basée sur l'optimisation des colonies de fourmis (Ant Colony Optimization (ACO) en anglais) [107], est réalisée pour accumuler les normales des cernes; il faut mentionner que cette méthode d'accumulation de normales est différente par rapport à l'état de l'art, elle permet une estimation plus robuste. Enfin, la moelle est déterminée comme le barycentre des points au-dessus d'un seuil d'accumulation donné.

La Figure 5.6 résume les trois étapes principales de la méthode proposée pour détecter la position de la moelle sur une image brute de la grume. Nous allons expliquer le principe de ces différentes étapes dans la suite. Les détails de la méthode et son implémentation sont données dans les articles associés [C9], [J14].

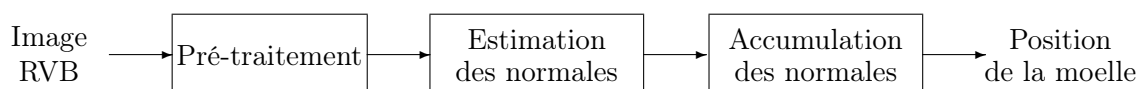


FIGURE 5.6 – Processus d'extraction de la moelle sur l'image de grume.

Pré-traitement d'image d'entrée

Les méthodes de détection de la moelle basées sur l'analyse de cernes dépendent fortement des estimations de l'orientation locale. Dans ce travail, nous traitons des images brutes dans lesquelles il pourrait y avoir des marques de sciage sur les extrémités des grumes. La présence de ces marques peut perturber l'estimation de l'orientation. Pour réduire les erreurs d'estimation et également le temps de calcul, un pré-traitement est effectué sur l'image d'entrée. Tout d'abord, l'image est convertie en niveau de gris, puis sous-échantillonnée avec un facteur s et une interpolation bilinéaire. Ensuite, nous réduisons les marques de sciage en utilisant la méthode proposée dans [305] qui est basée sur la transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform (FFT) en anglais).

Typiquement, les marques de sciage sont des lignes droites parallèles ou en forme d'éventail et pas toujours régulièrement espacées. Ce schéma répétitif suggère que le filtrage dans le domaine de Fourier convient pour les réduire. En effet, ils correspondent à la ligne passant par le centre avec une direction perpendiculaire à eux. En particulier, le niveau d'énergie sera élevé le long de cette ligne. Par conséquent, en réduisant cette énergie et en reconvertissant le spectre filtré dans le domaine spatial, les marques de sciage peuvent être supprimées ou au moins réduites.

Le processus de pré-traitement est illustré dans la Figure 5.7 (a) – (e). Nous calculons d'abord la FFT et filtrons le spectre de Fourier avec un filtre passe-bande, nous supprimons également les lignes horizontales et verticales. Ensuite, nous le limitons avec une valeur λ pour filtrer les points de grande énergie correspondant aux marques de sciage. Un ajustement de ligne, en utilisant l'analyse en composantes principales (principal component analysis (PCA) en anglais), est appliqué pour trouver la direction de la ligne. Cette ligne est ensuite filtrée avec une gaussienne d'écart-type σ et multipliée avec le spectre de Fourier d'origine pour réduire l'énergie le long de la ligne. Le résultat est reconverti en image en utilisant la FFT inverse.

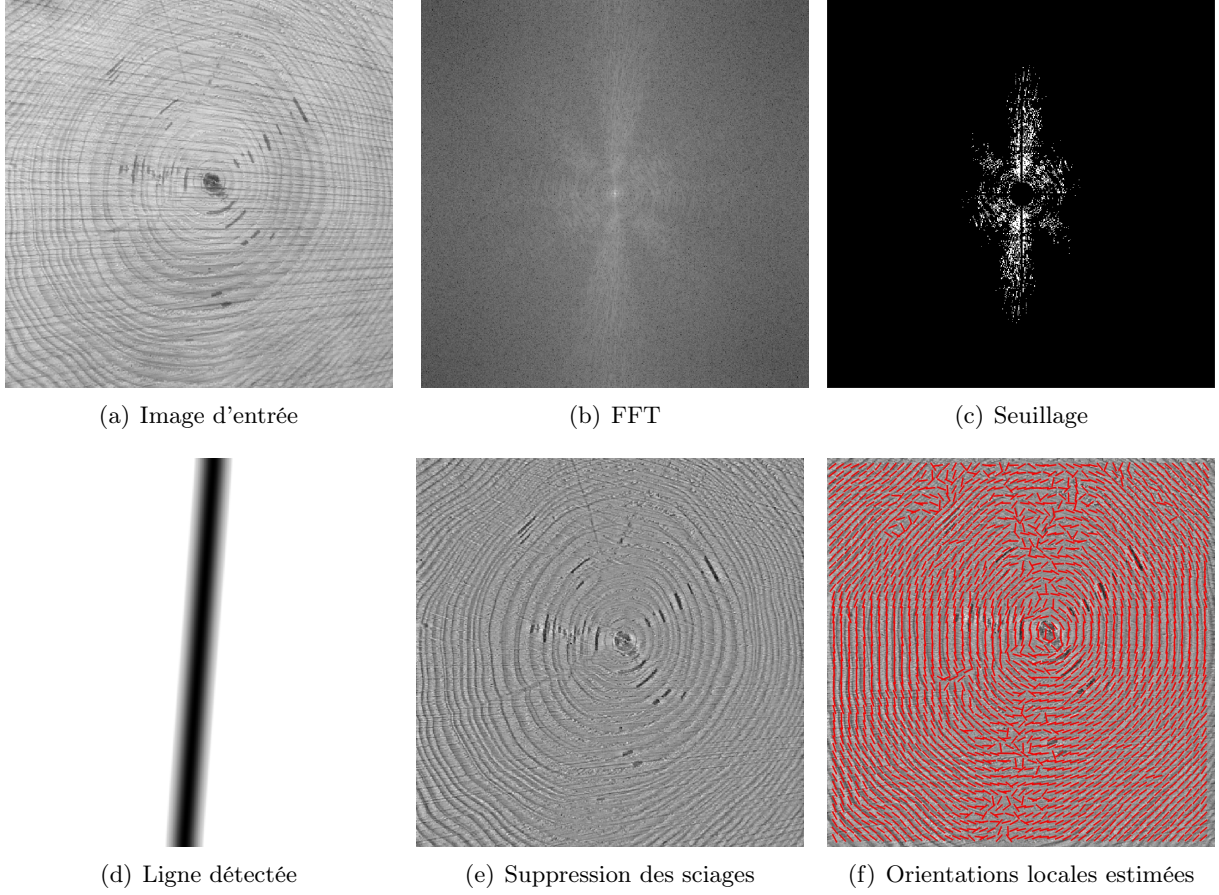


FIGURE 5.7 – Suppression des marques de sciage et estimation des orientations locales : (a) l'image d'entrée en niveaux de gris, (b) FFT de (a), (c) seuillé de (b) avec $\lambda = 0.875$, (d) la ligne détectée et filtrée par une gaussienne de $\sigma = 6$, (e) l'image résultante en éliminant les marques de sciage, et (f) les orientations locales estimées (lignes rouges) de (e).

Estimation de l'orientation locale

Inspirés par l'approche proposée dans [176] pour évaluer l'orientation locale des images d'empreintes digitales, nous proposons de l'utiliser pour les images des grumes avec les cernes. Plus précisément, les directions de normales sont calculées pour des blocs de pixels dans l'image I en utilisant la méthode basée sur un gradient lisse. Plus précisément, on calcule le gradient $\delta_x(i, j)$ et $\delta_y(i, j)$ de chaque pixel (i, j) de I par l'opérateur de Sobel [390]. L'image d'entrée I est ensuite divisée en blocs de taille $w \times w$. Le gradient pour chaque bloc centré sur le pixel (i, j) , noté $\nabla(i, j) = [\nabla_x(i, j), \nabla_y(i, j)]^t$, est estimé comme suit.

$$\nabla_x(i, j) = \sum_{u=i-\frac{w}{2}}^{i+\frac{w}{2}} \sum_{v=j-\frac{w}{2}}^{j+\frac{w}{2}} 2\delta_x(u, v)\delta_y(u, v) \quad (5.1)$$

$$\nabla_y(i, j) = \sum_{u=i-\frac{w}{2}}^{i+\frac{w}{2}} \sum_{v=j-\frac{w}{2}}^{j+\frac{w}{2}} \delta_x^2(u, v)\delta_y^2(u, v) \quad (5.2)$$

Ensuite, l'orientation locale du bloc centrée sur (u, v) est :

$$\theta(i, j) = \arctan\left(\frac{\nabla_y(i, j)}{\nabla_x(i, j)}\right) \quad (5.3)$$

La Figure 5.7 (f) montre un exemple d'orientations locales estimées par cette méthode.

Algorithme de colonies de fourmis

Nous résumons maintenant le processus d'accumulation des normales en utilisant l'algorithme basé sur l'optimisation des colonies de fourmis. Il s'agit d'un algorithme inspiré du comportement des espèces de fourmis. L'idée principale est que les fourmis déposent des phéromones qui aident les autres fourmis de la colonie à faire le meilleur choix dans leur objectif [107, 288, 416].

Dans la méthode proposée pour accumuler des normales, un certain nombre de *fourmis* sont uniformément placées sur l'image de grume. Les fourmis peuvent se déplacer librement sur l'image pour aller à leur objectif : la moelle de la grume. Elles déposent pendant leurs déplacements des *phéromones*. Cela va guider les autres fourmis dans leurs déplacements. Ici, les phéromones sont les normales aux tangentes des cernes qui vont donc s'accumuler au fur et à mesure des déplacements des fourmis. Chaque fourmi pose de manière itérative des phéromones lorsqu'elle se déplace vers la moelle, et elles se déplacent toutes vers la zone de la moelle où il y a une grande quantité de phéromones. Ce processus peut être localement répété dans une fenêtre centrée sur la zone contenant la moelle estimée précédemment afin d'obtenir la localisation précise de la moelle. À noter que cette approche est hautement parallélisable car les fourmis, bien qu'influencées par la quantité de phéromones, se déplacent indépendamment les unes des autres. Cela laisse entrevoir d'excellentes performances dans un contexte en temps réel.

Plus de détails sur la méthode ainsi que son implémentation sont donnés dans les articles [C9] et [J14]. Des résultats d'expérimentations de la méthode seront présentés dans la Section 5.2.5.

5.2.3 Filtres directionnels pour l'analyse des cernes

La détection des cernes annuels, appelés aussi *cernes de croissance*, a plusieurs intérêts dans l'analyse de la qualité des grumes. En effet, ces cernes sont des indicateurs des conditions de croissance de l'arbre (température, pluviométrie, exposition au soleil, qualité du terrain, *etc.*). Les informations concernant ces cernes (le nombre de cernes, la largeur moyenne, *etc.*) sont des indicateurs importants pour l'estimation de la qualité du bois. En plus de la qualité du bois, l'analyse de cernes est très utilisée dans d'autres domaines en utilisant la dendrochronologie [51, 121, 105], l'identification et la traçabilité des grumes [321, 370, 371] étant donné que les cernes présentent une sorte de signature de la grume. De nombreuses études ont abordé ce sujet pour des images scanners (CT) ainsi que des images couleurs (voir [120] pour un état de l'art).

Dans le cadre du projet ANR TreeTrace, nous nous intéressons à la détection des cernes – en particulier, l'estimation des tangentes ou de l'orientation – dans les images. Cela permet ensuite d'estimer le bois juvénile de la grume, de calculer le nombre, la largeur, l'épaisseur moyenne des cernes, *etc.* Dans le cas de l'estimation de l'orientation, plusieurs méthodes ont été proposées. Il est possible de les classer en 2 grands groupes :

- méthodes basées sur le calcul de gradient
- méthodes basées sur les familles de filtres orientables.

Pour le premier groupe, soit $\nabla = (\nabla_x, \nabla_y)$ l'image du gradient d'une image d'entrée I alors l'orientation θ de ∇ est obtenue par $\theta = \arctan\left(\frac{\nabla_y}{\nabla_x}\right)$. Le calcul de ∇ peut se faire de plusieurs

façons avec le filtre de Sobel [390], ou celui de Prewitt [328]. Cependant, ces méthodes sont assez sensibles au bruit [78]. Des améliorations ont été ensuite proposées pour une estimation plus robuste de l'orientation. Nous pouvons citer, par exemple, la méthode utilisant des filtres de convolution [176] pour atténuer le bruit, avec un histogramme autour du pixel [85]. Nous pouvons aussi passer dans le domaine fréquentiel [45].

Le second groupe repose sur la génération d'une famille de filtres orientables (c'est-à-dire l'assignation d'une orientation à chaque filtre). On peut ensuite calculer la réponse à chaque filtre et en déduire l'orientation du gradient à partir des réponses des filtres. Généralement, l'orientation obtenue est celle du meilleur filtre. Parmi ces familles nous pouvons mentionner, les filtres en quadrature [138], les filtres de Gabor [241], les filtres morphologiques [393], la transformée en ondelettes discrètes et ses extensions aux complexes [191].

Récemment, quelques travaux basés sur les réseaux de neurones [120, 373] ont été proposés pour estimer l'orientation locale ainsi que la détection des cernes sur des images de grumes.

Dans ce contexte, nous avons développé une méthode basée sur la morphologie mathématique et la géométrie discrète permettant d'estimer l'orientation ainsi que la longueur des tangentes aux cernes et leurs largeurs. Cette méthode peut également servir de filtrage directionnel afin de rehausser les cernes pour la segmentation et le suivi de contour qui sont utiles pour les tâches d'analyse des cernes de croissance.

Plus précisément, le méthode se base sur la primitive de segment droit épais, la structure de l'arbre de Stern-Brocot [400] et la suite de Farey [163]. L'idée principale de la méthode est que, pour chaque point \mathbf{p} de l'image, on cherche le segment discret le plus long passant par \mathbf{p} . Ce segment correspond à la tangente en \mathbf{p} . Nous détaillerons les outils utilisés ainsi que la méthode dans la suite de la section. Des résultats d'expérimentation seront présentés dans la *Section 5.2.5*.

Outils géométriques

Nous rappelons qu'une *droite discrète épaisse* est une droite discrète arithmétique (voir *Définition 68*) dont l'épaisseur ω vérifie $\omega > |a| + |b|$.

Définition 101 (Droite discrète épaisse). *Une droite discrète épaisse de borne inférieure μ , d'épaisseur arithmétique ω et de vecteur directeur (b, a) (de pente $\frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$) est l'ensemble de points discrets $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant la double inégalité*

$$\mu \leq ax - by < \mu + \omega, \quad (5.4)$$

avec $a, b, \mu, \omega \in \mathbb{Z}$, $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $\omega > |a| + |b|$. Cette droite est notée $\mathcal{L}^T(a, b, \mu, \omega)$.

Lorsque $\omega = \max(|a|, |b|)$ la droite est dite *naïve* (voir *Section 4.2.1*). Un segment droit épais est un sous-ensemble fini et connexe de points appartenant à une droite épaisse, il est noté par $\mathcal{S}^T(a, b, \mu, \omega)$. En particulier, $\mathcal{S}^T(a, b, \mu, \omega)$ peut être considéré comme un ensemble de segments naïfs $\mathcal{S}(a, b, \mu + i \max(|a|, |b|))$ avec $i \in \mathbb{Z}$ (voir *Figure 5.8*). Autrement dit, nous pouvons construire un segment épais en empilant les segments naïfs qui le composent. De cette façon, nous pouvons également définir le *segment épais* d'indices k, j et de caractéristiques (a, b) , noté par $\mathcal{S}_{k,j}^T(a, b)$, comme un ensemble de points $(x, y) \in [0, l] \times [0, L]$ appartenant au segment naïf $\mathcal{S}(a, b, -k \max(|a|, |b|), (1 + k + j) \max(|a|, |b|))$ avec $k, j \in \mathbb{N}$; k et j indiquent les niveaux des segments naïfs de caractéristiques (a, b) qui sont empilés d'un côté ou de l'autre côté (selon l'octant étudié) du segment naïf $\mathcal{S}(a, b, 0)$. Ce dernier est appelé la *graine* de \mathcal{S}^T .

Afin de construire des segments \mathcal{S}^T de caractéristique (a, b) , nous allons utiliser la suite de Farey dans laquelle (a, b) correspond à une fraction de la suite.

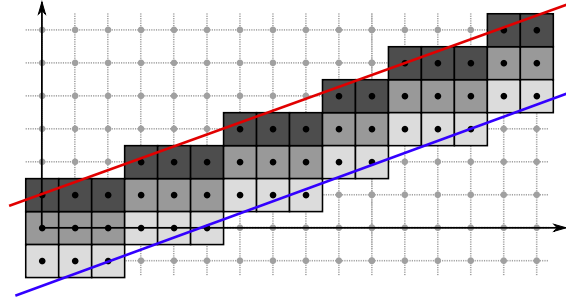


FIGURE 5.8 – Le segment droit \mathcal{S}^T , avec $(x, y) \in [0, 14] \times [-1, 6]$, appartient à la droite épaisse $\mathcal{L}^T(4, 11, -11, 11)$. \mathcal{S}^T est un empilement de trois segments naïfs $\mathcal{S}(4, 11, 0)$ (en gris), $\mathcal{S}(4, 11, 11)$ (en gris clair), $\mathcal{S}(4, 11, -11)$ (en gris foncé). En rouge et bleu sont les droites d'appui de \mathcal{L}^T .

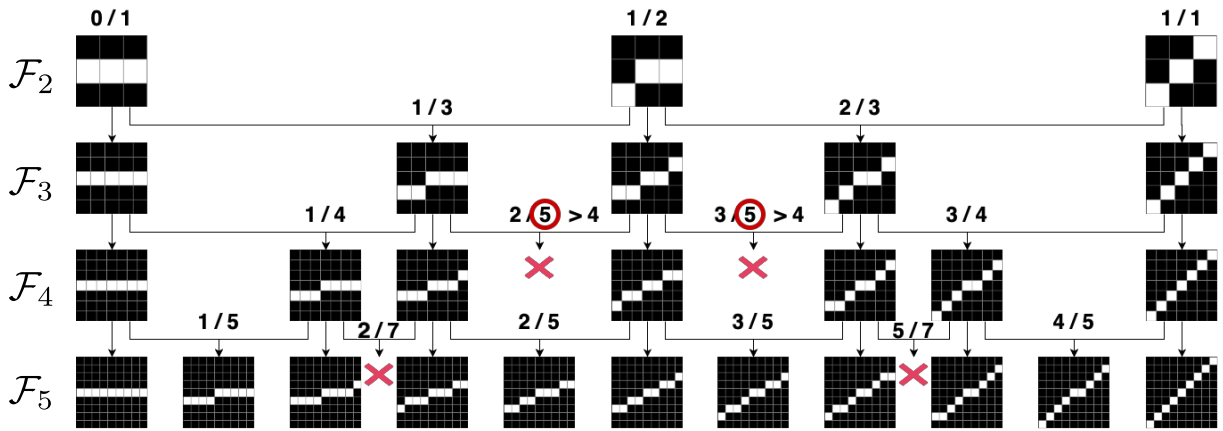


FIGURE 5.9 – Construction des segments droits à partir des quatre premiers niveaux de l'arbre de Stern-Brocot. Les niveaux sont numérotés de haut en bas en partant du niveau 2.

Définition 102 (Suite de Farey [163]). La suite de Farey d'ordre $n \in \mathbb{Z}^*$, notée \mathcal{F}_n , est la suite des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1, ordonnées de façon croissante et dont le dénominateur est inférieur ou égal à n .

Quelques exemples de suites de Farey : $\mathcal{F}_2 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$, $\mathcal{F}_3 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$. La construction de \mathcal{F}_n peut être faite de manière itérative avec la structure de l'arbre de Stern-Brocot [400]. L'arbre de Stern-Brocot commence par deux fractions positives irréductibles $0 = \frac{0}{1}$ et $1 = \frac{1}{1}$ qui constituent le niveau 1. Puis, à partir de deux fractions irréductibles consécutives $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ de niveau i , les nouvelles fractions irréductibles de niveau $i + 1$ sont calculées par $\frac{a+a'}{b+b'}$. En particulier, il est montré dans [33, 215] que le nombre de segments naïfs dans le premier octant d'une grille de taille $N \times N$ est exactement le nombre d'éléments de la suite de Farey d'ordre N . La suite de Farey d'ordre N est un sous-arbre de l'arbre de Stern-Brocot. En effet, comme montré sur la Figure 5.9 au niveau 3, l'arbre contient deux fractions $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5}$ (barrées en rouges) qui n'appartiennent pas à \mathcal{F}_3 selon la Définition 102, et similairement pour le niveau 4 avec les fractions $\frac{1}{7}$ et $\frac{5}{7}$ (barrées en rouge) par rapport à \mathcal{F}_4 . Il faut noter que ces fractions se trouvent dans des niveaux plus profonds de l'arbre. La Figure 5.9 illustre également la génération des segments droits avec la structure de l'arbre de Stern-Brocot.

Sur la base des propriétés arithmétiques des segments discrets et de leur lien avec la suite de Farey, nous développons un nouveau filtre directionnel à partir duquel différentes caractéristiques

géométriques en chaque point de l'image peuvent être estimées, telles que les caractéristiques de longueur et de direction, la carte d'épaisseur et la distance à la limite de l'objet.

Filtre directionnel pour des images binaires

Nous décrivons ci-après la proposition de filtre directionnel pour des images binaires. L'idée de la méthode est d'utiliser la structure d'arbre de Stern-Brocot pour construire itérativement des segments droits de différentes longueurs et épaisseurs. Ces segments sont ensuite utilisés pour estimer différentes caractéristiques en chaque point de l'image.

Soit I une image binaire où les objets sont les pixels blancs et le fond est noir, et $\mathbf{p} \in I$ un pixel de l'objet. La méthode cherche les segments naïfs \mathcal{S} les plus longs centrés en \mathbf{p} , inclus dans l'objet. Pour cela, nous allons générer progressivement \mathcal{S} en utilisant l'arbre de Stern-Brocot. Pour chaque segment généré, nous testons son extensibilité dans l'objet, en vérifiant simplement la valeur des points du segment par rapport à \mathbf{p} . Les segments finaux sont les segments les plus longs qui forment un ensemble de *filtres directionnels* de I en \mathbf{p} .

L'*Algorithme 6* décrit le processus de calcul des filtres directionnels pour un pixel de l'objet

Algorithme 6 : Calcul des segments les plus longs en un point (dans le premier octant).

```

Entrées    : Une image binaire  $I$  et un pixel blanc  $\mathbf{p} = (x, y)$  de  $I$ 
Sortie    : L'ensemble  $S$  des segments naïfs les plus longs centrés en  $\mathbf{p}$ 
1 Début
2    $n \leftarrow 0$ 
3    $T_n \leftarrow \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$  // Suite de Farey représentée avec les fractions  $\frac{a}{b}$ 
4   Répéter
5      $S \leftarrow \emptyset; n \leftarrow n + 1; coupe \leftarrow 0$ 
6      $T_n \leftarrow \text{Incrémentation\_Stern\_Brocot}(T_n, S)$  // Voir Algorithme 7
7     Pour chaque  $\frac{a}{b} \in T_n$  faire // Calculer pour chaque fraction de  $T_n$ 
8       Pour  $\mu \leftarrow -b + 1$  à 0 faire
9          $S_n \leftarrow (a, b, \mu, n)$  // Caractéristiques du segment naïf  $\mathcal{S}(a, b, \mu)$ 
10        Si  $b < n + 2$  alors // Cas de  $(a, b, \mu, n - 1) \in S$  du niveau  $n - 1$ 
11           $L_n \leftarrow \{(n, \frac{a*n-\mu}{b}), (-n, -\frac{a*n-\mu}{b})\}$  // Points d'extrémités de  $S$ 
12        alors
13          // Cas de  $b = n - 2$  et  $(a, b, \mu, n - 1) \notin S$  du niveau  $n - 1$ 
14           $L_n \leftarrow$  ensemble des segments naïfs centrés en  $\mathbf{p}$ 
15        FinSi
16         $S \leftarrow S \cup S_n$ 
17        Pour chaque  $(i, j) \in L_n$  faire
18           $q \leftarrow (x + i, y + j)$ 
19          Si  $q \notin I$  ou  $I(\mathbf{p}) \neq I(\mathbf{q})$  alors
20             $coupe \leftarrow coupe + 1$ 
21             $S \leftarrow S \setminus S_n$ 
22            break
23          FinSi
24        FinPour
25      FinPour
26      Jusqu'à  $coupe \neq \text{taille}(T_n)$ 
27      Retourner  $S$ 
28 Fin

```

Algorithme 7 : Fonction Incrémentation `_Stern_Brocot` (dans le premier octant).

Entrées : Une suite de Stern-Brocot T au niveau n et S un ensemble de segments extensibles
Sortie : Une suite de Stern-Brocot T' au niveau $n + 1$

```

1 Début
2    $T' \leftarrow \emptyset$ 
3   Pour  $i \leftarrow 0$  à  $\text{taille}(T) - 1$  faire
4      $\text{noeud} \leftarrow \frac{a_i}{b_i}$  // La fraction actuelle dans  $T$ 
5      $\text{prec} \leftarrow \frac{a_{i-1}}{b_{i-1}}$  // La fraction précédant  $\text{noeud}$  dans  $T$ 
6      $\text{suiv} \leftarrow \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}$  // La fraction succédant  $\text{noeud}$  dans  $T$ 
7     Si ( $\text{prec}$  ou  $\text{suiv}$  ou  $\text{noeud}$  correspond à la pente d'un segment de  $S$ ) alors
8        $T' \leftarrow T' \cup \{\frac{a_i}{b_i}\}$  // Conserver la fraction actuelle au niveau suivant
9     FinSi
10     $p \leftarrow a_i + a_{i+1}$ 
11     $q \leftarrow b_i + b_{i+1}$ 
12    Si ( $q \leq n + 2$ ) alors
13       $T' \leftarrow T' \cup \{\frac{p}{q}\}$  // Insérer la fraction au niveau suivant
14    FinSi
15  FinPour
16  Retourner  $T'$ 
17 Fin

```

$\mathbf{p} = (x, y) \in I$. Sans perte de généralité, on considère les segments dans le premier octant, c'est-à-dire que l'arbre de Stern-Brocot va de $\frac{0}{1}$ jusqu'à $\frac{1}{1}$, les autres octants peuvent être obtenus par des permutations de x et y ou des coefficients de la droite. Dans cet algorithme, T_n contient des fractions de la suite de Farey de niveau n issues de l'arbre de Stern-Brocot. Les segments qui peuvent être étendus sont stockés dans S . Le processus incrémental pour construire le niveau $n + 1$ à partir du niveau n de l'arbre de Stern-Brocot est décrit dans l'*Algorithme 7*. Les pentes des segments retenus à l'itération n , conservées dans S , permettent de n'ajouter dans T_n que les fractions utiles pour l'itération suivante. Pour chaque $\frac{a}{b}$ dans T_n (ligne 7), nous calculons les segments discrets $\mathcal{S}(a, b, \mu)$ pour tous les μ considérés. Nous vérifions si le segment ne peut pas être étendu (lignes 16 – 21) ; ainsi, si l'un de ses points appartient au fond, alors $\mathcal{S}(a, b, \mu)$ est supprimé de S . Le processus s'arrête si aucun segment ne peut être étendu, les derniers segments retenus dans S sont ceux les plus grands pour \mathbf{p} .

La *Figure 5.10* illustre quatre étapes différents ($n = 1, 2, 3$ et 6) de la méthode pour un pixel de l'objet (marqué en orange). À chaque étape, les figures à gauche montrent la zone couverte par des segments droits extensibles et conservés à l'étape actuelle (en rouge). À droite, sur le cercle se trouve les fractions de l'arbre de Stern-Brocot : les lignes vertes indiquent les segments extensibles avec les fractions correspondantes, les lignes rouges indiquent les nouveaux segments qui ne peuvent pas être prolongés, et les lignes bleues sont les segments nécessaires pour construire les nouveaux segments de niveau suivant. L'arbre commence au niveau $n = 1$, avec 8 fractions : $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{-1}{1}$. Les segments associés sont tous extensibles. Au niveau $n = 2$, quelques segments ne peuvent pas être prolongés, nous les supprimons et passons au niveau $n = 3$. L'algorithme s'arrête au niveau $n = 6$ où seul le segment $\mathcal{S}(5, 4, -4)$ est extensible (voir *Figure 5.11*).

De l'*Algorithme 6*, nous obtenons pour chaque pixel de l'objet $\mathbf{p} \in I$ un ensemble de filtres directionnels S avec des segments naïfs les plus longs centrés au \mathbf{p} et inclus dans l'objet. À partir de S , les caractéristiques géométriques suivantes peuvent être estimées :

- **L'élongation locale** L en \mathbf{p} est calculée par la longueur – en distance euclidienne –

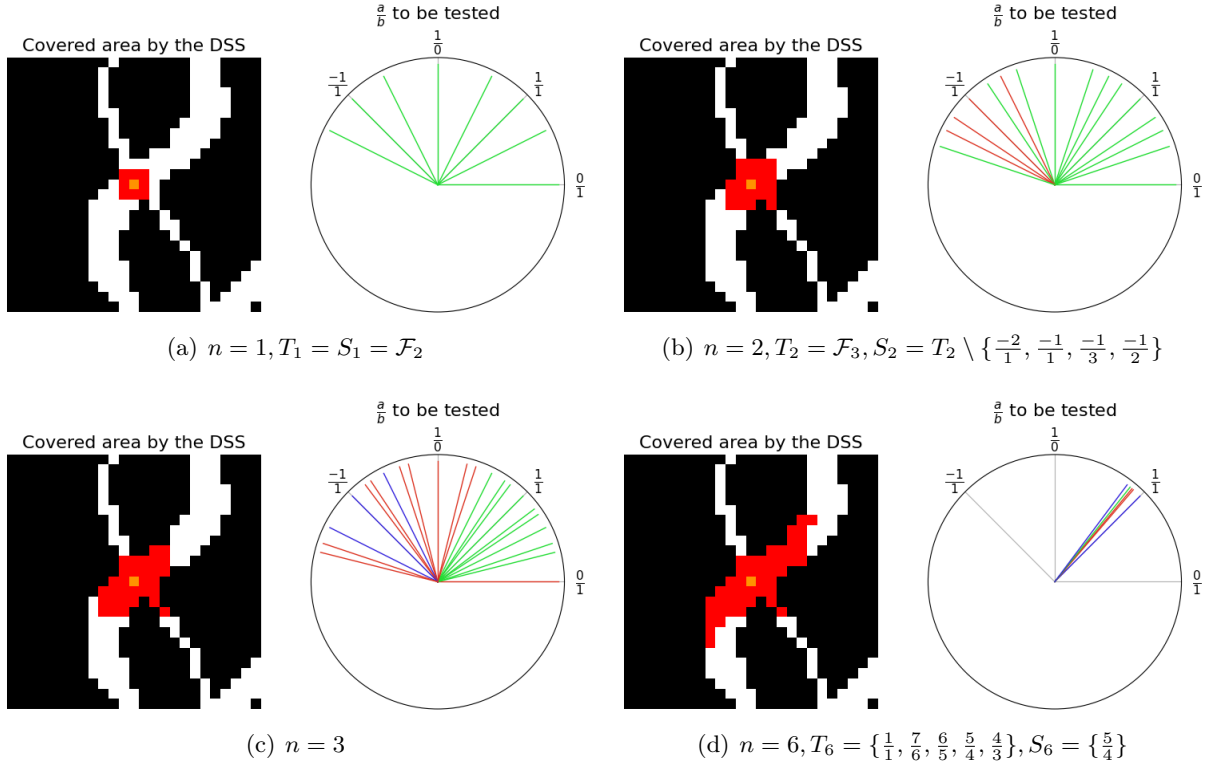


FIGURE 5.10 – Illustration du calcul des segments naïfs les plus longs en un point p (en orange) d'une image binaire I pour les étapes $n = 1, 2, 3, 6$. Sur les cercles se trouvent les fractions de l'arbre de Stern-Brocot à l'étape n qui sont utilisées pour générer les segments naïfs. En vert les fractions extensibles, en rouge les rejetées et en bleu celles qui sont nécessaires pour en construire de nouvelles. Images issues de [C8].

moyenne des segments les plus longs dans S à l'étape finale de la méthode. Cette caractéristique indique si l'objet est localement allongé. Plus la valeur est élevée, plus elle est longue.

- L'**orientation locale** θ de la forme en p est calculée par la moyenne des orientations locales des segments discrets de S .
- La **portée orthogonale** P en p est calculée à partir du segment orthogonal $\mathcal{S}(-b, a, \mu)$ comme la longueur de \mathcal{S} – en nombre de pixels – qui atteint le bord de l'objet.
- L'**épaisseur directionnelle** E de la forme en p est calculée en épaississant chaque segment de S selon la définition de $\mathcal{S}_{k,j}^T(a, b)$ (voir Définition 101). L'épaisseur directionnelle E est alors définie comme la somme des k et j pour laquelle le \mathcal{S}^T est inclus dans l'objet.

Ces caractéristiques géométriques sont illustrées dans Figure 5.11 sur l'image de la Figure 5.10. Le point p se trouve au centre de l'image (en orange), le segment le plus long centré au p et inclus complètement dans l'objet est $\mathcal{S}(5, 4, -4)$ (en bleu). Les caractéristiques géométriques locales de p sont : l'élongation $L \approx 15.7$, l'orientation $\theta = \arctan(\frac{5}{4}) \approx 51^\circ$, la portée orthogonale $P = 6$ et l'épaisseur directionnelle $E = 1$.

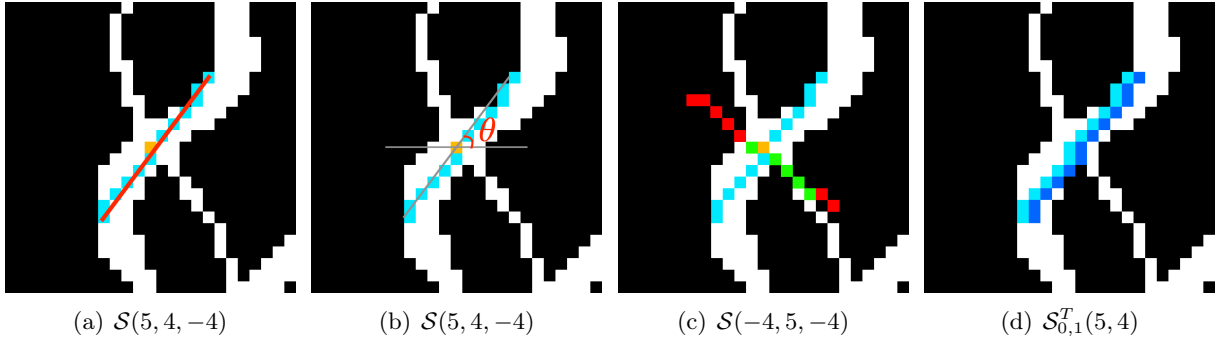


FIGURE 5.11 – Caractéristiques géométriques locales en p (en orange) d'une image binaire I calculées à partir du filtre directionnel. (a) Le segment naïf le plus long $S(5, 4, -4)$ (en bleu) inclus dans l'objet, l'élongation de p correspond à la longueur du segment S en distance euclidienne (le segment rouge) : $L \approx 15.7$. (b) L'orientation de p est l'angle du segment S par rapport à l'axe (Ox) : $\theta = \arctan(\frac{5}{4})$. (c) Le segment orthogonal $S(-4, 5, -4)$ avec les pixels verts appartenant à l'objet et les rouges au fond, la portée orthogonale est le nombre de pixels verts : $P = 6$. (d) Le segment épais de S , $S_{0,1}^T(5, 4)$ (en vert), l'épaisseur directionnelle $E = 0 + 1 = 1$.

Filtre directionnel pour des images en niveaux de gris

Dans cette partie, nous présentons une méthode d'estimation de l'orientation locale qui est inspirée par le travail de Soille et Talbot [393] pour les champs d'orientation sur des images en niveaux de gris avec des outils morphologiques. En particulier, la méthode utilise des segments discrets comme éléments structurants pour les opérateurs morphologiques : l'érosion et la dilatation. Soit I une image en niveau de gris et B un élément structurant. L'érosion ε et la dilatation δ en un point $p \in I$ par B sont définies comme suit.

$$\varepsilon_B(I)(p) = \min_{q \in B_p} I(q) \quad (5.5)$$

$$\delta_B(I)(p) = \max_{q \in B_p} I(q) \quad (5.6)$$

où B_p est la translation de B par p , *i.e.* $B_p = \{b + p \mid b \in B\}$. L'érosion est appelée aussi un *filtre minimum*, et la dilatation un *filtre maximum*.

Dans la méthode proposée, nous considérons les segments avec différentes longueurs et épaisseurs comme éléments structurants. Plus précisément, en utilisant l'arbre de Stern-Brocot, nous calculons les segments droits naïfs S au niveau i et calculons l'érosion de l'image d'entrée I avec chaque S . Les segments S sont épaissis à une certaine épaisseur et nous calculons à nouveau l'érosion de I avec ces segments épais. Ensuite, nous passons au niveau suivant de l'arbre. La méthode s'arrête à un niveau n fixé de l'arbre. L'image résultante est obtenue en sommant toutes les images érodées. Nous faisons les mêmes opérations pour la dilatation. Il faut noter que l'érosion permet de mettre en évidence des structures claires – plus lumineuse que le fond – de l'image, et inversement pour la dilatation. Pour le calcul de la dilatation, nous considérons simplement l'image inversée $J = 255 - I$ en le combinant avec l'opérateur de l'érosion.

L'*Algorithm* 8 résume le calcul d'ensemble des images érodées $Y = \{Y_{a,b}\}$ de I par des droites discrètes de caractéristique (a, b) et de taille n – en nombre de pixels. Plus précisément, pour chaque fraction $\frac{a}{b}$, nous notons $B_{i,j,k}$ l'élément structurant correspondant au segment épais

$\mathcal{S}_{k,j}^T(a, b)$, l'image érodée $Y_{a,b}$ est calculée comme suit.

$$Y_{a,b} = \frac{1}{n - \alpha + 1} \sum_{i=\alpha}^n \left[\sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon_{B_{i,k,0}}(I) + \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_{B_{i,0,j}}(I) \right] \quad (5.7)$$

avec $\alpha = \max(\max(|a|, |b|) - 1, 1)$. Nous introduisons un coefficient de normalisation afin de tenir compte du fait que le nombre de segments discrets dépend de $\frac{a}{b}$ [33, 215].

Trois possibilités peuvent être considérées pour l'estimation de l'orientation. La première, comme dans l'*Algorithme 8*, est d'utiliser les segments avec toutes les longueurs et épaisseurs possibles (voir *équation 5.7*). La deuxième est de considérer toutes les épaisseurs pour une longueur n fixée (la boucle à la ligne 4 de l'*Algorithme 8* est supprimée et $i = n$). La dernière est de considérer toutes les longueurs avec l'épaisseur fixée à 0 (la boucle à la ligne 11 de l'*Algorithme 8* est supprimée). L'*équation 5.7* devient respectivement pour les deux derniers cas comme suit.

$$Y_{a,b} = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{B_{n,k,0}}(I) + \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_{B_{n,0,j}}(I) \quad \text{et} \quad Y_{a,b} = \frac{1}{n - \alpha + 1} \sum_{i=\alpha}^n \varepsilon_{B_{i,0,0}}(I)$$

Algorithme 8 : Calcul d'image érodée par le filtre directionnel (dans le premier octant).

Entrées : Une image en niveaux de gris I et la taille maximale n des segments discrets.
Sortie : Ensemble des images Y

```

1 Début
2    $Y \leftarrow$  Une matrice de taille (n,n) // L'élément à la position (a,b) correspond à  $Y_{a,b}$ 
3    $A \leftarrow {}^t(0, 1, 1)$ 
4   Pour  $i \leftarrow 0$  à  $n$  faire
5     Pour chaque  $\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_i$  faire // Itérer sur la suite de Farey d'ordre  $i$ 
6        $B \leftarrow TDSS_{0,0}(a, b)$ 
7        $E \leftarrow \varepsilon_B(I)$  // L'érosion de  $I$  par le segment  $B_{i,0}$ 
8        $E^+ \leftarrow E$ 
9        $E^- \leftarrow E$ 
10       $Y_{a,b} \leftarrow Y_{a,b} + E$ 
11      Pour  $k \leftarrow 1$  à  $i$  faire // Itérer sur l'épaisseur du segment
12         $E^+ \leftarrow \varepsilon_A(E^+)$  // L'érosion de  $E^+$  par  $TDSS_{0,k}(a, b)$ 
13         $E^- \leftarrow \varepsilon_A(E^-)$  // L'érosion de  $E^-$  par  $TDSS_{k,0}(a, b)$ 
14         $Y_{a,b} \leftarrow Y_{a,b} + E^+$ 
15         $Y_{a,b} \leftarrow Y_{a,b} + E^-$ 
16      FinPour
17    FinPour
18  FinPour
19  Retourner  $Y$ 
20 Fin
```

À partir des images $Y = \{Y_{a,b}\}$, nous calculons l'orientation locale en chaque point $\mathbf{p} \in I$. La méthode est inspirée de celle proposée dans [393]. Tout d'abord, nous définissons l'ensemble des directions positives du point \mathbf{p} par

$$Dir^+(\mathbf{p}) = \left\{ \arctan\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \mid Y_{a_i,b_i}(\mathbf{p}) \geq Y_{a_j,b_j}(\mathbf{p}), \forall (a_i, b_i) \neq (a_j, b_j) \right\} \quad (5.8)$$

Afin de déterminer quelle direction choisir pour \mathbf{p} dans $Dir^+(\mathbf{p})$, une mesure de force est utilisée

$$G^+(\mathbf{p}) = \max_{a,b} (Y_{a,b}(\mathbf{p})) - \min_{a,b} (Y_{a,b}(\mathbf{p})) \quad (5.9)$$

$G^+(\mathbf{p})$ peut être interprétée comme la force des structures claires dans l'image. Les directions négatives Dir^- pour les structures sombres et leur force G^- sont calculés avec le même principe en considérant $J = 255 - I$. Enfin l'orientation θ en point $\mathbf{p} \in I$ est calculée comme suit.

$$\theta(\mathbf{p}) = \begin{cases} Dir^+(\mathbf{p}) & \text{si } G^+(\mathbf{p}) \geq G^-(\mathbf{p}) \\ Dir^-(\mathbf{p}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.10)$$

Nous invitons le lecteur à lire [393] s'il souhaite plus détails sur cette méthode d'estimation de l'orientation. On peut remarquer que lors du processus de calcul de l'orientation locale, on peut également extraire des images filtrées. Ce sont des images résultant du calcul de $\max_{a,b}(Y_{a,b}(x))$ pour I et J . Des résultats d'expérimentation de l'estimation de l'orientation locale sur des images binaires et en niveaux de gris seront présentés dans la Section 5.2.5.

5.2.4 Segmentation du duramen

Parmi les critères d'évaluation de la qualité du bois, la quantité du duramen est une indication importante pour la durabilité naturelle du bois. La segmentation du duramen est nécessaire pour plusieurs raisons. La première est que cela permet aux industries d'améliorer la transformation et l'utilisation du bois. En effet, le duramen présente des propriétés chimiques intéressantes. Parmi elles, il y a la présence d'extractibles qui sont à l'origine d'une meilleure résistance aux insectes et aux champignons. De plus, les essences de bois à aubier différencié (*i.e.* l'aubier et le duramen sont de couleurs différentes) présentent un intérêt esthétique dans le cadre de leur utilisation, par exemple en menuiserie ou en charpenterie. Dans un contexte industriel de transformation du bois, nous pouvons inclure la segmentation du duramen dans le calcul de découpe d'une grume et ainsi optimiser la quantité de duramen présent dans une planche. Une autre raison est que l'analyse des variations de la quantité de duramen (largeur, surface, nombre de cernes de croissance, *etc.*) permet la compréhension des aspects physiologiques et des caractéristiques du bois. De plus, la segmentation permet de se concentrer sur des éléments de l'image qui sont utiles dans notre analyse, notamment celle du bois juvénile ou des cernes de croissance (voir Figure 5.4).

Des travaux, basés sur des réseaux de neurones convolutifs (Convolutional Neural Network soit (CNN) en anglais) ont été proposés, pour la segmentation de la grume dans l'image. Dans [434], un CNN basé ResNet50 [166] a été utilisé en deux étapes pour cette tâche de segmentation. Dans [97], la performance des différents CNN (U-Net [347], Mask R-CNN [165], RefineNet [247], SegNet [26]) ont été évalués pour segmenter des grumes sur différents jeux de données.

À notre connaissance, une seule publication est proposée pour la segmentation du duramen sur des images de coupes transversales du bois. Raatevaara *et al.* ont développé dans [336] une méthode basée sur la croissance de régions, suivie par des post-traitements pour récupérer la partie du duramen dans l'image. La méthode nécessite cependant de connaître la position de la moelle. Plus précisément, la méthode repose sur l'hypothèse que le duramen est représenté par des pixels situés près de la moelle avec des valeurs d'intensité plutôt homogène, et les pixels constituant l'aubier ont des intensités plus faibles que ceux proches de la moelle. L'algorithme de segmentation du duramen considère les régions qui sont des petits blocs carrés d'une certaine taille fixée autour de la moelle. Ensuite, les régions s'accroissent en fonction de la couleur. Pour renforcer le contraste entre le duramen et l'aubier, les images sont converties en espaces colorimétriques TSL (teinte, saturation, luminosité) et CIELAB. Enfin, la région estimée du duramen a été lissée avec des fonctions morphologiques, telles que la dilatation, l'érosion et la fermeture.

Dans ce contexte, nous proposons une méthode basée les CNN pour la segmentation du duramen sur images de grumes. Plus précisément, nous proposons une architecture basée sur U-Net [347] et des adaptations pour améliorer les performances du réseau dans notre cadre spécifique

de la segmentation : réduire des paramètres de l’U-Net et ajouter le mécanisme d’attention basée sur des opérateurs morphologiques. Ces améliorations permettent au réseau d’accélérer le processus d’apprentissage et de produire des prédictions rapides et précises de la segmentation. Ces critères sont importants dans le cadre applicatif et réel du projet. Nous détaillons ces points dans la suite de la section.

U-Net pour la segmentation d’images

U-Net a été introduit pour la première fois en 2015 par Ronneberger *et al.* [347]. Il s’agit d’un réseau entièrement convolutif (fully convolutional network (FCN) en anglais) pour la segmentation d’images biomédicales, et il a été conçu pour une segmentation précise par pixel. L’U-Net est un réseau de type auto-encodeur qui est composé d’une phase d’encodage et d’une phase de décodage. L’encodage extrait des caractéristiques de l’objet d’intérêt et les condense dans des couches de plus petites dimensions. Ces caractéristiques sont propagées dans la partie décodage pour produire une segmentation.

L’avantage de l’U-Net est qu’il permet d’entraîner le modèle avec un petit nombre de données et de créer un masque précis d’objets d’intérêt à partir des images. Il possède une architecture bien adaptée à notre problème de segmentation des défauts externes. Récemment, de nombreuses variantes d’architecture U-Net ont été proposées pour aborder la segmentation d’images médicales, d’images satellites telles que U-Net++ [447], KU-Net [427], TernaNet [182], *etc.* Pour plus de détails, le lecteur est invité à se référer aux papiers associés, en particulier [347].

Dans l’architecture originale, l’U-Net utilise de couches de convolution suivies des couches d’échantillonnage de type *max pooling* [152] pour sous-échantillonner dans la partie d’encodage, tandis que la partie de décodage consiste en un sur-échantillonnage suivi par des concaténations avec les couches correspondantes de la partie d’encodage. Chaque couche est suivie par la fonction d’activation de type Unité Linéaire Rectifiée (Rectified Linear Unit (ReLU) en anglais) [152], à l’exception de la dernière qui est une couche convolutive 1×1 suivie d’une fonction soft-max [152] pixel par pixel sur la carte finale. La fonction de coût d’entropie croisée (Cross entropy en anglais) est utilisée pour mettre à jour les poids du réseau. Au total, l’U-Net dispose de 23 couches convolutives avec un nombre de paramètres de 378 K valeurs. La *Figure 5.12* illustre l’architecture de l’U-Net (voir [347] pour plus de détails).

Réduction de paramètres

L’augmentation de la profondeur des CNN a été considérée comme un moyen intuitif d’améliorer les performances. Cependant, pour certaines applications, un grand CNN n’est pas nécessairement celui qui offre les meilleures performances. De nombreuses techniques de compression de modèles ont été proposées pour réduire les paramètres ou le temps de calcul d’un CNN. Par exemple, la quantification de réseaux [244] est une technique de réduction de paramètres. Il consiste à quantifier les noyaux de filtres dans les couches de convolutions et les poids dans les couches entièrement connectées. Une autre méthode est la distillation des connaissances [153] (knowledge distillation en anglais) qui se concentre sur le transfert des connaissances d’un grand modèle à un plus petit. L’élagage en niveaux [257] (level pruning en anglais) est une technique qui consiste à supprimer les poids dont la contribution à la performance du réseau n’est pas significative. Cette signification est déterminée par la fonction de classement pour les poids du modèle basé sur la norme de poids L1/L2. Une autre approche consiste à concevoir de nouvelles couches. Par exemple, la couche convolutive séparable en profondeur [395] (depthwise separable convolutional (DSC) en anglais) est similaire à une convolution avec moins de paramètres. La

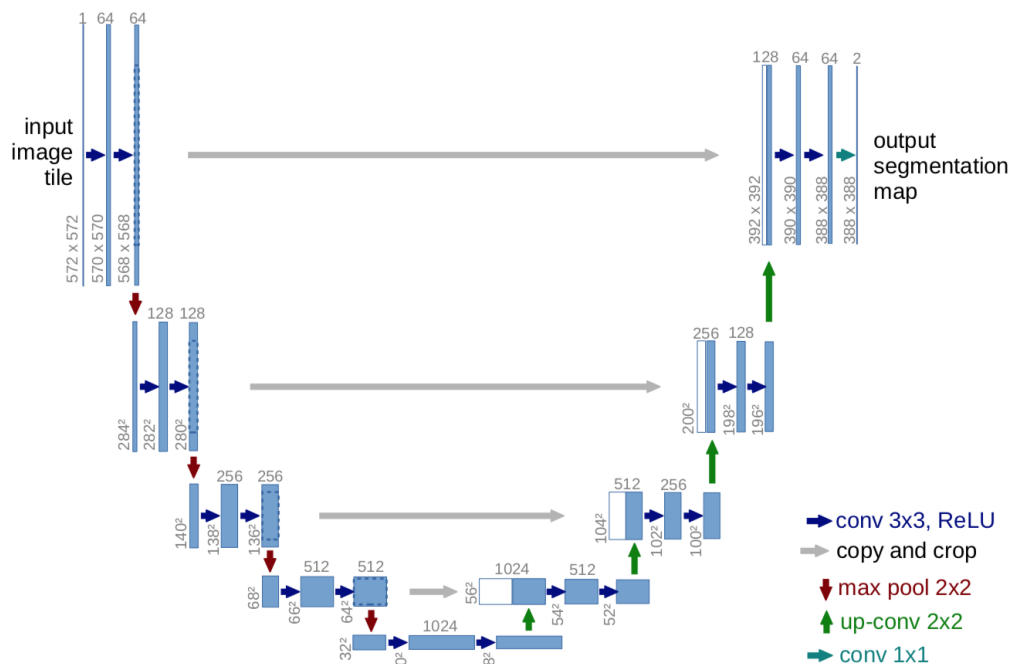


FIGURE 5.12 – Architecture de l’U-Net pour la segmentation sémantique. Image issue de [347].

DSC consiste à effectuer en premier lieu une convolution spatiale en profondeur qui agit sur chaque canal d’entrée séparément suivie d’une convolution ponctuelle qui mélange les canaux de sortie résultants. De telles couches ont été utilisées dans les CNNs pour les appareils mobiles MobileNet [177] et les prévisions météorologiques [419] afin d’obtenir des réseaux plus légers.

Dans notre travail, il s’agit de segmentation binaire, *i.e.* à classe unique. En particulier, le duramen à segmenter dans l’image a généralement des propriétés spécifiques comme une couleur foncée et d’intensité homogène ainsi qu’une position centrée dans l’image. Pour la tâche de segmentation, nous réalisons une simplification de réseau pour accélérer le processus d’apprentissage. En particulier, nous réduisons le nombre de filtres – paramètres – de chaque couche convolutive de l’U-Net avec la technique de DSC. Cependant, en réduisant les paramètres des réseaux, le résultat de la segmentation est moins précis. Afin de compenser l’effet de la réduction de paramètres et d’améliorer la performance de la segmentation, nous allons ajouter des portes d’attention dans l’architecture de l’U-Net.

Mécanisme d’attention

Le mécanisme d’attention (attention mecanisme (AM) en anglais) joue un rôle clé dans les tâches de perception humaine et de vision par ordinateur. En effet, l’AM permet d’allouer les ressources disponibles et de se concentrer de manière sélective sur des régions particulières au lieu de la scène entière. Il existe deux mécanismes d’attention : les attentions spatiales et canalisées.

Dans ce contexte, plusieurs techniques de portes d’attention (attention gate (AG) en anglais) sont utilisés, comme un AM, pour s’adresser à la faiblesse connue de la convolution qui est d’appliquer les mêmes filtres de convolution sur toute l’image. Les AG vont permettre au réseau de traiter les filtres différemment selon le contenu et facilitent l’apprentissage avec moins de filtres – et donc moins de paramètres du réseau. En effet, les modèles entraînés avec les AG apprennent

implicitement à supprimer les régions non pertinentes dans une image tout en mettant en évidence les caractéristiques saillantes utiles pour des tâches spécifiques. Hu *et al.* [178] ont proposé le module de compression et d'excitation (squeeze-and-excitation module en anglais) et utilisé des caractéristiques de moyenne globale pour calculer des attentions par canal. Woo *et al.* [435] ont combiné les attentions spatiales et canalisées pour proposer un module d'attention de bloc convolutif (convolutional block attention module (CBAM) en anglais). Leur module déduit séquentiellement des cartes d'attention le long de deux chemins canal et spatial, puis ces cartes d'attention sont multipliées par la carte de caractéristiques d'entrée pour un raffinement adaptatif des caractéristiques, ce qui augmente la précision de la reconnaissance. Oktay *et al.* [309] ont développé un nouveau module d'attention spatiale, nommé *porte d'attention additive* (additive attention gate (AAG) en anglais), en ajoutant un déclenchement basé sur une grille qui permet aux coefficients d'attention d'être plus spécifiques aux régions locales. Yang *et al.* [440] ont intégré l'attention du canal et la transformation en ondelettes afin que les cartes de caractéristiques de sortie contiennent des caractéristiques de fréquence. Zhu *et al.* [448] ont développé un nouveau module d'attention pour répondre aux limitations induites par les modèles basés sur les activations attentionnelles lorsque les caractéristiques spatiales et de canal sont séparées.

Dans ce contexte, nous proposons une nouvelle AG basée sur les opérateurs morphologiques mathématiques [375], à savoir la dilatation \oplus et l'érosion \ominus qui sont définies pour un pixel (x, y) d'une image I comme suit.

$$(I \oplus \mathbf{W}_d)(x, y) = \max_{i \in U, j \in V} (I(x - i, y - j) + \mathbf{W}_d(i, j)) \quad (5.11)$$

$$(I \ominus \mathbf{W}_e)(x, y) = \min_{i \in U, j \in V} (I(x - i, y - j) + \mathbf{W}_e(i, j)) \quad (5.12)$$

avec $\mathbf{W}_d \in \mathbb{R}^{a \times b}$, $\mathbf{W}_e \in \mathbb{R}^{a \times b}$, $U = \{1, 2, \dots, a\}$, $V = \{1, 2, \dots, b\}$ et $a, b \in \mathbb{N}$. \mathbf{W}_d (resp. \mathbf{W}_e) sont respectivement les éléments structurants de la dilatation et de l'érosion.

Les opérateurs morphologiques sont utilisés dans de nombreuses tâches de vision par ordinateur, telles que le filtrage, la segmentation, l'extraction de caractéristiques, *etc.* Ils ont été également appliqués dans les CNN, appelés *couches morphologiques*. Mondal *et al.* [283] les ont utilisés afin de souligner ou de supprimer différentes structures d'une image. Ils appliquent leur méthode au déshydratage (deraining en anglais) des images. Mellouli *et al.* [276] ont incorporé des opérations morphologiques dans des couches convolutives afin de générer des cartes d'entités améliorées qui s'appliquent à la reconnaissance des chiffres. Franchi *et al.* [136] ont proposé de remplacer le max-pooling standard par un pooling morphologique appris. Leurs résultats s'avèrent expérimentalement bénéfiques sur l'ensemble de données MNIST.

Inspiré par les couches morphologiques introduites dans [283], nous proposons une AG, appelée *porte d'attention morphologique* (morphological attention gate (MAG) en anglais). Plus précisément, étant donné une carte de caractéristiques d'entrée $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{H \times W \times C}$ avec $H, W, C \in \mathbb{N}$ – \mathbf{F} correspond à la sortie des couches du réseau – la MAG calcule d'abord une carte d'attention spatiale $\mathbf{F}' \in \mathbb{R}^{H \times W \times 1}$ par une convolution :

$$\mathbf{F}' = \mathbf{W}_s * \mathbf{F} \quad (5.13)$$

où \mathbf{W}_s contient les poids de la 1×1 convolution. La carte d'attention \mathbf{F}' suit ensuite deux chemins distincts composés chacun d'une séquence de dilatations et d'érosions, comme illustré dans la Figure 5.13. Le chemin de la dilatation est calculé comme suit (le calcul est similaire pour l'érosion).

$$\begin{cases} \mathbf{D}^0 = & \mathbf{F}' \\ \mathbf{D}^i = & (\mathbf{D}^{i-1} \oplus \mathbf{W}_d^i) + \mathbf{F}' \end{cases}, \quad \forall i \in \llbracket 0, \dots, k-1 \rrbracket \quad (5.14)$$

avec \mathbf{W}_d^i l'élément structurant de la dilatation à l'étape i . Ces opérations de dilatation et d'érosion permettent au réseau de supprimer le bruit et d'améliorer les caractéristiques présentes dans l'image.

Puisque nous ne pouvons pas savoir quel chemin est le plus efficace pour la suppression du bruit dans des situations particulières, nous combinons les deux en une seule carte de caractéristiques en utilisant une addition par pixel suivie d'une activation sigmoïde σ [152], et obtenons une carte α . Cette carte est ensuite multipliée pixel par pixel avec \mathbf{F} (voir Figure 5.13) :

$$\mathbf{F}'' = \underbrace{\sigma(\mathbf{D}^{k-1} + \mathbf{E}^{k-1})}_{\alpha} \odot \mathbf{F} \quad (5.15)$$

Il est important de signaler que la MAG proposée pour la segmentation du duramen utilise seulement l'information spatiale mais pas celle du canal. En effet, la couleur du duramen varie selon les espèces ; par exemple, le duramen du douglas est rouge. Par conséquent, la MAG pour le canal ne semble pas très pertinente.

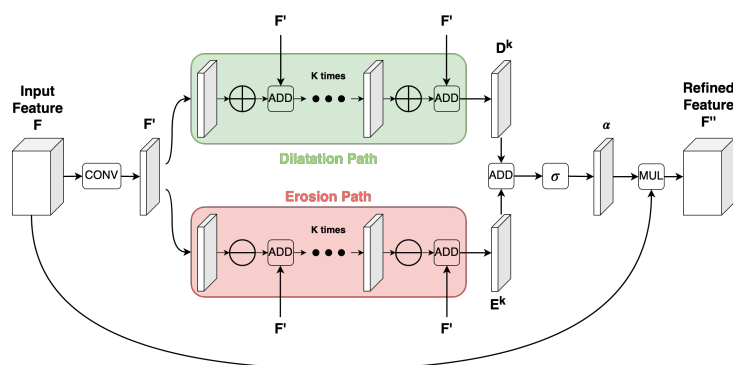


FIGURE 5.13 – Modèle proposé de la porte d'attention morphologique. Image issue de [C32].

U-Net léger pour la segmentation

En combinant la réduction des paramètres avec la DSC et le mécanisme d'attention MAG, nous proposons une nouvelle architecture allégée de l'U-Net, appelée *U-Net léger* (Light U-Net (LU-Net) en anglais). Pour la nouvelle architecture, nous réalisons une seule convolution (au lieu de deux comme l'U-Net original). Ensuite, nous remplaçons chaque couche convolutive par DSC et changeons la fonction d'activation de ReLU en Leaky ReLU [152]. De plus, nous ajoutons de la régularisation shakeout [189] à chaque couche convolutive. L'architecture proposée est illustrée dans la Figure 5.14. Le Tableau 5.1 résume le nombre de paramètres des différentes architectures. Nous observons que notre architecture LU-Net a beaucoup moins de paramètres que celle d'origine (avec une réduction d'environ de 80 - 90%). Des résultats d'expérimentation seront présentés dans la Section 5.2.5.

Architecture	Nombre de paramètres	Taille relative (%)
U-Net	378321	1 ×
LU-Net	33428	0.08 ×
LU-Net + MAG	34332	0.09 ×

TABLE 5.1 – Comparaison du nombre de paramètres utilisés dans différentes architectures.

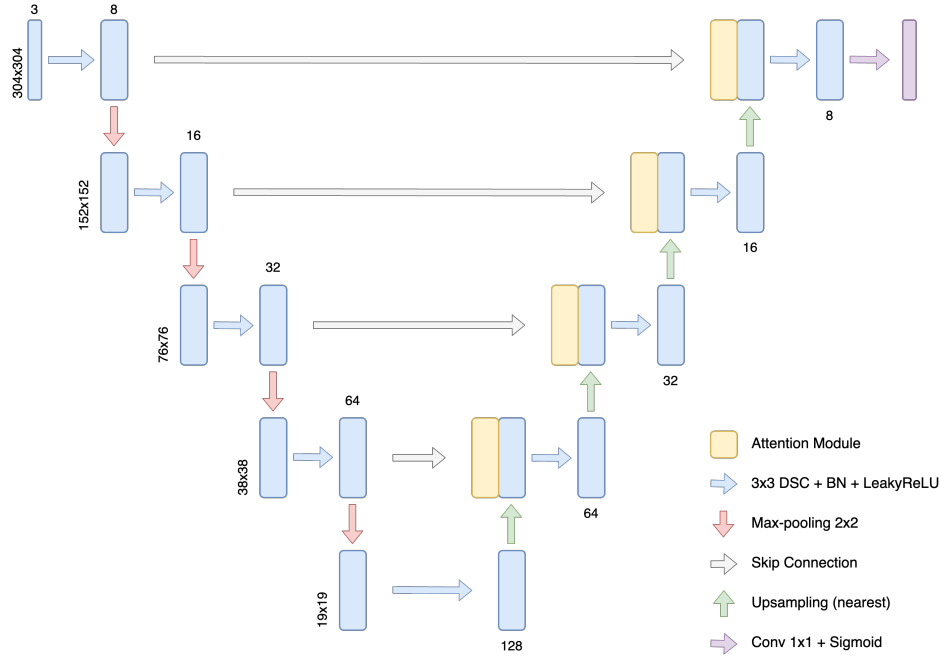


FIGURE 5.14 – Nouvelle architecture pour la segmentation du duramen basée sur l’U-Net. Image issue de [C32].

5.2.5 Expérimentations

Détection de la moelle

Pour évaluer la méthode proposée pour la détection de la moelle (*Section 5.2.2*), nous disposons de deux jeux d’images d’extrémités du sapin de Douglas. Le premier, appelé *Besle*, se compose de 65 images de taille 4320×3240 pixels qui ont été prises juste après la récolte en forêt avec un appareil photo numérique (Panasonic Model DMC-FZ45). Le second, appelé *BBF*, se compose de 40 images de taille 4608×3456 pixels. Ces images ont été prises avec un smartphone (Huawei Model ANE-LX1). Les deux jeux de données contiennent les mêmes extrémités de grumes. Il y a au total 11 grumes, et chaque grume a été photographiée plusieurs fois (de 3 à 5 fois) en tournant ou déplaçant légèrement la caméra entre chaque vue. Comme nous nous intéressons à la robustesse de la méthode vis-à-vis des variations de lumière ambiante, de la saleté ou des marques de sciage, les images des grumes sont prises aussi brutes que possible. Il faut noter que, dans notre travail, nous avons considéré que la position de la moelle est un pixel unique même si, d’un point de vue biologique, elle peut occuper une plus grande surface. Pour les besoins de l’évaluation, la position réelle du centre de la moelle a été annotée manuellement par des experts.

La *Figure 5.15* montre un aperçu des résultats obtenus avec l’algorithme de détection de la moelle. Le *Tableau 5.2* présente des comparaisons entre la méthode proposée et trois autres [222, 223, 372] pour la détection de la moelle. Plus précisément, Kurdthongmee *et al.* [223] ont proposé de diviser image en blocs distincts et ensuite d’utiliser l’histogramme de gradient orienté (HoG) pour l’estimation de l’orientation. Puis, ils accumulent pour chaque bloc une ligne selon l’estimation de l’orientation. L’algorithme présenté par Schraml et Uhl [372] divise aussi l’image en blocs (mais les blocs peuvent se chevaucher) et utilise l’analyse de Fourier pour l’estimation de l’orientation. L’accumulation est faite à partir des orientations estimées des blocs. [222] est une



FIGURE 5.15 – Détection de la moelle (croix noire) par la méthode proposée sur des images brutes des extrémités de grume.

méthode basée sur un réseau de neurones et un apprentissage profond pour détecter la moelle. Après l'entraînement, la prédiction sur une image renvoie des boîtes avec une probabilité assignée pour chacune d'y trouver une moelle. La moelle est déterminée comme le centre de la boîte de probabilité la plus élevée. Il faut noter qu'aucune des méthodes mentionnées n'a été réalisée dans des conditions expérimentales avec des données brutes comme la nôtre.

Données	Méthodes	Erreur moyenne	Écart-type	Erreur min	Erreur max	Temps (ms)
Besle	Schraml and Uhl [372]	2.29	0.98	0.39	4.96	8344
	Kurdthongmee <i>et al.</i> [223]	25.06	21.23	2.15	92.44	667
	YOLOv3 [222]	2.88	1.67	0.87	7.68	138
	Notre méthode	2.34	1.02	0.46	5.04	910
BBF	Schraml and Uhl [372]	2.39	1.48	0.49	7.59	8660
	Kurdthongmee <i>et al.</i> [223]	38.38	38.91	3.14	232.74	721
	YOLOv3 [222]	12.69	53.55	0.50	341.92	186
	Notre méthode	2.26	1.32	0.44	4.63	1055

TABLE 5.2 – Comparaison de la détection de la moelle avec les méthodes [222, 223, 372] sur les deux jeux de données : Besle et BBF.

Les résultats dans le *Tableau 5.2* montrent que, sur les deux jeux de données, la méthode basée sur un réseau de neurones est la plus rapide, sa limite est l'apprentissage, qui est lent et qui nécessite un grand jeu de données. Notre méthode présente un bon compromis entre le temps

d'exécution et la précision de la détection. Elle est en moyenne 5 fois plus rapide que [372] et peut être facilement parallélisée. Pour le jeu *Besle*, la méthode proposée est en deuxième sur les mesures d'erreur. Nous pouvons observer également que notre méthode et celle de [372] sont plus précises que [222, 223]. Pour le jeu *BFF*, notre détection est la meilleure sur toutes les mesures. Les résultats de [222] sont moins bons sur ce jeu d'images, cela peut être dû au petit nombre d'images qu'il contient.

Les détails de l'implémentation de la méthode proposée et d'autres résultats sont donnés dans [C9] et l'article IPOL [J14] associés à ce travail. Les résultats peuvent aussi être reproduits à partir du dépôt *GitHub*⁴ et avec la démonstration en ligne :

https://ipol-geometry.loria.fr/~phuc/ipol_demo/ACO_PithDetection/

Estimation des caractéristiques géométriques

Cette section présente un aperçu de résultats sur différentes caractéristiques géométriques obtenues avec les filtres directionnels proposés dans la Section 5.2.3.

Les premières expérimentations ont été faites sur des images binaires. Les images de test sont données dans la Figure 5.16, nous avons : un anneau, une image constituée de deux cercles avec des centres différents et une image de vaisseaux sanguins (extraite d'une image biomédicale de rétine). La Figure 5.17 montre les résultats des caractéristiques géométriques : l'élongation, l'orientation, l'épaisseur directionnelle et la portée orthogonale des images de la Figure 5.16. La figure montre que la carte d'élongation est uniforme pour l'anneau comme prévu, les segments les plus longs se trouvent sur le bord intérieur. Il en est de même pour les deux cercles. Pour l'image des vaisseaux sanguins, plus les vaisseaux sont allongés, plus la valeur d'élongation estimée est élevée. Pour la carte d'orientation, l'angle θ est considéré pour l'orientation. Autrement dit, les segments discrets $\mathcal{S}(1, 3, 0)$ et $\mathcal{S}(-1, -3, 0)$ ont la même orientation. Ceci explique la discontinuité entre 0 (pixels noirs) et π (pixels blancs) sur la figure. Il y a cependant des artefacts dus à la moyenne d'orientation. L'orientation obtenue est quand même proche de l'orientation théorique. Pour l'épaisseur directionnelle, nous montrons qu'elle est plus élevée à l'extérieur de l'anneau. Cela est dû à la petite longueur des segments discrets à la fin, ce qui permet d'épaissir facilement les segments. Un petit nombre de pixels réduit la probabilité d'être à l'extérieur de l'objet lors de l'épaississement. Enfin, la portée orthogonale doit être élevée lorsque l'objet est large ou lorsqu'il se trouve dans une intersection, comme cela peut être indiqué sur l'image du vaisseau.

D'autres expérimentations sont sur les images en niveaux de gris. Nous comparons les résultats de notre méthode avec celle de Soille et Talbot [393]. Pour chaque méthode, on utilise des segments de longueur maximale $n = 21$. Les premières expérimentations sont réalisées sur des objets circulaires sans bruit (Figure 5.18 (a)) pour lesquels l'orientation réelle est facilement déterminée (Figure 5.18 (b)). La Figure 5.18 montre également les résultats visuels des orientations obtenues avec la méthode [393] et les trois variantes de notre méthode.

Pour une comparaison plus quantitative, nous calculons l'écart entre l'orientation théorique et celle estimée en utilisant la mesure de déviation de la racine de la moyenne des carrés (Root-Mean-Square Deviation (RMSD) en anglais) proposée par Turroni *et al.* [422] :

$$RMSD = \sqrt{\frac{\sum_x d^2(\theta_x, \theta_x^G)}{N}} \quad (5.16)$$

avec N le nombre total de pixels de l'image I , θ_x^G l'orientation théorique au point $x \in I$, θ_x celle

4. <https://gitlab.com/Ryukhaan/treetrace/-/tree/master/pith>

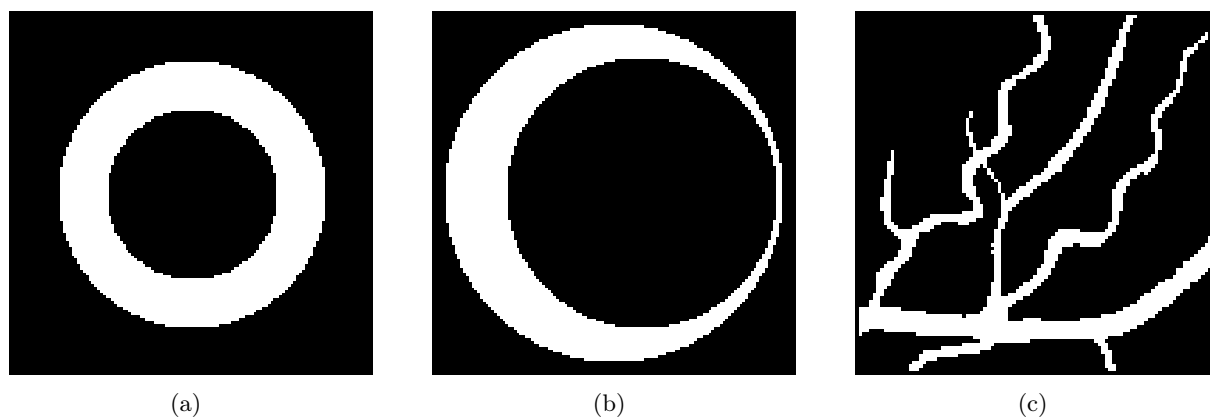


FIGURE 5.16 – Images binaires d'entrée pour les estimateurs géométriques avec les filtres directionnels. Les pixels blancs appartiennent à l'objet et les pixels noirs sont le fond.

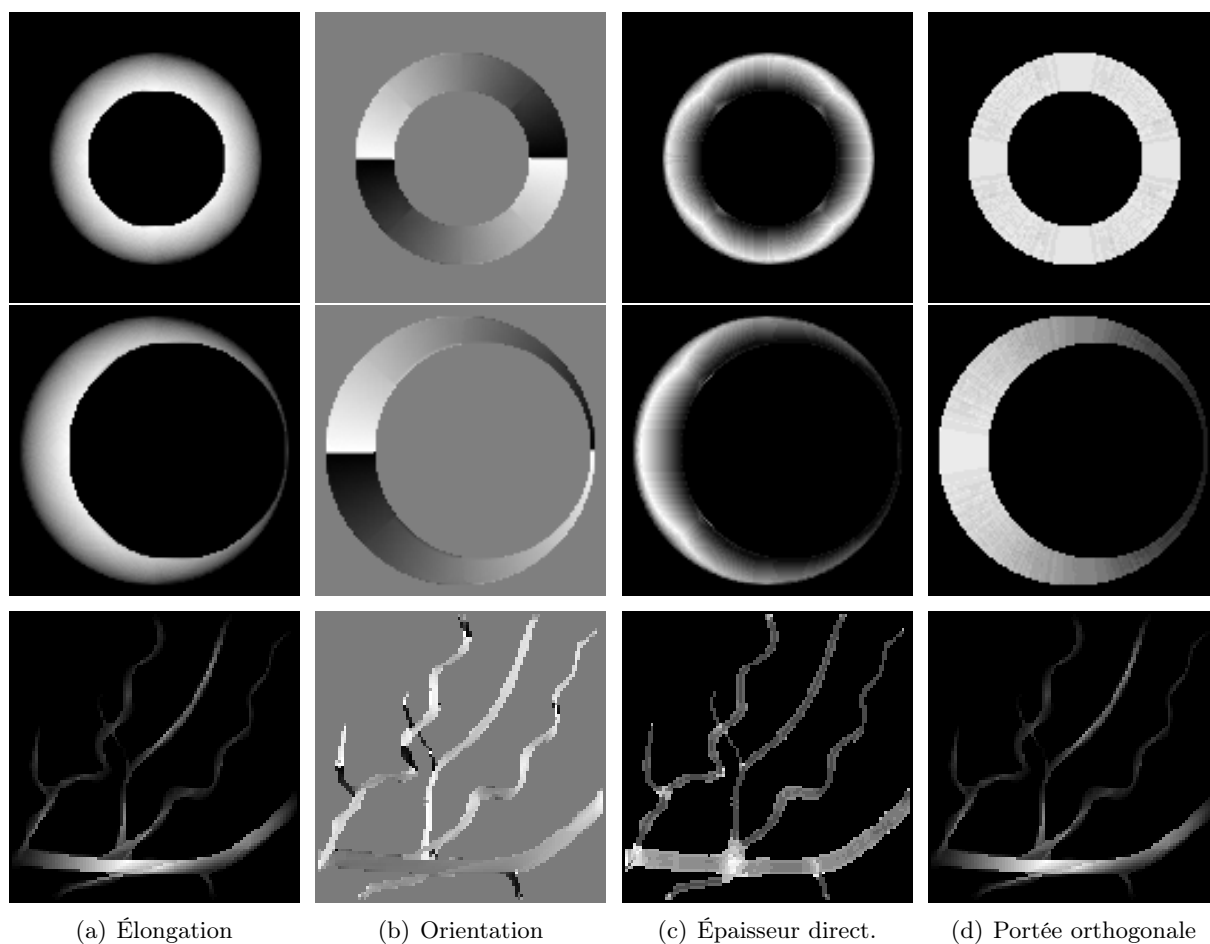


FIGURE 5.17 – Estimations des caractéristiques géométriques des images de la *Figure 5.16* avec les filtres directionnels sur les points d'objet. Première colonne : l'élongation locale L . Deuxième colonne : l'orientation locale θ . Troisième colonne : l'épaisseur directionnelle E . Quatrième colonne : la portée orthogonale P . Plus la valeur estimée est importante, plus le pixels est blanc.

estimée par la méthode, et $d(.,.)$ est calculée par

$$d(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \theta_1 - \theta_2 & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 - \theta_2 < \frac{\pi}{2} \\ \pi + \theta_1 - \theta_2 & \text{si } \theta_1 - \theta_2 < -\frac{\pi}{2} \\ \pi - \theta_1 + \theta_2 & \text{si } \theta_1 - \theta_2 \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (5.17)$$

Pour les images de la *Figure 5.18*, la méthode de Soille et Talbot [393] donne $RMSD \approx 0.2809$, et notre méthode donne les valeurs de RMSD des trois variantes : de l'épaisseur variée avec $RMSD \approx 0.3111$, de la longueur variée avec $RMSD \approx 0.2809$, de toutes les épaisseurs et longueurs $RMSD \approx 0.2317$.

La *Figure 5.19* montre un autre résultat sur une image réelle extraite d'une image biomédicale de rétine. La *Figure 5.19 (a)* est l'image d'entrée et les *Figure 5.19 (b)* et *(c)* sont respectivement les images résultantes filtrées par [393] et notre approche avec la variation de longueur. On observe que notre méthode préserve mieux les structures fines et circulaires. De plus, les résultats sont plus lisses aux intersections par rapport au [393]. Ces différences sont surlignées avec les cadres rouges sur la figure.

Plus de détails sur la méthode sur les filtres directionnels ainsi que des résultats sont donnés dans l'article [C8]. L'implémentation de la méthode est disponible sur le dépôt *GitHub* :

<https://gitlab.com/Ryukhaan/treetrace/-/tree/master/geometry>

Les résultats obtenus avec les filtres directionnels montrent leur intérêt pour les analyses sur images du bois. En effet, un tel filtre est bien adapté pour des images avec des structures fines et circulaires telles que des images de cernes ou encore d'empreintes digitales.

Segmentation du duramen

Cette section montre un aperçu des résultats de la détection du duramen avec l'architecture LU-Net proposée dans la *Section 5.2.4*. Pour les expérimentations, deux jeux de données de grumes de sapin de douglas sont utilisés : le premier, appelé *logyard*, se compose de 208 images prises aux parcs à bois et le deuxième, appelé *sawmill*, se compose de 150 images des mêmes grumes prises à la scierie. Il faut savoir que les images ont été segmentées manuellement pour supprimer l'arrière-plan. La *Figure 5.20* montre quelques exemples des mêmes grumes extraits de ces deux jeux de données. Concernant les données d'entraînement, la partie du duramen est ensuite segmentée manuellement sur les images d'entrée par des experts en biologie.

Pour l'entraînement du réseau, nous utilisons des images de taille 304×304 . Tous les modèles sont entraînés pour un maximum de 100 époques. En raison du faible nombre de données annotées disponibles, nous augmentons leur nombre via des déformations aléatoires sur les images d'entrée.

Le processus d'entraînement s'est déroulé sur un GPU (NVidia 2070 Super avec 8Gb de VRAM). Le taux d'apprentissage est fixé à 0.001, les paramètres de Shakeout sont $\tau = 0.1$ et $c = 0.1$, l'algorithme d'optimisation Adam [206] est utilisé avec les valeurs par défaut ($\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 0.999$ et $\epsilon = 10^{-7}$). La fonction de coût utilisée est la corrélation du coefficient de Matthews [8] (Matthews coefficient correlation (MCC) en anglais). Les résultats expérimentaux ont été obtenus en utilisant une validation croisée. Plus précisément, les données sont divisées en 8 ensembles, appelé aussi *folds*, pour l'entraînement et la validation.

Le *Tableau 5.3* montre le score de MCC pour chaque fold de la validation croisée pour les deux jeux de données. Pour le *logyard*, le LU-Net est moins précis que l'U-Net d'origine. Cependant, lorsque des AG sont ajoutés, le LU-Net+MAG donne des meilleurs résultats. L'U-Net est plus stable, il a fourni l'écart-type le plus faible sur tous les folds. Le LU-Net+MAG donne la meilleure

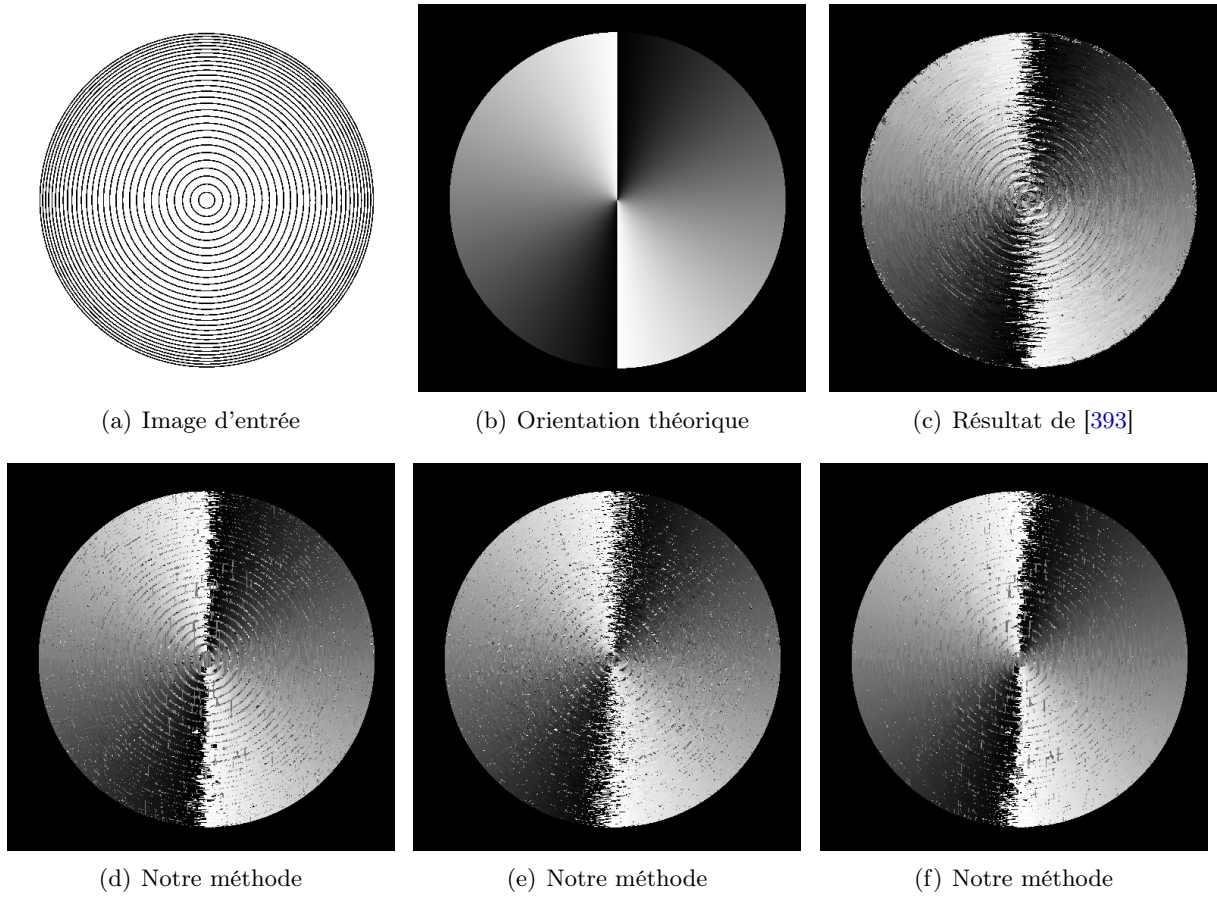


FIGURE 5.18 – Comparaisons des estimations d'orientation locale sur images en niveaux de gris avec les filtres directionnels. (a) Image d'entrée. (b) Orientation théorique. (c) Résultat obtenu avec la méthode de Soille et Talbot [393]. (d-f) Résultats obtenus avec notre méthode avec : la variation de l'épaisseur (d), la variation de longueur (e) et les deux (f).

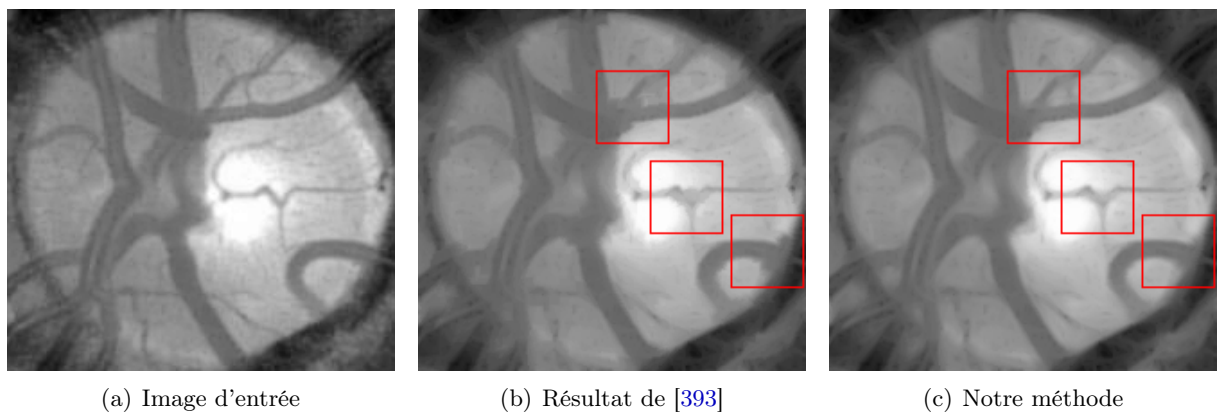


FIGURE 5.19 – Comparaisons des filtres directionnelles sur l'image réelle extraite d'une image biomédicale de rétine. (a) Image d'entrée. (b) Image filtrée avec la méthode de Soille et Talbot [393]. (c) Image filtrée avec notre méthode avec la variation de longueur.

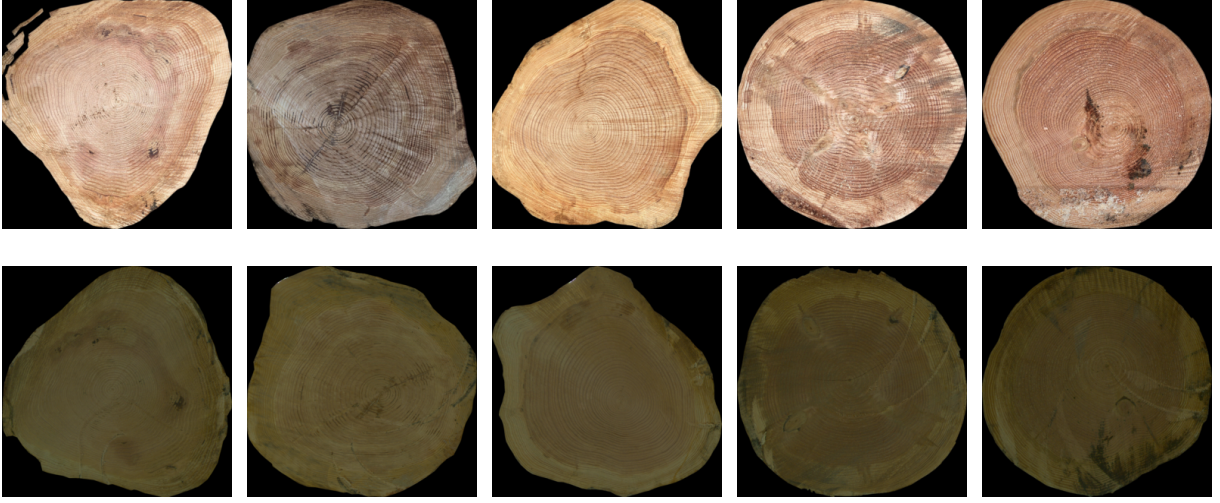


FIGURE 5.20 – Exemples de données pour la détection du duramen. La première ligne est constituée d'images du jeu de données *logyard*. La deuxième ligne est du jeu de données *sawmill*.

Données	Méthode	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	Err. moy.	Écart-type
<i>Logyard</i>	U-Net	0.931	0.911	0.932	0.926	0.915	0.900	0.933	0.925	0.921	0.011
	LU-Net	0.883	0.906	0.926	0.881	0.927	0.926	0.888	0.920	0.907	0.019
	LU-Net + MAG	0.936	0.923	0.924	0.925	0.939	0.952	0.934	0.907	0.930	0.013
<i>Sawmill</i>	U-Net	0.892	0.882	0.907	0.943	0.790	0.699	0.888	0.894	0.862	0.074
	LU-Net	0.932	0.928	0.926	0.931	0.890	0.931	0.929	0.939	0.926	0.014
	LU-Net + MAG	0.941	0.925	0.921	0.946	0.926	0.928	0.942	0.940	0.934	0.009

TABLE 5.3 – Comparaison de MCC scores par validation croisée de différentes architectures sur les deux jeux de données : Logyard et Sawmill.

erreur moyenne et surpasse sur 3 folds. Pour le *sawmill*, l'U-Net donne de moins bons résultats par rapport aux autres. Ceci peut s'expliquer par le fait que les images dans ce jeu de données sont de très faible contraste avec des canaux de couleurs qui sont corrélés les uns aux autres. Par conséquent, les filtres de convolution ne parviennent pas à mettre en évidence le duramen.

D'autres résultats et des comparaisons sont donnés dans [C32]. L'implémentation de la méthode est disponible sur le dépôt *GitHub* associé :

<https://gitlab.com/Ryukhaan/treetrace/-/tree/master/heartwood/deeplearning>

5.3 Extraction automatique des défauts sur écorce de troncs d'arbres

5.3.1 Contexte et travaux existants

Dans le domaine du traitement d'images biologiques, les structures du bois sont souvent exploitées pour répondre à divers objectifs, par exemple l'identification des espèces [58], l'estimation de la qualité du bois [167], l'identification des micro-habitats d'arbres [341], la traçabilité [371] ou l'analyse de la culture des plantes [159]. Ces différentes applications reposent sur différentes modalités d'acquisition d'images telles que les images 2D classiques (y compris les images hyperspectrales), les nuages de points 3D (à partir d'un scanner stéréo multi-vues 3D ou LiDAR) ou des images volumétriques 3D (scanner médical à rayon X [220] ou ultra-son [145]).

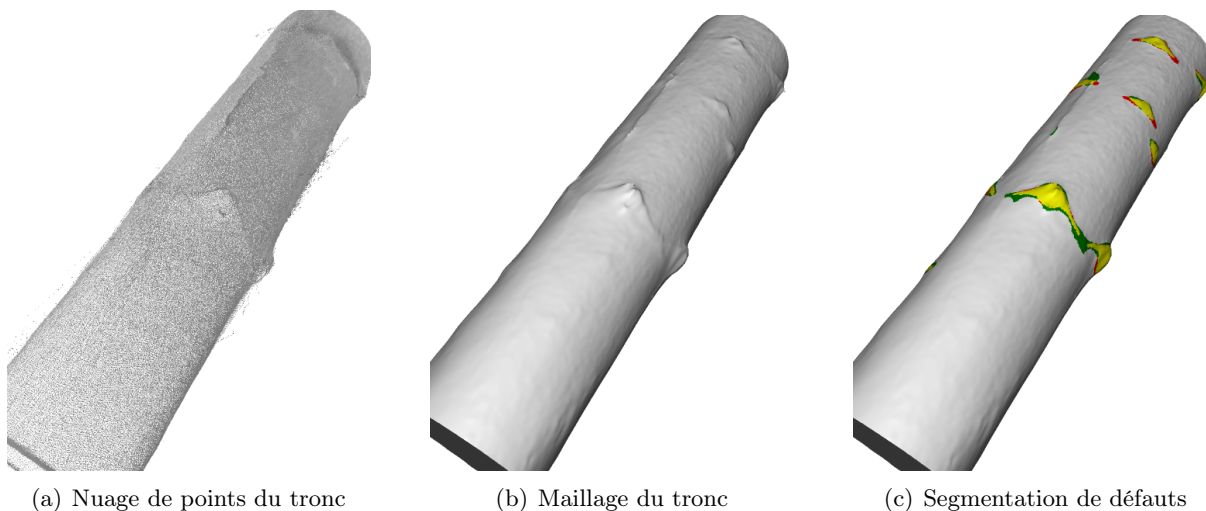


FIGURE 5.21 – Détection des défauts à la surface de tronc d'arbres : (a) données LiDAR d'entrée sous forme de nuage de points et (b) sa reconstruction en maillage utilisée pour le détection des défauts extérieurs. (c) Les défauts sont segmentés et comparés à la vérité terrain.

Dans le cadre du projet **ANR WoodSeer**, et plus spécifiquement, la collaboration entre l'équipe ADAGio avec les chercheurs Van-Tho Nguyen (Université de Sherbrooke, Canada) et Thierry Constant de l'équipe Silva d'INRAE, nous nous intéressons à la détection des *défauts* (ou *singularités*) situés sur l'écorce du tronc d'arbre. Différents types de défauts sont identifiés par les experts en biologie en fonction de leurs origines et de leurs stades de développement ; il y a par exemple les nœuds, cicatrices de branche, picots, broussins, amas de bourgeons, *etc.* Quelques exemples sont donnés sur la *Figure 5.2* (voir [7, 298] pour plus de détails). On peut globalement diviser ces défauts en deux classes : (1) les *défauts externes* sont ceux qui se trouvent à la surface du tronc, *i.e.* l'écorce, et (2) les *défauts internes* sont ceux qui se trouvent à l'intérieur du tronc.

Les défauts externes du bois jouent un rôle important sur la qualité du bois. Ils ont comme origine des blessures d'exploitation, des fentes causées par le séchage ou des fentes dues au gel dans les arbres, des maladies causées par les champignons, des blessures causées par les animaux, et enfin de la ramification due au développement de l'arbre. Parmi les défauts externes, ceux dus à la ramification de l'arbre ont les impacts les plus importants du point de vue de la qualité du bois. Plus particulièrement, plusieurs travaux de recherche ont mis en évidence les corrélations existant entre les défauts internes et externes [333, 337, 397, 414]. Ces corrélations, implicites dans les normes de classement des bois ronds, confirment que les défauts externes peuvent être utilisés pour déduire l'information sur les défauts internes qui ne sont, de nos jours, accessibles qu'à travers l'utilisation de scanners à rayons X. Ces scanners fournissent une structure interne de référence pour le système raméal mais peu abordable aux entreprises de la filière du fait de l'importance des investissements requis.

Pour répondre au problème énoncé dans le projet, notre objectif principal est de détecter automatiquement différents types de défauts externes, en particulier ceux liés à la ramification. Plus spécifiquement, la détection est effectuée sur les données obtenues par les scanners laser terrestres (ou scanners LiDAR terrestres) du tronc d'arbre, comme illustré dans la *Figure 5.21*. Il est important de mentionner que les scanners LiDAR offrent des résultats beaucoup plus rapides avec un prix plus abordable par rapport aux scanners à rayons X. Par la suite, nous présentons la première partie du travail liée à la segmentation de défauts à la surface du tronc.

Carpenter et Jones [57] ont montré que les défauts externes correspondent majoritairement

aux régions avec un relief plus fort sur l'écorce du tronc. Plusieurs travaux ont été proposés dans la littérature pour détecter ces régions en comparant la surface du tronc avec une surface de référence. Celle-ci a souvent été définie par des cylindres ou des cercles. Dans ce contexte, nous pouvons citer le travail de Schütt *et al.* [374] qui ont exploité les données LiDAR terrestres pour la détection des défauts externes. Plus précisément, ils ont proposé de localiser les singularités en combinant le LiDAR terrestre 3D avec des images 2D. Après avoir utilisé une transformation de coordonnées cylindriques, un réseau de neurones est formé et utilisé pour extraire les zones de singularité. La méthode est prometteuse, mais le processus d'extraction nécessite une correction interactive potentielle d'utilisateurs et aucun détail n'est donné pour reproduire la méthode ni les mesures de qualité des résultats.

Thomas *et al.* ont proposé plus tard une méthode automatique pour détecter les défauts externes en utilisant un algorithme d'ajustement de cercle 2D [413]. La méthode a ensuite été améliorée avec une implémentation parallèle afin de réduire le temps d'exécution [415]. L'une des limites d'une telle approche est que la taille minimale du défaut détectable est de 12,7 cm et avec un relief supérieur à 1,27 cm. Ceci peut être expliqué par des irrégularités de la forme du tronc. En effet, la surface de référence créée par les cercles ne se rapproche pas toujours correctement de la surface réelle du tronc surtout lorsque celle-ci présente une forme irrégulière. Par conséquent, les petits défauts ne sont pas détectés par la méthode proposée.

Pour répondre à la limitation précédente, Kretschmer *et al.* [218] ont ajouté des informations géométriques dans la détection de défauts en utilisant une approche basée sur l'ajustement de cylindre. En utilisant une méthode de reconstruction d'arbre [314], une série de cylindres est montée selon l'axe principal du tronc et chaque point 3D est associé à une partie cylindrique. Une telle association permet de générer une carte de distance afin d'extraire manuellement les défauts. La stratégie proposée n'est pas automatique, mais elle permet de détecter des défauts plus petits avec moins de 4.3 cm pour la taille minimale et moins de 2 cm pour la hauteur du relief.

Constatant que la forme du tronc ne correspond pas toujours à un cylindre, Nguyen *et al.* [301] ont proposé une méthode automatique basée sur les *patches* qui permet de mieux suivre la géométrie du tronc. Plus précisément, l'algorithme repose sur le calcul de la ligne centrale [192] du tronc, ce qui permet de mieux s'adapter à la forme du tronc et, en particulier, d'éviter l'étape de reconstruction cylindrique présente dans des travaux antérieurs.

Les méthodes décrites précédemment sont conçues spécifiquement pour l'estimation des défauts du bois, mais il pourrait être intéressant de mentionner d'autres approches générales qui sont exploitées pour la détection de fissures de surface dans un contexte industriel. Par exemple, Tabernik *et al.* [406] ont proposé une méthode d'apprentissage profond (deep learning en anglais) pour détecter des anomalies de surface. Même si les images considérées diffèrent du contexte de défaut d'arbres, leur stratégie pourrait être intéressante à adapter à notre cadre puisque l'architecture proposée ne demande pas s'entraîner avec de nombreuses images. Dans un autre contexte, celui de l'industrie ferroviaire, de l'industrie ferroviaire, les défauts à la surface des rails ont été analysés dans le travail de Faghih-Roohi *et al.* [122]. Leur approche est aussi basée sur l'apprentissage profond et permet de détecter divers défauts comme la soudure ou le joint. Enfin, on peut se référer à une autre méthode d'inspection de surface à partir d'images de microscope laser confocal qui exploite le réseau de neurones pour détecter des défauts sur des images très texturées [430].

Inspirés par le travail de Nguyen *et al.* [301], nous présentons une méthode basée sur la construction d'images 2D de la représentation de l'écorce de l'arbre, appelée *carte de reliefs* (relief map en anglais), qui est combinée avec un réseau de neurones convolutifs (convolutional neural network (CNN) en anglais) pour segmenter précisément les défauts du bois. Plus précisément,

la carte de reliefs est construite à partir d'un maillage d'entrée (*Figure 5.21 (b)*) comme une représentation 2D du maillage 3D. À partir de ces images, nous construisons un ensemble de données qui alimente un CNN pour l'entraînement et la prédiction des zones de défauts. Le résultat peut être re-projeté sur le maillage d'entrée pour récupérer les défauts en 3D comme illustré dans la *Figure 5.21 (c)*.

Avant d'entrer dans les détails de la nouvelle approche, nous rappelons brièvement quelques définitions (*Section 5.3.2*) qui sont utilisées pour la construction d'image de carte de reliefs (*Section 5.3.3*). Associé à cette représentation, le processus de segmentation basé sur une architecture CNN est introduit dans la *Section 5.3.4*. Les expérimentations présentant les principaux résultats et les liens de la reproductibilité sont donnés dans la *Section 5.3.5*.

5.3.2 Outils géométriques

Dans cette section, nous rappelons deux outils géométriques utilisés par la méthode : la notion de ligne centrale [192] et le calcul de la distance delta [301]. Ces deux concepts servent ensuite à calculer une représentation 2D des points 3D d'entrée, appelée *carte de reliefs*, qui caractérise le relief des points par rapport à l'axe du tronc et à partir d'un plan tangent ajusté.

Ligne centrale du tronc d'arbres

Kerautret *et al.* ont présenté dans [192, 195] une méthode de calcul de la *ligne centrale* des formes 3D par accumulation des normales et en utilisant uniquement des analyses des maillages des formes. Le principe du calcul est que, dans un objet tubulaire, les normaux convergent vers son axe médian. En se basant sur cette hypothèse, le calcul de la ligne centrale consiste à accumuler dans un espace discrétisé des normaux (orienté vers l'intérieur de l'objet) en chaque point du maillage de l'objet. La *Figure 5.22* illustre les étapes principales de la méthode pour calculer la ligne centrale à partir des faces du maillage d'entrée et de ses normaux. La *Figure 5.22 (a)* montre une image de coupe avec deux faces f_k et f_j dans la direction de leurs vecteurs normaux (\vec{n}_j et \vec{n}_k) qui constituent des scans directionnels pour l'*espace d'accumulation*. Cet espace est calculé avec les scans directionnels de tous les vecteurs normales des faces du maillage d'entrée (*Figure 5.22 (b)*). La *Figure 5.22 (c)* est l'espace d'accumulations résultant. La ligne centrale (*Figure 5.22 (d)*) est obtenue par un ensemble de voxels, dans l'espace d'accumulations, ayant un score d'accumulations supérieur à une valeur de seuil donnée.

Dans [195], une première version de la méthode est développée qui consiste à rechercher les maxima locaux dans l'espace d'accumulation et de poursuivre par une étape d'optimisation. Cette première version est cependant très sensible au bruit. Afin de surmonter cette limitation, une amélioration est proposée avec la notion de *confidence sur accumulation*. Cette nouvelle version permet de traiter des formes plus complexes (*e.g.* maillage partiel, tronc d'arbre avec des branches, *etc.*) que la première et possède la capacité de traiter des données plus volumineuses (*e.g.* troncs scannés à haute résolution). La description détaillée de la méthode est disponible dans les articles associés [192, 196], et une implémentation de l'algorithme est disponible sur *GitHub*⁵.

Une illustration de l'extraction de la ligne centrale pour un maillage d'un tronc d'arbre est donnée sur la *Figure 5.23*. Elle est obtenue en construisant un espace d'accumulation à partir des vecteurs normaux des faces du maillage d'entrée (*Figure 5.23 (a)*) et en le filtrant avec un vote de confiance. La ligne centrale est composée de plusieurs petits segments et peut être présentée comme une suite de points formant une ligne polygonale (*Figure 5.23 (b)*). Étant donné que les

5. <https://github.com/kerautret/CDCVAM>

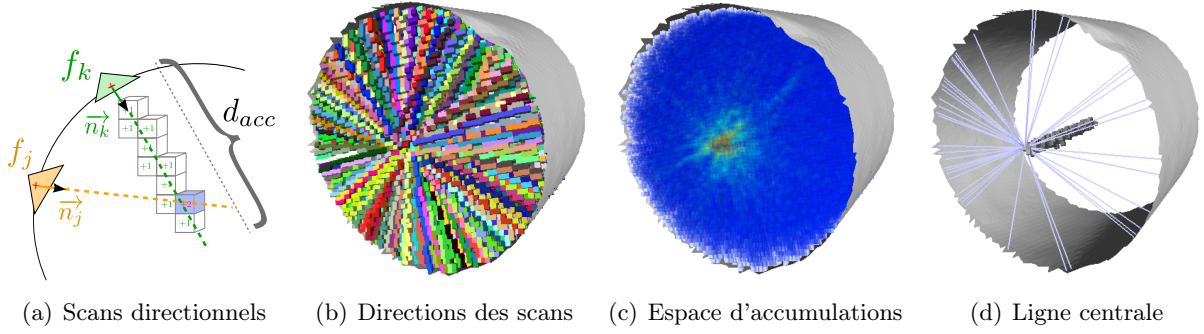


FIGURE 5.22 – Illustration des principales étapes de l'algorithme de calcul de la ligne centrale. (a) Scans directionnels sur une distance maximale d_{acc} , (b) directions des scans définies par tous les faces du maillage d'entrée, (c) espace d'accumulations obtenue avec tous les faces du maillage et (d) les voxels ayant un score d'accumulation supérieur à une valeur seuil avec l'ensemble des faces qui contribuent au score d'accumulation. Images issues de [193].

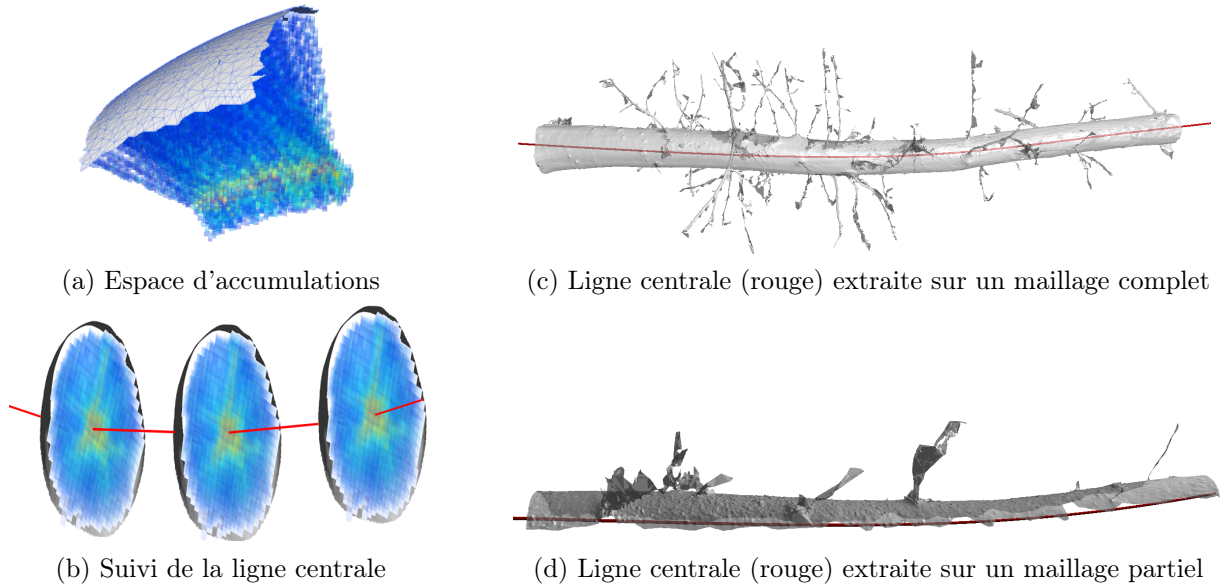


FIGURE 5.23 – Extraction de la ligne centrale à partir d'un maillage : (a) l'étape d'accumulation à partir des faces du maillage, (b) l'étape de suivi à partir des valeurs d'accumulation en 3D. Les images (c) et (d) montrent les résultats de la ligne centrale (en rouge) respectivement sur un maillage complet et partiel. Images issues de [193].

données d'entrée de la méthode ne sont qu'un ensemble de faces, la ligne centrale peut également être calculée à la fois à partir d'un maillage complet ou partiel comme illustré sur la Figure 5.23 (c) et (d) respectivement.

Pour la détection des défauts à la surface des troncs d'arbres, en raison du diamètre non constant du tronc, Nguyen *et al.* [301] ont utilisé un processus de lissage basé sur un spline cubique afin d'obtenir une ligne centrale lisse du tronc. Les détails de l'implémentation et la reproduction de la méthode se trouvent dans [300, 301] avec le code disponible sur *GitHub*⁶.

6. <https://github.com/vanthonguyen/treelogdefectsegmentation>

Distance de référence locale

Comme mentionné précédemment, les défauts externes se situent généralement aux zones de relief. Pour calculer le relief d'un point P à la surface du tronc d'arbre, on définit la *distance de référence* de P comme sa distance à la ligne centrale extraite du maillage du tronc. On remarque que le nuage de points 3D représenté dans le système de coordonnées cartésien n'est pas très optimal pour la surface du tronc qui a une forme cylindrique. Pour faciliter les traitements, nous convertissons donc les points du nuage en un système de coordonnées cylindriques. Pour cela, nous définissons un repère locale pour chaque segment de la ligne centrale $C = \{C_0, \dots, C_m\}$. Soit un segment $S_i = [C_i C_{i+1}] \in C$. Le repère locale $(O_i x_i y_i z_i)$ de S_i est défini avec les vecteurs unitaires de base orthogonaux $\{\vec{u}_i, \vec{v}_i, \vec{w}_i\}$ et l'origine O_i est C_i (voir *Figure 5.24*) :

- \vec{w}_i est le vecteur normalisé de $\overrightarrow{C_i C_{i+1}}$
- $\vec{v}_i = \vec{w}_i \times \vec{n}_i$ avec $\vec{n}_i = \vec{w}_i \times \vec{v}_{i-1}$ et $\vec{v}_0 = \vec{v}$ vecteur unitaire de l'axe (Oy) du repère global
- $\vec{u}_i = \vec{v}_i \times \vec{w}_i$

Nous pouvons définir maintenant la conversion en coordonnées cylindriques d'un point P dans le repère local de C .

Définition 103 (Coordonnées cylindriques [301]). *Soit un point P en coordonnées cartésiennes, et $C = \{C_0, \dots, C_m\}$ la ligne centrale. Ses coordonnées cylindriques (r_P, z_P, θ_P) correspondantes dans le repère local de C sont calculées par :*

$$\begin{cases} r_P &= \|\overrightarrow{PP'}\| \\ z_P &= \sum_{j=0}^{i-1} \|\overrightarrow{C_j C_{j+1}}\| + \|\overrightarrow{C_i P'}\| \\ \theta_P &= 2\pi - \arccos\left(\frac{\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_i}{\|\overrightarrow{PP'}\|}\right) \end{cases} \quad (5.18)$$

où P' est la projection orthogonale de P sur C , $[C_i C_{i+1}]$ est le segment de C et contenant P' , \vec{v}_i est l'axe $(O_i y_i)$ du repère local associé à $[C_i C_{i+1}]$.

En d'autres termes, les coordonnées cylindriques $P(r_P, z_P, \theta_P)$ peuvent être re-exprimées par

- r_P est la distance de P à P' , sa projection sur le segment $S_i = [C_i C_{i+1}]$ de la ligne centrale ;
- z_P est la hauteur de P le long de la ligne centrale C ;
- θ_P est l'angle entre le segment $[PP']$ et l'axe v_i du repère local associé à S_i .

Une illustration du calcul est donnée sur la *Figure 5.24* (voir [301] pour plus de détails).

Il faut mentionner que, selon des experts biologiques, la plupart des points appartenant au défaut du bois sont situés dans un patch de forme allongée dans le sens vertical de l'arbre. Autrement dit, la distance d'un point par rapport à la ligne centrale n'est pas suffisamment pertinente pour caractériser un défaut. Pour détecter correctement la variation du relief autour de chaque point P sur la surface du tronc, une analyse locale par *patch* est considérée. Plus précisément, on utilise un patch rectangulaire \mathcal{P}_P centré sur P et étudie la distribution de la distance à la ligne centrale des points appartenant à \mathcal{P}_P (voir *Figure 5.25 (a)*). Puis, une régression linéaire basée RANSAC [135] est calculée pour les points de \mathcal{P}_P (voir *Figure 5.25 (b)*). La distance de P à la droite ajustée de la régression représente le relief de P , elle permet de caractériser la forme du tronc autour de P . Cette distance est appelée *distance delta* de P et notée par δ_P . Une illustration de la distance de référence et de la distance delta est donnée dans la *Figure 5.25 (b)*.

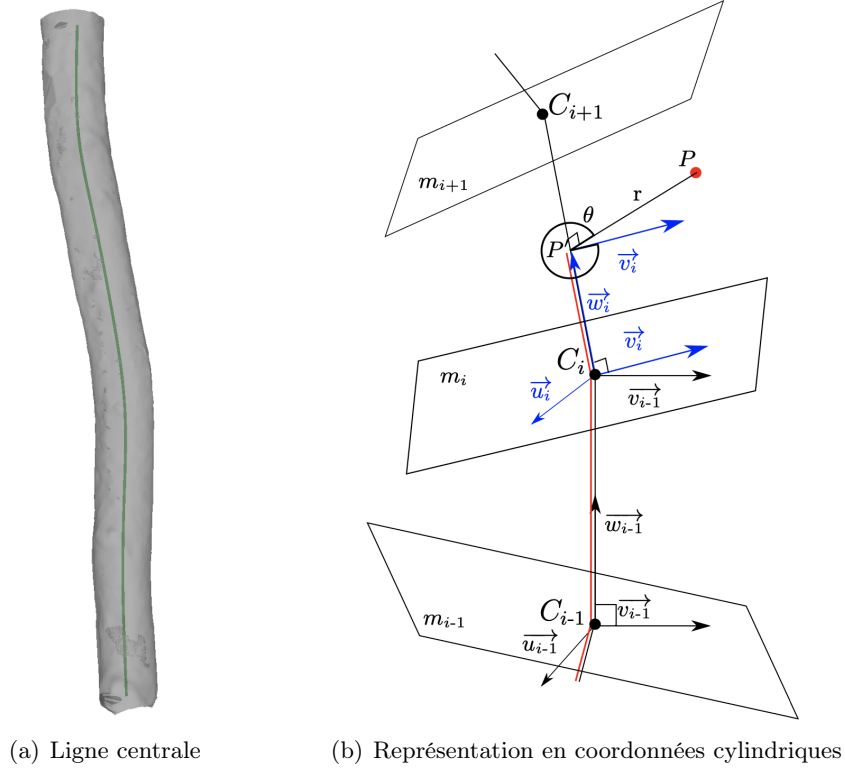


FIGURE 5.24 – Illustration de changement de coordonnées Cartésiennes en cylindriques avec la ligne centrale : (a) la ligne centrale d'un tronc de hêtre et (b) le calcul des nouvelles coordonnées du point $P(x, y, z)$ dans le système de coordonnées cylindriques (r_P, θ_P, z_P) avec z_P la somme le long des segments de la ligne centrale (la ligne rouge). Image issue de [301].

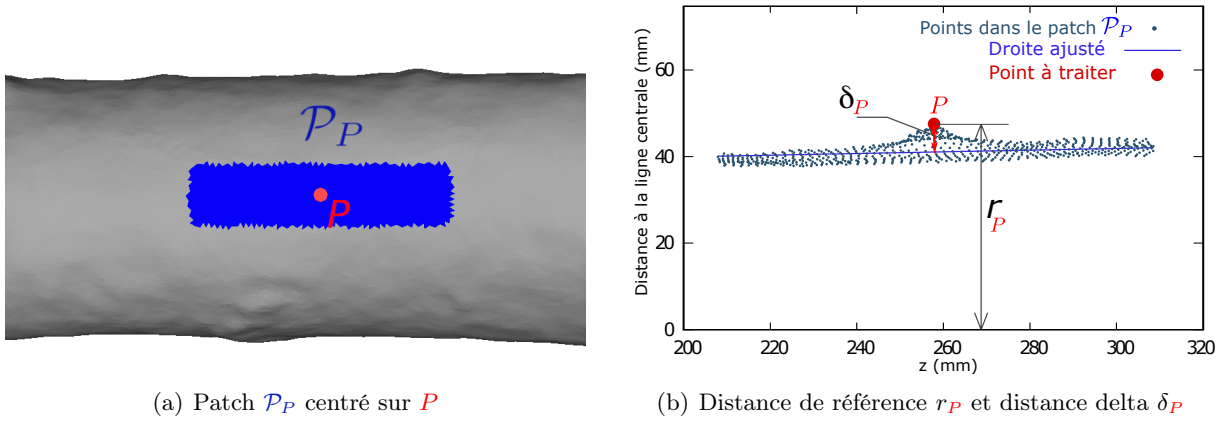


FIGURE 5.25 – (a) Un patch rectangulaire \mathcal{P}_P associé au point P sur la surface du tronc. (b) La distance de référence r_P (resp. la distance delta δ_P) du point P par rapport à la ligne centrale (reps. aux points de \mathcal{P}_P).

5.3.3 Carte de reliefs de la surface du tronc

Basé sur la distance delta δ_P , nous présentons dans cette section le calcul de la carte de reliefs utilisée pour détecter des défauts à la surface de troncs d'arbres. Une carte de reliefs est

une représentation 2D du maillage de l'arbre. Elle est obtenue en discrétisant, d'une part, les points dans l'espace cylindrique du tronc d'arbre et, d'autre part, en complétant les informations manquantes par une analyse multi-résolution. Cette carte permet de segmenter les défauts sur d'images 2D, et en faisant une opération inverse, nous pouvons identifier les points 3D du maillage à partir des points de la carte de reliefs.

Discrétisation des points du tronc

Cette étape consiste à dérouler les points de l'écorce du tronc en les projetant sur un plan. Cette discrétisation est effectuée dans l'espace cylindrique sur les coordonnées θ et z des points du maillage. Plus spécifiquement, on découpe l'intervalle de θ par la circonférence du tronc et de z par la hauteur du tronc. Par conséquent, la carte de reliefs obtenue a la largeur égale à la circonférence moyenne du tronc, à savoir $2\pi * r_m$ avec r_m le rayon moyen du tronc, et la hauteur de la carte est égale à celle du tronc. Chaque point du maillage est associé à une cellule de la carte de reliefs. On calcule ensuite une valeur pour représenter l'ensemble des points dans chaque cellule. Pour cela, on pourrait considérer la distance de référence à la ligne centrale. Cependant, ce choix n'est pas très pertinent pour des troncs ayant une forme non cylindrique (voir *Figure 5.26 (a) – (b)*). Une meilleure solution est d'utiliser la distance delta, ce qui permet une caractérisation plus fine du point par rapport aux points voisins dans son patch.

Figure 5.26 montre un exemple de la carte de reliefs. Dans la figure, nous avons deux cartes de reliefs générées à partir du même maillage d'entrée donné dans la *Figure 5.26 (a)*. Dans la *Figure 5.26 (b)*, la valeur des pixels est calculée à partir de la distance de référence à la ligne centrale. Dans la *Figure 5.26 (c)*, la valeur des pixels est calculée à partir de la distance delta. Avec la carte obtenue par la distance de référence, on peut observer les artefacts – les traces jaunes et rouges – dues à la forme non cylindrique de l'arbre, tandis qu'avec l'utilisation de la distance delta, ces traces disparaissent et les défauts deviennent beaucoup plus visibles.

Analyse multi-résolution

Dans la discrétisation décrite précédemment, il est possible que certaines cellules de la carte de reliefs ne contiennent pas de valeur car aucun point ne leur est associé. Pour gérer cela, nous proposons une analyse multi-résolution afin de compléter les informations manquantes et améliorer la carte de reliefs obtenue. Plus précisément, pour chaque cellule vide, nous réduisons la résolution d'un facteur $\frac{1}{2^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$, jusqu'à ce que la cellule contienne au moins un point discrétisé du maillage. Il est à noter que si n est trop élevé, on risque de perdre des informations sur la distance delta pour la détection de défauts. Par conséquent, lors de l'analyse multi-résolution, nous fixons la limite de $n = 4$. La *Figure 5.27 (a)* illustre cette analyse multi-résolution. On considère dans cet exemple un tableau T de taille 10×10 . Certaines cellules contiennent des points noirs, correspondant aux points discrétisés. Dans d'autres, il n'y en a pas, comme la cellule située aux coordonnées $(2, 2)$. La multi-résolution est illustrée par les cadres de différentes couleurs. Les cadres noir, rouge et bleu correspondent respectivement à des résolutions réduites d'un facteur de $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2^1}$, $\frac{1}{2^2}$. Pour la valeur de la cellule $(2, 2)$, nous recherchons les informations dans la cellule $(1, 1)$ de la discrétisation rouge, et $(0, 0)$ de la discrétisation bleue. La valeur de la cellule $(2, 2)$ est alors le maximum des distance deltas des points dans la cellule $(0, 0)$. Les *Figures 5.27 (b) et (c)* montrent respectivement une comparaison de la carte de reliefs sans et avec l'analyse multi-résolution sur un défaut de type cicatrice de branche. D'autres résultats sont donnés dans la *Figure 5.28* dans laquelle nous pouvons voir des améliorations apportées aux cartes à la carte de reliefs avec cette analyse multi-résolution. Pour représenter la discrétisation sous forme d'une

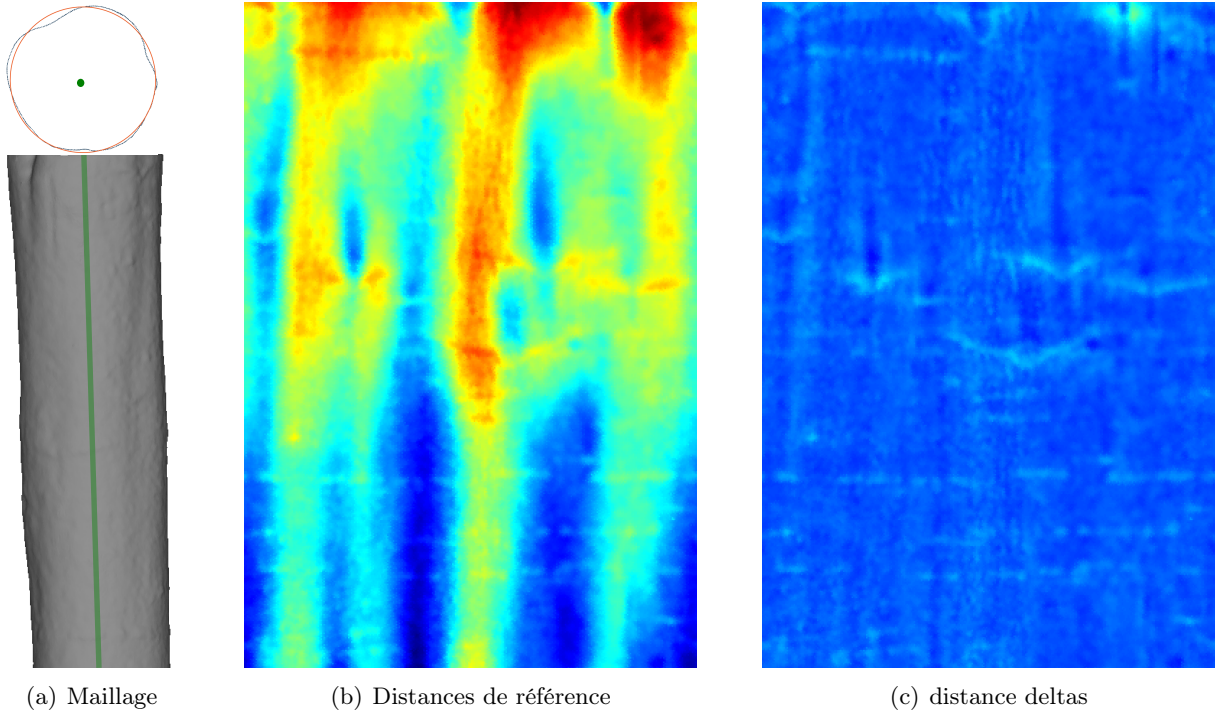


FIGURE 5.26 – Comparaison de la carte de reliefs sur le même maillage (a) d'un tronc non cylindrique : (b) avec la distance de référence à la ligne centrale et (c) avec la distance delta. Les reliefs forts sont en rouge, les faibles en bleu.

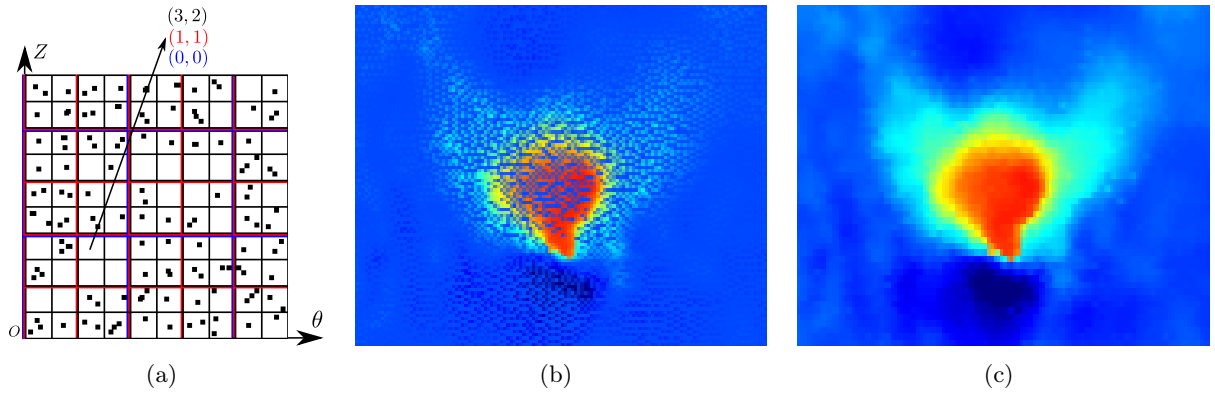


FIGURE 5.27 – (a) Illustration de l'analyse multi-résolution sur une grille de taille 10×10 . (b) – (c) Analyse multi-résolution sur un défaut de type cicatrice de branche : (b) Sans traitement multi-résolution, la carte de reliefs obtenue présente des trous à cause des cellules sans point discrétisé, (c) la carte de reliefs complétée par l'analyse multi-résolution.

image, nous associons une intensité de gris à la distance delta. Cette intensité est répartie sur une échelle fixe : 1 cm est équivalent à dix niveaux de gris. Pour des raisons de visibilité, un jeu de couleurs, du bleu au rouge, est utilisé sur la carte de reliefs dans les *Figures* 5.27 et 5.28.

Plus de détails sur l'algorithme et l'implémentation du calcul de la carte de reliefs sont donnés dans l'article associé [C10]. Dans [J4] une version modifiée de la méthode a été proposée permettant de générer la carte de reliefs des maillages partiels des troncs d'arbres.

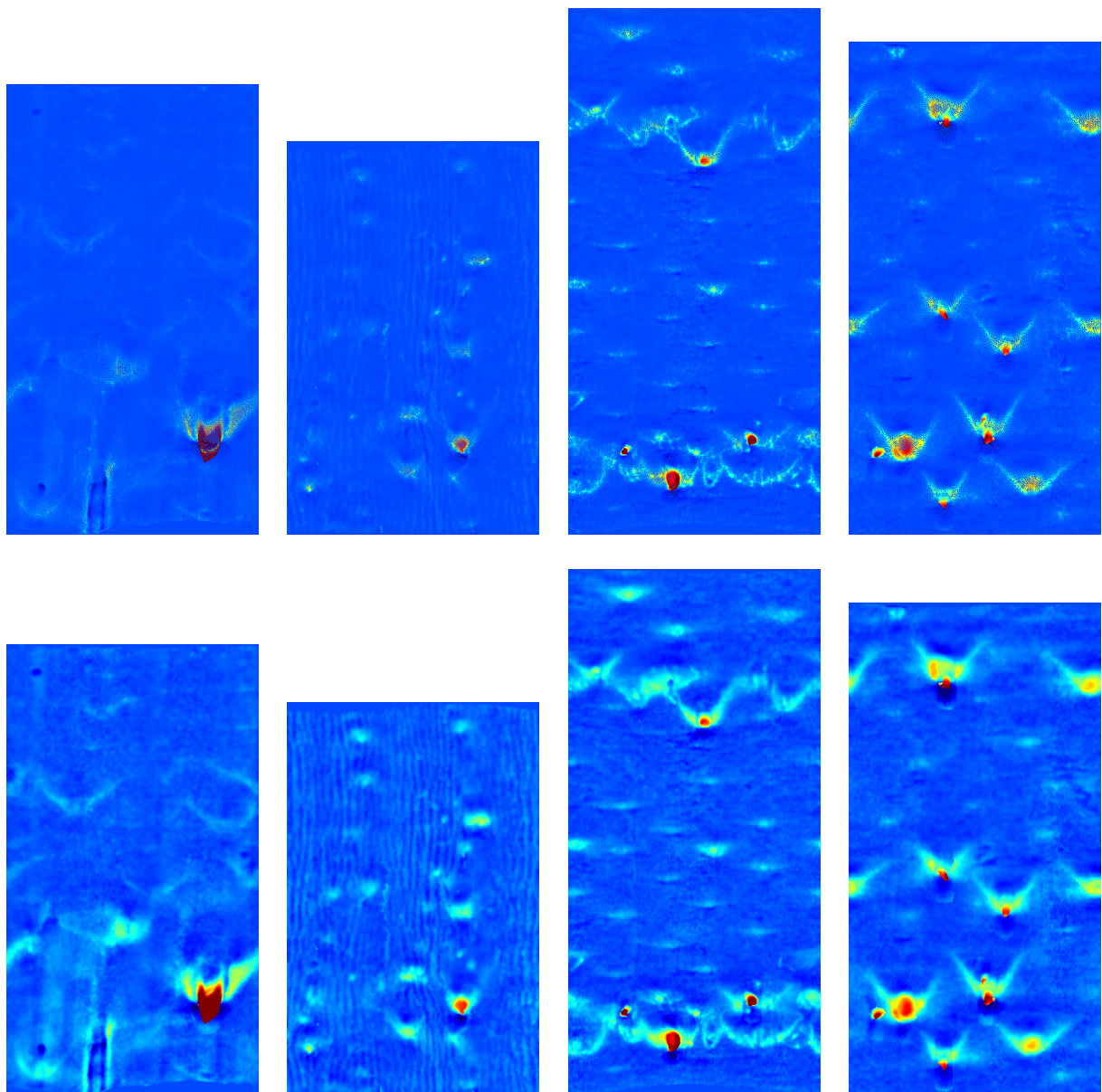


FIGURE 5.28 – Exemples de la carte de reliefs construite à partir des maillages de tronc d'arbres. La première ligne montre les résultats obtenus à partir de la distance delta et la deuxième ligne représente les résultats améliorés avec l'analyse multi-résolution. Voir [C10] pour plus d'exemples.

5.3.4 Segmentation automatique de défauts externes

Dans cette section, nous décrivons la méthode de détection de défauts externes sur l'écorce d'arbres à l'aide de la carte de reliefs calculée précédemment. Grâce à cette carte, le problème 3D de la détection des défauts devient un problème 2D de segmentation de la carte de reliefs. Plus précisément, il s'agit d'une classification d'images binaires dans laquelle chaque pixel de la carte de reliefs sera classé comme défaut ou non.

Il faut noter que les défauts externes peuvent avoir une taille, une forme et une orientation

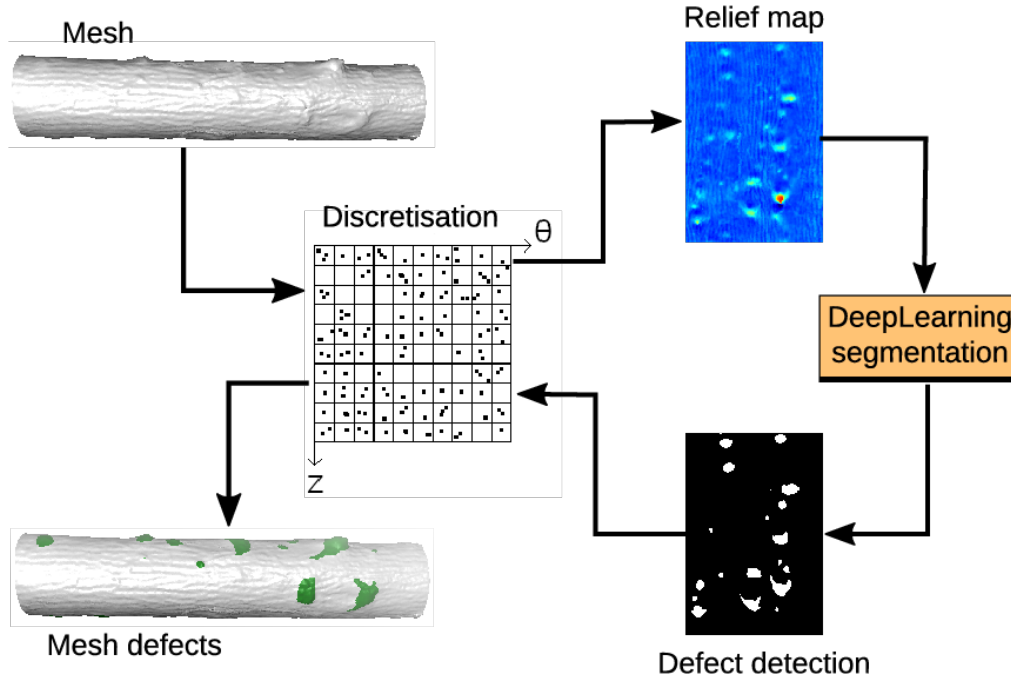


FIGURE 5.29 – Pipeline de la méthode proposée pour segmenter des défauts externes. Image issue de [C10].

arbitraires (voir *Figure 5.28*). De plus, la rugosité de l'écorce, la variabilité des défauts sur une même espèce et entre les différentes espèces (voir *Figure 5.2*) peuvent rendre la tâche de détection encore plus difficile à automatiser par des algorithmes de segmentation classiques.

Au cours des dernières années, les méthodes d'apprentissage profond sont devenues courantes et efficaces pour la segmentation avec des améliorations et des performances remarquables. En effet, elles atteignent souvent des taux de précision plus élevés que les approches classiques dans le domaine de la vision par ordinateur. De plus, les algorithmes d'apprentissage profond avec des réseaux de neurones peuvent être adaptés à différents problèmes car ils peuvent apprendre directement des fonctions cachées de haut niveau à partir d'images. Ils ont aussi la capacité de représenter et de reconnaître des structures complexes sur images. Nous allons dans la suite utiliser la segmentation basée sur un apprentissage profond pour le problème de détection de défauts sur les écorces d'arbres avec l'outil de la carte de reliefs comme entrée du réseau.

Un bref aperçu de la méthode est donné sur la *Figure 5.29* : la carte de reliefs est construite à partir d'un maillage, puis un réseau neuronal convolutif est exploité pour identifier les zones de défaut sur la carte de reliefs, le résultat peut ensuite être re-projecté sur le maillage d'entrée. Nous présentons ci-dessous les détails de l'architecture du réseau utilisé ainsi que la génération du jeu de données d'entraînement à partir de la carte de reliefs.

U-Net pour la segmentation

Pour segmenter les défauts, nous utilisons le réseau convolutif U-Net [347] (voir *Section 5.2.4*) sur la carte de reliefs générée à partir des maillages des troncs d'arbres. L'avantage de l'U-Net est qu'il permet d'entraîner le modèle avec un petit nombre de données et de créer des masques

précis d'objets dans des images. Dans la suite, nous décrivons les modifications effectuées sur le réseau d'origine pour notre problème de détection des défauts externes et la génération de données d'entraînement à partir de la carte de reliefs.

Par rapport à l'architecture originale, nous effectuons quelques modifications. Afin de réduire le sur-ajustement du réseau, nous appliquons la technique de régularisation *drop-out* [152]. Plus précisément, nous ajoutons deux couches de drop-out dans l'encodeur et le décodeur, avec une probabilité de 0.5, pour supprimer de manière aléatoire certaines connexions entre les couches. De plus, la fonction d'activation Leaky ReLu est utilisée à la place de ReLU en raison du problème *ReLU mourant* [255] – les neurones ReLU deviennent inactifs et ne produisent que 0 pour toute entrée – qui peut conduire à un sur-ajustement. Enfin, dans la dernière couche, nous utilisons une fonction d'activation de type sigmoïde au lieu de la fonction soft-max pour garantir que les valeurs des pixels de sortie soient comprises entre 0 et 1. L'architecture de l'U-Net modifiée pour la détection des défauts externes est illustrée dans la Figure 5.30.

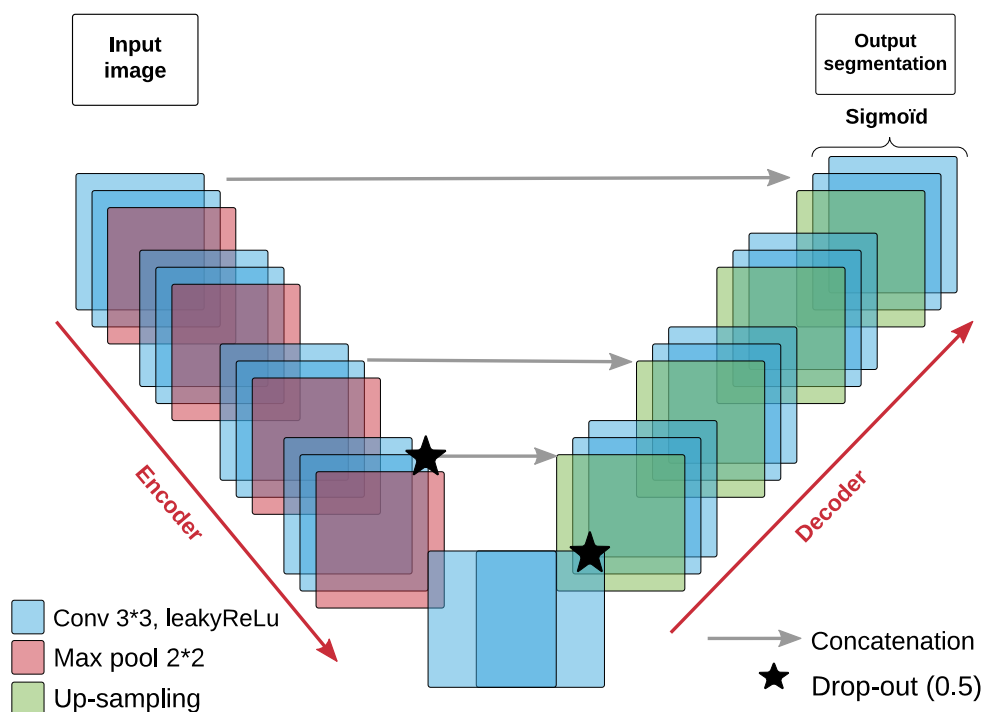


FIGURE 5.30 – Nouvelle architecture pour la détection des défauts externes basée sur l'U-Net. Image issue de [C10].

Données d'entraînement

Pour l'entraînement du réseau, nous utilisons des images de taille 320×320 pixels. L'ensemble de données d'entraînement est généré à partir de la carte de reliefs calculée par le processus décrit dans la Section 5.3.3. Il faut savoir que nous disposons de seulement 25 maillages annotés au total pour l'entraînement et les tests. En raison de ce nombre limité de données, deux stratégies ont été adoptées pour augmenter les données existantes tout en conservant les caractéristiques significatives des objets d'apprentissage qui sont des défauts de l'écorce d'arbres. Tout d'abord, nous divisons chaque carte de reliefs en images de taille 320×320 pixels. Pour cela, nous réalisons

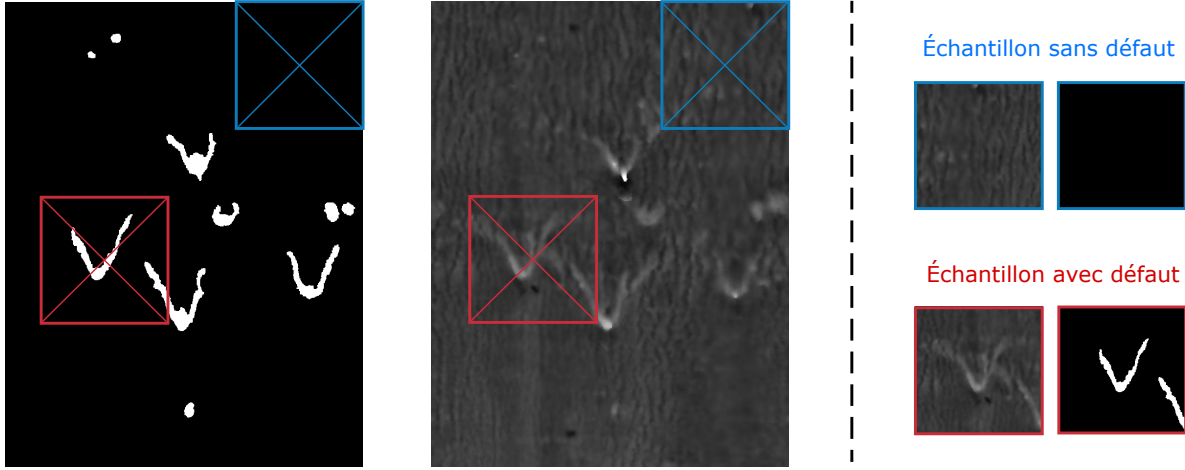


FIGURE 5.31 – Illustration de l'extraction des images de taille 320×320 pixels à partir des cartes de reliefs et des images annotées. Le rouge est l'image extraite en fonction du barycentre du défaut considéré, et le bleu est l'image sans défaut.

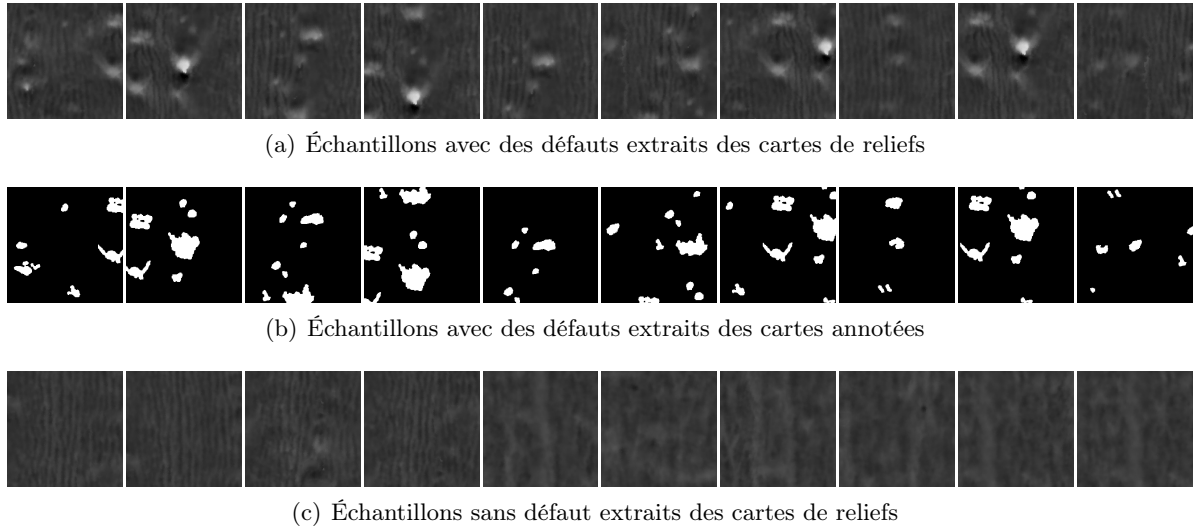


FIGURE 5.32 – Exemples de données d'entraînement.

deux types de découpe (voir *Figure 5.31*). La première vise à obtenir des échantillons centrés sur les défauts. Plus précisément, nous effectuons le découpage de la carte de reliefs selon le barycentre de la composante connexe associée au défaut dans l'image annotée. Le second recueille des échantillons qui ne contiennent aucun défaut afin que le réseau puisse apprendre l'écorce d'arbres sans défaut. Quelques échantillons de patches extraits avec et sans défauts sont donnés dans la *Figure 5.32*. Au final, nous avons un ensemble de 265 échantillons. Ces échantillons sont ensuite séparés aléatoirement en deux sous-ensembles avec un rapport de 7 : 3 pour l'apprentissage et la validation du réseau. De plus, différentes transformations ont également été utilisées sur les images pour augmenter encore plus les données. En particulier, on considère les transformations : rotation, retournement vertical et horizontal, zoom et suppression de zone rectangulaire au hasard [410]. Notez que cette augmentation par transformation est effectuée à la volée, c'est-à-dire pendant l'entraînement du réseau.

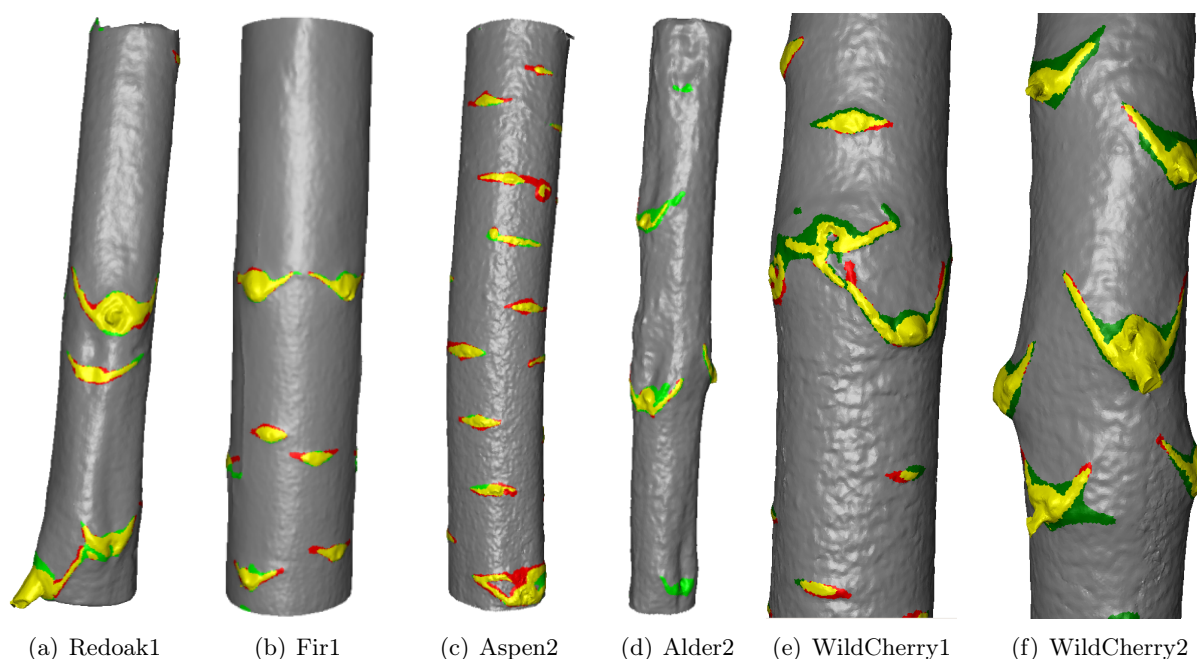


FIGURE 5.33 – Résultats de la détection de zone de défauts externes. En jaune, les vrais positifs ; en rouge, les faux négatifs ; en vert, les faux positifs.

5.3.5 Expérimentations

Nous présentons ci-dessous un aperçu des résultats obtenus avec la méthode proposée pour la détection de zone de défauts sur écorce de troncs d'arbres. Les exemples d'expérimentation sont donnés dans la *Figure 5.33*. Le *Tableau 5.4* montre des comparaisons avec deux approches dans la littérature : la méthode basée sur l'analyse de patch [301] et sur l'ajustement de cylindre [218] sur les critères de précision, de rappel et de F-mesure (F1).

Les détails de l'implémentation de la méthode, la génération des données et d'autres résultats sont donnés dans [C10] et l'article IPOL [J4] associés à ce travail. Les résultats peuvent aussi être reproduits à partir du dépôt *GitHub*⁷ et avec la démonstration en ligne :

<https://ipolcore.ipol.im/demo/clientApp/demo.html?id=369>

5.4 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons présenté des nombreuses méthodes liées au traitement d'images du bois. Ces travaux sont réalisés dans le cadre de deux projets collaboratifs avec des chercheurs d'INRAE Champenoux.

Les premiers travaux, liés au projet ANR TreeTrace avec la thèse de Rémi Decelle, concernent l'estimation de la qualité du bois à partir des images des extrémités de grume. Plus précisément, différentes méthodes ont été proposées pour extraire des caractéristiques sur ces images comme la détection de la moelle avec l'algorithme de colonie de fourmis (*Section 5.2.2*), l'estimation des orientations locales avec les filtres directionnels (*Section 5.2.3*) et la segmentation du duramen avec une approche basée sur un réseau de neurones et un apprentissage profond (*Section 5.2.4*).

7. <https://github.com/FlorianDelconte/TLDDC>

Données	Méthode par patch [301]			Méthode cylindrique [218]			Notre méthode		
	Précision	Rappel	F1	Précision	Rappel	F1	Précision	Rappel	F1
Fir1	0.747	0.769	0.757	0.137	0.937	0.238	0.746	0.857	0.797
Fir2	0.673	0.775	0.719	0.353	0.452	0.395	0.792	0.801	0.795
WildCherry1	0.696	0.765	0.728	0.683	0.512	0.584	0.757	0.881	0.813
WildCherry2	0.846	0.711	0.771	0.661	0.822	0.732	0.799	0.955	0.870
Redoak1	0.749	0.742	0.744	0.479	0.444	0.459	0.866	0.696	0.770
Redoak2	0.428	0.833	0.564	0.061	0.400	0.104	0.730	0.428	0.538
Beech	0.670	0.604	0.634	0.360	0.289	0.320	0.863	0.591	0.701
Birch	0.733	0.756	0.744	0.607	0.421	0.496	0.774	0.726	0.748
Elm	0.694	0.755	0.721	0.494	0.309	0.378	0.881	0.642	0.741
WildServiceTree	0.247	0.741	0.370	0.057	0.463	0.100	0.856	0.504	0.633
Moyen	0.685	0.740	0.710	0.289	0.563	0.380	0.793	0.789	0.790

TABLE 5.4 – Comparaison de résultats de détection de défauts d'écorce de tronc d'arbres.

Les résultats des expérimentations ont montré l'efficacité des méthodes proposées pour extraire des caractéristiques du bois sur les jeux de données du projet. Cependant, plusieurs défauts existent encore dans ces méthodes. Par exemple, l'algorithme pour la localisation de la moelle a de nombreux paramètres à régler, même s'ils sont définis avec des valeurs par défaut qui permettent de donner des bonnes estimations de la moelle sur les images testées. Une étude sur le rôle et l'effet des différents paramètres de l'algorithme est nécessaire pour réduire le nombre de paramètres et pour fournir en outre une approche automatique pour déterminer les meilleurs paramètres adaptés aux différentes images données ou à un ensemble d'images de même caractéristiques. Il faut noter que la méthode proposée pour la détection de la moelle repose principalement sur l'analyse des cernes de croissance. Dans le cas où les cernes ne sont pas bien présentés dans l'image d'entrée, le résultat de la détection pourrait être inexact. La *Figure 5.34* montre quelques exemples dans lesquels l'analyse des cernes est difficile et conduit à une mauvaise estimation de la moelle avec la méthode proposée. Dans les deux exemples, on peut observer que les cernes sont à peine visibles ce qui rend difficile leur analyse. De plus, il y a d'autres perturbations sur des images telle que les marques de sciage, la présence de fissures, *etc.* D'autres études sont en cours pour ces cas dans lesquels des cernes de croissance sont moins visibles sur les images. Un autre critère important est le temps d'exécution afin de pouvoir utiliser cette méthode dans un contexte industriel. Pour cela, la parallélisation de l'algorithme est actuellement à l'étude.

Concernant les travaux sur les filtres directionnels en utilisant des segments droits discrets et des opérateurs morphologiques, des utilisations de cet outil pour extraire des caractéristiques géométriques sur des images binaires et en niveaux de gris sont illustrées dans la *Section 5.2.3*. Ce filtre est bien adapté aux images avec des structures fines de différentes tailles ce qui est le cas des images de grume (voir *Figure 5.35*). En effet, l'utilisation de ce filtre permet de réduire le bruit le long des segments droits et en particulier de rehausser des structures circulaires (voir *Figure 5.36*). Nous souhaitons par la suite appliquer la méthode pour l'analyse d'images du bois. Dans ce contexte, plusieurs possibilités peuvent être considérées telles que la détection de moelle en utilisant ce filtre pour la partie d'estimation de l'orientation, l'analyse des cernes de croissance avec une approche de type suivi de profil (voir *Figure 5.37*), *etc.* Les travaux sont en cours avec la thèse de Rémi Decelle sur l'application de filtre directionnel pour les analyses de cercles sur image du bois. D'autres perspectives consistent à améliorer des orientations estimées de façon optimale dans le cas où plusieurs segments/orientations sont retenus à la fin du processus. Nous cherchons également à récupérer des informations d'épaisseur pertinentes pour les filtres directionnels sur des images en niveaux de gris. De plus, nous continuons à travailler sur l'optimisation pour



FIGURE 5.34 – Exemples d'estimation erronée de la moelle (croix verte) par la méthode proposée.



FIGURE 5.35 – Images des cercles de croissance extraites des images d'extrémités de la grume.

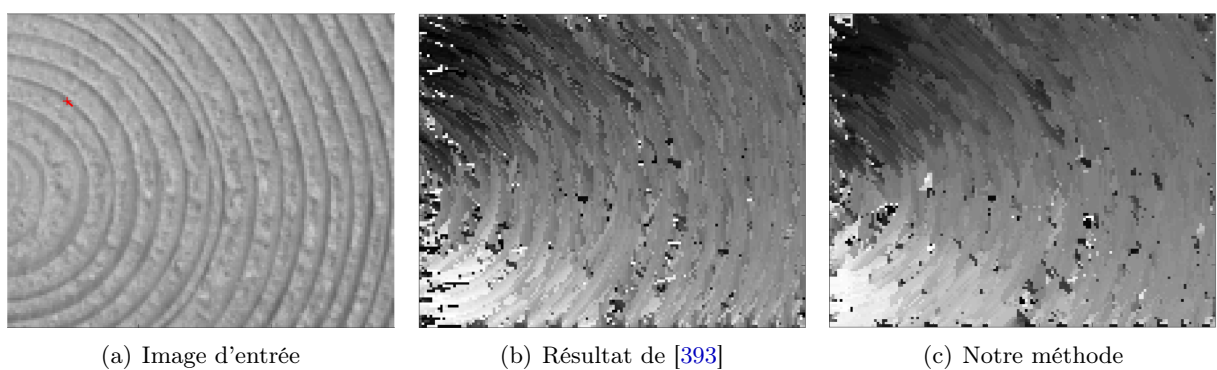


FIGURE 5.36 – Exemples de filtre directionnel sur image contenant des cercles de croissance. (a) Image d'entrée. (b) Image filtrée avec [393]. (c) Image filtrée avec notre méthode.

élaborer des algorithmes plus robustes et performants.

D'autres travaux sont également à l'étude pour la segmentation sur bois (non seulement du duramen) basée CNN. Plusieurs pistes sont à considérer pour améliorer la performance et la pré-

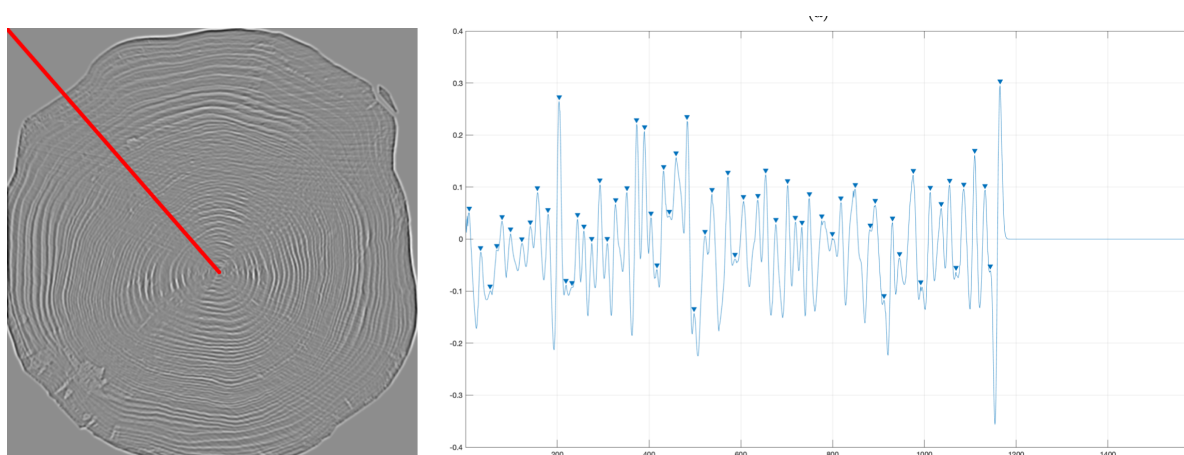
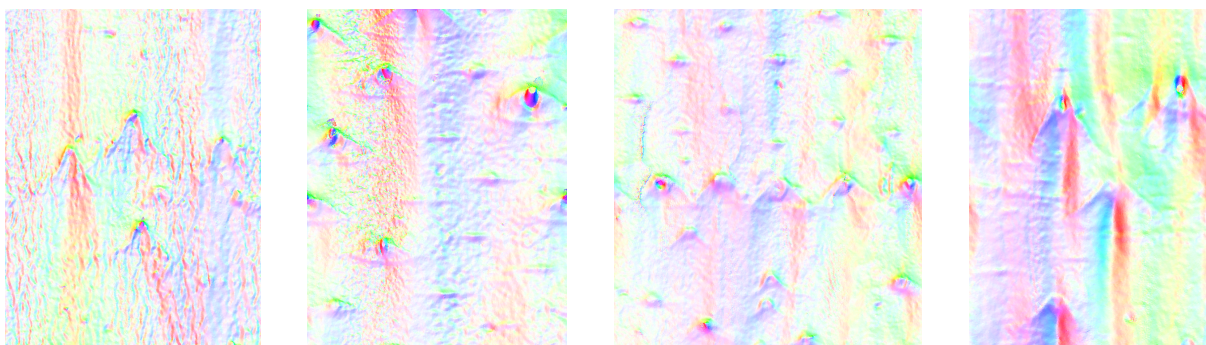


FIGURE 5.37 – Analyse des cercles de croissance avec une analyse de profil. À gauche : Une image du réhaussement des cernes avec un rayon (en rouge), appelé un *profil*. À droite : Les valeurs d'intensité le long du profil ainsi que les pics (en triangle) détectés sur le profil.

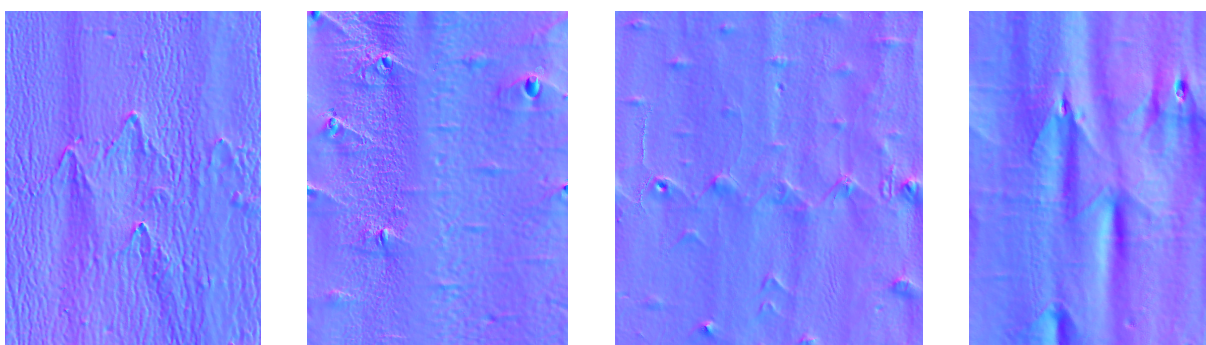
cision des réseaux avec d'autres techniques comme la distillation des connaissances [153], l'élagage en niveaux [257], les mécanismes d'attention [178, 309, 435], *etc.* Il est également intéressant de tester d'autres architectures de réseaux (Mask R-CNN [165], RefineNet [247], SegNet [26], *etc.*) pour comprendre mieux leurs caractéristiques, leurs forces et leurs faiblesses par rapport à notre problème de segmentation.

La deuxième partie des travaux de ce chapitre est liée au projet ANR Woodseer et à la thèse de Florian Delconte. Nous visons à évaluer l'utilisation d'une méthode d'apprentissage automatique pour prédire la distribution intérieure des défauts à partir de la géométrie extérieure du bois. Plus précisément, on s'intéresse au problème de la segmentation et de l'identification des défauts ou singularités à partir de données LiDAR des écorces des troncs d'arbres (*Section 5.3*). Constatant que ces singularités sont distinguables du reste du tronc par des variations de relief en surface, nous avons développé une méthode permettant de segmenter automatiquement les singularités à la surface des grumes de bois. Plus précisément, la méthode repose sur la notion de carte de reliefs en 2D qui est une projection du maillage 3D des points LiDAR en 2D par une transformation de coordonnées cylindriques. la carte de reliefs peut être considérée comme une représentation 2D des points 3D. De ce fait, le problème 3D de détection de défauts à la surface d'écorces devient un problème 2D de segmentation de la carte de reliefs. En particulier, cette carte s'adapte localement à la forme du tronc grâce à une analyse de configurations locales qui sont ajustées géométriquement à la surface du tronc. Une telle adaptation est importante car la géométrie du tronc peut apparaître avec des variations importantes qui faussent la segmentation de défauts. la carte de reliefs est combinée avec un réseau de neurones convolutifs basé sur l'architecture d'U-Net pour la segmentation 2D de défauts. Le résultat obtenu est re-projeté sur le maillage d'entrée pour récupérer les défauts en 3D. Les résultats de la validation croisée dans la *Section 5.3.5* montre que la méthode proposée est robuste et donne des bons résultats par rapport aux méthodes dans la littérature.

À l'avenir, nous voudrions travailler sur la génération de nouveaux types de cartes à partir de maillages 3D de troncs, en particulier en utilisant les normales. Ce type de carte permettra de représenter l'orientation des faces du maillage sur l'image. Quelques exemples de carte de normales sont montrés dans la *Figure 5.38*. En combinant avec la carte de reliefs, le réseau aurait différents types d'information : le relief local du tronc et l'orientation des faces du maillage. Ceci permettrait au réseau d'améliorer la segmentation et de produire une segmentation encore plus



(a) Cartes de normales présentées dans l'espace de couleur HSV (hue, saturation, value)



(b) Cartes de normales présentées dans l'espace tangent [186]

FIGURE 5.38 – Exemples de cartes de normales des faces du maillage de tronc d'arbres dans différents espaces de couleurs.

fine en apportant des informations détaillées sur la localisation et les dimensions des défauts.

Par la suite, nous allons travailler sur le problème de classification des défauts, c'est-à-dire de classer les défauts selon leurs différents types [7, 298] : picots, bourgeons, cicatrices de branche, sphéropaste, *etc.* La difficulté de cette tâche est liée à la variabilité de taille, de forme et d'apparence des défauts, même pour le même type de défauts. Dans le domaine forestier, les défauts sont souvent définis par l'origine biologique [77, 298] qui conduit à de nombreuses variations géométriques inter ou intra-espèces et inter ou intra-classes ainsi que des similarités inter-classes. Face à cette grande variabilité, une autre difficulté est de construire une base de données représentative permettant l'établissement de méthodes de classification et leur test. Pour cela, des nouvelles campagnes d'acquisition sont prévues afin d'avoir davantage de données LiDAR des troncs d'arbres ainsi que les annotations manuelles de différents types de défauts (fentes, sphérobastes, cicatrices de branche, nœuds, ...) sur des données acquises.

Pour la tâche de classification des défauts, nous pourrions utiliser des caractéristiques présentes sur les cartes de normales. En effet, de telles caractéristiques seront intéressantes pour obtenir des informations géométriques plus spécifiques liées à la forme de défaut ce qui pourraient aider à la classification des défauts après l'étape de segmentation qui permet de délimiter la zone de défaut comme illustré dans la Figure 5.39. Une autre possibilité consiste à ne pas utiliser les informations en 2D et à se reposer sur une caractérisation géométrique du nuage de points 3D associée au défaut afin d'en obtenir une signature externe. Cela conduit ensuite à étudier la segmentation sémantique des nuages de points 3D avec les réseaux de neurones 3D tels que PointNet [334], ConvPoint [47], PointCNN [243], *etc.*

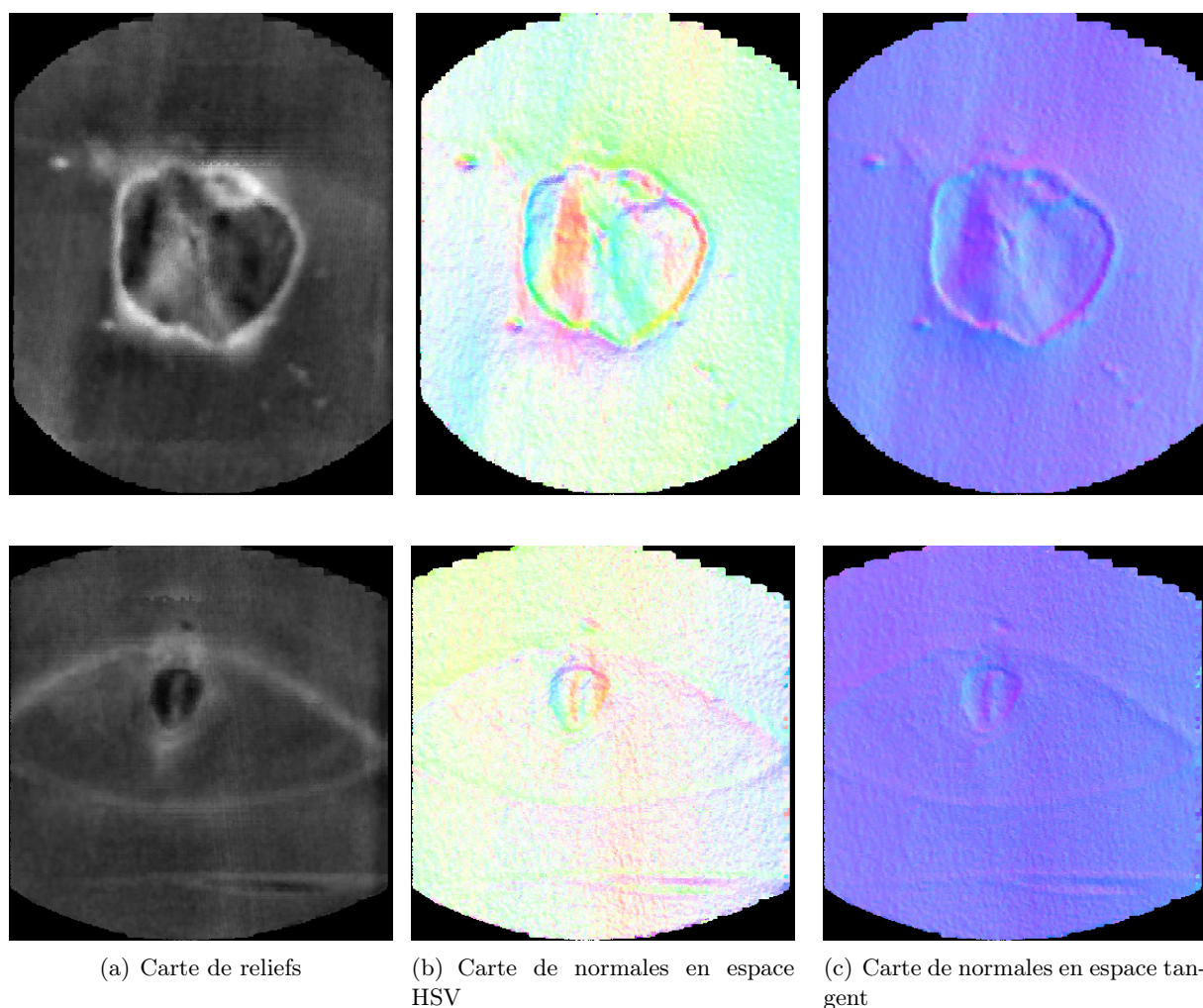


FIGURE 5.39 – Exemples de défauts de tronc d’arbres avec la carte de reliefs et de normales : nœud sans moustache (première ligne) et avec moustache (deuxième ligne).

En plus des méthodes basées sur les réseaux de neurones, nous nous intéressons également aux approches classiques dans le domaine de la reconnaissance de formes qui peuvent être appliquées pour la classification d’objets. En particulier, Nguyen *et al.* dans [299] ont proposé une méthode de type forêt aléatoire [302] (random forest classifier en anglais) pour classifier des défauts. Plus précisément, la méthode considère différents descripteurs de formes, calculés à partir des nuages de points issus de résultats de la segmentation des défauts, comme les moments invariants de Hu [179], l’espèce de tronc d’arbre, la taille du défaut, *etc.* Cependant, les auteurs ont mentionné dans [299] que la méthode est moins efficace sur les défauts de petites tailles (< 1 cm de relief). S’inspirant de l’approche proposée dans [299], nous souhaitons trouver d’autres caractéristiques géométriques permettant de décrire mieux différents types de défauts. Dans ce contexte, plusieurs travaux sont intéressants à étudier. Nous pouvons considérer par exemple les caractéristiques basées sur la transformée de Radon [164, 173, 297, 405], de Fourier [48, 65, 174, 445], de Hough [28] ou les approches géométriques [238, 282], *etc.*

6

Conclusion et perspectives

Sommaire

6.1 Synthèse des contributions	189
6.2 Perspectives et projets de recherche	191

6.1 Synthèse des contributions

Ce mémoire résume nos principales contributions dans le domaine de la géométrie et de la topologie discrètes pour la manipulation et l'analyse géométrique d'objets discrets. Ces contributions et les résultats présentés couvrent de nombreux aspects différents, de la théorie aux applications en analyse et traitement d'images :

- Le *Chapitre 3* présente nos contributions sur les mouvements rigides discrétisés dans \mathbb{Z}^d . Ces transformations sont fondamentales dans de nombreuses applications de traitement et d'analyse d'images. Les transformations réalisées sur \mathbb{Z}^d perdent généralement leurs propriétés topologiques et géométriques par rapport à leurs homologues continues du fait de la *discrétisation*. Dans ce contexte, nous étudions le problème spécifique lié à l'invariant topologique et géométrique des mouvements rigides pour des images numériques. Nous avons proposé la notion de *régularité* comme une condition suffisante pour assurer la préservation des propriétés topologiques des images (binaires, en niveaux de gris et étiquetées) soumises à un mouvement rigide arbitraire. Afin de mieux conserver la forme *globale* de l'objet transformé par des mouvements rigides, nous considérons des modèles intermédiaires (continus) d'objets discrets, sur lesquels est appliqué un mouvement rigide suivi d'une discrétisation pour obtenir un résultat dans \mathbb{Z}^d avec $d = 2, 3$. Puisque la préservation de la géométrie n'implique pas toujours la préservation de la topologie dans \mathbb{Z}^d , nous avons introduit la condition de la *quasi-régularité* afin de garantir la préservation de la connexité de l'objet transformé discrétisé. Avec la notion de la quasi-régularité, cette étude contribue à résoudre le problème classique de la géométrie discrète : la préservation topologique des objets euclidiens lors du processus de discrétisation. Sur la base de résultats théoriques établis, des algorithmes efficaces ont été développés pour réaliser des mouvements rigides sur des images numériques qui préservent leur topologie et leur géométrie.

- Le *Chapitre 4* présente nos contributions liées à l'analyse géométrique des objets discrets bruités. En particulier, nous nous intéressons à différents outils géométriques efficaces permettant d'analyser et d'étudier des courbes discrètes bruitées 2D et 3D. En se basant sur la primitive de *segment flous* d'épaisseur ν de droite discrète, nous avons présenté la structure de la *couverture tangentielle adaptative* (ATC) pour les courbes irrégulièrement bruitées. Cette structure est composée de segments flous d'épaisseurs variées qui s'adaptent automatiquement et localement au bruit présent sur la courbe. En combinant avec l'estimateur de bruit local des *épaisseurs significatives*, un algorithme efficace et sans paramètre pour construire l'ATC est aussi proposé. Avec cet outil de l'ATC, différents estimateurs géométriques sont introduits. Les expérimentations montrent l'intérêt et l'efficacité de l'ATC pour l'analyse et l'étude des courbes irrégulièrement bruitées. Cette structure ouvre également différentes applications dans le domaine de l'analyse d'images et de reconnaissance de formes : la détection de points dominants, la simplification polygonale de formes, la décompositions de courbes en arcs et segments, la vectorisation d'images, la classification de formes, *etc.* D'autres exploitations de la primitive de segments flous dans les domaines d'applications dans lesquels les données ne sont pas forcément entières sont également présentées avec deux applications : la détection de droites épaisses dans des images en niveaux de gris avec l'image du gradient, et l'extraction de structures linéaires avec le nuage de points 3D acquis par LiDAR.
- Le *Chapitre 5* présente nos contributions dans le cadre applicatif du traitement et de l'analyse d'images, plus spécifiquement dans les caractérisations géométriques et biologiques d'images de bois. Le chapitre est divisé en deux parties. La première concerne la caractérisation de la qualité du bois à partir des images en coupe transversale de grumes. Parmi les caractérisations liées à la qualité du bois, nous nous intéressons à celles visibles sur l'image comme la moelle, les cernes de croissance, le duramen, *etc.* Pour cela, différents outils efficaces ont été développés pour extraire automatiquement les caractéristiques mentionnées sur des images comme la détection de la moelle avec l'approche basée sur l'algorithme des colonies de fourmis, l'analyse de cernes avec des outils de morphologie mathématique et de géométrie discrète, et la segmentation du duramen avec l'approche basée sur l'apprentissage profond. La deuxième partie se porte sur l'extraction des défauts sur l'écorce de troncs d'arbres à partir des nuages de points LiDAR de la surface des troncs, et l'étude de leur relation avec la partie intérieure de l'arbre. Pour répondre à ce problème, nous nous sommes intéressés, dans un premier temps, à la segmentation des défauts externes, et en particulier ceux liés à la ramification tels que les nœuds, cicatrices de branche, picots, broussin, *etc.* Dans ce contexte, nous avons développé une méthode basée sur des algorithmes récents d'apprentissage profond guidés par les caractéristiques géométriques. En particulier, pour les caractéristiques géométriques, une représentation 2D, appelé *carte de reliefs*, a été créée à partir du maillage 3D de l'écorce de l'arbre. Ces cartes sont ensuite utilisées pour construire un ensemble de données qui alimentent un réseau de neurones pour l'entraînement et la prédiction des zones de défauts. Le résultat est re-projeté sur le maillage d'origine pour récupérer les défauts en 3D.

Les résultats présentés dans ce mémoire sont les fruits de nombreuses collaborations et échanges avec des enseignant.e.s - chercheurs.e.s et dans le cadre d'encadrement de jeunes chercheurs.e.s. Ces contributions furent précieuses et je tiens donc à remercier tous. Par ailleurs, les enseignements réalisés au sien de l'Université de Lorraine sont aussi un complément à mes activités de recherche. Ils me permettent de perfectionner mes compétences en analyse d'images ainsi qu'en programmation et développement logiciel.

6.2 Perspectives et projets de recherche

Cette partie liste les perspectives envisageables sur l'ensemble des thèmes abordés précédemment ainsi que les orientations de mes recherches à venir dont certaines sont déjà évoquées à la fin des chapitres précédents. Il existe divers thèmes intéressants liés aux travaux présentés, synthétisés dans la partie précédente et qui pour certains sont déjà intégrés dans des projets acceptés ou à soumettre prochainement.

- **Analyse topologique des mouvements rigides sur \mathbb{Z}^d** : Comme nous en avons discuté dans la *Section 3.5.6*, les méthodes pour la préservation topologique qui fonctionnent parfaitement en 2D ne sont souvent pas applicables en 3D, en particulier la notion d'*objet régulier*. Certains problèmes subsistent pour la caractérisation d'invariants topologiques des mouvements rigides discrétisés [319]. En effet, le choix de la structure d'arbre d'adjacence en tant qu'invariant topologique ne peut pas modéliser les caractérisations topologiques qui apparaissent en plus de deux dimensions. Dans ce contexte, il serait pertinent de considérer des invariants topologiques plus forts, comme le type d'homotopie ou le groupe fondamental. Des approches alternatives sont également nécessaires pour étudier la préservation topologique sous des mouvements rigides dans des dimensions plus élevées.
- **Modèles continus pour les transformations géométriques sur \mathbb{Z}^d** : Afin de traiter les homéomorphismes et les propriétés géométriques des objets discrets transformés, nous pourrions considérer des modèles intermédiaires (continus) d'objets discrets tel que les polygones/polytopes dans \mathbb{Z}^n , des hypersurfaces [18, 19, 232] dont la discrétisation est réversible, et qui ont des bonnes propriétés de différentiabilité et sont définis analytiquement. Une proposition via la polygonisation/polyédrisation est présentée dans la *Section 3.6* pour des mouvements rigides dans \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 . Une telle stratégie est valable sous l'hypothèse que le modèle continu capte de manière pertinente la géométrie globale de l'objet discret. En particulier, l'homéomorphisme considéré devrait transformer l'objet discret/continu en un autre qui conserve de bonnes propriétés topologiques. Ce problème est équivalent à la (re)discrétisation d'objets continus et est lié à la notion de la *quasi-r-régularité* introduite dans la *Section 3.6.1*.
- **Mesures des altérations géométriques de mouvements rigides sur \mathbb{Z}^d** : Suite aux études de la préservation géométrique (convexité, aire discrète, périmètre, *etc.*) des objets discrets par des mouvements rigides dans \mathbb{Z}^2 présentées dans la *Section 3.6*, il serait également intéressant d'explorer des mesures géométriques différentielles discrètes telles que le comportement de la tangente, de la courbure discrète, *etc.* De plus, les expérimentations dans la *Section 3.7.2* montrent qu'il y a des pertes de mesures géométriques dans des objets transformés selon le modèle de polygone utilisé lors de la transformation. Dans le domaine de la géométrie intégrale [366] (integral geometry en anglais), des mesures sont définies pour estimer la différence des formes continues discrétisées dans la même forme discrétisée. Ceci pourrait être un bon outil mathématique pour mesurer l'altération géométrique des mouvements rigides discrétisés sur \mathbb{Z}^d . Une autre possibilité est de considérer les mesures géométriques du bord des formes discrètes en utilisant des outils de combinatoire des mots [408] (combinatorics on words en anglais).
- **Approximation de mouvements rigides par transformations discrétisées bijectives** : Il y a des travaux récents sur la caractérisation des transformations discrétisées bijectives sur \mathbb{Z}^2 : des rotations et des réflexions [50]. Il est montré dans [319] que les rotations discrétisées ne couvrent pas tous les angles. Dans [50], une approche de rotation sur \mathbb{Z}^2 basée sur la combinaison de deux réflexions discrétisées bijectives a été proposée. Inspirés

par ces travaux, nous nous intéressons aux méthodes approximatives pour des mouvements rigides sur \mathbb{Z}^d avec des transformations bijectives telles que des transformations de cisaillement discrétisées [17] (digital shear transforms en anglais) ou des réflexions discrétisées [20, 50]. L'avantage de ces transformations est qu'elles existent pour différents types de grilles. Cependant, du fait de l'approximation, elles induisent une accumulation d'erreurs d'approximation. Par conséquent, la minimisation de ces erreurs est aussi un problème important. Ceci rejoint les mesures géométriques mentionnées précédemment.

- **Généralisation des transformations géométriques discrétisées :** Comme nous l'avons évoqué dans la *Section 3.10*, une autre façon d'aborder les transformations géométriques sur \mathbb{Z}^d , sous contrainte de préservation de la topologie et de la géométrie, pourrait consister à se focaliser sur la grille qui est vue comme un pavage de l'espace pour la transformation. Plus précisément, nous pourrions intégrer les objets discrets dans l'espace euclidien et les traiter dans l'espace (continu mais discret) des complexes cellulaires. Cela nous permettrait de manipuler ces objets de manière conforme à la fois à leur nature discrète et à leur interprétation continue – d'un point de vue topologique [271, 272] et géométrique [353, 87, 123]. L'avantage de cette approche est qu'elle pourrait être généralisée aux différentes classes de transformations (affine, projective, *etc.*) et elle permettrait aussi de réaliser des transformations à une échelle plus fine que celle de \mathbb{Z}^d .
- **Évolution pixel-par-pixel des objets discrets sous transformations géométriques :** Contrairement à \mathbb{R}^d , il existe des modifications atomiques pour des objets de \mathbb{Z}^d sous des transformations géométriques ; à savoir modifier un seul point discret à la fois. Par exemple, dans le cadre des mouvements rigides discrétisés, une structure combinatoire est proposée dans [J12] pour modéliser tous les mouvements rigides d'un ensemble fini de points de \mathbb{Z}^2 . En particulier, cette structure permet de manipuler point-par-point lors de la transformation. Ceci est possible grâce à la nature discrète des objets \mathbb{Z}^2 considérés. Dans le même esprit, nous voudrions proposer des nouvelles méthodes permettant d'obtenir des séquences d'opérations d'ajout ou de retrait de points qui correspondent aux opérations pixel-par-pixel de l'objet transformé avec des contraintes topologiques et géométriques. De telles approches pourraient être utilisées pour étudier l'évolution pixel-par-pixel d'objets discrets par des transformations arbitraires.
- **Décomposition en secteurs des objets discrets de \mathbb{Z}^3 :** La structure de la couverture tangentielle est l'un des outils géométriques fondamentaux dans l'étude des courbes discrètes comme montré dans le *Chapitre 4*. Sur le même principe que la couverture tangentielle sur des courbes, nous cherchons à déterminer des primitives de plan maximal qui couvrent la surface d'un objet 3D. Ces plans doivent être caractéristiques de la géométrie locale de la surface ; en particulier, ils doivent agir comme un plan tangent local de la surface. Cette idée de l'extension en 3D n'est cependant pas triviale parce qu'il n'y a pas d'ordre canonique des points sur une surface discrète. En effet, il a été démontré que ce problème est NP-difficile [385]. Inspirés par le travail proposé dans [284], nous voudrions proposer une nouvelle approche de décomposition des surfaces en plans discrets en s'appuyant sur une notion progressive de voisinage d'un voxel. Cette approche originale pourrait être appliquée pour proposer des algorithmes efficaces de polyédrisation réversible et indépendante de l'échelle des objets discrets. La méthode pourrait également donner des réponses pour obtenir une représentation d'objets discrets qui serait intéressante pour les modèles des transformations géométriques.
- **Étude des surfaces discrètes bruitées avec des plans flous :** Dans la même idée que les segments flous pour l'étude et l'analyse des courbes bruitées, nous voudrions étudier

et utiliser la notion de *plan flou d'épaisseur* ν proposée dans [331]. L'idée serait donc de l'utiliser pour analyser les points de la surface d'objets bruités 3D. En particulier l'épaisseur ν du plan permet de mieux s'adapter aux données bruitées. Des travaux sont en cours avec des chercheurs de l'Office National des Forêts (ONF) pour la détection des plateformes de charbonnières à partir des nuages de points 3D venant du LiDAR en utilisant des plans flous d'épaisseur ν .

- **Analyse géométrique des courbes discrètes bruitées 3D** : Les premiers travaux réalisés avec la couverture tangentielle adaptative dans la *Section 4.3.4* montrent l'intérêt et l'efficacité de cette structure dans l'analyse des courbes irrégulièrement bruitées 3D. La suite de ces travaux serait d'étudier la propriété de la multi-convergence de cette structure sur des données bruitées, d'élaborer des algorithmes plus performants pour la construction de la structure et d'intégrer d'autres détecteurs de bruit pour sa construction et même de développer des estimateurs de bruit local plus adaptés à la structure. D'autres projets envisagés seraient d'utiliser cet outil de la couverture tangentielle adaptative dans des applications en bio-informatique comme le calcul de la courbure 3D de l'ADN, ou des analyses de données venant des systèmes d'acquisitions 3D (GPS, Microsoft Kinect, système VR d'Oculus Quest, *etc.*)
- **Vectorisation d'images intégrant la géométrie et la hiérarchie** : Dans la *Section 4.4.3*, nous avons exploité différentes représentations des contours dans une image en utilisant les outils de la géométrie discrète et aussi proposé des méthodes de vectorisation d'images en niveaux de gris. Afin d'améliorer la qualité de la vectorisation des images, il serait possible d'intégrer de l'information géométrique ou la structure hiérarchique de l'image dans la procédure de vectorisation ; par exemple nous pourrions considérer l'information issue de l'arbre des composantes connexes [287] ou l'arbre de formes [439].
- **Droites discrètes avec le modèle de plan discret et l'extension en nD** : Les droites discrètes sont parmi les primitives les plus simples de la géométrie discrète. Dans \mathbb{R}^d , une droite est définie par les intersections de $n - 1$ hyperplans. Cette propriété n'est pas toujours valable dans l'espace discret de \mathbb{Z}^d où l'intersection des plans discrets est beaucoup moins régulière. Cette question de la définition de droite discrète par des intersections d'hyperplans connexes dans \mathbb{Z}^d est toujours ouverte. Outre la reconnaissance des droites discrètes de dimension n , il est important de guider le choix de la définition des droites discrètes à l'aide des caractérisations géométriques des plans ou hyperplans de \mathbb{Z}^d . Cela pourrait permettre d'unifier les différentes approches de droites discrètes dans la littérature. En particulier, cela pourrait aussi nous donner un aperçu des types de propriétés des plans ou hyperplans qui pourraient être préservées par transformations géométriques.
- **Filtres directionnels pour le traitement et l'analyse d'images** : Le nouveau outil de *filtre directionnel* présenté dans la *Section 5.2.3* ouvre de nouvelles perspectives dans les applications de traitement et d'analyse d'images. Cet outil, basé sur les notions de morphologie mathématique et de géométrie discrète, permet d'extraire différentes caractéristiques locales en chaque point d'une image binaire ou en niveaux de gris. Dans cette perspective, nous voudrions utiliser les filtres directionnels dans les applications de traitement et d'analyse d'images. En effet, les caractéristiques géométriques extraites avec ces filtres (l'élongation locale, l'orientation, l'épaisseur directionnelle, *etc.*) pourraient être utiles pour la reconnaissance de formes, la classification d'objets ou encore sur les images de grumes de bois pour l'estimation de la qualité du bois.
- **Analyse de cernes et empreinte digitale d'arbres** : Les cernes de croissance des arbres jouent un rôle important dans l'estimation de la qualité des grumes. En vue de la traça-

bilité des arbres, ils sont un indicateur clé pour la reconnaissance des grumes parce qu'ils présentent une sorte de signature de la grume. Avec l'outil de filtre directionnel mentionné précédemment, il pourrait être envisageable de développer des nouvelles méthodes pour analyser et extraire différentes caractéristiques des cernes de croissance à partir des images de coupes transversales des grumes. Ceci permettrait ensuite de définir une empreinte digitale pour chaque grume. Les techniques utilisées dans la reconnaissance des empreintes digitales [324, 329, 403] (l'analyse de textures, de contours, *etc.*) sont aussi intéressantes à explorer pour ce projet de recherche. Ce projet pourrait s'intégrer aussi dans le projet ANR EffiQuASS, en particulier le post-doc de Xiaolin Li sur la reconstruction de billon à partir des planches sciées. Dans le cadre du projet ANR, la localisation des planches à l'intérieur du billon permettra d'obtenir une carte 3D des orientations des fibres mesurées pour ensuite en déduire une modélisation des propriétés mécaniques du bois.

- **Classification des défauts à l'écorce de troncs avec la segmentation sémantique :** La suite du travail présenté dans la *Section* 5.3 sur la segmentation des défauts externes de troncs est l'identification des types de défauts segmentés. La difficulté de cette tâche est liée à la variabilité inter- et intra-classes de défauts : de taille, de forme et d'apparence, *etc.* Une solution pour la classification de défauts pourrait se baser sur les méthodes de segmentation sémantique par apprentissage profond. En particulier, nous pourrions considérer des stratégies originales en intégrant les informations géométriques des défauts – par exemple avec les cartes de normales – dans le processus d'apprentissage profond pour la classification de défauts. Une telle combinaison est un élément clé et, à notre connaissance, très peu de travaux ont été réalisés dans cette direction. Les avancées obtenues dans ce cadre pourront être néanmoins utilisées dans d'autres domaines.
- **Descripteurs des formes 3D à partir de nuages de points LiDAR :** En plus des approches basées sur l'apprentissage profond avec des réseaux de neurones mentionnées précédemment, il serait aussi possible et intéressant d'explorer des méthodes classiques de reconnaissance de formes, en particulier l'extraction de caractéristiques sur les nuages de points 3D suivie ensuite par des techniques de classification basées sur des descripteurs de formes. Dans ce contexte, plusieurs travaux sont intéressants à étudier comme nous l'avons évoqué dans la *Section* 5.4. Il est important de mentionner que, dans le cadre du projet ANR WoodSeer, ce travail sur la détection et la classification des défauts externes de troncs s'intégrera ensuite dans l'étude de la prédiction des défauts internes de grumes ; plus précisément, la distribution intérieure des défauts à partir de la géométrie extérieure du bois.

En dehors des projets mentionnés ci-dessus, la reproductibilité de la recherche est aussi un objectif important dans mes travaux en cours et à venir. Nous souhaitons continuer la diffusion de la recherche et la reproductibilité de résultats publiés via des démonstrations en ligne, par exemple sur le site [IPOL](#), et par la mise à disposition des codes sources via des dépôts publics comme [Github](#).



Liste de publications

Le tableau suivant résume les publications internationales avec comité de lecture depuis et avant ma prise de fonction de Maître de Conférences en 2014 (les éléments entre parenthèses sont actuellement soumis) :

<i>Année</i>	<i>Revues internationales</i>	<i>Conférences internationales</i>
2022	MTA, IPOL, JMIV, ANFS, (ANFS)	ICIAP, DGMM, (RRPR, ICPRAM)
2021	(IPOL)	2 x RRPR, 3 x DGMM, HEF, ISPRS, ICIP
2020	–	ISPRS, IWCIA
2019	JMIV	DGCI, ICIAP, CAIP, NDTE
2018	JMIV	ICPR, RRPR
2017	DAM, JMIV	2 x DGCI, IWCIA
2016	–	DGCI, ACCV Workshop, RRPR
2015	AMAI	IWCIA
2014	JMIV, TIP	DGCI
2013	CVIU	DGCI, PSIVT Workshop, ICIP, CIRM
2012	–	IWCIA
Total	12 (+2)	31 (+2)

TABLE A.1 – Récapitulatif des publications dans les revues et conférences internationales.

Publications dans des revues internationales (12)

- [J1] F. Longuetaud, G. Pot, F. Mothe ; A. Barthelemy, R. Decelle, F. Delconte, X. Ge, G. Guillaume, T. Mancini, T. Ravoajanahary, J-C. Butaud, R. Collet, I. Debled-Rennesson, B. Marcon, P. Ngo, B. Roux, J. Viguier *TreeTrace project database on traceability and quality assessment of round woods : Douglas fir sampling*. Annals of Forest Science (ANFS). Accepted.
- [J2] N. Passat, P. Ngo, Y. Kenmochi and H. Talbot. *Homotopic Affine Transformations in the 2D Cartesian Grid*. Journal of Mathematical Imaging and Vision. 64 (7), pp.786–806, 2022. [hal-03630330](#)

- [J3] S. Paul, H. Nasser, A. Bhattacharyya, A. Faruk Mollah, M. Nasipuri, P. Ngo, S. Basu and I. Debled-Rennesson. *Recognition of Multioriented Hand Gestures for Speech And Hearing Disabled*. Journal of Multimedia Tools and Applications, 81, pp.7285–7321, 2022. [hal-03442245](#)
- [J4] F. Delconte, P. Ngo, B. Kerautret, I. Debled-Rennesson, V-T. Nguyen and T. Constant. *CNN-based Method for Segmenting Tree Surface Singularities*. Image Processing On Line (IPOL) Journal, 12, pp.1–26, 2022. [hal-03468938](#)
- [J5] P. Ngo, N. Passat, Y. Kenmochi and I. Debled-Rennesson. *Geometric preservation of 2D digital objects under rigid motions*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, Springer Verlag, 61, pp.204–223, 2019. [hal-01695370](#)
- [J6] H. Nasser, P. Ngo and I. Debled-Rennesson. *Dominant point detection based on discrete curve structure and applications*. Journal of Computer and System Sciences, Elsevier, 95, pp. 177–192, 2018. [hal-01584733](#)
- [J7] P. Ngo, I. Debled-Rennesson, B. Kerautret and H. Nasser. *Analysis of noisy digital contours with adaptive tangential cover*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, Springer Verlag, 59(1), pp. 123–135, 2017. [hal-01486969](#)
- [J8] P. Ngo, Y. Kenmochi, A. Sugimoto, H. Talbot and N. Passat. *Discrete rigid registration : A local graph-search approach*. Discrete Applied Mathematics, Elsevier, 216(2), pp. 461–481, 2017. [hal-01306035](#)
- [J9] P. Ngo, Y. Kenmochi, N. Passat and H. Talbot. *On 2D constrained discrete rigid transformations*. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, Springer Verlag, 75(1–2), pp. 163–193, 2015. [hal-00838184](#)
- [J10] P. Ngo, Y. Kenmochi, N. Passat and H. Talbot. *Topology-preserving conditions for 2D digital images under rigid transformations*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, Springer Verlag, 49 (2), pp. 418–433, 2014. [hal-00838183](#)
- [J11] P. Ngo, N. Passat, Y. Kenmochi and H. Talbot. *Topology-preserving rigid transformation of 2D digital images*. IEEE Transactions on Image Processing, 23 (2), pp. 885–897, 2014. [hal-00795054](#)
- [J12] P. Ngo, Y. Kenmochi, N. Passat and H. Talbot. *Combinatorial structure of rigid transformations in 2D digital images*. Computer Vision and Image Understanding, 117 (4), pp. 393–408, 2013. [hal-00643734](#)

Publications dans des conférences internationales (31)

- [C1] P. Ngo and I. Debled-Rennesson. *Tangential cover for 3D irregular noisy digital curves*. In International Conference on Discrete Geometry and Mathematical Morphology (DGMM). Accepted.
- [C2] P. Ngo. *Digital line segment detection for table reconstruction in document images*. In Image Analysis and Processing (ICIAP), Lecce, Italy, LNCS 13232, pp. 211–224, 2022. [hal-03602198](#)
- [C3] P. Ngo, N. Passat and Y. Kenmochi. *Quasi-regularity verification for 2D polygonal objects based on medial axis analysis*. In International Conference on Image Processing (ICIP), Alaska, USA, pp. 1584–1588, 2021. [hal-03121428](#)
- [C4] P. Even, A. Grzesznik, A. Gebhardt, T. Chenal, P. Even and P. Ngo. *Fast extraction of linear structures from LiDAR raw data for archaeomorphological structure prospection*. In XXIV International Society for Photogrammetry and Remote Sensing (ISPRS), Nice, France, 2021. [hal-03189641](#)

-
- [C5] A. Poszwa, A. Grzesznik, A. Gebhardt, A. Agat, P. Even, P. Ngo, D. Cartier, V. Robin, C. Delangle, S. Occhietti, A. De Junet, D. Harmand, C. Kraemer, T. Chenal and D. Bartier. *1400 years of man-environment interactions and soil evolution in the Saint-Mont mountain (Remiremont, Vosges)*. In Historical Ecology for the Future (HEF) - International conference in historical ecology, Metz, France, 2021. [hal-03236655](#)
- [C6] N. Passat, P. Ngo and Y. Kenmochi. *Homotopic Digital Rigid Motion : An Optimization Approach on Cellular Complexes*. In International Conference on Discrete Geometry and Mathematical Morphology (DGMM), Uppsala, Sweden, LNCS 12708, pp. 189–201, 2021. [hal-02994752](#)
- [C7] P. Even and P. Ngo. *Automatic forest road extraction from LiDAR data of mountainous areas*. In International Conference on Discrete Geometry and Mathematical Morphology (DGMM), Uppsala, Sweden, LNCS 12708, pp. 93–106, 2021. [hal-03144147](#)
- [C8] R. Decelle, P. Ngo, I. Debled-Rennesson, F. Mothe, F. Longuetaud. *Digital Straight Segment Filter for Geometric Description*. In International Conference on Discrete Geometry and Mathematical Morphology (DGMM), Uppsala, Sweden, LNCS 12708, pp. 255–268, 2021. [hal-03144152](#)
- [C9] R. Decelle, P. Ngo, I. Debled-Rennesson, F. Mothe and F. Longuetaud. *Pith Estimation on Tree Log End Images*. In Reproducible Research on Pattern Recognition (RRPR), Milan, Italy, LNCS 12636, pp. 101–120, 2021. [hal-03006060](#)
- [C10] F. Delconte, P. Ngo, I. Debled-Rennesson, B. Kerautret, V-T. Nguyen and T. Constant. *Tree Defect Segmentation using Geometric Features and CNN*. In Reproducible Research on Pattern Recognition (RRPR), Milan, Italy, LNCS 12636, pp. 80–100, 2021. [hal-03006063](#)
- [C11] P. Even and P. Ngo. *Live extraction of curvilinear structures from lidar raw data*. In XXIV International Society for Photogrammetry and Remote Sensing (ISPRS), Nice, France, pp. 211–219, 2020. [hal-02872075](#)
- [C12] P. Ngo. *Digital hyperplane fitting*. 20th International Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA), Novi Sad, Serbia, pp. 164–180, 2020. [hal-02586206](#)
- [C13] P. Even, P. Ngo and B. Kerautret. *Thick Line Segment Detection with Fast Directional Tracking*. In Image Analysis and Processing (ICIAP), Trento, Italy, pp. 159–170, 2019. [hal-02189916](#)
- [C14] P. Ngo. *A discrete approach for polygonal approximation of irregular noise contours*. In Computer Analysis of Images and Patterns (CAIP), Salerno, Italy, pp. 433–446, 2019. [hal-02163606](#)
- [C15] R. Decelle, P. Ngo, I. Debled-Rennesson, F. Mothe and F. Longuetaud. *A new algorithm to automatically detect the pith on rough log-end images*. In 21st International Nondestructive Testing and Evaluation (NDTE) of Wood Symposium, Freiburg, Germany, pp. 518–523, 2019. [hal-02275651](#)
- [C16] N. Passat, Y. Kenmochi, P. Ngo and K. Pluta. *Rigid motions in the cubic grid : A discussion on topological issues*. In Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI), Marne-la-Vallée, France, pp.127–140, 2019. [hal-01892944](#)
- [C17] P. Ngo, N. Passat, Y. Kenmochi and I. Debled-Rennesson. *Convexity invariance of voxel objects under rigid motions*. In International Conference on Pattern Recognition (ICPR), Beijing, China, pp. 1157–1162, 2018. [hal-01695388](#)
- [C18] P. Ngo, N. Passat, Y. Kenmochi and I. Debled-Rennesson. *Discrete regular polygons for digital shape rigid motion via polygonization*. In International Workshop on Reproducible Research on Pattern Recognition (RRPR), Beijing, China, pp. 55–70, 2018. [hal-01853795](#)

- [C19] B. Kerautret, P. Ngo, Y. Kenmochi and A. Vacavant. *Greyscale image vectorization from geometric digital contour representations*. In International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI), Vienna, Austria, LNCS 10502, pp. 319–331, 2017. [hal-01588695](#)
- [C20] P. Ngo, Y. Kenmochi, I. Debled-Rennesson and N. Passat. *Convexity-preserving rigid motions of 2D digital objects*. In International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI), Vienna, Austria, LNCS 10502, pp. 67–81, 2017. [hal-01565028](#)
- [C21] S. Paul, H. Nasser, M. Nasipuri, P. Ngo, S. Basu and I. Debled-Rennesson. *A statistical-topological feature combination for recognition of isolated hand gestures from Kinect based depth images*. In International Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA), Plovdiv, Bulgaria, LNCS 10256, pp. 256–267, 2017. [hal-01517817](#)
- [C22] P. Ngo, H. Nasser, I. Debled-Rennesson and B. Kerautret. *An algorithm to decompose noisy digital contours*. In International Workshop on Reproducible Research in Pattern Recognition (RRPR), Cancun, Mexico, LNCS 10214, pp. 131–149, 2016. [hal-01415925](#)
- [C23] P. Ngo, H. Nasser and I. Debled-Rennesson. *A discrete approach for decomposing noisy digital contours into arcs and segments*. In Computer Vision – ACCV Workshops, Taipei, Taiwan, LNCS 10117, pp. 493–505, 2016. [hal-01375089](#)
- [C24] P. Ngo, H. Nasser, I. Debled-Rennesson and B. Kerautret. *Adaptive tangential cover for noisy digital contours*. In International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI), Nantes, France, LNCS 9647, pp. 439–451, 2016. [hal-01266033](#)
- [C25] P. Ngo, H. Nasser and I. Debled-Rennesson. *Efficient dominant point detection based on discrete curve structure*. In International Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA), Kolkata, India, LNCS 9448, pp. 143–156, 2015. [hal-01218285](#)
- [C26] Y. Kenmochi, P. Ngo, H. Talbot and N. Passat. *Efficient neighbourhood computing for discrete rigid transformation graph search*. In International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI), Sienna, Italy, LNCS 8668, pp. 99–110, 2014. [hal-01067537](#)
- [C27] P. Ngo, N. Passat, Y. Kenmochi, H. Talbot. *Well-composed images and rigid transformations*. In International Conference on Image Processing (ICIP), Melbourne, Australia. pp. 3035–3039, 2013. [hal-00779262](#)
- [C28] P. Ngo, Y. Kenmochi, N. Passat and H. Talbot. *Sufficient conditions for topological invariance of 2D images under rigid transformations*. In International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI), Seville, Spain, LNCS 7749, pp. 155–168, 2013. [hal-00827195](#)
- [C29] P. Ngo, A. Sugimoto, Y. Kenmochi, N. Passat and H. Talbot. *Discrete rigid transformation graph search for 2D image registration*. In PSIVT Workshops, Guanajuato, Mexico, LNCS 7655, pp.228–239, 2013. [hal-00866285](#)
- [C30] Y. Kenmochi, P. Ngo, N. Passat and H. Talbot. *Digital shapes, digital boundaries and rigid transformations : A topological discussion*. Courbure discrète : théorie et applications. Actes des rencontres du CIRM, Luminy, France, pp.195–201, 2013. [hal-00984287](#)
- [C31] P. Ngo, Y. Kenmochi, N. Passat and H. Talbot. *Combinatorial properties of 2D discrete rigid transformations under pixel-invariance constraints*. In International Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA), Austin, United States, LNCS 7655, pp.234–248, 2012. [hal-00790693](#)

Publications dans des conférences nationales (10)

- [N1] X. Li, G. Pot, P. Ngo, J. Viguier, J-C. Butaud, R. Collet. *Board localization within logs using image analysis approaches for traceability and quality assessment in sawmills*. Journées du Groupe de Recherche 3544 Sciences du Bois, Nice, France, 2022.
- [N2] F. Delconte, I. Debled-Rennesson, P. Ngo, T. Constant, B. Kerautret. *Détection des singularités de l'écorce à partir de données Lidar en vue du classement qualité*. TRIDIFOR - Méthodes innovantes d'analyse de données 3D en forêt, Québec, Canada, 2022.
- [N3] P. Even, P. Ngo. *Extraction de structures linéaires archéomorphologiques de données LiDAR brutes en contexte montagneux*. Colloque Remuer ciel et terre : L'apport du LiDAR en archéologie, Remiremont, 2022.
- [N4] R. Decelle, P. Ngo, I. Debled-Rennesson, R. Mothe and F. Longuetaud. *Description géométrique à l'aide de segments discrets*. Journée du Groupe de Travail de Géométrie Discrète et Morphologie Mathématique (DGMM), Nancy, France, 2021.
- [N5] R. Decelle, P. Ngo, I. Debled-Rennesson, R. Mothe and F. Longuetaud. *Détection automatique de la moelle sur des images d'extrémités de grumes de Douglas brutes de sciage*. Journées du Groupe de Recherche 3544 Sciences du Bois, Epinal, France, 2019.
- [N6] T. Dao, P. Ngo, I. Debled-Rennesson, Y. Kenmochi and N. Passat. *Transformations rigides pour les objets discrets non convexes en 2D*. Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique (GTMG), Aix-en-Provence, France, 2018.
- [N7] P. Ngo, N. Passat, Y. Kenmochi and I. Debled-Rennesson. *Geometric-preserving rigid motions of digital objects*. Journées Informatique et Géométrie (JIG), Lyon, France, 2018.
- [N8] B. Kerautret, J-O. Lachaud, M. Said, I. Debled-Rennesson, H. Nasser, P. Ngo and L. Hormain. *Détection d'Echelles Significatives : Nouvelles Applications et Perspectives*. Journées de Géométrie Discrète et Morphologie Mathématique (GDMM), Poitiers, France, 2017.
- [N9] P. Ngo, Y. Kenmochi, N. Passat and H. Talbot. *Préservation topologique des images numériques 2D par transformations rigides*. Journées du Groupe de Travail en Géométrie Discrète (GT GeoDis), Paris, France, 2013.
- [N10] P. Ngo, Y. Kenmochi and H. Talbot. *Combinatorial structure for rigid transformations in 2D digital images*. in Journée du Groupe de Travail en Géométrie Discrète (GT GeoDis), Clermont-Ferrand, France, 2011.

Posters communications (4)

- [P1] R. Decelle, P. Ngo and I. Debled-Rennesson. *On the number of digital segments centered in a square grid*. In International Conference on Discrete Geometry and Mathematical Morphology (DGMM), Strasbourg, France, 2022.
- [P2] P. Even and P. Ngo. *Live extraction of curvilinear structures from LiDAR raw data*. In International Society for Photogrammetry and Remote Sensing (ISPRS), Nice, France, 2022 and in International Conference on Discrete Geometry and Mathematical Morphology (DGMM), Strasbourg, France, 2022.
- [P3] P. Ngo, Y. Kenmochi, N. Passat and H. Talbot. *Combinatorial structure for rigid transformations in 2D digital images*. In SubTile, Marseille, France, 2013.
- [P4] P. Ngo, Y. Kenmochi and H. Talbot. *Efficient Exact Computation for Incremental Discrete Rotations using Continued Fraction*. In Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI) 2011, Nancy, France, 2011.

Rapports techniques (3)

- [R1] P. Ngo. *Gauss Digitization of Simple Polygons*, 2021. [hal-03125916](#)
- [R2] P. Even, P. Ngo, and B. Kerautret. *Complementary Experiments of the Thick Line Segment Detection Algorithm : Evaluation of ADS and ATC Concepts*, 2019. [hal-03155787](#)
- [R3] P. Ngo, Y. Kenmochi, and H. Talbot. *Exact comparison of quadratic irrationals*, 2011. [hal-00691762](#)

Thèses soutenues ou encadrées (3)

- [T1] P. Ngo. *Rigid transformations on 2D digital images : Combinatorial and topological analysis*, PhD thesis, Université Paris-Est, Octobre 2013. [hal-00795054](#)
- [T2] H. Nasser. *Outils pour l'analyse des courbes discrètes bruitées*, PhD thesis, Université de Lorraine, Octobre 2018. (In french). [hal-01947024](#)
- [T3] R. Decelle. *L'éléments pour l'analyse et le traitement d'images : application à l'estimation de la qualité du bois*, PhD thesis, Université de Lorraine, July 2022. (In french). [hal-03794911](#)

Publications soumises (4)

- [J13] F. Longuetaud, R. Schraml, F. Mothe, T. Ravoajanahary, R. Decelle, T. Constant, P. Ngo, I. Debled-Rennesson, K. Entacher, A. Petutschnigg, F. Brüchert and A. Uhl. *Traceability and quality assessment of Norway spruce (*Picea abies*) logs : the TreeTrace_spruce database*. Submitted to Journal of Annals of Forest Science.
- [J14] R. Decelle, P. Ngo, I. Debled-Rennesson, F. Mothe and F. Longuetaud. *Ant Colony Optimization for Estimating Pith Position on Images of Tree Log Ends*. Image Processing On Line (IPOL) Journal.
- [C31] P. Georges, P. Ngo and P. Even. *Automatic forest road extraction from LiDAR data using convolutional neural networks*. Submitted.
- [C32] R. Decelle, P. Ngo, I. Debled-Rennesson, F. Mothe and F. Longuetaud. *Light U-Net with a new morphological attention gate model Application to analyse wood sections*. Submitted.

B

Curriculum vitæ

Sommaire

B.1	Résumé	202
B.1.1	État civil	202
B.1.2	Formation universitaire	202
B.1.3	Parcours professionnel	202
B.1.4	Autres expériences	202
B.2	Activités pédagogiques et administratives	204
B.2.1	Enseignements réalisés	204
B.2.2	Responsabilités pédagogiques	205
B.2.3	Activités administratives	205
B.3	Activités liées à la recherche	205
B.3.1	Projets de recherche	205
B.3.2	Expertises scientifiques	207
B.3.3	Participation aux groupes de travail	207
B.3.4	Responsabilités scientifiques	208
B.3.5	Séminaires et exposés	208
B.3.6	Diffusion logicielle	208
B.4	Encadrements de la recherche	209
B.4.1	Co-encadrement de post-doctorat	209
B.4.2	Co-encadrements de thèses	210
B.4.3	Co-encadrements de Master 2	212
B.4.4	Autres encadrements	214

B.1 Résumé

B.1.1 État civil

Hoai Diem Phuc NGO

Mail : hoai-diem-phuc.ngo@loria.fr

Née le **18 juillet 1986**, Vietnam

Web : <https://members.loria.fr/HDPNGo>

Grade : **Maître de conférences, classe normale**

Établissement d'affectation : **Université de Lorraine**

Composante d'affectation : **Faculté des Sciences et Technologies – Nancy**

Unité de recherche : **LORIA UMR 7503** Section CNU : **27**

B.1.2 Formation universitaire

- **Doctorat en Informatique** **Oct. 2013**
Université Paris-Est, France
Titre : *Rigid transformations on 2D digital images : Combinatorial and topological analysis.*
- **Diplôme d'ingénieur en Informatique** **Oct. 2010**
École Supérieure d'Ingénieurs de Luminy (ESIL), Marseille, France
- **Baccalauréat** **2004**
Hue, Vietnam

B.1.3 Parcours professionnel

- **Maître de conférences** **Sept. 2014 – Présent**
Université de Lorraine – Faculté des Sciences et Technologies
Laboratoire Lorrain de Recherche en Informatique et ses Applications (LORIA), France
- **Postdoctorat** **Nov. 2013 – Août 2014**
CEA LIST – DIGITEO Saclay
Image, Processing and Tomography Lab, Saclay, France
- **Thèse de doctorat** **Oct. 2010 – Oct. 2013**
Laboratoire d'Informatique Gaspard-Monge (LIGM) UMR CNRS 8049
Université Paris-Est Marne-la-Vallée (UPEMLV), Marne-la-Vallée, France

B.1.4 Autres expériences

- **Enseignante invitée** **Fev. 2015, Jan. 2017**
Institut Francophone International (IFI), Hanoi, Vietnam
- **Séjour de recherche** **Avril 2013 – Mai 2013**
National Institute of Informatics (NII), Tokyo, Japon
- **Monitrice** **Oct. 2010 – Août 2013**
École Supérieure d'Ingénieurs en Électronique et Électrotechnique (ESIEE)–Paris
Université Paris-Est Marne-la-Vallée (UPEMLV), Marne la Vallée, France
- **Stage de fin d'étude** **Fev. 2010 – Août 2010**
Dassault Système Provence (DSP), Aix-en-Provence, France
- **Stage de recherche** **Juin 2009 – Août 2009**
Department of Computer Science, University of Western Ontario (UWO), Canada

Les figures suivantes donnent un panorama de mes responsabilités pédagogiques et administratives, ainsi que mes activités de recherche et les communications scientifiques réalisées depuis la thèse à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée (UPEMLV), puis le post-doc au CEA - Saclay, et la nomination au poste de Maître de Conférences, 27^{ème} section (Informatique) dans le département Informatique de la Faculté des Sciences et Technologies (FST), Université de Lorraine et le Laboratoire Lorrain de Recherche en Informatique et ses Applications (LORIA).

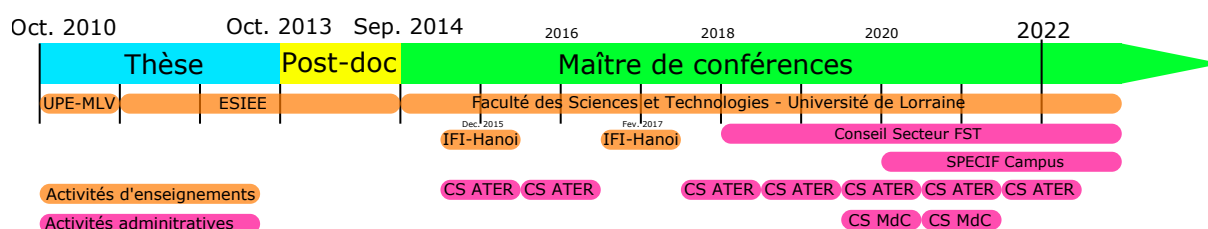


FIGURE B.1 – Responsabilités pédagogiques et administratives

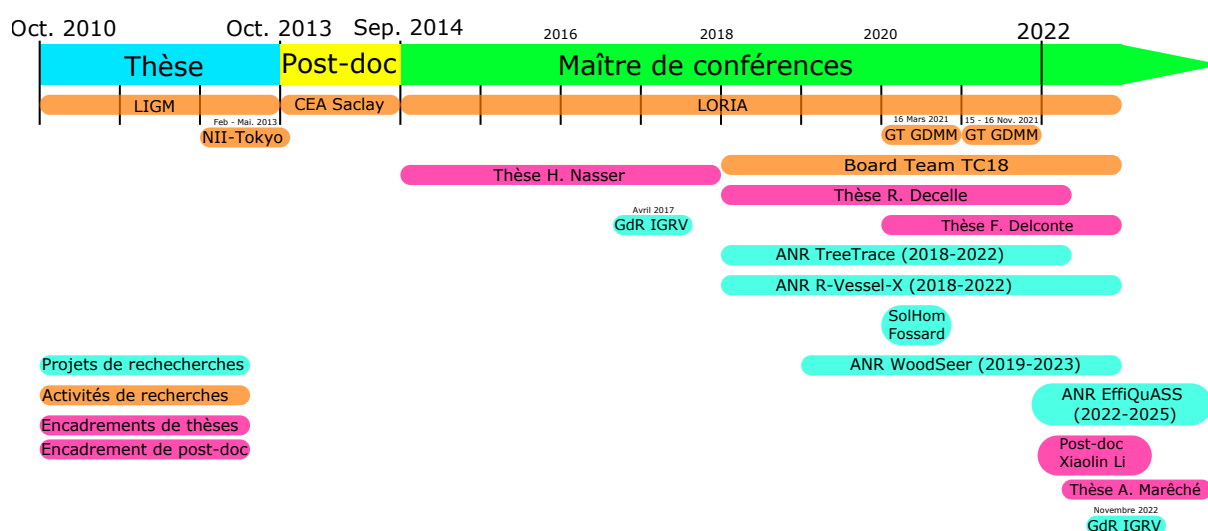


FIGURE B.2 – Activités de recherches

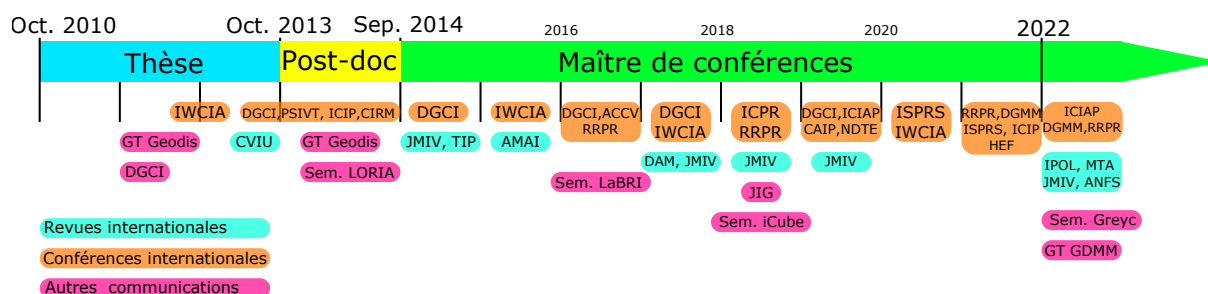


FIGURE B.3 – Publications et communications

B.2 Activités pédagogiques et administratives

B.2.1 Enseignements réalisés

2014 – Présent	Maître de conférence à l'Université de Lorraine Faculté des Sciences et Technologies (FST), Département Informatique
2011 – 2014	Moniteur à l'École Supérieure d'Ingénieurs en Électronique et Électrotechnique (ESIEE)–Paris, UFR d'Informatique
2010 – 2011	Moniteur et l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée (UPEMLV), UFR de Mathématiques et d'Informatique

Les tableaux suivants détaillent les différents cours avec le nombre d'heures de mes activités d'enseignement depuis mon recrutement à l'Université de Lorraine.

<i>Intitulé du module</i>	<i>Niveau</i>	<i>2014</i>	<i>2015</i>	<i>2016</i>	<i>2017</i>
Algorithmique et Programmation 1	L1	69,67	69,67	69,33	64,33
Informatique graphique	L1	28	58	54	24
Outils Informatique et Internet	L1		14		
Programmation avancée	L2	24	24	24	45
Base de Données 1	L2			29,5	30
Système d'exploitation 1	L3		12	12	
Sécurité 1	L3	10			
Web 2	L3	18	18	30	48
Premiers pas vers l'ingénierie du logicielle	L3	24	27	30	32
Analyse et Conception de Logiciels	I2	24	24	24	24
Architectures orientées services	M2	18	18	18	19,5
Total	1058 h	215,67	264,67	290,83	286,83

<i>Intitulé du module</i>	<i>Niveau</i>	<i>2018</i>	<i>2019</i>	<i>2020</i>	<i>2021</i>
Algorithmique et Programmation 1	L1	67,33	65,33	69,67	65
Algorithmique et Programmation 2	L1		14		
Web 1	L1	22	22	22	22
Algorithmique-Programmation Python	L2		23	21	21
Programmation avancée	L2	29	29	29	29
Base de Données 1	L2	8	20	20	20
Manipulation de Bases de données	L3		12	12	12
Web 2	L3	24	28	26	22
Premiers pas vers l'ingénierie du logicielle	L3	33	27	38	33
Analyse et Conception de Logiciels	I2	22	22	24	22
Optimisation combinatoire	M1			16	22
Algorithmes et complexité	M1			22	
Architectures orientées services	M2	24	20	24	24
Traitement et analyse d'images	M2	14	14,5	16	16
Total	1187,83 h	257,33	282,83	339,67	308

TABLE B.1 – Récapitulatif des différents enseignements effectués par année.

B.2.2 Responsabilités pédagogiques

- **Responsable des UEs** : *Programmation avancée* et *Algorithmique-Programmation Python*. Niveau : *Licence 2*.
- **Co-responsable des UEs** : *Premiers pas vers l'ingénierie du logiciel* et *Web 2*. Niveau : *Licence 3*.
- **Co-responsable de l'UE** : *Traitement et analyse d'images*. Niveau : *Master 2 Recherche* de l'Université de Lorraine. Spécialité : Apprentissage, Vision, Robotique (AVR).
- **Responsable de l'UE** : *Génie Logiciel Avancé*. Niveau : *Master 2 Recherche et Professionnel* de l'Université de Lorraine. Spécialité : Ingénierie des Logiciels (IL).
- **Encadrement / Co-encadrement de projets tutorés d'UE** : *Initiation à la recherche*. Niveau : *Master 1*
- **Tuteur universitaire de stagiaires** en entreprise. Niveau : *Licence 3* et *Master 2* – Spécialités : Ingénierie des Logiciels (IL) et Apprentissage, Vision, Robotique (AVR).
- **Responsable de stages de fin d'année**. Niveau : *Licence 3*.

B.2.3 Activités administratives

- **Rapporteur des dossiers des candidats à la prime individuelle du RIPEC** (2022) à l'Université de Lorraine. Rôle : Étudier les dossiers et donner un avis sur des dossiers.
- **Membre de la commission de sélection pour les postes de Maître de Conférences** : Postes à l'IUT Saint-Dié des Vosges (2020) et à l'Université d'Aix Marseille (2021). Rôles : Étudier les dossiers et participer à l'audition des candidatures.
- **Membre de la commission de sélection pour les recrutements ATER** de la FST en 2015, 2016, 2018, 2020, 2021 et 2022, de TELECOM Nancy 2021 et 2022. Rôles : Suivre les auditions, étudier des dossiers et effectuer un classement parmi les candidatures.
- **Membre élue au Conseil Secteur** de la FST, depuis septembre 2018. Le CS a pour rôle notamment de veiller à la qualité et à la cohérence de la politique scientifique de l'établissement telle que l'emploi, la répartition des crédits, *etc.*
- **Membre élue au bureau de SPECIF Campus**, depuis décembre 2020. Le SPECIF Campus est la société professionnelles des chercheurs et enseignants-chercheurs en informatique qui a pour rôle de suivre et de relayer l'actualité, d'organiser des journées thématiques, *etc.*
- **Autres activités** : participation aux journées portes ouvertes et au salon Oriaction Nancy – Metz en tant que représentante du Département Informatique de la FST.

B.3 Activités liées à la recherche

Mes travaux de recherche se situent dans le domaine de la géométrie discrète, et du traitement et de l'analyse d'images. Mes activités scientifiques sont associées aux différents projets suivants :

B.3.1 Projets de recherche

- **Projet BIOMTRACE (Développement de méthodes BIOMétriques pour l'identification et la TRACabilitE des grumes de chêne, projet soumis)**. Ce projet vise à développer des méthodes de traçabilité des grumes de chêne basées sur des caractéristiques intrinsèques aux grumes, qui serait une alternative aux marqueurs physiques tels

que les plaquettes plastiques ou les puces RFID. Plus précisément, nous nous intéressons aux méthodes de traçabilité basées sur l'analyse de photos prises à l'extrémité des grumes en forêt et après transport à l'aide de capteurs classiques de type smartphones.

- **Projet de recherche** collaborative avec l'équipe Image, Laboratoire Greyc de l'Université de Caen Normandie - CNRS - ENSICAEN sur *l'étude géométrique des courbes discrètes bruitées en 3D* dans le cadre de mobilité d'inter-laboratoires 2022 du GdR IGRV.
- **Projet ANR EffiQuASS** (Precise, cost & eco-efficient timber quality assessment for the sawmill of the future, 2022–2025). Les propriétés mécaniques du bois sont très variables en raison des conditions de croissance des arbres et de l'hétérogénéité naturelle du bois. Le contrôle qualité est une tâche cruciale pour le bois. Dans ce contexte, ce projet vise à proposer des méthodes qui permettront d'évaluer la qualité du bois pour une utilisation éco-efficace des ressources forestières dans une scierie rentable du futur.
- **Projet ANR WoodSeer (Predicting Inner Wood Defects from Outer Bark Features, 2019–2023)**. Ce projet vise à développer des moyens automatisés de caractérisation des bois en amont de la filière forêt-bois dans le cadre de l'inventaire, du commerce des grumes et de la première transformation, en apportant de manière automatisée une information détaillée sur la nature, la localisation et les dimensions des défauts internes.
- **Projet ANR R-Vessel-X (Robust Vascular Network Extraction, 2018–2022)**. L'objectif de ce projet est de développer de nouvelles solutions pour extraire les réseaux vasculaires au sein d'images biomédicales du foie, et notamment l'IRM. En particulier, nous nous intéressons à des méthodes robustes permettant de calculer des informations de haut niveau à partir de ces structures par des approches originales, conduisant aux connexions entre vaisseaux, bifurcations, indicateurs de forme globaux et locaux.
- **Projet ANR TreeTrace (Biometric fingerprints of trees : log tracing from forest to sawmill and early estimation of wood quality, 2018–2022)**. L'objectif du projet est d'extraire des caractéristiques du bois à partir d'images pour (i) tracer des troncs d'arbres, et (ii) estimer la qualité du bois. Plus précisément, on s'intéresse à la recherche de signatures uniques pour chaque arbre coupé en forêt puis déplacé vers une scierie assurant un suivi, ainsi que l'estimation de sa qualité. Cette signature repose sur des caractéristiques géométriques telles que la moelle, les cernes, le duramen et l'aubier, etc.
- **Projet SolHoM-Fossard (Interactions hommes-milieus et évolution des sols au cours des deux derniers millénaires dans le massif du Fossard, 2019–2021)**. Il s'agit d'un projet interdisciplinaire de l'Université de Lorraine qui regroupe des chercheurs de différents domaines comme des pédologues, des archéologues, des géographes et des informaticiens. Le projet porte sur l'étude d'empreintes des activités humaines historiques sur les sols, exacerbées ou non par certains événements climatiques majeurs.
- **Projet de recherche** collaborative avec l'équipe A3SI, LIGM sur *Invariance géométrique par transformations rigides sur \mathbb{Z}^2* dans le cadre de mobilité d'inter-laboratoires 2017 du GdR IGRV.
- Projets en **collaboration avec INRAE** (master, puis thèse). Cette collaboration s'articule notamment autour de l'extraction de caractéristiques géométriques et biologiques du bois pour estimer sa qualité et permet de mettre en place deux stages de Master 2, deux thèses (en cours) et un stage postdoctoral (en cours).
- **Collaboration avec ONF Chambéry**. Une nouvelle collaboration avec l'organisme français de gestion forestière (ONF) a débuté sur l'extraction de structures linéaires à partir de données LiDAR. Plus précisément, on s'intéresse à la détection des chemins forestiers et en particulier à l'extraction du réseau routier complet à partir des chemins détectés.

- **Collaboration avec INRAP Grand Est – SRA Meuse – ONF Nancy.** Cette collaboration poursuit les travaux avec les archéologues sur l'extraction de structures planaires ou quasi planaires telles que les anciennes zones de production de charbon de bois ou les zones potentielles d'installation de l'homme.

B.3.2 Expertises scientifiques

J'ai été sollicitée par différentes revues internationales (16), des conférences internationales (27) et des conférences nationales (2) pour un travail d'arbitrage (total : **45 articles révisés**).

- Conférences : IWCIA (x2), RRPR (x5), DGMM4CV (x2), DGCI (x3), ICPR (x8), DGMM (x7), RFIA (x1) et ORASIS (x1).
- Journaux : Discrete Applied Mathematics (x1), Expert Systems With Applications (x1), Information Sciences (x1), Journal of Mathematical Imaging and Vision (x4), IEEE Transactions on Image Processing (x3), The Computer Journal (x1), Information and Computation (x1), Robotics and Computer-Integrated Manufacturing (x1), Pattern Recognition Letters (x1), International Journal of Computers and Applications (x1), Wood Science and Technology (x1).

Je suis également membre du comité éditorial et scientifique des journaux et des conférences internationaux suivants :

- IEEE International Conference on Image Processing (ICIP) en 2022
- International Conference on Mathematical Morphology and Discrete Geometry (DGMM) en 2021 et 2022
- International Conference on Pattern Recognition (ICPR) en 2020 et 2022
- International Conference on Frontiers in Computing and Systems (COMSYS) en 2021
- IPOL special Issue on Reproducible Research in Mathematical Morphology and Discrete Geometry (TC18 Special Issue) en 2021
- La journée francophones des jeunes chercheurs en vision par ordinateur (ORASIS) en 2019
- International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI) depuis 2017
- Workshop of Reproducible Research in Computer Science (RRPR) depuis 2016
- Workshop on Discrete Geometry and Mathematical Morphology for Computer Vision (DGMM4CV) en 2016
- Congrès national sur la Reconnaissance de Formes et Intelligence Artificielle (RFIA) en 2016
- International Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA) en 2015

J'ai été examinatrice pour le **jury de la thèse de Tadios Habite** soutenu le 26 août 2022 (Linnaeus University, Växjö, Sweden) : *Pith location and annual ring detection for modelling of knots and fibre orientation in structural timber – A deep-learning-based approach.*

B.3.3 Participation aux groupes de travail

- Membre du groupe de travail en **Informatique Mathématique** (GdR IM)
- Membre du groupe de travail en **Informatique Géométrique et Graphique, Réalité Virtuelle et Visualisation** (GdR IGRV)
- Membre du groupe de travail en **Vision Science**

- Membre du groupe de travail en **Géométrie Discrète et Morphologie Mathématique** (GT GDMM)
- Membre du groupe de travail en **Modélisation Géométrique** (GT MG)

B.3.4 Responsabilités scientifiques

- Co-organisation de la **16ème journée du Groupe de Travail de Géométrie Discrète et Morphologie Mathématique (GDMM)** en novembre 2021 au LORIA, Nancy.
- Co-organisation de la **15ème journée du Groupe de Travail de Géométrie Discrète et Morphologie Mathématique (GDMM)** en mars 2021 au LORIA. (Visio-conférence)
- Co-organisation de l'atelier *Turing Tumble* pour la journée NSI-SNT en mars 2019 au LORIA, Nancy.
- Secrétaire du comité technique de International Association for Pattern Recognition (IAPR), **TC 18**, depuis 2018.

B.3.5 Séminaires et exposés

La liste suivante présente les différents séminaires et exposés que j'ai réalisés en dehors du laboratoire ou dans le cadre d'une manifestation organisée au laboratoire :

- Exposé aux Journées de Géométrie Discrète et Morphologie Mathématique (GDMM), Bordeaux, 22 novembre 2022. *Homotopic Affine Transformations in the 2D Cartesian Grid*.
- Séminaire au Greyc, Caen, 10 novembre 2022. *Structures discrètes pour l'étude des courbes bruitées et leurs applications en analyse d'images*.
- Exposé aux Journées plénières ANR R-Vessel-X, Reims, 9 juin 2022. *Constrained Constructive Optimization (CCO) pour la génération d'arbres vasculaires réalistes : algorithmique et implantation*.
- Exposé aux Journées plénières ANR COMEDIC, Autrans, 30 juin 2021. *Quasi-régularité pour la préservation topologique et géométrique des objets discrets par des mouvements rigides*.
- Exposé aux Journées Informatique et Géométrie (JIG), Lyon, 21 juin 2018. *Préservation topologique et géométrique des objets discrets 2D par transformations rigides*.
- Séminaire au iCube, Strasbourg, 15 juin 2018. *Mouvements rigides préservant la géométrie des objets numériques*.
- Séminaire au LaBRI, Bordeaux, 19 mai 2016. *Discrete structure of noisy curves : Adaptive tangential cover and applications in image analysis*.
- Séminaire au LORIA, Nancy, 19 mars 2014. *Transformations rigides discrètes : Théorie et applications en traitement d'images numériques*.
- Exposé aux Journées du GT en Géométrie Discrète (GeoDis), Paris, 13 juin 2013. *Préservation topologique des images numériques 2D par transformations rigides*.
- Exposé aux Journées du GT en Géométrie Discrète (GeoDis), Clermont-Ferrand, 15 novembre 2011. *Combinatorial structure for rigid transformations in 2D digital images*.

B.3.6 Diffusion logicielle

L'un de mes objectifs est de proposer des travaux de recherche reproductibles. En particulier, j'ai participé aux différentes éditions de **RRPR** qui ont pour l'objectif de promouvoir la reproductibilité des résultats publiés dans des articles et de mettre l'accent sur l'implémentation

des méthodes proposés. Les différentes *démonstrations en ligne* sur le site [ipol-github](https://ipol-github.github.io/) avec des **dépôts de code sources** et de données sur [Github](https://github.com/) ont été conçus en ce sens.

- La [démonstration](#) et le [code](#) : *Tree Defect Segmentation using Geometric Features and CNN* [C10]
- La [démonstration](#) et le [code](#) : *Adaptive Tangential Cover for Noisy Digital Contours* [J7]
- La [démonstration](#) et le [code](#) : *Ant Colony Optimization for Pith Estimation on Log Images* [C9]
- Le [logiciel](#) : *Automatic Mountain Road Extraction from LiDAR data : AMREL* [C7]
- Le [logiciel](#) : *Fast extraction of linear structures from LiDAR raw data for archaeomorphological structure prospection : ILSD* [C4]
- La [démonstration](#) et le [code](#) : *Thick Line Segment Detection with Fast Directional Tracking*. [C13]
- La [démonstration](#) et le [code](#) : *A discrete approach for polygonal approximation of irregular noise contours*. [C14]
- La [démonstration](#) et le [code](#) : *Convexity Invariance of Voxel Objects under Rigid Motions* [C17]
- La [démonstration](#) et le [code](#) : *Greyscale Image Vectorization from Geometric Digital Contour Representations* [C19]
- La [démonstration](#) et le [code](#) : *Arcs and Segments Decomposition Algorithm for Noisy Digital Contours* [C23]
- La [démonstration](#) et le [code](#) : *Dominant Point Detection using Adaptive Tangential Cover* [C24]

B.4 Encadrements de la recherche

Depuis ma prise de fonction, j'ai pu proposer régulièrement des sujets d'initiation à la recherche (Master 1 et école d'ingénieurs 2ème année), de stage de Master 2 et de thèse qui m'ont permis d'encadrer différents étudiants.

Le tableau B.2 récapitule mes encadrements de stage postdoctoral, de thèses et de stage de Master 2.

<i>Étudiant</i>	<i>Sujet</i>	<i>Période</i>	<i>Taux</i>	<i>Financement</i>
Xiaolin Li	Post-doc	Mars 2022 – Présent	50%	ANR EfficuASS
Aude Marêché	Thèse	Octobre 2022 – Présent	33%	Contrat doctoral ED
Florian Delconte	Thèse	Jan. 2021 – Présent	33%	ANR WoodSeer
Rémi Decelle	Thèse	Oct. 2018 – Juillet 2022	30%	ANR TreeTrace
Hayat Nasser	Thèse	Sep. 2014 – Oct. 2018	40%	Erasmus Mundus
Paul Georges	Master 2	Aril 2022 – présent	50%	–
Aude Marêché	Master 2	Mars 2022 – présent	33%	–
Baptiste Millotte	Master 2	Mars – Août 2021	33%	–
Hugo Ambrozik	Master 2	Mars – Sep. 2021	50%	–
Gaëtan Pelte	Master 2	Mars – Sep. 2020	50%	–
Alexis Barthelemy	Master 2	Mars – Sep. 2020	50%	ANR TreeTrace
Florian Delconte	Master 2	Mars – Sep. 2019	50%	ANR TreeTrace
Dao Thuy Hong	Master 2	Oct. 2017 – Mars 2018	90%	–

TABLE B.2 – Récapitulatif des encadrements de post-doc, thèse et Master 2.

B.4.1 Co-encadrement de post-doctorat (1)

- **Xiaolin Li (depuis mars 2022)**
Encadrants : Guillaume Pot (50%) et Phuc Ngo (50%)

Titre : *Traitement d'images pour la reconnaissance de planches de bois*

Financement : Projet ANR EffiQuASS

Ce post-doctorat s'inscrit dans le cadre du projet **ANR EffiQuASS** et a pour objet de développer des algorithmes qui permettent de reconnaître des planches sciées, obtenir l'emplacement des planches dans les billons à partir d'images prises à la scierie et d'utiliser ces données pour améliorer le contrôle qualité du bois. Le principal travail est de trouver une méthode pour reconnaître de quel billon et d'où à l'intérieur du billon chaque planche provient. En effet, il existe des corrélations entre la qualité des planches et le billon dont elles proviennent, et à plus grande échelle, la région d'où elles proviennent. Le post-doctorat est divisé en 2 étapes successives. La première est l'extraction de différents caractéristiques d'une planche ; les cernes de croissance en sont un exemple permettant d'identifier les planches. D'autres caractéristiques importantes peuvent également être utilisées, telles que la couleur / texture, les singularités (nœuds, ramifications, ...). Après l'extraction des caractéristiques, la deuxième étape consiste à reconstruire des images d'extrémités de billons à partir des images d'extrémités des planches. Certains aspects pratiques du procédé de sciage peuvent aussi être utilisés pour aider l'algorithme : l'orientation du billon lors du sciage, le plan de débit du sciage et le nombre de planches pour chaque billon, *etc.*

B.4.2 Co-encadrements de thèses (4)

- **Thèse de Aude Marêché (depuis octobre 2022)**

Directeurs de thèse : Isabelle Debled-Rennesson (33%)

Co-encadrants : Fabien Feschet (33%) et Phuc Ngo (33%)

Titre : *Approches par voisinages polyédriques pour l'étude de surfaces digitales*

Financement : Contrat doctoral ED

L'objectif de cette thèse est d'étudier une nouvelle approche pour la structuration des voisinages locaux sur une surface digitale. Elle se base sur la décomposition d'un voisinage géodésique ou quasi-géodésique en morceaux polyédriques, plus précisément des cônes polyédriques pointés. Elle a aussi comme objectif d'étudier le champs normal d'une surface et d'en proposer des régularisations.

Une première étape consistera à décrire et mettre en œuvre un parcours efficace autour d'un point notamment pour des problématiques de test de planéité locale afin de dégager des structures polyédriques stables et d'en étudier leur distribution. Une fois les voisinages établis, la seconde partie du travail consistera à les utiliser pour partitionner les résultats d'un algorithme de type *plane probing* afin d'extraire des plans moyens par secteur et ensuite pouvoir les fusionner pour comprendre la structure de la surface digitale de manière non locale, c'est-à-dire en dépassant le strict cadre du voisinage initial.

Une extension naturelle de la couverture tangentielle 2D peut se formuler à partir des voisinages polyédriques. En effet, s'il existe autant de cônes polyédriques locaux que de façon de parcourir le bord du voisinage d'un point, on peut voir la structure de manière agrégée en considérant pour chaque droite 3D posée sur la surface, l'ensemble des faces de cônes locaux qui la contiennent ou la recouvre. Cela mène directement à considérer un ensemble de faces polyédrales planaires recouvrant la droite 3D. Les caractéristiques de la surface sont alors liées à la distribution des caractéristiques de l'ensemble des droites 3D ainsi considérées. Un effort particulier sera fait pour conserver une combinatoire raisonnable des morceaux de plans digitaux et des temps de calculs contenus.

- **Thèse de Florian Delconte (depuis janvier 2020)**

Directeurs de thèse : Isabelle Debled-Rennesson (33%) et Bertrand Kerautret (33%)

Co-encadrante : Phuc Ngo (33%)

Titre : *Recherche et caractérisation automatique des défauts à la surface de grumes de bois*

Financement : Projet ANR WoodSeer

Cette thèse s'inscrit dans le projet **ANR WoodSeer** visant la mise en relation des signatures des défauts sur l'écorce, avec leurs caractéristiques internes. Sans que cela soit exclusif, les défauts à détecter sont en particulier les nœuds des branches élaguées englobés dans le tronc. Dans ce contexte, le travail de thèse s'intéresse au problème de la segmentation et de l'identification des défauts à la surface du bois.

Plusieurs travaux ont été proposés en comparant la surface du tronc avec une surface de référence. Celle-ci a souvent été définie par des cylindres ou par des cercles. Cependant, en raison des irrégularités de la forme du tronc, la surface de référence créée par les formes primitives ne se rapproche pas toujours correctement de la surface réelle du tronc surtout lorsque celui-ci présente une forme irrégulière et par conséquent, les petits défauts ne sont pas détectés. Pour améliorer les performances de détection des défauts, nous proposons d'intégrer une stratégie d'apprentissage utilisant une représentation de zones de l'écorce (patchs rectangulaires) sous la forme de cartes de hauteur. Le processus d'apprentissage aura pour but de délimiter la frontière des défauts. En particulier, les images d'accumulation 3D pourraient être utilisées pour exploiter les informations géométriques intrinsèques au cours de la phase d'apprentissage. En effet, deux articles [C10], [J4] ont été publiés en 2021 respectivement dans la conférence internationale RRPR et la revue IPOL. L'application sur les défauts du bois est intéressante pour progresser sur ce point car la géométrie des défauts, associés aux nœuds du bois, est assez simple. Les avancées obtenues dans cette thèse pourront être utilisées dans d'autres domaines.

- **Thèse de Rémi Decelle (d'octobre 2018 à juillet 2022)**

Directrice de thèse : Isabelle Debled-Rennesson (35%)

Co-encadrantes : Fleur Longuetaud (35%) et Phuc Ngo (30%)

Titre : *Éléments pour l'analyse et le traitement d'images : application à l'estimation de la qualité du bois*

Financement : Projet ANR TreeTrace

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet **ANR TreeTrace** et de la collaboration avec des chercheurs de l'**INRAE à Champenoux**. L'idée principale du projet est le suivi des arbres du site d'exploitation forestière à la scierie, et l'estimation de la qualité du bois par l'extraction des caractéristiques géométriques et biologiques du bois à partir des images issues de technologies à bas coût et plus accessibles comme, par exemple, l'appareil photo numérique. Ces images pourraient être obtenues aussi bien en forêt que dans la scierie.

L'objectif de cette thèse est de développer un outil d'analyse d'images qui est capable de traiter des images de grumes avant la découpe en scierie, afin d'aider l'expert de la scierie à les classer dans différentes classes de qualité. Les caractéristiques du bois pouvant être automatiquement détectées sur les images de grumes de bois sont : la moelle, l'ellipticité, l'excentricité, les fissures, les critères d'hétérogénéité (couleur, texture, *etc.*), les cernes de croissance, *etc.* En particulier, l'outil développé doit être robuste à plusieurs formes de bruits présents sur l'image comme la luminosité ambiante ou bien encore la terre. D'autre part, la contrainte de temps de traitement et la puissance de calcul sont aussi des facteurs importants pour l'utilisation à la scierie ou en bord de route.

Des méthodes de traitement d'images ont été proposées dans le cadre de la thèse : la localisation de la moelle dans une coupe transversale de la grume avec une méthode basée sur l'algorithme des colonies de fourmis, la segmentation de la grume et du duramen avec

des réseaux de neurones convolutifs, une première approche pour identifier les limites des cernes de croissance avec d'un filtrage bilatéral directionnel et la proposition un filtre directionnel basé sur la géométrie discrète, *etc.* Actuellement, quatre articles [C8], [C9], [C15] et [98] ont été publiés dans des conférences internationales, deux communications orales ont eu lieu dans les journées de groupe de travail [N4], [N5] et un article journal IPOL [J14] a été accepté à la publication. D'autres articles sont en cours de rédaction pour la soumission.

- **Thèse de Hayat Nasser (de septembre 2014 à octobre 2018)**

Directrice de thèse : Isabelle Debled-Rennesson (60%)

Co-encadrante : Phuc Ngo (40%)

Titre : *Outils pour l'analyse des courbes discrètes bruitées*

Financement : Erasmus Mundus

L'objectif de cette thèse était d'étudier des courbes discrètes bruitées issues de contours d'objets dans des images numériques. Plus précisément, nous avons développé des outils géométriques et numériques permettant d'analyser les courbes bruitées. Un travail préliminaire, effectué par I. Debled-Rennesson et son doctorant T. P. Nguyen, a permis de mettre en place une première approche. Cette approche présentait cependant des limites : (1) elle utilisait une méthode heuristique afin de localiser les points, appelés *points dominants*, contenant les informations significatives pour caractériser/approcher une courbe, et (2) elle n'était pas adaptée aux courbes discrètes non uniformément bruitées. Partant de ces limites, nous avons proposé une méthode, non heuristique et sans paramètre, basée sur une approche de géométrie discrète de décomposition de courbes en une suite de structures discrètes, nommée *la couverture tangentielle adaptative*. Plusieurs estimateurs géométriques (normales, périmètre du contour, zones convexes/concaves, *etc.*) et des applications (détection des points dominants, simplification polygonale, classification des formes, *etc.*) ont été proposés avec cette structure discrète. Les résultats expérimentaux démontrent l'efficacité et la robustesse de la méthode proposée et les comparaisons avec d'autres méthodes sont aussi prometteuses. Cette thèse est aussi en lien avec une collaboration avec **Jadavpur University, West Bengal, Kolkata, Inde** sur un projet lié au langage des signes et à la reconnaissance des gestes de la main.

Hayat Nasser a soutenu sa thèse le 30 octobre 2018 [T2]. Sept articles ont été publiés : [J6], [J7], [C21], [C22], [C23], [C24] et [C25].

B.4.3 Co-encadrements de Master 2 (8)

- **Stage de Master 2—Recherche de Paul Georges (de avril au septembre 2022)**

Encadrants : Philippe Even (50%) et Phuc Ngo (50%)

Titre : *Extraction de pistes forestières de données LiDAR par apprentissage profond*

L'objectif de ce stage était d'étudier des méthodes basées sur des réseaux de neurones profonds pour l'extraction des pistes forestières à partir de données LiDAR. Les résultats obtenus sont à comparer avec ceux de la méthode développée dans [C7] pour évaluer les performances en temps d'exécution et en qualité de détection. Avec des architectures développées, nous suggérons de les utiliser pour optimiser le paramétrage des algorithmes existants pour l'extraction d'autre types de structures linéaires à partir de données LiDAR [C4].

- **Stage de Master 2—Recherche de Aude Marêché (de mars au septembre 2022)**

Encadrants : Fabien Feschet (33%), Isabelle Debled-Rennesson (33%) et Phuc Ngo (33%)

Titre : *Estimateurs géométriques avec la décomposition sectorielle d'une surface digitale*

Ce stage s'inscrit dans la suite des travaux de stage de Baptiste Millotte pour la décomposition d'une surface en secteurs planaires afin de déduire des informations locales de la surface. Issue de la première étude, l'approche nécessite plusieurs paramètres : la taille du voisinage, l'épaisseur des secteurs, *etc.* Le résultat de la décomposition dépend fortement du choix de ces paramètres. Dans ce stage, nous étudions plus en profondeur cet aspect afin de mieux étudier la surface et le type de zone considérée (plane, concave ou convexe). De plus, nous cherchons à étudier différents estimateurs géométriques à partir des secteurs obtenus, et également des propriétés de convergence asymptotique de ces estimateurs.

- **Stage de Master 2—Recherche de Baptiste Millotte (de mars à août 2021)**
Encadrants : Fabien Feschet (33%), Isabelle Debled-Rennesson (33%) et Phuc Ngo (33%)
Titre : *Approches locales sectorielles pour l'étude de surfaces discrètes*
 L'objectif de ce stage était d'étudier une nouvelle approche pour la structuration des voisinages locaux sur une surface digitale. Elle se base sur la décomposition d'un voisinage géodésique ou quasi-géodésique en secteurs afin d'étudier par secteur les estimations locales de planéité, ou de normalité. Elle permet aussi d'étudier le champ normal d'une surface et d'en proposer des régularisations.
- **Stage de Master 2—Recherche de Hugo Ambrozik (de mars à septembre 2021)**
Encadrantes : Isabelle Debled-Rennesson (50%) et Phuc Ngo (50%)
Titre : *Estimateurs géométriques de courbes discrètes 3D bruitées*
 Un outil récemment développé dans l'équipe, appelé la couverture tangentielle adaptative [J7], permet d'analyser des courbes 2D irrégulièrement bruitées. Ce stage avait pour objectif d'étendre cette notion aux courbes 3D et de définir ainsi des estimateurs géométriques adaptés aux courbes 3D bruitées comme la longueur, la tangente, la courbure ainsi que la simplification et la décomposition de courbes 3D.
- **Stage de Master 2—Recherche de Gaëtan Pelte (de mars à septembre 2020)**
Encadrants : Philippe Even (50%) et Phuc Ngo (50%)
Titre : *Détection de segments droits épais dans des images en niveaux de gris*
 FBSD (Fast Blurred Segment Detector) est un outil de détection de segments droits épais basé sur des outils de géométrie discrète (segments flous, scans directionnels). L'objectif de ce stage était d'accroître les performances du détecteur de segments droits FBSD par une sélection de graines issues d'une analyse locale du gradient visant à fiabiliser la phase d'initialisation, et par l'intégration d'une détection de fausses alarmes basée sur une approche probabiliste pour accroître la précision du détecteur.
- **Stage de Master 2—Recherche de Alexis Barthelemy (de mars à septembre 2020)**
Encadrantes : Isabelle Debled-Rennesson (50%) et Phuc Ngo (50%)
Titre : *Reconstruction de section de bois à partir des planches*
 Ce stage avait pour objectif de retrouver la position des planches de bois dans la section du billon. Plus précisément, nous avons en entrée deux jeux d'images : un correspond aux billons avant le débit et un autre correspond aux tas de planches obtenues après le débit. En sortie, nous voulons savoir la position des planches par rapport aux billons et afficher dans l'image de résultat, pour chaque section, des planches trouvées et remises dans le repère du billon.
- **Stage de Master 2—Recherche de Florian Delconte (de mars à septembre 2019)**
Encadrantes : Isabelle Debled-Rennesson (50%) et Phuc Ngo (50%)
Titre : *Mesures géométriques sur les image de grumes de bois*
 Dans ce stage, nous nous sommes intéressés à l'estimation de la qualité des grumes issues des images de ses extrémités acquises en forêt. Plus précisément, nous avons extrait di-

rectement, à partir d'images de grumes, des caractéristiques ainsi qu'effectués des mesures numériques sur le bois par exemple le diamètre, la longueur des fissures, le rayons des cercles de croissance et leurs distance, la surface de la grume, *etc.*

- **Stage de Master 2–Recherche de Hong Thuy Dao (d'octobre 2017 à mars 2018)**

Encadrantes : Isabelle Debled-Rennesson (10%) et Phuc Ngo (90%)

Titre : *Étude de la structure hiérarchique des objets discrets non convexes*

Basé sur un travail préliminaire [C20], nous avons proposé une caractérisation, nommée *la quasi-régularité*, pour les objets discrets convexes dans les images numériques permettant de préserver non seulement la géométrie mais aussi la topologie par les transformations rigides. Un schéma algorithmique a été également présenté afin d'appliquer des transformations rigides permettant la préservation de ces propriétés pour les objets quasi-réguliers. L'objectif de ce stage était d'étendre la méthode proposée aux objets non convexes via l'utilisation de la structure de l'arbre de concavité. Ce travail a fait l'objet d'un papier [N6] présenté à la Journée du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique (GTMG).

B.4.4 Autres encadrements (9)

- **Stage de Master 1–Recherche de Morgan Mellinger, Kevin Engrand, Lyndsay Noyer (de janvier à mai 2022)**

Encadrante : Phuc Ngo (100%)

Titre : *Voxelisation surfacique et solide d'un maillage*

Dans ce stage, nous nous sommes intéressés à la discrétisation des maillages fermés simples. En particulier, on cherche à implémenter la voxelisation surfacique avec le modèle de plus proche voisin et la voxelisation solide, appelée aussi discrétisation gaussienne, avec la méthode du lancer de rayon et la vérification de la parité (parity-count method).

- **Stage de Master 1–Recherche de Maela Laconi, Nada Madad, Linda Battikh (de février à mai 2021)**

Encadrante : Phuc Ngo (100%)

Titre : *Reconstruction de droite pour une extraction des tableaux*

Les tableaux sont un moyen très courant d'organiser les informations dans des documents structurés. Dans ce stage, on s'intéresse à l'extraction de tableaux contenus dans des images scannées de documents où le bruit d'acquisition peut conduire à des lignes brisées. La réalisation du travail a consisté à développer une méthode pour les différentes tâches liées à la reconnaissance des tableaux et formulaires dans des images de documents.

- **Stage de Master 1–Recherche de Adham Badawy, Alexis Liaud, Jordan Scherring (de février à mai 2021)**

Encadrante : Phuc Ngo (100%)

Titre : *Construction de courbes de niveau en 2D et 3D*

Dans ce stage, nous nous sommes intéressés aux algorithmes permettant de construire les courbes de niveau, appelés aussi courbes isovaleurs d'un champ scalaire, et plus particulièrement l'algorithme marching squares en 2D et marching cubes en 3D. Le stage consistait à implémenter ces deux méthodes en utilisant le LUT (Look-Up-Table) et différentes méthodes d'interpolation comme l'interpolation linéaire, bilinéaire, cubique, *etc.*

- **Stage de Master 1–Recherche de Alexis Cesaro, Mathieu Levy, Brandon Hornberck (de janvier à mai 2020)**

Encadrants : Bertrand Kerautret (33%), Philippe Even (33%) et Phuc Ngo (33%)

Titre : *Outil de visualisation interactive pour la segmentation des réseaux vasculaires*

Dans ce stage, nous avons proposé de réaliser une nouvelle interface d'édition et d'annotation de réseaux vasculaires hépatiques. L'idée de cette interface était de permettre à l'utilisateur de (1) visualiser le réseau vasculaire en train d'être extrait ; (2) être guidé pour l'extraction du réseau (avec la possibilité de sélectionner un nœud de l'arbre à éditer) et (3) annoter le centre des vaisseaux sur des sections orthogonales à l'axe principal.

- **Stage de Master 1–Recherche de Yann Cael, Gaetan Pelte et Bryan Virte (de janvier à mai 2019)**

Encadrante : Phuc Ngo (100%)

Titre : *Voxelisation solide d'un objet à partir d'un maillage*

L'objectif de ce stage était d'implémenter la discrétisation gaussienne pour des maillages fermés simples. Pour cela, nous avons mis en place un outil basé sur la méthode de lancer de rayon avec la vérification de la parité (parity-count method). Afin d'optimiser l'espace mémoire utilisé pour les objets de haute résolution, nous considérons une approche de voxelisation solide à base d'octree.

- **Stage Ingénieur – École des Mines de Nancy, Parcours Recherche de Anas El Moussaoui (d'octobre à juin 2019)**

Encadrante : Phuc Ngo (100%)

Titre : *Discrétisation gaussienne des objets polyédraux et réparation de la non régularité*

Ce stage continua le travail préliminaire présenté en conférence [C17] sur l'extension de la quasi-régularité en 3D pour la préservation des propriétés topologiques et géométriques des objets polyédraux, appelé aussi *maillage*, par des transformations rigides discrètes. Plus précisément, la vérification de la condition de quasi-régularité est réalisé pour la préservation topologique et géométrique des maillages par la discrétisation gaussienne et les transformations rigides discrètes. De plus, nous nous sommes intéressés également à la réparation des maillages non quasi-réguliers.

- **Stage de Master 1–Recherche de Florent Nosari et Oussama Zekri (de janvier à mai 2017)**

Encadrante : Phuc Ngo (100%)

Titre : *Approximation polygonale et comparaison de formes*

Ce stage était en lien avec la thèse de H. Nasser décrite précédemment et une collaboration avec Jadavpur University, Inde. L'objectif de ce stage était d'explorer quelques méthodes de simplification polygonale et la représentation des formes afin de pouvoir les comparer quasi instantanément. La motivation de cette étude repose sur la recherche de la traduction en temps réel du langage des signes. Les résultats préliminaires ont permis de mettre en concurrence plusieurs méthodes de simplification en les comparant aux résultats avec une méthode d'apprentissage.

- **Stage de Master 1–Recherche de Nicolas Anduze et Loïc Hormain (de janvier à mai 2016)**

Encadrant : Phuc Ngo (100%)

Titre : *Débruitage d'images par patches avec approche discrète*

Ce stage avait pour objectif d'explorer les techniques de débruitage non locales, notamment le débruitage par patches. En particulier, nous nous sommes intéressés à l'étude d'une approche discrète avec l'utilisation du graphe des transformations rigides discrètes proposé pendant ma thèse.

- **Stage Ingénieur – Telecom Nancy de Damien Kemberg (de juin à juillet 2017)**

Encadrant : Phuc Ngo (100%)

Titre : *Modélisation de déplacement des matériaux granulaires par une structure de graphe*

Ce stage était en lien avec une collaboration du laboratoire Sols, Solides, Structures, Risques (3SR) et du Laboratoire d'Informatique Gaspard-Monge (LIGM) dans le cadre de l'étude des déplacements de matériaux granulaires sous déformation. L'objectif de ce stage était de développer une application permettant de modéliser la relation entre ces objets granulaires et de simuler ce phénomène via des graphes modélisant l'évolution de leurs contacts.

De plus, j'ai aussi encadré en stage des étudiants venant de Licence 3 (**1 étudiant**), de l'IUT (**2 étudiants**) et de la prépa des INP (**2 étudiants**). L'objectif de ces stages était de permettre aux étudiants de découvrir le monde de la recherche et son fonctionnement.

Références externes

- [1] CGAL : The computational geometry algorithms library, <http://www.cgal.org>
- [2] DGtal : Digital Geometry tools and algorithms library, <https://dgtal.org/>
- [3] DGtalTools project : Tools associated with dgtal library, <https://github.com/DGtal-team/DGtalTools>
- [4] Weka : Fibonacci notes, <http://www.cs.waikato.ac.nz/ml/weka/downloading.html>
- [5] Classement qualitatif des bois ronds résineux - partie 1 : épicéas et sapins. Tech. rep., FNOR, Norme (2008)
- [6] Connaître les défauts du bois. Tech. rep., Association ouvrière des compagnons du devoir du tour de France (2012)
- [7] Feuillus - classement qualitatif - partie 1 : chêne et hêtre. Tech. rep., FNOR, Norme (2012)
- [8] Abhishek, K., Hamarneh, G. : Matthews correlation coefficient loss for deep convolutional networks : Application to skin lesion segmentation. In : Int. Symposium on Biomedical Imaging (ISBI). pp. 225–229 (2021)
- [9] Agresti, G., Bonifazi, G., Calienno, L., Capobianco, G., Lo Monaco, A., Pelosi, C., Picchio, R., Serranti, S. : Surface investigation of photo-degraded wood by colour monitoring, infrared spectroscopy, and hyperspectral imaging. *Journal of Spectroscopy* 2013 (2013)
- [10] Aguilera-Aguilera, E., Carmona-Poyato, A., Madrid-Cuevas, F., Medina-Carnicer, R. : The computation of polygonal approximations for 2D contours based on a concavity tree. *J. of Visual Communication and Image Representation* 25(8), 1905–1917 (2014)
- [11] Akachuku, A., Abolarin, D. : Variations in pith eccentricity and ring width in teak (*tectona grandis* Lf). *Trees* 3(2), 111–116 (1989)
- [12] Akinlar, C., Topal, C. : EDPF : a real-time parameter-free edge segment detector with a false detection control. *Int. J. of Pattern Recognition and Artificial Intelligence* 26(01), 1255002 (2012)
- [13] Akinlar, C., Topal, C. : Edcircles : A real-time circle detector with a false detection control. *Pattern Recognition* 46(3), 725–740 (2013)
- [14] Almazàn, E.J., Tal, R., Qian, Y., Elder, J.H. : MCMLSD : a dynamic programming approach to line segment detection. In : *Computer Vision and Pattern Recognition*. pp. 2031–2039 (2017)
- [15] Andrei, G., Alexander, B. : Complexity and dna curvature. *J. of Computational Chemistry* 23(3–4), 263–274 (1999)
- [16] Andres, E. : The quasi-shear rotation. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. vol. LNCS 1176, pp. 307–314 (1996)

- [17] Andres, E. : The quasi-shear rotation. In : Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI). vol. LNCS 1176, pp. 307–314 (1996)
- [18] Andres, E. : Hierarchical topological structure for the design of a discrete modeling tool (2006)
- [19] Andres, E., Breton, R., Lienhardt, P. : Spamod : Design of a spatial modeling tool. pp. 91–107 (2000)
- [20] Andres, E., Dutt, M., Biswas, A., Largeteau-Skapin, G., Zrour, R. : Digital two-dimensional bijective reflection and associated rotation. In : Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI). pp. 3–14 (2019)
- [21] Anglin, W.S. : Using Pythagorean triangles to approximate angles. American Mathematical Monthly 95(6), 540–541 (1988)
- [22] Arkin, E.M., Chew, L.P., Huttenlocher, D.P., Kedem, K., Mitchell, J.S.B. : An efficiently computable metric for comparing polygonal shapes. In : The First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. p. 129–137. SODA '90 (1990)
- [23] Attali, D., Boissonnat, J.D., Edelsbrunner, H. : Stability and Computation of Medial Axes : a State-of-the-Art Report. In : Mathematical Foundations of Scientific Visualization, Computer Graphics, and Massive Data Exploration, pp. 109–125. Mathematics and Visualization (2009)
- [24] Attneave, E. : Some informational aspects of visual perception. Psychological Review 61(3), 183–193 (1954)
- [25] Axelsson, P. : DEM generation from laser scanner data using adaptive TIN models. Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing XXXIII(B4/1), 110–117 (2000)
- [26] Badrinarayanan, V., Kendall, A., Cipolla, R. : Segnet : A deep convolutional encoder-decoder architecture for image segmentation. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence 39(12), 2481–2495 (2017)
- [27] Bai, X., Latecki, L.J. : Path similarity skeleton graph matching. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence 30(7), 1282–1292 (2008)
- [28] Ballard, D.H. : Generalizing the hough transform to detect arbitrary shapes. Pattern recognition 13(2), 111–122 (1981)
- [29] Barber, C.B., Dobkin, D.P., Huhdanpaa, H. : The quickhull algorithm for convex hulls. ACM Trans. on Mathematical Software 22(4), 469–483 (1996)
- [30] Bazin, P.L., Ellingsen, L.M., Pham, D.L. : Digital homeomorphisms in deformable registration. In : Information Processing in Medical Imaging (IPMI). vol. LNCS 4584, pp. 211–222 (2007)
- [31] Bazin, P.L., Pham, D.L. : Topology-preserving tissue classification of magnetic resonance brain images. IEEE Trans. on Medical Imaging 26, 487–496 (2007)
- [32] Belongie, S., Malik, J., Puzicha, J. : Shape matching and object recognition using shape contexts. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence 24(4), 509–522 (2002)
- [33] Berenstein, C.A., Lavine, D. : On the number of digital straight line segments. IEEE Trans. on pattern analysis and machine intelligence 10(6), 880–887 (1988)
- [34] Berg, A.C., Malik, J. : Shape Matching and Object Recognition, pp. 483–507 (2006)
- [35] Bertrand, G., Everat, J.C., Couprie, M. : Image segmentation through operators based on topology. J. Electron Imaging 6, 395–405 (1997)

-
- [36] Bertrand, G., Couprie, M., Passat, N. : A note on 3-D simple points and simple-equivalence. *Information Processing Letters* 109(13), 700–704 (2009)
 - [37] Bhandarkar, S.M., Faust, T.D., Tang, M. : A system for detection of internal log defects by computer analysis of axial ct images. In : *IEEE Workshop on Applications of Computer Vision (WACV)*. p. 258 (1996)
 - [38] Bhowmick, P., Bhattacharya, B.B. : Fast polygonal approximation of digital curves using relaxed straightness properties. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 29(9), 1590–1602 (2007)
 - [39] Bloch, I., Pescatore, J., Garnero, L. : A new characterization of simple elements in a tetrahedral mesh. *Graphical Models* 67(4), 260–284 (2005)
 - [40] Blot, V., Coeurjolly, D. : Quasi-affine transformation in higher dimension. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. pp. 493–504 (2009)
 - [41] Blum, H. : A transformation for extracting new descriptors of shape. In : *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, pp. 362–380 (1967)
 - [42] Blum, H. : An Associative Machine for Dealing with the Visual Field and Some of Its Biological Implications, pp. 244–260 (1962)
 - [43] Bolshoy, A., McNamara, P., Harrington, R., Trifonov, E. : Curved dna without a-a : Experimental estimation of all 16 dna wedge angles. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 88, 2312–6 (1991)
 - [44] Borgefors, G., di Baja, G.S. : Analyzing nonconvex 2D and 3D patterns. *Computer Vision and Image Understanding* 63(1), 145–157 (1996)
 - [45] Borianne, P., Pernaumat, R., Subsol, G. : Automated delineation of tree-rings in x-ray computed tomography images of wood. pp. 437–440 (2011)
 - [46] Boukadida, H., Longuetaud, F., Colin, F., Freyburger, C., Constant, T., Leban, J., Mothe, F. : Pithextract : A robust algorithm for pith detection in computer tomography images of wood—application to 125 logs from 17 tree species. *Computers and electronics in agriculture* 85, 90–98 (2012)
 - [47] Boulch, A. : Convpoint : Continuous convolutions for point cloud processing. *Computers & Graphics* (2020)
 - [48] Bowman, E.T., Soga, K., Drummond, W. : Particle shape characterisation using fourier descriptor analysis. *Géotechnique* 51(6), 545–554 (2001)
 - [49] Braga-Neto, U. : A theoretical tour of connectivity in image processing and analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 19, 5–31 (2003)
 - [50] Breuils, S., Kenmochi, Y., Sugimoto, A. : Visiting bijective digitized reflections and rotations using geometric algebra. In : *Discrete Geometry and Mathematical Morphology (GDMM)*. vol. LNCS 12708, pp. 242–254 (2021)
 - [51] Briand, C.H., Brazer, S.E., Harter-Dennis, J.M. : Tree Rings and the Aging of Trees : A Controversy in 19th Century America. *Tree-Ring Research* 62(2), 51 – 65 (2006)
 - [52] Brimkov, V., Coeurjolly, D., Klette, R. : Digital Planarity - A Review. *Discrete Applied Mathematics* 155(4), 468–495 (2007)
 - [53] Brlek, S., Lachaud, J., Provençal, X., Reutenauer, C. : Lyndon + christoffel = digitally convex. *Pattern Recognition* 42(10), 2239–2246 (2009)

- [54] Burguet, J., Malgouyres, R. : Strong thinning and polyhedric approximation of the surface of a voxel object. *Discrete Applied Mathematics* 125(1), 93–114 (2003), *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*
- [55] Buzer, L. : A linear incremental algorithm for naive and standard digital lines and planes recognition. *Graphical Models* 65(1), 61–76 (2003)
- [56] Buzer, L. : A composite and quasi linear time method for digital plane recognition. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. pp. 331–342 (2006)
- [57] Carpenter, R.D., Sonderman, D.L., Rast, E., Jones, M. : Defects in hardwood timber. In : *Environmental Science* (1989)
- [58] Carpentier, M., Giguère, P., Gaudreault, J. : Tree species identification from bark images using convolutional neural networks. In : *IEEE Intelligent Robots and Systems (IROS)*. pp. 1075–1081 (2018)
- [59] Challis, K., Forlin, P., Kinney, M. : A generic toolkit for the visualisation of archaeological features on airborne LiDAR elevation data. *Archaeological Prospection* 18(4), 279–289 (2011)
- [60] Charrier, E., Buzer, L. : An efficient and quasi linear worst-case time algorithm for digital plane recognition. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. pp. 346–357 (2008)
- [61] Charrier, E., Lachaud, J.O. : Maximal planes and multiscale tangential cover of 3D digital objects. In : *Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA)*. vol. 6636, pp. 132–143 (2011)
- [62] Chassery, J.M., Montanvert, A. : *Géométrie discrète en analyse d’images* (1991)
- [63] Chaussard, J., Couprie, M., Talbot, H. : A discrete lambda-medial axis. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. pp. 421–433 (2009)
- [64] Chen, K. : Adaptive smoothing via contextual and local discontinuities. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 27(10), 1552–1567 (2005)
- [65] Chen, Q.s., Defrise, M., Deconinck, F. : Symmetric phase-only matched filtering of fourier-mellin transforms for image registration and recognition. *IEEE Trans. on pattern analysis and machine intelligence* 16(12), 1156–1168 (1994)
- [66] Clode, S., Kootsookos, P., Rottensteiner, F. : The automatic extraction of roads from LiDAR data. *Int. Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences* 34(B7) (2004)
- [67] Coeurjolly, D. : Algorithmique et géométrie discrète pour la caractérisation des courbes et des surfaces. Ph.D. thesis, Université Lumière Lyon 2 (2002)
- [68] Coeurjolly, D., Brimkov, V. : Computational aspects of Digital Plane and Hyperplane Recognition. In : *Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA)*. vol. LNCS 4040, pp. 191–204 (2006)
- [69] Coeurjolly, D., Kerautret, B., Lachaud, J.O. : Extraction of Connected Region Boundary in Multidimensional Images. *Image Processing On Line* 4, 30–43 (2014)
- [70] Coeurjolly, D., Klette, R. : A comparative evaluation of length estimators of digital curves. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 26(2), 252–258 (2004)
- [71] Coeurjolly, D., Lachaud, J.O., Levallois, J. : Integral based Curvature Estimators in Digital Geometry. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. vol. LNCS 7749, pp. 215–227 (2013)

-
- [72] Coeurjolly, D., Lachaud, J.O., Roussillon, T. : Multigrid convergence of discrete geometric estimators. In : *Digital Geometry Algorithms. Theoretical Foundations and Applications to Computational Imaging*, pp. 395–424 (2012)
 - [73] Coeurjolly, D., Miguet, S., Tougne, L. : Discrete curvature based on osculating circle estimation. In : *Visual Form 2001*. pp. 303–312 (2001)
 - [74] Coeurjolly, D., Montanvert, A., Chassery, J.M. : *Géométrie discrète et images numériques. Collection Traité IC2 - Traitement du signal et de l'image*, Hermès, Lavoisier (2007)
 - [75] Coeurjolly, D., Svensson, S. : Estimation of curvature along curves with application to fibres in 3D images of paper. In : *Scandinavian Conference on Image Analysis*. vol. LNCS 2749, pp. 247–254 (2003)
 - [76] Cointepas, Y., Bloch, I., Garnero, L. : A cellular model for multi-objects multi-dimensional homotopic deformations. *Pattern Recognition* 34(9), 1785–1798 (2001)
 - [77] Colin, F., Rania, M., Dhôte, J.F., Florence, F. : Epicormic ontogeny on quercus petraea trunks and thinning effects quantified with the epicormic composition. *Annals of Forest Science* 67, 813 (2010)
 - [78] Conner, W., Schowengerdt, R., Munro, M., Hughes, M. : Design of a computer vision based tree ring dating system. In : *1998 IEEE Southwest Symposium on Image Analysis and Interpretation (Cat. No.98EX165)*. pp. 256–261 (1998)
 - [79] Cordella, L., Vento, M. : Symbol recognition in documents : a collection of techniques ? *Int. Journal on Document Analysis and Recognition* 3(2), 73–88 (2000)
 - [80] Couprie, M., Bertrand, G. : New characterizations of simple points in 2D, 3D, and 4D discrete spaces. *IEEE Trans. Pattern Analysis* 31(4), 637–648 (2009)
 - [81] Couprie, M., Bezerra, F.N., Bertrand, G. : Topological operators for grayscale image processing. *J Electron Imaging* 10(4), 1003–1015 (2001)
 - [82] Couprie, M., Bezerra, F.N., Bertrand, G. : A parallel thinning algorithm for grayscale images. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. vol. LNCS 7749, pp. 71–82 (2013)
 - [83] Cristescu, G., Lupsa, L. : *Non-Connected Convexities and Applications*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, Springer (2002)
 - [84] Cuel, L., Lachaud, J., Mérigot, Q., Thibert, B. : Robust geometry estimation using the generalized voronoi covariance measure. *SIAM J. Imaging Sciences* 8(2), 1293–1314 (2015)
 - [85] Dalal, N., Triggs, B. : Histograms of Oriented Gradients for Human Detection. In : Schmid, C., Soatto, S., Tomasi, C. (eds.) *IEEE on Computer Vision & Pattern Recognition (CVPR)*. vol. 1, pp. 886–893. San Diego, United States (2005)
 - [86] Dalal, N., Triggs, B., Schmid, C. : Human detection using oriented histograms of flow and appearance. In : *European conference on computer vision*. pp. 428–441 (2006)
 - [87] Damiand, G., Dupas, A., Lachaud, J.O. : Fully deformable 3D digital partition model with topological control. *Pattern Recog. Letters* 32(9), 1374–1383 (2011)
 - [88] David, N., Mallet, C., Pons, T., Chauve, A., Bretar, F. : Pathway detection and geometrical description from ALS data in forested montaneous areas. *Int. Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences* 38(3/W8), 242–247 (2009)
 - [89] Davies, E.R., Plummer, A.P. : Thinning algorithms : A critique and a new methodology. *Pattern Recogn* 14(16), 53–63 (1981)

- [90] De Vieilleville, F., Lachaud, J.O., Feschet, F. : Maximal digital straight segments and convergence of discrete geometric estimators. In : Scandinavian Conference on Image Analysis (SCIA2005). vol. LNCS 3540, pp. 988–1003 (2005)
- [91] Debled-Rennesson, I., Feschet, F., Rouyer-Degli, J. : Optimal blurred segments decomposition of noisy shapes in linear time. *Computers & Graphics* 30(1), 30–36 (2006)
- [92] Debled-Rennesson, I., Rémy, J.L., Rouyer-Degli, J. : Detection of the discrete convexity of polyominoes. *Discrete Appl. Math.* 125(1), 115–133 (2003)
- [93] Debled-Rennesson, I. : Étude et reconnaissance des droites et plans discret. Ph.D. thesis, Université Louis Pasteur (1995)
- [94] Debled-Rennesson, I. : Éléments de géométrie discrète vers une étude des structures discrètes bruitées (2007), Habilitation à Diriger des Recherches, Université Henri Poincaré – Nancy I, France
- [95] Debled-Rennesson, I., Feschet, F., Rouyer-Degli, J. : Optimal blurred segments decomposition of noisy shapes in linear time. *Computers & Graphics* 30(1), 30–36 (2006)
- [96] Debled-Rennesson, I., Reveillès, J. : A linear algorithm for segmentation of digital curves. *IJPRAI* 9(4), 635–662 (1995)
- [97] Decelle, R., Jalilian, E. : Neural networks for cross-section segmentation in raw images of log ends. In : IEEE Image Processing, Applications and Systems (IPAS). pp. 131–137 (2020)
- [98] Decelle, R., Jalilian, E. : Neural networks for cross-section segmentation in raw images of log ends. In : IEEE Int. Conf. on Image Processing, Applications and Systems (IPAS). pp. 131–137 (2020)
- [99] Degen, B., Fladung, M. : Use of dna-markers for tracing illegal logging. *Landbauforschung Volkenrode* 321, 6–14 (2008)
- [100] Denis, P., Elder, J.H., Estrada, F.J. : Efficient edge-based methods for estimating Manhattan frames in urban imagery. In : European Conference on Computer Vision. vol. LNCS 5303, pp. 197–210 (2008)
- [101] Desolneux, A., Moisan, L., Morel, J.M. : From Gestalt Theory to Image Analysis : A Probabilistic Approach, *Interdisciplinary Applied Mathematics*, vol. 34 (2008)
- [102] Devereux, B., Amable, G., Crow, P., Cliff, A. : The potential of airborne lidar for detection of archaeological features under woodland canopies. *Antiquity* 79, 648–660 (2005)
- [103] Dewaele, G., Devernay, F., Horaud, R. : Hand motion from 3D point trajectories and a smooth surface model. In : European Conference on Computer Vision. pp. 495–507 (2004)
- [104] Dexet, M., Coeurjolly, D., Andres, E. : Invertible Polygonalization of 3D Planar Digital Curves and Application to Volume Data Reconstruction. In : Int. Symposium on Visual Computing. vol. LNCS 4292, pp. 514–523 (2006)
- [105] Divya, K., Kaur, S. : A study on tree rings : Dendrochronology using image processing. *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering* 1022, 012115 (2021)
- [106] Dlakic, M., Harrington, R.E. : Diamod : display and modeling of dna bending. *Bioinformatics* 14(4), 326–331 (1998)
- [107] Dorigo, M., Maniezzo, V., Colnari, A., et al. : Ant system : optimization by a colony of cooperating agents. *IEEE Trans. on Systems, man, and cybernetics, Part B : Cybernetics* 26(1), 29–41 (1996)

-
- [108] Dörksen-Reiter, H., Debled-Rennesson, I. : Convex and concave parts of digital curves. *Geometric Properties for Incomplete data* pp. 145–159 (2006)
 - [109] Dörksen-Reiter, H., Debled-Rennesson, I. : A linear algorithm for polygonal representations of digital sets. In : *Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA)*. pp. 307–319 (2006)
 - [110] Douglas, D.H., Peucker, T.K. : Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature. *Cartographica : The Int. Journal for Geographic Information and Geovisualization* 10(2), 112–122 (1973)
 - [111] Duda, O., Hart, P.E., Munson, J.H. : Graphical data processing research study and experimental investigation. Tech. Rep. AD650926, Stanford Research Institute (1967)
 - [112] Duda, R.O., Hart, P.E. : Use of the hough transformation to detect lines and curves in pictures. *Communications of the ACM* 15(1), 11–15 (1972)
 - [113] Dunham, J.G. : Optimum uniform piecewise linear approximation of planar curves. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence PAMI*-8(1), 67–75 (1986)
 - [114] Duval, J. : Factorizing words over an ordered alphabet. *Journal of Algorithms* 4(4), 363–381 (1983)
 - [115] Eckhardt, U. : Digital Lines and Digital Convexity, pp. 209–228 (2001)
 - [116] Elder, J.H., Zucker, S.W. : Local scale control for edge detection and blur estimation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 20(7), 699–716 (1998)
 - [117] Entacher, K., Planitzer, D., Uhl, A. : Towards an automated generation of tree ring profiles from ct-images. In : *Image and Signal Processing and Analysis (ISPA)*. pp. 174–179 (2007)
 - [118] Eric, A., Raj, A., Claudio, S. : Discrete analytical hyperplanes. *Graphical Models and Image Processing* 59(5), 302–309 (1997)
 - [119] Evans, J.S., Hudak, A.T. : A multiscale curvature algorithm for classifying discrete return lidar in forested environments. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing* 45(4), 1029–1038 (2007)
 - [120] Fabijanska, A., Danek, M. : Deepdendro - a tree rings detector based on a deep convolutional neural network. *Computers and Electronics in Agriculture* 150, 353–363 (2018)
 - [121] Fabijanska, A., Danek, M., Barniak, J., Piórkowski, A. : Towards automatic tree rings detection in images of scanned wood samples. *Computers and Electronics in Agriculture* 140, 279–289 (2017)
 - [122] Faghih-Roohi, S., Hajizadeh, S., Núñez, A., Babuska, R., De Schutter, B. : Deep convolutional neural networks for detection of rail surface defects. In : *Int. Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*. pp. 2584–2589 (2016)
 - [123] Faisan, S., Passat, N., Noblet, V., Chabrier, R., Meyer, C. : Topology-preserving warping of binary images according to one-to-one mappings. *IEEE Trans. on Image Processing* 20(8), 2135–2145 (2011)
 - [124] Fallah, A., Riahifar, N., Barari, K., Parsakhoo, A. : Investigating the out-of-roundness and pith-off-centre in stems of three broadleaved species in hyrcanian forests. *J. of Forensic Sciences* 58, 513–518 (2012)
 - [125] Faure, A., Buzer, L., Feschet, F. : Tangential cover for thick digital curves. *Pattern Recognition* 42(10), 2279–2287 (2009)

- [126] Fernandes, A., Louzada, J., Morais, J., Xavier, J., Pereira, J., Melo-Pinto, P. : Measurement of intra-ring wood density by means of imaging vis/nir spectroscopy (hyperspectral imaging). *Holzforschung* 67, 59–65 (2013)
- [127] Ferraz, A., Mallet, C., Chehata, N. : Large-scale road detection in forested mountainous areas using airborne topographic lidar data. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing* 112, 23–36 (2016)
- [128] Feschet, F., Tougne, L. : Optimal time computation of the tangent of a discrete curve : Application to the curvature. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. vol. LNCS 1568, pp. 31–40 (1999)
- [129] Feschet, F., Tougne, L. : On the min dss problem of closed discrete curves. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 12, 325–336 (2003), int. Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA)
- [130] Feschet, F. : Canonical representations of discrete curves. *Pattern Analysis and Applications* 8(1-2), 84–94 (2005)
- [131] Feschet, F. : Fast guaranteed polygonal approximations of closed digital curves. In : *SCIA Proceedings*. vol. LNCS 3540, pp. 910–919 (2005)
- [132] Feschet, F. : Multiscale analysis from 1d parametric geometric decomposition of shapes. In : *Int. Conf. on Pattern Recognition (ICPR)*. pp. 2102–2105 (2010)
- [133] Feschet, F. : Multiscale analysis from 1d parametric geometric decomposition of shapes. In : *IEEE Int. Conf. on Pattern Recognition*. pp. 2102–2105 (2010)
- [134] Feschet, M. : Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 22(1906), 1–72 (2008)
- [135] Fischler, M.A., Bolles, R.C. : Random sample consensus : A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. In : *Readings in Computer Vision*, pp. 726–740 (1987)
- [136] Franchi, G., Fehri, A., Yao, A. : Deep morphological networks. *Pattern Recognition* 102, 107246 (2020)
- [137] Françon, J., Papier, L. : Polyhedrization of the boundary of a voxel object. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. pp. 425–434 (1999)
- [138] Freeman, W., Adelson, E. : The design and use of steerable filters. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 13(9), 891–906 (1991)
- [139] García, N.F., Martínez, L.D., Poyato, Á.C., Madrid-Cuevas, F.J., Carnicer, R.M. : A new thresholding approach for automatic generation of polygonal approximations. *Visual Communication and Image Representation* 35, 155–168 (2016)
- [140] Gazo, R., Vanek, J., Abdul_Massih, M., Benes, B. : A fast pith detection for computed tomography scanned hardwood logs. *Computers and Electronics in Agriculture* 170, 105–107 (2020)
- [141] Georges-Leroy, M., Bock, J., Dambrine, E., Dupouey, J.L. : Contribution of lidar data to the study of land-use history in Haye forest. *ArcheoSciences* 35, 117–129 (2011)
- [142] Gérard, Y., Provot, L., Feschet, F. : Introduction to Digital Level Layers. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. pp. 83–94 (2011)
- [143] Getreuer, P. : Image interpolation with geometric contour stencils. *Image Processing On Line* 1 (2011)

-
- [144] Getreuer, P. : Linear methods for image interpolation. *Image Processing On Line* 1, 238–259 (2011)
 - [145] Gilbert, G.S., Ballesteros, J.O., Barrios-Rodriguez, C.A., Bonadies, E.F.*et al.* : Use of Sonic Tomography to Detect and Quantify Wood Decay in Living Trees. *Applications in Plant Sciences* 4(12) (2016)
 - [146] Gilles, B. : On P-simple points. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique* I(321), 1077–1084 (1995)
 - [147] Gilles, B. : On the dynamics. *Image Vision Comput.* 25(4), 447–454 (2007)
 - [148] Gilles, B., Grégoire, M. : A new characterization of three-dimensional simple points. *Pattern Recog. Letters* 15(2), 169–175 (1994)
 - [149] Gioi, R.G.v., Jakubowicz, J., Morel, J.M., Randall, G. : LSD : A fast line segment detector with a false detection control. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 32(4), 722–732 (2010)
 - [150] Gonzalez, R.C., Woods, R.E. : *Digital Image Processing* (3rd Edition). Prentice-Hall, Inc. (2006)
 - [151] González, R.C., Woods, R.E.W. : *Digital Image Processing*. Pearson Prentice Hall (2008)
 - [152] Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A. : *Deep Learning*. MIT Press (2016)
 - [153] Gou, J., Yu, B., Maybank, S.J., Tao, D. : Knowledge distillation : A survey. *Inter. J. of Computer Vision* 129(6), 1789–1819 (2021)
 - [154] Gross, A., Latecki, L.J. : Digitizations preserving topological and differential geometric properties. *Computer Vision and Image Understanding* 62(3), 370–381 (1995)
 - [155] Guanghui, L., Chuanbo, C. : A new approach for polygonal approximation of shape contours using genetic algorithm. In : 2007 2nd IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications. pp. 763–768 (2007)
 - [156] Guihéneuf, P.A. : Discretizations of isometries. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. pp. 71–92 (2016)
 - [157] Guillemin, V., Pollack, A. : *Differential Topology*. AMS Chelsea Publishing (1974)
 - [158] Guitard, D. : *Mécanique du matériau bois et composites*. Cépaduès éditions (1987)
 - [159] Gélard, W., Herbulot, A., Devy, M., Casadebaig, P. : 3D leaf tracking for plant growth monitoring. In : *IEEE Int. Conf. on Image Processing (ICIP)*. pp. 3663–3667 (2018)
 - [160] Hakli, J., Sirkka, A., Jaakkola, K., Puntanen, V., Nummala, K. : Challenges and possibilities of rfid in the forest industry. In : *Radio Frequency Identification from Systems to Applications* (2013)
 - [161] Han, X., Xu, C., Prince, J.L. : A topology preserving level set method for geometric deformable models. *IEEE Trans. on Pattern Analysis* 25(6), 755–768 (2003)
 - [162] Hanning, T., Kickingeder, R., Casasent, D. : Determining the average annual ring width on the front side of lumber. In : *Optical Measurement Systems for Industrial Inspection III*. vol. 5144, pp. 707–717 (2003)
 - [163] Hardy, G., Wright, E. : *An introduction to the theory of numbers* (1989)
 - [164] Hasegawa, M., Tabbone, S. : Amplitude-only log radon transform for geometric invariant shape descriptor. *Pattern Recognition* 47(2), 643–658 (2014)
 - [165] He, K., Gkioxari, G., Dollár, P., Girshick, R. : Mask r-cnn. In : *Inter. Conf. on computer vision*. pp. 2961–2969 (2017)

- [166] He, K., Zhang, X., Ren, S., Sun, J. : Deep residual learning for image recognition. In : 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). pp. 770–778 (2016)
- [167] He, T., Liu, Y., Yu, Y., Zhao, Q., Hu, Z. : Application of deep convolutional neural network on feature extraction and detection of wood defects. *Measurement* 152, 107357 (2020)
- [168] Heijmans, H.J.A.M., Ronse, C. : The algebraic basis of mathematical morphology. I. Dilations and erosions. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50(3), 245–295 (1990)
- [169] Herman, G.T. : *Geometry of Digital Spaces*. Springer (1998)
- [170] Hilaire, X., Tombre, K. : Robust and accurate vectorization of line drawings. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 28(6), 890–904 (2006)
- [171] Hirose, K., Saito, H. : Fast line description for line-based SLAM. In : *British Machine Vision Conference* (2012)
- [172] Hisada, M., Belyaev, A.G., Kunii, T.L. : A Skeleton-based Approach for Detection of Perceptually Salient Features on Polygonal Surfaces. *Computer Graphics Forum* (2002)
- [173] Hoang, T.V., Tabbone, S. : The generalization of the r-transform for invariant pattern representation. *Pattern Recognition* 45(6), 2145–2163 (2012)
- [174] Hoang, T.V., Tabbone, S. : Invariant pattern recognition using the rfm descriptor. *Pattern Recognition* 45(1), 271–284 (2012)
- [175] Hoffmann, C.M. : *Geometric and Solid Modeling*. Morgan-Kaufmann (1989)
- [176] Hong, L., Wan, Y., Jain, A. : Fingerprint image enhancement : algorithm and performance evaluation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 20(8), 777–789 (1998)
- [177] Howard, A.G., Zhu, M., Chen, B., Kalenichenko, D., Wang, W., Weyand, T., Andreetto, M., Adam, H. : Mobilenets : Efficient convolutional neural networks for mobile vision applications. *arXiv :1704.04861* (2017)
- [178] Hu, J., Shen, L., Sun, G. : Squeeze-and-excitation networks. In : *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*. pp. 7132–7141 (2018)
- [179] Hu, M.K. : Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE Trans. on Information Theory* 8(2), 179–187 (1962)
- [180] Huang, S.C. : Polygonal approximation using an artificial bee colony algorithm. *Mathematical Problems in Engineering* 2015, 1–10 (2015)
- [181] Huang, S.C., Sun, Y.N. : Polygonal approximation using genetic algorithms. *Pattern Recognition* 32(8), 1409–1420 (1999)
- [182] Iglovikov, V., Shvets, A. : Terausnet : U-net with VGG11 encoder pre-trained on imagenet for image segmentation. *CoRR abs/1801.05746* (2018)
- [183] Inglada, J., Michel, J. : Qualitative spatial reasoning for high-resolution remote sensing image analysis. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing* 47(2), 599–612 (2009)
- [184] Jacob-Da Col, M., Mazo, L. : nD quasi-affine transformations. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. vol. LNCS 9647, pp. 337–348 (2016)
- [185] Jacques-Olivier, L. : An alternative definition for digital convexity. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* (2022)

-
- [186] Jonathan David, C. : Appearance-preserving simplification of polygonal models. Ph.D. thesis, University of North Carolina at Chapel Hill (1998)
 - [187] Jones, A.F., Brewer, P.A., Johnstone, E., Macklin, M.G. : High-resolution interpretative geomorphological mapping of river valley environments using airborne LiDAR data. *Earth Surface Processes and Landforms* 32, 1574–1592 (2007)
 - [188] Kalle, M., Ojala, P., Martti, M. : Spectral reflectances of log ends for camera based annual ring width measurements. 19th IMEKO World Congress 2009 2 (2009)
 - [189] Kang, G., Li, J., Tao, D. : Shakeout : A new approach to regularized deep neural network training. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 40(5), 1245–1258 (2018)
 - [190] Kanungo, T. : Document Degradation Models and a Methodology for Degradation Model Validation. Ph.D. thesis, University of Washington (1996)
 - [191] Kennel, P., Borianne, P., Subsol, G. : An automated method for tree-ring delineation based on active contours guided by DT-CWT complex coefficients in photographic images : Application to *Abies alba* wood slice images. *Computers and Electronics in Agriculture* 118, 204–214 (2015)
 - [192] Kerautret, B., Krähenbühl, A., Debled-Rennesson, I., Lachaud, J.O. : Centerline detection on partial mesh scans by confidence vote in accumulation map. In : *Int. Association of Pattern Recognition*. pp. 1376–1381 (2016)
 - [193] Kerautret, B. : Analyse d’objets discrets pour l’estimation géométrique et la détection d’échelle (2017), Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Lorraine, France
 - [194] Kerautret, B., Even, P. : Blurred segments in gray level images for interactive line extraction. In : *Workshop on Combinatorial Image Analysis*. vol. LNCS 5852, pp. 176–186 (2009)
 - [195] Kerautret, B., Krähenbühl, A., Debled-Rennesson, I., Lachaud, J.O. : 3D geometric analysis of tubular objects based on surface normal accumulation. In : *Image Analysis and Processing* (2015)
 - [196] Kerautret, B., Krähenbühl, A., Debled-Rennesson, I., Lachaud, J.O. : On the implementation of centerline extraction based on confidence vote in accumulation map. In : *Reproducible Research in Pattern Recognition (RRPR)*. pp. 116–130 (2016)
 - [197] Kerautret, B., Lachaud, J.O. : Multi-scale analysis of discrete contours for unsupervised noise detection. In : *Combinatorial Image Analysis*. pp. 187–200 (2009)
 - [198] Kerautret, B., Lachaud, J.O. : Meaningful Scales Detection along Digital Contours for Unsupervised Local Noise Estimation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 34(12), 2379–2392 (2012)
 - [199] Kerautret, B., Lachaud, J.O. : Meaningful Scales Detection : an Unsupervised Noise Detection Algorithm for Digital Contours. *Image Processing On Line* 4, 98–115 (2014)
 - [200] Kerautret, B., Lachaud, J.O. : Geometric total variation for image vectorization, zooming and pixel art depixelizing. In : *Pattern Recognition*. pp. 391–405 (2020)
 - [201] Kerautret, B., Lachaud, J.O., Said, M. : Meaningful Thickness Detection on Polygonal Curve. In : *Pattern Recog. Applications and Methods*. pp. 372–379 (2012)
 - [202] Kervrann, C. : An adaptive window approach for image smoothing and structures preserving. In : *Computer Vision - ECCV 2004*. pp. 132–144 (2004)

- [203] Khalimsky, E. : Topological structures in computer science. *J. of Applied Mathematics and Simulation* 1(1), 25–40 (1987)
- [204] Kim, C.E., Rosenfeld, A. : Digital straight lines and convexity of digital regions. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 4(2), 149–153 (1982)
- [205] Kim, C.E. : On the cellular convexity of complexes. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 3(6), 617–625 (1981)
- [206] Kingma, D., Ba, J. : Adam : A method for stochastic optimization. *Learning Representations* (2014)
- [207] Klette, G. : Recursive computation of minimum-length polygons. *Computer Vision and Image Understanding* 117(4), 386–392 (2013)
- [208] Klette, R., Rosenfeld, A. : *Digital Geometry : Geometric Methods for Digital Picture Analysis*. Elsevier (2004)
- [209] Klette, R., Žunić, J. : Multigrid convergence of calculated features in image analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 13, 173–191 (2000)
- [210] Klette, R., Sun, H.J. : Digital planar segment based polyhedrization for surface area estimation. In : *Visual Form 2001*. pp. 356–366 (2001)
- [211] Kobori, H., Gorretta, N., Rabatel, G., bellon maurel, V., Chaix, G., Roger, J.M., Tsuchikawa, S. : Applicability of vis-nir hyperspectral imaging for monitoring wood moisture content (mc). *Holzforschung* 67 (2013)
- [212] Kolesnikov, A. : Nonparametric polygonal and multimodel approximation of digital curves with rate-distortion curve modeling. In : *IEEE Inter. Conf. on Image Processing*. pp. 2889–2892 (2011)
- [213] Kolesnikov, A., Fränti, P. : Polygonal approximation of closed discrete curves. *Pattern Recognition* 40(4), 1282–1293 (2007)
- [214] Kong, T.Y., Rosenfeld, A. : Digital topology : Introduction and survey. *Computer Vision, Graphics & Image Processing* 48(3), 357–393 (1989)
- [215] Koplowitz, J., Lindenbaum, M., Bruckstein, A. : The number of digital straight lines on an $n^* n$ grid. *IEEE Trans. on Information Theory* 36(1), 192–197 (1990)
- [216] Kovalevsky, V., Fuchs, S. : Theoretical and experimental analysis of the accuracy of perimeter estimates. *Robust Computer Vision* pp. 218–242 (1992)
- [217] Kovalevsky, V.A. : Finite topology as applied to image analysis. *Computer Vision, Graphics & Image Processing* 46(2), 141–161 (1989)
- [218] Kretschmer, U., Kirchner, N., Morhart, C., Spiecker, H. : A new approach to assessing tree stem quality characteristics using terrestrial laser scans. *Silva Fennica* 47(5), 1071 (2013)
- [219] Kry, P., Pai, D. : Interaction Capture and Synthesis. *ACM Trans. on Graphics* 25(3), 872–880 (2006), special Issue : ACM SIGGRAPH 2006
- [220] Krähenbühl, A., Kerautret, B., Debled-Rennesson, I., Mothe, F., Longuetaud, F. : Knot segmentation in 3D CT images of wet wood. *Pattern Recognition* 47(12), 3852–3869 (2014)
- [221] Kumar, M.P., Goyal, S., Kuthirummal, S., Jawahar, C.V., Narayanan, P.J. : Discrete contours in multiple views : Approximation and recognition. *Image and Vision Computing* 22 (2004)
- [222] Kurdthongmee, W. : A comparative study of the effectiveness of using popular dnn object detection algorithms for pith detection in cross-sectional images of parawood. *Heliyon* 6(2) (2020)

-
- [223] Kurdthongmee, W., Suwannarat, K., Panyuen, P., Sae-Ma, N. : A fast algorithm to approximate the pith location of rubberwood timber from a normal camera image. In : 15th Inter. Joint Conf. on Computer Science and Software Engineering (JCSSE). pp. 1–6 (2018)
 - [224] Kurtz, C., Passat, N., Gañarski, P., Puissant, A. : Extraction of complex patterns from multiresolution remote sensing images : A hierarchical top-down methodology. *Pattern Recognition* 45(2), 685–706 (2012)
 - [225] Kvarnström, B., Oja, J. : Applications of rfid to improve traceability in continuous processes. *Quality Engineering* 23(4), 343–357 (2010)
 - [226] Lachaud, J.O., Vialard, A., de Vieilleville, F. : Analysis and comparative evaluation of discrete tangent estimators. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. vol. LNCS 3429, pp. 140–251 (2005)
 - [227] Lachaud, J.O., Vialard, A., de Vieilleville, F. : Fast, Accurate and Convergent Tangent Estimation on Digital Contours. *Image and Vision Computing* 25(10), 1572–1587 (2007)
 - [228] Lachaud, J.O. : *Espaces non-euclidiens et analyse d’image : modèles déformables riemanniens et discrets, topologie et géométrie discrète* (2006), Habilitation à Diriger des Recherches, Université Bordeaux 1, Talence, France
 - [229] Lachaud, J.O. : Coding cells of digital spaces : a framework to write generic digital topology algorithms. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 12 (2009)
 - [230] Lachaud, J. : Digital shape analysis with maximal segments. In : *Applications of Discrete Geometry and Mathematical Morphology*. pp. 14–27 (2010)
 - [231] Lachaud, J., Thibert, B. : Properties of gauss digitized shapes and digital surface integration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 54(2), 162–180 (2016)
 - [232] Largeteau-Skapin, G., Andres, E. : Discrete-Euclidean operations. *Discrete Applied Mathematics* 157(3), 510–523 (2009)
 - [233] Latecki, L.J. : Multicolor well-composed pictures. *Pattern Recog. Letters* 16(4), 425–431 (1995)
 - [234] Latecki, L.J., Eckhardt, U., Rosenfeld, A. : Well-composed sets. *Computer Vision and Image Understanding* 61(1), 70–83 (1995)
 - [235] Latecki, L.J. : 3D well-composed pictures. *Graphical Models and Image Processing* 59(3), 164–172 (1997)
 - [236] Latecki, L.J., Conrad, C., Gross, A. : Preserving topology by a digitization process. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 8(2), 131–159 (1998)
 - [237] Latecki, L.J., Lakämper, R. : Convexity rule for shape decomposition based on discrete contour evolution. *Computer Vision and Image Understanding* 73(3), 441–454 (1999)
 - [238] Latecki, L.J., Lakämper, R. : Shape similarity measure based on correspondence of visual parts. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 22(10), 1185–1190 (2000)
 - [239] Le Quentrec, É., Mazo, L., Baudrier, É., Tajine, M. : Local turn-boundedness : A curvature control for a good digitization. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. pp. 51–61 (2019)
 - [240] Lecron, F., Benjelloun, M., Mahmoudi, S. : Points of interest detection in cervical spine radiographs by polygonal approximation. In : *Image Processing Theory, Tools and Applications*. pp. 81–86 (2010)
 - [241] Lee, C.J., Wang, S.D. : Fingerprint feature extraction using gabor filters. *Electronics Letters* 35, 288–290 (1999)

- [242] Lenoir, A. : Fast estimation of mean curvature on the surface of a 3D discrete object. In : Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI). pp. 175–186 (1997)
- [243] Li, Y., Bu, R., Sun, M., Wu, W., Di, X., Chen, B. : Pointcnn : Convolution on x-transformed points. In : Advances in neural information processing systems. pp. 820–830 (2018)
- [244] Liang, T., Glossner, J., Wang, L., Shi, S., Zhang, X. : Pruning and quantization for deep neural network acceleration : A survey. *Neurocomputing* 461, 370–403 (2021)
- [245] Lien, J.M., Amato, N.M. : Approximate convex decomposition of polygons. *Computational Geometry : Theory and Applications* 35(1–2), 100–123 (2006)
- [246] Lieutier, A. : Any open bounded subset of \mathbb{R}^n has the same homotopy type as its medial axis. *Computer-Aided Design* 36(11), 1029–1046 (2004)
- [247] Lin, G., Milan, A., Shen, C., Reid, I. : Refinenet : Multi-path refinement networks for high-resolution semantic segmentation. In : IEEE Computer Vision and Pattern Recognition. pp. 1925–1934 (2017)
- [248] Liu, H., Latecki, L.J., Liu, W. : A Unified Curvature Definition for Regular, Polygonal, and Digital Planar Curves. *Int. J. Comput. Vision* 80(1), 104–124 (2008)
- [249] Liu, Q., Kampffmeyer, M., Jenssen, R., Salberg, A.B. : Road mapping in LiDAR images using a joint-task dense dilated convolutions merging network. In : IEEE Int. Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS). pp. 5041–5044 (2019)
- [250] Locteau, H., Raveaux, R., Adam, S., Lecourtier, Y., Héroux, P., Trupin, É. : Approximation of Digital Curves using a Multi-Objective Genetic Algorithm. In : Int. Association of Pattern Recognition. pp. 716–719 (2006)
- [251] Longuetaud, F., Mothe, F., Kerautret, B., Krähenbühl, A., Hory, L., Leban, J.M., Debled-Rennesson, I. : Automatic knot detection and measurements from x-ray ct images of wood : A review and validation of an improved algorithm on softwood samples. *Comput. Electron. Agric.* 85, 77–89 (2012)
- [252] Longuetaud, F., Leban, J.M., Mothe, F., Kerrien, E., Berger, M.O. : Automatic detection of pith on ct images of spruce logs. *Computers and Electronics in Agriculture* 44(2), 107–119 (2004)
- [253] Lorensen, W.E., Cline, H.E. : Marching cubes : A high-resolution 3D surface construction algorithm. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics* 21(4), 163–169 (1987)
- [254] Lowe, A., Cross, H. : The application of dna methods to timber tracking and origin verification. *IAWA Journal* 32, 251–262 (2011)
- [255] Lu, L., Shin, Y., Su, Y., Karniadakis, G.E. : Dying relu and initialization : Theory and numerical examples. Tech. rep. (2019)
- [256] Lu, X., Yao, J., Li, K., Li, L. : CannyLines : a parameter-free line segment detector. In : IEEE Int. Conf. on Image Processing. pp. 507–511 (2015)
- [257] Luo, J.H., Wu, J., Lin, W. : Thinet : A filter level pruning method for deep neural network compression. In : Inter. Conf. on computer vision. pp. 5058–5066 (2017)
- [258] Malgouyres, R., Brunet, F., Fourey, S. : Binomial Convolutions and Derivatives Estimations from Noisy Discretizations. In : Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI). vol. LNCS 4992, pp. 370–379 (2008)
- [259] Mallet, J.L. : Interpolation en μ - moyenne quadratique. *Revue de Statistique Appliquée* 23(2), 61–86 (1975)

-
- [260] Mamou, K., Ghorbel, F. : A simple and efficient approach for 3D mesh approximate convex decomposition. In : IEEE Int. Conf. on Image Processing (ICIP). pp. 3465–3468 (2009)
 - [261] Mangin, J.F., Frouin, V., Bloch, I., Régis, J., López-Krahe, J. : From 3D magnetic resonance images to structural representations of the cortex topography using topology preserving deformations. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 5(4), 297–318 (1995)
 - [262] Marchadier, J., Arquès, D., Michelin, S. : Thinning grayscale well-composed images. *Pattern Recog. Letters* 25(5), 581–590 (2004)
 - [263] Marji, M., Siy, P. : A new algorithm for dominant points detection and polygonization of digital curves. *Pattern Recognition* 36(10), 2239–2251 (2003)
 - [264] Marji, M., Siy, P. : Polygonal representation of digital planar curves through dominant point detection - a nonparametric algorithm. *Pattern Recognition* 37, 2113–2130 (2004)
 - [265] Masood, A. : Optimized polygonal approximation by dominant point deletion. *Pattern Recognition* 41(1), 227–239 (2008)
 - [266] Matas, J., Galambos, C., Kittler, J. : Robust detection of lines using the progressive probabilistic Hough transform. *Computer Vision and Image Understanding* 78(1), 119–137 (2000)
 - [267] Maunder, C.R.F. : *Algebraic Topology*. Dover, New York (1996)
 - [268] Mazo, L. : A framework for label images. In : *Computational Topology in Image Context*. vol. LNCS 7309, pp. 1–12 (2012)
 - [269] Mazo, L., Passat, N., Couprie, M., Ronse, C. : Topology on digital label images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 44(3), 254–281 (2012)
 - [270] Mazo, L. : Multi-scale arithmetization of linear transformations. *J. Mathematical Imaging and Vision* 61, 432–442 (2019)
 - [271] Mazo, L., Passat, N., Couprie, M., Ronse, C. : Digital imaging : A unified topological framework. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 44(1), 19–37 (2012)
 - [272] Mazo, L., Passat, N., Couprie, M., Ronse, C. : Paths, homotopy and reduction in digital images. *Acta Applicandae Mathematicae* 113(2), 167–193 (2011)
 - [273] Mehlhorn, K., Näher, S., Schilz, T., Schirra, S., Seel, M., Seidel, R., Uhrig, C. : Checking geometric programs or verification of geometric structures. In : *Proceedings of SCG*. pp. 159–165 (1996)
 - [274] Meine, H., Köthe, U., Stelldinger, P. : A topological sampling theorem for robust boundary reconstruction and image segmentation. *Discrete Appl. Math.* 157(3), 524–541 (2009)
 - [275] Melkman, A.A. : On-line construction of the convex hull of a simple polyline. *Information Processing Letters* 25(1), 11–12 (1987)
 - [276] Mellouli, D., Hamdani, T.M., Sanchez-Medina, J.J., Ayed, M.B., Alimi, A.M. : Morphological convolutional neural network architecture for digit recognition. *IEEE Trans. on neural networks and learning systems* 30(9), 2876–2885 (2019)
 - [277] Merveille, O., Naegel, B., Talbot, H., Najman, L., Passat, N. : 2D filtering of curvilinear structures by ranking the orientation responses of path operators (rorpo). *Image Processing On Line* 7, 246–261 (2017)
 - [278] Merveille, O., Talbot, H., Najman, L., Passat, N. : Curvilinear structure analysis by ranking orientation responses of path operators. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 40(2), 304–317 (2018)

- [279] Minsky, M., Papert, S. : Perceptrons: An introduction to computational geometry. MIT Press, Reading (1969)
- [280] Mitra, S., Acharya, T. : Gesture recognition : A survey. IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews) 37(3), 311–324 (2007)
- [281] Mitzias, D., Mertzios, B. : Shape recognition with a neural classifier based on a fast polygon approximation technique. Pattern Recognition 27(5), 627–636 (1994)
- [282] Mokhtarian, F. : Silhouette-based isolated object recognition through curvature scale space. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence 17(5), 539–544 (1995)
- [283] Mondal, R., Purkait, P., Santra, S., Chanda, B. : Morphological networks for image de-raining. In : Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI). pp. 262–275 (2019)
- [284] Moscoso Thompson, E., Biasotti, S., Digne, J., Chaine, R. : mplbp : A point-based representation for surface pattern description. Computers & Graphics 86, 81–92 (2020)
- [285] Najman, L., Couprie, M. : Building the component tree in quasi-linear time. Trans. Img. Proc. 15(11), 3531–3539 (2006)
- [286] Najman, L., Talbot, H. : Mathematical Morphology : From Theory to Applications. ISTE/J. Wiley & Sons (2010)
- [287] Najman, L., Couprie, M. : Building the component tree in quasi-linear time. IEEE Trans. on Image Processing 15(11), 3531–3539 (2006)
- [288] Nezamabadi-Pour, H., Saryazdi, S., Rashedi, E. : Edge detection using ant algorithms. Soft Computing 10(7), 623–628 (2006)
- [289] Nguyen, T.P., Debled-Rennesson, I. : Curvature estimation in noisy curves. In : Computer Analysis of Images and Patterns (CAIP). pp. 474–481 (2007)
- [290] Nguyen, T.P., Debled-Rennesson, I. : Curvature and torsion estimators for 3D curves. In : Int. Symposium on Visual Computing (2008)
- [291] Nguyen, T.P., Debled-Rennesson, I. : On the local properties of digital curves. Inter. J. of Shape Modeling 14(2), 105–125 (2008)
- [292] Nguyen, T.P., Debled-Rennesson, I. : Parameter-free method for polygonal representation of the noisy curves. In : IWCIA Special Track on Applications. pp. 65–78 (2009)
- [293] Nguyen, T.P., Debled-Rennesson, I. : Arc segmentation in linear time. In : Computer Analysis of Images and Patterns (CAIP). vol. LNCS 6854, pp. 84–92 (2010)
- [294] Nguyen, T.P., Debled-Rennesson, I. : Decomposition of a curve into arcs and line segments based on dominant point detection. In : Image Analysis - 17th Scandinavian Conference, SCIA. vol. LNCS 6688, pp. 794–805 (2011)
- [295] Nguyen, T.P., Debled-Rennesson, I. : A discrete geometry approach for dominant point detection. Pattern Recognition 44(1), 32–44 (2011)
- [296] Nguyen, T.P., Kerautret, B., Debled-Rennesson, I., Lachaud, J.O. : Unsupervised, fast and precise recognition of digital arcs in noisy images. In : Computer Vision and Graphics - Inter.Conf. ICCVG. vol. LNCS 6374 (2010)
- [297] Nguyen, T.P., Nguyen, X.S. : Shape measurement using LIP-signature. Computer Vision and Image Understanding 171, 83–94 (2018)
- [298] Nguyen, V.T. : Estimation de la qualité de bois ronds et d’arbres sur pied par Lidar terrestre. Ph.D. thesis, L’Institut des Sciences et Industries du Vivant et de l’Environnement (AgroParisTech) (2018)

-
- [299] Nguyen, V.T., Constant, T., Kerautret, B., Debled-Rennesson, I., Colin, F. : A machine-learning approach for classifying defects on tree trunks using terrestrial lidar. *Computers and Electronics in Agriculture* 171, 105332 (2020)
 - [300] Nguyen, V.T., Kerautret, B., Debled-Rennesson, I., Colin, F., Piboule, A., Constant, T. : Algorithms and implementation for segmenting tree log surface defects. In : *Reproducible Research in Pattern Recognition (RRPR)*. pp. 150–166 (2016)
 - [301] Nguyen, V.T., Kerautret, B., Debled-Rennesson, I., Colin, F., Piboule, A., Constant, T. : Segmentation of defects on log surface from terrestrial lidar data. In : *Int. Conf. on Pattern Recognition (ICPR)*. pp. 3168–3173 (2016)
 - [302] Nisbet, R., Miner, G., Yale, K. : *Handbook of Statistical Analysis and Data Mining Applications, Second Edition*. Academic Press, Inc., 2nd edn. (2017)
 - [303] Noblet, V., Heinrich, C., Heitz, F., Armspach, J.P. : 3-D deformable image registration : A topology preservation scheme based on hierarchical deformation models and interval analysis optimization. *IEEE Trans. on Image Processing* 14(5), 553–566 (2005)
 - [304] Nordmark, U. : Models of knots and log geometry of young pinus sylvestris sawlogs extracted from computed tomographic images. *Scandinavian J. of Forest Research*. 18(2), 168–175 (2003)
 - [305] Norell, K. : Automatic counting of annual rings on Pinus sylvestris end faces in sawmill industry. *Computers and Electronics in Agriculture* 75(2), 231–237 (2011)
 - [306] Norell, K., Borgefors, G. : Estimation of pith position in untreated log ends in sawmill environments. *Computers and Electronics in Agriculture* 63(2), 155 – 167 (2008)
 - [307] Nouvel, B., Rémila, E. : Configurations induced by discrete rotations : Periodicity and quasi-periodicity properties. *Discrete Appl Math* 147(2–3), 325–343 (2005)
 - [308] Nouvel, B., Rémila, E. : Incremental and transitive discrete rotations. In : *Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA)*. vol. LNCS 4040, pp. 199–213 (2006)
 - [309] Oktay, O., Schlemper, J., Folgoc, L.L., Lee, M., Heinrich, M., Misawa, K., Mori, K., McDonagh, S., Hammerla, N.Y., Kainz, B., et al. : Attention u-net : Learning where to look for the pancreas. *arXiv :1804.03999* (2018)
 - [310] Park, S., Lee, H., Lee, S., Yang, H.S. : Line-based single view 3D reconstruction in Manhattan world for augmented reality. In : *SIGGRAPH Inter. Conf. on Virtual Reality Continuum and Its Applications in Industry*. pp. 89–92 (2015)
 - [311] Paul, S., Basu, S., Nasipuri, M. : Microsoft kinect in gesture recognition : A short review. *Inter. J. of Control Theory and Applications* 8(5), 2071–2076 (2015)
 - [312] Pavlidis, T. : *Algorithms for graphics and image processing*. Rockville : Computer Science Press (1982)
 - [313] Perez, J.C., Vidal, E. : Optimum polygonal approximation of digitized curves. *Pattern Recog. Letters* 15(8), 743–750 (1994)
 - [314] Pfeifer, N., Gorte, B., Winterhalder, D. : Automatic reconstruction of single trees from terrestrial laser scanner data. *Int. Arch. of Photogram. Remote Sensing & Spatial Information Sciences* 35 (2004)
 - [315] Pham, D.L., Bazin, P.L., Prince, J.L. : Digital topology in brain imaging. *IEEE Signal Proc. Mag.* 27(4), 51–59 (2010)
 - [316] Pick, G. : *Geometrisches zur zahlenlehre* 19, 311–319 (1899)

- [317] Pikaz, A., Dinstein, I. : Optimal polygonal approximation of digital curves. *Pattern Recognition* 28(3), 373–379 (1995)
- [318] Pineda, J. : A parallel algorithm for polygon rasterization. In : *Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*. pp. 17–20 (1988)
- [319] Pluta, K. : Rigid motions on discrete spaces. Ph.D. thesis, Université Paris-Est (2017)
- [320] Pluta, K., Kenmochi, Y., Passat, N., Talbot, H., Romon, P. : Topological alterations of 3D digital images under rigid transformations. In : *Reims Image*. pp. 31–33. *GeoDis* (2014)
- [321] Pons, T., Helle, G. : Identification of anatomically non-distinct annual rings in tropical trees using stable isotopes. *Trees* 25, 83–93 (2010)
- [322] Popescu, S.C., Wynne, R.H., Nelson, R.F. : Estimating plot-level tree heights with lidar : local filtering with a canopy-height based variable window size. *Computers and Electronics in Agriculture* 37(1-3), 71–95 (2002)
- [323] Postolski, M., Janaszewski, M., Kenmochi, Y., Lachaud, J.O. : Tangent estimation along 3D digital curves. In : *Int. Conf. on Pattern Recognition (ICPR)*. pp. 2079–2082 (2012)
- [324] Poulos, M., Evangelou, A., Magkos, E., Papavlasopoulos, S. : Fingerprint verification based on image processing segmentation using an onion algorithm of computational geometry (2003)
- [325] Powers, D. : Evaluation : From precision, recall and f-factor to roc, informedness, markedness & correlation. Tech. rep. (2008)
- [326] Poyato, Á.C., García, N.L.F., Carnicer, R.M., Madrid-Cuevas, F.J. : Dominant point detection : A new proposal. *Image Vision Computing* 23(13), 1226–1236 (2005)
- [327] Prasad, D.K., Leung, M.K.H., Quek, C., Cho, S. : A novel framework for making dominant point detection methods non-parametric. *Image Vision Computing* 30(11), 843–859 (2012)
- [328] Prewitt, J.M.S. : Object enhancement and extraction. *Picture Processing and Psychopictorics* pp. 75–149 (1970)
- [329] Priesnitz, J., Rathgeb, C., Buchmann, N., Busch, C., Margraf, M. : An overview of touchless 2D fingerprint recognition. *Journal on Image and Video Processing* 2021, 1–28 (2021)
- [330] Provot, L., Debled-Rennesson, I. : Segmentation of Noisy Discrete Surfaces. In : *Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA)*. vol. LNCS 4958, pp. 160–171 (2008)
- [331] Provot, L., Debled-Rennesson, I. : 3D noisy discrete objects : Segmentation and application to smoothing. *Pattern Recognition* 42(8), 1626–1636 (2009)
- [332] Provot, L., Gerard, Y., Feschet, F. : Digital Level Layers for Digital Curve Decomposition and Vectorization. *Image Processing On Line* 4, 169–186 (2014)
- [333] Pyörälä, J., Kankare, V., Vastaranta, M., Rikala, J., Holopainen, M., Sipi, M., Hyyppä, J., Uusitalo, J. : Comparison of terrestrial laser scanning and x-ray scanning in measuring scots pine (*pinus sylvestris* l.) branch structure. *Scandinavian J. of Forest Research* 33, 1–23 (2017)
- [334] Qi, C.R., Su, H., Mo, K., Guibas, L.J. : Pointnet : Deep learning on point sets for 3D classification and segmentation. In : *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*. pp. 652–660 (2017)
- [335] Qian, F. : Comportement physique, chimique et mécanique du bois suite à la compression sous l’effet de la chaleur et de l’humidité. Ph.D. thesis, Université Laval (2019)

-
- [336] Raatevaara, A., Korpunen, H., Tiitta, M., Tomppo, L., Kulju, S., Antikainen, J., Uusitalo, J. : Electrical impedance and image analysis methods in detecting and measuring scots pine heartwood from a log end during tree harvesting. *Computers and Electronics in Agriculture* 177, 105690 (2020)
 - [337] Račko, V. : Verify the accuracy of estimation the model between dimensional characteristics of branch scar and the location of the knot in the beech trunk. *Annals of Warsaw University of Life Sciences - SGGW Forestry and Wood Technology* 84, 60–65 (2013)
 - [338] Ramer, U. : An iterative procedure for the polygonal approximation of planar curves. *Computer, Graphic and Image processing* 1, 224–256 (1972)
 - [339] Rapaport, F. : Calcul du rayon de courbure d’une séquence d’ADN. Internship report (2004), stage de DEA. Rapport de stage.
 - [340] Ray, B.K., Ray, K.S. : Detection of significant points and polygonal approximation of digitized curves. *Pattern Recog. Letters* 13(6), 443–452 (1992)
 - [341] Rehush, N., Abegg, M., Waser, L.T., Brändli, U.B. : Identifying tree-related microhabitats in TLS point clouds using machine learning. *Remote Sensing* 10(11), 1735 (2018)
 - [342] Ren, Z., Meng, J., Yuan, J. : Depth camera based hand gesture recognition and its applications in human-computer-interaction. In : *IEEE Information, Communications and Signal Processing*. pp. 1–5 (2011)
 - [343] Ren, Z., Yuan, J., Meng, J., Zhang, Z. : Robust part-based hand gesture recognition using kinect sensor. *IEEE Trans. on Multimedia* 15(5), 1110–1120 (2013)
 - [344] Reveillès, J.P. : Géométrie discrète, calculs en nombre entiers et algorithmique (1991), thèse d’état. Université Louis Pasteur, Strasbourg, France
 - [345] Richman, M.S. : Understanding discrete rotations. In : *Inter. Conf. on Acoustics, Speech & Signal Processing (ICASSP)*. vol. 3, pp. 2057–2060 (1997)
 - [346] Rodríguez, M., Largeteau-Skapin, G., Andres, E. : Adaptive pixel resizing for multiscale recognition and reconstruction. In : *Int. Workshop Combinatorial Image Analysis (IWCIA)*. vol. LNCS 5852, pp. 252–265 (2009)
 - [347] Ronneberger, O., Fischer, P., Brox, T. : U-net : Convolutional networks for biomedical image segmentation. *CoRR abs/1505.04597* (2015)
 - [348] Ronse, C., Heimans, H.J.A.M. : The algebraic basis of mathematical morphology. II. Dilations and erosions. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 54(1), 74–97 (1990)
 - [349] Ronse, C. : Set-theoretical algebraic approaches to connectivity in continuous or digital spaces. *J. Math. Imaging Vis.* 8(1), 41–58 (1998)
 - [350] Rosenfeld, A. : Adjacency in digital pictures. *Information and Control* 26(1), 24–33 (1974)
 - [351] Rosenfeld, A. : Digital topology. *American Mathematical Monthly* 86(8), 621–630 (1979)
 - [352] Rosenfeld, A., Johnston, E. : Angle detection on digital curves. *IEEE Trans. on Computers* 22(9), 875–878 (1973)
 - [353] Rosenfeld, A., Kong, T.Y., Nakamura, A. : Topology-preserving deformations of two-valued digital pictures. *Graphical Models and Image Processing* 60(1), 24–34 (1998)
 - [354] Rosenfeld, A., Pfaltz, J.L. : Sequential operations in digital picture processing. *J. ACM* 13(4), 471–494 (1966)
 - [355] Rosin, P.L. : Techniques for assessing polygonal approximations of curves. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 19(6), 659–666 (1997)

- [356] Rothwell, C.A., Mundy, J.L., Hoffman, W., Nguyen, V.D. : Driving vision by topology. In : ISCV. pp. 395–400 (1995)
- [357] Roussel, J.R., Mothe, F., Krähenbühl, A., Kerautret, B., Debled-Rennesson, I., Longue-
taud, F. : Automatic knot segmentation in CT images of wet softwood logs using a tan-
gential approach. *Computers and Electronics in Agriculture* 104, 46–56 (2014)
- [358] Roussillon, T., Sivignon, I. : Faithful polygonal representation of the convex and concave
parts of a digital curve. *Pattern Recognition* 44(10-11), 2693–2700 (2011)
- [359] Ruifang, D., Fremont, V., Lacroix, S., Fantoni, I., Changan, L. : Line-based monocular
graph SLAM. In : *Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems*. pp. 494–500
(2017)
- [360] Rune, G., Warensjo, M. : Basal sweep and compression wood in young scots pine trees.
Scandinavian J. of Forest Research 17(6), 529–537 (2002)
- [361] Salberg, A.B., Trier, Ø.D., Kampffmeyer, M. : Large-scale mapping of small roads in lidar
images using deep convolutional neural networks. In : *Scandinavian Conference on Image
Analysis (SCIA)*. vol. LNCS 10270, pp. 193–204 (2017)
- [362] Salembier, P., Oliveras, A., Garrido, L. : Anti-extensive connected operators for image and
sequence processing. *IEEE Trans. on Image Processing* 7(4), 555–570 (1998)
- [363] Salembier, P., Wilkinson, M.H.F. : Connected operators : A review of region-based mor-
phological image processing techniques. *IEEE Signal Proc Mag* 26(6), 136–157 (2009)
- [364] Salmon, J., Debled-Rennesson, I., Wendling, L. : A new method to detect arcs and segments
from curvature profiles. In : *Int. Conf. on Pattern Recognition (ICPR)*. vol. 3, pp. 387–390
(2006)
- [365] Salotti, M. : An efficient algorithm for the optimal polygonal approximation of digitized
curves. *Pattern Recog. Letters* 22(2), 215–221 (2001)
- [366] Santalo, L.A., Kac, M. : *Integral Geometry and Geometric Probability*. Cambridge Uni-
versity Press, 2 edn. (2004)
- [367] Sarkar, B., Singh, L.K., Sarkar, D. : Approximation of digital curves with line segments and
circular arcs using genetic algorithms. *Pattern Recog. Letters* 24(15), 2585–2595 (2003)
- [368] Sarkar, D. : A simple algorithm for detection of significant vertices for polygonal approxi-
mation of chain-coded curves. *Pattern Recog. Letters* 14(12), 959–964 (1993)
- [369] Sato, Y. : Piecewise linear approximation of plane curves by perimeter optimization. *Pat-
tern Recognition* 25(12), 1535–1543 (1992)
- [370] Schraml, R., Charwat-Pessler, J., Petutschnigg, A., Uhl, A. : Towards the applicability of
biometric wood log traceability using digital log end images. *Computers and Electronics
in Agriculture* 119, 112–122 (2015)
- [371] Schraml, R., Entacher, K., Petutschnigg, A., Young, T., Uhl, A. : Matching score models
for hyperspectral range analysis to improve wood log traceability by fingerprint methods.
Mathematics 8(7), 1071 (2020)
- [372] Schraml, R., Uhl, A. : Pith estimation on rough log end images using local fourier spectrum
analysis. In : *Computer Graphics and Imaging (CGIM)* (2013)
- [373] Schuch, P., Schulz, S.D., Busch, C. : Deep expectation for estimation of fingerprint orien-
tation fields. In : *Int. Joint Conference on Biometrics (IJCB)*. pp. 185–190 (2017)

-
- [374] Schütt, C., Aschoff, T., Winterhalder, D., Thies, M., Kretschmer, U., Spiecker, H. : Approaches for recognition of wood quality of standing trees based on terrestrial laserscanner data. *Laser-scanners for forest and landscape assessment. Int. Archives of Photogrammetry, Remote Sensing, and Spatial Information Sciences* 36, 179–182 (2004)
 - [375] Serra, J. : *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, Inc. (1983)
 - [376] Serra, J. : Connectivity on Complete Lattices, pp. 81–96 (1996)
 - [377] Sherbrooke, E.C., Patrikalakis, N.M., Wolter, F.E. : Differential and topological properties of medial axis transforms. *Graphical Models and Image Processing* 58(6), 574–592 (1996)
 - [378] Shi, W., Caballero, J., Huszár, F., Totz, J., Aitken, A., Bishop, R., Rueckert, D., Wang, Z. : Real-time single image and video super-resolution using an efficient sub-pixel convolutional neural network. In : *Computer Vision and Pattern Recognition* (2016)
 - [379] Shotton, J., Sharp, T., Kipman, A., Fitzgibbon, A., Finocchio, M., Blake, A., Cook, M., Moor e, R. : Real-time human pose recognition in parts from single depth images. *Communications of the ACM* 56(1), 116–124 (2013)
 - [380] Siqueira, M., Latecki, L.J., Tustison, N.J., Gallier, J.H., Gee, J.C. : Topological repairing of 3D digital images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 30(3), 249–274 (2008)
 - [381] Sittler, B. : Revealing historical landscapes by using airborne laser scanning. A 3-D model of ridge and furrow in forests near Rastatt (Germany). *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing XXXVI(Part 8/W2)*, 258–261 (2004)
 - [382] Sivignon, I. : A near-linear time guaranteed algorithm for digital curve simplification under the fréchet distance. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. pp. 333–345 (2011)
 - [383] Sivignon, I. : A Near-Linear Time Guaranteed Algorithm for Digital Curve Simplification Under the Fréchet Distance. *Image Processing On Line* 4, 116–127 (2014)
 - [384] Sivignon, I., Breton, R., Dupont, F., Andres, E. : Discrete analytical curve reconstruction without patches. *Image and Vision Computing* 23(02), 191–202 (2005)
 - [385] Sivignon, I., Coeurjolly, D. : Minimal Decomposition of a Digital Surface into Digital Plane Segments is NP-Hard. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. vol. LNCS 4245, pp. 674–685 (2006)
 - [386] Sivignon, I., Dupont, F., Chassery, J.M. : Decomposition of a three-dimensional discrete object surface into discrete plane pieces. *Algorithmica* 38, 25–43 (2004)
 - [387] Sivignon, I., Dupont, F., Chassery, J.M. : Discrete surfaces segmentation into discrete planes. In : *Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA)*. vol. LNCS 3322, pp. 458–473 (2004)
 - [388] Sklansky, J. : Measuring concavity on a rectangular mosaic. *IEEE Trans. on Computers* C-21(12), 1355–1364 (1972)
 - [389] Sklansky, J. : Recognition of convex blobs. *Pattern Recognition* 2, 3–10 (1970)
 - [390] Sobel, I., Feldman, G. : An isotropic 3x3 image gradient operator. In : *History and Definition of the so-called "Sobel Operator"* (1990)
 - [391] Soille, P. : Morphological image compositing. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 28(5), 673–683 (2006)
 - [392] Soille, P., Pesaresi, M. : Advances in mathematical morphology applied to geoscience and remote sensing. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing* 40(9), 2042–2055 (2002)

- [393] Soille, P., Talbot, H. : Directional morphological filtering. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 23(11), 1313–29 (2001)
- [394] Solís Montero, A., Lang, J. : Skeleton pruning by contour approximation and the integer medial axis transform. *Computers & Graphics* 36(5), 477–487 (2012)
- [395] Sorensen, P., Epp, B., May, T. : A depthwise separable convolutional neural network for keyword spotting on an embedded system. *Journal on Audio, Speech, and Music Processing* (2020)
- [396] Staal, J., Abramoff, M.D., Niemeijer, M., Viergever, M.A., van Ginneken, B. : Ridge-based vessel segmentation in color images of the retina. *IEEE Trans. on Medical Imaging* 23(4), 501–509 (2004)
- [397] Stängle, S.M., Brüchert, F., Kretschmer, U., Spiecker, H., Sauter, U.H. : Clear wood content in standing trees predicted from branch scar measurements with terrestrial lidar and verified with x-ray computed tomography. *Canadian J. of Forest Research* 44(2), 145–153 (2014)
- [398] Stelldinger, P., Köthe, U. : Towards a general sampling theory for shape preservation. *Image and Vision Computing* 23(2), 237–248 (2005)
- [399] Stelldinger, P., Terzic, K. : Digitization of non-regular shapes in arbitrary dimensions. *Image and Vision Computing* 26(10), 1338–1346 (2008)
- [400] Stern, M. : *Über eine verallgemeinerung der kreistheilung*. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 55, 193–220 (1858)
- [401] Stria, J., Prusa, D., Hlaváček, V. : Polygonal models for clothing. In : *TAROS* (2014)
- [402] Suarez, J., Murphy, R.R. : Hand gesture recognition with depth images : A review. In : *RO-MAN, 2012 IEEE*. pp. 411–417 (2012)
- [403] Surekha, D., Akash, A.M. : Fingerprint recognition using image processing. In : *Int. Conference on Digital Image Processing (ICDIP)*. vol. 8009, pp. 80 – 86 (2011)
- [404] Swaminarayan, S., Prasad, L. : Rapid Automated Polygonal Image Decomposition. In : *35th IEEE Applied Imagery and Patt. Rec. Workshop (AIPR'06)*. pp. 28–28 (2006)
- [405] Tabbone, S., Wendling, L., Salmon, J.P. : A new shape descriptor defined on the radon transform. *Computer Vision and Image Understanding* 102(1), 42–51 (2006)
- [406] Tabernik, D., Sela, S., Skvarc, J., Skocaj, D. : Segmentation-based deep-learning approach for surface-defect detection. *J. of Intelligent Manufacturing* pp. 1–18 (2020)
- [407] Tanvir Parvez, M., Mahmoud, S.A. : Arabic handwriting recognition using structural and syntactic pattern attributes. *Pattern Recognition* 46(1), 141–154 (2013)
- [408] Tarsissi, L. : Balance properties on Christoffel words and applications. Ph.D. thesis, Université Grenoble Alpes (2017)
- [409] Teh, C., Chin, R. : On the detection of dominant points on the digital curves. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 2, 859–872 (1989)
- [410] Terrance, D., Graham, W.T. : Improved regularization of convolutional neural networks with cutout. *CoRR abs/1708.04552* (2017)
- [411] Thibault, Y., Kenmochi, Y., Sugimoto, A. : Computing upper and lower bounds of rotation angles from digital images. *Pattern Recognition* 42(8), 1708–1717 (2009)
- [412] Thomas, L., Mili, L. : A robust gm-estimator for the automated detection of external defects on barked hardwood logs and stems. *IEEE Trans. on Signal Processing* 55, 3568 – 3576 (2007)

-
- [413] Thomas, L., Shaffer, C., Mili, L., Thomas, E. : Automated detection of severe surface defects on barked hardwood logs. *Computer Science* 57 (2007)
 - [414] Thomas, R. : Modeling the relationships among internal defect features and external appalachian hardwood log defect indicators. *Silva Fennica* 43, 447–456 (2009)
 - [415] Thomas, R.E., Thomas, L. : Using parallel computing methods to improve log surface defect detection methods. In : 18th Int. Nondestructive Testing and Evaluation of Wood Symposium. pp. 196–205 (2013)
 - [416] Tian, J., Yu, W., Xie, S. : An ant colony optimization algorithm for image edge detection. In : 2008 IEEE Congress on Evolutionary Computation (IEEE World Congress on Computational Intelligence). pp. 751–756 (2008)
 - [417] Tombre, K. : Analysis of engineering drawings : State of the art and challenges. In : *Graphics Recognition Algorithms and Systems*, vol. 1389, pp. 257–264 (1998)
 - [418] Toumazet, J.P., Vautier, F., Roussel, E., Dousteyssier, B. : Automatic detection of complex archaeological grazing structures using airborne laser scanning data. *J. of Archaeological Science : Reports* 12, 569–579 (2017)
 - [419] Trebing, K., Stanczyk, T., Mehrkanoon, S. : Smaat-unet : Precipitation nowcasting using a small attention-unet architecture. *Pattern Recog. Letters* 145, 178–186 (2021)
 - [420] Trier, Ø.D., Salberg, A.B., Pilø, L.H. : Semi-automatic mapping of charcoal kilns from airborne laser scanning data using deep learning. In : *Conference on Computer Applications and Quantitative Methods in Archaeology*. pp. 219–231 (2016)
 - [421] Tseng, C.C., Juan, C.J., Chang, H.C., Lin, J.F. : An optimal line segment extraction algorithm for online chinese character recognition using dynamic programming. *Pattern Recog. Letters* 19(10), 953–961 (1998)
 - [422] Turrone, F., Maltoni, D., Cappelli, R., Maio, D. : Improving fingerprint orientation extraction. *IEEE Trans. on Inform. Forensics and Security* 6(3), 1002–1013 (2011)
 - [423] Uusijärvi, R. : Forest rfid transponder and reader design - indisputable key project. Tech. rep., IST - ICT for Networked Businesses - Extended products and services (2010)
 - [424] Vacavant, A., Roussillon, T., Kerautret, B., Lachaud, J.O. : A combined multi-scale/irregular algorithm for the vectorization of noisy digital contours. *Computer Vision and Image Understanding* 117(4), 438–450 (2013)
 - [425] Vaidehi, N., Jain, A. : Internal coordinate molecular dynamics : A foundation for multiscale dynamics. *The Journal of Physical Chemistry B* 119(4), 1233–1242 (2015)
 - [426] Vittone, J., Chassery, J.M. : Recognition of digital naive planes and polyhedrization. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. pp. 296–307 (2000)
 - [427] Wagner, F., Ipia, A., Tarabalka, Y., Lotte, R., Ferreira, M., P.M, A., Gloor, M., Phillips, O., Aragão, L. : Using the u-net convolutional network to map forest types and disturbance in the atlantic rainforest with very high resolution images. *Remote Sensing in Ecology and Conservation* 5 (2019)
 - [428] Wehr, A., Lohr, U. : Airborne laser scanning – an introduction and overview. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing* 54(2–3), 68–82 (1999)
 - [429] Wei, Q., Leblon, B., La Rocque, A. : On the use of x-ray computed tomography for determining wood properties : a review. *Canadian J. of Forest Research* 41(11), 2120–2140 (2011)

- [430] Weimer, D., Thamer, H., Scholz-Reiter, B. : Learning defect classifiers for textured surfaces using neural networks and statistical feature representations. *CIRP* 7, 347–352 (2013)
- [431] Weintraub, S.H. : *Fundamentals Of Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics (2019)
- [432] Wenyin, L., Dori, D. : From raster to vectors : Extracting visual information from line drawings. *Pattern Anal. Appl.* 2(1), 10–21 (1999)
- [433] White, R.A., Dietterick, B.C., Mastin, T., Strohmaier, R. : Forest roads mapped using LiDAR in steep forested terrain. *Remote Sensing* 2(4), 1120–1141 (2010)
- [434] Wimmer, G., Schraml, R., Hofbauer, H., Petutschnigg, A., Uhl, A. : Two-stage cnn-based wood log recognition. *arXiv :2101.04450* (2021)
- [435] Woo, S., Park, J., Lee, J.Y., Kweon, I.S. : Cbam : Convolutional block attention module. In : *European conference on computer vision (ECCV)*. pp. 3–19 (2018)
- [436] Wu, W. : Dominant point detection using adaptive bending value. *Image Vision Computing* 21(6), 517–525 (2003)
- [437] Wu, Y., Lin, J., Huang, T.S. : Analyzing and capturing articulated hand motion in image sequences. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 27(12), 1910–1922 (2005)
- [438] Xu, C., Zhang, L., Cheng, L., Koch, R. : Pose estimation from line correspondences : a complete analysis and a series of solutions. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 39(6), 1209–1222 (2017)
- [439] Xu, Y. : *Tree-based shape spaces : definition and applications in image processing and computer vision*. Ph.D. thesis, Université Paris-Est (2013)
- [440] Yang, H.H., Yang, C.H.H., Wang, Y.C.F. : Wavelet channel attention module with a fusion network for single image deraining. In : *IEEE Inter. Conf. on Image Processing (ICIP)*. pp. 883–887 (2020)
- [441] Yang, M.H., Ahuja, N., Tabb, M. : Extraction of 2D motion trajectories and its application to hand gesture recognition. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 24(8), 1061–1074 (2002)
- [442] Yilmaz, A., Javed, O., Shah, M. : Object tracking : A survey. *ACM Computing Surveys* 38(4), 1–45 (2006)
- [443] Yin, P.Y. : A new method for polygonal approximation using genetic algorithms. *Pattern Recog. Letters* 19(11), 1017–1026 (1998)
- [444] Zhang, C., Yang, X., Tian, Y. : Histogram of 3D facets : A characteristic descriptor for hand gesture recognition. In : *IEEE Automatic Face and Gesture Recognition*. pp. 1–8 (2013)
- [445] Zhang, D., Lu, G. : Shape-based image retrieval using generic fourier descriptor. *Signal Processing : Image Communication* 17(10), 825–848 (2002)
- [446] Zhang, H., Guo, J. : Optimal polygonal approximation of digital planar curves using meta heuristics. *Pattern Recognition* 34(7), 1429–1436 (2001)
- [447] Zhou, Z., Siddiquee, M.M.R., Tajbakhsh, N., Liang, J. : Unet++ : A nested u-net architecture for medical image segmentation. *Tech. rep.* (2018)
- [448] Zhu, B., Hofstee, P., Lee, J., Al-Ars, Z. : An attention module for convolutional neural networks. In : *Inter. Conf. on Artificial Neural Networks*. pp. 167–178 (2021)
- [449] Zitová, B., Flusser, J. : Image registration methods : A survey. *Image Vision Computing* 21(11), 977–1000 (2003)

Résumé

Ce mémoire d’habilitation présente un panorama de mes activités de recherche sur *de l’analyse et de la manipulation d’objets discrets* dans le contexte de l’imagerie numérique. Il faut savoir que ces objets discrets, définis dans un sous-espace fini de \mathbb{Z}^d , ont des propriétés et comportements très différents de ceux des objets euclidiens de \mathbb{R}^d .

Ces études se situent dans le domaine de la *géométrie discrète* qui est une branche des mathématiques ayant pour but de développer un cadre formel (via une modélisation géométrique) pour l’étude d’objets discrets, tout en essayant de conserver une analogie avec la géométrie euclidienne. De telles études ne sont pas seulement théoriques, mais présentent aussi des intérêts applicatifs dans le domaine du traitement d’images, de l’analyse de formes et de la modélisation.

De nombreuses questions ont été posées sur les propriétés et la manipulation des objets discrets. Parmi les différents travaux et résultats obtenus, trois sujets sont principalement abordés dans ce document. Le premier consiste en une étude des caractéristiques des mouvements rigides, composées de rotations et translations, sur \mathbb{Z}^d avec $d = 2, 3$. Plus précisément, deux notions sont proposées : (1) la *régularité* comme une caractérisation d’images numériques 2D (binaires, en niveaux de gris et étiquetées) permettant de préserver les propriétés topologiques des images soumises à un mouvement rigide arbitraire, et (2) la *quasi-r-régularité* pour la préservation topologique des objets euclidiens lors du processus de discrétisation. La dernière contribue au développement de nouvelles méthodes de mouvements rigides, via des modèles intermédiaires des objets discrets, elles permettent de préserver mieux la forme des objets transformés. Ensuite, nous nous intéressons aux différents outils géométriques efficaces pour analyser et étudier des courbes discrètes bruitées extraites à partir de contour des objets présents sur des images numériques. En se basant sur la primitive de *segment flous* d’épaisseur ν , nous présentons la structure de *couverture tangentielle adaptative* pour étudier des courbes bruitées 2D et 3D. La particularité de cette structure est qu’elle est composée de segments flous d’épaisseurs variées qui s’adaptent automatiquement au bruit présent sur la courbe. Avec cet outil, différents estimateurs géométriques sont présentés ainsi que ses applications dans le domaine de l’analyse d’images et de la reconnaissance de formes : la détection de points dominants, la vectorisation d’images, la classification de formes, *etc.* Dans un troisième temps, nous présentons nos contributions dans le cadre applicatif du traitement et de l’analyse d’images : les caractérisations géométriques et biologiques d’images de bois. L’étude est divisée en deux parties. La première est d’estimer la qualité du bois à partir d’images en coupe transversale de grumes. Dans cette partie, nous proposons différentes méthodes pour extraire automatiquement les caractéristiques visibles sur l’image comme la moelle, les cernes de croissance, le duramen, *etc.* avec des outils de morphologie mathématique et de géométrie discrète, ainsi que des techniques de traitement et d’analyse d’images. La deuxième partie se porte sur l’extraction des défauts sur l’écorce de troncs d’arbres à partir de nuages de points LiDAR, et l’étude de leur relation avec la partie intérieure de l’arbre. Pour cela, nous développons de nouvelles approches de détection de défauts basées sur des algorithmes récents d’apprentissage profond en les combinant avec les caractéristiques géométriques, via la carte de reliefs et la carte de normales, pour guider ce processus d’apprentissage.

Mots-clés: Géométrie discrète, analyse d’images, mouvement rigide, invariance topologique, régularité, contour discret, analyse de formes, réseaux de neurones et apprentissage profond.

Abstract

This habilitation thesis presents an overview of my research activities on *digital shape analysis and manipulation* in the context of computer imagery. It should be known that these digital objects, defined in a finite subspace of \mathbb{Z}^d , have very different properties and behaviours than those of the Euclidean objects of \mathbb{R}^d .

These studies are in the field of *digital geometry* which is a branch of mathematics aiming to develop a formal framework (via geometric modelling) for the study of digital objects, while trying to keep an analogy with Euclidean geometry. Such studies are not only theoretical, but also have application interests in the field of image processing, shape analysis and modelling.

Many questions have been raised about the properties and manipulation of digital objects. Among the various works and results obtained, three subjects are mainly addressed in this manuscript. The first consists in studying the characteristics of rigid motions, combined of rotations and translations, on \mathbb{Z}^d with $d = 2, 3$. More precisely, two notions are proposed : (1) *regularity* as a characterization of 2D digital images (binary, gray-scale and labelled images) for preserving their topological properties under arbitrary rigid motion, and (2) the *quasi-r-regularity* for the topological preservation of Euclidean objects during the digitization process. The last notion contributes to development of new rigid motions methods, via intermediate (continuous) models, of digital objects. These methods allow to preserve better the shape of the transformed objects. We then turn our attention towards different effective geometric tools to analyse and study noisy digital curves extracted from the border of objects present in digital images. Based on the primitive of *blurred segment of width ν* , we present the discrete structure, named *adaptive tangent cover*, to study 2D and 3D noisy curves. The particularity of this structure is that it is composed of blurred segments of various widths which automatically adapt to the noise present on the curve. With this new tool, different geometric estimators are presented as well as its applications in the field of image analysis and pattern recognition : dominant points detection, image vectorization, shape classification, ... In a third part, we present our contributions in an application context of image processing and analysis, more specifically the geometric and biological characterizations of wood images. The study is divided into two parts. The first aims to estimate wood quality from cross-sectional images of wood logs. In this part, we propose various methods to automatically extract different visible features on the image such as pith, growth rings, heartwood, ... by using the mathematical morphology and discrete geometry tools, as well as image processing and analysis techniques. The second part focuses on the extraction of defects on the bark of tree from LiDAR point clouds, and the study of their relationship with the interior of the tree. For this, we develop new approaches for singularities detection based on recent techniques of deep learning and by combining with the geometric characteristics extracted from input data – via the relief map and the normal map – to guide the learning process.

Keywords: Digital geometry, image processing and analysis, rigid motion, topological invariance, regularity, digital contour, pattern analysis, neural networks and deep learning.

