HAL open science

Autour de la stabilité de différents modèles d'appariements aléatoires

Jocelyn Begeot

▶ To cite this version:

Jocelyn Begeot. Autour de la stabilité de différents modèles d'appariements aléatoires. Mathématiques [math]. Université de Lorraine, 2022. Français. NNT : 2022LORR0201 . tel-03904844

HAL Id: tel-03904844

https://hal.science/tel-03904844v1

Submitted on 17 Dec 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale IAEM Lorraine

Autour de la stabilité de différents modèles d'appariements aléatoires

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 15 décembre 2022

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(Mention mathématiques)

par

Jocelyn BEGEOT

Composition du jury

Présidente :	Anne-Laure Basdevant (Professeure des Universités, Sorbonne Université)
Rapporteurs :	Christine Fricker (Chargée de Recherche, INRIA Paris) Pierre-Yves Louis (Professeur des Universités, AgroSup Dijon)
Examinateurs :	Peggy Cénac (Maîtresse de Conférences, Université de Bourgogne) Philippe Chassaing (Professeur des Universités, Université de Lorraine) Régine Marchand (Maîtresse de Conférences, Université de Lorraine)
Directeurs de thèse :	Irène Marcovici (Maîtresse de Conférences, Université de Lorraine) Pascal Moyal (Professeur des Universités, Université de Lorraine)

Institut Élie Cartan de Lorraine (IECL) - Site de Nancy - UMR 7502

Mis en page avec la classe thesul.

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à mes deux directeurs de thèse, Irène Marcovici et Pascal Moyal, qui ont toujours été présents pour moi et attentifs à mon épanouissement scientifique. Sympathiques, généreux dans le travail comme dans la vie et constamment disponibles et à l'écoute, leur regard affûté et leurs conseils toujours avisés et pertinents m'ont permis d'améliorer la qualité de mes travaux et de m'ouvrir au monde de la recherche. Pour tout cela, je leur dis un grand « merci » !

Christine Fricker et Pierre-Yves Louis ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse. J'en suis très honoré et je les remercie vraiment de s'être intéressés à mes travaux de recherche. Je suis également reconnaissant envers Anne-Laure Basdevant, Peggy Cénac, Philippe Chassaing et Régine Marchand d'avoir bien voulu être examinateurs de ma thèse.

Je tiens aussi à remercier les doctorants avec lesquels j'ai pu échanger durant ces trois dernières années, mais également mes amis, la plupart rencontrés au cours de mes études, et certains même, les plus proches, sur les bancs de la Faculté des Sciences et Technologies (FST) de Nancy où j'enseigne à présent, parmi lesquels Adrien et Nicolas, deux amis fidèles avec qui j'ai toujours eu plaisir à discuter, à partager des moments conviviaux, et sur lesquels j'ai pu compter, dans les bons, comme dans les mauvais moments.

Je suis en outre reconnaissant envers les membres de ma famille qui ont toujours été présents pour moi, en particulier mes grands-parents paternels, René et Hélène, qui m'ont soutenu au cours de mes études, et ma grand-mère maternelle, Huguette, qui m'a donné l'amour des mots et fait prendre conscience de l'importance d'avoir une bonne maîtrise de la langue française.

Pour terminer, je souhaite rendre hommage à mes parents.
Tout d'abord à mon père, qui m'a donné le goût de l'effort, le sens du travail, et sans qui je n'aurais pu bénéficier du confort matériel et financier que j'ai eu durant toutes mes études, ce qui a été, pour moi, essentiel.
Enfin, à toi, maman. Toi qui étais la personne la plus importante pour moi et qui es partie rejoindre les étoiles il y a seulement quelques semaines, tu m'as toujours accompagné au mieux tout au long de notre vie commune et de mes études. Toi qui veillais sans cesse à ce que je ne manque de rien, à ce que je puisse travailler dans les meilleures conditions, tu m'as sans relâche encouragé, soutenu, et tu as toujours tout sacrifié pour moi, pour mon confort. Tu es donc pour beaucoup dans les différents succès que j'ai pu connaître pendant toutes mes études, de la période où, étant petit, tu me faisais réciter mes leçons et vérifiais mes devoirs, jusqu'à cette thèse, débutée il y a maintenant trois ans. Lorsque les premiers mots de ce manuscrit furent couchés sur le papier, je ne pouvais pas imaginer tout ce qui allait se passer dans un futur proche. En effet, ces dernières années, jalonnées malheureusement de trop nombreux problèmes de santé te concernant, furent très perturbées. Face au courage dont tu faisais preuve contre la maladie, je n'avais pas le droit de baisser les bras dans mon travail, même lorsque le cœur et l'esprit n'y étaient pas, et c'est pour toi et en ton honneur que j'ai tenu à terminer cette thèse. J'ai essayé au maximum d'être présent à tes côtés, et la rédaction de ce manuscrit s'est ainsi réalisée en partie dans des endroits et à des moments peu conventionnels, de ta chambre d'hôpital, entre deux visites de médecins ou d'infirmières, à ta chambre médicalisée à la maison, où je me mettais avec mon ordinateur sur un lit installé près du tien afin d'être le plus longtemps possible auprès de toi. J'ai, un moment, eu l'espoir fou de pouvoir conclure cette thèse avant que tu ne partes, mais hélas, cela n'a pu être ainsi. Malheureusement, à l'heure où je rédige ces ultimes lignes et où je mets un point final à ce manuscrit, tu n'es plus là, et c'est donc le cœur extrêmement lourd et peiné que j'écris ces quelques mots. Je ne peux m'empêcher de retenir mes larmes en pensant fort à toi et en imaginant le bonheur et la fierté qui auraient été les tiens de lire ces quelques lignes, même si je sais que tu m'accompagnes à chaque instant par la pensée et que j'espère donc que tu peux tout de même les voir de là où tu es à présent. Enfin, toi qui le souhaitais tant, tu ne pourras pas être présente physiquement à ma soutenance de thèse, aboutissement de mes trois dernières années de travail, mais tu seras quand même là, bien au chaud, au fond de mon cœur. Je penserai fort à toi, je sais que tu me regarderas de là où tu es désormais et que tu seras fière de moi ! Je te dédie donc évidemment cette thèse, à toi, maman. Je t'aime fort, fort, fort !

À ma maman adorée,
partie beaucoup trop tôt.

Table des matières

Résumé **1**

Abstract **2**

Introduction **3**

1 Introduction aux modèles d'appariements généraux **13**

1.1 Présentation des modèles d'appariements généraux 14

1.1.1 Graphes de compatibilités généralisés 14

1.1.2 Processus et politiques d'appariements 16

1.1.3 Arrivées sur les sommets 18

1.1.4 Bilan sur les modèles d'appariements généraux 19

1.2 La chaîne $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son espace d'états $\mathbb{W}$ 19

1.2.1 Définition et structure markovienne de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 19

1.2.2 Structure de $\mathbb{W}$ et caractérisation 20

1.2.3 Irréductibilité et $2-$périodicité de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 22

1.3 Un premier exemple de processus d'appariements 22

1.4 Les ensembles $\textsc{stab}(G,\Phi)$ et $\textsc{Ncond}(G)$ 24

1.4.1 Les zones de stabilité $\textsc{stab}(G,\Phi)$ et $\textsc{stab}^+(G,\Phi)$ 24

1.4.2 Ensembles $\textsc{Ncond}(G)$ et $\textsc{Ncond}^+(G)$, et liens avec $\textsc{stab}(G,\Phi)$ et $\textsc{stab}^+(G,\Phi)$ . . 24

1.4.3 Ensembles $\widetilde{\textsc{Ncond}}(G)$ et $\widetilde{\textsc{Ncond}}^+(G)$, et liens avec $\textsc{Ncond}(G)$ et $\textsc{Ncond}^+(G)$ . . 26

1.4.4 Graphes bipartis et lien avec $\textsc{Ncond}(G)$ et $\textsc{Ncond}^+(G)$ 28

1.5 Preuves du Chapitre 1 29

1.5.1 Preuve de la Proposition 2 29

1.5.2 Preuve de la Proposition 4 30

2 Maximalité généralisée de la politique FCFM et loi stationnaire **31**

2.1 La chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son espace d'états $\mathbb{B}$ 33

2.2 La chaîne $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son espace d'états $\mathbb{F}$ 34

2.3 Exemple du processus de construction 36

2.4 Propriété de pseudo-réversibilité 37

2.5 Condition de positive récurrence et lois stationnaires 38

2.6 Maximalité généralisée de FCFM et loi stationnaire 41

2.7 Caractéristiques du système à l'équilibre 43

2.8 Exemples d'application 44

2.8.1 Cas « entièrement bouclé » 44

2.8.2 Cas « hybride » 45

2.9 Étude structurelle du cycle généralisé . . . 46
2.9.1 Notions préliminaires . . . 46
2.9.2 Quelques éléments structurels du cycle généralisé . . . 50
2.10 Preuves du Chapitre 2 . . . 51
2.10.1 Preuve du Lemme 1 . . . 51
2.10.2 Preuve de la Proposition 11 . . . 54
2.10.3 Preuve du Lemme 2 . . . 54
2.10.4 Preuve de la Proposition 14 . . . 55
2.10.5 Preuve de la Proposition 15 . . . 56
2.10.6 Preuve du Lemme 3 . . . 59
2.10.7 Preuve de la Proposition 16 . . . 59
2.10.8 Preuve de la Proposition 24 . . . 61
2.10.9 Preuve de la Proposition 25 . . . 63
2.10.10 Preuve de la Proposition 26 . . . 63

3 Caractérisation algébrique de plusieurs zones de stabilité 65
3.1 Motivations et premiers résultats . . . 67
3.2 Mesures à poids et lien avec les marches aléatoires . . . 68
3.2.1 Mesures à poids sur des graphes généralisés . . . 68
3.2.2 Marches aléatoires . . . 69
3.3 Présentation de quelques modèles d'appariements . . . 70
3.3.1 Modèles d'appariements bipartis et bipartis étendus . . . 70
3.3.2 Modèles d'appariements généraux avec abandons . . . 71
3.3.3 Files d'attente basées sur les compétences (ou *skill-based*) . . . 72
3.3.4 Vers une caractérisation exacte des zones de stabilité . . . 73
3.4 Résultats . . . 73
3.5 Preuve de la Proposition 27 . . . 79
3.5.1 Preuve de l'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (vi)$ . . . 79
3.5.2 Preuve de l'implication $(i) \Rightarrow (v)$ . . . 80
3.6 Preuve de la Proposition 28 . . . 80
3.6.1 Éléments préliminaires . . . 80
3.6.2 Preuve de l'implication $(v) \Rightarrow (ii)$ . . . 81
3.7 Preuve du Théorème 2 . . . 82
3.7.1 Cas 1 : G n'est pas un graphe biparti . . . 82
3.7.2 Cas 2 : G est un graphe biparti . . . 88
3.8 Preuve du Corollaire 2 . . . 90
3.9 Preuve du Corollaire 3 . . . 91
3.10 Preuve du Théorème 3 . . . 91
3.10.1 Preuve générale utilisant le Théorème 2 . . . 91
3.10.2 Cas biparti : preuve utilisant la théorie des flots . . . 93

4 Étude des taux d'appariements 99
4.1 Taux d'appariements du modèle général (MG) . . . 101
4.1.1 Proportion temporelle asymptotique du nombre total d'appariements (modèle MG) 101
4.1.2 Proportion temporelle asymptotique du nombre d'appariements par arête (modèle MG) . . . 102

4.1.3 Taux d'appariements par arête (modèle MG) 104
4.1.4 Taux d'appariements dédiés (modèle MG) 104
4.1.5 « Taux d'entrée = taux de sortie » (modèle MG) 105
4.1.6 Toute mesure stabilisante est à poids (modèle MG) 106
4.2 Taux d'appariements du modèle biparti étendu (MBÉ) 106
4.2.1 Étude des taux d'appariements du modèle MBÉ 106
4.2.2 Preuve alternative de l'inclusion $\mathcal{N}_{\text{B}}^{+}(G) \subset \mathcal{W}(G)$ du Théorème 2 110
4.3 Étude de l'unicité des taux d'appariements 111
4.3.1 Conditions suffisantes à la politique-insensibilité des taux d'appariements 111
4.3.2 Exemples 118
4.3.3 Expression explicite des taux d'appariements 119
4.4 Étude de l'équité des taux d'appariements par arête 120

Bibliographie **125**

A Notations générales **127**

B Simulations **129**
B.1 Mesures à poids 129
B.2 Sous politique FCFM 129
B.2.1 Processus d'appariements : simulation du buffer 129
B.2.2 Taux d'appariements par arête 131
B.3 Sous politique ML 133
B.3.1 Processus d'appariements : simulation du buffer 133
B.3.2 Taux d'appariements par arête 134

Résumé

Les modèles d'appariements aléatoires représentent de nombreux systèmes stochastiques concrets dans lesquels des éléments de différentes *classes* sont appariés selon des règles de compatibilités spécifiées. Par exemple, on peut citer les systèmes dédiés à l'allocation d'organes, les sites de recherche d'emplois, de logements, etc. De tels modèles sont toujours associés à un triptyque d'éléments : un graphe connexe, dit *de compatibilités*, dont les sommets représentent les classes des éléments pouvant entrer dans le système et dont chaque arête relie deux classes *compatibles*, une politique d'appariements permettant de décider, en cas d'incertitude, quels appariements vont s'effectuer à l'intérieur du système, et un taux d'arrivées selon lequel les éléments entrent en son sein. Dans cette thèse, nous considérons des graphes *généralisés*, c'est-à-dire que l'on autorise l'appariement de deux éléments de la même *classe*, et nous étendons donc à ce cadre certains résultats déjà connus dans le cas de graphes simples.
La *stabilité* d'un système régi par un modèle d'appariements est une propriété très importante. En effet, elle assure que les admissions au sein du système étudié sont contrôlées de sorte que les éléments ne restent pas bloqués à l'intérieur et que leur nombre n'augmente pas indéfiniment. Il est donc essentiel que le taux d'arrivées des éléments permette au système d'être stable. Dans ce manuscrit, nous caractérisons de manière algébrique cette *zone de stabilité* pour certains modèles d'appariements (généraux, généraux avec abandons, bipartis, bipartis étendus) ou de files d'attente, dites *skill-based*.
Par ailleurs, nous démontrons que la politique d'appariements dite *First Come, First Matched* (FCFM) possède la propriété d'être *maximale* (*généralisée*), c'est-à-dire que la zone de stabilité du modèle d'appariements général associé à un graphe de compatibilités et à une politique quelconque est toujours incluse dans celle associée à ce même graphe et à FCFM. Notons que cette dernière coïncide alors avec un ensemble de mesures défini par des conditions purement algébriques. Dans ce cas, la question de l'étude des mesures permettant la stabilité des systèmes régis par un modèle d'appariements revient donc à celle, plus élémentaire, de la caractérisation d'un ensemble déterministe. Nous donnons alors un moyen de construction (simple) des mesures appartenant à celui-ci, ce qui peut s'avérer très utile pour calibrer le contrôle d'accès au système. En effet, la vérification algorithmique qu'une mesure quelconque vérifie ces conditions algébriques nécessite un nombre d'opérations polynomial en le nombre de sommets du graphe, et devient donc très coûteuse à mesure que ce cardinal augmente.
Nous explicitons également, sous une forme produit, l'expression de la loi stationnaire de l'évolution temporelle du contenu d'un système stable régi par un modèle d'appariements général et sous la politique FCFM, permettant, notamment, de calculer explicitement des caractéristiques à l'équilibre de systèmes concrets et d'estimer leurs performances en temps long. On peut ainsi, par exemple, calculer la taille moyenne à l'équilibre d'une liste d'attente dans le cadre de dons croisés de reins, ou encore, estimer le temps moyen d'attente sur une interface pair-à-pair ou un site de rencontres.
Enfin, les *taux d'appariements* associés à un modèle d'appariements (général ou biparti étendu) stable sont étudiés. Ils sont définis comme étant les fréquences asymptotiques des appariements réalisés et fournissent un critère de performance des systèmes régis par de tels modèles d'appariements, de même que les propriétés de *politique-insensibilité* et d'*équité* de ces taux, qui sont également discutées.

Mots-clés : modèles d'appariements aléatoires, graphes généralisés, politique FCFM, politique maximale, zones de stabilité, caractérisation algébrique, taux d'appariements.

Abstract

Stochastic matching models represent many concrete stochastic systems in which elements of different *classes* are matched according to specified compatibility rules. For example, we can cite systems dedicated to organs allocation, job search sites, housing allocation programs, etc. Such models are typically associated to a triplet of elements: a connected graph, called *compatibility graph*, whose vertices represent the classes of elements that can enter the system and whose edges connect two *compatible* classes, a matching policy which decides the matches to be concretely executed, in case of multiple choices, and an arrival rate according to which the elements enter within it. In this thesis, we consider *generalized* graphs, meaning that we allow the matching of two elements of the same *class*, and we therefore extend to this framework some results already known in the case of simple graphs.
The *stability* of a system governed by a matching model is a very important property. It ensures that the admissions within the system under study, are regulated, so that the elements do not accumulate in the system in the long run. It is therefore essential that the arrival rate of the elements allows the system to be stable. In this manuscript, we characterize, algebraically, this stability region for some matching models (general, general with reneging, bipartite, extended bipartite) or skill-based queueing systems.
Moreover, we demonstrate that the matching policy called *First Come, First Matched* (FCFM) has the property of being (*generalized*) *maximal*, meaning that the stability region of the general matching model associated with a compatibility graph and with any policy is always included in the one associated with this same graph and ruled by FCFM. Note that this latter then coincides with a set of measures defined by purely algebraic conditions. In this case, the study of stability of the matching model at hand boils down to the more elementary question of characterizing of a deterministic set of measures. We then give a (simple) way to construct the measures belonging to the latter set. This turns out to be very useful for admission control, as checking the algebraic conditions requires a number of operations which is polynomial in the number of vertices of the considered compatibility graph, and therefore becomes very expensive as the number of vertices grows large.
We also give, in a product form, the expression of the stationary distribution of the number-in-system process of a stable system governed by a general matching model and under the FCFM policy, allowing, in particular, to explicitly calculate characteristics at equilibrium of concrete systems and to estimate their long-time performance. We can thus, for example, calculate the size average at equilibrium of a waiting list in the case of cross-donation of kidneys, or even, estimate the average waiting time on a peer-to-peer interface or on a dating website.
Finally, the *matching rates* associated with a stable matching model (general or extended bipartite) are studied. They are defined as the asymptotic frequencies of the executed respective matchings, and provide an insightful performance criterion for the corresponding matching systems, as well as the *policy-insensitivity* and *fairness* properties of the matching rates, which are also discussed.

Keywords: stochastic matching models, generalized graphs, FCFM policy, maximal policy, stability areas, algebraic characterization, matching rates.

Introduction

Contexte, motivations pratiques, et état de l'art

Avec le développement actuel des services en ligne et de l'économie numérique, les systèmes stochastiques dans lesquels des éléments sont appariés selon des règles de compatibilités spécifiées ont récemment reçu un intérêt croissant de la part de la communauté mathématique, tant du point de vue théorique que du point de vue des applications. C'est en effet une représentation naturelle de systèmes de service dans lesquels les clients et les serveurs sont de différents types, et où certaines classes de serveurs peuvent servir certaines classes de clients. Deux problèmes typiques surviennent lors de l'étude de ces systèmes :

— *Stabilité* : Toutes les requêtes peuvent-elles être satisfaites, sans surcharge du système ? Si oui, quel est son comportement en régime stationnaire ?

— *Performance* : Quelles sont les principales caractéristiques (nombre moyen d'éléments, temps de séjour moyen, taux d'appariements,...) du système dans son état stationnaire ?

Files d'attente basées sur les compétences (ou *skill-based*)

Dans les problèmes initiaux de routages basés sur les compétences, dits *skill-based*, des serveurs (par exemple, des télé-opérateurs ayant des compétences spécifiques) de classes données (dépendantes de leurs compétences), offrent un service à des clients arrivants (ayant des besoins spécifiques, et demandant une assistance) de classes données également (dépendantes de leurs besoins). La compatibilité entre les classes de clients et de serveurs est donnée par un graphe (biparti, dans ce cas), et c'est le rôle de l'algorithme de routage de déterminer quel client doit être mis en correspondance avec quel serveur à son arrivée (voir, par exemple, [30], et la récente enquête [14]). La Figure 1 présente un exemple schématique d'un système régi par une file d'attente *skill-based*. Dans ce cadre, il est naturel d'étudier les conditions d'existence d'un état stationnaire, et, lorsque ces conditions sont réunies, de vouloir contrôler le modèle au mieux, pour des indicateurs de performance donnés (nombre moyen d'éléments dans le système, taux d'appariements, équité de ces taux,...). De tels modèles sont des systèmes classiques de files d'attente, au sens où il y a une dissymétrie entre les clients et les serveurs : les clients rentrent et sortent du système, alors que les serveurs en font partie intégrante, c'est-à-dire qu'ils restent toujours à l'intérieur et, dès qu'ils ont fini de servir un client, passent au service du suivant (avec, potentiellement, un temps d'attente entre deux services). Cependant, dans des applications telles que les interfaces pair-à-pair (BlaBlaCar, Leboncoin,...), les sites de recherche d'emplois (Meteojob, Indeed,...), les sites de rencontres, les allocations pour les greffes d'organes, etc., les clients et les serveurs peuvent jouer des rôles symétriques. Dans ce cadre, le système n'est fondamentalement qu'une interface utilisée par les éléments pour s'apparier et quitter le système par paires.

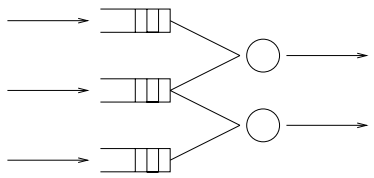

FIGURE 1 – Exemple schématique d'un système régi par une file d'attente *skill-based*.

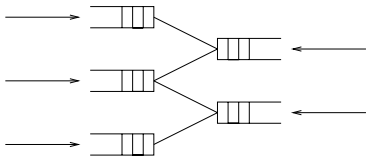

FIGURE 2 – Exemple schématique d'un système régi par un modèle d'appariements biparti (MB).

Modèles d'appariements bipartis (MB)

Pour tenir compte de cette variété d'applications, une variante des systèmes *skill-based* a été introduite dans [13] (voir aussi [3]) : ce sont les *modèles d'appariements bipartis*, notés MB, dans lesquels des couples client/serveur, dont les classes respectives sont supposées indépendantes, entrent dans le système à chaque instant. À chaque fois qu'un couple client/serveur est formé, ce dernier quitte aussitôt le système. La différence avec les modèles *skill-based* classiques est que les clients et les serveurs jouent des rôles symétriques, c'est-à-dire qu'à l'instar des clients, les serveurs entrent et sortent du système. Un graphe (ici, biparti), dit *de compatibilités*, dont les sommets représentent les classes de clients/serveurs (ou offres/demandes, patients/organes, etc.), détermine la compatibilité entre les clients et les serveurs. La liaison, par une arête, de deux sommets de ce graphe signifie la compatibilité entre les éléments dont les classes sont représentées par ces sommets. Ces *modèles d'appariements bipartis* sont adaptés à divers domaines d'application, parmi lesquels, les banques de sang, les allocations pour les greffes d'organes, les sites de recherche d'emplois, les sites de rencontres, etc. La Figure 2 présente un exemple schématique d'un système régi par un modèle d'appariements biparti. Si plusieurs éléments compatibles avec le client (respectivement, serveur) entrant sont déjà présents dans le système, c'est une règle de service (ou *politique d'appariements*) qui détermine quels éléments vont s'apparier. Dans les références [13] et [3] susmentionnées, les appariements de clients et de serveurs compatibles se font selon la *politique d'appariements* dite *First Come, First Served*, c'est-à-dire *premier arrivé, premier servi*, et notée FCFS (appelée également *First Come, First Matched*, c'est-à-dire *premier arrivé, premier apparié*, et notée FCFM). Fait intéressant, il est prouvé que, dans de tels cas, l'état stationnaire bénéficie d'une forme produit remarquable (voir [1], ainsi que l'analyse de performances ultérieure dans [16]), qui peut être généralisée à une classe plus large de systèmes avec compatibilités, telles que les files d'attente utilisant la règle de service appelée FCFS-ALIS (*Assign the Longest Idling Server*) - voir par exemple la Section 3.3.3 ou [4], ou encore [2, 10] pour un aperçu des différentes extensions des modèles MB. De plus, dans [1], une propriété de sous-additivité est démontrée, permettant, sous des conditions de stabilité et par des techniques de *couplage par le passé* (*Coupling From The Past*, noté CFTP), la construction d'un appariement bi-infini stationnaire unique des clients et des serveurs. Mentionnons également d'autres approches de tels modèles bipartis, telles que les limites fluides et de diffusion pour des systèmes d'appariements probabilistes (voir [10]), le covoiturage, etc. Cependant, si l'on se place dans le cadre du *don croisé* d'organes (voir le paragraphe consacré plus loin), ce sont des couples donneur/receveur qui entrent dans le système. Souvent, ces deux individus ont des liens familiaux (parent/enfant, par exemple), et l'hypothèse d'indépendance entre les classes respectives du donneur et du receveur n'est alors plus justifiée.

Modèles d'appariements bipartis étendus (MBÉ)

Les paramètres d'origine de [13, 3] ont alors été généralisés au cas où les types respectifs du client et du serveur entrants ne sont plus forcément indépendants, et au cas d'autres politiques d'appariements : c'est ce qu'on appelle le *modèle d'appariements biparti étendu*, noté MBÉ - voir par exemple [11, 26] pour plus de détails. D'une part, [11] fournit des conditions (qui dépendent du graphe de compatibilités et de la politique d'appariements) nécessaires, et parfois suffisantes, à la stabilité du système. D'autre part, dans [26], un résultat de *couplage par le passé* (CFTP) est obtenu, démontrant l'existence d'un appariement bi-infini unique dans divers cas de modèles MBÉ, et pour une classe de politiques d'appariements plus large que FCFS, généralisant ainsi les résultats de [1].

Modèles d'appariements généraux (MG)

Dans le but de modéliser certains systèmes concrets, le besoin s'est alors fait sentir de modifier les différents modèles susmentionnés. En effet, dans de nombreuses applications, l'hypothèse que les arrivées se font par paires peut paraître quelque peu artificielle (bien que nécessaire à la stabilité dans le cas biparti, voir

plus loin), et il est alors plus réaliste de supposer que les arrivées se font une par une. De plus, toutes les références citées jusqu'à présent supposent que le graphe de compatibilités est biparti, c'est-à-dire qu'il existe des classes de serveurs et des classes de clients facilement identifiables : donneurs/receveurs, maisons/acheteurs, emplois/demandeurs, etc. Cependant, dans de nombreux cas, le contexte exige que le graphe de compatibilités ait une forme plus générale et ne soit donc pas nécessairement biparti. Par exemple, dans les sites de rencontres (de même sexe), il n'est a priori pas possible de séparer les éléments en deux ensembles de classes sans appariement possible au sein de ces ensembles. De même, dans le cas du *don croisé* d'organes, des couples donneur/receveur *intra-incompatibles* (c'est-à-dire que la transplantation n'est pas possible entre eux deux) entrent dans le système à la recherche d'un couple compatible pour effectuer ce *don croisé* (pour plus de détails sur cette notion, se référer au paragraphe correspondant développé plus loin). Pour cette application, il convient donc, structurellement, de représenter les couples donneur/receveur comme des éléments *simples*, où la compatibilité entre les couples (et donc la liaison par une arête sur le graphe de compatibilités) signifie qu'un échange d'organe peut être réalisé entre ces deux couples (le donneur du premier couple peut donner au receveur du second, et le donneur du second peut donner au receveur du premier). En particulier, si l'on considère les groupes sanguins comme un critère de compatibilité primaire, le graphe représentant les compatibilités sanguines entre les couples n'est évidemment pas biparti. Motivé par ces observations, un modèle différent a été introduit dans [24], dans lequel les éléments arrivent un par un, et où le graphe de compatibilités est *général*, c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessairement biparti : plus précisément, dans ce que l'on appelle *modèle d'appariements général*, noté MG, les éléments, dont les classes appartiennent à un ensemble fini, noté $\mathcal{V}$, entrent un par un en temps discret dans un système (ou *buffer*). À chacune des arrivées, la classe de l'élément entrant est tirée au sort, indépendamment de tout le reste, à partir d'une loi de probabilité $\bar{\mu}$ ayant $\mathcal{V}$ pour support. Un graphe connexe G, dont l'ensemble des sommets (ou nœuds) est précisément $\mathcal{V}$, détermine la compatibilité entre les différentes classes. Alors, s'il existe un élément compatible dans le système, l'élément entrant est apparié immédiatement et les deux éléments correspondants quittent immédiatement le système pour toujours, sinon, il est stocké dans le système. C'est le rôle de la politique d'appariements, notée Φ, de déterminer, en cas de choix multiple, avec quel élément l'appariement de l'item entrant va s'effectuer. Remarquons que les modèles MG classiques ont été étudiés sous différents angles, parmi lesquels les limites fluides d'une variante en temps continu ([27]), l'optimisation ([28]), le contrôle optimal ([20, 12]), les modèles d'appariements sur les hypergraphes ([29]) ou avec impatience ([9, 22, 5]). Il a aussi été démontré récemment que les modèles MG partagent de remarquables similitudes avec les files d'attente dites *order-independent loss queues* ([15]).

Extension des modèles MG au cas de graphes généralisés

Motivés à nouveau par des applications concrètes, nous présentons dans le présent manuscrit une nouvelle extension des modèles MG. En effet, dans divers contextes, parmi lesquels les sites de rencontres (de même sexe), les sites d'auto-partage (pour lesquels les personnes allant aux mêmes endroits sont appariés), et les compatibilités sanguines dans le cadre d'un *don croisé* d'organes (pour plus de détails sur cette notion, se référer au paragraphe correspondant ci-après), il est naturel de supposer que des éléments de la même classe peuvent s'apparier ensemble. D'où la nécessité de généraliser la ligne de recherche au cas où l'architecture d'appariements est un *graphe généralisé* (c'est-à-dire un graphe admettant des *boucles* (ou *self-loops*), qui sont des arêtes reliant les sommets à eux-mêmes), plutôt qu'un graphe simple classique. Cette généralisation est un des sujets centraux du présent manuscrit. Comme on le voit facilement, le buffer d'un modèle d'appariements sur un graphe généralisé est hybride par nature : les sommets admettant une boucle (le cas échéant) possèdent au plus un élément dans le système, tandis que les sommets sans boucle (le cas échéant) peuvent s'y trouver en nombre illimité. D'autre part, dans le cas extrême où tous les sommets possèdent une boucle, le modèle est fini et peut être vu comme un système de physique statistique : c'est une chaîne de Markov irréductible sur $\{0,1\}^{\mathcal{V}}$ avec des interactions locales - voir Exemple 2 du présent manuscrit.

Un exemple concret : les dons croisés d'organes

Dans un don d'organe classique, un échange de greffon a lieu entre un donneur et un receveur *compatibles*, terme qui peut avoir plusieurs significations dans le cadre d'un don d'organe. Un premier critère évident est celui de la *compatibilité sanguine*. En effet, il est clair que si le donneur et le receveur n'ont pas des groupes sanguins compatibles, la transplantation ne pourra pas avoir lieu. Dans le cadre d'un don d'organe, il est donc nécessaire d'établir un *graphe de compatibilités sanguines* - c'est un graphe orienté car la compatibilité entre un donneur et un receveur n'est pas forcément réciproque selon leurs groupes

sanguins. Cependant, même s'ils ont deux groupes sanguins compatibles, d'autres critères biologiques (ou immunologiques) peuvent intervenir et rendre la transplantation impossible. On pourra se référer à [8] pour plus de détails concernant les dons d'organes (et, en l'occurrence, les dons de reins). La compatibilité sanguine est donc une condition nécessaire mais non suffisante à un don d'organe.

Ceci nous amène alors à étudier la situation suivante : imaginons qu'on ait deux couples donneur/receveur, notés (d_1, r_1) et (d_2, r_2) (par exemple, deux pères avec leurs fils respectifs), et que, d'un point de vue du groupe sanguin, le donneur d_1 et le donneur d_2 puissent donner tout autant au receveur r_1 qu'au receveur r_2. Maintenant, si les autres critères biologiques ne sont pas en faveur d'une transplantation du donneur d_1 vers le receveur r_1 ni du donneur d_2 vers le receveur r_2 mais qu'ils sont, par contre, favorables à une transplantation du donneur d_1 vers le receveur r_2 et du donneur d_2 vers le receveur r_1, alors on pourra avoir recours à ce que l'on appelle un *don croisé* d'organes. Un exemple schématique est donné par la Figure 3.

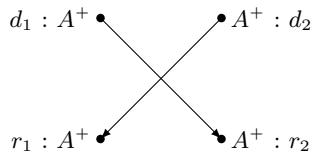

FIGURE 3 – Exemple schématique d'un don croisé d'organes, où les quatre individus impliqués sont du même groupe sanguin A^+.

Cette possibilité d'avoir recours à un don croisé d'organes nous amène donc naturellement à construire un graphe de compatibilités sanguines pour des couples donneur/receveur, construit de la manière suivante :

— Les sommets de ce graphe sont tous les couples (ordonnés) possibles formés avec les différents groupes sanguins existants - le premier élément du couple est le groupe sanguin du donneur et le second est celui du receveur.

— Un sommet (d_1, r_1) est compatible, et donc relié par une arête, avec un sommet (d_2, r_2) si et seulement si les dons de d_1 vers r_2 et de d_2 vers r_1 sont possibles (d'un point de vue du groupe sanguin).

La Figure 4 représente le graphe (orienté) des compatibilités entre les groupes sanguins A^+ et O^+, pour lesquels la règle est la suivante : O^+ peut donner à A^+ et à lui-même, mais A^+ ne peut donner qu'à lui-même.

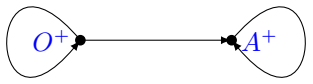

FIGURE 4 – Graphe (orienté) représentant les compatibilités sanguines entre les groupes A^+ et O^+.

On déduit alors, du graphe de la Figure 4, le graphe des compatibilités sanguines pour des couples donneur/receveur dans le cadre du don croisé d'organes, où l'on s'est restreint aux seuls groupes sanguins A^+ et O^+ (cf. Figure 5). Outre l'intérêt purement pratique et concret de cet exemple, il nous permet de légitimer

— l'introduction (et l'étude) des modèles d'appariements généraux (MG), dans lesquels le graphe de compatibilités considéré n'est plus forcément biparti - ce qui est le cas du graphe de compatibilités sanguines représenté par la Figure 5 ;

— l'étude des graphes de compatibilités contenant potentiellement des boucles, dits *graphes généralisés* - le graphe de compatibilités représenté par la Figure 5 est lui-même un graphe généralisé, ses boucles étant représentées en rouge.

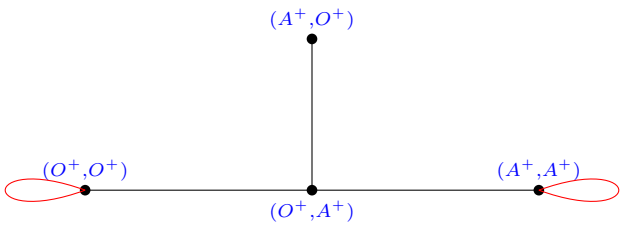

FIGURE 5 – Graphe G des compatibilités sanguines dans le cadre du don croisé d'organes, restreint aux groupes sanguins A^+ et O^+.

Résumé général sur les modèles d'appariements

Comme on l'a expliqué dans les différents paragraphes ci-dessus, dans tout modèle d'appariements (que ce soit MB, MBÉ, ou MG), les compatibilités entre les éléments pouvant entrer dans le système étudié sont résumées par un graphe G (biparti, simple, ou généralisé, selon les cas), dont les sommets représentent les différentes classes d'items pouvant entrer dans le système, et dont chaque arête relie deux classes d'éléments compatibles. Par ailleurs, une politique d'appariements Φ est nécessaire afin de décider, dans le cas où l'item entrant est compatible avec plusieurs éléments déjà présents dans le système, avec lequel l'appariement va se faire. Par exemple, la politique d'appariements *First Come, First Matched* (FCFM) permet à l'élément arrivant de s'apparier avec l'item compatible le plus ancien dans le système. La politique d'appariements *Match the Longest* (ML) permet, quant à elle, d'apparier l'élément entrant avec un item compatible dont la classe est la plus représentée dans le système (les cas d'égalité pouvant être résolus par un tirage au sort). Enfin, les éléments entrent dans le système de manière aléatoire et ce, selon une loi de probabilité $\bar{\mu}$ (ou selon un processus de Poisson d'intensité μ, si cette dernière est une mesure quelconque). La donnée du graphe G, de la politique Φ, et de la loi $\bar{\mu}$ (ou de la mesure μ), permet donc de caractériser entièrement le modèle d'appariements associé.

Zones de stabilité

La *zone de stabilité* d'un modèle d'appariements est l'ensemble des mesures sur les sommets (du graphe de compatibilités considéré), représentant les taux d'arrivées de chaque classe d'utilisateurs, rendant le système récurrent positif. Notons que ces mesures sont des lois de probabilité pour les modèles à temps discret et sont des intensités d'arrivées pour les modèles à temps continu. Comme cela sera précisé dans la suite, la condition (nécessaire) que doivent satisfaire les mesures pour pouvoir appartenir à la zone de stabilité prend la forme d'une contrainte sur les taux d'arrivées de chaque sous-ensemble de sommets, qui doivent en fait être inférieurs aux taux d'arrivées du sous-ensemble respectif des sommets voisins - une condition qui rappelle la condition de Hall pour l'existence d'un appariement parfait sur un graphe, voir [21]. Par exemple, une condition nécessaire à la stabilité des modèles MG est fournie dans [24] (voir (1.9) ci-après). En particulier, l'existence de mesures stables est équivalente au fait que le graphe ne soit pas biparti (ce qui justifie d'ailleurs, en partie, que les items entrent par paires dans les modèles MB et MBÉ - car, sinon, aucune mesure ne pourrait rendre stable les modèles associés). D'autre part, il est prouvé dans [24] que la politique d'appariements *Match the Longest*, notée ML, possède une zone de stabilité maximale, c'est-à-dire que la condition nécessaire évoquée ci-dessus est également suffisante (on dit alors que la politique ML est *maximale*). Cependant, [27] montre qu'en fait, mis à part pour une classe particulière de graphes, les politiques aléatoires ne sont jamais maximales, et qu'il existe toujours une politique de priorité stricte qui n'est pas non plus maximale. De plus, en adaptant l'argument de réversibilité dynamique de [1] aux modèles MG, [25] assure que la politique d'appariements *First Come, First Matched* (FCFM) est également maximale, et fournit, sous cette politique, l'expression de la loi de probabilité stationnaire en une forme produit. Plus récemment, suite aux travaux de [28], des politiques d'appariements plus larges, de type *Max-Weight* (incluant la politique *Match the Longest* (ML)), se sont avérées être maximales, et des inégalités de dérive ont permis de borner la vitesse de convergence du système vers l'équilibre. Dans le présent manuscrit, notre objectif est de caractériser exactement les zones de stabilité de différents modèles (modèle général MG élargi au cas de graphes de compatibilités généralisés - avec durées de vie illimitées ou limitées, modèle biparti étendu MBÉ, et certains modèles de files d'attente). En particulier, nous montrons comment plusieurs résultats de stabilité de [24, 25] peuvent être élargis au cas d'une structure d'appariements généralisée. Alors que dans de tels modèles,

la procédure typique consiste, compte tenu des taux d'arrivées (qui sont donc considérés comme une contrainte au problème), à construire un contrôle optimal (une politique d'appariements markovienne, par exemple) capable d'optimiser un critère donné, nous inversons en quelque sorte ce procédé dans le présent manuscrit : ayant fixé un contrôle capable d'atteindre la stabilité (par exemple, la politique *Match the Longest* (ML) ou la politique *First Come, First Matched* (FCFM), pour les modèles MG), nous rendons explicite la procédure de construction d'un ensemble de taux d'arrivées permettant la stabilité du système, ce qui permet de contrôler les admissions dans le système en fonction du graphe et de la politique considérés. Remarquons que, dans [7], il est démontré qu'un modèle d'appariements sur un graphe généralisé possède une zone de stabilité plus grande que le modèle correspondant sur le graphe associé pour lequel toutes les boucles ont été effacées (c'est-à-dire, son *sous-graphe maximal*). L'interaction entre les sommets possédant une boucle et leurs voisins qui n'en ont pas doit être comprise, intuitivement, de la manière suivante : les flux d'arrivées vers les sommets qui ont une boucle apparaissent comme des flux auxiliaires aidant leurs sommets voisins qui n'ont pas de boucle à ne pas trop encombrer le système - à condition que les arrivées sur les sommets avec une boucle ne s'apparient pas trop souvent entre elles. Dans le présent manuscrit, nous obtenons, entre autres, deux résultats remarquables :

— Nous montrons que, dans de nombreux cas, les taux d'arrivées rendant stable le système considéré peuvent toujours être construits comme une simple *mesure à poids* sur les arêtes du graphe, c'est-à-dire, ayant associé un nombre strictement positif (appelé *poids*) à chaque arête du graphe, la *mesure à poids* associée se définit comme étant proportionnelle, en chaque sommet i, à la somme des poids sur les arêtes adjacentes à ce sommet i.

— Nous en déduisons que, dans ces cas, les taux d'arrivées permettant la stabilité du système sont exactement les mesures invariantes pour une marche aléatoire sur les arêtes du graphe.

Le premier point nous permet, pour certaines topologies de graphes, de déterminer de manière unique les *taux d'appariements* des différentes arêtes et ce, indépendamment de la politique d'appariements choisie. Au-delà de son intérêt pratique pour le contrôle des admissions, cette omniprésence des mesures permettant la stabilité des modèles d'appariements établit un lien intéressant entre les modèles d'appariements stochastiques et les marches aléatoires sur les arêtes d'un graphe, ce qui pourrait ouvrir la voie à une piste de recherche intéressante.

Plan du manuscrit

Le présent manuscrit se découpe en quatre chapitres dont le contenu est détaillé ci-après,

Chapitre 1 : Introduction aux modèles d'appariements généraux

Le principal objectif de ce Chapitre 1 est de fournir les principaux outils et notions utiles à la compréhension des chapitres suivants. Certaines de ces notions sont également présentées, par exemple, dans les articles [24] et [25]. Nous commençons tout d'abord, dans la Section 1.1, par faire une présentation des modèles d'appariements généraux (MG) et par développer des notions afférentes, telles que les graphes de compatibilités, les processus et politiques d'appariements, ainsi que les lois d'arrivées. Nous portons à l'attention du lecteur la construction, dans la Section 1.1.2, des politiques *First Come, First Matched* (FCFM) et *Match the Longest* (ML) (vue comme un cas particulier de politique de type *Max-Weight* (MW)), politiques qui seront particulièrement utilisées dans la suite du manuscrit. Par ailleurs, une des principales contributions de cette présente thèse étant l'extension de certaines propriétés des modèles d'appariements généraux au cas de *graphes généralisés* (voir, par exemple, la Proposition 5, la Proposition 6, le Théorème 1, etc.), on se propose d'introduire cette notion dans la Section 1.1.1. Par ailleurs, l'étude concrète d'un système régi par un modèle d'appariements (général) nécessite d'avoir à disposition un *descripteur* de l'évolution de son contenu au cours du temps : c'est la fonction de la chaîne de Markov (irréductible), notée $(W_n^{\Phi,\bar{\mu}})_{n\in\mathbb{N}}$ (ou, plus simplement, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, lorsque le contexte est implicite), construite dans la Section 1.2. La caractérisation algébrique des *zones de stabilité* de certains modèles d'appariements (ou de files d'attente) - c'est-à-dire des ensembles de mesures (ou lois) d'arrivées permettant aux éléments des différents systèmes régis par ces modèles de ne pas rester indéfiniment à l'intérieur et d'empêcher ainsi que le nombre d'items dedans n'augmente indéfiniment - étant également une des contributions principales de cette thèse (voir, par exemple, les Chapitres 2 et 3), la Section 1.4 se propose de définir celle associée à un modèle d'appariements général (voir (1.5) pour le cas discret, et (1.6) pour le cas continu). Des conditions nécessaires de stabilité (voir Proposition 6), notées $\textsc{Ncond}(G)$ et $\textsc{Ncond}^+(G)$ (données, respectivement, par (1.9) et (1.10)) seront également définies. Remarquons que la notion de *maximalité* d'une politique

d'appariements, introduite initialement dans l'article [25] dans le cas du modèle d'appariements général (MG) et pour des graphes simples, sera étendue ici au cas de graphes généralisés (voir la Définition 19). Plus précisément, une politique Φ sera dite *maximale généralisée* si la zone de stabilité du modèle associé à tout graphe généralisé connexe G et à la politique Φ coïncide avec l'ensemble $\text{NCOND}(G)$, défini, lui, de manière purement algébrique. Dans ce cas, l'étude des zones de stabilité peut donc se faire directement via celle de ce nouvel ensemble $\text{NCOND}(G)$. Dans la suite, le Chapitre 2 assurera que la politique FCFM est *maximale généralisée* (voir le Théorème 1), tandis que le Chapitre 3 permettra, entre autres, de caractériser exactement les mesures de $\text{NCOND}(G)$ et d'en donner un moyen explicite (élémentaire) de construction, résolvant donc, en particulier, la question de la caractérisation des mesures permettant la stabilité des systèmes régis par le modèle d'appariements général (MG) associé à tout graphe généralisé connexe G (qui n'est pas biparti) et à toute politique d'appariements $\Phi \in \text{POL}$ maximale généralisée (et donc, en particulier, pour $\Phi = \text{FCFM}$). Enfin, le Theorem 1 de [24], qui assure qu'un modèle d'appariements général (MG) ne peut jamais être stable dès lors que le graphe de compatibilités (simple) est biparti, sera étendu au cas de graphes généralisés connexes (voir la Proposition 9).

Chapitre 2 : Maximalité généralisée de la politique FCFM et loi stationnaire

Les modèles d'appariements généraux (MG) sur des graphes simples (et donc, en particulier, sans boucle) ont été introduits initialement dans l'article [24], et la stabilité de ces modèles sous la politique FCFM a été étudiée dans [25]. Le Theorem 1, résultat majeur de cette dernière référence, assure en particulier la *maximalité* de la politique FCFM et fournit, pour cette politique (et sous une forme produit remarquable), l'expression de l'unique loi de probabilité stationnaire de la chaîne de Markov $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, représentant l'évolution temporelle du contenu du système. L'intérêt de l'étude des modèles d'appariements généraux (MG) pour des *graphes généralisés* ayant été mis en évidence, dans l'Introduction, par l'exemple des *dons croisés* d'organes, il est donc naturel de vouloir généraliser certains résultats obtenus dans [24] et [25] à ce cadre plus général. Notons qu'une bonne partie de ceux de [24] ont déjà été étendus au cours du Chapitre 1 (voir, par exemple, la Proposition 5, la Proposition 6, et la Proposition 9). Les objectifs du Chapitre 2 du présent manuscrit sont donc multiples :

— Étendre la propriété de *pseudo-réversibilité* énoncée dans le Lemma 3 de [25] au cas de graphes généralisés (cf. Proposition 15).

— Déduire du point précédent la généralisation du Theorem 1 de [25] au cas de graphes généralisés, c'est-à-dire prouver que la politique FCFM est *maximale généralisée* (au sens de la Définition 19) et donner, pour cette politique et sous une forme produit, l'expression de l'unique loi de probabilité stationnaire de la chaîne de Markov $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (cf. Théorème 1).

— Caractériser, à l'aide du Théorème 1 évoqué ci-avant, les graphes généralisés *stabilisables*, c'est-à-dire ceux pour lesquels on peut trouver une politique d'appariements et une loi d'arrivées rendant stable le modèle d'appariements général associé (cf. Corollaire 1). Remarquons que ce résultat généralise l'assertion (16) du Theorem 2 de [24].

— Faire apparaître, à l'aide de l'étude des cycles généralisés réalisée dans la Section 2.9, un lien naturel avec le Chapitre 3 suivant (cf. Remarque 6).

La construction de deux chaînes de Markov auxiliaires qui ont des dynamiques opposées, notées $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Sections 2.1 et 2.2), qui seront mises en lien à l'aide d'un schéma de *pseudo-réversibilité* (Section 2.4) nous permettant de prouver leur récurrence positive sous la condition $\text{NCOND}(G)$, définie par (1.7), et de déterminer l'expression de leurs lois de probabilité stationnaires respectives, conduira alors, toujours sous cette même condition, à la récurrence positive de la chaîne de Markov $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi qu'à l'expression de sa loi stationnaire (en « projetant » celle de $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'espace d'états $\mathbb{W}$ de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$) (Sections 2.5 et 2.6), avant que le Théorème 1 ne statue définitivement sur la maximalité généralisée de la politique FCFM. Les techniques de preuve utilisées s'inspirent de celles usitées dans la référence [25] dont on souhaite étendre certains résultats. On notera cependant l'utilisation judicieuse du Lemme 3 et de la Proposition 17, permettant de simplifier certains arguments de preuve de la référence [25] initiale. Enfin, l'étude structurelle du cycle généralisé (Section 2.9) permettra notamment de faire apparaître certaines questions intéressantes (cf. Remarque 6), motivant le Chapitre 3.

Ce Chapitre 2 présente une version étendue de certains résultats énoncés dans l'article [7], publié en 2021. Pour une parfaite information, le lecteur intéressé par d'autres résultats (qui ne sont pas développés dans le présent manuscrit) concernant les modèles d'appariements généraux dans le cas de graphes généralisés connexes pourra consulter cette même référence [7]. Il y est notamment prouvé que certaines politiques de type *Max-Weight* (MW), parmi lesquelles la politique *Match the Longest* (ML), sont maximales généralisées (voir Theorem 4.7 de [7]).

Chapitre 3 : Caractérisation algébrique de plusieurs zones de stabilité

La *stabilité* d'un système régi par un modèle d'appariements est une propriété très importante. En effet, elle assure que les admissions au sein du système étudié sont contrôlées de sorte que les éléments ne restent pas bloqués à l'intérieur et que leur nombre n'augmente pas indéfiniment. Il est donc important que les éléments entrent dans le système de façon « raisonnée », c'est-à-dire que le taux (ou la loi) d'arrivées des éléments permette au système d'être *stable* : elle doit en fait appartenir à ce qu'on appelle la *zone de stabilité* du modèle. Le fait que la politique FCFM soit maximale généralisée, propriété démontrée dans le Chapitre 2 précédent (cf. Théorème 1), nous permet de voir cette *zone de stabilité* (associée dans le cas précité à un graphe G qui n'est pas biparti et à la politique FCFM) sous un nouvel angle. En effet, cette zone coïncide alors avec un ensemble défini uniquement via des conditions algébriques, noté $\textsc{Ncond}(G)$. Pour avoir accès à une loi d'arrivées rendant stable le modèle associé, il suffit donc d'en trouver une qui appartient à ce nouvel ensemble algébrique. Il est alors naturel d'essayer de vérifier ces conditions algébriques de manière algorithmique. La Proposition 1 de [24] affirme que cela est possible, mais l'algorithme qui est proposé (et qui a, par ailleurs, la meilleure complexité de ce qui est fourni dans la littérature) nécessite cependant un nombre d'opérations de l'ordre de $O(|\mathcal{V}|^3)$, ce qui, évidemment, devient très coûteux algorithmiquement dès lors que $|\mathcal{V}|$ augmente. Nous avons donc la nécessité d'obtenir une façon (beaucoup) plus efficace pour trouver une mesure appartenant à l'ensemble $\textsc{Ncond}(G)$. Ce Chapitre 3 va justement permettre de caractériser exactement cet ensemble et de donner un moyen (très) simple de construction des mesures en son sein. Nous irons même plus loin en faisant de même pour certains autres modèles d'appariements (bipartis, bipartis étendus, généraux avec abandons) et de files d'attente, dits *skill-based*. Cette étude permet donc, sous de bonnes conditions (sur le graphe de compatibilités G et la politique Φ), de construire aisément des taux (ou lois) d'arrivées permettant de rendre stable le modèle étudié. On commencera tout d'abord, dans la Section 3.1, par répondre à la question Q.1 (cf. Remarque 6) laissée en suspens à la fin du Chapitre 2, en premier lieu dans le cas du cycle généralisé (cf. Proposition 27), puis, élargi au cas du graphe généralisé (cf. Proposition 28). Les questions Q.2 et Q.3 restant, quant à elles, encore à approfondir, nous proposons ensuite quelques notions préliminaires à cette étude à venir. Remarquons notamment la définition des mesures *à poids* (cf. Définition 31) et la présentation de différents modèles d'appariements (bipartis, bipartis étendus, généraux avec abandons) et de files d'attente (dites *skill-based*) (cf. Section 3.3). Les résultats principaux du Chapitre 3, notamment les réponses aux questions Q.2 et Q.3 susmentionnées, ainsi que la caractérisation algébrique de certaines zones de stabilité associées aux différents modèles précités, seront présentés dans la Section 3.4. Une procédure de construction (très) simple des mesures appartenant à ces différentes zones sera également fournie à chaque fois. En plus de tout ceci, nous portons à votre attention les éléments intéressants suivants :

— La mise en évidence d'un lien entre les mesures rendant stables certains modèles d'appariements et les mesures invariantes réversibles pour une marche aléatoire sur les arêtes d'un graphe généralisé connexe (cf. Corollaire 2 et Corollaire 3).

— L'intrigante utilisation d'un résultat d'analyse matricielle, le *lemme de Farkas matriciel*, dans la preuve du Théorème 2 (cf. Section 3.7.1.2 et Section 3.7.2.3).

— L'utilisation d'éléments de théorie des flots dans la preuve du Théorème 3, dans le cas d'un graphe biparti (cf. Section 3.10.2).

Dans un souci de transparence, remarquons que ce Chapitre 3 présente une version étendue de certains résultats énoncés dans l'article [6], pré-publié en 2021.

Chapitre 4 : Étude des taux d'appariements

Dans le Chapitre 2 et le Chapitre 3, nous avons étudié certaines caractéristiques et critères de performance de différents modèles d'appariements (ou de files d'attente), parmi lesquelles

— la loi stationnaire, donnée sous une forme produit explicite, de la chaîne $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représentant l'évolution temporelle du contenu d'un système régi par un modèle d'appariements général (MG), pour un graphe de compatibilités G qui n'est pas biparti et sous la politique FCFM (cf. Théorème 1) ;

— quelques caractéristiques du système à l'équilibre, dans le cadre précité, comme par exemple, sa taille moyenne, le temps moyen d'attente d'un élément en son sein, la probabilité qu'un élément doive patienter avant d'être apparié, etc. (cf. Section 2.7) ;

— la zone de stabilité de certains modèles d'appariements (généraux, généraux avec abandons, bipartis, bipartis étendus) et de files d'attente (dites *skill-based*) - voir, par exemple, le Théorème 2, le Corollaire 2, le Corollaire 3, le Théorème 3, le Corollaire 4, la Proposition 30, et la Proposition 31.

Le Chapitre 4 va, quant à lui, s'intéresser à un autre critère de performance du système : les taux d'appariements. Dans un système régi par un modèle d'appariements (général (MG) ou biparti étendu (MBÉ)) stable, cette quantité est définie, pour chaque arête $(i, j) \in \mathcal{E}$ donnée du graphe (généralisé) connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ considéré, comme étant la fréquence asymptotique des appariements réalisés entre i et j (cf. Section 4.1 et Section 4.2.1). L'étude faite dans ce Chapitre 4 aura plusieurs objectifs, dont celui

— pour toute mesure $\bar{\mu}$ (respectivement, $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)$) permettant la stabilité d'un modèle d'appariements général (MG) (respectivement, biparti étendu (MBÉ)) donné, de déterminer explicitement - à une constante multiplicative strictement positive près - la famille de *poids* α telle que $\bar{\mu} = \bar{\mu}^\alpha$ (cf. Corollaire 6) (respectivement, telle que $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_1^\alpha$ et $\tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_2^\alpha$, où les mesures $\tilde{\mu}_1^\alpha$ et $\tilde{\mu}_2^\alpha$ sont définies par (4.10) (cf. Corollaire 8)) ;

— de fournir une preuve alternative directe de deux inclusions du Théorème 2 (voir le Corollaire 6 et la remarque faite au début de la Section 3.7.1.2, ainsi que le Corollaire 8 et la Section 4.2.2) ;

— de mettre en évidence la *politique-insensibilité* des taux d'appariements, c'est-à-dire le fait qu'ils restent inchangés quelle que soit la politique Φ implémentée, pour certains « types » de graphes de compatibilités (généralisés) connexes (cf. Théorème 6) ;

— de fournir une expression explicite des taux d'appariements, sous certaines hypothèses (cf. Proposition 45) ;

— d'étudier l'*équité* des taux d'appariements par arête, un autre critère de performance de systèmes régis par des modèles d'appariements (cf. Théorème 7).

Enfin, toujours dans un souci de transparence, nous portons votre attention sur le fait que ce Chapitre 4 présente une version étendue de certains résultats présentés dans l'article [6], pré-publié en 2021.

Remarque importante : Les principales notations utilisées dans le manuscrit sont recensées dans l'Annexe A. On pourra s'y référer si besoin.

Chapitre 1

Introduction aux modèles d'appariements généraux

Sommaire

1.1 Présentation des modèles d'appariements généraux 14
1.1.1 Graphes de compatibilités généralisés 14
1.1.2 Processus et politiques d'appariements 16
1.1.3 Arrivées sur les sommets 18
1.1.4 Bilan sur les modèles d'appariements généraux 19
1.2 La chaîne $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son espace d'états $\mathbb{W}$ 19
1.2.1 Définition et structure markovienne de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 19
1.2.2 Structure de $\mathbb{W}$ et caractérisation 20
1.2.3 Irréductibilité et $2-$périodicité de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 22
1.3 Un premier exemple de processus d'appariements 22
1.4 Les ensembles $\textsc{stab}(G,\Phi)$ et $\textsc{Ncond}(G)$ 24
1.4.1 Les zones de stabilité $\textsc{stab}(G,\Phi)$ et $\textsc{stab}^+(G,\Phi)$ 24
1.4.2 Ensembles $\textsc{Ncond}(G)$ et $\textsc{Ncond}^+(G)$, et liens avec $\textsc{stab}(G,\Phi)$ et $\textsc{stab}^+(G,\Phi)$ 24
1.4.3 Ensembles $\widetilde{\textsc{Ncond}}(G)$ et $\widetilde{\textsc{Ncond}}^+(G)$, et liens avec $\textsc{Ncond}(G)$ et $\textsc{Ncond}^+(G)$ 26
1.4.4 Graphes bipartis et lien avec $\textsc{Ncond}(G)$ et $\textsc{Ncond}^+(G)$ 28
1.5 Preuves du Chapitre 1 29
1.5.1 Preuve de la Proposition 2 29
1.5.2 Preuve de la Proposition 4 30

L'objectif premier de ce Chapitre 1 est de fournir les principaux outils utiles aux chapitres suivants. Plus précisément, nous présentons les modèles d'appariements généraux (d'abord en temps discret, puis une extension en temps continu), ainsi que la chaîne de Markov $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représentant l'évolution temporelle du contenu du système. Enfin, la zone de stabilité de ces modèles d'appariements, ainsi qu'une condition nécessaire à cette stabilité seront étudiées. Certaines de ces notions sont également présentées, par exemple, dans les articles [24] et [25].

1.1 Présentation des modèles d'appariements généraux

Nous disposons d'éléments de certains types, étiquetés par leur classe d'appartenance respective, et qui ne sont pas distinguables des autres éléments de la même classe. On se propose alors de faire entrer un par un certains de ces éléments dans un système « physique », que l'on appellera parfois *buffer* dans la suite. Typiquement, ces éléments peuvent représenter des personnes dans une salle d'attente, des donneurs et des receveurs d'organes, etc. Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des classes d'éléments et numérotons-les afin d'identifier les ensembles $\mathcal{V}$ et $[\![1;|\mathcal{V}|]\!]$, où $|\mathcal{V}| = \mathrm{Card}(\mathcal{V})$ représente le *cardinal* de l'ensemble $\mathcal{V}$, c'est-à-dire le nombre de ses éléments. Dans tout le manuscrit, on s'autorise à confondre librement un élément avec sa classe, c'est-à-dire qu'au lieu d'écrire « un élément de classe $i \in \mathcal{V}$ », on pourra écrire simplement « un élément $i \in \mathcal{V}$ ».

1.1.1 Graphes de compatibilités généralisés

De par leur structure interne, certaines classes d'éléments sont *compatibles* entre elles. Typiquement, ce peut être le cas d'un donneur et d'un receveur d'organe qui sont compatibles biologiquement et pour lesquels un transfert d'organe (transplantation) est possible. Tous ces liens de compatibilités peuvent être résumés par un graphe G, dont chacun des sommets (ou nœuds) correspond à un élément de l'ensemble $\mathcal{V}$ et dont les arêtes représentent les compatibilités entre les différentes classes d'éléments : une arête est présente entre deux sommets du graphe si et seulement si les classes représentées par ces deux sommets sont compatibles entre elles. Lorsque deux classes $u \in \mathcal{V}$ et $v \in \mathcal{V}$ sont compatibles (et donc reliées par une arête), on note $u - v$. Dans le cas contraire, on note $u \not- v$. Par construction de ce modèle, remarquons que les arêtes du graphe G sont structurellement non-orientées, et définissons alors

$$\overleftrightarrow{\mathcal{E}} \triangleq \{(u,v) : u - v,\ u \in \mathcal{V},\ v \in \mathcal{V}\} \subset \mathcal{V}^2, \tag{1.1}$$

l'ensemble des couples de sommets reliés par une arête. Remarquons ainsi que chaque arête du graphe G (qui est non-orienté) peut être caractérisée par le couple (non-ordonné) des deux sommets qu'elle relie : en effet, $u \in \mathcal{V}$ et $v \in \mathcal{V}$ sont deux classes compatibles si et seulement si l'arête (u,v) est présente dans le graphe G. Cependant, comme les couples (u,v) et (v,u) (différents dans $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}$ si u et v sont distincts) représentent la même arête, l'ensemble $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}$ n'est pas en bijection avec l'ensemble des arêtes du graphe G, mais l'est, est en réalité, structurellement, avec l'ensemble des arêtes *orientées* du graphe G. Afin de construire proprement un ensemble qui est en bijection naturelle avec l'ensemble des arêtes de G, il convient d'introduire la relation binaire sur $\mathcal{V}^2$ suivante,

Définition 1

On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{V}^2$ par :

$$\forall((i_1,j_1),(i_2,j_2)) \in \mathcal{V}^2 \times \mathcal{V}^2,\ (i_1,j_1)\ \mathcal{R}\ (i_2,j_2) \Leftrightarrow [i_1 = i_2 \ \underline{\text{et}}\ j_1 = j_2] \text{ ou } [i_1 = j_2 \ \underline{\text{et}}\ j_1 = i_2].$$

On peut montrer que la relation binaire $\mathcal{R}$ définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{V}^2$. On note alors $\mathcal{V}^2/_{\mathcal{R}}$ l'ensemble de ses classes d'équivalence et on ne fera pas, dans la suite, de distinction entre une classe et ses représentants. Remarquons que l'ensemble $\mathcal{E} \triangleq \overleftrightarrow{\mathcal{E}}/_{\mathcal{R}}$ est alors en bijection naturelle avec l'ensemble des arêtes (non-orientées) de G. Par abus de langage, on dit que $\mathcal{E}$ est *l'ensemble des arêtes de G* et on note $G = (\mathcal{V},\mathcal{E})$, le *graphe de compatibilités*.

Étudions maintenant la structure de l'ensemble $\mathcal{E}$ de ses arêtes et de l'ensemble $\mathcal{V}$ de ses sommets. Dans certaines applications telles que les sites de rencontre, les interfaces pair-à-pair et les *dons croisés* d'organes (voir le paragraphe correspondant, dans l'Introduction), il est naturel de supposer que des éléments de la même classe peuvent s'apparier ensemble. Ceci conduit naturellement à décomposer l'ensemble des arêtes

de la façon suivante,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{S}} \uplus \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{c},$$

où

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}} \triangleq \{(u,v) \in \mathcal{E} : u = v\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{c} \triangleq \{(u,v) \in \mathcal{E} : u \neq v\}.$$

Définition 2

Une arête $(u,u) \in \mathcal{E}$ est appelée boucle (ou self-loop, en anglais) et $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ représente donc l'ensemble des boucles du graphe associé.

De manière similaire à l'ensemble des arêtes, il est naturel de décomposer l'ensemble des sommets d'un graphe de la manière suivante,

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathcal{S}} \uplus \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{c},$$

où

$$\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \triangleq \{u \in \mathcal{V} : (u,u) \in \mathcal{E}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{c} \triangleq \{u \in \mathcal{V} : (u,u) \notin \mathcal{E}\}.$$

Définition 3

On dit qu'un sommet $u \in \mathcal{V}$ tel que $(u,u) \in \mathcal{E}$ possède une boucle et $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ représente donc l'ensemble des sommets du graphe qui ont une boucle.

Rappelons qu'un graphe est dit *simple* s'il ne contient qu'une arête au maximum entre deux sommets.

Ces nouvelles définitions nous permettent d'introduire la notion de graphe généralisé,

Définition 4

On dit qu'un graphe G est un graphe généralisé (ou multigraphe simple) si c'est un graphe simple classique (c'est-à-dire avec $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \varnothing$) ou si c'est un graphe simple qui contient des boucles (c'est-à-dire avec $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing$).

Par ailleurs, rappelons qu'un graphe (ou graphe généralisé) $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est *connexe* si pour tout couple de sommets $(u,v) \in \mathcal{V}^2$, il existe une chaîne d'arêtes reliant u à v, c'est-à-dire s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ et des sommets $u_1, u_2, \ldots, u_k \in \mathcal{V}$ tels que $u - u_1 - u_2 - \cdots - u_k - v$.

Voyons dès à présent un exemple pour fixer les idées sur toutes les notations introduites jusqu'à présent,

Exemple 1

Pour le graphe généralisé $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ représenté par la Figure 1.1, on a :

- $\mathcal{V} = \{1,2,3,4\}$, *avec* $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \{1\}$ *et* $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{c} = \{2,3,4\}$;
- $\mathcal{E} = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),(3,4)\}$, *avec* $\mathcal{E}_{\mathcal{S}} = \{(1,1)\}$ *et* $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}^{c} = \{(1,2),(2,3),(2,4),(3,4)\}$.

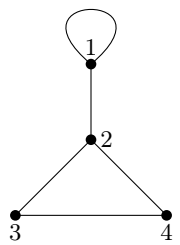

FIGURE 1.1 – Exemple d'un graphe généralisé G (connexe).

Maintenant que nous avons détaillé la structure du graphe de compatibilités, il est temps d'expliquer ce qui se passe dans le système étudié au fur et à mesure de l'arrivée des éléments à l'intérieur. Dans ce but, introduisons la notation suivante,

Définition 5

Pour tout sous-ensemble $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, on définit l'ensemble des voisins d'éléments de $\mathcal{U}$ par :

$$\mathcal{E}(\mathcal{U}) \triangleq \{v \in \mathcal{V} : \exists u \in \mathcal{U},\ (u,v) \in \mathcal{E}\}.$$

Si $v \in \mathcal{V}$, on écrit simplement

$$\mathcal{E}(v) \triangleq \mathcal{E}(\{v\}).$$

1.1.2 Processus et politiques d'appariements

Comme expliqué dans la Section 1.1.1, les éléments entrent un par un dans le système étudié. À l'arrivée d'un élément (ou item) en son sein, disons $i \in \mathcal{V}$, deux cas possibles se présentent :

1. Soit un élément voisin $j \in \mathcal{E}(i)$ se trouve déjà dans le système et, dans ce cas, les deux éléments i et j s'apparient et le quittent.
2. Soit aucun élément de $\mathcal{E}(i)$ n'est présent dans le système et, dans ce cas, l'élément i est stocké (au moins jusqu'à l'arrivée du suivant).

Cette procédure soulève naturellement une question : si un élément entrant dans le système est compatible avec plusieurs autres éléments déjà présents, comment choisir celui avec lequel l'appariement va s'effectuer ?

Pour répondre à cette interrogation, introduisons la notion suivante,

Définition 6

Nous appelons politique d'appariements une règle de décision non-ambiguë qui permet de déterminer, dans le cas où il existe plusieurs items compatibles dans le système, avec lequel d'entre eux l'élément entrant va s'apparier.

Définition 7

Une politique d'appariements Φ est dite admissible si le choix de l'appariement de chaque item entrant ne dépend que du contenu du système à l'instant où il y entre (et éventuellement d'un tirage aléatoire indépendant). On note POL *l'ensemble des politiques d'appariements admissibles.*

On verra, dans la Section 1.2, que l'état du système au temps $n \in \mathbb{N}$ est représenté par le mot $W_n \in \mathbb{W}$, composé des classes des éléments pas encore appariés au temps n, sous politique Φ, écrites dans leur ordre respectif d'arrivée. En notant alors $\mathbb{W} \subset \mathcal{V}^*$ l'ensemble des « états possibles du système » lors d'un processus d'appariements, une politique d'appariements admissible Φ peut être caractérisée par une action de $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{W}$, notée

$$\begin{array}{rcccl} \odot_\Phi & : & \mathbb{W} \times \mathcal{V} & \to & \mathbb{W} \\ & & (w, v) & \mapsto & w' = w \odot_\Phi v, \end{array} \tag{1.2}$$

qui, à un état w du système et à un élément v entrant, associe le nouvel état w' du système à l'instant suivant. L'action $\odot_\Phi$ joue, en pratique, le rôle d'une fonction de mise à jour (voir la Section 1.2) et peut potentiellement être aléatoire.

Donnons maintenant quelques exemples de constructions de politiques admissibles à l'aide d'une action de ce type. Afin d'aider à la formalisation, introduisons d'abord les notations suivantes, où $\mathcal{A}^*$ représente l'ensemble des mots finis sur un alphabet $\mathcal{A}$ (fini),

Définition 8

Pour tout ensemble fini $\mathcal{A}$, tout mot $w = w_1 \dots w_q \in \mathcal{A}^*$ et tout sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, on définit le nombre d'occurrences d'éléments de $\mathcal{B}$ dans le mot w par :

$$|w|_{\mathcal{B}} \triangleq \mathrm{Card}\left(\{i \in [\![1; q]\!] : w_i \in \mathcal{B}\}\right) = \sum_{b \in \mathcal{B}} |w|_b,$$

où, pour toute lettre $a \in \mathcal{A}$,

$$|w|_a \triangleq |w|_{\{a\}}$$

est le nombre d'occurrences de la lettre a dans le mot w.
La taille (ou longueur) $|w|$ du mot w est alors égale à la quantité précédente lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, c'est-à-dire

$$|w| \triangleq |w|_{\mathcal{A}} = \sum_{a \in \mathcal{A}} |w|_a.$$

Définition 9

Pour tout ensemble fini $\mathcal{A}$, tout mot $w = w_1 \dots w_q \in \mathcal{A}^*$ et tout $i \in [\![1; |w|]\!]$, on note

$$w_{[i]} \triangleq w_1 \dots w_{i-1} w_{i+1} \dots w_q,$$

le mot de taille $|w| - 1$, obtenu à partir de w en effaçant sa $i^{\text{ème}}$ lettre.
De plus, on note

$$[w] = (|w|_a)_{a \in \mathcal{A}} \in \mathbb{N}^{\mathcal{A}}$$

l'image commutative de w.

Exemples de politiques d'appariements qui dépendent de l'ordre des arrivées.
La politique FCFM (abréviation de *First Come, First Matched*, ou *premier arrivé, premier apparié*, en français) permet à chaque élément $i \in \mathcal{V}$ entrant dans le système de s'apparier, parmi les éléments candidats, avec celui qui est dans le système depuis le plus longtemps. Elle est construite à l'aide de l'action suivante,

Définition 10 (*Politique* FCFM)

Pour tout mot $w = w_1 \dots w_{|w|} \in \mathbb{W}$ et tout élément $v \in \mathcal{V}$,

$$w \odot_{\text{FCFM}} v \triangleq \begin{cases} wv & \text{si } |w|_{\mathcal{E}(v)} = 0\,; \\ w_{[\varphi(w,v)]} & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec

$$\varphi(w, v) = \min\{k \in [\![1; |w|]\!] : w_k \in \mathcal{E}(v)\}.$$

La politique LCFM (abréviation de *Last Come First Matched*, ou *dernier arrivé, premier apparié*, en français) permet à chaque élément $i \in \mathcal{V}$ entrant dans le système de s'apparier, parmi les éléments candidats, avec celui qui est dans le système depuis le moins longtemps. Elle est construite à l'aide de l'action suivante,

Définition 11 (*Politique* LCFM)

Pour tout mot $w = w_1 \dots w_{|w|} \in \mathbb{W}$ et tout élément $v \in \mathcal{V}$,

$$w \odot_{\text{LCFM}} v \triangleq \begin{cases} wv & \text{si } |w|_{\mathcal{E}(v)} = 0\,; \\ w_{[\varphi(w,v)]} & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec

$$\varphi(w, v) = \max\{k \in [\![1; |w|]\!] : w_k \in \mathcal{E}(v)\}.$$

Exemples de politiques d'appariements indépendantes de l'ordre des arrivées.
Dans le cas où la politique d'appariements considérée ne dépend pas de l'ordre des arrivées des éléments dans le système, l'ensemble des états possibles du système peut alors se restreindre à l'ensemble

$$[\mathbb{W}] \triangleq \{[w] : w \in \mathbb{W}\} \subset \mathbb{N}^{\mathcal{V}}.$$

Pour tout $x \in [\mathbb{W}]$ et tout $v \in \mathcal{V}$, définissons

$$\mathcal{P}(x, v) \triangleq \{j \in \mathcal{E}(v) : x(j) > 0\},$$

l'ensemble des classes d'éléments disponibles et compatibles avec l'élément v si le contenu du système est représenté par le vecteur x.
Une politique d'appariements Φ, indépendante de l'ordre des arrivées des éléments, est caractérisée entièrement par une application

$$\begin{array}{rcccc} p_\Phi & : & [\mathbb{W}] \times \mathcal{V} & \to & \mathcal{V} \\ & & (x, v) & \mapsto & p_\Phi(x, v), \end{array}$$

où $p_\Phi(x, v) \in \mathcal{P}(x, v)$ représente la classe de l'élément choisi pour s'apparier, sous la politique Φ, avec l'item de classe v entrant dans le système, dont le contenu est représenté par le vecteur x.

Ainsi, l'arrivée d'un élément $v \in \mathcal{V}$ entraîne l'action suivante sur le contenu du système :

$$\begin{array}{rcl} \circledcirc_\Phi \ : \ [\mathbb{W}] \times \mathcal{V} & \to & [\mathbb{W}] \\ (x, v) & \mapsto & x \circledcirc_\Phi v \triangleq \begin{cases} x + \mathbf{e}_v & \text{si } \mathcal{P}(x,v) = \varnothing\,; \\ x - \mathbf{e}_{p_\Phi(x,v)} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Les politiques de type *Max-Weight* (MW) ne se basent, pour décider des appariements, que sur le nombre d'items de chaque classe présents dans le système et d'une récompense associée à chaque arête. Formellement, pour toute arête $(i,j) \in \mathcal{E}$, notons $w_{i,j}$ la récompense associée à un appariement entre i et j, et fixons un paramètre $\beta \in \mathbb{R}$. Ainsi, dans un système dont le contenu est représenté par $x \in [\mathbb{W}]$, l'élément choisi pour s'apparier avec un item de classe $v \in \mathcal{V}$ entrant est donné par

$$p_\Phi(x,v) \triangleq \operatorname*{argmax}_{j \in \mathcal{P}(x,v)} (\beta x(j) + w_{v,j}),$$

où les cas d'égalité sont tranchés par un tirage aléatoire uniforme.
Plusieurs cas particuliers sont remarquables :

— Si $\beta > 0$ et que les récompenses sont constantes (c'est-à-dire $w_{i,j} = w_{i',j'}$, pour toutes arêtes $(i,j) \in \mathcal{E}$ et $(i',j') \in \mathcal{E}$), alors chaque item de classe $v \in \mathcal{V}$ arrivant est apparié avec un item compatible dont la classe est la plus représentée dans le système (les cas d'égalité étant tranchés par un tirage aléatoire uniforme).
Cette politique particulière est appelée *Match the Longest* (ML).

— Si $\beta < 0$ et que les récompenses sont constantes, alors chaque item de classe $v \in \mathcal{V}$ arrivant est apparié avec un item compatible dont la classe est la moins représentée dans le système (les cas d'égalité étant tranchés par un tirage aléatoire uniforme).
Cette politique particulière est appelée *Match the Shortest* (MS).

— Si $\beta = 0$ et que $w_{i,j} \neq w_{i,j'}$ pour tout $i \in \mathcal{V}$ et tous $j \neq j' \in \mathcal{E}(i)$, alors la politique d'appariements est de type *priorité*, c'est-à-dire que pour tout élément $v \in \mathcal{V}$, un ordre de préférence pour l'appariement est établi, en amont, entre tous les voisins de v.

Pour de plus amples détails ou exemples concernant les politiques d'appariements, on pourra par exemple se référer aux articles [24] et [7]. Maintenant que l'on sait comment se déroule le processus d'appariements et comment le graphe de compatibilités et la politique d'appariements interviennent dans tout ceci, introduisons la notion de loi d'arrivées sur les sommets.

1.1.3 Arrivées sur les sommets

Pour l'instant, nous avons décrit le fonctionnement du processus d'appariements à l'intérieur du système (en fonction du graphe de compatibilités $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et de la politique d'appariements admissible Φ choisis), sans expliciter comment se font les entrées des différents items en son sein. Ces entrées se produisent de manière aléatoire, selon une certaine loi de probabilité : la *loi d'arrivées $\bar{\mu}$ sur les sommets.*

Pour formaliser cette notion, fixons un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel seront définies toutes les variables aléatoires considérées dans la suite du manuscrit, et précisons que, dans toute la suite, on s'autorisera librement à confondre une variable aléatoire avec sa réalisation.

Définissons alors, sur cet espace, les variables aléatoires $(V_i)_{i \geqslant 1}$ (à valeurs dans l'ensemble des sommets $\mathcal{V}$ du graphe de compatibilités $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ fixé) qui sont les classes des éléments entrant dans le système étiquetées par leur ordre d'arrivée, c'est-à-dire que V_1 est le premier élément entrant dans le système, V_2 est le deuxième, etc. Si l'on considère un modèle à temps discret, on peut supposer que, pour tout $i \geqslant 1$, V_i est l'élément entrant dans le système au temps i. Tout au long du manuscrit, on fera l'hypothèse que les variables aléatoires $(V_i)_{i \geqslant 1}$ sont indépendantes et identiquement distribuées, selon une *loi d'arrivées $\bar{\mu}$ sur $\mathcal{V}$*. Ainsi,

$$\forall i \geqslant 1,\ \forall j \in \mathcal{V},\ \mathbb{P}(V_i = j) = \bar{\mu}(j),$$

et on supposera, sans perte de généralité, que le support de $\bar{\mu}$ est $\mathcal{V}$, c'est-à-dire que $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, où $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ représente l'ensemble des mesures de probabilité de support $\mathcal{V}$.

Enfin, en notant $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ l'ensemble des mesures positives finies de support $\mathcal{V}$, dans le cas où $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$, on garde le même formalisme mais les arrivées de chaque item $i \in \mathcal{V}$ dans le système se font selon un

processus de Poisson d'intensité $\mu(i)$ et indépendamment de tout le reste. La mesure μ est alors vue comme un *taux* d'arrivées dans le système (se reporter par exemple à [27] pour plus de détails).

Dans toute la suite du manuscrit, pour tout ensemble fini $\mathcal{A}$, à toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ sera associée la mesure normalisée $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$, donnée par

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu(\mathcal{A})}.$$

1.1.4 Bilan sur les modèles d'appariements généraux

Un modèle d'appariements général est donc caractérisé par un triptyque d'éléments :

1. **Un graphe généralisé (supposé connexe)** $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, dont les sommets sont les classes d'items pouvant entrer dans le système et dont les arêtes modélisent les compatibilités entre éléments.
2. **Une politique d'appariements admissible** $\Phi \in$ **POL** qui permet de décider, s'il y a plusieurs possibilités, avec quel item compatible l'élément entrant va s'apparier.
3. **Une loi d'arrivées** $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, dans le cas discret, selon laquelle les éléments entrent (indépendamment) dans le système.

3′. **Un taux d'arrivées** $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$, dans le cas continu, donnant l'intensité du processus de Poisson selon lequel les éléments entrent (indépendamment) dans le système.

En référence à la terminologie usitée dans [24], si $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, on dit que l'on étudie le *modèle d'appariements général associé à* $(G, \Phi, \bar{\mu})$ et, pour abréger, on le note $\text{MG}(G, \Phi, \bar{\mu})$.

De même, dans le cas où $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$, on dit que l'on étudie le *modèle d'appariements général en temps continu associé au triplet* (G, Φ, μ) et, pour abréger, on le note $\text{MG}_\text{C}(G, \Phi, \mu)$. On pourra se référer à [27] pour plus de détails sur le cas continu.

Dans la Section 1.1.2, on a défini $\mathbb{W}$ comme étant l'ensemble des « états possibles du système » lors d'un processus d'appariements. Dans la Section 1.2 suivante, nous formalisons cette notion et introduisons un *descripteur* rendant compte de l'évolution du contenu du système au fur et à mesure des arrivées d'éléments en son sein.

1.2 La chaîne $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son espace d'états $\mathbb{W}$

1.2.1 Définition et structure markovienne de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Fixons un graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, une politique d'appariements admissible $\Phi \in \text{POL}$ et une loi d'arrivées sur les sommets $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$. Construisons alors un *descripteur* rendant compte de l'évolution du contenu d'un système régi par un modèle $\text{MG}(G, \Phi, \bar{\mu})$.

Supposons tout d'abord que le système est vide à l'instant initial. Fixons un entier $n_0 \geqslant 1$ et considérons une réalisation $\omega \in \Omega$. Notons $V_1(\omega) = v_1, \ldots, V_{n_0}(\omega) = v_{n_0}$ et définissons le mot $v^{(n_0)} = v_1 \ldots v_{n_0} \in \mathcal{V}^*$. L'état du système au temps $n_0 \geqslant 1$ est alors noté $W^\Phi(v^{(n_0)}) \in \mathcal{V}^*$. Ce mot est composé des classes des items pas encore appariés au temps n_0 (sous politique Φ) écrites dans leur ordre respectif d'arrivée et on l'appelle *file d'attente au temps* n_0 (ou *queue detail at time* n_0, en anglais).

L'ensemble des files d'attente admissibles (sous politique Φ) est donc donné par

$$W^\Phi(\mathcal{V}^*) \triangleq \bigcup_{v\in\mathcal{V}^*} \{W^\Phi(v)\}.$$

Nous montrerons a posteriori (cf. Proposition 2) qu'il ne dépend, en réalité, pas de la politique d'appariements $\Phi \in \text{POL}$ considérée, ce qui nous permet alors, dès à présent, d'introduire une notation représentant l'ensemble commun à toutes les politiques,

Définition 12

L'ensemble des files d'attente admissibles $\mathbb{W}$ *est défini, quelle que soit la politique d'appariements* $\Phi \in \text{POL}$ *considérée, par :*

$$W^\Phi(\mathcal{V}^*) \triangleq \mathbb{W}.$$

Construisons maintenant le *descripteur* permettant de rendre compte de l'évolution du contenu du système au fur et à mesure du temps,

Définition 13

Notons $Y \in \mathbb{W}$ le contenu initial (potentiellement aléatoire) du buffer.
Alors, pour tout $n \geqslant 0$, l'état du buffer au temps n (c'est-à-dire après les arrivées des n v.a. i.i.d. $V_1, \dots, V_n$ de loi $\bar{\mu}$), noté $W_n^{\Phi,\bar{\mu},Y}$, est défini comme suit :

$$W_0^{\Phi,\bar{\mu},Y} \triangleq Y \quad \textit{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ W_n^{\Phi,\bar{\mu},Y} \triangleq W^{\Phi}(YV_1 \dots V_n).$$

En utilisant (1.2)*, on peut aussi définir cette suite récursivement en posant :*

$$W_0^{\Phi,\bar{\mu},Y} \triangleq Y \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1}^{\Phi,\bar{\mu},Y} = W_n^{\Phi,\bar{\mu},Y} \odot_{\Phi} V_{n+1}. \tag{1.3}$$

La formulation (1.3) assure que l'action $\odot_{\Phi}$ joue le rôle de fonction de mise à jour pour la chaîne $\left(W_n^{\Phi,\bar{\mu},Y}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui débouche sur le résultat suivant,

Proposition 1

Supposons que la suite des v.a. $(V_i)_{i\geqslant 1}$ i.i.d. est indépendante du mot initial $Y \in \mathbb{W}$.
Alors, la suite des contenus du buffer $\left(W_n^{\Phi,\bar{\mu},Y}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{W}$.

Sauf mention contraire, on supposera dans toute la suite (sans perte de généralité) que le système est vide à l'instant initial, c'est-à-dire que $Y = \varepsilon$, où ε est le mot vide. Dans ce cas, on notera $(W_n^{\Phi,\bar{\mu}})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des contenus du buffer. Enfin, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la politique $\Phi \in \textsc{pol}$ et la loi $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ utilisées, on allège la notation $W_n^{\Phi,\bar{\mu}}$ en un simple W_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *chaîne naturelle* du système.

Pour faire suite à ce qui a été expliqué à la fin de la Section 1.1.3 (cas à temps continu), lorsque $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$, la suite $(W_n^{\Phi,\mu})_{n\in\mathbb{N}}$ se construit de manière analogue à celle en temps discret, mais en indexant la chaîne, cette fois-ci, non plus par le temps (qui, ici, est continu) mais par les « indices de saut », c'est-à-dire que la suite passe à la valeur suivante dès l'entrée d'un nouvel élément dans le système (arrivé selon le *taux* μ). En construisant la chaîne de cette manière, la propriété assurant que W_n est l'état du système après l'arrivée des n premiers éléments reste vraie dans le cas à temps continu. La chaîne $(W_n^{\Phi,\mu})_{n\in\mathbb{N}}$ représente alors la suite des contenus du buffer dans le cadre du modèle $\textsc{mg}_c(G, \Phi, \mu)$.

1.2.2 Structure de $\mathbb{W}$ et caractérisation

En prolongement de la Définition 12, pour toute politique d'appariements $\Phi \in \textsc{pol}$ et toute loi d'arrivées $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, un mot $w \in \mathcal{V}^*$ est dit *admissible pour* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il peut être atteint par la chaîne $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire s'il existe une suite d'arrivées $(V_1, \dots, V_n) \in \mathcal{V}^n$ telle que $W_n = w$.
Formellement,

$$w \in \mathcal{V}^* \text{ est admissible pour } (W_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \Leftrightarrow\ \exists v \in \mathcal{V}^* \text{ t.q. } W^{\Phi}(v) = w.$$

Ainsi, par construction,

$$\mathbb{W} = \{w \in \mathcal{V}^* : w \text{ est admissible pour } (W_n)_{n\in\mathbb{N}}\}.$$

L'ensemble $\mathbb{W}$ représente donc l'ensemble des mots (ou files d'attente) admissibles pour la chaîne $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il est temps, à présent, de donner une expression explicite de l'ensemble $\mathbb{W}$, permettant, a posteriori, de justifier qu'il ne dépend effectivement pas de la politique $\Phi \in \textsc{pol}$ considérée,

Proposition 2

L'ensemble $\mathbb{W}$ coïncide avec l'ensemble des mots pour lesquels deux lettres présentes dans le mot ne sont jamais voisines dans le graphe de compatibilités $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ étudié.
Formellement,

$$\mathbb{W} = \{w \in \mathcal{V}^* : [\forall (i,j) \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^c,\ |w|_i |w|_j = 0] \text{ et } [\forall i \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}},\ |w|_i \leqslant 1]\}.$$

En particulier, l'ensemble des files d'attente admissibles $\mathbb{W}$ ne dépend pas de la politique d'appariements $\Phi \in$ POL considérée.

Démonstration : Une preuve de ce résultat est fournie dans la Section 1.5.1. ■

La Proposition 2 assure, en particulier, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}},\ |W_n|_i \in \{0,1\},$$

c'est-à-dire qu'un élément de $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ est présent au plus une fois dans le système.

Définissons maintenant deux notions classiques en théorie des graphes et qui seront fondamentales dans la suite du manuscrit,

Définition 14

Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé.
On dit que $\mathcal{I} \subset \mathcal{V}$ est un ensemble indépendant de G lorsque :
- $\mathcal{I} \neq \varnothing$;
- $\forall (i,j) \in \mathcal{I}^2,\ i \nrightarrow j$.

On dit que $\tilde{\mathcal{I}} \subset \mathcal{V}$ est un ensemble pseudo-indépendant de G lorsque :
- $\tilde{\mathcal{I}} \neq \varnothing$;
- $\forall (i,j) \in \tilde{\mathcal{I}}^2,\ i \neq j \Rightarrow i \nrightarrow j$.

On note alors

$$\mathbb{I}(G) \triangleq \{\mathcal{I} \subset \mathcal{V} : \mathcal{I} \text{ est un ensemble indépendant de } G\}$$

et

$$\tilde{\mathbb{I}}(G) \triangleq \left\{\tilde{\mathcal{I}} \subset \mathcal{V} : \tilde{\mathcal{I}} \text{ est un ensemble pseudo-indépendant de } G\right\}.$$

Remarque 1

Par définition, on a

$$\mathbb{I}(G) \subset \tilde{\mathbb{I}}(G), \text{ avec égalité si et seulement si } \mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \varnothing,$$

et

$$\forall \mathcal{I} \in \mathbb{I}(G),\ \mathcal{I} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \varnothing, \text{ c'est-à-dire } \mathcal{I} \subset \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c, \tag{1.4}$$

contrainte que n'a pas un ensemble pseudo-indépendant.
Ceci nous permet d'obtenir :

$$\mathbb{I}(G) = \left\{\tilde{\mathcal{I}} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c : \tilde{\mathcal{I}} \in \tilde{\mathbb{I}}(G)\right\}.$$

Chaque ensemble pseudo-indépendant $\tilde{\mathcal{I}} \in \tilde{\mathbb{I}}(G)$ peut alors se décomposer de la manière suivante :

$$\tilde{\mathcal{I}} = \underbrace{(\tilde{\mathcal{I}} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c)}_{\in \mathbb{I}(G)} \uplus (\tilde{\mathcal{I}} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}).$$

Définition 15

Pour tout ensemble fini $\mathcal{A}$, tout sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ et tout mot fini $w \in \mathcal{A}^*$, on définit :

$$\mathcal{B}(w) \triangleq \{b \in \mathcal{B} : |w|_b > 0\},$$

l'ensemble des éléments de $\mathcal{B}$ présents dans le mot w.
Dans la suite du manuscrit, on utilisera souvent cette notation pour $\mathcal{B} = \mathcal{V}$.

Le résultat suivant découle simplement d'une réécriture de la Proposition 2 à l'aide de la Définition 14,

Proposition 3

L'ensemble des files d'attente admissibles s'écrit également :

$$\mathbb{W} = \{\varepsilon\} \uplus \{w = w_1 \dots w_q \in \mathcal{V}^* : q \geqslant 1,\ \mathcal{V}(w) \in \tilde{\mathbb{I}}(G) \text{ et } [w_i \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}} \Rightarrow \forall j \in [\![1; q]\!] \backslash \{i\},\ w_j \neq w_i]\}.$$

Finissons par quelques propriétés structurelles de la chaîne $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1.2.3 Irréductibilité et $2-$périodicité de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Pour les notations suivantes, on considère une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace d'états (au plus dénombrable) E et de matrice de transition $P = (p_{i,j})_{(i,j)\in E^2}$.

— Pour $(i, j) \in E^2$, on dit que *j est accessible à partir de l'état i* s'il existe $n \geqslant 0$ tel que

$$p_{i,j}^{(n)} \triangleq \mathbb{P}[X_n = j | X_0 = i] > 0.$$

On note alors $i \rightsquigarrow j$, et on remarque qu'on a toujours $i \rightsquigarrow i$ (pour $n = 0$).

— La *période d'un état $i \in E$* est définie par

$$d(i) \triangleq \text{PGCD}\left(\left\{n \geqslant 1 : p_{i,i}^{(n)} > 0\right\}\right).$$

Si $d(i) = 1$, on dit que i est *apériodique*, et une chaîne est dite *apériodique* lorsque tous ses états le sont.

Proposition 4

Dans tout modèle $\textsc{mg}(G, \Phi, \bar{\mu})$ où G est un graphe généralisé connexe, on a :

1. *La chaîne $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible (sur $\mathbb{W}$).*
2. *La chaîne $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 2-périodique.*

Démonstration : Une preuve de ce résultat est proposée dans la Section 1.5.2. ■

1.3 Un premier exemple de processus d'appariements

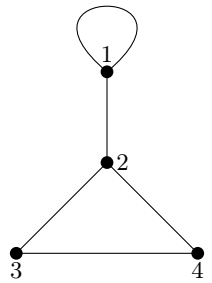

FIGURE 1.2 – Graphe de compatibilités (généralisé connexe) $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$.

Pour fixer les idées, donnons un exemple de déroulement du processus d'appariements pour le modèle $\textsc{mg}(G, \Phi, \bar{\mu})$, où

— $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est le graphe généralisé connexe donné par la Figure 1.2 ;
— $\Phi = \text{FCFM}$ (cf. Définition 10) ;
— $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ est une loi d'arrivées sur les sommets.

Par exemple, si $\bar{\mu}$ est la loi uniforme $\text{Unif}(\mathcal{V})$, à chaque instant, on aura une arrivée d'un item de classe 1 avec probabilité $\frac{1}{4}$, d'un item de classe 2 avec probabilité $\frac{1}{4}$, etc.

Dans notre exemple, supposons que les quatre premières arrivées sont les suivantes :

$$V_1 = 3, \quad V_2 = 1, \quad V_3 = 2, \quad V_4 = 1.$$

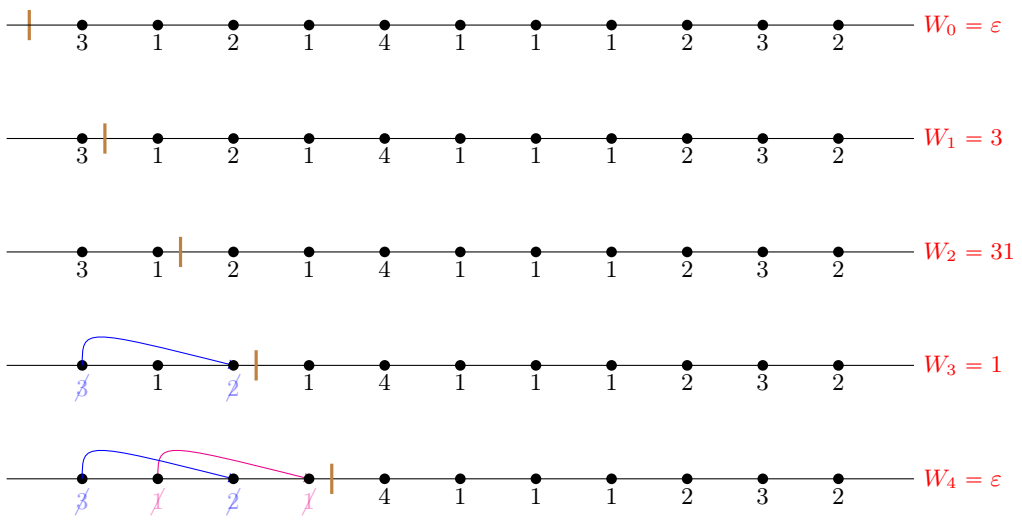

FIGURE 1.3 – Scénario d'arrivées sur le graphe G de la Figure 1.2 et évolution du contenu du système, représenté par la chaîne $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Déroulement du processus d'appariements (pour les 4 premières étapes) :
Pour un schéma explicatif du déroulement, se reporter à la Figure 1.3.

— <u>État initial</u> : À l'instant de départ (instant 0), on suppose que le buffer est vide.

$$\rightarrow \; W_0 = \varepsilon.$$

— <u>Étape 1</u> : Un item de classe 3 entre dans le système.
Il est le seul à l'intérieur et ne peut ainsi s'apparier avec aucun autre élément. Il patiente donc dans le système.

$$\rightarrow \; W_1 = 3.$$

— <u>Étape 2</u> : Un item de classe 1 entre dans le système.
Il y a déjà un élément de classe 3 à l'intérieur. Cependant, les classes 1 et 3 n'étant pas compatibles (car pas reliées par une arête dans G), les items correspondants ne peuvent pas s'apparier ensemble. Ils restent donc tous les deux dans le système (en conservant leur ordre d'arrivée).

$$\rightarrow \; W_2 = 31.$$

— <u>Étape 3</u> : Un item de classe 2 entre dans le système.
Comme la classe 2 est compatible avec les classes 3 et 1, l'item entrant peut s'apparier avec les deux éléments déjà présents. Le choix de l'appariement se fait donc à l'aide de la politique d'appariements choisie - ici, FCFM. L'item 2 va ainsi s'apparier avec le plus vieil item compatible encore présent, c'est-à-dire l'élément de classe 3. Ils quittent alors le système et laissent donc seul l'item de classe 1. (Remarquons que si l'on avait choisi la politique LCFM, l'élément de classe 2 se serait apparié avec celui de classe 1.)

$$\rightarrow \; W_3 = 1.$$

— Étape 4 : Un item de classe 1 entre dans le système.
Il y retrouve un autre élément de classe 1. Or, l'arête $(1,1)$ étant une boucle du graphe G (c'est-à-dire $1 \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}$), la classe 1 est compatible avec elle-même, ce qui permet l'appariement des deux éléments concernés. Ils quittent donc le système et le laissent vide.

$$\rightarrow\ W_4 = \varepsilon.$$

Il est à présent temps d'introduire la notion de stabilité d'un modèle d'appariements et d'en fournir une condition nécessaire.

1.4 Les ensembles $\textsc{stab}(G,\Phi)$ et $\textsc{Ncond}(G)$

1.4.1 Les zones de stabilité $\textsc{stab}(G,\Phi)$ et $\textsc{stab}^+(G,\Phi)$

Comme dans les articles [24] et [27], on s'intéresse à la notion de stabilité d'un modèle d'appariements général (que ce soit en temps discret ou continu),

Définition 16

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V},\mathcal{E})$, toute politique d'appariements admissible $\Phi \in \textsc{pol}$ et toute loi de probabilité $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ (respectivement, mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$), on dit que le modèle $\textsc{mg}(G,\Phi,\bar{\mu})$ (respectivement, $\textsc{mg}_c(G,\Phi,\mu)$) est stable lorsque la chaîne $\left(W_n^{\Phi,\bar{\mu}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement, $\left(W_n^{\Phi,\mu}\right)_{n\in\mathbb{N}}$) est récurrente positive.

L'ensemble des mesures $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ (respectivement, $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$) pour lesquelles le modèle $\textsc{mg}(G,\Phi,\bar{\mu})$ (respectivement, $\textsc{mg}_c(G,\Phi,\mu)$) est stable est appelé sa zone de stabilité et est défini par

$$\textsc{stab}(G,\Phi) \triangleq \left\{\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}) : \left(W_n^{\Phi,\bar{\mu}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est récurrente positive}\right\}, \tag{1.5}$$

(respectivement, par

$$\textsc{stab}^+(G,\Phi) \triangleq \left\{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \left(W_n^{\Phi,\mu}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est récurrente positive}\right\}). \tag{1.6}$$

En généralisant ce qui a été fait dans l'article [27], pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V},\mathcal{E})$ et toute politique d'appariements admissible $\Phi \in \textsc{pol}$,

$$\bar{\mu} \in \textsc{stab}(G,\Phi) \Leftrightarrow \mu \in \textsc{stab}^+(G,\Phi).$$

En particulier,

$$\textsc{stab}(G,\Phi) \subset \textsc{stab}^+(G,\Phi).$$

Définition 17

On dit qu'un graphe généralisé connexe G est stabilisable s'il existe une politique d'appariements admissible $\Phi \in \textsc{pol}$ telle que $\textsc{stab}(G,\Phi) \neq \varnothing$.

Ultérieurement, nous caractériserons exactement l'ensemble des graphes généralisés connexes stabilisables (cf. Corollaire 1).

1.4.2 Ensembles $\textsc{Ncond}(G)$ et $\textsc{Ncond}^+(G)$, et liens avec $\textsc{stab}(G,\Phi)$ et $\textsc{stab}^+(G,\Phi)$

De la même manière que dans l'article [24] (respectivement, [27]), pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V},\mathcal{E})$ fixé, nous sommes amenés à définir la condition suivante sur $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ (respectivement, $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$) :

$$\forall \mathcal{I} \in \mathbb{I}(G),\ \bar{\mu}(\mathcal{I}) < \bar{\mu}(\mathcal{E}(\mathcal{I})), \tag{1.7}$$

(respectivement,

$$\forall \mathcal{I} \in \mathbb{I}(G),\ \mu(\mathcal{I}) < \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}))). \tag{1.8}$$

Cette condition est usuellement appelée $\textsc{Ncond}(G)$ (respectivement, $\textsc{Ncond}^+(G)$) dans la littérature, diminutif de « necessary condition » puisqu'elle fournit une condition nécessaire de stabilité (cf. Proposition 6).

Par un abus de notation, on définit $\textsc{Ncond}(G)$ (respectivement, $\textsc{Ncond}^+(G)$) comme étant l'ensemble des mesures vérifiant la condition (1.7) (respectivement, (1.8)),

Définition 18

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ fixé, on définit

— *l'ensemble de lois de probabilité*

$$\text{NCOND}(G) \triangleq \left\{\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}) : \forall \mathcal{I} \in \mathbb{I}(G),\ \bar{\mu}(\mathcal{I}) < \bar{\mu}(\mathcal{E}(\mathcal{I}))\right\}\ ; \tag{1.9}$$

— *l'ensemble de mesures*

$$\text{NCOND}^+(G) \triangleq \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \forall \mathcal{I} \in \mathbb{I}(G),\ \mu(\mathcal{I}) < \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}))\}\,. \tag{1.10}$$

Remarquons que pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$,

$$\bar{\mu} \in \text{NCOND}(G) \Leftrightarrow \mu \in \text{NCOND}^+(G),$$

et

$$\text{NCOND}(G) \subset \text{NCOND}^+(G).$$

Dans le but de donner une autre écriture de NCOND(G) et NCOND$^+(G)$ dont on pourra se servir ultérieurement dans certaines preuves, généralisons maintenant le Lemma 1 de [24], qui étudie le cas de lois de probabilité sur des graphes simples connexes, au cas de mesures quelconques sur des graphes généralisés connexes. En notant $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathcal{V}$, on a :

Proposition 5

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$,

$$\text{NCOND}^+(G) = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \forall \mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{V})\backslash\{\varnothing, \mathcal{V}\},\ \mu(\mathcal{U}) < \mu(\mathcal{E}(\mathcal{U}))\},$$

et, de manière équivalente,

$$\text{NCOND}(G) = \left\{\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}) : \forall \mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{V})\backslash\{\varnothing, \mathcal{V}\},\ \bar{\mu}(\mathcal{U}) < \bar{\mu}(\mathcal{E}(\mathcal{U}))\right\}.$$

Démonstration : Fixons un graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$.
L'inclusion $\supset$ étant triviale, concentrons-nous sur l'inclusion $\subset$.
Fixons une mesure $\mu \in \text{NCOND}^+(G)$ et considérons un ensemble $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{V})\backslash\{\varnothing, \mathcal{V}\}$.
Dans cette preuve, notons $\mathcal{U}_S \triangleq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}_\mathcal{S}$ et $\mathcal{U}_N \triangleq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}_\mathcal{S}^c$, de telle sorte que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_S \uplus \mathcal{U}_N$.
On peut écrire l'égalité suivante :

$$\mu\left(\mathcal{E}(\mathcal{U})\right) - \mu(\mathcal{U}) = \mu(\mathcal{E}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}_S) + \mu(\mathcal{E}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}_N) + \mu(\mathcal{E}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}^c) - \mu(\mathcal{U}_S) - \mu(\mathcal{U}_N). \tag{1.11}$$

Or, par définition de l'ensemble $\mathcal{V}_\mathcal{S}$,

$$\mathcal{E}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}_S = \mathcal{U}_S.$$

Alors, comme $\mathcal{U}_N = (\mathcal{U}_N \cap \mathcal{E}(\mathcal{U})) \uplus (\mathcal{U}_N \cap \mathcal{E}(\mathcal{U})^c)$, l'égalité (1.11) se réécrit ainsi :

$$\mu\left(\mathcal{E}(\mathcal{U})\right) - \mu(\mathcal{U}) = \mu(\mathcal{E}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}^c) - \mu\left(\mathcal{U}_N \cap \mathcal{E}(\mathcal{U})^c\right). \tag{1.12}$$

Cependant, comme tout élément de $\mathcal{E}\left(\mathcal{U}_N \cap \mathcal{E}(\mathcal{U})^c\right)$ appartient à $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ et comme aucune arête du graphe G ne peut relier un élément de $\mathcal{E}(\mathcal{U})^c$ à un élément de $\mathcal{U}$, on obtient :

$$\mathcal{E}\left(\mathcal{U}_N \cap \mathcal{E}(\mathcal{U})^c\right) \subset \mathcal{E}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}^c. \tag{1.13}$$

Par ailleurs, s'il est non-vide, l'ensemble $\mathcal{U}_N \cap \mathcal{E}(\mathcal{U})^c$ est clairement un ensemble indépendant du graphe G, c'est-à-dire $\mathcal{U}_N \cap \mathcal{E}(\mathcal{U})^c \in \mathbb{I}(G)$.
D'où, comme $\mu \in \text{NCOND}^+(G)$,

$$\mu\left(\mathcal{U}_N \cap \mathcal{E}(\mathcal{U})^c\right) < \mu\left(\mathcal{E}\left(\mathcal{U}_N \cap \mathcal{E}(\mathcal{U})^c\right)\right). \tag{1.14}$$

Ainsi, en combinant (1.12), (1.13) et (1.14), on trouve :

$$\mu\left(\mathcal{E}(\mathcal{U})\right) - \mu(\mathcal{U}) > 0.$$

Le cas où $\mathcal{U}_N \cap \mathcal{E}(\mathcal{U})^c = \varnothing$ étant trivialement résolu par (1.12), ceci conclut la preuve. ■

Pour une mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ (respectivement, $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$), appartenir à l'ensemble $\textsc{Ncond}(G)$ (respectivement, $\textsc{Ncond}^+(G)$) signifie heuristiquement que le *flux* des arrivées des éléments de chaque classe est inférieur (strictement) au *flux* des arrivées des éléments dont les classes sont compatibles avec celles des éléments susmentionnés. Il est donc naturel que l'appartenance d'une mesure $\bar{\mu}$ (respectivement, μ) à $\textsc{Ncond}(G)$ (respectivement, $\textsc{Ncond}^+(G)$) soit une condition nécessaire à la stabilité de tout modèle $\textsc{mg}(G, \Phi, \bar{\mu})$ (respectivement, $\textsc{mg}_c(G, \Phi, \mu)$),

Proposition 6

Pour tout graphe généralisé connexe G et toute politique admissible $\Phi \in \textsc{pol}$,

$$\textsc{stab}(G, \Phi) \subset \textsc{Ncond}(G),$$

et

$$\textsc{stab}^+(G, \Phi) \subset \textsc{Ncond}^+(G).$$

Démonstration : Dans le cas d'un graphe simple connexe, la Proposition 2 de l'article [24] fournit une preuve de la première inclusion et le Theorem 1 de l'article [27] une preuve de la seconde.
Les deux démonstrations s'adaptent cependant sans difficulté au cas d'un graphe généralisé connexe, comme il l'est remarqué dans la Proposition 4.3 de [7]. ■

Sous certaines politiques Φ particulières, la condition $\bar{\mu} \in \textsc{Ncond}(G)$ n'est pas seulement nécessaire mais est aussi suffisante à la stabilité de tout modèle $\textsc{mg}(G, \Phi, \bar{\mu})$,

Définition 19

Une politique admissible $\Phi \in \textsc{pol}$ est dite maximale généralisée si l'égalité $\textsc{stab}(G, \Phi) = \textsc{Ncond}(G)$ est vérifiée pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$.

Remarquons que cette notion de maximalité généralise celle introduite dans l'article [25], où l'égalité doit être satisfaite seulement pour tous les graphes simples connexes. L'intérêt de savoir qu'une politique d'appariements $\Phi \in \textsc{pol}$ est maximale généralisée est majeur : en effet, l'étude de sa zone de stabilité, objet a priori difficile à manipuler en tant que tel, revient alors à celle de l'ensemble $\textsc{Ncond}(G)$, défini, lui, à l'aide de conditions purement algébriques, et qui est donc bien plus exploitable en pratique. Un des principaux objectifs du Chapitre 2 sera justement d'étendre la maximalité de la politique $\textsc{fcfm}$ à ce cas généralisé, déjà prouvée dans le cas de graphes simples connexes (voir Theorem 1 de [25]), et le Chapitre 3 s'intéressera en particulier, quant à lui, à la caractérisation exacte de l'ensemble $\textsc{Ncond}(G)$ et fournira un moyen explicite (élémentaire) de construction des mesures appartenant à cet ensemble, résolvant donc, en particulier, la question de la détermination (et de la construction) des mesures permettant la stabilité du modèle d'appariements général ($\textsc{mg}$) associé à n'importe quel graphe généralisé connexe G (qui n'est pas biparti) et à une politique d'appariements maximale généralisée $\Phi \in \textsc{pol}$. Par ailleurs, remarquons que le Theorem 4.7 de [7] assure la maximalité (au sens généralisé) de toutes les politiques de type Max-Weight ($\textsc{mw}$) pour lesquelles $\beta > 0$, et donc, en particulier, de la politique $\textsc{ml}$ (voir la Section 1.1.2).

1.4.3 Ensembles $\widetilde{\textsc{Ncond}}(G)$ et $\widetilde{\textsc{Ncond}}^+(G)$, et liens avec $\textsc{Ncond}(G)$ et $\textsc{Ncond}^+(G)$

Par analogie avec la Section 1.4.2, pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ fixé, nous sommes amenés à définir une autre condition sur $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ (respectivement, $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$), plus contraignante que $\textsc{Ncond}(G)$ (respectivement, $\textsc{Ncond}^+(G)$), que l'on appelle $\widetilde{\textsc{Ncond}}(G)$ (respectivement, $\widetilde{\textsc{Ncond}}^+(G)$) :

$$\forall \tilde{\mathcal{I}} \in \tilde{\mathbb{I}}(G),\ \bar{\mu}(\tilde{\mathcal{I}}) < \bar{\mu}(\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}})), \tag{1.15}$$

(respectivement,

$$\forall \tilde{\mathcal{I}} \in \tilde{\mathbb{I}}(G),\ \bar{\mu}(\tilde{\mathcal{I}}) < \bar{\mu}(\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}}))). \tag{1.16}$$

Par un abus de notation, on définit $\widetilde{\textsc{Ncond}}(G)$ (respectivement, $\widetilde{\textsc{Ncond}}^+(G)$) comme étant l'ensemble des mesures vérifiant la condition (1.15) (respectivement, (1.16)),

Définition 20

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ fixé, on définit

— *l'ensemble de lois de probabilité*

$$\widetilde{\text{NCOND}}(G) \triangleq \left\{ \bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}) : \forall \tilde{\mathcal{I}} \in \tilde{\mathbb{I}}(G),\ \bar{\mu}(\tilde{\mathcal{I}}) < \bar{\mu}(\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}})) \right\} \ ;$$

— *l'ensemble de mesures*

$$\widetilde{\text{NCOND}}^{+}(G) \triangleq \left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \forall \tilde{\mathcal{I}} \in \tilde{\mathbb{I}}(G),\ \mu(\tilde{\mathcal{I}}) < \mu(\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}})) \right\}.$$

Clairement, remarquons que pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, l'inclusion $\mathbb{I}(G) \subset \tilde{\mathbb{I}}(G)$ assure que

$$\widetilde{\text{NCOND}}(G) \subset \text{NCOND}(G) \quad \text{et} \quad \widetilde{\text{NCOND}}^{+}(G) \subset \text{NCOND}^{+}(G).$$

La Proposition 8 ci-après montrera que ces deux inclusions sont en réalité (presque) toujours des égalités.

Par ailleurs, pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, il est clair que

$$\bar{\mu} \in \widetilde{\text{NCOND}}(G) \Leftrightarrow \mu \in \widetilde{\text{NCOND}}^{+}(G).$$

FIGURE 1.4 – Graphe G^* (boucle à un sommet).

Le résultat suivant donne une formulation équivalente de l'ensemble $\widetilde{\text{NCOND}}(G)$ (respectivement, $\widetilde{\text{NCOND}}^{+}(G)$) ne portant que sur les ensembles pseudo-indépendants n'ayant pas de sommet possédant une boucle,

Proposition 7

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ différent de G^* (cf. Figure 1.4),

$$\widetilde{\text{NCOND}}(G) = \left\{ \bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}) : \forall \tilde{\mathcal{I}} \in \tilde{\mathbb{I}}(G) \text{ vérifiant } \tilde{\mathcal{I}} \subset \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{c},\ \bar{\mu}(\tilde{\mathcal{I}}) < \bar{\mu}(\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}})) \right\},$$

et, de manière équivalente,

$$\widetilde{\text{NCOND}}^{+}(G) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \forall \tilde{\mathcal{I}} \in \tilde{\mathbb{I}}(G) \text{ vérifiant } \tilde{\mathcal{I}} \subset \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{c},\ \mu(\tilde{\mathcal{I}}) < \mu(\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}})) \right\}.$$

En particulier, il suit donc de la Proposition 7 que si le graphe généralisé connexe $G \neq G^*$ est tel que $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \mathcal{V}$, alors

$$\widetilde{\text{NCOND}}(G) = \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}) \quad \text{et} \quad \widetilde{\text{NCOND}}^{+}(G) = \mathcal{M}(\mathcal{V}).$$

Les deux égalités de la Proposition 7 étant équivalentes, il nous suffit de prouver la seconde,

Démonstration : Fixons un graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ différent de G^*.
Remarquons que si $|\mathcal{V}| = 1$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \varnothing$, les deux ensembles sont trivialement vides.
Supposons donc à présent que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$.
L'inclusion $\subset$ étant évidente, concentrons-nous sur la preuve de l'inclusion réciproque.
Considérons donc une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$ satisfaisant la condition suivante :

$$\forall \tilde{\mathcal{I}} \in \tilde{\mathbb{I}}(G) \text{ vérifiant } \tilde{\mathcal{I}} \subset \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{c},\ \mu(\tilde{\mathcal{I}}) < \mu(\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}})). \tag{1.17}$$

Il suffit alors de prouver que $\mu(\tilde{\mathcal{I}}) < \mu(\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}}))$, pour tout ensemble $\tilde{\mathcal{I}} \in \tilde{\mathbb{I}}(G)$.
Fixons un ensemble pseudo-indépendant $\tilde{\mathcal{I}} \in \tilde{\mathbb{I}}(G)$ et décomposons-le de la manière suivante :

$$\tilde{\mathcal{I}} = \tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}} \uplus \tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}^c}, \tag{1.18}$$

où $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}} \triangleq \tilde{\mathcal{I}} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ et $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}^c} \triangleq \tilde{\mathcal{I}} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{c}$.

— Cas 1 : $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}^c} = \emptyset$.
Dans ce cas, $\tilde{\mathcal{I}} = \tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{V}_{\mathcal{S}}$, ce qui assure que $\tilde{\mathcal{I}} \subset \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}})$.
Considérons à présent un élément $a \in \tilde{\mathcal{I}}$.
Comme $|\mathcal{V}| \geqslant 2$, la connexité de G assure qu'il existe un sommet $b \in \mathcal{V}$, différent de a, tel que $b \in \mathcal{E}(a) \subset \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}})$.
Cependant, comme $a \in \tilde{\mathcal{I}}$, $a \neq b$ et $b - a$, alors $b \notin \tilde{\mathcal{I}}$ (ensemble pseudo-indépendant).
Ainsi, $\tilde{\mathcal{I}} \subsetneq \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}})$ et, par suite, $\mu(\tilde{\mathcal{I}}) < \mu(\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}}))$.

— Cas 2 : $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}^c} \neq \emptyset$.
Dans ce cas, la décomposition (1.18), la condition (1.17) et le fait que $\tilde{\mathcal{I}} \in \tilde{\mathbb{I}}(G)$ assurent respectivement que

$$\begin{aligned}\mu(\tilde{\mathcal{I}}) &= \mu(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}}) + \mu(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}^c}) \\ &< \mu(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}}) + \mu(\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}^c})) \\ &= \mu(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}} \uplus \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}^c})).\end{aligned}$$

Enfin, l'inclusion $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}})$ assure que $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}} \uplus \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}^c}) \subset \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}})$, et donc,

$$\mu(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}} \uplus \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{S}^c})) \leqslant \mu(\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}})).$$

Dans les deux cas, $\mu(\tilde{\mathcal{I}}) < \mu(\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}}))$, ce qui conclut la preuve. ■

La Proposition 7 ci-dessus, combinée aux relations de la Remarque 1, nous permet de relier les sous-ensembles $\widetilde{\textsc{Ncond}}(G)$ et $\textsc{Ncond}(G)$ (respectivement, $\widetilde{\textsc{Ncond}}^+(G)$ et $\textsc{Ncond}^+(G)$),

Proposition 8

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ différent de G^* (cf. Figure 1.4),

$$\widetilde{\textsc{Ncond}}(G) = \textsc{Ncond}(G),$$

et, de manière équivalente,

$$\widetilde{\textsc{Ncond}}^+(G) = \textsc{Ncond}^+(G).$$

Cependant, remarquons que si $G = G^*$, alors

— $\widetilde{\textsc{Ncond}}(G) = \widetilde{\textsc{Ncond}}^+(G) = \emptyset$;
— $\textsc{Ncond}(G) = \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$;
— $\textsc{Ncond}^+(G) = \mathcal{M}(\mathcal{V})$.

La Proposition 8 permet alors, dès que G est un graphe généralisé connexe différent de G^*, d'unifier la notation en $\textsc{Ncond}(G)$ (respectivement, $\textsc{Ncond}^+(G)$).

La Section suivante présente maintenant une classe particulière de graphes pour lesquels les ensembles $\textsc{Ncond}(G)$ et $\textsc{Ncond}^+(G)$ sont vides (cf. Proposition 9), et qui sont les seuls graphes généralisés connexes qui ne sont pas stabilisables (cf. Corollaire 1).

1.4.4 Graphes bipartis et lien avec $\textsc{Ncond}(G)$ et $\textsc{Ncond}^+(G)$

Définition 21

Un graphe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est dit biparti lorsqu'il existe deux sous-ensembles non-vides $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}$ tels que

— $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2$;
— $(u, v) \in \mathcal{E} \Rightarrow [u \in \mathcal{V}_1$ *et* $v \in \mathcal{V}_2]$ *ou* $[u \in \mathcal{V}_2$ *et* $v \in \mathcal{V}_1]$.

En d'autres termes, G est biparti si son ensemble de sommets $\mathcal{V}$ peut être divisé en deux sous-ensembles (non-vides) disjoints $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ tels que chaque arête de G a une extrémité dans $\mathcal{V}_1$ et l'autre dans $\mathcal{V}_2$. Un exemple d'un tel graphe est donné par la Figure 1.5. Par ailleurs, remarquons que si $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est un graphe biparti, alors $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \emptyset$.

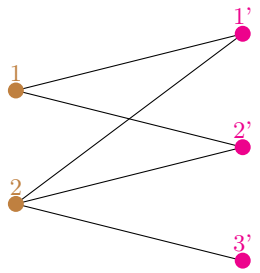

FIGURE 1.5 – Exemple d'un graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$, où les éléments de $\mathcal{V}_1 = \{1, 2\}$ sont en brun et les éléments de $\mathcal{V}_2 = \{1', 2', 3'\}$ sont en magenta.

Le résultat ci-dessous, résultant directement de la généralisation du Theorem 1 de [24] au cas de graphes généralisés, fait le lien entre le bipartisme (ou non) d'un graphe généralisé G et la vacuité (ou non) des ensembles $\textsc{Ncond}(G)$ et $\textsc{Ncond}^+(G)$,

Proposition 9

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\textsc{Ncond}^+(G) \neq \varnothing$;
2. $\textsc{Ncond}(G) \neq \varnothing$;
3. *G n'est pas un graphe biparti.*

Dans la Section 3.1, une version plus complète de la Proposition 9 sera démontrée (cf. Proposition 28). Remarquons que la Proposition 9 reste vraie dans le cas où $G = G^*$ (cf. Figure 1.4), mais les ensembles $\widetilde{\textsc{Ncond}}(G^*)$ et $\widetilde{\textsc{Ncond}}^+(G^*)$ sont cependant vides alors que G^* n'est pas biparti.

1.5 Preuves du Chapitre 1

1.5.1 Preuve de la Proposition 2

Démonstration : Considérons un graphe de compatibilités, généralisé et connexe, noté $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$.

Pour cette preuve, notons $E \subset \mathcal{V}^*$ l'ensemble des mots pour lesquels deux lettres présentes dans le mot ne sont jamais voisines dans le graphe de compatibilités G, et montrons que, pour toute politique d'appariements $\Phi \in \textsc{pol}$, $W^\Phi(\mathcal{V}^*) = E$.

Fixons donc une politique d'appariements $\Phi \in \textsc{pol}$.

- $\supset$: Considérons un mot $w = w_1 \dots w_n \in E$.
  Alors, par construction, $w = W^\Phi(w) \in W^\Phi(\mathcal{V}^*)$.
- $\subset$: Tout d'abord, sans perte de généralité, on supposera que le système est vide à l'instant initial.
  Montrons alors, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $H(n)$: « $W^\Phi(V_1 \dots V_n) \in E$ ».
  - Initialisation : Au temps initial, c'est-à-dire pour $n = 0$, $W^\Phi(\varepsilon) = \varepsilon \in E$.
  - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie.
    - Cas 1 : L'élément de classe V_{n+1} entrant (au temps $n + 1$) est compatible avec un élément déjà dans le système.
      Dans ce cas, ils s'apparient et partent, impliquant que $W^\Phi(V_1 \dots V_{n+1})$ est identique à $W^\Phi(V_1 \dots V_n)$, avec cependant, une lettre en moins.
      Il est donc clair que $W^\Phi(V_1 \dots V_{n+1}) \in E$.
    - Cas 2 : L'élément de classe V_{n+1} entrant (au temps $n + 1$) n'est pas compatible avec un élément déjà dans le système.
      Dans ce cas, cette nouvelle lettre est stockée dans le système, impliquant que $W^\Phi(V_1 \dots V_{n+1})$ est identique à $W^\Phi(V_1 \dots V_n)$, avec cependant, une lettre en plus, qui, par construction, n'est voisine d'aucune autre dans le mot (sinon, il y aurait eu appariement).
      Ainsi, $W^\Phi(V_1 \dots V_{n+1}) \in E$.
  - Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ W^\Phi(V_1 \dots V_n) \in E$.

Donc,

$$W^{\Phi}(\mathcal{V}^*) \subset E.$$

Finalement, on a montré que $W^{\Phi}(\mathcal{V}^*) = E$, quelle que soit la politique d'appariements $\Phi \in \text{POL}$ considérée. L'ensemble E étant indépendant de Φ, $W^{\Phi}(\mathcal{V}^*)$ l'est donc également, ce qui permet d'unifier la notation, quelle que soit $\Phi \in \text{POL}$, en $W^{\Phi}(\mathcal{V}^*) = \mathbb{W}$. ■

1.5.2 Preuve de la Proposition 4

Démonstration : Considérons le modèle $\text{MG}(G, \Phi, \bar{\mu})$, où $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est un graphe généralisé connexe, $\Phi \in \text{POL}$, et $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$.

1. Comme $\varepsilon \in \mathbb{W}$, il suffit de prouver les deux assertions suivantes pour conclure à l'irréductibilité :
   (1) : $\forall w \in \mathbb{W},\ \exists n_w \in \mathbb{N},\ p_{\varepsilon,w}^{(n_w)} > 0$ (c'est-à-dire que tout mot de $\mathbb{W}$ est accessible par ε).
   (2) : $\forall w \in \mathbb{W},\ \exists n_w \in \mathbb{N},\ p_{w,\varepsilon}^{(n_w)} > 0$ (c'est-à-dire que ε est accessible par tout mot de $\mathbb{W}$).

   Preuve de (1) : Fixons un $w = w_1 \dots w_q \in \mathbb{W}$.
   Un exemple trivial de scénario d'arrivées permettant d'atteindre w en partant de ε est $(V_1, \dots, V_q) = (w_1, \dots, w_q)$.
   Ainsi, comme $(V_i)_{i \geqslant 1}$ est i.i.d. de loi $\bar{\mu}$ et comme le support de $\bar{\mu}$ est $\mathcal{V}$,

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[W_q = w | W_0 = \varepsilon\right] &\geqslant \mathbb{P}\left(V_1 = w_1, \dots, V_q = w_q\right)\\ &= \bar{\mu}(w_1) \dots \bar{\mu}(w_q)\\ &> 0.\end{aligned}$$

   Ceci conclut donc la preuve du point (1).

   Preuve de (2) : Fixons un mot $w = w_1 \dots w_q \in \mathbb{W}$ et supposons que $W_0 = w$.
   Choisissons $V_1 \in \mathcal{E}(\mathcal{V}(w))$, évènement de probabilité $\bar{\mu}(\mathcal{E}(\mathcal{V}(w))) > 0$ (par connexité de G et car $\bar{\mu}$ admet $\mathcal{V}$ pour support).
   Ainsi, il existe $i \in [\![1; q]\!]$ tel que $W_1 = w_{[i]}$ (cf. Définition 9).
   Choisissons ensuite $V_2 \in \mathcal{E}\left(\mathcal{V}\left(w_{[i]}\right)\right)$, évènement de probabilité $\bar{\mu}\left(\mathcal{E}\left(\mathcal{V}\left(w_{[i]}\right)\right)\right) > 0$ (par connexité de G et car $\bar{\mu}$ admet $\mathcal{V}$ pour support), ce qui permet d'apparier un élément supplémentaire.
   On procède alors par récurrence q fois de cette manière, ce qui permet d'apparier à chaque instant un nouvel élément, et il en découle donc que $W_q = \varepsilon$, obtenu ainsi avec une probabilité strictement positive.
   On a donc montré que

   $$\mathbb{P}\left[W_q = \varepsilon | W_0 = w\right] > 0,$$

   ce qui conclut la preuve du point (2).

   On déduit alors des points (1) et (2) que la chaîne $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est irréductible sur $\mathbb{W}$.

2. Observons que $\forall n \in \mathbb{N}_*,\ p_{\varepsilon,\varepsilon}^{(2n)} > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{\varepsilon,\varepsilon}^{(2n+1)} = 0$.
   Ceci assure alors que ε est un état 2-périodique.
   La périodicité étant une propriété de classe, la 2-périodicité de ε et l'irréductibilité de $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{W}$ suffisent alors à conclure. ■

Chapitre 2

Maximalité généralisée de la politique FCFM et loi stationnaire

Sommaire

2.1 La chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son espace d'états $\mathbb{B}$ 33
2.2 La chaîne $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son espace d'états $\mathbb{F}$ 34
2.3 Exemple du processus de construction 36
2.4 Propriété de pseudo-réversibilité 37
2.5 Condition de positive récurrence et lois stationnaires 38
2.6 Maximalité généralisée de FCFM et loi stationnaire 41
2.7 Caractéristiques du système à l'équilibre 43
2.8 Exemples d'application 44
2.8.1 Cas « entièrement bouclé » 44
2.8.2 Cas « hybride » 45
2.9 Étude structurelle du cycle généralisé 46
2.9.1 Notions préliminaires 46
2.9.2 Quelques éléments structurels du cycle généralisé 50
2.10 Preuves du Chapitre 2 51
2.10.1 Preuve du Lemme 1 51
2.10.2 Preuve de la Proposition 11 54
2.10.3 Preuve du Lemme 2 54
2.10.4 Preuve de la Proposition 14 55
2.10.5 Preuve de la Proposition 15 56
2.10.6 Preuve du Lemme 3 59
2.10.7 Preuve de la Proposition 16 59
2.10.8 Preuve de la Proposition 24 61
2.10.9 Preuve de la Proposition 25 63
2.10.10 Preuve de la Proposition 26 63

Les modèles d'appariements généraux (MG) sur des graphes simples (et donc, en particulier, sans boucle) ont été introduits initialement dans l'article [24], et la stabilité de ces modèles sous la politique FCFM a été étudiée dans [25]. Le Theorem 1, résultat majeur de cette dernière référence, assure en particulier la *maximalité* de la politique FCFM et fournit, pour cette politique (et sous une forme produit remarquable), l'expression de l'unique loi de probabilité stationnaire de la chaîne de Markov $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, représentant l'évolution temporelle du contenu du système. L'intérêt de l'étude des modèles d'appariements généraux (MG) pour des *graphes généralisés* ayant été mis en évidence, dans l'Introduction, par l'exemple des *dons croisés* d'organes, il est donc naturel de vouloir généraliser certains résultats obtenus dans [24] et [25] à ce cadre plus général. Notons qu'une bonne partie de ceux de [24] ont déjà été étendus au cours du Chapitre 1 (voir, par exemple, la Proposition 5, la Proposition 6, et la Proposition 9). Les objectifs du Chapitre 2 sont donc multiples :

— Étendre la propriété de *pseudo-réversibilité* énoncée dans le Lemma 3 de [25] au cas de graphes généralisés (cf. Proposition 15).

— Déduire du point précédent la généralisation du Theorem 1 de [25] au cas de graphes généralisés, c'est-à-dire prouver que la politique FCFM est *maximale généralisée* (au sens de la Définition 19) et donner, pour cette politique et sous une forme produit, l'expression de l'unique loi de probabilité stationnaire de la chaîne de Markov $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (cf. Théorème 1).

— Caractériser, à l'aide du Théorème 1 évoqué ci-avant, les graphes généralisés *stabilisables*, c'est-à-dire ceux pour lesquels on peut trouver une politique d'appariements et une loi d'arrivées rendant stable le modèle d'appariements général associé (cf. Corollaire 1). Remarquons que ce résultat généralise l'assertion (16) du Theorem 2 de [24].

— Faire apparaître, à l'aide de l'étude des cycles généralisés réalisée dans la Section 2.9, un lien naturel avec le Chapitre 3 suivant (cf. Remarque 6).

La construction de deux chaînes de Markov auxiliaires qui ont des dynamiques opposées, notées $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Sections 2.1 et 2.2), qui seront mises en lien à l'aide d'un schéma de *pseudo-réversibilité* (Section 2.4) nous permettant de prouver leur récurrence positive sous la condition $\textsc{Ncond}(G)$, définie par (1.7), et de déterminer l'expression de leurs lois de probabilité stationnaires respectives, conduira alors, toujours sous cette même condition, à la récurrence positive de la chaîne de Markov $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi qu'à l'expression de sa loi stationnaire (en « projetant » celle de $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'espace d'états $\mathbb{W}$ de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$) (Sections 2.5 et 2.6), avant que le Théorème 1 ne statue définitivement sur la maximalité généralisée de la politique FCFM. Les techniques de preuve utilisées s'inspirent de celles usitées dans la référence [25] dont on souhaite étendre certains résultats. On notera cependant l'utilisation judicieuse du Lemme 3 et de la Proposition 17, permettant de simplifier certains arguments de preuve de la référence [25] initiale. Enfin, l'étude structurelle du cycle généralisé (Section 2.9) permettra notamment de faire apparaître certaines questions intéressantes (cf. Remarque 6), motivant le Chapitre 3.
Ce Chapitre 2 présente une version étendue de certains résultats énoncés dans l'article [7], publié en 2021. Pour une parfaite information, le lecteur intéressé par d'autres résultats (qui ne sont pas développés dans le présent manuscrit) concernant les modèles d'appariements généraux dans le cas de graphes généralisés connexes pourra consulter cette même référence [7]. Il y est notamment prouvé que certaines politiques de type *Max-Weight* (MW), parmi lesquelles la politique *Match the Longest* (ML), sont maximales généralisées (voir Theorem 4.7 de [7]).

Tout au long du Chapitre 2, on se place dans le cadre du modèle $\textsc{mg}(G, \Phi, \bar{\mu})$, où

— $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est un graphe généralisé connexe ;

— $\Phi = \textsc{fcfm}$ (cf. Définition 10) ;

— $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ est une loi d'arrivées sur les sommets.

Par ailleurs, on suppose (sans perte de généralité) que le système étudié est vide à l'instant initial, c'est-à-dire que $W_0 = \varepsilon$.

Notations spécifiques : Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, on crée une copie (indépendante) de l'ensemble $\mathcal{V}$, notée $\overline{\mathcal{V}}$, c'est-à-dire un ensemble de même cardinal formé de copies d'éléments de $\mathcal{V}$. On note alors $\overline{\mathcal{V}} \triangleq \{\bar{i} : i \in \mathcal{V}\}$ et on définit $\mathbf{V} \triangleq \mathcal{V} \uplus \overline{\mathcal{V}}$.
Plus généralement, pour tout sous-ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$, on note $\overline{\mathcal{X}} \triangleq \{\bar{j} : j \in \mathcal{X}\}$, avec $\overline{\overline{\mathcal{X}}} = \mathcal{X}$.

Construisons dès à présent les deux chaînes annexes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui seront utilisées ultérieurement.

2.1 La chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son espace d'états $\mathbb{B}$

Construisons le processus $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{V}^*$, appelé *file d'attente rétrograde* (ou *backward detailed chain*), de la manière suivante :

On pose $B_0 \triangleq \varepsilon$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

— si $W_n = \varepsilon$ (c'est-à-dire que les items arrivés jusqu'au temps n ont déjà tous été appariés à cet instant), alors on pose $B_n = \varepsilon$;

— si $W_n \neq \varepsilon$, on définit $i(n) \in [\![1;n]\!]$ l'instant d'arrivée du plus vieil item encore présent dans le système (c'est-à-dire que $V_{i(n)}$ n'est pas encore apparié au temps n mais que, par contre, si $i(n) \geqslant 2$, les items $V_1, \ldots, V_{i(n)-1}$ le sont).
Alors, le mot B_n est de taille $n - i(n) + 1$, et pour tout $\ell \in [\![1; n - i(n) + 1]\!]$, on pose

$$B_n(\ell) \triangleq \begin{cases} V_{i(n)+\ell-1} & \text{si } V_{i(n)+\ell-1} \text{ n'est pas encore apparié au temps } n \text{ ;} \\ \overline{V_k} & \text{si } V_{i(n)+\ell-1} \text{ est apparié avec l'item } V_k \text{ (où } k \in [\![1;n]\!]). \end{cases}$$

Par construction, remarquons qu'on a donc nécessairement

$$B_n(1) = V_{i(n)} \in \mathcal{V}. \tag{2.1}$$

De plus, les lettres non-copiées de B_n sont exactement celles de W_n (et lues dans le même ordre). Formellement,

$$W_n = B_{n\left[\overline{\mathcal{V}}\right]}, \tag{2.2}$$

où $B_{n\left[\overline{\mathcal{V}}\right]}$ est le mot obtenu à partir de B_n en enlevant les lettres de $\overline{\mathcal{V}}$ (prolongement de la Définition 9).

Remarque 2

À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, le mot $B_n \in \mathbf{V}^*$ contient donc

— *les classes des éléments entrés jusqu'au temps n et pas encore appariés à cet instant ;*

— *les copies des classes des « époux » de chaque élément déjà apparié au temps n et entré entre l'instant d'arrivée du plus vieil item non apparié et l'instant n.*

Comme, pour tout instant $n \in \mathbb{N}$, l'expression de B_{n+1} peut être déduite de celle de B_n et de la classe V_{n+1} (indépendante de tout le passé) de l'élément entrant au temps $n+1$, on a :

Proposition 10

Le processus $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov d'espace d'états noté $\mathbb{B}$.

Le résultat suivant permet de caractériser l'ensemble $\mathbb{B}$,

Lemme 1

Fixons un mot $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \ldots \mathbf{w}_q \in \mathbf{V}^*$, où $q \in \mathbb{N}$.
Alors,

$$\mathbf{w} \in \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbf{w} = \varepsilon \text{ ou } \begin{cases} 1)\ \mathbf{w}_1 \in \mathcal{V} \text{ ;} \\ 2)\ \text{Pour } 1 \leqslant i < j \leqslant q,\ \left[(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) \in \mathcal{V}^2 \Rightarrow \mathbf{w}_i \dashv \mathbf{w}_j\right] \text{ ;} \\ 3)\ \text{Pour } 1 \leqslant i < j \leqslant q,\ \left[(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) \in \mathcal{V} \times \overline{\mathcal{V}} \Rightarrow \mathbf{w}_i \dashv \overline{\mathbf{w}_j}\right]. \end{cases}$$

Démonstration : Une preuve constructive de ce résultat est donnée dans la Section 2.10.1.
Elle fournit en effet une procédure de construction d'un scénario d'arrivées permettant de faire passer la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'état ε à tout état $\mathbf{w} \in \mathbb{B}\backslash\{\varepsilon\}$. ■

Ainsi, si $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \ldots \mathbf{w}_q \in \mathbf{V}^*\backslash\{\varepsilon\}$,

$$\mathbf{w} \in \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbf{w}_1 \in \mathcal{V} \text{ et } \forall k \in [\![1;q]\!],\ \left[\mathbf{w}_k \in \mathcal{V} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{w}_k \in \mathcal{E}(\mathcal{V}(\mathbf{w}_1 \ldots \mathbf{w}_{k-1}\mathbf{w}_{k+1} \ldots \mathbf{w}_q))^c \\ \mathbf{w}_k \in \mathcal{E}(\mathcal{V}(\overline{\mathbf{w}_{k+1}} \ldots \overline{\mathbf{w}_q}))^c \end{cases}\right]. \tag{2.3}$$

Le résultat suivant se déduit également du Lemme 1,

Remarque 3

Tout mot $\mathbf{w} \in \mathbb{B}\backslash\{\varepsilon\}$ *s'écrit*

$$\mathbf{w} = b_1\overline{a_{11}a_{12}}\dots\overline{a_{1k_1}}b_2\overline{a_{21}a_{22}}\dots\overline{a_{2k_2}}b_3\dots b_q\overline{a_{q1}}\dots\overline{a_{qk_q}},$$

où

$$q \in \mathbb{N}_*,\ (b_i)_{1\leqslant i\leqslant q} \in \mathcal{V}^q,\ (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;q]\!]\times[\![1;k_i]\!]} \in \mathcal{V}^{\sum_{\ell=1}^q k_\ell} \text{ et } \forall \ell \in [\![1;q]\!],\ k_\ell \in \mathbb{N},$$

avec

$$\{b_1,\dots,b_q\} = \mathcal{V}(\mathbf{w}) \in \tilde{\mathbb{I}}(G),$$

$$\forall i \in [\![1;q]\!],\ b_i \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}} \ \Rightarrow [\forall j \neq i,\ b_i \neq b_j]$$

et

$$\forall i \in [\![1;q]\!],\ \forall j \in [\![1;k_i]\!],\ a_{ij} \in \mathcal{E}(\{b_1,\dots,b_i\})^c.$$

La preuve du Lemme 1 (cf. Section 2.10.1), fournissant un scénario d'arrivées permettant à la chaîne de Markov $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de passer, avec probabilité strictement positive, de ε à tout mot $\mathbf{w} \in \mathbb{B}\backslash\{\varepsilon\}$, nous permet de prouver l'irréductibilité de la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{B}$,

Proposition 11

La chaîne de Markov $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est irréductible sur* $\mathbb{B}$.

Démonstration : Une preuve de ce résultat est donnée dans la Section 2.10.2. ■

2.2 La chaîne $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son espace d'états $\mathbb{F}$

Construisons le processus $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{V}^* \uplus \mathbf{V}^{\mathbb{N}}$, où $\mathbf{V}^{\mathbb{N}}$ représente l'ensemble des mots infinis sur l'alphabet $\mathbf{V}$, appelé *file d'attente vers l'avant* (ou *forward detailed chain*), de la manière suivante :

On pose $F_0 \triangleq \varepsilon$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

— si $W_n = \varepsilon$ (c'est-à-dire que tous les éléments arrivés jusqu'au temps n ont déjà tous été appariés à cet instant), alors on pose $F_n = \varepsilon$;

— si $W_n \neq \varepsilon$, on définit $\mathscr{U}_n$ l'ensemble des éléments entrés jusqu'au temps n (c'est-à-dire parmi $\{V_1,\dots,V_n\}$) et pas encore appariés à cet instant. Remarquons que $\mathscr{U}_n$ est non-vide puisque $W_n \neq \varepsilon$. Aussi, définissons

$$j(n) \triangleq \sup\{m \geqslant n+1 : V_m \text{ sera apparié (dans le futur) avec un élément de } \mathscr{U}_n\}.$$

Alors, le mot F_n est de taille $j(n)-n$, et pour tout $\ell \in [\![1;j(n)-n]\!]$,

$$F_n(\ell) \triangleq \begin{cases} V_{n+\ell} & \text{si } V_{n+\ell} \text{ ne sera pas apparié (dans le futur) avec un élément de } \mathscr{U}_n\ ; \\ \overline{V_k} & \text{si } V_{n+\ell} \text{ sera apparié (dans le futur) avec l'item } V_k \in \mathscr{U}_n \text{ (où } k \in [\![1;n]\!]). \end{cases}$$

Si $j(n) < +\infty$, alors F_n est un mot de taille $j(n)-n < +\infty$, et donc $F_n \in \mathbf{V}^*$.
Si $j(n) = +\infty$, alors F_n est un mot de taille $j(n)-n = +\infty$, et donc $F_n \in \mathbf{V}^{\mathbb{N}}$.

Par construction, remarquons que si $F_n \in \mathbf{V}^*$, alors nécessairement

$$F_n\left(j(n)-n\right) \in \overline{\mathcal{V}}. \tag{2.4}$$

De plus, si $F_n \in \mathbf{V}^*$, les lettres copiées de F_n sont exactement les copies de celles de W_n. Ces lettres apparaissent avec la même multiplicité mais l'ordre de lecture n'est cependant pas forcément conservé. En particulier,

$$\mathcal{V}(W_n) = \mathcal{V}\left(\overline{F_n}\right). \tag{2.5}$$

Remarque 4

À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, le mot $F_n \in \mathbf{V}^* \uplus \mathbf{V}^{\mathbb{N}}$ contient donc

- *les classes des éléments entrés entre l'instant $n+1$ et l'instant d'arrivée du dernier élément qui sera apparié avec un item entré jusqu'au temps n (si de tels éléments existent) et qui ne s'apparieront pas avec des éléments entrés avant l'instant n ;*
- *les copies des classes des « époux » (entrés jusqu'au temps n) de chaque élément entré à partir de l'instant $n+1$ qui sera apparié avec un item entré avant l'instant n.*

Comme G est connexe, que $\mathcal{V}$ est le support de $\bar{\mu}$ et que les arrivées $(V_i)_{i\geqslant 1}$ dans le système se font indépendamment les unes des autres, on a :

Proposition 12

À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, le mot F_n est presque-sûrement fini, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \in \mathbf{V}^* \text{ p.s.}$$

Comme, pour tout instant $n \in \mathbb{N}$, l'expression de F_{n+1} peut être déduite de celle de F_n et des classes $(V_{j(n)+1}, V_{j(n)+2}, \dots)$ des éléments entrant à partir de l'instant $j(n)+1$ (et qui sont indépendantes de tout le passé), on a :

Proposition 13

Le processus $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov d'espace d'états noté $\mathbb{F}$.

Pour la suite de notre étude, nous souhaitons relier les espaces $\mathbb{B}$ et $\mathbb{F}$ à l'aide d'une application bijective. Pour ce faire, introduisons la définition suivante,

Définition 22

Pour tout mot $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_n \in \mathbf{V}^*$, on définit sa copie-renversée par :

$$\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}} \triangleq \overline{\mathbf{w}_n} \dots \overline{\mathbf{w}_1} \in \mathbf{V}^*.$$

Remarque 5

L'application $\begin{array}{cccc} \Psi & : & \mathbf{V}^* & \to & \mathbf{V}^* \\ & & \mathbf{w} & \mapsto & \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}} \end{array}$ *est involutive, c'est-à-dire qu'elle vérifie $\Psi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\mathbf{V}^*}$, où $\mathrm{Id}_{\mathbf{V}^*}$ est l'application identité sur l'ensemble $\mathbf{V}^*$.*
En particulier, Ψ est une bijection, d'inverse $\Psi^{-1} = \Psi$.

En restreignant à $\mathbb{B}$ l'espace de départ de Ψ et en corestreignant à $\mathbb{F}$ son espace d'arrivée, on construit une application bijective,

Lemme 2

L'application $\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathbb{B} & \to & \mathbb{F} \\ & & \mathbf{w} & \mapsto & \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}} \end{array}$ *est bien définie et bijective, de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{F}$.*
En particulier, on peut décrire $\mathbb{F}$ comme étant l'image de $\mathbb{B}$ par ϕ, c'est-à-dire

$$\mathbb{F} = \{\phi(\mathbf{w}) : \mathbf{w} \in \mathbb{B}\}. \tag{2.6}$$

Démonstration : Une preuve de ce résultat se trouve dans la Section 2.10.3.
Celle-ci fournit, par ailleurs, une procédure de construction d'un scénario d'arrivées permettant de faire passer la chaîne $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'état ε à tout état $\mathbf{w} \in \mathbb{F}\backslash\{\varepsilon\}$. ■

La preuve du Lemme 2 (cf. Section 2.10.3), fournissant un scénario d'arrivées permettant à la chaîne de Markov $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de passer, avec probabilité strictement positive, de ε à tout mot $\mathbf{w} \in \mathbb{F}\backslash\{\varepsilon\}$, nous permet de prouver l'irréductibilité de la chaîne $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{F}$,

Proposition 14

La chaîne de Markov $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible sur $\mathbb{F}$.

Démonstration : Une preuve de ce résultat est proposée dans la Section 2.10.4. ■

Les chaînes de Markov $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seront fondamentales pour la suite. En effet, mises en lien par une propriété de pseudo-réversibilité (cf. Section 2.4), elles seront notamment utilisées pour prouver que la politique FCFM est maximale généralisée (cf. Théorème 1). Pour mieux comprendre leur fonctionnement, donnons alors, dès à présent, un exemple concret de construction de ces deux chaînes.

2.3 Exemple du processus de construction

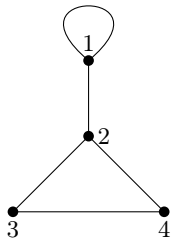

FIGURE 2.1 – Graphe de compatibilités (généralisé connexe) $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$.

Approfondissons l'exemple de construction entamé en Section 1.3 pour expliquer, à l'aide d'un exemple, comment se construisent les chaînes $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Rappelons donc que l'on considère ici le modèle $\text{MG}(G, \Phi, \bar{\mu})$, où

— $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est le graphe généralisé connexe donné par la Figure 2.1 ;
— $\Phi = \text{FCFM}$ (cf. Définition 10) ;
— $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ est une loi d'arrivées sur les sommets.

Dans notre exemple, supposons que les quatre premières arrivées sont les suivantes :

$$V_1 = 3, \quad V_2 = 1, \quad V_3 = 2, \quad V_4 = 1.$$

Pour un schéma explicatif du déroulement, se reporter à la Figure 2.2.

— <u>État initial</u> : À l'instant de départ (instant 0), on suppose que le buffer est vide.

$$\rightarrow\ W_0 = \varepsilon, \quad B_0 = \varepsilon, \quad F_0 = \varepsilon.$$

— <u>Étape 1</u> : Un item de classe 3 entre dans le système.
Étant seul dans le système, il ne peut s'apparier avec aucun autre élément. Il patiente donc à l'intérieur du système.

$$\rightarrow\ W_1 = 3, \quad B_1 = 3.$$

Par ailleurs, remarquons que l'item de classe 3 qui est dans le système ne sera pas compatible avec l'item de classe $V_2 = 1$, alors qu'il le sera avec l'item de classe $V_3 = 2$ et s'appariera donc avec lui.

$$\rightarrow\ F_1 = 1\bar{3}.$$

— <u>Étape 2</u> : Un item de classe 1 entre dans le système.
Il y a déjà un item de classe 3 à l'intérieur. Cependant, les classes 1 et 3 n'étant pas compatibles, les items correspondants ne peuvent pas s'apparier ensemble. Ils restent donc tous les deux (en conservant leur ordre d'arrivée) dans le système.

$$\rightarrow\ W_2 = 31, \quad B_2 = 31.$$

Par ailleurs, l'item de classe 3 du système sera apparié avec l'item de classe $V_3 = 2$, et l'item de classe 1 du système sera apparié avec celui de classe $V_4 = 1$.

$$\rightarrow\ F_2 = \bar{3}\bar{1}.$$

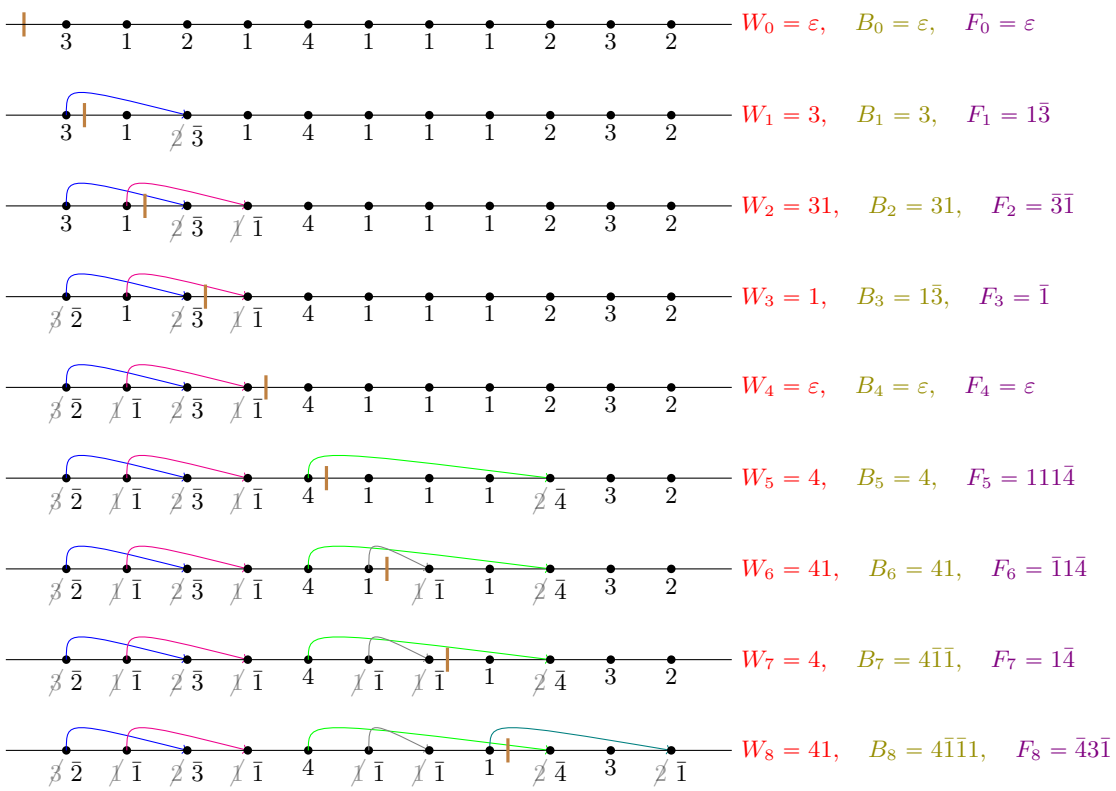

FIGURE 2.2 – Scénario d'arrivées sur le graphe G de la Figure 2.1 et évolution des trajectoires des chaînes de Markov $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— Étape 3 : Un item de classe 2 entre dans le système.
Étant sous la politique FCFM, comme la classe 2 est compatible avec les classes 3 et 1, il va choisir de s'apparier avec celui de classe 3. Ils quittent alors le système et laissent donc seul l'item de classe 1.

$$\rightarrow \; W_3 = 1, \quad B_3 = 1\bar{3}.$$

L'item de classe 1 restant dans le système s'appariera dans le futur avec l'item de classe $V_4 = 1$.

$$\rightarrow \; F_3 = \bar{1}.$$

— Étape 4 : Un item de classe 1 entre dans le système.
Il y retrouve un autre élément de classe 1, compatible, ce qui permet l'appariement de ces deux éléments. Ils quittent donc le système et le laissent vide.

$$\rightarrow \; W_4 = \varepsilon, \quad B_4 = \varepsilon, \quad F_4 = \varepsilon.$$

Les deux chaînes de Markov auxiliaires $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ préalablement construites vont maintenant être mises en lien.

2.4 Propriété de pseudo-réversibilité

Introduisons tout d'abord une mesure « produit » ν sur $\mathbf{V}^*$,

Définition 23

On définit la mesure $\nu \in \mathcal{M}(\mathbf{V}^*)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \nu(\varepsilon) = 1 \; ; \\ \nu(\mathbf{w}) = \displaystyle\prod_{i=1}^{|\mathcal{V}|} \bar{\mu}(i)^{|\mathbf{w}|_i + |\overline{\mathbf{w}}|_i}, \; \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}^* \backslash \{\varepsilon\}. \end{cases}$$

Cette mesure nous permet alors d'établir un lien, dit de « pseudo-réversibilité », entre les chaînes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

Proposition 15

Pour tout couple de mots $(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \mathbb{B}^2$, *on a :*

$$\left(\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}}, \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right) \in \mathbb{F}^2 \tag{2.7}$$

et

$$\nu(\mathbf{w})\mathbb{P}\left[B_{n+1} = \mathbf{w}' | B_n = \mathbf{w}\right] = \nu\left(\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right)\mathbb{P}\left[F_{n+1} = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}} | F_n = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right]. \tag{2.8}$$

Démonstration : Une preuve de ce résultat est fournie dans la Section 2.10.5. ■

2.5 Condition de positive récurrence et lois stationnaires

Énonçons un résultat intéressant qui permettra d'alléger les preuves des résultats à venir.

Définition 24

Pour tout ensemble E quelconque et tous sous-ensembles $\mathcal{A}$ et $(\mathcal{A}_i)_{i\geqslant 1}$ de E, on note

- $\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n \triangleq \{a_1 \dots a_n : \forall i \in [\![1; n]\!],\ a_i \in \mathcal{A}_i\}$, *l'ensemble des mots de $n \geqslant 1$ lettres dont la $i^{\text{ème}}$ appartient à l'alphabet $\mathcal{A}_i$, pour chaque $i \in [\![1; n]\!]$.*
- $\mathcal{A}^k \triangleq \{a_1 \dots a_k : \forall i \in [\![1; k]\!],\ a_i \in \mathcal{A}\}$, *l'ensemble des mots de $k \geqslant 1$ lettres formés avec l'alphabet $\mathcal{A}$, où, par convention, $\mathcal{A}^0 = \varepsilon$.*
- $\mathcal{A}^* \triangleq \biguplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^k$, *l'ensemble des mots finis sur l'alphabet $\mathcal{A}$.*

Lemme 3

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \subset \mathbf{V} = \mathcal{V} \uplus \overline{\mathcal{V}}$ des alphabets de lettres.
Alors,

1. $\nu(\mathcal{A}) = \bar{\mu}(\mathcal{V}(\mathcal{A})) + \bar{\mu}\left(\overline{\overline{\mathcal{V}}(\mathcal{A})}\right)$.
2. $\nu(\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n) = \nu(\mathcal{A}_1) \dots \nu(\mathcal{A}_n)$.
   En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\nu\left(\mathcal{A}^k\right) = \nu(\mathcal{A})^k$.
3. *Si $\nu(\mathcal{A}) < 1$, alors $\nu(\mathcal{A}^*) = \dfrac{1}{1 - \nu(\mathcal{A})}$.*

Démonstration : Une preuve de ce résultat est donnée dans la Section 2.10.6. ■

Remarquons que le Lemme 3 est évidemment encore valable pour toute restriction de ν à un sous-ensemble de $\mathbf{V}^*$.

L'association du Lemme 3 et de la propriété de *pseudo-réversibilité* (Proposition 15) permet, sous l'hypothèse que la loi d'arrivées $\bar{\mu}$ satisfasse la condition NCOND(G) (cf. (1.7)), de prouver la récurrence positive des chaînes auxiliaires $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ainsi que de donner l'expression de leurs (uniques) lois de probabilité stationnaires respectives,

Proposition 16

Soient $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé connexe et $\bar{\mu} \in \textsc{Ncond}(G)$.
Alors,

— *les chaînes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont récurrentes positives sur leurs espaces d'états respectifs $\mathbb{B}$ et $\mathbb{F}$;*

— *ces deux chaînes admettent respectivement (à constante multiplicative près) les restrictions $\nu_B \triangleq \nu|_{\mathbb{B}}$ et $\nu_F \triangleq \nu|_{\mathbb{F}}$ pour uniques mesures stationnaires, définies par :*

$$\begin{cases} \nu_B(\varepsilon) = \nu_F(\varepsilon) = 1 \ ; \\ \nu_B(\mathbf{w}) = \nu_F(\phi(\mathbf{w})) = \displaystyle\prod_{i=1}^{|\mathcal{V}|} \bar{\mu}(i)^{|\mathbf{w}|_i + |\overline{\mathbf{w}}|_i}, \ \forall \mathbf{w} \in \mathbb{B}\backslash\{\varepsilon\}. \end{cases}$$

On note alors $\Pi_B^{\text{FCFM},\bar{\mu}}$ l'unique loi de probabilité stationnaire de la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'espace d'états $\mathbb{B}$ définie, pour tout $\mathbf{w} \in \mathbb{B}$, par

$$\Pi_B^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\mathbf{w}) \triangleq \alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu}) \times \nu_B(\mathbf{w}), \tag{2.9}$$

où

$$\alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu}) \triangleq \nu_B\left(\mathbb{B}\right)^{-1} = \left[\sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{B}} \nu_B(\mathbf{w})\right]^{-1}.$$

Démonstration : Une preuve de ce résultat est donnée dans la Section 2.10.7. ■

Le résultat (2.2), donné dans la Section 2.1, permet de voir la chaîne $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme la « projection » de la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathcal{V}^*$ et ainsi d'étudier le comportement de la chaîne de Markov $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à travers celui de la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La Proposition 16 nous ayant fourni la récurrence positive de la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous l'hypothèse $\textsc{Ncond}(G)$, il semble donc naturel que cette dernière assure également la récurrence positive de la chaîne $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le résultat général de stationnarité « sous-jacente » ci-dessous sera utilisé dans le but d'obtenir la loi de probabilité stationnaire de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de celle de $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

Proposition 17

Notons P (respectivement, P') la matrice de transition d'une chaîne de Markov à valeurs dans un ensemble dénombrable S (respectivement, S').
Considérons une application « projection » $p : S \to S'$, qui vérifie

$$\forall \left(a', b'\right) \in S' \times S', \ \forall a \in p^{-1}(\{a'\}), \ P\left(a, p^{-1}(\{b'\})\right) = P'(a', b'). \tag{2.10}$$

Si une mesure $\mu \in \mathcal{M}(S)$ est invariante pour P, alors la mesure $\mu' \in \mathcal{M}(S')$ définie, pour tout $a' \in S'$, par

$$\mu'(a') \triangleq \mu\left(p^{-1}(\{a'\})\right) = \sum_{a\in p^{-1}(\{a'\})} \mu(a),$$

est elle-même invariante pour P'.

Remarquons que ce résultat est fréquemment utilisé pour deux chaînes de Markov telles que l'une est la restriction de l'autre sur un sous-espace de son espace d'états.

Démonstration : Soit P (respectivement, P') la matrice de transition d'une chaîne de Markov à valeurs dans un ensemble dénombrable S (respectivement, S').
Considérons une application $p : S \to S'$ vérifiant (2.10) et fixons une mesure $\mu \in \mathcal{M}(S)$, invariante pour P.

Alors, pour tout élément $b' \in S'$,

$$\begin{aligned}
\sum_{a' \in S'} \mu'(a')P'(a',b') &= \sum_{a' \in S'} \left(\sum_{a \in p^{-1}(\{a'\})} \mu(a) \right) P'(a',b') \quad \text{(par définition de } \mu') \\
&= \sum_{a' \in S'} \sum_{a \in p^{-1}(\{a'\})} \mu(a) P\left(a, p^{-1}(\{b'\})\right) \quad \text{(par (2.10))} \\
&= \sum_{s \in S} \mu(s) P\left(s, p^{-1}(\{b'\})\right) \quad \text{(car } p^{-1}(S') = S\text{, puisque } p : S \to S') \\
&= \mu\left(p^{-1}(\{b'\})\right) \quad \text{(car } \mu \text{ est invariante pour } P \text{ sur } S) \\
&= \mu'(b') \quad \text{(par définition de } \mu').
\end{aligned}$$

On a donc montré l'assertion suivante :

$$\forall b' \in S', \ \sum_{a' \in S'} \mu'(a')P'(a',b') = \mu'(b'),$$

c'est-à-dire que $\mu' \in \mathcal{M}(S')$ est une mesure invariante pour P'. ■

La Proposition 17 va maintenant servir à prouver le résultat suivant, donnant une condition suffisante à la récurrence positive de $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que l'expression de sa loi stationnaire,

Proposition 18

Soient $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé connexe et $\bar{\mu} \in \text{NCOND}(G)$.
Alors, la chaîne de Markov $(W_n^{\text{FCFM},\bar{\mu}})_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente positive sur $\mathbb{W}$ et son unique loi de probabilité stationnaire est la mesure $\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}$ définie sur $\mathbb{W}$ par :

$$\forall w \in \mathbb{W}, \ \Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(w) \triangleq \Pi_B^{\text{FCFM},\bar{\mu}}\left(p^{-1}(\{w\})\right) = \sum_{\left\{\mathbf{w} \in \mathbb{B} : \mathbf{w}_{[\overline{\mathcal{V}}]} = w\right\}} \Pi_B^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\mathbf{w}),$$

où l'application « projection » p est donnée par :

$$\begin{array}{rcccl} p & : & \mathbb{B} & \to & \mathbb{W} \\ & & \boldsymbol{w} & \mapsto & w \triangleq \boldsymbol{w}_{[\overline{\mathcal{V}}]}. \end{array}$$

Remarquons que l'item 2) du Lemme 1 assure que l'application p est bien définie.

Démonstration : Fixons un graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ainsi qu'une mesure $\bar{\mu} \in \text{NCOND}(G)$.
L'assertion (2.2) assurant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ${B_n}_{[\overline{\mathcal{V}}]} = W_n$, on en déduit :

$$\forall (a',b') \in \mathbb{W}^2, \ \forall a \in p^{-1}(\{a'\}), \ \mathbb{P}_B\left(a, p^{-1}(\{b'\})\right) = \mathbb{P}_W(a',b'), \tag{2.11}$$

où on a défini

$$\begin{aligned}
&\forall (w,w') \in \mathbb{W}^2, \ \mathbb{P}_W(w,w') \triangleq \mathbb{P}\left[W_{n+1} = w' | W_n = w\right], \ \forall n \in \mathbb{N}, \\
\text{et} \quad &\forall (\mathbf{w},\mathbf{w}') \in \mathbb{B}^2, \ \mathbb{P}_B(\mathbf{w},\mathbf{w}') \triangleq \mathbb{P}\left[B_{n+1} = \mathbf{w}' | B_n = \mathbf{w}\right], \ \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

La condition d'application (2.10) étant assurée par le résultat (2.11), la Proposition 17 s'applique alors pour les quantités suivantes :

$$P \leftarrow \mathbb{P}_B, \quad P' \leftarrow \mathbb{P}_W, \quad S \leftarrow \mathbb{B}, \quad S' \leftarrow \mathbb{W}, \quad \mu \leftarrow \Pi_B^{\text{FCFM},\bar{\mu}}, \quad \mu' \leftarrow \Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}.$$

Ceci assure donc que $\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}$ est une mesure stationnaire pour la chaîne $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{W}$.
En outre, comme les ensembles $(p^{-1}(\{w\}))_{w \in \mathbb{W}}$ sont disjoints et que $p : \mathbb{B} \to \mathbb{W}$ est bien définie,

$$\begin{aligned}
\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\mathbb{W}) = \sum_{w \in \mathbb{W}} \Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(w) &= \sum_{w \in \mathbb{W}} \Pi_B^{\text{FCFM},\bar{\mu}}\left(p^{-1}(\{w\})\right) \\
&= \Pi_B^{\text{FCFM},\bar{\mu}}\left(\biguplus_{w \in \mathbb{W}} p^{-1}(\{w\}) \right) \\
&= \Pi_B^{\text{FCFM},\bar{\mu}}\left(p^{-1}(\mathbb{W})\right) = \Pi_B^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\mathbb{B}) = 1,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}$ est une loi de probabilité stationnaire pour la chaîne $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{W}$. L'irréductibilité de cette chaîne sur cet espace (cf. item 1. de la Proposition 4) assure alors que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente positive sur $\mathbb{W}$, et $\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}$ est donc l'unique loi de probabilité stationnaire de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{W}$, ce qui conclut la preuve. ■

2.6 Maximalité généralisée de FCFM et loi stationnaire

La Proposition 18 nous permet alors d'énoncer le résultat central de ce Chapitre 2, qui assure que la politique FCFM est maximale généralisée (au sens de la Définition 19) et qui donne l'expression, sous une forme produit remarquable, de l'unique loi de probabilité stationnaire de la chaîne $(W_n^{\text{FCFM},\bar{\mu}})_{n\in\mathbb{N}}$, dès lors que $\bar{\mu} \in \text{NCOND}(G)$,

Théorème 1

Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé connexe tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$.

1. $\text{STAB}(G, \text{FCFM}) = \text{NCOND}(G)$*, et ces ensembles sont vides si et seulement si G est un graphe biparti ;*
2. *Si $\bar{\mu} \in \text{NCOND}(G)$, alors l'unique loi de probabilité stationnaire $\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}$ de la chaîne $(W_n^{\text{FCFM},\bar{\mu}})_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{W}$ s'écrit de la façon suivante :*

$$\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(w) = \begin{cases} \alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu}) & \text{si } w = \varepsilon \ ; \\ \alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu}) \times \displaystyle\prod_{\ell=1}^{q} \frac{\bar{\mu}(w_\ell)}{\bar{\mu}(\mathcal{E}(\{w_1, \dots, w_\ell\}))} & \text{si } w = w_1 \dots w_q \in \mathbb{W}\backslash\{\varepsilon\}, \end{cases}$$

où

$$\alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu}) = \nu_B(\mathbb{B})^{-1} = \left[\sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{B}} \nu_B(\mathbf{w})\right]^{-1}$$

est la constante de normalisation de la mesure ν_B sur $\mathbb{B}$.

Démonstration : Considérons un graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$.

1. La Proposition 6 fournissant directement l'inclusion $\subset$, étudions l'inclusion réciproque. Le cas où $\text{NCOND}(G) = \varnothing$ étant trivial, considérons une mesure $\bar{\mu} \in \text{NCOND}(G)$. La Proposition 18 assure alors que $\bar{\mu} \in \text{STAB}(G, \text{FCFM})$, ce qui prouve l'inclusion réciproque. Enfin, la Proposition 9 assure que $\text{NCOND}(G) \neq \varnothing$ si et seulement si G n'est pas un graphe biparti, ce qui clôt la preuve du point 1.
2. Fixons une mesure $\bar{\mu} \in \text{NCOND}(G)$.
   Déjà, par la définition de $\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}$ donnée dans la Proposition 18 et par (2.9),

$$\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\varepsilon) = \Pi_B^{\text{FCFM},\bar{\mu}}\left(p^{-1}(\{\varepsilon\})\right) = \Pi_B^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\varepsilon) = \alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu}).$$

   Considérons maintenant un mot $w = w_1 \dots w_q \in \mathbb{W}\backslash\{\varepsilon\}$.
   La Remarque 3 assure alors que

$$p^{-1}(\{w\}) = w_1\mathcal{A}_1^* w_2\mathcal{A}_2^* \dots w_q\mathcal{A}_q^*, \text{ où } \forall \ell \in [\![1; q]\!],\ \mathcal{A}_\ell \triangleq \overline{\mathcal{E}\left(\{w_1, \dots, w_\ell\}\right)^c}. \tag{2.12}$$

   Ainsi, la définition de $\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}$ donnée dans la Proposition 18, l'égalité (2.9), l'assertion (2.12) et la structure produit de ν_B assurent respectivement que

$$\begin{aligned} \Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(w) &= \Pi_B^{\text{FCFM},\bar{\mu}}\left(p^{-1}(\{w\})\right) \\ &= \alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu}) \times \nu_B\left(p^{-1}(\{w\})\right) \\ &= \alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu}) \times \nu_B\left(w_1\mathcal{A}_1^* w_2\mathcal{A}_2^* \dots w_q\mathcal{A}_q^*\right) \\ &= \alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu}) \times \prod_{\ell=1}^{q} \bar{\mu}(w_\ell)\nu_B\left(\mathcal{A}_\ell^*\right). \end{aligned}$$

   Par ailleurs,

$$\forall \ell \in [\![1; q]\!],\ \mathcal{A}_\ell \subsetneq \overline{\mathcal{V}}.$$

Le Lemme 3 assure alors que, pour tout $\ell \in [\![1;q]\!]$, $\nu_B(\mathcal{A}_\ell) = \bar{\mu}\left(\overline{\mathcal{A}_\ell}\right) < 1$, puis que

$$\begin{aligned}\alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu}) \times \prod_{\ell=1}^{q} \bar{\mu}(w_\ell)\nu_B\left(\mathcal{A}_\ell^*\right) &= \alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu}) \times \prod_{\ell=1}^{q} \frac{\bar{\mu}(w_\ell)}{1-\bar{\mu}\left(\overline{\mathcal{A}_\ell}\right)} \\ &= \alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu}) \times \prod_{\ell=1}^{q} \frac{\bar{\mu}(w_\ell)}{\bar{\mu}(\mathcal{E}(\{w_1,\dots,w_\ell\}))}.\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve. ■

En pratique, il se peut néanmoins que la détermination explicite de l'ensemble $\mathbb{B}$ soit ardue (voire impossible), ce qui peut rendre impossible le calcul de $\alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu})$. Cependant, au cours de la preuve de la Proposition 16 (voir la Section 2.10.7), on montre qu'en écrivant chaque $\mathcal{I} \in \tilde{\mathbb{I}}(G)$ sous la forme $\mathcal{I} = \left\{i_1, \dots, i_{|\mathcal{I}|}\right\}$,

$$\nu_B(\mathbb{B}) = 1 + \sum_{\mathcal{I}\in\tilde{\mathbb{I}}(G)} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{|\mathcal{I}|}} \prod_{j=1}^{|\mathcal{I}|} \frac{\bar{\mu}(i_{\sigma(j)})}{\bar{\mu}\left(\mathcal{E}(\{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(j)}\})\right) - \bar{\mu}\left(\{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(j)}\} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c\right)},$$

ce qui permet alors d'obtenir une formule directe de calcul pour $\alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu})$:

$$\alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu}) = \left[1 + \sum_{\mathcal{I}\in\tilde{\mathbb{I}}(G)} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{|\mathcal{I}|}} \prod_{j=1}^{|\mathcal{I}|} \frac{\bar{\mu}(i_{\sigma(j)})}{\bar{\mu}\left(\mathcal{E}(\{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(j)}\})\right) - \bar{\mu}\left(\{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(j)}\} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c\right)}\right]^{-1}. \quad (2.13)$$

Remarquons que le Théorème 1 et la formule (2.13) permettent de généraliser, au cas de graphes généralisés connexes, le Theorem 1 de l'article [25], initialement démontré uniquement pour des graphes simples connexes, c'est-à-dire tels que $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \varnothing$.

Enfin, on peut déduire du fait que FCFM est maximale généralisée (cf. Théorème 1) le résultat suivant, généralisant l'assertion (16) du Theorem 2 de [24],

Corollaire 1

Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé connexe tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$.
Alors,

$$G \text{ est stabilisable} \Leftrightarrow G \text{ n'est pas un graphe biparti.}$$

Démonstration : Fixons un graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$.

- $\Rightarrow$: Supposons que G est stabilisable, c'est-à-dire qu'il existe $\Phi \in$ POL telle que $\text{STAB}(G, \Phi) \neq \varnothing$.
  La Proposition 6 assure alors que $\text{NCOND}(G) \neq \varnothing$, et G n'est donc pas un graphe biparti (par la Proposition 9).
- $\Leftarrow$: Supposons que G n'est pas un graphe biparti.
  Dans ce cas, le point 1. du Théorème 1 assure que $\text{STAB}(G, \text{FCFM}) \neq \varnothing$, et G est donc, en particulier, stabilisable.

Ceci conclut la preuve. ■

Questions ouvertes :

— Le Théorème 1 de ce manuscrit ainsi que le Theorem 4.7 de [7] assurent respectivement que FCFM et que toute politique de type Max-Weight, où $\beta > 0$, (et donc, en particulier, ML) sont des politiques maximales généralisées. La question suivante apparaît alors naturellement,

- *Peut-on trouver d'autres politiques d'appariements qui sont maximales généralisées ? Par exemple, qu'en est-il dans le cas d'une politique à priorités, où chaque item a un ordre de préférence pour réaliser ses appariements ?*

Le Théorème 1 exprime explicitement (sous une forme produit), pour tout $\bar{\mu} \in \text{NCOND}(G)$, la loi de probabilité stationnaire de la chaîne $(W_n^{\text{FCFM},\bar{\mu}})_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui permet notamment une étude de certaines caractéristiques de performance du système à l'équilibre (voir par exemple la Section 2.7, ou encore le Chapitre 4). Ainsi,

- *Est-il possible de déterminer, pour tout $\bar{\mu} \in \text{NCOND}(G)$, une expression de la loi stationnaire de la chaîne $(W_n^{\text{ML},\bar{\mu}})_{n\in\mathbb{N}}$, ou même, plus généralement, de la chaîne $(W_n^{\Phi,\bar{\mu}})_{n\in\mathbb{N}}$, où Φ est une politique de type Max-Weight ?*

2.7 Caractéristiques du système à l'équilibre

Le Théorème 1 assure que si $\bar{\mu} \in \textsc{Ncond}(G)$, on a existence (et unicité) d'une loi de probabilité stationnaire $\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}$ pour la chaîne $(W_n^{\text{FCFM},\bar{\mu}})_{n\in\mathbb{N}}$, dont l'expression est calculable à l'aide de sa forme produit et de l'expression de $\alpha(G, \text{FCFM}, \bar{\mu})$ donnée par (2.13). Il est donc naturel de s'intéresser à quelques éléments caractéristiques du système lorsqu'il se trouve en régime stationnaire. Pour ce faire, notons $W_\infty^{\text{FCFM},\bar{\mu}}$ une variable aléatoire distribuée selon la loi de probabilité stationnaire $\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}$.

Proposition 19

Dans tout système (à l'équilibre) régi par un modèle $\textsc{mg}(G, \text{FCFM}, \bar{\mu})$ *stable, le nombre moyen d'éléments de classe* $i \in \mathcal{V}$ *vaut*

$$\mathbb{E}\left(\left|W_\infty^{\text{FCFM},\bar{\mu}}\right|_i\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} k\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\{w \in \mathbb{W} : |w|_i = k\}).$$

Il en découle directement le résultat suivant,

Proposition 20

Dans tout système (à l'équilibre) régi par un modèle $\textsc{mg}(G, \text{FCFM}, \bar{\mu})$ *stable, le nombre total moyen d'éléments vaut*

$$\mathbb{E}\left(\left|W_\infty^{\text{FCFM},\bar{\mu}}\right|\right) = \sum_{i\in\mathcal{V}} \mathbb{E}\left(\left|W_\infty^{\text{FCFM},\bar{\mu}}\right|_i\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} k\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\{w \in \mathbb{W} : |w| = k\}).$$

Par ailleurs, la loi de Little assure que le temps moyen passé par un élément de classe $i \in \mathcal{V}$ au sein de tout système (à l'équilibre) régi par un modèle $\textsc{mg}(G, \text{FCFM}, \bar{\mu})$ stable vaut

$$\frac{\mathbb{E}\left(\left|W_\infty^{\text{FCFM},\bar{\mu}}\right|_i\right)}{\bar{\mu}(i)}.$$

La Proposition 19 aboutit alors au résultat suivant,

Proposition 21

Dans tout système (à l'équilibre) régi par un modèle $\textsc{mg}(G, \text{FCFM}, \bar{\mu})$ *stable, le temps moyen que passe un élément de classe* $i \in \mathcal{V}$ *à l'intérieur avant d'être apparié vaut*

$$\frac{\mathbb{E}\left(\left|W_\infty^{\text{FCFM},\bar{\mu}}\right|_i\right)}{\bar{\mu}(i)} = \frac{1}{\bar{\mu}(i)} \sum_{k\in\mathbb{N}} k\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\{w \in \mathbb{W} : |w|_i = k\}).$$

Enfin,

Proposition 22

Dans tout système (à l'équilibre) régi par un modèle $\textsc{mg}(G, \text{FCFM}, \bar{\mu})$ *stable, la probabilité qu'un élément de classe* $i \in \mathcal{V}$ *ne soit pas apparié dès son arrivée (et doive donc attendre) vaut*

$$\mathbb{P}\left(|W_\infty^{\text{FCFM},\bar{\mu}}|_{\mathcal{E}(i)} = 0\right) = \Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}\left(\{w \in \mathbb{W} : |w|_{\mathcal{E}(i)} = 0\}\right).$$

2.8 Exemples d'application

2.8.1 Cas « entièrement bouclé »

Exemple 2

Considérons le cycle généralisé $\mathscr{C} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, dont chaque sommet possède une boucle (c'est-à-dire $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \mathcal{V}$), représenté dans la Figure 2.3. Nous sommes donc dans un cas dit « entièrement bouclé ». Cette particularité assure alors que l'espace d'états $\mathbb{W}$ associé est fini. En effet, il ne contient que des mots dont la taille est inférieure ou égale à $\max_{\mathcal{I}\in\tilde{\mathbb{I}}(\mathscr{C})} (\mathrm{Card}(\mathcal{I})) = 2$.
On peut d'ailleurs remarquer aisément que l'ensemble des files d'attente admissibles est

$$\mathbb{W} = \{\varepsilon, 1, 2, 3, 4, 13, 24, 31, 42\}.$$

Ainsi, pour toute politique d'appariements admissible $\Phi \in \mathrm{POL}$ et toute loi d'arrivée $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, la chaîne $\left(W_n^{\Phi,\bar{\mu}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible (cf. item 1. de la Proposition 4) à espace d'états fini $\mathbb{W}$, ce qui assure, en particulier, qu'elle est récurrente positive.
D'où, pour toute politique d'appariements admissible $\Phi \in \mathrm{POL}$,

$$\mathrm{STAB}(\mathscr{C}, \Phi) = \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}),$$

et alors, pour toute mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, la forme produit de la loi stationnaire de $(W_n^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}})_{n\in\mathbb{N}}$ donnée dans l'item 2. du Théorème 1 permet de calculer explicitement les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \Pi_W^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}(\varepsilon) = \alpha \\ \Pi_W^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}(1) = \alpha\frac{\bar{\mu}(1)}{1-\bar{\mu}(3)} & \Pi_W^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}(2) = \alpha\frac{\bar{\mu}(2)}{1-\bar{\mu}(4)} \\ \Pi_W^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}(3) = \alpha\frac{\bar{\mu}(3)}{1-\bar{\mu}(1)} & \Pi_W^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}(4) = \alpha\frac{\bar{\mu}(4)}{1-\bar{\mu}(2)} \\ \Pi_W^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}(13) = \alpha\frac{\bar{\mu}(1)}{1-\bar{\mu}(3)}\bar{\mu}(3) & \Pi_W^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}(24) = \alpha\frac{\bar{\mu}(2)}{1-\bar{\mu}(4)}\bar{\mu}(4) \\ \Pi_W^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}(31) = \alpha\frac{\bar{\mu}(3)}{1-\bar{\mu}(1)}\bar{\mu}(1) & \Pi_W^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}(42) = \alpha\frac{\bar{\mu}(4)}{1-\bar{\mu}(2)}\bar{\mu}(2), \end{cases}$$

avec, par (2.13),

$$\alpha \triangleq \alpha(\mathscr{C}, \mathrm{FCFM}, \bar{\mu}) = \left[1 + \bar{\mu}(1)\frac{1+\bar{\mu}(3)}{1-\bar{\mu}(3)} + \bar{\mu}(2)\frac{1+\bar{\mu}(4)}{1-\bar{\mu}(4)} + \bar{\mu}(3)\frac{1+\bar{\mu}(1)}{1-\bar{\mu}(1)} + \bar{\mu}(4)\frac{1+\bar{\mu}(2)}{1-\bar{\mu}(2)}\right]^{-1},$$

car $\tilde{\mathbb{I}}(\mathscr{C}) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$.
Notons maintenant $W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}$, une variable aléatoire distribuée selon la loi de probabilité stationnaire $\Pi_W^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}$. Alors, les résultats de la Section 2.7 permettent de calculer les caractéristiques suivantes du système, lorsqu'il est en régime stationnaire :

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_1\right) = \alpha\left(\bar{\mu}(1)\frac{1+\bar{\mu}(3)}{1-\bar{\mu}(3)} + \bar{\mu}(3)\frac{\bar{\mu}(1)}{1-\bar{\mu}(1)}\right) \\ \mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_2\right) = \alpha\left(\bar{\mu}(2)\frac{1+\bar{\mu}(4)}{1-\bar{\mu}(4)} + \bar{\mu}(4)\frac{\bar{\mu}(2)}{1-\bar{\mu}(2)}\right) \\ \mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_3\right) = \alpha\left(\bar{\mu}(3)\frac{1+\bar{\mu}(1)}{1-\bar{\mu}(1)} + \bar{\mu}(1)\frac{\bar{\mu}(3)}{1-\bar{\mu}(3)}\right) \\ \mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_4\right) = \alpha\left(\bar{\mu}(4)\frac{1+\bar{\mu}(2)}{1-\bar{\mu}(2)} + \bar{\mu}(2)\frac{\bar{\mu}(4)}{1-\bar{\mu}(4)}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_1\right)}{\bar{\mu}(1)} = \alpha\left(\frac{1+\bar{\mu}(3)}{1-\bar{\mu}(3)} + \frac{\bar{\mu}(3)\bar{\mu}(1)}{\bar{\mu}(1)(1-\bar{\mu}(1))}\right) \\ \frac{\mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_2\right)}{\bar{\mu}(2)} = \alpha\left(\frac{1+\bar{\mu}(4)}{1-\bar{\mu}(4)} + \frac{\bar{\mu}(4)\bar{\mu}(2)}{\bar{\mu}(2)(1-\bar{\mu}(2))}\right) \\ \frac{\mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_3\right)}{\bar{\mu}(3)} = \alpha\left(\frac{1+\bar{\mu}(1)}{1-\bar{\mu}(1)} + \frac{\bar{\mu}(1)\bar{\mu}(3)}{\bar{\mu}(3)(1-\bar{\mu}(3))}\right) \\ \frac{\mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_4\right)}{\bar{\mu}(4)} = \alpha\left(\frac{1+\bar{\mu}(2)}{1-\bar{\mu}(2)} + \frac{\bar{\mu}(2)\bar{\mu}(4)}{\bar{\mu}(4)(1-\bar{\mu}(4))}\right), \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|\right) = \alpha\left[\frac{\bar{\mu}(3) + 2\bar{\mu}(1)\bar{\mu}(3)}{1-\bar{\mu}(1)} + \frac{\bar{\mu}(4) + 2\bar{\mu}(2)\bar{\mu}(4)}{1-\bar{\mu}(2)} + \frac{\bar{\mu}(1) + 2\bar{\mu}(3)\bar{\mu}(1)}{1-\bar{\mu}(3)} + \frac{\bar{\mu}(2) + 2\bar{\mu}(4)\bar{\mu}(2)}{1-\bar{\mu}(4)}\right],$$

et

$$\begin{cases} \mathbb{P}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_{\mathcal{E}(1)} = 0\right) = \alpha\left(1 + \frac{\bar{\mu}(1)}{1-\bar{\mu}(3)}\right) \\ \mathbb{P}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_{\mathcal{E}(2)} = 0\right) = \alpha\left(1 + \frac{\bar{\mu}(2)}{1-\bar{\mu}(4)}\right) \\ \mathbb{P}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_{\mathcal{E}(3)} = 0\right) = \alpha\left(1 + \frac{\bar{\mu}(3)}{1-\bar{\mu}(1)}\right) \\ \mathbb{P}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_{\mathcal{E}(4)} = 0\right) = \alpha\left(1 + \frac{\bar{\mu}(4)}{1-\bar{\mu}(2)}\right). \end{cases}$$

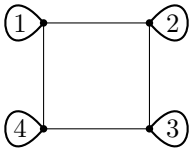

FIGURE 2.3 – Cycle généralisé $\mathscr{C} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$.

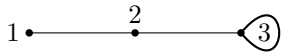

FIGURE 2.4 – Ligne généralisée $\mathscr{L} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$.

2.8.2 Cas « hybride »

Exemple 3

Considérons la ligne généralisée $\mathscr{L} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, pour laquelle $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \{3\}$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{c}} = \{1, 2\}$, représentée dans la Figure 2.4. Nous sommes donc dans un cas dit « hybride ».
Tout d'abord, on peut remarquer aisément que l'ensemble des files d'attente admissibles est

$$\mathbb{W} = \{\varepsilon\} \uplus \left\{1^k : k \in \mathbb{N}_*\right\} \uplus \left\{2^k : k \in \mathbb{N}_*\right\} \uplus \left\{1^r 3 1^{k-r} : k \in \mathbb{N},\ r \in [\![0; k]\!]\right\},$$

où $\left\{i^k : k \in \mathbb{N}_*\right\} \triangleq \{i, ii, iii, \ldots\}$ représente l'ensemble des mots finis formés par un nombre quelconque de lettres i.
Comme $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing$, le graphe généralisé $\mathscr{L}$ n'est pas biparti, et il suit de l'item 1. du Théorème 1 que

$$\mathrm{STAB}(\mathscr{L}, \mathrm{FCFM}) = \mathrm{NCOND}(\mathscr{L}) \neq \varnothing.$$

Alors, pour toute mesure $\bar{\mu} \in \mathrm{NCOND}(G)$, la forme produit de la loi stationnaire de $(W_n^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}})_{n\in\mathbb{N}}$ donnée dans l'item 2. du Théorème 1 permet de calculer explicitement les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \Pi_W^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}(\varepsilon) = \alpha \\ \forall k \in \mathbb{N}_*,\ \Pi_W^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}(1^k) = \alpha \left(\frac{\bar{\mu}(1)}{\bar{\mu}(2)}\right)^k \\ \forall k \in \mathbb{N}_*,\ \Pi_W^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}(2^k) = \alpha \left(\frac{\bar{\mu}(2)}{1-\bar{\mu}(2)}\right)^k \\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall r \in [\![0; k]\!],\ \Pi_W^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}\left(1^r 3 1^{k-r}\right) = \alpha \frac{\bar{\mu}(3)}{1-\bar{\mu}(1)} \times \left(\frac{\bar{\mu}(1)}{1-\bar{\mu}(1)}\right)^k \times \left(\frac{1-\bar{\mu}(1)}{\bar{\mu}(2)}\right)^r, \end{cases}$$

avec, par (2.13),

$$\alpha \triangleq \alpha(\mathscr{L}, \mathrm{FCFM}, \bar{\mu}) = \left[1 + \frac{\bar{\mu}(1)}{\bar{\mu}(2) - \bar{\mu}(1)} + \frac{\bar{\mu}(2)}{1 - 2\bar{\mu}(2)} + \frac{\bar{\mu}(3)}{1 - \bar{\mu}(1)} + \frac{\bar{\mu}(1)\bar{\mu}(3)}{1 - 2\bar{\mu}(1)} \times \left(\frac{1}{\bar{\mu}(2) - \bar{\mu}(1)} + \frac{1}{1 - \bar{\mu}(1)}\right)\right]^{-1},$$

car $\tilde{\mathbb{I}}(\mathscr{L}) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$.
Notons maintenant $W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}$, une variable aléatoire distribuée selon la loi de probabilité stationnaire $\Pi_W^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}$. Alors, les résultats de la Section 2.7 permettent de calculer les caractéristiques suivantes du système, lorsqu'il est en régime stationnaire :

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_1\right) = \alpha\bar{\mu}(1)\left(\frac{2}{(\bar{\mu}(2)-\bar{\mu}(1))^2} - \frac{\bar{\mu}(2)}{(1-2\bar{\mu}(1))^2}\right) \\ \mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_2\right) = \alpha\bar{\mu}(2)\frac{1-\bar{\mu}(2)}{1-2\bar{\mu}(2)} \\ \mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_3\right) = \alpha\bar{\mu}(3)\frac{\bar{\mu}(2)}{(\bar{\mu}(2)-\bar{\mu}(1))(1-2\bar{\mu}(1))}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_1\right)}{\bar{\mu}(1)} = \alpha\left(\frac{2}{(\bar{\mu}(2)-\bar{\mu}(1))^2} - \frac{\bar{\mu}(2)}{(1-2\bar{\mu}(1))^2}\right) \\ \frac{\mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_2\right)}{\bar{\mu}(2)} = \alpha\frac{1-\bar{\mu}(2)}{1-2\bar{\mu}(2)} \\ \frac{\mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_3\right)}{\bar{\mu}(3)} = \alpha\frac{\bar{\mu}(2)}{(\bar{\mu}(2)-\bar{\mu}(1))(1-2\bar{\mu}(1))}, \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|\right) = \alpha\left[\bar{\mu}(1)\left(\frac{2}{(\bar{\mu}(2) - \bar{\mu}(1))^2} - \frac{\bar{\mu}(2)}{(1 - 2\bar{\mu}(1))^2}\right) + \bar{\mu}(2)\frac{1 - \bar{\mu}(2)}{1 - 2\bar{\mu}(2)} + \bar{\mu}(3)\frac{\bar{\mu}(2)}{(\bar{\mu}(2) - \bar{\mu}(1))(1 - 2\bar{\mu}(1))}\right],$$

et

$$\begin{cases} \mathbb{P}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_{\mathcal{E}(1)} = 0\right) = \alpha\bar{\mu}(2)\frac{1+\bar{\mu}(3)-2\bar{\mu}(1)}{(\bar{\mu}(2)-\bar{\mu}(1))(1-2\bar{\mu}(1))} \\ \mathbb{P}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_{\mathcal{E}(2)} = 0\right) = \alpha\frac{1-\bar{\mu}(2)}{1-2\bar{\mu}(2)} \\ \mathbb{P}\left(|W_\infty^{\mathrm{FCFM},\bar{\mu}}|_{\mathcal{E}(3)} = 0\right) = \alpha\frac{\bar{\mu}(2)}{\bar{\mu}(2)-\bar{\mu}(1)}. \end{cases}$$

2.9 Étude structurelle du cycle généralisé

Particularisons maintenant notre étude au cas où le graphe de compatibilités $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est un cycle généralisé et où les éléments qui entrent dans le système sont choisis uniformément dans l'ensemble $\mathcal{V}$. Étant donné qu'un cycle classique a une structure totalement symétrique, il semble naturel dans ce cadre de ne privilégier aucune classe par rapport à une autre. L'introduction de boucles va cependant rendre caduque cette assertion et ainsi justifier une étude plus fine des lois d'arrivées permettant la stabilité du modèle. En notant $\mathrm{Unif}(\mathcal{V})$ la loi uniforme sur l'ensemble $\mathcal{V}$, la principale question structurelle qui sera étudiée dans cette Section 2.9 est la suivante :

- Quels sont les n-cycles généralisés $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ pour lesquels $\mathrm{Unif}(\mathcal{V}) \in \textsc{Ncond}(G)$?

Outre l'intérêt purement mathématique de cette question, elle va permettre de faire la transition avec le Chapitre 3 en mettant en évidence l'existence de graphes G tels que

— $\textsc{Ncond}(G) \neq \varnothing$;

— $\mathrm{Unif}(\mathcal{V}) \notin \textsc{Ncond}(G)$.

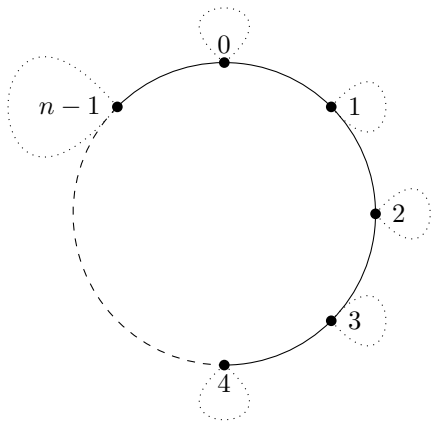

FIGURE 2.5 – n-cycle généralisé G avec boucle potentielle en chaque sommet.

Comme annoncé, on se place dans le cadre du modèle $\textsc{mg}(G, \Phi, \bar{\mu})$, où

— $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est un n-cycle généralisé (c'est-à-dire qu'on peut avoir $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing$), avec $n \geqslant 2$. Un exemple d'un tel n-cycle est donné par la Figure 2.5 ;

— $\Phi = \textsc{fcfm}$ est la politique d'appariements ;

— $\bar{\mu} = \mathrm{Unif}(\mathcal{V})$ est la loi d'arrivées sur les sommets.

Par souci de rigueur pour les preuves, on identifie l'ensemble $\mathcal{V}$ des sommets à l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dans lequel on confond un élément avec sa classe.
Introduisons tout d'abord quelques notations et éléments préliminaires (notamment le Lemme 4) nécessaires à l'étude structurelle du cycle, développée dans la Section 2.9.2 à venir.

2.9.1 Notions préliminaires

Avant d'énoncer le Lemme 4, introduisons tout d'abord une distance sur $\mathcal{V}$, permettant de définir une relation d'équivalence sur chaque sous-ensemble de $\mathcal{V}$,

Définition 25

On définit l'application $d_{\mathrm{C}}^{(n)}$ sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcccl} d_{\mathrm{C}}^{(n)} & : & \mathcal{V} \times \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & (i,j) & \longmapsto & \min(\{|i-j|, n-|i-j|\}). \end{array}$$

Proposition 23

L'application $d_{\mathrm{C}}^{(n)}$ est une distance sur $\mathcal{V}$.

Heuristiquement, $d_{\mathrm{C}}^{(n)}$ représente la distance « visuelle » sur le graphe entre deux sommets du n-cycle $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$.

Démonstration : L'application $d_{\mathrm{C}}^{(n)}$ étant à valeurs positives, seules les trois propriétés d'une distance restent à justifier :

— Séparation : La séparation de la valeur absolue $|\cdot|$ et l'identification de $\mathcal{V}$ avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ assurent que

$$\forall (i,j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V},\ \left[d_{\mathrm{C}}^{(n)}(i,j) = 0 \Leftrightarrow i = j\right].$$

— Symétrie : Elle découle directement de la symétrie de l'application $(i,j) \mapsto |i-j|$.

— Inégalité triangulaire : L'application $(i,j) \mapsto |i-j|$ vérifiant elle-même l'inégalité triangulaire, les cas à distinguer se résolvent sans difficulté pour montrer que

$$\forall (i,j,k) \in \mathcal{V}^3,\ d_{\mathrm{C}}^{(n)}(i,k) \leqslant d_{\mathrm{C}}^{(n)}(i,j) + d_{\mathrm{C}}^{(n)}(j,k).$$

■

Définition 26

Pour chaque sous-ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$ fixé, on définit la relation binaire $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{X}$ par :
$x\ \mathcal{R}_{\mathcal{X}}\ x'$ si et seulement si l'une (au moins) des deux assertions suivantes est vérifiée :

1. $\left[d_{\mathrm{C}}^{(n)}(x,x') \in \{0;2\}\right]$;
2. $\left[\exists k \geqslant 1,\ \exists (i_1,\ldots,i_k) \in \mathcal{X}^k \text{ t.q. } \begin{cases} d_{\mathrm{C}}^{(n)}(x,i_1) = 2 \\ d_{\mathrm{C}}^{(n)}(i_j,i_{j+1}) = 2,\ \forall j \in [\![1;k-1]\!] \\ d_{\mathrm{C}}^{(n)}(i_k,x') = 2 \end{cases}\right]$.

Heuristiquement, $x\ \mathcal{R}_{\mathcal{X}}\ x'$ s'ils sont égaux ou si l'on peut passer de l'un à l'autre en faisant des sauts de « longueur 2 » sur le cycle en ne passant que par des éléments appartenant à l'ensemble $\mathcal{X}$.

Proposition 24

Pour chaque sous-ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$ fixé, la relation binaire $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{X}$. On note alors $\mathcal{X}/_{\mathcal{R}_{\mathcal{X}}}$ l'ensemble de ses classes d'équivalence.

Démonstration : Une preuve de ce résultat est donnée dans la Section 2.10.8. ■

Introduisons désormais des notations qui seront utilisées dans le Lemme 4,

Définition 27

Pour tout sous-ensemble $\mathcal{X} = \{x_1,\ldots,x_n\} \subset \mathcal{V}$ fixé, on définit

1. *l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ ayant au moins deux éléments, noté*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}^{(2)} \left(= \mathcal{P}_{x_1,\ldots,x_n}^{(2)}\right) \triangleq \left\{\overline{x} \in \mathcal{X}/_{\mathcal{R}_{\mathcal{X}}} : \mathrm{Card}(\overline{x}) \geqslant 2\right\},$$

de cardinal noté

$$\mathcal{C}_{\mathcal{X}}^{(2)} \left(= \mathcal{C}_{x_1,\ldots,x_n}^{(2)}\right) \triangleq \mathrm{Card}\left(\mathcal{P}_{\mathcal{X}}^{(2)}\right).$$

2. *le nombre total d'éléments qui sont dans des classes appartenant à $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}^{(2)}$, noté*

$$\mathcal{N}_{\mathcal{X}}^{(2)} \left(= \mathcal{N}_{x_1,\ldots,x_n}^{(2)}\right) \triangleq \sum_{\overline{x} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathrm{Card}(\overline{x}).$$

Heuristiquement, $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}^{(2)}$ représente le nombre de « clusters d'éléments à distance 2 dans $\mathcal{X}$ ».
D'autre part, on peut écrire

$$\mathcal{N}_{x_1,\dots,x_n}^{(2)} = \mathrm{Card}\left(\left\{i \in [\![1;n]\!] : \exists \ell \in [\![1;n]\!],\ d_{\mathrm{C}}^{(n)}(x_i, x_\ell) = 2\right\}\right).$$

Naïvement, $\mathcal{N}_{\mathcal{X}}^{(2)}$ représente donc le nombre d'éléments de $\mathcal{X}$ qui sont à « distance 2 » de ce même ensemble $\mathcal{X}$.

Définissons maintenant une notion qui est générale mais qui ne sera utilisée dans ce manuscrit que dans le cas particulier des cycles généralisés,

Définition 28

Pour tout graphe généralisé G, on définit l'ensemble des ensembles pseudo-indépendants maximums de G par :

$$\bar{\tilde{\mathbb{I}}}(G) \triangleq \left\{\overline{\mathcal{I}} \in \tilde{\mathbb{I}}(G) : \mathrm{Card}\left(\overline{\mathcal{I}}\right) = \max_{\mathcal{I} \in \tilde{\mathbb{I}}(G)} \left(\mathrm{Card}(\mathcal{I})\right)\right\}.$$

En d'autres termes, c'est l'ensemble des ensembles pseudo-indépendants de cardinal maximal.

Attention à ne pas confondre un ensemble pseudo-indépendant *maximum* avec un ensemble pseudo-indépendant *maximal* qui, lui, est défini comme n'étant pas un sous-ensemble strict d'un autre ensemble pseudo-indépendant. Tout ensemble pseudo-indépendant maximum est donc a fortiori maximal, mais l'inverse est faux : un contre-exemple est donné par les Figures 2.6 et 2.7.

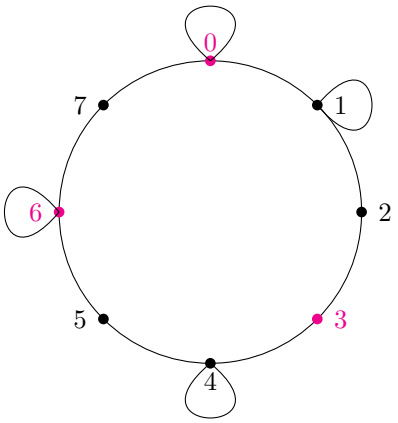

FIGURE 2.6 – L'ensemble des sommets en magenta est pseudo-indépendant *maximal* (mais pas *maximum*) pour le 8-cycle généralisé pris en exemple.

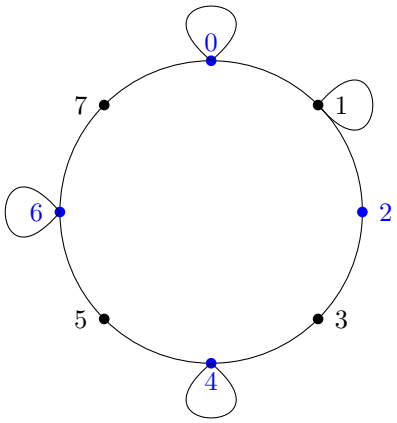

FIGURE 2.7 – L'ensemble des sommets en bleu est pseudo-indépendant *maximum* pour le 8-cycle généralisé pris en exemple.

En remarquant que si $\mathcal{I} \in \tilde{\mathbb{I}}(G)$, alors $\mathrm{Card}(\mathcal{I}) \in \left[\!\left[1; \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]\!\right]$, et en notant, pour tout $k \in \left[\!\left[1; \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]\!\right]$,

$$\tilde{\mathbb{I}}_k(G) \triangleq \{\mathcal{I} \in \tilde{\mathbb{I}}(G) : \mathrm{Card}(\mathcal{I}) = k\},$$

on en déduit que si G est un cycle généralisé de taille $n \geqslant 2$, alors

$$\bar{\tilde{\mathbb{I}}}(G) = \tilde{\mathbb{I}}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(G). \tag{2.14}$$

Le résultat ci-dessous servira notamment de point clé pour démontrer la Proposition 26 et la Proposition 27,

Lemme 4

Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un cycle généralisé de taille $n \geqslant 2$.
Alors, tout ensemble pseudo-indépendant $\mathcal{I} \in \tilde{\mathbb{I}}(G)$ a un nombre de voisins égal à

$$|\mathcal{E}(\mathcal{I})| = 2|\mathcal{I}| + |\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| - \mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} + \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} - \mathbf{1}_{\{n \text{ est pair}\}} \mathbf{1}_{\left\{\mathcal{I} \in \tilde{\tilde{\mathbb{I}}}(G)\right\}}.$$

Démonstration : Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un cycle généralisé de taille $n \geqslant 2$.
Considérons alors un ensemble pseudo-indépendant $\mathcal{I} \in \tilde{\mathbb{I}}(G)$ et étudions le nombre de ses voisins.

— Cas 1 : $\mathcal{I} \notin \tilde{\tilde{\mathbb{I}}}(G)$.

— Cas 1.1 : $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} = 0$.
Dans ce cas, tous les éléments de $\mathcal{I}$ sont « suffisamment » éloignés les uns des autres, c'est-à-dire qu'ils sont à distance au moins 3 de tous les autres dans G.
On remarque alors aisément que

$$|\mathcal{E}(\mathcal{I})| = 2|\mathcal{I}| + |\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}|.$$

— Cas 1.2 : $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} = 1$.
Dans ce cas, on a exactement $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)}$ éléments dans l'unique classe de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}^{(2)}$.
Ainsi, les sommets qui sont entre deux éléments de $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)}$ sont comptés en double par rapport au Cas 1.1, et il y a exactement $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} - 1$ tels éléments.
Donc,

$$|\mathcal{E}(\mathcal{I})| = 2|\mathcal{I}| + |\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| - \mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} + 1.$$

— Cas 1.3 : $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} \geqslant 2$.
Dans ce cas, pour chaque cluster supplémentaire (au nombre de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} - 1$) par rapport au Cas 1.2 (où $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} = 1$), il y a un voisin supplémentaire.
Ainsi,

$$|\mathcal{E}(\mathcal{I})| = 2|\mathcal{I}| + |\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| - \mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} + \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)}.$$

Enfin, comme l'hypothèse $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} = 0$ entraîne forcément que $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} = 0$, on peut unifier les résultats des différents cas par la formule suivante :

$$|\mathcal{E}(\mathcal{I})| = 2|\mathcal{I}| + |\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| - \mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} + \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)}.$$

— Cas 2 : $\mathcal{I} \in \tilde{\tilde{\mathbb{I}}}(G)$.
Dans ce cas, $\mathcal{I}$ est un ensemble indépendant maximum de G, et on peut alors remarquer que

$$\mathcal{E}(\mathcal{I}) = \mathcal{I}^c \uplus (\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}).$$

Alors, en notant que $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} = |\mathcal{I}|$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} = 1$, puis en utilisant (2.14), on a :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}(\mathcal{I})| &= |\mathcal{I}^c| + |\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| \\
&= n - |\mathcal{I}| + |\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| \\
&= n - \mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} + |\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| \\
&= \left(2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} - \mathbf{1}_{\{n \text{ est pair}\}}\right) - \mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} + |\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| \\
&= 2|\mathcal{I}| + |\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| - \mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} + \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} - \mathbf{1}_{\{n \text{ est pair}\}}.
\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve. ■

Nous sommes maintenant en mesure de répondre aux deux questions structurelles posées au début de cette Section 2.9.

2.9.2 Quelques éléments structurels du cycle généralisé

Le résultat ci-dessous permet de caractériser exactement les cycles généralisés bipartis,

Proposition 25

Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un cycle généralisé de taille $n \geqslant 2$.
Alors,

$$G \text{ est biparti} \Leftrightarrow [n \text{ est pair}] \text{ et } [\mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \varnothing],$$

ou, de manière équivalente,

$$G \text{ n'est pas biparti} \Leftrightarrow [n \text{ est impair}] \text{ ou } [\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing]. \tag{2.15}$$

Démonstration : Une preuve de ce résultat est donnée dans la Section 2.10.9. ■

Dans toute la suite, on notera

$$\{\text{pairs}\} \triangleq 2\mathbb{N} = \{0\} \cup \{k \in \mathbb{N} : k \text{ est pair}\}$$

et

$$\{\text{impairs}\} \triangleq 2\mathbb{N} + 1 = \{k \in \mathbb{N} : k \text{ est impair}\}.$$

Fournissons maintenant une condition nécessaire et suffisante permettant à la loi uniforme sur l'ensemble $\mathcal{V}$ d'appartenir à l'ensemble $\textsc{Ncond}(G)$,

Proposition 26

Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un cycle généralisé de taille $n \geqslant 2$.
Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Unif$(\mathcal{V}) \in \textsc{Ncond}(G)$;*
2. *$[n$ est impair$]$ ou $[\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{$pairs$\} \neq \varnothing$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{$impairs$\} \neq \varnothing]$.*

Démonstration : Une preuve de ce résultat est donnée dans la Section 2.10.10. ■

Pour tout cycle généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ de taille $n \geqslant 2$ et toute politique maximale généralisée $\Phi \in \textsc{pol}$, la Proposition 26 assure l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

— $\left(W_n^{\Phi,\mathrm{Unif}(\mathcal{V})}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente positive ;

— $[n$ est impair$]$ ou $[\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{pairs}\} \neq \varnothing$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{impairs}\} \neq \varnothing]$.

Sous cette hypothèse, remarquons qu'il est possible de spécifier, au cas du cycle généralisé, l'expression de l'unique loi de probabilité stationnaire $\Pi_W^{\mathrm{FCFM},\mathrm{Unif}(\mathcal{V})}$ de la chaîne $\left(W_n^{\mathrm{FCFM},\mathrm{Unif}(\mathcal{V})}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, initialement donnée dans le Théorème 1. Cette reformulation ne simplifiant pas spécialement le calcul en pratique, elle est d'un intérêt limité et nous choisissons donc de ne pas la présenter dans ce manuscrit.

L'association de la Proposition 25 et de la Proposition 26 nous amène alors à faire le constat suivant : les cycles généralisés $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ de taille $n \geqslant 2$ vérifiant

— n est pair ;

— $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing$;

— $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{pairs}\} = \varnothing$ ou $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{impairs}\} = \varnothing$,

sont tels que

— $\textsc{Ncond}(G) \neq \varnothing$;

— $\mathrm{Unif}(\mathcal{V}) \notin \textsc{Ncond}(G)$.

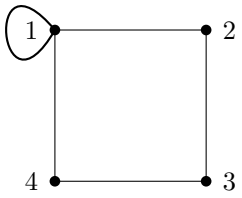

FIGURE 2.8 – Cycle généralisé G_0.

En d'autres termes, au vu du Théorème 1, ceci signifie que l'on peut trouver des graphes généralisés G pour lesquels il existe (au moins) une mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ telle que le modèle $\text{MG}(G, \text{FCFM}, \bar{\mu})$ est stable, alors que le modèle $\text{MG}(G, \text{FCFM}, \text{Unif}(\mathcal{V}))$ n'est, lui, pas stable. Plus généralement, cette assertion est évidemment valable pour toute politique maximale généralisée (au sens de la Définition 19) et donc, a fortiori, pour la politique ML (voir Theorem 4.7 de [7]). Un exemple d'un tel graphe est donné par le 4-cycle généralisé G_0 représenté par la Figure 2.8, pour lequel $n = 4$ est pair, $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \emptyset$, et $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{pairs}\} = \emptyset$.
Il en découle alors naturellement les questions suivantes, qui seront étudiées ultérieurement dans le Chapitre 3,

Remarque 6

Q.1 Existe t-il une mesure $\bar{\mu}_G \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, qui dépend de $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ mais dont la structure est identique pour tout graphe généralisé connexe G, qui appartient à $\text{NCOND}(G)$ dès lors que cet ensemble est non-vide, c'est-à-dire telle que, pour tout graphe généralisé connexe G,

$$\bar{\mu}_G \in \text{NCOND}(G) \Leftrightarrow \text{NCOND}(G) \neq \emptyset \text{ ?}$$

Q.2 Est-il possible d'aller encore plus loin en caractérisant complètement l'ensemble $\text{NCOND}(G)$, pour tout graphe généralisé connexe G ?

Q.3 Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, existe t-il une méthode simple de construction des mesures appartenant à l'ensemble $\text{NCOND}(G)$, c'est-à-dire des mesures $\bar{\mu} \in \text{STAB}(G, \text{FCFM})$ (ou encore, des mesures $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ pour lesquelles le modèle $\text{MG}(G, \text{FCFM}, \bar{\mu})$ est stable) ?

2.10 Preuves du Chapitre 2

2.10.1 Preuve du Lemme 1

Démonstration :

$\Rightarrow$: Supposons que $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_q \in \mathbb{B}$, où $q \in \mathbb{N}$, et imaginons alors qu'à un instant $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \mathbf{w}$.
Remarquons tout d'abord que si $q = 0$, alors $\mathbf{w} = \varepsilon$.
Concentrons donc maintenant notre étude au cas où $q \geqslant 1$.

— Déjà, l'assertion (2.1) assurant que $B_n(1) = V_{i(n)} \in \mathcal{V}$, on a :

$$\mathbf{w}_1 \in \mathcal{V}.$$

— Par l'absurde, supposons qu'il existe $1 \leqslant i < j \leqslant q$ tels que $(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) \in \mathcal{V}^2$ et $\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j$.
L'assertion (2.2) assurant que $W_n = B_n[\overline{\mathcal{V}}]$, le fait que $\mathbf{w}_i \in \mathcal{V}$ et $\mathbf{w}_j \in \mathcal{V}$ donne :

$$\mathbf{w}_i \in \mathcal{V}(W_n) \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_j \in \mathcal{V}(W_n).$$

$\rightsquigarrow$ Absurde, car deux éléments voisins ne peuvent pas être dans le système en même temps (puisqu'ils se seraient appariés).
Ainsi, lorsque $1 \leqslant i < j \leqslant q$,

$$(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) \in \mathcal{V}^2 \Rightarrow \mathbf{w}_i + \mathbf{w}_j.$$

— Par l'absurde, supposons qu'il existe $1 \leqslant i < j \leqslant q$ tels que $(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) \in \mathcal{V} \times \overline{\mathcal{V}}$ et $\mathbf{w}_i - \overline{\mathbf{w}_j}$.
Alors, comme la $j^{\text{ème}}$ lettre de B_n est $\mathbf{w}_j \in \overline{\mathcal{V}}$, l'élément $V_{i(n)+j-1}$ s'est apparié avec un certain élément V_ℓ, de classe $\overline{\mathbf{w}_j}$.

Or, comme $\mathbf{w}_i - \overline{\mathbf{w}_j}$, l'élément V_ℓ, de classe $\overline{\mathbf{w}_j}$, pourrait également s'apparier avec l'item $V_{i(n)+i-1}$, de classe $\mathbf{w}_i \in \mathcal{V}$.
Cependant, l'inégalité $i < j$ assure que l'élément $V_{i(n)+i-1}$ est arrivé avant l'item $V_{i(n)+j-1}$.
Alors, comme la politique utilisée est FCFM, quel que soit l'instant d'arrivée de l'élément V_ℓ (c'est-à-dire quelle que soit la valeur de $\ell \leqslant n$), ce dernier aurait dû s'apparier avec le plus ancien, c'est-à-dire avec $V_{i(n)+i-1}$, ce qui découle sur une absurdité.
Ainsi, lorsque $1 \leqslant i < j \leqslant q$,

$$(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) \in \mathcal{V} \times \overline{\mathcal{V}} \Rightarrow \mathbf{w}_i \nrightarrow \overline{\mathbf{w}_j}.$$

$\Leftarrow$: Tout d'abord, rappelons que $B_0 = \varepsilon$ par construction, c'est-à-dire que $\varepsilon \in \mathbb{B}$.
Supposons donc maintenant que $\mathbf{w} \in \mathbf{V}^* \backslash \{\varepsilon\}$ et qu'il vérifie les assertions 1), 2), et 3).
La condition 1) permet alors d'écrire

$$\mathbf{w} = a(1)\overline{a(1,1)a(1,2)} \dots \overline{a(1,k_1)}a(2)\overline{a(2,1)a(2,2)} \dots \overline{a(2,k_2)}a(3) \cdots a(q)\overline{a(q,1)} \dots \overline{a(q,k_q)},$$

où $q \in \mathbb{N}_*$, $(a(i))_{1 \leqslant i \leqslant q} \in \mathcal{V}^q$, $(a(\ell,j))_{(\ell,j) \in [\![1;q]\!] \times [\![1;k_\ell]\!]} \in \mathcal{V}^{\sum_{m=1}^q k_m}$, et $\forall m \in [\![1;q]\!],\ k_m \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs, les conditions 2) et 3) assurent respectivement que

$$\forall (i,j) \in [\![1;q]\!],\ a(i) \nrightarrow a(j), \tag{2.16}$$

et

$$\forall i \in [\![1;q]\!],\ \forall \ell \in [\![i;q]\!],\ \forall j \in [\![1;k_\ell]\!],\ \ a(i) \nrightarrow a(\ell,j). \tag{2.17}$$

Construisons alors un scénario d'arrivées menant la chaîne $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ε à $\mathbf{w}$, et représentons-le par le mot de $\mathcal{V}^*$ suivant :

$$\mathbf{b} \triangleq b(0,k_0)b(0,k_0-1) \dots b(0,1)b(1)b(1,1) \dots b(1,k_1)b(2) \cdots b(q)b(q,1) \dots b(q,k_q),$$

où $b(0,k_0)$ est la classe du premier item entrant dans le système, $b(0,k_0-1)$ la classe du deuxième,..., $b(q,k_q)$ celle du dernier.
Durant le processus de construction, les lettres de $\mathbf{b}$ qui auront été fixées seront dites « déterminées » alors que les autres seront dites « indéterminées ».
De plus, pour tout $\ell \in [\![1;q]\!]$ et tout $j \in [\![1;k_\ell]\!]$, on dira que les lettres $a(\ell)$ et $b(\ell)$ (respectivement, $a(\ell,j)$ et $b(\ell,j)$) sont « à la même place » dans les mots $\mathbf{w}$ et $\mathbf{b}$.

<u>Procédure de construction du mot $\mathbf{b}$</u> :

1. Initialement, toutes les lettres de $\mathbf{b}$ sont indéterminées, et on pose

$$k_0 = 0,$$

c'est-à-dire que les lettres $b(0,.)$ n'existent pas au départ.

2. Ensuite, on prend

$$\forall \ell \in [\![1;q]\!],\ b(\ell) = a(\ell),$$

ce qui permet de rendre déterminées les lettres $b(.)$.
Remarquons que l'assertion (2.16) assure qu'elles ne sont pas voisines et qu'elles ne s'apparieront donc pas ensemble.

3. Maintenant, tant qu'il reste des lettres indéterminées dans $\mathbf{b}$ qui sont à la droite de $b(1)$, on exécute la procédure suivante : on parcourt le mot $\mathbf{b}$ de droite à gauche jusqu'à trouver la première lettre (dans ce sens), disons $b(\ell,j)$, restant indéterminée. La lettre de $\mathbf{w}$ étant à la même place est donc $\overline{a(\ell,j)}$.
Définissons alors l'ensemble suivant :

$$D_{\mathbf{w}}\left(\overline{a(\ell,j)}\right) \triangleq \Big\{\overline{a(\ell',j')} \in \mathbf{w} : \overline{a(\ell',j')} \text{ est à gauche de } \overline{a(\ell,j)} \text{ dans } \mathbf{w},$$
$$b(\ell',j') \text{ est indéterminée, et } a(\ell,j) - a(\ell',j')\Big\}.$$

— <u>Cas 1</u> : $D_{\mathbf{w}}\left(\overline{a(\ell,j)}\right) \neq \varnothing$.
On considère alors l'élément $\overline{a(\ell',j')}$ de $D_{\mathbf{w}}\left(\overline{a(\ell,j)}\right)$ le plus à droite dans $\mathbf{w}$, et on pose

$$b(\ell,j) = a(\ell',j') \quad \text{et} \quad b(\ell',j') = a(\ell,j).$$

Ainsi, la condition (2.17) assure qu'un élément de classe $a(\ell',j')$ arrivant sera apparié avec un item de classe $a(\ell,j)$ déjà stocké dans le système, et la file d'attente rétrograde fera apparaître les copies de l'appariement effectué.

— Cas 2 : $D_{\mathbf{w}}\left(\overline{a(\ell,j)}\right) = \varnothing$.

Dans ce cas, la lettre $\overline{a(\ell,j)}$ de $\mathbf{w}$ correspond à un appariement effectué entre un item de classe $a(\ell,j)$, arrivé dans le système avant $a(1)$, et un item compatible, arrivé à la place correspondante de celle de $\overline{a(\ell,j)}$.
Ceci justifie le fait que la copie qui devrait se trouver avant $a(1)$ n'apparaît plus, par structure de la file d'attente rétrograde.
On effectue alors la mise à jour

$$k_0 \leftarrow k_0 + 1,$$

et on pose

$$b(0,k_0) = a(\ell,j),$$

c'est-à-dire qu'on ajoute une nouvelle lettre $a(\ell,j)$ au tout début du mot $\mathbf{b}$, et on définit $b(\ell,j)$ comme étant une lettre (au choix) de $\mathcal{E}(a(\ell,j))$.
Ainsi, dès son arrivée, l'élément de classe $b(\ell,j)$ sera apparié à celui de classe $a(\ell,j)$ déjà dans le système, et qui est arrivé avant l'item de classe $b(1)$ (par la condition (2.17)).

Ainsi, dès la fin de la procédure de construction, si l'on fait partir la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $B_0 = \varepsilon$ et que l'on fait entrer dans le système les lettres composant le mot $\mathbf{b}$ (lu de gauche à droite), c'est-à-dire

$$V_1 = b(0,k_0),\ V_2 = b(0,k_0-1),\dots,\ V_{k_0} = b(0,1),\ V_{k_0+1} = b(1),\cdots,\ V_{q+\sum_{\ell=0}^{q} k_\ell} = b(q,k_q),$$

on aura

$$B_{q+\sum_{\ell=0}^{q} k_\ell} = \mathbf{w}.$$

Ceci assure donc que $\mathbf{w} \in \mathbb{B}$, ce qui conclut la preuve. ■

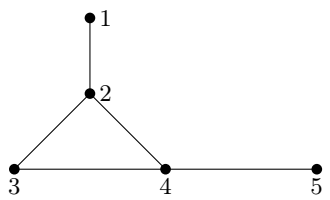

FIGURE 2.9 – Graphe de compatibilités $G^\dagger = (\mathcal{V},\mathcal{E})$.

Illustrons, via l'Exemple 4 ci-dessous, la méthode de construction d'un scénario d'arrivées menant la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ε à tout mot $\mathbf{w}$ de $\mathbb{B}\backslash\{\varepsilon\}$, donnée lors de la preuve précédente,

Exemple 4

Considérons le graphe de compatibilités $G^\dagger = (\mathcal{V},\mathcal{E})$ représenté par la Figure 2.9 et considérons le mot $\mathbf{w} = 1\overline{3}\overline{4}\overline{3}\overline{4}\overline{5}\overline{3}\overline{3}3 \in \mathbf{V}^*$.
Remarquons que $\mathbf{w}$ vérifie les hypothèses 1), 2), et 3) du Lemme 1.
En suivant la procédure de construction explicitée dans la preuve précédente et en représentant les lettres indéterminées par un point, on obtient, après l'étape 2. :

$$\mathbf{b} = 1....5..3$$

Passons alors à l'étape 3. et intéressons-nous tout d'abord à la lettre $\overline{3}$ la plus à droite dans $\mathbf{w}$. Cherchons donc la lettre copiée la plus à droite possible avec laquelle l'appariement pourrait s'effectuer : il s'agit du $\overline{4}$ le plus à droite dans $\mathbf{w}$ (nous sommes donc dans le Cas 1), et le mot $\mathbf{b}$ devient alors :

$$\mathbf{b} = 1...35.43$$

De même, considérons ensuite la deuxième lettre $\overline{3}$ la plus à droite dans $\mathbf{w}$ et cherchons avec quelle lettre copiée de $\mathbf{w}$ l'appariement pourrait se faire : il s'agit de la seconde lettre $\overline{4}$ la plus à droite, ce qui donne :

$$\mathbf{b} = 1.3.35443$$

Enfin, pour les deux lettres $\overline{3}$ restantes de $\mathbf{w}$, on ne peut pas trouver de lettre copiée compatible à leur gauche. Ainsi, en appliquant deux fois la procédure du Cas 2, on considère que les deux items de classe 3 correspondants attendaient dans le système avant l'arrivée de l'item de classe 1. Alors, en

considérant (au choix) que ces deux items de classe 3 se sont appariés respectivement avec un item de classe 2 et un item de classe 4, on a :

$$\mathbf{b} = 33143235443$$

Conclusion : Un scénario d'arrivées permettant de faire passer la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ε à $\mathbf{w}$ est $3, 3, 1, 4, 3, 2, 3, 5, 4, 4, 3$, et ceci assure au passage que $\mathbf{w} \in \mathbb{B}$.

2.10.2 Preuve de la Proposition 11

Démonstration : Remarquons tout d'abord que la Section 2.10.1 nous fournit un scénario d'arrivées permettant à la chaîne de Markov $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de passer, avec probabilité strictement positive, de ε à tout mot $\mathbf{w} \in \mathbb{B}\backslash\{\varepsilon\}$.
Réciproquement, supposons qu'à un instant $n \in \mathbb{N}_*$, $B_n = \mathbf{w} \in \mathbb{B}\backslash\{\varepsilon\}$, et notons

$$\mathbf{w}_{[\overline{\nu}]} = a(1)a(2)\dots a(q), \text{ mot de taille } q \geqslant 1.$$

En faisant entrer successivement, dans le système, des éléments

$$V_{n+1} \in \mathcal{E}(a(1)),\ V_{n+2} \in \mathcal{E}(a(2)), \dots,\ V_{n+q} \in \mathcal{E}(a(q)),$$

on remarque que

$$B_{n+q} = \varepsilon.$$

On a donc montré l'existence d'un scénario d'arrivées permettant à la chaîne de Markov $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de passer, avec probabilité strictement positive, de tout mot $\mathbf{w} \in \mathbb{B}\backslash\{\varepsilon\}$ à ε, ce qui conclut la preuve. ■

2.10.3 Preuve du Lemme 2

Démonstration : Admettons en premier lieu l'assertion suivante :

$$\left[\mathbf{w} \in \mathbb{F}\backslash\{\varepsilon\} \Leftrightarrow \Psi(\mathbf{w}) = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}} \text{ vérifie les conditions 1), 2) et 3) du Lemme 1}\right]. \tag{2.18}$$

— Montrons que ϕ est bien définie, c'est-à-dire que $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{B},\ \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}} \in \mathbb{F}$:
Tout d'abord, il est immédiat que si $\mathbf{w} = \varepsilon$, alors $\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}} = \varepsilon \in \mathbb{F}$.
Fixons maintenant un mot $\mathbf{w} \in \mathbb{B}\backslash\{\varepsilon\}$.
Le Lemme 1 assure donc que $\mathbf{w}$ vérifie ses conditions 1), 2), et 3).
Cependant, la Remarque 5 fournissant l'égalité $\mathbf{w} = (\Psi \circ \Psi)(\mathbf{w})$, il s'ensuit que $\Psi(\Psi(\mathbf{w}))$ vérifie les conditions 1), 2) et 3) du Lemme 1.
Ainsi, l'assertion (2.18) fournit :

$$\Psi(\mathbf{w}) = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}} \in \mathbb{F}\backslash\{\varepsilon\},$$

et ceci prouve donc que ϕ est bien définie.

— Montrons que ϕ est injective :
Comme

$$\phi = \Psi|_{\mathbb{B}}^{\mathbb{F}} \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{B} & \to & \mathbb{F} \\ x & \mapsto & \Psi(x) \end{array}$$

est la restriction de Ψ à $\mathbb{B}$ et sa corestriction à $\mathbb{F}$, l'injectivité de ϕ découle directement de celle de Ψ, bijective (cf. Remarque 5).

— Montrons que ϕ est surjective, c'est-à-dire que $\forall \mathbf{w}' \in \mathbb{F},\ \exists \mathbf{w} \in \mathbb{B},\ \mathbf{w}' = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}}$:
Tout d'abord, il est immédiat que si $\mathbf{w}' = \varepsilon$, alors $\mathbf{w} = \varepsilon \in \mathbb{B}$ convient.
Fixons maintenant un mot $\mathbf{w}' \in \mathbb{F}\backslash\{\varepsilon\} \subset \mathbf{V}^*$ (cf. Proposition 12).
Alors, par surjectivité de Ψ (cf. Remarque 5), il existe un mot $\mathbf{w} \in \mathbf{V}^*\backslash\{\varepsilon\}$ tel que

$$\mathbf{w}' = \Psi(\mathbf{w}) = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}}.$$

Pour montrer que $\mathbf{w} \in \mathbb{B}\backslash\{\varepsilon\}$, le Lemme 1 assure qu'il suffit de prouver que $\mathbf{w}$ vérifie ses conditions 1), 2), et 3).
Cependant, l'égalité $\mathbf{w}' = \Psi(\mathbf{w})$ et la Remarque 5 garantissent que

$$\Psi(\mathbf{w}') = \Psi(\Psi(\mathbf{w})) = \mathbf{w}.$$

Enfin, comme $\mathbf{w}' \in \mathbb{F}\backslash\{\varepsilon\}$, l'assertion (2.18) garantit que $\Psi(\mathbf{w}') = \mathbf{w}$ vérifie les conditions 1), 2), et 3) du Lemme 1, ce qui conclut la preuve de la surjectivité.

— Terminons la preuve en démontrant l'assertion (2.18) :
La preuve proposée est très semblable à celle du Lemme 1,

$\Rightarrow$: Supposons que $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_q \in \mathbb{F}\backslash\{\varnothing\}$, où $q \in \mathbb{N}$, et imaginons alors qu'à un instant donné $n \in \mathbb{N}_*$, $F_n = \mathbf{w}$.

— Déjà, l'assertion (2.4) assurant que la dernière lettre de $\mathbf{w}$ est dans $\overline{\mathcal{V}}$, il suit que la première lettre de $\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}}$ appartient à $\mathcal{V}$.

— Par l'absurde, supposons qu'il existe un couple $(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) \in \left(\overline{\mathcal{V}}\right)^2$, avec $i \neq j$, tel que $\overline{\mathbf{w}_i} - \overline{\mathbf{w}_j}$. Ainsi, $\overline{\mathbf{w}_i} \in \mathcal{V}\left(\overline{F_n}\right)$ et $\overline{\mathbf{w}_j} \in \mathcal{V}\left(\overline{F_n}\right)$, et le résultat (2.5) assure alors que

$$\overline{\mathbf{w}_i} \in \mathcal{V}\left(W_n\right) \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{w}_j} \in \mathcal{V}\left(W_n\right).$$

$\rightsquigarrow$ Absurde, car deux éléments voisins ne peuvent pas être dans le système en même temps (puisqu'ils se seraient appariés).

— Par l'absurde, supposons qu'il existe un couple $(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) \in \mathcal{V} \times \overline{\mathcal{V}}$, avec $i < j$, tel que $\mathbf{w}_i - \overline{\mathbf{w}_j}$. En particulier, l'item V_{n+j} s'est apparié avec un certain élément V_ℓ, de classe $\overline{\mathbf{w}_j}$ (où $\ell \leqslant n$). Or, comme $\mathbf{w}_i - \overline{\mathbf{w}_j}$, l'élément V_ℓ pourrait également s'apparier avec l'item V_{n+i}, de classe $\mathbf{w}_i \in \mathcal{V}$.
Cependant, l'inégalité $i < j$ assure que l'élément V_{n+i} est arrivé avant l'item V_{n+j}.
Alors, comme la politique utilisée est FCFM, quel que soit l'instant d'arrivée de l'élément V_ℓ (c'est-à-dire quelle que soit la valeur de $\ell \leqslant n$), ce dernier aurait dû s'apparier avec le plus ancien, c'est-à-dire avec V_{n+i}, ce qui découle sur une absurdité.

$\Leftarrow$: Fixons un mot $\mathbf{w} \in \mathbf{V}^*\backslash\{\varepsilon\}$ tel que $\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}}$ vérifie les assertions 1), 2), et 3) du Lemme 1.
La condition 1) permet alors d'écrire

$$\mathbf{w} = a(q, k_q) \dots a(q, 1)\overline{a(q)} \cdots \overline{a(3)}a(2, k_2) \dots a(2, 1)\overline{a(2)}a(1, k_1) \dots a(1, 1)\overline{a(1)},$$

où $q \in \mathbb{N}_*$, $(a(i))_{1 \leqslant i \leqslant q} \in \mathcal{V}^q$, $(a(\ell, j))_{(\ell,j) \in [\![1;q]\!] \times [\![1;k_\ell]\!]} \in \mathcal{V}^{\sum_{m=1}^q k_m}$, et $\forall m \in [\![1; q]\!]$, $k_m \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs, les conditions 2) et 3) assurent respectivement que

$$\forall (i, j) \in [\![1; q]\!],\ a(i) \dashv a(j), \tag{2.19}$$

et

$$\forall i \in [\![1; q]\!],\ \forall \ell \in [\![i; q]\!],\ \forall j \in [\![1; k_\ell]\!],\ a(i) \dashv a(\ell, j). \tag{2.20}$$

Construisons alors un scénario d'arrivées menant la chaîne $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ε à $\mathbf{w}$.
Pour cela, considérons q éléments de $\mathcal{V}$, notés $c(1), \dots, c(q)$, tels que

$$\forall i \in [\![1; q]\!],\ c(i) \in \mathcal{E}(a(i)).$$

Alors, en écrivant

$$C = a(q) \dots a(1)a(q, k_q) \dots a(q, 1)c(q) \cdots c(3)a(2, k_2) \dots a(2, 1)c(2)a(1, k_1) \dots a(1, 1)c(1),$$

ses lettres, lues de gauche à droite, correspondent à un scénario d'arrivées qui convient (grâce aux conditions (2.19) et (2.20)).
Ainsi, si l'on fait partir la chaîne $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $F_0 = \varepsilon$ et que l'on fait entrer dans le système les lettres composant le mot C (lu de gauche à droite), c'est-à-dire

$$V_1 = a(q), \dots,\ V_q = a(1),\ V_{q+1} = a(q, k_q), \dots,\ V_{2q+\left(\sum_{\ell=1}^q k_\ell\right)-1} = a(1, 1),\ V_{2q+\sum_{\ell=1}^q k_\ell} = c(1),$$

on aura

$$F_q = \mathbf{w}.$$

Ceci assure donc que $\mathbf{w} \in \mathbb{F}$, ce qui conclut la preuve. ■

2.10.4 Preuve de la Proposition 14

Démonstration : Remarquons tout d'abord que la Section 2.10.3 nous fournit un scénario d'arrivées permettant à la chaîne de Markov $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de passer, avec probabilité strictement positive, de ε à tout mot $\mathbf{w} \in \mathbb{F}\backslash\{\varepsilon\}$.
Réciproquement, supposons qu'à un instant $n \in \mathbb{N}_*$, $F_n = \mathbf{w} \in \mathbb{F}\backslash\{\varepsilon\}$, et notons

$$\mathbf{w}_{[\overline{\mathcal{V}}]} = a(1)a(2) \dots a(q), \text{ mot de taille } q \geqslant 0.$$

En faisant entrer successivement, dans le système, des éléments

$$V_{n+j(n)+1} \in \mathcal{E}(a(1)),\ V_{n+j(n)+2} \in \mathcal{E}(a(2)), \dots,\ V_{n+j(n)+q} \in \mathcal{E}(a(q)),$$

on remarque que

$$F_{n+j(n)+q} = \varepsilon.$$

On a donc montré l'existence d'un scénario d'arrivées permettant à la chaîne de Markov $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de passer, avec probabilité strictement positive, de tout mot $\mathbf{w} \in \mathbb{F}\backslash\{\varepsilon\}$ à ε, ce qui conclut la preuve. ■

2.10.5 Preuve de la Proposition 15

Démontrons tout d'abord le résultat suivant, presque similaire à la Proposition 15, et duquel la preuve de ce dernier découlera aisément,

Lemme 5

Pour tout couple de mots $(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \mathbb{B}^2$ vérifiant $\mathbb{P}\left[B_{n+1} = \mathbf{w}' | B_n = \mathbf{w}\right] \neq 0$, on a :

$$\left(\overleftarrow{\mathbf{w}}, \overleftarrow{\mathbf{w}'}\right) \in \mathbb{F}^2$$

et

$$\nu(\mathbf{w})\mathbb{P}\left[B_{n+1} = \mathbf{w}' | B_n = \mathbf{w}\right] = \nu\left(\overleftarrow{\mathbf{w}'}\right)\mathbb{P}\left[F_{n+1} = \overleftarrow{\mathbf{w}} | F_n = \overleftarrow{\mathbf{w}'}\right].$$

Démonstration du Lemme 5 : Fixons $\mathbf{w} \in \mathbb{B}$ et $\mathbf{w}' \in \mathbb{B}$ tels que $\mathbb{P}\left[B_{n+1} = \mathbf{w}' | B_n = \mathbf{w}\right] \neq 0$.
Tout d'abord, le Lemme 2 assure directement que

$$\overleftarrow{\mathbf{w}} \in \mathbb{F} \quad \text{et} \quad \overleftarrow{\mathbf{w}'} \in \mathbb{F}.$$

Passons maintenant en revue toutes les transitions possibles en un pas pour la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire toutes les formes possibles de $\mathbf{w}$ et $\mathbf{w}'$ sous l'hypothèse

$$\mathbb{P}[B_{n+1} = \mathbf{w}' | B_n = \mathbf{w}] \neq 0.$$

Pour mieux visualiser les spécificités des différentes transitions, on pourra par exemple s'aider de la Section 2.3, et plus particulièrement de la Figure 2.2.

- Cas 1 : $\mathbf{w} = \varepsilon$.
  Dans ce cas, l'ensemble des états possibles pour la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'instant suivant est $\mathcal{V}$.
  Notons donc $\mathbf{w}' = a \in \mathcal{V}$, et alors,
  - $\nu(\varepsilon) = 1$;
  - $\mathbb{P}[B_{n+1} = a | B_n = \varepsilon] = \mathbb{P}(V_{n+1} = a) = \bar{\mu}(a)$;
  - $\nu(\overline{a}) = \nu(a) = \bar{\mu}(a)$;
  - Supposons que $F_n = \overline{a}$.
    Par construction de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'élément entrant au temps $n+1$ va alors s'apparier avec un item de classe a, entré dans le système au plus tard à l'instant n.
    Ainsi,
    $$\mathbb{P}[F_{n+1} = \varepsilon | F_n = \overline{a}] = 1.$$

  On en déduit donc que

  $$\nu(\varepsilon)\mathbb{P}[B_{n+1} = \overline{a} | B_n = \varepsilon] = \bar{\mu}(a) = \nu(\overline{a})\mathbb{P}[F_{n+1} = \varepsilon | F_n = \overline{a}].$$

- Cas 2 : $\mathbf{w} \neq \varepsilon$.
  Dans ce cas, on note $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_q \in \mathbb{B} \subset \mathbf{V}^*$, et on rappelle que $\mathbf{w}_1 \in \mathcal{V}$ (cf. (2.1)).
  De plus, on note a la classe de V_{n+1}, élément entrant dans le système à l'instant $n+1$, et on remarque que ceci se produit avec probabilité $\bar{\mu}(a)$.
  Différents cas de transitions apparaissent alors en fonction du voisinage de a et de la structure de $\mathbf{w}$,
  - Cas 2.1 : $a \in \mathcal{E}(\mathcal{V}(\mathbf{w}))^c$.
    Dans ce cas, l'élément a entrant ne peut s'apparier avec aucun item de $\mathbf{w}$ pas encore apparié.
    Notons donc $\mathbf{w}' = \mathbf{w}a$, et alors,
    - $\mathbb{P}[B_{n+1} = \mathbf{w}a | B_n = \mathbf{w}] = \mathbb{P}(V_{n+1} = a) = \bar{\mu}(a)$;

— $\nu\left(\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}a}}\right) = \nu(\mathbf{w}a) = \nu(\mathbf{w})\bar{\mu}(a)$;

— Supposons que $F_n = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}a}} = \overline{a}\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}}$.
Le fait que $F_n(1) = \overline{a} \in \overline{\mathcal{V}}$ signifie que cette lettre n'apparaîtra plus dans F_{n+1} et que, par construction de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il n'y aura aucune autre modification, étant donné que l'élément entrant au temps $n+1$ s'appariera avec un item entré au plus tard à l'instant n.
Ainsi,

$$\mathbb{P}\left[F_{n+1} = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}} \middle| F_n = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}a}}\right] = 1.$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\nu(\mathbf{w})\mathbb{P}[B_{n+1} = \mathbf{w}a|B_n = \mathbf{w}] = \nu(\mathbf{w})\bar{\mu}(a) &= \nu\left(\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}a}}\right)\\ &= \nu\left(\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}a}}\right)\mathbb{P}\left[F_{n+1} = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}} \middle| F_n = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}a}}\right].\end{aligned}$$

— <u>Cas 2.2</u> : $a \in \mathcal{E}(\mathcal{V}(\mathbf{w}))$.
Dans ce cas, l'élément a entrant va s'apparier, au temps $n+1$, avec un item de $\mathbf{w}$ pas encore apparié.

— <u>Cas 2.2.1</u> : $a \in \mathcal{E}(\mathcal{V}(\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_{k-1}))^c \cap \mathcal{E}(\mathbf{w}_k)$, où $k \in [\![2;q]\!]$.
Dans ce cas, étant sous politique FCFM, l'élément a entrant va s'apparier, au temps $n+1$, avec l'item $\mathbf{w}_k \in \mathcal{V}$, où $k \in [\![2;q]\!]$.
Notons donc $\mathbf{w}' = \mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_{k-1}\overline{a}\mathbf{w}_{k+1} \dots \mathbf{w}_q\overline{\mathbf{w}_k}$, et alors,

— $\mathbb{P}[B_{n+1} = \mathbf{w}'|B_n = \mathbf{w}] = \mathbb{P}(V_{n+1} = a) = \bar{\mu}(a)$;

— $\nu\left(\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right) = \nu\left(\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}}\right)\bar{\mu}(a) = \nu(\mathbf{w})\bar{\mu}(a)$;

— Supposons que $F_n = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}} = \mathbf{w}_k\overline{\mathbf{w}_q\mathbf{w}_{q-1}} \dots \overline{\mathbf{w}_{k+1}}a\overline{\mathbf{w}_{k-1}} \dots \overline{\mathbf{w}_1}$.
Tout d'abord, l'équivalence (2.3) assure que $\mathbf{w}_k \in \mathcal{E}(\mathcal{V}(\overline{\mathbf{w}_q\mathbf{w}_{q-1}} \dots \overline{\mathbf{w}_{k+1}}))^c$, c'est-à-dire que $\mathbf{w}_k$ n'est voisin d'aucun élément de $\mathcal{V}(\overline{\mathbf{w}_q\mathbf{w}_{q-1}} \dots \overline{\mathbf{w}_{k+1}})$.
Par ailleurs, le fait que $F_n(1) = \mathbf{w}_k \in \mathcal{V}$ signifie que cette lettre n'apparaîtra plus dans F_{n+1} et que, par construction de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'élément entrant au temps $n+1$ est de classe $\mathbf{w}_k$ et ne s'appariera pas avec un item entré au plus tard à l'instant n.
D'où, comme $a \in \mathcal{E}(\mathbf{w}_k)$ avec $\mathbf{w}_k \in \mathcal{V}$ et étant sous politique FCFM, dès l'instant $n+1$, l'item de classe a sera promis à s'apparier dans le futur avec celui de classe $\mathbf{w}_k$.
Donc, avec probabilité 1,

$$F_{n+1} = \overline{\mathbf{w}_q\mathbf{w}_{q-1}} \dots \overline{\mathbf{w}_{k+1}\mathbf{w}_k\mathbf{w}_{k-1}} \dots \overline{\mathbf{w}_1} = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}},$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}\left[F_{n+1} = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}} \middle| F_n = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right] = 1.$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\nu(\mathbf{w})\mathbb{P}[B_{n+1} = \mathbf{w}'|B_n = \mathbf{w}] = \nu(\mathbf{w})\bar{\mu}(a) &= \nu\left(\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right)\\ &= \nu\left(\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right)\mathbb{P}\left[F_{n+1} = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}} \middle| F_n = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right].\end{aligned}$$

— <u>Cas 2.2.2</u> : $a \in \mathcal{E}(\mathbf{w}_1)$.
Dans ce cas, étant sous politique FCFM, l'élément a entrant va s'apparier, au temps $n+1$, avec l'item $\mathbf{w}_1 \in \mathcal{V}$.
▷ <u>Cas 2.2.2.1</u> : $\forall k \in [\![2;q]\!],\ \mathbf{w}_k \in \overline{\mathcal{V}}$.
Notons donc $\mathbf{w}' = \varepsilon$, et alors,

— $\nu(\mathbf{w}) = \bar{\mu}(\mathbf{w}_1)\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_2}) \dots \bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_q})$, car $\mathbf{w}_1 \in \mathcal{V}$ et $\forall k \in [\![2;q]\!],\ \mathbf{w}_k \in \overline{\mathcal{V}}$;

— $\mathbb{P}[B_{n+1} = \varepsilon|B_n = \mathbf{w}] = \mathbb{P}(V_{n+1} \in \mathcal{E}(\mathbf{w}_1)) = \bar{\mu}(\mathcal{E}(\mathbf{w}_1))$;

— $\nu(\varepsilon) = 1$;

— Supposons que $F_n = \varepsilon$.
Tout d'abord, comme $\mathbf{w}_1 \in \mathcal{V}$ et $\forall k \in [\![2;q]\!],\ \mathbf{w}_k \in \overline{\mathcal{V}}$, le Lemme 1 assure que

$$\forall j \in [\![2;q]\!],\ \mathbf{w}_1 + \overline{\mathbf{w}_j}.$$

Alors, $F_{n+1} = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}} = \overline{\mathbf{w}_q\mathbf{w}_{q-1}} \dots \overline{\mathbf{w}_2\mathbf{w}_1}$ si et seulement si :
∘ l'élément arrivant au temps $n+1$ est de classe $\mathbf{w}_1$ et l'item entrant au temps $n+q+1$ est d'une classe appartenant à $\mathcal{E}(\mathbf{w}_1)$;
∘ pour tout $j \in [\![2;q]\!]$, l'élément entrant au temps $n+q+2-j$ est de classe $\overline{\mathbf{w}_j}$.
Remarquons que l'appariement de l'élément entrant au temps $n+1$ ne se fait donc pas avant l'instant $n+q+1$.
Ainsi,

$$\mathbb{P}\left[F_{n+1} = \overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}} \middle| F_n = \varepsilon\right] = \bar{\mu}(\mathbf{w}_1)\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_2}) \dots \bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_q})\bar{\mu}(\mathcal{E}(\mathbf{w}_1)).$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\nu(\mathbf{w})\mathbb{P}[B_{n+1}=\varepsilon|B_n=\mathbf{w}] &= \bar{\mu}(\mathbf{w}_1)\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_2})\dots\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_q})\bar{\mu}(\mathcal{E}(\mathbf{w}_1))\\ &= \nu(\varepsilon)\mathbb{P}\left[F_{n+1}=\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}}|F_n=\varepsilon\right].\end{aligned}$$

▷ <u>Cas 2.2.2.2</u> : $\exists k\in[\![2;q]\!],\ \mathbf{w}_k\in\mathcal{V}$.
On suppose que $\mathbf{w}_{k*}$ est le plus ancien élément dans le système vérifiant cette condition (s'il en existe plusieurs), c'est-à-dire

$$\forall j\in[\![2;k^*-1]\!],\ \mathbf{w}_j\in\overline{\mathcal{V}}\quad\text{et}\quad\mathbf{w}_{k*}\in\mathcal{V}.$$

Notons donc $\mathbf{w}'=\mathbf{w}_{k*}\dots\mathbf{w}_q\overline{\mathbf{w}_1}$, et alors,

— $\nu(\mathbf{w})=\nu\left(\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}}\right)=\nu\left(\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right)\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_2})\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_3})\dots\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_{k*-1}})$;

— $\mathbb{P}\left[B_{n+1}=\mathbf{w}'|B_n=\mathbf{w}\right]=\mathbb{P}(V_{n+1}\in\mathcal{E}(\mathbf{w}_1))=\bar{\mu}(\mathcal{E}(\mathbf{w}_1))$;

— Supposons que $F_n=\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}=\mathbf{w}_1\overline{\mathbf{w}_q\mathbf{w}_{q-1}}\dots\overline{\mathbf{w}_{k*+1}\mathbf{w}_{k*}}$.
L'équivalence (2.3) assurant que

$$\mathbf{w}_1\in\mathcal{E}(\mathcal{V}(\overline{\mathbf{w}_2}\dots\overline{\mathbf{w}_q}))^c=\mathcal{E}(\mathcal{V}(\overline{\mathbf{w}_q}\dots\overline{\mathbf{w}_k}))^c\cap\mathcal{E}(\mathcal{V}(\overline{\mathbf{w}_{k-1}}\dots\overline{\mathbf{w}_2}))^c,$$

on a :

$$F_{n+1}=\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}}=\overline{\mathbf{w}_q\mathbf{w}_{q-1}}\dots\overline{\mathbf{w}_{k*+1}\mathbf{w}_{k*}\mathbf{w}_{k*-1}}\dots\overline{\mathbf{w}_2\mathbf{w}_1}$$

si et seulement si :
○ l'item entrant au temps $n+q-k^*+3$ est de classe $\overline{\mathbf{w}_{k*-1}}$;
○ l'item entrant au temps $n+q-k^*+4$ est de classe $\overline{\mathbf{w}_{k*-2}}$;
○ ... ;
○ l'item entrant au temps $n+q$ est de classe $\overline{\mathbf{w}_2}$;
○ l'item entrant au temps $n+q+1$ est d'une classe appartenant à $\mathcal{E}(\mathbf{w}_1)$.
Ainsi,

$$\mathbb{P}\left[F_{n+1}=\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}}|F_n=\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right]=\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_{k*-1}})\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_{k*-2}})\dots\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_2})\bar{\mu}(\mathcal{E}(\mathbf{w}_1)).$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\nu(\mathbf{w})\mathbb{P}[B_{n+1}=\mathbf{w}'|B_n=\mathbf{w}] &= \nu\left(\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right)\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_2})\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_3})\dots\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_{k*-1}})\bar{\mu}(\mathcal{E}(\mathbf{w}_1))\\ &= \nu\left(\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right)\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_{k*-1}})\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_{k*-2}})\dots\bar{\mu}(\overline{\mathbf{w}_2})\bar{\mu}(\mathcal{E}(\mathbf{w}_1))\\ &= \nu\left(\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right)\mathbb{P}\left[F_{n+1}=\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}}|F_n=\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right].\end{aligned}$$

Tous les cas ont été traités, ce qui conclut la preuve. ■

La preuve de la Proposition 15 se déduit maintenant de celle du Lemme 5,

Démonstration de la Proposition 15 : Fixons un couple de mots $(\mathbf{w},\mathbf{w}')\in\mathbb{B}^2$.
Le Lemme 2 justifie alors directement l'assertion (2.7).
Il ne reste donc plus qu'à prouver l'égalité (2.8).
Dès lors que $\mathbb{P}[B_{n+1}=\mathbf{w}'|B_n=\mathbf{w}]\neq 0$, l'assertion découle directement du Lemme 5.
Pour conclure la preuve, il suffit donc de montrer que

$$\mathbb{P}\left[B_{n+1}=\mathbf{w}'|B_n=\mathbf{w}\right]=0\Rightarrow\mathbb{P}\left[F_{n+1}=\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}}|F_n=\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right]=0,$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}\left[F_{n+1}=\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}}}|F_n=\overleftarrow{\overline{\mathbf{w}'}}\right]>0\Rightarrow\mathbb{P}\left[B_{n+1}=\mathbf{w}'|B_n=\mathbf{w}\right]>0. \tag{2.21}$$

Cependant, démontrer l'équation (2.21) revient à traiter tous les cas possibles de transition en une étape pour la chaîne $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La preuve est alors similaire à celle du Lemme 5 en prenant l'image par ϕ (cf. Lemme 2) de tous les mots considérés, ce qui conclut. ■

2.10.6 Preuve du Lemme 3

Démonstration : Soient $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \subset \mathbf{V} = \mathcal{V} \cup \overline{\mathcal{V}}$ des alphabets de lettres.

1. La décomposition $\mathcal{A} = \mathcal{V}(\mathcal{A}) \uplus \overline{\mathcal{V}}(\mathcal{A})$ et l'invariance de ν par copie garantissent que

$$\begin{aligned}\nu(\mathcal{A}) = \sum_{a\in\mathcal{A}} \nu(a) &= \sum_{a\in\mathcal{V}(\mathcal{A})} \nu(a) + \sum_{a\in\overline{\mathcal{V}}(\mathcal{A})} \nu(\overline{a}) \\ &= \sum_{a\in\mathcal{V}(\mathcal{A})} \bar{\mu}(a) + \sum_{a\in\overline{\mathcal{V}}(\mathcal{A})} \bar{\mu}(\overline{a}) = \bar{\mu}(\mathcal{V}(\mathcal{A})) + \bar{\mu}\left(\overline{\overline{\mathcal{V}}(\mathcal{A})}\right).\end{aligned}$$

2. La forme produit de ν assure que

$$\begin{aligned}\nu\left(\mathcal{A}_1 \ldots \mathcal{A}_n\right) = \nu\left(\biguplus_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathcal{A}_1\times\cdots\times\mathcal{A}_n} \{a_1 \ldots a_n\}\right) &= \sum_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathcal{A}_1\times\cdots\times\mathcal{A}_n} \nu\left(a_1 \ldots a_n\right) \\ &= \sum_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathcal{A}_1\times\cdots\times\mathcal{A}_n} \nu(a_1)\ldots\nu(a_n) \\ &= \left(\sum_{a_1\in\mathcal{A}_1} \nu(a_1)\right)\ldots\left(\sum_{a_n\in\mathcal{A}_n} \nu(a_n)\right) \\ &= \nu(\mathcal{A}_1)\ldots\nu(\mathcal{A}_n).\end{aligned}$$

3. Supposons que $\nu(\mathcal{A}) < 1$.
   Alors, par le point 2. et la définition d'une série géométrique de raison < 1,

$$\nu(\mathcal{A}^*) = \nu\left(\biguplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu\left(\mathcal{A}^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(\mathcal{A})^k = \frac{1}{1-\nu(\mathcal{A})}.$$

■

2.10.7 Preuve de la Proposition 16

Démonstration : Soient $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé connexe et $\bar{\mu} \in \textsc{Ncond}(G)$.

— <u>Étape 1</u> : <u>Montrons que ν_B est une mesure stationnaire de masse finie pour la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$</u> :

— <u>Étape 1.1</u> : <u>Démontrons que ν_B est une mesure stationnaire pour la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$</u> :
Pour tout couple de mots $(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \mathbb{B}^2$, on note

$$\mathrm{P}_{\mathbf{w},\mathbf{w}'} \triangleq \frac{\mathbb{P}[B_{n+1} = \mathbf{w}' | B_n = \mathbf{w}]\nu_B(\mathbf{w})}{\nu_B(\mathbf{w}')}.$$

Fixons un mot $\mathbf{w}' \in \mathbb{B}$.
L'équation (2.8), l'égalité entre $\nu_B\left(\overleftarrow{\mathbf{w}'}\right)$ et $\nu_B(\mathbf{w}')$, et le résultat (2.6) assurent que

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{B}} \mathrm{P}_{\mathbf{w},\mathbf{w}'} &= \sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{B}} \frac{\mathbb{P}[B_{n+1} = \mathbf{w}' | B_n = \mathbf{w}]\nu_B(\mathbf{w})}{\nu_B(\mathbf{w}')} \\ &= \sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{B}} \frac{\mathbb{P}\left[F_{n+1} = \overleftarrow{\mathbf{w}} | F_n = \overleftarrow{\mathbf{w}'}\right]\nu_B\left(\overleftarrow{\mathbf{w}'}\right)}{\nu_B(\mathbf{w}')} \\ &= \sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{B}} \mathbb{P}\left[F_{n+1} = \overleftarrow{\mathbf{w}} | F_n = \overleftarrow{\mathbf{w}'}\right] \\ &= \sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{B}} \mathbb{P}\left[F_{n+1} = \phi(\mathbf{w}) | F_n = \phi(\mathbf{w}')\right] \\ &= 1.\end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\forall \mathbf{w}' \in \mathbb{B},\ \sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{B}} \mathrm{P}_{\mathbf{w},\mathbf{w}'} = 1,$$

ce qu'on peut réécrire de la manière suivante :

$$\forall \mathbf{w}' \in \mathbb{B},\ \sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{B}} \frac{\mathbb{P}[B_{n+1} = \mathbf{w}' | B_n = \mathbf{w}]\nu_B(\mathbf{w})}{\nu_B(\mathbf{w}')} = 1,$$

c'est-à-dire

$$\forall \mathbf{w}' \in \mathbb{B},\ \nu_B(\mathbf{w}') = \sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{B}} \mathbb{P}[B_{n+1} = \mathbf{w}' | B_n = \mathbf{w}]\nu_B(\mathbf{w}),$$

ce qui signifie que ν_B est une mesure stationnaire pour la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— Étape 1.2 : Donnons une expression de $\nu_B(\mathbb{B})$ et déduisons-en que $\nu_B(\mathbb{B}) < +\infty$:
Tout d'abord, le Lemme 1 (et plus particulièrement, la Remarque 3) assure que $\mathbf{w} \in \mathbb{B}\backslash\{\varepsilon\}$ si et seulement si $\mathbf{w}$ appartient à un ensemble de la forme

$$b_1\,\mathcal{A}_1^*\,b_2\,\mathcal{A}_2^*\ldots b_q\,\mathcal{A}_q^*,$$

où les lettres $b_1,\ldots,b_q \in \mathcal{V}$, avec $q \in \mathbb{N}_*$, satisfont

$$\{b_1,\ldots,b_q\} \in \tilde{\mathbb{I}}(G) \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1;q]\!],\ b_i \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}} \Rightarrow [\forall j \neq i,\ b_i \neq b_j]\,,$$

et où, pour tout $i \in [\![1;q]\!]$, on note

$$\mathcal{A}_i \triangleq \overline{\mathcal{E}(\{b_1,\ldots,b_i\})^c}.$$

De manière équivalente, en mettant en évidence seulement la première occurrence de chaque lettre de $\mathcal{V}$ apparaissant dans $\mathbf{w}$, on peut reformuler de la manière suivante :
$\mathbf{w} \in \mathbb{B}\backslash\{\varepsilon\}$ si et seulement si $\mathbf{w}$ appartient à un ensemble de la forme

$$\mathcal{C}_{e_1,\ldots,e_k} \triangleq e_1\,\mathcal{B}_1^*\,e_2\,\mathcal{B}_2^*\ldots e_k\,\mathcal{B}_k^*,$$

où les lettres $e_1,\ldots,e_k \in \mathcal{V}$, avec $k \in \mathbb{N}_*$, sont deux à deux distinctes et satisfont

$$\{e_1,\ldots,e_k\} \in \tilde{\mathbb{I}}(G),$$

et où, pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, on note

$$\mathcal{B}_i \triangleq \overline{\mathcal{E}(\{e_1,\ldots,e_i\})^c} \uplus (\{e_1,\ldots,e_i\} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c).$$

▷ Calculons $\nu_B\left(\mathcal{C}_{e_1,\ldots,e_k}\right)$, pour tout $k \in \mathbb{N}_*$:
Fixons $k \in \mathbb{N}_*$ et $i \in [\![1;k]\!]$.
Tout d'abord, l'item 1. du Lemme 3 assure que

$$\begin{aligned}\nu_B(\mathcal{B}_i) &= \bar{\mu}\left(\mathcal{E}(\{e_1,\ldots,e_i\})^c\right) + \bar{\mu}(\{e_1,\ldots,e_i\} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c)\\ &= 1 - \bar{\mu}(\mathcal{E}(\{e_1,\ldots,e_i\})) + \bar{\mu}(\{e_1,\ldots,e_i\} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c).\end{aligned}$$

De plus, comme $\{e_1,\ldots,e_i\} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c \in \mathbb{I}(G)$ et $\bar{\mu} \in \textsc{Ncond}(G)$,

$$\begin{aligned}\nu_B(\mathcal{B}_i) &= 1 - \bar{\mu}(\mathcal{E}(\{e_1,\ldots,e_i\})) + \bar{\mu}(\{e_1,\ldots,e_i\} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c)\\ &< 1 - \bar{\mu}(\mathcal{E}(\{e_1,\ldots,e_i\})) + \bar{\mu}\left(\mathcal{E}\left(\{e_1,\ldots,e_i\} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c\right)\right)\\ &\leqslant 1 - \bar{\mu}(\mathcal{E}(\{e_1,\ldots,e_i\})) + \bar{\mu}\left(\mathcal{E}\left(\{e_1,\ldots,e_i\}\right)\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

On a donc montré que, pour tout $i \in [\![1;k]\!]$,

$$\nu_B(\mathcal{B}_i) = 1 - \bar{\mu}(\mathcal{E}(\{e_1,\ldots,e_i\})) + \bar{\mu}(\{e_1,\ldots,e_i\} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c) < 1. \tag{2.22}$$

Ainsi, l'association du Lemme 3 et de l'équation (2.22) assure que

$$\begin{aligned}\nu_B\left(\mathcal{C}_{e_1,\ldots,e_k}\right) &= \nu_B\left(e_1\,\mathcal{B}_1^*\,e_2\,\mathcal{B}_2^*\ldots e_k\,\mathcal{B}_k^*\right)\\ &= \bar{\mu}(e_1)\nu_B(\mathcal{B}_1^*)\bar{\mu}(e_2)\nu_B(\mathcal{B}_2^*)\ldots\bar{\mu}(e_k)\nu_B(\mathcal{B}_k^*)\\ &= \prod_{i=1}^{k}\bar{\mu}(e_i)\nu_B(\mathcal{B}_i^*)\\ &= \prod_{i=1}^{k}\frac{\bar{\mu}(e_i)}{1-\nu_B(\mathcal{B}_i)}\\ &= \prod_{i=1}^{k}\frac{\bar{\mu}(e_i)}{\bar{\mu}(\mathcal{E}(\{e_1,\ldots,e_i\})) - \bar{\mu}(\{e_1,\ldots,e_i\} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c)}.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}_*$,

$$\nu_B(\mathcal{C}_{e_1,\ldots,e_k}) = \prod_{i=1}^{k}\frac{\bar{\mu}(e_i)}{\bar{\mu}(\mathcal{E}(\{e_1,\ldots,e_i\})) - \bar{\mu}(\{e_1,\ldots,e_i\} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c)}.$$

▷ Concluons l'Étape 1.2 :
Notons $\mathfrak{S}\left(\tilde{\mathbb{I}}(G)\right)$ l'ensemble des suites ordonnées $(e_1, \ldots, e_k)$ d'éléments deux à deux distincts de $\mathcal{V}$ vérifiant $\{e_1, \ldots, e_k\} \in \tilde{\mathbb{I}}(G)$, où $k \in \mathbb{N}_*$.
Comme on a déjà remarqué que

$$\mathbb{B} = \{\varepsilon\} \uplus \left(\biguplus_{(e_1,\ldots,e_k)\in\mathfrak{S}\left(\tilde{\mathbb{I}}(G)\right)} \mathcal{C}_{e_1,\ldots,e_k} \right),$$

il suit que

$$\begin{aligned}\nu_B(\mathbb{B}) &= 1 + \sum_{(e_1,\ldots,e_k)\in\mathfrak{S}\left(\tilde{\mathbb{I}}(G)\right)} \nu_B\left(C_{e_1,\ldots,e_k}\right) \\ &= 1 + \sum_{(e_1,\ldots,e_k)\in\mathfrak{S}\left(\tilde{\mathbb{I}}(G)\right)} \prod_{i=1}^{k} \frac{\bar{\mu}(e_i)}{\bar{\mu}(\mathcal{E}(\{e_1,\ldots,e_i\})) - \bar{\mu}(\{e_1,\ldots,e_i\} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c)}.\end{aligned}$$

Comme $\tilde{\mathbb{I}}(G)$ est fini, l'ensemble de toutes les permutations possibles d'éléments de $\tilde{\mathbb{I}}(G)$, noté $\mathfrak{S}\left(\tilde{\mathbb{I}}(G)\right)$, est donc également fini, et il suit donc que $\nu_B(\mathbb{B}) < \infty$.
Remarquons enfin que l'on peut également écrire

$$\nu_B(\mathbb{B}) = 1 + \sum_{\mathcal{I}\in\tilde{\mathbb{I}}(G)} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{|\mathcal{I}|}} \prod_{j=1}^{|\mathcal{I}|} \frac{\bar{\mu}(i_{\sigma(j)})}{\bar{\mu}(\mathcal{E}(\{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(j)}\})) - \bar{\mu}(\{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(j)}\} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^c)},$$

où tout ensemble $\mathcal{I} \in \tilde{\mathbb{I}}(G)$ s'écrit $\mathcal{I} = \{i_1, \ldots, i_{|\mathcal{I}|}\}$.

— Étape 2 : Concluons sur la récurrence positive de la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{B}$:
L'Étape 1 assurant que $\frac{\nu_B}{\nu_B(\mathbb{B})}$ est une loi de probabilité stationnaire de la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, son irréductibilité sur l'espace d'états $\mathbb{B}$ (cf. Proposition 11) assure que la chaîne de Markov $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente positive sur $\mathbb{B}$, et la loi de probabilité stationnaire associée est alors unique.
Ainsi, ν_B est l'unique mesure stationnaire (à constante multiplicative près) de la chaîne $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— Étape 3 : Déduisons-en la récurrence positive de la chaîne $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{F}$:
En définissant, pour tout couple de mots $(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in \mathbb{B}^2$,

$$\tilde{\mathrm{P}}_{\mathbf{w},\mathbf{w}'} \triangleq \frac{\mathbb{P}[F_{n+1} = \phi(\mathbf{w}')|F_n = \phi(\mathbf{w})]\nu_F(\phi(\mathbf{w}))}{\nu_F(\phi(\mathbf{w}'))},$$

on montre, exactement de la même manière qu'à l'Étape 1.1, que

$$\forall \mathbf{w}' \in \mathbb{B},\ \nu_F(\phi(\mathbf{w}')) = \sum_{\mathbf{w}\in\mathbb{B}} \mathbb{P}[F_{n+1} = \phi(\mathbf{w}')|F_n = \phi(\mathbf{w})]\nu_F(\phi(\mathbf{w})),$$

ce qui signifie, puisque le Lemme 2 assure que $\mathbb{F} = \{\phi(\mathbf{w}) : \mathbf{w} \in \mathbb{B}\}$, que ν_F est une mesure stationnaire pour la chaîne $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Puis, comme à l'Étape 1.2, on prouve que $\nu_F(\mathbb{F}) < +\infty$, et $\frac{\nu_F}{\nu_F(\mathbb{F})}$ est donc une loi de probabilité stationnaire de la chaîne $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
L'irréductibilité de la chaîne $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{F}$ (cf. Proposition 14) assure donc sa récurrence positive sur cet espace, et la loi de probabilité stationnaire associée est alors unique.
Ainsi, ν_F est l'unique mesure stationnaire (à constante multiplicative près) de la chaîne $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

2.10.8 Preuve de la Proposition 24

Démonstration : Fixons un sous-ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$.
Montrer que $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ revient à prouver sa réflexivité, sa symétrie, et sa transitivité,

— Réflexivité : Soit $x \in \mathcal{X}$.
Trivialement, $d_C^{(n)}(x, x) = 0$, et l'item 1. de la Définition 26 est donc vérifié.
Ainsi,

$$x \,\mathcal{R}_{\mathcal{X}}\, x,$$

ce qui assure la réflexivité de $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$.

— Symétrie : Fixons un couple $(x, x') \in \mathcal{X}^2$ tel que $x \,\mathcal{R}_{\mathcal{X}}\, x'$.

— Cas 1 : $d_C^{(n)}(x,x') \in \{0;2\}$.
La propriété de symétrie de la distance $d_C^{(n)}$ (cf. Proposition 23) assure alors que

$$d_C^{(n)}(x',x) = d_C^{(n)}(x,x') \in \{0;2\}.$$

L'item 1. de la Définition 26 est donc satisfait, et ainsi, $x' \mathcal{R}_{\mathcal{X}} x$.

— Cas 2 : $\exists k \geqslant 1,\ \exists (i_1,\dots,i_k) \in \mathcal{X}^k$ t.q. $\begin{cases} d_C^{(n)}(x,i_1) = 2 \\ d_C^{(n)}(i_j,i_{j+1}) = 2,\ \forall j \in [\![1;k-1]\!] \\ d_C^{(n)}(i_k,x') = 2 \end{cases}$.
La propriété de symétrie de la distance $d_C^{(n)}$ (cf. Proposition 23) assure alors que

$$\begin{cases} d_C^{(n)}(x',i_k) = 2 \\ d_C^{(n)}(i_{j+1},i_j) = 2,\ \forall j \in [\![1;k-1]\!] \\ d_C^{(n)}(i_1,x) = 2 \end{cases}.$$

L'item 2. de la Définition 26 est donc satisfait avec le vecteur $(i_k,\dots,i_1) \in \mathcal{X}^k$, ce qui garantit que $x' \mathcal{R}_{\mathcal{X}} x$.

Dans les deux cas,

$$x' \mathcal{R}_{\mathcal{X}} x,$$

ce qui prouve la symétrie de $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$.

— Transitivité : Soit $(x,y,z) \in \mathcal{X}^3$ tel que $x \mathcal{R}_{\mathcal{X}} y$ et $y \mathcal{R}_{\mathcal{X}} z$.

— Cas 1 : $d_C^{(n)}(x,y) \in \{0;2\}$ et $d_C^{(n)}(y,z) \in \{0;2\}$.

— Si $d_C^{(n)}(x,y) = 0$ et $d_C^{(n)}(y,z) = 0$, alors $x = y = z$, et $d_C^{(n)}(x,z) = 0$ (par la propriété de séparation de la distance $d_C^{(n)}$ – cf. Proposition 23).

— Si $d_C^{(n)}(x,y) = 0$ et $d_C^{(n)}(y,z) = 2$, alors $x = y$ et $d_C^{(n)}(x,z) = 2$.

— Si $d_C^{(n)}(x,y) = 2$ et $d_C^{(n)}(y,z) = 0$, alors $y = z$ et $d_C^{(n)}(x,z) = 2$.

— Si $d_C^{(n)}(x,y) = 2$ et $d_C^{(n)}(y,z) = 2$, alors $x \mathcal{R}_{\mathcal{X}} z$ (par l'item 2. de la Définition 26 avec le vecteur $(y) \in \mathcal{X}$).

Ainsi, dans tous les cas, $x \mathcal{R}_{\mathcal{X}} z$.

— Cas 2 : $\exists k \geqslant 1,\ \exists (i_1,\dots,i_k) \in \mathcal{X}^k,\ \begin{cases} d_C^{(n)}(x,i_1) = 2 \\ d_C^{(n)}(i_j,i_{j+1}) = 2,\ \forall j \in [\![1;k-1]\!], \\ d_C^{(n)}(i_k,y) = 2 \end{cases}$ et $d_C^{(n)}(y,z) \in \{0;2\}$.
Si $d_C^{(n)}(y,z) = 0$, alors $y = z$ et, trivialement, $x \mathcal{R}_{\mathcal{X}} z$.
Sinon, l'item 2. de la Définition 26 est satisfait avec le vecteur $(i_1,\dots,i_k,y) \in \mathcal{X}^{k+1}$, et on a alors également que $x \mathcal{R}_{\mathcal{X}} z$.

— Cas 3 : $\exists k \geqslant 1,\ \exists (i_1,\dots,i_k) \in \mathcal{X}^k,\ \begin{cases} d_C^{(n)}(y,i_1) = 2 \\ d_C^{(n)}(i_j,i_{j+1}) = 2,\ \forall j \in [\![1;k-1]\!], \\ d_C^{(n)}(i_k,z) = 2 \end{cases}$ et $d_C^{(n)}(x,y) \in \{0;2\}$.
Si $d_C^{(n)}(x,y) = 0$, alors $x = y$ et, trivialement, $x \mathcal{R}_{\mathcal{X}} z$.
Sinon, l'item 2. de la Définition 26 est satisfait avec le vecteur $(y,i_1,\dots,i_k) \in \mathcal{X}^{k+1}$, et on a alors également que $x \mathcal{R}_{\mathcal{X}} z$.

— Cas 4 : $\exists k \geqslant 1,\ \exists (i_1,\dots,i_k) \in \mathcal{X}^k,\ \begin{cases} d_C^{(n)}(x,i_1) = 2 \\ d_C^{(n)}(i_j,i_{j+1}) = 2,\ \forall j \in [\![1;k-1]\!] \\ d_C^{(n)}(i_k,y) = 2, \end{cases}$

$$\text{et } \exists \ell \geqslant 1,\ \exists (m_1,\dots,m_\ell) \in \mathcal{X}^\ell,\ \begin{cases} d_C^{(n)}(y,m_1) = 2 \\ d_C^{(n)}(m_j,m_{j+1}) = 2,\ \forall j \in [\![1;\ell-1]\!] \\ d_C^{(n)}(m_\ell,z) = 2. \end{cases}$$

Dans ce cas, l'item 2. de la Définition 26 est satisfait avec le vecteur $(i_1,\dots,i_k,y,m_1,\dots,m_\ell) \in \mathcal{X}^{k+\ell+1}$, ce qui assure que $x \mathcal{R}_{\mathcal{X}} z$.

Dans tous les cas,

$$x \mathcal{R}_{\mathcal{X}} z,$$

ce qui prouve la transitivité de $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$.

Conclusion : $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{X}$. ■

2.10.9 Preuve de la Proposition 25

Démonstration : Considérons un cycle généralisé $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ de taille $n \geqslant 2$.

$\Leftarrow$: Supposons que n est pair et que $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \varnothing$.
Alors, le couple $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$, où

$$\mathcal{V}_1 = \left\{2i - 1 : i \in \left[\!\left[1; \frac{n}{2}\right]\!\right]\right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_2 = \left\{2i : i \in \left[\!\left[1; \frac{n}{2}\right]\!\right]\right\},$$

forme une bipartition de $\mathcal{V}$, assurant que le n-cycle G est biparti.

$\Rightarrow$: Supposons que le n-cycle $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est biparti.
Par définition, il existe alors un couple $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \subset \mathcal{V}^2$ tel que

1. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2$;
2. $(u, v) \in \mathcal{E} \Rightarrow [u \in \mathcal{V}_1 \text{ et } v \in \mathcal{V}_2] \text{ ou } [u \in \mathcal{V}_2 \text{ et } v \in \mathcal{V}_1]$.

Par l'absurde, supposons que n est impair ou que $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing$.

— Cas 1 : $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing$.
Dans ce cas, il existe un élément $u \in \mathcal{V}$ tel que $(u, u) \in \mathcal{E}$.
La condition 2. assure alors que $u \in \mathcal{V}_1$ et $u \in \mathcal{V}_2$, ce qui est absurde puisque $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont disjoints par construction.

— Cas 2 : n est impair.
Dans ce cas, notons $n = 2k + 1$, où $k \in \mathbb{N}_*$.
Sans perte de généralité, supposons que $0 \in \mathcal{V}_1$.
Par structure d'un cycle,

$$\forall i \in [\![0; 2k - 1]\!],\ (i, i + 1) \in \mathcal{E},$$

et la condition 2. permet alors de montrer, de proche en proche, que

$$0 \in \mathcal{V}_1, \quad 1 \in \mathcal{V}_2, \ldots, \quad 2k - 1 \in \mathcal{V}_2, \quad \text{et} \quad 2k \in \mathcal{V}_1,$$

c'est-à-dire

$$\{\text{pairs}\} \cap [\![0; n - 1]\!] \subset \mathcal{V}_1 \quad \text{et} \quad \{\text{impairs}\} \cap [\![0; n - 1]\!] \subset \mathcal{V}_2.$$

Cependant, comme $(2k, 0) \in \mathcal{E}$, le fait que $2k \in \mathcal{V}_1$ et $0 \in \mathcal{V}_1$ combiné avec la condition 2. débouche sur une absurdité.

On aboutit donc à une absurdité dans les deux cas, ce qui conclut la preuve. ■

2.10.10 Preuve de la Proposition 26

Démonstration : Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un cycle généralisé de taille $n \geqslant 2$.
Rappelons tout d'abord (cf. (1.9)) que

$$\textsc{Ncond}(G) \triangleq \left\{\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}) : \forall \mathcal{I} \in \mathbb{I}(G),\ \bar{\mu}(\mathcal{I}) < \bar{\mu}(\mathcal{E}(\mathcal{I}))\right\},$$

ce qui, par définition de la loi uniforme sur un ensemble fini, assure que

$$\mathrm{Unif}(\mathcal{V}) \in \textsc{Ncond}(G) \Leftrightarrow \forall \mathcal{I} \in \mathbb{I}(G),\ |\mathcal{I}| < |\mathcal{E}(\mathcal{I})|.$$

La démonstration se résume donc à prouver l'équivalence suivante :

$$[\forall \mathcal{I} \in \mathbb{I}(G),\ |\mathcal{I}| < |\mathcal{E}(\mathcal{I})|] \Leftrightarrow [n \text{ est impair}] \text{ ou } [\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{pairs}\} \neq \varnothing \text{ et } \mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{impairs}\} \neq \varnothing].$$

$\Rightarrow$: Par contraposée, supposons $[n \text{ est pair}]$ et $[\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{pairs}\} = \varnothing \text{ ou } \mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{impairs}\} = \varnothing]$.
Notons alors $n = 2k$, où $k \in \mathbb{N}_*$.

— Cas 1 : $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{pairs}\} = \varnothing$.
En définissant $\mathcal{I}_0 \triangleq \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2k - 2\} = [\![0; n - 1]\!] \cap \{\text{pairs}\}$, le fait que $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{pairs}\} = \varnothing$ assure que

$$\mathcal{I}_0 \in \mathbb{I}(G) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(\mathcal{I}_0) = \{1, 3, 5, \ldots, 2k - 1\} = [\![0; n - 1]\!] \cap \{\text{impairs}\},$$

ce qui, en particulier, donne

$$|\mathcal{I}_0| = |\mathcal{E}(\mathcal{I}_0)| = k.$$

— Cas 2 : $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{impairs}\} = \varnothing$.
En définissant $\mathcal{I}_1 \triangleq \{1, 3, 5, \ldots, 2k - 1\} = [\![0; n - 1]\!] \cap \{\text{impairs}\}$, le fait que $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{impairs}\} = \varnothing$ assure que

$$\mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(G) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(\mathcal{I}_1) = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2k - 2\} = [\![0; n - 1]\!] \cap \{\text{pairs}\},$$

ce qui, en particulier, donne

$$|\mathcal{I}_1| = |\mathcal{E}(\mathcal{I}_1)| = k.$$

Dans les deux cas, on a donc trouvé un ensemble indépendant $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G)$ tel que $|\mathcal{I}| = |\mathcal{E}(\mathcal{I})|$, ce qui conclut.

$\Leftarrow$: Supposons [n est impair] ou [$\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{pairs}\} \neq \emptyset$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{impairs}\} \neq \emptyset$].
Fixons un ensemble indépendant $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G) \subset \tilde{\mathbb{I}}(G)$.
Ainsi, en combinant le Lemme 4 avec le fait que $\mathcal{I} \subset \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{c}$,

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}(\mathcal{I})| &= 2|\mathcal{I}| + |\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| - \mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} + \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} - \mathbf{1}_{\{n \text{ est pair}\}}\mathbf{1}_{\left\{\mathcal{I} \in \bar{\tilde{\mathbb{I}}}(G)\right\}} \\ &= 2|\mathcal{I}| - \mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} + \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} - \mathbf{1}_{\{n \text{ est pair}\}}\mathbf{1}_{\left\{\mathcal{I} \in \bar{\tilde{\mathbb{I}}}(G)\right\}}.\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit donc de démontrer que

$$\mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} + \mathbf{1}_{\{n \text{ est pair}\}}\mathbf{1}_{\left\{\mathcal{I} \in \bar{\tilde{\mathbb{I}}}(G)\right\}} < |\mathcal{I}| + \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)}. \tag{2.23}$$

— <u>Cas 1</u> : n est impair.
Par construction, $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} \leqslant |\mathcal{I}|$, et la quantité $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)}$ étant positive, le seul cas à étudier est donc celui où $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} = |\mathcal{I}|$, dans lequel $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} = 1$.
Ceci prouve alors l'inéquation (2.23).

— <u>Cas 2</u> : n est pair, $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{pairs}\} \neq \emptyset$, et $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{impairs}\} \neq \emptyset$.
Par l'absurde, supposons que $\mathcal{I} \in \bar{\tilde{\mathbb{I}}}(G)$.
Dans ce cas, $\mathcal{I} = [\![0; n-1]\!] \cap \{\text{impairs}\}$ ou $\mathcal{I} = [\![0; n-1]\!] \cap \{\text{pairs}\}$.
Alors, comme $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{impairs}\} \neq \emptyset$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \cap \{\text{pairs}\} \neq \emptyset$, on aboutit, dans les deux cas, à $\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \emptyset$, ce qui est absurde puisque $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G)$.
Ainsi, $\mathcal{I} \notin \bar{\tilde{\mathbb{I}}}(G)$, et l'inégalité (2.23) se prouve alors de la même manière que dans le Cas 1.

L'inéquation (2.23) est donc vérifiée dans les deux cas, ce qui conclut la preuve. ■

Chapitre 3

Caractérisation algébrique de plusieurs zones de stabilité

Sommaire

3.1 Motivations et premiers résultats **67**
3.2 Mesures à poids et lien avec les marches aléatoires **68**
3.2.1 Mesures à poids sur des graphes généralisés 68
3.2.2 Marches aléatoires 69
3.3 Présentation de quelques modèles d'appariements **70**
3.3.1 Modèles d'appariements bipartis et bipartis étendus 70
3.3.2 Modèles d'appariements généraux avec abandons 71
3.3.3 Files d'attente basées sur les compétences (ou *skill-based*) 72
3.3.4 Vers une caractérisation exacte des zones de stabilité 73
3.4 Résultats **73**
3.5 Preuve de la Proposition 27 . . . . . **79**
3.5.1 Preuve de l'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (vi)$ 79
3.5.2 Preuve de l'implication $(i) \Rightarrow (v)$ 80
3.6 Preuve de la Proposition 28 . . . . . **80**
3.6.1 Éléments préliminaires 80
3.6.2 Preuve de l'implication $(v) \Rightarrow (ii)$ 81
3.7 Preuve du Théorème 2 . . . . . **82**
3.7.1 Cas 1 : G n'est pas un graphe biparti 82
3.7.2 Cas 2 : G est un graphe biparti 88
3.8 Preuve du Corollaire 2 . . . . . **90**
3.9 Preuve du Corollaire 3 . . . . . **91**
3.10 Preuve du Théorème 3 . . . . . **91**
3.10.1 Preuve générale utilisant le Théorème 2 91
3.10.2 Cas biparti : preuve utilisant la théorie des flots 93

La *stabilité* d'un système régi par un modèle d'appariements est une propriété très importante. Elle assure, en effet, que les admissions au sein du système étudié sont contrôlées de sorte que les éléments ne restent pas bloqués à l'intérieur et que leur nombre n'augmente pas indéfiniment. À un graphe (généralisé) connexe G et une politique d'appariements Φ fixés, il est donc important que le taux (ou la loi) d'arrivées μ (respectivement, $\bar{\mu}$) permette de rendre stable le système étudié, c'est-à-dire qu'elle doit appartenir à la *zone de stabilité* du modèle. Dans le Chapitre 2 précédent, le résultat principal (Théorème 1) a permis, dans le cas où G n'est pas un graphe biparti, d'identifier la zone de stabilité $\textsc{stab}(G, \textsc{fcfm})$ avec un certain ensemble, noté $\textsc{Ncond}(G)$, défini uniquement à l'aide de conditions algébriques. La question de trouver une loi d'arrivées $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ rendant le modèle $\textsc{mg}(G, \textsc{fcfm}, \bar{\mu})$ stable revient donc à celle de trouver une mesure appartenant à ce nouvel ensemble algébrique $\textsc{Ncond}(G)$. Une première idée naturelle est de se demander si vérifier qu'une mesure quelconque $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ appartient à $\textsc{Ncond}(G)$ est réalisable algorithmiquement. La Proposition 1 de [24] assure en effet que c'est le cas. Cependant, l'algorithme proposé possède une complexité (qui, par ailleurs, est la meilleure fournie dans la littérature) polynomiale en le nombre de sommets du graphe de compatibilités (généralisé) connexe G considéré. Plus précisément, cet algorithme nécessite de l'ordre de $O(|\mathcal{V}|^3)$ opérations, ce qui, évidemment, devient très coûteux algorithmiquement dès lors que $|\mathcal{V}|$ augmente, et d'où le besoin d'obtenir un moyen (beaucoup) plus efficace pour trouver une loi $\bar{\mu}$ qui appartienne à l'ensemble $\textsc{Ncond}(G)$. C'est donc l'objet de ce Chapitre 3, qui va permettre de caractériser exactement l'ensemble $\textsc{Ncond}(G)$ et de donner un moyen (très) simple de construction des mesures en son sein. Nous irons même plus loin en faisant de même pour certains autres modèles d'appariements (bipartis, bipartis étendus, généraux avec abandons) et de files d'attente, dits *skill-based*. Cette étude permet donc, sous de bonnes conditions (sur le graphe de compatibilités G et la politique Φ), de construire aisément des taux (ou lois) d'arrivées permettant de rendre stable le modèle étudié. Tout d'abord, nous commencerons par répondre le plus précisément possible aux questions de la Remarque 6 laissées en suspens à la fin du Chapitre 2. Puis, après avoir notamment présenté les différents modèles d'appariements et de files d'attente étudiés par la suite (cf. Section 3.3), les résultats majeurs de ce Chapitre 3 seront fournis dans la Section 3.4. Comme annoncé précédemment, nous y caractériserons algébriquement certaines zones de stabilité associées à différents modèles, et donnerons également une procédure de construction (très) simple des mesures appartenant à ces zones. En plus de tout ceci, nous portons à l'attention du lecteur les éléments intéressants suivants, obtenus au cours de nos recherches :

— La mise en évidence d'un lien entre les mesures rendant stables certains modèles d'appariements et les mesures invariantes réversibles pour une marche aléatoire sur les arêtes d'un graphe généralisé connexe (cf. Corollaire 2 et Corollaire 3).

— L'intrigante utilisation d'un résultat d'analyse matricielle, le *lemme de Farkas matriciel*, dans la preuve du Théorème 2 (cf. Section 3.7.1.2 et Section 3.7.2.3).

— L'utilisation d'éléments de théorie des flots dans la preuve du Théorème 3, dans le cas d'un graphe biparti (cf. Section 3.10.2).

Pour une parfaite information, ce Chapitre 3 présente une version étendue de certains résultats donnés dans l'article [6], pré-publié en 2021.

Tout au long de ce Chapitre 3, tous les graphes (généralisés) considérés seront connexes et constitués d'au moins deux sommets.

Comme annoncé dans la Section 2.9.2, un des objectifs initiaux de ce Chapitre 3 est de répondre aux questions laissées en suspens à la fin du Chapitre 2 (cf. Remarque 6).

La Section 3.1 suivante va déjà permettre de résoudre la question Q.1, en premier lieu (et afin de faire une transition en douceur avec la Section 2.9) dans le cas du cycle généralisé connexe, puis, plus généralement, pour tout graphe généralisé connexe.

3.1 Motivations et premiers résultats

Définissons ci-dessous une mesure de probabilité remarquable qui appartient systématiquement à l'ensemble $\textsc{Ncond}(G)$ dès lors que celui-ci est non-vide (cf. Proposition 28),

Définition 29

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, on définit la mesure $\mu_{\deg} \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$ par :

$$\forall v \in \mathcal{V},\ \mu_{\deg}(v) \triangleq \deg(v),$$

où $\deg(v) = |\mathcal{E}(v)|$ est le degré (c'est-à-dire le nombre de voisins) dans G du sommet $v \in \mathcal{V}$.
La loi de probabilité associée, notée $\bar{\mu}_{\deg} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, est donc donnée par :

$$\forall v \in \mathcal{V},\ \bar{\mu}_{\deg}(v) \triangleq \frac{\deg(v)}{\sum\limits_{i \in \mathcal{V}} \deg(i)} = \frac{\mu_{\deg}(v)}{\mathrm{Card}\left(\overleftrightarrow{\mathcal{E}}\right)} = \frac{|\mathcal{E}(v)|}{\mathrm{Card}\left(\overleftrightarrow{\mathcal{E}}\right)},$$

où $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}$ est défini par (1.1).

Le premier résultat proposé ci-dessous s'appuie notamment sur le Lemme 4 et répond partiellement à la question Q.1 (cf. Remarque 6) en assurant que, dans le cas où G est un cycle généralisé connexe de taille supérieure ou égale à deux, la mesure $\mu_{\deg}$ (respectivement, $\bar{\mu}_{\deg}$) appartient à l'ensemble $\textsc{Ncond}^{+}(G)$ (respectivement, $\textsc{Ncond}(G)$), dès lors que celui-ci est non-vide. Même si ce résultat sera généralisé par la suite, nous souhaitons tout de même le présenter car il permet de fournir une bonne intuition du résultat plus général présenté juste après (cf. Proposition 28),

Proposition 27

Pour tout cycle généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ de taille $n \geqslant 2$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\textsc{Ncond}^{+}(G) \neq \varnothing$;
- (ii) $\mu_{\deg} \in \textsc{Ncond}^{+}(G)$;
- (iii) $\textsc{Ncond}(G) \neq \varnothing$;
- (iv) $\bar{\mu}_{\deg} \in \textsc{Ncond}(G)$;
- (v) *G n'est pas un cycle biparti ;*
- (vi) *[n est impair] ou [$\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing$].*

Démonstration : Le résultat (2.15) de la Proposition 25 correspondant à l'équivalence $(v) \Leftrightarrow (vi)$, et les assertions $(i) \Leftrightarrow (iii)$, $(ii) \Leftrightarrow (iv)$, et $(ii) \Rightarrow (i)$ étant évidentes, il suffit de prouver l'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (vi)$ et l'implication $(i) \Rightarrow (v)$ pour conclure la preuve, ce qui est fait dans la Section 3.5. ■

Il semble maintenant naturel de conjecturer que ce résultat reste vrai pour tout graphe généralisé connexe ayant au moins deux sommets, ce qui permettrait de résoudre complètement la question Q.1 (cf. Remarque 6). Il s'avère que c'est bien le cas et, même s'il sera à son tour généralisé par la suite, nous le présentons tout de même car il nous a, une fois encore, donné une intuition pour le Théorème 2 présenté plus loin,

Proposition 28

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\textsc{Ncond}^{+}(G) \neq \varnothing$;
- (ii) $\mu_{\deg} \in \textsc{Ncond}^{+}(G)$;
- (iii) $\textsc{Ncond}(G) \neq \varnothing$;
- (iv) $\bar{\mu}_{\deg} \in \textsc{Ncond}(G)$;
- (v) *G n'est pas un graphe biparti.*

Démonstration de la Proposition 28 : Les équivalences $(i) \Leftrightarrow (iii)$, $(ii) \Leftrightarrow (iv)$, et l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ étant évidentes, et la preuve de l'implication $(i) \Rightarrow (v)$ étant rigoureusement identique à celle faite pour la Proposition 27 (cf. Section 3.5.2), il ne reste plus qu'à démontrer l'implication $(v) \Rightarrow (ii)$ pour conclure la preuve, ce qui est fait dans la Section 3.6.
Remarquons qu'une démonstration directe de l'implication $(v) \Rightarrow (iii)$ est donnée au cours de la preuve du Theorem 1 de [24]. ■

La question Q.1 (cf. Remarque 6) étant résolue, nous souhaitons poursuivre sur notre lancée en donnant une réponse aux questions Q.2 et Q.3, ce qui sera fait au début de la Section 3.4 (cf. Théorème 2 et Corollaire 2).
Une fois ceci réalisé, nous souhaiterons en plus étendre notre approche de ces questions à d'autres situations, et notamment la caractérisation de zones de stabilité

— de certains modèles d'appariements bipartis et bipartis étendus (cf. Corollaire 3) ;
— de certains modèles d'appariements généraux avec abandons (cf. Théorème 3) ;
— de certains modèles de files d'attente basées sur les compétences (ou *skill-based*) (cf. Corollaire 4, Proposition 30, et Proposition 31).

Introduisons à présent quelques notions préliminaires qui nous seront utiles par la suite.

3.2 Mesures à poids et lien avec les marches aléatoires

3.2.1 Mesures à poids sur des graphes généralisés

Définition 30

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, on dit qu'une famille $\alpha = (\alpha_{i,j})_{(i,j)\in\mathcal{E}}$ de nombres réels est une famille de poids sur $\mathcal{E}$ si, pour tout $(i,j) \in \mathcal{E}$, $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i} > 0$.
Une telle famille α est vue comme un élément de $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ et, pour chaque arête $e = (i,j) \in \mathcal{E}$, on écrit de manière équivalente, α_e, $\alpha_{i,j}$, ou $\alpha_{j,i}$.

Définition 31

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, à toute famille de poids $\alpha = (\alpha_{i,j})_{(i,j)\in\mathcal{E}} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ est associée

— *la mesure positive sur les nœuds, notée $\mu^\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$, définie par*

$$\mu^\alpha(i) \triangleq \sum_{j\in\mathcal{E}(i)} \alpha_{i,j}, \quad i \in \mathcal{V} ; \tag{3.1}$$

— *la loi de probabilité affiliée, notée $\bar{\mu}^\alpha \triangleq \overline{\mu^\alpha} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, définie par*

$$\bar{\mu}^\alpha(i) = \frac{\mu^\alpha(i)}{\mu^\alpha(\mathcal{V})} = \frac{\sum\limits_{j\in\mathcal{E}(i)} \alpha_{i,j}}{\sum\limits_{\ell\in\mathcal{V}} \sum\limits_{j\in\mathcal{E}(\ell)} \alpha_{\ell,j}}, \quad i \in \mathcal{V}. \tag{3.2}$$

Les mesures μ^α et $\bar{\mu}^\alpha$, où $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, sont appelées mesures à poids.
On définit alors les sous-ensembles (de $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ et $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, respectivement) suivants :

$$\mathcal{W}(G) \triangleq \{\mu^\alpha : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\}, \tag{3.3}$$

et

$$\overline{\mathcal{W}}(G) \triangleq \{\bar{\mu}^\alpha : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\}. \tag{3.4}$$

Remarquons que lorsque $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ forme une bipartition de $\mathcal{V}$,

$$\sum_{\ell\in\mathcal{V}_1} \sum_{j\in\mathcal{E}(\ell)} \alpha_{\ell,j} = \sum_{\ell\in\mathcal{V}_2} \sum_{j\in\mathcal{E}(\ell)} \alpha_{\ell,j} = \frac{\sum\limits_{\ell\in\mathcal{V}} \sum\limits_{j\in\mathcal{E}(\ell)} \alpha_{\ell,j}}{2},$$

ce qui se réécrit

$$\mu^\alpha(\mathcal{V}_1) = \mu^\alpha(\mathcal{V}_2) = \frac{\mu^\alpha(\mathcal{V})}{2}. \tag{3.5}$$

Remarque 7

Dans le cas où la famille α affecterait la valeur 0 à certaines arêtes de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire si $\alpha \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})$, où $\mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})$ représente l'ensemble des mesures positives dont le support est inclus dans $\mathcal{E}$, on ne qualifiera alors plus α de famille de poids, mais on s'autorisera tout de même à construire la mesure μ^α associée, qui sera alors, a priori, un élément de $\mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{V})$.

3.2.2 Marches aléatoires

Définition 32

On dit qu'une matrice stochastique $P = (P(i,j))_{(i,j)\in\mathcal{V}^2}$ définit une marche aléatoire sur les arêtes $\mathcal{E}$ d'un graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ lorsque $P(i,j) = 0$ si et seulement si $(i,j) \notin \mathcal{E}$, pour tout couple de sommets $(i,j) \in \mathcal{V}^2$.
De plus, la marche aléatoire est dite réversible lorsque la chaîne de Markov associée admet une mesure invariante réversible.

Définition 33

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, à toute famille de poids $\alpha = (\alpha_{i,j})_{(i,j)\in\mathcal{E}} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ est associée la marche aléatoire pondérée définie par la matrice stochastique P^α, où

$$P^\alpha(i,j) \triangleq \frac{\alpha_{i,j}}{\sum\limits_{\ell\in\mathcal{E}(i)} \alpha_{i,\ell}}, \quad i \in \mathcal{V}, \quad j \in \mathcal{E}(i). \tag{3.6}$$

Proposition 29

Soient $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé connexe tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$ et une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$.
Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- *La mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$ est invariante réversible pour la chaîne de Markov associée à une marche aléatoire sur les arêtes de G ;*
- *$\mu \in \mathcal{W}(G)$, c'est-à-dire que μ est une mesure à poids.*

Dans ce cas, $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ est l'unique loi de probabilité stationnaire de la chaîne précitée.
De plus, μ^α est une mesure invariante pour la chaîne de Markov associée à la matrice stochastique P^α, définie par (3.6).

Démonstration : Considérons un graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$.

$\Rightarrow$: Supposons qu'une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$ est invariante réversible pour une marche aléatoire sur $\mathcal{E}$, définie par une matrice stochastique P.
Si on pose, pour chaque arête $(i,j) \in \mathcal{E}$,

$$\alpha_{i,j} = \mu(i)P(i,j) = \mu(j)P(j,i) = \alpha_{j,i},$$

alors

$$\forall i \in \mathcal{V},\ \mu(i) = \mu(i) \sum_{j\in\mathcal{E}(i)} P(i,j) = \sum_{j\in\mathcal{E}(i)} \alpha_{i,j} = \mu^\alpha(i),$$

c'est-à-dire que $\mu = \mu^\alpha$ est la mesure à poids associée à la famille de poids $\alpha = (\alpha_{i,j})_{(i,j)\in\mathcal{E}}$.

$\Leftarrow$: Considérons une famille de poids $\alpha = (\alpha_{i,j})_{(i,j)\in\mathcal{E}} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, et fixons un couple $(i,j) \in \mathcal{V}^2$.
Alors,

- $\mu^\alpha(i)P^\alpha(i,j) = \sum\limits_{\ell\in\mathcal{E}(i)} \alpha_{i,\ell} \times \dfrac{\alpha_{i,j}}{\sum\limits_{\ell\in\mathcal{E}(i)} \alpha_{i,\ell}} \mathbf{1}_{\{j\in\mathcal{E}(i)\}} = \alpha_{i,j}\mathbf{1}_{\{j\in\mathcal{E}(i)\}}$;
- $\mu^\alpha(j)P^\alpha(j,i) = \sum\limits_{\ell\in\mathcal{E}(j)} \alpha_{j,\ell} \times \dfrac{\alpha_{j,i}}{\sum\limits_{\ell\in\mathcal{E}(j)} \alpha_{j,\ell}} \mathbf{1}_{\{i\in\mathcal{E}(j)\}} = \alpha_{j,i}\mathbf{1}_{\{i\in\mathcal{E}(j)\}}$.

Ainsi, comme α est une famille de poids sur $\mathcal{E}$,

$$\forall (i,j) \in \mathcal{V}^2,\ \mu^\alpha(i)P^\alpha(i,j) = \mu^\alpha(j)P^\alpha(j,i),$$

ce qui signifie que la mesure μ^α est réversible (et donc invariante) pour P^α.
Par irréductibilité de P^α, il s'ensuit que $\bar{\mu}^\alpha = \frac{\mu^\alpha}{\mu^\alpha(\mathcal{V})}$ est l'unique loi de probabilité stationnaire de la chaîne de Markov associée à P^α. ■

3.3 Présentation de quelques modèles d'appariements

Dans le but d'étudier, dans la Section 3.4, les zones de stabilité de certains modèles d'appariements (généraux, généraux avec abandons, bipartis, bipartis étendus) et de certains modèles de files d'attente basées sur les compétences (ou *skill-based*), on se propose, dans cette Section 3.3, de les définir et d'introduire les principales notations associées. Le modèle d'appariements général ayant déjà été largement introduit et discuté dans le Chapitre 1, nous nous permettons d'y renvoyer le lecteur et de ne pas faire de rappels le concernant.

Introduisons tout d'abord une notation préalable,

Définition 34

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et tout sous-ensemble $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$, on note

$$\mathbb{I}(\mathcal{V}') \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G) : \mathcal{I} \subset \mathcal{V}'\},$$

l'ensemble des ensembles indépendants de G inclus dans $\mathcal{V}'$.

3.3.1 Modèles d'appariements bipartis et bipartis étendus

Dans cette Section 3.3.1, nous commençons par donner les principales définitions et les principaux résultats concernant le modèle d'appariements biparti étendu, variante

- du modèle d'appariements général (MG), introduit dans le Chapitre 1, où le graphe de compatibilités considéré est généralisé connexe, et pour lequel la zone de stabilité est vide dès lors qu'il est biparti (cf. Proposition 6 et Proposition 9) - d'où la nécessité d'introduire un autre modèle d'appariements spécifique au cas où le graphe est biparti ;
- du modèle d'appariements biparti (MB), défini dans l'article [13], puis dans [3], où les types de clients et de serveurs entrants sont supposés indépendants - ce qui n'est plus nécessairement le cas dans le modèle étendu. Quelques éléments concernant les modèles d'appariements bipartis seront donnés à la fin de cette Section 3.3.1.

Pour plus de détails sur le modèle d'appariements biparti étendu, on pourra se référer aux articles [11] et [26]. Considérons un graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$. À l'instar du modèle d'appariements général, les classes d'items sont représentées par les éléments de $\mathcal{V}_1$ et de $\mathcal{V}_2$, et deux items $i \in \mathcal{V}_1$ et $j \in \mathcal{V}_2$ sont dits *compatibles* lorsqu'il existe une arête entre i et j. À chaque pas de temps, on fait entrer deux éléments dans le système : un dont la classe appartient à $\mathcal{V}_1$ et un dont la classe appartient à $\mathcal{V}_2$. Les couples des classes des éléments arrivants sont alors représentés par la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}_*$, écrire $V_n = (i, j)$ signifie qu'un élément de classe $i \in \mathcal{V}_1$ et un élément de classe $j \in \mathcal{V}_2$ entrent tous deux dans le système à l'instant n. La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ est supposée i.i.d., de loi de probabilité $\tilde{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$, ses lois marginales étant respectivement notées $\tilde{\mu}_1$ et $\tilde{\mu}_2$. On écrira alors $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)$. Le processus d'appariements est le suivant : à l'arrivée de chaque couple $(i, j) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$, on regarde s'il y a (au moins) un élément d'une classe appartenant à $\mathcal{V}_1$ dans le système qui est compatible avec l'item de classe j entrant. Si c'est le cas, l'item de classe j susmentionné est apparié avec l'un de ces éléments, choisi (s'il y en a plusieurs compatibles) selon une certaine politique d'appariements Φ donnée, et les deux éléments quittent alors le système. Nous recommençons ensuite exactement la même procédure avec l'item de classe i arrivant. Plusieurs situations peuvent alors se présenter :

- Si un seul des deux items entrants (i et j) a trouvé à s'apparier (avec un élément déjà présent), l'autre est stocké dans le système.
- Si aucun des deux éléments (i et j) n'a pu s'apparier, alors
  - soit ils sont compatibles entre eux et s'apparient, avant de quitter le système ;
  - soit ce n'est pas le cas, et ils sont alors stockés tous les deux dans le système.

La politique d'appariements $\Phi \in$ POL considérée est supposée être admissible, c'est-à-dire qu'elle dépend uniquement des instants auxquels les éléments stockés sont entrés dans le système, de leurs classes, et éventuellement d'un tirage aléatoire indépendant de tout le reste. Par exemple, pour la politique $\Phi =$ FCFM, on choisit dans le système l'élément compatible le plus ancien, alors que pour $\Phi =$ ML, on choisit dans le système un élément compatible dont la classe est la plus représentée, les cas d'égalité étant résolus à l'aide d'un tirage aléatoire. D'autres exemples de politiques d'appariements sont donnés dans la

Section 1.1.2, ainsi que dans l'article [11]. Enfin, similairement au cas du modèle d'appariements général, on dira que l'on étudie le *modèle d'appariements biparti étendu associé à* $(G, \Phi, \tilde{\mu})$ et, pour abréger, on le notera $\text{MBÉ}(G, \Phi, \tilde{\mu})$.

Définition 35

Pour tout graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$, toute politique d'appariements $\Phi \in \text{POL}$, et toute mesure de probabilité $\tilde{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$ fixés, on note $\left(Y_n^{\Phi,\tilde{\mu}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov représentant l'évolution temporelle du contenu d'un système régi par le modèle $\text{MBÉ}(G, \Phi, \tilde{\mu})$. Cette chaîne est à valeurs dans un espace d'états, noté $\mathbb{Y}$, inclus dans $\mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_2^*$.

Enfin, parallèlement à (1.5),

Définition 36

Pour tout graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$ et toute politique d'appariements $\Phi \in \text{POL}$, l'ensemble des mesures $\tilde{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$ pour lesquelles le modèle $\text{MBÉ}(G, \Phi, \tilde{\mu})$ est stable est appelé sa zone de stabilité et est défini par

$$\text{STAB}_{\text{BÉ}}(G, \Phi) \triangleq \left\{\tilde{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}\left(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2\right) : \left(Y_n^{\Phi,\tilde{\mu}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est récurrente positive}\right\}.$$

Le Lemma 3.2 de [11] assure que, pour toute politique d'appariements $\Phi \in \text{POL}$, $\text{STAB}_{\text{BÉ}}(G, \Phi)$ est inclus dans l'ensemble

$$\text{NCOND}_{\text{BÉ}}(G) \triangleq \left\{\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \in \overline{\mathcal{M}}\left(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2\right) : \left\{\begin{array}{l} \forall \mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1)\backslash\{\mathcal{V}_1\},\ \tilde{\mu}_1\left(\mathcal{I}_1\right) < \tilde{\mu}_2\left(\mathcal{E}\left(\mathcal{I}_1\right)\right) \\ \forall \mathcal{I}_2 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_2)\backslash\{\mathcal{V}_2\},\ \tilde{\mu}_2\left(\mathcal{I}_2\right) < \tilde{\mu}_1\left(\mathcal{E}\left(\mathcal{I}_2\right)\right) \end{array}\right\}, \tag{3.7}$$

et le Theorem 7.1 de [11] garantit que les ensembles $\text{STAB}_{\text{BÉ}}(G, \Phi)$ et $\text{NCOND}_{\text{BÉ}}(G)$ coïncident pour $\Phi = \text{ML}$.

Les modèles d'appariements bipartis, introduits initialement dans [13], sont définis de manière similaire aux modèles d'appariements bipartis étendus, excepté que la mesure $\tilde{\mu}$ est supposée être sous une forme produit $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\mu}_2$, c'est-à-dire que les classes des deux éléments de chaque couple entrant sont indépendantes. Similairement au cas du modèle d'appariements biparti étendu, on dira que l'on étudie le *modèle d'appariements biparti associé à* $(G, \Phi, \tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\mu}_2)$ et, pour abréger, on le notera $\text{MB}(G, \Phi, \tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\mu}_2)$. De même que pour les modèles précédents, on définit la *zone de stabilité* associée par

$$\text{STAB}_{\text{B}}(G, \Phi) \triangleq \left\{\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\mu}_2 \in \overline{\mathcal{M}}\left(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2\right) : (Y_n^{\Phi,\tilde{\mu}})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est récurrente positive}\right\}.$$

Le Lemma 3.2 de [11] assure encore, en particulier, que pour toute politique d'appariements $\Phi \in \text{POL}$, $\text{STAB}_{\text{B}}(G, \Phi)$ est inclus dans l'ensemble

$$\text{NCOND}_{\text{B}}(G) \triangleq \left\{\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\mu}_2 \in \overline{\mathcal{M}}\left(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2\right) : \left\{\begin{array}{l} \forall \mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1)\backslash\{\mathcal{V}_1\},\ \tilde{\mu}_1\left(\mathcal{I}_1\right) < \tilde{\mu}_2\left(\mathcal{E}\left(\mathcal{I}_1\right)\right) \\ \forall \mathcal{I}_2 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_2)\backslash\{\mathcal{V}_2\},\ \tilde{\mu}_2\left(\mathcal{I}_2\right) < \tilde{\mu}_1\left(\mathcal{E}\left(\mathcal{I}_2\right)\right) \end{array}\right\}. \tag{3.8}$$

Enfin, il est démontré dans [3] que les ensembles $\text{STAB}_{\text{B}}(G, \Phi)$ et $\text{NCOND}_{\text{B}}(G)$ coïncident pour $\Phi = \text{FCFM}$.

3.3.2 Modèles d'appariements généraux avec abandons

Intéressons-nous à présent aux modèles d'appariements généraux (en temps continu) avec abandons, comme introduit dans [22]. Ces modèles sont définis de la même manière que les modèles d'appariements généraux (en temps continu) classiques, excepté que $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est un graphe (simple) connexe, et que, pour un sous-ensemble fixé de $\mathcal{V}$, noté $\mathcal{V}_1$, les éléments de $\mathcal{V}\backslash\mathcal{V}_1$ ont une durée de vie aléatoire finie dans le système, après lequel ils le quittent immédiatement s'ils n'ont pas déjà été appariés avant. L'ajout de cette caractéristique spécifique est adaptée à diverses applications concrètes pour lesquelles les éléments partent du système lorsqu'ils ont attendu trop longtemps sans avoir été appariés. Par exemple, cet *abandon* peut représenter le décès d'un patient en attente d'une transplantation d'organe, l'expiration d'un organe qui n'a pas été transplanté suffisamment rapidement, le retrait d'une candidature à un emploi, à un logement, etc.

Le Theorem 3.2 de [22] assure que, pour tout graphe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et toute politique d'appariements $\Phi \in \text{POL}$, la *zone de stabilité* de ce modèle est incluse dans l'ensemble

$$\text{NCOND}_{\mathcal{V}_1}^{+}(G) \triangleq \left\{\mu \in \mathcal{M}\left(\mathcal{V}\right) : \forall \mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1),\ \mu\left(\mathcal{I}_1\right) < \mu\left(\mathcal{E}\left(\mathcal{I}_1\right)\right)\right\}, \tag{3.9}$$

et que les deux ensembles précités coïncident dès lors que Φ est une politique de type Max-Weight (MW) - et donc, en particulier, lorsque $\Phi = \text{ML}$.
La condition d'appartenance à l'ensemble $\text{NCOND}^+_{\mathcal{V}_1}(G)$ étant la restriction de la condition (1.8) aux classes de sommets ne pouvant pas abandonner (c'est-à-dire $\mathcal{V}_1$), c'est donc un sur-ensemble de $\text{NCOND}^+(G)$.
Enfin, en utilisant un argument de normalisation, on remarque que les mêmes résultats sont encore valables dans le cas de modèles d'appariements généraux avec abandons (en temps discret), en remplaçant l'ensemble $\text{NCOND}^+_{\mathcal{V}_1}(G)$ par l'ensemble de lois de probabilité

$$\text{NCOND}_{\mathcal{V}_1}(G) \triangleq \left\{\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}) : \forall \mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1),\ \bar{\mu}(\mathcal{I}_1) < \bar{\mu}(\mathcal{E}(\mathcal{I}_1))\right\}. \tag{3.10}$$

3.3.3 Files d'attente basées sur les compétences (ou *skill-based*)

On s'intéresse au modèle défini dans [31], considérant des *tâches* (ou *clients*) et des *serveurs* de différents types. Fixons un graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$, où $\mathcal{V}_1$ représente les classes de tâches et où $\mathcal{V}_2$ représente les classes de serveurs. Pour chaque $i \in \mathcal{V}_1$, les arrivées de tâches de type i se font selon un processus de Poisson d'intensité $\mu(i)$ (indépendant des processus de Poisson par lesquels entrent les tâches des autres types). Les tâches de chaque type requièrent des temps de service i.i.d., de lois exponentielles de paramètre 1. Les règles de compatibilité sont les suivantes : chaque serveur de type $j \in \mathcal{V}_2$ ne peut s'occuper que des tâches dont le type appartient à l'ensemble $\mathcal{E}(j)$ et ce, au taux $\gamma(j) > 0$ (indépendamment, donc, de la classe de la tâche de $\mathcal{E}(j)$ à s'occuper). De manière similaire, les tâches de type $i \in \mathcal{V}_1$ peuvent seulement être réalisées par un serveur dont la classe appartient à l'ensemble $\mathcal{E}(i)$. On notera $\mu = (\mu(1), \ldots, \mu(|\mathcal{V}_1|))$ et $\gamma = (\gamma(1), \ldots, \gamma(|\mathcal{V}_2|))$, et ces deux éléments seront vus comme des mesures de $\mathcal{M}(\mathcal{V}_1)$ et $\mathcal{M}(\mathcal{V}_2)$, respectivement.
Le processus d'appariements est le suivant : des clients entrent dans la file d'attente et sont choisis (par des serveurs compatibles) selon la règle de décision *First Come, First Served* (FCFS). Cependant, lorsque, pour une tâche $i \in \mathcal{V}_1$ fixée, plusieurs serveurs compatibles (c'est-à-dire, appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(i)$) sont inoccupés, le serveur est choisi, au hasard, parmi eux.
Par ailleurs, le Theorem 2 de [31] assure que le modèle ne peut être stable que si la mesure μ appartient à l'ensemble

$$\text{NCOND}^+_{\mathcal{V}_1,\gamma}(G) \triangleq \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}_1) : \forall \mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1),\ \mu(\mathcal{I}_1) < \gamma(\mathcal{E}(\mathcal{I}_1))\}, \tag{3.11}$$

et que cette condition est également suffisante si l'attribution aléatoire des tâches suit une certaine *condition d'affectation* (ou *assignment condition*) donnée - voir la Section 3.6 de [31]. De plus, il est aussi démontré, dans [4], que l'ensemble $\text{NCOND}^+_{\mathcal{V}_1,\gamma}(G)$ coïncide avec la *zone de stabilité* des modèles de files d'attente ayant la même structure mais pilotées, cette fois-ci, par la politique *First Come, First Served - Assign the Longest Idling Server* (FCFS-ALIS), c'est-à-dire que les clients patientant dans la file d'attente sont choisis par des serveurs compatibles selon la règle de service FCFS, mais que, dans le cas où plusieurs serveurs compatibles sont inoccupés à l'arrivée d'un client, celui qui sera affecté est celui qui était inactif depuis le plus longtemps (ALIS). Fait intéressant, il a été démontré dans la littérature que les deux modèles évoqués ci-dessus ont alors la même distribution stationnaire (donnée sous forme produit).
Par construction, remarquons par ailleurs que l'ensemble $\text{NCOND}^+_{\mathcal{V}_1,\gamma}(G)$ peut être vu (lorsque G est biparti) comme le sous-ensemble de $\text{NCOND}^+_{\mathcal{V}_1}(G)$ ne contenant que les mesures dont la restriction à $\mathcal{V}_2$ est γ.

Les files d'attente dites *multi-classes/multi-groupes* (ou *multi-class/multi-pool*, en anglais) présentées dans l'article [14], généralisent ces modèles de files d'attente de la façon suivante :

— Pour tout $j \in \mathcal{V}_2$, il y a $s_j \in \mathbb{N}_*$ serveurs indistinguables de classe j.
— Le temps de service d'un client de classe $i \in \mathcal{V}_1$, lorsqu'il est servi par un serveur de classe $j \in \mathcal{V}_2$, est donné par une loi exponentielle de paramètre $\gamma((i,j)) > 0$, qui peut donc dépendre à la fois de i et de j.

Il est démontré dans [30] que, pour toute mesure $\gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ et tout vecteur $(s_j)_{j\in\mathcal{V}_2} \in (\mathbb{N}_*)^{\mathcal{V}_2}$, la *zone de stabilité* du modèle est incluse dans l'ensemble de mesures

$$\text{NCOND}^{+,\star}_{\mathcal{V}_1,\gamma,s}(G) \triangleq \left\{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}_1) : \exists \pi \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \text{ t.q. } \left\{\begin{array}{l} \forall i \in \mathcal{V}_1,\ \mu(i) = \sum\limits_{j\in\mathcal{V}_2} \gamma((i,j)) s_j \pi((i,j)) \\ \forall j \in \mathcal{V}_2,\ \sum\limits_{i\in\mathcal{V}_1} \pi((i,j)) < 1 \end{array}\right.\right\}, \tag{3.12}$$

pour un ensemble de politiques de service (déterminant les classes de clients que les serveurs disponibles choisissent de servir) et de contrôles des admissions (permettant de décider les classes des serveurs avec lesquels les clients arrivants seront affectés) appelées *politiques* SBR. De plus, il est également prouvé

dans [30] que la zone de stabilité est précisément $\textsc{Ncond}^{+,\star}_{\mathcal{V}_1,\gamma,s}(G)$ dès lors que la politique *Maximum Pressure Policy* (MPP) est utilisée - une telle politique est dite de *débit optimal*.

3.3.4 Vers une caractérisation exacte des zones de stabilité

Dans tous les modèles d'appariements et de files d'attente déjà présentés (excepté pour les files d'attente multi-classes/multi-groupes de la Section 3.3.3), les zones de stabilité sont incluses dans (et parfois coïncident avec) des ensembles de mesures ayant approximativement la même forme, et qui rappellent la condition de Hall (cf. [21]). Ils sont respectivement donnés par (1.9), (1.10), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), et (3.11). Dans tous ces cas, il doit donc être vérifié que, pour tout ensemble indépendant (potentiellement dans un sous-ensemble donné de sommets), la mesure de cet ensemble doit être inférieure à la mesure de l'ensemble de ses sommets voisins. Garantir la stabilité, pour des taux d'arrivées donnés et pour une politique d'appariements fixée, revient à vérifier cette condition pour tous les ensembles indépendants, tâche qui devient de plus en plus difficile à mesure que le nombre de sommets du graphe de compatibilités G grandit. Plus précisément, la Proposition 1 de [24] (respectivement, la Proposition 3.5 de [11]) assure que vérifier qu'une mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ donnée appartienne à l'ensemble $\textsc{Ncond}(G)$, défini par (1.9) (respectivement, qu'un mesure $\tilde{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$ donnée appartienne à l'ensemble $\textsc{Ncond}_{\text{BÉ}}(G)$, défini par (3.7)), peut se faire en $O(|\mathcal{V}|^3)$ opérations. D'où la nécessité de caractériser et, si possible, de fournir une procédure de construction (simple) des mesures appartenant à ces ensembles. Le Théorème 2 à venir montre que si G n'est pas biparti, alors $\textsc{Ncond}(G)$ coïncide avec $\overline{\mathcal{W}}(G)$, et que si G est biparti, alors $\tilde{\mu} \in \textsc{Ncond}_{\text{BÉ}}(G) \Leftrightarrow \mu \in \mathcal{W}(G)$, dès lors que $\mu(\mathcal{V}_1) = \mu(\mathcal{V}_2)$ (cf. (3.42)). En d'autres termes, toute mesure qui pourrait rendre stable le système étudié peut être obtenue simplement en assignant des poids aux arêtes du graphe (généralisé) considéré. Réciproquement, toute mesure construite de cette façon permet de rendre stable certains systèmes (cf. Corollaire 2 et Corollaire 3).

3.4 Résultats

Dans cette Section 3.4, nous caractérisons les zones de stabilité de différents modèles d'appariements (ou de files d'attente), parmi lesquels ceux introduits dans la Section 3.3. Ces caractérisations constitueront les principaux résultats du Chapitre 3. Nous verrons que ces zones coïncident avec des ensembles de mesures à poids, qui correspondent, quant à eux, à des ensembles de mesures invariantes réversibles pour des marches aléatoires pondérées sur les arêtes de graphes généralisés (cf. Proposition 29). Présentons à présent le résultat majeur de ce Chapitre 3,

Théorème 2

Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé connexe tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$.
Alors, l'ensemble des mesures à poids $\mathcal{W}(G)$, défini par (3.3), coïncide avec

- *l'ensemble $\textsc{Ncond}^+(G)$, défini par (1.10), si G n'est pas un graphe biparti ;*
- *l'ensemble*

$$\mathcal{N}^+_{\text{B}}(G) \triangleq \left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathcal{I} \in \mathbb{I}(G) \backslash \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\},\ \mu(\mathcal{I}) < \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I})) \\ \mu(\mathcal{V}_1) = \mu(\mathcal{V}_2) \end{array} \right. \right\},$$

si G est un graphe biparti, et où $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ est la bipartition de $\mathcal{V}$.

Démonstration : Une preuve du Théorème 2 est donnée dans la Section 3.7. ■

Il suit directement du Théorème 2 que, dans le cas où G est un graphe généralisé connexe qui n'est pas biparti (et qui possède au moins deux sommets), l'ensemble de mesures de probabilité $\textsc{Ncond}(G)$, défini par (1.9), coïncide avec l'ensemble $\overline{\mathcal{W}}(G)$, défini par (3.4).

Une des principales conséquences du Théorème 2 est la suivante,

Corollaire 2

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ qui n'est pas biparti (avec $|\mathcal{V}| \geqslant 2$) et toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *μ est invariante réversible pour une marche aléatoire sur $\mathcal{E}$.*

(ii) *μ est une mesure à poids, c'est-à-dire qu'il existe une famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ telle que, pour tout $i \in \mathcal{V}$, $\mu(i) = \mu^\alpha(i)$. On note $\mu \in \mathcal{W}(G)$.*

(iii) *Pour toute politique maximale généralisée $\Phi \in$ POL, la loi de probabilité $\bar{\mu} \triangleq \frac{\mu}{\mu(\mathcal{V})}$ appartient à l'ensemble $\text{STAB}(G, \Phi)$, c'est-à-dire que le modèle $\text{MG}(G, \Phi, \bar{\mu})$ est stable.*

(iv) *Pour toute politique maximale généralisée $\Phi \in$ POL, la mesure μ appartient à l'ensemble $\text{STAB}^+(G, \Phi)$, c'est-à-dire que le modèle $\text{MG}_\text{C}(G, \Phi, \mu)$ est stable.*

Démonstration : Une preuve de ce résultat est fournie dans la Section 3.8. ■

Exemple 5

Considérons le graphe généralisé pondéré $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, représenté par la Figure 3.1.
L'ensemble des ensembles indépendants de G est

$$\mathbb{I}(G) = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}\},$$

et ainsi,

$$\text{NCOND}^+(G) = \left\{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \mu(2) < \frac{\mu(\mathcal{V})}{2},\ \mu(3) < \mu(2) + \mu(4),\ \text{et}\ \mu(4) < \mu(2) + \mu(3)\right\}.$$

On assigne la famille de poids $\alpha = (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}) = (a, b, c, d, e) \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ aux arêtes de G, et la mesure à poids $\mu^\alpha \in \mathcal{W}(G)$ associée est alors donnée par

$$\begin{cases} \mu^\alpha(1) &= a + b\ ; \\ \mu^\alpha(2) &= b + c + d\ ; \\ \mu^\alpha(3) &= c + e\ ; \\ \mu^\alpha(4) &= d + e. \end{cases}$$

Le Théorème 2 assure que toute mesure à poids $\mu^\alpha \in \mathcal{W}(G)$ appartient à l'ensemble $\text{NCOND}^+(G)$. De plus, le Corollaire 2 garantit que, pour toute famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ et toute politique maximale généralisée $\Phi \in$ POL - en particulier, pour FCFM (cf. Théorème 1) ou certaines politiques de type Max-Weight MW (cf. Theorem 4.7 de [7]), les modèles $\text{MG}(G, \Phi, \bar{\mu}^\alpha)$ et $\text{MG}_\text{C}(G, \Phi, \mu^\alpha)$ sont stables. Réciproquement, toute mesure rendant stables ces modèles peut être construite de cette manière.
Par ailleurs, pour toute famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, la mesure μ^α est invariante réversible pour la chaîne de Markov sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dont les transitions sont données par

$$\begin{cases} P^\alpha(1,1) &= \frac{a}{a+b}\ ;\ P^\alpha(1,2) = \frac{b}{a+b}\ ; \\ P^\alpha(2,1) &= \frac{b}{b+c+d}\ ;\ P^\alpha(2,3) = \frac{c}{b+c+d}\ ;\ P^\alpha(2,4) = \frac{d}{b+c+d}\ ; \\ P^\alpha(3,2) &= \frac{c}{c+e}\ ;\ P^\alpha(3,4) = \frac{e}{c+e}\ ; \\ P^\alpha(4,2) &= \frac{d}{d+e}\ ;\ P^\alpha(4,3) = \frac{e}{d+e}. \end{cases}$$

De plus, toute mesure invariante réversible pour une marche aléatoire sur les arêtes $\mathcal{E}$ de G peut être construite de cette façon.

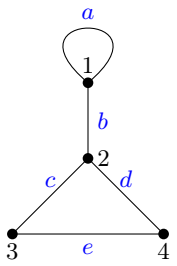

FIGURE 3.1 – Graphe généralisé pondéré G.

Définition 37

Pour tout graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$, à toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$ sont associées les mesures $\tilde{\mu}_1 \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1)$ et $\tilde{\mu}_2 \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_2)$, définies par

$$\tilde{\mu}_1(i) \triangleq \frac{\mu(i)}{\mu(\mathcal{V}_1)},\ i \in \mathcal{V}_1 \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}_2(j) \triangleq \frac{\mu(j)}{\mu(\mathcal{V}_2)},\ j \in \mathcal{V}_2, \tag{3.13}$$

ainsi qu'une mesure de probabilité $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$ admettant $\tilde{\mu}_1$ (respectivement, $\tilde{\mu}_2$) comme première (respectivement, seconde) marginale.

Le résultat suivant s'appuie sur le Théorème 2,

Corollaire 3

Pour tout graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$ et toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$ vérifiant $\mu(\mathcal{V}_1) = \mu(\mathcal{V}_2)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) μ est invariante réversible pour une marche aléatoire sur $\mathcal{E}$.

(ii) μ est une mesure à poids, c'est-à-dire qu'il existe une famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ telle que, pour tout $i \in \mathcal{V}$, $\mu(i) = \mu^{\alpha}(i)$. On note $\mu \in \mathcal{W}(G)$.

(iii) Toute mesure $\tilde{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$ associée à μ (par la Définition 37) appartient à $\text{STAB}_{\text{BÉ}}(G, \text{ML})$, c'est-à-dire que le modèle $\text{MBÉ}(G, \text{ML}, \tilde{\mu})$ est stable.

(iv) Toute mesure $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\mu}_2 \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$ associée à μ (par la Définition 37) appartient à $\text{STAB}_{\text{B}}(G, \text{FCFM})$, c'est-à-dire que le modèle $\text{MB}(G, \text{FCFM}, \tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\mu}_2)$ est stable.

Démonstration : Une preuve de ce résultat est donnée dans la Section 3.9. ■

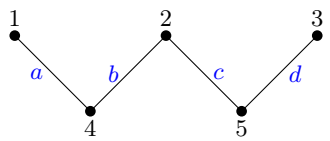

FIGURE 3.2 – Graphe biparti pondéré G_{B}.

Exemple 6

Considérons le graphe biparti pondéré $G_{\text{B}} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, dit « en W », représenté par la Figure 3.2. La bipartition $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ de $\mathcal{V}$ est donnée par $\mathcal{V}_1 = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{V}_2 = \{4, 5\}$. Ainsi,

$$\mathbb{I}(G) \backslash \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 4\}\},$$

et donc,

$$\mathcal{N}_{\text{B}}^{+}(G) = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) \ : \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) = \mu(4) + \mu(5),\ \mu(1) < \mu(4),$$

$$\mu(3) < \mu(5),\ \mu(1) + \mu(2) < \mu(4) + \mu(5),\ \mu(2) + \mu(3) < \mu(4) + \mu(5),$$
$$\mu(4) < \mu(1) + \mu(2),\ \mu(5) < \mu(2) + \mu(3)\}.$$

On assigne la famille de poids $\alpha = (\alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}, \alpha_{3,5}) = (a, b, c, d) \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ aux arêtes de G, et la mesure à poids $\mu^\alpha \in \mathcal{W}(G)$ associée est alors donnée par

$$\begin{cases} \mu^\alpha(1) & = a\ ; \\ \mu^\alpha(2) & = b + c\ ; \\ \mu^\alpha(3) & = d\ ; \\ \mu^\alpha(4) & = a + b\ ; \\ \mu^\alpha(5) & = c + d. \end{cases}$$

Le Théorème 2 assure que toute mesure à poids $\mu^\alpha \in \mathcal{W}(G)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{N}_{\text{B}}^+(G)$. De plus, le Corollaire 3 garantit que, pour toute famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, les modèles $\text{MBÉ}(G, \text{ML}, \tilde{\mu}^\alpha)$ et $\text{MB}(G, \text{FCFM}, \tilde{\mu}_1^\alpha \otimes \tilde{\mu}_2^\alpha)$ sont stables. Réciproquement, toute mesure rendant stables ces modèles peut être construite de cette manière.
Par ailleurs, pour toute famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, la mesure μ^α est invariante réversible pour la chaîne de Markov sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dont les transitions sont données par

$$\begin{cases} P^\alpha(1,4) & = 1\ ; \\ P^\alpha(2,4) & = \frac{b}{b+c}\ ;\ P^\alpha(2,5) = \frac{c}{b+c}\ ; \\ P^\alpha(3,5) & = 1\ ; \\ P^\alpha(4,1) & = \frac{a}{a+b}\ ;\ P^\alpha(4,2) = \frac{b}{a+b}\ ; \\ P^\alpha(5,2) & = \frac{c}{c+d}\ ;\ P^\alpha(5,3) = \frac{d}{c+d}. \end{cases}$$

De plus, toute mesure invariante réversible pour une marche aléatoire sur les arêtes $\mathcal{E}$ de G peut être construite de cette façon.

Le Théorème 2 a un intérêt pratique immédiat pour le contrôle des admissions dans des systèmes régis par un modèle d'appariements général (MG ou MG_{C}) (respectivement, biparti (MB) ou biparti étendu (MBÉ) - en effet, si on le combine avec (3.42), présenté plus loin, alors, si G est un graphe biparti, $\mu \in \mathcal{W}(G) \Leftrightarrow \tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \in \text{NCOND}_{\text{BÉ}}(G) \Leftrightarrow \tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\mu}_2 \in \text{NCOND}_{\text{B}}(G)$, dès lors que $\mu(\mathcal{V}_1) = \mu(\mathcal{V}_2)$). Le Théorème 2 permet donc de décrire l'ensemble exact des taux (ou lois) d'arrivées pour lesquels le système correspondant peut être stabilisable, et fournit un moyen de construction très simple de ceux-ci. En d'autres termes, il permet de calibrer les admissions d'éléments au sein du système. Pour cela, il faut et il suffit de considérer une famille (quelconque) α de poids sur les arêtes du graphe de compatibilités généralisé (respectivement, biparti) connexe G, puis

— dans le cas du modèle général (MG ou MG_{C}), de construire la mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ (respectivement, $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$) en fonction de la famille α, à l'aide de (3.2) (respectivement, (3.1)). Par ailleurs, une représentation explicite - à une constante multiplicative strictement positive près - de la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ vérifiant $\bar{\mu} = \bar{\mu}^\alpha$ (respectivement, de l'unique famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ telle que $\mu = \mu^\alpha$) sera fournie au Chapitre 4 (cf. Corollaire 6), en tant que simple fonction des *proportions temporelles asymptotiques du nombre d'appariements par arête* du modèle d'appariements général associé. Enfin, le Corollaire 2 assure, en particulier, que si la politique d'appariements $\Phi \in$ POL associée au modèle est maximale généralisée (par exemple, FCFM ou ML), alors l'ensemble des mesures à poids, dont la construction (simple) a été évoquée ci-dessus, coïncide exactement avec la zone de stabilité du modèle étudié.

— dans le cas du modèle biparti (étendu) (MB ou MBÉ), de construire la mesure μ en fonction de la famille α, à l'aide de (3.1), et enfin de déduire $\tilde{\mu}$ de μ à l'aide de (3.13), afin d'obtenir (cf. Corollaire 3) un modèle d'appariements biparti étendu stable sous la politique ML, ou un modèle d'appariements biparti stable sous la politique FCFM. Par ailleurs, une représentation explicite - à une constante multiplicative strictement positive près - de la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ vérifiant $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1^\alpha, \tilde{\mu}_2^\alpha)$, où les mesures $\tilde{\mu}_1^\alpha$ et $\tilde{\mu}_2^\alpha$ sont définies par (4.10), sera fournie dans le Chapitre 4 (cf. Corollaire 8), en tant que simple fonction des *proportions temporelles asymptotiques du nombre d'appariements par arête* du modèle d'appariements biparti étendu associé.

Question ouverte : Le Corollaire 2 (respectivement, le Corollaire 3) permet, entre autres, de caractériser la zone de stabilité des modèles MG (respectivement, des modèles MBÉ/MB) associés à une politique maximale généralisée Φ, comme FCFM ou ML par exemple (respectivement, associés à la politique ML/FCFM).

- *Dans le cas des modèles* MG (*respectivement, des modèles* MBÉ/MB)*, qu'en est-il si la politique* Φ *n'est pas maximale généralisée* (*respectivement, qu'en est-il pour d'autres politiques d'appariements*) *? Peut-on trouver une caractérisation et une procédure de construction des mesures appartenant aux zones de stabilité des différents modèles d'appariements associés ?*

Passons à présent à notre second résultat principal,

Théorème 3

Pour tout graphe connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *et toute partition non-triviale* $\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2$ *de* $\mathcal{V}$*, l'ensemble* $\textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1}(G)$*, défini par* (3.9)*, coïncide avec l'ensemble*

$$\mathcal{W}_{\prec,\mathcal{V}_2}(G) \triangleq \left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \exists \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \text{ t.q. } \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \mathcal{V}_1,\ \mu^\alpha(i) = \mu(i) \\ \forall j \in \mathcal{V}_2,\ \mu^\alpha(j) < \mu(j) \end{array} \right\} \right. .$$

Démonstration : Deux preuves différentes de ce résultat seront données dans la Section 3.10.
Une d'elles se basera sur le Théorème 2 prouvé auparavant, alors que l'autre sera auto-contenue et s'occupera du cas spécifique où G est biparti en invoquant la théorie des réseaux de flots (voir [19] pour plus de détails sur cette théorie). ■

Remarquons qu'il suit du Théorème 3 que l'ensemble de mesures de probabilité $\textsc{Ncond}_{\mathcal{V}_1}(G)$, défini par (3.10), coïncide avec l'ensemble

$$\left\{ \bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}) : \exists \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \text{ t.q. } \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \mathcal{V}_1,\ \bar{\mu}^\alpha(i) = \bar{\mu}(i) \\ \forall j \in \mathcal{V}_2,\ \bar{\mu}^\alpha(j) < \bar{\mu}(j) \end{array} \right\} \right. .$$

Ainsi, en se rappelant la discussion faite au cours de la Section 3.3.2, les zones de stabilité de certains modèles d'appariements généraux avec abandons (en temps discret ou continu) sont ainsi entièrement caractérisées, et aisées à construire à l'aide des mesures à poids.

Revenons à présent au cas où $G = (\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$ est un graphe biparti. En réalité, l'ensemble $\textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1,\gamma}(G)$, qui est la zone de stabilité de certains systèmes de files d'attente basées sur les compétences (ou *skill-based*) (cf. Section 3.3.3), défini par (3.11), apparaît comme un cas particulier de $\textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1}(G)$, dès lors que la restriction de la mesure μ au sous-ensemble $\mathcal{V}_2$ est fixée et égale à γ. Le résultat suivant découle alors immédiatement du Théorème 3,

Corollaire 4

Pour tout graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$ *et toute mesure* $\gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{V}_2)$*, l'ensemble* $\textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1,\gamma}(G)$ *coïncide avec*

$$\left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}_1) : \exists \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \text{ t.q. } \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \mathcal{V}_1,\ \mu^\alpha(i) = \mu(i) \\ \forall j \in \mathcal{V}_2,\ \mu^\alpha(j) < \gamma(j) \end{array} \right\} \right.$$

Exemple 7 (*Suite de l'Exemple 6*)

Considérons à nouveau le graphe « en W » représenté par la Figure 3.2, et fixons des constantes $\gamma(4) > 0$ *et* $\gamma(5) > 0$.
Considérons à nouveau les ensembles $\mathcal{V}_1 = \{1, 2, 3\}$ *et* $\mathcal{V}_2 = \{4, 5\}$ *tels que* $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ *forme une bipartition de* $\mathcal{V}$*. Alors,*

$$\begin{aligned} \textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1,\gamma}(G) = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}_1) \ : \mu(1) < \gamma(4),\ \mu(3) < \gamma(5), \\ \mu(1) + \mu(2) < \gamma(4) + \gamma(5),\ \mu(2) + \mu(3) < \mu(4) + \mu(5)\} \end{aligned}$$

Le Corollaire 4 assure alors que l'ensemble ci-dessus peut être entièrement caractérisé comme étant l'ensemble des mesures $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}_1)$ pour lesquelles il existe une famille de poids $\alpha = (\alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}, \alpha_{3,5}) = (a, b, c, d) \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ sur l'ensemble des arêtes de G, vérifiant

$$\begin{cases} \mu(1) = & \mu^\alpha(1) & = a \\ \mu(2) = & \mu^\alpha(2) & = b + c \\ \mu(3) = & \mu^\alpha(3) & = d \\ & \mu^\alpha(4) & = a + b < \gamma(4) \\ & \mu^\alpha(5) & = c + d < \gamma(5). \end{cases}$$

Le résultat suivant permet maintenant de caractériser la zone de stabilité maximale $\textsc{Ncond}^{+,\star}_{\mathcal{V}_1,\gamma,s}(G)$ (voir la Section 3.3.3) en tant qu'ensemble de mesures à poids sur $\mathcal{V}_1$,

Proposition 30

Soit $G = (\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$ un graphe biparti connexe.
Alors, pour toute mesure $\gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ et tout vecteur $s = (s_j)_{j\in\mathcal{V}_2} \in (\mathbb{N}_*)^{\mathcal{V}_2}$, l'ensemble $\textsc{Ncond}^{+,\star}_{\mathcal{V}_1,\gamma,s}(G)$, défini par (3.12), coïncide avec

$$\left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}_1) : \exists \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \text{ t.q. } \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \mathcal{V}_1,\ \mu^\alpha(i) = \mu(i) \\ \forall j \in \mathcal{V}_2,\ \sum\limits_{i\in\mathcal{E}(j)} \frac{\alpha_{i,j}}{\gamma((i,j))} < s_j \end{array} \right. \right\}.$$

Démonstration : Pour l'inclusion $\subset$, il suffit de poser $\alpha_{i,j} = \gamma((i,j))s_j\pi((i,j))$ pour tout $i \in \mathcal{V}_1$ et tout $j \in \mathcal{V}_2$.
L'inclusion $\supset$ se résout quant à elle en posant $\pi((i,j)) = \frac{\alpha_{i,j}}{\gamma((i,j))s_j}\mathbf{1}_{\{i-j\}}$, pour tout $i \in \mathcal{V}_1$ et tout $j \in \mathcal{V}_2$. ■

Dans le cas particulier où les temps de service ne dépendent que des classes de serveurs et non pas des classes des clients qu'ils servent (c'est-à-dire que $\gamma((i,j)) = \gamma(j) \triangleq \tilde{\gamma}((i,j))$, pour tout $(i,j) \in \mathcal{E}$), en combinant le Corollaire 4 avec la Proposition 30, on obtient directement la caractérisation suivante de la zone de stabilité maximale $\textsc{Ncond}^{+,\star}_{\mathcal{V}_1,\tilde{\gamma},s}(G)$,

Proposition 31

Soient $G = (\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$ un graphe biparti connexe, $\gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{V}_2)$ une mesure et $s = (s_j)_{j\in\mathcal{V}_2} \in (\mathbb{N}_*)^{\mathcal{V}_2}$ un vecteur.
Considérons les mesures $\hat{\gamma} \in \mathcal{M}(\mathcal{V}_2)$ et $\tilde{\gamma} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ définies respectivement par

$$\hat{\gamma}(j) \triangleq s_j\gamma(j), \quad j \in \mathcal{V}_2,$$

$$\text{et} \quad \tilde{\gamma}((i,j)) \triangleq \gamma(j), \quad (i,j) \in \mathcal{E}.$$

Alors, les trois ensembles suivants coïncident :

- *la zone de stabilité maximale $\textsc{Ncond}^{+,\star}_{\mathcal{V}_1,\tilde{\gamma},s}(G)$;*
- *l'ensemble $\textsc{Ncond}^{+}_{\mathcal{V}_1,\hat{\gamma}}(G)$;*
- *l'ensemble $\left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}_1) : \exists \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \text{ t.q. } \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \mathcal{V}_1,\ \mu^\alpha(i) = \mu(i) \\ \forall j \in \mathcal{V}_2,\ \mu^\alpha(j) < s_j\gamma(j) \end{array} \right. \right\}$.*

3.5 Preuve de la Proposition 27

Le résultat (2.15) de la Proposition 25 correspondant à l'équivalence $(v) \Leftrightarrow (vi)$, et les assertions $(i) \Leftrightarrow (iii)$, $(ii) \Leftrightarrow (iv)$, et $(ii) \Rightarrow (i)$ étant évidentes, il suffit de prouver l'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (vi)$ et l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ pour conclure la preuve.

3.5.1 Preuve de l'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (vi)$

Démonstration : Considérons un cycle généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ de taille $n \geqslant 2$, et rappelons (cf. (1.10)) que

$$\textsc{Ncond}^+(G) \triangleq \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \forall \mathcal{I} \in \mathbb{I}(G),\ \mu(\mathcal{I}) < \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}))\}.$$

Ainsi, par définition de $\mu_{\deg}$,

$$\mu_{\deg} \in \textsc{Ncond}^+(G) \Leftrightarrow \forall \mathcal{I} \in \mathbb{I}(G),\ \sum_{i \in \mathcal{I}} \deg(i) < \sum_{j \in \mathcal{E}(\mathcal{I})} \deg(j).$$

Fixons un ensemble indépendant $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G)$.
Alors, comme G est un n-cycle, que $\mathcal{I} \subset \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{c}$ (cf. (1.4)), et que $|\mathcal{I}| = |\mathcal{E}(\mathcal{I})| = 1$ pour $n = 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathcal{I}} \deg(i) < \sum_{j \in \mathcal{E}(\mathcal{I})} \deg(j) &\Leftrightarrow \sum_{i \in \mathcal{I}} |\mathcal{E}(i)| < \sum_{j \in \mathcal{E}(\mathcal{I})} |\mathcal{E}(j)| \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \in \mathcal{I}} \left(2 - \mathbf{1}_{\{n=2\}}\right) < \sum_{j \in \mathcal{E}(\mathcal{I})} \left(2 + \mathbf{1}_{\{j \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}\}} - \mathbf{1}_{\{n=2\}}\right) \\
&\Leftrightarrow 2|\mathcal{I}| - |\mathcal{I}|.\mathbf{1}_{\{n=2\}} < 2|\mathcal{E}(\mathcal{I})| + |\mathcal{E}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| - |\mathcal{E}(\mathcal{I})|.\mathbf{1}_{\{n=2\}} \\
&\Leftrightarrow 2|\mathcal{I}| < 2|\mathcal{E}(\mathcal{I})| + |\mathcal{E}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}|.
\end{aligned}$$

Nous sommes donc ramenés à prouver l'équivalence suivante :

$$[\forall \mathcal{I} \in \mathbb{I}(G),\ 2|\mathcal{I}| < 2|\mathcal{E}(\mathcal{I})| + |\mathcal{E}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}|] \Leftrightarrow [n \text{ est impair}] \text{ ou } [\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing]. \tag{3.14}$$

$\Rightarrow$: Par contraposée, supposons $[n$ est pair$]$ et $[\mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \varnothing]$.
Notons alors $n = 2k$, où $k \in \mathbb{N}_*$.
En définissant l'ensemble $\mathcal{I}_0 \triangleq \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2k-2\} = [\![0; n-1]\!] \cap \{\text{pairs}\}$, le fait que $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \varnothing$ assure que

$$\mathcal{I}_0 \in \mathbb{I}(G), \quad |\mathcal{E}(\mathcal{I}_0) \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| = 0, \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(\mathcal{I}_0) = \{1, 3, 5, \ldots, 2k-1\} = [\![0; n-1]\!] \cap \{\text{impairs}\},$$

ce qui, en particulier, donne

$$|\mathcal{I}_0| = |\mathcal{E}(\mathcal{I}_0)| = k.$$

Ceci conclut la preuve de l'implication $\Rightarrow$ de (3.14).

$\Leftarrow$: Supposons $[n$ est impair$]$ ou $[\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing]$.
Fixons un ensemble indépendant $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G) \subset \tilde{\mathbb{I}}(G)$.
Ainsi, en combinant le Lemme 4 avec le fait que $\mathcal{I} \subset \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{c}$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}(\mathcal{I})| &= 2|\mathcal{I}| + |\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| - \mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} + \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} - \mathbf{1}_{\{n \text{ est pair}\}} \mathbf{1}_{\left\{\mathcal{I} \in \bar{\tilde{\mathbb{I}}}(G)\right\}} \\
&= 2|\mathcal{I}| - \mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} + \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} - \mathbf{1}_{\{n \text{ est pair}\}} \mathbf{1}_{\left\{\mathcal{I} \in \bar{\tilde{\mathbb{I}}}(G)\right\}}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
&2|\mathcal{I}| < 2|\mathcal{E}(\mathcal{I})| + |\mathcal{E}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| \\
\Leftrightarrow\ &2|\mathcal{I}| < 2\left(2|\mathcal{I}| - \mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} + \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} - \mathbf{1}_{\{n \text{ est pair}\}} \mathbf{1}_{\left\{\mathcal{I} \in \bar{\tilde{\mathbb{I}}}(G)\right\}}\right) + |\mathcal{E}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| \\
\Leftrightarrow\ &2\mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} + 2.\mathbf{1}_{\{n \text{ est pair}\}} \mathbf{1}_{\left\{\mathcal{I} \in \bar{\tilde{\mathbb{I}}}(G)\right\}} < 2|\mathcal{I}| + 2\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} + |\mathcal{E}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}|.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Il reste donc à prouver l'inéquation (3.15),

— Cas 1 : n est impair.
Par construction, $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} \leqslant |\mathcal{I}|$, et les quantités $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)}$ et $|\mathcal{E}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}|$ étant positives, le seul cas à étudier est donc celui où $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} = |\mathcal{I}|$, dans lequel $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} = 1$.
Ceci prouve alors l'inéquation (3.15).

— Cas 2 : n est pair et $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing$.
Si $\mathcal{I} \notin \bar{\bar{\mathbb{I}}}(G)$, la preuve est identique à celle du Cas 1.
Supposons alors que $\mathcal{I} \in \bar{\bar{\mathbb{I}}}(G)$.
Dans ce cas,
$$\mathcal{N}_{\mathcal{I}}^{(2)} = |\mathcal{I}| \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{(2)} = 1,$$
et il suffit donc de prouver que $|\mathcal{E}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}}| > 0$, c'est-à-dire que $\mathcal{E}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing$.
En notant $n = 2k$, où $k \in \mathbb{N}_*$, deux sous-cas se présentent,
— Cas 2.1 : $\mathcal{I} = [\![0; n-1]\!] \cap \{\text{impairs}\}$.
Comme $\mathcal{I} \subset \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{c}}$ et que $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing$,
$$\mathcal{E}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}} = [\![0; n-1]\!] \cap \{\text{pairs}\} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing.$$
— Cas 2.2 : $\mathcal{I} = [\![0; n-1]\!] \cap \{\text{pairs}\}$.
Comme $\mathcal{I} \subset \mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{c}}$ et que $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing$,
$$\mathcal{E}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}} = [\![0; n-1]\!] \cap \{\text{impairs}\} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing.$$
Dans les deux sous-cas, $\mathcal{E}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{V}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing$, et l'inégalité (3.15) est donc vérifiée.

L'équation (3.15) est donc vérifiée dans tous les cas, ce qui conclut. ■

3.5.2 Preuve de l'implication $(i) \Rightarrow (v)$

Démonstration : Raisonnons par contraposée en considérant un cycle biparti connexe $G = (\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$.
Ainsi,
$$(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \in \mathbb{I}(G)^2, \quad \mathcal{E}(\mathcal{V}_1) = \mathcal{V}_2, \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(\mathcal{V}_2) = \mathcal{V}_1.$$
Par l'absurde, supposons que $\textsc{Ncond}^+(G) \neq \varnothing$, et fixons alors une mesure $\mu \in \textsc{Ncond}^+(G)$.
Ainsi,
$$\mu(\mathcal{V}_1) < \mu(\mathcal{E}(\mathcal{V}_1)) = \mu(\mathcal{V}_2) \quad \text{et} \quad \mu(\mathcal{V}_2) < \mu(\mathcal{E}(\mathcal{V}_2)) = \mu(\mathcal{V}_1),$$
d'où,
$$\mu(\mathcal{V}_1) < \mu(\mathcal{V}_2) < \mu(\mathcal{V}_1).$$
Ceci étant une absurdité, $\textsc{Ncond}^+(G) = \varnothing$, et cela conclut donc la preuve. ■

3.6 Preuve de la Proposition 28

Les équivalences $(i) \Leftrightarrow (iii)$, $(ii) \Leftrightarrow (iv)$, et l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ étant évidentes, et la preuve de l'implication $(i) \Rightarrow (v)$ étant rigoureusement identique à celle faite pour la Proposition 27 (cf. Section 3.5.2), il ne reste plus qu'à démontrer l'implication $(v) \Rightarrow (ii)$ pour conclure la preuve.
Avant de passer à cette démonstration, introduisons quelques éléments préliminaires.

3.6.1 Éléments préliminaires

Définition 38

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et tout sous-ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$, on définit
$$\mathcal{A}(\mathcal{X}) \triangleq \{(i,j) \in \mathcal{E} : \{i,j\} \cap \mathcal{X} \neq \varnothing\},$$
l'ensemble des arêtes de G ayant au moins une extrémité dans $\mathcal{X}$.
Si $i \in \mathcal{X}$, on écrit simplement
$$\mathcal{A}(i) \triangleq \mathcal{A}(\{i\}).$$

Lemme 6

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$, on dispose des trois résultats suivants :

1. *Pour tout $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$, $\mathrm{Card}(\mathcal{A}(\mathcal{X})) \leqslant \mu_{\deg}(\mathcal{X})$, avec égalité si $\mathcal{X} \in \mathbb{I}(G)$.*
2. *Pour tout $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{A}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{E}(\mathcal{X}))$.*
3. *Si $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G)$ est tel que $\mathcal{A}(\mathcal{I}) = \mathcal{A}(\mathcal{E}(\mathcal{I}))$, alors $\mathcal{E}(\mathcal{E}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$.*

Démonstration : Considérons un graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$.

1. Fixons un sous-ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$.
   Pour tout $i \in \mathcal{X}$, $\mathrm{Card}(\mathcal{A}(i)) = \deg(i)$, et donc,
   $$\mathrm{Card}(\mathcal{A}(\mathcal{X})) = \mathrm{Card}\left(\bigcup_{i\in\mathcal{X}} \mathcal{A}(i)\right) \overset{(\star)}{\leqslant} \sum_{i\in\mathcal{X}} \deg(i) = \mu_{\deg}(\mathcal{X}).$$
   De plus, si $\mathcal{X} \in \mathbb{I}(G)$, la réunion $\bigcup_{i\in\mathcal{X}} \mathcal{A}(i)$ est disjointe, et l'inégalité $(\star)$ est donc une égalité.
2. Fixons un sous-ensemble $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$.
   L'inclusion à démontrer est alors immédiate par définition de $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ et de $\mathcal{A}(\mathcal{E}(\mathcal{X}))$.
3. Fixons un ensemble indépendant $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G)$ vérifiant $\mathcal{A}(\mathcal{I}) = \mathcal{A}(\mathcal{E}(\mathcal{I}))$.
   Par connexité de G, l'ensemble $\mathcal{E}(\mathcal{E}(\mathcal{I}))$ est non-vide, ce qui permet de considérer un élément $k \in \mathcal{E}(\mathcal{E}(\mathcal{I}))$.
   Il existe alors un sommet $j \in \mathcal{E}(\mathcal{I})$ tel que $k - j$, et ainsi,
   $$(k, j) \in \mathcal{A}(\mathcal{E}(\mathcal{I})) = \mathcal{A}(\mathcal{I}).$$
   Or, comme $j \in \mathcal{E}(\mathcal{I})$ avec $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G)$,
   $$j \notin \mathcal{I}.$$
   Ainsi, $k \in \mathcal{I}$, et donc,
   $$\mathcal{E}(\mathcal{E}(\mathcal{I})) \subset \mathcal{I}.$$
   L'inclusion réciproque étant évidente par connexité de G, ceci conclut la preuve. ■

3.6.2 Preuve de l'implication $(v) \Rightarrow (ii)$

Démonstration : Raisonnons par contraposée en considérant un graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, avec $|\mathcal{V}| \geqslant 2$, tel que $\mu_{\deg} \notin \textsc{Ncond}^{+}(G)$.
Il existe donc un ensemble indépendant $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G)$ tel que
$$\mu_{\deg}(\mathcal{I}) \geqslant \mu_{\deg}(\mathcal{E}(\mathcal{I})). \tag{3.16}$$
Or, par le point 1. du Lemme 6,
$$\mathrm{Card}(\mathcal{A}(\mathcal{I})) = \mu_{\deg}(\mathcal{I}) \quad \text{et} \quad \mu_{\deg}(\mathcal{E}(\mathcal{I})) \geqslant \mathrm{Card}(\mathcal{A}(\mathcal{E}(\mathcal{I}))). \tag{3.17}$$
Alors, en combinant les assertions (3.16) et (3.17),
$$\mathrm{Card}(\mathcal{A}(\mathcal{I})) \geqslant \mathrm{Card}(\mathcal{A}(\mathcal{E}(\mathcal{I}))).$$
Le point 2. du Lemme 6 assurant que $\mathcal{A}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{E}(\mathcal{I}))$, on en déduit donc que
$$\mathcal{A}(\mathcal{I}) = \mathcal{A}(\mathcal{E}(\mathcal{I})),$$
et le point 3. du Lemme 6 garantit alors que
$$\mathcal{E}(\mathcal{E}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}. \tag{3.18}$$
On en déduit immédiatement que
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left[\mathcal{E}^{2k}(\mathcal{I}) = \mathcal{I} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^{2k+1}(\mathcal{I}) = \mathcal{E}(\mathcal{I})\right], \tag{3.19}$$
où on a défini, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}^k(\mathcal{I}) \triangleq \underbrace{\mathcal{E}(\ldots\mathcal{E}(\mathcal{E}}_{k \text{ fois}}(\mathcal{I}))\ldots)$, avec la convention que $\mathcal{E}^0(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$.
La suite de la preuve consiste à montrer que $(\mathcal{I}, \mathcal{E}(\mathcal{I}))$ forme une bipartition de $\mathcal{V}$:

— Comme $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G)$ et que G est connexe avec $|\mathcal{V}| \geqslant 2$,
$$\mathcal{I} \neq \varnothing, \quad \mathcal{I} \cap \mathcal{E}(\mathcal{I}) = \varnothing, \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(\mathcal{I}) \neq \varnothing.$$

— Pour tout sommet $v \in \mathcal{V}$ fixé, comme G est connexe et que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$, la non-vacuité de $\mathcal{I}$ assure que
$$\exists k \geqslant 1,\ \exists (v_1, \ldots, v_k) \in \mathcal{V}^k,\ \exists i \in \mathcal{I},\ v - v_1 - v_2 - \cdots - v_k - i \in \mathcal{I},$$
c'est-à-dire
$$\exists k \geqslant 1,\ v \in \mathcal{E}^{k+1}(\mathcal{I}).$$
Ainsi, par le résultat (3.19),
$$\mathcal{V} = \mathcal{I} \uplus \mathcal{E}(\mathcal{I}). \tag{3.20}$$

— La décomposition (3.20) combinée avec le résultat (3.18) garantissent alors que
$$(u, v) \in \mathcal{E} \Rightarrow [u \in \mathcal{I} \text{ et } v \in \mathcal{E}(\mathcal{I})] \text{ ou } [u \in \mathcal{E}(\mathcal{I}) \text{ et } v \in \mathcal{I}].$$

En conclusion, $(\mathcal{I}, \mathcal{E}(\mathcal{I}))$ forme une bipartition de $\mathcal{V}$, et cela conclut donc la preuve. ■

3.7 Preuve du Théorème 2

3.7.1 Cas 1 : G n'est pas un graphe biparti

3.7.1.1 Preuve de l'inclusion $\mathcal{W}(G) \subset \textbf{NCOND}^+(G)$

Cette implication a déjà été démontrée dans le Lemma 11 de l'article [15], mais uniquement pour des graphes classiques et connexes. Nous proposons ici une extension de cette preuve au cas de graphes généralisés connexes,

Démonstration : Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé connexe qui n'est pas biparti (avec $|\mathcal{V}| \geqslant 2$).
Rappelons (cf. Définition 38) que, pour tout sous-ensemble de sommets $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ désigne l'ensemble des arêtes de G ayant au moins une extrémité dans $\mathcal{X}$.
Fixons une famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, ainsi qu'un ensemble indépendant $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G)$.
Par l'absurde, supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{I}) = \mathcal{A}(\mathcal{E}(\mathcal{I}))$.
Dans ce cas, l'item 3. du Lemme 6 assure que $\mathcal{E}(\mathcal{E}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$, qui correspond à (3.18).
En reprenant la fin de la preuve de l'implication $(v) \Rightarrow (ii)$ de la Proposition 28 (cf. Section 3.6.2), on trouve alors que $(\mathcal{I}, \mathcal{E}(\mathcal{I}))$ forme une bipartition de $\mathcal{V}$, ce qui est absurde par hypothèse.
Ainsi, $\mathcal{A}(\mathcal{I}) \neq \mathcal{A}(\mathcal{E}(\mathcal{I}))$, et l'item 2. du Lemme 6 assurant l'inclusion $\mathcal{A}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{E}(\mathcal{I}))$, on en déduit :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{I}} \subsetneq \mathcal{A}_{\mathcal{E}(\mathcal{I})},$$

ce qui permet d'écrire que

$$\mu^{\alpha}(\mathcal{I}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{e \in \mathcal{A}_i} \alpha_e \overset{(\star)}{=} \sum_{e \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}} \alpha_e < \sum_{e \in \mathcal{A}_{\mathcal{E}(\mathcal{I})}} \alpha_e \leqslant \sum_{i \in \mathcal{E}(\mathcal{I})} \sum_{e \in \mathcal{A}_i} \alpha_e = \mu^{\alpha}(\mathcal{E}(\mathcal{I})),$$

où l'égalité $\overset{(\star)}{=}$ provient du fait que $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G)$.
Ceci conclut la preuve. ■

Nous portons l'attention du lecteur sur l'existence d'une démonstration alternative, proposée ci-dessous, utilisant la notion de marche aléatoire pondérée (définie par (3.6)),

Démonstration alternative : Soient $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé connexe qui n'est pas biparti (avec $|\mathcal{V}| \geqslant 2$), ainsi qu'une famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$.
Fixons un ensemble indépendant $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G)$.
La Proposition 29 assurant en particulier que μ^{α} est une mesure invariante pour la chaîne de Markov associée à la matrice stochastique P^{α}, définie par (3.6), on a :

$$\begin{aligned}
\mu^{\alpha}(\mathcal{E}(\mathcal{I})) &= \sum_{j \in \mathcal{E}(\mathcal{I})} \sum_{i \in \mathcal{V}} \mu^{\alpha}(i) P^{\alpha}(i,j) \\
&= \sum_{j \in \mathcal{E}(\mathcal{I})} \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \mu^{\alpha}(i) P^{\alpha}(i,j) + \sum_{i \in \mathcal{I}^c} \mu^{\alpha}(i) P^{\alpha}(i,j) \right) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu^{\alpha}(i) P^{\alpha}(i, \mathcal{E}(\mathcal{I})) + \sum_{i \in \mathcal{I}^c} \mu^{\alpha}(i) P^{\alpha}(i, \mathcal{E}(\mathcal{I})).
\end{aligned}$$

D'où, comme pour tout $i \in \mathcal{I}$, $P^{\alpha}(i, \mathcal{E}(\mathcal{I})) = 1$, il s'ensuit que

$$\mu^{\alpha}(\mathcal{E}(\mathcal{I})) = \mu^{\alpha}(\mathcal{I}) + \sum_{i \in \mathcal{I}^c} \mu^{\alpha}(i) P^{\alpha}(i, \mathcal{E}(\mathcal{I})).$$

Puis, exactement de la même manière que dans la preuve proposée ci-avant, on montre que

$$\mathcal{A}_{\mathcal{I}} \subsetneq \mathcal{A}_{\mathcal{E}(\mathcal{I})},$$

ce qui assure l'existence d'une arête reliant un élément de $\mathcal{I}^c$ à un élément de $\mathcal{E}(\mathcal{I})$.
Ainsi, $\sum_{i \in \mathcal{I}^c} \mu^{\alpha}(i) P^{\alpha}(i, \mathcal{E}(\mathcal{I})) > 0$, et donc,

$$\mu^{\alpha}(\mathcal{E}(\mathcal{I})) > \mu^{\alpha}(\mathcal{I}),$$

ce qui conclut la preuve. ■

3.7.1.2 Preuve de l'inclusion $\textsc{Ncond}^+(G) \subset \mathcal{W}(G)$

Remarquons que

— la Proposition 28 trivialise ce résultat dans le cas où G est un graphe biparti, l'ensemble $\textsc{Ncond}^+(G)$ étant alors vide.

— le Corollaire 6, qui sera proposé ultérieurement, dans la Section 4.1.6 du Chapitre 4, et qui se base sur une étude structurelle des appariements au sein d'un système régi par le modèle d'appariements général (MG), fournit une démonstration alternative.
En effet, si $\mu \in \textsc{Ncond}^+(G)$, alors l'item 1. du Théorème 1 assure que $\bar{\mu} \in \textsc{Ncond}(G) = \textsc{stab}(G, \textsc{fcfm})$, et le Corollaire 6 assurant (en particulier) que $\textsc{stab}(G, \textsc{fcfm}) \subset \overline{\mathcal{W}}(G)$, l'inclusion $\textsc{Ncond}^+(G) \subset \mathcal{W}(G)$ s'en déduit directement.

Démonstration : Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé connexe qui n'est pas biparti (avec $|\mathcal{V}| \geqslant 2$).
Dans cette preuve,

— on note n le nombre de sommets de G, c'est-à-dire $|\mathcal{V}| = n$.

— on identifie toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$ au vecteur de ses coordonnées $\begin{pmatrix} \mu(1) \\ \vdots \\ \mu(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

— on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ d'une de ses normes (équivalentes), notée $\|\cdot\|$.

Donnons tout d'abord les grandes lignes de la démonstration,

Résumé de la preuve.
Le lemme de Farkas matriciel permet tout d'abord de montrer l'inclusion

$$\textsc{Ncond}^+(G) \subset \left\{\mu^{\overline{\alpha}} : \overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})\right\}. \tag{3.21}$$

On définit ensuite, pour toute arête $(i,j) \in \mathcal{E}$, l'application $\mathbf{1}^{\mathcal{V}}_{\{i,j\}} \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcccl} \mathbf{1}^{\mathcal{V}}_{\{i,j\}} & : & \mathcal{V} & \to & \{0,1\} \\ & & k & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } k \in \{i,j\}\,; \\ 0 & \text{sinon,} \end{array}\right. \end{array}$$

ce qui amène à montrer que les ensembles $\left\{\mu^{\overline{\alpha}} : \overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})\right\}$ et $\mathfrak{P} \triangleq \left\{\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \overline{\alpha}_{i,j} \mathbf{1}^{\mathcal{V}}_{\{i,j\}} : \overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})\right\}$ coïncident, de même que les ensembles $\{\mu^{\alpha} : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\}$ et $\mathfrak{Q} \triangleq \left\{\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \alpha_{i,j} \mathbf{1}^{\mathcal{V}}_{\{i,j\}} : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\right\}$.
Ainsi, en prenant l'intérieur des deux ensembles de (3.21), le fait que $\mathfrak{Q}$ n'est autre que l'intérieur de $\mathfrak{P}$ et que $\textsc{Ncond}^+(G)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ assure que

$$\textsc{Ncond}^+(G) \subset \{\mu^{\alpha} : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\} = \mathcal{W}(G),$$

ce qui conclut la preuve.

Passons maintenant à la preuve détaillée, découpée en plusieurs étapes :

Preuve détaillée.

— <u>Étape 1</u> : <u>Montrons que $\textsc{Ncond}^+(G) \subset \left\{\mu^{\overline{\alpha}} : \overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})\right\}$</u> :
Considérons la matrice A, indexée par $\mathcal{V} \times \mathcal{E}$, telle que pour tout couple $(v,e) \in \mathcal{V} \times \mathcal{E}$,

$$\left\{\begin{array}{ll} A(v,e) = 1 & \text{si } e \in \mathcal{A}(v), \text{ c'est-à-dire si le sommet } v \text{ est une extrémité de l'arête } e\,; \\ A(v,e) = 0 & \text{sinon.} \end{array}\right.$$

Raisonnons par contraposée en considérant une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$ telle que

$$\mu \notin \left\{\mu^{\overline{\alpha}} : \overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})\right\}, \tag{3.22}$$

et définissons

- le vecteur $b_\mu \triangleq (\mu(i))_{i\in\mathcal{V}}$;
- pour toute famille $\overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})$ fixée, le vecteur $x_{\overline{\alpha}} \triangleq (\overline{\alpha}_e)_{e\in\mathcal{E}}$.

Ainsi, pour toute famille $\overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})$ fixée,

$$\mu = \mu^{\overline{\alpha}} \Leftrightarrow Ax_{\overline{\alpha}} = b_\mu,$$

et l'hypothèse (3.22) assure alors que le système $\begin{cases} Ax = b_\mu \\ x \geqslant 0 \end{cases}$, d'inconnue un vecteur colonne x indexé par $\mathcal{E}$, ne possède pas de solution.

Remarquons que la notation $x \geqslant 0$ signifie que $x(i) \geqslant 0$, pour tout $i \in [\![1; |\mathcal{E}|]\!]$.

Faisons maintenant intervenir le résultat général d'analyse suivant, le *lemme de Farkas matriciel* (se référer à [18] pour plus de détails),

Théorème 4 (*Lemme de Farkas matriciel*)

Soient A une matrice réelle de taille $n \times k$ et b un vecteur colonne de taille n.
Alors, un (et un seul) des systèmes linéaires suivants possède (au moins) une solution :

- *le système* $\begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$, *d'inconnue un vecteur colonne x de taille k ;*
- *le système* $\begin{cases} {}^tAy \geqslant 0 \\ {}^tby < 0 \end{cases}$, *d'inconnue un vecteur colonne y de taille n.*

Il s'ensuit donc immédiatement que le système $\begin{cases} {}^tAy \geqslant 0 \\ {}^tb_\mu y < 0 \end{cases}$ possède (au moins) une solution, ce qui assure la non-vacuité de l'ensemble

$$\mathfrak{E}_\mu \triangleq \left\{ y \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}|} : {}^tAy \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i \in \mathcal{V}} \mu(i)y(i) < 0 \right\}.$$

Par ailleurs, à la ligne correspondante à l'arête e dans la matrice ${}^tA$, indexée par $\mathcal{E} \times \mathcal{V}$,

- si e n'est pas une boucle, il y a exactement deux occurrences de la valeur 1, aux positions qui correspondent aux deux extrémités de e ;
- si e est une boucle, il y a exactement une occurrence de la valeur 1, à la position qui correspond au sommet possédant la boucle e.

On en déduit alors que l'équation ${}^tAy \geqslant 0$ équivaut à :

$$\begin{cases} y(i) + y(j) \geqslant 0, \text{ pour toute arête } e = (i,j) \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^c \text{ qui n'est pas une boucle ;} \\ y(i) \geqslant 0, \text{ pour toute boucle } e = (i,i) \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}. \end{cases} \tag{3.23}$$

De par sa non-vacuité, choisissons un élément de $\mathfrak{E}_\mu$ dont la valeur absolue prend le minimum de valeurs différentes, et notons-le y^*.
Formellement, si pour tout vecteur $v = {}^t(v(1), \ldots, v(n))$, on note $|v| = {}^t(|v(1)|, \ldots, |v(n)|)$ et $\mathfrak{I}(v) \triangleq \{v(1), \ldots, v(n)\}$, alors

$$y^* \in \operatorname*{argmin}_{y \in \mathfrak{E}_\mu} (\mathrm{Card}(\mathfrak{I}(|y|))), \tag{3.24}$$

et discutons maintenant les cas selon le cardinal de l'ensemble $\mathfrak{I}(|y^*|)$,

— <u>Cas 1</u> : $\mathrm{Card}(\mathfrak{I}(|y^*|)) = 1$.
En notant $\mathfrak{I}(|y^*|) = \{a\}$, alors $\mathfrak{I}(y^*) \subset \{a, -a\}$, et comme $y^* \neq 0_{|\mathcal{V}|}$ (où $0_{|\mathcal{V}|}$ est le vecteur nul de taille $|\mathcal{V}|$), on a : $a > 0$.
Notons maintenant $\mathcal{V}_+ \triangleq \{i \in \mathcal{V} : y^*(i) = a\}$ et $\mathcal{V}_- \triangleq \{i \in \mathcal{V} : y^*(i) = -a\}$.
En tant qu'élément de $\mathfrak{E}_\mu$, les contraintes que vérifie y^* sur les arêtes (cf. (3.23)) assurent que

$$\mathcal{E}(\mathcal{V}_-) \subset \mathcal{V}_+, \tag{3.25}$$

et, comme $\sum_{i \in \mathcal{V}} \mu(i)y^*(i) < 0$,

$$\mu(\mathcal{V}_+) < \mu(\mathcal{V}_-). \tag{3.26}$$

D'où, en combinant (3.25) et (3.26),

$$\mu(\mathcal{E}(\mathcal{V}_-)) < \mu(\mathcal{V}_-),$$

et, comme (3.23) garantit que $\mathcal{V}_- \in \mathbb{I}(G)$, il suit que

$$\mu \notin \textsc{Ncond}^+(G).$$

— <u>Cas 2</u> : $\mathrm{Card}(\mathfrak{I}(|y^*|)) \geqslant 2$.
Dans ce cas, notons

- ▷ $p > 0$ la plus grande valeur de $\mathfrak{I}(|y^*|)$;
- ▷ $q \geqslant 0$ la deuxième plus grande valeur de $\mathfrak{I}(|y^*|)$.

Considérons les ensembles $\mathcal{V}_+^p \triangleq \{i \in \mathcal{V} : y^*(i) = p\}$ et $\mathcal{V}_-^p \triangleq \{i \in \mathcal{V} : y^*(i) = -p\}$.
À nouveau, vu les contraintes que vérifie $y^* \in \mathfrak{E}_\mu$ sur les arêtes (cf. (3.23)), et comme p est la plus grande valeur de $\mathfrak{I}(|y^*|)$,

$$\mathcal{E}\left(\mathcal{V}_-^p\right) \subset \mathcal{V}_+^p, \tag{3.27}$$

d'où,

$$\mu\left(\mathcal{E}\left(\mathcal{V}_-^p\right)\right) \leqslant \mu\left(\mathcal{V}_+^p\right). \tag{3.28}$$

Par l'absurde, supposons maintenant que $\mu(\mathcal{V}_+^p) > \mu(\mathcal{V}_-^p)$, et définissons alors le vecteur $y_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\begin{cases} y_1(i) = q & \text{si } i \in \mathcal{V}_+^p \ ; \\ y_1(i) = -q & \text{si } i \in \mathcal{V}_-^p \ ; \\ y_1(i) = y^*(i) & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrons tout d'abord que y_1 satisfait encore aux conditions (3.23) de contraintes sur les arêtes :

- Fixons une arête $e = (i,j) \in \mathcal{E}_\mathcal{S}^c$ qui n'est pas une boucle, et présentons les différents cas possibles (limités par la condition (3.27)) dans le tableau suivant :

$i \in \mathcal{V}_+^p$	$j \in \mathcal{V}_+^p$	$y_1(i) + y_1(j) = 2q \geqslant 0$
$i \in \mathcal{V}_+^p$	$j \in \mathcal{V}_-^p$	$y_1(i) + y_1(j) = q - q = 0$
$i \in \mathcal{V}_+^p$	$j \notin \{\mathcal{V}_+^p, \mathcal{V}_-^p\}$	$y_1(i) + y_1(j) = q + y^*(j) \geqslant 0$
$i \notin \{\mathcal{V}_+^p, \mathcal{V}_-^p\}$	$j \notin \{\mathcal{V}_+^p, \mathcal{V}_-^p\}$	$y_1(i) + y_1(j) = y^*(i) + y^*(j) \geqslant 0$, car $y^* \in \mathfrak{E}_\mu$

  Ainsi, pour toute arête $e = (i,j) \in \mathcal{E}_\mathcal{S}^c$ qui n'est pas une boucle,

$$y_1(i) + y_1(j) \geqslant 0.$$

- Fixons une boucle $e = (i,i) \in \mathcal{E}_\mathcal{S}$, et présentons les différents cas possibles (limités par la condition (3.27)) dans le tableau suivant :

$i \in \mathcal{V}_+^p$	$y_1(i) = q \geqslant 0$
$i \notin \{\mathcal{V}_+^p, \mathcal{V}_-^p\}$	$y_1(i) = y^*(i) \geqslant 0$, car $y^* \in \mathfrak{E}_\mu$

  Ainsi, pour toute boucle $e = (i,i) \in \mathcal{E}_\mathcal{S}$,

$$y_1(i) \geqslant 0,$$

  et ceci conclut le fait que y_1 satisfait encore aux contraintes (3.23).

De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathcal{V}} \mu(i)y_1(i) &= \sum_{i\in\mathcal{V}} \mu(i)y^*(i) - \sum_{i\in\mathcal{V}} \mu(i)(y^*(i) - y_1(i)) \\
&= \sum_{i\in\mathcal{V}} \mu(i)y^*(i) - \left(\sum_{i\in\mathcal{V}_+^p} \mu(i)(y^*(i) - y_1(i)) + \sum_{i\in\mathcal{V}_-^p} \mu(i)(y^*(i) - y_1(i))\right) \\
&= \underbrace{\sum_{i\in\mathcal{V}} \mu(i)y^*(i)}_{<0,\ \text{car } y^*\in\mathfrak{E}_\mu} - \underbrace{(p-q)\left(\mu\left(\mathcal{V}_+^p\right) - \mu\left(\mathcal{V}_-^p\right)\right)}_{>0,\ \text{par hypothèse}} < 0,
\end{aligned}$$

ce qui garantit finalement que

$$y_1 \in \mathfrak{E}_\mu.$$

Cependant, par définition, $\mathfrak{I}(|y_1|) = \mathfrak{I}(|y^*|)\backslash\{p\}$, et ceci implique donc que

$$\mathrm{Card}\left(\mathfrak{I}(|y_1|)\right) < \mathrm{Card}\left(\mathfrak{I}(|y^*|)\right),$$

ce qui est absurde par construction de y^* (cf. (3.24)).
On en déduit donc que

$$\mu(\mathcal{V}_+^p) \leqslant \mu(\mathcal{V}_-^p),$$

et l'inégalité (3.28) assure alors que

$$\mu(\mathcal{E}(\mathcal{V}_-^p)) \leqslant \mu(\mathcal{V}_-^p).$$

Enfin, les contraintes (3.23) garantissent que $\mathcal{V}_-^p \in \mathbb{I}(G)$, et il suit donc que

$$\mu \notin \textsc{Ncond}^+(G).$$

Finalement, dans les deux cas, $\mu \notin \textsc{Ncond}^+(G)$, et ceci conclut donc l'Étape 1.

— Étape 2 : Montrons que $\textsc{Ncond}^+(G)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$:
Tout d'abord, l'identification de $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ à $\mathbb{R}^n$ assure que $\textsc{Ncond}^+(G)$ peut être vu comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.
De plus,

$$\begin{aligned}\mu \in \textsc{Ncond}^+(G) &\Leftrightarrow \forall \mathcal{I} \in \mathbb{I}(G),\ \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I})) - \mu(\mathcal{I}) > 0\\ &\Leftrightarrow \mu \in \bigcap_{\mathcal{I}\in\mathbb{I}(G)} f_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathbb{R}_*^+),\\ \text{où } \forall \mathcal{I} \in \mathbb{I}(G),\ & \begin{array}{rcccc} f_{\mathcal{I}} & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}\\ & & \mu & \mapsto & \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I})) - \mu(\mathcal{I}). \end{array}\end{aligned}$$

Or, pour tout $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G)$, $f_{\mathcal{I}}$ étant une forme linéaire sur un espace vectoriel de dimension $n < +\infty$, elle est continue, et il s'ensuit donc que $\textsc{Ncond}^+(G) = \bigcap_{\mathcal{I}\in\mathbb{I}(G)} f_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathbb{R}_*^+)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ en tant qu'intersection finie (car G possède un nombre fini de sommets) d'ouverts (images réciproques d'ouverts par des applications continues) de $\mathbb{R}^n$.

Maintenant, pour toute arête $(i,j) \in \mathcal{E}$, on définit l'application $\mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}} \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcccc} \mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}} & : & \mathcal{V} & \to & \{0,1\}\\ & & k & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } k \in \{i,j\}\ ;\\ 0 & \text{sinon.}\end{array}\right. \end{array}$$

Ceci nous permet de définir les deux sous-ensembles de $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ suivants :

$$\mathfrak{P} \triangleq \left\{ \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \overline{\alpha}_{i,j} \mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}} : \overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E}) \right\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Q} \triangleq \left\{ \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \alpha_{i,j} \mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}} : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \right\}.$$

— Étape 3 : Montrons que $\left\{\mu^{\overline{\alpha}} : \overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})\right\} = \mathfrak{P}$ et $\{\mu^{\alpha} : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\} = \mathfrak{Q}$:
Considérons une famille $\overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})$ et fixons un élément $k \in \mathcal{V}$.
Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \overline{\alpha}_{i,j} \mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}}(k) = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathcal{E}\\ i\neq j}} \overline{\alpha}_{i,j} \mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}}(k) + \sum_{(i,i)\in\mathcal{E}} \overline{\alpha}_{i,i} \mathbf{1}_{\{i,i\}}^{\mathcal{V}}(k) &= \sum_{\substack{j\in\mathcal{E}(k)\\ j\neq k}} \overline{\alpha}_{k,j} + \overline{\alpha}_{k,k} \mathbf{1}_{\{k\in\mathcal{V}_{\mathcal{S}}\}}\\ &= \sum_{j\in\mathcal{E}(k)} \overline{\alpha}_{k,j} = \mu^{\overline{\alpha}}(k).\end{aligned}$$

Exactement de la même manière, on montre que, pour toute famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ et tout élément $k \in \mathcal{V}$, $\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \alpha_{i,j} \mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}}(k) = \mu^{\alpha}(k)$.

Ainsi,

$$\left\{\mu^{\overline{\alpha}} : \overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})\right\} = \mathfrak{P} \quad \text{et} \quad \{\mu^{\alpha} : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\} = \mathfrak{Q}.$$

— Étape 4 : Montrons que l'intérieur de $\mathfrak{P}$ est $\mathfrak{Q}$, c'est-à-dire $\operatorname{int}(\mathfrak{P}) \triangleq \mathring{\mathfrak{P}} = \mathfrak{Q}$:

— Étape 4.1 : Montrons que $\mathring{\mathfrak{P}} \subset \mathfrak{Q}$:
Considérons un élément $x \in \mathring{\mathfrak{P}}$.
On peut donc trouver un réel $r > 0$ tel que

$$\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(x,r) \subset \mathfrak{P}, \tag{3.29}$$

où $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(x,r) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$ est la boule ouverte centrée en x et de rayon r.

Considérons maintenant une famille de réels $(\varepsilon_{i,j})_{(i,j)\in\mathcal{E}}$ vérifiant

$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ 0 < \varepsilon_{i,j} < \frac{r}{\left\|x - \mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}}\right\|}, \tag{3.30}$$

et construisons une famille de vecteurs $(y_{i,j})_{(i,j)\in\mathcal{E}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{V})$ telle que

$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ y_{i,j} \triangleq (1 + \varepsilon_{i,j})x - \varepsilon_{i,j} \mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}}.$$

Les assertions (3.29) et (3.30) assurent alors que

$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ y_{i,j} \in \mathfrak{P},$$

ce qui permet d'écrire que

$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ y_{i,j} = \sum_{(k,\ell)\in\mathcal{E}} \overline{\alpha}_{k,\ell}^{(i,j)} \mathbf{1}_{\{k,\ell\}}^{\mathcal{V}},\ \text{où } \overline{\alpha}^{(i,j)} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E}).$$

Maintenant, en écrivant

$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ x = \frac{y_{i,j} + \varepsilon_{i,j}\mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}}}{1+\varepsilon_{i,j}}$$

et en faisant la moyenne arithmétique de ces quantités, on a :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{|\mathcal{E}|} \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \left(\frac{y_{i,j} + \varepsilon_{i,j}\mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}}}{1+\varepsilon_{i,j}} \right) \\
&= \frac{1}{|\mathcal{E}|} \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \left(\frac{\left(\sum_{(k,\ell)\in\mathcal{E}} \overline{\alpha}_{k,\ell}^{(i,j)} \mathbf{1}_{\{k,\ell\}}^{\mathcal{V}} \right) + \varepsilon_{i,j}\mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}}}{1+\varepsilon_{i,j}} \right) \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \frac{1}{|\mathcal{E}|(1+\varepsilon_{i,j})} \left[\varepsilon_{i,j}\mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}} + \sum_{(k,\ell)\in\mathcal{E}} \overline{\alpha}_{k,\ell}^{(i,j)} \mathbf{1}_{\{k,\ell\}}^{\mathcal{V}} \right] \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \frac{\varepsilon_{i,j}}{|\mathcal{E}|(1+\varepsilon_{i,j})} \mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}} + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \sum_{(k,\ell)\in\mathcal{E}} \frac{\overline{\alpha}_{k,\ell}^{(i,j)}}{|\mathcal{E}|(1+\varepsilon_{i,j})} \mathbf{1}_{\{k,\ell\}}^{\mathcal{V}} \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \frac{\varepsilon_{i,j}}{|\mathcal{E}|(1+\varepsilon_{i,j})} \mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}} + \sum_{(k,\ell)\in\mathcal{E}} \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \frac{\overline{\alpha}_{k,\ell}^{(i,j)}}{|\mathcal{E}|(1+\varepsilon_{i,j})} \mathbf{1}_{\{k,\ell\}}^{\mathcal{V}} \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \frac{\varepsilon_{i,j}}{|\mathcal{E}|(1+\varepsilon_{i,j})} \mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}} + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \left(\sum_{(k,\ell)\in\mathcal{E}} \frac{\overline{\alpha}_{i,j}^{(k,\ell)}}{|\mathcal{E}|(1+\varepsilon_{k,\ell})} \right) \mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}} \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \left[\underbrace{\frac{\varepsilon_{i,j}}{|\mathcal{E}|(1+\varepsilon_{i,j})} + \sum_{(k,\ell)\in\mathcal{E}} \frac{\overline{\alpha}_{i,j}^{(k,\ell)}}{|\mathcal{E}|(1+\varepsilon_{k,\ell})}}_{>0} \right] \mathbf{1}_{\{i,j\}}^{\mathcal{V}},
\end{aligned}$$

ce qui assure en particulier que $x \in \mathfrak{Q}$, et ainsi,

$$\mathring{\mathfrak{P}} \subset \mathfrak{Q}. \tag{3.31}$$

— Étape 4.2 : Concluons l'Étape 4 :
Par construction, $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$, et l'inclusion (3.31) assure alors que

$$\mathring{\mathfrak{P}} \subset \mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}. \tag{3.32}$$

Ainsi, en considérant l'intérieur des ensembles de (3.32), le fait que $\mathfrak{Q}$ soit un ouvert de $\mathbb{R}^n$ assure que

$$\mathring{\mathfrak{P}} = \mathring{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{Q},$$

ce qui conclut l'Étape 4.

Résumons maintenant les résultats obtenus lors des quatre étapes précédentes :

1. $\textsc{Ncond}^+(G) \subset \left\{\mu^{\overline{\alpha}} : \overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})\right\}$;
2. $\textsc{Ncond}^+(G)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$;
3. $\left\{\mu^{\overline{\alpha}} : \overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})\right\} = \mathfrak{P}$ et $\{\mu^{\alpha} : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\} = \mathfrak{Q}$;
4. $\operatorname{int}(\mathfrak{P}) \triangleq \mathring{\mathfrak{P}} = \mathfrak{Q}$.

$$\begin{aligned}
\textsc{Ncond}^+(G) = \operatorname{int}\left(\textsc{Ncond}^+(G)\right) &\subset \operatorname{int}\left(\left\{\mu^{\overline{\alpha}} : \overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})\right\}\right) \text{ (par 1. et 2.)} \\
&= \mathring{\mathfrak{P}} = \mathfrak{Q} = \{\mu^{\alpha} : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\} = \mathcal{W}(G) \text{ (par 3. et 4.)},
\end{aligned}$$

et ceci conclut la preuve. ■

3.7.2 Cas 2 : G est un graphe biparti

3.7.2.1 Un lemme préliminaire

Énonçons à présent un résultat préliminaire,

Lemme 7

Pour tout graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$,

$$\mathcal{N}_{\text{B}}^{+}(G) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1)\backslash\{\mathcal{V}_1\},\ \mu(\mathcal{I}_1) < \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}_1)) \\ \forall \mathcal{I}_2 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_2)\backslash\{\mathcal{V}_2\},\ \mu(\mathcal{I}_2) < \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}_2)) \\ \mu(\mathcal{V}_1) = \mu(\mathcal{V}_2) \end{array} \right. \right\}.$$

Démonstration : Soit $G = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$ un graphe biparti connexe.
L'inclusion $\subset$ étant triviale, concentrons-nous sur l'inclusion réciproque.
Pour ce faire, considérons une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$ appartenant à l'ensemble de droite et fixons un ensemble indépendant $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(G)\backslash\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$.
Par connexité de G, remarquons tout d'abord que $\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_1 \neq \mathcal{V}_1$ et $\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_2 \neq \mathcal{V}_2$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{I}) = \mu(\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_1) + \mu(\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_2) &< \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_1)) + \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I} \cap \mathcal{V}_2)) \\ &= \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{V}_2) + \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{V}_1) = \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I})), \end{aligned}$$

et ceci conclut la preuve. ■

3.7.2.2 Preuve de l'inclusion $\mathcal{W}(G) \subset \mathcal{N}_{\text{B}}^{+}(G)$

Démonstration : Soit $G = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$ un graphe biparti connexe.
Fixons une famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, ainsi qu'un ensemble indépendant $\mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1)\backslash\{\mathcal{V}_1\}$.
Par construction, $(\mathcal{I}_1, \mathcal{E}(\mathcal{I}_1))$ ne forme pas une bipartition de $\mathcal{V}$, et le même raisonnement que celui fait dans la première preuve de la Section 3.7.1.1 assure donc que

$$\mu^{\alpha}(\mathcal{I}_1) < \mu^{\alpha}(\mathcal{E}(\mathcal{I}_1)).$$

Symétriquement, pour tout ensemble indépendant $\mathcal{I}_2 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_2)\backslash\{\mathcal{V}_2\}$,

$$\mu^{\alpha}(\mathcal{I}_2) < \mu^{\alpha}(\mathcal{E}(\mathcal{I}_2)).$$

Enfin, le résultat (3.5) fournit l'égalité

$$\mu^{\alpha}(\mathcal{V}_1) = \mu^{\alpha}(\mathcal{V}_2),$$

et le Lemme 7 conclut alors la preuve. ■

3.7.2.3 Preuve de l'inclusion $\mathcal{N}_{\text{B}}^{+}(G) \subset \mathcal{W}(G)$

La preuve proposée ci-dessous s'inspire très largement de celle déjà faite dans le cas où le graphe G n'est pas biparti (cf. Section 3.7.1).
Par ailleurs, remarquons qu'une démonstration alternative, se basant sur une étude structurelle des appariements au sein d'un système régi par le modèle d'appariements biparti étendu (MBÉ), sera proposée ultérieurement, dans la Section 4.2.2 du Chapitre 4.

Démonstration : Soit $G = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$ un graphe biparti connexe, et notons $n = |\mathcal{V}|$.
Fixons une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$ telle que

$$\mu \notin \left\{ \mu^{\overline{\alpha}} : \overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E}) \right\},$$

et définissons

- le vecteur $b_{\mu} \triangleq (\mu(i))_{i \in \mathcal{V}}$;
- pour toute famille $\overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})$ fixée, le vecteur $x_{\overline{\alpha}} \triangleq (\overline{\alpha}_e)_{e \in \mathcal{E}}$.

En faisant exactement le même raisonnement que dans la Section 3.7.1, il suit du *lemme de Farkas matriciel* (se référer à [18] pour plus de détails) que le système $\begin{cases} {}^tAy \geqslant 0 \\ {}^tb_\mu y < 0 \end{cases}$ possède (au moins) une solution, ce qui assure la non-vacuité de l'ensemble

$$\mathfrak{E}_\mu \triangleq \left\{ y \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}|} : {}^tAy \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i\in\mathcal{V}} \mu(i)y(i) < 0 \right\}.$$

Remarquons que l'équation ${}^tAy \geqslant 0$ équivaut à :

$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ y(i) + y(j) \geqslant 0. \tag{3.33}$$

De par sa non-vacuité, choisissons un élément de $\mathfrak{E}_\mu$ dont la valeur absolue prend le minimum de valeurs différentes, et notons-le y^*.
Formellement, si pour tout vecteur $v = {}^t(v(1), \ldots, v(n))$, on note $\mathfrak{I}(v) \triangleq \{v(1), \ldots, v(n)\}$, alors

$$y^* \in \operatorname*{argmin}_{y\in\mathfrak{E}_\mu}(\mathrm{Card}(\mathfrak{I}(|y|))), \tag{3.34}$$

et discutons maintenant les cas selon le cardinal de l'ensemble $\mathfrak{I}(|y^*|)$,

— <u>Cas 1</u> : $\mathrm{Card}(\mathfrak{I}(|y^*|)) = 1$.
En notant $\mathfrak{I}(|y^*|) = \{a\}$, alors $\mathfrak{I}(y^*) \subset \{a, -a\}$, et comme $y^* \neq 0_{|\mathcal{V}|}$ (par construction), on a : $a > 0$.
Notons maintenant $\mathcal{V}_+ \triangleq \{i \in \mathcal{V} : y^*(i) = a\}$ et $\mathcal{V}_- \triangleq \{i \in \mathcal{V} : y^*(i) = -a\}$.
En tant qu'élément de $\mathfrak{E}_\mu$, les contraintes que vérifie y^* sur les arêtes (cf. (3.33)) assurent que

$$\mathcal{E}(\mathcal{V}_-) \subset \mathcal{V}_+, \tag{3.35}$$

et, comme $\sum_{i\in\mathcal{V}} \mu(i)y^*(i) < 0$,

$$\mu(\mathcal{V}_+) < \mu(\mathcal{V}_-). \tag{3.36}$$

D'où, en combinant (3.35) et (3.36),

$$\mu(\mathcal{E}(\mathcal{V}_-)) < \mu(\mathcal{V}_-). \tag{3.37}$$

Comme (3.33) garantit que $\mathcal{V}_- \in \mathbb{I}(G)$, si $\mathcal{V}_- \notin \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$, il suit de (3.37) que

$$\mu \notin \mathcal{N}_{\text{B}}^+(G).$$

Enfin, si $\mathcal{V}_- \in \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$, l'assertion (3.36) assure également que

$$\mu \notin \mathcal{N}_{\text{B}}^+(G).$$

— <u>Cas 2</u> : $\mathrm{Card}(\mathfrak{I}(|y^*|)) \geqslant 2$.
Dans ce cas, notons
  ▷ $p > 0$ la plus grande valeur de $\mathfrak{I}(|y^*|)$;
  ▷ $q \geqslant 0$ la deuxième plus grande valeur de $\mathfrak{I}(|y^*|)$.
Considérons les ensembles $\mathcal{V}_+^p \triangleq \{i \in \mathcal{V} : y^*(i) = p\}$ et $\mathcal{V}_-^p \triangleq \{i \in \mathcal{V} : y^*(i) = -p\}$.
À nouveau, vu les contraintes que vérifie $y^* \in \mathfrak{E}_\mu$ sur les arêtes (cf. (3.33)), et comme p est la plus grande valeur de $\mathfrak{I}(|y^*|)$,

$$\mathcal{E}\left(\mathcal{V}_-^p\right) \subset \mathcal{V}_+^p, \tag{3.38}$$

d'où,

$$\mu\left(\mathcal{E}\left(\mathcal{V}_-^p\right)\right) \leqslant \mu\left(\mathcal{V}_+^p\right). \tag{3.39}$$

Fait intéressant pour la suite, remarquons que

$$\mathcal{V}_-^p \notin \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}. \tag{3.40}$$

En effet, sans perte de généralité, supposons par l'absurde que $\mathcal{V}_-^p = \mathcal{V}_1$.
Dans ce cas, $\mathcal{E}(\mathcal{V}_-^p) = \mathcal{E}(\mathcal{V}_1) = \mathcal{V}_2$, ce qui, par (3.38), assure que $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_+^p$, et, ainsi, $\mathfrak{I}(|y^*|) = \{p\}$, ce qui est absurde dans le cas étudié.

Par l'absurde, supposons maintenant que $\mu(\mathcal{V}_+^p) > \mu(\mathcal{V}_-^p)$, et définissons alors le vecteur $y_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\begin{cases} y_1(i) = q & \text{si } i \in \mathcal{V}_+^p \ ; \\ y_1(i) = -q & \text{si } i \in \mathcal{V}_-^p \ ; \\ y_1(i) = y^*(i) & \text{sinon.} \end{cases}$
Montrons tout d'abord que y_1 satisfait encore aux conditions (3.33) de contraintes sur les arêtes. Pour ce faire, fixons une arête $(i,j) \in \mathcal{E}$, et présentons les différents cas possibles (limités par la condition (3.38)) dans le tableau suivant :

$i \in \mathcal{V}_+^p$	$j \in \mathcal{V}_+^p$	$y_1(i) + y_1(j) = 2q \geqslant 0$
$i \in \mathcal{V}_+^p$	$j \in \mathcal{V}_-^p$	$y_1(i) + y_1(j) = q - q = 0$
$i \in \mathcal{V}_+^p$	$j \notin \{\mathcal{V}_+^p, \mathcal{V}_-^p\}$	$y_1(i) + y_1(j) = q + y^*(j) \geqslant 0$
$i \notin \{\mathcal{V}_+^p, \mathcal{V}_-^p\}$	$j \notin \{\mathcal{V}_+^p, \mathcal{V}_-^p\}$	$y_1(i) + y_1(j) = y^*(i) + y^*(j) \geqslant 0$, car $y^* \in \mathfrak{E}_\mu$

Ainsi, pour toute arête $(i, j) \in \mathcal{E}$,

$$y_1(i) + y_1(j) \geqslant 0,$$

et y_1 satisfait donc encore aux contraintes (3.33).

De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathcal{V}} \mu(i) y_1(i) &= \sum_{i\in\mathcal{V}} \mu(i) y^*(i) - \sum_{i\in\mathcal{V}} \mu(i)(y^*(i) - y_1(i)) \\
&= \sum_{i\in\mathcal{V}} \mu(i) y^*(i) - \left(\sum_{i\in\mathcal{V}_+^p} \mu(i)(y^*(i) - y_1(i)) + \sum_{i\in\mathcal{V}_-^p} \mu(i)(y^*(i) - y_1(i)) \right) \\
&= \underbrace{\sum_{i\in\mathcal{V}} \mu(i) y^*(i)}_{<0,\text{ car } y^*\in\mathfrak{E}_\mu} - \underbrace{(p-q)\left(\mu\left(\mathcal{V}_+^p\right) - \mu\left(\mathcal{V}_-^p\right)\right)}_{>0,\text{ par hypothèse}} < 0,
\end{aligned}$$

ce qui garantit finalement que

$$y_1 \in \mathfrak{E}_\mu.$$

Cependant, par définition, $\mathfrak{I}(|y_1|) = \mathfrak{I}(|y^*|) \backslash \{p\}$, et ceci implique donc que

$$\mathrm{Card}\left(\mathfrak{I}(|y_1|)\right) < \mathrm{Card}\left(\mathfrak{I}(|y^*|)\right),$$

ce qui est absurde par construction de y^* (cf. (3.34)).
On en déduit donc que

$$\mu(\mathcal{V}_+^p) \leqslant \mu(\mathcal{V}_-^p),$$

et l'inégalité (3.39) assure alors que

$$\mu(\mathcal{E}(\mathcal{V}_-^p)) \leqslant \mu(\mathcal{V}_-^p).$$

Enfin, les contraintes (3.33) garantissant que $\mathcal{V}_-^p \in \mathbb{I}(G)$, il suit donc de (3.40) que

$$\mu \notin \mathcal{N}_{\text{B}}^+(G).$$

Finalement, dans les deux cas, $\mu \notin \mathcal{N}_{\text{B}}^+(G)$, et on a donc prouvé, par contraposée, l'inclusion

$$\mathcal{N}_{\text{B}}^+(G) \subset \left\{\mu^{\overline{\alpha}} : \overline{\alpha} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})\right\}. \tag{3.41}$$

De manière analogue au cas où le graphe G n'est pas biparti (cf. Section 3.7.1.2), en se plaçant dans l'hyperplan affine $\mathcal{H} \triangleq \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \mu(\mathcal{V}_1) = \mu(\mathcal{V}_2)\}$, on peut montrer que $\mathcal{N}_{\text{B}}^+(G)$ est ouvert, et le passage à l'intérieur dans l'inclusion (3.41) assure alors que

$$\mathcal{N}_{\text{B}}^+(G) \subset \{\mu^\alpha : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\} = \mathcal{W}(G),$$

ce qui conclut la preuve. ■

3.8 Preuve du Corollaire 2

— L'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$ découle de la Proposition 29.

— Fixons un graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$, ainsi qu'une politique maximale généralisée $\Phi \in \text{POL}$.
Alors, le Théorème 2 et la définition d'une politique maximale généralisée (cf. Définition 19) permettent d'écrire les équivalences suivantes :

$$\mu \in \mathcal{W}(G) \Leftrightarrow \mu \in \text{NCOND}^+(G) \Leftrightarrow \bar{\mu} \in \text{NCOND}(G) \Leftrightarrow \bar{\mu} \in \text{STAB}(G, \Phi),$$

et l'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ s'en déduit donc.

— L'équivalence $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ a déjà été démontrée dans la Section 2.3 de [27].

3.9 Preuve du Corollaire 3

Démonstration : L'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$ découlant directement de la Proposition 29, il nous suffit de démontrer les équivalences $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ et $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ pour conclure.
Fixons donc un graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$, ainsi qu'une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$ vérifiant $\mu(\mathcal{V}_1) = \mu(\mathcal{V}_2)$.
Rappelons (cf. (3.13)) qu'on définit les mesures $\tilde{\mu}_1 \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1)$ et $\tilde{\mu}_2 \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_2)$ par :

$$\tilde{\mu}_1(i) \triangleq \frac{\mu(i)}{\mu(\mathcal{V}_1)},\ i \in \mathcal{V}_1 \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}_2(j) \triangleq \frac{\mu(j)}{\mu(\mathcal{V}_2)},\ j \in \mathcal{V}_2,$$

et que $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$ est une loi de probabilité admettant $\tilde{\mu}_1$ (respectivement, $\tilde{\mu}_2$) comme première (respectivement, seconde) marginale.
Comme $\mu(\mathcal{V}_1) = \mu(\mathcal{V}_2)$, le Théorème 2 et le Lemme 7 permettent d'écrire les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \mu \in \mathcal{W}(G) &\Leftrightarrow \mu \in \mathcal{N}_{\text{B}}^{+}(G) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1)\backslash\{\mathcal{V}_1\},\ \mu(\mathcal{I}_1) < \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}_1)) \\ \forall \mathcal{I}_2 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_2)\backslash\{\mathcal{V}_2\},\ \mu(\mathcal{I}_2) < \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}_2)) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \in \textsc{Ncond}_{\text{BÉ}}(G), \end{aligned} \tag{3.42}$$

où $\textsc{Ncond}_{\text{BÉ}}(G)$ est défini par (3.7).
Enfin, le Theorem 7.1 de [11] assurant que

$$\textsc{stab}_{\text{BÉ}}(G, \text{ML}) = \textsc{Ncond}_{\text{BÉ}}(G), \tag{3.43}$$

on en déduit l'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.
Par ailleurs, comme le Theorem 3 de [3] garantit que

$$\textsc{stab}_{\text{B}}(G, \text{FCFM}) = \textsc{Ncond}_{\text{B}}(G),$$

où $\textsc{Ncond}_{\text{B}}(G)$ est défini par (3.8), et comme, trivialement,

$$\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \in \textsc{Ncond}_{\text{BÉ}}(G) \Leftrightarrow \tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\mu}_2 \in \textsc{Ncond}_{\text{B}}(G),$$

l'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ se déduit directement de (3.42).
Ceci conclut la preuve. ■

3.10 Preuve du Théorème 3

Nous proposons maintenant deux preuves du Théorème 3 utilisant des techniques distinctes :

— Dans la Section 3.10.1, une preuve générale découlant du Théorème 2.
— Dans la Section 3.10.2, une preuve (auto-contenue) utilisant la théorie des flots, valable dans le cas d'un graphe biparti.

3.10.1 Preuve générale utilisant le Théorème 2

Rappelons tout d'abord (cf. (3.9)) que

$$\textsc{Ncond}_{\mathcal{V}_1}^{+}(G) \triangleq \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \forall \mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1),\ \mu(\mathcal{I}_1) < \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}_1))\},$$

et énonçons le résultat suivant,

Proposition 32

Pour tout graphe connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et toute partition non-triviale $\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2$ de $\mathcal{V}$,

$$\textsc{Ncond}_{\mathcal{V}_1}^{+}(G) = \mathcal{W}(\hat{G}),$$

où $\hat{G} = (\mathcal{V}, \hat{\mathcal{E}})$ est le graphe généralisé connexe obtenu à partir de G en ajoutant une boucle à chaque sommet de $\mathcal{V}_2$.

Démonstration de la Proposition 32 : Considérons un graphe connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ainsi qu'une partition non-triviale $\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2$ de $\mathcal{V}$.
La non-trivialité de la partition $\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2$ entraîne en particulier la non-vacuité de $\mathcal{V}_2$, ce qui garantit donc que le graphe généralisé connexe $\hat{G}$ n'est pas biparti.
Le Théorème 2 garantit alors qu'il suffit de prouver l'égalité suivante pour conclure :

$$\textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1}(G) = \textsc{Ncond}^+(\hat{G}). \tag{3.44}$$

$\supset$: Fixons une mesure $\mu \in \textsc{Ncond}^+(\hat{G})$ et un ensemble indépendant $\mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1)$.
Alors, par construction, $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(\hat{G})$, et donc,

$$\mu(\mathcal{I}_1) < \mu(\hat{\mathcal{E}}(\mathcal{I}_1)) \overset{\bowtie}{=} \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}_1)),$$

où l'égalité $\overset{\bowtie}{=}$ provient directement de la définition de $\hat{\mathcal{E}}$.
Ainsi,

$$\mu \in \textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1}(G).$$

$\subset$: Fixons une mesure $\mu \in \textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1}(G)$ et un ensemble indépendant $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(\hat{G})$.
Jusqu'à la fin de cette preuve, notons $\mathcal{I}_1 \triangleq \mathcal{I} \cap \mathcal{V}_1$ et $\mathcal{I}_2 \triangleq \mathcal{I} \cap \mathcal{V}_2$.
Alors,

$$\mu(\hat{\mathcal{E}}(\mathcal{I})) - \mu(\mathcal{I}) = \mu(\hat{\mathcal{E}}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{I}_2) + \mu(\hat{\mathcal{E}}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{I}_1) + \mu(\hat{\mathcal{E}}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{I}^c) - \mu(\mathcal{I}_2) - \mu(\mathcal{I}_1). \tag{3.45}$$

Cependant, par construction de $\hat{G}$, comme $\mathcal{I} \in \mathbb{I}(\hat{G})$,

— $\hat{\mathcal{E}}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_2$;
— $\hat{\mathcal{E}}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{I}_1 = \varnothing$;
— $\mathcal{E}(\mathcal{I}_1) \subset \hat{\mathcal{E}}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{I}^c$.

De l'égalité (3.45) et du fait que $\mu \in \textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1}(G)$, on déduit alors que

$$\mu(\hat{\mathcal{E}}(\mathcal{I})) - \mu(\mathcal{I}) = \mu(\hat{\mathcal{E}}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{I}^c) - \mu(\mathcal{I}_1) \geqslant \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}_1)) - \mu(\mathcal{I}_1) > 0,$$

ce qui conclut la preuve de (3.44), et donc celle de la Proposition 32. ■

Définissons maintenant une « relation de comparaison » entre deux mesures, qui sera utile à la preuve du Théorème 3,

Définition 39

Pour tout ensemble fini A, tout couple de mesures $(\mu, \mu') \in (\mathcal{M}(A))^2$, et tout sous-ensemble $B \subset A$, on note $\mu \prec_B \mu'$ lorsque $\begin{cases} \mu(i) < \mu'(i), \ \forall i \in B \ ; \\ \mu(i) = \mu'(i), \ \forall i \in A \backslash B. \end{cases}$

Définition 40

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et tout sous-ensemble $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$, on définit

$$\mathcal{W}_{\prec,\mathcal{V}'}(G) \triangleq \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \exists \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E}), \ \mu^\alpha \prec_{\mathcal{V}'} \mu\}.$$

Passons à présent à la preuve du Théorème 3,

Démonstration du Théorème 3 : Considérons un graphe connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, ainsi qu'une partition non-triviale $\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2$ de $\mathcal{V}$.
La Proposition 32 garantit alors qu'il suffit de prouver l'égalité suivante pour conclure :

$$\mathcal{W}(\hat{G}) = \mathcal{W}_{\prec,\mathcal{V}_2}(G). \tag{3.46}$$

$\subset$: Fixons une mesure $\mu \in \mathcal{W}(\hat{G})$ et notons alors $\hat{\alpha} \in \mathcal{M}(\hat{\mathcal{E}})$ une famille de poids telle que $\mu = \mu^{\hat{\alpha}}$.
Alors, en notant $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ la restriction de $\hat{\alpha}$ à $\mathcal{E}$, on obtient :

$$\begin{cases} \forall i \in \mathcal{V}_1, \ \mu(i) = \mu^{\hat{\alpha}}(i) = \mu^\alpha(i) \ ; \\ \forall i \in \mathcal{V}_2, \ \mu(i) = \mu^{\hat{\alpha}}(i) = \hat{\alpha}_{i,i} + \sum_{\{j \neq i : j \in \mathcal{E}(i)\}} \hat{\alpha}_{i,j} > \sum_{\{j \neq i : j \in \mathcal{E}(i)\}} \alpha_{i,j} = \mu^\alpha(i), \end{cases}$$

ce qui signifie que

$$\mu \in \mathcal{W}_{\prec,\mathcal{V}_2}(G).$$

$\supset$: Fixons une mesure $\mu \in \mathcal{W}_{\prec,\mathcal{V}_2}(G)$ et notons alors $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ une famille de poids telle que $\mu^\alpha \prec_{\mathcal{V}_2} \mu$. On construit alors la famille de poids $\hat{\alpha} \in \mathcal{M}(\hat{\mathcal{E}})$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \forall i \neq j,\ \hat{\alpha}_{i,j} = \alpha_{i,j}\ ; \\ \forall i \in \mathcal{V}_2,\ \hat{\alpha}_{i,i} = \mu(i) - \mu^\alpha(i), \end{cases}$$

et ainsi,

$$\begin{cases} \forall i \in \mathcal{V}_1,\ \mu(i) = \mu^\alpha(i) = \mu^{\hat{\alpha}}(i)\ ; \\ \forall i \in \mathcal{V}_2,\ \mu(i) = \hat{\alpha}_{i,i} + \mu^\alpha(i) = \mu^{\hat{\alpha}}(i). \end{cases}$$

Donc, $\mu = \mu^{\hat{\alpha}}$, c'est-à-dire

$$\mu \in \mathcal{W}(\hat{G}),$$

et ceci conclut la preuve de (3.46), et donc celle du Théorème 3. ■

3.10.2 Cas biparti : preuve utilisant la théorie des flots

Dans le cas particulier où G est un graphe biparti, le Théorème 3 peut être vu comme un résultat indépendant, découlant d'un argument de théorie des flots. Avant de passer à la preuve proprement dite, nous proposons ci-dessous une brève introduction à la théorie des flots (pour de plus amples informations sur le sujet, on pourra se référer par exemple à l'ouvrage [19]).

3.10.2.1 Quelques notions de théorie des flots

Commençons par définir plusieurs notions de base en théorie des flots,

Définition 41

Un $s-t$ graphe de flots $\vec{G} = \left(\vec{\mathcal{V}}, \vec{\mathcal{E}}\right)$ est un graphe orienté vérifiant les deux conditions suivantes :

- *Il possède deux sommets particuliers distincts :*
  - *une source, notée $s \in \vec{\mathcal{V}}$;*
  - *un puits, noté $t \in \vec{\mathcal{V}}$.*
- *À chaque arête orientée de u vers v, notée $(u,v) \in \vec{\mathcal{E}}$, on associe une capacité positive, notée $c(u,v)$.*

Par ailleurs, si $(u,v) \notin \vec{\mathcal{E}}$, on conviendra que $c(u,v) = 0$.

Définition 42

Soit $\vec{G} = \left(\vec{\mathcal{V}}, \vec{\mathcal{E}}\right)$ un $s-t$ graphe de flots.

On appelle flot $s-t$ de $\vec{G}$ toute fonction $f : \begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{E}} & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & f(u,v) \end{array}$ *vérifiant :*

1. $\forall (u,v) \in \vec{\mathcal{E}},\ f(u,v) \leqslant c(u,v)$ *(contrainte de capacité) ;*
2. $\forall (u,v) \in \vec{\mathcal{E}},\ f(u,v) = -f(v,u)$ *(anti-symétrie) ;*
3. $\forall u \in \vec{\mathcal{V}} \setminus \{s,t\},\ \sum_{w \in \vec{\mathcal{V}}} f(u,w) = 0$ *(conservation du flot).*

On note $\mathfrak{F}_{s,t}\left(\vec{G}\right)$ l'ensemble des flots $s-t$ de $\vec{G}$.

Par ailleurs, si $(u,v) \notin \vec{\mathcal{E}}$, on conviendra que $f(u,v) = 0$.

Remarquons que les items 2. et 3. assurent que

$$\forall v \in \vec{\mathcal{V}} \setminus \{s,t\},\ \sum_{u \in \vec{\mathcal{V}}} f(u,v) = \sum_{z \in \vec{\mathcal{V}}} f(v,z) = 0.$$

Définition 43

Soit $\overrightarrow{G} = \left(\overrightarrow{\mathcal{V}}, \overrightarrow{\mathcal{E}}\right)$ *un* $s-t$ *graphe de flots.*

La valeur $|\cdot|$ *d'un flot* $s-t$ *de* $\overrightarrow{G}$ *est définie par :*

$$\forall f \in \mathfrak{F}_{s,t}\left(\overrightarrow{G}\right),\ |f| \triangleq \sum_{w \in \overrightarrow{\mathcal{V}}} f(s,w).$$

Définition 44

Soit $\overrightarrow{G} = \left(\overrightarrow{\mathcal{V}}, \overrightarrow{\mathcal{E}}\right)$ *un* $s-t$ *graphe de flots.*

Une coupe $s-t$ *de* $\overrightarrow{G}$ *est un couple de sous-ensembles de sommets* $(\mathscr{S}, \mathscr{T}) \subset \overrightarrow{\mathcal{V}} \times \overrightarrow{\mathcal{V}}$ *vérifiant :*

- $\mathscr{S} \cap \mathscr{T} = \varnothing$;
- $\mathscr{S} \cup \mathscr{T} = \overrightarrow{\mathcal{V}}$;
- $s \in \mathscr{S}$ *et* $t \in \mathscr{T}$.

On note $\mathfrak{C}_{s,t}\left(\overrightarrow{G}\right)$ *l'ensemble des coupes* $s-t$ *de* $\overrightarrow{G}$.

Définition 45

Soit $\overrightarrow{G} = \left(\overrightarrow{\mathcal{V}}, \overrightarrow{\mathcal{E}}\right)$ *un* $s-t$ *graphe de flots.*

On définit la capacité c *d'une coupe* $s-t$ *de* $\overrightarrow{G}$ *par :*

$$\forall (\mathscr{S}, \mathscr{T}) \in \mathfrak{C}_{s,t}\left(\overrightarrow{G}\right),\ c(\mathscr{S}, \mathscr{T}) \triangleq \sum_{\substack{u \in \mathscr{S} \\ v \in \mathscr{T}}} c(u,v).$$

Définition 46

Soit $\overrightarrow{G} = \left(\overrightarrow{\mathcal{V}}, \overrightarrow{\mathcal{E}}\right)$ *un* $s-t$ *graphe de flots.*

Une coupe $s-t$ *de* $\overrightarrow{G}$ *est dite minimale lorsqu'elle minimise la capacité.*

Formellement, une coupe $(\mathscr{S}^*, \mathscr{T}^*) \in \mathfrak{C}_{s,t}\left(\overrightarrow{G}\right)$ *est minimale lorsqu'elle vérifie :*

$$c(\mathscr{S}^*, \mathscr{T}^*) = \min_{(\mathscr{S}, \mathscr{T}) \in \mathfrak{C}_{s,t}\left(\overrightarrow{G}\right)} c(\mathscr{S}, \mathscr{T}).$$

À noter qu'un tel couple n'est pas nécessairement unique.

Présentons maintenant un résultat bien connu en théorie des flots,

Théorème 5 (*Théorème flot-max/coupe-min*)

Pour tout $s-t$ *graphe de flots* $\overrightarrow{G} = \left(\overrightarrow{\mathcal{V}}, \overrightarrow{\mathcal{E}}\right)$ *et toute famille de capacités positives associée, la valeur maximale d'un flot* $s-t$ *de* $\overrightarrow{G}$ *est égale à la capacité d'une coupe* $s-t$ *de* $\overrightarrow{G}$ *minimale. Formellement,*

$$\max_{f \in \mathfrak{F}_{s,t}\left(\overrightarrow{G}\right)} |f| = \min_{(\mathscr{S}, \mathscr{T}) \in \mathfrak{C}_{s,t}\left(\overrightarrow{G}\right)} c(\mathscr{S}, \mathscr{T}).$$

Utilisons maintenant la théorie des flots pour prouver le Théorème 3 dans le cas biparti.

3.10.2.2 Preuve du Théorème 3 dans le cas biparti

Rappelons tout d'abord (cf. (3.9)) que

$$\textsc{Ncond}^{+}_{\mathcal{V}_1}(G) \triangleq \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \forall \mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1),\ \mu(\mathcal{I}_1) < \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}_1))\},$$

et énonçons le résultat suivant,

Proposition 33

Pour tout graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$ et toute mesure $\mu \in \textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1}(G)$, il existe un $s-t$ graphe de flots associé à G, noté $\vec{G} = \left(\vec{\mathcal{V}}, \vec{\mathcal{E}}\right)$, et un flot $s-t$ de $\vec{G}$, noté $\overline{f}$, vérifiant

$$\sum_{i \in \mathcal{V}_1} \overline{f}(s,i) = \mu(\mathcal{V}_1).$$

Démonstration de la Proposition 33 : Considérons un graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$ et une mesure $\mu \in \textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1}(G)$.
La connexité de G assurant que $\mathcal{V}_2 = \{\mathcal{E}(\mathcal{I}_1) : \mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1)\}$, on définit la mesure $\delta \in \mathcal{M}(\mathcal{V}_2)$ de la façon suivante :

$$\forall \mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1),\ \delta(\mathcal{E}(\mathcal{I}_1)) \triangleq \frac{\mu(\mathcal{I}_1) + \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}_1))}{2}.$$

En particulier, elle vérifie

$$\begin{cases} \forall \mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1),\ \mu(\mathcal{I}_1) < \delta(\mathcal{E}(\mathcal{I}_1)) \ ; \\ \forall j \in \mathcal{V}_2,\ \delta(j) < \mu(j). \end{cases} \tag{3.47}$$

Signalons que l'expression de cette mesure δ n'a pas une importance spécifique dans la preuve et que toute autre mesure vérifiant les conditions (3.47) aurait donc convenu également.

Construisons un $s-t$ graphe de flots associé à G, noté $\vec{G} = \left(\vec{\mathcal{V}}, \vec{\mathcal{E}}\right)$, de la manière suivante :

- On crée une *source*, notée s, et on ajoute des arêtes entre s et chaque sommet de $\mathcal{V}_1$;
- On crée un *puits*, noté t, et on ajoute des arêtes entre chaque sommet de $\mathcal{V}_2$ et t ;
- Pour tout $i \in \mathcal{V}_1$ et tout $j \in \mathcal{V}_2$, on oriente les arêtes de s vers i, de i vers j, et de j vers t ;
- On associe une capacité positive à chaque arête de la façon suivante :
  - $\forall i \in \mathcal{V}_1,\ c(s,i) \triangleq \mu(i)$;
  - $\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ c(i,j) \triangleq +\infty$;
  - $\forall j \in \mathcal{V}_2,\ c(j,t) \triangleq \delta(j)$.

Un exemple d'un tel $s-t$ graphe de flots est donné par la Figure 3.3.

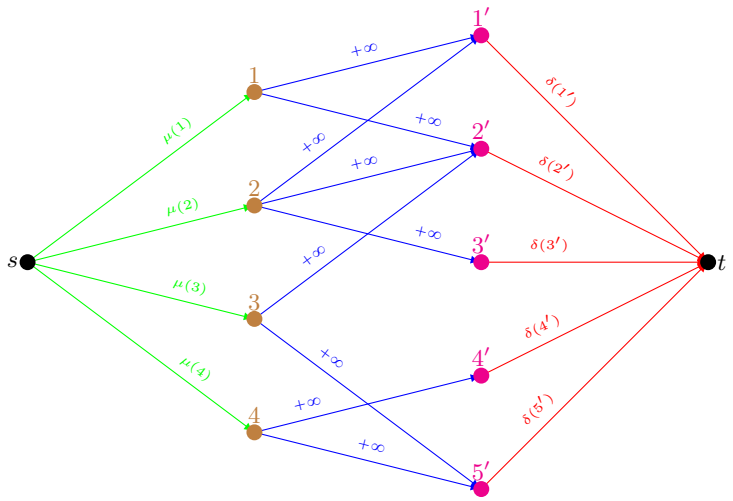

FIGURE 3.3 – $s-t$ graphe de flots $\vec{G} = \left(\vec{\mathcal{V}}, \vec{\mathcal{E}}\right)$ associé à un graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$: en brun, les éléments de $\mathcal{V}_1$; en magenta, les éléments de $\mathcal{V}_2$; en bleu, les arêtes du graphe biparti connexe G d'origine.

Dans le but d'utiliser le Théorème flot-max/coupe-min (Théorème 5), démontrons le résultat suivant, qui fournit une coupe $s-t$ de $\vec{G}$ minimale,

Lemme 8

Le couple $\left(\{s\}, \vec{\mathcal{V}} \setminus \{s\}\right)$ *est l'unique coupe* $s-t$ *de* $\vec{G}$ *minimale.*
Formellement,

$$\min_{(\mathscr{S},\mathscr{T})\in\mathfrak{C}_{s,t}\left(\vec{G}\right)} c(\mathscr{S},\mathscr{T}) = c\left(\{s\}, \vec{\mathcal{V}} \setminus \{s\}\right) = \mu(\mathcal{V}_1).$$

Démonstration du Lemme 8 : Soit $(\mathscr{S},\mathscr{T})$ une coupe $s-t$ de $\vec{G}$.
Alors,

$$\begin{aligned}
c(\mathscr{S},\mathscr{T}) &= \sum_{\substack{u\in\mathscr{S}\\ v\in\mathscr{T}}} c(u,v)\\
&= \sum_{i\in\mathcal{V}_1\cap\mathscr{T}} c(s,i) + \sum_{\substack{i\in\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S}\\ j\in\mathcal{V}_2\cap\mathscr{T}}} c(i,j) + \sum_{\substack{i\in\mathcal{V}_1\cap\mathscr{T}\\ j\in\mathcal{V}_2\cap\mathscr{S}}} c(i,j) + \sum_{j\in\mathcal{V}_2\cap\mathscr{S}} c(j,t)\\
&= \sum_{i\in\mathcal{V}_1\cap\mathscr{T}} \mu(i) + \underbrace{\sum_{\substack{i\in\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S}\\ j\in\mathcal{V}_2\cap\mathscr{T}}} \underbrace{c(i,j)}_{=+\infty}}_{\triangleq\Sigma_\infty^{(1)}} + \underbrace{\sum_{\substack{i\in\mathcal{V}_1\cap\mathscr{T}\\ j\in\mathcal{V}_2\cap\mathscr{S}}} \underbrace{c(i,j)}_{=+\infty}}_{\triangleq\Sigma_\infty^{(2)}} + \sum_{j\in\mathcal{V}_2\cap\mathscr{S}} \delta(j).
\end{aligned}$$

— <u>Cas 1</u> : $[\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S}=\varnothing]$ et $[\mathcal{V}_2\cap\mathscr{S}=\varnothing]$.
Dans ce cas, $\mathscr{S}=\{s\}$ et $\mathscr{T}=\vec{\mathcal{V}}\setminus\{s\}$.
D'où,

$$c(\mathscr{S},\mathscr{T}) = c\left(\{s\}, \vec{\mathcal{V}} \setminus \{s\}\right) = \sum_{v\in\vec{\mathcal{V}}\setminus\{s\}} c(s,v) = \sum_{i\in\mathcal{V}_1} \mu(i) = \mu(\mathcal{V}_1).$$

— <u>Cas 2</u> : $\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S}\neq\varnothing$.
  — <u>Cas 2.1</u> : $[(\mathcal{V}_2\cap\mathscr{T})\cap\mathcal{E}(\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S})\neq\varnothing]$ ou $[(\mathcal{V}_2\cap\mathscr{S})\cap\mathcal{E}(\mathcal{V}_1\cap\mathscr{T})\neq\varnothing]$.
  Dans ce cas, $\Sigma_\infty^{(1)}\neq 0$ ou $\Sigma_\infty^{(2)}\neq 0$, et donc, en particulier,

$$c(\mathscr{S},\mathscr{T}) = +\infty > \mu(\mathcal{V}_1) = c\left(\{s\}, \vec{\mathcal{V}} \setminus \{s\}\right).$$

  — <u>Cas 2.2</u> : $[(\mathcal{V}_2\cap\mathscr{T})\cap\mathcal{E}(\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S})=\varnothing]$ et $[(\mathcal{V}_2\cap\mathscr{S})\cap\mathcal{E}(\mathcal{V}_1\cap\mathscr{T})=\varnothing]$.
  Dans ce cas, montrons que $\varnothing\neq[\mathcal{V}_2\cap\mathscr{S}]=[\mathcal{E}(\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S})\cap\mathcal{V}_2]$:
    $\supset$: Par connexité de G, l'ensemble $\mathcal{E}(\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S})\cap\mathcal{V}_2$ est non-vide, et, par la première hypothèse, $\mathcal{E}(\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S})\cap\mathcal{V}_2\subset\mathscr{S}$.
    D'où,

$$\varnothing\neq[\mathcal{E}(\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S})\cap\mathcal{V}_2]\subset[\mathcal{V}_2\cap\mathscr{S}],$$

    et, en particulier,

$$\mathcal{V}_2\cap\mathscr{S}\neq\varnothing.$$

    $\subset$: De par sa non-vacuité, considérons un élément $j\in\mathcal{V}_2\cap\mathscr{S}$.
    Par connexité de G, il existe un sommet $i\in\mathcal{V}_1$ tel que $i-j$, et, par la seconde hypothèse, $i\in\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S}$.
    Ainsi,

$$[\mathcal{V}_2\cap\mathscr{S}]\subset[\mathcal{E}(\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S})\cap\mathcal{V}_2].$$

  On a donc prouvé l'égalité suivante :

$$\varnothing\neq[\mathcal{V}_2\cap\mathscr{S}]=[\mathcal{E}(\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S})\cap\mathcal{V}_2]. \tag{3.48}$$

  D'où, comme $\Sigma_\infty^{(1)}=0$ et $\Sigma_\infty^{(2)}=0$, l'égalité (3.48) assure que

$$\begin{aligned}
c(\mathscr{S},\mathscr{T}) &= \sum_{i\in\mathcal{V}_1\cap\mathscr{T}} \mu(i) + \sum_{j\in\mathcal{V}_2\cap\mathscr{S}} \delta(j)\\
&= \mu(\mathcal{V}_1\cap\mathscr{T}) + \delta(\mathcal{E}(\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S})\cap\mathcal{V}_2)\\
&\overset{(*)}{>} \mu(\mathcal{V}_1\cap\mathscr{T}) + \mu(\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S})\\
&= \mu(\mathcal{V}_1)\\
&= c\left(\{s\}, \vec{\mathcal{V}} \setminus \{s\}\right),
\end{aligned}$$

  où $\overset{(*)}{>}$ provient de la condition (3.47), utilisée pour $\mathcal{I}_1=\mathcal{V}_1\cap\mathscr{S}\in\mathbb{I}(\mathcal{V}_1)$.

— Cas 3 : $\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S} \neq \varnothing$.

— Cas 3.1 : $[(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{T}) \cap \mathcal{E}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}) \neq \varnothing]$ ou $[(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{S}) \cap \mathcal{E}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{T}) \neq \varnothing]$.
Dans ce cas, $\Sigma_\infty^{(1)} \neq 0$ ou $\Sigma_\infty^{(2)} \neq 0$, et donc, en particulier,

$$c(\mathscr{S}, \mathscr{T}) = +\infty > \mu(\mathcal{V}_1) = c\left(\{s\}, \vec{\mathcal{V}} \setminus \{s\}\right).$$

— Cas 3.2 : $[(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{T}) \cap \mathcal{E}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}) = \varnothing]$ et $[(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{S}) \cap \mathcal{E}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{T}) = \varnothing]$.
En échangeant les rôles (symétriques) de $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$, on a, similairement à (3.48) :

$$\varnothing \neq [\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{S}] = [\mathcal{E}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}) \cap \mathcal{V}_1]. \tag{3.49}$$

Montrons alors que $\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S} = \mathcal{E}(\mathcal{E}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}) \cap \mathcal{V}_1) \cap \mathcal{V}_2$:

$\subset$: Par connexité de G,

$$\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S} \subset \mathcal{E}(\mathcal{E}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}) \cap \mathcal{V}_1) \cap \mathcal{V}_2.$$

$\supset$: De par sa non-vacuité (par (3.49) et la connexité de G), considérons un élément $j \in \mathcal{E}(\mathcal{E}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}) \cap \mathcal{V}_1) \cap \mathcal{V}_2$.
Il existe alors un sommet $i \in \mathcal{E}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}) \cap \mathcal{V}_1$ tel que $i - j$, et donc, par la première hypothèse, $i \in \mathscr{S}$.
Ainsi, $i \in \mathcal{V}_1 \cap \mathscr{S}$ et $i - j$, avec $j \in \mathcal{V}_2$, et donc, par la seconde hypothèse, $j \in \mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}$.
D'où l'inclusion

$$\mathcal{E}(\mathcal{E}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}) \cap \mathcal{V}_1) \cap \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}.$$

On a donc prouvé l'égalité suivante :

$$\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S} = \mathcal{E}(\mathcal{E}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}) \cap \mathcal{V}_1) \cap \mathcal{V}_2. \tag{3.50}$$

D'où, comme $\Sigma_\infty^{(1)} = 0$ et $\Sigma_\infty^{(2)} = 0$, les égalités (3.49) et (3.50) assurent que

$$\begin{aligned}
c(\mathscr{S}, \mathscr{T}) &= \sum_{i \in \mathcal{V}_1 \cap \mathscr{T}} \mu(i) + \sum_{j \in \mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}} \delta(j) \\
&= (\mu(\mathcal{V}_1) - \mu(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{S})) + \delta(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}) \\
&= \mu(\mathcal{V}_1) + [\delta(\mathcal{E}(\mathcal{E}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}) \cap \mathcal{V}_1) \cap \mathcal{V}_2) - \mu(\mathcal{E}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}) \cap \mathcal{V}_1)] \\
&\overset{(\heartsuit)}{>} \mu(\mathcal{V}_1) \\
&= c\left(\{s\}, \vec{\mathcal{V}} \setminus \{s\}\right),
\end{aligned}$$

où $\overset{(\heartsuit)}{>}$ provient de (3.47), utilisée pour $\mathcal{I}_1 = \mathcal{E}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{S}) \cap \mathcal{V}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1)$.

On déduit donc des trois cas étudiés que

$$\forall (\mathscr{S}, \mathscr{T}) \in \mathfrak{C}_{s,t}\left(\vec{G}\right),\ c(\mathscr{S}, \mathscr{T}) \geqslant \mu(\mathcal{V}_1) = c\left(\{s\}, \vec{\mathcal{V}} \setminus \{s\}\right),$$

avec égalité si et seulement si $(\mathscr{S}, \mathscr{T}) = \left(\{s\}, \vec{\mathcal{V}} \setminus \{s\}\right)$.
Ceci conclut la preuve du Lemme 8. ■

L'association du Lemme 8 et du Théorème flot-max/coupe-min (Théorème 5) assure l'existence d'un flot $s - t$ de $\vec{G}$ (maximal), noté $\overline{f}$, vérifiant

$$\sum_{i \in \mathcal{V}_1} \overline{f}(s, i) = \sum_{w \in \vec{\mathcal{V}}} \overline{f}(s, w) = \left|\overline{f}\right| = \max_{f \in \mathfrak{F}_{s,t}\left(\vec{G}\right)} |f| = \min_{(\mathscr{S}, \mathscr{T}) \in \mathfrak{C}_{s,t}\left(\vec{G}\right)} c(\mathscr{S}, \mathscr{T}) = \mu(\mathcal{V}_1),$$

ce qui conclut la preuve de la Proposition 33. ■

Utilisons maintenant la Proposition 33 pour démontrer le Théorème 3 dans le cas biparti,

Démonstration du Théorème 3 (pour G biparti) : Soit $G = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$ un graphe biparti connexe.
En identifiant $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ à $\mathbb{R}^n$, où $n = \mathrm{Card}(\mathcal{V})$, les assertions suivantes se montrent de manière similaire à ce qui a été fait dans les Étapes 2, 3, et 4 de la Section 3.7.1.2 :

— $\textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1}(G) \triangleq \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \forall \mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1),\ \mu(\mathcal{I}_1) < \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}_1))\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$;

— $\mathcal{W}_{<,\mathcal{V}_2}(G)$ est l'intérieur de l'ensemble

$$\mathcal{W}^{\geqslant 0}_{<,\mathcal{V}_2}(G) \triangleq \left\{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) : \exists \alpha \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E}) \text{ t.q. } \left\{\begin{array}{l} \forall i \in \mathcal{V}_1,\ \mu^\alpha(i) = \mu(i) \\ \forall j \in \mathcal{V}_2,\ \mu^\alpha(j) < \mu(j) \end{array}\right.\right\}.$$

Pour prouver l'égalité entre $\textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1}(G)$ et $\mathcal{W}_{<,\mathcal{V}_2}(G)$, il suffit donc de montrer que

$$\textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1}(G) = \mathcal{W}^{\geqslant 0}_{<,\mathcal{V}_2}(G),$$

le passage à l'intérieur permettant alors de conclure.

$\subset$: Fixons une mesure $\mu \in \textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1}(G)$, et définissons la mesure $\alpha^{\overline{f}} \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})$ par :

$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ \alpha^{\overline{f}}_{i,j} \triangleq \overline{f}(i,j),$$

où $\overline{f}$ est le flot (maximal) de $\overrightarrow{G}$ donné par la Proposition 33.
D'une part, la propriété de conservation du flot, la contrainte de capacité (cf. Définition 42), et la condition (3.47) assurent que

$$\forall j \in \mathcal{V}_2,\ \mu^{\alpha^{\overline{f}}}(j) = \sum_{i \in \mathcal{V}_1} \alpha^{\overline{f}}_{i,j} = \sum_{i \in \mathcal{V}_1} \overline{f}(i,j) = \overline{f}(j,t) \leqslant c(j,t) = \delta(j) < \mu(j).$$

D'autre part, la propriété de conservation du flot donne :

$$\forall i \in \mathcal{V}_1,\ \mu^{\alpha^{\overline{f}}}(i) = \sum_{j \in \mathcal{V}_2} \alpha^{\overline{f}}_{i,j} = \sum_{j \in \mathcal{V}_2} \overline{f}(i,j) = \overline{f}(s,i). \tag{3.51}$$

Prouvons alors que $\forall i \in \mathcal{V}_1,\ \overline{f}(s,i) = \mu(i)$:

— Déjà, la contrainte de capacité assure que

$$\forall i \in \mathcal{V}_1,\ \overline{f}(s,i) \leqslant c(s,i) = \mu(i).$$

— Supposons par l'absurde qu'il existe $i_0 \in \mathcal{V}_1$ tel que $\overline{f}(s,i_0) < c(s,i_0) = \mu(i_0)$.
Dans ce cas, la Proposition 33 et la contrainte de capacité garantissent que

$$\mu(\mathcal{V}_1) = \sum_{i \in \mathcal{V}_1} \overline{f}(s,i) = \overline{f}(s,i_0) + \sum_{i \in \mathcal{V}_1 \setminus \{i_0\}} \overline{f}(s,i) < \mu(i_0) + \sum_{i \in \mathcal{V}_1 \setminus \{i_0\}} \mu(i) = \mu(\mathcal{V}_1),$$

ce qui débouche sur une absurdité.
Ainsi,

$$\forall i \in \mathcal{V}_1,\ \overline{f}(s,i) \geqslant \mu(i).$$

On en déduit donc que

$$\forall i \in \mathcal{V}_1,\ \overline{f}(s,i) = \mu(i),$$

ce qui, associé à (3.51), conclut le fait que

$$\mu \in \mathcal{W}^{\geqslant 0}_{<,\mathcal{V}_2}(G).$$

$\supset$: Fixons une mesure $\mu \in \mathcal{W}^{\geqslant 0}_{<,\mathcal{V}_2}(G)$.
Par définition, il existe donc une mesure $\alpha \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})$ telle que

$$\begin{cases} \forall i \in \mathcal{V}_1,\ \mu^{\alpha}(i) = \mu(i)\ ; \\ \forall j \in \mathcal{V}_2,\ \mu^{\alpha}(j) < \mu(j). \end{cases} \tag{3.52}$$

Considérons un ensemble indépendant $\mathcal{I}_1 \in \mathbb{I}(\mathcal{V}_1)$.
Alors, les conditions (3.52) et le fait que $\alpha \in \mathcal{M}^{\geqslant 0}(\mathcal{E})$ assurent que

$$\mu(\mathcal{I}_1) = \mu^{\alpha}(\mathcal{I}_1) = \sum_{j \in \mathcal{E}(\mathcal{I}_1)} \sum_{i \in \mathcal{I}_1} \alpha_{i,j} \leqslant \sum_{j \in \mathcal{E}(\mathcal{I}_1)} \sum_{i \in \mathcal{V}_1} \alpha_{i,j} = \mu^{\alpha}(\mathcal{E}(\mathcal{I}_1)) < \mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}_1)),$$

c'est-à-dire

$$\mu \in \textsc{Ncond}^+_{\mathcal{V}_1}(G).$$

Ceci conclut la preuve. ■

Question ouverte :

- *La preuve ci-dessus, utilisant la théorie des flots, peut-elle se généraliser au cas d'un graphe connexe quelconque (et non plus forcément biparti) ?*

Chapitre 4

Étude des taux d'appariements

Sommaire

4.1 Taux d'appariements du modèle général (MG) 101

4.1.1 Proportion temporelle asymptotique du nombre total d'appariements (modèle MG) 101

4.1.2 Proportion temporelle asymptotique du nombre d'appariements par arête (modèle MG) 102

4.1.3 Taux d'appariements par arête (modèle MG) 104

4.1.4 Taux d'appariements dédiés (modèle MG) 104

4.1.5 « Taux d'entrée = taux de sortie » (modèle MG) 105

4.1.6 Toute mesure stabilisante est à poids (modèle MG) 106

4.2 Taux d'appariements du modèle biparti étendu (MBÉ) 106

4.2.1 Étude des taux d'appariements du modèle MBÉ 106

4.2.2 Preuve alternative de l'inclusion $\mathcal{N}_{\text{B}}^{+}(G) \subset \mathcal{W}(G)$ du Théorème 2 110

4.3 Étude de l'unicité des taux d'appariements 111

4.3.1 Conditions suffisantes à la politique-insensibilité des taux d'appariements . . . 111

4.3.2 Exemples 118

4.3.3 Expression explicite des taux d'appariements 119

4.4 Étude de l'équité des taux d'appariements par arête 120

Dans le Chapitre 2 et le Chapitre 3, nous avons étudié certaines caractéristiques et critères de performance de différents modèles d'appariements (ou de files d'attente), parmi lesquelles

— la loi stationnaire, donnée sous une forme produit explicite, de la chaîne $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représentant l'évolution temporelle du contenu d'un système régi par un modèle d'appariements général (MG), pour un graphe de compatibilités G qui n'est pas biparti et sous la politique FCFM (cf. Théorème 1) ;

— quelques caractéristiques du système à l'équilibre, dans le cadre précité, comme par exemple, sa taille moyenne, le temps moyen d'attente d'un élément en son sein, la probabilité qu'un élément doive patienter avant d'être apparié, etc. (cf. Section 2.7) ;

— la zone de stabilité de certains modèles d'appariements (généraux, généraux avec abandons, bipartis, bipartis étendus) et de files d'attente (dites *skill-based*) - voir, par exemple, le Théorème 2, le Corollaire 2, le Corollaire 3, le Théorème 3, le Corollaire 4, la Proposition 30, et la Proposition 31.

Le Chapitre 4 va, quant à lui, s'intéresser à un autre critère de performance du système : les taux d'appariements. Dans un système régi par un modèle d'appariements (général (MG) ou biparti étendu (MBÉ)) stable, cette quantité est définie, pour chaque arête $(i,j) \in \mathcal{E}$ donnée du graphe (généralisé) connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ considéré, comme étant la fréquence asymptotique des appariements réalisés entre i et j (cf. Section 4.1 et Section 4.2.1). L'étude faite dans ce Chapitre 4 aura plusieurs objectifs, dont celui

— pour toute mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ (respectivement, $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$) rendant stable un modèle d'appariements général (MG) (respectivement, MG_c) donné, de déterminer explicitement - à une constante multiplicative strictement positive près - la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ telle que $\bar{\mu} = \bar{\mu}^\alpha$ (respectivement, l'unique famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ telle que $\mu = \mu^\alpha$) (cf. Corollaire 6) ;

— de fournir une preuve alternative directe de l'inclusion $\text{NCOND}^+(G) \subset \mathcal{W}(G)$ du Théorème 2 (voir le Corollaire 6 et la remarque faite au début de la Section 3.7.1.2) ;

— pour toute mesure $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$ rendant stable un modèle d'appariements biparti étendu (MBÉ) donné, de déterminer explicitement - à une constante multiplicative strictement positive près - la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ telle que $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_1^\alpha$ et $\tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_2^\alpha$, où les mesures $\tilde{\mu}_1^\alpha$ et $\tilde{\mu}_2^\alpha$ sont définies par (4.10) (cf. Corollaire 8) ;

— de fournir une preuve alternative directe de l'inclusion $\mathcal{N}_{\text{B}}^+(G) \subset \mathcal{W}(G)$ du Théorème 2 (voir le Corollaire 8 et la Section 4.2.2) ;

— de mettre en évidence la *politique-insensibilité* des taux d'appariements, c'est-à-dire le fait qu'ils restent inchangés quelle que soit la politique Φ implémentée, pour certains « types » de graphes de compatibilités (généralisés) connexes (cf. Théorème 6) ;

— de fournir une expression explicite des taux d'appariements, sous certaines hypothèses (cf. Proposition 45) ;

— d'étudier l'*équité* des taux d'appariements par arête, un autre critère de performance de systèmes régis par des modèles d'appariements (cf. Théorème 7).

En pratique, plusieurs stratégies d'optimisation de systèmes régis par des modèles d'appariements (généraux (MG) ou bipartis étendus (MBÉ)) stables sont basées sur la valeur des taux d'appariements au sein de ces systèmes. On pourra par exemple se référer à [23] et à [28].
Pour une parfaite information, ce Chapitre 4 présente une version étendue de certains résultats donnés dans l'article [6], pré-publié en 2021.

Tout au long de ce Chapitre 4, tous les graphes (généralisés) considérés seront connexes et constitués d'au moins deux sommets.

4.1 Taux d'appariements du modèle général (MG)

Dans cette Section 4.1, nous étudions la structure des appariements au sein de tout système régi par un modèle d'appariements général (MG), défini dans le Chapitre 1, ce qui débouchera en particulier sur un résultat (cf. Corollaire 6) permettant

— pour toute mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ (respectivement, $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{V})$) rendant stable un modèle d'appariements général (MG) (respectivement, MG_c) donné, de déterminer explicitement - à une constante multiplicative strictement positive près - la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ telle que $\bar{\mu} = \bar{\mu}^\alpha$ (respectivement, l'unique famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ telle que $\mu = \mu^\alpha$) ;

— de fournir une preuve alternative directe de l'inclusion $\text{NCOND}^+(G) \subset \mathcal{W}(G)$ du Théorème 2 (voir la remarque faite au début de la Section 3.7.1.2).

Comme nous le verrons dans la Section 4.3 (respectivement, dans la Section 4.4), cette étude des taux d'appariements du modèle MG permettra également d'étudier leur insensibilité vis-à-vis de la politique d'appariements utilisée (respectivement, d'étudier l'équité des taux d'appariements par arête).

Définition 47

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, toute politique d'appariements admissible $\Phi \in \text{POL}$ et toute mesure de probabilité $\overline{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ fixés, on associe, à tout instant $n \geqslant 1$ et à tout couple de sommets $(i, j) \in \mathcal{V}^2$,

— *la variable aléatoire $M_n^{\Phi,\overline{\mu}}[i, j]$ représentant le nombre d'appariements réalisés entre i et j jusqu'au temps n (inclus) dans tout système régi par le modèle $\text{MG}(G, \Phi, \bar{\mu})$.*
Évidemment, $M_n^{\Phi,\overline{\mu}}[i, j] = 0$ lorsque $(i, j) \notin \mathcal{E}$.
Le nombre d'appariements impliquant i jusqu'à l'instant n (inclus) dans le système est noté

$$M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i] \triangleq \sum_{k \in \mathcal{E}(i)} M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i, k],$$

et le nombre total d'appariements réalisés jusqu'à l'instant n (inclus) dans le système est noté

$$M_n^{\Phi,\bar{\mu}} \triangleq \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i, j].$$

— *la proportion temporelle du nombre d'appariements entre i et j jusqu'au temps n (inclus) dans tout système régi par le modèle $\text{MG}(G, \Phi, \bar{\mu})$, défini comme la proportion $\frac{M_n^{\Phi,\overline{\mu}}[i,j]}{n}$.*

4.1.1 Proportion temporelle asymptotique du nombre total d'appariements (modèle MG)

Proposition 34

Dans tout système régi par un modèle $\text{MG}(G, \Phi, \bar{\mu})$ stable, la proportion temporelle asymptotique du nombre total d'appariements réalisés vérifie :

$$\frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \frac{1}{2}.$$

Démonstration : Dans cette preuve, on admettra temporairement l'existence de la limite presque-sûre de la suite $\left(\frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}_*}$, qui sera justifiée a posteriori par la Proposition 35.
Pour commencer, observons que pour tout $n \geqslant 1$, on a presque-sûrement que

$$\left|W_n^{\Phi,\bar{\mu}}\right| = n - 2M_n^{\Phi,\bar{\mu}} + \left|W_0^{\Phi,\bar{\mu}}\right|, \tag{4.1}$$

où $|w|$ représente la taille du mot w.
Par l'absurde, supposons que $\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \to +\infty} \frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}(\omega)}{n} \neq \frac{1}{2}\right\}\right) > 0$.

On a donc existence d'un sous-ensemble $\Omega' \subset \Omega$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega') > 0$, tel que

$$\forall \omega \in \Omega', \ \lim_{n \to +\infty} \frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}(\omega)}{n} \neq \frac{1}{2}.$$

Considérons une réalisation $\omega \in \Omega'$.
Ainsi, si $\lim_{n \to +\infty} \frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}(\omega)}{n} > \frac{1}{2}$, $\left(\text{respectivement, } < \frac{1}{2}\right)$, il suit de (4.1) qu'il existe un rang $N(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N(\omega)$, $\left|W_n^{\Phi,\bar{\mu}}(\omega)\right| > \left|W_0^{\Phi,\bar{\mu}}(\omega)\right|$ $\left(\text{respectivement, } < \left|W_0^{\Phi,\bar{\mu}}(\omega)\right|\right)$.
L'un dans l'autre, on obtient alors que $\Omega' \subset \liminf_{n \to \infty} \left\{\omega \in \Omega : \left|W_n^{\Phi,\bar{\mu}}(\omega)\right| \neq \left|W_0^{\Phi,\bar{\mu}}(\omega)\right|\right\}$, ce qui est absurde au vu de la récurrence de la chaîne $\left(W_n^{\Phi,\bar{\mu}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.
En conclusion, $\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \to +\infty} \frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}(\omega)}{n} = \frac{1}{2}\right\}\right) = 1$, et ceci conclut la preuve. ■

4.1.2 Proportion temporelle asymptotique du nombre d'appariements par arête (modèle MG)

Définition 48

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, toute politique d'appariements admissible $\Phi \in$ POL, tout $i \in \mathcal{V}$ et tout $j \in \mathcal{V}$ fixés, on note

$$A_{i \to j}^{\Phi} \triangleq \{\text{états de } \mathbb{W} : \text{un item de classe } i \text{ arrivant est apparié avec un item de classe } j\}.$$

Observons que cet ensemble est non-vide si et seulement si $(i, j) \in \mathcal{E}$.
Par ailleurs, sous politique FCFM*, on peut écrire formellement*

$$A_{i \to j}^{\text{FCFM}} \triangleq \left\{w = w_1 j w_2 \in \mathbb{W} : w_1 \in (\mathcal{E}(i)^c)^* \text{ et } w_2 \in \left(\mathcal{E}\left(\mathcal{V}(w_1) \cup \{j\}\right)^c\right)^*\right\}.$$

Proposition 35

Dans tout système régi par un modèle MG$(G, \Phi, \bar{\mu})$ *stable, le comportement asymptotique de la proportion temporelle du nombre d'appariements réalisés par l'arête $(i, j) \in \mathcal{E}$ est le suivant :*

$$\frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j],$$

avec

$$\Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j] \triangleq \bar{\mu}(i)\Pi_W^{\Phi,\bar{\mu}}\left(A_{i \to j}^{\Phi}\right) + \bar{\mu}(j)\Pi_W^{\Phi,\bar{\mu}}\left(A_{j \to i}^{\Phi}\right)\mathbf{1}_{\{i \neq j\}}, \tag{4.2}$$

où $\Pi_W^{\Phi,\bar{\mu}}$ représente l'unique loi de probabilité stationnaire de la chaîne récurrente positive $\left(W_n^{\Phi,\bar{\mu}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.
La quantité déterministe $\Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]$ est appelée proportion temporelle asymptotique du nombre d'appariements de l'arête $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Heuristiquement, la quantité $\Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]$ correspond à la probabilité qu'à un moment donné, en régime stationnaire, un item de classe $i \in \mathcal{V}$ s'apparie avec un item de classe $j \in \mathcal{V}$. On conviendra que $\Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j] = 0$, pour tout couple $(i, j) \notin \mathcal{E}$. De plus, $\Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j] > 0$, pour chaque arête $(i, j) \in \mathcal{E}$. En effet, en régime stationnaire, on a toujours une probabilité strictement positive d'avoir successivement, à un moment donné : système vide ; arrivée d'un élément de classe j ; arrivée d'un élément de classe i.

Démonstration : Fixons une arête $(i, j) \in \mathcal{E}$ avec $i \neq j$, c'est-à-dire $(i, j) \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}^c$.

Alors, presque-sûrement,

$$\begin{aligned}\frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{i \text{ et } j \text{ s'apparient au temps } k\}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\mathbf{1}_{\{V_k=i\}}\mathbf{1}_{\left\{W_{k-1}^{\Phi,\bar{\mu}}\in A_{i\to j}\right\}} + \mathbf{1}_{\{V_k=j\}}\mathbf{1}_{\left\{W_{k-1}^{\Phi,\bar{\mu}}\in A_{j\to i}\right\}}\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_{i,j}\left(W_k^{\Phi,\bar{\mu}}, V_{k+1}\right),\end{aligned}$$

où on a défini $\begin{array}{cccc} f_{i,j} & : & \mathbb{W}\times\mathcal{V} & \to & \{0,1\} \\ & & (w,v) & \mapsto & \mathbf{1}_{\{v=i\}}\mathbf{1}_{\left\{w\in A_{i\to j}^{\Phi}\right\}} + \mathbf{1}_{\{v=j\}}\mathbf{1}_{\left\{w\in A_{j\to i}^{\Phi}\right\}}. \end{array}$

Or,

— la suite $\left(W_k^{\Phi,\bar{\mu}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, irréductible et récurrente positive, dont l'unique loi de probabilité stationnaire est notée $\Pi_W^{\Phi,\bar{\mu}}$;

— pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, les variables aléatoires $W_k^{\Phi,\bar{\mu}}$ et V_{k+1} sont indépendantes.

On en déduit que la suite $\left(W_k^{\Phi,\bar{\mu}}, V_{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible et récurrente positive, d'espace d'états $\mathbb{W}\times\mathcal{V}$ et d'unique loi de probabilité stationnaire

$$\Pi^{\Phi,\bar{\mu}} \triangleq \Pi_W^{\Phi,\bar{\mu}} \otimes \bar{\mu}.$$

Comme la fonction $f_{i,j}$ est bornée (par 1), elle est intégrable par rapport à $\Pi^{\Phi,\bar{\mu}}$, et le théorème ergodique des chaînes de Markov assure alors que, presque-sûrement,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_{i,j}\left(W_k^{\Phi,\bar{\mu}}, V_{k+1}\right)\right) &= \sum_{w\in\mathbb{W}}\sum_{v\in\mathcal{V}} f_{i,j}(w,v)\Pi^{\Phi,\bar{\mu}}(w,v) \\ &= \sum_{w\in\mathbb{W}} \mathbf{1}_{\{w\in A_{i\to j}^{\Phi}\}}\Pi_W^{\Phi,\bar{\mu}}(w)\sum_{v\in\mathcal{V}}\mathbf{1}_{\{v=i\}}\bar{\mu}(v) \\ &\quad + \sum_{w\in\mathbb{W}} \mathbf{1}_{\{w\in A_{j\to i}^{\Phi}\}}\Pi_W^{\Phi,\bar{\mu}}(w)\sum_{v\in\mathcal{V}}\mathbf{1}_{\{v=j\}}\bar{\mu}(v) \\ &= \bar{\mu}(i)\Pi_W^{\Phi,\bar{\mu}}\left(A_{i\to j}^{\Phi}\right) + \bar{\mu}(j)\Pi_W^{\Phi,\bar{\mu}}\left(A_{j\to i}^{\Phi}\right).\end{aligned}$$

Enfin, dans le cas où $i=j$, le calcul est similaire mais le second terme n'apparaît plus.
Ceci conclut la preuve. ■

La combinaison de la Proposition 34 avec la Proposition 35 donne accès au résultat suivant, qui concerne le cumul des proportions temporelles asymptotiques du nombre d'appariements des arêtes,

Corollaire 5

Dans tout système régi par un modèle MG$(G,\Phi,\bar{\mu})$ *stable,*

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j] = \frac{1}{2}.$$

Démonstration : D'une part, la Proposition 34 assure que, presque-sûrement,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}}\frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}}{n} = \frac{1}{2},$$

et, d'autre part, la Proposition 35 garantit que, presque-sûrement,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}}\frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{n}\right) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}}\lim_{n\to+\infty}\frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{n} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}}\Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j].$$

L'unicité de la limite presque-sûre d'une suite de variables aléatoires conclut alors la preuve. ■

4.1.3 Taux d'appariements par arête (modèle MG)

Proposition 36

Dans tout système régi par un modèle $\mathrm{MG}(G, \Phi, \bar{\mu})$ *stable, pour toute arête* $(i, j) \in \mathcal{E}$*, la suite de variables aléatoires* $\left(\frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}}\right)_{n \geqslant 1}$ *converge presque-sûrement vers*

$$M^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j] \triangleq 2\Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]. \tag{4.3}$$

La quantité $M^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]$ *est appelée taux d'appariements de l'arête* $(i, j) \in \mathcal{E}$*.*

Démonstration : Fixons une arête $(i, j) \in \mathcal{E}$.
Alors, comme pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}} = \frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{n} \times \frac{n}{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}},$$

la Proposition 34 et la Proposition 35 concluent directement la preuve. ■

4.1.4 Taux d'appariements dédiés (modèle MG)

Proposition 37

Dans tout système régi par un modèle $\mathrm{MG}(G, \Phi, \bar{\mu})$ *stable, pour toute arête* $(i, j) \in \mathcal{E}$*, la suite de variables aléatoires* $\left(\frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i]}\right)_{n \geqslant 1}$ *converge presque-sûrement vers*

$$M_{i \to j}^{\Phi,\bar{\mu}} \triangleq \frac{M^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{\sum\limits_{k \in \mathcal{E}(i)} M^{\Phi,\bar{\mu}}[i,k]} = \frac{\Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{\sum\limits_{k \in \mathcal{E}(i)} \Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,k]}.$$

La quantité $M_{i \to j}^{\Phi,\bar{\mu}}$ *est appelée taux d'appariements que* i *dédie à* j*.*

Démonstration : Fixons une arête $(i, j) \in \mathcal{E}$.
Alors, comme pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i]} &= \frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}} \times \frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}}{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i]} \\
&= \frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}} \times \frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}}{\sum\limits_{k \in \mathcal{E}(i)} M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,k]} \\
&= \frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}} \times \frac{1}{\sum\limits_{k \in \mathcal{E}(i)} \left(\frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,k]}{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}}\right)},
\end{aligned}$$

la Proposition 36 conclut directement la preuve. ■

4.1.5 « Taux d'entrée = taux de sortie » (modèle MG)

Le résultat ci-dessous s'obtient en combinant la Proposition 35 avec la loi forte des grands nombres. Il permet de formaliser le fait intuitif suivant : en régime stationnaire, le taux d'entrée en chaque sommet $i \in \mathcal{V}$ est égal au taux de sortie, c'est-à-dire au cumul des proportions temporelles asymptotiques du nombre d'appariements de toutes les arêtes adjacentes à ce nœud $i \in \mathcal{V}$. Plus précisément,

Lemme 9

Dans tout système régi par un modèle $\mathrm{MG}(G, \Phi, \bar{\mu})$ *stable, pour tout* $i \in \mathcal{V}$,

$$\bar{\mu}(i) = \sum_{j \in \mathcal{V}} \left(1 + \mathbf{1}_{\{j=i\}}\right) \Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]. \tag{4.4}$$

Démonstration : Fixons un élément $i \in \mathcal{V}$ et définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}_*$, les deux variables aléatoires suivantes, définies sur Ω :

— $A_n^{\bar{\mu}}(i)$, le nombre d'arrivées d'éléments de classe i dans le système jusqu'au temps n (inclus) ;

— $D_n^{\Phi,\bar{\mu}}(i)$, le nombre de départs d'éléments de classe i du système jusqu'au temps n (inclus).

Par la loi forte des grands nombres,

$$\frac{A_n^{\bar{\mu}}(i)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{V_k=i\}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \bar{\mu}(i).$$

De plus, la Proposition 35 assure que

$$\begin{aligned}\frac{D_n^{\Phi,\bar{\mu}}(i)}{n} &= \frac{2M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,i]}{n} + \sum_{j \in \mathcal{V}\setminus\{i\}} \frac{M_n^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{n} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 2\Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,i] + \sum_{j \in \mathcal{V}\setminus\{i\}} \Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j] = \sum_{j \in \mathcal{V}} \left(1 + \mathbf{1}_{\{j=i\}}\right) \Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j].\end{aligned}$$

Au vu des deux limites ci-dessus et par unicité de la limite presque-sûre d'une suite de variables aléatoires, il nous reste à prouver que

$$\frac{A_n^{\bar{\mu}}(i) - D_n^{\Phi,\bar{\mu}}(i)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Pour ce faire, observons que pour tout $n \geqslant 1$, on a presque-sûrement que

$$\left|W_n^{\Phi,\bar{\mu}}\right|_i = A_n^{\bar{\mu}}(i) - D_n^{\Phi,\bar{\mu}}(i) + \left|W_0^{\Phi,\bar{\mu}}\right|_i, \tag{4.5}$$

où $|w|_i$ représente le nombre d'occurrences de la lettre i dans le mot w.

Par l'absurde, supposons que $\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to+\infty} \frac{A_n^{\bar{\mu}}(i)(\omega) - D_n^{\Phi,\bar{\mu}}(i)(\omega)}{n} \neq 0\right\}\right) > 0$.

On a donc existence d'un sous-ensemble $\Omega' \subset \Omega$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega') > 0$, tel que

$$\forall \omega \in \Omega', \ \lim_{n\to+\infty} \frac{A_n^{\bar{\mu}}(i)(\omega) - D_n^{\Phi,\bar{\mu}}(i)(\omega)}{n} \neq 0.$$

Considérons une réalisation $\omega \in \Omega'$.

Ainsi, si $\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n^{\bar{\mu}}(i)(\omega) - D_n^{\Phi,\bar{\mu}}(i)(\omega)}{n} > 0$, (respectivement, < 0), il suit de (4.5) qu'il existe un rang $N(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N(\omega)$, $\left|W_n^{\Phi,\bar{\mu}}(\omega)\right|_i > \left|W_0^{\Phi,\bar{\mu}}(\omega)\right|_i$ $\left(\text{respectivement, } < \left|W_0^{\Phi,\bar{\mu}}(\omega)\right|_i\right)$.

L'un dans l'autre, on obtient alors que $\Omega' \subset \liminf_{n\to\infty} \left\{\omega \in \Omega : \left|W_n^{\Phi,\bar{\mu}}(\omega)\right|_i \neq \left|W_0^{\Phi,\bar{\mu}}(\omega)\right|_i\right\}$, ce qui est absurde au vu de la récurrence de la chaîne $\left(W_n^{\Phi,\bar{\mu}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

En conclusion, $\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to+\infty} \frac{A_n^{\bar{\mu}}(i)(\omega) - D_n^{\Phi,\bar{\mu}}(i)(\omega)}{n} = 0\right\}\right) = 1$, et ceci conclut la preuve. ■

4.1.6 Toute mesure stabilisante est à poids (modèle MG)

Le résultat suivant, duquel l'inclusion $\textsc{Ncond}^+(G) \subset \mathcal{W}(G)$ du Théorème 2 suit directement (voir la remarque faite au début de la Section 3.7.1.2), s'appuie sur le Lemme 9,

Corollaire 6

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et toute politique d'appariements admissible $\Phi \in \textsc{pol}$,

$$\textsc{stab}(G, \Phi) \subset \{\bar{\mu}^\alpha : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\} \triangleq \overline{\mathcal{W}}(G) \subset \mathcal{W}(G).$$

Plus précisément,

$$\bar{\mu} \in \textsc{stab}(G, \Phi) \Rightarrow \bar{\mu} = \bar{\mu}^{\alpha^{\Phi,\bar{\mu}}},$$

avec

$$\begin{array}{rccc} \alpha^{\Phi,\bar{\mu}} & : & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}_*^+ \\ & & (i,j) & \longmapsto & \left(1 + \mathbf{1}_{\{i=j\}}\right) \Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j], \end{array} \tag{4.6}$$

où la quantité $\Theta^{\Phi,\bar{\mu}}$ est définie par (4.2).

Démonstration : Soient $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé connexe et $\Phi \in \textsc{pol}$ une politique d'appariements admissible.
Considérons une mesure de probabilité $\bar{\mu} \in \textsc{stab}(G, \Phi)$ (le cas où l'ensemble est vide rendant le résultat trivial), de sorte que le modèle $\textsc{mg}(G, \Phi, \bar{\mu})$ soit stable.
Alors, pour la famille de poids $\alpha^{\Phi,\bar{\mu}} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ définie par (4.6), l'association de (3.2) et du Lemme 9 assure que, pour tout $i \in \mathcal{V}$,

$$\bar{\mu}^{\alpha^{\Phi,\bar{\mu}}}(i) = \frac{\sum\limits_{j \in \mathcal{E}(i)} \alpha_{i,j}^{\Phi,\bar{\mu}}}{\sum\limits_{\ell \in \mathcal{V}} \sum\limits_{j \in \mathcal{E}(\ell)} \alpha_{\ell,j}^{\Phi,\bar{\mu}}} = \frac{\sum\limits_{j \in \mathcal{E}(i)} \left(1 + \mathbf{1}_{\{i=j\}}\right) \Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{\sum\limits_{\ell \in \mathcal{V}} \sum\limits_{j \in \mathcal{E}(\ell)} \left(1 + \mathbf{1}_{\{\ell=j\}}\right) \Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[\ell,j]} = \frac{\bar{\mu}(i)}{\sum\limits_{\ell \in \mathcal{V}} \bar{\mu}(\ell)} = \bar{\mu}(i),$$

ce qui conclut la preuve. ■

Il suit directement du Corollaire 6 que

$$\mu \in \textsc{stab}^+(G, \Phi) \Rightarrow \mu = \mu^{\tilde{\alpha}^{\Phi,\mu}},$$

avec

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\alpha}^{\Phi,\mu} & : & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}_*^+ \\ & & (i,j) & \longmapsto & \frac{\mu(\mathcal{V})}{\mu^{\alpha^{\Phi,\bar{\mu}}}(\mathcal{V})} \alpha^{\Phi,\bar{\mu}}, \end{array}$$

où la famille de poids $\alpha^{\Phi,\bar{\mu}}$ est définie par (4.6).

4.2 Taux d'appariements du modèle biparti étendu (MBÉ)

4.2.1 Étude des taux d'appariements du modèle MBÉ

Dans cette Section 4.2.1, nous adaptons ce qui a été fait dans la Section 4.1 au cas de tout système régi par un modèle d'appariements biparti étendu (MBÉ), défini dans la Section 3.3.1, ce qui débouchera en particulier sur un résultat (cf. Corollaire 8) permettant

— pour toute mesure $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$ rendant stable un modèle d'appariements biparti étendu (MBÉ) donné, de déterminer explicitement - à une constante multiplicative strictement positive près - la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ telle que $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_1^\alpha$ et $\tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_2^\alpha$, où les mesures $\tilde{\mu}_1^\alpha$ et $\tilde{\mu}_2^\alpha$ sont définies par (4.10) ;

— de fournir une preuve alternative directe de l'inclusion $\mathcal{N}_{\text{B}}^+(G) \subset \mathcal{W}(G)$ du Théorème 2 (voir la Section 4.2.2).

Comme nous le verrons dans la Section 4.3, cette étude des taux d'appariements du modèle MBÉ permettra également d'étudier leur insensibilité vis-à-vis de la politique d'appariements utilisée.

Commençons tout d'abord par quelques définitions,

Définition 49

Pour tout graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$, toute politique d'appariements admissible $\Phi \in$ POL et toute mesure de probabilité $\tilde{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$ fixés, on associe, à tout instant $n \geqslant 1$ et à tout couple de sommets $(i, j) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$,

— *la variable aléatoire $M_n^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i, j]$ représentant le nombre d'appariements réalisés entre i et j jusqu'au temps n (inclus) dans tout système régi par le modèle MBÉ$(G, \Phi, \tilde{\mu})$.*
Évidemment, $M_n^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i, j] = 0$ lorsque $(i, j) \notin \mathcal{E}$.
Le nombre d'appariements impliquant i jusqu'à l'instant n (inclus) dans le système est noté

$$M_n^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i] \triangleq \sum_{k \in \mathcal{E}(i)} M_n^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i, k],$$

et le nombre total d'appariements réalisés jusqu'à l'instant n (inclus) dans le système est noté

$$M_n^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}} \triangleq \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} M_n^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i, j].$$

— *la proportion temporelle du nombre d'appariements entre i et j jusqu'au temps n (inclus) dans tout système régi par le modèle MBÉ$(G, \Phi, \tilde{\mu})$, défini comme la proportion $\frac{M_n^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j]}{n}$.*

4.2.1.1 Proportion temporelle asymptotique du nombre total d'appariements (modèle MBÉ)

Proposition 38

Dans tout système régi par un modèle MBÉ$(G, \Phi, \tilde{\mu})$ stable, la proportion temporelle asymptotique du nombre total d'appariements réalisés vérifie :

$$\frac{M_n^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} 1.$$

Démonstration : La preuve est analogue à celle de la Proposition 34,

— en modifiant l'égalité (4.1) en $\left|Y_n^{\Phi,\tilde{\mu}}\right| = 2n - 2M_n^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}} + \left|Y_0^{\Phi,\tilde{\mu}}\right|$;

— en changeant tous les quotients $\frac{1}{2}$ en 1. ■

4.2.1.2 Proportion temporelle asymptotique du nombre d'appariements par arête (modèle MBÉ)

Définition 50

Pour tout graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$, toute politique d'appariements admissible $\Phi \in$ POL, tout $i \in \mathcal{V}$ et tout $j \in \mathcal{V}$ fixés, on note

$$A_{i \to j}^{\text{BÉ},\Phi} \triangleq \{\text{états de } \mathbb{Y} : \text{un item de classe } i \text{ arrivant est apparié avec un item de classe } j\},$$
$$A_{i \leftrightarrow j}^{\text{BÉ}} \triangleq \{\text{états de } \mathbb{Y} : \text{les items } i \text{ et } j \text{ arrivants sont appariés ensemble}\}.$$

Remarquons que

— $A_{i \to j}^{\text{BÉ},\Phi}$ et $A_{i \leftrightarrow j}^{\text{BÉ}}$ sont non-vides si et seulement si $(i, j) \in \mathcal{E}$;

— $A_{i \leftrightarrow j}^{\text{BÉ}}$ est indépendant de la politique Φ choisie.

Le résultat suivant se prouve alors de manière analogue à la Proposition 35,

Proposition 39

Dans tout système régi par un modèle MBÉ$(G = (\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E}), \Phi, \tilde{\mu})$ *stable, le comportement asymptotique de la proportion temporelle du nombre d'appariements réalisés par l'arête* $(i,j) \in \mathcal{E}$ *est le suivant :*

$$\frac{M_n^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j]}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j],$$

avec

$$\Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j] \triangleq \tilde{\mu}((i,\mathcal{V}_2\backslash\{j\}))\Pi_W^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}\left(A_{i\to j}^{\text{BÉ},\Phi}\right) + \tilde{\mu}((\mathcal{V}_1\backslash\{i\},j))\Pi_W^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}\left(A_{j\to i}^{\text{BÉ},\Phi}\right) + \tilde{\mu}((i,j))\Pi_W^{\text{BÉ},\Phi,\mu}\left(A_{i\leftrightarrow j}^{\text{BÉ}}\right), \tag{4.7}$$

où $\Pi_W^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}$ *représente l'unique loi de probabilité stationnaire de la chaîne récurrente positive* $\left(Y_n^{\Phi,\tilde{\mu}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
La quantité déterministe $\Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j]$ *est appelée proportion temporelle asymptotique du nombre d'appariements de l'arête* $(i,j) \in \mathcal{E}$.

Heuristiquement, la quantité $\Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j]$ correspond à la probabilité qu'à un moment donné, en régime stationnaire, un item de classe $i \in \mathcal{V}$ s'apparie avec un item de classe $j \in \mathcal{V}$. On conviendra que $\Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j] = 0$, pour tout couple $(i,j) \notin \mathcal{E}$. De plus, $\Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j] > 0$, pour chaque arête $(i,j) \in \mathcal{E}$. En effet, en régime stationnaire, on a toujours une probabilité strictement positive d'avoir successivement, à un moment donné : système vide ; arrivée d'un élément de classe j ; arrivée d'un élément de classe i.

La combinaison de la Proposition 38 avec la Proposition 39 donne accès au résultat suivant (dont la preuve peut se calquer sur celle du Corollaire 5), qui concerne le cumul des proportions temporelles asymptotiques du nombre d'appariements des arêtes,

Corollaire 7

Dans tout système régi par un modèle MBÉ$(G, \Phi, \tilde{\mu})$ *stable,*

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j] = 1.$$

4.2.1.3 Taux d'appariements par arête (modèle MBÉ)

La preuve du résultat suivant est analogue à celle de la Proposition 36,

Proposition 40

Dans tout système régi par un modèle MBÉ$(G, \Phi, \tilde{\mu})$ *stable, pour toute arête* $(i,j) \in \mathcal{E}$, *la suite de variables aléatoires* $\left(\frac{M_n^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j]}{M_n^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}}\right)_{n\geqslant 1}$ *converge presque-sûrement vers*

$$M^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j] \triangleq \Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j]. \tag{4.8}$$

La quantité $M^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j]$ *est appelée taux d'appariements de l'arête* $(i,j) \in \mathcal{E}$, *et elle coïncide avec la proportion temporelle asymptotique du nombre d'appariements de l'arête* $(i,j) \in \mathcal{E}$.

4.2.1.4 Taux d'appariements dédiés (modèle MBÉ)

La preuve du résultat suivant est analogue à celle de la Proposition 37,

Proposition 41

Dans tout système régi par un modèle MBÉ$(G, \Phi, \tilde{\mu})$ *stable, pour toute arête* $(i, j) \in \mathcal{E}$*, la suite de variables aléatoires* $\left(\dfrac{M_n^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j]}{M_n^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i]}\right)_{n\geqslant 1}$ *converge presque-sûrement vers*

$$M_{i\to j}^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}} \triangleq \frac{M^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j]}{\sum\limits_{k\in\mathcal{E}(i)} M^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,k]} = \frac{\Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j]}{\sum\limits_{k\in\mathcal{E}(i)} \Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,k]}.$$

La quantité $M_{i\to j}^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}$ *est appelée taux d'appariements que* i *dédie à* j*.*

4.2.1.5 « Taux d'entrée = taux de sortie » (modèle MBÉ)

De la même manière que pour le Lemme 9, le résultat suivant s'obtient en combinant la Proposition 39 avec la loi forte des grands nombres. Il permet de formaliser le fait intuitif suivant : en régime stationnaire, le taux d'entrée en chaque sommet $i \in \mathcal{V}$ est égal au taux de sortie, c'est-à-dire au cumul des proportions temporelles asymptotiques du nombre d'appariements de toutes les arêtes adjacentes à ce nœud $i \in \mathcal{V}$. Plus précisément,

Lemme 10

Dans tout système régi par un modèle MBÉ$(G = (\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E}), \Phi, \tilde{\mu})$ *stable, c'est-à-dire tel que* $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \in \text{STAB}_{\text{BÉ}}(G, \Phi)$*,*

$$\begin{cases} \tilde{\mu}_1(i) &= \sum\limits_{j\in\mathcal{E}(i)} \Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j], \quad \textit{pour tout } i \in \mathcal{V}_1 \ ; \\ \tilde{\mu}_2(i) &= \sum\limits_{j\in\mathcal{E}(i)} \Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j], \quad \textit{pour tout } i \in \mathcal{V}_2. \end{cases} \tag{4.9}$$

4.2.1.6 Toute mesure stabilisante est à poids (modèle MBÉ)

Introduisons tout d'abord les deux mesures de probabilité suivantes,

Définition 51

Pour tout graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$ *et toute famille de poids* $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ *fixés, on définit les mesures de probabilité conditionnelles* $\tilde{\mu}_1^\alpha \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1)$ *et* $\tilde{\mu}_2^\alpha \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_2)$ *de la façon suivante :*

$$\tilde{\mu}_1^\alpha(i) \triangleq \frac{\mu^\alpha(i)}{\mu^\alpha(\mathcal{V}_1)} = \frac{\sum\limits_{j\in\mathcal{E}(i)} \alpha_{i,j}}{\sum\limits_{\ell\in\mathcal{V}_1}\sum\limits_{j\in\mathcal{E}(\ell)} \alpha_{\ell,j}}, \ i \in \mathcal{V}_1, \quad \textit{et} \quad \tilde{\mu}_2^\alpha(i) \triangleq \frac{\mu^\alpha(i)}{\mu^\alpha(\mathcal{V}_2)} = \frac{\sum\limits_{j\in\mathcal{E}(i)} \alpha_{i,j}}{\sum\limits_{\ell\in\mathcal{V}_2}\sum\limits_{j\in\mathcal{E}(\ell)} \alpha_{\ell,j}}, \ i \in \mathcal{V}_2. \tag{4.10}$$

En combinant les équations (3.2) et (3.5), remarquons que

$$\forall i \in \mathcal{V}_1, \ \bar{\mu}^\alpha(i) = \frac{\tilde{\mu}_1^\alpha(i)}{2} \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathcal{V}_2, \ \bar{\mu}^\alpha(j) = \frac{\tilde{\mu}_2^\alpha(j)}{2}. \tag{4.11}$$

Ceci étant fait, nous sommes à présent en mesure de déduire du Lemme 10 le résultat suivant, utile à la preuve alternative de l'inclusion $\mathcal{N}_{\text{B}}^+(G) \subset \mathcal{W}(G)$ du Théorème 2,

Corollaire 8

Pour tout graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$ et toute politique d'appariements admissible $\Phi \in \text{POL}$,

$$\text{STAB}_{\text{BÉ}}(G, \Phi) \subset \left\{\tilde{\mu}^\alpha = (\tilde{\mu}_1^\alpha, \tilde{\mu}_2^\alpha) \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\right\}.$$

Plus précisément,

$$\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \in \text{STAB}_{\text{BÉ}}(G, \Phi) \Rightarrow \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_1^{\alpha^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}} \text{ et } \tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_2^{\alpha^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}},$$

avec

$$\begin{array}{rccc} \alpha^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}} & : & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & & (i,j) & \longmapsto & \Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j], \end{array} \tag{4.12}$$

où la quantité $\Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}$ est définie par (4.7).

Démonstration : Soient $G = (\mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$ un graphe biparti connexe et $\Phi \in \text{POL}$ une politique d'appariements admissible.
Considérons une mesure de probabilité $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \in \text{STAB}_{\text{BÉ}}(G, \Phi)$ (le cas où l'ensemble est vide rendant le résultat trivial), de sorte que le modèle $\text{MBÉ}(G, \Phi, \tilde{\mu})$ soit stable.
Alors, pour la famille de poids $\alpha^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ définie par (4.12), l'association de (4.10) et du Lemme 10 assure que, pour tout $i \in \mathcal{V}_1$,

$$\tilde{\mu}_1^{\alpha^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}}(i) = \frac{\sum\limits_{j \in \mathcal{E}(i)} \alpha^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}(i,j)}{\sum\limits_{\ell \in \mathcal{V}_1} \sum\limits_{j \in \mathcal{E}(\ell)} \alpha^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}(\ell,j)} = \frac{\sum\limits_{j \in \mathcal{E}(i)} \Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j]}{\sum\limits_{\ell \in \mathcal{V}_1} \sum\limits_{j \in \mathcal{E}(\ell)} \Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[\ell,j]} = \frac{\tilde{\mu}_1(i)}{\sum\limits_{\ell \in \mathcal{V}_1} \tilde{\mu}_1(\ell)} = \tilde{\mu}_1(i).$$

On a donc montré que

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_1^{\alpha^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}}.$$

Similairement, on obtient que

$$\tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_2^{\alpha^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}},$$

ce qui conclut la preuve. ■

4.2.2 Preuve alternative de l'inclusion $\mathcal{N}_{\text{B}}^+(G) \subset \mathcal{W}(G)$ du Théorème 2

Démonstration : Considérons un graphe biparti connexe $G = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2, \mathcal{E})$, et fixons une mesure $\mu \in \mathcal{N}_{\text{B}}^+(G)$.
En se référant à ce qui a été fait dans la Section 3.9, on sait donc que

$$\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \in \text{NCOND}_{\text{BÉ}}(G),$$

où $\text{NCOND}_{\text{BÉ}}(G)$ est défini par (3.7).
Or, en combinant le résultat (3.43) avec le Corollaire 8 (pour $\Phi = \text{ML}$), on obtient :

$$\text{NCOND}_{\text{BÉ}}(G) \subset \left\{\tilde{\mu}^\alpha = (\tilde{\mu}_1^\alpha, \tilde{\mu}_2^\alpha) \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) : \alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\right\},$$

ce qui garantit donc qu'il existe une famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ telle que

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_1^\alpha \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_2^\alpha, \tag{4.13}$$

où les mesures $\tilde{\mu}_1^\alpha \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1)$ et $\tilde{\mu}_2^\alpha \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_2)$ sont définies par (4.10).
Ainsi, les résultats (3.13), (4.13), et (4.11), assurent respectivement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathcal{V}_1,\ \mu(i) &= \mu(\mathcal{V}_1)\tilde{\mu}_1(i) \\ &= \mu(\mathcal{V}_1)\tilde{\mu}_1^\alpha(i) \\ &= \left(\frac{\mu(\mathcal{V})}{2}\right) \times (2\bar{\mu}^\alpha(i)) \\ &= \mu(\mathcal{V})\bar{\mu}^\alpha(i). \end{aligned}$$

De la même manière, on montre que

$$\forall j \in \mathcal{V}_2,\ \mu(j) = \mu(\mathcal{V})\bar{\mu}^\alpha(j).$$

D'où,

$$\mu = \mu(\mathcal{V})\bar{\mu}^{\alpha} = \mu(\mathcal{V})\frac{\mu^{\alpha}}{\mu^{\alpha}(\mathcal{V})},$$

ce qui permet d'écrire que

$$\mu = \mu^{\check{\alpha}}, \quad \text{où} \quad \check{\alpha} = \frac{\mu(\mathcal{V})}{\mu^{\alpha}(\mathcal{V})}\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E}),$$

et ceci conclut la preuve. ■

4.3 Étude de l'unicité des taux d'appariements

Dans cette Section 4.3, nous étudions l'*unicité* des taux d'appariements, c'est-à-dire la propriété qu'ils ont (dans certains cas) à être insensibles à la politique $\Phi \in \text{POL}$ utilisée dans le modèle d'appariements (MG ou MBÉ) étudié. Ceci débouchera en particulier sur un résultat

— donnant des « types » de graphes de compatibilités pour lesquels cette propriété est vérifiée (cf. Théorème 6) ;

— fournissant une expression explicite des taux d'appariements, sous certaines hypothèses (cf. Proposition 45).

Plus généralement, en voyant les taux d'appariements des modèles MG et MBÉ comme des critères de performance, leur insensibilité vis-à-vis de la politique $\Phi \in \text{POL}$ considérée permet de dire que toutes les politiques *se valent*, c'est-à-dire que, quelle que soit la politique Φ implémentée, les taux d'appariements associés au modèle étudié seront les mêmes, et il n'est donc pas nécessaire d'essayer d'utiliser une politique plus « compliquée » (en termes de temps de calcul, notamment) pour optimiser ce critère-ci de performance : toutes les autres politiques auront le même effet !

4.3.1 Conditions suffisantes à la politique-insensibilité des taux d'appariements

À l'aide du Lemme 9 (respectivement, du Lemme 10), on remarque que les taux d'arrivées des éléments au sein de tout système régi par un modèle d'appariements général MG (respectivement, biparti étendu MBÉ) stable s'écrivent comme des fonctions explicites des proportions temporelles asymptotiques du nombre d'appariements des arêtes, notées $\Theta^{\Phi,\bar{\mu}}$ et définies par (4.4) (respectivement, notées $\Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}$ et définies par (4.9)). Par ailleurs, en définissant (dans le cas du modèle biparti étendu), pour tout $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$, la mesure de probabilité $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, par

$$\bar{\mu}(i) = \frac{1}{2}\tilde{\mu}_1(i)\mathbf{1}_{\{i\in\mathcal{V}_1\}} + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_2(i)\mathbf{1}_{\{i\in\mathcal{V}_2\}}, \quad i \in \mathcal{V},$$

alors les systèmes d'équations (4.4) et (4.9) peuvent se réécrire sous la forme générique suivante :

$$\bar{\mu}(i) = \sum_{j\in\mathcal{E}(i)} \alpha_{i,j}, \quad i \in \mathcal{V}, \tag{S}$$

où, par (4.4) (respectivement, (4.9)) et (4.3) (respectivement, (4.8)),

— $\alpha_{i,j} = (1 + \mathbf{1}_{\{j=i\}})\Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j] = (1 + \mathbf{1}_{\{j=i\}})\frac{M^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]}{2}$, pour le modèle $\text{MG}(G, \Phi, \bar{\mu})$;

— $\alpha_{i,j} = \frac{\Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j]}{2} = \frac{M^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j]}{2}$, pour le modèle $\text{MBÉ}(G, \Phi, \tilde{\mu})$.

La famille de poids $(\alpha_{i,j})_{(i,j)\in\mathcal{E}} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ du système (S) coïncide donc (à une constante multiplicative près, selon les cas et les arêtes) avec la famille $(\Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j])_{(i,j)\in\mathcal{E}}$ (respectivement, avec la famille $(\Theta^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j])_{(i,j)\in\mathcal{E}}$) de proportions temporelles asymptotiques du nombre d'appariements des arêtes, mais aussi avec la famille $(M^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j])_{(i,j)\in\mathcal{E}}$ (respectivement, avec la famille $(M^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j])_{(i,j)\in\mathcal{E}}$) des taux d'appariements des arêtes. Ces poids dépendent donc, a priori, de la politique d'appariements Φ implémentée et ne sont alors pas uniques, en général.

Définition 52

Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé (respectivement, un graphe biparti) connexe.
On dit que les taux d'appariements sont politique-insensibles pour G lorsque, pour tout $\mu \in \text{NCOND}^{+}(G)$ (respectivement, tout $\mu \in \mathcal{N}_{\text{B}}^{+}(G)$) vérifiant $\bar{\mu} \in \text{STAB}(G, \Phi)$ (respectivement, vérifiant $\tilde{\mu} \in \text{STAB}_{\text{BÉ}}(G, \Phi)$),

la famille $(M^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j])_{(i,j)\in\mathcal{E}}$ *(respectivement, la famille* $(M^{\text{BÉ},\Phi,\tilde{\mu}}[i,j])_{(i,j)\in\mathcal{E}}$*) des taux d'appariements par arête du modèle* $\text{MG}(G,\Phi,\bar{\mu})$ *(respectivement, du modèle* $\text{MBÉ}(G,\Phi,\tilde{\mu})$*) ne dépend pas de la politique* Φ *considérée.*

Lorsqu'un graphe généralisé $G = (\mathcal{V},\mathcal{E})$ est fixé, remarquons que si, pour toute mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, le système (S) admet une unique solution, alors les taux d'appariements sont politique-insensibles pour G.

Le but de cette Section 4.3.1 est de montrer que, pour certains « types » de graphes (généralisés) connexes, les taux d'appariements sont politique-insensibles.
Pour ce faire, à $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ fixée, on se propose d'étudier les solutions du système (S) et de trouver certains « types » de graphes pour lesquels il existe une unique solution.

Faisons tout d'abord quelques rappels sur les arbres (enracinés), notion qui nous sera utile dans l'étude, à venir, des solutions de (S).

4.3.1.1 Quelques rappels sur les arbres (enracinés)

Définition 53

Un arbre est un graphe connexe qui ne contient aucun cycle.
En d'autres termes, $G = (\mathcal{V},\mathcal{E})$ *est un arbre si, pour tout* $i \in \mathcal{V}$ *et tout* $j \in \mathcal{V}$ *avec* $i \neq j$*, il existe un seul chemin injectif fini reliant* i *et* j*, c'est-à-dire que* $i - j$ *ou qu'il existe un unique* $n \in \mathbb{N}_*$ *et un unique* n*-uplet* $(i_1,\dots,i_n) \in \mathcal{V}^n$ *de sommets distincts tels que* $i - i_1 - \cdots - i_n - j$*.*
Enfin, l'arbre $G = (\mathcal{V},\mathcal{E})$ *est dit fini lorsque l'ensemble* $\mathcal{V}$ *l'est.*

Le résultat classique suivant permet de caractériser facilement un arbre,

Remarque 8

Un arbre fini est un graphe connexe dont le nombre de sommets excède le nombre d'arêtes d'une unité exactement.
Formellement, le graphe $G = (\mathcal{V},\mathcal{E})$ *est un arbre si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées :*

- G *est connexe ;*
- $|\mathcal{V}| = |\mathcal{E}| + 1$.

Définition 54

Un arbre enraciné $G = (\mathcal{V},\mathcal{E},r)$ *est un arbre orienté dans lequel le sommet* $r \in \mathcal{V}$*, appelé racine, est le seul vers lequel aucune arête n'est orientée.*
On définit une orientation sur les arêtes de l'arbre de la manière suivante : pour toute arête $(i,j) \in \mathcal{E}$*, on regarde l'unique chemin injectif reliant la racine* r *à* j *(au choix). Si ce chemin passe par* i*, on oriente l'arête* $(i,j) \in \mathcal{E}$ *de* i *vers* j*, et on note* $i \to j$ *; sinon, on oriente l'arête de* j *vers* i*, et on note* $j \to i$*. Si* $i \to j$*, on dit que* i *est le père de* j *et que* j *est le fils de* i*.*

Remarque 9

Dans tout graphe enraciné $G = (\mathcal{V},\mathcal{E},r)$*, la racine* r *n'a pas de père, alors que tous les autres sommets en ont un unique.*

Définition 55

Pour tout arbre enraciné $G = (\mathcal{V},\mathcal{E},r)$*, on définit les notions suivantes :*

- *Les feuilles (ou nœuds externes) sont les sommets ne possédant pas de fils dans l'arbre, alors que les autres sont appelés nœuds internes.*
- *La profondeur d'un nœud* $i \in \mathcal{V}$*, notée* $d_i(G)$*, est la distance de la racine* r *au nœud* i*, c'est-à-dire le nombre d'arêtes du chemin injectif reliant* r *à* i*.*
- *La profondeur de l'arbre* G*, notée* $d \triangleq d(G)$*, est la profondeur maximale d'un nœud, c'est-à-dire*
$$d = \max(\{d_i(G) : i \in \mathcal{V}\}).$$
- *La génération* $\ell \in [\![1;d]\!]$*, notée* $\mathcal{G}_\ell \triangleq \mathcal{G}_\ell(G)$*, est l'ensemble des nœuds de profondeur* ℓ*, c'est-à-dire*
$$\mathcal{G}_\ell = \{i \in \mathcal{V} : d_i(G) = \ell\}.$$

On note n_ℓ son cardinal et $\ell_1, \dots, \ell_{n_\ell}$ ses éléments (écrits de manière arbitraire).
Les sommets $d_1, \dots, d_{n_d}$ sont donc les feuilles de G qui sont de profondeur maximale (c'est-à-dire, de profondeur d).
Remarquons que G est biparti, et la bipartition de $\mathcal{V}$ est donnée par $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$, où

$$\mathcal{V}_1 = \{r\} \cup \bigcup_{\substack{\ell \in [\![1;d]\!] \\ \ell \text{ pair}}} \mathcal{G}_\ell \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_2 = \bigcup_{\substack{\ell \in [\![1;d]\!] \\ \ell \text{ impair}}} \mathcal{G}_\ell. \tag{4.14}$$

Définition 56

Pour tout arbre enraciné $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, r)$, on définit la relation d'ordre $<_\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}$ par :

$$i <_\mathcal{V} j \Leftrightarrow i \to j \text{ ou } \exists n \in \mathbb{N}_*,\ \exists (i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{V}^n,\ \begin{cases} i \to i_1\ ; \\ \forall k \in [\![1; n-1]\!],\ i_k \to i_{k+1}\ ; \\ i_n \to j. \end{cases}$$

Ainsi, $i <_\mathcal{V} j$ si i est l'un des sommets du chemin injectif reliant la racine r à j, et on dit alors que j est un descendant de i.

Définition 57

Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, r)$ un arbre enraciné.
Pour tout $\ell \in [\![1; d]\!]$ et tout $i \in [\![1; n_\ell]\!]$, on note

- *$f(\ell_i)$, le père du nœud ℓ_i ;*
- *$\mathscr{S}(\ell_i) \triangleq \{j \in \mathcal{V} : j \text{ est le fils de } \ell_i\}$, l'ensemble des fils de ℓ_i ;*
- *$\mathscr{D}(\ell_i) \triangleq \{j \in \mathcal{V} : \ell_i <_\mathcal{V} j\}$, l'ensemble des descendants de ℓ_i.*

Remarquons que

- *$f(1_i) = r$, pour tout $i \in [\![1; n_1]\!]$;*
- *$\mathscr{S}(\ell_i) \subset \mathscr{D}(\ell_i)$;*
- *$\mathscr{S}(\ell_i) = \mathscr{D}(\ell_i) = \varnothing$ si et seulement si ℓ_i est une feuille.*

Passons maintenant aux résultats concernant les solutions de (S) dans le cas d'un arbre.

4.3.1.2 Solutions de (S) : le cas de l'arbre

Lemme 11

Pour tout arbre enraciné $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, r)$ tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$ et toute mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, le système d'équations

$$\bar{\mu}(i) = \sum_{j \in \mathcal{E}(i)} \alpha_{i,j}, \quad i \in \mathcal{V} \backslash \{r\} \tag{S*}$$

admet une unique solution $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$, donnée par :

$$\alpha_{\ell_m, f(\ell_m)} = \bar{\mu}(\ell_m) + \sum_{k_j \in \mathscr{D}(\ell_m)} (-1)^{k-\ell} \bar{\mu}(k_j), \quad \ell \in [\![1; d]\!],\ m \in [\![1; n_\ell]\!], \tag{4.15}$$

où la sommation sur un ensemble vide est considérée comme nulle.

Démonstration : Considérons un arbre enraciné $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, r)$ tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$, ainsi qu'une mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, et raisonnons par analyse/synthèse.

— Analyse : Soit $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ une famille de poids qui est solution de (S*), c'est-à-dire telle que

$$\forall i \in \mathcal{V} \backslash \{r\},\ \bar{\mu}(i) = \sum_{j \in \mathcal{E}(i)} \alpha_{i,j}. \tag{4.16}$$

Fixons deux entiers $\ell \in [\![1; d]\!]$ et $m \in [\![1; n_\ell]\!]$.
En considérant qu'une somme sur un ensemble vide est nulle, l'égalité (4.16) assure que

$$\alpha_{\ell_m, f(\ell_m)} = \bar{\mu}(\ell_m) - \sum_{(\ell+1)_h \in \mathscr{S}(\ell_m)} \alpha_{\ell_m, (\ell+1)_h}.$$

Et, comme il est clair que lorsque ℓ_m est une feuille de G,

$$\alpha_{\ell_m, f(\ell_m)} = \bar{\mu}(\ell_m),$$

il suit, par induction, que

$$\alpha_{\ell_m, f(\ell_m)} = \bar{\mu}(\ell_m) + \sum_{k_j \in \mathscr{D}(\ell_m)} (-1)^{k-\ell} \bar{\mu}(k_j),$$

c'est-à-dire que la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ vérifie l'égalité (4.15).

— Synthèse : Si la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ est définie par (4.15), on vérifie alors qu'elle est solution du système (S*). ■

On en déduit le résultat suivant,

Proposition 42

Soient $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un arbre tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$ et une mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$.
En notant $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ la bipartition de $\mathcal{V}$, on a équivalence entre :

— *le système* (S) *admet une solution $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$;*

— $\bar{\mu}(\mathcal{V}_1) = \bar{\mu}(\mathcal{V}_2) = \frac{1}{2}$.

Dans ce cas, la solution est même unique.

Démonstration : Considérons un arbre $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$, ainsi qu'une mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$.
Fixons une racine $r \in \mathcal{V}$ pour l'arbre G, et considérons les ensembles $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ donnés par (4.14).

$\Rightarrow$: Supposons que la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ est l'unique solution du système (S).
Ainsi, d'une part, $\bar{\mu}(r) = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{1_i, r}$, et d'autre part, la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ est également l'unique solution du système (S*).
Le Lemme 11 assure alors que la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ est donnée par (4.15) (et est donc unique).
Enfin, par sa connexité, tous les nœuds de G sont des descendants de r.
En rassemblant tout ceci, il suit que

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}(r) &= \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{1_i, r} \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \left(\bar{\mu}(1_i) + \sum_{k_j \in \mathscr{D}(1_i)} (-1)^{k-1} \bar{\mu}(k_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \bar{\mu}(1_i) + \sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{\substack{k_j \in \mathscr{D}(1_i) \\ k \text{ impair}}} \bar{\mu}(k_j) - \sum_{\substack{k_j \in \mathscr{D}(1_i) \\ k \text{ pair}}} \bar{\mu}(k_j) \right) \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{d} \sum_{i=1}^{n_k} \bar{\mu}(k_i) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{d} \sum_{i=1}^{n_k} \bar{\mu}(k_i), \qquad (4.17) \\
&= \bar{\mu}(\mathcal{V}_2) - \bar{\mu}(\mathcal{V}_1 \backslash \{r\}),
\end{aligned}$$

ce qui revient à écrire que

$$\bar{\mu}(\mathcal{V}_1) = \bar{\mu}(\mathcal{V}_2).$$

$\Leftarrow$: Réciproquement, si $\bar{\mu}(\mathcal{V}_1) = \bar{\mu}(\mathcal{V}_2)$, le même calcul que pour le sens direct assure que la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ donnée par (4.15) vérifie $\bar{\mu}(r) = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{1_i, r}$.
Par ailleurs, le Lemme 11 garantissant que cette famille est solution de (S*), on en déduit que α est solution de (S). ■

4.3.1.3 Solutions de (S) : le cas du cycle

Proposition 43

Soient $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un n-cycle tel que $n \geqslant 2$ et une mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$.

1. *Si n est impair, le système (S) possède une unique solution.*
2. *Si n est pair, on note $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ la bipartition de $\mathcal{V}$, et le système (S) admet alors une solution si et seulement si $\bar{\mu}(\mathcal{V}_1) = \bar{\mu}(\mathcal{V}_2) = \frac{1}{2}$.*
   Dans ce cas, il y a même existence d'une infinité de solutions.

Démonstration : Considérons un n-cycle $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que $n \geqslant 2$, dont les sommets sont numérotés de 1 à n, ainsi qu'une mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$.
Le système linéaire (S), dont l'inconnue $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ est assimilée au vecteur colonne ${}^t(\alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \ldots, \alpha_{n-1,n}, \alpha_{n,1})$, peut s'écrire sous la forme $A\alpha = \bar{\mu}$, où $\bar{\mu}$ est représentée par le vecteur colonne ${}^t(\bar{\mu}(1), \bar{\mu}(2), \ldots, \bar{\mu}(n))$, et où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient que le déterminant de la matrice A vaut

$$\det(A) = 1 + (-1)^{n+1}.$$

— Cas 1 : n est impair.
Dans ce cas, la matrice A est inversible, et $A^{-1}\bar{\mu}$ est donc l'unique solution du système (S).

— Cas 2 : n est pair.
Dans ce cas, en notant L_i la ligne $i \in [\![1; n]\!]$ de la matrice A, on constate que $L_1 = \sum_{i=2}^{n} (-1)^i L_i$, c'est-à-dire qu'elle est combinaison linéaire des autres lignes.
Remarquons alors que la matrice A', de taille $(n-1) \times n$, obtenue à partir de A en lui enlevant la ligne L_1, est échelonnée en lignes et ne contient aucune ligne nulle.
Ceci assure donc que le rang de A vaut

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A') = n - 1.$$

Or, le système (S) étant compatible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left([A|\bar{\mu}]\right)$, où

$$[A|\bar{\mu}] = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & & & 0 & 1 & \bar{\mu}(1) \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 & \bar{\mu}(2) \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 & \bar{\mu}(3) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \bar{\mu}(4) \\ & & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & & 0 & 1 & 1 & \bar{\mu}(n) \end{array}\right)$$

est la *matrice augmentée* associée au système (S), il suit, en notant L_i^* la ligne $i \in [\![1; n]\!]$ de la matrice augmentée $[A|\bar{\mu}]$, que

$$\begin{aligned} \text{(S) est compatible} &\Leftrightarrow \mathrm{rg}\left([A|\bar{\mu}]\right) = n - 1 \\ &\Leftrightarrow L_1^* = \sum_{i=2}^{n} (-1)^i L_i^* \\ &\Leftrightarrow \bar{\mu}(1) = \sum_{i=2}^{n} (-1)^i \bar{\mu}(i) \\ &\Leftrightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^{n} \bar{\mu}(i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ pair}}}^{n} \bar{\mu}(i) \\ &\Leftrightarrow \bar{\mu}(\mathcal{V}_1) = \bar{\mu}(\mathcal{V}_2). \end{aligned}$$

Sous cette hypothèse, comme $\mathrm{rg}(A) = n - 1 < n$, le système (S) admet une infinité de solutions. ■

4.3.1.4 Solutions de (S) : le cas de l'arbre avec une arête additionnelle

Proposition 44

Soient $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe (tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$) formé d'un arbre auquel on a ajouté une arête, et une mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$.

1. *Si l'arête ajoutée forme un cycle de longueur impaire (auquel cas G est un graphe qui n'est pas biparti), le système (S) possède une unique solution.*
2. *Si l'arête ajoutée forme un cycle de longueur paire (auquel cas G est un graphe biparti, dont la bipartition de $\mathcal{V}$ est notée $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$), le système (S) admet alors une solution si et seulement si $\bar{\mu}(\mathcal{V}_1) = \bar{\mu}(\mathcal{V}_2) = \frac{1}{2}$.*
   Dans ce cas, il y a même existence d'une infinité de solutions.
3. *Si l'arête ajoutée est une boucle, le système (S) possède une unique solution.*

Démonstration : Considérons un graphe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$ formé d'un arbre auquel on a ajouté une arête, ainsi qu'une mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$.
Remarquons tout d'abord que si l'arête ajoutée n'est pas une boucle, elle forme un N-cycle qu'on note $\mathscr{C}$. Si ce cycle est de longueur paire, alors le graphe résultant G est biparti, tandis que s'il est de longueur impaire, le graphe résultant G n'est pas biparti.

1. Supposons que le graphe résultant G n'est pas biparti et qu'il n'est pas non plus réduit à un cycle de longueur impaire (auquel cas l'assertion 1. de la Proposition 43 s'appliquerait et conclurait directement le résultat).
   Alors, le graphe résultant G peut être vu comme le N-cycle, de longueur impaire, $\mathscr{C}$ auquel s'ajoute(nt) un (ou plusieurs) arbre(s) enraciné(s) déconnecté(s). Plus précisément, en notant $r^1, \ldots, r^p$ (où $1 \leqslant p \leqslant N$) les sommets de $\mathscr{C}$ étant de degré strictement plus grand que deux et $s^1, \ldots, s^{N-p}$ ceux étant de degré 2, alors, pour tout $l \in [\![1; p]\!]$, un arbre enraciné $\mathscr{T}^l$ est annexé au sommet r^l (sa racine).

   — Analyse : Considérons une famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ qui est solution de (S) et fixons un entier $l \in [\![1; p]\!]$.
   La famille α étant, a fortiori, solution de (S*), le Lemme 11 assure que les poids associés à toutes les arêtes de $\mathscr{T}^l$ sont déterminés de façon unique par (4.15).
   De plus, en utilisant les mêmes notations que dans (4.17) pour $\mathscr{T}^l$ et en notant a^l et b^l les deux voisins de r^l dans $\mathscr{C}$,

$$\bar{\mu}(r^l) = \alpha_{r^l,a^l} + \alpha_{r^l,b^l} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{d^l} \sum_{i=1}^{n_k^l} \bar{\mu}(k_i^l) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{d^l} \sum_{i=1}^{n_k^l} \bar{\mu}(k_i^l). \tag{4.18}$$

   Ce qui précède étant vrai pour tout $l \in [\![1; p]\!]$, la famille de poids α est alors, en particulier, solution du système

$$\breve{\mu}(\ell) = \sum_{j \in \mathcal{E}(\ell) \cap \mathscr{C}} \alpha_{\ell,j}, \quad \ell \in \mathscr{C}, \tag{S**}$$

   où la mesure $\breve{\mu} \in \mathcal{M}(\mathscr{C})$ est définie par

$$\begin{cases} \breve{\mu}(r^l) & = \bar{\mu}(r^l) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{d^l} \sum_{i=1}^{n_k^l} \bar{\mu}(k_i^l) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{d^l} \sum_{i=1}^{n_k^l} \bar{\mu}(k_i^l), \quad l \in [\![1, p]\!] \ ; \\ \breve{\mu}(s^l) & = \bar{\mu}(s^l), \quad l \in [\![1; N-p]\!]. \end{cases}$$

   Après normalisation de $\breve{\mu}$, l'assertion 1. de la Proposition 43 assure que la solution de (S**) est unique, c'est-à-dire que les poids associés à toutes les arêtes du N-cycle $\mathscr{C}$ sont déterminés de façon unique.
   Comme on a déjà remarqué que les poids associés à toutes les arêtes de chaque arbre $\mathscr{T}^l$, où $l \in [\![1; p]\!]$, sont déterminés de façon unique, la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ est donc également entièrement caractérisée de manière unique.

   — Synthèse : Si la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ est définie de la façon explicitée dans l'Analyse, on vérifie alors qu'elle est solution du système (S).

2. Supposons que le graphe résultant G est biparti (dont la bipartition de $\mathcal{V}$ est notée $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$) mais qu'il n'est pas réduit à un cycle pair (auquel cas l'assertion 2. de la Proposition 43 s'appliquerait et conclurait directement le résultat).

$\Rightarrow$: Considérons une famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ qui est solution de (S).
En faisant la même construction que dans le Cas 1., on obtient encore l'égalité (4.18), pour tout $l \in [\![1;p]\!]$.
De même, la famille α est également solution du système (S**), et l'assertion 2. de la Proposition 43 assure alors que l'existence d'une solution à ce système (S**) est équivalente à l'égalité $\breve{\mu}(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{C}) = \breve{\mu}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{C})$, qui, elle-même, est équivalente à $\bar{\mu}(\mathcal{V}_1) = \bar{\mu}(\mathcal{V}_2)$ (assertion ($\star$)).

$\Leftarrow$: Réciproquement, si $\bar{\mu}(\mathcal{V}_1) = \bar{\mu}(\mathcal{V}_2)$, on déduit du raisonnement précédent l'existence d'une solution au système (S**). De plus, pour tout $l \in [\![1;p]\!]$, les poids fournis par (4.15) donne une solution à (S*) pour l'arbre $\mathscr{T}^l$ (de racine r^l). En les unifiant, on en déduit alors l'existence d'une solution $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ à (S).

Enfin, sous la condition $\bar{\mu}(\mathcal{V}_1) = \bar{\mu}(\mathcal{V}_2)$, l'item 2. de la Proposition 43 assure qu'il existe une infinité de solutions à (S**), et donc, a fortiori, à (S).

Preuve de ($\star$) : Tout d'abord, par définition de $\breve{\mu}$,

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}(\mathcal{V}_1) &= \bar{\mu}(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{C}) + \bar{\mu}(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{C}^c) \\
&= \sum_{\substack{l=1 \\ r^l \in \mathcal{V}_1}}^{p} \bar{\mu}(r^l) + \sum_{\substack{l=1 \\ s^l \in \mathcal{V}_1}}^{N-p} \bar{\mu}(s^l) + \bar{\mu}(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{C}^c) \\
&= \sum_{\substack{l=1 \\ r^l \in \mathcal{V}_1}}^{p} \breve{\mu}(r^l) + \sum_{\substack{l=1 \\ r^l \in \mathcal{V}_1}}^{p} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{d^l} \sum_{i=1}^{n_k^l} \bar{\mu}(k_i^l) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{d^l} \sum_{i=1}^{n_k^l} \bar{\mu}(k_i^l) \right] + \sum_{\substack{l=1 \\ s^l \in \mathcal{V}_1}}^{N-p} \breve{\mu}(s^l) + \bar{\mu}(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{C}^c) \\
&= \breve{\mu}(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{C}) + \sum_{\substack{l=1 \\ r^l \in \mathcal{V}_1}}^{p} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{d^l} \sum_{i=1}^{n_k^l} \bar{\mu}(k_i^l) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{d^l} \sum_{i=1}^{n_k^l} \bar{\mu}(k_i^l) \right] + \bar{\mu}(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{C}^c). \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Or, dans chaque arbre enraciné $\mathscr{T}^l$ de G (où $l \in [\![1;p]\!]$), les sommets des générations paires appartiennent au même sous-ensemble de la bipartition que r^l. Ainsi,

$$\bar{\mu}(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{C}^c) = \sum_{\substack{l=1 \\ r^l \in \mathcal{V}_1}}^{p} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{d^l} \sum_{i=1}^{n_k^l} \bar{\mu}(k_i^l) \right] + \sum_{\substack{l=1 \\ r^l \in \mathcal{V}_2}}^{p} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{d^l} \sum_{i=1}^{n_k^l} \bar{\mu}(k_i^l) \right]. \qquad (4.20)$$

L'association de (4.19) et de (4.20) assure alors que

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}(\mathcal{V}_1) &= \breve{\mu}(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{C}) + \sum_{\substack{l=1 \\ r^l \in \mathcal{V}_1}}^{p} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{d^l} \sum_{i=1}^{n_k^l} \bar{\mu}(k_i^l) \right] + \sum_{\substack{l=1 \\ r^l \in \mathcal{V}_2}}^{p} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{d^l} \sum_{i=1}^{n_k^l} \bar{\mu}(k_i^l) \right] \\
&= \breve{\mu}(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{C}) + \sum_{l=1}^{p} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{d^l} \sum_{i=1}^{n_k^l} \bar{\mu}(k_i^l) \right].
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en échangeant les rôles (symétriques) de $\mathcal{V}_1$ et de $\mathcal{V}_2$,

$$\bar{\mu}(\mathcal{V}_2) = \breve{\mu}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{C}) + \sum_{l=1}^{p} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{d^l} \sum_{i=1}^{n_k^l} \bar{\mu}(k_i^l) \right],$$

et ainsi,

$$\bar{\mu}(\mathcal{V}_1) = \bar{\mu}(\mathcal{V}_1) \Leftrightarrow \breve{\mu}(\mathcal{V}_1 \cap \mathscr{C}) = \breve{\mu}(\mathcal{V}_2 \cap \mathscr{C}),$$

ce qui clôt la preuve de l'assertion ($\star$).

3. Supposons que l'arête ajoutée est une boucle, disons sur le sommet $r \in \mathcal{V}$.
Le graphe résultant G peut alors être vu comme un arbre enraciné (de racine r).
   — Analyse : Considérons une famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ qui est solution du système (S).
   La famille α étant, a fortiori, solution de (S*), le Lemme 11 assure qu'elle est donnée, de façon unique, par (4.15).
   En combinant ceci avec (4.17), on trouve que

$$\begin{cases}
\alpha_{\ell_m, f(\ell_m)} &= \bar{\mu}(\ell_m) + \sum_{k_j \in \mathscr{D}(\ell_m)} (-1)^{k-\ell} \bar{\mu}(k_j), \quad \ell \in [\![1;d]\!],\ m \in [\![1;n_\ell]\!]\ ; \\
\alpha_{r,r} &= \bar{\mu}(r) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{d} \sum_{i=1}^{n_k} \bar{\mu}(k_i) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{d} \sum_{i=1}^{n_k} \bar{\mu}(k_i).
\end{cases} \qquad (4.21)$$

— Synthèse : Si la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ est donnée par (4.21), on vérifie alors qu'elle est solution du système (S). ■

4.3.1.5 Bilan

L'association des Propositions 42, 43 et 44 débouche directement sur le résultat suivant,

Théorème 6

Les taux d'appariements sont politique-insensibles pour $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ (où $|\mathcal{V}| \geqslant 2$) dans les cas suivants :

1. *G est un cycle de taille impaire ;*
2. *G est un arbre ;*
3. *G est un arbre avec une arête additionnelle formant un cycle de taille impaire ;*
4. *G est un arbre avec une boucle additionnelle.*

De plus, dans ces cas, les taux d'appariements sont donnés (à une constante multiplicative près) par l'unique solution du système (S) - ceci sera précisé ultérieurement par la Proposition 45.

Remarquons que si $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est un arbre (item 2.), il est implicitement supposé que $\bar{\mu}(\mathcal{V}_1) = \bar{\mu}(\mathcal{V}_2) = \frac{1}{2}$, où $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ est la bipartition de $\mathcal{V}$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $\bar{\mu} \notin \mathcal{N}_{\text{B}}^{+}(G)$, et le modèle d'appariements biparti étendu (MBÉ) associé ne pourrait alors pas être stable, ce qui ne permettrait pas de définir les taux d'appariements.

Question ouverte :

- *Le Théorème 6 fournit des exemples de graphes (généralisés) pour lesquels les taux d'appariements sont politique-insensibles. Cette liste n'étant cependant, a priori, pas exhaustive, peut-on trouver d'autres « types » de graphes généralisés (voire tous) ayant cette propriété ?*

4.3.2 Exemples

4.3.2.1 Cas avec unicité

Le graphe $G_1 = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, représenté à gauche de la Figure 4.1, rentre dans le cadre de l'item 3. du Théorème 6. Ainsi, le graphe G_1 ne possédant pas de boucle, l'équation (4.4) assure que, dans tout système régi par un modèle $\text{MG}(G_1, \Phi, \bar{\mu})$ stable, les proportions temporelles asymptotiques $\Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[\cdot,\cdot]$ du nombre d'appariements par arête sont données par $\alpha = A^{-1}\bar{\mu}$, pour

$$\alpha \triangleq \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,3} \\ \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,4} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mu} = \begin{pmatrix} \bar{\mu}(1) \\ \bar{\mu}(2) \\ \bar{\mu}(3) \\ \bar{\mu}(4) \end{pmatrix}.$$

4.3.2.2 Cas sans unicité

Le graphe généralisé $G_2 = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ représenté à droite de la Figure 4.1 ne satisfait pas les hypothèses du Théorème 6, et le système (S) associé n'a pas une solution unique. En effet, considérons la mesure $\bar{\mu} = {}^t(3/10\ 3/10\ 2/10\ 2/10)$, qui est clairement un élément de $\text{NCOND}(G_2)$. On remarque que, pour tout $x \in]0; 3/20[$, $A\alpha^x = \bar{\mu}$, pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^x \triangleq \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^x \\ \alpha_{1,2}^x \\ \alpha_{2,3}^x \\ \alpha_{2,4}^x \\ \alpha_{3,4}^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{3}{10} - 2x \\ x \\ x \\ \frac{2}{10} - x \end{pmatrix},$$

comme donné dans la Figure 4.1.
Par exemple, selon nos simulations faites en Section B.2.2, les proportions temporelles asymptotiques $\Theta^{\text{FCFM},\bar{\mu}}[\cdot,\cdot]$ des nombres d'appariements par arête sont données (approximativement) par la famille de poids $\alpha^{0.098}$.

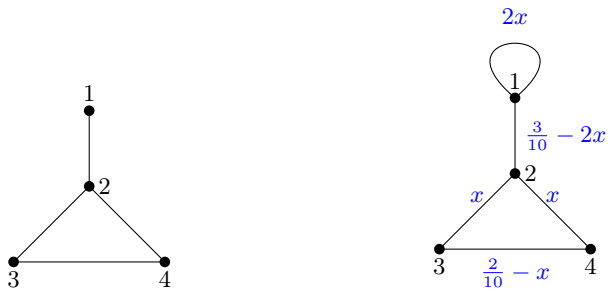

FIGURE 4.1 – Graphes G_1 (à gauche) et G_2 (à droite).

4.3.3 Expression explicite des taux d'appariements

Proposition 45

Soient $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé connexe (tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$) qui n'est pas biparti, une politique d'appariements $\Phi \in$ POL, et une mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$.
Supposons que

($\rhd$) *la politique d'appariements $\Phi \in$ POL est telle que $\bar{\mu} \in$ STAB(G, Φ) ;*

($\rhd\rhd$) *le système (S) associé à la mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ possède une unique solution, notée $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$.*

Sous ces hypothèses,

$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ M^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j] = \frac{\alpha_{i,j}}{(1 + \mathbf{1}_{\{i=j\}}) \times \mathcal{C}_\alpha},$$

où

$$\mathcal{C}_\alpha \triangleq \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \frac{\alpha_{i,j}}{1 + \mathbf{1}_{\{i=j\}}},$$

c'est-à-dire que, dans tout système régi par le modèle MG$(G, \Phi, \bar{\mu})$, les taux d'appariements sont donnés explicitement par la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ engendrant $\bar{\mu}$, et sont, comme prévus, politique-insensibles.

Remarquons que

— l'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ du Corollaire 2 assure que, lorsque Φ est une politique maximale généralisée (au sens de la Définition 19) - et donc, par exemple, lorsque $\Phi =$ FCFM (cf. Théorème 1) ou $\Phi =$ ML (cf. Theorem 4.7 de [7]), la condition ($\rhd$) équivaut à $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{W}}(G)$;

— la condition ($\rhd\rhd$) est en particulier vérifiée lorsque G est un graphe d'un type listé dans le Théorème 6 (excepté le type 2. puisque G n'est pas biparti).

Démonstration : Considérons un graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$ et qui n'est pas biparti, une politique d'appariements $\Phi \in$ POL, ainsi qu'une mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, et supposons les conditions ($\rhd$) et ($\rhd\rhd$) vérifiées.
Tout d'abord, la condition ($\rhd$), combinée au Corollaire 6, assure que

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}^{\alpha^{\Phi,\bar{\mu}}},$$

où

$$\begin{array}{rccc} \alpha^{\Phi,\bar{\mu}} & : & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}_*^+ \\ & & (i,j) & \longmapsto & \left(1 + \mathbf{1}_{\{i=j\}}\right) \Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j], \end{array}$$

puis, la condition ($\rhd\rhd$) garantit alors l'existence d'une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\alpha = \lambda \alpha^{\Phi,\bar{\mu}},$$

c'est-à-dire que

$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ \Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j] = \frac{\alpha_{i,j}}{\lambda\left(1 + \mathbf{1}_{\{i=j\}}\right)}. \tag{4.22}$$

Le Corollaire 5 assurant alors que $\lambda = 2\mathcal{C}_\alpha$, où $\mathcal{C}_\alpha \triangleq \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \frac{\alpha_{i,j}}{1+\mathbf{1}_{\{i=j\}}}$, l'assertion (4.3), combinée avec (4.22), permet d'écrire que

$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ M^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j] = \frac{\alpha_{i,j}}{\left(1+\mathbf{1}_{\{i=j\}}\right)\mathcal{C}_\alpha},$$

ce qui conclut la preuve. ■

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la Proposition 45,

Corollaire 9

Soient $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé connexe (tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$) qui n'est pas biparti, deux politiques d'appariements $\Phi_1 \in \text{POL}$ et $\Phi_2 \in \text{POL}$, et une mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$.
Supposons que

($\diamond$) *les politiques d'appariements Φ_1 et Φ_2 sont telles que $\bar{\mu} \in \text{STAB}(G, \Phi_1) \cap \text{STAB}(G, \Phi_2)$;*

($\diamond\diamond$) *le système (S) associé à la mesure $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ possède une unique solution.*

Sous ces hypothèses,

$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ M^{\Phi_1,\bar{\mu}}[i,j] = M^{\Phi_2,\bar{\mu}}[i,j],$$

c'est-à-dire que dans tout système régi par le modèle $\text{MG}(G, \Phi_1, \bar{\mu})$ ou par le modèle $\text{MG}(G, \Phi_2, \bar{\mu})$, les taux d'appariements coïncident.

Remarquons que

— l'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ du Corollaire 2 assure que, lorsque Φ est une politique maximale généralisée (au sens de la Définition 19) - et donc, par exemple, lorsque $\Phi = \text{FCFM}$ (cf. Théorème 1) ou $\Phi = \text{ML}$ (cf. Theorem 4.7 de [7]), la condition ($\diamond$) équivaut à $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{W}}(G)$;

— la condition ($\diamond\diamond$) est en particulier vérifiée lorsque G est un graphe d'un type listé dans le Théorème 6 (excepté le type 2. puisque G n'est pas biparti).

4.4 Étude de l'équité des taux d'appariements par arête

On obtient l'*équité* des taux d'appariements par arête lorsque la mesure (ou loi) d'arrivées est construite de telle sorte qu'aucune arête n'est privilégiée par rapport aux autres pour réaliser les appariements au sein du système, c'est-à-dire que les taux d'appariements de chaque arête sont égaux. Cette notion d'équité constitue donc naturellement un critère de performance intéressant en pratique. Voir par exemple [17].

Définition 58

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et toute politique d'appariements admissible $\Phi \in \text{POL}$, on dit que $\bar{\mu} \in \text{STAB}(G, \Phi)$ réalise l'équité des taux d'appariements par arête lorsque

$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ M^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j] = \frac{1}{|\mathcal{E}|}.$$

On note alors

$$\mathcal{F}(G, \Phi) \triangleq \{\bar{\mu} \in \text{STAB}(G, \Phi) : \bar{\mu} \text{ réalise l'équité des taux d'appariements par arête}\}.$$

Définition 59

Pour tout graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, on définit la famille de poids $\alpha^* \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{E}$ par :

$$\begin{array}{rccc} \alpha^* & : & \mathcal{E} & \to & \mathbb{R}_*^+ \\ & & (i,j) & \mapsto & 1 + \mathbf{1}_{\{i=j\}}. \end{array}$$

La mesure à poids associée, notée $\bar{\mu}^{\alpha^*} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$, est alors donnée par :

$$\forall i \in \mathcal{V},\ \bar{\mu}^{\alpha^*}(i) = \frac{\deg(i) + \mathbf{1}_{\{i\in\mathcal{V}_\mathcal{S}\}}}{2|\mathcal{E}|}.$$

Théorème 7

Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe généralisé connexe tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$ et qui n'est pas biparti.

1. *Pour toute politique d'appariements admissible $\Phi \in \text{POL}$,*
$$\mathcal{F}(G, \Phi) \subset \left\{\bar{\mu}^{\alpha^*}\right\},$$
c'est-à-dire que la mesure $\bar{\mu}^{\alpha^*} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ est la seule capable de réaliser l'équité des taux d'appariements par arête.
2. *Supposons que*
   ($\star$) *la politique d'appariements $\Phi \in \text{POL}$ est telle que $\bar{\mu}^{\alpha^*} \in \text{STAB}(G, \Phi)$;*
   ($\star\star$) *le système (S) associé à la mesure $\bar{\mu}^{\alpha^*} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ possède une unique solution (alors forcément donnée par $\frac{\alpha^*}{2|\mathcal{E}|}$).*

   Sous ces hypothèses,
$$\bar{\mu}^{\alpha^*} \in \mathcal{F}(G, \Phi), \text{ et donc } \mathcal{F}(G, \Phi) = \left\{\bar{\mu}^{\alpha^*}\right\}.$$

Remarquons que

— l'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ du Corollaire 2 assure que la condition ($\star$) est en particulier vérifiée lorsque Φ est une politique maximale généralisée (au sens de la Définition 19) - et donc, par exemple, lorsque $\Phi = \text{FCFM}$ (cf. Théorème 1) ou $\Phi = \text{ML}$ (cf. Theorem 4.7 de [7]) ;

— la condition ($\star\star$) est en particulier vérifiée lorsque G est un graphe d'un type listé dans le Théorème 6 (excepté le type 2. puisque G n'est pas biparti).

Question ouverte : L'item 2. du Théorème 7 donne des conditions permettant à la mesure $\bar{\mu}^{\alpha^*} \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ de réaliser l'équité des taux d'appariements par arête.

- *Qu'en est-il des conditions nécessaires ?*

Démonstration : Considérons un graphe généralisé connexe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tel que $|\mathcal{V}| \geqslant 2$ et qui n'est pas biparti.

1. Fixons une politique d'appariements admissible $\Phi \in \text{POL}$.
   La cas où $\mathcal{F}(G, \Phi) = \varnothing$ rendant le résultat trivial, on suppose que $\mathcal{F}(G, \Phi) \neq \varnothing$.
   Pour aboutir au résultat, faisons 2 raisonnements parallèles :
   — Raisonnement 1 : Fixons une mesure $\bar{\mu} \in \mathcal{F}(G, \Phi)$.
   Par définition, elle appartient alors à l'ensemble $\text{STAB}(G, \Phi)$, et le Corollaire 6 assure donc que
$$\bar{\mu} = \bar{\mu}^{\alpha^{\Phi, \bar{\mu}}}, \tag{4.23}$$
   où
$$\begin{array}{rccc} \alpha^{\Phi,\bar{\mu}} & : & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}_*^+ \\ & & (i,j) & \longmapsto & \left(1 + \mathbf{1}_{\{i=j\}}\right) \Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j]. \end{array}$$
   — Raisonnement 2 : Fixons une mesure $\bar{\mu} \in \mathcal{F}(G, \Phi)$.
   Ainsi, par définition,
$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ M^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j] = \frac{1}{|\mathcal{E}|},$$
   et l'assertion (4.3) assure donc que
$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ \Theta^{\Phi,\bar{\mu}}[i,j] = \frac{1}{2|\mathcal{E}|}.$$
   D'où,
$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ \alpha_{i,j}^{\Phi,\bar{\mu}} = \frac{1 + \mathbf{1}_{\{i=j\}}}{2|\mathcal{E}|}.$$
   Ainsi, par définition de $\bar{\mu}^{\alpha^{\Phi,\bar{\mu}}}$ et de $\bar{\mu}^{\alpha^*}$,
$$\forall i \in \mathcal{V},\ \bar{\mu}^{\alpha^{\Phi,\bar{\mu}}}(i) = \frac{\sum\limits_{j \in \mathcal{E}(i)} \left(1 + \mathbf{1}_{\{i=j\}}\right)}{\sum\limits_{\ell \in \mathcal{V}} \sum\limits_{j \in \mathcal{E}(\ell)} \left(1 + \mathbf{1}_{\{\ell=j\}}\right)} = \frac{\deg(i) + \mathbf{1}_{\{i \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}\}}}{2|\mathcal{E}|} = \bar{\mu}^{\alpha^*}(i),$$

ce qui garantit donc que

$$\bar{\mu}^{\alpha^{\Phi,\bar{\mu}}} = \bar{\mu}^{\alpha^*}. \tag{4.24}$$

Ainsi, en combinant les résultats (4.23) et (4.24), on obtient :

$$\bar{\mu} \in \mathcal{F}(G,\Phi) \Rightarrow \bar{\mu} = \bar{\mu}^{\alpha^*},$$

ce qui conclut.

2. Supposons les conditions ($\star$) et ($\star\star$) vérifiées.
Tout d'abord, la condition ($\star$), associée avec le Corollaire 6, assure que

$$\bar{\mu}^{\alpha^*} = \bar{\mu}^{\alpha^{\Phi,\bar{\mu}^{\alpha^*}}},$$

où

$$\begin{array}{rccc} \alpha^{\Phi,\bar{\mu}^{\alpha^*}} & : & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}_*^+ \\ & & (i,j) & \longmapsto & \left(1+\mathbf{1}_{\{i=j\}}\right)\Theta^{\Phi,\bar{\mu}^{\alpha^*}}[i,j]. \end{array}$$

La condition ($\star\star$) fournit alors l'existence d'une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\alpha^* = \lambda \alpha^{\Phi,\bar{\mu}^{\alpha^*}},$$

c'est-à-dire que

$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ 1+\mathbf{1}_{\{i=j\}} = \lambda\left(1+\mathbf{1}_{\{i=j\}}\right)\Theta^{\Phi,\bar{\mu}^{\alpha^*}}[i,j],$$

ce qui équivaut à

$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ \frac{1}{\lambda} = \Theta^{\Phi,\bar{\mu}^{\alpha^*}}[i,j]. \tag{4.25}$$

Le Corollaire 5 assurant alors que $\lambda = 2|\mathcal{E}|$, l'assertion (4.3), combinée avec (4.25), garantit que

$$\forall (i,j) \in \mathcal{E},\ M^{\Phi,\bar{\mu}^{\alpha^*}}[i,j] = \frac{1}{|\mathcal{E}|},$$

c'est-à-dire que

$$\bar{\mu}^{\alpha^*} \in \mathcal{F}(G,\Phi),$$

et ceci conclut. ■

Remarquons qu'il se peut tout-à-fait que la mesure $\bar{\mu}^{\alpha^*}$ ne réalise pas l'équité des taux d'appariements par arête (auquel cas il n'existe alors pas de telle mesure). En effet, si $\bar{\mu}^{\alpha^*}$ coïncide avec une mesure $\bar{\mu}^{\alpha}$, où α est une famille de poids non-proportionnelle à α^* (ce qui revient à dire que la condition ($\star\star$) du Théorème 7 n'est pas vérifiée), les taux d'appariements par arête peuvent tout aussi bien être donnés par la famille α^* que par la famille α, ou même encore par une autre famille de poids, et dans ce cas, on ne peut alors rien affirmer concernant l'équité. Par contre, si l'on sait que c'est une famille de poids non-proportionnelle à α^* qui donne les taux d'appariements par arête, alors, dans ce cas, on peut assurer qu'il n'y a pas équité de ces taux.
Si l'on revient à la Section 4.3.2.2 présentant l'exemple d'un cas sans unicité, la famille α^* correspond à $\alpha^{1/10}$, mais il existe, cependant, une infinité d'autres familles de poids non-proportionnelles à α^* générant la même mesure $\bar{\mu}^{\alpha^*}$. Ceci implique en particulier que les valeurs des taux d'appariements par arête ne peuvent pas être prédites directement. En effet, comme annoncé dans ladite Section, une simulation numérique a permis de montrer que les proportions temporelles asymptotiques $\Theta^{\text{FCFM},\bar{\mu}}[\cdot,\cdot]$ des nombres d'appariements par arête sont en réalité données (approximativement) par la famille de poids $\alpha^{0.098}$, non-proportionnelle à α^*, et on peut donc conjecturer que l'équité n'a pas lieu dans ce cas.

Enfin, l'Exemple 8 ci-dessous permet de montrer que $\mathcal{F}(\widetilde{G},\text{FCFM}) = \varnothing$, où $\widetilde{G}$ est le graphe généralisé connexe qui n'est pas biparti, représenté par la Figure 4.2.

Exemple 8

Pour le graphe généralisé $\widetilde{G}$ (représenté par la Figure 4.2), en combinant (4.2), (4.3) et l'item 2. du Théorème 1, on a, pour toute mesure $\bar{\mu} \in \text{STAB}(\widetilde{G},\text{FCFM})$,

— $M^{\text{FCFM},\bar{\mu}}[1,1] = 2\bar{\mu}(1)\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\{1\}) = 2\alpha\bar{\mu}(1)^2$;
— $M^{\text{FCFM},\bar{\mu}}[2,2] = 2\bar{\mu}(2)\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\{2\}) = 2\alpha\bar{\mu}(2)^2$;
— $M^{\text{FCFM},\bar{\mu}}[1,2] = 2\bar{\mu}(1)\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\{2\}) + 2\bar{\mu}(2)\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\{1\}) = 4\alpha\bar{\mu}(1)\bar{\mu}(2)$;

— $M^{\text{FCFM},\bar{\mu}}[2,3] = 2\bar{\mu}(2)\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\{3^k : k \in \mathbb{N}_*\}) + 2\bar{\mu}(3)\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\{2\}) = \frac{2\alpha\bar{\mu}(2)\bar{\mu}(3)}{1-2\bar{\mu}(3)} + 2\alpha\bar{\mu}(3)\bar{\mu}(2)$;

— $M^{\text{FCFM},\bar{\mu}}[3,1] = 2\bar{\mu}(3)\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\{1\}) + 2\bar{\mu}(1)\Pi_W^{\text{FCFM},\bar{\mu}}(\{3^k : k \in \mathbb{N}_*\}) = 2\alpha\bar{\mu}(1)\bar{\mu}(3) + \frac{2\alpha\bar{\mu}(1)\bar{\mu}(3)}{1-2\bar{\mu}(3)}$,

où α représente la quantité $\alpha(\widetilde{G}, \text{FCFM}, \bar{\mu})$.
La combinaison des trois premières équations assure alors qu'il n'existe pas, dans le cas étudié, de mesure $\bar{\mu}$ vérifiant l'équité des taux d'appariements par arête, c'est-à-dire que

$$\mathcal{F}(\widetilde{G}, \text{FCFM}) = \emptyset.$$

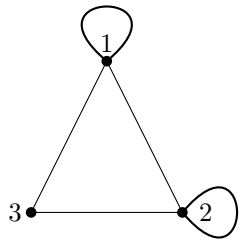

FIGURE 4.2 – Graphe généralisé $\widetilde{G}$.

Bibliographie

[1] Adan I., Bušić A., Mairesse J., and Weiss G. Reversibility and further properties of FCFS infinite bipartite matching. Mathematics of Operations Research, 43 (2), 598–621 (2018). MR3801108.

[2] Adan I., Kleiner I., Righter R., and Weiss G. FCFS parallel service systems and matching models. Performance Evaluation, 127-128, 253–272 (2018). DOI : 10.1016/j.peva.2018.10.005.

[3] Adan I. and Weiss G. Exact FCFS matching rates for two infinite multitype sequences. Operations Research, 60(2), 475–489 (2012). MR2935072.

[4] Adan I. and Weiss G. A skill based parallel service system under FCFS-ALIS - steady state, overloads, and abandonments. Stochastic Systems, 4(1), 250-299 (2014).

[5] Aveklouris A., DeValve L., Ward A. R., and Wu X. Matching Impatient and Heterogeneous Demand and Supply. ArXiv math.PR/2102.02710 (2021).

[6] Begeot J., Marcovici I., and Moyal P. Stability regions of systems with compatibilities, and ubiquitous measures on graphs. Probability (math.PR). arXiv :2111.13231 (2021).

[7] Begeot J., Marcovici I., Moyal P., and Rahmé Y. A general stochastic matching model on multigraphs. ALEA, 18, 1325-1351 (2021).

[8] Biró P., Haase-Kromwijk B., Andersson T., Ásgeirsson E.I., Baltesová T., Boletis I., Bolotinha C., Bond G., Böhmig G., Burnapp L., Cechlárová K., Di Ciaccio P., Fronek J., Hadaya K., Hemke A., Jacquelinet C., Johnson R., Kieszek R., Kuypers D.R., Leishman R., Macher M.A., Manlove D., Menoudakou G., Salonen M., Smeulders B., Sparacino V., Spieksma F.C.R., Valentín M.O., Wilson N., Van der Klundert J. ENCKEP COST Action. Building Kidney Exchange Programmes in Europe-An Overview of Exchange Practice and Activities. Transplantation, 103(7), 1514-1522 (2019).

[9] Boxma O. J., David I., Perry D., and Stadje W. A new look at organ transplantation models and double matching queues. Probability in the Engineering and Informational Sciences, 25(2), 135–155 (2011). MR2786745.

[10] Büke B. and Chen H. Fluid and diffusion approximations of probabilistic matching systems. Queueing Systems, 86(1-2), 1–33 (2017). MR3642009.

[11] Bušić A., Gupta V., and Mairesse J. Stability of the bipartite matching model. Advances in Applied Probability, 45(2), 351–378 (2013). MR3102455.

[12] Cadas A., Bušić A., and Doncel J. Optimal control of dynamic bipartite matching models. Proceedings of the 12th EAI International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools, 39-46 (2019).

[13] Caldentey R., Kaplan E. H., and Weiss G. FCFS infinite bipartite matching of servers and customers. Advances in Applied Probability, 41(3), 695–730 (2009). MR2571314.

[14] Chen J., Dong J., and Shi P. A survey on skill-based routing with applications to service operations management. Queueing Systems : Theory and Applications, 96, 53-82 (2020).

[15] Comte C. Stochastic non-bipartite matching models and order-independent loss queues. Stochastic Models, 1-36 (2021).

[16] Comte C. and Dorsman J.-P. Performance Evaluation of Stochastic Bipartite Matching Models. Performance Engineering and Stochastic Modeling, Lecture in computer science, Springer, 425-440 (2021).

[17] Comte C., Mathieu F., and Bušić A. Stochastic dynamic matching : A mixed graph-theory and linear-algebra approach. ArXiv preprint, arXiv :2112.14457 (2021).

[18] Farkas J. Theorie der einfachen Ungleichungen. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 124, 1-27 (1902).

[19] Ford L. and Fulkerson D. R. Flows in networks. Princeton university press (2015).

[20] Gurvich I. and Ward A. On the dynamic control of matching queues. Stochastic Systems, 4(2), 479–523 (2014). MR3353225.

[21] Hall P. On Representatives of Subsets. Journal of the London Mathematical Society, 10(1), 26-30 (1935).

[22] Jonckheere M., Moyal P., Ramírez C., and Soprano-Loto N. Generalized max-weight policies in stochastic matching. ArXiv Mathematics e-prints, arXiv :2011.0453 (2020).

[23] Kerimov S., Ashlagi I., and Gurvich I. On the optimality of greedy policies in dynamic matching. Available at SSRN 3918497 (2021).

[24] Mairesse J. and Moyal P. Stability of the stochastic matching model. Journal of Applied Probability, 53(4), 1064-1077 (2017).

[25] Moyal P., Bušić A., and Mairesse J. A product form for the general stochastic matching model. Journal of Applied Probability, 58(2), 449-468 (2021).

[26] Moyal P., Bušić A., and Mairesse J. Loynes construction for the extended bipartite matching. ArXiv math.PR/1803.02788 (2018).

[27] Moyal P. and Perry O. On the instability of matching queues. Annals of Applied Probability, 27(6), 3385–3434 (2017). MR3737928.

[28] Nazari M. and Stolyar A. L. Reward maximization in general dynamic matching systems. Queueing Systems, 91(1-2), 143–170 (2019). MR3911245.

[29] Rahmé Y. and Moyal P. A stochastic matching model on hypergraphs. Advances in Applied Probability, 53(4), 951-980 (2021).

[30] Tassiulas L. and Ephremides A. Dynamic server allocation to parallel queues with randomly varying connectivity. IEEE Transactions on Information Theory, 39(2), 466-478 (1993).

[31] Visschers J., Adan I., and Weiss G. A product form solution to a system with multi-type jobs and multi-type servers. Queueing Systems : Theory and Applications, 70(3), 269-298 (2012).

Annexe A

Notations générales

Opérations sur les ensembles

Pour deux ensembles quelconques E et F, on note

- $E \backslash F \triangleq \{x \in E : x \notin F\}$, la différence de E et F ;
- $F^c = E \backslash F$, le complémentaire de F (dans E, implicitement), lorsque $F \subset E$;
- $E \uplus F$, la réunion de E et F, lorsqu'ils sont disjoints.

Mesures et mots sur des ensembles

Le mot vide, c'est-à-dire celui constitué d'aucune lettre, est noté ε, et, pour tout ensemble fini A, on note

- $|A|$ (ou $\mathrm{Card}(A)$), le *cardinal* de A, c'est-à-dire le nombre d'éléments de A ;
- A^*, l'ensemble des mots finis sur l'alphabet A ;
- $A^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des mots infinis sur l'alphabet A ;
- $\mathcal{P}(A)$, l'ensemble de tous les sous-ensembles de A ;
- $\mathrm{Unif}(A)$, la loi uniforme sur l'ensemble A ;
- $\mathcal{M}(A)$, l'ensemble des mesures positives finies de support A ;
- $\overline{\mathcal{M}}(A)$, l'ensemble des mesures de probabilité de support A ;
- $\mathcal{M}^{\geqslant 0}(A)$, l'ensemble des mesures positives dont le support est inclus dans A.

Remarquons la suite d'inclusions $\overline{\mathcal{M}}(A) \subset \mathcal{M}(A) \subset \mathcal{M}^{\geqslant 0}(A)$.

Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(A)$, on note $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(A)$ la mesure normalisée associée, c'est-à-dire

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu(A)}.$$

Pour deux ensembles finis A et B, si $\bar{\mu} \in \overline{\mathcal{M}}(A \times B)$, on note $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2)$ pour signifier que

- $\bar{\mu}_1 \in \overline{\mathcal{M}}(A)$ est la première marginale de $\bar{\mu}$;
- $\bar{\mu}_2 \in \overline{\mathcal{M}}(B)$ est la seconde marginale de $\bar{\mu}$.

Pour tout ensemble E quelconque et tous sous-ensembles $\mathcal{A}$ et $(\mathcal{A}_i)_{i \geqslant 1}$ de E, on note

- $\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n \triangleq \{a_1 \dots a_n : \forall i \in [\![1; n]\!],\ a_i \in \mathcal{A}_i\}$, l'ensemble des mots de $n \geqslant 1$ lettres dont la $i^{\text{ème}}$ appartient à l'alphabet $\mathcal{A}_i$, pour chaque $i \in [\![1; n]\!]$.
- $\mathcal{A}^k \triangleq \{a_1 \dots a_k : \forall i \in [\![1; k]\!],\ a_i \in \mathcal{A}\}$, l'ensemble des mots de $k \geqslant 1$ lettres formés avec l'alphabet $\mathcal{A}$, où, par convention, $\mathcal{A}^0 = \varepsilon$.
- $\mathcal{A}^* \triangleq \biguplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^k$, l'ensemble des mots finis sur l'alphabet $\mathcal{A}$.

Applications

Pour tout ensemble E quelconque, on note

— $\mathbf{1}_E$ la fonction indicatrice de E, c'est-à-dire $\mathbf{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

— Id_E l'application identité sur E, c'est-à-dire $\begin{array}{rccc} \mathrm{Id}_E & : & E & \to & E \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$.

L'application valeur absolue est notée $|\cdot|$, c'est-à-dire $\begin{array}{rccc} |\cdot| & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \mapsto & |x| \end{array}$.

Pour toute fonction $f : X \to Y$, où X et Y sont des ensembles respectivement quelconque et totalement ordonné, et pour tout sous-ensemble $X' \subset X$, on note

$$\operatorname*{argmax}_{x \in X'}(f(x)) \triangleq \{x \in X' : \forall y \in X',\ f(y) \leqslant f(x)\}$$

et

$$\operatorname*{argmin}_{x \in X'}(f(x)) \triangleq \{x \in X' : \forall y \in X',\ f(y) \geqslant f(x)\}.$$

Vecteurs

Tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est noté $x = \begin{pmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{pmatrix}$ ou ${}^t(x(1), \ldots, x(n))$, et on écrit

— $x \geqslant 0$, si et seulement si $x(i) \geqslant 0$, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$;

— $\mathfrak{I}(x) \triangleq \{x(1), \ldots, x(n)\}$;

— $|x| \triangleq {}^t(|x(1)|, \ldots, |x(n)|)$;

— $0_n \triangleq {}^t(0, \ldots, 0)$, le vecteur nul de taille n ;

— $\mathbf{e}_i$, le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

Matrices

Toute famille M d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par un produit cartésien (fini) $I \times J$ est vue comme une matrice, et on note $M = (M(i,j))_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$.

De plus, on écrit

— ${}^tM = (M(j,i))_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$, sa transposée ;

— $\det(M)$, son déterminant ;

— $\mathrm{rg}(M)$, son rang.

Topologie

Pour tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on note

— $\mathrm{B}_{\|\cdot\|}(x, r) \triangleq \{y \in E : \|y - x\| < r\}$, la boule ouverte centrée en $x \in E$ et de rayon $r > 0$;

— $\mathring{A} \triangleq \mathrm{int}(A) \triangleq \{x \in E : \exists r > 0,\ \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(x, r) \subset A\}$, l'intérieur de $A \subset E$.

Annexe B

Simulations

Remarque : Tous les programmes proposés ci-dessous sont écrits en langage Python.

```
import numpy as np
from numpy.linalg import eig
from random import *
```

Pour les simulations numériques concrètes, on considérera le graphe généralisé (pondéré) G représenté par la Figure 3.1, où les poids seront donnés par $(a, b, c, d, e) = (1, 2, 3, 4, 5)$. Dans ce cas, la matrice des poids (vue comme une liste de listes) est donc

$$A = [[1, 2, 0, 0], [2, 0, 3, 4], [0, 3, 0, 5], [0, 4, 5, 0]].$$

B.1 Mesures à poids

Le programme suivant retourne la loi de probabilité $\bar{\mu}^\alpha \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{V})$ associée à la famille de poids $\alpha \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ sur les arêtes d'un graphe généralisé $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, dont la matrice des poids est donnée par A, où $A[i][j] = \alpha_{i,j}$.

```
def mu_barre_alpha(A):
    m=[]
    for i in range (len(A)):
        m.append(sum(A[i]))
    S=sum(m)
    m=[i/S for i in m]
    return(m)
```

On obtient :

```
mu_barre_alpha(A)=
[0.10344827586206896,
 0.3103448275862069,
 0.27586206896551724,
 0.3103448275862069]
```

B.2 Sous politique FCFM

B.2.1 Processus d'appariements : simulation du buffer

Par commodité pour l'écriture des programmes, on supposera que l'ensemble des sommets du graphe considéré est numéroté de 0 à $|\mathcal{V}| - 1$. En particulier, pour le graphe G de la Figure 3.1 considéré, l'ensemble des sommets est noté $\{0, 1, 2, 3\}$ (au lieu de $\{1, 2, 3, 4\}$), en conservant l'ordre.

Le programme suivant simule une arrivée d'un item dans le système selon la loi $\bar{\mu}^{\alpha}$:

```
def arrivée(A):
    m=mu_barre_alpha(A)
    c=0
    C=[] #C=vecteur des sommes cumulées#
    for i in range (len(m)):
        c=c+m[i]
        C.append(c)
    a=random() #a est un réel aléatoire entre 0 et 1#
    i=0
    while a>=C[i]:
        i=i+1
    return(i)
```

Le programme suivant permet de mettre à jour le buffer (sous la politique FCFM), représenté par une liste L, après l'arrivée dans le système d'un item de classe v, et de recenser l'éventuel appariement qui s'est produit dans une matrice (vue comme une liste de listes) M. La matrice M n'est composée que de 0, mais $M[i][j] = M[j][i] = 1$ s'il y a eu appariement entre i et j dans le système.

```
def majliste(A,L,v):
    M=[[0 for i in range(len(A))] for j in range (len(A))]
    if len(L)==0:
        return([v],M)
    else:
        V=[]
        for i in range(len(L)): #V sera de même taille que L#
            if A[v][L[i]]==0:
                V.append(0) #On met un 0 dans V si l'élément de L correspondant#
                 #n'est pas voisin de l'item de classe v arrivant#
            else:
                V.append(1) #On met un 1 dans V si l'élément de L correspondant#
                 #est voisin de l'item de classe v arrivant#
        if sum(V)==0:
            return(L+[v],M)
        else:
            i=0
            while V[i]==0:
                i=i+1
            M[v][L[i]]=1
            M[L[i]][v]=1
            del L[i]
            return(L,M)
```

Par exemple,

```
majliste(A,[0,3],arrivée(A))
=([3], [[0, 1, 0, 0], [1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0]])
```

signifie qu'un item de classe 1 est entré dans le système et qu'on a donc eu un appariement (sous politique FCFM) entre l'item arrivant et celui de classe 0 déjà présent. Le buffer, initialement composé d'un item de classe 0 et d'un autre de classe 3 n'est alors plus composé que de l'item de classe 3.

Plus généralement, on peut maintenant simuler l'état d'un système (initialement vide) régi par le modèle $\text{MG}(G, \text{FCFM}, \bar{\mu}^{\alpha})$, après n arrivées :

```
def buffer_n(A,n):
    W=[] #le buffer est vide à l'instant initial (W0=\emptyset)#
    for i in range(n): #on fait n fois le processus suivant#
        a=arrivée(A) #on détermine l'item qui arrive dans le système#
        W=majliste(A,W,a)[0] #on met à jour le buffer après arrivée de cet item#
    return(W)
```

Par exemple,

```
buffer_n(A,10)=[0, 3]
```

signifie qu'après 10 arrivées dans le système (initialement vide), il est maintenant composé d'un item de classe 0 et d'un item de classe 3 (arrivés dans cet ordre).

B.2.2 Taux d'appariements par arête

Le programme suivant permet de faire la somme terme à terme des matrices (vues comme listes de listes) B et C (carrées, et supposées de mêmes tailles) prises en argument :

```
def somme_matrices(B,C):
    M=[[0 for i in range(len(B))] for j in range (len(B))]
    for i in range(len(B)):
        for j in range(len(B)):
            M[i][j]=B[i][j]+C[i][j]
    return(M)
```

Le programme suivant renvoit la matrice M recensant les appariements qui se sont produits après N arrivées au sein d'un système régi par le modèle $\text{MG}(G, \text{FCFM}, \bar{\mu}^{\alpha})$, lorsqu'il est dans son état stationnaire. Remarquons que $M[i][j]$ est le nombre d'appariements qui se sont produits entre un item de classe i et un de classe j.

```
def matrice_matchings_regime_stat(A,n): #n=nombre d'arrivées "en régime stationnaire"#
    W=[] #le buffer est vide à l'instant initial#
    for i in range(10000):
        a=arrivée(A)
        W=majliste(A,W,a)[0] #le W final est W_10000#
          #(supposé suivre la loi stationnaire --> temps "long")#
    M=[[0 for i in range(len(A))] for j in range (len(A))]
    for i in range(n):
        a=arrivée(A)
        S=majliste(A,W,a)
        M=somme_matrices(M,S[1])
        W=S[0]
    return(M)
```

Par exemple, on peut simuler et avoir

```
matrice_matchings_regime_stat(A,100)
=[[1, 11, 0, 0], [11, 0, 12, 11], [0, 12, 0, 14], [0, 11, 14, 0]]
```

Le programme suivant renvoit, en premier argument, la proportion temporelle du nombre total d'appariements, c'est-à-dire la quantité $\frac{M_n^{\text{FCFM},\bar{\mu}^{\alpha}}}{n}$, et en second, la matrice des taux d'appariements par arête, dont l'élément en place $[i][j]$ représente la quantité $M^{\text{FCFM},\bar{\mu}^{\alpha}}[i,j]$.

```
def taux_matchings_regime_stat(A,n): #n=nombre d'arrivées "en régime stationnaire"#
    M=matrice_matchings_regime_stat(A,n)
    C=0
    for i in range (len(M)):
        for j in range(i,len(A)):
            C=C+M[i][j]    #C représente le nombre total de matchings#
                #effectués en n arrivées d'items#
    Prop_temporelle_matchings=C/n
    T=[[0 for i in range(len(M))] for j in range (len(M))]
    for i in range (len(T)):
        for j in range (len(T)):
            T[i][j]=M[i][j]/C
    Matrice_des_taux_matchings_par_arête=T
    return(Prop_temporelle_matchings,Matrice_des_taux_matchings_par_arête)
```

Par exemple, on peut simuler et avoir

```
taux_matchings_regime_stat(A,1000)=
(0.5,
 [[0.028, 0.136, 0.0, 0.0],
  [0.136, 0.0, 0.202, 0.336],
  [0.0, 0.202, 0.0, 0.298],
  [0.0, 0.336, 0.298, 0.0]])
```

Le résultat de la simulation est bien cohérent avec la Proposition 34 et l'association du Corollaire 5 et de la Proposition 36.

Le programme suivant renvoit la moyenne (sur 100 réalisations) des proportions temporelles des nombres totaux d'appariements, ainsi que la matrice des taux d'appariements par arête (moyennés sur les 100 réalisations). Ceci fournit donc une meilleure précision que le programme précédent.

```
def taux_matchings_moyens_regime_stat(A,n):
    L=[]
    M=[[0 for i in range(len(A))] for j in range (len(A))]
    for i in range(100):
        T=taux_matchings_regime_stat(A,n)
        L=L+[T[0]] #L=liste contenant les 100 proportions temporelles#
            #des nombres d'appariements par arête#
        M=somme_matrices(M,T[1]) #M='matrice' où on a sommé#
          #les 100 taux d'appariements par arête#
    Prop_temporelle_matchings_moyenne=sum(L)/100
    Matrice_taux_match_moyens_par_arête=[[0 for i in range(len(M))] for j in range (len(M))]
    for i in range (len(M)):
        for j in range (len(M)):
            Matrice_taux_match_moyens_par_arête[i][j]=M[i][j]/100
    print('Proportion temporelle moyenne des appariements =')
    print(Prop_temporelle_matchings_moyenne)
    print('Matrice des taux d appariements moyens par arête =')
    print(Matrice_taux_match_moyens_par_arête)
```

Par exemple, on peut simuler et avoir

```
taux_matchings_moyens_regime_stat(A,10000)=
Proportion temporelle moyenne des appariements = 0.49999899999999975
Matrice des taux d appariements moyens par arête =
[[0.04711404139984761, 0.11322019950044629, 0.0, 0.0],
[0.11322019950044629, 0.0, 0.21877472059321512, 0.2880984336393824],
[0.0, 0.21877472059321512, 0.0, 0.33279260486710854],
[0.0, 0.2880984336393824, 0.33279260486710854, 0.0]]
```

Revenons ci-dessous au cas étudié dans la Section 4.3.2.2, et considérons la matrice de poids (vue comme liste de listes)

$$P = [[0.2, 0.1, 0, 0], [0.1, 0, 0.1, 0.1], [0, 0.1, 0, 0.1], [0, 0.1, 0.1, 0]],$$

correspondant à $\alpha^{1/10}$, et engendrant donc, comme annoncé, la mesure $\bar{\mu} = {}^t(0.3, 0.3, 0.2, 0.2)$.
Maintenant, en simulant, on obtient les valeurs numériques suivantes :

```
taux_matchings_moyens_regime_stat(P,10000)=
Proportion temporelle moyenne des appariements = 0.4999989999999999
Matrice des taux d appariements moyens par arête =
[[0.19681839083032376, 0.20733423043812496, 0.0, 0.0],
[0.20733423043812496, 0.0, 0.19642843603154655, 0.195420495585212],
[0.0, 0.19642843603154655, 0.0, 0.2039984471147925],
[0.0, 0.195420495585212, 0.2039984471147925, 0.0]]
```

Par (4.4) et (4.3),

$$\alpha_{i,j} = (1 + \mathbf{1}_{\{j=i\}})\Theta^{\text{FCFM},\bar{\mu}}[i,j] = (1 + \mathbf{1}_{\{j=i\}})\frac{M^{\text{FCFM},\bar{\mu}}[i,j]}{2},$$

et on peut donc conjecturer numériquement que les proportions temporelles asymptotiques $\Theta^{\text{FCFM},\bar{\mu}}[\cdot,\cdot]$ des nombres d'appariements par arête sont données (approximativement) par la famille de poids $\alpha^{0.098}$.

Enfin, juste pour l'exemple ci-dessous, supposons que le système étudié soit régi par le modèle $\text{MG}(G_1, \text{FCFM}, \bar{\mu}^{\alpha^*})$, où G_1 est le graphe (à gauche) représenté par la Figure 4.1.
Dans ce cas, la matrice des poids (vue comme une liste de listes) est donc

$$B = [[0,1,0,0],[1,0,1,1],[0,1,0,1],[0,1,1,0]].$$

On peut donc simuler et avoir, par exemple,

```
taux_matchings_moyens_regime_stat(B,10000)=
Proportion temporelle moyenne des appariements = 0.4999849999999999
Matrice des taux d appariements moyens par arête =
[[0.0, 0.2501953283787623, 0.0, 0.0],
[0.2501953283787623, 0.0, 0.2491459734276778, 0.24998334476723308],
[0.0, 0.2491459734276778, 0.0, 0.2506753534263269],
[0.0, 0.24998334476723308, 0.2506753534263269, 0.0]]
```

Expérimentalement, on peut alors conjecturer qu'il y a équité des taux d'appariements par arête, ce qui est effectivement confirmé mathématiquement par le Théorème 7, étant donné que G_1 est un graphe du type 3., listé dans le Théorème 6.

B.3 Sous politique ML

Les programmes de cette Section B.3 sont l'adaptation de ceux de la Section B.2 au cas où la politique Φ considérée est ML.

B.3.1 Processus d'appariements : simulation du buffer

```
def tirage_uniforme(L): #on veut tirer un élément de la liste L selon la#
#loi uniforme (discrète)#
    n=len(L) #on note n=Card(L)#
    a=random() #on tire un nombre aléatoire entre 0 et 1#
    T=np.linspace(0.0, 1.0, num=n+1) #on crée une liste composée de n+1 éléments#
          #uniformément répartis entre 0 et 1 (compris)#
    i=1
    while a>=T[i]: #le i obtenu sera tel que a soit compris entre (i-1)/n et i/n#
        i=i+1
    return(L[i-1]) #on retourne le i-ème élément de la liste L#

def majliste_ML(A,L,v):
    M=[[0 for i in range(len(A))] for j in range (len(A))]
    if L==[0]*len(L): #si le buffer est vide#
        L[v]=L[v]+1
        return(L,M) #on renvoit la liste mise à jour (1 élément de classe v)#
         #+ la matrice des appariements, qui est remplie de zéros#
    else: #Cas où le buffer n'est pas vide#
        V=[] #V est un vecteur qui va recenser les items présents dans le buffer#
             #(et conserver leur quantité) qui peuvent matcher avec v#
             #(=les matchings potentiels)#
             #En fait, V=L sauf aux endroits correspondants aux items#
             #qui ne peuvent pas matcher avec v, auquel cas on change la valeur en 0#
        for i in range(len(L)): #V sera de même taille que L, c.-à-d. de même taille#
          #que le nombre de sommets du graphe#
```

```
            if A[v][i]==0: #si v n'est pas voisin de i sur le graphe#
                V.append(0) #On met un 0 dans V si l'élément de L correspondant n'est#
                  #pas voisin du v arrivant#
            else: #si v est voisin de i sur le graphe, il faut regarder si le buffer#
               #contient des items de classe i#
                if L[i]==0: #Si i n'est pas présent dans le buffer#
                    V.append(0) #On met un 0 dans V#
                else: #Si i est présent dans le buffer#
                    V.append(L[i]) #On recopie la valeur de L[i] dans V#
                        #--> possible mariage entre v et i#
        if sum(V)==0: #S'il n'y a pas d'appariement possible entre v et un élément du buffer#
            L[v]=L[v]+1 #On ajoute un item de classe v au buffer#
            return(L,M) #On renvoit la liste mise à jour + la matrice des appariements,#
             #qui est remplie de zéros#
        else: #S'il y a (au moins) un appariement possible entre v et un élément du buffer#
            m=max(V) #On regarde le/les appariement(s) possible(s) ayant le plus grand#
              #nombre d'éléments dans le buffer#
            I=[] #I sera la liste composée des index des 'm' de V - c.-à-d. des classes#
              #des items pouvant s'apparier avec le v arrivant, en ML#
            for i,e in enumerate(V):
                if e==m:
                    I.append(i)
            u=tirage_uniforme(I) #On tire uniformément parmi les possibilités (en ML)#
              #l'item qui va matcher avec v#
              #On sait donc maintenant que c'est l'item u qui va matcher avec v#
            L[u]=L[u]-1 #On retire un item de classe u du buffer#
             #(puisqu'il matche avec le v arrivant)#
            M[u][v]=1 #On recense le matching entre u et v dans la matrice M#
            M[v][u]=1 #idem#
            return(L,M) #L=buffer mis à jour et M est la matrice recensant les appariements :#
             #si M(i,j)=1 (ou M(j,i)=1), alors on a eu appariement entre i et j#

def buffer_n_ML(A,n): #A=matrice des poids #renvoit l'état du buffer au temps n#
  #(après n arrivées) et sous politique ML --> Wn#
    W=[0]*len(A) #Le buffer est vide à l'instant initial#
    for i in range(n): #On fait n fois le processus suivant#
        a=arrivée(A) #On détermine l'item qui arrive dans le système#
        W=majliste_ML(A,W,a)[0] #On met à jour le buffer après arrivée de cet item#
    return(W)
```

B.3.2 Taux d'appariements par arête

```
def somme_matrices(B,C):
    M=[[0 for i in range(len(B))] for j in range (len(B))]
    for i in range(len(B)):
        for j in range(len(B)):
            M[i][j]=B[i][j]+C[i][j]
    return(M)

def matrice_matchings_regime_stat_ML(A,n):
    W=[0]*len(A) #Le buffer est vide à l'instant initial#
    for i in range(10000):
        a=arrivée(A)
        W=majliste_ML(A,W,a)[0] #Le W final est W_10000#
                                #(supposé suivre la loi stationnaire --> temps "long")#
    M=[[0 for i in range(len(A))] for j in range (len(A))]
    for i in range(n):
        a=arrivée(A)
```

```
        S=majliste_ML(A,W,a)
        M=somme_matrices(M,S[1])
        W=S[0]
    return(M)  #M=matrice des appariements au bout de N arrivées (en régime stat.)#
               #- si M[i][j]=m (ou M[j][i]=m), on a eu m appariements entre i et j#
               #- sous politique ML#

def taux_matchings_regime_stat_ML(A,n):
    M=matrice_matchings_regime_stat_ML(A,n)
    C=0
    for i in range (len(M)):
        for j in range(i,len(A)):
            C=C+M[i][j]  #C représente le nombre total d'appariements effectués#
              #en n arrivées d'items#
    Prop_temporelle_matchings_ML=C/n
    T=[[0 for i in range(len(M))] for j in range (len(M))]
    for i in range(len(T)):
        for j in range (len(T)):
            T[i][j]=M[i][j]/C
    Matrice_des_taux_matchings_par_arête_ML=T
    return(Prop_temporelle_matchings_ML,Matrice_des_taux_matchings_par_arête_ML)

def taux_matchings_moyens_regime_stat_ML(A,n):
    L=[]
    M=[[0 for i in range(len(A))] for j in range (len(A))]
    for i in range(100): #Je fais la moyenne sur 100 itérations
        T=taux_matchings_regime_stat_ML(A,n)
        L=L+[T[0]] #L=liste contenant les 100 proportions temporelles des#
         #nombres d'appariements par arête#
        M=somme_matrices(M,T[1]) #M='matrice' où on a sommé les 100 taux#
          #d'appariements par arête#
    Prop_temporelle_matchings_moyenne_ML=sum(L)/100
    Matrice_taux_match_moyens_par_arête_ML=[[0 for i in range(len(M))] for j in range (len(M))]
    for i in range (len(M)):
        for j in range (len(M)):
            Matrice_taux_match_moyens_par_arête_ML[i][j]=M[i][j]/100
    print('Proportion temporelle moyenne des appariements (en ML) =')
    print(Prop_temporelle_matchings_moyenne_ML)
    print('Matrice des taux d appariements moyens par arête (en ML) =')
    print(Matrice_taux_match_moyens_par_arête_ML)
```

Juste pour l'exemple ci-dessous, supposons que le système étudié soit régi par le modèle $\mathrm{MG}(G_1, \mathrm{ML}, \bar{\mu}^{\alpha^*})$, où G_1 est le graphe (à gauche) représenté par la Figure 4.1. Dans ce cas, la matrice des poids (vue comme une liste de listes) est

$$B = [[0,1,0,0],[1,0,1,1],[0,1,0,1],[0,1,1,0]].$$

On peut donc simuler et avoir, par exemple,

```
taux_matchings_moyens_regime_stat_ML(B,10000)=
#Proportion temporelle moyenne des appariements (en ML) = 0.49999099999999985
#Matrice des taux d appariements moyens par arête (en ML) =
[[0.0, 0.24934809560454307, 0.0, 0.0],
[0.24934809560454307, 0.0, 0.25041083279772414, 0.24984308907447947],
[0.0, 0.25041083279772414, 0.0, 0.25039798252325324],
[0.0, 0.24984308907447947, 0.25039798252325324, 0.0]]
```

Expérimentalement, on peut alors conjecturer qu'il y a équité des taux d'appariements par arête, ce qui est effectivement confirmé mathématiquement par le Théorème 7, étant donné que G_1 est un graphe du type 3., listé dans le Théorème 6.