



HAL
open science

Les ondes longues internes : génération et interaction avec la houle

Katell Guizien

► **To cite this version:**

Katell Guizien. Les ondes longues internes : génération et interaction avec la houle. Océan, Atmosphère. Université Joseph Fourier (Grenoble 1), 1998. Français. NNT : 1998GRE10227 . tel-03893009

HAL Id: tel-03893009

<https://hal.science/tel-03893009>

Submitted on 10 Dec 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER GRENOBLE I
SCIENCES & GÉOGRAPHIE

THÈSE

présentée par

Katell GUIZIEN

pour obtenir le titre de

Docteur

de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Géophysique**

**Les ondes longues internes :
génération et interaction avec la
houle**

Date de soutenance : 17 novembre 1998

Composition du jury :

M. D. Renouard	Président
M. C. Kharif	Rapporteur
M. T.J. Sherwin	Rapporteur
M. A. Temperville	Examineur
M. E. Barthélemy	Examineur

Thèse préparée au sein du
Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels

Résumé :

L'activité économique maritime s'étant éloignée de la côte pour se rapprocher du bord du talus continental, les exploitants se trouvent confrontés à des mouvements baroclines qui peuvent être de grandes amplitudes, les ondes longues internes. Dans ce mémoire, on présente donc deux aspects concernant les ondes longues internes. Dans une première partie, la génération de ces ondes lors de l'interaction de la marée externe avec le talus continental a été étudié. Il a été montré grâce à un modèle linéaire d'ondes longues en bi-couche que l'incidence oblique de la marée ainsi que la rotation terrestre n'étaient pas à négliger. Le modèle a été validé en le comparant à des mesures in-situ réalisées sur le Malin Shelf (Ecosse). Dans la seconde partie, nous nous sommes intéressés à l'interaction de ces ondes longues internes avec la houle de surface. En effet, sur les images de SAR, on peut observer la signature des ondes internes laissée en surface. Une première étude expérimentale d'interaction entre une onde solitaire de surface et une onde courte monochromatique barotrope a été menée simulant la différence d'échelle existant entre une onde longue interne et des vagues de vent. Des déphasages importants de l'onde courte ont été mesurés, en bon accord avec ceux prédits par un modèle théorique utilisant la technique WKB également présenté dans ce mémoire. Ce modèle a aussi conduit à estimer les modulations d'amplitude de l'onde courte à travers la conservation de l'action d'onde mais ce point n'a pu être testé expérimentalement. Enfin, des expériences d'interaction entre une onde solitaire interne et une onde courte externe ont été menées en milieu stratifié. Les modulations de la phase se sont avérées trop faibles pour être mesurées, et celles de l'amplitude ne sont pas décrites par la conservation de l'action d'onde établie théoriquement pour le cas de la première série d'expériences.

Mots clés : onde interne ; ondes longue ; onde de surface ; génération ; interaction ; réfraction ; mesure in-situ ; WKB ; expérience

Summary :

Economical activities at sea have been moving from the coast towards the continental margins where baroclinic motion, sometimes of large amplitude, are to be faced. These are long internal waves of which we present two aspects in this report. In the first part, the generation of long linear internal wave by the external tide interacting with the continental step is examined. Importance of the oblique incidence of the tide and earth rotation have been settled within a two-layer long wave model. This model has been validated bearing the comparison with in-situ data from the Malin Shelf (Scotland). In the second part, the interaction between long internal waves and surface waves has been studied. Indeed, the surface signature of internal waves can be observed on SAR images. Firstly, experiments of interaction between an external solitary wave and short monochromatic surface waves have been carried out, in order to take into account the scale difference that exists between long internal wave and wind waves. Large phase shift have been measured on the short wave train, in good agreement with the predictions of a theoretical model based on WKBJ technique developed in this report. This model also gives short wave amplitude modulations through the wave action conservation, but this was not tested experimentally. Lastly, experiments of interaction between an internal solitary wave and short surface waves in a stratified medium revealed that phase shifts were too small to be measured. It also showed that wave action conservation, as obtained theoretically for the first set of experiments, did not apply to describe the short wave amplitude modulations.

Keywords : internal wave ; long wave ; surface wave ; generation ; interaction ; refraction ; field measurements ; WKBJ ; experiment

Merci à Vous

Voici certainement l'exercice le plus périlleux de l'après-thèse. Comment n'oublier personne ? Pour la petite histoire, en DEA, j'ai fait pire. J'avais tout simplement oublier les remerciements. Alors, pour une fois que j'y pense, si j'oublie de vous nommer, je remercie en groupe tout ceux qui m'ont soutenue, aidée, encouragée ... au cours de ces 3 années.

Ceci dit, certaines personnes méritent une mention spéciale. Evidemment, Eric Barthélemy qui a été pour moi un directeur de thèse idéal, toujours disponible quand cela a été nécessaire tout en me laissant une liberté d'action tout-à-fait appréciable. Je le remercie également pour m'avoir incitée à effectuer un séjour à l'Université du Pays de Galles à Bangor et m'avoir bien conseillé pour tous les petits détails pratiques.

Bien sûr, je remercie chaleureusement Toby Sherwin et Mark Inall ainsi que toute l'équipe de UCES pour m'avoir si bien accueilli lors de ce séjour et pour la culture océanographique de terrain qu'ils ont pu me communiquer au cours des "tea breaks".

Je remercie également les membres de mon jury de thèse, Christian Kharif et Toby Sherwin pour le temps qu'ils ont bien voulu accorder à la lecture attentive de ce manuscrit pour faire leurs rapports, Dominique Renouard pour avoir accepté de présider ce jury ainsi qu'André Temperville.

Enfin, je remercie tous les autres, les membres de l'équipe Houle passés et présents pour leur soutien moral, scientifique et technique : Cristèle, Mathieu, Philippe (Larroudé), André, Hervé, Nicolas et bien sûr Jean-Marc, mon compère homme-grenouille pour les manip dans le grand canal.

Plus personnellement, je remercie doudou Philou pour son soutien, surtout dans les derniers moments après l'arrivée d'Erwan.

Encore une fois merci à vous tous,
Katell

Table des matières

1	Introduction	7
I	Génération de la marée interne sur les marges continentales	13
2	Génération de la marée interne	13
2.1	Revue bibliographique	13
2.2	Ondes longues 3D	15
2.2.1	Notations et hypothèses	15
2.2.2	Equations linéaires de base et expression des pressions	16
2.2.3	Equations pour les dénivelées d'interface et de surface	17
2.2.4	Equations en modes normaux	18
2.2.5	Solutions générales en milieu infini ou semi-infini et discussion	19
2.2.6	Solutions progressives ou ondes de Poincaré	20
2.2.7	Expression des vitesses et énergies	21
2.3	Incidence normale sur une marche	22
2.4	Incidence quelconque sur une marche	24
2.4.1	Cas général	25
2.4.2	Simplification : faible différence de densité et couche mince	28
2.5	Analyse qualitative des résultats théoriques	29
2.5.1	Influence de la rotation en incidence normale	29
2.5.2	Influence de l'incidence avec ou sans rotation	29
2.5.3	Comparaison avec le modèle de Baines	31
2.6	Conclusion	32
3	Mesures in-situ de la marée interne	33
3.1	Introduction	33
3.2	Description des données in-situ	36
3.2.1	Choix des données, situation géographique et bathymétrie	36
3.2.2	Instrumentation et données disponibles	39
3.3	Méthodes d'analyse	40
3.3.1	Méthode EOF : test de l'hypothèse bi-couche	41
3.3.2	Détermination unique du bi-couche équivalent	42
3.3.3	Analyse harmonique de la marée	44
3.4	Analyse des données	45
3.4.1	Malin Shelf, juillet 1996	45
3.4.2	Malin Shelf, juillet 1983	70
3.4.3	Iberian Shelf, août 1994	71

3.5	Conclusion	72
II Etude expérimentale et théorique de l'interaction entre une houle courte de surface et une onde solitaire		77
4	Etude théorique de l'interaction externe-externe	79
4.1	Equations de base non linéaires	81
4.2	Méthode de perturbations : linéarisation et solutions périodiques	82
4.3	Analyse WKB : cas $\delta \ll \mu$	85
4.3.1	Détermination de la phase à l'ordre 0	86
4.3.2	Détermination de l'amplitude du potentiel à l'ordre 0	88
4.4	Application au cas de l'onde solitaire	88
4.4.1	Ordres de grandeur	90
4.4.2	Détermination de $k(X)$ - Relation de dispersion	91
4.4.3	Conservation de la "wave action"	93
4.5	Calculs pour différentes solutions d'ondes solitaires	93
4.5.1	Variation de la phase de l'onde courte sur l'onde solitaire	94
4.5.2	Variation de l'amplitude de l'onde courte sur l'onde solitaire	96
4.6	Conclusion	97
5	Etude expérimentale de l'interaction externe-externe	99
5.1	Dispositif expérimental	99
5.1.1	Description de l'équipement	99
5.1.2	Matériel d'acquisition	100
5.1.3	Génération de la houle courte	102
5.1.4	Génération de l'onde solitaire	107
5.2	Dépouillement des expériences et incertitudes	110
5.2.1	Traitement des enregistrements expérimentaux	110
5.2.2	Erreurs liées à la présence d'une onde dispersive	111
5.2.3	Variabilité du déphasage calculé sur des enregistrements de houle courte seule	113
5.3	Résultats expérimentaux et discussion	116
5.3.1	Convention de présentation et discussion des déphasages expérimentaux de la houle courte	116
5.3.2	Confrontation des déphasages expérimentaux aux prévisions des théories existantes	119
5.3.3	Etude du déferlement de l'onde courte	120
5.4	Conclusion	123
6	Expériences d'interaction externe-interne	123
6.1	Introduction	123
6.2	Description du dispositif expérimental	126
6.2.1	Déroulement d'un essai	126
6.2.2	Préparation du milieu stratifié	129
6.2.3	Mesures des niveaux de surface	130
6.2.4	Mesures des niveaux d'interface	134
6.3	Essais d'interaction	135
6.3.1	Qualification du milieu stratifié : bi-couche équivalent	135

6.3.2	Caractérisation des ondes solitaires internes : test de l'hypothèse bi-couche équivalent	138
6.3.3	Dépouillement des essais d'interaction : modulation de la houle de surface	140
6.4	Conclusion	148
7	Conclusion	149
A	Evolution des ondes longues non-linéaires dispersives	151
A.1	Calcul de la distance de fission	151
A.2	Application au calcul de la distance de fission d'une onde sinusoïdale	152
B	Solutions de type onde solitaire	153
B.1	Solution "onde solitaire" de l'eau peu profonde et de Korteweg & de Vries	154
B.2	Solution "onde solitaire" de Serre	154
B.3	Equation intégrale et solution numérique	155
B.4	Comparaisons des différentes théories	156
B.5	Conclusion	158
C	Génération de l'onde solitaire externe	161
C.1	Solution "onde solitaire" dans l'approximation de l'eau peu profonde	161
C.2	Solution "onde solitaire" de Serre	164
C.2.1	Cas des petits déplacements : intégration analytique	165
C.2.2	Intégration numérique	165
C.3	Expériences	166
C.4	Conclusion	169
D	Modes verticaux d'une stratification continue	173
D.1	Modes verticaux linéaires avec rotation	173
D.2	Approximation KdV sans rotation	175

Chapitre 1

Introduction

L'intérêt pour les ondes internes au cours de ce siècle n'a cessé d'augmenter et corrélativement le nombre de travaux sur ce sujet. En effet, ces ondes, bien que difficilement repérables depuis la surface car elles présentent des maxima de déplacements dans la colonne d'eau, au niveau de zones de fort gradient de densité (thermocline, halocline) et non pas en surface. Elles peuvent atteindre des amplitudes très importantes (53 m mesurés sur le Scotian shelf par Sandstrom & Elliott en 1984 [69], 60 m mesurés par Osborne & Burch en 1980 en mer d'Adaman [58]) quand elles dégènèrent en train d'ondes solitaires, ce qui n'est pas rare dans certaines zones de l'océan.

Historiquement, les premiers instigateurs d'études sur les ondes internes furent les militaires motivés par l'intérêt stratégique du développement des sous-marins. A cet égard, les ondes internes représentent à la fois un risque de par le champ de vitesse important qui leur est associé et un avantage. En effet, les chocs que peuvent subir les sous-marins peuvent être importants et il est donc préférable pour eux d'éviter les champs d'ondes internes. Par contre, les déplacements d'isothermes associés aux ondes internes peuvent contribuer au brouillage du repérage SONAR des sous-marins par les variations de la vitesse du son qui leur sont associées. Ces motivations ont en particulier conduit les militaires à se constituer des bases de données importantes d'images de la surface de l'océan, photographiques dans un premier temps et plus récemment RADAR. En effet, il est connu depuis 1950 que les ondes internes laissent des signatures en surface. Reste que ces signatures mettent en jeu des mécanismes très variés dont le premier qui fut proposé par Ewing [22] était lié à des variations de tensions superficielles. A l'heure actuelle, l'interprétation des signatures laissées en surface par les ondes internes est plus que jamais un enjeu. Cette préoccupation n'est plus seulement réservée aux militaires mais concerne également l'industrie de la pêche et les pétroliers. En effet, l'étude des mécanismes de génération des ondes internes a mis en évidence un lieu privilégié pour la génération de ces ondes, à savoir le talus des marges continentales (et toutes les zones de fort gradient bathymétrique tels que les détroits, les îles sous-marines ...).

Or, ces zones sont également des zones privilégiées pour une partie de l'activité économique liée au milieu marin. En effet, les profondeurs limitées (de l'ordre de quelques centaines de mètres) en font des zones préférentielles pour la pêche de certaines espèces qui peuvent être amenées à migrer en fonction du déplacement des nutriments dans la colonne d'eau par les ondes internes ou de la turbidité liée au mélange causé par le déferlement d'ondes internes de grande amplitude près des côtes. L'assistance satellite permettrait alors d'augmenter la rentabilité de ce type de pêche.

Par ailleurs, le tarissement des réserves pétrolifères off-shore les plus proches des côtes

impliquent le déplacement de ces structures plus loin des côtes et en particulier, vers le bord de la marge continentale. Or, des structures off-shore près du talus de la marge continentale risquent d'être soumises à de fortes contraintes liées au champ de vitesse des ondes internes. C'est l'évaluation de ce risque qui motive actuellement le financement d'études sur la génération des ondes internes par les pétroliers.

Ainsi, deux types de préoccupation coexistent. Certaines sont davantage intéressées à l'aspect génération des ondes internes et d'autres sont plus concernées par le repérage et la caractérisation de ces ondes au cours de leur propagation. Ces motivations expliquent les deux aspects étudiés dans cette thèse, à savoir dans une première partie, l'étude de la génération de la marée interne (linéaire) au niveau de la marge continentale par la marée externe en incidence oblique quelconque. Puis dans une seconde partie, l'étude se porte sur la caractérisation des signatures laissées en surface par les ondes internes et que l'on peut observer en particulier sur les images SAR (Synthetic Aperture Radar ou Radar à synthèse d'ouverture) dont un exemple, sur lequel on peut observer des trains d'ondes solitaires, est reproduit sur la figure (1.1).

En effet, l'accumulation d'images SAR de l'océan durant les vingt dernières années constitue une formidable base de données somme toute peu exploitée relativement aux ondes internes. Néanmoins, cette somme de données ouvre des perspectives intéressantes, ce qui se traduit par un engouement sur l'interprétation des images SAR. Or, une bonne interprétation suppose à la fois des connaissances sur le rayonnement radar proprement dit et sur le phénomène que l'on souhaite mesurer. Ceci requiert donc pour ce qui est de l'interprétation des images de l'océan des connaissances pluri-disciplinaires qui font l'intérêt du projet européen Mesoscale Ocean Radar Signature Experiment (MORSE) dans lequel se trouve inscrit ce travail de thèse. En effet, le projet MORSE du programme MAST III regroupe à la fois des spécialistes du rayonnement Radar, de l'interprétation des images SAR et des océanographes.

Afin de saisir toute la complexité de l'interprétation de l'imagerie de type SAR, voici quelques repères de l'état de l'art dans ce domaine issus d'un article de synthèse de Rufenach et al. [68]. La technique SAR permet (à la différence de l'altimétrie) d'obtenir des images 2D de la modulation du rayonnement rendu par une surface ou "backscattering". Cette modulation peut être de plusieurs natures, soit spéculaires (réflexion-réfraction comme pour la lumière) ou bien basée sur la résonance de Bragg. Ces modulations conduisent à une image de dégradés de gris comme le montre la figure (1.1) dont l'analyse adéquate, qui consiste à inverser le "backscattering", permet d'obtenir le spectre directionnel des ondes de surface. L'étape suivante consiste alors à déterminer de quelle façon ce spectre de surface est le produit de la modulation par une onde interne. Jusqu'à présent et encore aujourd'hui, les spécialistes de l'interprétation des images SAR concentrent leurs efforts sur les mécanismes du "backscattering" comme le montre la revue de Hughes & Dawson [32]. Il est en effet possible de déterminer avec une bonne précision la longueur d'onde de l'onde interne et à l'aide d'un modèle théorique et/ou de mesures complémentaires tels que profils de densité, bathymétrie, d'en estimer l'amplitude à partir de la longueur d'onde.

Cette contribution à l'interprétation des images SAR concerne plus particulièrement l'étude des mécanismes de modulation des ondes de surface au passage d'une onde interne (et plus précisément d'une onde solitaire interne) et leur caractérisation. En effet, différents types d'interaction ondes internes-ondes de surface peuvent se produire, suivant la nature des unes ou des autres. La marée interne ayant souvent tendance à dégénérer sous l'effet des non-linéarités en un train d'ondes solitaires et celles-ci présentant les contraintes les

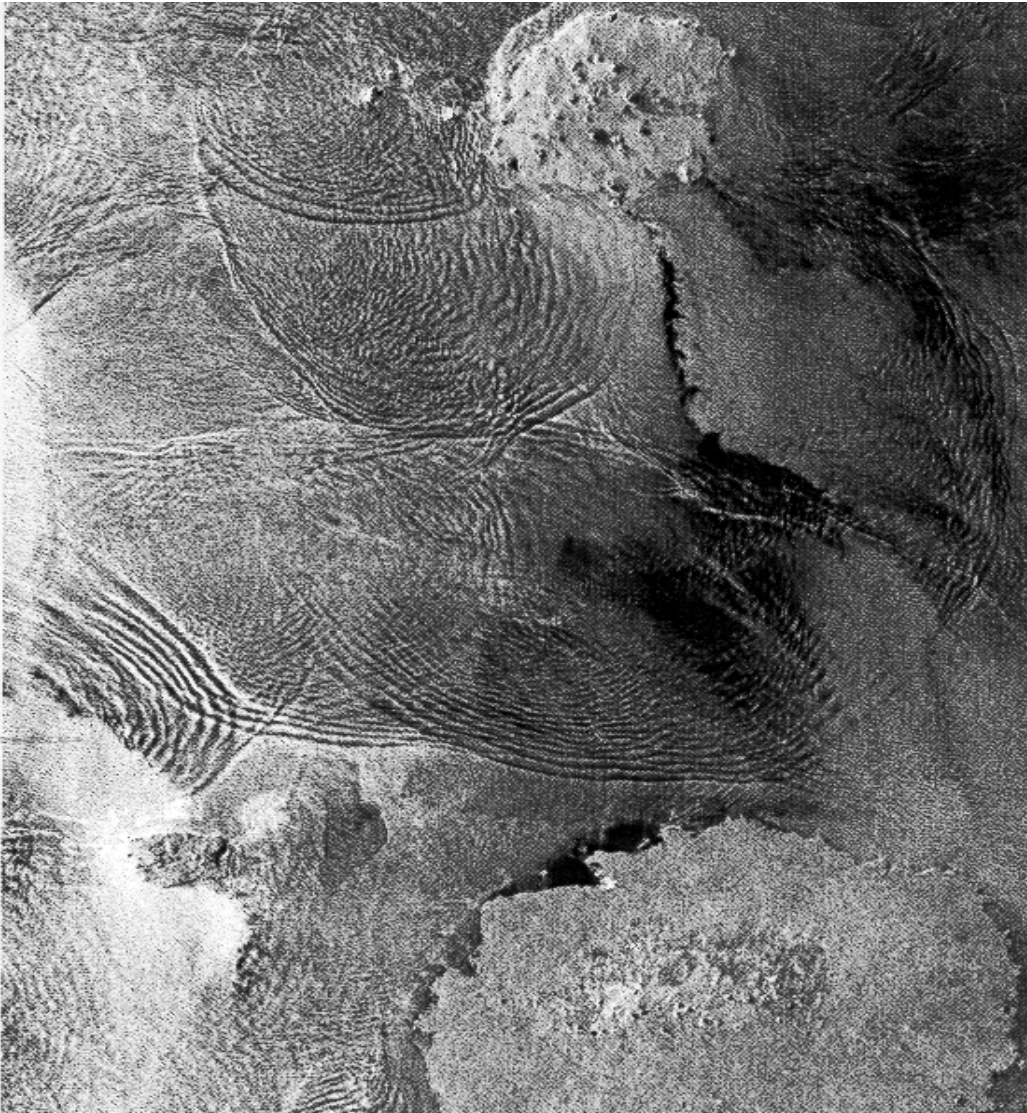


FIG. 1.1 – *Image SAR des îles Galapagos*

plus dramatiques car pouvant atteindre des amplitudes très importantes, on limite l'étude au cas des ondes solitaires internes.

Pour ce qui est des ondes de surfaces, par contre, les principales ondes peuvent être de trois natures :

- ondes capillaires ou de gravité très courtes, générées localement par le vent d'où l'appellation d'ondes de vent et dont la longueur d'onde est inférieure à 50 mètres,
- ondes de gravité moyennes générées du côté océan sur des temps très longs que l'on nomme houle ou "swell" et dont la longueur d'onde est comprise entre 50 et 500 mètres en général,
- et des ondes de gravité longues générées par l'attraction des astres que l'on nomme marée et dont la longueur d'onde est supérieure à 1000 km.

Compte-tenu de la surface représentée sur les images SAR de quelques centaines de km au carré, seules les deux premières catégories d'ondes de surface seront considérées. On caractérise a priori la phénoménologie des interactions par la différence d'échelle qui peut exister entre l'onde interne et l'onde externe. En effet, sachant qu'une onde solitaire interne présente une longueur caractéristique de 1 à 2 km, dans l'interaction avec les ondes de vent la différence d'échelle est au moins d'un ordre de grandeur alors que ce n'est pas le cas pour les interactions avec les houles. De même, la vitesse de groupe d'une houle de surface est de l'ordre de grandeur de celle d'une onde solitaire interne alors que celle d'une onde de vent est bien plus faible.

Au laboratoire, il n'est pas facile de reproduire la grande différence d'échelle qui existe dans l'interaction entre des ondes de vent et une onde solitaire interne à cause des limitations de stabilité de l'onde externe qui est de toute façon générée par un batteur dans notre canal. Ainsi, ce premier type d'interaction a été modélisé expérimentalement par l'interaction entre une onde solitaire et une onde courte, toutes deux en surface. Ceci a permis de se rapprocher du cas nature tant sur les différences de longueur d'onde que de vitesses. Bien sûr, cette modélisation n'est pas complètement satisfaisante puisque le paramètre stratification a été éliminé et la dénivelée de surface libre a été introduite. En fait, l'étude théorique montre que ce paramètre est négligeable.

Enfin, l'exposé de ce mémoire de thèse s'achèvera sur la modélisation expérimentale en similitude des interactions entre des houles de surface et une onde solitaire interne. Il s'agit d'expériences originales réalisées en milieu stratifié en densité par un gradient de salinité.

Première partie

**Génération de la marée interne
sur les marges continentales**

Chapitre 2

Étude théorique de la génération de la marée interne sur le talus continental avec rotation

2.1 Revue bibliographique

On distingue principalement deux approches pour l'étude théorique de la génération de la marée interne linéaire due à l'interaction de la marée barotrope avec les marges continentales et la stratification. La différence d'approche réside dans l'approximation ondes longues ou non. Cette approximation conditionne par la suite les géométries et stratifications envisageables. Dans l'approximation onde longue, la marge est le plus souvent modélisée par une marche, et la stratification est un bi-couche, ne laissant place qu'à un seul mode barocline. Sans cette approximation, toutes les stratifications et géométries sont autorisées ; les plus souvent testées restant la pente constante pour le talus et le gradient de densité constant pour la stratification. En effet, dans ces deux cas, il est possible de faire apparaître des solutions semi-analytiques. En s'affranchissant de l'hypothèse onde longue, les auteurs rajoutent généralement une condition de toit rigide à la surface pour le calcul des modes baroclines.

Historiquement, les premiers travaux théoriques sur la génération des ondes internes sur les marges continentales ont été menés par Rattray et al [64] [65]. Dans la plupart de ses travaux, Rattray considère le cas bidimensionnel d'une marée barotrope de type onde progressive en incidence frontale sur le talus. Ceci exclut en particulier les ondes tridimensionnelles de type Kelvin.

Dans un premier temps, Rattray propose en 1960 [64] un modèle de génération d'ondes interfaciales due à l'interaction de la marée barotrope avec un talus modélisé par une marche dans une stratification de type bi-couche dans l'approximation onde longue. Il modélise la côte, soit par un réflecteur parfait (mur vertical), soit par une plage de pente constante. Les calculs sont développés en tenant compte de la rotation terrestre. Dans les deux cas, il obtient à l'interface un clapotis sur le plateau (superposition de l'onde progressive transmise sur le plateau et de celle réfléchie par le mur ou la plage) et une onde progressive réfléchie du côté haute mer, l'amplitude de ces ondes pouvant devenir très grande.

Dans ce chapitre, nous développons un calcul basé sur des hypothèses similaires, excepté pour la côte que nous supposons être un absorbeur parfait.

Dans un second temps, Rattray et al. [65] reprennent la géométrie de l'étude précédente, mais pour une stratification linéaire en abandonnant l'hypothèse onde longue. Ils s'intéressent essentiellement dans cet article à la propagation des ondes internes réfléchies du côté haute mer. Ils montrent que l'énergie se propage confinée entre deux rayons émis à la cassure et que l'amplitude de chaque mode interne est sensiblement proportionnelle à l'inverse du nombre d'onde. La largeur de la bande de propagation de l'énergie est deux fois la profondeur d'eau sur le plateau.

Enfin, en 1975, Prinsenberg et Rattray [66] dans le but de se rapprocher du cas océanographique, ajoutent au modèle précédent un talus de pente constante. Les stratifications envisagées sont dans un premier temps, une stratification linéaire puis, une stratification quelconque, typique du Nord-Est de l'Océan Pacifique. L'intérêt se porte à nouveau du côté haute mer. L'effet du talus est d'une part, la réfraction sur la pente qui dissymétrise la répartition d'énergie dans le rayon réfléchi du côté haute mer (plus d'énergie en bas, moins en haut) et d'autre part, l'interférence d'un rayon généré à la cassure de pente au fond, avec le rayon réfléchi sur le fond. Lorsque la fréquence de Brunt-Väisälä n'est pas constante (stratification quelconque), les rayons s'incurvent.

A partir des années 80, pléthore d'auteurs se penche sur la question, que ce soit par une approche analytique ou numérique, certainement motivé par les mesures in-situ se développant au même moment.

Baines fait en 1982 [2] une revue des modèles existants et propose un modèle dans lequel il considère une couche supérieure de densité constante et une couche inférieure de gradient de densité constant avec un saut de densité à l'interface [cf. schéma (2.1)].

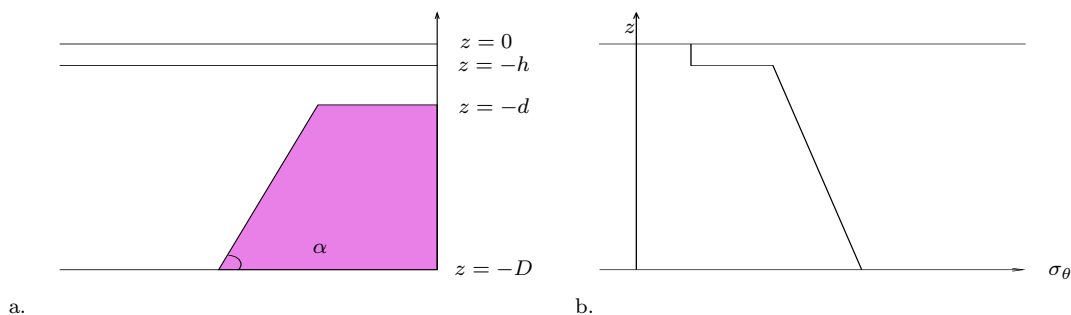


FIG. 2.1 – Modèles de génération de Baines (a) géométrie (b) stratification

Son modèle, développé sans l'approximation des ondes longues, prend donc en compte des modes internes dans la couche inférieure, mais aussi un mode barocline interfacial grâce au saut de densité. La formulation de ce modèle bidimensionnel fait intervenir le forçage barotrope sous la forme de l'amplitude du débit barotrope perpendiculaire à la cassure et non plus de dénivelé de surface. Baines suggère dans un travail précédent [1] de déterminer ce débit à partir de l'amplitude à la côte, présentant un exemple pour le cas d'une onde de Kelvin donc tridimensionnelle. Sans autre explication, il est incorrect de forcer le modèle avec un débit perpendiculaire au plateau dérivé d'une onde tridimensionnelle du type onde de Kelvin, si le problème dans lequel il apparaît est bidimensionnel. Ce point est d'ailleurs soulevé par Huthnance [34] dans un article synthétique sur les ondes internes près des marges continentales. En effet, Huthnance donne les équations linéarisées pour un fluide stratifié en rotation dans le cas tridimensionnel et suppose une dépendance le long du plateau de type sinusoidal, de nombre d'onde k . Il précise alors bien que dans le modèle de Baines $k = 0$. Ce point sera rediscuté à la fin de ce chapitre.

Enfin, en s'intéressant à la génération des ondes internes cette fois, Baines introduit un critère pour que des ondes internes d'amplitude non négligeable soit générées :

$$\frac{\beta - \phi}{\beta + \phi} < \frac{d}{D}$$

où $\beta = \tan \theta$ avec θ angle de propagation du rayon de l'onde interne par rapport à l'horizontal, $\phi = \tan \alpha$ et les autres notations sont définies sur le schéma (2.1).

En 1987, Barthélemy [3] reprend dans sa thèse les hypothèses de la première étude de Rattray donc avec l'hypothèse onde longue. A l'exception du choix d'un absorbeur parfait pour la côte, la géométrie et la stratification sont les mêmes que celles choisies par Rattray en 1960. Cependant, il ne prend pas en compte la rotation, ce qui lui permet de montrer l'unicité de l'ensemble de solutions trouvé et ce, quelle que soit la dépendance temporelle du forçage.

Dans ce chapitre, on réintroduit la rotation dans le modèle de Barthélemy. La nouveauté dans le calcul analytique qui suit est l'aspect tridimensionnel du forçage barotrope. En effet, les travaux prenant en compte cet aspect sont rares et incomplets. A ma connaissance, Weigand et al. [77] ont tenté de tester tant l'influence du frottement que de l'incidence oblique d'une onde de Poincaré sur une marche avec un mur à la côte, dans un bi-couche. Si l'influence du frottement est étudié en détail, étayant le calcul théorique avec des expériences, l'étude de l'incidence oblique ne semble guère concluante. En effet, le modèle théorique qu'ils développent dans l'approximation des ondes longues conduit à des solutions où la dépendance le long du plateau n'est pas spécifiée, ce qui contredit les conditions de raccordement à la cassure. C'est ce calcul que nous reprenons dans ce chapitre, en envisageant aussi bien le cas d'une onde de Poincaré que celui d'une onde de Kelvin barotrope incidente.

2.2 Ondes longues 3D en bi-couche avec rotation sur fond plat

2.2.1 Notations et hypothèses

La figure (2.2) présente un schéma de l'écoulement que l'on se propose d'étudier. Il s'agit de l'écoulement de deux fluides non-miscibles disposés en couche l'un sur l'autre notés avec les indices respectifs 2 en bas et 1 en haut. Les deux fluides ont des densités différentes, le fluide le plus dense se situe dans la couche inférieure notée 2. Les deux fluides sont supposés parfaits ($\nu_1 = \nu_2 = 0$) et incompressibles ($\frac{D\rho_1}{Dt} = \frac{D\rho_2}{Dt} = 0$).

On formule de plus les hypothèses suivantes :

1. La répartition de pression est hydrostatique suivant z , ce qui équivaut à supposer la vitesse verticale petite comparée aux vitesses dans un plan horizontal ($w \ll u, v$).
2. Les déplacements de l'interface et de la surface seront supposés petits devant les profondeurs d'eau permettant de linéariser les équations.
3. On suppose de plus que la force de Coriolis (notée f) est parallèle à l'axe vertical sur tout le domaine (hypothèse du f-plan, légitime si l'on suppose un petit domaine).
4. Les vitesses dans le plan horizontal ne dépendent pas de la variable verticale z i.e. $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$.

Les hypothèses [1] et [4] correspondent à l'approximation des ondes longues.

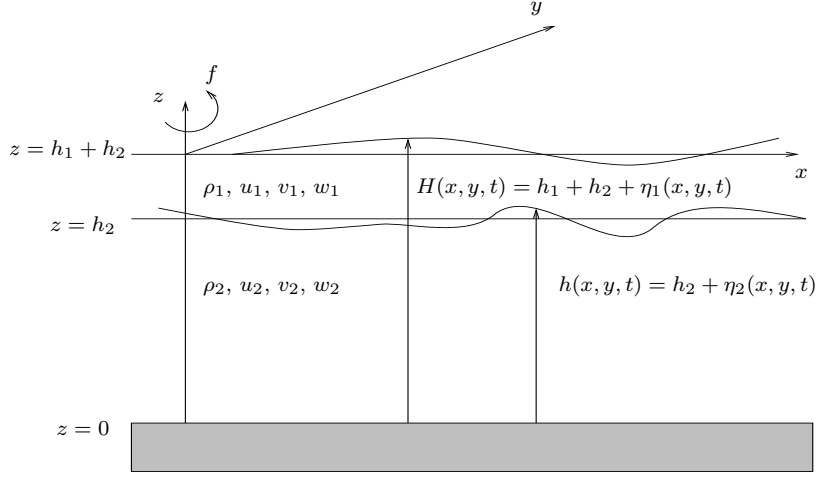


FIG. 2.2 – Notations utilisées pour étudier un écoulement tridimensionnel avec rotation en bi-couche

2.2.2 Equations linéaires de base et expression des pressions

Les équations gouvernant l'écoulement sur fond horizontal ayant les caractéristiques ci-dessus s'écrivent :

– dans la masse :

★ pour $0 \leq z \leq h_2$:

$$u_{2x} + v_{2y} + w_{2z} = 0 \quad (2.1)$$

$$u_{2t} - f v_2 = -\frac{p_{2x}}{\rho_2} \quad (2.2)$$

$$v_{2t} + f u_2 = -\frac{p_{2y}}{\rho_2} \quad (2.3)$$

$$p_{2z} = -\rho_2 g \quad (2.4)$$

★ pour $h_2 \leq z \leq h_1 + h_2$:

$$u_{1x} + v_{1y} + w_{1z} = 0 \quad (2.5)$$

$$u_{1t} - f v_1 = -\frac{p_{1x}}{\rho_1} \quad (2.6)$$

$$v_{1t} + f u_1 = -\frac{p_{1y}}{\rho_1} \quad (2.7)$$

$$p_{1z} = -\rho_1 g \quad (2.8)$$

– imperméabilité du fond ; en $z = 0$

$$w_2 = 0 \quad (2.9)$$

– imperméabilité de l'interface ; en $z = h_2$

$$\eta_{2t} = w_2 = w_1 \quad (2.10)$$

– égalité des pressions à l'interface ; en $z = h(x, y, t)$

$$p_2 = p_1 \quad (2.11)$$

– isobarité de la surface libre ; en $z = H(x, y, t)$

$$p_1 = 0 \quad (2.12)$$

si la pression de référence est la pression atmosphérique.

– imperméabilité de la surface libre ; en $z = h_1 + h_2$

$$\eta_{1t} = w_1 \quad (2.13)$$

En utilisant (2.4), (2.8), (2.11) et (2.12), on obtient facilement le champ de pression dans chacune des couches en fonction des niveaux de la surface et de l'interface :

$$p_1 = \rho_1 g [H(x, y, t) - z] \quad (2.14)$$

$$p_2 = \rho_2 g [h(x, y, t) - z] + \rho_1 g [H(x, y, t) - h(x, y, t)] \quad (2.15)$$

2.2.3 Elimination des vitesses : obtention des équations pour les dénivelées d'interface et de surface

En intégrant les équations décrivant la conservation de la masse (2.1) sur la hauteur de la couche inférieure et (2.5) sur la hauteur de la couche supérieure d'autre part, et en utilisant les relations d'imperméabilité au fond (2.9), à l'interface (2.10) et à la surface libre (2.13), on obtient les équations suivantes pour η_1 et η_2 après linéarisation :

$$\eta_{1t} + h_2(u_{2x} + v_{2y}) + h_1(u_{1x} + v_{1y}) = 0 \quad (2.16)$$

$$\eta_{2t} + h_2(u_{2x} + v_{2y}) = 0 \quad (2.17)$$

D'autre part, en utilisant les expressions des pressions (2.14) et (2.15) dans chacune des deux couches, on réécrit les équations du mouvement :

★ pour $0 \leq z \leq h(x, y, t)$:

$$u_{2t} - f v_2 + g \left[\eta_{2x} + \frac{\rho_1}{\rho_2} (\eta_{1x} - \eta_{2x}) \right] = 0 \quad (2.18)$$

$$v_{2t} + f u_2 + g \left[\eta_{2y} + \frac{\rho_1}{\rho_2} (\eta_{1y} - \eta_{2y}) \right] = 0 \quad (2.19)$$

★ pour $h(x, y, t) \leq z \leq H(x, y, t)$:

$$u_{1t} - f v_1 + g \eta_{1x} = 0 \quad (2.20)$$

$$v_{1t} + f u_1 + g \eta_{1y} = 0 \quad (2.21)$$

Afin d'obtenir les équations décrivant η_1 et η_2 , on transforme le système d'équations (2.18) à (2.21) par dérivation, et on obtient :

★ pour $0 \leq z \leq h(x, y, t)$:

$$u_{2ty} - v_{2tx} - f(u_{2x} + v_{2y}) = 0 \quad (2.22)$$

$$u_{2tx} + v_{2ty} + f(u_{2y} - v_{2x})$$

$$+ g \left[\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) (\eta_{2xx} + \eta_{2yy}) + \frac{\rho_1}{\rho_2} (\eta_{1xx} + \eta_{1yy}) \right] = 0 \quad (2.23)$$

★ pour $h(x, y, t) \leq z \leq H(x, y, t)$:

$$u_{1ty} - v_{1tx} - f(u_{1x} + v_{1y}) = 0 \quad (2.24)$$

$$u_{1tx} + v_{1ty} + f(u_{1y} - v_{1x}) + g(\eta_{1xx} + \eta_{1yy}) = 0 \quad (2.25)$$

On obtient alors les équations voulues pour η_1 et η_2 en substituant (2.22) et (2.24) dérivées par rapport au temps dans (2.23) et (2.25) respectivement, puis enfin en utilisant (2.16) et (2.17). Ces équations s'écrivent :

$$(\eta_{1ttt} - \eta_{2ttt}) + f^2(\eta_{1t} - \eta_{2t}) - gh_1(\eta_{1xxt} + \eta_{1yyt}) = 0 \quad (2.26)$$

$$\eta_{2ttt} + f^2\eta_{2t} - gh_2 \left[\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)(\eta_{2xxt} + \eta_{2yyt}) + \frac{\rho_1}{\rho_2}(\eta_{1xxt} + \eta_{1yyt}) \right] = 0 \quad (2.27)$$

2.2.4 Equations en modes normaux

La décomposition en modes normaux, proposée par Leblond et Mysak [43], permet de présenter les équations aux dérivées partielles du problème sous forme séparable et donc d'en donner toute une famille de solutions.

Dans les équations (2.26) et (2.27), on introduit la décomposition en modes normaux dans le but de diagonaliser la matrice des opérateurs dérivées partielles. Pour ce faire, on introduit le vecteur propre noté $\eta = \eta_1 + q\eta_2$ (où q est un vecteur paramètre déterminé plus loin) tel que :

$$\eta_{ttt} + f^2\eta_t - gH(\Delta\eta)_t = 0 \quad (2.28)$$

où H est un vecteur à déterminer tel que le système des équations (2.26)-(2.27) soit équivalent à (2.28).

Ainsi, H et q vérifient le système :

$$H = h_1 + h_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} (1 + q) \quad (2.29)$$

$$Hq = h_2(1 + q) \left[1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right] \quad (2.30)$$

Ce système admet deux couples solutions (en bi-couche) correspondant aux modes barocline et barotrope, notés $(H^i, q^i)_{i=[0,1]}$ où les q^i sont les solutions de l'équation du second degré (2.31) et les H^i sont donnés par (2.29).

$$q^2 + \left[\frac{h_1 \rho_2}{h_2 \rho_1} - \frac{\rho_2}{\rho_1} + 2 \right] q + 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} = 0 \quad (2.31)$$

Les solutions de (2.31) sont :

$$q^{(0)} = \frac{\rho_2}{2\rho_1} \left(1 - \frac{h_1}{h_2} \right) \left[1 - 2\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{h_2}{(h_2 - h_1)} + \sqrt{1 + 4\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{h_1 h_2}{(h_2 - h_1)^2}} \right] \quad (2.32)$$

$$q^{(1)} = \frac{\rho_2}{2\rho_1} \left(1 - \frac{h_1}{h_2} \right) \left[1 - 2\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{h_2}{(h_2 - h_1)} - \sqrt{1 + 4\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{h_1 h_2}{(h_2 - h_1)^2}} \right] \quad (2.33)$$

alors :

$$H^{(0)} = \frac{(h_1 + h_2)}{2} \left[1 + \sqrt{1 + 4 \frac{h_1 h_2}{(h_2 + h_1)^2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right)} \right] \quad (2.34)$$

$$H^{(1)} = \frac{(h_1 + h_2)}{2} \left[1 - \sqrt{1 + 4 \frac{h_1 h_2}{(h_2 + h_1)^2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right)} \right] \quad (2.35)$$

L'équation (2.28) est donc un système de deux équations aux dérivées partielles indépendantes. Après une première intégration par rapport au temps, on reconnaît des équations linéaires de type Klein-Gordon :

$$\eta_{tt}^{(i)} + f^2 \eta^{(i)} - gH^{(i)} (\Delta \eta^{(i)}) = C \quad (2.36)$$

où C est une constante que l'on peut choisir nulle.

Avant de donner les solutions de ce type d'équations, précisons d'abord comment l'on obtient les dénivelées de surface et d'interface.

– le mode barotrope est défini en posant $\eta^{(1)} = 0$, alors les déplacements de la surface libre et de l'interface associés sont :

$$\eta_1 = -q^{(1)} \eta_2 \text{ et } \eta_2 = \frac{1}{q^{(0)} - q^{(1)}} \eta^{(0)}$$

– le mode barocline est défini en posant $\eta^{(0)} = 0$, alors les déplacements de la surface libre et de l'interface associés sont :

$$\eta_1 = -q^{(0)} \eta_2 \text{ et } \eta_2 = \frac{1}{q^{(1)} - q^{(0)}} \eta^{(1)}$$

2.2.5 Solutions générales en milieu infini ou semi-infini et discussion

Afin de déterminer l'ensemble des solutions du problème, on prend la transformée de Fourier complexe par rapport au temps de chaque équation (i) de (2.36).

Soit $\bar{\eta}_\omega(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{t=\infty} \eta(x, y, t) e^{-i\omega t} dt$ alors (2.36) devient :

$$(f^2 - \omega^2) \bar{\eta}_\omega^{(i)} - gH^{(i)} (\Delta \bar{\eta}_\omega^{(i)}) = 0 \quad (2.37)$$

Puis, on prend la transformée de Fourier complexe par rapport à l'une des variables d'espace, par exemple x , de chaque équation (i) de (2.37).

Soit $\tilde{\eta}_{\omega, k_x}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \bar{\eta}_\omega(x, y) e^{-ik_x x} dx$ alors (2.37) devient :

$$\left[\frac{(f^2 - \omega^2)}{gH^{(i)}} + k_x^2 \right] \tilde{\eta}_{\omega, k_x}^{(i)} - \frac{d^2 \tilde{\eta}_{\omega, k_x}^{(i)}}{dy^2} = 0 \quad (2.38)$$

L'équation différentielle (2.38), linéaire d'ordre 2, s'intègre sans difficulté, les solutions étant de la forme :

$$\tilde{\eta}_{\omega, k_x}^{(i)}(y) = A_{\omega, k_x}^{(i)} e^{k_y y} \quad (2.39)$$

avec $A_{\omega, k_x}^{(i)}$ amplitude (constante pour k_x et ω donnés) et k_y complexe tels que :

$$k_y^2 = k_x^2 + \frac{f^2 - \omega^2}{gH^{(i)}} \quad (2.40)$$

En résumé, les solutions générales de (2.36) s'écrivent :

$$\eta^{(i)}(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty+i\alpha}^{\omega=\infty+i\alpha} \int_{k_x=-\infty+i\gamma}^{k_x=\infty+i\gamma} A_{\omega, k_x}^{(i)} e^{[i(\omega t + k_x x) + k_y y]} dk_x d\omega \quad (2.41)$$

où k_y vérifie (2.40).

Ainsi, la seule donnée de la fonction $A_{\omega, k_x}^{(i)}$ permet de déterminer la solution. $A_{\omega, k_x}^{(i)}$ est une fonction de deux variables, quelconque, éventuellement une distribution donnant l'amplitude de la solution à la pulsation ω et de nombre d'onde k_x . De ce point de vue, on peut considérer la solution générale comme la superposition de solutions élémentaires :

$$A_{\omega, k_x}^{(i)} e^{[i(\omega t + k_x x) + k_y y]}$$

Physiquement, les solutions doivent être bornées en temps, ainsi si $Im(\omega) \neq 0$, $A_{\omega, k_x}^{(i)} = 0$.

De plus, supposons que l'ensemble des fréquences temporelles soit discret, (fixé par les fréquences astronomiques par exemple) à savoir si $\omega \notin [\omega_i]_{i \in [1, n]}$, $A_{\omega, k_x}^{(i)} = 0$.

Ensuite pour tout k_x , k_y est donné par (2.40) et l'on distingue trois cas :

- $\omega^2 = f^2 + k_x^2 g H^{(i)}$ alors $k_y = 0$
- $\omega^2 < f^2 + k_x^2 g H^{(i)}$ alors $k_y^2 > 0$ donc k_y est réel ;
on obtient des ondes de Kelvin si k_x est également réel (existent sur les domaines semi-infinis) et des ondes stationnaires si k_x est imaginaire pur (n'existent que sur des domaines bornés)
- $\omega^2 > f^2 + k_x^2 g H^{(i)}$ alors $k_y^2 < 0$ donc k_y est imaginaire pur ;
on obtient des ondes de Kelvin si k_x est également imaginaire pur (existent sur les domaines semi-infinis) et des ondes de Poincaré (progressives dans les deux directions d'espace x et y) si k_x est réel (existent sur les domaines infinis).

2.2.6 Solutions progressives ou ondes de Poincaré

La solution élémentaire de type Poincaré pour la dénivelée de l'interface η_2 s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \eta_2 = & NE_{2+} e^{i(\omega t - k_{x+} x - k_{y+} y)} + NE_{2-} e^{i(\omega t - k_{x-} x - k_{y-} y)} \\ & + SE_{2+} e^{i(\omega t - k_{x+} x + k_{y+} y)} + SE_{2-} e^{i(\omega t - k_{x-} x + k_{y-} y)} \\ & + SO_{2+} e^{i(\omega t + k_{x+} x + k_{y+} y)} + SO_{2-} e^{i(\omega t + k_{x-} x + k_{y-} y)} \\ & + NO_{2+} e^{i(\omega t + k_{x+} x - k_{y+} y)} + NO_{2-} e^{i(\omega t + k_{x-} x - k_{y-} y)} \end{aligned}$$

avec :

- $k_+ = \sqrt{(k_{x+})^2 + (k_{y+})^2} = \sqrt{\lambda_+}$
- $k_- = \sqrt{(k_{x-})^2 + (k_{y-})^2} = \sqrt{\lambda_-}$
- NE_+ amplitude de l'onde barocline se propageant vers les (x, y) positifs (Nord-Est)
- SE_+ amplitude de l'onde barocline se propageant vers les x positifs et y négatifs (Sud-Est)

- SO_+ amplitude de l'onde barocline se propageant vers les (x, y) négatifs (Sud-Ouest)
- NO_+ amplitude de l'onde barocline se propageant vers les x négatifs et y positifs (Nord-Ouest)

Les indices (-) réfèrent aux ondes barotropes.

En notant $\lambda = (k_x)^2 + (k_y)^2$:

$$\lambda_{\pm}^{\pm} = \frac{\rho_2(\omega^2 - f^2)(h_1 + h_2)}{2gh_1h_2(\rho_2 - \rho_1)} \left[1_{\pm}^{\pm} \sqrt{1 - \frac{4h_1h_2(\rho_2 - \rho_1)}{(h_1 + h_2)^2\rho_2}} \right] \quad (2.42)$$

Ces deux solutions correspondent aux modes barocline et barotrope (respectivement lent $[\lambda^+]$ et rapide $[\lambda_-]$) d'une onde se propageant à l'interface d'un bi-couche.

On note μ_{\pm}^{\pm} le rapport des amplitudes des déplacements de l'interface et de la surface libre pour chaque onde élémentaire (une direction de propagation donnée) suivant le mode barotrope ou barocline considéré. Par exemple :

$$\mu_{\pm}^{\pm} = \frac{NE_{1\pm}}{NE_{2\pm}} = \frac{SE_{1\pm}}{SE_{2\pm}} = \frac{NO_{1\pm}}{NO_{2\pm}} = \frac{SO_{1\pm}}{SO_{2\pm}}$$

avec :

$$\mu_{\pm}^{\pm} = \left(\frac{\rho_2 h_1}{\rho_1 h_2} + 1 \right) - \frac{\rho_2}{2\rho_1} \left(\frac{h_1}{h_2} + 1 \right) \left[1_{\pm}^{\pm} \sqrt{1 - \frac{4h_1h_2(\rho_2 - \rho_1)}{(h_1 + h_2)^2\rho_2}} \right] \quad (2.43)$$

On note C_{\pm}^{\pm} les célérités de phase associées à chacun des modes barocline et barotrope comme suit :

$$(C_{\pm}^{\pm})^2 = \frac{g\omega^2(h_1 + h_2)}{2(\omega^2 - f^2)} \left[1_{\pm}^{\pm} \sqrt{1 - \frac{4h_1h_2(\rho_2 - \rho_1)}{(h_1 + h_2)^2\rho_2}} \right] \quad (2.44)$$

A l'aide de (2.43), on en déduit le niveau de surface η_1 .

2.2.7 Expression des vitesses et énergies

Les composantes de la vitesse dans chacune des couches s'obtiennent en éliminant alternativement u ou v entre (2.18) et (2.19) d'une part et (2.20) et (2.21) d'autre part. Les relations exprimant les composantes de la vitesse dans le repère (O, x, y) en fonction des niveaux de surface et d'interface sont :

$$\bar{u}_1 = \frac{g}{\omega^2 - f^2} [i\omega\bar{\eta}_{1x} + f\bar{\eta}_{1y}] \quad (2.45)$$

$$\bar{v}_1 = \frac{g}{\omega^2 - f^2} [i\omega\bar{\eta}_{1y} - f\bar{\eta}_{1x}] \quad (2.46)$$

$$\bar{u}_2 = \frac{g}{\omega^2 - f^2} \left(i\omega \left[\bar{\eta}_{2x} + \frac{\rho_1}{\rho_2} (\bar{\eta}_{1x} - \bar{\eta}_{2x}) \right] + f \left[\bar{\eta}_{2y} + \frac{\rho_1}{\rho_2} (\bar{\eta}_{1y} - \bar{\eta}_{2y}) \right] \right) \quad (2.47)$$

$$\bar{v}_2 = \frac{g}{\omega^2 - f^2} \left(i\omega \left[\bar{\eta}_{2y} + \frac{\rho_1}{\rho_2} (\bar{\eta}_{1y} - \bar{\eta}_{2y}) \right] - f \left[\bar{\eta}_{2x} + \frac{\rho_1}{\rho_2} (\bar{\eta}_{1x} - \bar{\eta}_{2x}) \right] \right) \quad (2.48)$$

en notant $u_i = \bar{u}_i e^{i\omega t}$, $v_i = \bar{v}_i e^{i\omega t}$ et $\eta_i = \bar{\eta}_i e^{i\omega t}$.

L'énergie potentielle instantannée et intégrée sur la profondeur est définie par :

$$PE = \frac{1}{H} \int_0^H [\rho(z, t) - \rho_0(z)] g z dz$$

où $\rho_0(z)$ est le profil de densité au repos, $\rho(z, t)$, le profil de densité à l'instant t et en plaçant le fond à $z = 0$.

Dans le cas d'un bi-couche, l'expression de l'énergie potentielle instantannée calculée en plaçant l'interface à $z = 0$ se résume à :

$$PE = \frac{g}{2(h_1 + h_2)} [(\rho_2 - \rho_1)\eta_2^2 + \rho_1(\eta_1^2 + 2h_1\eta_1)] \quad (2.49)$$

L'énergie potentielle moyennée sur une période s'écrit :

$$\bar{PE} = \frac{g}{4(h_1 + h_2)} [(\rho_2 - \rho_1)\bar{\eta}_2^2 + \rho_1\bar{\eta}_1^2] \quad (2.50)$$

L'énergie cinétique instantannée intégrée sur la profondeur est définie par :

$$KE = \frac{1}{2H} \int_0^H \rho(u^2 + v^2) dz$$

Dans le cas d'un bi-couche, l'expression de l'énergie cinétique moyennée sur une période s'écrit :

$$\bar{KE} = \frac{1}{4(h_1 + h_2)} [\rho_1 h_1 (\bar{u}_1^2 + \bar{v}_1^2) + \rho_2 h_2 (\bar{u}_2^2 + \bar{v}_2^2)] \quad (2.51)$$

En utilisant les expressions des vitesses (2.45)-(2.48), le rapport des énergies cinétique et potentielle moyennées sur une période et intégrées sur la profondeur s'exprime uniquement en fonction de la fréquence de l'onde et de la fréquence inertielle de Coriolis [26] :

$$\frac{\bar{KE}}{\bar{PE}} = \frac{\omega^2 + f^2}{\omega^2 - f^2} \quad (2.52)$$

2.3 Cas bidimensionnel : onde longue barotrope en incidence normale sur une marche

Dans cette partie, on raccorde les solutions du paragraphe précédent 2.2 pour déterminer les caractéristiques des ondes baroclines et barotropes, réfléchies et transmises par une marche, connaissant l'onde barotrope progressive incidente. Le schéma (2.3) sert de support pour les notations du problème que l'on expose.

La marche est une paroi verticale que l'on définit dans le plan (O, x, y) par l'équation suivante $x = 0$ et l'onde barotrope incidente arrive perpendiculairement à cette marche. L'onde barotrope incidente est une onde stationnaire si $\omega^2 < f^2$ et une onde progressive si $\omega^2 > f^2$. Dans cette partie, nous ne considérons que ce dernier cas. Les dénivelées de surface libre et d'interface dans chacun des domaines s'écrivent alors de la façon suivante :

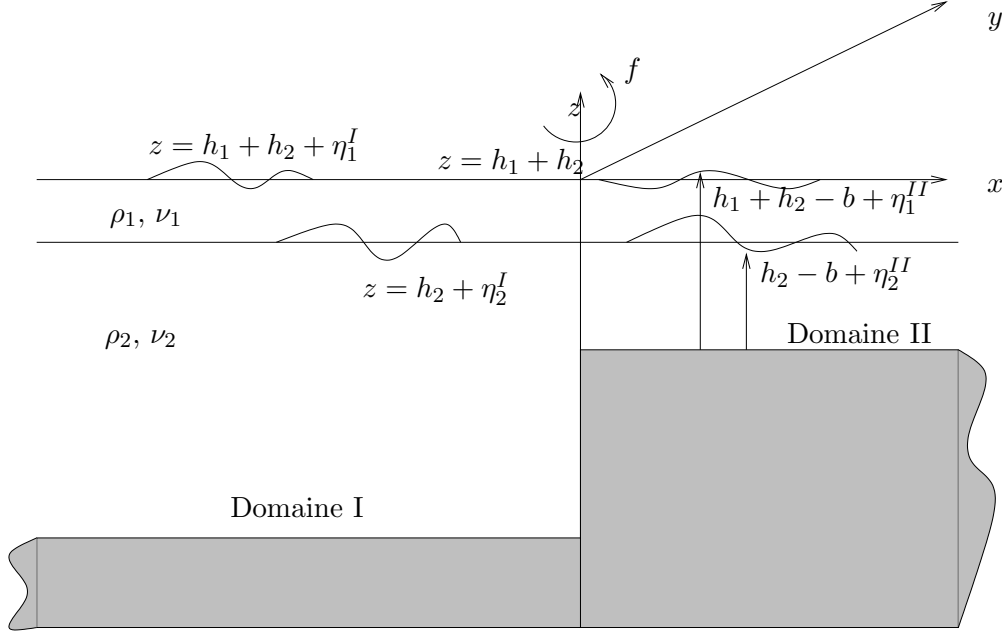


FIG. 2.3 – Notations utilisées pour étudier les ondes transmises et réfléchies par une marche en bi-couche avec rotation

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}_1^I &= I_{1-e}^{-ik_-^I x} + R_{1+} e^{ik_+^I x} + R_{1-e} e^{ik_-^I x} \\
 \bar{\eta}_2^I &= I_{2-e}^{-ik_-^I x} + R_{2+} e^{ik_+^I x} + R_{2-e} e^{ik_-^I x} \\
 \bar{\eta}_1^{II} &= T_{1+} e^{-ik_+^{II} x} + T_{1-e}^{-ik_-^{II} x} \\
 \bar{\eta}_2^{II} &= T_{2+} e^{-ik_+^{II} x} + T_{2-e}^{-ik_-^{II} x}
 \end{aligned}$$

avec :

- $k_-^I = \sqrt{\lambda_-^I}$ nombre d'onde barotrope dans le domaine I
- $k_-^{II} = \sqrt{\lambda_-^{II}}$ nombre d'onde barotrope dans le domaine II
- I_{1-} amplitude de la dénivellation de surface due à l'onde barotrope incidente dans le domaine I
- I_{2-} amplitude de la dénivellation d'interface due à l'onde barotrope incidente dans le domaine I
- R_{1-} amplitude de la dénivellation de surface due à l'onde barotrope réfléchie dans le domaine I
- R_{2-} amplitude de la dénivellation d'interface due à l'onde barotrope réfléchie dans le domaine I
- T_{1-} amplitude de la dénivellation de surface due à l'onde barotrope transmise dans le domaine II
- T_{2-} amplitude de la dénivellation d'interface due à l'onde barotrope transmise dans le domaine II

les indices (+) réfèrent aux mêmes quantités pour les ondes baroclines.

Les vitesses se déduisent des dénivelées de surface et d'interface à l'aide des formules (2.45) à (2.48).

Pour déterminer les amplitudes des ondes réfléchies et transmises, il faut raccorder les solutions au niveau de la marche. Les conditions de raccord sur la marche sont

les suivantes ; en $x = 0$:

– continuité des niveaux de surface :

$$\bar{\eta}_1^I = \bar{\eta}_1^{II} \quad (2.53)$$

– continuité des niveaux d'interface :

$$\bar{\eta}_2^I = \bar{\eta}_2^{II} \quad (2.54)$$

– continuité des débits dans la couche supérieure :

$$\bar{u}_1^I = \bar{u}_1^{II} \quad (2.55)$$

– continuité des débits dans la couche inférieure :

$$\bar{u}_2^I h_2 = \bar{u}_2^{II} (h_2 - b) \quad (2.56)$$

Ces quatre relations constituent un système linéaire pour le calcul des amplitudes que nous présentons sous forme matricielle :

$$[\mathcal{M}] \cdot \begin{bmatrix} r_{2+} \\ r_{2-} \\ t_{2+} \\ t_{2-} \end{bmatrix} = [\mathcal{B}] \quad (2.57)$$

avec $R_{2+} = r_{2+} I_{2-}$, $R_{2-} = r_{2-} I_{2-}$, $T_{2+} = t_{2+} I_{2-}$, $T_{2-} = t_{2-} I_{2-}$ et :

$$[\mathcal{M}] = \begin{bmatrix} -\mu_+^I & -\mu_-^I & \mu_+^{II} & \mu_-^{II} \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ k_+^I \mu_+^I & k_-^I \mu_-^I & k_+^{II} \mu_+^{II} & k_-^{II} \mu_-^{II} \\ k_+^I \nu_+^I & k_-^I \nu_-^I & k_+^{II} \nu_+^{II} & k_-^{II} \nu_-^{II} \end{bmatrix}; [\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} \mu_-^I \\ 1 \\ k_-^I \mu_-^I \\ k_-^I \nu_-^I \end{bmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} \nu_+^I &= 1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} (\mu_+^I - 1) & \nu_-^I &= 1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} (\mu_-^I - 1) \\ \nu_+^{II} &= \frac{h_2 - b}{h_2} \left[1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} (\mu_+^{II} - 1) \right] & \nu_-^{II} &= \frac{h_2 - b}{h_2} \left[1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} (\mu_-^{II} - 1) \right] \end{aligned}$$

2.4 Cas tridimensionnel : onde barotrope en incidence quelconque sur une marche

Dans cette partie, on va utiliser les résultats du paragraphe précédent 2.57 pour déterminer les caractéristiques des ondes baroclines et barotropes, réfléchies et transmises par une marche connaissant l'onde barotrope incidente. Les notations du problème que l'on se propose d'étudier sont les mêmes qu'au paragraphe précédent et sont celles de la figure (2.3) .

2.4.1 Cas général

La marche est une paroi verticale que l'on définit dans le plan (O, x, y) par l'équation suivante $x = 0$ et est représentée sur la figure (2.4) vue de dessus. Sur la figure (2.4), on représente la direction de propagation de l'onde barotrope incidente de Poincaré repérée par l'angle (α_-) qu'elle fait avec l'axe des x .

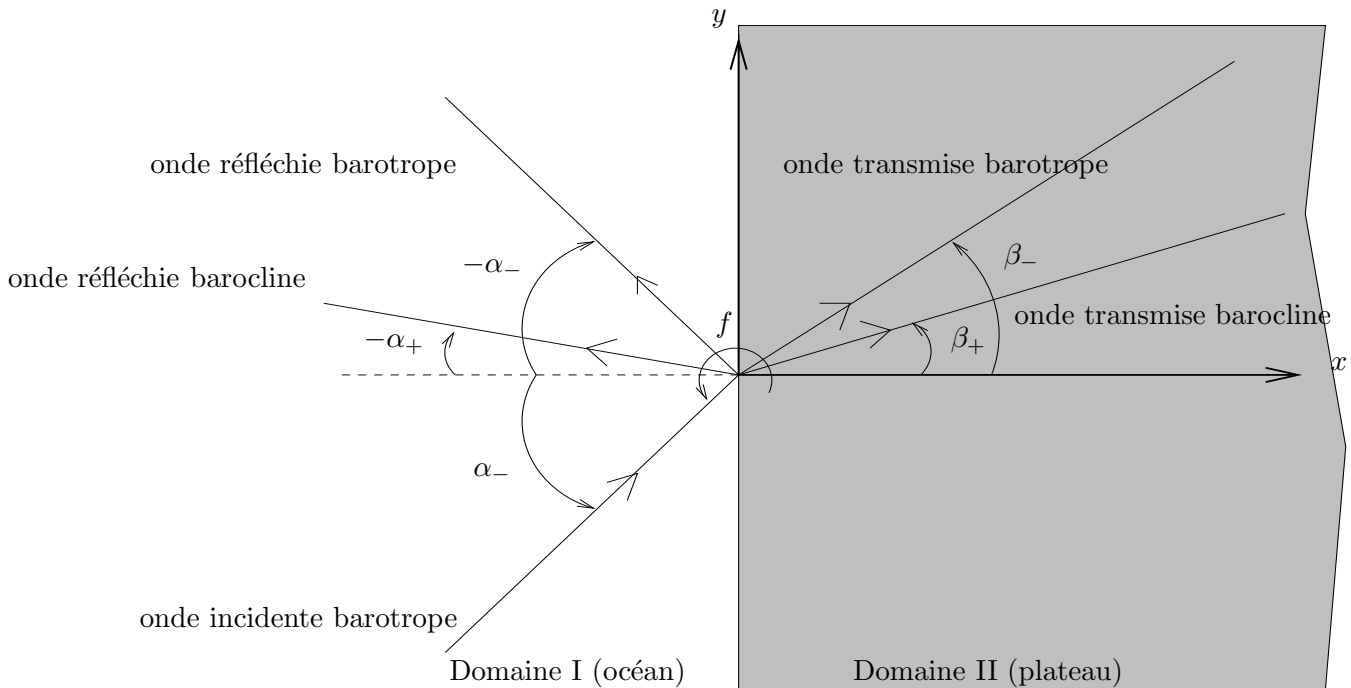


FIG. 2.4 – Vue de dessus de la marche

Pour le choix d'une marée barotrope se propageant vers le Nord-Est tel qu'elle est représentée sur la figure (2.4), on en déduit les directions de propagation des ondes progressives réfléchies et transmises en utilisant les lois de l'optique géométrique. Les ondes réfléchies se propagent donc vers le Nord-Ouest en faisant un angle avec l'axe des x respectivement $(-\alpha_-)$ pour l'onde barotrope et $(-\alpha_+)$ pour l'onde barocline. Les ondes transmises suivent un rayon de propagation dirigé vers le Nord-Est réfracté par le changement de profondeur. Le rayon de propagation pour l'onde barotrope forme un angle (β_-) avec l'axe des x et celui de l'onde barocline forme un angle (β_+) avec l'axe des x . On détermine (α_+) , (β_-) et (β_+) à l'aide des conditions de raccordement sur la marche.

Les conditions de raccordement ne conduisent à une solution non triviale que si les nombres d'onde dans la direction de la cassure sont égaux pour toutes les ondes (creux et crêtes se correspondent) et sont imposés par l'onde de Poincaré barotrope incidente i.e. :

$$k_{y-}^I = k_{y-}^{II} = k_{y+}^I = k_{y+}^{II} = k_y \quad (2.58)$$

Les angles (α_+) , (β_+) et (β_-) sont alors déterminés et vérifient :

$$(\tan \alpha_+)^2 = \frac{1}{\left[\frac{1}{(\tan \alpha_-)^2} + 1 \right] \left(\frac{\lambda_+^I}{\lambda_-^I} \right)^2 - 1} \quad (2.59)$$

$$(\tan \beta_-)^2 = \frac{1}{\left[\frac{1}{(\tan \alpha_-)^2} + 1 \right] \left(\frac{\lambda_-^{II}}{\lambda_-^I} \right)^2 - 1} \quad (2.60)$$

$$(\tan \beta_+)^2 = \frac{1}{\left[\frac{1}{(\tan \alpha_-)^2} + 1 \right] \left(\frac{\lambda_+^{II}}{\lambda_-^I} \right)^2 - 1} \quad (2.61)$$

Conséquences :

- dans la région I, il ne peut alors exister aucune onde de Kelvin barotrope.
- de même, sachant que dans une région donnée, $H^{(1)} < H^{(0)}$:
si $\omega^2 > f^2 + k_y^2 g H^{(0)}$ alors $\omega^2 > f^2 + k_y^2 g H^{(1)}$
ainsi, si l'onde barotrope est de type Poincaré dans une région, l'onde barocline l'est aussi dans cette région.
- enfin, compte-tenu de la diminution de profondeur du domaine I au domaine II, $H^{(0)II} < H^{(0)I}$ donc l'onde barotrope dans le domaine II est également de type Poincaré.

Les niveaux de surface et d'interface s'écrivent alors comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1^I &= I_{1-e} - i(k_{x-}^I x + k_y y) + R_{1+} e^{i(k_{x+}^I x - k_y y)} + R_{1-e} e^{i(k_{x-}^I x - k_y y)} \\ \bar{\eta}_2^I &= I_{2-e} - i(k_{x-}^I x + k_y y) + R_{2+} e^{i(k_{x+}^I x - k_y y)} + R_{2-e} e^{i(k_{x-}^I x - k_y y)} \\ \bar{\eta}_1^{II} &= T_{1+} e^{-i(k_{x+}^{II} x + k_y y)} + T_{1-e} e^{-i(k_{x-}^{II} x + k_y y)} \\ \bar{\eta}_2^{II} &= T_{2+} e^{-i(k_{x+}^{II} x + k_y y)} + T_{2-e} e^{-i(k_{x-}^{II} x + k_y y)} \end{aligned}$$

avec :

- k_{x-}^I nombre d'onde barotrope dans le domaine I suivant la direction x
 - k_y nombre d'onde suivant la direction y imposé par l'onde incidente barotrope dans le domaine I
 - k_{x-}^{II} nombre d'onde barotrope dans le domaine II suivant la direction x
- les indices (+) réfèrent aux mêmes quantités pour les ondes baroclines et les autres notations sont les mêmes que celles du paragraphe 2.57.

Les conditions de raccord sur la marche sont les mêmes qu'au paragraphe 2.57 et s'écrivent ; en $x = 0, \forall y$:

- continuité des niveaux de surface :

$$I_{1-} + R_{1+} + R_{1-} = T_{1+} + T_{1-} \quad (2.62)$$

- continuité des niveaux d'interface :

$$I_{2-} + R_{2+} + R_{2-} = T_{2+} + T_{2-} \quad (2.63)$$

– continuité des débits dans la couche supérieure :

$$(i\omega k_{x-}^I + fk_y)I_{1-} - \kappa_+^I R_{1+} - \kappa_-^I R_{1-} = \kappa_+^{II} T_{1+} + \kappa_-^{II} T_{1-} \quad (2.64)$$

– continuité des débits dans la couche inférieure :

$$(i\omega k_{x-}^I + fk_y)\nu_-^I I_{2-} - \kappa_+^I \nu_+^I R_{2+} - \kappa_-^I \nu_-^I R_{2-} = \kappa_+^{II} \nu_+^{II} T_{2+} + \kappa_-^{II} \nu_-^{II} T_{2-} \quad (2.65)$$

où :

$$\begin{aligned} \kappa_+^I &= i\omega k_{x+}^I - fk_y & \kappa_-^I &= i\omega k_{x-}^I - fk_y \\ \kappa_+^{II} &= i\omega k_{x+}^{II} + fk_y & \kappa_-^{II} &= i\omega k_{x-}^{II} + fk_y \\ \nu_+^I &= 1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}(\mu_+^I - 1) & \nu_-^I &= 1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}(\mu_-^I - 1) \\ \nu_+^{II} &= \frac{h_2 - b}{h_2} \left[1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}(\mu_+^{II} - 1) \right] & \nu_-^{II} &= \frac{h_2 - b}{h_2} \left[1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}(\mu_-^{II} - 1) \right] \end{aligned}$$

Les relations (2.62), (2.63), (2.64) et (2.65) constituent alors un système linéaire indépendant de y pour le calcul des constantes R_{1+} , R_{1-} , T_{1+} , T_{1-} ... que nous présentons sous forme matricielle comme au paragraphe 2.57 :

$$[\mathcal{M}'] \cdot \begin{bmatrix} r_{2+} \\ r_{2-} \\ t_{2+} \\ t_{2-} \end{bmatrix} = [\mathcal{B}'] \quad (2.66)$$

avec $R_{2+} = r_{2+}I_{2-}$, $R_{2-} = r_{2-}I_{2-}$, $T_{2+} = t_{2+}I_{2-}$, $T_{2-} = t_{2-}I_{2-}$ et :

$$[\mathcal{M}'] = \begin{bmatrix} -\mu_+^I & -\mu_-^I & \mu_+^{II} & \mu_-^{II} \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ k_{x+}^I \mu_+^I & k_{x-}^I \mu_-^I & k_{x+}^{II} \mu_+^{II} & k_{x-}^{II} \mu_-^{II} \\ k_{x+}^I \nu_+^I & k_{x-}^I \nu_-^I & k_{x+}^{II} \nu_+^{II} - k_y \pi_+^{II} & k_{x-}^{II} \nu_-^{II} - k_y \pi_-^{II} \end{bmatrix}; [\mathcal{B}'] = \begin{bmatrix} \mu_-^I \\ 1 \\ k_{x-}^I \mu_-^I \\ k_{x-}^I \nu_-^I \end{bmatrix}$$

avec :

$$\pi_+^{II} = i \frac{fb}{\omega h_2} \left[1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}(\mu_+^{II} - 1) \right] \quad \pi_-^{II} = i \frac{fb}{\omega h_2} \left[1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}(\mu_-^{II} - 1) \right]$$

et les notations précédemment définies.

Les solutions de ce système sont à valeurs complexes. Les modules et les arguments des solutions sont respectivement les amplitudes et les phases à l'origine des ondes transmises et réfléchies. On peut d'ores et déjà remarquer que l'on retrouve le système obtenu en incidence normale pour $k_y = 0$.

2.4.2 Simplification : faible différence de densité et couche mince

Dans ce paragraphe, on cherche une solution analytique dans l'hypothèse d'une faible différence de densité ($\rho_1 \sim \rho_2$) et d'une couche supérieure peu épaisse par rapport aux profondeurs totales côté océan ($h_1 \ll h_2$) et côté plateau ($h_1 \ll h_2 - b$).

On introduit les trois paramètres adimensionnels suivants :

$$\beta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}; \quad \delta = \frac{h_1}{h_2}; \quad m = \frac{h_2}{h_2 - b}.$$

En supposant $\beta \ll 1$ et $\delta \ll 1$ comme cela est souvent le cas en nature, on en déduit les simplifications suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_+^I &\sim \mu_+^{II} \sim -\beta; & \mu_-^I &\sim \mu_-^{II} \sim 1; \\ \nu_+^I &\sim \beta^2; & \nu_-^I &\sim 1; & \nu_+^{II} &\sim \frac{\beta^2}{m}; & \nu_-^{II} &\sim \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

En notant :

$$\begin{aligned} t\alpha_+ &= \tan \alpha_+; & t\alpha_- &= \tan \alpha_-; \\ t\beta_+ &= \tan \beta_+; & t\beta_- &= \tan \beta_-; \end{aligned}$$

le système pour le calcul des amplitudes se simplifie tel que :

$$[\mathcal{M}'] = \begin{bmatrix} \beta & -1 & & \beta & & & 1 \\ & -1 & -1 & & 1 & & 1 \\ \beta \frac{t\alpha_-}{t\alpha_+} & & 1 & & -\beta \frac{t\alpha_-}{t\beta_+} & & \frac{t\alpha_-}{t\beta_-} \\ & & & \beta^2 \frac{t\alpha_-}{t\alpha_+} & 1 & \frac{\beta^2 t\alpha_-}{m} \left[\frac{1}{t\beta_+} - i \frac{f(m-1)}{\omega} \right] & \frac{t\alpha_-}{m} \left[\frac{1}{t\beta_+} - i \frac{f(m-1)}{\omega} \right] \end{bmatrix}; [\mathcal{B}'] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En inversant ce système linéaire, on obtient des solutions explicites pour le calcul des amplitudes, à savoir :

$$\begin{aligned} r_{2+} &= 2i \frac{f(m-1)}{\omega m \beta} \frac{t\alpha_-}{B+C} = t_{2+} \\ t_{2-} &= 2 \frac{B}{(1 + \frac{t\alpha_-}{t\beta_-})B + C} \\ r_{2-} &= \frac{(1 - \frac{t\alpha_-}{t\beta_-})B - C}{(1 + \frac{t\alpha_-}{t\beta_-})B + C} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} B &= (1 + \frac{t\alpha_-}{t\beta_-}) \left[(\beta + 1) \frac{t\alpha_-}{t\beta_+} + (\beta - 1) \frac{t\alpha_-}{t\alpha_+} \right] - i\beta t\alpha_- \frac{f(m-1)}{\omega m} \\ C &= it\alpha_- \frac{f(m-1)}{\omega m} \left(\frac{t\alpha_-}{t\alpha_+} - \frac{t\alpha_-}{t\beta_+} \right) \end{aligned}$$

En particulier, il est intéressant de remarquer que sous l'approximation faible différence de densité et couche mince, les amplitudes des ondes baroclines réfléchi et transmise sont égales, quel que soit l'angle d'incidence.

2.5 Analyse qualitative des résultats théoriques pour les ondes de Poincaré

2.5.1 Influence de la rotation en incidence normale

D'après la formule (2.42), la rotation a une influence très forte sur le calcul des nombres d'onde. En effet, on a la relation suivante :

$$\frac{k_{avec\ rotation}}{k_{sans\ rotation}} = \sqrt{1 - \frac{f^2}{\omega^2}} \quad (2.67)$$

Dans le tableau (2.1), on présente en fonction de la latitude les coefficients amplificateurs de la longueur d'onde pour les différentes composantes de marée usuelles pour les ondes de Poincaré.

latitude (°)	10	30	45	60	80
S2 (12^{-1} cph)	1.0154	1.1547	1.4142	2.0000	5.7588
M2 (12.42^{-1} cph)	1.0165	1.1680	1.4647	2.2407	X
K1 (23.93^{-1} cph)	1.0660	13.1026	X	X	X

TAB. 2.1 – Rapport de la longueur d'onde à une latitude donnée à la longueur d'onde à l'équateur pour les différentes composantes de marée usuelles (X signifie qu'il n'y a pas d'onde libre de cette fréquence à cette latitude; en particulier, il n'existe pas d'onde de Poincaré M2 au delà de 74.45° de latitude)

Par contre, la rotation ne joue absolument aucun rôle dans le calcul des amplitudes en incidence normale. En effet, compte-tenu de la relation (2.67), les deux dernières équations du système (2.57) seront les mêmes si l'on tient compte ou non de la rotation dans le calcul.

2.5.2 Influence de l'incidence avec ou sans rotation

Le long de la cassure, la continuité des niveaux de surface et d'interface impose que les ondes de chaque région soient toutes en phases à tout instant à la cassure, les creux et les crêtes se correspondent. Analytiquement, cette condition se traduit par l'égalité des nombres d'ondes le long du plateau k_y et pour les ondes progressives, cette condition définit les angles de transmission et de réflexion. En utilisant les notations de la figure (2.5), on retrouve géométriquement les conditions (2.59)-(2.61) par la correspondance des lignes de phases sur chaque domaine à savoir :

$$\sin \beta = \frac{k^I}{k^{II}} \sin \alpha \quad (2.68)$$

Le rapport des nombres d'onde étant indépendant de la rotation, les angles de transmission et réflexion ne dépendent pas de ce paramètre. La relation (2.68) a déjà été

établie, sans rotation, par Pinettes et al. [62] du point de vue théorique pour l'étude d'une onde solitaire donc non linéaire en incidence oblique sur un plateau en bicouche. Cependant, expérimentalement, ils vérifient cette relation dans le cas sans rotation mais la mettent en défaut dans les cas avec rotation. Cette différence nous semble liée à la non-linéarité de l'onde solitaire. En effet, pour l'onde solitaire, longueur d'onde et amplitude ne sont plus des paramètres indépendants comme pour les ondes linéaires.

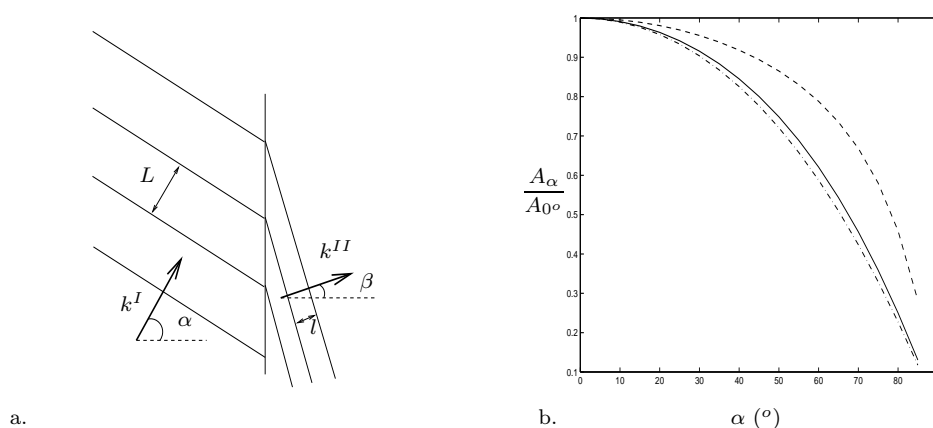


FIG. 2.5 – (a) Angles incident et réfracté (b) Amplitudes des ondes baroclines réfléchies et transmises à différentes latitudes en fonction de l'angle d'incidence de la marée barotrope, adimensionnalisées par les amplitudes pour une incidence frontale : (- -) à l'équateur i.e. $f = 0$ (—) $56^{\circ} 28'$ i.e. Malin Shelf (-.-) 74° i.e. à la latitude maximum d'existence des ondes de Poincaré [$\rho_1 = 1026 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 1027 \text{ kg/m}^3$, $h_1 = 50 \text{ m}$, $h_2 = 1450 \text{ m}$ et $b = 1350 \text{ m}$]

Ainsi, compte-tenu que $k^I < k^{II}$ pour les ondes barotropes à cause de la diminution de profondeur, $\sin \beta < \sin \alpha$: la direction de propagation de l'onde barotrope transmise sur le plateau se rapproche de la normale à la cassure et ce d'autant plus que la variation de profondeur sur le plateau est grande.

De même, pour l'onde barocline, $k_{barocline} \gg k_{barotrope}$ ainsi les ondes baroclines se propagent dans les deux régions quasiment perpendiculairement à la cassure.

L'amplitude des ondes générées dans l'interaction avec la marche est elle aussi affectée par l'angle d'incidence. En particulier, l'amplitude des ondes baroclines générées diminue quand l'angle d'incidence augmente et ce d'autant plus, que l'angle est fort comme le montre la figure (2.5.b) pour une stratification et une géométrie proche de celle observée sur le Malin Shelf, pour différentes latitudes.

De plus, pour une incidence donnée non nulle, la rotation joue elle aussi un rôle comme le montre la sensibilité à la latitude. Quand la latitude augmente (ce qui est équivalent à augmenter la rotation), l'amplitude de l'onde barocline transmise sur le plateau diminue pour une incidence donnée. Rappelons que la rotation ne joue aucun rôle dans le calcul des amplitudes en incidence normale ainsi la référence d'amplitude en incidence normale est la même pour toutes les latitudes sur le graphe (2.5.b). La représentation choisie traduit donc bien toute l'influence de la rotation.

2.5.3 Comparaison avec le modèle de Baines

Le modèle proposé par Baines [2] pour l'étude de la génération de la marée et des ondes internes a déjà été introduit au début de ce chapitre. Dans ce paragraphe, on se propose de comparer notre modèle à celui de Baines restreint au bi-couche.

En effet, Baines présente son modèle de telle façon qu'il superpose deux solutions ; l'une décrivant les mouvements de l'interface dans un cas bi-couche (saut de densité à l'interface), l'autre décrivant les ondes internes (gradient de densité constant dans la couche inférieure).

Les potentiels décrivant les mouvements dans le cas bi-couche s'écrivent de la façon suivante dans chaque domaine :

$$\Phi^I = R_R + D_1 e^{\frac{ix}{\sqrt{1-R_R}}} \quad (2.69)$$

$$\Phi^{II} = R + D_0 e^{\frac{-ix}{\sqrt{1-R}}} \quad (2.70)$$

et le déplacement de l'interface s'en déduit :

$$\eta_i = \frac{Q}{\omega L} \Phi_x \quad (2.71)$$

$$\text{avec : } D_0 = -\frac{R - R_R}{1 + \sqrt{\frac{1 - R_R}{1 - R}}}, \quad D_1 = -\sqrt{\frac{1 - R}{1 - R_R}} D_0, \quad R = \frac{h_1}{h_2 + h_1 - b},$$

$$R_R = \frac{h_1}{h_2 + h_1} \text{ et } L = \frac{gh_1(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1(\omega^2 - f^2)} \text{ en utilisant les notations de la figure (2.3). } Q$$

l'amplitude du flux barotrope allant et venant sur le plateau à chaque période.

Dans le cas de l'incidence frontale, la détermination de Q ne présente pas d'ambiguïté :

$$Q = u_{\text{barotrope}}^{II} (h_2 + h_1 - b) \quad (2.72)$$

Lorsque l'incidence n'est plus frontale, Baines suggère, sans justification, dans [1] de toujours forcer son modèle avec le flux barotrope allant et venant perpendiculairement à la cassure du plateau, en définissant $Q = a_0 \omega d$ pour une onde de Kelvin où a_0 est l'amplitude à la côte de la marée externe, d la largeur du plateau et ω la pulsation de la marée. Sur ce point, il nous semble que pour une onde de Kelvin double se propageant le long de la cassure et parallèlement à la côte, le débit perpendiculairement à la côte est nul.

De plus, il est incorrect a priori de forcer le modèle 2D de Baines avec un débit barotrope dérivé d'une onde 3D. Pourtant, notre modèle 3D est en bon accord avec celui de Baines pour le déplacement de l'interface en fonction de l'angle d'incidence d'une onde de Poincaré, le débit de forçage étant déterminé par (2.72) à partir des résultats du modèle 3D.

Sur la figure (2.6), on représente un exemple de cette comparaison pour deux bi-couches.

En fait, ce bon accord s'explique par l'approximation suivante dans le calcul tridimensionnel. D'après Huthnance [34], l'équation pour la pression p par exemple d'un fluide stratifié en rotation dans le cas 3D s'écrivent :

$$p_{xx} + p_{yy} + f^2 p + p_{tt} = 0 \quad (2.73)$$

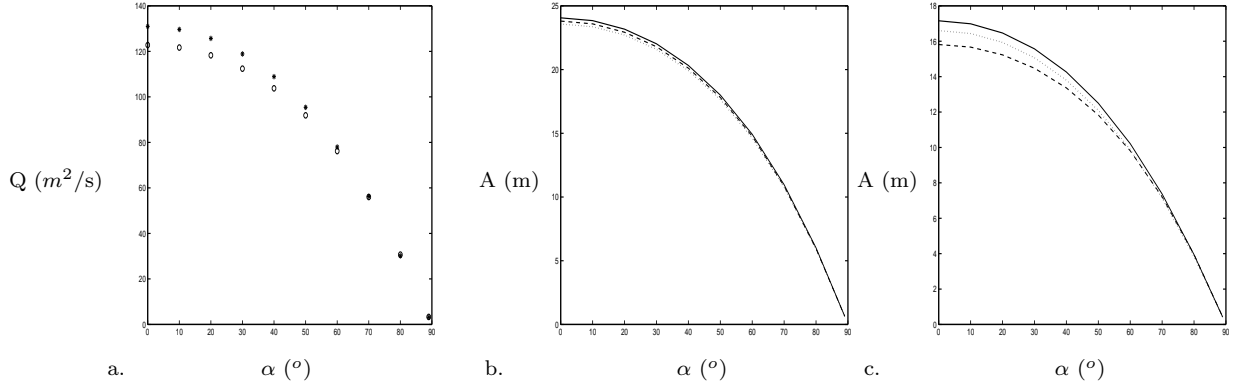


FIG. 2.6 – (a) Débit de forçage barotrope déterminé à partir de la vitesse perpendiculaire au plateau barotrope calculée avec mon modèle sur le plateau en fonction de l'angle d'incidence pour (\circ) [$\rho_1 = 1026 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 1027 \text{ kg/m}^3$, $h_1 = 50 \text{ m}$, $h_2 = 1450 \text{ m}$ et $b = 1350 \text{ m}$] et (\star) [$\rho_1 = 1026 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 1027 \text{ kg/m}^3$, $h_1 = 50 \text{ m}$, $h_2 = 3950 \text{ m}$ et $b = 3850 \text{ m}$]; Amplitude des ondes baroclines réfléchies (...) et transmises (—) calculées par mon modèle et amplitude du déplacement d'interface sur le plateau et côté haute mer donné par le modèle de Baines (- -) en fonction de l'angle d'incidence de la marée barotrope (b) Q donné par (\circ) (c) Q donné par (\star)

Ainsi, lorsque : $p_{xx} \gg p_{yy}$, ce qui est le cas si la topographie est bidimensionnelle i.e. ne présente pas de variation brusque suivant y , le modèle de Baines est valable pour une onde 3D se propageant sur cette topographie.

Il reste néanmoins que le modèle de Baines ne fait apparaître aucune différence d'amplitude entre côté haute mer et plateau pour les ondes interfaciales à la différence de notre modèle 3D.

De plus, ni la nature des ondes interfaciales, ni leurs autres caractéristiques ne sont décrites.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations des ondes longues tridimensionnelles en bi-couche sont utilisées pour étudier la génération de la marée interne sur les marges continentales avec rotation. Pour une onde de Poincaré 3D barotrope en incidence oblique sur une marche, les directions de propagation, nombres d'onde et amplitudes des ondes de Poincaré, barotropes et baroclines, transmises et réfléchies sont déterminées. Ce sont aussi les seules ondes générées. Les amplitudes obtenues sont en bon accord avec celles prédites par Baines [2] en incidence normale, et en incidence oblique si le débit barotrope perpendiculaire à la marche (forçage du modèle) est déterminé à partir de notre modèle.

Chapitre 3

Comparaison du modèle de génération de la marée interne aux mesures in-situ

3.1 Introduction

Si beaucoup d'auteurs se sont penchés sur la question théorique de la génération de la marée interne, peu d'entre eux ont confronté leur modèle à des mesures in-situ. Par chance, quelques théoriciens ont trouvé un écho favorable auprès d'expérimentateurs, donnant quelques comparaisons modèle-mesure dont la revue suit. On se limite ici aux articles s'intéressant aux ondes internes linéaires, laissant de côté le champ largement investigué des ondes non-linéaires telles que les ondes solitaires. On ne cherche pas non plus à se montrer exhaustif sur le terrain des ondes linéaires, en n'abordant pas les comparaisons de mesures à des modèles numériques "faits maison" et en ne conservant que les apports nous paraissant les plus significatifs.

Ainsi, De Witt et al. [81] choisissent de comparer le modèle de Prinsenberget Rattray [66] à des mesures dans le Rockall Channel, à 300 km à l'ouest de l'Ecosse, côté océan. A partir de mesures de vitesses en trois points, ils déterminent le spectre directionnel des ondes internes et identifient le Rockall Bank, un haut fond, comme source de leur génération, en s'appuyant sur le fait que quelque soit l'angle d'incidence de la marée externe, les ondes internes se propagent perpendiculairement au plateau [77]. La topographie étant très abrupte autour de ce haut-fond, la modélisation par une marche semble adaptée. Le modèle, résolu numériquement avec 10 modes internes, prédit correctement les déplacements verticaux côté océan pour une amplitude de marée barotrope de 1 m et une largeur de plateau de 350 km. Cette largeur n'est pas réaliste puisque le Rockall Bank de géométrie circulaire ne présente pas de côte. En fait, la largeur est ajustée pour obtenir le meilleur accord. Il est assez surprenant de voir appliquer le modèle 2D de Prinsenberget Rattray à ce site où la topographie est clairement 3D, axisymétrique et où Huthnance a mesuré une marée barotrope piégée par le haut fond, se propageant dans le sens des aiguilles d'une montre. Reste que la variance des vitesses est elle aussi correctement prédite par le modèle. De même, la distribution de l'énergie dans la colonne d'eau en fonction de la distance au talus est en bon accord avec le modèle, révélant un 1^{er} mode majoritairement dominant, excepté à quelques profondeurs. Ironiquement, ils soulèvent le point délicat de com-

parer un modèle décrivant des variations dans l'espace à des mesures clairsemées. On préférera la démarche de New [56] qui avant d'appliquer un modèle en discute les hypothèses. Ainsi, pour comparer des mesures réalisées dans le Golfe de Gascogne, son choix se porte sur le modèle de Prinsenbergh et Rattray, approprié pour les stratifications complexes (été, hiver) et la géométrie simple de ce site (à l'inverse de Baines). Il change cependant la condition de réflexion totale à la côte pour une condition de radiation plus adaptée. Il prend en compte 30 modes internes dans sa version modifiée du modèle et compare avec succès les amplitudes, longueurs d'onde, énergie et célérité mesurées côté eau profonde aux résultats du modèle pour une marée externe de 0.75 m en mortes eaux et 2 m en vives eaux. Ce bon accord nous semble tout à fait légitime sachant que dans cette région la marée externe est en incidence frontale par rapport au talus.

Le bon accord mesure modèle étant établi, il détaille les résultats du modèle et montre en particulier que si du point de vue énergétique, le mode 1 est toujours prédominant sur le plateau et côté océan, sur les déplacements verticaux, le mode 1 domine sur le plateau mais c'est le mode 3 qui l'emporte dans l'océan. Enfin, le modèle prédit un nombre de Richardson inférieur à $1/4$ à deux niveaux dans l'océan (à 50 m et à 900 m), repérant deux zones de mélange. New fait remarquer au passage que cette valeur est sensible aux nombres de modes utilisés dans la résolution numérique, et vaut effectivement 2 si l'on se limite à 10 modes internes comme De Witt et al.

Au même moment, Sherwin [73] choisit lui d'appliquer le modèle de Baines [2] pour le comparer à des mesures réalisées sur le Malin Shelf, au Nord de l'Irlande. Cette fois, il ne s'agit plus de mesures côté océan mais sur le plateau. D'après les travaux précédents, le mode 1 est en général prépondérant sur le plateau ce qui est effectivement le cas sur le Malin Shelf.

Les mesures de températures et de vitesses sont réalisées à deux stations situées sur un axe normal à la cassure et révèlent des déplacements verticaux de 6.2 m près de la cassure et 4.2 m à 55 km à l'Est. Le seul point de comparaison avec le modèle de Baines repose sur le flux d'énergie totale, celui mesuré (104 W/m) valant le double de celui prédit par le modèle, ce qui objectivement ne peut être qualifié de bon accord. Cependant, les mesures sont bien détaillées et il nous paraît possible de comparer de façon plus complète ces mesures à notre modèle.

Pour finir cette revue des comparaisons les plus marquantes modèle-mesure sur la génération des ondes internes linéaires, récemment, Largier [41] compare un modèle dérivé de celui de Baines à des mesures réalisées dans une toute autre région du monde, en Afrique du Sud. Les amplitudes de la marée interne semi-diurne sont comprises entre 5 et 10 m sur le plateau. Le flux d'énergie transporté par cette marée interne sur le plateau est estimé à 40 W/m.

Dans ce chapitre, on se propose de comparer le modèle théorique développé au chapitre 2 à des données provenant de différentes campagnes de mesures en mer réalisées par Sherwin et al. au sein de Unit for Coastal and Estuarine Studies (UCES, University of NorthWales, Bangor). Les données que Dr. T.J. Sherwin m'a gracieusement permis d'utiliser lors d'un séjour de 3 mois que j'ai effectué à UCES, proviennent des campagnes de mesures suivantes :

- Malin Shelf, 10 juillet - 10 août 1983, Dr. T.J. Sherwin,
- Malin Shelf, 10 juillet - 8 août 1996, croisière 128/26 (SES7), projet UK LOIS/SES 189 Grant GST/02/0764, Dr. M. Inall,

- Iberian Shelf, 9 août - 17 août 1994, croisière MORENA 3B, projet MASTII/MAS2-CT93-0065, Dr. D.R.G. Jeans.

Pour les deux campagnes de mesure récentes (1994 et 1996), le traitement et l'analyse des données nature ont été refaits dans l'optique de l'étude de la marée interne. Ainsi, j'ai pu extraire de ces données toutes les informations qui m'ont paru intéressantes pour la comparaison avec le modèle de génération. Par contre, pour la campagne de mesure de 1983, compte-tenu qu'il existait une étude très complète des données du point de vue de la marée interne dans la thèse de Sherwin [72], aucun traitement n'a été repris. Ainsi, la comparaison avec le modèle pour cette campagne de mesure est faite sur les données bibliographiques, en s'intéressant particulièrement à donner une lecture critique des modèles utilisés à l'époque.

Dans une première partie, les motivations pour le choix de ces campagnes de mesures sont exposées ainsi que le type de données in-situ dont je disposais et les méthodes d'analyse retenues pour extraire de ces données des informations quant à la marée interne. Les résultats de ces analyses comparés au modèle théorique du chapitre 2 sont présentés séparément pour chaque campagne de mesure dans une seconde partie. Il est bon de souligner en préambule que le choix du modèle forcé par une onde de Poincaré barotrope pourra choquer certains, sachant que la marée externe est en général décrite comme une onde de Kelvin. En effet, lorsqu'il s'agit de calculer la marée externe dans l'océan mondial, on ne peut négliger l'existence des parois constituées par les terres émergées. Ainsi, le calcul consiste à évaluer la résonance de bassins interconnectés au forçage dû à l'attraction des astres. Comme on le voit sur la figure (3.1) tiré de la thèse de Genco [25], ce calcul fait apparaître des points amphidromiques (amplitude nulle) caractéristiques de la surperposition d'ondes de Kelvin.

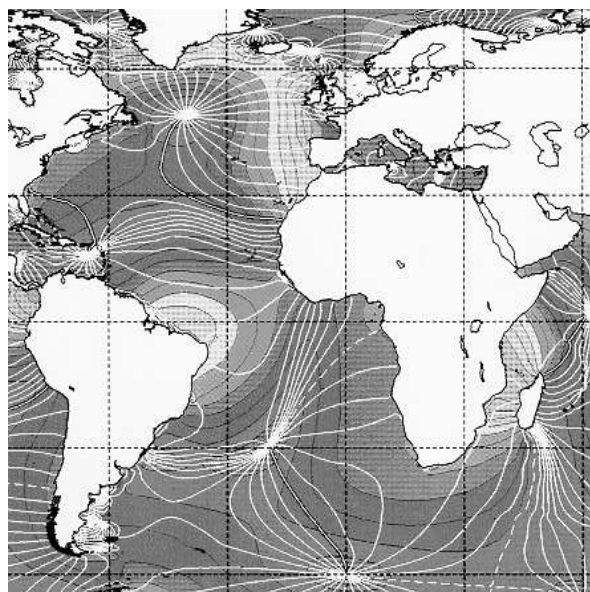


FIG. 3.1 – *Calcul numérique de la marée externe M2 pour l'océan mondial [25]*

Il ne s'agit ici nullement de remettre en cause cette description de la marée mais au contraire de justifier notre approximation. En effet, nous considérons le cas où localement la direction de propagation de l'onde de marée n'est pas parallèle au

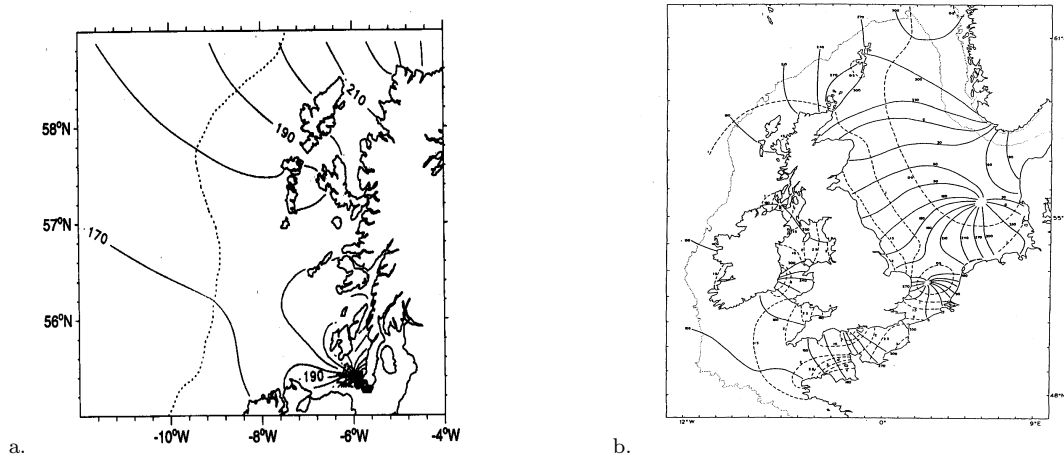


FIG. 3.2 – Iso-phases et iso-amplitudes de la marée M2 sur le Malin Shelf d’après (a) calcul numérique de Xing & Davies [82] (b) Howarth & Pugh [30]

contour bathymétrique de la marge continentale comme c’est le cas sur le Malin Shelf. En effet, comme on le voit sur les figures (3.2) représentant les iso-phases et iso-amplitudes de la marée M2 d’après deux sources différentes, la marée M2 sur le Malin Shelf arrive en incidence par rapport à la normale à la cassure du talus.

Dans ce cas, on suggère de décrire la marée comme la superposition de deux ondes. L’une est une onde de Kelvin piégée par le talus et qui n’apporte aucune contribution à la marée interne puisque le débit perpendiculaire à la cassure est nul pour cette onde. L’autre onde est une onde de Poincaré en incidence sur la marche qui donne lieu à la génération de deux ondes internes, une transmise et une réfléchiée par la marche. Cette vision est confortée par la simulation numérique de Xing & Davies [82]. On voit clairement sur les figures (3.3) tirées de [82] des ellipses de vitesse caractéristiques de la réfraction sur la marche d’une onde progressive en incidence (type Poincaré) mais également un flux d’énergie important piégé le long du talus caractéristique d’une onde de Kelvin.

3.2 Description des données in-situ

3.2.1 Choix des données, situation géographique et bathymétrie

Outre le fait que ces données ont été gracieusement mises à ma disposition, les sites retenus présentent a priori les caractéristiques nécessaires pour tester le modèle bi-couche de génération de la marée interne sur une marche.

En effet, le modèle théorique comporte plusieurs hypothèses, en particulier l’inexistence de modes internes d’ordre supérieur à 1. Cela signifie que toute l’énergie se propage ou bien en surface ou bien à l’interface, mais toujours horizontalement et jamais verticalement. Cette hypothèse justifie à la fois le choix d’un bi-couche et la modélisation du talus continental par une marche.

Par ailleurs, le choix de la marche implique qu’il n’y a pas de réfraction sur le talus liée à la variation de profondeur. Cela suppose donc que la largeur du talus est petite comparée aux longueurs d’onde des ondes en présence. La validité de cette hypothèse est assez facile à apprécier sur les profils bathymétriques correspondant à chacune

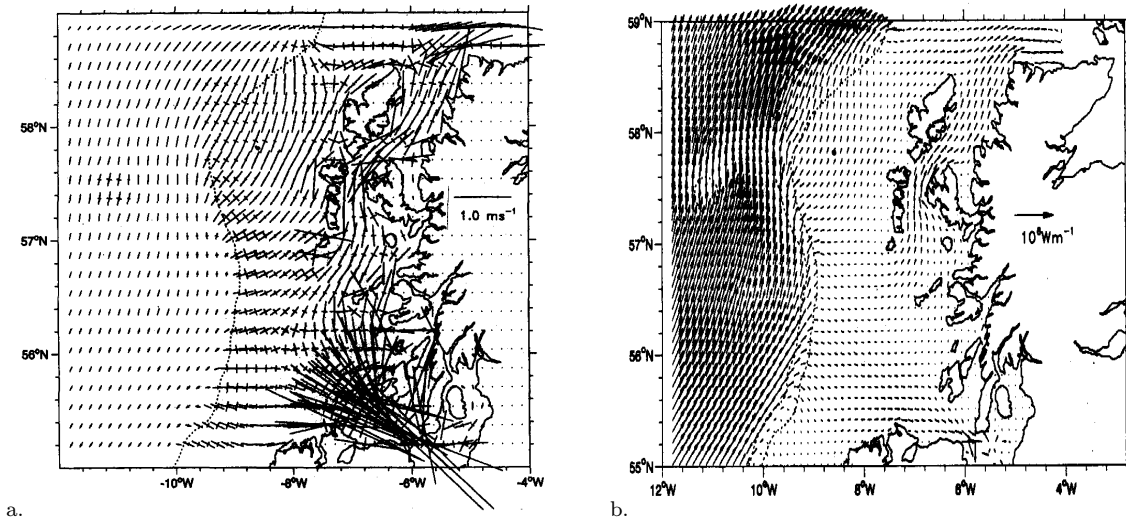


FIG. 3.3 – La marée barotrope M2 sur le Malin Shelf d'après le calcul numérique de Xing & Davies [82] (a) axes principaux des ellipses de vitesse en surface (b) flux d'énergie

des campagnes de mesures reproduits sur la fig. (3.5).

Pour la marée barotrope dont la longueur d'onde de l'ordre de 1000 km, l'hypothèse est donc tout-à-fait vérifiée mais pour la marée barocline dont la longueur d'onde typique est de l'ordre de 30 à 40 km, cette hypothèse est plus contestable, particulièrement sur le Malin Shelf. Cependant, en l'absence d'onde barocline incidente (qui est une hypothèse du modèle), cette réfraction ne joue pas de rôle pour les ondes transmises sur le plateau.

Pour ce qui est de l'hypothèse d'absence de modes verticaux, les principaux arguments avancés en faveur de cette hypothèse concernent la stratification. C'est-à-dire que lorsque la stratification présente une pycnocline très marquée, et que l'analyse en composantes principales (ou Empirical Orthogonal Function analysis) du champ de vitesses mesurées met en évidence une forte prédominance du 1^{er} mode, il semble raisonnable d'envisager une hypothèse bi-couche. Nous serons donc amené à effectuer ce test.

Enfin, dans le modèle, on fait l'hypothèse d'une seule onde barotrope incidente, ce qui nous conduit à étudier la propagation des ondes internes venant de l'océan sur le plateau. En effet, les ondes internes se propagent suivant des rayons formant un angle sur l'horizontale, dépendant du rapport du nombre d'onde vertical au nombre d'onde horizontal.

Dans le cas général (stratification quelconque), ces rayons sont des courbes car le nombre d'onde vertical varie avec la profondeur. Pour simplifier l'argumentaire, prenons le cas simple de la stratification linéaire (gradient de densité constant). Dans ce cas, l'angle de propagation des modes verticaux est constant et vaut (Munk,[54]) :

$$\theta = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{N^2 - \omega^2}} \quad (3.1)$$

où θ est l'angle du rayon avec l'horizontale, N la fréquence de Brünt-Väisälä ($N_{max} \sim 0.01$ au niveau de la thermocline sur le Malin Shelf), ω la fréquence de l'onde et

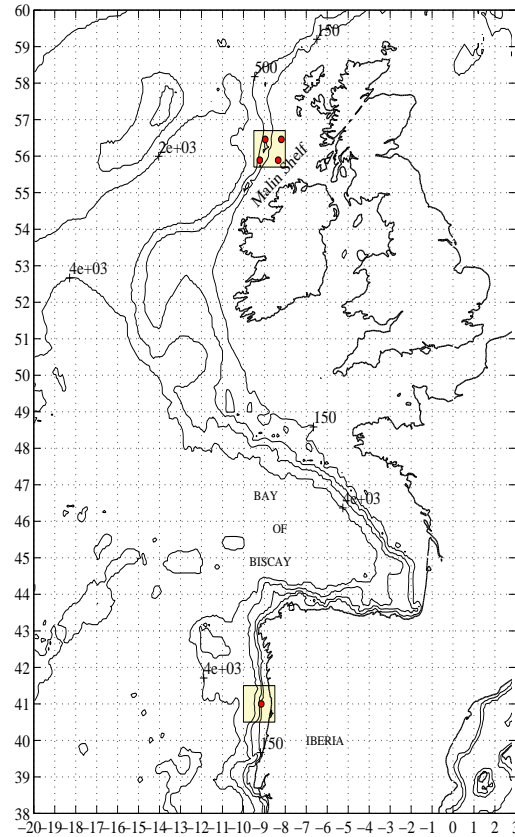


FIG. 3.4 – Carte de la frontière atlantique de l'Europe : les 3 sites de mesure sont les zones grisées et les mouillages de mesure sont repérés par les points noirs

f la fréquence inertielle de Coriolis. On introduit alors, pour tout obstacle à la propagation de ces ondes internes, les termes de pente sub-critique (resp. super-critique) signifiant que l'onde sera transmise (resp. réfléchi) sur la pente. Pour les 2 campagnes récentes, à partir des profils CTD effectués sur le talus, on détermine l'angle θ que l'on compare à la pente du talus.

Les pentes des talus pour chaque campagne de mesure ont donc la caractéristique suivante :

- Malin Shelf, 1983 : sub-critique entre 200 m et 1200 m selon [72]
- Malin Shelf, 1996 : super-critique entre 200 m et 1000 m
- Iberian Shelf, 1994 : sub-critique jusqu'à 2000m de profondeur (à $9^{\circ}41' N$, $\theta = 2.82^{\circ}$ pour une pente du talus $\alpha = 2.11^{\circ}$), super-critique entre 200 m et 2000 m (à $9^{\circ}24' N$, $\theta = 2.1^{\circ}$ pour une pente du talus $\alpha = 6.3^{\circ}$)

Ainsi, sur les trois sites, les talus sont jugés super-critiques, suggérant l'impossibilité à des rayons incidents de franchir le seuil.

3.2.2 Instrumentation et données disponibles

Les appareils de mesure utilisés lors des 3 campagnes sont les appareils classiquement utilisés pour les mesures en océanographie physique, à savoir :

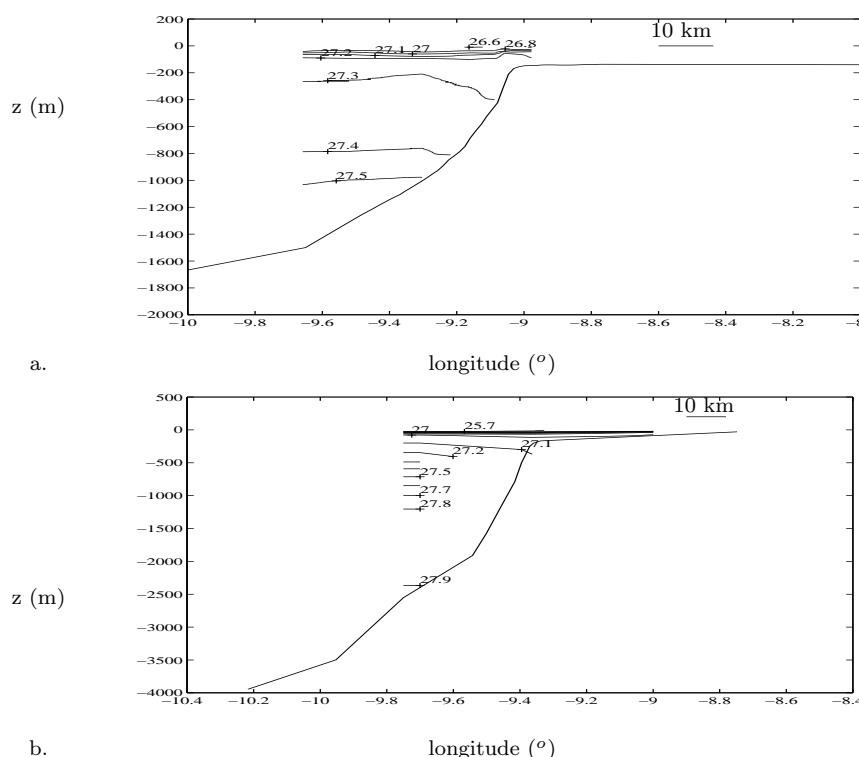


FIG. 3.5 – Profils bathymétriques et hydrologiques : (a) campagne Malin Shelf 1996 (section à $56^{\circ}28'N$) (b) campagne Iberian Shelf 1994 (section à $41^{\circ}N$) [$z = 0$ représente le niveau moyen de la surface libre]

- mesure de la température sur la verticale : des chaînes thermistives (TC) fournissent des mesures de la température in-situ aux différentes altitudes des capteurs sur la chaîne. Les chaînes thermistives utilisées lors des campagnes mesurent 76 mètres de long et sont fixées à des balises flottantes 6 m sous la surface.
- mesure du champ de vitesse : en 1983, cette mesure était effectuée avec des courantomètres fournissant les deux composantes horizontales de la vitesse, alors que depuis 1994, cette mesure est effectuée avec une nouvelle génération de courantomètres à effet Doppler (dit ADCP) permettant de mesurer en plus la vitesse verticale, et ce, de 2 manières différentes. De plus, en 1983, Sherwin ne disposait de la mesure de vitesse qu'en 4 points le long de la verticale alors que sur les données récentes, la verticale est discrétisée avec un pas de 2 m. Les courantomètres sont en général couplés à des chaînes thermistives et déposés en mouillage pour un certain temps.
- mesure de la densité : en fait, il ne s'agit pas exactement d'une mesure de la densité mais des 3 grandeurs permettant de la calculer. Les capteurs utilisés (dit Conductivity Temperature Depth) permettent de réaliser une mesure continue de la conductivité (après calibration, fournit la salinité), de la température et de la pression le long de la verticale. Ce matériel est en général embarqué et fournit des profils quasi-instantanés (une mesure dure environ 3mn).

A l'aide de ces données, nous voulons obtenir des informations sur la marée interne afin de les comparer à notre modèle. La marée interne est caractérisée par deux gran-

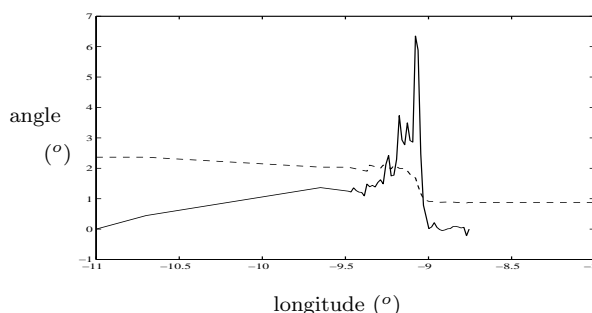


FIG. 3.6 – Angles θ de propagation des modes verticaux d'après la formule (3.1) (- -) et pente α du talus (—) pour la campagne Malin Shelf 1996

deurs, son amplitude et sa longueur d'onde, pour chaque fréquence. Dans un premier temps, on s'intéresse exclusivement à la marée interne semi-diurne de période 12.42 h.

Compte tenu de la grande période du phénomène étudié, ce sont surtout les données provenant du matériel en mouillage qui sont intéressantes. Pour déterminer les caractéristiques de la marée interne, on étudie les déplacements des isothermes au cours du temps fournis par les chaînes thermistives. Cependant, pour vérifier la validité de l'hypothèse bi-couche et pour déterminer le bi-couche équivalent comme entrée du modèle, nous aurons recours aux mesures de vitesses horizontales et surtout aux profils CTD réalisés lors des passages du bateau près des points de mouillage.

Notre modèle ne prend pas en compte la dissipation ni l'évolution non linéaire de la marée interne lors de sa propagation sur le plateau donc pour avoir la meilleure estimation de l'amplitude de la marée générée, il nous fallait des points de mouillages proches du point de génération c'est-à-dire au bord du talus. C'est le cas pour les 3 sites considérés.

Par ailleurs, la mesure au cours du temps en un seul point de la marée interne n'est pas suffisante pour déterminer sa longueur d'onde sans recours à une hypothèse théorique. C'est pourquoi les deux campagnes de mesures sur le Malin Shelf sont très précieuses car on dispose de 2 points de mesures fixes simultanés. Ceci permet d'estimer la longueur d'onde in-situ sous couvert de la seule hypothèse que la longueur d'onde ne varie pas entre ces 2 points. Compte-tenu de la bathymétrie très plate du plateau, il y a peu de chance pour que la marée soit notablement réfractée. De plus, la distance entre les 2 stations est relativement petite (de l'ordre de 1 à 2 longueurs d'onde théorique). On peut donc espérer que l'hypothèse de longueur d'onde constante soit vérifiée.

3.3 Méthodes d'analyse

Dans ce paragraphe, on présente une méthodologie succincte pour déterminer les informations principales dont nous avons besoin pour comparer le modèle de génération de la marée interne aux données natures. Cette méthodologie me paraît être le minimum nécessaire pour mener cette comparaison de façon consistante. Cependant, d'autres techniques peuvent être utilisées permettant d'obtenir des informations plus fines sur la marée interne. Pour plus de détail sur l'ensemble de ces techniques, on peut se référer à la thèse de T.J. Sherwin [72].

3.3.1 Méthode EOF : test de l'hypothèse bi-couche

Pour un milieu continuellement stratifié, il a été montré par plusieurs auteurs dont Philipps [60], l'existence de modes verticaux linéaires permettant à l'énergie de se propager, non plus uniquement le long de l'interface comme dans le cas bi-couche, mais aussi verticalement. Ainsi, l'existence du bi-couche équivalent suppose qu'il existe un mode vertical prépondérant, le 1^{er} mode. Ceci est le plus souvent montré par une analyse en composantes principales (ou Empirical Orthogonal Function analysis) sur le champ de vitesses mesurées en complément du profil de densité.

La méthode EOF, introduite en 1943 par Kosambi [39], permet de décomposer une série temporelle d'un champ spatial sur une base de vecteurs propres orthogonaux au sens discret. Cette méthode a été appliquée avec succès par Kundu et al [40] sur des champs de vitesses mesurés dans l'océan afin de déterminer les modes internes. Les modes internes ainsi calculés sont qualifiés d'empiriques car ils n'ont a priori aucun sens dynamique, ils constituent simplement une base orthogonale statistique pour la série temporelle considérée. Cependant, Kundu montre que si les modes internes dynamiques ne sont pas corrélés les uns aux autres, et si la série temporelle considérée est suffisamment longue et ergodique, les modes empiriques fournissent une bonne statistique des modes internes dynamiques. Nous reprenons ici les grandes lignes de la méthode EOF telle qu'ils la présentent dans [40].

Soit la matrice $V_k(z_i)$ de vitesses mesurées aux temps $t_{k,k \in [1,K]}$ et aux altitudes $z_{i,i \in [1,P]}$ et $R = \frac{VV^T}{K}$, la matrice des coefficients de corrélation de V .

Les modes empiriques orthogonaux sont alors les vecteurs propres ($P_{n,n \in [1,P]}$) de la matrice R . Kundu montre que chaque valeur propre ($\lambda_{n,n \in [1,P]}$) représente la moyenne temporelle de l'énergie contenue dans le mode propre P_n .

La somme des valeurs propres représente donc l'énergie moyenne totale. Ainsi pour tester l'importance de chaque mode, il suffit de calculer le pourcentage de variance associé à chaque vecteur propre, ce qui correspond exactement au pourcentage de

l'énergie totale contenue dans chaque mode, à savoir : $\frac{\lambda_n}{\sum_{n=1}^P \lambda_n}$. Les vecteurs propres

obtenus sont normés et pour effectivement retrouver le champ de vitesse associé à chaque mode, il faut projeter la série temporelle du champ de vitesse sur chaque mode empirique orthogonal :

$$V_k(z_i) = \sum_{n=1}^P E_{kn} P_n(z_i) \quad (3.2)$$

avec :

$$E_{kn} = \sum_{i=1}^P V_k(z_i) P_n(z_i) \quad (3.3)$$

L'équation (3.2) traduit la décomposition de la vitesse à chaque instant t_k sur la base orthogonale des vecteurs propres $P_{n,n \in [1,P]}$. Par exemple, la composante de la vitesse à l'instant t_k sur le mode P_n est E_{kn} défini par la relation (3.3). Ainsi, on peut reconstituer la série temporelle de chaque composante de la vitesse sur chaque mode.

Les vitesses verticales associées à la marée interne ne sont pas très fortes (environ 0.07 cm/s ce qui correspond à 30 m/12.42 h) et ne sont donc pas mesurables par les

ADCP avec une précision acceptable.

Mais cette méthode peut être appliquée sur le champ de vitesse horizontale ce qui a déjà été fait auparavant par Sherwin [72] pour également étudier la marée interne.

3.3.2 Détermination unique du bi-couche équivalent

Connaissant le profil de densité le long de la verticale d'un milieu stratifié donné, et lorsque le 1^{er} mode barocline est bien plus marqué que les modes suivants, il est fondé de rechercher le bi-couche équivalent.

La figure (3.7) sert de support pour les notations utilisées dans ce paragraphe.

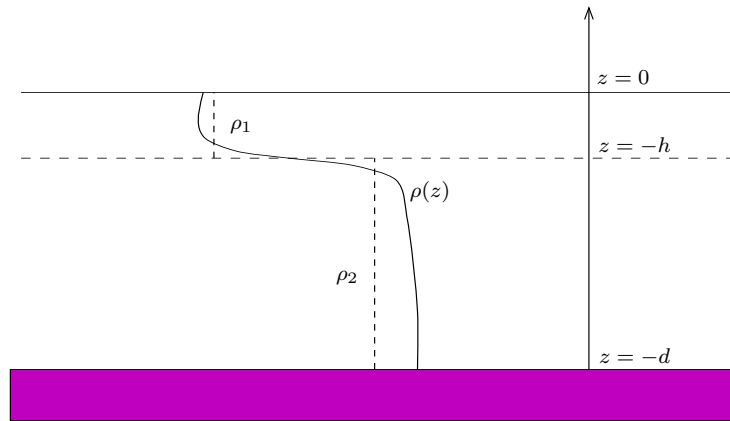


FIG. 3.7 – Stratification continue de densité $\rho(z)$ et bi-couche équivalent (ρ_1 densité de la couche supérieure et ρ_2 densité de la couche inférieure)

Le bi-couche équivalent peut être déterminé de deux façons.

1^{re} méthode

Cette méthode, présentée dans la thèse de Sherwin [72], assure l'unicité du bi-couche équivalent déterminé.

Les conditions sont donc :

- conservation de la masse de part et d'autre de l'interface entre le bi-couche et le milieu stratifié
- une onde d'une fréquence donnée se propageant à l'interface du bi-couche équivalent doit avoir la même vitesse de phase que le premier mode vertical du milieu stratifié.

Ces contraintes conduisent aux relations suivantes définissant les densités des couches inférieure et supérieure (respectivement ρ_2 et ρ_1) et la position de l'interface h :

$$h = \int_{-h}^0 \frac{\rho(z)}{\bar{\rho}} dz = \frac{c^2}{g} \left[1 - \frac{f^2}{\omega^2} \right] \quad (3.4)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \rho(z) dz \quad (3.5)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{d-h} \int_{-d}^{-h} \rho(z) dz \quad (3.6)$$

avec :

$\rho(z)$ profil de densité du milieu stratifié

f fréquence inertielle de Coriolis

ω fréquence de l'onde

c célérité du 1^{er} mode vertical de fréquence ω dans le milieu stratifié.

L'équation (3.4) est résolue numériquement afin de déterminer h puis on détermine les densités des deux couches du bi-couche équivalent à l'aide des formules (3.5) et (3.6). Il est à noter que dans la relation (3.4), Sherwin utilise une formule simplifiée pour la célérité du bi-couche, en supposant une faible différence de densité entre les deux couches. Il est cependant possible de résoudre le problème avec l'expression complète de la célérité donnée au paragraphe 2.2.6, l'issue numérique étant alors bien plus lourde.

La relation (3.4) s'écrit alors :

$$h - \int_{-h}^0 \frac{\rho(z)}{\bar{\rho}} dz = \frac{c^2}{g} \left[1 - \frac{f^2}{\omega^2} \right] \left(1 - \frac{c^2}{gd} \left[1 - \frac{f^2}{\omega^2} \right] \right) \frac{1}{d-h} \int_{-d}^{-h} \frac{\rho(z)}{\bar{\rho}} dz \quad (3.7)$$

L'inconvénient de cette méthode est que rien n'assure de situer l'interface au niveau du zéro de vitesse horizontale, ce qui serait le plus physique. C'est pourquoi on propose une seconde méthode pour calculer le bi-couche équivalent.

2^e méthode

Les conditions requises sont :

- l'interface se situe au niveau du maximum de vitesse verticale du 1^{er} mode barocline, qui est aussi le niveau du zéro de vitesse horizontale
- une onde d'une fréquence donnée se propageant à l'interface du bi-couche équivalent doit avoir la même vitesse de phase que le premier mode vertical du milieu stratifié
- les masses totales des deux systèmes sont égales.

Le niveau de l'interface h étant fixé par le calcul des modes propres du profil de densité, les contraintes ci-dessus conduisent aux relations suivantes définissant les densités des couches inférieure et supérieure (respectivement ρ_2 et ρ_1) :

$$\rho_1 = \left(1 - \frac{c^2}{gh} \left[1 - \frac{f^2}{\omega^2} \right] \right) \bar{\rho} \quad (3.8)$$

$$\rho_2 = \frac{\bar{\rho}d - \rho_1 h_1}{h_2} \quad (3.9)$$

avec :

$\bar{\rho}$ densité moyennée sur la verticale

f fréquence inertielle de Coriolis

ω fréquence de l'onde

c célérité du 1^{er} mode vertical de fréquence ω dans le milieu stratifié.

Il est toujours possible de résoudre le problème avec l'expression complète de la célérité donnée au paragraphe 2.2.6.

La relation (3.8) s'écrit alors :

$$\bar{\rho} - \rho_1 = \frac{c^2}{gh} \left[1 - \frac{f^2}{\omega^2} \right] \left(1 - \frac{c^2}{gd} \left[1 - \frac{f^2}{\omega^2} \right] \right) \left(\bar{\rho} \frac{d}{d-h} - \rho_1 \frac{h}{d-h} \right) \quad (3.10)$$

3.3.3 Analyse harmonique de la marée

En supposant que la marée soit la superposition linéaire de différentes fréquences, décomposer la marée consiste à déterminer les amplitudes et phases de ces différentes fréquences. La méthode la plus couramment utilisée pour déterminer les composantes de la marée sur un enregistrement expérimental est de minimiser l'écart quadratique entre le signal expérimental et le signal simulé dont les paramètres sont les fréquences et les inconnues, les amplitudes et phases. La clé d'une bonne analyse de la marée réside dans le choix des fréquences. Un guide utile est constitué par les fréquences calculées pour la marée à l'équilibre, c'est-à-dire en ne tenant compte que des forces d'attraction des planètes (soleil, lune ...) sur une sphère couverte d'une hauteur d'eau constante sans tenir compte de la bathymétrie ni des terres émergées. Les 17 fréquences principales sont répertoriées dans la table (3.1).

nom	période (heure)	amplitude relative à l'équilibre (m)
Composantes diurnes		
Q1	25.87	0.072
O1	25.82	0.377
M1	24.86	0.04
P1	24.07	0.176
K1	23.93	0.531
J1	23.1	0.03
Composantes semi-diurnes		
2 N2	12.91	0.023
μ 2	12.87	0.028
N2	12.66	0.174
M2	12.42	0.908
L2	12.19	0.026
S2	12.00	0.423
K2	11.97	0.115
Composantes quart-diurnes		
MN4	6.27	0.158
M4	6.21	0.412
SN4	6.16	0.384
MS4	6.1	0.384

TAB. 3.1 – *Fréquences principales de la marée à l'équilibre (Source : Doodson & Warburg [17])*

Ces fréquences sont classées par espèces à savoir diurne, semi-diurne ... En fait, seules les espèces diurne et semi-diurne sont effectivement des fréquences naturelles liées à l'attraction des astres. L'espèce quart-diurne découle de l'interaction de 2 espèces semi-diurnes d'où son nom composé (ex : MN4 vient de M2 X N2).

L'amplitude relative de chaque fréquence décrit l'importance relative de chaque fréquence au sein d'une même espèce. Ainsi, la table (3.1) ne donne absolument aucune indication sur l'importance relative d'une fréquence diurne à une fréquence semi-diurne. La seule indication de cette table est que :

- parmi les fréquences diurnes, la composante K1 (période 23.93 h) est prépondérante

- sur les autres
- parmi les fréquences semi-diurnes, la composante M2 (période 12.42 h) est prépondérante sur les autres
- les fréquences quart-diurnes ont des importances relatives similaires.

3.4 Analyse des données, comparaison avec le modèle théorique

3.4.1 Malin Shelf, juillet 1996

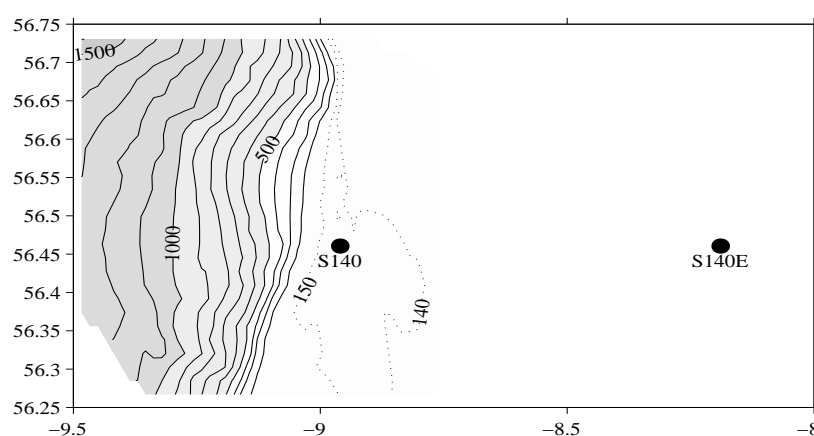


FIG. 3.8 – Bathymétrie (isobathes en mètres) en vue de dessus pour la campagne Malin Shelf 1996 : les mesures précises de la bathymétrie se trouvent dans la zone grisée ; à l'Est, le plateau est plat avec des profondeurs comprises entre 140 m et 150 m. Les deux stations de mouillages S140 et S140E sont repérées.

Les positions précises des deux stations de mesures fixes sur ce site sont données dans le tableau (3.2).

nom	latitude (en degré)	longitude (en degré)	profondeur d'eau (m)
S140	56.46 N	8.96 W	147
S140E	56.46 N	8.19 W	149

TAB. 3.2 – Positions des mouillages fixes pour le campagne Malin Shelf 1996

La distance séparant les 2 stations est de 47.5 km.

Mesures de la stratification

A partir des profils verticaux quasi-instantanés de température in-situ et de salinité fournis par les CTD, on déduit les profils de température et densité potentielles (Gill, [26]). Le choix des profils CTD comme étant représentatifs de la stratification est critiquable. En effet, ils ne fournissent qu'une mesure instantanée de la stratification et sont donc biaisés tant par le passage éventuel d'une onde haute fréquence que par

les mouvements baroclines basse fréquence tels que la marée interne semi-diurne ou le cycle jour-nuit d'échanges thermiques.

Cependant, les profils CTD présentent 2 intérêts majeurs. Tout d'abord, la stratification est mesurée de la surface au fond avec une bonne discrétisation (tous les 2 mètres). De plus, la position de la mesure est très précise.

Par ailleurs, on peut aussi obtenir à partir des TC des profils de température dans les 82 mètres près de la surface. Ainsi, en supposant une salinité constante sur la verticale ou en utilisant les profils de salinité des CTD, on peut en déduire la densité. Les chaînes thermistives fournissent donc la stratification à n'importe quel instant de la campagne de mesures dans les 82 mètres près de la surface. Mais la discrétisation suivant la verticale n'est pas très fine (environ tous les 6 m) et la position de la mesure est moins fiable (dérive des mouillages).

Pour les stations S140 et S140E qui nous intéressent, on dispose d'une dizaine de profils environ sur chaque site, réalisés à différents moments au cours de la campagne de mesure. Ces profils nous sont utiles pour évaluer l'hypothèse bi-couche et surtout pour déterminer le bi-couche équivalent. On peut comparer les mesures de températures in-situ des CTD à des moyennes des températures mesurées à l'aide des chaînes thermistives dans les 76 mètres près de la surface. Cette comparaison permet de discuter de la représentativité des données CTD. En effet, les profils CTD ont été réalisés de façon impromptue au cours de la campagne et on peut espérer que la dispersion des profils CTD suffise à décrire l'erreur commise sur la mesure de la stratification, c'est-à-dire les stratifications les plus extrêmes au cours de la campagne.

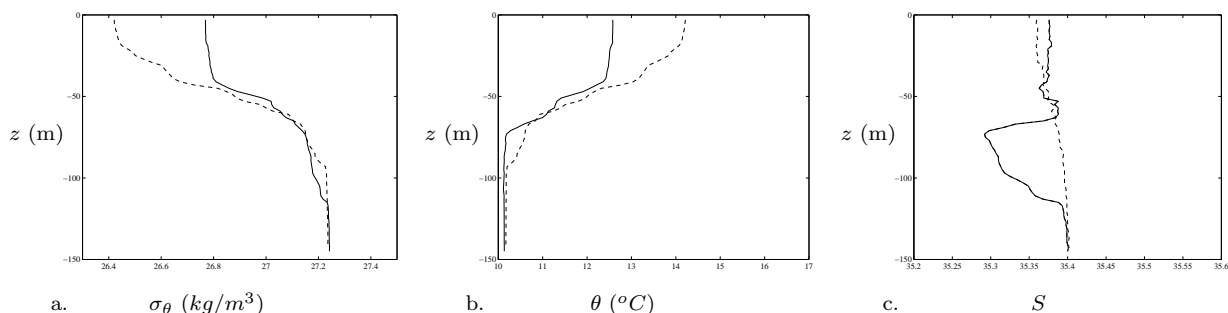


FIG. 3.9 – Profils verticaux diurnes à S140 de : (a) σ_θ (b) température potentielle θ (c) salinité S , (—) le 14/07/96 à 12h49 et (- -) le 23/07/96 à 13h17

Pour la station S140, on distingue 2 types de stratification très différentes, caractérisées l'une par une pycnocline peu épaisse entre deux couches de densité quasi-constante, l'autre par une pycnocline plus épaisse, depuis la surface. Sur la figure (3.9), on présente deux exemples typiques de ces stratifications. Le premier type [fig. (3.9) en trait plein] correspond aux premiers jours de la campagne (13/07 au 15/07). Pour cette période, on note une couche de densité homogène dans les 40 mètres proche de la surface. Le second type [fig. (3.9) en tiret] correspond au reste de la campagne (17/07 au 25/07). Pour cette période par contre, la densité augmente quasiment jusqu'à la surface.

Dans les deux cas, le profil de σ_θ est dicté par le profil de température potentielle θ car la salinité est quasi-constante sur la verticale. Rappelons que σ_θ est définie par

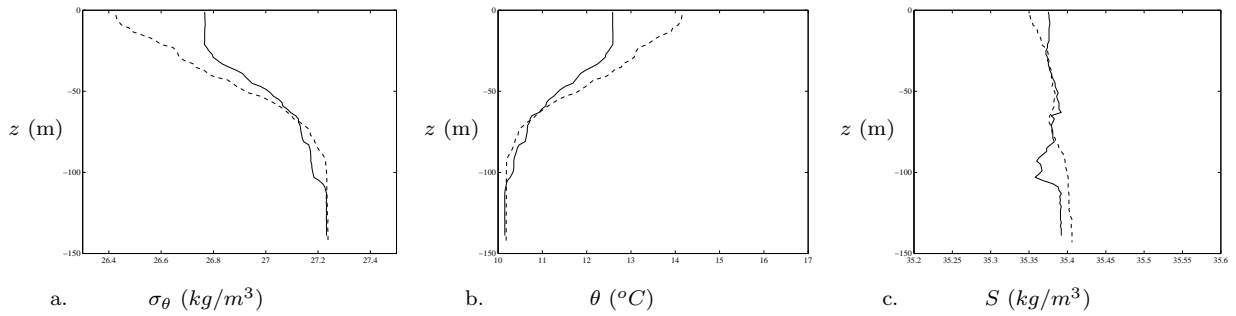


FIG. 3.10 – Profils verticaux nocturnes à S140 de : (a) σ_θ (b) température potentielle θ (c) salinité S , (—) le 14/07/96 à 3h21 et (- -) le 23/07/96 à 1h35

la relation suivante :

$$\sigma_\theta(z) = \rho(z, Pr = 1) - \rho_\infty \quad (3.11)$$

où ρ_∞ est la masse volumique de l'eau à 4°C et $\rho(z, Pr = 1)$ est la densité potentielle i.e. la densité qu'aurait le fluide déplacé adiabatiquement jusqu'à la pression de référence $Pr = 1$ bar.

Par ailleurs, les deux profils (pris à peu près au même moment de la journée mais à plusieurs jours d'intervalle) ne diffèrent franchement que dans les 40 mètres près de la surface. En se référant aux données météorologiques durant la campagne de mesure (cf. carnet de bord), on peut tenter d'expliquer ces différences. En effet, le temps était plutôt calme, avec un vent faible pendant la plus grande partie de la croisière, avec un très fort ensoleillement du 21/07/96 au 25/07/96. Ceci explique le réchauffement de la couche supérieure noté à partir du 17/07/96.

Le 13/07/96, par contre, il y eut une tempête avec un vent fort et une mer agitée. Cela explique la zone supérieure mélangée (densité constante) dans les tout premiers jours de la campagne.

Les profils nocturnes représentés sur la figure (3.10) correspondant à chaque période présentent les mêmes caractéristiques que les profils diurnes.

On peut comparer les profils CTD de température in-situ à une moyenne sur 3 jours des températures mesurées avec les chaînes thermistives pour chaque période.

Il semble donc d'après la figure (3.11) que les profils CTD donne une bonne représentation de la stratification pour chacune des deux périodes isolées puisque le profil moyen se trouve encadré par les profils CTD pour les deux périodes et surtout, les profils moyens présentent les mêmes différences entre les deux périodes que l'on avait observées sur les profils CTD. On peut de plus noter que les profils CTD du 14/07 à 03h21 et du 15/07 à 11h41 (respectivement du 23/07 à 01h35) représentent très bien le profil moyen obtenu sur les TC pour la première période (respectivement la seconde période).

Pour la station S140E [figure (3.12)], les profils de densité sont du même type sur toute la période et révèlent une couche supérieure très stratifiée. Cela est essentiellement dû à la stratification thermique, mais est renforcé par une stratification saline près de la surface.

Aux vues de ces profils de densité, il paraîtrait davantage justifié d'envisager l'hypothèse bi-couche au début de la campagne de mesure que par la suite, et en S140 plutôt qu'en S140E. Dans le paragraphe suivant, nous investigons cette hypothèse pour la station S140.

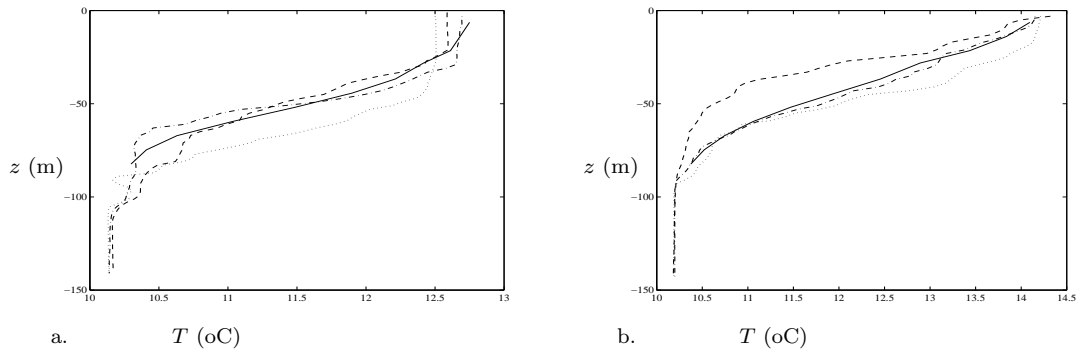


FIG. 3.11 – Profils verticaux de température in-situ à S140. (a) 1^{re} période : (—) moyenne sur 3 jours (du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00) des mesures TC, (- -) profil CTD le 14/07 à 03h21, (-.-) profil CTD le 15/07 à 11h41 et (...) profil CTD le 15/07 à 01h49 (b) 2^e période : (—) moyenne sur 3 jours (du 21/07 à 00h00 au 24/07 à 00h00) des mesures TC (- -) profil CTD le 22/07 à 19h38, (-.-) profil CTD le 23/07 à 01h35 et (...) profil CTD le 23/07 à 13h17

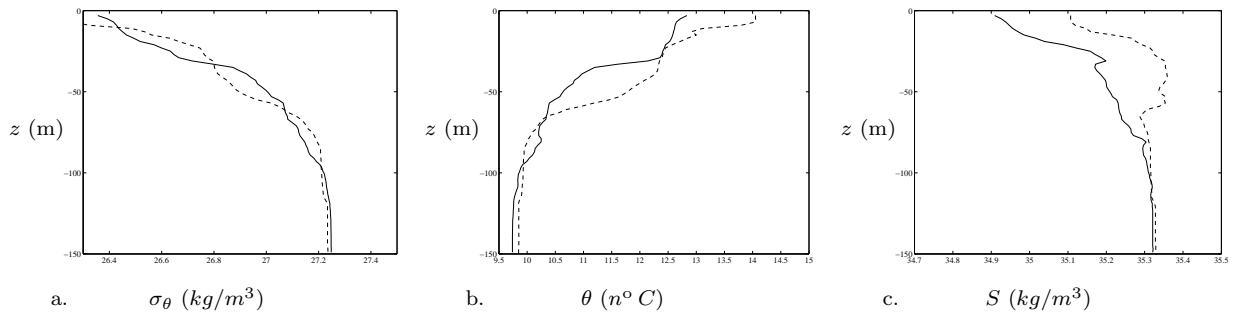


FIG. 3.12 – Profils verticaux diurnes à S140E de : (a) σ_θ (b) température potentielle θ (c) salinité S , (—) le 15/07/96 à 18h20 et (- -) le 23/07/96 à 17h19

Calculs des modes orthogonaux empiriques

Pour tester cette hypothèse, on se propose de calculer par la méthode EOF, les modes baroclines empiriques sur le champ de vitesse horizontale afin de déterminer l'importance statistique du 1^{er} mode barocline. La durée de la campagne de mesures est divisée en 3 périodes de 3 jours pour chacune desquelles on calcule les modes empiriques des composantes EST et NORD du champ de vitesse horizontale. Celles-ci sont au préalable filtrées par une moyenne glissante sur 3 heures afin d'éliminer les hautes fréquences parasites (bruit de mesure, onde solitaire). Il faut absolument remarquer que cette méthode fournit la proportion de mouvement sur chaque mode, mais sans tenir compte de la fréquence de ces mouvements.

Sur les figures (3.13.a) et (3.14.a), on présente les 4 premiers modes empiriques normés calculés sur les composantes EST et NORD de la vitesse en S140 pour une période de 3 jours au début de la campagne de mesure (couche supérieure mélangée). Sur les figures (3.13.b) et (3.14.b), on présente la projection de la série temporelle sur les 4 premiers modes, c'est-à-dire, l'évolution temporelle de chaque mode empirique. Sur les figures (3.15.a et .b) et (3.16.a et .b), on présente les mêmes grandeurs pour une période de 3 jours plus tard au cours de la campagne de mesure (couche

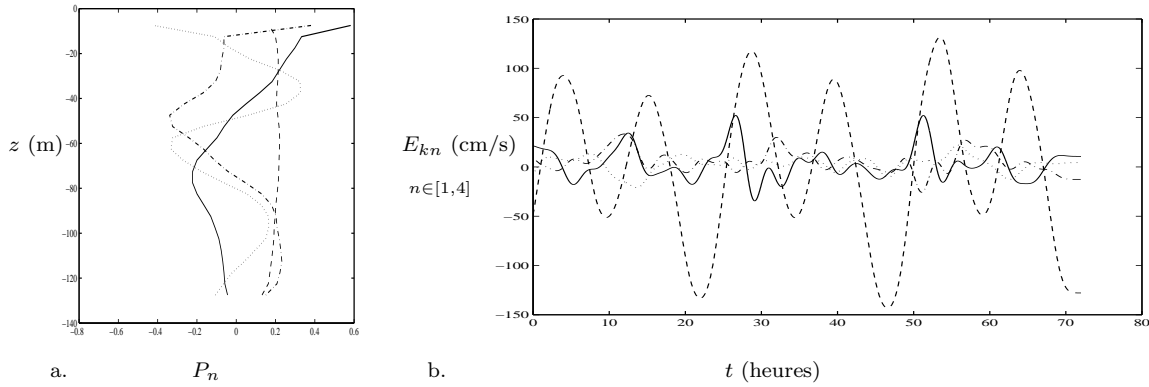


FIG. 3.13 – (a) Distribution sur la colonne d'eau des modes empiriques P_n calculés sur la composante EST du champ de vitesse horizontale pour la période du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00 en S140. (b) projection de la vitesse horizontale sur le : (—) 1^{er} mode barocline, (-.-) 2^e mode barocline (...) 3^e mode barocline, (- -) mode barotrope

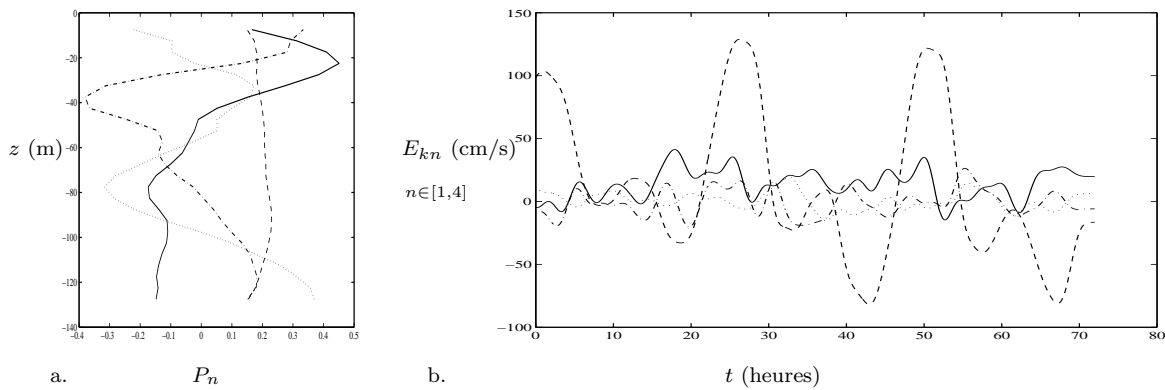


FIG. 3.14 – (a) Distribution sur la colonne d'eau des modes empiriques P_n calculés sur la composante NORTH du champ de vitesse horizontale pour la période du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00 en S140. (b) projection de la vitesse horizontale sur le : (—) 1^{er} mode barocline, (-.-) 2^e mode barocline (...) 3^e mode barocline, (- -) mode barotrope

supérieure stratifiée).

Les modes sont classés dans l'ordre d'importance des variances, c'est-à-dire que le 1^{er} mode est celui expliquant la plus grande partie de la variance et ainsi de suite.

Validité de l'hypothèse bi-couche

Dans le tableau (3.3), on récapitule pour chaque période de 3 jours les pourcentages de variance associés à chaque mode. Le pourcentage de variance est calculé relativement à l'énergie restante après avoir enlevé l'énergie du mode barotrope. Le pourcentage d'énergie du mode barotrope sur l'énergie totale est également précisé.

Sur les deux périodes, il s'avère que l'importance du 1^{er} mode barocline est à peu près similaire par rapport à l'ensemble de modes baroclines, soit 50 %. Donc bien que la stratification ait évolué au cours de la campagne, il semble légitime de formuler l'hypothèse bi-couche sur toute la période.

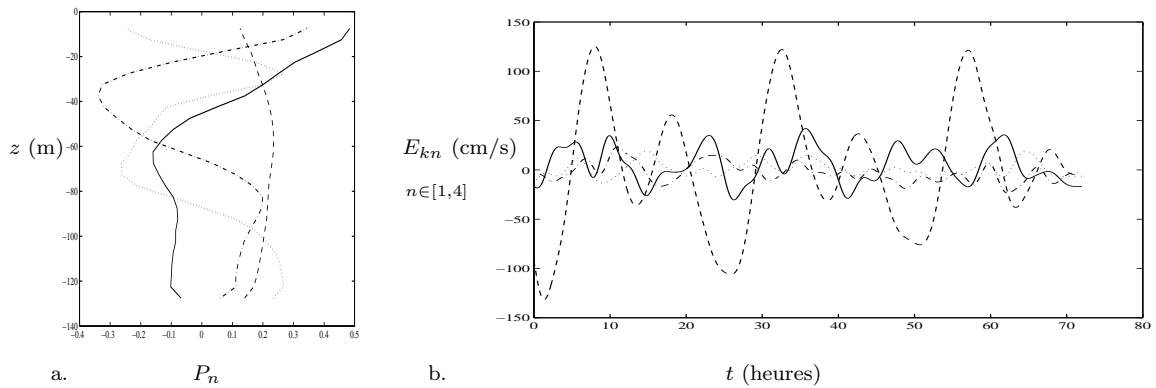


FIG. 3.15 – (a) Distribution sur la colonne d'eau des modes empiriques P_n calculés sur la composante EST du champ de vitesse horizontale pour la période 3 (du 21/07 à 00h00 au 24/07 à 00h00) en S140. (b) projection de la vitesse horizontale sur le : (—) 1^{er} mode barocline, (-.-) 2^e mode barocline (...) 3^e mode barocline, (- -) mode barotrope

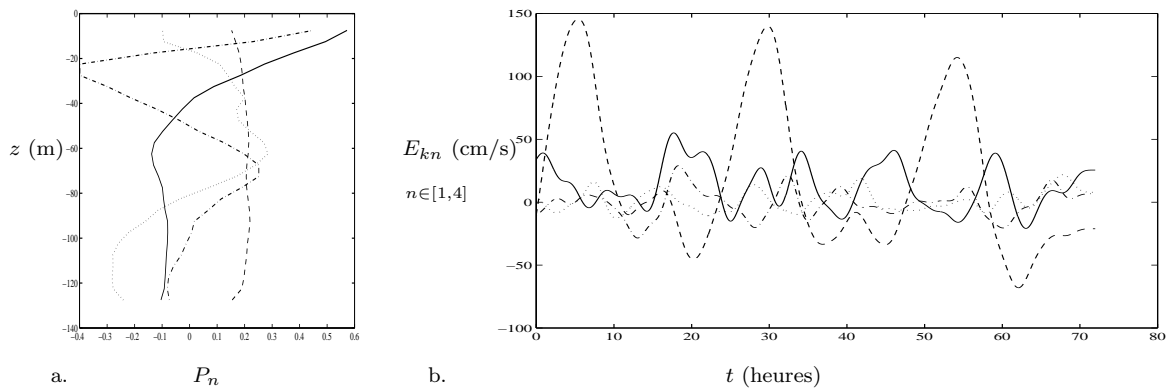


FIG. 3.16 – (a) Distribution sur la colonne d'eau des modes empiriques calculés P_n sur la composante NORD du champ de vitesse horizontale pour la période 3 (du 21/07 à 00h00 au 24/07 à 00h00) en S140. (b) projection de la vitesse horizontale sur le : (—) 1^{er} mode barocline, (-.-) 2^e mode barocline (...) 3^e mode barocline, (- -) mode barotrope

Champs de vitesse associés aux modes empiriques ; étude de la marée barotrope

Le mode le plus énergétique est, bien entendu, celui correspondant à la marée barotrope, avec une vitesse horizontale quasi-constante sur la verticale [représenté en trait tiret sur les figures (3.13), (3.14), (3.15) et (3.16)].

On peut à partir des projections des composantes de la vitesse horizontale sur chaque mode, reconstituer la distribution verticale des composantes de la vitesse pour chaque mode en unités nature. Pour chaque composante, il suffit donc de multiplier le profil adimensionnel de vitesse (a) par la projection correspondante (b). La projection nous donne l'évolution au cours du temps de chaque composante et comme il a déjà été signalé auparavant, toutes les périodes au-dessus de 3 h peuvent être présentes. Ainsi, sur les projections, on peut tenter d'isoler les mouvements de marée.

En particulier, sur la composante barotrope, on observe très nettement des mouve-

période	mode barotrope		1 ^{er} mode barocline		2 ^e mode barocline		3 ^e mode barocline	
	Est	Nord	Est	Nord	Est	Nord	Est	Nord
1	90 %	86 %	46 %	57 %	27 %	19 %	13 %	8 %
2	89 %	86 %	60 %	66 %	22 %	17 %	9 %	9 %
3	88 %	84 %	61 %	63 %	18 %	16 %	10 %	9 %

TAB. 3.3 – Pourcentage d'énergie contenue dans le mode barotrope relativement à l'énergie totale. Pourcentage d'énergie contenue dans les 3 premiers modes baroclines relativement à l'énergie barocline pour la station S140 sur 3 périodes de 3 jours (la période 2 s'étend du 17/07/96 à 00h00 au 20/07/96 à 00h00)

ments diurne et semi-diurne. En effectuant une décomposition des projections des composantes EST et NORD sur 3 “harmoniques” de la marée (de périodes respectives 23.93 h, 12.42 h et 6.21 h), on obtient les amplitudes de chaque harmonique avec un très bon ajustement pour la composante EST comme le montre la figure (3.17.a). L'ajustement sur la composante NORD est un peu moins bon [figure (3.17.b)] mais reste acceptable.

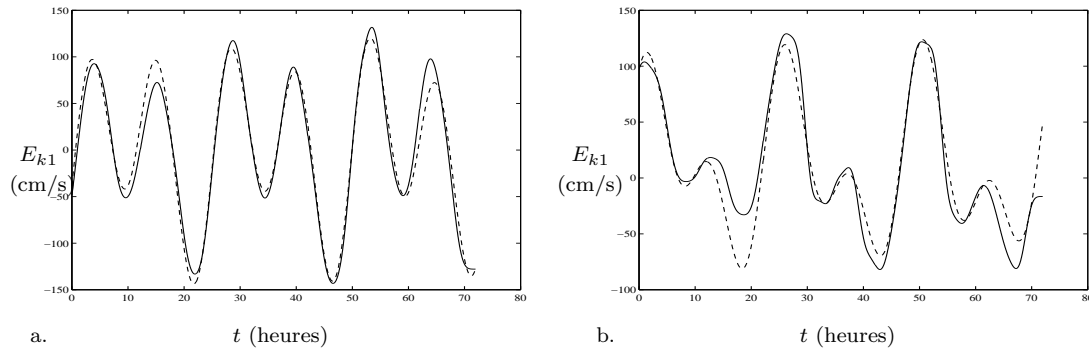


FIG. 3.17 – Décomposition sur 3 harmoniques de la projection de la marée sur le mode barotrope empirique (a) de la composante EST (b) de la composante NORD pour la période 1 (du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00) en S140

Dans le tableau (3.4), on reporte les amplitudes et phases des cosinus ajustés sur les composantes EST et NORD des vitesses barotropes (i.e. $E_{k1}N_1$) diurne et semi-diurne, ainsi que la moyenne.

	période 1		période 2		période 3	
	Est	Nord	Est	Nord	Est	Nord
moyenne (cm/s)	0.4	2.1	0.2	0.9	0.4	4.1
$a_{T=23.93h}$ (cm/s)	10.2	12.8	11.9	14.7	11.3	14.6
$a_{T=12.42h}$ (cm/s)	18.8	10.0	19.7	11.3	13.6	7.9
$\phi_{T=23.93h}$ (°)	-138.95	-53.25	-152.24	-50.83	-172.05	-82.49
$\phi_{T=12.42h}$ (°)	-90.90	-19.87	-137.53	-63.14	153.40	-124.76

TAB. 3.4 – Moyennes, amplitudes et phases diurne et semi-diurne en cm/s des composantes EST et NORD de la vitesse barotrope pour la station S140 sur 3 périodes de 3 jours

Il est intéressant de remarquer que la composante NORD n'est pas centrée autour

de 0, révélant l'existence d'un courant variant de 1 cm/s à 4 cm/s, dirigé vers le N-NE.

De cette décomposition "harmonique" des composantes de la vitesse barotrope dans le repère orthogonal constitué des directions Est et Nord, on peut déterminer les ellipses des vitesses des marées barotropes diurne et semi-diurne sur chaque période de 3 jours, à savoir la direction de propagation (orientation du grand axe de l'ellipse) et les demi-axes.

	Orientation ($^{\circ}$)			demi-grand axe (cm/s)			demi-petit axe (cm/s)			majeur/mineur		
$T = 12.42h$	12.9	12.3	7.0	19.2	20.0	13.7	9.3	10.7	7.8	0.48	0.53	0.57
$T = 23.93h$	80.9	83	89.1	12.9	14.8	14.6	10.12	11.9	11.3	0.79	0.79	0.78

TAB. 3.5 – Description des ellipses de vitesse pour la projection de la vitesse barotrope à la station S140 sur 3 périodes de 3 jours

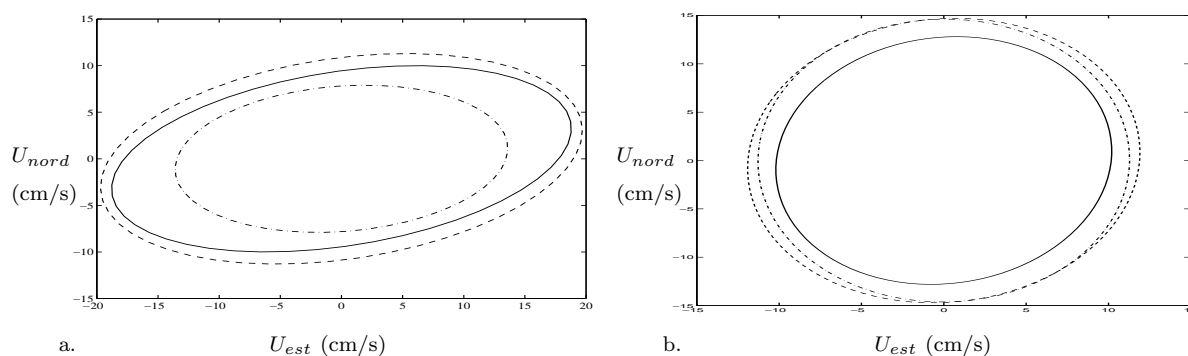
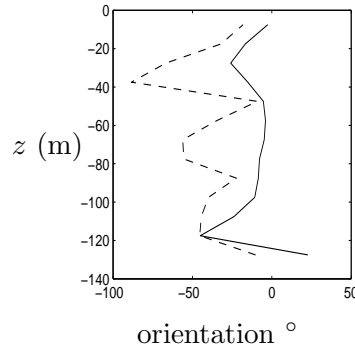


FIG. 3.18 – Ellipses de vitesse de la vitesse barotrope pour la station S140 (a) $T=12.42 h$ (b) $T=23.93 h$: (—) période 1, (- -) période 2 (-.-) période 3. U_{nord} est la composante Nord de la vitesse et U_{est} est la composante Est de la vitesse au même instant

De cette analyse, il ressort que la marée diurne ne présente en fait pas de direction prépondérante de propagation. En effet, les ellipses sont quasiment circulaires, le rapport mineur/majeur est proche de l'unité. Par contre, pour la composante semi-diurne, il existe une direction principale de propagation, quasi-constante sur les 3 périodes, dont l'orientation est comprise entre 7° et 12° dans le sens trigonométrique par rapport à l'est. Compte tenu de la précision sur cette mesure qui est de l'ordre de quelques degrés (due à la très grande sensibilité de la phase dans la décomposition harmonique), cette mesure est en bon accord avec les estimations de la direction de propagation de la composante M2 faites précédemment sur ce site. Dans [72], cette direction est estimée à 24° et en 1995, lors d'une campagne de mesure du programme LOIS en S140, M. Inall estime cet angle à -10° dans le sens trigonométrique par rapport à l'est.

Sachant que la cassure du talus (contour bathymétrique à 150 m) est inclinée par rapport au nord de -13° dans le sens trigonométrique entre les latitudes 55.5° N et 57° N, l'angle de propagation de la marée barotrope semi-diurne transmise sur le plateau est donc de 23° à peu près dans le sens trigonométrique par rapport à la normale à la cassure. Cette information est précieuse car elle fournit un point de comparaison supplémentaire avec le modèle. On a également cherché à déterminer

l'orientation des ellipses de vitesse de la marée M2 barocline en décomposant sur les harmoniques de la marée les projections temporelles du premier mode barocline empirique. Sur la figure (3.19), on représente l'orientation des ellipses de vitesses baroclines en fonction de la profondeur sur les périodes 1 et 3.



(dans le sens trigonométrique depuis l'Est)

FIG. 3.19 – Distribution sur la colonne d'eau de l'orientation (en degré dans le sens trigonométrique depuis l'Est) des ellipses de vitesses baroclines M2 en S140 : (—) période 1 (- -) période 2

Tout d'abord, il est clair que l'orientation n'est pas constante sur la verticale, avec des variations d'autant plus fortes sur la période 3. Sur la période 1, néanmoins, dans la partie centrale de la colonne d'eau, cette orientation varie peu. La tendance à une rotation vers la gauche des ellipses de vitesses près de la surface et près du fond (que l'on retrouve sur la période 3), est en accord avec l'existence de couche d'Ekman. En effet, l'épaisseur de la couche d'Ekman ($2\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ avec $\nu \sim 10^{-3}m^2.s^{-1}$ viscosité de l'eau turbulente et $\omega \sim 7.10^{-5}rad.s^{-1}$ vitesse de rotation terrestre) est estimée grossièrement à environ 10 mètres. Reste que si sur la période 1, l'orientation des ellipses baroclines peut être estimée en moyenne à -11° de façon relativement satisfaisante, sur la période 3 par contre, l'orientation des ellipses baroclines varie bien plus sur la verticale, ce que l'on peut imputer à une inadéquation de la description du champ de vitesse barocline par des ellipses diurne et semi-diurne. En effet, contrairement aux mouvements barotropes, les mouvements baroclines ne se limitent pas uniquement aux périodes diurne et semi-diurne, et une décomposition sur les harmoniques de la marée ne donnent pas de très bons résultats. En effet, les projections de la vitesse (E_{kn}) sont non-linéaires. Sur les figures (3.20), on représente les spectres des projections des composantes Est et Nord barotropes (a) et barocline (b).

Ces spectres montrent clairement la présence sur les vitesses baroclines de fréquences autres que celles présentes sur les vitesses barotropes (à savoir naturellement M2 et K1). En effet, on observe des pics d'énergie à des fréquences plus fortes que M2. Ainsi, ces spectres auraient tendance à montrer que le transfert d'énergie barotrope vers les modes baroclines est non linéaire. Ceci pose un problème de taille pour une comparaison pertinente avec notre modèle qui prédit des ondes longues linéaires. Nous proposons donc une vision segmentée du problème de la génération des ondes internes, en deux étapes. Dans un premier temps, l'onde barotrope interagit de

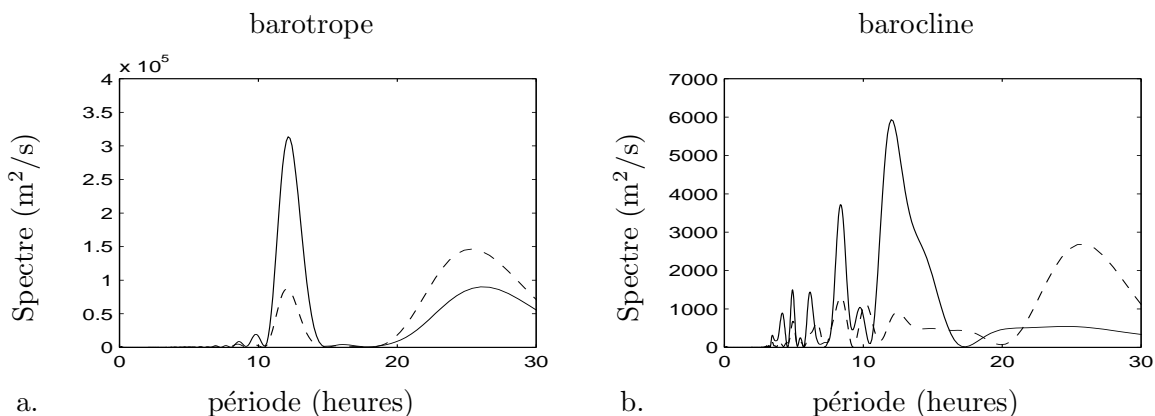


FIG. 3.20 – Spectres d'énergies des projections des composantes de vitesses Est (—) et Nord (- -) obtenues par la méthode EOF pour le mode (a) barotrope et (b) barocline sur la période 1 en S140 (le signal a été filtré par une moyenne glissante sur 3 heures)

façon linéaire avec la topographie et la stratification pour créer une onde barocline linéaire, ce qui est l'objet de notre modèle. Dans un second temps, l'onde interne va se propager sur le plateau. Cette deuxième partie consiste donc à étudier l'évolution d'une onde longue interne générée par un batteur virtuel à la cassure du talus. L'évolution non-linéaire de l'onde longue interne au cours de sa propagation n'est alors pas surprenant. En effet, Santos [70] a montré expérimentalement dans sa thèse que les ondes longues linéaires en milieu homogène ne sont pas toujours stables. Après une certaine distance de propagation qu'il estime à environ 200 fois la profondeur d'eau, les ondes longues linéaires à fort nombre d'Ursell ont évolué pour devenir des ondes non linéaires. Théoriquement, cette évolution est due à la compétition entre les effets dispersifs et les effets non linéaires. Ces derniers ont tendance à produire des harmoniques qui ne sont plus négligeables après une distance de propagation donnée dite distance de fission. Les mêmes mécanismes existent en bi-couche avec rotation, et donc il nous faudrait estimer la distance à laquelle les ondes linéaires sont devenues non linéaires. En première approche, on peut estimer cette distance en étudiant la stabilité de l'équation des ondes longues non linéaires non dispersives (cf. annexe A). Cela conduit à estimer la distance de fission à environ 10 km. Notre point de mesure se situant à environ 5 km de la cassure supposée être le point de génération de l'onde linéaire (batteur virtuel), il est normal que les non-linéarités ne soient plus négligeables. De plus, la faible distance à la cassure permet également d'expliquer pourquoi les non-linéarités ne sont pas complètement développées, laissant encore apparaître sur les spectres de la figure (3.20.b) des pics séparés et non pas un spectre continu.

Enfin, s'il l'on suppose que la dissipation est faible sur la distance qui sépare le point de génération de l'onde supposée linéaire (à savoir la cassure) et le point de mesure, l'énergie contenue dans l'onde non-linéaire mesurée devrait être égale à celle contenue dans l'onde linéaire prédite par le modèle. On propose alors de comparer les vitesses et énergies baroclines mesurées à celle du modèle. Pour déterminer les vitesses baroclines sur site, on estime l'amplitude de la composante M2 barocline par l'écart type de la projection E_{k2} . Puis pour obtenir les vitesses baroclines dans les deux couches, on moyenne le profil empirique dans chaque couche. Pour chaque période de 3 jours, on obtient les vitesses baroclines reportées dans le tableau (3.6).

	période 1		période 2		période 3	
	Est	Nord	Est	Nord	Est	Nord
moyenne (cm/s) (couche supérieure)	0.7	3.4	1.7	4.7	1.4	4.2
moyenne (cm/s) (couche inférieure)	-0.4	-1.5	-0.7	-1.0	-0.5	-1.0
écart type (cm/s) (couche supérieure)	3.6	2.9	5.4	5.4	5.0	6.0
écart type (cm/s) (couche inférieure)	-1.8	-1.3	-2.3	-1.1	-1.7	-1.4

TAB. 3.6 – Moyennes et écart-types en cm/s des composantes EST et NORD de la vitesse barocline pour la station S140 sur 3 périodes de 3 jours

Notons d’ores et déjà qu’il existe également un courant dirigé vers le Nord sur les vitesses baroclines, ce courant n’est pas pris en compte dans le modèle.

Calcul des modes normaux dynamiques et bi-couche équivalent

A présent, on peut comparer les modes empiriques aux modes dynamiques pour tester la représentativité physique des modes empiriques.

Pour le calcul des modes dynamiques, on applique la méthode présentée en annexe D avec la condition complète à la surface.

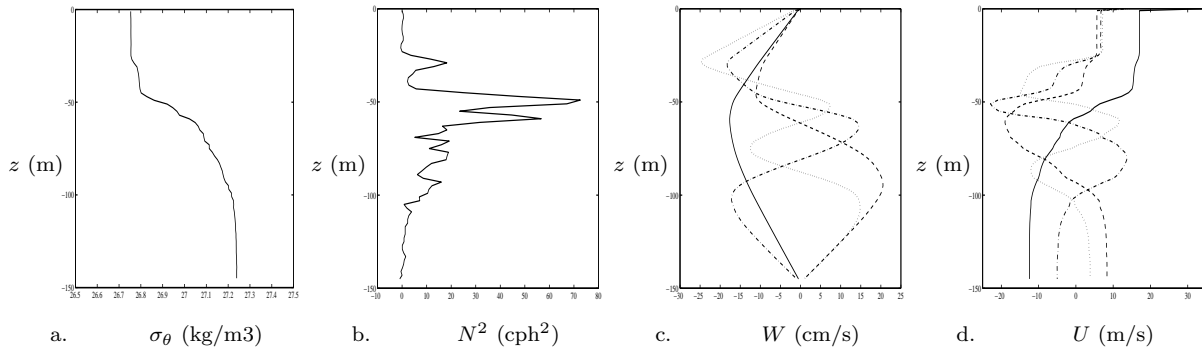


FIG. 3.21 – Distribution verticale des modes internes dynamiques pour une onde M2 (12.42h) à partir du profil de densité du 13/07/96 à 20h41 (—) 1^{er} mode (- -) 2^e mode (-.-) 3^e mode (...) 4^e mode : (a) σ_θ (b) fréquence de Brünt-Väisälä N^2 (c) vitesse verticale W (d) vitesse horizontale U

Sur la figure (3.21), on présente un exemple des différentes étapes de ce calcul. Du profil de densité potentielle [figure (3.21.a)], on déduit le profil de fréquence de Brünt-Väisälä [figure (3.21.b)]. Puis, on calcule les profils de vitesse verticale de chaque mode [figure (3.21.c)]. Ce sont les vecteurs propres solutions du problème aux valeurs propres décrit dans l’annexe D pour une période de 12.42 h. On en déduit les profils de vitesse horizontale [figure (3.21.d)] associés à chaque mode dynamique. Le profil de vitesse verticale correspondant à chaque mode dynamique est normé, il n’est donc pas représentatif des vitesses verticales effectives dans les mesures in-situ. Cependant, une unité est précisée pour situer l’ordre de grandeur entre les vitesses

verticales et horizontales. En effet, les profils de vitesse horizontale calculés ne correspondent pas davantage à des vitesses effectives sur site, mais ils correspondent effectivement aux vitesses horizontales qui seraient associées aux vitesses verticales exprimées dans les unités précisées sous chaque graphe.

Sur la figure (3.22), on présente 2 comparaisons des modes empiriques aux modes dynamiques pour le premier mode barocline. Les vecteurs sont normés pour faciliter la comparaison.

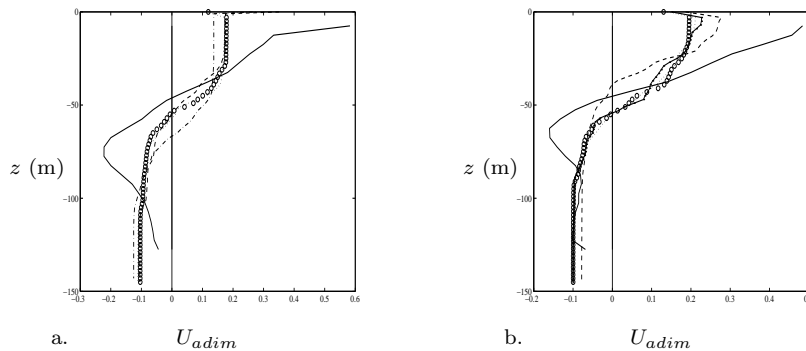


FIG. 3.22 – Profils verticaux normés de la composante EST de la vitesse horizontale du 1^{er} mode barocline : (a) mode empirique calculé sur la période 1 (—); mode dynamique CTD 2 (- -); mode dynamique CTD 3 (...); mode dynamique CTD 4 (-.-); mode dynamique CTD 5 (ooo); (b) mode empirique calculé sur la période 3 (—); mode dynamique CTD 8 (- -); mode dynamique CTD 9 (...); mode dynamique CTD 10 (-.-); mode dynamique CTD 11 (ooo)

Le mode empirique est calculé sur les périodes de 3 jours notées 1 et 3 précédemment. On représente sur le même graphe le mode dynamique est calculé pour différents profils CTD mesurés durant chaque période.

Il est important de remarquer à nouveau que le mode empirique est déterminé sans tenir compte de la période des mouvements alors que le mode dynamique n'est calculé que pour une période de 12.42 h. L'écart entre les 2 modes montre donc ou bien que des mouvements sur le 1^{er} mode barocline ont lieu pour d'autres périodes que la période semi-diurne ou bien que les différents modes baroclines sont corrélés. Du calcul des modes internes dynamiques, on a obtenu la célérité associée du 1^{er} mode barocline. On calcule alors le bi-couche équivalent [tableau (3.7) et (3.8)] en suivant les deux méthodes présentées au paragraphe 3.3.2 avec les notations suivantes :

avec :

- H , profondeur d'eau totale
- h , position de l'interface depuis la surface
- $\sigma_1 = \rho_1 - 1000$, densité potentielle de la couche supérieure
- $\sigma_2 = \rho_2 - 1000$, densité potentielle de la couche inférieure
- T_{CTD} , température in-situ au niveau de l'interface sur le profil CTD
- c_0 , célérité de phase du 1^{er} mode barocline
- L , longueur d'onde du 1^{er} mode barocline

Il est intéressant de noter que la formule simplifiée (3.4) de la célérité pour les faibles différences de densité est tout à fait utilisable ici. En effet, les résultats sont absolu-

Méthode 1

no	date (jj/mm)	heure (hh :mm)	H (m)	h (m)	σ_1 (kg/m ³)	σ_2 (kg/m ³)	T_{CTD} (° C)	c_0 (m/s)	L (km)
1	13/07	20 :41	147	48	26.77	27.16	12.4	0.690	30.85
2	14/07	03 :21	147	39.8	26.79	27.15	12.0	0.628	28.05
3	14/07	12 :18	147	43.3	26.78	27.15	12.4	0.657	29.39
4	15/07	01 :49	145	54.8	26.80	27.15	12.2	0.680	30.39
5	15/07	11 :41	146	42.6	26.77	27.18	12.3	0.681	30.45
6	17/07	20 :51	146	32.2	26.60	27.15	12.6	0.728	32.54
7	18/07	21 :37	148	25.1	26.63	27.17	12.8	0.652	29.15
8	22/07	19 :38	147	22.6	26.53	27.17	13.1	0.683	30.54
9	23/07	01 :35	148	34.7	26.56	27.13	13.0	0.762	34.06
10	23/07	06 :54	147	31.2	26.60	27.13	12.5	0.704	31.46
11	23/07	13 :17	147	38.5	26.49	27.13	13.3	0.830	37.1
12	25/07	06 :24	158	26.5	26.60	27.14	12.4	0.673	30.1

TAB. 3.7 – Méthode 1 de calcul du bi-couche équivalent aux profils instantanés (CTD) de densité mesurés en S140 (la condition à la surface utilisée pour le calcul des modes verticaux est la condition complète)

ment identiques à ceux issus de la formule complète (3.10) pour la précision voulue sur la position de l'interface (10 cm près). Par contre, on obtient des écarts de 1 à 2 mètres sur la position de l'interface suivant que dans le calcul des modes dynamiques, on utilise la condition simplifiée ou complète à la surface. C'est pourquoi, on préfère ici utiliser la condition complète.

La 1^{ère} méthode de détermination du bi-couche équivalent donne toujours des positions d'interface plus proche de la surface que le maximum de vitesses verticales. Cet écart est d'autant plus flagrant sur la 2^e période. Cela aurait tendance à montrer que plus la forme du profil de densité est éloignée du profil bi-couche, moins la 1^{ère} méthode est appropriée.

Par ailleurs, d'après le zéro de vitesse horizontale des modes empiriques, la position de l'interface est à mi-chemin entre les positions déterminées par les deux méthodes, à savoir environ 45 mètres sous la surface pour les 2 périodes. Dans le tableau (3.9), on reporte la moyenne des niveaux d'interface déterminés sur chaque période et la position du zéro de vitesse horizontale des modes empiriques. On reporte également la température in-situ associée à chacune de ces positions sur le profil moyen de température obtenu sur les mesures des TC.

En fait, sur la période 1, la méthode 1 fournit des positions d'interface les plus proches de celle donnée par les modes empiriques alors que pour la période 3, c'est la méthode 2.

Nous utiliserons donc pour forcer le modèle, les deux séries de bi-couches équivalents.

Signature des mouvements baroclines sur les isothermes

Sur la figure (3.23.a), on présente les positions des isothermes au cours du temps en S140 durant la 1^{ère} période de la campagne de mesure (du 14/07/96 à 00h00 au

Méthode 2

n°	date (jj/mm)	heure (hh :mn)	H (m)	h (m)	σ_1 (kg/m ³)	σ_2 (kg/m ³)	T_{CTD} (° C)	c_0 (m/s)	L (km)
1	13/07	20 :41	147	59	26.82	27.17	11.2	0.690	30.85
2	14/07	03 :21	147	55	26.86	27.16	11.1	0.628	28.05
3	14/07	12 :18	147	59	26.86	27.18	11.1	0.657	29.39
4	15/07	01 :49	145	67	26.84	27.17	11.2	0.680	30.39
5	15/07	11 :41	146	55	26.84	27.20	10.9	0.681	30.45
6	17/07	20 :51	146	55	26.79	27.20	10.9	0.728	32.54
7	18/07	21 :37	148	43	26.82	27.19	10.8	0.652	29.15
8	22/07	19 :38	147	39	26.76	27.19	10.9	0.683	30.54
9	23/07	01 :35	148	57	26.74	27.17	11.1	0.762	34.06
10	23/07	06 :54	147	55	26.78	27.16	11.0	0.704	31.46
11	23/07	13 :17	147	55	26.64	27.17	11.4	0.830	37.1
12	25/07	06 :24	158	59	26.85	27.18	11.0	0.673	30.1

TAB. 3.8 – Méthode 2 de calcul du bi-couche équivalent aux profils instantanés (CTD) de densité mesurés en S140 (la condition à la surface utilisée pour le calcul des modes verticaux est la condition complète)

période	Méthode 1		Méthode 2		Modes empiriques	
	h (m)	T_{CTD} (°C)	h (m)	T_{CTD} (°C)	h (m)	T_{CTD} (°C)
du 13/07/96 au 17/07/96	45.7	12	59	11	45	12
du 17/07/96 au 25/07/96	30.1	12.5	51.8	11.5	45	11.7

TAB. 3.9 – Niveaux d'interface moyens et température in-situ associée avec les mêmes notations que pour les tableaux (3.7) et (3.8)

17/07/96 à 00h00). Sur la figure (3.23.b), on présente les positions des isothermes au cours du temps en S140 sur 3 jours durant la 2^e période de la campagne de mesure (du 20/07/96 à 00h00 au 23/07/96 à 00h00). Ces signaux expérimentaux ont été filtrés par une moyenne glissante sur 3 h afin d'éliminer le bruit de mesure et d'éventuelles ondes haute fréquence.

Ces contours d'isothermes sont caractéristiques de l'existence d'un mouvement barocline. En effet, les déplacements des isothermes sont maximaux dans la masse et s'atténuent jusqu'à disparaître en surface et au fond. De plus, il est intéressant de remarquer que les déplacements des isothermes semblent relativement en phase sur la zone de mesure des TC. Cela signifie que jusqu'à 82 mètres sous la surface, le milieu se comporte comme un bi-couche.

Sur chaque période de 3 jours, on isole l'isotherme la plus proche du niveau de l'interface déterminé par chacune des deux méthodes de calcul du bi-couche équivalent. L'isotherme est prise sur le profil de température moyen obtenu sur les mesures des

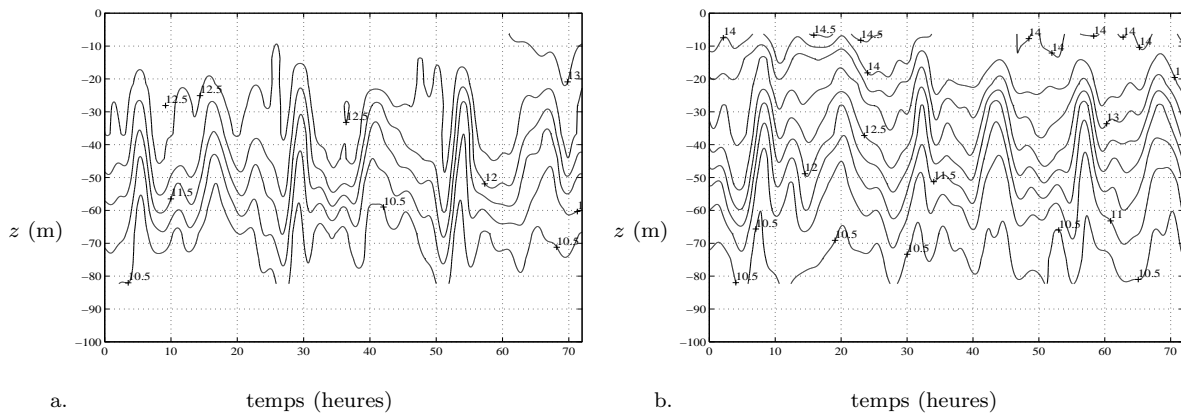


FIG. 3.23 – Position des isothermes en S140 (a) du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00 (b) du 20/07 à 00h00 au 23/07 à 00h00

TC. On considère donc d'une part les isothermes 12°C et 12.5°C respectivement sur les périodes 1 et 3 [figure (3.24)], et les isothermes 11°C et 11.5°C respectivement sur les mêmes périodes [figure (3.25)]. On propose de déterminer les amplitudes et phases de la marée interne semi-diurne sur ces isothermes.

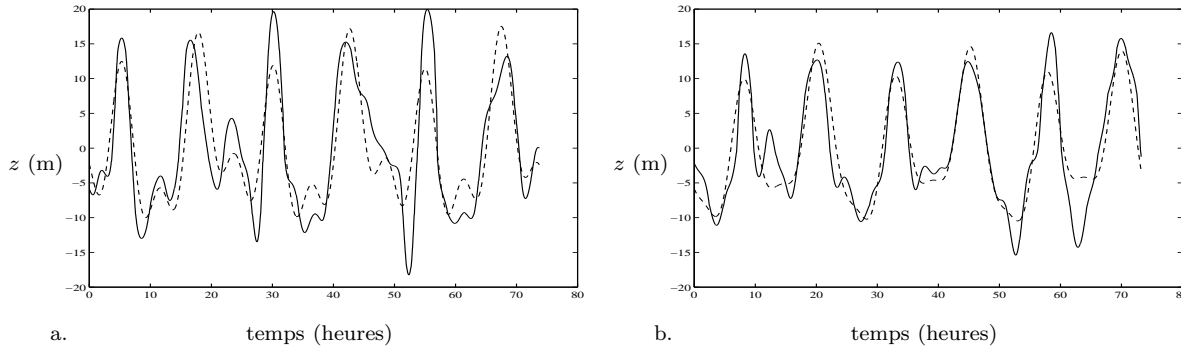


FIG. 3.24 – Analyse harmonique des déplacements d'isothermes en S140 (a) 12°C du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00 (b) 12.5°C du 21/07 à 00h00 au 24/07 à 00h00 : (—) signal expérimental (- -) signal ajusté avec les périodes 23.93h, 12.42 h et 6.21 h.

Pour ce faire, il nous faut choisir les fréquences à utiliser dans notre décomposition car la période semi-diurne de 12.42 heures seule n'est pas suffisante. La durée des signaux n'étant que de 3 jours, il n'est possible que de choisir une fréquence diurne, une fréquence semi-diurne et une fréquence quart-diurne.

Une FFT sur un signal si court n'est pas consistante pour déterminer avec précision les fréquences à utiliser. Ainsi, on choisit les fréquences dont l'amplitude relative dans chaque espèce est la plus forte dans le calcul de la marée d'équilibre du tableau (3.1), à savoir les périodes de 23.93h, 12.42 h et 6.21 h.

Sur les figures (3.24) et (3.25), on présente les enregistrements expérimentaux et le signal ajusté contenant les périodes ci-dessus. De cette décomposition de la marée, on consigne les amplitudes obtenues pour chaque fréquence dans le tableau (3.10).

Quelques commentaires sur la décomposition du signal s'imposent. En effet, il est

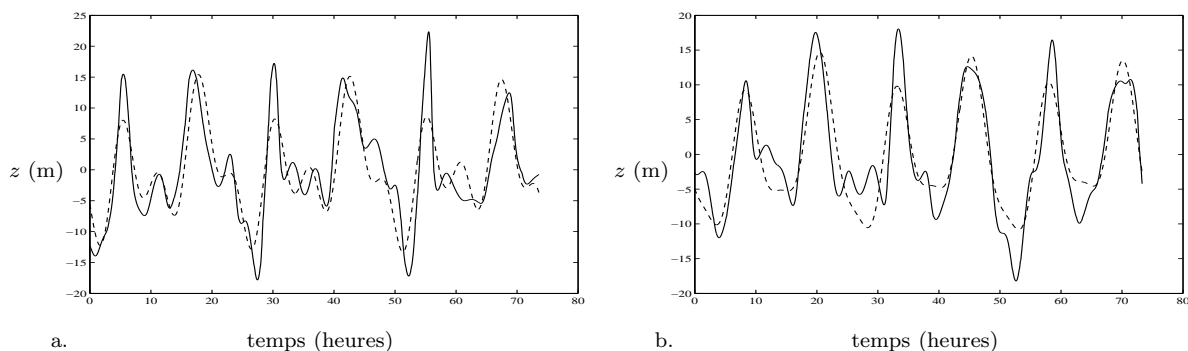


FIG. 3.25 – Analyse harmonique des déplacements d’isothermes en S140 (a) sur l’isotherme 11°C du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00 (b) sur l’isotherme 11.5°C du 21/07 à 00h00 au 24/07 à 00h00 : (—) signal expérimental (- -) signal ajusté avec les périodes 23.93h, 12.42 h et 6.21 h.

période	$a_{T=23.93h}$ (m)	$a_{T=12.42h}$ (m)	$a_{T=6.21h}$ (m)	écart type (m)
14/07 au 17/07 (1)	3.3	8.8	5.6	9.2
14/07 au 17/07 (2)	3.7	7.3	5.3	8.1
21/07 au 24/07 (1)	3.0	9.8	2.9	8.2
21/07 au 24/07 (2)	3.2	9.5	2.6	8.2

TAB. 3.10 – Amplitudes des composantes issues de l’analyse harmonique de la marée barocline (identifiée aux déplacements de l’isotherme proche du niveau de l’interface du bi-couche équivalent) en S140

notable que l’ajustement n’est pas très bon. La décomposition conduit à une sous-estimation de l’amplitude du signal mesuré. En fait, le signal mesuré présente des non-linéarités et donc une décomposition linéaire n’est pas adaptée.

Par ailleurs, on peut être surpris par l’amplitude non négligeable des composantes diurne et quart-diurne obtenue par la décomposition linéaire. Tout d’abord, le forçage diurne barotrope ne peut générer aucune onde barocline diurne car $\omega \leq f$. Ensuite, en supposant que la composante quart-diurne barocline est générée sur le talus par la composante quart-diurne barotrope, le rapport d’amplitude des composantes semi-diurne et quart-diurne devrait être à peu près le même que dans la marée externe. En effet, le rapport de l’amplitude de l’onde barocline à l’amplitude de l’onde barotrope de même fréquence ne dépend pas de cette fréquence, mais uniquement de la stratification et de la géométrie, en incidence normale.

En conclusion, il s’agit plus certainement de non-linéarités apparues au cours de la propagation de la marée interne semi-diurne. Nous avons déjà signalé plus haut l’instabilité d’une telle onde longue linéaire et le fait qu’après une distance relativement petite de propagation, elle soit devenue non-linéaire. Ainsi, il me semble que pour mener une comparaison sensée des données et du modèle, vu que le modèle prévoit que la composante semi-diurne de période 12.42 h est de loin la plus énergétique, il faut attribuer toute l’énergie du signal expérimental à cette composante. C’est pourquoi je propose d’estimer l’amplitude de la composante semi-diurne sur le signal mesuré in-situ par l’écart-type du déplacement de l’isotherme par rapport à la position moyenne supposée être la position au repos [dernière colonne du tableau (3.10)].

Sur la figure (3.26), on présente la décomposition “harmonique” de l’isotherme 12°C mesurée simultanément sur les 2 stations. De cette décomposition, on obtient les phases de la composante semi-diurne à chaque station. Ceci nous permet d’obtenir une estimation de la longueur d’onde de la composante semi-diurne.

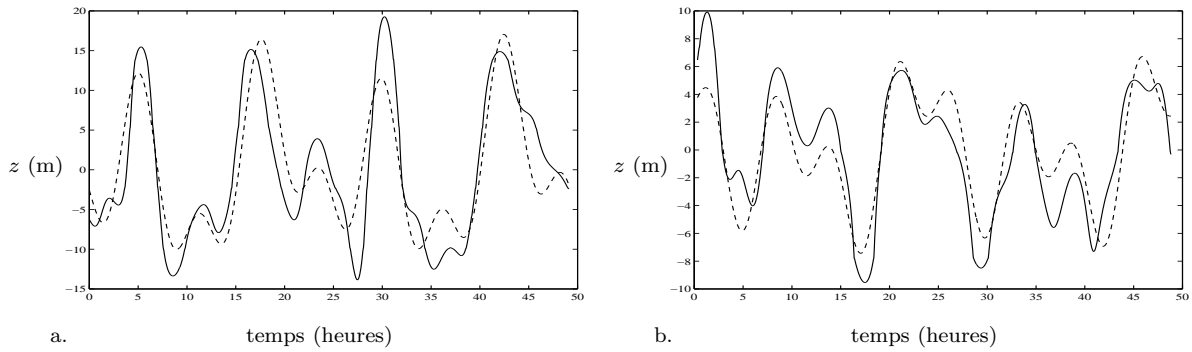


FIG. 3.26 – Analyse harmonique des déplacements de l’isotherme 12°C aux stations S140 (a) et S140E (b) du 14/07 à 00h00 au 16/07 à 00h00 : (—) signal expérimental (- -) signal ajusté avec les périodes 23.93h, 12.42 h et 6.21 h.

En effet, le déphasage entre les deux stations de la composante semi-diurne M2 est de ± 3.69 rad, c’est-à-dire, ± 0.59 période ou longueur d’onde.

On a donc en 47.5 km, un nombre entier de longueur d’onde ± 0.59 longueur d’onde. La longueur d’onde la plus probable projetée sur l’axe Est-Ouest est donc ou bien 29.9 km ou bien 33.7 km. La position des stations permet donc d’obtenir une très bonne estimation de cette projection à 4 km près. On en déduit la longueur d’onde dans la direction normale à la cassure, soit entre 28 km et 31.7 km. Or, 75 % des longueurs théoriques déduites des profils CTD [tableau (3.8)] se situent dans cet intervalle, les autres longueurs d’onde déduites des profils CTD restant très proche de ces estimations.

Pour finir, on compare sur la figure 3.27 les spectres obtenus sur les déplacements de l’isotherme 12°C sur toute la durée de la campagne de mesure aux deux stations. Outre la signature évidente de la fréquence M4 par exemple, cette figure met clairement en évidence une perte d’énergie non négligeable, de plus de 80 % à la fréquence M2 entre les deux stations. Ceci exclut toute comparaison du modèle avec des mesures en S140E, la dissipation d’énergie n’étant pas prise en compte dans le modèle.

Comparaison des mesures aux modèles

La comparaison du modèle aux mesures est menée sur les deux périodes de 3 jours notées précédemment 1 et 3.

On présente dans les tableaux (3.11) les résultats obtenus avec le modèle de calcul de la marée interne pour une marée barotrope en incidence normale avec les notations suivantes :

- A , amplitude de l’onde barotrope incidente côté haute mer
- L_e^I , longueur d’onde de l’onde barotrope côté haute mer à l’interface
- a_e^I , amplitude de l’onde barotrope réfléchie côté haute mer
- L_i^I , longueur d’onde de l’onde barocline côté haute mer
- a_i^I , amplitude de l’onde barocline réfléchie côté haute mer

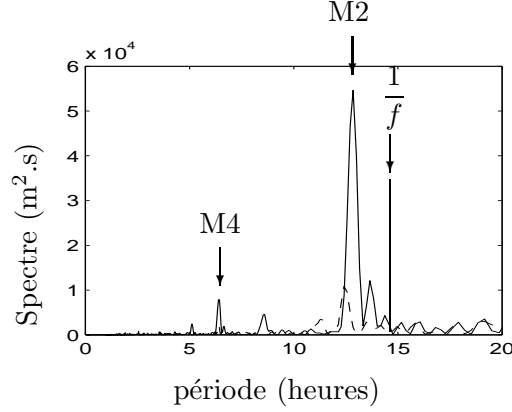


FIG. 3.27 – Spectre d'énergie des déplacements de l'isotherme 12°C mesurés du 13/07 au 28/07 en : (—) S140 et (- -) S140E (signal a été filtré par une moyenne glissante sur une heure). La barre verticale indique la limite $\frac{1}{f}$ de l'existence des ondes de Poincaré.

- L_e^{II} , longueur d'onde de l'onde barotrope côté plateau
- a_e^{II} , amplitude de l'onde barotrope transmise côté plateau à l'interface
- L_i^{II} , longueur d'onde de l'onde barocline côté plateau
- a_i^{II} , amplitude de l'onde barocline transmise côté plateau
- u_e^{II} , composante normale au talus de la vitesse barotrope sur le plateau
- u_i^{II} , composante normale au talus de la vitesse barocline dans la couche supérieure sur le plateau
- (1) correspond aux bi-couches équivalents déterminés par la méthode 1
- (2) correspond aux bi-couches équivalents déterminés par la méthode 2

Les données d'entrées du modèle sont les bi-couches équivalents calculés pour chaque profil CTD par les deux méthodes [tableau (3.7) et (3.8)].

On suppose que les caractéristiques du bi-couche obtenues sur le plateau sont les mêmes du côté haute mer, ce qui d'après les profils CTD effectués sur le talus semble une hypothèse raisonnable. La hauteur d'eau totale du côté haute mer est choisie égale à 1500 mètres, compte tenu de la bathymétrie [figure (3.8)] et la période du forçage barotrope est de 12.42 h. Rappelons que quelle que soit la fréquence du forçage barotrope, en incidence normale, le rapport des amplitudes à l'amplitude de l'onde barotrope est toujours le même. Par contre, les longueurs d'onde présentées dans le tableau (3.11) ne sont valables que pour une période de 12.42 h.

En incidence normale, toutes les grandeurs sur le plateau sont surestimées quel que soit le bi-couche considéré. En fait, la marée barotrope est en incidence sur la Malin Shelf. Or, pour forcer notre modèle, nous devons connaître avec précision les caractéristiques de la marée barotrope sur les deux périodes retenues.

Pour cela, on dispose de données bibliographiques pour la marée barotrope sur ce site. Ces données proviennent ou bien de mesures sur des temps très longs ou bien de modèles de marée. Toutes ces données ont été obtenues dans le but de construire des cartes précises de la marée semi-diurne essentiellement. Parmi cette bibliographie abondante, nous nous référons ici à A.M. Davies et J. Xing [82] dans lequel on trouve une comparaison de leur modèle de calcul de la composante M2 de la marée

CTD	Haute mer				Plateau					
	L_e^I (km)	$\frac{a_e^I}{A}$	L_i^I (km)	$\frac{a_i^I}{A}$	L_e^{II} (km)	$\frac{a_e^{II}}{A}$	L_i^{II} (km)	$\frac{a_i^{II}}{A}$	$\frac{u_e^{II}}{A}$ (10^{-2} /s)	$\frac{u_i^{II}}{A}$ (10^{-2} /s)
1 (1)	10799	0.5	37.04	23.6	3381	1.1	30.89	24	83.5	34.6
(2)				28.8		1.0		29.4	84.8	34.1
2 (1)	10793	0.5	32.47	21.7	3379	1.2	28.11	22.1	82.6	34.9
(2)				29.6		1.0		30.2	84.3	34.3
3 (1)	10806	0.5	34.34	22.6	3383	1.1	29.27	23.0	83.0	34.8
(2)				30.1		1.0		30.7	84.8	34.1
4 (1)	10799	0.5	37.40	27.6	3357	1.0	30.05	28.2	85.0	34.9
(2)				33.1		0.9		33.8	86.4	33.9
5 (1)	10799	0.5	35.84	21.3	3369	1.1	30.6	21.8	83.3	35.0
(2)				27.2		1.0		27.7	84.7	34.5
6 (1)	10799	0.5	36.21	15.4	3369	1.2	32.33	15.7	82.1	35.3
(2)				25.4		1.0		26.0	84.7	34.5
7 (1)	10806	0.5	31.78	13.2	3394	1.3	29.2	13.5	80.7	35.1
(2)				22.4		1.1		22.8	82.7	34.7
8 (1)	10799	0.5	32.84	11.5	3380	1.3	30.44	11.7	80.7	35.4
(2)				19.6		1.2		20.0	82.5	35.0
9 (1)	10799	0.5	38.24	15.7	3392	1.2	33.86	16.0	81.7	35.0
(2)				25.2		1.0		25.7	84.2	34.1
10 (1)	10799	0.5	35.01	15.3	3380	1.2	31.40	15.6	81.7	35.2
(2)				26.3		1.0		26.8	84.3	34.3
11 (1)	10799	0.5	42.63	15.9	3380	1.2	37.1	16.2	82.4	35.0
(2)				22.2		1.0		22.7	84.3	34.4
12 (1)	10806	0.5	32.64	13.0	3507	1.3	30.04	13.2	77.7	33.6
(2)				27.9		1.0		28.4	81.1	32.8

TAB. 3.11 – Calcul de la marée interne pour une marée barotrope en incidence normale

barotrope à des mesures in-situ.

Pour ce qui est de l'amplitude de la marée semi-diurne, un mètre semble être une valeur très robuste.

L'orientation de propagation est par contre plus variable suivant la situation géographique.

Nous avons sélectionné les 2 sites suivants [tableau (3.12)].

Compte tenu de l'inclinaison du talus par rapport au Nord de -13° , l'angle d'incidence de la composante M2 barotrope est donc de 80° par rapport à la normale au talus sur les mesures et 90° sur les calculs [figure (3.28)]. Ce dernier angle paraît peu probable car alors aucune onde interne ne se propagerait sur le talus.

Compte tenu de la faible robustesse de l'angle d'incidence, nous présentons les résultats du modèle pour les incidences de 70° et 80° , répertoriés dans les tableaux (3.13) et (3.14) avec les notations suivantes :

- β_i^I , angle de propagation de l'onde barocline réfléchie côté haute mer
- α_e^{II} , angle de propagation de l'onde barotrope transmise côté plateau
- β_i^{II} , angle de propagation de l'onde barocline transmise côté plateau.

Les autres notations sont les mêmes que pour le tableau (3.11).

latitude ($^{\circ}$)	longitude ($^{\circ}$)	a_m (m)	α_m ($^{\circ}$)	a_c (m)	α_c ($^{\circ}$)
55.7 N	10.8 W	1.04	159	1.00	166
55.3 N	10.7 W	1.07	157	1.02	164

TAB. 3.12 – Composante M2 de la marée barotrope

avec :

- a_m , amplitude mesurée
- α_m , angle mesuré repéré dans le sens trigonométrique depuis le Nord, l'indice c se réfère aux mêmes grandeurs calculées.

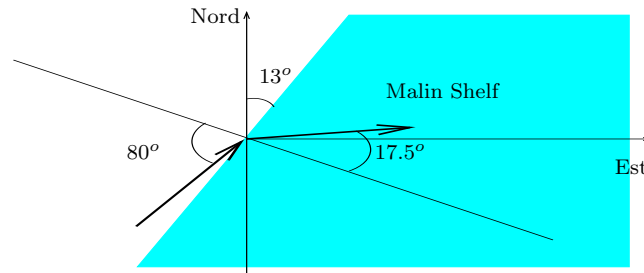


FIG. 3.28 – Angles incident et réfracté de la marée barotrope

D'après ces résultats, il est clair que l'incidence joue un rôle très important. En effet, en diminuant le forçage barotrope normal au plateau, toutes les grandeurs sur le plateau sont diminuées. Pour la composante M2 barotrope sur le plateau, l'angle de transmission varie très peu entre l'incidence à 70° ou à 80° et vaut environ 17.5° , ce qui est en assez bon accord avec l'angle estimé sur les mesures, à 23° (précision sur la mesure de quelques degrés). Par contre, les vitesses barotropes dépendent fortement de l'angle d'incidence puisqu'elles sont quasiment doublées entre une incidence à 80° et à 70° . En comparant ces vitesses aux vitesses mesurées, il est clair que c'est l'incidence à 80° qui fournit le meilleur accord à 20 % près. Pour ce qui est de la direction de propagation de l'onde interne, le modèle prévoit toujours une direction de propagation suivant la normale au talus quel que soit l'angle d'incidence de l'onde barotrope. Cette direction de propagation est en bon accord avec celle mesurée sur la période 1, à savoir environ 2° .

Dans le tableau (3.15), on reporte les moyennes des amplitudes de la marée barocline sur le plateau calculées par le modèle sur chaque période et l'écart type mesuré sur les déplacements d'isothermes.

Pour cet angle de 80° , il nous faut à présent discuter de la validité du modèle pour décrire les ondes baroclines. En fait, il s'avère que si l'on considère les bi-couches déterminés en positionnant l'interface au niveau du maximum de vitesse verticale plutôt qu'en ajustant la masse dans les deux couches, les amplitudes des déplacements d'isothermes sont bien mieux décrites. Cependant, rappelons que si sur la période 3, ce positionnement de l'interface est en accord avec la position de l'interface donnée par les profils des modes empiriques, sur la période 1, la méthode 1 de calcul du bi-couche équivalent semblait donner un meilleur résultat sur ce point. En tenant compte de cet argument, l'écart mesure-modèle sur l'amplitude de la marée interne est d'environ 30 %, ce qui n'est somme toute pas si mauvais si l'on considère la simplicité d'utilisation du modèle. On note également que le modèle

CTD	Haute mer			Plateau					
	$\frac{a_e^I}{A}$	α_i^I ($^\circ$)	$\frac{a_i^I}{A}$	β_e^{II} ($^\circ$)	$\frac{a_e^{II}}{A}$	β_i^{II} ($^\circ$)	$\frac{a_i^{II}}{A}$	$\frac{u_e^{II}}{A}$ (10^{-2} /s)	$\frac{u_i^{II}}{A}$ (10^{-2} /s)
1 ⁽¹⁾	0.8	0.18	10.7	17.1	0.5	0.15	11.0	38.5	15.8
1 ⁽²⁾		0.19	13.1				13.4	39.1	15.6
2 ⁽¹⁾	0.8	0.16	9.9	17.1	0.5	0.14	10.0	38.1	15.9
2 ⁽²⁾		0.17	13.5				13.7	38.9	15.6
3 ⁽¹⁾	0.8	0.17	10.3	17.1	0.5	0.15	10.5	38.3	15.9
3 ⁽²⁾		0.18	13.7				14.0	39.1	15.6
4 ⁽¹⁾	0.8	0.19	12.6	17.0	0.5	0.15	12.8	39.1	15.8
4 ⁽²⁾		0.20	15.1		0.4		15.4	39.8	15.4
5 ⁽¹⁾	0.8	0.18	9.7	17.0	0.5	0.15	9.9	38.4	15.9
5 ⁽²⁾		0.19	12.4				12.6	39.0	15.7
6 ⁽¹⁾	0.8	0.18	7.0	17.0	0.6	0.16	7.2	37.8	16.1
6 ⁽²⁾		0.20	11.6		0.5		11.8	39.0	15.7
7 ⁽¹⁾	0.8	0.16	6.0	17.2	0.6	0.15	6.2	37.2	16.0
7 ⁽²⁾		0.17	10.2		0.5		10.4	38.1	15.8
8 ⁽¹⁾	0.8	0.16	5.25	17.1	0.6	0.15	5.4	37.2	16.1
8 ⁽²⁾		0.17	8.9		0.5		9.1	38.0	15.9
9 ⁽¹⁾	0.8	0.19	7.2	17.2	0.6	0.17	7.3	37.7	15.9
9 ⁽²⁾		0.21	11.5		0.5		11.7	38.8	15.6
10 ⁽¹⁾	0.8	0.17	7.0	17.1	0.6	0.16	7.1	37.7	16.0
10 ⁽²⁾		0.19	12		0.5		12.2	38.9	15.6
11 ⁽¹⁾	0.8	0.21	7.2	17.1	0.5	0.18	7.4	38.0	16.0
11 ⁽²⁾		0.23	10.1				10.4	38.9	15.7
12 ⁽¹⁾	0.8	0.16	6.0	17.8	0.6	0.15	6.1	36.0	15.4
12 ⁽²⁾		0.19	12.8		0.5		13.0	37.6	15.0

TAB. 3.13 – Calcul de la marée interne pour une marée barotrope en incidence $\alpha = 70^\circ$

sous-estime toujours l'amplitude, ce qui peut s'expliquer par le fait que sur site, les ondes sont non-linéaires, et qu'une onde non-linéaire a une amplitude plus grande qu'une onde linéaire de même masse.

Dans le tableau (3.16), on reporte les vitesses baroclines mesurées sur chaque période et les moyennes sur chaque période des vitesses baroclines calculées pour l'angle d'incidence à 80° .

Sur les vitesses baroclines, il est notable que le modèle surestime les vitesses mais là encore, compte tenu de ce que ni la dissipation turbulente à l'interface ni le frottement sur le fond ne sont pas prise en compte, un modèle si simple n'est pas à négliger. De plus, les vitesses mesurées présentent une structure verticale assez éloignée de celle d'un bi-couche et il n'est alors pas équivalent de comparer des vitesses moyennées sur chaque couche, comme le montre le calcul de l'énergie cinétique dans lequel la stratification intervient.

Pour finir, les énergies cinétiques et potentielles données par le modèle sont comparées à celles mesurées. Toutes les énergies sont intégrées sur la profondeur et moyennées dans le temps, pour chaque période de 3 jours sur lesquelles la stratification a pu être repérée comme stable. L'énergie cinétique est estimée pour chaque

CTD	Haute mer			Plateau					
	$\frac{a_e^I}{A}$	α_i^I ($^\circ$)	$\frac{a_i^I}{A}$ ($^\circ$)	β_e^{II}	$\frac{a_e^{II}}{A}$ ($^\circ$)	β_i^{II}	$\frac{a_i^{II}}{A}$	$\frac{u_e^{II}}{A}$ (10^{-2} /s)	$\frac{u_i^{II}}{A}$ (10^{-2} /s)
1 (1)	0.9	0.19	5.9	18.0	0.3	0.16	6.0	21.1	8.6
(2)		0.20	7.2		0.2		7.3	21.4	8.5
2 (1)	0.9	0.17	5.4	18.0	0.3	0.16	5.5	20.9	8.7
(2)		0.18	7.4		0.3		7.5	21.3	8.6
3 (1)	0.9	0.18	5.6	18.0	0.3	0.16	5.8	21.0	8.7
(2)		0.19	7.5		0.2		7.7	21.4	8.5
4 (1)	0.9	0.19	6.9	18.0	0.3	0.16	7.0	21.5	8.6
(2)		0.21	8.2		0.2		8.4	21.8	8.4
5 (1)	0.9	0.19	5.3	18.0	0.3	0.16	5.4	21.0	8.7
(2)		0.20	6.8		0.3		6.9	21.4	8.6
6 (1)	0.9	0.19	3.8	18.0	0.3	0.16	3.9	20.7	8.8
(2)		0.21	6.3		0.3		6.5	21.4	8.6
7 (1)	0.9	0.17	3.3	18.0	0.3	0.16	3.4	20.4	8.8
(2)		0.18	5.6		0.3		5.7	20.9	8.7
8 (1)	0.9	0.17	2.9	18.0	0.3	0.16	2.9	20.4	8.8
(2)		0.18	4.9		0.3		5.0	20.9	8.7
9 (1)	0.9	0.20	3.9	18.0	0.3	0.16	4.0	20.7	8.7
(2)		0.22	6.3		0.3		6.4	21.3	8.5
10 (1)	0.9	0.18	3.8	18.0	0.3	0.16	3.9	20.7	8.8
(2)		0.20	6.6		0.3		6.7	21.3	8.6
11 (1)	0.9	0.22	4.0	18.0	0.3	0.16	4.0	20.8	8.7
(2)		0.24	5.5		0.3		5.7	21.3	8.6
12 (1)	0.9	0.17	3.3	18.0	0.3	0.16	3.3	19.8	8.5
(2)		0.20	7.0		0.3		7.2	20.7	8.3

TAB. 3.14 – Calcul de la marée interne pour une marée barotrope en incidence $\alpha = 80^\circ$

mode à partir de la décomposition EOF des mesures de vitesses des ADCP, et ce pour différents profils de densité de référence choisis parmi les profils CTD disponibles sur chaque période [tableau (3.17)].

Sur les deux périodes, tout d'abord, l'énergie cinétique du forçage barotrope est assez bien modélisée à 30 % près. Ensuite, sur la première période, l'énergie cinétique barocline fournie par le modèle est très proche de celle contenue au total dans tous les modes baroclines. Rappelons que les vitesses baroclines intégrées sur chaque couche étaient par contre nettement surestimées par le modèle. En fait, l'énergie me semble une grandeur plus appropriée à la comparaison. En effet, dans la mesure où l'on introduit un bi-couche équivalent, il n'est plus question de décrire avec acuité la distribution verticale mais de qualifier globalement la réponse du système topographie-stratification. Sur la deuxième période, en revanche, l'énergie cinétique barocline fournie par le modèle sous estime nettement celle mesurée, de plus de 50 %. Le calcul de l'énergie potentielle est par contre plus délicat. Par définition, celle-ci s'écrit :

$$\bar{P}E = \left\langle \frac{1}{h} \int_{z=z_{min}}^{z=z_{max}} [\rho(z) - \langle \rho(z) \rangle] g z dz \right\rangle \quad (3.12)$$

période	a_{0° (m)	a_{70° (m)	a_{80° (m)	a_m (m)	$\frac{a_m - a_{80^\circ}}{a_m}$ (%)
1 (1)	23.8	10.8	6	9.2	36
(2)	30.4	13.8	7.6	8.1	6
3 (1)	14.6	6.7	3.6	8.2	56
(2)	24.6	11.2	6.2	8.2	25

TAB. 3.15 – Amplitude de la composante M2 de la marée barocline sur le plateau : comparaison du modèle aux mesures (a_m)

période	Mesures		Modèle	
	u_{sup} (cm/s)	u_{inf} (cm/s)	u_{sup} (cm/s)	u_{inf} (cm/s)
1 (1)	3.6	-1.8	8.7	-5.8
(2)			8.5	-4.0
3 (1)	5.0	-1.7	8.7	-4.6
(2)			8.6	-2.2

TAB. 3.16 – Vitesse associée à la composante M2 de la marée barocline sur le plateau : comparaison de la composante EST du modèle aux mesures

où $\langle \rangle$ signifie moyenne temporelle.

Elle doit être estimée à partir des mesures de chaînes thermistives, mal discrétisées (tous les 6 mètres environ).

Or, il s'avère que bien qu'ayant discerné des périodes durant lesquelles la stratification avait peu varié, cette estimation de l'énergie n'est pas très bonne. D'autre part, l'énergie potentielle ainsi estimée correspondrait à tout ou partie de l'énergie potentielle barocline. En effet, les chaînes thermistives ne fournissent pas de mesures dans les 6 mètres près de la surface, lieu de l'énergie potentielle barotrope, ni dans les 70 mètres près du fond, lieu d'une partie de l'énergie potentielle barocline. En fait, cette estimation de l'énergie potentielle contiendrait la majeure partie de l'énergie potentielle du 1^{er} mode barocline et une partie des énergies potentielles des autres modes, d'après les profils verticaux des modes dynamiques calculés sur les mesures CTD.

Pour palier à ces deux difficultés, l'énergie potentielle du n^e mode barocline est le plus souvent estimée par la formule suivante établie pour de faibles différences de densité :

$$\bar{P}E_n = \langle \frac{1}{2h} \int_{z=z_{min}}^{z=z_{max}} \rho N^2 \eta^2 dz \rangle \quad (3.13)$$

avec : $N^2(z, t) = -\frac{g}{\rho(z, t)} \frac{\partial \rho(z, t)}{\partial z}$, fréquence de Brünt-Väisälä instantanée,

et où $\langle \rangle$ signifie moyenne temporelle et η est le déplacement associé au n^e mode barocline à l'altitude z obtenu par une décomposition EOF des déplacements d'isothermes.

En effet, avec un choix judicieux des isothermes, les déplacements de ces isothermes autour du niveau moyen sur une période homogène du point de vue de la stratification peuvent être décomposés par une méthode EOF. Celle-ci fournit la distribution verticale normée de chaque mode [fig. (3.29.a)] et l'évolution temporelle de la pro-

période	CTD	Mesures				Modèle	
		mode barotrope	1 ^{er} mode barocline	2 ^e mode barocline	3 ^e mode barocline	mode barotrope	mode barocline
1	1	17.8	1.0	0.60	0.25	20.0 (1)	2.21 (1)
	3	17.3	1.0	0.55	0.23		
	5	17.6	1.0	0.60	0.25	20.7 (2)	1.8 (2)
3	6	15.2	1.77	0.53	0.2	18.9 (1)	1.54 (1)
	8	15.0	1.76	0.53	0.22		
	10	15.4	1.77	0.53	0.23	20.0 (2)	0.9 (2)
	12	15.0	1.76	0.53	0.21		

TAB. 3.17 – *Energies cinétiques : comparaison du modèle aux mesures en fonction de la période de mesure et du profil CTD*

jection des déplacements sur chaque mode [fig. (3.29.b) et (3.29.c)].

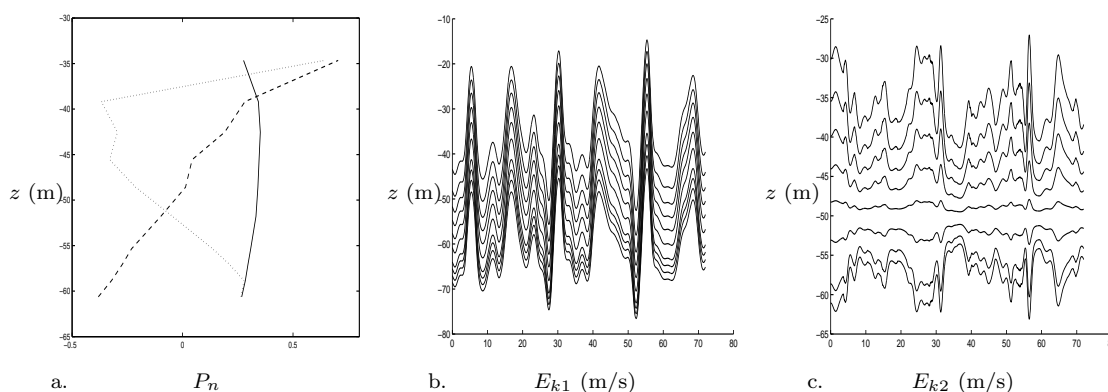


FIG. 3.29 – *Décomposition EOF des isothermes à la station S140 du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00 : (a) distribution verticale normée de chaque mode (—) mode 1 (- -) mode 2 (...) mode 3 (b) projection temporelle du mode 1 (c) projection temporelle du mode 2*

De plus, les pourcentages de variance expliqués par chaque mode montre bien l'absence de la contribution barotrope et la prépondérance de l'énergie potentielle du 1^{er} mode barocline (environ 90 % sur les deux périodes contre 5 % pour le 2^e mode barocline).

La formule (3.13) est aussi souvent remplacée par :

$$\bar{P}E_n = \frac{1}{2h} \int_{z=z_{min}}^{z=z_{max}} \bar{\rho} \bar{N}^2 \langle \eta^2 \rangle dz \quad (3.14)$$

avec : $\bar{N}^2(z) = -\frac{g}{\bar{\rho}(z)} \frac{\partial \bar{\rho}(z)}{\partial z}$, fréquence de Brünt-Väisälä moyennée.

Cette nouvelle formule (3.14) n'est a priori pas fondée mais elle présente l'avantage de pouvoir compenser les fluctuations temporelles par une meilleure discrétisation spatiale en estimant la fréquence de Brünt-Väisälä moyennée sur un profil CTD qui présente une résolution verticale de 2 m, donc 4 fois plus petite que celle des TC. Sur la figure (3.30), on présente une comparaison des profils verticaux de fréquence

de Brünt-Väisälä moyennés obtenus à partir des mesures CTD et TC. L'écart est flagrant.

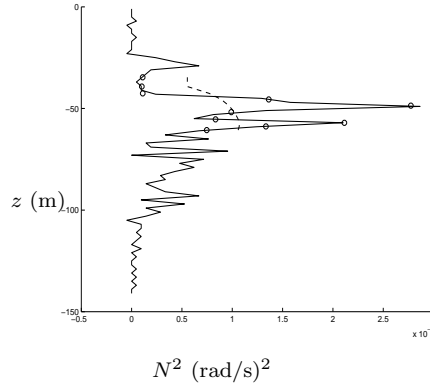


FIG. 3.30 – Profils verticaux de fréquence de Brünt-Väisälä obtenus à partir des mesures (- -) TC (—) CTD complet (o) CTD interpolé aux points de mesures des TC

Pourtant, malgré cet écart, la formule (3.14) appliquée aux données CTD ou TC donne des résultats équivalents et les deux formules (3.13) et (3.14) conduisent à des énergies potentielles comparables à celles obtenues sur le modèle théorique alors que la formule (3.12) donne un bien piètre résultat [cf. tableau (3.18)].

période	Mesures (3.12)	Mesures (3.13)	Mesures (3.14)		Modèle
			CTD	TC	
1 (1)	$2 \cdot 10^{-11}$	0.57	0.60	0.66	0.31
(2)					0.26
2 (1)	$-2.5 \cdot 10^{-11}$	0.47	0.59	0.56	0.22
(2)					0.13

TAB. 3.18 – Energies potentielles baroclines : comparaison du modèle aux mesures

Cette contre-performance de la formule (3.12) nous semble devoir s'expliquer par le fait que cette formule ne donne de bons résultats que lorsque les différences de densité sont importantes, c'est-à-dire lorsque l'erreur sur la mesure de densité est petite devant les variations de densité au cours du temps.

Enfin, les deux formules (3.13) et (3.14) donnent un résultat proche du double de celui prédit par le modèle et contrediraient la formule théorique (2.52) du rapport de l'énergie cinétique à l'énergie potentielle. En fait, vue la précision des mesures, il est vraisemblable que cet écart soit dans la fourchette d'incertitude sur la valeur de l'énergie potentielle mesurée.

3.4.2 Malin Shelf, juillet 1983

L'analyse que nous venons de détailler pour la campagne Malin Shelf 1996 a déjà été faite sur les données de la campagne Malin Shelf 1983 par Sherwin [72]. Nous ne reprenons ici que les principaux résultats qui nous intéressent pour les comparer au modèle.

Rappelons tout d'abord bien que les deux sites soient très proches, le talus n'a pas exactement la même bathymétrie.

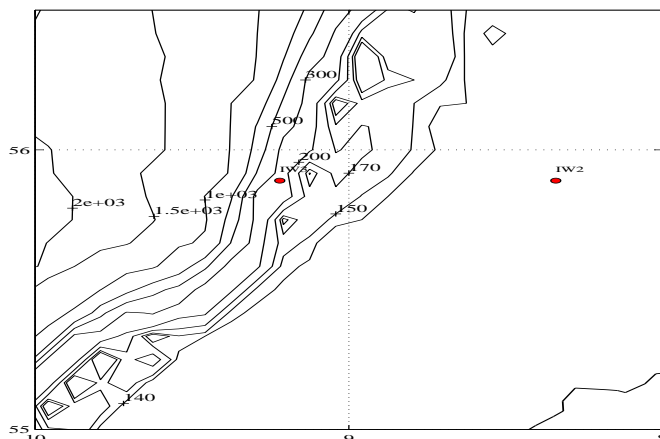


FIG. 3.31 – Bathymétrie approximative en vue de dessus de la campagne Malin Shelf 1983 (source : base de données Gebco)

En 1983, Sherwin ne disposait pas de mesures de la stratification du côté haute mer, et en s'appuyant sur une stratification tirée de la bibliographie, il juge le talus sub-critique entre 1200 m et 200 m. Si on considère la stratification mesurée en 1996, le talus aurait également été jugé sub-critique entre 1600 m et 300 m.

Sur la figure (3.31), on présente une vue de dessus de la bathymétrie et les positions des stations de mesure pour la campagne Malin Shelf 1983. Les positions précises de deux stations de mesures fixes sur ce site sont données dans le tableau (3.19).

nom	latitude (en degré)	longitude (en degré)	profondeur d'eau (m)
IW2	55.89 N	8.34 W	165
IW3	55.89 N	9.22 W	190

TAB. 3.19 – Positions des mouillages fixes pour la campagne Malin Shelf 1983

La distance séparant les 2 stations est de 55 km.

Durant la campagne de mesure de 1983, la stratification présente une couche supérieure très stratifiée jusqu'en surface, du même type que celle observée entre le 18/07/1996 et le 25/07/1996. Le temps était également calme et ensoleillé. Les densités potentielles au fond et en surface sont respectivement 1027.2 kg/m³ et 1026.1 kg/m³.

Le bi-couche équivalent déterminé par Sherwin a les caractéristiques suivantes : $\Delta\rho = 0.841$, $h_1 = 28.1$ m, pour une profondeur totale de 190 mètres en IW3.

Par contre, tant d'après les modes dynamiques que les modes empiriques, l'interface devrait plutôt se situer à 60 mètres sous la surface. La profondeur d'eau du côté haute mer est de 2000 mètres d'après (3.31).

La validité de l'hypothèse bi-couche a été confirmée par le calcul des modes verticaux par la méthode EOF sur les mesures de vitesse. En effet, 65 % de la variance barocline sont expliqués par le 1^{er} mode.

Les caractéristiques de la marée barotrope sur le plateau ont été mesurées, et l'orientation de propagation de la composante M2 barotrope est de 1° par rapport à l'Est.

Durant cette campagne de mesure, aucune mesure n'a été faite du côté haute mer. Nous nous reportons donc également à la bibliographie pour l'orientation de la composante M2 barotrope incidente, à savoir 160° par rapport au Nord. L'orientation étant également de -13° , l'angle d'incidence sur la normale au talus est donc comme précédemment d'environ 80° .

Le modèle prévoit avec les paramètres de forçage de Sherwin une amplitude de 2.5 mètres pour la composante M2 barocline alors que l'écart type du déplacement de l'interface prise à 28.5 mètres est 4.3 mètres.

En plaçant l'interface sous la surface comme le suggère le maximum de déplacement du 1^{er} mode barocline dynamique calculé sur le profil de densité, l'amplitude prévue par le modèle est alors de 4 mètres (plus proche des mesures) avec une vitesse barocline dans la couche supérieure de 7.6 cm/s et dans la couche inférieure de 3.5 cm/s. La vitesse barotrope donnée par le modèle est de 18.3 cm/s sur le plateau dans la direction de propagation, à savoir 4.5° par rapport à l'Est.

3.4.3 Iberian Shelf, août 1994

Lors de cette campagne de mesure, Jeans mesure des paquets d'ondes solitaires de très grande amplitude (jusqu'à 60 mètres), générés à chaque période de marée semi-diurne. Ces mesures sont également confirmées par des images SAR de la région montrant très nettement ces paquets d'ondes solitaires. Cependant, jusqu'à présent aucun modèle n'a permis d'expliquer quel(s) mécanisme(s) pouvait(ent) donner lieu à des ondes solitaires de telles amplitudes.

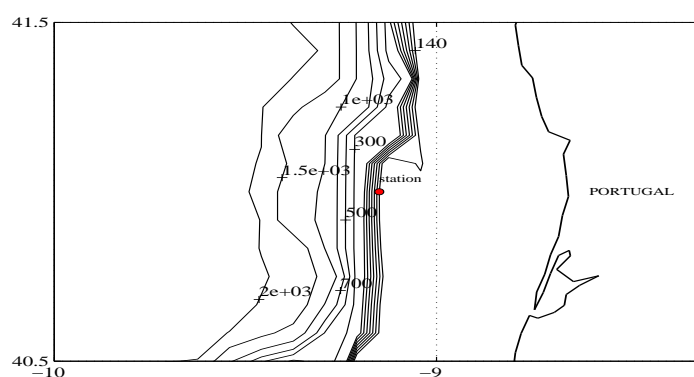


FIG. 3.32 – Bathymétrie approximative en vue de dessus de la campagne Iberian Shelf 1994 (source : base de données Gebco)

La station de mesure se trouve en $41^\circ N$, $-9^\circ W$. Le modèle présenté au chapitre 2 ne donne guère de meilleur résultat que les autres modèles appliqués précédemment. L'amplitude de la marée interne prédite par le modèle est 11 fois l'amplitude de la marée externe en incidence normale et 3 fois l'amplitude de la marée externe en incidence à 80° .

Les paramètres d'entrée sont les suivants :

- profondeur de l’océan : 2000 m
- profondeur du plateau : 150 m
- épaisseur de la couche supérieure : 30 m
- densité de la couche supérieure : 1025.9 kg/m³
- densité de la couche inférieure : 1027 kg/m³.

D’après les cartes de calcul de marée externe, l’incidence est en effet plus proche de 80° par rapport à la normale au plateau que de 0°. De plus, d’après la bathymétrie et les profils de densité mesurés sur le site, il paraît tout à fait légitime de conserver tant l’hypothèse bi-couche que l’hypothèse d’une marche verticale. Par contre, la ligne de côte se trouvant à moins de 50 km du talus, on peut critiquer l’hypothèse d’absorption totale à la côte. En fait, le plateau a davantage les caractéristiques d’une plage, avec un mur à la côte.

Ainsi, le premier modèle de Rattray [64] qui considère cette géométrie serait à adapter en y incluant l’incidence de la marée barotrope. D’après ce modèle, on sait que la marée interne linéaire sur le plateau est un clapotis, le même clapotis existe pour les ondes non linéaires. Reste que d’autres mécanismes sont peut être à envisager. En effet, en se basant sur le modèle de Rattray [64] et compte-tenu de ce que l’incidence tend à diminuer le forçage, il est probable que les amplitudes observées ne seront pas prédites par le modèle modifié.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a montré deux exemples d’application du modèle de génération d’ondes longues internes linéaires par une onde de Poincaré barotrope en incidence sur une marche rectiligne. Tout d’abord, sur le Malin Shelf, on a vérifié dans un premier temps la cohérence du forçage par une onde de Poincaré d’amplitude 1 mètre et en incidence à 80° compte tenu du bon accord entre modèle et mesures sur l’énergie cinétique et l’orientation de la marée semi-diurne M2 externe transmise sur le plateau. En effet, il était légitime de douter de la validité du choix de la description de la marée externe par une onde de Poincaré qui ne serait pas affectée par le confinement de la côte. Ceci dit dans un modèle aussi simplifié que celui considéré, on ne peut traduire la réfraction des rayons dans le plan horizontal par le talus (comme on l’observe sur les ellipses de la marée M2 barotrope dans la simulation numérique de Davies & Xing [82]) que si l’on considère une onde de Poincaré en incidence. En effet, une onde de Kelvin serait piégée par le talus. Ainsi, avec ce forçage cohérent, le modèle bien que très simple, donne d’assez bons résultats tant sur la prédiction de l’amplitude de la marée interne que sur son énergie lorsque la stratification est proche du cas idéal bi-couche (période 1, au début de la campagne de mesure). En effet, sur la période 3 où la stratification près de la surface tend vers une stratification linéaire, l’accord est moins bon. Sur l’importance de la stratification, il faut également se souvenir que dans le modèle est formulée l’hypothèse qu’aucune onde barocline ne vient du plein océan, ce qui est validé sur le cas Malin Shelf en comparant la direction de propagation sur la verticale des rayons des ondes internes à la pente du talus. Le talus est en effet qualifié de super-critique sur sa plus grande partie. Pour finir, compte-tenu du bon accord du modèle aux mesures tant sur l’onde barotrope que sur l’onde barocline transmises sur le plateau, il me semble que ce modèle (qui suppose que la côte est un absorbeur parfait) est adapté au cas Malin Shelf avec les réserves mentionnées.

Par contre, sur l'Iberian Shelf, le modèle tel qu'il est présenté ne donne pas de bons résultats et il est vraisemblable que même en adaptant une condition de réflexion totale à la côte, on n'améliore pas les résultats. D'autre part, l'intérêt particulier de ce modèle est sa souplesse d'utilisation en océanographie puisque qu'à partir de mesures en surface (par exemple à partir d'image SAR) on obtient des enseignements sur une onde barocline.

Deuxième partie

Etude expérimentale et théorique de l'interaction entre une houle courte de surface et une onde solitaire

Chapitre 4

Etude théorique de l'interaction entre une onde solitaire externe et une houle monochromatique

On s'intéresse à l'étude théorique de l'interaction entre une onde solitaire de surface et une houle barotrope. La houle est supposée monochromatique et de petite longueur d'onde comparée à la longueur caractéristique de l'onde solitaire. Ce problème a déjà été étudié du point de vue théorique par Clamond [15] dans le cadre de l'approximation des ondes longues de petites amplitudes. Il effectue un développement du potentiel de l'écoulement irrotationnel d'un fluide parfait dans le cadre de l'eau peu profonde en introduisant une distorsion WKB pour décrire les variations rapides de la phase. Cela l'a conduit à mettre en évidence des variations de la phase de l'onde courte et de l'onde solitaire.

On propose ici une lecture différente du problème de l'interaction, davantage axée sur la description de l'onde courte. Elle repose sur l'analogie que l'on peut supposer entre l'interaction et la réfraction de la houle sous l'effet d'une variation de profondeur et d'un courant, problème étudié par de nombreux auteurs. En particulier Mei [48] synthétise plusieurs calculs épars et obtient, par une méthode de perturbation autour d'un écoulement de base connu dont les variations sur la verticale sont très faibles et les vitesses verticales sont faibles, une équation sur la pression perturbée. En développant la perturbation par une méthode WKB, il décrit tout d'abord la cinématique de l'onde à l'aide de la relation de dispersion :

$$\Omega^2 = gk \tanh kh \tag{4.1}$$

avec :

$\Omega = \omega - k_i U_i$, "fréquence intrinsèque" c'est-à-dire fréquence apparente de l'onde dans un référentiel galiléen pour lequel le milieu peut être considéré au repos,

ω , pulsation de la perturbation,

k_i , composante du nombre d'onde de la perturbation dans la direction i , $k^2 = k_1^2 + k_2^2$,

U_i , composante de la vitesse horizontale du courant dans la direction i ,

h , profondeur du fluide variable.

Peregrine [59] retrouve dans le cadre de l'optique géométrique ce résultat en intégrant analytiquement l'équation d'un rayon d'onde, l'onde se propageant sur différents

écoulements (courant constant, courant stationnaire variable dans le plan horizontal pour différents angles d'incidence, ...). Il suggère en particulier la validité de la relation de dispersion (4.1) pour le cas d'un écoulement présentant une accélération verticale significative en remplaçant la gravité par la "gravité effective" :

$$g^* = g + \frac{dV}{dt}.$$

Plus récemment, dans le cadre de l'optique géométrique, Ramamonjariisoa [63] étudie l'interaction entre deux ondes périodiques longues et une onde courte. En s'inspirant des travaux de Basovich et al. [7] [5] [6], il intègre numériquement dans le cas bidimensionnel les équations de Hamilton (équation d'un rayon) sur l'interaction entre une onde périodique de gravité et une onde capillaire d'une part et une onde longue d'autre part. Il retrouve ainsi une relation de dispersion similaire à (4.1) mais intégrant l'effet de la tension superficielle puisqu'il s'agit des modifications du nombre d'onde d'une onde gravitaire-capillaire. Contrairement à Mei [48], ces deux derniers auteurs ainsi que Clamond d'ailleurs ne se sont intéressés qu'à l'aspect cinématique de l'onde. Or, l'amplitude de l'onde est également modifiée. Pour les modulations de l'amplitude, Mei rappelle que l'"action d'onde" se conserve, soit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{E(U + C_g)}{\Omega} \right) = 0 \quad (4.2)$$

avec :

$E = \rho g a^2$, énergie de l'onde contenue dans une période et moyennée sur une période temporelle,

a , amplitude de l'onde,

ρ , masse volumique du fluide,

U , vitesse du courant,

$C_g = \frac{d\Omega}{dk}$, célérité de groupe de l'onde dans le référentiel où le courant est stationnaire.

Cette conservation de l'action d'onde avait été mis en évidence par Longuet-Higgins & Stewart [46] en étudiant l'interaction entre deux ondes progressives de nombres d'onde très différents. En effet, les auteurs reprennent de façon plus rigoureuse le calcul de l'interaction entre une onde courte et une onde longue toutes deux monochromatiques et corrigent le résultat intuitif obtenu par Unna en 1947 [76] sur les modulations d'amplitude. Ils aboutissent alors à la conservation de l'action d'onde en introduisant le concept de contrainte de radiation, concept largement utilisé depuis dans la mécanique des ondes.

Cette conservation de l'action d'onde a par la suite été généralisée à la propagation de train d'onde dans des milieux aux propriétés variables par Bretherton & Garrett [10] en utilisant un Lagrangien moyenné. La conservation de l'action d'onde est ainsi montrée pour une onde de surface se propageant sur un courant uniforme sur la verticale, pour une onde de gravité interne se propageant sur un écoulement cisailé, pour une onde de Alfvén se propageant dans un fluide compressible ou incompressible avec un champ magnétique figé... Tous ces exemples montrent la grande généralité de la conservation de l'action d'onde. Ces résultats ont été établis en s'appuyant sur un article de fond de Whitham [79] qui établit que si les équations décrivant un système dynamique dérivent d'un certain principe variationnel, alors

les variations d'amplitude dans un train d'onde sont gouvernées par une équation de conservation. Il est également à noter, plus récemment, la contribution de Kharif [37] sur ce problème. Il retrouve numériquement en analysant la stabilité d'une perturbation superharmonique autour d'une onde longue non linéaire en profondeur infinie, des modulations de nombre d'onde et d'amplitude très proches de celles décrites par la conservation de l'action d'onde et l'intégration des équations des rayons.

Enfin, Naciri & Mei [55] aboutissent à une description analytique de l'interaction entre une onde courte irrotationnelle et infinitésimale et une onde longue rotationnelle de Gerstner. Cela est possible dans la mesure où l'onde longue est donnée de façon explicite. Pour le cas de l'onde solitaire irrotationnelle, on ne connaît pas de solution explicite des équations exactes ce qui ouvre un point de discussion, à savoir le choix de la description de l'onde solitaire.

Notre calcul suit une démarche proche de celle de Mei [48] mais dans un premier temps, on ne fait pas d'hypothèses simplificatrices sur les ordres de grandeurs de l'écoulement de base. En partant des équations de base non linéaires qui régissent l'écoulement irrotationnel d'un fluide parfait, on cherche une solution du problème de l'interaction entre une onde solitaire de surface et une houle courte barotrope.

Sachant que l'on connaît des solutions exactes de type onde solitaire des équations de base, on cherchera une solution proche de cette solution exacte par une méthode de perturbation. Ainsi, après avoir écrit les équations vérifiées par la perturbation sous la forme d'une onde périodique au paragraphe 4.2, on cherchera la perturbation en menant une analyse WKB au paragraphe 4.3.

4.1 Equations de base non linéaires

Considérons un fluide incompressible, de densité constante et homogène pour une profondeur d'eau au repos h_0 . On étudie un écoulement bidimensionnel et irrotationnel, le champ de vitesse dérive donc d'un potentiel de vitesse $\Phi(x, z, t)$ et est donné par les relations :

$$u(x, z, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad v(x, z, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

où $u(x, z, t)$ et $v(x, z, t)$ sont respectivement les composantes horizontales et verticales de la vitesse. On note $\eta(x, t)$ la dénivellation de la surface libre par rapport au niveau de repos.

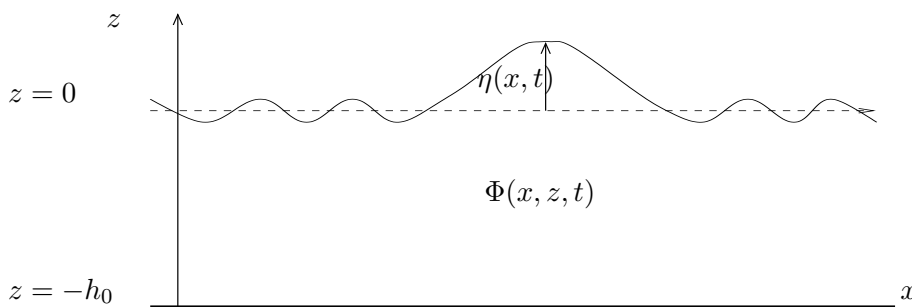


FIG. 4.1 – Schéma de définition des notations théoriques

$\eta(x, t)$ et $\Phi(x, z, t)$ vérifient le système d'équations suivant :

– conservation de la masse, pour $-\infty \leq x \leq \infty$ et $-h_0 \leq z \leq \eta(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.3)$$

– imperméabilité du fond, en $z = -h_0$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (4.4)$$

– imperméabilité de la surface libre, en $z = \eta(x, t)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.5)$$

– Bernoulli à la surface libre, en $z = \eta(x, t)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + g\eta = 0 \quad (4.6)$$

Ce système admet des solutions exactes non périodiques ou ondes solitaires (Lavrentiev, [42]). En se plaçant dans le repère en translation à la célérité c de l'onde solitaire solution exacte, celle-ci est alors une solution exacte stationnaire du système. On sait donc qu'il existe une solution exacte stationnaire du système d'équations (4.3)-(4.6) dans un repère en translation. On se place dans un repère en translation à la célérité c comme proposé par Peregrine [59] pour l'étude de l'interaction de la houle avec la marée ou les ondes internes. Avec les nouvelles variables $X = x - ct$ et $\tau = t$, les opérations de dérivation s'écrivent alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \tau} - c \frac{\partial f}{\partial X}$$

4.2 Méthode de perturbations : linéarisation et solutions périodiques

On note respectivement $\Phi_e(X, z)$ et $\eta_e(X)$ le potentiel des vitesses et la dénivelée de la surface libre de la solution exacte connue, stationnaire dans le repère en translation. Pour l'instant, il n'est pas nécessaire de préciser la forme de la solution exacte. Ceci permet de généraliser le calcul qui suit à toute solution exacte stationnaire dans un repère en translation à la célérité c , celle-ci pouvant être nulle. On cherche alors une solution proche de cette solution exacte par une méthode de perturbations, c'est-à-dire que le potentiel des vitesses et la dénivelée de la surface libre sont cherchés sous la forme d'une série d'un petit paramètre δ inconnu a priori, soit :

$$\Phi(X, z, \tau) = \Phi_e(X, z) + \delta \Phi_1(X, z, \tau) + \delta^2 \Phi_2(X, z, \tau) + \mathcal{O}(\delta^3) \quad (4.7)$$

$$\eta(X, \tau) = \eta_e(X) + \delta \eta_1(X, \tau) + \delta^2 \eta_2(X, \tau) + \mathcal{O}(\delta^3) \quad (4.8)$$

On réécrit le système (4.3)-(4.6) à l'ordre 1 en δ après changement de variables, substitution de Φ et η par leurs expressions (4.7) et (4.8) et en effectuant des développements de Taylor de (4.5) et (4.6) autour de $z = \eta_e(X, \tau)$.

- pour $-\infty \leq X \leq \infty$ et $-h_0 \leq z \leq \eta_e(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = 0 \quad (4.9)$$

- en $z = -h_0$:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \quad (4.10)$$

- en $z = \eta_e(X)$:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \eta_1 \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial z^2} = \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} - c \frac{\partial \eta_1}{\partial X} + \eta_1 \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial X \partial z} \frac{\partial \eta_e}{\partial X} + \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \frac{\partial \Phi_1}{\partial X} + \frac{\partial \eta_1}{\partial X} \frac{\partial \Phi_e}{\partial X} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} - c \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X} + \eta_1 \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial X \partial z} \right) + g \eta_1 + \frac{\partial \Phi_e}{\partial X} \frac{\partial \Phi_1}{\partial X} + \frac{\partial \Phi_e}{\partial z} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \eta_1 \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial X} \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial X \partial z} + \frac{\partial \Phi_e}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (4.12)$$

Nous abandonnons à présent l'indice 1 pour distinguer la perturbation et nous cherchons celle-ci sous forme périodique :

$$\Phi_1(X, z, t) = e^{-i\omega\tau} \phi(X, z) \quad \text{et} \quad \eta_1(X, t) = e^{-i\omega\tau} \eta(X)$$

Il est à noter ici que la pulsation ω dépend du changement de repère effectué. Elle correspond donc à une pulsation apparente dans le repère stationnaire de l'onde solitaire qu'il faudra déterminer.

Les conditions (4.11) et (4.12) en $z = \eta_e(X)$ s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \eta \frac{\partial v_e}{\partial z} + i\omega \eta - \eta \frac{\partial u_e}{\partial z} \frac{\partial \eta_e}{\partial X} - \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial X} - (u_e - c) \frac{\partial \eta}{\partial X} = 0 \quad (4.13)$$

$$-i\omega \phi + (u_e - c) \frac{\partial \phi}{\partial X} + v_e \frac{\partial \phi}{\partial z} + \eta \left(g + (u_e - c) \frac{\partial u_e}{\partial z} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.14)$$

A partir de (4.14), on exprime η en fonction de la valeur de ϕ et de ses dérivées en $z = \eta_e(X)$:

$$\eta = \frac{\left(i\omega \phi - (u_e - c) \frac{\partial \phi}{\partial X} - v_e \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)}{G(X, z = \eta_e(X))} \quad (4.15)$$

avec :

$$G(X, z) = g + (u_e - c) \frac{\partial u_e}{\partial z} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial z} \quad (4.16)$$

Les dérivées sont prises avant de poser $z = \eta_e(X)$. $G(X, z = \eta_e(X))$ est la somme de la gravité et de l'accélération verticale des particules à la surface. On reconnaît la gravité effective mise en évidence par Peregrine [59] dans son étude de l'interaction des ondes courtes et longues de petites amplitudes. En effet, dans ce cas, l'onde longue présente des accélérations verticales significatives qui interviennent dans l'interaction.

De façon standard, nous allons réduire le jeu d'équations (4.13)-(4.14) à une seule condition pour ϕ en $z = \eta_e(X)$. Rappelons que :

$$\frac{\partial}{\partial X} [F(X, z = \eta_e(X))] = \frac{\partial F}{\partial X}(X, z = \eta_e(X)) + \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \frac{\partial F}{\partial z}(X, z = \eta_e(X))$$

On en déduit en dérivant (4.15), l'expression de la dérivée $\frac{\partial \eta}{\partial X}$ en $z = \eta_e(X)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial X} = & \left(-i\omega\phi + (u_e - c) \frac{\partial \phi}{\partial X} + v_e \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{G^2} \left[\frac{\partial G}{\partial X} + \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial z} \right] \right) + i \frac{\omega}{G} \left[\frac{\partial \phi}{\partial X} + \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] \\ & - \frac{(u_e - c)}{G} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X \partial z} \right] - \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial X} \left[\frac{\partial u_e}{\partial X} + \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \frac{\partial u_e}{\partial z} \right] - \frac{v_e}{G} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial X \partial z} + \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \\ & - \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial z} \left[\frac{\partial v_e}{\partial X} + \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \frac{\partial v_e}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

où les dérivées sont prises avant de poser $z = \eta_e(X)$. En substituant (4.15) et (4.17) dans (4.13), on obtient l'équation aux dérivées partielles pour le potentiel perturbé $\phi(X, z)$ à la surface libre ($z = \eta_e(X)$) suivante :

$$a_e(X)\phi + b_e(X)\frac{\partial \phi}{\partial X} + c_e(X)\frac{\partial \phi}{\partial z} + d_e(X)\frac{\partial^2 \phi}{\partial X \partial z} + e_e(X)\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + f_e(X)\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.18)$$

où :

$$\begin{aligned} a_e(X) &= -\frac{\omega^2}{G(X)} - \frac{i\omega}{G(X)} \left(\frac{\partial u_e}{\partial z} \frac{\partial \eta_e}{\partial X} - \frac{\partial v_e}{\partial z} - \frac{(u_e - c)}{G(X)} \left[\frac{\partial G}{\partial X} + \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial z} \right] \right) \\ b_e(X) &= -\frac{\partial \eta_e}{\partial X} + \frac{(u_e - c)}{G(X)} \left(\frac{\partial u_e}{\partial X} - \frac{\partial v_e}{\partial z} + 2 \frac{\partial u_e}{\partial z} \frac{\partial \eta_e}{\partial X} - \frac{(u_e - c)}{G(X)} \left[\frac{\partial G}{\partial X} + \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial z} \right] \right) \\ &\quad - \frac{2i\omega(u_e - c)}{G(X)} \\ c_e(X) &= 1 - \frac{v_e}{G(X)} \left(\frac{\partial v_e}{\partial z} - \frac{\partial u_e}{\partial z} \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \right) - \frac{(u_e - c)}{G(X)} \left(\frac{v_e}{G(X)} \left[\frac{\partial G}{\partial X} + \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial z} \right] - \frac{\partial v_e}{\partial X} - \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \frac{\partial v_e}{\partial z} \right) \\ &\quad - \frac{i\omega}{G(X)} \left[v_e + (u_e - c) \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \right] \\ d_e(X) &= \frac{(u_e - c)}{G(X)} \left[v_e + (u_e - c) \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \right] \\ e_e(X) &= \frac{(u_e - c)^2}{G(X)} \\ f_e(X) &= \frac{v_e(u_e - c)}{G(X)} \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \end{aligned}$$

Le système vérifié par $\phi(X, z)$ se résume donc ainsi :

- pour $-\infty \leq X \leq \infty$ et $-h_0 \leq z \leq \eta(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.19)$$

- en $z = -h_0$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (4.20)$$

- en $z = \eta_e(X)$:

$$a_e(X)\phi + b_e(X)\frac{\partial\phi}{\partial X} + c_e(X)\frac{\partial\phi}{\partial z} + d_e(X)\frac{\partial^2\phi}{\partial X\partial z} + e_e(X)\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2} + f_e(X)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.21)$$

On déduit $\eta(X)$ à l'aide de la relation (4.15).

4.3 Analyse WKB : cas $\delta \ll \mu$

On introduit une distorsion de l'échelle horizontale par le changement de variable $X^* = \mu X$ où μ est un petit paramètre dont nous discuterons l'ordre de grandeur ultérieurement. Cela revient à s'intéresser au voisinage de quelques longueurs d'onde de l'onde courte. Cette distorsion doit être discutée vis-à-vis des développements en série du petit paramètre δ , (4.7) et (4.8). En effet, suivant la grandeur relative de δ par rapport à μ , le système originel des équations (4.3)-(4.6) ne se simplifie pas de la même façon. En particulier, si $\delta \sim \mu$, les ordres en δ et μ ne peuvent être séparés. Le cas où $\delta \gg \mu$ est détaillé par Dingemans dans [16] pour l'étude de la réfraction de la houle sur des courants dont la distribution sur la verticale joue un rôle prépondérant et où les variations horizontales et temporelles sont négligées. Dans le cas qui nous intéresse où $\delta \ll \mu$, le système après changement de variable s'écrit alors :

- pour $-\infty \leq X^* \leq \infty$ et $-h_0 \leq z \leq \eta_e^*(X^*)$:

$$\mu^2 \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^2} = 0 \quad (4.22)$$

- en $z = -h_0$:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial z} = 0 \quad (4.23)$$

- en $z = \eta_e^*(X^*)$:

$$a_e^*(X^*)\phi^* + \mu b_e^*(X^*)\frac{\partial\phi^*}{\partial X^*} + c_e^*(X^*)\frac{\partial\phi^*}{\partial z} + \mu d_e^*(X^*)\frac{\partial^2\phi^*}{\partial X^*\partial z} + \mu^2 e_e^*(X^*)\frac{\partial^2\phi^*}{\partial X^{*2}} + f_e^*(X^*)\frac{\partial^2\phi^*}{\partial z^2} = 0 \quad (4.24)$$

avec : $\phi^*(X^*, z) = \phi(X, z)$, $a_e^*(X^*) = a_e(X)$, $b_e^*(X^*) = b_e(X)$, ...

On cherche le potentiel perturbé sous la forme suivante traduisant les variations lentes de l'amplitude du potentiel par rapport aux variations rapides de la phase du potentiel :

$$\phi^*(X^*, z) = A^*(X^*, z)e^{\frac{iS^*(X^*, z)}{\mu}} \quad (4.25)$$

avec : $A^*(X^*, z) = A(X, z)$ et $S^*(X^*, z) = \mu S(X, z)$ réels.

On substitue dans (4.22) la forme de ϕ^* et on sépare partie réelle et imaginaire :

$$-\frac{A^*}{\mu^2}(S_z^*)^2 + A_{zz}^* - A^*(S_{X^*}^*)^2 + \mu^2 A_{X^* X^*}^* = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{\mu}(A^{*2}S_z^*)_z + \mu(A^{*2}S_{X^*}^*)_{X^*} = 0 \quad (4.27)$$

en utilisant la notation indicelle des dérivations. En séparant parties réelle et imaginaire dans la relation d'imperméabilité au fond (4.23), on obtient en $z = h_0$:

$$A_z^* = 0 \quad (4.28)$$

$$A^* S_z^* = 0 \quad (4.29)$$

La relation (4.27) s'intègre suivant z entre le fond ($z = -h_0$) et la surface ($z = \eta_e^*(X^*)$). En appliquant la règle de Leibniz et en tenant compte de (4.29), cette relation s'écrit :

$$\left[\int_{z=-h_0}^{z=\eta_e^*(X^*)} S_{X^*}^* (A^*)^2 dz \right]_{X^*} + \frac{1}{\mu^2} (A^{*2} S_z^*)_{z=\eta_e^*(X^*)} - \eta_{eX^*}^* (A^{*2} S_{X^*}^*)_{z=\eta_e^*(X^*)} = 0 \quad (4.30)$$

La résolution des équations dans la masse à chaque ordre en μ implique de développer l'amplitude et la phase en série du petit paramètre μ . On choisit les développements en série paire suivants :

$$A^*(X^*, z) = A_0^*(X^*, z) + \mu^2 A_2^*(X^*, z) + \dots + \mathcal{O}(\mu^{2n}) \quad (4.31)$$

$$S^*(X^*, z) = S_0^*(X^*, z) + \mu^2 S_2^*(X^*, z) + \dots + \mathcal{O}(\mu^{2n}) \quad (4.32)$$

en s'inspirant de celui obtenu par Dingemans [16] pour l'étude de la réfraction sur fond variable. En effet, Nicolas [57] et Dingemans [16] montre qu'en choisissant un développement en série complexe comme celui préconisé par Mei dans [48] par exemple, on aboutit au même résultat. On résoud ainsi le système à chaque ordre en μ en décomposant également les coefficients de la relation à la surface libre (4.24), dépendant de l'état de base, en série entière de μ . En particulier, on note :

$$\begin{aligned} a_e^*(X^*) &= a_{e0}^*(X^*) + \mu a_{e1}^*(X^*) + \dots + \mathcal{O}(\mu^n) \\ b_e^*(X^*) &= b_{e0}^*(X^*) + \mu b_{e1}^*(X^*) + \dots + \mathcal{O}(\mu^n) \\ c_e^*(X^*) &= c_{e0}^*(X^*) + \mu c_{e1}^*(X^*) + \dots + \mathcal{O}(\mu^n) \\ d_e^*(X^*) &= d_{e0}^*(X^*) + \mu d_{e1}^*(X^*) + \dots + \mathcal{O}(\mu^n) \\ e_e^*(X^*) &= e_{e0}^*(X^*) + \mu e_{e1}^*(X^*) + \dots + \mathcal{O}(\mu^n) \\ f_e^*(X^*) &= f_{e0}^*(X^*) + \mu f_{e1}^*(X^*) + \dots + \mathcal{O}(\mu^n) \end{aligned}$$

4.3.1 Détermination de la phase à l'ordre 0

– à l'ordre 0 (μ^{-2}) : les conditions limites ne fournissent pas de relation à cet ordre, seule la partie réelle de la condition dans la masse (4.26) nous donne :

$$-(S_{0z}^*)^2 A_0^* = 0 \quad \text{pour} \quad -\infty \leq X^* \leq \infty \quad \text{et} \quad -h_0 \leq z \leq \eta_e^*(X^*) \quad (4.33)$$

Si on suppose $A_0^*(X^*, z) \neq 0$, on déduit :

$$S_0^* = S_0^*(X^*)$$

– à l'ordre 1 (μ^{-1}) : il n'y a que des relations triviales.

– à l'ordre 2 (μ^0) : on obtient trois relations qui permettent de déterminer complètement la phase à l'ordre 0.

- pour $-\infty \leq X^* \leq \infty$ et $-h_0 \leq z \leq \eta_e^*(X^*)$:

$$A_{0zz}^* - k^{*2} A_0^* = 0 \quad (4.34)$$

- en $z = -h_0$:

$$A_{0z}^* = 0 \quad (4.35)$$

- en $z = \eta_e^*(X^*)$:

$$A_0^* [a_{e0}^*(X^*) + ib_{e0}^*(X^*)k^* - e_{e0}^*(X^*)k^{*2}] + A_{0z}^* [c_{e0}^*(X^*) + id_{e0}^*(X^*)k^*] + f_{e0}^*(X^*)A_{0zz}^* = 0 \quad (4.36)$$

en notant $k^*(X^*) = S_{0X^*}^*$ (alors si on note $k(X) = S_{0X}$, $k^*(X^*) = k(X)$).

L'équation (4.34) est une équation aux dérivées partielles à variables séparables dont les solutions sont des fonctions hyperboliques pour k^* réel et des fonctions trigonométriques pour k^* imaginaire pur. En ayant supposé k^* réel, la solution de (4.34) s'écrit, en tenant compte de la condition au fond (4.35) :

$$A_0^*(X^*, z) = \alpha_0^*(X^*) \cosh(k^*(X^*)(z + h_0)) \quad (4.37)$$

Il reste alors deux inconnues à déterminer : $k^*(X^*)$ et $\alpha_0^*(X^*)$. A partir de la relation à la surface libre (4.36) dans laquelle on introduit (4.37), il est possible de déterminer $k^*(X^*)$ à cet ordre. Il suffit en effet de résoudre l'équation suivante dans laquelle $\alpha_0^*(X^*)$ n'intervient plus et où $k^*(X^*)$ est la seule inconnue :

$$[a_{e0}^*(X^*) + ib_{e0}^*(X^*)k^*(X^*) + (f_{e0}^*(X^*) - e_{e0}^*(X^*))k^{*2}(X^*)] + k^*(X^*) \tanh(k^*(X^*)(\eta_e^*(X^*) + h_0)) [c_{e0}^*(X^*) + id_{e0}^*(X^*)k^*(X^*)] = 0 \quad (4.38)$$

La relation (4.38) s'écrit en revenant aux variables non distordues (X, z) :

$$[a_{e0}(X) + ib_{e0}(X)k(X) + (f_{e0}(X) - e_{e0}(X))k(X)^2] + k(X) \tanh(k(X)(\eta_e(X) + h_0)) [c_{e0}(X) + id_{e0}(X)k(X)] = 0 \quad (4.39)$$

Dans le cas général, la relation (4.39) est complexe et il nous faut donc résoudre le système obtenu à partir de ses parties réelle et imaginaire. Si on suppose $k(X)$ réel, le système n'est compatible que si $a_{e0}(X)$, $c_{e0}(X)$, $e_{e0}(X)$ et $f_{e0}(X)$ sont réels ou imaginaires purs et vice-versa pour $b_{e0}(X)$ et $d_{e0}(X)$. Alors la relation (4.39) est réelle ou imaginaire pure.

Si tel n'était pas le cas, il nous faudrait alors considérer $k(X) = k_r(X) + ik_i(X)$ complexe et reprendre la résolution depuis le début car la séparation de l'équation dans la masse en partie réelle et imaginaire ne serait plus licite. Il est important de souligner que dans le cas où k est complexe, une partie de la phase peut être a priori contenue dans $A_0(X, z)$ et qu'il est donc indispensable de déterminer $\alpha_0^*(X^*) = \alpha_0(X)$ pour étudier les variations de la phase, ce qui n'est pas nécessaire avec nos hypothèses si elles s'avèrent valides.

Dans tous les cas, à cet ordre, la fonction $\alpha_0^*(X^*)$ n'est pas déterminée. On développe donc dans le paragraphe suivant les calculs aux ordres supérieurs en supposant l'équation (4.39) réelle.

4.3.2 Détermination de l'amplitude du potentiel à l'ordre 0

La partie imaginaire de l'équation dans la masse (4.30) intégrée sur la colonne d'eau nous donne à l'ordre 2 (μ^0) :

$$\left[\int_{z=-h_0}^{z=\eta_e^*(X^*)} k^* (A_0^*)^2 dz \right]_{X^*} + (A_0^{*2} S_{2z}^*)_{z=\eta_e^*(X^*)} - A_0^{*2} \eta_{eX^*}^* k^* = 0 \quad (4.40)$$

Ainsi, pour déterminer complètement l'amplitude du potentiel, il nous faut connaître les variations verticales de la phase à l'ordre 2 à la surface, soit $(S_{2z}^*)_{z=\eta_e^*(X^*)}$. On obtient $(S_{2z}^*)_{z=\eta_e^*(X^*)}$ en écrivant la partie imaginaire de la relation à la surface libre (4.24) à l'ordre 3 (μ^1). En variables non distordues, celle-ci s'écrit en $z = \eta_e(X)$:

$$\begin{aligned} \Im(a_{e1})A_0 + \Im(b_{e0})A_{0X} + \Re(b_{e1})A_0k + \Im(c_{e1})A_{0z} + \Re(c_{e0})A_0S_{2z} \\ + \Re(d_{e1})A_{0z}k + 2\Re(e_{e0})A_{0X}k + \Re(e_{e0})A_0k_X = 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Enfin, dans le cas général, on tire S_{2z}^* en $z = \eta_e^*(X^*)$ de (4.41) que l'on introduit dans la relation (4.40) pour déterminer complètement l'amplitude du potentiel à l'ordre 0, A_0 . L'amplitude de la dénivelée de surface libre à l'ordre 0 est obtenue à partir de l'ordre 0 de la relation (4.15). Or, la relation (4.15) s'écrit après la distorsion WKB :

$$\eta = \frac{1}{G(X)} \left[-\frac{i}{\mu} v_e A^* S_z^* + i(\omega - k(u_e - c))A^* - v_e A_z^* - \mu(u_e - c)A_{X^*}^* \right] e^{\frac{iS^*}{\mu}} \quad (4.42)$$

La suite de ce chapitre concerne plus précisément le cas où l'état de base est une onde solitaire.

4.4 Application au cas de l'interaction entre une onde solitaire externe et de la houle

Pour appliquer le calcul présenté au cas de l'interaction entre une onde solitaire et de la houle, il nous faudrait disposer d'une solution de type onde solitaire exacte, stationnaire dans un repère en translation, du système d'équations (4.3)-(4.6). Aucune solution explicite n'a jamais été trouvée à ma connaissance. Cependant, plusieurs solutions explicites approchées ont été proposées (eau peu profonde, Korteweg & De Vries ou Serre) avec des domaines de validité théoriques différents. En pratique, ces domaines de validité peuvent être estimés par comparaison soit aux expériences soit à une solution exacte numérique. La validité de l'approximation de Korteweg et De Vries pour l'étude des solutions ondes solitaires des équations (4.3)-(4.6) a été étudiée expérimentalement de façon extensive. Nous citerons en particulier les travaux de Hammack & Segur [28] et plus récemment Temperville [75] qui aboutissent à la conclusion d'une bonne description pour les petites amplitudes réduites jusqu'à 0.15 environ. Au-delà de cette valeur, l'accord devient de moins en moins bon particulièrement sur la description de la célérité.

La comparaison de la solution de l'eau peu profonde avec une solution exacte numérique (annexe B) confirme l'écart entre la célérité de l'eau peu profonde et la célérité exacte à partir de 0.15. Pour Serre, l'écart avec la célérité exacte ne devient notable qu'à partir d'une amplitude réduite d'environ 0.35. Par contre, la dénivelée de surface libre de l'onde solitaire exacte est bien mieux décrite par l'eau peu profonde que par

Serre, et ce dès les petites amplitudes réduites. Ainsi, pour le calcul d'interaction, on comparera donc des calculs menés en utilisant un état de base fourni par un calcul exact, par la solution de onde solitaire de l'eau peu profonde et par la solution de Serre.

Il est à noter que la solution onde solitaire mathématique (ainsi que toutes les formulations approchées) présente quelques particularités notables, permettant sans calcul de tirer des informations sur le potentiel perturbé dans le problème d'interaction. En effet, notons que :

- $\eta_e(X)$ et $u_e(X, z)$ sont des fonctions paires de X et donc leurs dérivées successives sont alternativement des fonctions impaires et paires de X
- $v_e(X, z) = \int \frac{\partial u_e}{\partial X}(X, z) dz$ (continuité) est une fonction impaire de X .

De là, on montre que $k(X)$ et $\alpha_0(X)$ sont des fonctions paires.

L'évaluation numérique des fonctions est faite en fonction de la variable X^* pour laquelle il nous faut définir une boîte de calcul. Celle-ci devrait être théoriquement infinie puisque l'onde solitaire est infiniment longue. En fait, pratiquement on choisit X^* compris entre -2.5 m et 2.5 m pour une profondeur d'eau de 0.3 m car à l'extérieur de cette boîte, la vitesse moyenne horizontale $u_e(X^*)$ et la dénivelée de la surface libre $\eta_e(X^*)$ de l'onde solitaire sont quasiment nuls y compris pour une amplitude réduite de 0.05 correspondant aux ondes les plus longues. On discrétise cette boîte de calcul avec un pas de $1/100$. Enfin, on ne calcule k que pour X^* compris entre -2.5 m et 0 m, compte-tenu des symétries évoquées ci-dessus.

Dans ce paragraphe, on précise, lorsque l'écoulement de base est une onde solitaire, le calcul général développé au paragraphe 4.3 compte tenu des ordres de grandeur des vitesses et accélérations de l'onde solitaire. On montre en effet que la relation de dispersion (4.1) obtenue par Mei [48] pour la réfraction de la houle sur les courants et fonds lentement variables est la même que celle obtenue pour l'interaction entre de la houle et une onde solitaire si l'on tient compte des ordres de grandeur de celle-ci. Par contre, on montre également que la conservation de l'action d'onde ne s'obtient pas systématiquement.

Après avoir présenté les ordres de grandeur, les simplifications effectuées pour aboutir à ce résultat sont détaillées. Car, bien que le calcul de Mei soit développé suivant le même principe que notre calcul, les étapes du calcul présenté dans [48] ne sont pas facilement transposables. En effet, Mei présente un calcul tridimensionnel donnant les équations pour la pression alors que nous obtenons des équations sur le potentiel des vitesses. De plus, le choix de la série entière paire du développement WKB modifie notablement le développement des calculs. Cependant, la méthode est similaire, même si l'écoulement de base considéré par Mei n'est pas nécessairement stationnaire. Dans ce système d'équations ordonnées, Mei néglige les termes d'ordre μ^2 et supérieur, ce qui équivaut à supposer la vitesse horizontale constante le long de la verticale. On voit donc que ce calcul est légitime pour le cas de l'onde solitaire puisque pour cette onde, les variations suivant la verticale de la vitesse horizontale sont en effet très petites comme on le voit dans l'étude des ordres de grandeur qui suit.

4.4.1 Ordres de grandeur

Précisons tout d'abord les ordres de grandeur de chacun des termes mis en jeu dans les équations de l'interaction. Pour l'onde solitaire, on introduit les échelles de grandeur et les deux paramètres sans dimension suivants :

- L , longueur caractéristique de l'onde solitaire
- h_0 , profondeur d'eau
- $c_0 = \sqrt{gh_0}$, célérité des ondes longues
- $\epsilon = \frac{A}{h_0}$, amplitude réduite de l'onde solitaire (A amplitude de l'onde solitaire)
- $\sigma = \frac{h_0}{L}$, paramètre de l'eau peu profonde ($\sigma \ll 1$)

Les ordres de grandeur pour l'onde solitaire sont alors les suivants :

- $u_e \sim \epsilon c_0$
- $v_e \sim \epsilon \sigma c_0$
- $\eta_e \sim \epsilon h_0$
- $\frac{\partial u_e}{\partial X} \sim \frac{\partial v_e}{\partial z} \sim \frac{\epsilon \sigma c_0}{h_0}$ (continuité)
- $\frac{\partial u_e}{\partial z} \sim \frac{\partial v_e}{\partial X} \sim \frac{\epsilon \sigma^2 c_0}{h_0}$ (irrotationalité)

Pour la perturbation périodique, les ordres de grandeur sont les suivants :

- $\eta \sim a$
- $u \sim v \sim \frac{agk}{\omega}$
- $\Phi \sim \frac{ag}{\omega}$

avec :

- g , accélération de la gravité,
- a , amplitude de l'onde courte,
- k , nombre d'onde,
- ω , pulsation de l'onde courte.

Les opérateurs différentiels sont estimés de la façon suivante lorsqu'ils s'appliquent à :

- l'onde courte : $\frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{\partial}{\partial X} \sim k$
- l'onde solitaire : $\frac{\partial}{\partial X} \sim \frac{1}{L}$ et $\frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{h_0}$

En s'inspirant de la théorie linéarisée autour du repos, on pose que $\delta = ak$. Or la linéarisation suppose que $\delta \ll \frac{\partial \eta_e}{\partial X}$ à savoir $\delta \ll \epsilon \sigma$.

La distorsion WKB consiste à introduire un petit paramètre μ pour décrire la variable lente $X^* = \mu X$. Le choix du petit paramètre μ est ici précisé en imposant que les variations suivant X^* de l'état de base doivent être du même ordre de grandeur que les variations suivant X de la perturbation. Ceci permet d'éliminer la différence d'échelle des variations entre l'écoulement de base et la perturbation et de les décrire dans une même théorie. Mathématiquement, on impose que :

$$\mu \sim \sigma \tag{4.43}$$

	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\mu)$
$a_e(X)$	$-\frac{\omega^2}{g}$	$\frac{i\omega}{g} \frac{\partial v_e}{\partial z}$
$b_e(X)$	$-\frac{2i\omega(u_e - c)}{g}$	$-\frac{\partial \eta_e}{\partial X} + \frac{(u_e - c)}{g} \left(\frac{\partial u_e}{\partial X} - \frac{\partial v_e}{\partial z} \right)$
$c_e(X)$	1	$\frac{i\omega}{g} \left[v_e + (u_e - c) \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \right]$
$d_e(X)$	0	$\frac{(u_e - c)}{g} \left[v_e + (u_e - c) \frac{\partial \eta_e}{\partial X} \right]$
$e_e(X)$	$\frac{(u_e - c)^2}{g}$	0
$f_e(X)$	0	0
$\frac{1}{G(X)}$	$\frac{1}{g}$	0

TAB. 4.1 – Deux premiers termes de la décomposition en série entière de μ des coefficients de la relation à la surface libre (4.24) et de l'inverse de la gravité effective $G(X)$

La distorsion WKB impose alors également que $\delta \ll \sigma$. Sachant que $\epsilon \leq 1$, la limite de validité la plus contraignante de ce calcul est donc $\delta \ll \epsilon\sigma$ dont nous verrons plus loin si elle est vérifiée pour les expériences. Enfin, en prenant en compte les ordres de grandeur précisés au paragraphe 4.4.1, les deux premiers termes de la décomposition en série entière de μ des coefficients de la relation (4.24) sont consignés dans le tableau (4.1).

A présent, on introduit dans l'équation (4.39), les expressions de l'ordre 0 des coefficients pour l'onde solitaire en remarquant qu'effectivement avec les expressions de a_{e0} , b_{e0} , c_{e0} , d_{e0} , e_{e0} et f_{e0} définis à l'ordre 1 dans la deuxième colonne du tableau (4.1), la relation (4.39) est réelle.

4.4.2 Détermination de $k(X)$ - Relation de dispersion

La condition à la surface libre (4.39) s'écrit alors plus simplement :

$$\omega - k(X)(u_e(X) - c) = \pm \sqrt{gk(X) \tanh(k(X)(\eta_e(X) + h_0))} \quad (4.44)$$

Il faut alors résoudre l'équation (4.44) transcendante pour k connaissant ω , u_e , η_e et h_0 . On retrouve le résultat classique de la réfraction sur fond et courant stationnaire lentement variable suivant X présenté par Mei [48]. Il introduit les termes de fréquence intrinsèque pour $\Omega = \omega + k(X)(c - u_e(X))$ et absolue pour ω .

On calcule ω en imposant que pour $X \rightarrow \infty$, c'est-à-dire loin du pic de l'onde solitaire (pour $u_e = 0$ et $\eta_e = 0$), la longueur d'onde dans le repère en translation et dans le repère fixe est la même. Puis on calcule les variations de k sous l'effet des variations de $u_e(X)$ et $\eta_e(X)$. A ce stade, l'onde courte n'est pas complètement déterminée, il faut encore étudier les variations de l'amplitude $A_0(X)$ ce que nous présentons au paragraphe 4.4.3. Mais auparavant, nous proposons de mener une analyse graphique

de la relation de dispersion (4.44) ce qui nous donnera des informations qualitatives sur l'interaction.

On envisage deux cas d'interaction suivant le sens de propagation des ondes.

1^{er} cas : interaction co-courant

– $c > 0$ et $u_e > 0$ l'onde solitaire se propage vers les x positifs dans le référentiel du laboratoire.

– On considère les k positifs, l'onde courte se propage vers les x positifs, donc dans le même sens que l'onde solitaire.

Soit k_∞ le nombre d'onde de l'onde courte loin de l'onde solitaire et :

$$\omega_{CO} = \sqrt{gk_\infty \tanh(k_\infty h_0)} - k_\infty c$$

$$\begin{aligned} (-) f(k) &= \sqrt{gk \tanh(kh_0)}, \quad (-.-) f(k) = \sqrt{gk \tanh(k(\eta_e(X) + h_0))}, \\ (- -) f(k) &= \omega_C + kc, \quad (...) f(k) = \omega_C + k(c - u_e) \end{aligned}$$

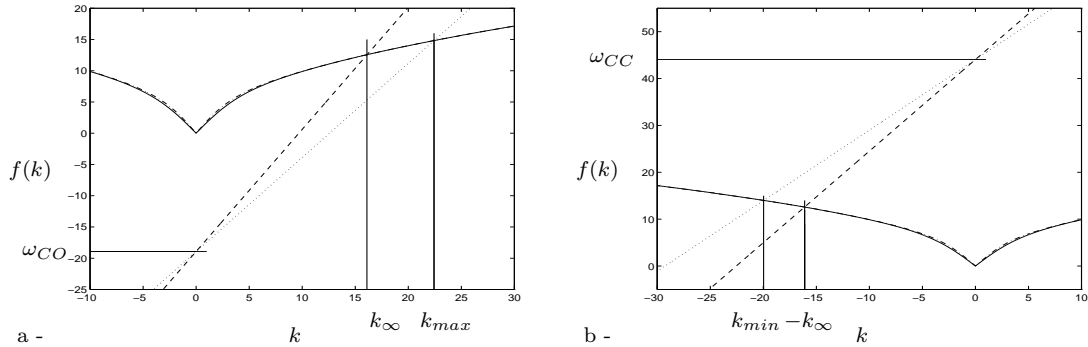


FIG. 4.2 – Etude graphique de la relation de dispersion en interaction co-courant (.a) et contrecourant (.b) (exemple pour $h_0 = 30$ cm, $\frac{A}{h_0} = 0.3$ et $k_\infty = 16.09$)

Pour ($X \rightarrow -\infty$), u_e est égal à 0, la pente de la droite est maxima et vaut $(+c)$. Puis en parcourant X , $u_e(X)$ augmente jusqu'à $X = 0$ où la pente est minima et vaut $(c - u_e(0))$.

On obtient le nombre d'onde modifié de la houle à l'intersection avec la courbe

$$f(k) = \sqrt{gk \tanh(k(\eta_e(X) + h_0))}.$$

Ainsi, pour X variant de $-\infty$ à 0, k augmente et pour $X = 0$, k est maximum noté k_{max} [cf. figure (4.2.a)].

2nd cas : interaction contre-courant

– $c > 0$ et $u_e \geq 0$ l'onde solitaire se propage vers les x positifs dans le repère fixe

– On considère les k négatifs, l'onde courte se propage vers les x négatifs.

On note alors $-k_\infty$ le nombre d'onde de l'onde courte loin de l'onde solitaire et :

$$\omega_{CC} = \sqrt{gk_\infty \tanh(k_\infty h_0)} + k_\infty c$$

Pour $X \rightarrow -\infty$, u_e est égal à 0, la pente de la droite est maxima et vaut $(+c)$. Puis en parcourant X , $u_e(X)$ augmente jusqu'à $X = 0$ où la pente est minima et vaut $(c - u_e(0))$. On obtient le nombre d'onde modifié de la houle à l'intersection avec la courbe

$$f(k) = \sqrt{gk \tanh(k(\eta_e(X) + h_0))}.$$

Ainsi, pour X variant de $-\infty$ à 0, k diminue et pour $X = 0$, k est minimum noté k_{min} [cf. figure (4.2.b)].

On peut d'ores et déjà remarquer que le maximum de variation de k en valeur absolue est plus faible en interaction contre-courant qu'en interaction co-courant. D'où la dénomination par la suite d'interaction faible pour contre-courant et forte pour co-courant.

4.4.3 Conservation de la “wave action”

En tenant compte des ordres de grandeur des coefficients donnés dans le tableau (4.1) pour le cas de l'onde solitaire dans la partie imaginaire de la relation à la surface libre à l'ordre 3 (4.41), on obtient en $z = \eta_e(X)$:

$$g [A_0^2 S_{2z} - A_0^2 k \eta_{eX}] = \frac{d}{dX} [A_0^2 U(\omega - kU)] \quad (4.45)$$

en notant : $U = u_e - c$. On en déduit l'équation décrivant les variations d'amplitude du potentiel à la surface libre, en combinant (4.45) et (4.40), soit :

$$\left[(A_0|_{z=\eta_e})^2 (C_g + U) \Omega \right]_X = 0 \quad (4.46)$$

avec : $C_g = \frac{d\Omega}{dk}$. Par ailleurs, en considérant les ordres de grandeur de l'onde solitaire et après avoir introduit dans (4.42) les développements en série entière de l'amplitude A et de la phase S , on obtient l'amplitude à l'ordre 0 de la dénivelée de surface libre soit a_0 en fonction de celle du potentiel A_0 :

$$a_0 = \frac{\Omega}{g} A_0 \quad (4.47)$$

avec : $\|\eta(X)\| = a_0 + \mu a_1 + \mathcal{O}(\mu^2)$ Ainsi, l'équation (4.46) conduit à :

$$\left[\frac{a_0^2 (C_g + U)}{\Omega} \right]_X = 0 \quad (4.48)$$

L'équation (4.48) traduit la conservation du débit d'énergie rapporté à la pulsation dans le référentiel de l'onde exprimé dans le repère du laboratoire. On retrouve donc la conservation de l'action d'onde (ou “wave action”) obtenu par Mei [48] dans le cas de la réfraction sur fond et courant stationnaire lentement variables.

4.5 Calculs pour différentes solutions d'ondes solitaires

Nous allons à présent étudier de plus près les variations du nombre d'onde k durant l'interaction et en tirer une interprétation quand à la phase de la houle. Les cas tests choisis correspondent en partie aux expériences réalisées que nous présentons au chapitre suivant. Les paramètres sont les suivants :

- la profondeur d'eau est fixée à 30 cm (profondeur utilisée pour les expériences),
- les ondes solitaires sont de type Serre, Korteweg & de Vries ou issues du calcul numérique, leur amplitude réduite varie de 0.05 à 1 par pas de 0.05, soit $\sigma \sim 0.15$,
- la fréquence de l'onde courte varie de 1 à 5 Hz. Dans les expériences, la fréquence de l'onde courte variait de 1.5 à 2.5 Hz pour des amplitudes de 3 mm à 12 mm, soit $\delta = ak$ compris entre 0.1 et 0.2. Ainsi, dans les expériences, on se trouve au-delà de la limite de validité du calcul soit $\delta \sim \sigma$ et $\delta \geq \epsilon\sigma$.

Les calculs sont effectués sur la boîte de calcul définie au paragraphe 4.4.

4.5.1 Variation de la phase de l'onde courte sur l'onde solitaire

$A_0(X, z)$ et $S(X)$ étant réels, la phase de l'onde courte s'écrit simplement :

$$\delta(X, t) = S(X) - \omega t$$

avec : $S(X) = \int_{-\infty}^X k(\xi) d\xi$. La variation de phase (ou déphasage) $\delta\phi$ de l'onde courte de part et d'autre de l'onde solitaire est donc l'intégrale de $(k(X) - k_\infty)$ entre $X = -\infty$ et $X = \infty$:

$$\delta\phi = \delta(+\infty) - \delta(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} [k(\xi) - k_\infty] d\xi \quad (4.49)$$

Sur les figures (4.3), on représente les variations de $(k(X) - k_\infty)$ le long d'une onde solitaire décrite par Serre pour les deux types d'interaction.

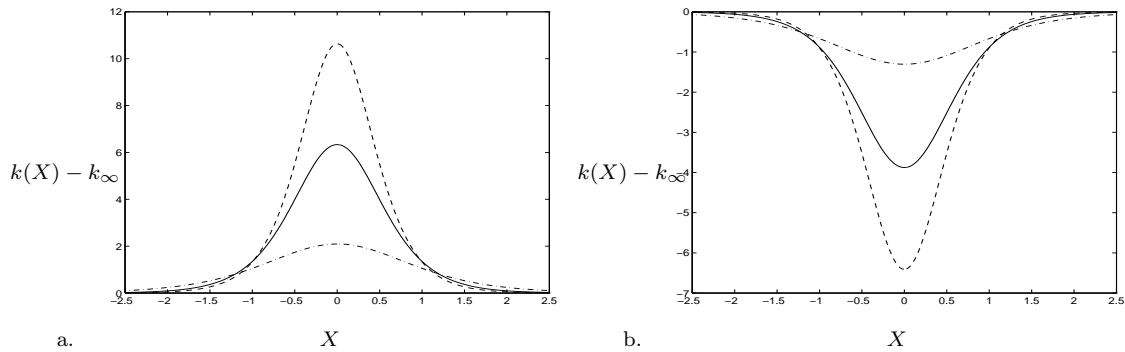


FIG. 4.3 – Variations de $(k(X) - k_\infty)$ (a) interaction forte (b) interaction faible - exemple pour $h_0 = 30$ cm, $k_\infty = 16.09$ et $(- \cdot -)$ $\frac{A}{h_0} = 0.1$, $(- \cdot -)$ $\frac{A}{h_0} = 0.3$, $(- -)$ $\frac{A}{h_0} = 0.5$

Les figures (4.3) mettent clairement en évidence l'augmentation ou la diminution du nombre d'onde suivant le type d'interaction, induisant respectivement un déphasage positif ou un déphasage négatif. Sur ces figures, on peut également observer une différence notable entre interaction forte et interaction faible puisque le maximum de modulation du nombre d'onde qui, en valeur absolue, croît avec l'amplitude de l'onde solitaire, est plus fort en interaction forte que faible.

Pour le cas de l'interaction avec une onde solitaire par opposition avec celle avec un courant, il est légitime de se poser la question de savoir si les modulations du nombre d'onde sont dictés davantage par les variations de profondeur ou par celles du champ de vitesse ou de façon équilibrée par les deux. Il s'avère que l'effet de la

variation du niveau de surface libre est négligeable par rapport à celui du champ de vitesse.

Sur les figures (4.4), on compare pour les 3 types de solutions “onde solitaire” à savoir Serre, Korteweg & de Vries et issue du calcul numérique de Byatt-Smith, les déphasages calculés en fonction de l’amplitude réduite de l’onde solitaire non déferlante ($\frac{A}{h_0}$) et pour une fréquence de houle donnée de 2 Hz en interaction forte et faible.

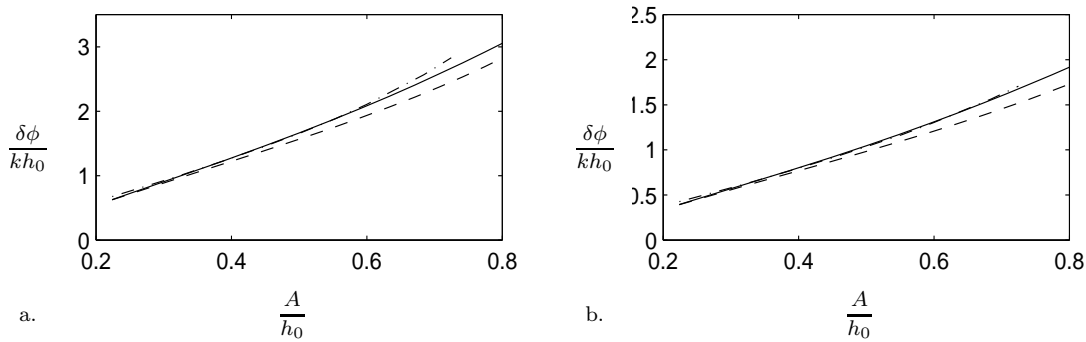


FIG. 4.4 – Déphasages en fonction de l’amplitude réduite de l’onde solitaire, celle-ci étant décrite par Serre (—), Korteweg & de Vries (- -) ou issue du calcul numérique de Byatt-Smith (-.-) en (a) interaction forte et (b) interaction faible - exemple pour $h_0 = 30$ cm et $k_\infty = 16.09$

Ces figures montrent que pour le calcul du déphasage de l’onde courte en interaction avec une onde solitaire externe, l’onde solitaire modélisée par une loi de Serre donne des résultats très proche de ceux obtenus avec l’onde solitaire issue du calcul exact numérique alors que la description de Korteweg & de Vries conduit systématiquement à une sous estimation du déphasage. Or, dans la relation de dispersion à la surface (4.44), seules interviennent la vitesse horizontale à la surface, la célérité et la dénivelée de surface libre de l’onde solitaire qui sont pour les deux premières mieux décrites par Serre et pour la dernière mieux décrite par Korteweg & de Vries d’après ce que nous avons pu établir en annexe B. En fait, la relation (4.44) n’est quasiment pas sensible aux variations de niveau de la surface libre comme nous l’avons vu précédemment. Ceci explique pourquoi malgré une description moins bonne de la surface libre par une loi de Serre, celle-ci donne tout de même les déphasages les plus proches de ceux obtenus par un calcul numérique exact.

Sur la figure (4.5), on compare pour la solution “onde solitaire” de Serre les déphasages calculés en fonction de l’amplitude réduite de l’onde solitaire pour une fréquence de houle variant de 1 Hz à 5 Hz en interaction forte et faible.

Ce graphe met en évidence l’existence d’une courbe asymptotique hautes fréquences dont l’existence avait déjà été montré par Clamond [15]. En effet, il apparaît que lorsque la fréquence de l’onde courte augmente, le déphasage de l’onde courte en interaction forte et faible avec une onde solitaire d’amplitude réduite donnée tend vers des valeurs limites qui, en valeur absolue, sont très proches en interaction forte et faible. Sachant que la célérité de l’onde courte tend vers 0 lorsque sa fréquence augmente, le temps d’interaction ne dépend alors plus que de la célérité de l’onde solitaire qui est très grande. Ainsi, on se rapproche du cas d’une interaction quasi-

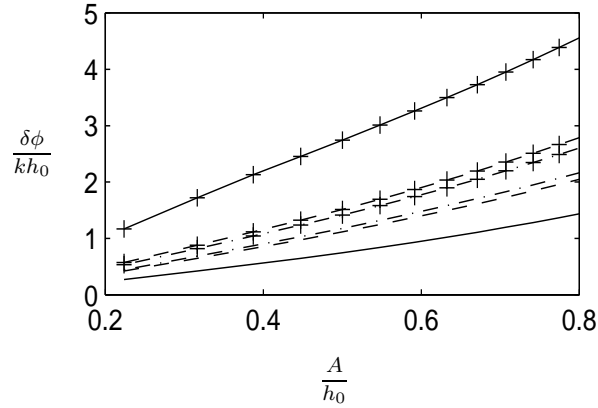


FIG. 4.5 – Déphasages en fonction de l'amplitude réduite de l'onde solitaire, celle-ci étant décrite par Serre pour des fréquences de l'onde courte de 1 Hz (—), 3 Hz (- -) et 5 Hz (-.-) : (+) interaction forte et (o) interaction faible - exemple pour $h_0 = 30$ cm

instantanée où seul le déplacement des particules dû à l'onde solitaire intervient. Ce point sera à nouveau discuté lors de la comparaison avec les données expérimentales.

4.5.2 Variation de l'amplitude de l'onde courte sur l'onde solitaire

Sur les figures (4.6), on représente les modulations d'amplitude de la perturbation lors d'une interaction forte et lors d'une interaction faible avec une onde solitaire pour deux amplitudes réduites.

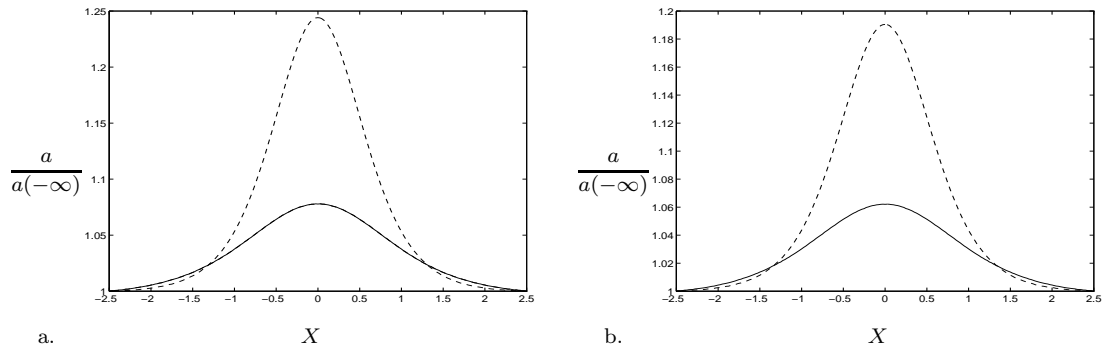


FIG. 4.6 – Modulations d'amplitude de la perturbation à la surface libre lors d'une interaction forte (a) et faible (b) avec une onde solitaire décrite par Serre d'amplitudes réduites $\frac{A}{h_0} = 0.1$ (—) et $\frac{A}{h_0} = 0.3$ (- -) - exemple pour $h_0 = 30$ cm et $k_\infty = 16.09$

Il est clair que si ces modulations d'amplitude ne sont pas petites dans l'absolu (de 10 à 25 %), elles sont petites si on les compare à l'élévation de la surface libre au passage de l'onde solitaire. En effet, pour une houle d'amplitude 5mm hors interaction, l'amplitude de la houle au pic de l'onde solitaire d'amplitude réduite 0.3 sera de 6.25mm en interaction forte, ce qui est négligeable comparé à une élévation de

surface de 90 mm environ.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, la validité de la relation de dispersion (4.1) et de la conservation de l'action d'onde (4.2) a été établie pour une onde courte barotrope en interaction avec une onde solitaire de surface. De façon plus général, le calcul développé ici s'applique pour toute solution exacte des équations d'Euler dont la vitesse verticale est petite comparée à la vitesse horizontale (i.e. pas nécessairement un courant comme pour Mei [48]). Toutefois, la complexité algébrique peut limiter rapidement les calculs. Le calcul permet également de s'affranchir de l'hypothèse faiblement non-linéaire (petites amplitudes i.e. $\epsilon^2 = \sigma$) de Clamond quand la solution exacte est une onde solitaire. Enfin, l'originalité de ce calcul est d'être présenté avec une formulation en potentiel des vitesses, calcul qui n'avait jamais été mené jusqu'à l'obtention de la conservation de l'action d'onde à ma connaissance. On montre aussi clairement que la conservation de l'action d'onde n'est possible que dans le cadre de l'optique physique. En effet, la phase doit être déterminée à l'ordre 2 (S_{2z}) au voisinage de la surface libre.

Chapitre 5

Etude expérimentale de l'interaction entre une houle monochromatique courte de surface et une onde solitaire de surface

Cette étude expérimentale fait suite aux expériences menées par Clamond [15] lors de sa thèse. En effet, Clamond propose dans sa thèse un modèle théorique pour étudier l'interaction entre une onde longue et une onde courte dont les grandes lignes ont été rappelées au chapitre 4. Ce modèle a alors été validé en le comparant à quelques essais d'interaction entre une onde solitaire et une houle monochromatique de surface. Cependant, cette étude expérimentale nécessitait d'être complétée. En effet, lors de ces essais, seules les interactions d'ondes se propageant en sens contraire (interactions faibles) avaient été étudiées. De plus, peu d'essais avaient été effectués, ne permettant pas de conclure quant à l'importance de certains paramètres tels que la fréquence ou l'amplitude de l'onde courte. L'intérêt de cette étude expérimentale est donc de combler ces lacunes. Ceci a, en particulier, impliqué d'adapter le dispositif expérimental pour réaliser des essais d'interaction d'onde se propageant dans le même sens (interactions fortes). Par contre, la méthodologie mise au point par Clamond pour le dépouillement des données a été appliquée en l'état car étant très performante.

5.1 Dispositif expérimental

5.1.1 Description de l'équipement

Les expériences ont été réalisées dans un canal vitré de 36 m de long par 0.55 m de large et 1.2 m de haut, schématisé sur la figure (5.1). Il est équipé de deux dispositifs de génération de houle.

D'une part, un batteur piston, déplaçant horizontalement toute la colonne d'eau, est fixé à une extrémité du canal. Le piston est mû par un vérin hydraulique asservi de

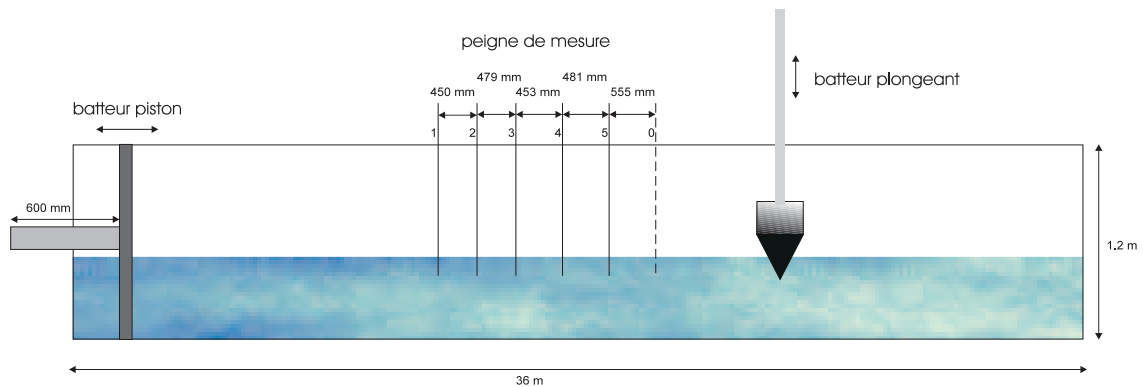


FIG. 5.1 – Vue d'ensemble de l'installation expérimentale

600 mm de long. La boucle d'asservissement (servovalve, codeur optique, capteur de pression), mise au point au sein du L.E.G.I. par M. Marcelja, est pilotée depuis un micro-ordinateur par l'intermédiaire d'une carte électronique. L'interface avec l'utilisateur est un logiciel (gnhoule.pas) développé en Turbo Pascal [78], dédié à l'origine à la génération et à l'absorption d'ondes solitaires, mais qui permet aussi de générer de la houle sinusoïdale. Des modifications de ce logiciel concernant la génération de l'onde solitaire seront présentées au paragraphe 5.1.4.

D'autre part, un batteur plongeant permet de générer de la houle sinusoïdale par les oscillations verticales d'un volume dont la forme sera discutée au paragraphe 5.1.3. On peut faire varier la fréquence du batteur à l'aide d'un potentiomètre entre 1 et 10 Hz. L'amplitude de la houle est ajustable par la profondeur d'immersion du coin ainsi que l'excentricité du débattement. Ce batteur peut être déplacé le long du canal.

On cherche dans les expériences réalisées à caractériser l'interaction entre une onde solitaire et de la houle courte. Or, in situ, la surface libre est la partie de l'écoulement la plus facilement accessible par photos aériennes ou clichés Radar. Dans le but de simplifier la transposition des résultats obtenus, la mesure au laboratoire consiste donc en un relevé de la dénivelée de la surface libre par rapport à son niveau de repos. Elle est réalisée à l'aide de 6 sondes résistives, numérotées comme sur la figure (5.1), formant le "peigne de mesure" que l'on peut déplacer le long du canal. La sonde représentée en pointillé a parfois été séparée du peigne. Les positions relatives des batteurs et des sondes ont pu changer au cours des différents essais afin de répondre au mieux aux différentes contraintes dont l'exposé suit.

5.1.2 Matériel d'acquisition

La mesure du niveau de la surface libre est réalisée à l'aide de sondes résistives. Les sondes résistives dont nous disposons ont été réalisées par la société Deltalab. Elles sont constituées de deux tiges inox plongées dans le fluide [cf. fig.(5.2)]. L'eau ferme le circuit. On délivre une tension constante au circuit. La résistance du circuit étant linéairement proportionnelle à la longueur de fil émergé, l'intensité entre les deux tiges aussi (loi d'Ohm).

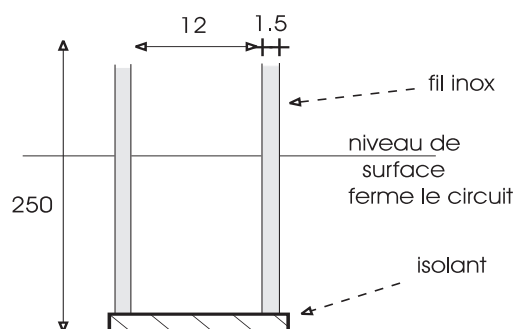


FIG. 5.2 – Schéma d'une sonde résistive (unités en mm)

L'intensité est convertie en un signal de tension qui peut être amplifié à l'aide d'un gain réglable (potentiomètre). Il est ensuite digitalisé sur 2048 bits par une carte électronique pour être transmis à l'ordinateur.

Un simple étalonnage permet donc de convertir le niveau d'immersion en tension digitalisée. La mesure de tension fluctue au plus d'une dizaine de digits sur 2000, soit une précision sur l'étalonnage de 0.5%. Cependant, cet appareil présente une dérive relativement importante. En effet, la résistivité de l'eau est très sensible aux fluctuations de température. On observe facilement une dérive de 2% sur 4 heures. Un étalonnage régulier (toutes les heures) est donc nécessaire. Ce point étant assez contraignant, des sondes capacitives qui ne présentent pas cet inconvénient ont été testées. Cependant leurs performances semblent moindre sur la précision de la mesure elle-même.

En effet, la précision de la mesure est directement liée au comportement du ménisque sur les sondes. Pour les sondes résistives, le ménisque ne change pas de sens dans les mouvements oscillants de la surface libre, seule son amplitude varie. Il a le sens représenté sur la figure (5.3-a). Par contre, pour les sondes capacitives, le ménisque bascule comme le montre la figure (5.3) entre la montée et la descente.

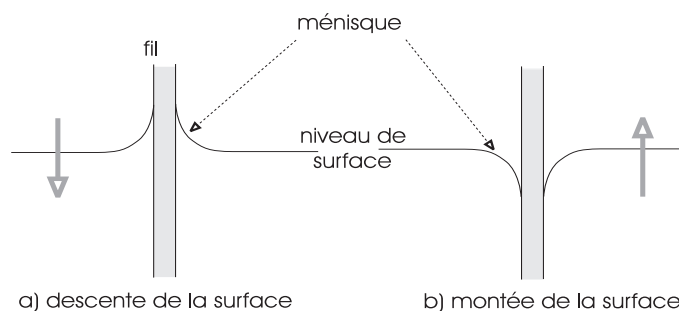


FIG. 5.3 – Ménisque sur une sonde capacitive

Ceci entraîne un biais sur la mesure des sondes capacitives plus important que sur celles des sondes résistives. Sur la figure (5.4), on représente la consigne sinusoïdale parfaite imposée au batteur et les enregistrements expérimentaux simultanés que l'on a pu obtenir pour chacun des types de sondes, celles-ci étant fixées à la place du volume sur le batteur plongeant. La figure (5.4) est représentative des essais réalisés pour les fréquences 2, 3, 4 et 5 Hz.

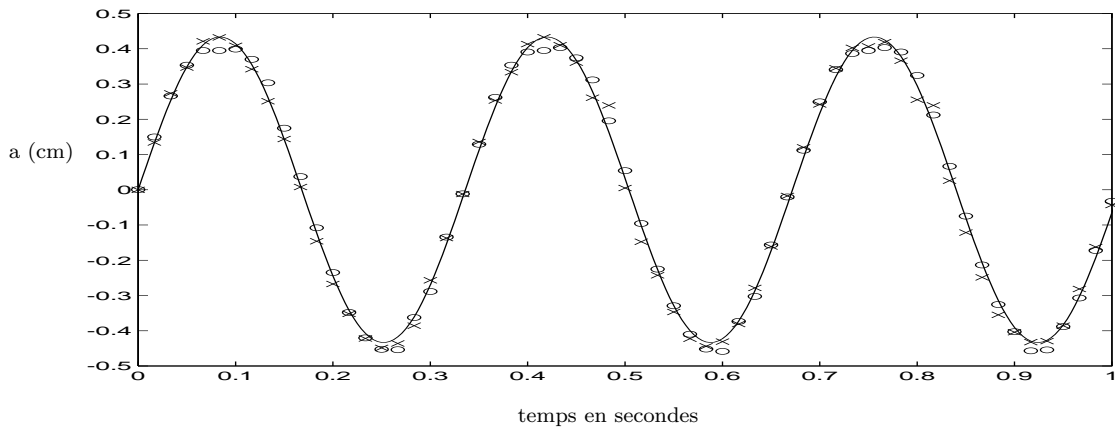


FIG. 5.4 – Comparaison du suivi d'une consigne sinusoïdale (—) à la fréquence $f = 3$ Hz par les sondes résistive (\times) et capacitive (\circ)

Il est particulièrement intéressant de constater la différence de comportement au niveau des creux et des crêtes, qui sont respectivement plus pincés, plus aplaties sur la mesure à l'aide de la sonde capacitive que sur la mesure avec la sonde résistive. On peut par ailleurs estimer sur ces tests que le biais systématique sur une mesure avec une sonde résistive est inférieur à 0.5 mm.

Nous estimons donc l'incertitude maxima sur la mesure de dénivelée à 0.5 mm jusqu'à 5 cm et à 1 mm au-delà de 5 cm (précision de l'étalonnage).

5.1.3 Génération de la houle courte

La profondeur d'eau pour les expériences d'interaction est fixée à 0.3 m, compromis entre les limites de génération de houle de petite longueur d'onde et d'onde solitaire de grande amplitude (limitée par la longueur du vérin). Les expériences ont porté sur des interactions dites fortes (la houle et l'onde solitaire se propagent dans le même sens) et dites faibles (en sens inverse). Pour les premières, la houle courte est générée avec le batteur piston, pour les secondes, avec le batteur plongeant.

La houle courte générée dans l'interaction est en fait un train de houle dont un exemple typique d'enregistrement temporel est représenté sur la figure (5.5).

En général, on distingue trois zones dont seulement deux sont visibles sur la figure (5.5.a). Tout d'abord, une première zone transitoire, le front du train d'onde est constitué d'oscillations à la fréquence du batteur dont l'amplitude augmente progressivement, en s'inscrivant dans une enveloppe qui peut être une onde longue dispersive ou une onde solitaire. Ce front a donc une célérité de groupe plus importante que celle de la houle sinusoïdale à la fréquence du batteur. Ensuite, la partie centrale du train d'onde est de la houle sinusoïdale établie quasi-monochromatique. L'amplitude du 1^{er} harmonique est inférieure à 10 % du fondamental. On a pu vérifier que la célérité de groupe de cette zone correspond bien à celle prévue par la théorie linéaire pour la houle sinusoïdale. Enfin, la queue du train d'onde, qui n'est observée que si l'on arrête le batteur avant la fin de l'acquisition [non visible sur la figure (5.5.a)], est une zone transitoire vers le repos où la houle perd de l'amplitude de la même façon que dans la zone de tête.

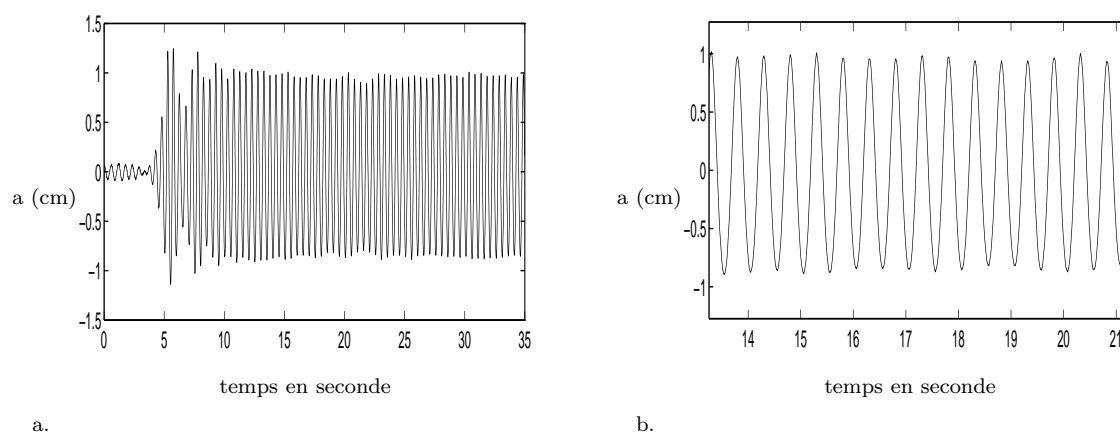


FIG. 5.5 – Enregistrement (20 s après la mise en route du batteur) à 10 m du batteur plongeant d'un train de houle courte à la fréquence $f = 2$ Hz ($ak \sim 0.14$) (a) enregistrement complet (b) zoom sur la partie établie du train d'onde

Compte-tenu de l'existence de la zone transitoire de tête, inexploitable pour les essais d'interaction, il faut déterminer pour chaque fréquence de houle expérimentée :

- le délai temporel nécessaire entre le début de génération de la houle courte et celui de l'onde solitaire pour obtenir au niveau du peigne de sondes une houle établie au moment de l'interaction
- la distance minima entre le peigne de sondes et l'extrémité du canal aval (par rapport au sens de propagation de la houle) pour que l'onde la plus rapide du front n'ait pas le temps de revenir dans la zone de mesure avant la fin de l'interaction

Un récapitulatif des configurations expérimentales est donné dans le tableau (5.1).

Type d'interaction	Fréquence (Hz)	Amplitude (mm)	Loi de génération de l'onde solitaire
Faible	1.5	8	KdV
	1.5	4.5	Serre
	2	7	KdV
	2	7	Serre
	2.5	8	KdV
	2.5	6	Serre
Forte	1.5	9	KdV
	1.5	9.5 - 12	Serre
	2	6.8 - 8.7	KdV
	2	6 - 9	Serre
	2.5	3.6	KdV
	2.5	3.2	Serre

TAB. 5.1 – Récapitulatif des configurations expérimentales testées

Toutes ces données sont disponibles sur CD-ROM.

Le batteur plongeant

On a utilisé deux types de volume lors de nos expériences : un coin asymétrique et un coin symétrique. Ils sont représentés sur la figure (5.6).

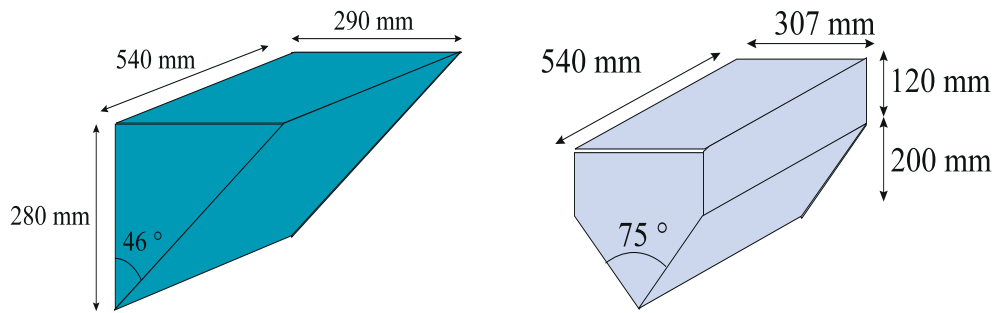


FIG. 5.6 – Géométrie des coins utilisés sur le batteur plongeant

Le coin asymétrique, permettant d'utiliser la totalité de la longueur du canal, est utilisé pour la génération de houle "basses" fréquences (inférieures à 2 Hz soit de longueurs d'onde supérieures à 0.45 m environ). En réalité, on est rapidement limité dans les "basses fréquences" par la longueur du canal (réflexion du front). Dans une profondeur d'eau $h = 0.3$ m, la longueur d'onde de la houle de fréquence 1.5 Hz (notre limite basse fréquence) est déjà 0.7 m, et à 1 Hz, elle est de 1.4 m. Pour des houles de fréquences plus élevées, la dissymétrie du coin entraîne un mouvement de balancier affectant la régularité de la houle. C'est pourquoi, pour des fréquences au-delà de 2 Hz, on utilise le coin symétrique. Ceci nécessite de placer une plage amortisseuse au bout du canal pour absorber la houle émise vers l'aval. La longueur de canal utile est donc réduite à 27 m, distance à laquelle on place le batteur plongeant. Ce point n'est pas en réalité une limite de l'expérience car la célérité de la houle de fréquence supérieure à 2 Hz étant inférieure à 50 cm/s, il est tout-à-fait possible d'obtenir un train de houle établie à une distance réduite du batteur. Cependant, nous avons été limité dans les hautes fréquences par deux phénomènes de nature assez différente.

Limitations hautes fréquences : instabilités et amortissement

Instabilités transverses. Tout d'abord, à partir de 3 Hz, on observe sur la surface du batteur plongeant des ondes transversales (clapotis) dont la longueur d'onde diminue lorsque que la fréquence du batteur augmente jusqu'à 4.4 Hz. Dans le tableau (5.2), on donne les longueurs d'onde et les fréquences correspondantes (calculées à partir de la relation d'Airy) de ces ondes transverses pour différentes fréquences du batteur plongeant. Elles sont estimées par comptage du nombre entier de longueurs d'onde sur la largeur du batteur à partir d'un film vidéo de la montée en fréquence du batteur.

L'estimation ainsi obtenue est entachée d'une erreur assez importante puisque le nombre de longueur d'onde est donné à plus ou moins une demi-longueur d'onde près, ce qui donne un intervalle de variation pour la longueur d'onde ainsi que la

fréquence de l'onde transverse. Ces ondes transverses restent confinées près de la paroi du batteur tant que sa fréquence reste inférieure à une valeur critique que l'on situe expérimentalement autour de 4.5 Hz pour le batteur plongeant. Au-delà, les oscillations transverses s'amplifient brutalement et se développent dans tout le canal. La longueur d'onde de cette instabilité transverse passe alors soudainement de quelques centimètres à une dizaine de centimètres.

Fréquence du batteur plongeant f_b (Hz)	Longueur d'onde de l'onde transverse λ comprise entre (cm)	Fréquence l'onde transverse f_i comprise entre (Hz)
3.25	15.5 - 21.5	2.7 - 3.1
3.45	12 - 15.5	3.1 - 3.6
3.75	9.8 - 12	3.6 - 4
4	8.3 - 9.8	4 - 4.3
≥ 4.4	36	2.2 (instable)

TAB. 5.2 – Longueurs d'onde et fréquences des ondes transverses observées pour des houles hautes fréquences ($\geq 3\text{Hz}$)

Nous suggérons que l'instabilité que nous observons est celle découverte par Faraday pour des oscillations verticales d'une interface [18] dans un bassin carré. En 1954, Benjamin & Ursell [9] apporte une contribution théorique complète à la description de ces instabilités. Cette théorie conduit à l'équation de Mathieu [19] dont l'étude montre des zones de stabilité et d'instabilité. En appliquant ces résultats au cas du canal (bassin de longueur infinie), on retrouve théoriquement ce que l'on observe expérimentalement à savoir que le premier mode instable qui a la fréquence moitié de celle du batteur n'apparaît qu'au-delà de la fréquence 4.4 Hz. Jusque là, la fréquence de l'onde transverse stable est la même que celle de l'onde longitudinale. On interprète l'étude de l'équation de Mathieu de la façon suivante : pour des fréquences comprises entre 3 et 4.5 Hz, la longueur d'onde des modes instables est trop importante pour la largeur du canal qui les confine donc et les empêche de se développer. Par contre, au-delà de 4.5 Hz, le mode instable peut s'établir dans la largeur du canal puisqu'il a une longueur d'onde inférieure à la largeur du canal. Sur le batteur piston, des instabilités transverses apparaissent également mais pour des fréquences de houle beaucoup plus faibles, dès 3 Hz, avec des longueurs d'onde beaucoup plus petites (comprises entre 3 et 7 cm) et la fréquence de développement de l'instabilité est plus basse, entre 3.3 Hz et 4 Hz. Ce type d'instabilités tridimensionnelles nous semble s'apparenter à celles de type fer à cheval observées par Melville [49] pour des cambrures de l'onde $ak \geq 0.31$ (a étant l'amplitude de l'onde monochromatique et k son nombre d'onde). Du fait de la moindre maniabilité du batteur piston, en particulier sur l'amplitude minima, il semble que la cambrure limite de Melville est vite atteinte pour le batteur piston. Les limites de 4.5 Hz pour le batteur plongeant et de 3.5 Hz pour le batteur piston, nous semblent donc difficiles à franchir.

Contrairement à Melville, les trains d'onde utilisés pour les essais d'interaction sont assez courts (20 s environ), ce qui ne permet pas d'observer le développement complet de l'instabilité bidimensionnelle de Benjamin-Feir [8], et ce d'autant plus qu'au-delà de 3 Hz, la houle s'amortit rapidement. Cependant à 3 Hz exactement ($k = 36.2$; $ak = 0.29$), les trains d'onde à environ 4 mètres du batteur ($xk = 145$) semblent

modulés de façon périodique, comme sur l'enregistrement présenté par Melville [50] caractéristique du début de développement de l'instabilité résonnante de Benjamin-Feir [8] et mesuré à $xk = 155$.

Amortissement. Néanmoins, pour nos expériences, la limite haute fréquence sur le batteur plongeant a été encore plus basse et ce, pour une autre raison. En effet, à partir de 3 Hz, on observe un amortissement important du train de houle progressive. A titre d'exemple, pour une fréquence de batteur de 3.5 Hz, la partie établie du train de houle ne se propage pas au-delà de 2.5 mètres du batteur, ce qui ne s'explique en aucun cas par la célérité de groupe théorique d'une houle progressive à cette fréquence qui vaut encore 22 cm/s (la longueur d'onde de cette onde est de 12 cm). De plus, en comparant les spectres de la dénivelée de surface mesurée à 1 mètre et 4 mètres du batteur représentés sur la figure (5.7), on note une nette diminution de l'énergie à la fréquence du batteur sans report d'énergie ni vers des fréquences harmoniques de celle du batteur ni vers des fréquences plus basses. Il ne s'agit pas d'une dissipation de l'onde par la viscosité puisque à titre d'exemple, d'après Lighthill [45], il faut 250 périodes pour diminuer d'un facteur e l'énergie d'une onde de longueur d'onde 10 cm.

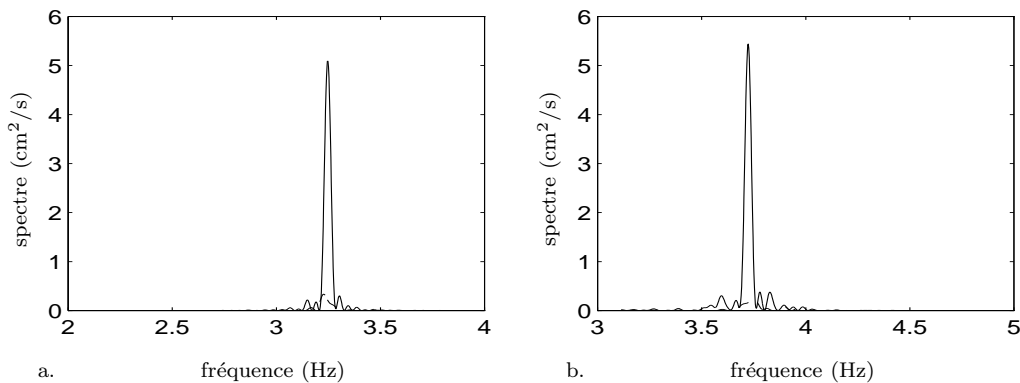


FIG. 5.7 – Spectre de la dénivelée de surface mesurée à 1 m (—) et à 4 m (- -) du batteur pour une fréquence de (a) $f = 3.25$ Hz et (b) $f = 3.7$ Hz

Pour compléter les observations de la houle que l'on a pu faire pour la plage de fréquences comprises entre 3 et 4.5 Hz, il est à noter l'apparition de rides capillaires tridimensionnelles (de longueur d'onde inférieure au cm, soit des fréquences supérieures à 12 Hz), disposées en chevrons et formant un genre de tissu "écossais" sur la houle. Ces rides à l'inverse de la houle établie ne s'amortissent pas vers l'aval. L'énergie contenue dans les rides n'apparaît pas sur les spectres, celles-ci ayant une amplitude trop faible pour être détectées par les sondes de mesure. De plus, l'amortissement vers l'aval de la houle nous a paru corrélé à la contamination de la surface libre puisque lorsque l'eau du canal vient d'être renouvelée, cet amortissement est moins important. Cependant, aucun dispositif de protection de la surface libre du canal n'a pu être mis en place. Ces rides pourrait être lié à des gradients de tension superficielle le long de la surface. Ces gradients peuvent avoir des causes très variées sachant que les expériences ne sont pas réalisées dans un milieu complètement vierge. La surface libre est contaminée de multiples manières, et en particulier par des poussières.

D'après Lucassen-Reynders & Lucassen [47], une cause de l'atténuation des ondes de gravité est liée à l'interaction avec des rides capillaires sur une interface dont la rhéologie présente une élasticité non infinie.

Compte-tenu de ces limitations, les essais d'interactions ont été réalisés pour 3 fréquences de houle courte, soit à 1.5 Hz, 2 Hz et 2.5 Hz. Une série a été réalisée à 3 Hz en interaction faible, mais les incertitudes liées au traitement sur un train de houle modulé dont nous parlerons au paragraphe 5.2.3, sont déjà beaucoup plus importantes.

5.1.4 Génération de l'onde solitaire

L'onde solitaire est générée à l'aide du batteur piston équipant le grand canal à houle. Ce type de batteur est particulièrement adapté à la génération d'onde solitaire ou soliton puisqu'il permet de déplacer toute la colonne d'eau. Il reste cependant à lui imposer une loi de mouvement adéquate.

Dans le logiciel Gnhoule original, la loi de génération proposée pour l'onde solitaire est issue d'un calcul analytique dans l'approximation de l'eau peu profonde développée au 1^{er} ordre [75] (cf. annexe B). Les solitons générés à l'aide de cette loi de mouvement présentent tous la même caractéristique : ils sont suivis d'une onde longue dispersive caractéristique comme le montre la figure (5.8). L'amplitude de cette "queue" dispersive augmente avec l'amplitude du soliton tout en n'excédant pas 10% de cette dernière.

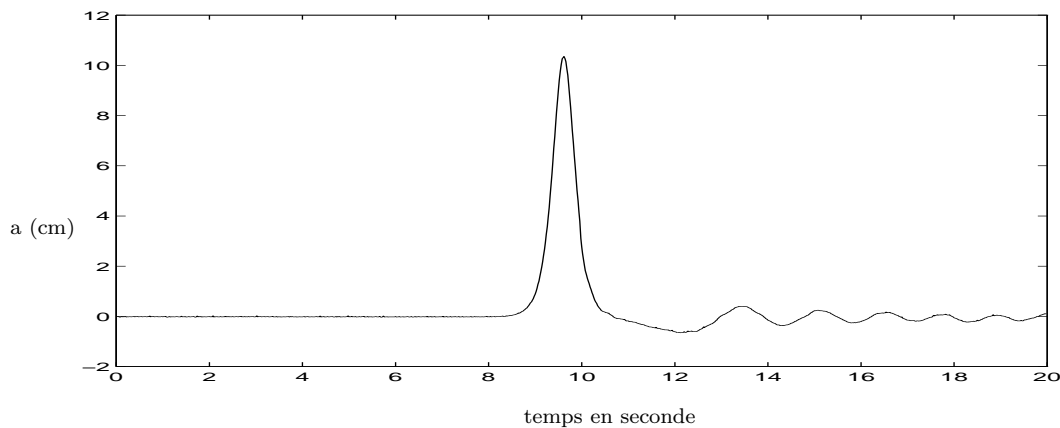


FIG. 5.8 – Onde solitaire d'amplitude réduite $\frac{A}{h} = 0.3$ ($h = 0.3$ m) générée par une loi de mouvement issue de calcul dans l'approximation de l'eau peu profonde développé au 1^{er} ordre - enregistrement de la dénivelée de la surface libre à 21 m environ du batteur

L'onde solitaire et l'onde dispersive qui la suit étant générées simultanément, on peut facilement, à partir de la figure (5.8), déterminer les célérités de chacune, soit 2.2 m/s pour l'onde solitaire et 1.7 m/s pour le creux de l'onde dispersive. La différence de célérité n'étant pas très importante (comparée à la célérité de l'onde solitaire), il faut une certaine distance pour que les deux ondes se séparent. Afin d'estimer cette distance, on réalise des enregistrements de solitons le long du canal tous les 5 mètres qui montrent clairement sur la figure (5.9) que dans les 15 premiers mètres, les deux ondes ne sont pas séparées.

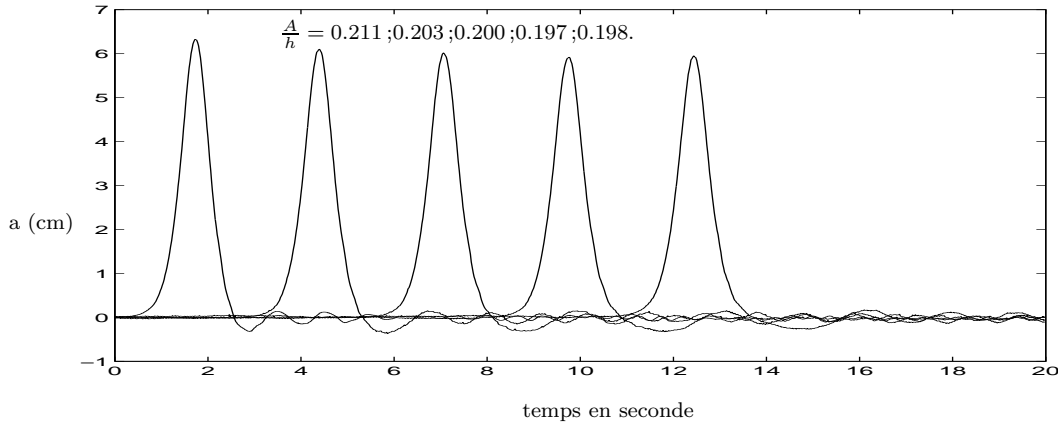


FIG. 5.9 – Evolution d'un soliton d'amplitude réduite $\frac{A}{h} = 0.2$ ($h = 0.3$ m) généré par une loi de mouvement KdV développé au 1^{er} ordre - enregistrement de la dénivelée de la surface libre à 5 m, 10 m, 15 m, 20 m et 25 m du batteur

En effet, l'amplitude du soliton diminue significativement entre 0 m et 15 m alors qu'entre 15 m et 25 m, elle est presque constante. Ce point impose de placer le peigne de mesure au minimum à 15 m du batteur piston pour que le profil de l'onde solitaire soit établi lors de l'interaction. Par ailleurs, connaissant la célérité de l'onde solitaire, on peut estimer la distance minima entre le peigne de mesure et le batteur plongeant cette fois, telle que l'onde solitaire réfléchi sur le batteur ne revienne pas sur le peigne de mesure avant la fin de l'interaction. On estime cette distance à 5 m. Dans le but de diminuer l'amplitude de l'onde dispersive voire de s'en libérer, on a cherché à tester d'autres lois de mouvement pour le batteur. Le logiciel a donc été modifié de façon à comparer les 3 autres lois de génération suivantes.

Tout d'abord, il semblait intéressant de tester un développement à un ordre supérieur, le 2nd ordre, de la solution onde solitaire dans l'approximation de l'eau peu profonde [75] (cf. annexe B).

Ensuite, on a cherché le déplacement à imposer au batteur correspondant à une onde solitaire solution de Serre. En effet, dans ce cas, on connaît une solution analytique exacte pour la vitesse moyenne en fonction de l'abscisse, il reste alors à résoudre le problème de condition limite sur le batteur. Pour cela, il faut résoudre l'équation différentielle non linéaire suivante traduisant la condition d'imperméabilité sur la surface du batteur :

$$\frac{dX}{dt} = \bar{u}(X, t) \quad (5.1)$$

où X est la variable lagrangienne d'espace qui repère la position de la particule et t le temps. L'équation différentielle exprime que la vitesse de la particule attachée au batteur $\frac{dX}{dt}$ est égale à la vitesse du batteur \bar{u} . On peut noter que dans le cas d'un batteur piston, la vitesse sur la paroi du batteur ne dépend pas de la coordonnée verticale et est donc moyennée sur la verticale.

Les deux dernières lois testées sont deux résolutions différentes de cette équation où \bar{u} est la vitesse moyenne de Serre. La première consiste à linéariser l'équation en faisant l'hypothèse de petits déplacements c'est-à-dire $X \ll 1$. Cette méthode conduit

à une solution analytique (cf. annexe B). La seconde consiste en une intégration numérique de l'équation donnant la position du batteur en fonction du temps, sur laquelle on ajuste au sens des moindres carrés une courbe de forme tangente hyperbolique (cette forme de courbe a été choisie en s'inspirant de la 1^{ère} loi envisagée). On obtient ainsi une série de coefficients numériques ajustés (cf. annexe B).

Notons tout de suite que ces 3 lois imposent des déplacements du batteur plus importants que la première. La longueur du vérin limite donc l'amplitude réduite des solitons que l'on peut générer à 0.35 pour une profondeur d'eau $h = 0.3$ m pour les lois de mouvement calculées à partir de la solution de Serre, alors que pour celles obtenues dans l'approximation de l'eau peu profonde au 1^{er} ordre, on pouvait générer des solitons d'amplitude réduite allant jusqu'à 0.5.

La figure (5.10) représente un exemple typique des ondes solitaires générées à partir de ces 4 lois. Tout d'abord, sur l'amplitude des solitons, il est à noter que la théorie de l'eau peu profonde développée au 2nd ordre conduit toujours, pour une profondeur d'eau $h = 0.3$ m, à des solitons d'amplitude plus grande que toutes les autres lois testées. Cet écart augmente avec l'amplitude du soliton. Ensuite, pour les 2 lois de l'eau peu profonde, l'onde solitaire est immédiatement suivie d'un creux d'amplitude presque identique et assez important. Par contre, pour les 2 lois issues de la solution onde solitaire de Serre, le soliton est suivi d'une bosse dont l'amplitude augmente avec l'amplitude du soliton, mais qui est toujours beaucoup plus faible que celle du creux observé pour les lois issues de l'approximation de l'eau peu profonde. Les oscillations qui suivent sont aussi beaucoup plus faibles.

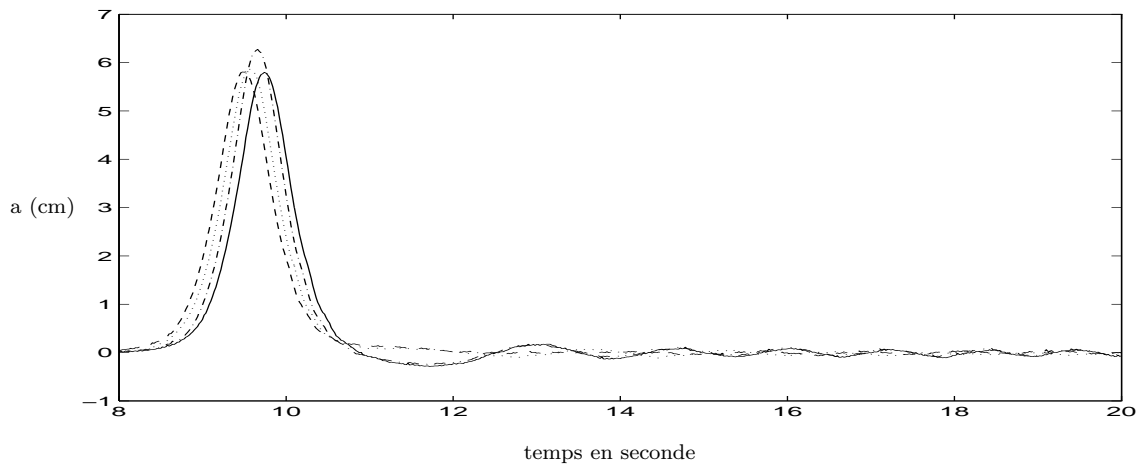


FIG. 5.10 – Exemple de solitons générés par les 4 lois de mouvement testées pour une amplitude réduite $\frac{A}{h} = 0.2$ et une profondeur d'eau $h = 0.3$ m [même légende que figure (C.2)] - enregistrement de la dénivelée de la surface libre a à 20 m environ du batteur piston

S'il est clair que le creux est une onde dispersive, il est légitime de se poser la question de savoir si la bosse ne serait pas un deuxième soliton. Pour cela, il faudrait pouvoir déterminer la célérité de cette bosse, ce qui compte-tenu de sa petite amplitude et de son étalement n'est pas suffisamment probant à notre avis, aux vues des incertitudes que l'on a sur sa détermination. Enfin, les deux lois issues de la solution onde solitaire de Serre étant très similaires, elles aboutissent à des solitons peu différents. Une étude plus détaillée de ces 4 lois figure en annexe C, ainsi que l'ensemble des résultats

expérimentaux pour 2 profondeurs d'eau $h = 0.3$ m et $h = 0.2$ m.

Dans la suite, pour les essais d'interaction, on utilise 2 lois de génération : la loi dans l'approximation de l'eau peu profonde développée au 1^{er} ordre et celle de l'ajustement sur l'intégration numérique de Serre (pour des raisons de simplicité de modification du logiciel). On espère ainsi pouvoir tester l'influence de l'onde dispersive.

5.2 Dépouillement des expériences et incertitudes

5.2.1 Traitement des enregistrements expérimentaux

Les enregistrements expérimentaux d'interaction sont des enregistrements du mouvement de la surface libre en fonction du temps (sur 15 à 25 secondes) en un point de l'axe longitudinal du canal, ceci afin de s'affranchir des perturbations tridimensionnelles que peuvent apporter le frottement sur les parois latérales du canal. Dans toute la suite, on raisonne donc dans le domaine temporel, mais il est toujours possible de se ramener au domaine spatial par l'intermédiaire des célérités de la houle et du soliton, ces dernières pouvant être déterminées expérimentalement ou théoriquement. Un exemple typique d'enregistrement d'interaction est représenté sur la figure (5.11).

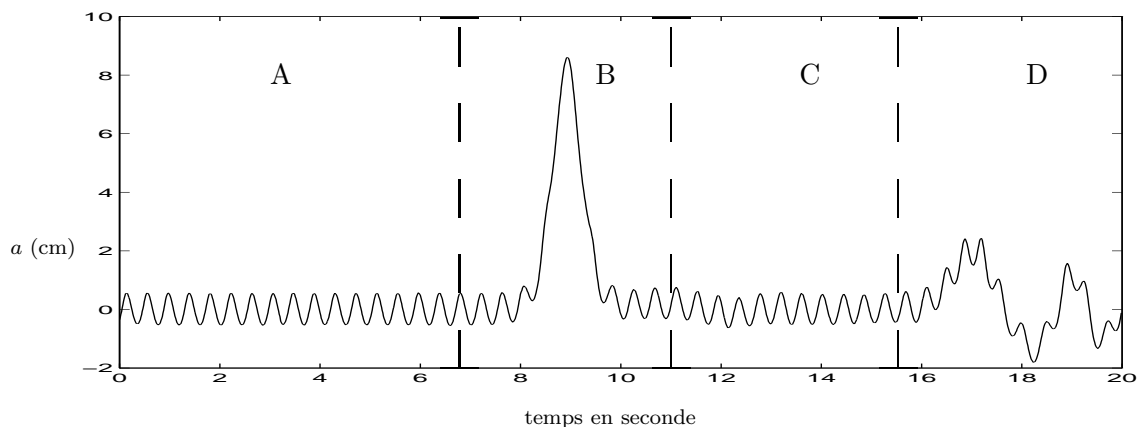


FIG. 5.11 – Dénivelée de la surface libre à 19.42 m en fonction du temps au cours d'une interaction entre une onde solitaire d'amplitude réduite $\frac{A}{h} = 0.3$ et une houle de fréquence $f = 2.5$ Hz et d'amplitude $a = 5.7$ mm

On distingue sur la figure (5.11) 4 zones caractéristiques de l'interaction faible :

- la zone A est l'enregistrement de la houle avant le passage de l'onde solitaire
- la zone B est l'enregistrement de l'interaction proprement dite
- la zone C est l'enregistrement de la houle après le passage de l'onde solitaire
- la zone D est l'enregistrement d'une interaction secondaire entre l'onde solitaire partiellement réfléchi sur le batteur plongeant et la houle (dans le cas des interactions fortes, on n'observe pas cette dernière zone).

Le traitement appliqué aux enregistrements expérimentaux pour déterminer le déphasage subi par la houle courte lors du passage du soliton repose sur l'analyse harmonique du relevé de surface libre. En effet, en décomposant une zone du signal sur les cinq premiers harmoniques de la houle (ceci est suffisant puisque l'amplitude du premier harmonique est déjà dix fois plus faible que l'amplitude à la fréquence fondamen-

tale), on détermine sa phase à l'origine.

Ainsi, par simple soustraction des phases à l'origine des zones d'analyse A et C, on obtient le déphasage subi par l'onde courte. Par convention, on définit le déphasage $\Delta\phi$ par :

$$\Delta\phi = (\text{phase à } t = 0 \text{ de A}) - (\text{phase à } t = 0 \text{ de C})$$

Dans ce cas, un déphasage positif correspond à un retard de phase.

Mais avant de décomposer le signal en harmoniques, il est impératif de déterminer avec précision la pulsation fondamentale du signal sur la zone d'analyse. Pour cela, on peut envisager deux possibilités : une analyse fréquentielle par transformée de Fourier ou une analyse temporelle par minimisation des écarts quadratiques entre un signal harmonique parfait et le signal expérimental. Cette analyse temporelle est celle retenue par Clamond [15] et consiste à déterminer par dichotomie la pulsation qui minimise l'écart quadratique moyen entre les deux signaux. Cette dernière option nous semblait a priori la meilleure pour des durées d'analyse relativement courtes sachant que la transformée de Fourier discrète présente une résolution liée à l'échantillonnage du Dirac en sinus cardinal, qui est inversement proportionnelle à la durée de la zone d'analyse dans l'espace temporel. Les zones A et C durent en général respectivement 5 et 3 à 4 secondes. Ce point sera rediscuté au paragraphe 5.2.3.

En préliminaire des tests effectués pour estimer les erreurs sur le déphasage déterminé sur des signaux expérimentaux, la méthode de traitement a, bien entendu, été testée sur des signaux parfaitement sinusoïdaux générés numériquement et échantillonnés à 50 Hz. Il résulte de ces pré-tests que l'erreur numérique sur le déphasage est de l'ordre de 10^{-20} radians, ce qui est négligeable par rapport à d'autres sources d'erreurs dont la revue suit.

5.2.2 Erreurs liées à la présence d'une onde dispersive

Dans un premier temps, on teste la modulation de la houle courte par l'onde dispersive qui suit l'onde solitaire. Rappelons que celle-ci apparaît lors de la génération et a pu être fortement diminuée en passant d'une loi de génération KdV au 1^{er} ordre à une loi obtenue par ajustement d'une tangente hyperbolique sur l'intégration numérique de l'équation de Serre.

Il ne s'agit pas pour l'instant d'estimer un déphasage physique effectif de la houle courte par l'onde dispersive (celui-ci sera étudié au paragraphe 5.3.1) , mais de déterminer l'incidence sur le déphasage d'une moins bonne détermination du signal harmonique interpolant l'onde courte portée par l'onde dispersive. Pour cela, on analyse des signaux simulés par superposition de signaux sinusoïdaux numériques et d'enregistrements d'ondes solitaires générées pour les deux lois citées précédemment. Sur la figure (5.12), on représente les déphasages entre deux zones s'étendant sur 10 périodes situées de part et d'autre du soliton en fonction de l'amplitude réduite des solitons. Ces déphasages étant théoriquement nuls, on a donc une estimation du biais qu'apporte l'onde dispersive en fonction de la fréquence du signal sinusoïdal, la situation de la 2^e zone d'analyse (repérée par son point de départ) et de la loi de génération.

Il est intéressant de noter que pour les deux lois de génération, cette erreur est assez faible, comprise entre 10^{-4} rad et 10^{-1} rad pour des solitons d'amplitudes réduites comprises entre 0.05 et 0.35 et des fréquences variant de 2 à 4 Hz. Cela correspond à la plage de fréquence de la houle courte.

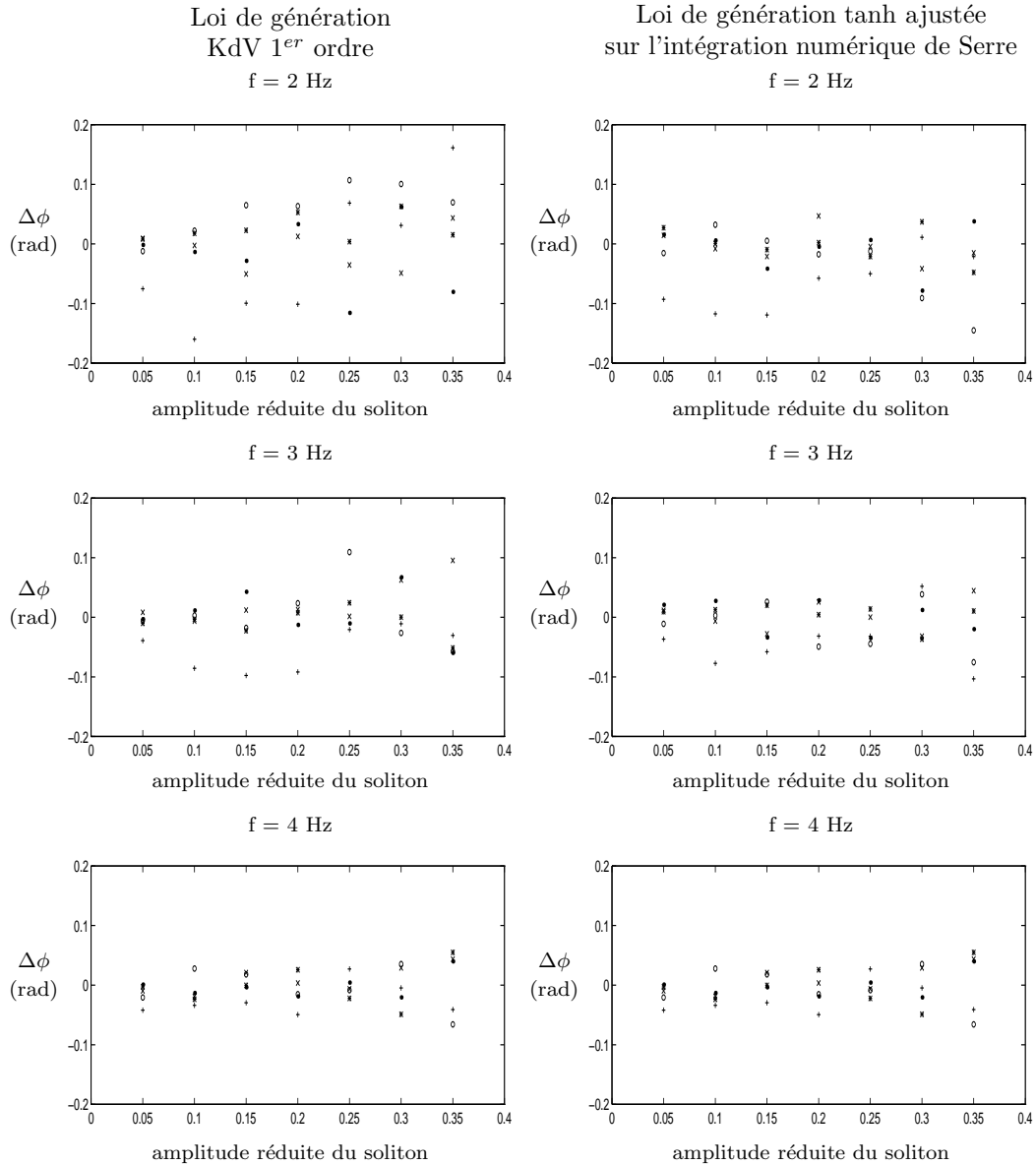


FIG. 5.12 – Déphasages induits par la présence de l'onde dispersive pour différents débuts de zones d'analyse : (+) $t=11s$; (o) $t=12s$; (x) $t=13s$; (*) $t=14s$; (.) $t=15s$

Par ailleurs, il ne paraît pas y avoir de corrélation évidente du déphasage ni avec l'amplitude relative du soliton ni avec le début de la zone d'analyse. On peut par contre noter que le déphasage est un peu plus important pour la loi de génération KdV 1^{er} ordre que pour celle de Serre.

Enfin, il semblerait que le déphasage diminue quand la fréquence de la houle courte augmente, ce que l'on peut comprendre dans la mesure où la durée de la zone d'analyse est adimensionnelle. En effet, cette dernière est de 10 périodes, soit une durée deux fois plus courte à 4 Hz qu'à 2 Hz, ce qui correspond à une longueur de perturbation plus courte sur le soliton.

5.2.3 Variabilité du déphasage calculé sur des enregistrements de houle courte seule

Si la houle générée par le batteur était parfaitement sinusoïdale et si les sondes de mesures restituaient une image fidèle de la surface libre, le déphasage entre deux parties d'un relevé de surface libre au cours du temps devrait être nul (à l'erreur numérique près dont on a déjà vu qu'elle était négligeable).

Or, il se trouve que l'analyse de signaux expérimentaux de houle seule fournit des déphasages non négligeables et très variables suivant la situation des zones d'analyse et leur durée. Les premiers déphasages calculés peuvent varier entre 0 et 2π , fourchette d'incertitude inadmissible pour les résultats recherchés.

Afin d'essayer de se donner un critère fiable pour valider les mesures, différents tests ont été réalisés. Après avoir noté que les déphasages importants interviennent pour des déterminations de pulsations assez différentes sur les deux parties du signal entre lesquelles on calcule le déphasage, il est intéressant de regarder plus précisément la variabilité de la détermination de la pulsation.

Variations de la pulsation de la houle

En particulier, s'agit-il d'une variation effective de la pulsation du batteur ou bien de différentes possibilités d'ajustement d'un signal harmonique sur le signal expérimental avec la précision demandée ?

Ce premier point nous a conduit à enregistrer le mouvement du batteur pour différentes fréquences de houles courtes comprises entre 2 et 5 Hz. Pour cela, on remplace le coin fixé sur le batteur par une sonde de mesure. Ainsi, on n'intègre dans ces enregistrements que les erreurs liées au type de sonde et au mouvement du batteur. On s'intéresse sur ces enregistrements, à la détermination de la fréquence du mouvement et pour cela, il est possible de mener une analyse de Fourier ou une analyse harmonique. Disposant pour ces tests d'enregistrements suffisamment longs en temps pour que la résolution de la transformée de Fourier discrète soit bonne, il est intéressant de comparer ces deux types d'analyse.

Sur la figure (5.13.a), on représente un exemple typique de comparaison de ces deux méthodes d'analyse pour la détermination de la fréquence en fonction de la durée de la zone d'analyse. Cet exemple à la fréquence 1.97 Hz, montre clairement que l'analyse harmonique fournit une plus mauvaise détermination de la fréquence que la transformée de Fourier sur de longues durées d'analyse. Par contre, sur des durées plus courtes, elle est adaptée. Ce résultat est confirmé sur la figure (5.13.b) qui présente l'écart type des fréquences déterminées sur différentes durées d'analyse supérieures à 10 périodes par les deux méthodes en fonction de la fréquence moyenne. Sur cette même figure, on représente également l'écart type des fréquences déterminées sur plusieurs zones de durée 10 périodes et 5 périodes par la méthode d'analyse harmonique.

Pour des durées d'analyse supérieures à 10 périodes, l'écart type des fréquences déterminées par l'analyse harmonique est bien plus grand que celui obtenu par une FFT sur les mêmes durées. Par contre, en découpant les signaux en 6 durées courtes de 5 ou 10 périodes, l'écart type sur les fréquences fournies par l'analyse harmonique est alors tout-à-fait comparable à celui de la FFT sur de longues durées, à savoir inférieure à $5 \cdot 10^{-3}$ Hz (soit 0.03 rad/s) dans la plupart des cas.

Par ailleurs, on peut en déduire un résultat quant à la fréquence du batteur. En effet,

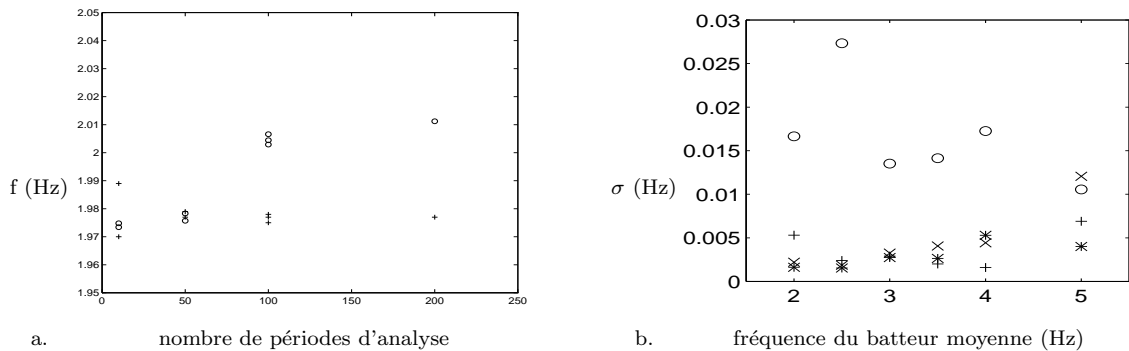


FIG. 5.13 – Comparaison des méthodes d'analyse harmonique et FFT : (a) fréquences déterminées sur un enregistrement à 1.97 Hz par (o) analyse harmonique et (+) FFT sur 65536 points en fonction de la durée de la zone d'analyse ; (b) écart type des fréquences déterminées sur plusieurs zones par : (o) analyse harmonique sur des durées de plus de 10 périodes (précision demandée = 10^{-5} rad/s) ; (*) analyse harmonique sur des durées de 10 périodes (précision demandée = 10^{-5} rad/s) ; (x) analyse harmonique sur des durées de 5 périodes (précision demandée = 10^{-5} rad/s) ; (+) FFT sur 65536 points

pour une résolution de la transformée de Fourier de $2 \cdot 10^{-1}$ à 10^{-2} Hz (correspondant respectivement à des longueurs de zones d'analyse de 5 à 100 secondes), cette méthode ne permet pas de dire que la pulsation du batteur a effectivement varié puisque que toutes les fréquences déterminées se situent dans un intervalle plus petit que la résolution, environ $5 \cdot 10^{-3}$ Hz [cf figure (5.13.b)]. On peut à ce stade conclure que la pulsation du mouvement du batteur varie très peu (résultat de l'analyse de Fourier) effectivement. Enfin, par la méthode d'analyse harmonique par minimisation des écarts quadratiques, la précision demandée sur la détermination de la pulsation de 10^{-5} rad/s n'est pas atteinte, puisque l'écart type sur la détermination de la pulsation, y compris sur de courtes durées est supérieur à 10^{-2} rad/s. Pour conclure, on a vérifié que le batteur délivre bien une fréquence constante à $5 \cdot 10^{-3}$ Hz près d'après les résultats de la FFT. Cette précision est également atteinte par l'analyse harmonique sur un nombre de périodes limitées, compris entre 5 et 10 périodes.

Influence d'une variation de pulsation sur la détermination de la phase à l'origine

On peut calculer analytiquement l'écart sur la détermination de la phase à l'origine d'un signal parfaitement sinusoïdal de pulsation ω (généré numériquement) dont on effectue la décomposition en harmoniques d'une fréquence un peu différente de sa fréquence réelle ($\omega + \delta\omega$). Ce calcul a été mené par Barthélémy et al. [4]. Ainsi, la phase à l'origine effective ϕ_n du n^e harmonique s'exprime en fonction de la phase à l'origine estimée ϕ'_n et du temps t par :

$$\tan \phi_n \sim \tan \phi'_n \left[1 - \left(\frac{1}{\tan \phi'_n} + \tan \phi'_n \right) n \delta \omega t \right] \quad (5.2)$$

Comme on le voit dans le tableau (5.3), la phase à l'origine est très sensible à une variation de pulsation. Or, il a été montré au paragraphe précédent que la pulsation du batteur ne variait pas effectivement mais que suivant la méthode d'analyse, sa

$\delta\omega$ (rad/s)	$\delta\phi$ (rad)
0.01	0.1
0.03	0.32
0.05	$\frac{\pi}{4}$

TAB. 5.3 – Erreur sur la détermination de la phase à l'origine (pour une phase à l'origine effective nulle) en fonction de l'erreur sur la détermination de la pulsation pour un signal de durée 10 s pour le fondamental ($n = 1$)

détermination n'était pas très précise. Aussi, minimiser l'erreur sur la détermination de la phase passe par une détermination très précise de la pulsation comme cela est souligné par Clamond et Barthélémy dans [21]. Or compte-tenu de la durée d'analyse à disposition (10 secondes au max), la méthode la plus adaptée sur une durée si courte reste l'analyse harmonique même si l'on a vu que l'erreur sur la détermination de la pulsation du batteur pouvait atteindre 0.03 rad/s. L'erreur sur la détermination de la phase à l'origine peut alors atteindre 0.3 rad si l'on ne considère que les variations de pulsation qui peuvent être induites par la méthode d'analyse harmonique.

Déphasages calculés sur des enregistrements expérimentaux de houle

Dans la pratique, la transformation du mouvement du batteur dont la fréquence est quasiment parfaitement constante en onde de surface peut s'accompagner de modulations en amplitude et en fréquence. Ces modulations induisent des erreurs dans la détermination de la pulsation et donc des déphasages entre deux parties d'un même signal qui n'ont pas lieu d'être. Les essais présentant de fortes modulations en amplitude (à partir de 3 Hz) ont donc été écartés car les erreurs sur la détermination de la pulsation par la méthode d'analyse harmonique sont trop importantes. Ensuite, l'analyse harmonique est testée sur des mesures de houle seule sur 5 sondes. Sur les figures (5.14), on représente en fonction de la fréquence moyenne de la houle, le déphasage moyen entre deux zones de 5 secondes du train de houle établi [fig. (5.14.a)] et l'écart type sur les déterminations fournies par les 5 sondes [fig. (5.14.b)].

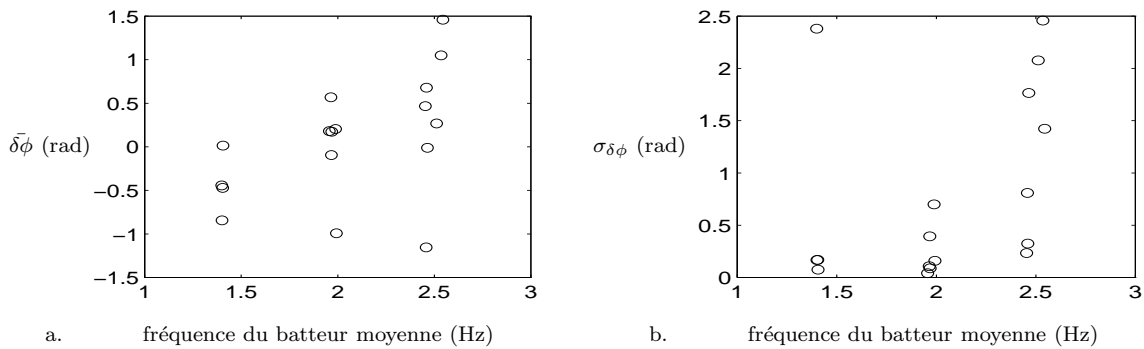


FIG. 5.14 – Déphasages mesurés sur un train de houle établi (a) moyenne (b) écart-type

Le déphasage moyen est compris entre -1 rad et +1 rad avec un écart type inférieur à 0.5 rad dans la plupart des cas pour les fréquences de 1.5 Hz et 2 Hz. A 2.5 Hz,

en revanche, le déphasage moyen ainsi que les écart-types entre 5 sondes peuvent être plus importants. Pourtant, l'erreur relative est plus faible car les déphasages mesurés pour une fréquence de 2.5 Hz sont bien plus grands que ceux mesurés pour des houles de fréquence 2 Hz ou 1.5 Hz. On obtient donc en répétant la mesure sur 5 sondes une précision acceptable sur la mesure du déphasage.

Ainsi, la conclusion de cet argumentaire sur l'étude des incertitudes sur la détermination des déphasages est qu'une bonne estimation de ces incertitudes est obtenue en répétant la mesure sur plusieurs sondes et que l'erreur admissible est de l'ordre de 0.5 rad pour les fréquences de 1.5 Hz et 2 Hz.

5.3 Résultats expérimentaux et discussion

5.3.1 Convention de présentation et discussion des déphasages expérimentaux de la houle courte

Sur la figure (5.15), on présente sur trois graphes correspondant aux différentes fréquences de la houle courte testées, le déphasage de la houle au passage de l'onde solitaire (adimensionné par le produit du nombre d'onde et de la profondeur d'eau). Le déphasage adimensionnel est représenté en fonction de la racine carrée de l'amplitude réduite de l'onde solitaire. En effet, dans cette représentation adimensionnelle, un modèle simple d'interaction linéaire et instantanée dit également heuristique [27] conduit à une droite indépendante de la fréquence de la houle dont l'équation est :

$$\frac{\delta\phi}{kh_0} = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{A}{h_0}} \quad (5.3)$$

pour une onde solitaire de type KdV. Celle-ci est représentée en trait plein sur chacun des graphes. En effet, d'après ce modèle, le déphasage consiste simplement à rapporter le déplacement net des particules par l'onde solitaire à une longueur d'onde de la houle. Il est à noter que suivant le choix de description de l'onde solitaire, le modèle heuristique conduit à des expressions du déphasage différentes. Pour une onde solitaire de type Serre, par exemple, le déphasage adimensionnel en fonction de la racine carrée de l'amplitude réduite n'est plus une droite mais reste toujours indépendante de la fréquence de la houle. Il est donné par :

$$\frac{\delta\phi}{kh_0} = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{A}{h_0} \left(1 + \frac{A}{h_0}\right)} \quad (5.4)$$

Sur chaque graphe, donc pour chaque fréquence, on représente par des croix les interactions dites fortes (les ondes se propagent dans le même sens) et par des croix cerclées les interactions dites faibles (les ondes se propagent en sens inverse). Les étoiles correspondent aux cas où l'on observe le déferlement de l'onde courte même partiel.

Il est à noter que pour simplifier la comparaison des interactions fortes et faibles, le signe du déphasage n'est pas respecté sur ces graphes ; il est représenté en valeur absolue. Avec la convention définie au paragraphe 5.2.1, le signe se rétablit de la façon suivante :

- pour les interactions fortes, le déphasage est négatif : la houle subit une avance de phase,

- pour les interactions faibles, le déphasage est positif : la houle subit un retard de phase.

De plus, les déphasages déterminés expérimentalement sont toujours compris entre 0 et 2π , compte tenu de la périodicité de la fonction tangente. Mais en fait le déphasage est une fonction monotone de l'amplitude de l'onde solitaire jusqu'à la limite du déferlement. Ainsi, les valeurs de déphasages brutes ont été corrigées pour une clarté de représentation en incrémentant d'un multiple de 2π à chaque retour à zéro. Enfin, en tirets pointillés, on représente la droite de régression des déphasages en fonction des racines carrées des amplitudes pour chaque série.

Tout d'abord, avec ces conventions de présentation, le déphasage est effectivement une fonction de l'amplitude réduite de l'onde solitaire et même peut être une fonction linéaire de la racine carrée de l'amplitude réduite, mais pas uniquement. En effet, il apparaît clairement que les deux types d'interaction dites forte et faible sont bien différenciées. L'interaction forte conduit toujours à des déphasages plus grand que le modèle d'interaction linéaire et instantanée, alors que l'interaction faible conduit à des déphasages plus faibles que le modèle. De plus, l'écart au modèle linéaire est plus grand pour les interactions fortes que pour les interactions faibles, et diminue quand la fréquence augmente. Toutes ces constatations concourent à la même constatation à savoir que l'hypothèse d'instantanéité du modèle heuristique (temps d'interaction nul) est une hypothèse grossière au moins pour les interactions fortes. En effet, en interaction forte, l'écart des célérités des ondes est plus petit qu'en interaction faible et donc le temps d'interaction est plus long, toutes choses restant égales par ailleurs. Ce point explique pourquoi en interaction forte, les déphasages mesurés sont plus grands qu'en interaction faible. De plus, lorsque la fréquence de l'onde courte augmente, sa célérité diminue également et donc en interaction forte, la différence de célérité entre l'onde solitaire et la houle augmente, diminuant le temps d'interaction. Ceci éclaire pourquoi lorsque la fréquence augmente, les déphasages mesurés lors d'interactions fortes se rapprochent de l'heuristique. Il est à noter que pour les interactions faibles, cette argument montre l'inverse : le temps d'interaction augmente quand la fréquence augmente. Cependant, les expériences ne permettent pas de valider assurément cette explication puisque les déphasages n'augmente pas franchement avec la fréquence lors des interactions faibles. En fait, il semble qu'en interaction faible, le temps d'interaction soit toujours suffisamment petit pour l'hypothèse d'instantanéité du modèle heuristique soit valide. Enfin, ce raisonnement nous amène à la conclusion que dans la limite hautes fréquences (célérité de l'onde courte quasi-nulle), le déphasage en valeur absolue devrait être le même en interaction forte et faible (le temps d'interaction ne dépendant plus que de la célérité de l'onde solitaire), ce qui n'est pas contredit par l'expérience. Hors ce cas limite, le déphasage même adimensionnel dépend de la fréquence et du type d'interaction.

Par ailleurs, on a testé pour chaque type d'interaction, les essais d'interaction avec des solitons avec ou sans queue dispersive (loi de génération KdV ou Serre). Ils n'ont pas été séparés sur les figures (5.15) car il n'est effectivement pas possible de les différencier, le déphasage éventuellement induit par la queue dispersive restant dans la fourchette d'incertitude fixée par l'écart type entre sondes. Enfin, exceptée la limite de déferlement qui varie en fonction de l'amplitude de la houle, le déphasage n'est apparemment pas fonction de cette amplitude puisque comme précédemment, les déphasages mesurés sur des essais réalisés pour des amplitudes différentes, toutes choses étant égales par ailleurs, restent dans la fourchette d'incertitude fixée par

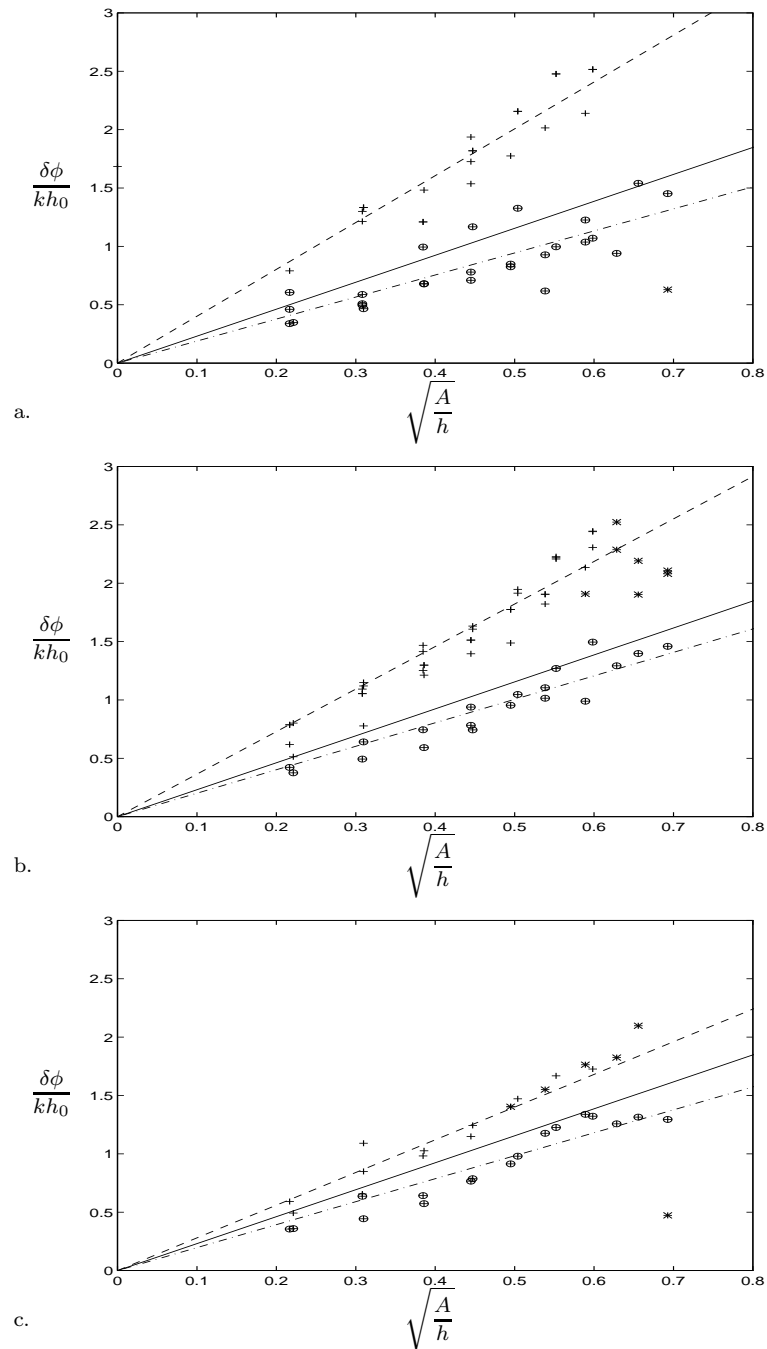


FIG. 5.15 – Déphasages adimensionnels de la houle déterminés expérimentalement en fonction de l'amplitude réduite de l'onde solitaire ; (—) modèle linéaire et instantané (5.3) ; (- · -) droite de régression pour les interactions dites faibles ; (- - -) droite de régression pour les interactions dites fortes ; (*) déferlement de l'onde courte ; $h_0 = 0.3\text{ m}$; (a) $f = 1.5\text{ Hz}$; (b) $f = 2.0\text{ Hz}$; (c) $f = 2.5\text{ Hz}$.

l'écart type entre sondes. Nous reviendrons sur la limite de déferlement au paragraphe 5.3.3.

5.3.2 Confrontation des déphasages expérimentaux aux prévisions des théories existantes

On compare les déphasages mesurés expérimentalement à ceux prédits par différentes théories en interaction faible sur la figure (5.16) et en interaction forte sur la figure (5.17). Les modèles théoriques auxquels nous confrontons les résultats expérimentaux sont le modèle heuristique (linéaire et instantané) que nous avons déjà critiqué au paragraphe précédent, le modèle de type WKB développé par Clamond dans le cadre de l'approximation de l'eau peu profonde [15] et le modèle WKB inspiré de la réfraction sur courants lentement variables développé au chapitre 4 et appliqué ici pour un soliton décrit par Serre. On rappelle que Clamond aboutit à une formulation analytique du déphasage de l'onde courte $\Delta\phi$, à savoir :

$$\Delta\phi = \frac{4kh}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{gh} - c_g + \frac{\omega}{2k} A}{\sqrt{gh} + c_g} \frac{1}{h} \quad (5.5)$$

avec : $\frac{\omega^2}{g} = k \tanh kh$, $c_g = \frac{\omega}{k} \left(\frac{1}{2} + \frac{kh}{\sinh kh} \right)$ où ω est la pulsation, k le nombre d'onde de l'onde courte, A l'amplitude de l'onde solitaire et h la profondeur d'eau. Tout d'abord, il est intéressant de noter que les deux modèles WKB présentent une tendance commune, c'est-à-dire qu'ils prévoient des déphasages plus faibles que le modèle heuristique en interaction faible et plus forts en interaction forte, l'écart au modèle heuristique étant d'autant plus grand que la fréquence est faible. Cette tendance est en accord avec ce qui avait été mis en évidence sur les résultats expérimentaux. En d'autres termes, on retrouve le modèle heuristique à la limite haute fréquence dans les théories WKB, comme le suggéraient les résultats expérimentaux en interaction forte et la discussion de l'instantanéité de l'interaction. En effet, si les courbes heuristiques sont des droites dans cette représentation, cela vient du choix de la description de l'onde solitaire par une forme KdV, alors que le nouveau modèle WKB est ici présenté pour une loi de Serre. En utilisant l'expression de Serre du déplacement net des particules dans le modèle heuristique [formule (5.4)], on retrouve avec le modèle heuristique la limite haute fréquence du nouveau modèle WKB comme le montre la figure (5.18).

Il faut également remarquer dans le modèle WKB de Clamond, la forme KdV pour l'onde solitaire n'est pas un choix mais est imposé par les hypothèses du calcul. Ceci limite par ailleurs le domaine de validité de son modèle aux ondes solitaires de petites amplitudes (hypothèse faiblement non linéaire). En effet, les deux modèles théoriques ne se différencient nettement que pour des amplitudes réduites supérieures à 0.2 environ ($\sqrt{\frac{A}{h}} \geq 0.4$). On peut montrer que le calcul de Clamond est un cas limite du nouveau calcul pour les petites amplitudes. Ainsi, les expériences s'accorde bien avec les deux modèles WKB pour les petites amplitudes mais pour les grandes amplitudes, le nouveau modèle WKB est en meilleur accord. En effet, en interaction forte, la dépendance du déphasage en fonction de la racine carrée de l'amplitude réduite n'est pas linéaire. En interaction faible, cette tendance quoi qu'existant aussi, n'est pas aussi claire. Ceci confirme la supériorité de la solution onde solitaire de Serre sur celle de KdV pour les fortes amplitudes et la nécessité du nouveau modèle pour prendre en compte une description de l'onde solitaire plus adaptée.

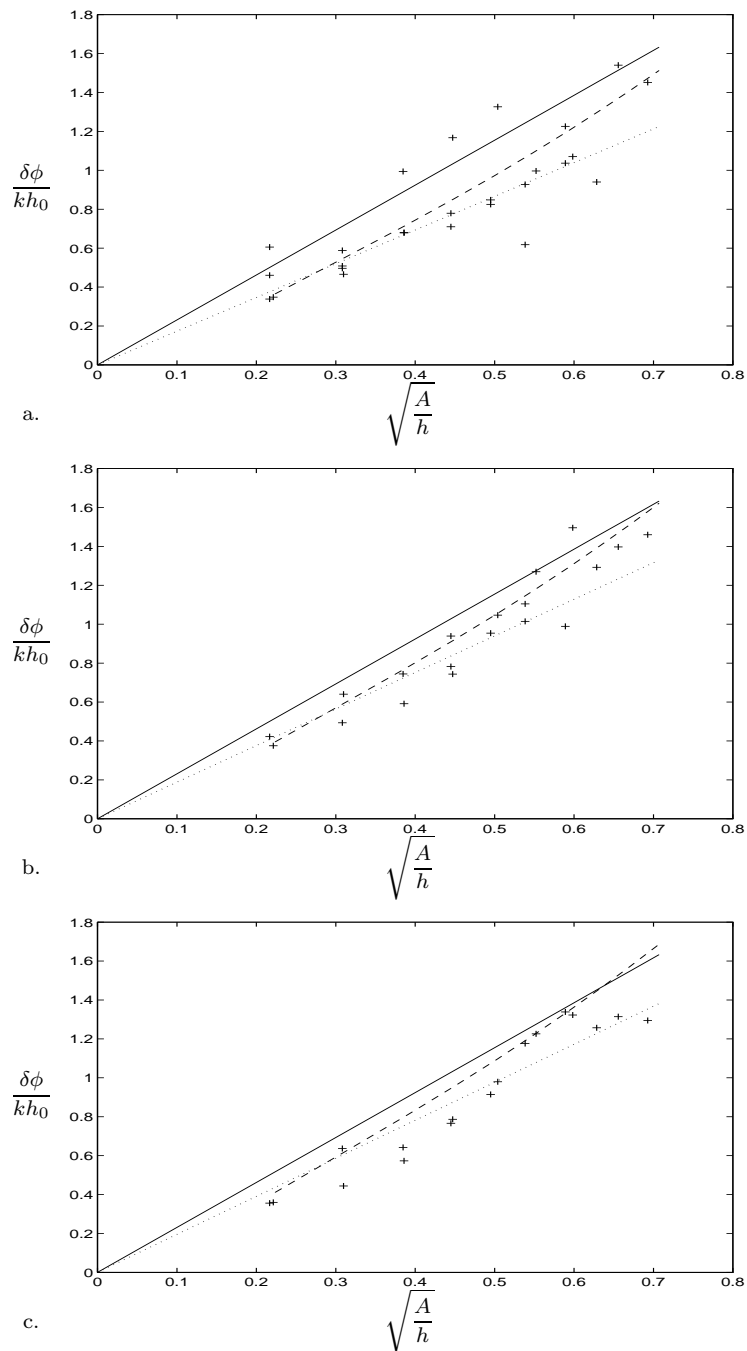
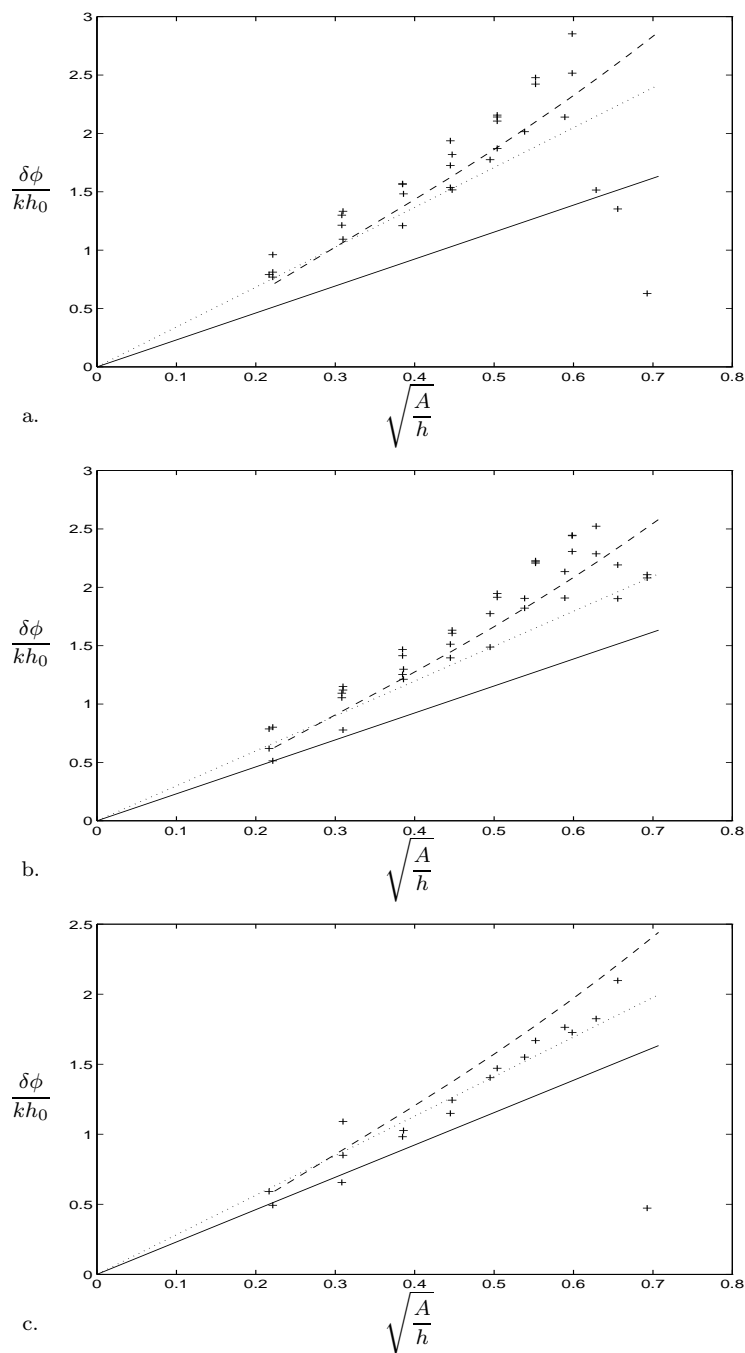


FIG. 5.16 – *Interaction faible* : comparaison des résultats expérimentaux (+) à différentes théories : (—) modèle heuristique; (...) modèle WKB développé par Clamond [15]; (- -) nouveau modèle WKB - $h_0 = 0.3$ m (a) $f=1.5$ Hz (b) $f=2$ Hz (c) $f=2.5$ Hz

5.3.3 Etude du déferlement de l'onde courte

En marge de l'étude du déphasage induit par le passage d'une onde solitaire dans un train de houle, on a pu observer des cas où la houle déferlait. Parmi les études sur le déferlement dû à des interactions d'onde, celles concernant le déferlement des ondes de vent sont particulièrement intéressantes. Les premiers travaux expérimentaux

FIG. 5.17 – Interaction forte : même légende que la fig. (5.16)

remontent à 1974 avec Philipps & Banner [61] qui s'intéressent au déferlement des ondes de vent en présence de houle. Le résultat principal de cette étude est la mise en évidence du déferlement précoce des ondes de vent, i.e. avant la limite de Stokes. Ce déferlement est attribué à la rotationalité de l'écoulement. En effet, ils expliquent que la limite de déferlement est déplacée proportionnellement au courant-dérive de surface dû au vent. Plus récemment, l'étude expérimentale de Chu et al. [13] en 1992 sur l'interaction entre des ondes de vent et de la houle basse fréquence a mis en évidence le déroulement de l'interaction en 4 étapes. Tout d'abord, les ondes

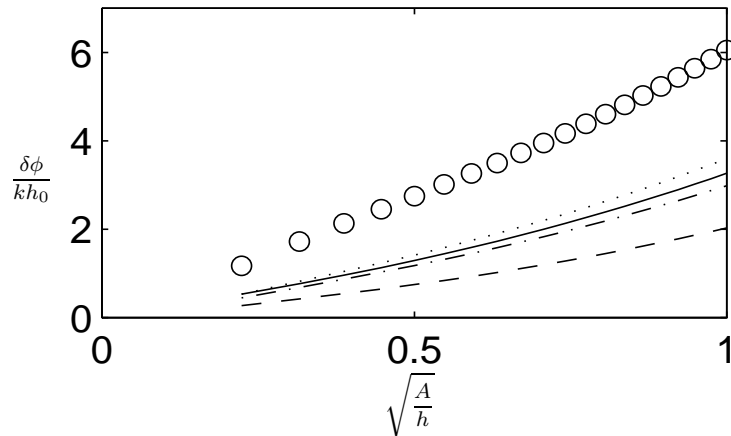


FIG. 5.18 – Limite haute fréquence du modèle WKB du chapitre 4 comparé au modèle heuristique pour une onde solitaire décrite par Serre (—) : déphasage calculé à l'aide du modèle WKB : en interaction forte pour une fréquence de 1 Hz (○) et 5 Hz (...) en interaction faible pour une fréquence de 1 Hz (- -) et 5 Hz (-.-)

de vent déferlent puis se régénèrent. Mais la régénération est interrompue par le passage d'un front d'énergie dont l'origine est discutée. Enfin, bien après le passage de l'onde longue, les ondes de vent relaxent vers l'état initial. Cette étude reste donc très éloignée du problème que nous envisageons, puisque dans notre cas, il ne peut y avoir régénération. L'intérêt réside dans l'étude de l'étape du déferlement proprement dit. En effet, les modulations de nombre d'onde et d'amplitude que l'on peut prévoir par une théorie de type réfraction sur des ondes longues sont comparées aux mesures, mais les auteurs ne s'intéressent pas tant à la limite d'apparition du déferlement mais au taux global de déferlement.

Sur la figure (5.19), on présente un exemple de la dénivelée de surface libre au cours du temps lors d'une interaction où l'onde courte déferle.

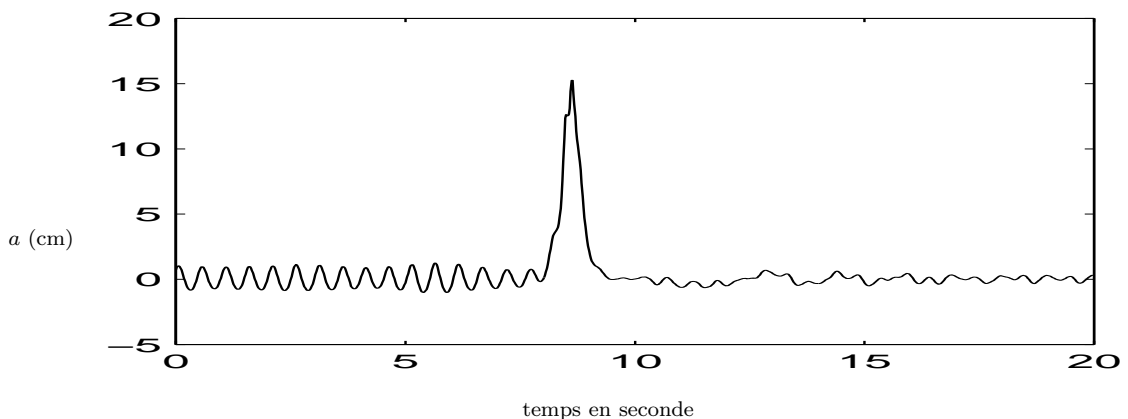


FIG. 5.19 – Dénivelée de la surface libre en fonction du temps au cours d'une interaction avec déferlement entre une onde solitaire d'amplitude réduite $\frac{A}{h} = 0.5$ et une houle de fréquence $f = 2$ Hz et d'amplitude $a = 12$ mm avant l'interaction ($ak = 0.19$)

Ce déferlement de l'onde courte se produit pour certaines amplitudes de l'onde solitaire, suivant la fréquence de la houle et suivant le type d'interaction. Il peut également être plus ou moins important. On observe parfois le déferlement uniquement dans les premiers mètres du canal.

Ayant pu vérifier que l'amplitude de l'onde solitaire n'était pas modifiée par le déferlement, on en déduit que le déferlement est bien celui de l'onde courte, d'autant plus que celle-ci montre une forte diminution d'amplitude comme sur la figure (5.19) après le passage de l'onde solitaire. En supposant que le déferlement se produit lorsque l'onde courte atteint une cambrure limite, on paramètre les cas de déferlement par leur cambrure maxima. Cette cambrure maxima est calculée à partir des modulations du nombre d'onde et de l'amplitude données par la théorie WKB du chapitre 4. Cette suggestion de paramètre déterminant le déferlement permet d'expliquer pourquoi pour une même amplitude réduite de l'onde solitaire, une onde d'une fréquence donnée peut ne pas déferler alors qu'une autre onde de même amplitude mais de fréquence différente ou de même fréquence mais d'amplitude différente déferlera. De même, ce point explique pourquoi suivant les cas, le déferlement est plus ou moins fort. En effet, l'importance du déferlement c'est-à-dire la diminution d'amplitude de l'onde courte associée au déferlement dépend de la longueur du train de houle sur laquelle la cambrure aura dépassé la valeur critique du déferlement. Enfin, si parfois on a pu observer le déferlement uniquement dans les premiers mètres du canal, on suggère que cela soit dû au fait que l'amplitude de l'onde solitaire diminue au cours de sa propagation et en particulier, pour la loi de génération de type KdV (qui a été la seule utilisée pour ces tests), cette diminution d'amplitude est très marquée [cf. annexe C]. Expérimentalement, on observe un déferlement marqué de l'onde courte (diminution de l'amplitude de l'onde courte de plus de 50 %) lorsque la cambrure maxima prédite par le modèle WKB est supérieure à 0.23, ce qui ne s'est produit que dans le cas de certaines interactions fortes. Cette valeur est plus basse que la limite déterminée théoriquement par Stokes en eau profonde pour une onde se propageant dans un milieu initialement au repos, correspondant à un angle de la crête de 120° soit $ak \geq 0.4461$ où a est l'amplitude de la houle et k le nombre d'onde.

Ainsi, on observe le déferlement pour des cambrures maxima prédites significativement plus basses que cette valeur. Dans notre cas, la houle courte étant une onde de gravité en principe irrotationnelle, l'argument de Philipps & Banner sur le déferlement précoce lié à la rotationalité ne s'applique pas. Ceci nous conduirait donc à remettre en cause l'estimation de la cambrure maxima donnée par le modèle à moins que ce ne soit la dissymétrie des crêtes de l'onde courte qui n'explique ce déferlement précoce.

Cette étude du déferlement a simplement permis de montrer l'existence du phénomène mais demande à être complétée afin d'en donner une interprétation concluante.

5.4 Conclusion

Ce travail expérimental a permis de compléter les expériences réalisées par Clamond lors de sa thèse. En effet, des expériences originales d'interaction forte entre une onde solitaire, dont les caractéristiques ont été améliorées, et une onde courte monochromatique ont été menées. De plus, en interaction forte comme en interaction faible, les paramètres tels que la fréquence et l'amplitude de l'onde courte ont été testés. Dans

un premier temps, l'étude du déphasage de l'onde courte a montré que le modèle heuristique ne décrivait pas qualitativement l'effet de la fréquence sur les résultats des expériences, ce que les modèles WKB de Clamond et du chapitre 4 réussissent. En effet, l'hypothèse d'instantanéité dans le modèle heuristique s'est révélée trop grossière surtout dans le cas de l'interaction forte. Reste que seul le dernier modèle franchit le pas quantitatif sur la prévision des déphasages. Dans un second temps, un étude succincte du déferlement de l'onde courte a permis de déterminer une partie du filtrage opéré par l'onde solitaire sur la houle, en montrant en particulier que non seulement les modulations du nombre d'onde de l'onde courte mais également de l'amplitude de celle-ci sont à prendre en compte, le paramètre du déferlement étant la cambrure de l'onde. Cette étude rapide laisse entrevoir des perspectives d'études expérimentales complémentaires sur des houles irrégulières.

Chapitre 6

Expériences d'interaction externe-interne

6.1 Introduction

A partir d'expériences d'interaction entre une houle monochromatique de surface et une onde solitaire barocline, on espère synthétiser au laboratoire un des phénomènes présentés en introduction dont la signature est observée sur les photos aériennes ou sur les images SAR (Synthetic Aperture Radar). Compte tenu des différences d'échelles entre les longueurs d'onde de l'onde barocline et de l'onde de surface au laboratoire (soit 3 pour 1 environ), ces expériences tendent à reproduire des interactions entre des houles longues ("swell" de 500 m de longueur d'onde) et des ondes solitaires internes (1 km à 2 km de longueur caractéristique) que l'on peut observer dans l'océan. Ce type d'interaction est très rarement pris en compte pour l'interprétation des images SAR, contrairement à celle mettant en jeu des ondes de vent (de quelques mètres de longueur d'onde) et des ondes solitaires internes qui a été bien plus étudiée. Une meilleure description des modulations de l'onde de surface en interaction avec l'onde barocline devrait permettre de tirer davantage d'informations quant aux caractéristiques de l'onde barocline.

En effet, les premières interprétations de photos aériennes de la surface de la mer remonte à Ewing en 1950 [22] qui suggère que les zones lisses et rugueuses observées sur ces photos seraient dues aux variations de la tension superficielle créées par un film organique en surface comprimé ou détendu sous l'effet du champ de vitesse de l'onde interne. Or la tension superficielle affecte principalement les ondes capillaires (de petites longueurs d'onde comme les ondes de vent) mais peu ou pas du tout les houles établies (telles que les "swell").

En se penchant sur l'interprétation de photos aériennes du Georgia Strait, Gargett & Hughes proposent un autre point de vue en 1972 [24]. Ils observent des trains d'onde de gravité dont la direction de propagation est modifiée par l'onde interne, les crêtes de l'onde de surface s'alignant sur celle de l'onde interne. Or, ceci ne peut s'expliquer par un mécanisme mettant en jeu la tension superficielle et les auteurs proposent alors une explication basée sur l'interaction oblique entre l'onde de surface (supposée monochromatique) et une onde interne périodique longue, dont la dénivelée de surface associée est négligée. Cette étude théorique s'inspire largement des résultats de Longuet-Higgins & Stewart en 1960 [46] concernant les interactions

entre deux ondes de surface de nombre d'onde très différents. En imposant les 3 conditions suivantes obtenues par analogie avec la méthode de Longuet-Higgins & Stewart [46] : l'onde de surface est courte (hypothèse de l'eau profonde), le nombre d'onde de l'onde courte dans la direction perpendiculaire se conserve ainsi que la pulsation apparente de l'onde courte dans le repère stationnaire de l'onde interne, ils déterminent la célérité, le nombre d'onde et la direction de propagation de l'onde de surface au cours de l'interaction. L'énergie de l'onde courte est également étudiée, révélant des singularités ou positions critiques hors lesquelles l'"action d'onde" se conserve. Ainsi, il est montré en particulier que lorsque l'onde de surface se propage plus rapidement que l'onde interne, la longueur d'onde de l'onde de surface augmente sur le creux de l'onde interne et diminue sur les crêtes alors que pour l'amplitude, c'est l'inverse. Sur les photos aériennes, ceci devrait résulter en l'apparition de zones lisses sur les creux et rugueuses sur les crêtes. De plus, ce mécanisme est tout-à-fait réversible, contrairement à celui mettant en jeu la tension superficielle qui implique la dissipation de l'énergie de l'onde. Enfin, excepté des observations qualitatives en faveur du mécanisme d'interaction, aucune mesure quantitative ne vient appuyer. A la suite des remarques de Gargett & Hughes, une étude expérimentale détaillée de l'interaction entre une onde interne et une onde de surface, toutes deux monochromatiques, mais se propageant dans le même sens a été menée par Lewis et al. en 1974 [44]. Certes, cette étude en bi-couche eau/fréon-kérozen ne prend pas en compte l'obliquité de l'incidence, mais des mesures précises de l'amplitude des ondes interne et externe et des pentes de la surface libre sont effectuées le long du canal à l'aide de sondes résistives et d'un système optique respectivement. Le rapport de couche étant fixé à 1/30 (couche mince en bas), deux rapports de densité sont expérimentés pour des fréquences de l'onde interne variant de 0.21 Hz à 0.26 Hz et de l'onde de surface variant de 2.18 Hz à 4.45 Hz. Une attention particulière a été portée pour limiter la contamination de la surface libre (l'eau est filtrée à $5 \mu m$) et une plage absorbante est disposée à l'extrémité du canal, limitant la réflexion à 5 % de l'amplitude de l'onde incidente. Les mesures des modulations d'amplitudes et de pentes de la surface libre sont comparées à une théorie de type réfraction sur courant variable, transposée par simple analogie au cas d'une onde interne qui est supposée présenter des variations lentes dans l'espace et dans le temps. Les modulations d'amplitude sont obtenues en appliquant le concept de contrainte de radiation introduit par Longuet-Higgins & Stewart en 1960 [46]. Les deux équations de conservation de l'énergie et des variations du nombre d'onde sont intégrées dans le cas 1D. De façon générale, l'intégration est numérique mais pour certains champs de vitesse de l'onde interne, cette intégration peut être menée analytiquement. L'intégration analytique est effectivement menée pour un champ de vitesse de l'onde interne particulier. Ces résultats théoriques sont comparés aux mesures expérimentales et montrent que les modulations d'amplitude et de pente de la surface libre sont sinusoïdales et de même fréquence que l'onde interne. Ces modulations sont maxima quand les vitesses de groupe de l'onde interne et de l'onde de surface sont égales (cas résonnant). En fixant l'égalité des vitesses de groupe, l'accord théorie-expérience est excellent que ce soit sur le niveau de la modulation de pente de surface libre et sa dépendance avec la distance d'interaction. D'autre part, en fixant la distance d'interaction, ils représentent la modulation de la pente de surface libre en fonction du rapport de la vitesse de groupe de l'onde interne à celle de l'onde de surface. Ils confirment ainsi que cette modulation est maxima dans le cas résonnant et décroît plus vite quand la

vitesse de l'onde interne est plus petite que la vitesse de l'onde de surface que dans le cas inverse. De plus, quand la distance d'interaction augmente, le pic du maximum de modulation (pouvant atteindre 30 %) de la pente de surface libre devient plus étroit. Enfin, l'accord avec la théorie "linéaire" dérivée de l'analogie de l'interaction entre une onde longue et une onde courte de surface est très bon.

Pour boucler cette série de travaux, Hughes apporte avec Grant dans un groupe de deux articles en 1978 [33] [31] sa contribution à la compréhension des mécanismes de modulations des ondes de vent par les ondes internes, dans le but de tirer des photos aériennes des informations utiles pour décrire les ondes internes. Cette fois, contrairement au premier article de 1972, des données quantitatives obtenues en mer sont présentées dans une première partie. Puis, ces données sont interprétées à la lumière d'une analyse théorique détaillée en seconde partie. Les mesures en mer sont menées dans le Georgia Strait et le Bute Inlet. Il s'agit d'expériences semi-pilotées puisque une onde interne régulière est générée par le sillage d'un bateau dans la stratification de surface. Simultanément à des photos aériennes, des mesures de la cambrure de surface et du champ de vitesse interne ont permis de montrer la proportionnalité des variations de la cambrure de l'onde de vent à l'amplitude du courant de surface, mais avec des déphasages. Dans son analyse théorique, Hughes exclut d'office le mécanisme du type compression d'un film organique, en ne s'intéressant qu'à l'aspect interaction dynamique d'ondes en incidence oblique. L'approche théorique consiste, comme dans son article de 1972 avec Gargett [24], à reprendre les résultats de Longuet-Higgins & Stewart [46] sur les modulations de nombre d'onde et d'amplitude en établissant une analogie entre l'interaction d'une onde de surface courte avec une onde interne longue et celle étudiée par Longuet-Higgins & Stewart entre deux ondes de longueur d'onde très différentes. Mais cette fois, Hughes va plus loin et considère une onde de surface non plus monochromatique mais présentant un spectre continu comme c'est le cas des ondes de vent en général. Les spectres mesurés dans les zones rugueuses et lisses sont comparés à ceux prédits par le modèle. Dans la zone du spectre correspondant à des longueurs d'onde comprise entre 63 cm et 2 m (pic du spectre), l'accord théorie-mesures dans la zone rugueuse est excellent alors que dans la zone lisse, la théorie prédit une coupure totale de ces longueurs d'onde, ce qui n'apparaît pas dans les mesures. Cet écart est attribué à l'existence d'une singularité dans le modèle théorique. D'autre part, pour les très petites longueurs d'onde (centimétriques), les mesures montrent un écart entre les spectres des zones rugueuses et lisses que l'on ne retrouve pas dans la théorie. Cette différence est attribuée par les auteurs à l'importance des non-linéarités (qui ne sont pas modélisées) dans les hautes fréquences. La principale conclusion de cette étude reste que la "sensitivité" (définie comme la dérivé du logarithme de la variance de la cambrure de l'onde de vent par rapport au courant) est bien prédite par le modèle alors que la phase est mal prédite.

A côté de ces travaux qui confrontent tous des expériences à une théorie basée sur l'analogie avec l'étude de l'interaction entre deux ondes de surface de longueur d'onde très différentes, une étude théorique de l'interaction entre une onde interne longue et une onde courte de surface se distingue. Il s'agit de l'analyse de Rizk & Ko en 1978 [67] qui établit dans un cas bi-couche avec faible différence de densité des équations décrivant cette interaction par une technique de perturbation avec double échelle de temps. L'intérêt de cette étude réside dans le détail des différentes échelles de grandeur en jeu et la mise en évidence de façon claire des approximations faites par

d'autres auteurs pour l'étude d'interaction entre deux ondes barotropes. En particulier, il est montré que les approximations de Whitham [80] et Chu & Mei [14] ne conduisent qu'à la partie linéaire de l'équation de l'énergie alors que Longuet-Higgins & Stewart [46] prennent aussi en compte la partie réfraction sur le courant, en négligeant les effets non linéaires et dispersifs dûs aux variations lentes des propriétés de surface. Pour leur part, Rizk & Ko ne négligent pas ces deux derniers termes et obtiennent donc une relation de dispersion et une équation pour l'énergie générales. Ils appliquent ces résultats au cas de l'interaction entre une onde de surface sinusoïdale de courte longueur d'onde et une onde interne également sinusoïdale mais de grande longueur d'onde, dans le cas résonnant (égalité des vitesses de groupe). Ils montrent alors que l'onde interne n'est pas affectée par l'onde de surface et surtout que sur des échelles de temps de l'ordre de la période de l'onde interne, l'approche de Lewis et al. (transposition du résultat de Longuet-Higgins & Stewart) est adéquate. En marge de ces travaux qui sont les plus proches du problème qui nous intéresse, les études récentes sont davantage orientées sur les questions d'interactions "cohérentes" (i.e. créant une 3^e onde), ce qui constitue une approche théorique complètement différente de celle présentée dans tous les travaux cités plus haut de type réfraction (interaction modulationnelle). En particulier, Dysthe & Das en 1981 [20] proposent dans un modèle tri-couche un mécanisme de génération pour une onde interne par l'interaction entre une onde de surface et l'instabilité modulationnelle qui lui est associée.

Dans ce chapitre, nous reprenons donc l'étude de l'interaction modulationnelle entre une onde interne et une onde de surface mais à la différence des travaux cités plus haut, seule l'onde de surface est périodique monochromatique, l'onde interne étant une onde solitaire. De plus, la très grande différence de longueurs d'onde imposée dans tous les travaux passés en revue n'est plus maintenue. En résumé, cette étude s'intéresse donc à modéliser des interactions observées en mer d'ondes internes avec non plus des ondes de vent de quelques mètres de longueur d'onde (préoccupations des années 1970) mais des houles établies de plusieurs centaines de mètres de longueur d'onde. De plus, afin de simplifier l'interprétation des expériences, on a tenté au laboratoire de s'approcher au plus près du cas bi-couche pour lequel les caractéristiques de l'onde solitaire barocline sont mieux connues [51]. Cette précaution devrait permettre une meilleure lisibilité des résultats en réduisant le nombre de paramètres décrivant le milieu, même s'il n'est pas aisé de réaliser un bi-couche dans une stratification saline.

Ainsi, après avoir présenté le dispositif expérimental et les précautions relatives à ce type d'expériences, le milieu stratifié a donc été qualifié sous forme d'un bi-couche équivalent. Puis, les grandeurs mesurables sur les essais d'interactions sont analysées et discutées face aux théories d'interaction existantes.

6.2 Description du dispositif expérimental

6.2.1 Déroulement d'un essai

Dans cette série d'expériences, on désire réaliser des essais d'interaction entre une onde solitaire interfaciale et de la houle de surface haute fréquence. Ces expériences sont menées sur une partie du grand canal à houle du LEGI comme schématisé sur la figure (6.1).

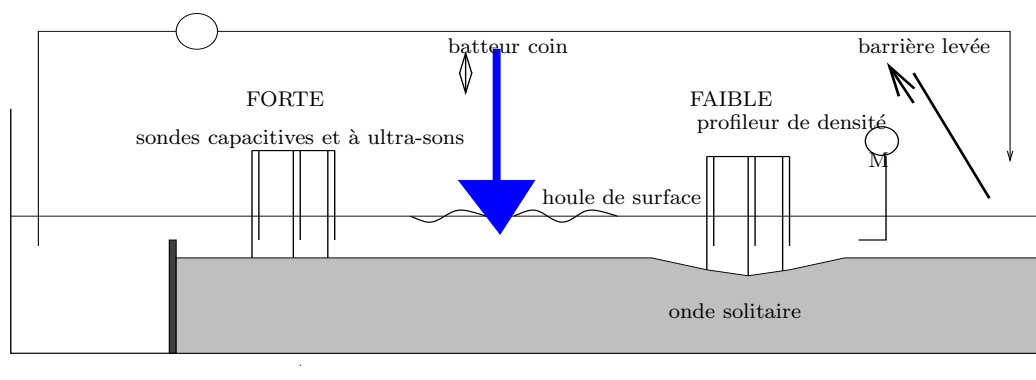


FIG. 6.1 – Vue schématique du dispositif expérimental

Contrairement aux interactions avec l'onde solitaire externe, il n'est plus nécessaire de disposer de toute la longueur du canal puisque la différence de célérité houle-onde solitaire n'est plus aussi grande. Ainsi, 14 mètres de milieu stratifié (dont le détail de préparation est présenté au paragraphe 6.2.2) suffisent pour réaliser les deux types d'interactions, forte et faible.

Une zone de réserve d'eau douce est ménagée à une extrémité du canal pour la génération de l'onde solitaire à volume constant.

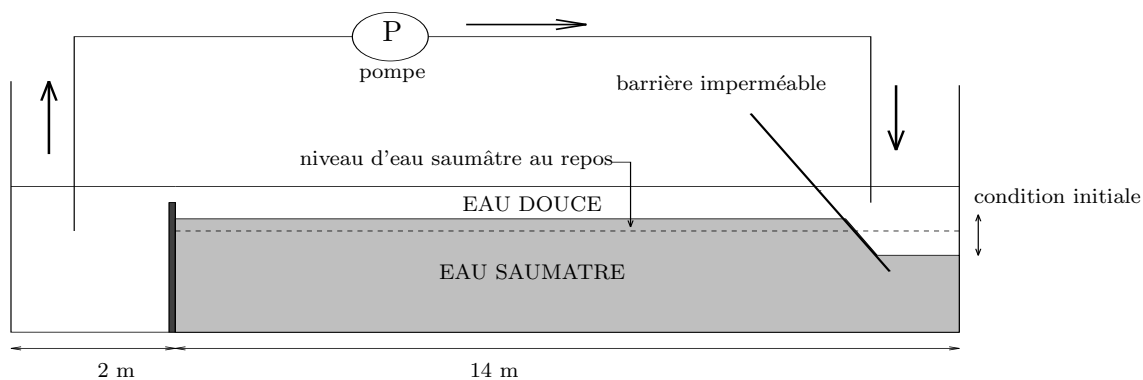


FIG. 6.2 – Génération de l'onde solitaire

La houle de surface est quant à elle toujours générée avec le batteur coin et les limitations hautes fréquences sont donc les mêmes que pour les interactions avec l'onde solitaire externe. La fréquence de l'onde courte est donc pour ces essais de 2 Hz ou 2.5 Hz.

Le peigne de sondes est constitué de 6 sondes capacitatives et 6 sondes à ultra-sons en parallèle, chaque couple étant espacé du suivant de 20 cm. On mesure ainsi à chaque position simultanément le niveau de surface et d'interface. Le peigne est placé d'un côté ou de l'autre du batteur suivant le type d'interaction étudié.

Les essais d'interactions fortes et faibles n'étant pas simultanés, et afin de connaître avec précision les conditions des essais, des mesures du profil de densité sont réalisées régulièrement entre les essais à l'aide d'une sonde à ultra-sons disposée horizontalement et déplacée verticalement à une vitesse constante de 0.5 mm/s.

Les signaux analogiques des sondes sont numérisés, convertis en unités physiques à partir des données d'étalonnage et enregistrés sur un PC en temps réel. La fréquence d'échantillonnage des profils de densité est de 1 Hz, soit une discrétisation du profil de densité tous les 0.5 mm. Celle des essais d'interactions est de 50 Hz.

Afin d'illustrer cette description du déroulement d'un essai, voici quelques photos des expériences montrant la génération de l'onde solitaire, ainsi qu'un moment de l'interaction (on distingue également les sondes de mesure sur cette photo).

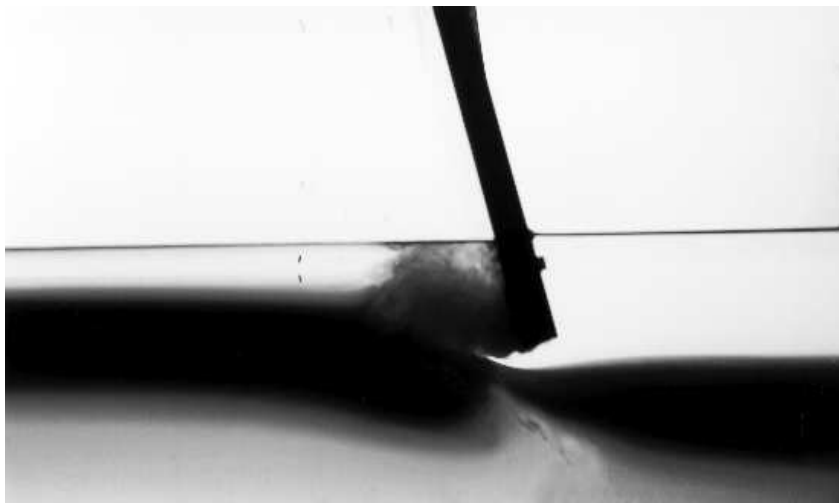


FIG. 6.3 – Photo de la génération de l'onde interne, la bande noire correspond à l'interface



FIG. 6.4 – Photo d'une onde solitaire établie, on peut également observer les sondes de mesures (à ultrasons et résistives) ainsi que sur la droite, le profileur de densité



FIG. 6.5 – Photo d'un moment de l'interaction

6.2.2 Préparation du milieu stratifié

L'enjeu de la réalisation du milieu stratifié est de s'approcher le plus près du bicouche idéal, c'est-à-dire deux couches de densité constante séparées par une interface la plus fine possible (théoriquement d'épaisseur nulle). Pour ce faire, un protocole expérimental précis est suivi.

Tout d'abord, il faut réaliser la couche inférieure d'eau salée de densité constante. Compte tenu du grand volume nécessaire, cette opération est d'autant plus délicate. On utilise une cuve annexe tarée de 300 litres dans laquelle on ajoute un poids de sel connu avec précision (pouvant varier suivant le rapport de densité voulu). Après une demi-heure de brassage, le mélange est transvasé dans le canal et une autre cuve est préparée. On procède ainsi de suite jusqu'à ce que l'épaisseur de couche inférieure voulue soit atteinte. Avant de poursuivre, la densité de l'eau salée est vérifiée en différents points du canal à l'aide d'un densimètre de précision 0.5 g/l. La précision minima requise pour poursuivre le remplissage est de 0.02 %.

Ensuite, il faut ajouter l'eau douce de telle façon que les deux fluides miscibles se mélangent le moins possible. Ceci est réalisé en faisant percoler l'eau douce à travers des tamis de mousse préalablement humectés, flottant en surface comme présentés sur la figure (6.6). Le remplissage d'eau douce est très lent et dure environ une dizaine d'heures. Lorsque le remplissage est achevé, les tamis sont retirés, encore gorgés d'eau, avec précaution pour éviter de provoquer des ondes dans le milieu au moment du décollement du tamis, mais rapidement pour limiter la vidange du tamis.

Les étapes les plus pénalisantes de ce protocole ont été étudiées par des mesures régulières du profil de densité. Il s'agit de la première heure de remplissage et du retrait des tamis. Il a aussi été noté que les variations de température diurne-nocturne augmentaient notablement l'épaisseur de l'interface. Le gradient de la pycnocline est typiquement de 1 cm par % de différence de densité soit 6 cm pour une différence

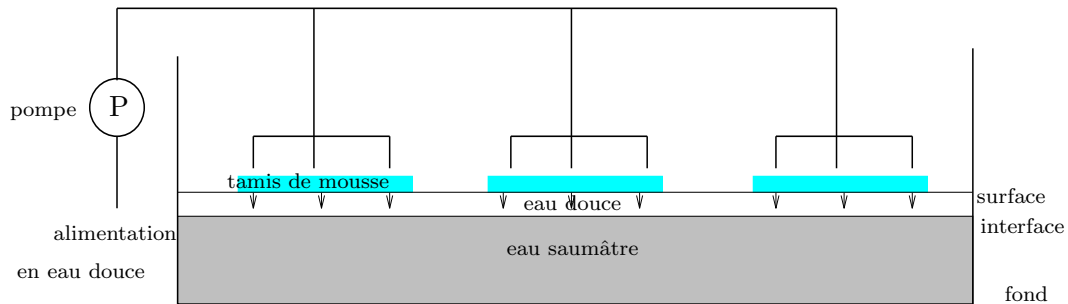


FIG. 6.6 – Remplissage du canal

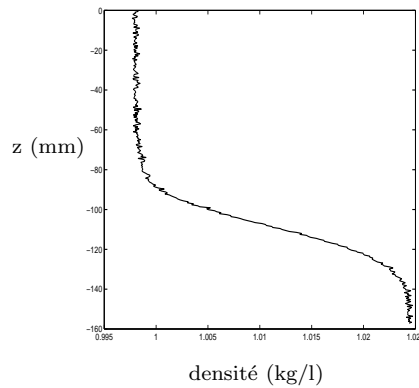


FIG. 6.7 – Profil de densité à la fin du remplissage

de densité de 6 % comme le montre le profil de densité mesuré en fin de remplissage sur la figure (6.7)

On définit le rapport de couche initial comme étant la hauteur d'eau salée mesurée avant l'ajout d'eau douce divisée par la hauteur d'eau totale à la fin du remplissage. Les expériences sont dans la plupart des cas réalisées dans une profondeur totale de 30 ou 45 cm, les rapports de couche initiaux expérimentés sont de 0.7, 0.8 et 0.875. Le rapport de densité initial est compris entre 2 et 3 % pour tous les essais d'interaction que nous présentons dans ce chapitre. Des essais ont été réalisés avec un rapport de densité initial compris entre 5 et 6 %, mais ils restent marginaux et ne sont pas présentés.

6.2.3 Mesures des niveaux de surface : comportement des sondes résistives et capacitives en présence d'eau salée

On souhaite mesurer des niveaux de surface d'un milieu stratifié en salinité. En eau douce, on utilise couramment deux types de sondes pour mesurer des niveaux de surface : résistives et capacitives. Leur principe de fonctionnement qui ne sera pas rappelé ici dans le détail met en jeu les propriétés électriques des matériaux qui les constituent et/ou du milieu. Or, en présence d'eau salée, les propriétés électriques du milieu sont modifiées. La question était donc de savoir si ces modifications influençaient la mesure de niveau ou non.

Essai statique : étalonnage des sondes

Sur la figure (6.8), on représente plusieurs exemples d'étalonnage des sondes capacitatives et résistives quand l'interface eau douce/eau salée se trouve assez proche de la surface (jusqu'à 10 cm environ). L'étalonnage consiste à mesurer la tension délivrée par la sonde à étalonner pour 4 niveaux d'immersion repérés par rapport à un niveau zéro. La tension est fixée à zéro pour le niveau zéro de référence. Théoriquement, la tension est proportionnelle au niveau d'immersion et pratiquement, en présence d'eau douce, elle l'est pour les deux types de sondes. En milieu stratifié, pour les sondes résistives, elle ne l'est plus.

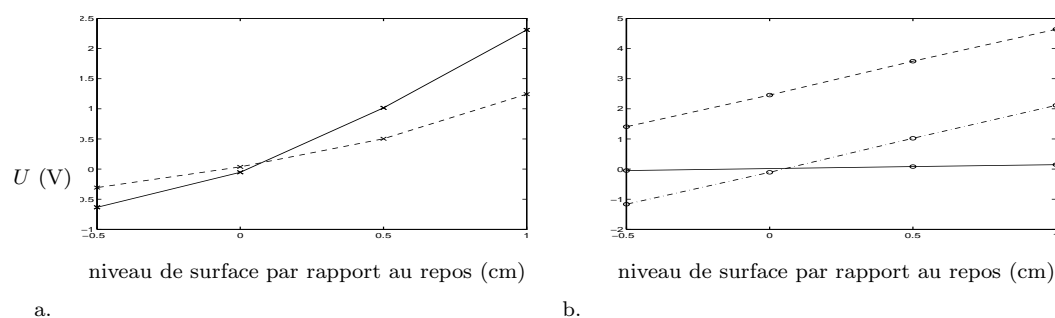


FIG. 6.8 – Comparaison des étalonnages de : (a) sondes résistives (b) sondes capacitatives à différentes dates (—);(- -);(-.-)

1^{er} essai dynamique : mesures du remplissage

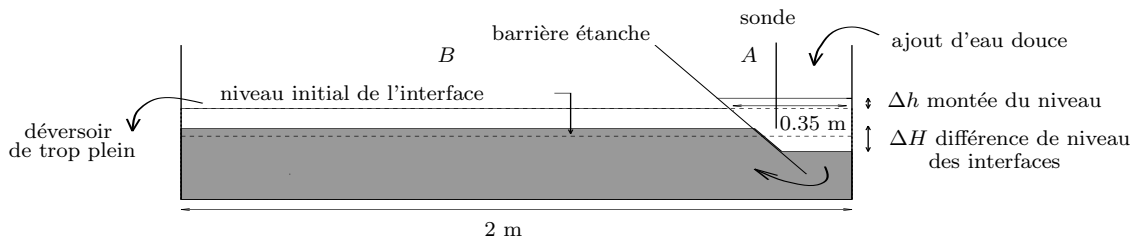


FIG. 6.9 – Schéma du 1^{er} test dynamique

On ajoute de l'eau douce du côté repéré A sur la figure (6.9) d'une barrière étanche. Ce surplus d'eau douce chasse l'eau salée sous la barrière. Le niveau de l'interface baisse du côté A de la barrière et monte légèrement du côté repéré B. Le déversoir de trop plein permet de conserver un niveau de surface constant. Cependant, compte-tenu de la différence de densité entre l'eau douce et l'eau salée, le niveau monte du côté A de la barrière.

On mesure pendant le remplissage le niveau de surface du côté A de la barrière. On visualise la descente effective de l'interface grâce au colorant disposé à l'interface. Plusieurs essais éloignés dans le temps ont été réalisés avec une sonde résistive et une sonde capacitave. Pour être bien sûr de n'observer aucun phénomène parasite de type interaction électro-magnétique entre les sondes, les sondes n'ont pas été mises

en duo et les mesures correspondent à des essais différents.

Dans tous les essais, on ajoute suffisamment d'eau douce de telle façon à abaisser notablement le niveau de l'interface (de 10 cm environ). Les mesures sont représentées sur la figure (6.10.a) pour les sondes résistives et sur la figure (6.10.b) pour les sondes capacitives.

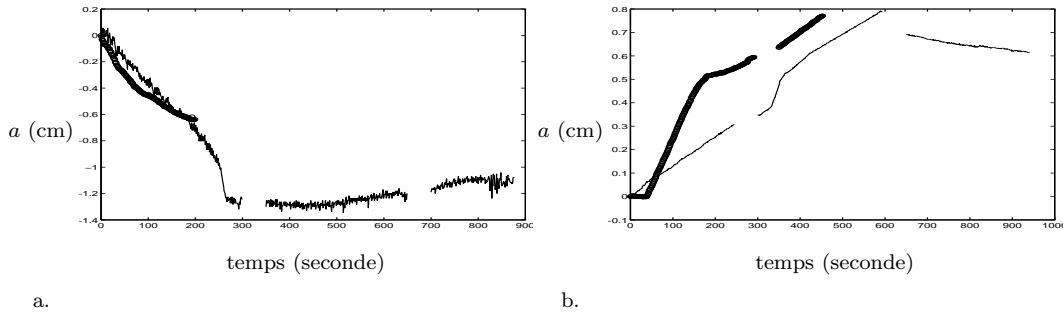


FIG. 6.10 – Comparaison de mesures de la variation de niveau de la surface lors du remplissage d'eau douce ; l'interface s'éloigne de la sonde : (a) sondes résistives (b) sondes capacitives pour deux essais réalisés à plusieurs mois d'intervalle (—);(o)

Sur les figures (6.10), les variations de niveaux sont représentées en cm, ce qui signifie que les tensions brutes ont été converties à l'aide d'un étalonnage. Or, vu la non-linéarité de l'étalonnage des sondes résistives, il est évident que l'amplitude du déplacement représentée sur la figure (6.10) n'est pas exacte. Pour les sondes capacitives, par contre, ce point ne pose pas de difficulté.

Il reste que les deux types de sondes présentent des mesures contradictoires puisque l'une indique une baisse du niveau de surface et l'autre une montée. Il est clair que **les sondes résistives ne sont pas adaptées aux mesures de niveau de surface en présence de gradient de salinité** car effectivement, le niveau de surface monte lors du remplissage.

La question est donc à présent de savoir si les sondes capacitives sont fiables. Les deux essais présentés montrent une élévation du niveau de surface de 8 mm, ce qui est cohérent avec l'estimation que l'on a pu faire en la mesurant à la paroi du canal à l'aide d'un mètre (résolution de 1 mm). En effet, on mesure une montée du niveau comprise entre 5 mm et 10 mm.

En équilibre hydrostatique, on montre que la montée de niveau Δh du côté A s'exprime en fonction des densités des deux couches et de la différence de niveau des interfaces ΔH de part et d'autre de la barrière : $\Delta h = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \Delta H$ avec les notations

de la figure (6.9). Pour les essais représentés sur les figures (6.10), les densités des deux couches sont $\rho = 1.056$ et $\rho_0 = 0.998$, soit un rapport de densité de 1.058. Dans le tableau (6.1), on donne pour ce rapport de densité quelques valeurs calculées de la montée du niveau de surface en fonction de la différence de niveau des interfaces correspondant aux essais des figures (6.10).

Il semble donc que **les sondes capacitives soient adaptées au suivi de niveau de surface en milieu stratifié en salinité** puisque les valeurs mesurées sont en accord à 0.5 mm près (précision observée de la sonde en eau douce [53]) avec les valeurs calculées théoriquement.

ΔH (cm)	Δh (cm)
1	0.06
5	0.29
7	0.40
10	0.58
13	0.75

TAB. 6.1 – Montée du niveau de surface Δh en fonction de l'abaissement de l'interface ΔH pour un rapport de densité de 1.058

2^e essai dynamique : mesures du niveau de surface au passage d'une onde interne

Dans ce paragraphe, on présente un enregistrement des niveaux de surface et d'interface au passage d'une onde solitaire interne. Le signal à l'interface est malheureusement écreté sur cet enregistrement.

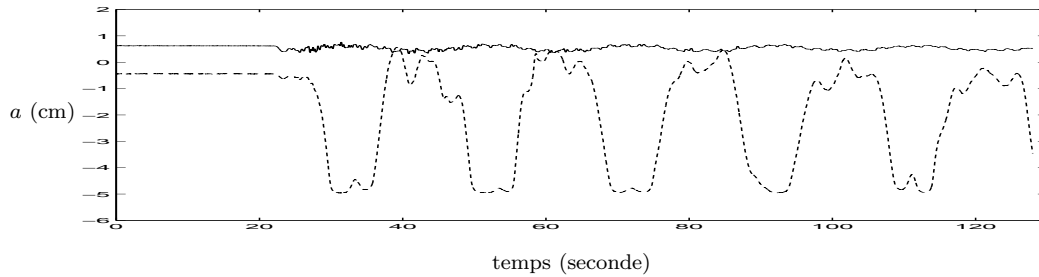


FIG. 6.11 – Mesures de la variation de niveau de la surface [(—); sonde capacitive] et de l'interface [(- -); sonde ultra-sonore] lors du passage d'une onde interne

Cet essai renforce notre confiance envers les sondes capacitatives pour la mesure des niveaux de surface en présence de gradient de salinité. En effet, on mesure une élévation de niveau de surface au passage de l'onde interne (dépression de l'interface) dont l'amplitude (de 1 à 2 mm) est comparable à celle que l'on estime à l'aide d'une théorie KdV en bi-couche pour cette condition d'onde interne [51]. En effet, cette théorie prévoit une élévation du niveau de surface H_2 donnée par :

$$\epsilon H_2 = \frac{H_0 - H'}{h_c - H'} h_2 \quad (6.1)$$

en respectant les notations de la figure (6.12) et de [51], et avec :

$$H' = H_0 - \frac{C_0^2}{g}$$

$$\frac{h_c^2 (H_0 - h_c)}{(H' - h_c)^3} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$C_0 = \frac{g H_0}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4 h_c (h_c - H_0) (\rho - \rho_0)}{\rho H_0^2}} \right]$$

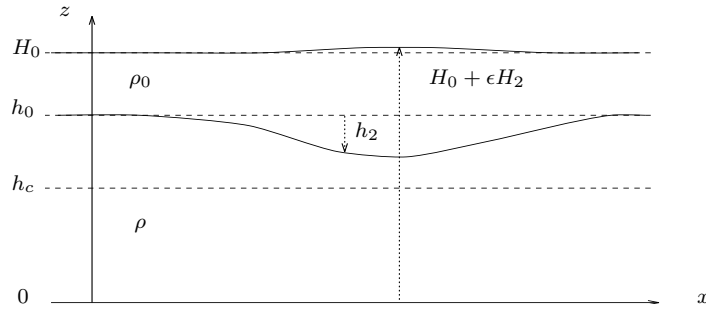


FIG. 6.12 – Notations correspondant à la formule (6.1)

Pour un déplacement de l'interface $h_2 \geq 5$ cm, le déplacement de surface, pour un rapport de densité de 5 % et une profondeur totale de 40 cm, est $\epsilon H_2 \geq 12$ mm, en accord avec celui mesuré lors de l'essai représenté sur la figure 6.11.

6.2.4 Mesures des niveaux d'interface

Les mesures de niveaux d'interface sont menées à l'aide de sondes ultra-sonores. La première utilisation de ce type de sonde a été décrite par Fleury et al. [23] pour une application à la mesure d'une épaisseur d'interface d'une stratification saline. Une description détaillée des sondes et de leur principe de fonctionnement est donnée par Michallet et Barthelémy [52] dans une application à la mesure des déplacements de l'interface de deux fluides non miscibles.

Dans le cas d'une stratification saline, la mesure des déplacements de la pycnocline est un peu plus délicate et suppose quelques hypothèses.

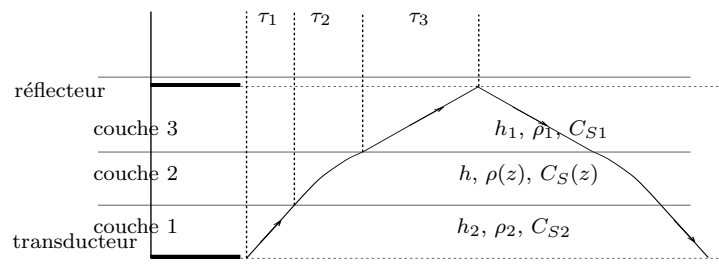


FIG. 6.13 – Schéma de principe des sondes à ultra-sons en milieu stratifié

Le temps de parcours aller-retour d'un pulse ultra-sonore dans le milieu représenté sur la figure (6.13) est noté τ avec $\tau = 2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)$ où τ_i est le temps de parcours du pulse dans la couche i . Dans les couches supérieure et inférieure, la salinité est constante, donc la célérité du son dans l'eau salée qui est proportionnelle à la salinité, l'est également. Ainsi, le temps de parcours du pulse dans chacune des couches est proportionnel à l'épaisseur de cette couche, soit : $\tau_1 = \frac{h_1}{C_{S1}}$ et $\tau_3 = \frac{h_2}{C_{S2}}$.

Par contre, dans la couche intermédiaire (pycnocline) où la salinité varie (a priori de façon quelconque), ce n'est pas le cas. Cependant, si l'on suppose que lors de son déplacement, la pycnocline reste inchangée tant en épaisseur qu'en répartition de densité, pour un déplacement de δh donné (positif vers le bas), la variation du

temps de parcours du pulse $\delta\tau$ est :

$$\delta\tau = 2\delta h \frac{C_{S2} - C_{S1}}{C_{S2}C_{S1}} \quad (6.2)$$

La tension délivrée par le suiveur des ultra-sons étant directement proportionnelle à ce retard ou cette avance temporel, la tension délivrée par le suiveur est donc directement proportionnelle au déplacement de la pycnocline. Il est à noter que pratiquement, la pycnocline ne se déplace pas "en masse". En conséquence, le temps de parcours du pulse dans la pycnocline τ_2 n'est pas constant. Néanmoins, la variation du temps de parcours due à cette modification est négligeable pour les différences de densité considérées.

6.3 Essais d'interaction

6.3.1 Qualification du milieu stratifié : bi-couche équivalent

Les essais d'interaction ont tous été réalisés en juillet 1997, durant une période de forte chaleur. Cela s'est traduit par une évaporation intense, entraînant d'une part une baisse de la hauteur d'eau totale (3 mm sur 2 jours) et d'autre part, des profils de densité caractéristiques. Sur la figure (6.14), l'évolution sur 2 jours de la stratification est représentée.

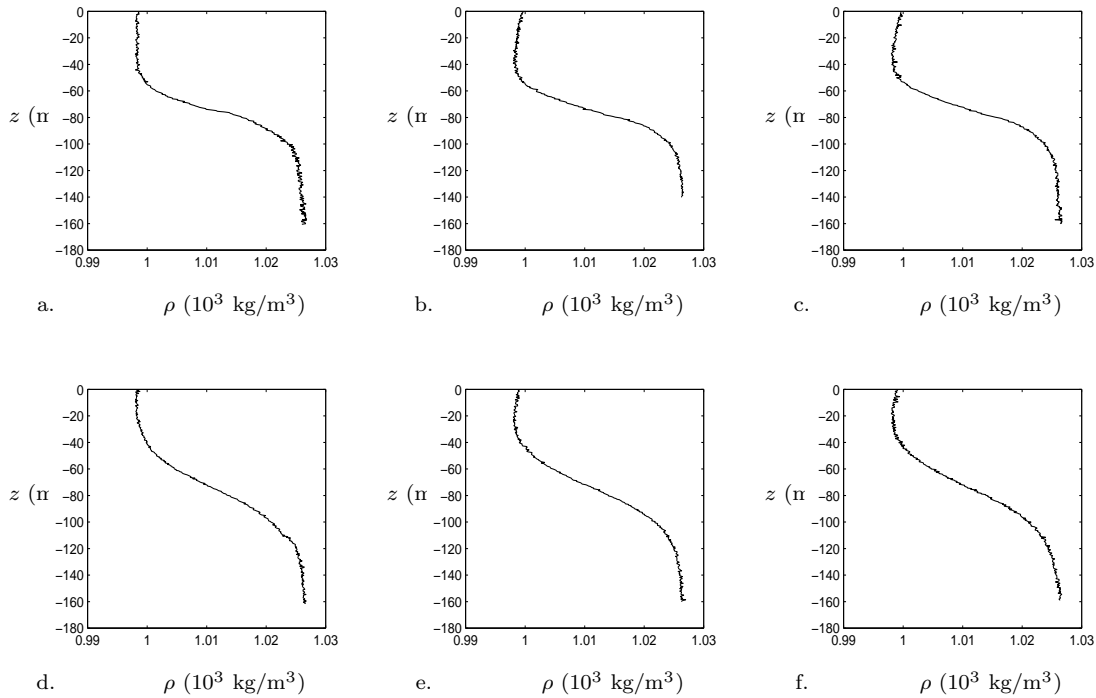


FIG. 6.14 – Evolution de la stratification sur 2 jours pour un rapport de couche initial de 0.8 et un rapport de densité initial de 2.7 % : le 08/07/1997 à 10h10 (a), à 14h20 (b) et à 18h (c) ; le 09/07/1997 à 10h30 (d.), à 14h30 (e) et à 19h30 (f)

On observe le matin jusqu'à 11 heures une stratification statiquement stable, composée de 2 couches de densité constante séparées par une pycnocline marquée. Puis le reste de la journée jusqu'en soirée, cette stratification évolue vers un profil statiquement instable, avec près de la surface, une couche de quelques mm plus lourde. Cette anomalie n'est pas liée à des vitesses résiduelles d'un essai, puisqu'elle se retrouve même après des temps longs de repos. De plus, cette anomalie est stationnaire car elle se retrouve tout au long de l'après-midi. On l'explique par l'existence d'une forte évaporation sur la période, tendant à refroidir les couches supérieures. Ce phénomène est dynamiquement stable si le taux d'évaporation est constant et n'engendre qu'une vitesse en surface liée au débit évaporant. En particulier, la stratification n'est pas stable en fin de journée lorsque le taux d'évaporation diminue et en début de journée, lorsqu'il augmente.

Dans la tentative de classification des profils de densité que l'on a essayé de mettre au point, on choisit de ne prendre en compte que la diminution de hauteur totale due à l'évaporation et de négliger la variation de densité en surface, qui est somme toute assez faible. Ainsi, on corrige les profils de densité en les interpolant par une fonction tanh. Ce choix d'interpolation est tout à fait adapté aux stratifications mesurées au cours de cette campagne d'essais (excepté près de la surface bien sûr) comme le montre la figure (6.15).

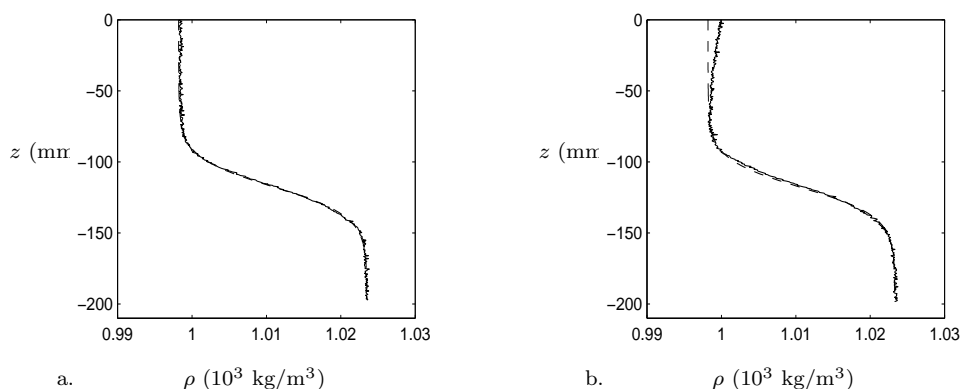


FIG. 6.15 – (a) Profil de densité mesuré le 29/07/97 à 11h (—) et profil de densité de la forme tanh ajusté sur le profil mesuré (- -) (b) même chose pour le 29/07/97 à 17h15

Pour chaque profil tanh ajusté sur un profil mesuré, on calcule ensuite les modes verticaux dans l'approximation de Korteweg-De Vries comme présenté en annexe D. Plutôt que les modes verticaux linéaires, on préfère l'approximation de Korteweg-De Vries, l'onde interne étudiée étant du type onde solitaire. Ce calcul permet en effet de déterminer la célérité critique linéaire c_0 associé au 1^{er} mode (à savoir le mode interfacial) et le profil de la fonction de courant propre ϕ associé à ce mode. On en déduira ainsi les coefficients de l'équation KdV stratifié donnée par Kao et al. [35] ou E-KdV donnée par Helfrich et Melville [29].

Cependant, avant de s'intéresser à l'onde solitaire, le calcul des modes verticaux va nous permettre de caractériser les stratifications à l'aide d'un bi-couche équivalent. Sur la figure (6.16), on présente un profil en tanh ajusté, le profil de fréquence de Brunt-Väisälä associé ainsi que la fonction propre associée au 1^{er} mode, le plus rapide.

Sont également représentés les bi-couches équivalents que l'on peut définir de manière

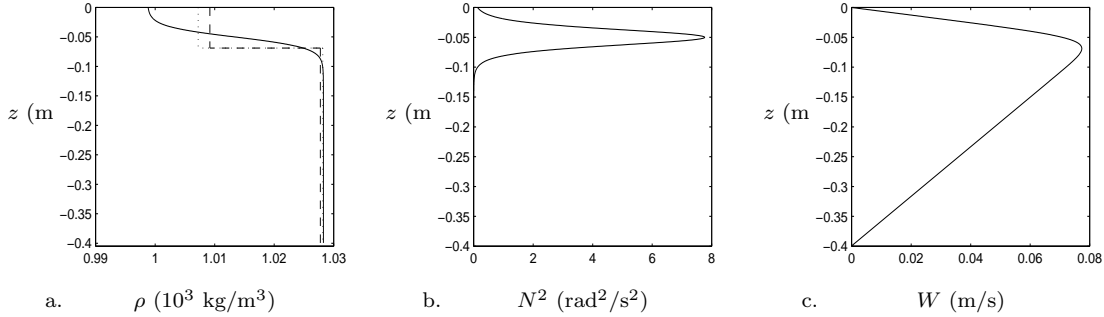


FIG. 6.16 – (a) Profil en tanh ajusté sur le profil mesuré le 05/07/97 à 12h15 (—) et bi-couche équivalent calculé par la méthode 1 (- -) et par la méthode 2 (...); (b) distribution verticale de fréquence de Brunt-Väisälä associée; (c) fonction propre (déplacement) associée au 1^{er} mode

unique par les deux méthodes suivantes. Dans les deux cas, le niveau de l'interface est placé au maximum de vitesse verticale. Puis, les conventions des deux méthodes sont :

- méthode 1 : les densités dans chaque couche sont calculées en égalant les masses du bi-couche et de la stratification continue de part et d'autre de l'interface
- méthode 2 : on égale d'une part les célérités linéaires ondes longues du bi-couche et du 1^{er} mode de la stratification continue et d'autre part, la masse totale du bi-couche et de la stratification.

Sur la figure (6.17), on représente les bi-couches équivalents, obtenus pour chaque stratification mesurée par les deux méthodes. Ils sont caractérisés par un rapport de couche en abscisse et un de rapport de densité en ordonnée. Les deux conventions permettent de distinguer les bi-couches seulement par leur rapport de densité. En effet, un même stratification produit un rapport de couche et deux rapports de densité suivant la convention choisie.

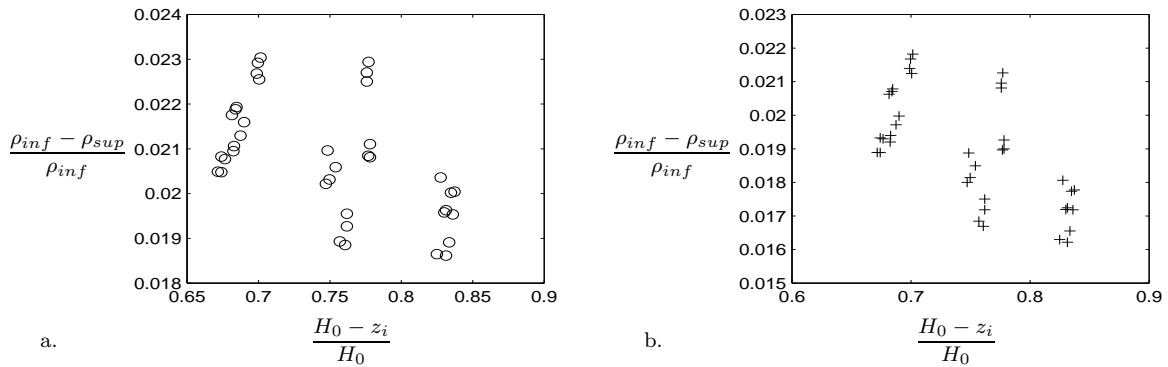


FIG. 6.17 – Caractéristiques du bi-couche équivalent calculé par : (a) méthode 1 (b) méthode 2

On arrive ainsi à distinguer 3 groupes relativement homogènes de bi-couches équivalents, dont nous reportons les caractéristiques dans le tableau (6.2).

groupe	méthode 1		méthode 2
	$R_c = \frac{H_0 - z_i}{H_0}$	$R_d = \frac{\rho_{inf} - \rho_{sup}}{\rho_{inf}} (\%)$	$R_d = \frac{\rho_{inf} - \rho_{sup}}{\rho_{inf}} (\%)$
1	0.832	1.95	1.71
2	0.764	2.07	1.87
3	0.685	2.16	2.02

TAB. 6.2 – *Caractéristiques des 3 groupes de bi-couches équivalents obtenues par les 2 méthodes proposées pour la détermination du bi-couche équivalent*

Les rapports de couche sont représentatifs à moins de 2 % près et les rapports de densité à moins de 10 % près.

6.3.2 Caractérisation des ondes solitaires internes : test de l'hypothèse bi-couche équivalent

Notons tout d'abord que les rapports de couche obtenus lors de la détermination des bi-couches équivalents placent l'interface plus près de la surface que du niveau critique pour les groupes 1 et 2 de bi-couches équivalents alors que pour le groupe 3, c'est l'inverse. Or d'après Michallet [51], quand l'interface est proche de la surface, les ondes solitaires sont bien décrites par l'équation de KdV alors que lorsque l'interface est proche du niveau critique, l'équation m-KdV est mieux adaptée. Afin de ne pas compliquer l'argumentaire autour de l'hypothèse bi-couche, on se contente de comparer les lois KdV en bi-couche et en milieu stratifié. On laisse donc de côté les lois m-KdV en bi-couche et leur équivalent en milieu stratifié EKdV proposé par Helfrich et Melville [29]. Sur les figures (6.18), on compare les célérités prévues par KdV en milieu stratifié à celles obtenues par KdV en bi-couche pour les bi-couches équivalents déterminés par les 2 méthodes présentées au paragraphe précédent. La courbe célérité c en fonction de l'amplitude réduite $\frac{A}{H_0}$ de KdV stratifié est décrite par :

$$c = c_0 \left(1 + \frac{2}{3} r \frac{A}{H_0} \right) \quad (6.3)$$

L'équation (6.3) dépend de deux paramètres r et c_0 , déterminés à partir de la décomposition en modes propres verticaux de chaque profil de densité mesuré. c_0 est la célérité du 1^{er} mode propre du problème aux valeurs propres dans l'approximation de Korteweg-De Vries décrite en annexe D. Le paramètre r est alors défini comme suit :

$$r = -\frac{3}{4} \frac{\int_0^1 \rho(\phi')^3 dz}{\int_0^1 \rho(\phi')^2 dz} \quad (6.4)$$

où ϕ' est la dérivée par rapport à z de la fonction propre ϕ associée à c_0 . Sur chaque figure (6.18), la courbe en trait plein centrale est la courbe KdV stratifiée obtenue pour la moyenne des paramètres r et c_0 dans chaque groupe de bi-couche équivalent. Les courbes en trait plein qui l'encadrent sont déduites de l'écart-type des paramètres r et c_0 .

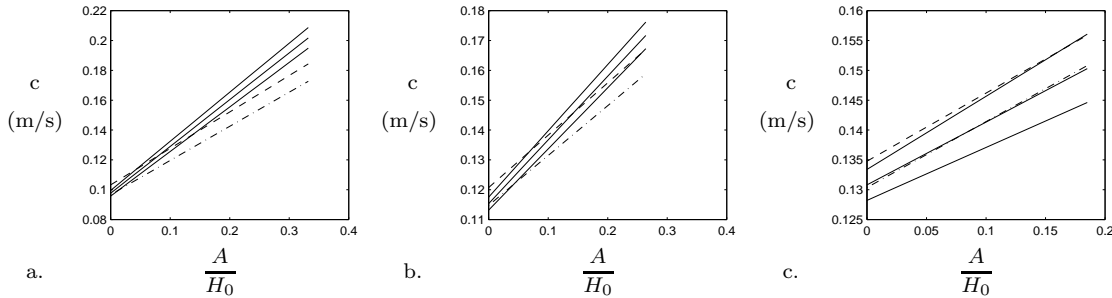


FIG. 6.18 – Célérité en fonction de l'amplitude réduite de l'onde solitaire obtenue par une loi : (—) KdV stratifié et son intervalle de confiance ; (- -) KdV bi-couche [méthode 1] ; (-.-) KdV bi-couche [méthode 2] pour différents rapports de couche initiaux : (a) groupe 1 (b) groupe 2 (c) groupe 3

Cette comparaison entre les théories KdV stratifié et KdV bi-couche montre que ces théories ne sont pas équivalentes pour les bi-couches équivalents déterminés, et ce d'autant plus que la couche la plus mince est mince. En effet, pour le rapport de couche de l'ordre de 0.68, les deux théories sont très proches alors que pour le rapport de couche de l'ordre de 0.83, elles sont très éloignées. Reste que c'est la 2^e méthode de détermination du bi-couche équivalent qui donne le meilleur accord, en particulier parce que la célérité minima est conservée. On peut penser à la suite de cette comparaison que lorsque la distance interface-surface est de l'ordre de l'épaisseur de l'interface, l'hypothèse bi-couche n'est pas adéquate. A l'inverse, lorsque l'épaisseur de l'interface est plus petite que la distance interface-surface, c'est-à-dire lorsque l'interface sépare de façon nette deux couches de densité constante, la 2^e méthode de détermination du bi-couche équivalent donne de meilleurs résultats que la première. Pour chaque essai d'interaction, on mesure l'amplitude et la célérité de l'onde solitaire. L'amplitude est la moyenne des maxima de dénivelées d'interface mesurées sur le peigne de sonde. La célérité est la moyenne des célérités déduites de la distance entre la sonde amont et chaque sonde du peigne rapportée au temps séparant les maxima des déplacements d'interface. Ce choix permet théoriquement d'obtenir la célérité avec une précision de moins de 1 % alors que si la célérité était estimée entre 2 sondes du peigne, l'incertitude serait de 10 % environ. Cependant, l'estimation de la célérité retenue n'est pratiquement valable que pour les interactions faibles où l'onde solitaire n'est pas ralentie dans sa propagation par le passage sous le batteur plongeant. De plus, ces estimations étant faites sur des essais d'interaction, cela suppose également que la houle ne modifie pas la célérité de l'onde solitaire. Sur les figures (6.19), on compare la célérité mesurée à celle prédite par KdV stratifié en fonction de l'amplitude réduite de l'onde solitaire et pour les paramètres déterminés sur les profils de densité réalisés en parallèle des essais d'interactions.

Il est clair que le passage sous le coin ralentit l'onde solitaire interne et ce d'autant plus que l'interface se trouve près de la surface comme le montre les célérités mesurées sur les essais d'interaction forte. Par contre, il semble que la houle ne modifie pas la célérité de l'onde solitaire puisqu'au moins pour les rapports de couches initiaux de 0.875 et 0.8, la célérité mesurée est en assez bon accord à 5 % près avec celle prédite par KdV stratifié pour les essais d'interaction faible.

Pour les rapports de couche initiaux de 0.7, les célérités mesurées en interaction

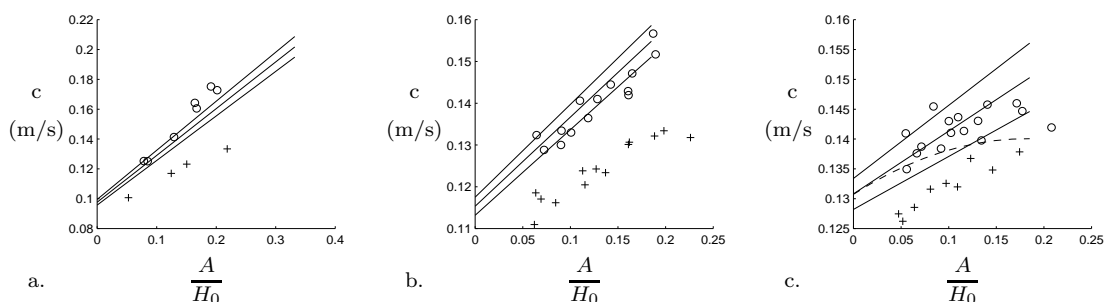


FIG. 6.19 – Célérité en fonction de l'amplitude réduite de l'onde solitaire obtenue par une loi KdV stratifié (—) comparée aux célérités expérimentales mesurées en interaction forte (+) et faible (o) pour différents rapports de couche initiaux : (a) groupe 1 (b) groupe 2 (c) groupe 3 [(- -) célérité en fonction de l'amplitude réduite de l'onde solitaire obtenue par une loi m-KdV pour le bi-couche équivalent]

faible présentent une tendance à suivre une loi m-KdV plutôt que KdV. Ceci est conforme aux conclusions de Michallet puisque l'interface est alors plus proche du niveau critique que de la surface. Enfin, compte-tenu du bon accord trouvé en interaction faible entre les célérités mesurées et prédites par KdV stratifié dans la majorité des cas, la célérité prédite par KdV stratifié sera utilisée comme paramètre de l'interaction dans la suite.

6.3.3 Dépouillement des essais d'interaction : modulation de la houle de surface

Deux exemples représentatifs des essais d'interactions forte [figure 6.20] et faible [figure 6.21] sont représentés.

Sur chaque groupe de figures, la dénivelée d'interface est présentée en trait tireté et la dénivelée de surface est présentée en trait plein. Sur les figures (a) est représentée l'onde solitaire avant l'interaction (mesure à l'amont) et sur les figures (b) à (f), est mesurée l'interaction. On s'intéresse particulièrement sur ces mesures à la signature de l'interaction visible sur la houle de surface.

Pour ce faire, en s'inspirant des résultats obtenus expérimentalement pour l'interaction entre une houle de surface et une onde solitaire de surface, on s'est intéressé dans un premier temps aux variations de nombre d'onde de l'onde de surface. Il s'est rapidement avéré que ces variations n'étaient pas suffisamment importantes pour être mesurables avec une bonne précision, ce qui est en accord avec ce que prévoit le calcul de réfraction sur courants variables de Mei [48] transposé au cas de l'onde solitaire interne en bi-couche. Sur la figure (6.22), on représente le déphasage dimensionnel $\delta\phi$ d'une houle de surface de fréquence 2 Hz en fonction de l'amplitude de l'onde interne A en interaction forte et faible pour un rapport de couche de 0.8 et un rapport de densité de 0.03 %.

Ces modulations sont calculées en utilisant la relation de dispersion (4.1) où le champ de vitesse réfractant U est celui associé à l'onde interne dans le repère lié à l'onde dans la couche supérieure et s'écrit :

$$U = c_0 \left(\frac{A}{H_0 - h_0 \cosh^2(\lambda X)} - 1 \right) \quad (6.5)$$

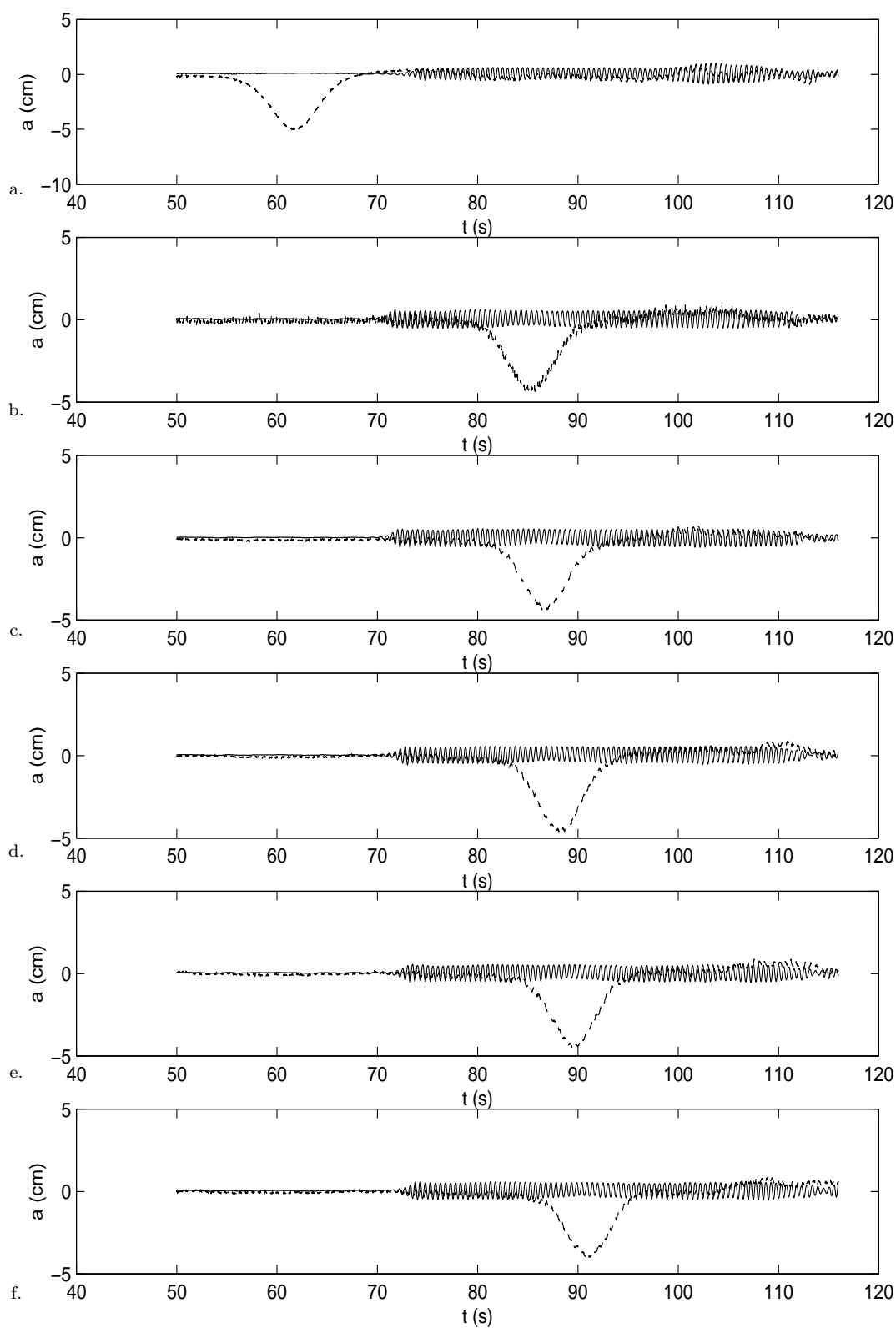


FIG. 6.20 – Mesures des dénivelées de surface (—) et d'interface (- -) lors d'une interaction forte entre de la houle de surface de fréquence 2.5 Hz ($ak \sim 0.15$) et une onde solitaire interne à différentes distances repérées depuis l'extrémité du canal où est générée l'onde solitaire : (a) $x=7.05$ m ; (b) $x=10$ m ; (c) $x=10.2$; (d) $x=10.4$; (e) $x=10.6$; (f) $x=10.8$

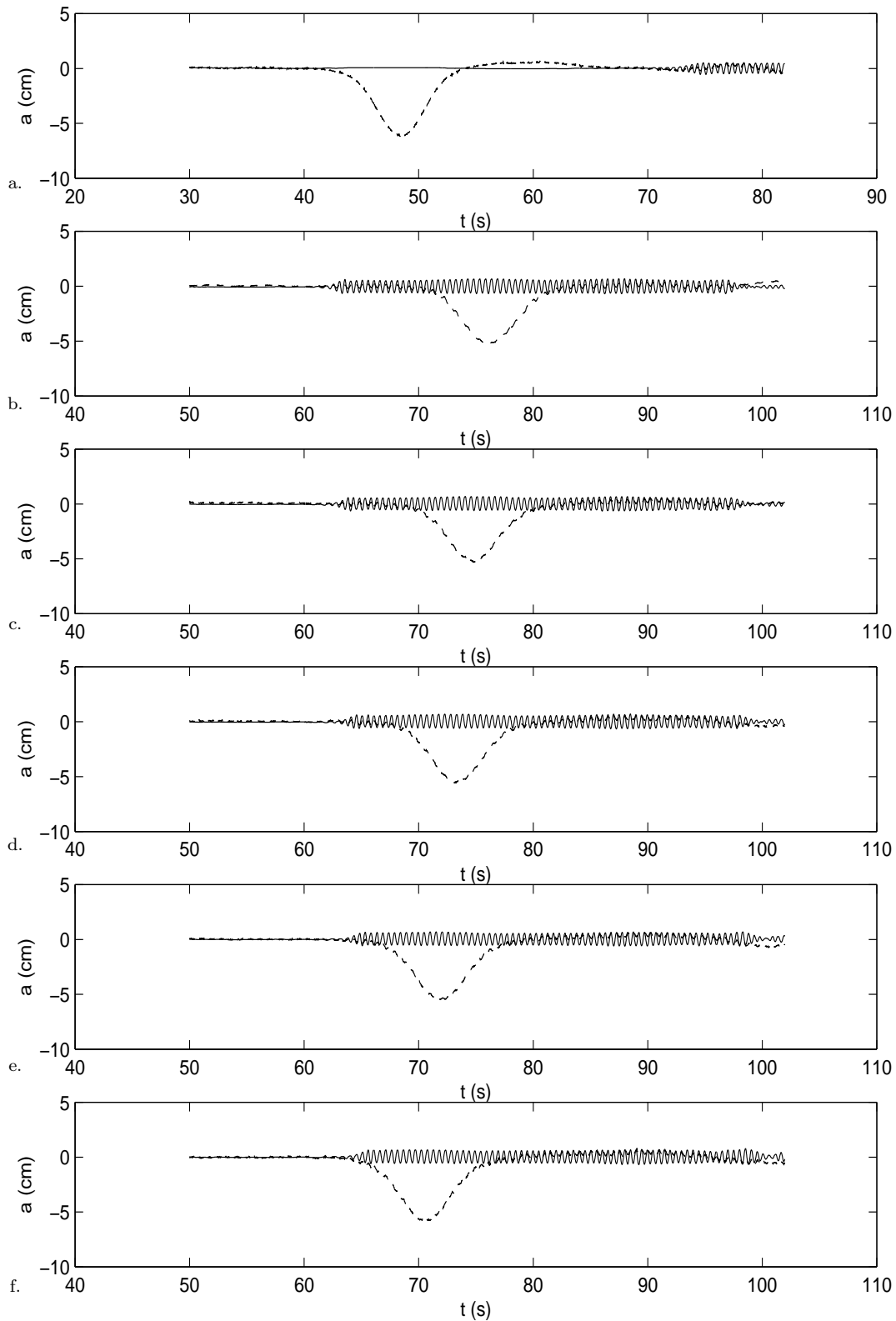


FIG. 6.21 – Mesures des dénivelées de surface (—) et d'interface (- -) lors d'une interaction faible entre de la houle de surface de fréquence 2.5 Hz ($ak \sim 0.15$) et une onde solitaire interne à différentes distances repérées depuis l'extrémité du canal où est générée l'onde solitaire : (a) $x=4.7$ m ; (b) $x=8.7$ m ; (c) $x=8.5$ m ; (d) $x=8.3$ m ; (e) $x=8.1$ m ; (f) $x=7.9$ m

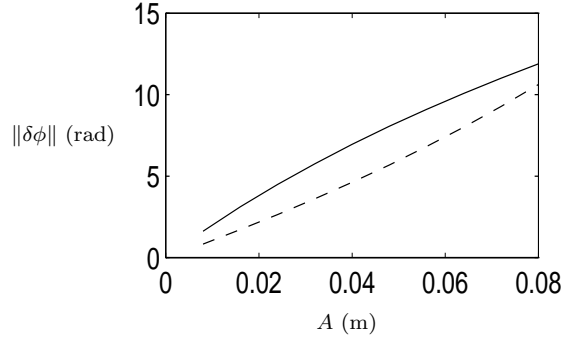


FIG. 6.22 – Valeur absolue du déphasage dimensionnel $\|\delta\phi\|$ d'une houle de surface de fréquence 2 Hz en fonction de l'amplitude de l'onde solitaire interne A en bi-couche, le bi-couche est caractérisé par le rapport de densité $\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = 0.03$ et le rapport de couche $R = \frac{H_0 - h_0}{H_0} = 0.8$: (—) interaction forte (- -) interaction faible

avec $c_0^2 = \frac{g(\rho - \rho_0)}{\frac{\rho}{h_0} + \frac{\rho_0}{H_0 - h_0}}$ la célérité de groupe des ondes solitaires de petites ampli-

tudes par une loi KdV en bi-couche et avec toit rigide (Michallet, [51]), A l'amplitude de l'onde solitaire, H_0 la profondeur totale d'eau, h_0 l'épaisseur de la couche inférieure, g l'accélération de la gravité, ρ et ρ_0 les densités respectives des couches inférieure et supérieure. On observe sur la figure (6.22) que la valeur absolue du déphasage dimensionnel ne dépasse 2π que pour les ondes solitaires de grandes amplitudes, ondes solitaires que nous n'avons pas pu obtenir expérimentalement. Dans la plupart des cas, la théorie prévoit donc que le déphasage dimensionnel varie dans une fourchette restreinte entre 0 et 2π , ce qui est également observé expérimentalement. Ceci s'explique par le fait que le champ de vitesse associé à l'onde interne est très faible et donc ralentit ou accélère peu la houle. Ainsi, il est difficile d'obtenir une courbe expérimentale du déphasage avec une bonne précision, compte-tenu de l'erreur de détermination sur le déphasage et des faibles variations du déphasage avec l'amplitude de l'onde solitaire.

Par contre, il apparaît visiblement sur les essais que l'amplitude de la houle de surface est modulée au cours de l'interaction. Cette modulation, qui à l'inverse n'était pas "extractable" sur les essais d'interaction avec une onde solitaire externe, est mise en évidence théoriquement sous la forme de la conservation de l'action d'onde présentée par Mei [48] dans l'étude de la réfraction sur des courants lentement variables. On voit donc ici tout l'intérêt qu'il y avait à effectivement mener des essais d'interaction avec une onde solitaire interne.

Sur l'ensemble des essais d'interaction réalisés, on observe une diminution d'amplitude dans le cas des interactions fortes (co-courant) et une augmentation d'amplitude dans le cas des interactions faibles (contre-courant), et ce quels que soient l'amplitude de l'onde solitaire, le rapport de couche et la fréquence de la houle de surface. Ces modulations se présentent sous forme d'une modulation lente de l'amplitude et donc présentent une enveloppe. Il faut également remarquer que l'enveloppe n'est

pas symétrique par rapport au niveau au repos de la surface libre. Il nous semble que cette dissymétrie est attribuable à l'élévation du niveau de surface au passage de l'onde solitaire mentionnée au paragraphe 6.2.3. Ainsi cette élévation de grande longueur caractéristique se superpose aux modulations du train d'onde dont la longueur caractéristique semble être la même. En effet, comme on peut l'observer sur les exemples des figures (6.23), en interaction faible, l'enveloppe supérieure présente une déformation bien plus accentuée que l'enveloppe inférieure pour laquelle l'effet du soulèvement du niveau de surface compense l'effet de l'augmentation d'amplitude. Pour l'interaction forte, c'est l'inverse.

Afin de corriger l'effet du soulèvement de la surface due à l'onde solitaire dans l'estimation de la modulation d'amplitude liée à l'interaction, on soustrait l'enveloppe inférieure à l'enveloppe supérieure. La modulation maxima a_{max} est ensuite relevée sur la différence des deux enveloppes comme elle est représentée sur les figures (6.23). Cette modulation maxima correspondant au pic de l'onde solitaire se situe vers $t = 82$ s sur la figure (6.23.a) et vers $t = 79$ s sur la figure (6.23.b). L'amplitude de la houle hors interaction a_0 est mesuré de préférence avant l'interaction lorsque le décalage entre le train de houle de surface et l'onde solitaire le permet. Pour les interactions fortes, ce point ne pose pas de difficulté, mais pour les interactions faibles, il n'est parfois pas possible de mesurer l'amplitude de la houle hors interaction sur la partie amont. Or l'estimation de l'amplitude de la houle sur la partie aval soulève une question, à savoir si la houle n'est pas modulée par les perturbations éventuelles qui suivent l'onde solitaire. Sur les exemples représentés sur les figures (6.20) et (6.21), l'onde solitaire n'est pas suivie de perturbations importantes, ce qui est quasiment toujours le cas pour le rapport de couche initial de 0.8. Par contre, pour les rapports de couches initiaux de 0.7 et 0.875, les ondes solitaires obtenues sont suivies de perturbations bien plus importantes voire d'une seconde onde solitaire. Dans ces cas, la modulation d'amplitude n'a pu être estimée avec fiabilité et les essais n'ont donc pas été conservés.

Le carré des modulations maxima d'amplitude mesurées sur les essais considérés comme fiables sont représentés sur la figure (6.24) en fonction du rapport de la différence de célérité de la houle et de l'onde solitaire dans le repère stationnaire de l'onde solitaire prise au pic de l'onde solitaire et loin à l'amont ou à l'aval.

Cette représentation est inspirée de la conservation de l'action d'onde (ou "wave action") que l'on a obtenu au chapitre 4. Cette conservation entre le pic de l'onde solitaire et loin à l'amont s'écrit en effet :

$$\left(\frac{a_{max}}{a_0}\right)^2 = \frac{\sigma}{\sigma_0} \frac{c_g - c}{c_g - c + u_{max}} \quad (6.6)$$

avec :

- a_0 , l'amplitude de l'onde courte hors interaction,
- a_{max} , l'amplitude de l'onde courte au pic de l'onde solitaire i.e. au maximum de modulation,
- σ_0 , la fréquence intrinsèque de l'onde courte hors interaction,
- σ , la fréquence intrinsèque de l'onde courte au pic de l'onde solitaire i.e. au maximum de modulation,

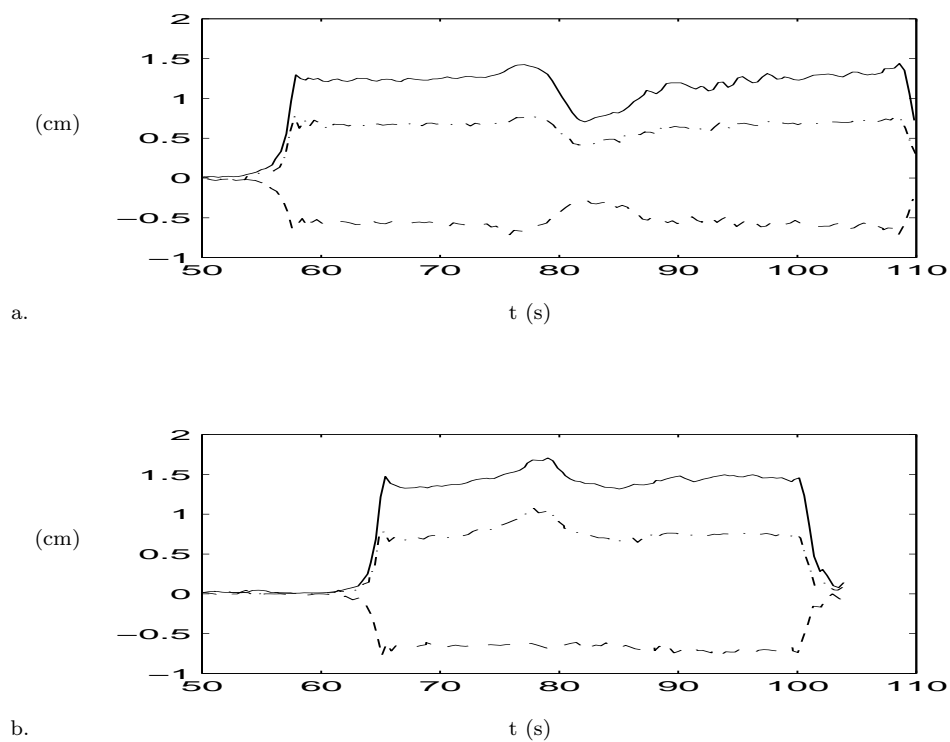


FIG. 6.23 – Enveloppes inférieure (- -), supérieure (-.-) et différence (—) d'un enregistrement de houle de surface en interaction forte (a) et faible (b) avec une onde solitaire interne

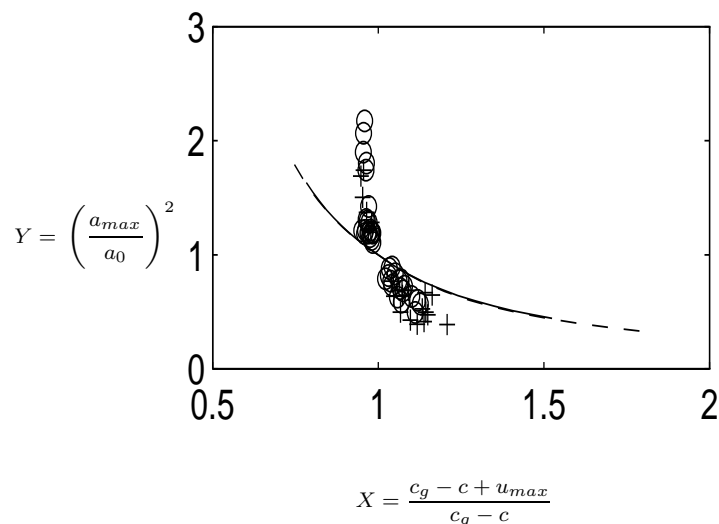


FIG. 6.24 – Carré du maximum de modulation d'amplitude de la houle courte en fonction du rapport de la différence de célérité de la houle et de l'onde solitaire dans le repère stationnaire de l'onde solitaire prise au pic de l'onde solitaire et loin à l'amont ou à l'aval : (○) expériences pour $f=2$ Hz et (+) expériences pour $f=2.5$ Hz; (—) conservation de l'action d'onde pour $f=2$ Hz et (- -) conservation de l'action d'onde pour $f=2.5$ Hz

- c_g , la célérité de groupe de l'onde courte hors interaction,
- c , la célérité de groupe de l'onde solitaire d'amplitude A pour une loi KdV stratifié définie par (6.3),
- A , l'amplitude de l'onde solitaire,
- H_0 , la profondeur totale d'eau,
- $u_{max} = c_0 \frac{A}{H_0 - h_0}$, la vitesse horizontale maximum au-dessus de la pycnocline d'après Kao et al. [35],
- h_0 est défini par $\rho(h_0) = \frac{\rho(z = H_0) + \rho(z = 0)}{2}$, avec $z = 0$ au fond et $z = H_0$ à la surface libre.

En effet, dans la représentation choisie, l'équation (6.6) est celle d'une hyperbole, à savoir :

$$Y = \frac{\sigma}{\sigma_0} \frac{1}{X} \quad (6.7)$$

Sur la figure (6.24), la conservation de l'action d'onde (6.6) est représentée en trait plein pour $f=2$ Hz et en trait tiret pour $f=2.5$ Hz en calculant la célérité de l'onde solitaire interne par une loi KdV stratifié. Il est à noter que dans la représentation

de la figure (6.24), les deux courbes théoriques se distinguent peu en fonction de la fréquence, tout comme les résultats expérimentaux. Ceci confirme que la modulation de la fréquence intrinsèque est faible ($\frac{\sigma}{\sigma_0} \sim 1$) au cours de l'interaction (ce que nous avons vu à travers l'étude du déphasage).

Dans les deux séries d'essais d'interactions faible et forte, les tendances des modulations (augmentation ou diminution) sont en accord avec la conservation de l'action d'onde. Cependant, quantitativement, les expériences montrent des modulations plus accentuées que ne le prédit la conservation de l'action d'onde. Sur ce point, il nous faut revenir sur les hypothèses qui permettent d'obtenir la conservation de l'action d'onde à savoir $\delta \ll \mu$. En effet, il n'est pas simple d'exprimer chacun de ces petits paramètres en fonction des ordres de grandeurs des deux ondes en présence. Il est même légitime de douter que dans le cas de l'interaction entre une onde solitaire interne et de la houle de surface, le calcul du chapitre 4 s'applique.

Sur la figure (6.25), on représente les modulations d'amplitude $\frac{a_{max}}{a_0}$ en fonction de $\frac{c_g - c}{c_g - c + u_{max}}$ sous forme logarithmique ce qui permet de tester l'hypothèse d'une loi puissance entre X et Y .

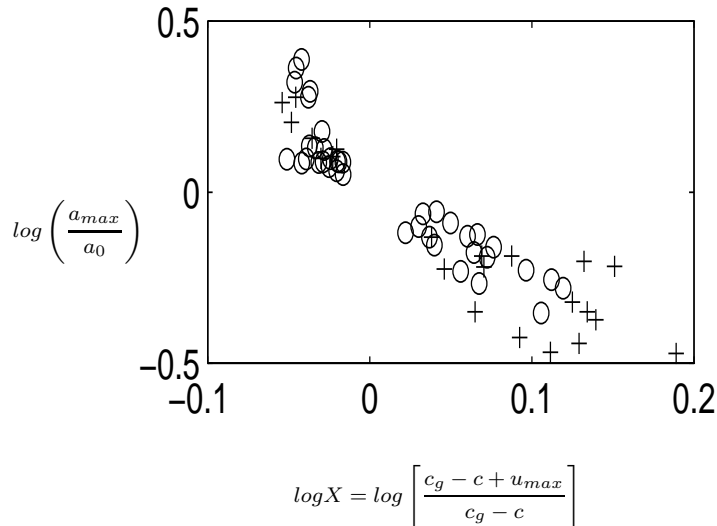


FIG. 6.25 – Logarithme du maximum de modulation d'amplitude de la houle courte en fonction du logarithme du rapport de la différence de célérité de la houle et de l'onde solitaire dans le repère stationnaire de l'onde solitaire prise au pic de l'onde solitaire et loin à l'amont ou à l'aval : (o) expériences pour $f=2$ Hz et (+) expériences pour $f=2.5$ Hz

Il semble que la loi reliant X et Y ne soit pas si simple et qu'un ajustement par une fonction puissance n'est pas suffisant.

6.4 Conclusion

Une série d'expériences originales d'interaction entre une onde solitaire interne se propageant dans un milieu stratifié en salinité proche d'un bi-couche et une onde de surface monochromatique de longueur caractéristique 2 à 3 fois plus faible que l'onde interne a été menée. Ces expériences ont dans un premier temps mis en évidence la difficulté que l'on peut rencontrer à réduire le nombre de paramètres en écoulement stratifié, et en particulier à réduire une stratification à un bi-couche équivalent.

Le résultat principal qui ressort de ces expériences réside dans les modulations de l'onde de surface que l'on a pu mesurer, et plus précisément les modulations d'amplitude. En interaction forte, on observe des diminutions d'amplitude alors qu'en interaction faible, l'amplitude augmente. Représenté en fonction du rapport de la différence de célérité de la houle et de l'onde solitaire dans le repère stationnaire de l'onde solitaire prise au pic de l'onde solitaire et loin à l'amont ou à l'aval, le carré de la modulation d'amplitude ne suit pas l'hyperbole de la conservation de l'action d'onde. Enfin, la loi liant la modulation maxima d'amplitude au rapport de la différence de célérité de la houle et de l'onde solitaire dans le repère stationnaire de l'onde solitaire prise au pic de l'onde solitaire et loin à l'amont ou à l'aval ne semble pas être une loi puissance. Des essais complémentaires pour d'autres conditions expérimentales sont à réaliser pour espérer dégager une loi décrivant les modulations d'amplitude. Théoriquement, le problème de l'interaction est à reprendre en tenant compte des différents ordres de grandeur, sachant que le calcul ne peut être mené analytiquement dans le cas général (Rizk & Ko [67]).

Chapitre 7

Conclusion

Qu'avons-nous appris sur les ondes longues internes ? Tout d'abord, relativement à leur génération, en introduisant la rotation et l'incidence oblique de la marée barotrope sur une marche en bi-couche dans un modèle d'ondes longues, il a été montré que :

- si la rotation joue un rôle sur le calcul des longueurs d'onde, elle ne joue aucun rôle dans le calcul des amplitudes des ondes internes générées à la marche lorsque la marée barotrope arrive en incidence normale sur la marche,
- l'incidence oblique de la marée barotrope joue un rôle non négligeable sur le calcul des amplitudes des ondes internes générées, ce paramètre n'est donc pas à négliger,
- les amplitudes prédites par le modèle de Baines [2] sont retrouvées en utilisant comme débit de forçage dans le modèle de Baines, le débit barotrope perpendiculaire à la marche calculé dans notre modèle,
- enfin, comparé à des mesures in-situ sur le Malin Shelf, ce modèle a été validé tant sur l'amplitude que sur les énergies de l'onde interne transmise sur la marche. Ceci montre la pertinence des paramètres physiques inclus dans le modèle.

La limite du modèle a été atteinte en tentant de le comparer à des mesures réalisées sur l'Iberian Shelf, site pour lequel aucun modèle à ce jour n'arrive à reproduire les ondes internes de très grandes amplitudes observées, le mécanisme de génération n'étant pas bien cerné.

Ensuite, dans le but de mieux comprendre l'interaction entre la houle de surface et les ondes longues internes, deux séries d'expériences ont été réalisées. Dans la première série, en faisant interagir une onde solitaire de surface et de la houle monochromatique barotrope, on a pu établir la validité de la relation de dispersion (4.1) lorsque les différences de longueurs d'onde des ondes en présence étaient suffisamment importantes (1 pour 5). Cette validation a été effectuée en comparant les déphasages de l'onde courte obtenus expérimentalement à ceux calculés à partir de la relation (4.1) pour des interactions dites fortes (les ondes se propagent dans la même direction) et dites faibles (les ondes se propagent en sens inverse). La relation de dispersion (4.1) ainsi que la conservation de l'action d'onde (4.2) ont été établies théoriquement pour le cas de l'interaction entre une onde solitaire de surface et une houle barotrope, moyennant certaines hypothèses sur les ordres de grandeur relatifs des deux ondes. Cependant, cette première série d'expériences n'a pas permis de valider la conservation de l'action d'onde, la mesure de la modulation d'amplitude n'étant pas possible.

Dans la seconde série d'expériences qui concerne des interactions entre de la houle de surface et une onde solitaire interne, ni la relation de dispersion ni la conservation de l'action d'onde n'ont pu être validées. D'une part, les déphasages induits par l'onde interne sont trop faibles pour être utilisés pour différencier deux ondes internes d'amplitudes différentes). D'autre part, on a pu effectivement mesurer des modulations d'amplitude notables, et même bien plus importantes que ne le prédirait la conservation de l'action d'onde. Aucune loi expérimentale n'a pu être établie et des expériences complémentaires nous semblent nécessaires pour arriver à une conclusion plus aboutie.

Enfin, relativement à la question de retrouver des informations sur les ondes internes à partir des images SAR, il ressort de ces résultats qu'il y a peu d'espoir d'observer des modulations significatives de longueurs d'onde des "swell" de surface, vu que le champ de vitesse associé aux ondes internes est faible (de l'ordre de quelques dizaines de cm/s). Les modulations d'amplitude quant à elles ne sont pas directement mesurables sur les images SAR, un radar altimétrique serait plus approprié. Par contre, l'étude du déferlement des ondes de surface sur une onde interne nous semble une piste à envisager.

Annexe A

Evolution d'une onde sinusoïdale dans l'équation des ondes longues non-linéaires dispersives

A.1 Calcul de la distance de fission

L'équation des ondes longues non-linéaires dispersives en bi-couche s'écrit :

$$\eta_t + c_0 \eta_x + c_0 \frac{3(h_2 - h_1)}{2h_1 h_2} \eta \eta_x = 0 \quad (\text{A.1})$$

où η est la dénivelée de l'interface, $c_0 = \sqrt{gh_1}$ la célérité de l'onde, h_1 et h_2 les épaisseurs respectives des couches supérieure et inférieure et en utilisant la notation indicelle des dérivations.

On effectue le changement de variable :

$$\begin{aligned} \theta &= x - c_0 t \\ \tau &= t \end{aligned}$$

L'équation (A.1) devient :

$$\eta_\tau + c_0 \frac{3(h_2 - h_1)}{2h_1 h_2} \eta \eta_\theta = 0 \quad (\text{A.2})$$

Il s'agit donc d'un problème aux caractéristiques dont les caractéristiques sont définies par :

$$\frac{d\theta}{d\tau} = c_0 \frac{3(h_2 - h_1)}{2h_1 h_2} \eta \quad (\text{A.3})$$

Le long des caractéristiques $\frac{d\eta}{d\tau} = 0$ donc $\eta(\tau, \theta) = \eta(0, \xi) = \eta_0(\xi)$ le long de la caractéristique passant par $(0, \xi)$.

Les caractéristiques sont donc des droites d'équation :

$$\theta = \xi + c_0 \frac{3(h_2 - h_1)}{2h_1 h_2} \eta_0(\xi) \tau \quad (\text{A.4})$$

Ainsi, connaissant ξ et $\eta_0(\xi)$, on connaît en tout point du plan (τ, θ) la solution $\eta(\tau, \theta)$.

On s'intéresse à présent à déterminer la limite où l'onde n'est plus stable qui apparaît en étudiant les variations de η_θ . En effet, en différenciant par rapport à θ et τ l'équation (A.4), on obtient l'expression de η_θ , soit :

$$\eta_\theta = \eta_{0\tau} \xi_\theta = \frac{\eta_{0\tau}}{1 + c_0 \frac{3(h_2 - h_1)}{2h_1 h_2} \eta_{0\tau} \tau} \quad (\text{A.5})$$

On en déduit que η_θ devient infini quand :

$$\tau_F = -\frac{2h_1 h_2}{3c_0(h_2 - h_1)\eta'_0} \quad (\text{A.6})$$

Ainsi, la distance de fission d'une onde donnée à $\tau = 0$ (décrite par $\eta_0(\xi)$) est :

$$\theta_F = -c_0 \tau_F = \frac{2h_1 h_2}{3(h_2 - h_1)\eta'_0} \quad (\text{A.7})$$

A.2 Application au calcul de la distance de fission d'une onde sinusoïdale

Soit une onde sinusoïdale donnée à l'instant $\tau = 0$ par :

$$\eta_0(\xi) = A \sin(k\xi) \quad (\text{A.8})$$

On en déduit que : $\eta'_0(\xi) = Ak \cos(k\xi)$. Ainsi, la distance de fission minimum est donc :

$$X_F = \frac{2h_1 h_2}{3(h_2 - h_1)Ak} \quad (\text{A.9})$$

Annexe B

L'onde solitaire en milieu homogène : solution exacte, solutions approchées et expériences

L'onde solitaire, observée par Russel en canal (1837, 1844), est une solution stationnaire exacte des équations d'Euler bidimensionnelles, c'est-à-dire, les équations décrivant un écoulement incompressible, non-visqueux, irrotationnel et stationnaire. Or, si mathématiquement, Boussinesq (1877), Rayleigh (1876), Korteweg & De Vries (1895) et enfin, Lavrentiev [42] ont montré l'existence d'une solution de type onde solitaire stationnaire, ainsi que certaines de ses propriétés (parité par exemple), ils n'en n'ont pas explicité la forme.

De nombreux auteurs ont pourtant proposé, moyennant certaines approximations, des solutions explicites approchées. C'est le cas des solutions très exploitées de l'eau peu profonde, de Korteweg & De Vries ou beaucoup moins connue de Serre, et ce bien qu'ayant un domaine de validité théoriquement plus large. Korteweg et De Vries [38] propose une solution onde solitaire valable pour les petites amplitudes en eau peu profonde sous la forme d'une série du petit paramètre "amplitude réduite".

Serre [71] s'affranchit de l'hypothèse petites amplitudes dans le cadre de l'eau peu profonde et présente une solution où la dénivelée de surface libre ainsi que la vitesse horizontale moyennée sur la verticale sont explicitées, mais le champ de vitesse reste développé en série du petit paramètre de l'eau peu profonde.

Avec la motivation de décrire des ondes solitaires de grandes amplitudes mal décrites par Korteweg et De Vries et dans le but de déterminer l'amplitude limite, plusieurs auteurs se sont trouvés confrontés à des solutions sous forme intégrale nécessitant une issue numérique. Nous retiendrons la solution proposée par Byatt-Smith [11].

Le but de cette annexe est de discuter de la pertinence des solutions explicites très maniables (de Serre, de l'eau peu profonde et de Korteweg & De Vries) en les comparant à cette solution exacte obtenue numériquement.

B.1 Solution “onde solitaire” de l’eau peu profonde et de Korteweg & de Vries

L’exposé détaillé de la résolution des équations de la dynamique des ondes de gravité en eau peu profonde est présenté par A. Temperville dans son mémoire de thèse [75]. On ne rappelle ici que les expressions des solutions obtenues en variables eulériennes :

- solution de l’eau peu profonde au 1^{er} ordre ou de Korteweg & de Vries (KdV)

$$\eta_0(x, t) = \frac{A}{\cosh^2[\lambda(x - ct)]} \quad (\text{B.1})$$

avec :

$$\lambda = \sqrt{\frac{3A}{4h_0^3}}$$

$$c = \sqrt{gh_0} \left[1 + \frac{A}{2h_0} \right]$$

- solution de l’eau peu profonde au 2^e ordre

$$\eta_0(x, t) = \frac{A}{\cosh^2[\lambda(x - ct)]} + \frac{3A^2}{4h_0} \frac{1}{\cosh^2[\lambda(x - ct)]} \left(\frac{1}{\cosh^2[\lambda(x - ct)]} - 1 \right) \quad (\text{B.2})$$

avec :

$$\lambda = \sqrt{\frac{3A'}{4h_0^3}}$$

$$c = \sqrt{gh_0} \left[1 + \frac{A'}{2h_0} + \frac{19}{40} \left(\frac{A'}{h_0} \right)^2 \right]$$

$$\frac{A}{h_0} = \frac{A'}{h_0} \left(1 + \frac{5A'}{4h_0} \right)$$

et :

A amplitude de l’onde solitaire,

h_0 profondeur d’eau au repos,

$\eta_0(x, t)$ dénivelée de la surface par rapport au niveau de repos,

$u_0(x, \eta_0, t) = c\eta_0(x, t)$ vitesse horizontale à la surface,

$v_0(x, \eta_0, t) = u_{0x}(x, \eta_0, t)(h_0 + \eta_0)$ vitesse verticale à la surface.

B.2 Solution “onde solitaire” de Serre

Serre [71] propose en 1953 une solution analytique exacte de type onde solitaire des équations du mouvement sous l’hypothèse d’échelles de grandeur horizontales bien plus grandes que les échelles de longueur verticales, c’est-à-dire quand les ondes sont longues devant la profondeur. Serre, contrairement à la distorsion de

l'eau peu profonde, résoud des équations dans lesquelles on tolère les grandes amplitudes [27].

La solution de Serre s'exprime sous la forme suivante :

$$\eta_0(x, t) = \frac{A}{\cosh^2[\lambda(x - ct)]} \quad (\text{B.3})$$

avec :

$$\lambda = \sqrt{\frac{3A}{4h_0^2(h_0 + A)}}$$

$$c = \sqrt{g(h_0 + A)}$$

et :

A amplitude de l'onde solitaire,

h_0 profondeur d'eau au repos,

$\eta_0(x, t)$ dénivelée de la surface par rapport au niveau de repos,

$\bar{u}_0(x, t) = c \left(1 - \frac{h_0}{h_0 + \eta_0(x, t)} \right)$ vitesse horizontale moyennée sur la verticale,

$u_0(x, z, t) = \bar{u}_0 + \frac{h_0^2}{6} \bar{u}_{0xx} - \frac{(z + h_0)^2}{2} \bar{u}_{0xx}$ vitesse horizontale,

$v_0(x, z, t) = -\bar{u}_{0x}(h_0 + z)$ vitesse verticale.

B.3 Equation intégrale et solution numérique

En 1970, Byatt-Smith [11] cherche à décrire un écoulement irrotationnel et stationnaire dans un repère se déplaçant à une célérité c et obtient une équation intégrale pour la dénivelée de surface libre adimensionnelle par rapport au repos soit $\eta(\phi)$ où ϕ est le potentiel de vitesse.

Cette équation s'écrit :

$$1 + \eta(\phi) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{F^2}{F^2 - 2\eta(\xi)} - [\eta'(\xi)]^2} \ln \left(\tanh \frac{\pi}{4} \|\phi - \xi\| \right) d\xi = 0 \quad (\text{B.4})$$

L'écoulement décrit par cette équation est une onde solitaire paramétrée par le nombre de Froude $F = \frac{c}{\sqrt{gh_0}}$. Le traitement numérique de l'équation (B.4) est

détaillé dans [12]. Il est également montré dans [12] que le nombre de Froude n'est pas un paramètre indépendant pour les grandes amplitudes.

L'abscisse physique X correspondant à ϕ à la surface libre est donnée par :

$$X(\phi) = \int_0^\phi \sqrt{\frac{F^2}{F^2 - 2\eta(\xi)} - [\eta'(\xi)]^2} d\xi \quad (\text{B.5})$$

Ne nous intéressant pas particulièrement aux grandes amplitudes, nous nous contentons du Froude comme unique paramètre dans la gamme d'amplitude réduite allant jusqu'à 0.6 environ, le Froude étant sur cette gamme univoque. Le nombre de

points de discrétisation est fixé à 100 pour tous les calculs, la longueur de boîte adimensionnelle variant de 15 pour les plus petites amplitudes à 5 pour les amplitudes supérieures à 0.3. Cette longueur de boîte a été déterminée de telle façon que la dénivelée de surface libre extrapolée en dehors de la boîte se superpose à celle que l'on calcule sur une boîte de longueur double. Le critère de convergence, tel qu'il est défini dans [12] comme la somme des résidus, est fixé à $5 \cdot 10^{-5}$ afin de limiter le nombre d'itérations (moins d'une dizaine), chaque itération durant environ 4 heures. On peut noter que la convergence est plus lente chez nous que dans [12] car nous n'itérons pas sur le paramètre indépendant $\omega = 2\frac{a}{h} - F^2 + 1$.

On calcule également les vitesses horizontale u_s et verticale v_s en surface. En utilisant la relation de Bernoulli en surface :

$$q_s^2 = u_s^2 + v_s^2 = gh_0 [F^2 - 2\eta(X_s)] \quad (\text{B.6})$$

et sachant que $\frac{v_s}{u_s} = \frac{dy}{dx}|_s$, on en déduit u_s puis v_s :

$$u_s^2 = gh \frac{[F^2 - 2\eta(X_s)]}{1 + \left(\frac{dy}{dx}|_s\right)^2} \quad (\text{B.7})$$

B.4 Comparaisons des différentes théories à la solution numérique et aux expériences

Sur la figure (B.1), on représente le nombre de Froude en fonction de l'amplitude réduite de l'onde solitaire pour les différentes solutions théoriques, la solution numérique et les expériences.

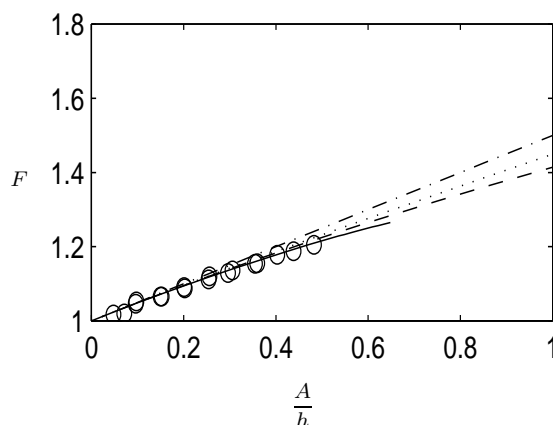


FIG. B.1 – Nombre de Froude en fonction de l'amplitude réduite : (—) solution numérique de Byatt-Smith; (- -) solution de Serre; (-.-) solution de KdV et de l'eau peu profonde au 1^{er} ordre; (...) solution de l'eau peu profonde au 2^e ordre (o) expériences

On constate que célérités numérique et expérimentale sont en bon accord, et se différencient bien des théories eau peu profonde au 1^{er} et au 2^e ordre à partir

d'amplitudes réduites de l'ordre de 0.15. Par contre, la célérité de Serre est assez proche de la célérité numérique jusqu'à une amplitude réduite de 0.3.

Sur les figures (B.2), on représente la dénivelée de surface libre adimensionnelle en fonction de l'abscisse adimensionnelle du repère stationnaire pour les différentes solutions théoriques et la solution numérique.

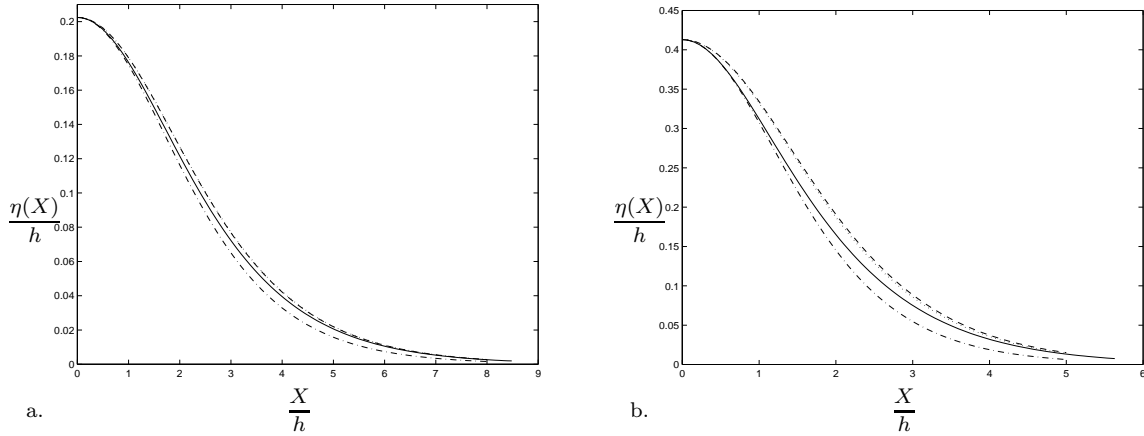


FIG. B.2 – Dénivelée adimensionnelle de la surface libre dans le repère stationnaire pour deux amplitudes réduites (a) $\frac{A}{h} = 0.2$ (b) $\frac{A}{h} = 0.4$; (—) solution numérique de Byatt-Smith; (- -) solution de Serre; (-.-) solution de KdV et de l'eau peu profonde au 1^{er} ordre; (...) solution de l'eau peu profonde au 2^e ordre

Force est de constater que la surface libre obtenue numériquement est mieux décrite pour Korteweg & De Vries ou l'eau peu profonde au 1^{er} ordre près du pic de l'onde solitaire alors que Serre ou l'eau peu profonde au 2^e ordre décrivent mieux la queue (c'est-à-dire que le paramètre de tendance 2λ est mieux approché par Serre). Ceci est d'ailleurs facile à examiner et a déjà été étudié par Barthélemy [3]. En effet, il a été montré par Stokes que le paramètre de tendance exact β d'une onde solitaire est solution de l'équation suivante, utilisée par Byatt-Smith :

$$\frac{\tan \beta}{\beta} = F^2 \quad (\text{B.8})$$

Sur la figure (B.3), on représente le paramètre de tendance en fonction du nombre de Froude pour les différentes solutions.

Reste à savoir si la solution numérique est elle-même la plus proche du profil expérimental. Pour mener la comparaison, il faut représenter sur un même graphe un profil expérimental et un profil numérique. Cet exercice demande une manipulation puisque le premier est mesuré à une abscisse donnée en fonction du temps et le deuxième est calculé dans le repère stationnaire en fonction de la variable adimensionnelle d'espace. En particulier, connaissant les écarts sur les célérités précédemment étudiées, il n'est pas équivalent de transformer le temps en espace des mesures et l'espace en temps pour le calcul. Ainsi, sur la figure (B.4), on représente pour les deux variables "naturelles" l'autre profil obtenu après conversion.

Il est clair alors que le profil numérique est effectivement le plus proche du profil expérimental. Cependant, on voit également apparaître la prévalence de la solution

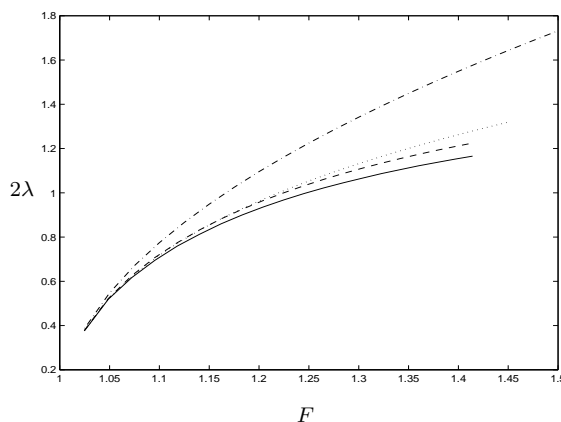


FIG. B.3 – Paramètre de tendance en fonction du nombre de Froude : (—) solution exacte dite de Stokes ; (- -) solution de Serre ; (-.-) solution de KdV et de l'eau peu profonde au 1^{er} ordre ; (...) solution de l'eau peu profonde au 2^e ordre

de Serre pour laquelle la forme de la surface libre avait été jugée moins bonne que celle de KdV près du pic. En effet, l'écart est compensé dans le repère du laboratoire par la meilleure description de la célérité. Cela n'est par contre pas le cas pour la solution KdV.

Il est également intéressant de comparer les vitesses horizontale et verticale à la surface [cf figure (B.5)] des différentes théories au calcul exacte, puisque que celles-ci interviennent en particulier dans le problème d'interaction.

La vitesse horizontale à la surface obtenue numériquement est mieux décrite par KdV que par Serre, alors que sur la vitesse verticale, c'est l'inverse. Malgré tout, la vitesse verticale n'est jamais vraiment bien approchée par aucune théorie. Ainsi, on verra que dans le problème d'interaction il y a compétition entre célérité et vitesse horizontale pour le choix des solutions Serre ou KdV.

B.5 Conclusion

Il est à noter que la comparaison des théories de l'eau peu profonde développées aux différents ordres avec la solution de Byatt-Smith avait déjà été menée par celui-ci dans [11]. L'intérêt était ici de situer la solution de Serre dans cet ensemble, et surtout de montrer en quoi tel ou tel accord est exploitable. En particulier, pour ce qui nous intéresse, ces résultats permettent de nous guider dans le choix de telle ou telle solution pour la simulation d'interactions ondes solitaires-houle courte et la génération expérimentale des ondes solitaires. Pour ce dernier problème pourtant, le plus flagrant eût été de comparer les vitesses moyennées sur la verticale, ce qui n'est pas possible pour la solution exacte.

Ainsi, cette étude comparative, après avoir placée la solution numérique très proche des ondes observées expérimentalement, pourra servir de guide pour choisir telle ou telle approximation mathématique pour traiter tel ou tel problème.

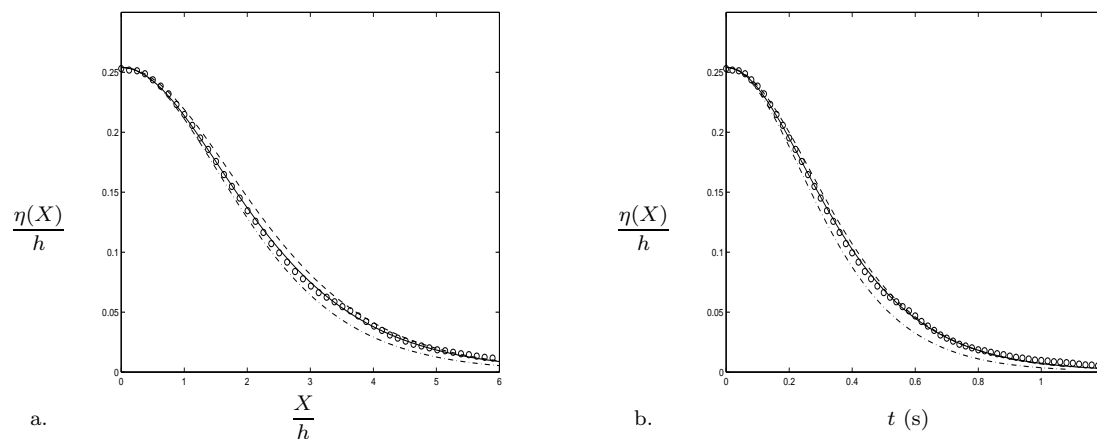


FIG. B.4 – Dénivelée adimensionnelle de la surface libre dans le repère stationnaire (a) et en un point de l'espace en fonction du temps (b) pour une amplitude réduite $\frac{A}{h} = 0.25$; (—) solution numérique de Byatt-Smith; (- -) solution de Serre; (-.-) solution de KdV et de l'eau peu profonde au 1^{er} ordre; (o) expériences

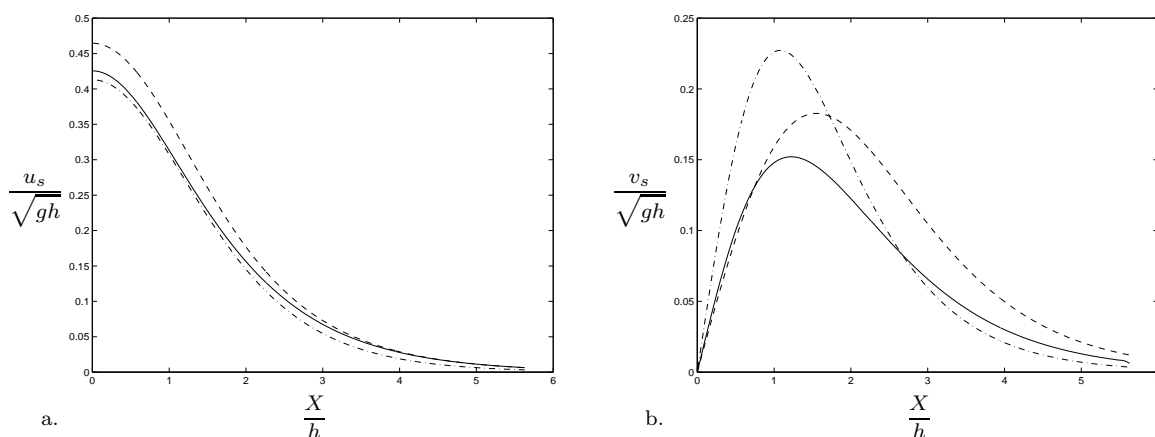


FIG. B.5 – Vitesse horizontale (a) et verticale (b) adimensionnelles à la surface libre dans le repère fixe pour une amplitude réduite $\frac{A}{h} = 0.4$; (—) solution numérique de Byatt-Smith; (- -) solution de Serre; (-.-) solution de KdV et de l'eau peu profonde au 1^{er} ordre

Annexe C

Génération de l'onde solitaire externe

Pour créer une onde solitaire en surface ou onde solitaire externe, on dispose au laboratoire d'un batteur piston mû par un verin hydraulique. Un codeur optique permet de repérer sa position, l'information étant renvoyée à un ordinateur équipé d'une carte électronique. Le déplacement du vérin est piloté par une servovalve reliée à un boîtier de commande électronique. Cette installation a été réalisée par M. Marcelja en collaboration avec F. Welt [78] qui a développé le programme original de commande du batteur. Depuis 1989, on dispose donc d'un batteur dont la consigne de déplacement est numérique (auparavant, celle-ci était imposée manuellement à l'aide de pièces mécaniques et ne permettait de réaliser que des ondes solitaires). Les consignes numériques jusqu'à présent étaient :

- pour générer des ondes périodiques : une loi sinusoidale paramétrée par l'amplitude, la période et le nombre de périodes à effectuer
- pour générer des ondes solitaires : une loi en tangente hyperbolique paramétrée par l'amplitude réduite et la profondeur d'eau. Il s'agit d'une loi développée dans l'approximation de l'eau peu profonde au 1^{er} ordre.

Cette loi permet effectivement de créer une onde solitaire. Mais cette dernière est imparfaite puisqu'elle est suivie d'une onde dispersive dont l'amplitude représente environ 10% de celle du pic de l'onde solitaire.

Afin d'améliorer la forme de l'onde et plus particulièrement de diminuer, voire d'éliminer, la queue dispersive, on a testé d'autres lois de génération qui ont été introduites dans le programme de commande du batteur et dont voici l'exposé.

C.1 Solution “onde solitaire” dans l'approximation de l'eau peu profonde

On rappelle ici les principales hypothèses et étapes du calcul qui permettent d'aboutir à la solution “onde solitaire” en eau peu profonde dans son développement au 2nd ordre en variables lagrangiennes afin d'obtenir la loi de mouvement du batteur.

Le problème est étudié en variables lagrangiennes de Miche (α, β) qui transforment de façon bi-univoque, bicontinue et différentiable, le domaine physique (a, b) avec surface libre ondulée en une bande où l'image du fond $b = -h$ est définie par

$\beta = -h$ et l'image de la surface libre $b = f(a)$ est définie par $\beta = 0$ (voir figure C.1).

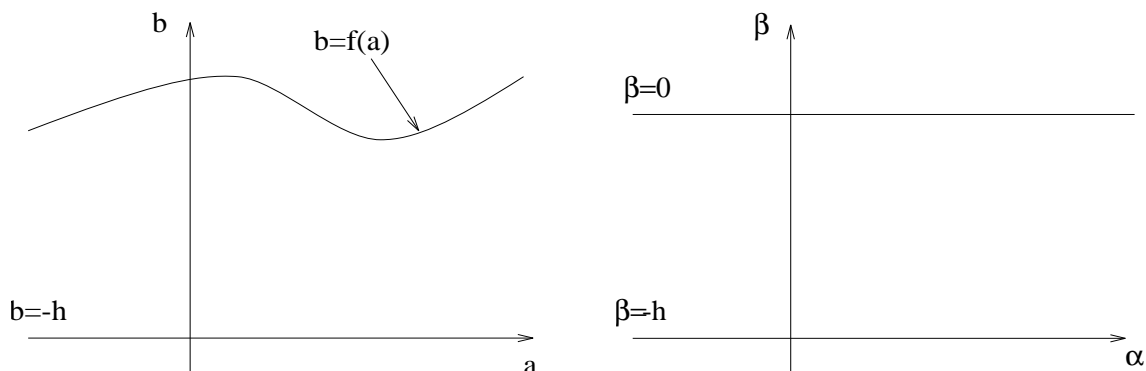


FIG. C.1 – *Domaine physique (a, b) et domaine des variables de Miché (α, β)*

On introduit une différence d'échelle entre les variables de Miché horizontales et verticales au moyen de la distorsion suivante :

$$\bar{\alpha} = \epsilon\alpha \text{ et } \bar{\beta} = \beta$$

avec : $\epsilon = \frac{h}{L} \ll 1$ où h est la profondeur d'eau et L la longueur d'onde.

Les ondes étudiées ayant une célérité voisine de la célérité critique \sqrt{gh} , on effectue aussi une distorsion du temps :

$$\tau = \epsilon\sqrt{gh}t$$

Le système d'équations est constitué des conditions

- d'imperméabilité du fond et de la surface libre,
- de continuité dans la masse,
- et de Bernoulli à la surface libre.

La distorsion de variables choisie conduit alors à montrer que les ondes cherchées ne sont fonctions que de $\bar{\beta}$, $(\bar{\alpha} + \tau)$ et $(\bar{\alpha} - \tau)$. Aussi, on introduit la variable générale $\theta = \epsilon(\alpha - p(\epsilon)\sqrt{gh}t)$ qui remplace les variables (α, t) .

Enfin, en variables de Miché distordues, développées à l'ordre 3, les déplacements (écarts de position des particules initialement situées en (α, β)) dans le plan (α, β) s'écrivent :

$$\begin{cases} X = \epsilon X_1(\theta, \beta) + \epsilon^3 X_3(\theta, \beta) + O(\epsilon^5) \\ Y = \epsilon Y_1(\theta, \beta) + \epsilon^3 Y_3(\theta, \beta) + O(\epsilon^5) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \theta &= \epsilon(\alpha - p(\epsilon)\sqrt{gh}t) \\ p(\epsilon) &= 1 + a_2\epsilon^2 + a_4\epsilon^4 \\ c &= p(\epsilon)\sqrt{gh} \end{aligned}$$

où c la célérité de l'onde.

La résolution du système en variables distordues conduit alors à la solution apériodique (onde solitaire) suivante à l'ordre 2 :

$$\begin{cases} \epsilon X_1(\theta, \beta) = \epsilon f_1(\theta) \\ \epsilon^3 X_3(\theta, \beta) = \epsilon^3 \frac{(\beta + h)^2}{6} f_1''(\theta) + 2(a_2\epsilon^2)\epsilon f_1(\theta) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_2 \epsilon^2 &= \frac{A}{2h} \\ a_4 \epsilon^4 &= \frac{19}{40} \left(\frac{A}{h} \right)^2 \\ \omega &= \frac{1}{\epsilon h} \sqrt{\frac{3A}{4h}} \\ \epsilon f_1(\theta) &= -2 \sqrt{\frac{Ah}{3}} \tanh(\omega\theta) + C \end{aligned}$$

où $\frac{A}{h}$, l'amplitude réduite au 1^{er} ordre est reliée à l'amplitude réduite au 2nd ordre

notée $\frac{\bar{A}}{h}$ par : $\frac{\bar{A}}{h} = \frac{A}{h} + \frac{5}{4} \left(\frac{A}{h} \right)^2$.

Remarque : on note $\sigma = \frac{A}{h}$. Dans l'approximation eau peu profonde, $\sigma \sim \epsilon^2$, ce qui implique que l'on ne tolère que les petites amplitudes. Soient les dérivées successives de $f_1(\theta)$:

$$\begin{cases} \epsilon^2 f_1'(\theta) = -\frac{A}{h \cosh^2(\omega\theta)} \\ \epsilon^3 f_1''(\theta) = -\frac{2A}{h^2} \sqrt{\frac{3A}{4h}} \frac{\tanh(\omega\theta)}{\cosh^2(\omega\theta)} \end{cases}$$

Et finalement, le déplacement noté $x(t)$ des particules se situant sur la surface libre ($\beta = 0$) par rapport à l'origine du repère s'écrit :

$$x(t) = \alpha - 2 \sqrt{\frac{Ah}{3}} \tanh(\omega\theta) + C + \frac{A}{3} \sqrt{\frac{3A}{4h}} \frac{\tanh(\omega\theta)}{\cosh^2(\omega\theta)} - 2 \frac{A}{h} \sqrt{\frac{Ah}{3}} \tanh(\omega\theta) + C'$$

Les constantes C et C' apparaissent car la résolution du système conduit en fait à déterminer $f_1'(\theta)$. On les détermine en imposant que l'onde solitaire est générée (les particules étant immobiles) en $t = -\infty$, à savoir $x = \alpha$ en $t = -\infty$, ce qui conduit à :

$$C + C' = 2 \sqrt{\frac{Ah}{3}} \left(1 + \frac{A}{h} \right)$$

Si on s'intéresse à la génération de l'onde solitaire, on cherche le mouvement des particules qui se situent sur la face du batteur. Compte tenu de la condition d'imperméabilité, les particules se situant sur la surface du batteur à l'instant initial y restent. Ainsi, le mouvement à imposer au batteur est celui calculé pour les particules situées à l'instant initial en $\alpha = 0$, soit en résumé :

$$x(t) = 2 \sqrt{\frac{Ah}{3}} \left(1 + \frac{A}{h} \right) (1 + \tanh(\Omega)) + \frac{A}{3} \sqrt{\frac{3A}{4h}} \frac{\tanh(\Omega)}{\cosh^2(\Omega)}$$

avec :

$$\begin{aligned}\Omega &= p(\epsilon) \sqrt{\frac{3A}{4h}} \sqrt{\frac{g}{h}} t \\ p(\epsilon) &= 1 + a_2 \epsilon^2 + a_4 \epsilon^4 \\ \frac{\bar{A}}{h} &= \frac{A}{h} + \frac{5}{4} \left(\frac{A}{h} \right)^2\end{aligned}$$

Il s'agit du mouvement développé à l'ordre 2 qui a été introduit dans le programme de commande du batteur. Il s'avère que le dernier terme en $\frac{\tanh(\Omega)}{\cosh^2(\Omega)}$ est négligeable devant $\tanh(\Omega)$. Ainsi, on utilise de préférence (moins de calcul) pour le développement à l'ordre 2 en eau peu profonde, la consigne de mouvement suivante (avec les mêmes notations que précédemment) :

$$x(t) = 2\sqrt{\frac{Ah}{3}} \left(1 + \frac{A}{h} \right) (1 + \tanh(\Omega))$$

Initialement, rappelons que la consigne de mouvement était donnée à l'ordre 1 par l'expression suivante :

$$x(t) = 2\sqrt{\frac{Ah}{3}} (1 + \tanh(\Omega'))$$

avec : $\Omega' = \sqrt{\frac{3A}{4h}} \sqrt{\frac{g}{h}} t$

où $\frac{A}{h}$ est l'amplitude réduite au 1^{er} ordre.

C.2 Solution “onde solitaire” de Serre

Pour déterminer le mouvement à imposer du batteur afin de générer une onde solitaire de type Serre, il faut intégrer la relation suivante décrivant de façon Lagrangienne le mouvement des particules sur la face du batteur, soit :

$$\frac{dX}{dt} = \bar{u}(X, t) \quad (\text{C.1})$$

où X est la variable lagrangienne d'espace donnant la position du batteur et t le temps.

La vitesse moyenne horizontale \bar{u} de Serre s'écrit de la façon suivante :

$$\bar{u}(x, t) = \frac{\epsilon c \operatorname{sech}^2(\lambda(x - ct))}{1 + \epsilon \operatorname{sech}^2(\lambda(x - ct))} \quad (\text{C.2})$$

avec :

$$\begin{aligned}\lambda &= \sqrt{\frac{3\epsilon}{4h_0^2(1 + \epsilon)}} \\ c &= \sqrt{gh_0(1 + \epsilon)}\end{aligned}$$

L'intégration analytique de l'équation différentielle non linéaire (C.1) n'étant pas aisée, on propose deux méthodes pour connaître le mouvement à donner au batteur :

- intégration analytique de l'équation linéarisée autour de $X=0$, c'est-à-dire pour des petits déplacements [74],
- intégration numérique de l'équation différentielle non linéaire.

C.2.1 Cas des petits déplacements : intégration analytique

On effectue le changement de variable suivant :

$$(X, t) \rightarrow (X, \theta = \lambda(X - ct))$$

L'équation différentielle à résoudre s'écrit alors avec les nouvelles variables :

$$\frac{dX}{d\theta} = -\frac{\epsilon}{\lambda} \operatorname{sech}^2(\theta)$$

Cette équation différentielle s'intègre alors sans difficulté et X doit être solution de :

$$X = -\frac{\epsilon}{\lambda} \tanh(\lambda(X - ct)). \quad (\text{C.3})$$

Cette équation reste cependant peu aisée à résoudre, puisqu'il s'agit d'une équation transcendante pour X . Sans approximation, il est en fait équivalent d'intégrer directement l'équation différentielle non linéaire (C.1) et de résoudre l'équation transcendante (C.3), c'est pourquoi on ne retient que la première possibilité, à savoir l'intégration numérique.

Cependant, pour des petits déplacements de batteur c'est-à-dire pour $X \ll 1$, il est possible d'obtenir une loi de mouvement analytique en linéarisant (C.3). Soit à résoudre :

$$X = -\frac{\epsilon}{\lambda} \frac{\tanh(\lambda X) - \tanh(\lambda ct)}{1 - \tanh(\lambda X) \tanh(\lambda ct)} \quad (\text{C.4})$$

En substituant le développement limité près de 0 à l'ordre 2 :

$$\tanh(\lambda X) = \lambda X + o((\lambda X)^2)$$

dans (C.4), on obtient après simplification :

$$X(t) = \frac{\epsilon}{\lambda} \frac{\tanh(\lambda ct)}{1 + \epsilon(1 - \tanh^2(\lambda ct))}$$

C.2.2 Intégration numérique

Sans faire l'hypothèse de petits déplacements, on intègre numériquement l'équation différentielle non linéaire (C.1) du mouvement du batteur par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 en temps et 5 en espace. Les conditions initiales devraient être le repos à $t = -\infty$ car on cherche une onde de longueur infinie. Mais ici, pour initialiser le problème, il nous faut la position du batteur (et non sa vitesse!) pour les temps infinis. Aussi, la première étape est de résoudre l'équation différentielle (C.1) pour $\bar{u}(X = 0, t)$ c'est-à-dire en supposant le batteur immobile mais accéléré au cours du temps. On obtient ainsi une position initiale approchée X_0 du batteur pour $t = -t_0$ avec t_0 très grand.

Enfin, afin de donner une consigne analytique à l'ordinateur pilotant le mouvement du batteur, on propose d'interpoler le déplacement du batteur calculé numériquement par rapport à sa position initiale par une fonction du type :

$$X(t) = \alpha \tanh(\beta t)$$

où α et β sont déterminés en minimisant les écarts quadratiques entre la fonction interpolante et le déplacement $X(t)$ issu de l'intégration numérique.

On calcule ainsi une série de couples de coefficients α et β donnés dans le tableau ci-après pour deux profondeurs d'eau en fonction de l'amplitude réduite de l'onde solitaire.

$\frac{A}{h}$	h=20 cm		h=30 cm	
	α	β	α	β
0.05	-	-	0.0795	1.0622
0.1	0.0768	1.7675	0.1152	1.4432
0.15	-	-	0.1446	1.7000
0.2	0.1139	2.3147	0.1708	1.8899
0.25	-	-	0.1952	2.0364
0.3	0.1457	2.6349	0.2185	2.1513
0.35	-	-	0.2409	2.2427
0.4	0.1752	2.8356	0.2628	2.3152
0.45	-	-	0.2843	2.3726
0.5	0.2036	2.9607	-	-
0.6	0.2314	3.0337	-	-

TAB. C.1 – Coefficients issus de l'interpolation par $\alpha \tanh(\beta t)$ du déplacement $X(t)$ du batteur calculé numériquement

C.3 Expériences

On présente sur la figure (C.2) le déplacement du batteur en fonction du temps pour chacune de ces lois.

Il est important de remarquer que ces lois sont toutes tronquées puisque théoriquement les ondes étant infiniment longues, la loi de génération devrait l'être aussi. Cependant, elles sont toutes tronquées de la même façon, à savoir que l'on impose le mouvement pour les temps tels que, l'écart entre la fonction $\tanh(\alpha t)$ et 1, soit inférieur à une erreur paramétrable. On note que les nouvelles lois imposent toutes des déplacements du batteur plus importants, ce qui sur l'installation expérimentale constitue une limite. En effet, la course du vérin est au maximum de 600 mm, ce qui permet avec la loi en eau peu profonde à l'ordre 1 de générer des ondes solitaires jusqu'à une amplitude réduite de 0.5 alors qu'avec les 3 autres lois, on est borné à des amplitudes réduites de 0.35.

Ensuite, si on compare les lois entre elles, on s'aperçoit que les deux façons de traiter la génération de l'"onde solitaire" de Serre conduisent à des lois de déplacement très proche, alors que les lois en eau peu profonde sont assez éloignées l'une de l'autre et de celles de Serre. De plus, cet écart augmente avec l'amplitude réduite

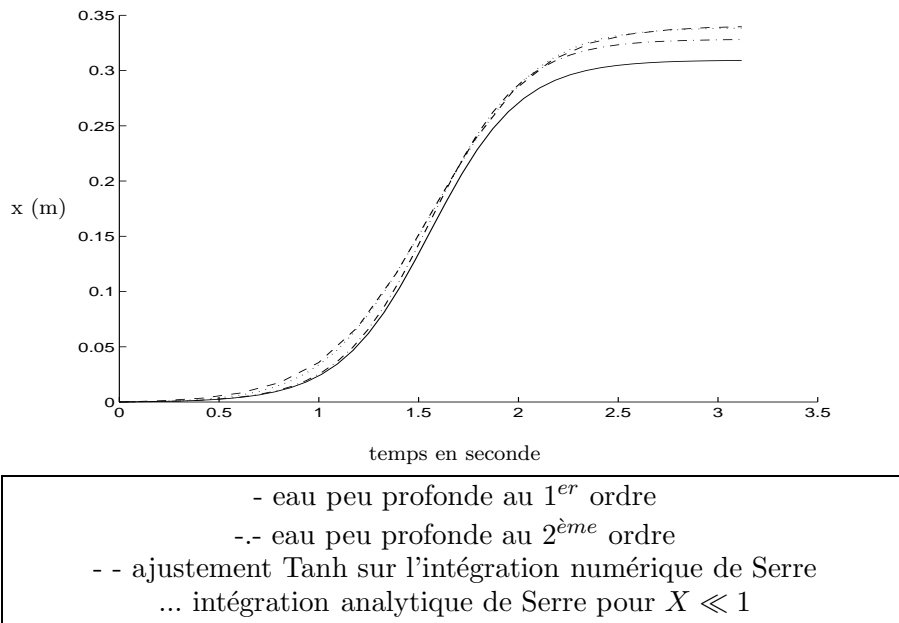


FIG. C.2 – Représentation des 4 lois de mouvement testées pour une amplitude réduite $\frac{A}{h} = 0.2$ et une profondeur d'eau $h = 0.3$ m

des ondes solitaires. Ceci est tout à fait compréhensible sachant qu'en eau peu profonde, on se limite aux petites amplitudes ce qui n'est pas le cas avec Serre. Observons à présent les ondes que l'on génère à l'aide de ces lois. Sur les figures (C.6), on présente des enregistrements de dénivélé de surface libre au cours du temps à environ 20 mètres du batteur comparant les 4 lois de mouvement sur une gamme d'onde solitaire d'amplitude réduite allant de 0.05 à 0.35 pour une profondeur d'eau de 30 cm.

Pour cette profondeur d'eau, on retrouve, pour la loi en eau peu profonde développée à l'ordre 2, la queue dispersive (creux) que l'on obtenait à l'ordre 1. Par contre, pour les lois issues de la solution "onde solitaire" de Serre, on constate que les ondes sont suivies d'une bosse (d'amplitude bien moins importante que le creux dispersif) et les oscillations suivantes sont elles aussi bien moindres que pour les lois en eau peu profonde. Sur les figures (C.3.a) et (C.3.b), on représente en fonction de l'amplitude réduite, l'amplitude du creux ou de la bosse secondarisée par l'amplitude de l'onde solitaire pour deux profondeurs d'eau. L'amplitude des creux est d'environ 4 à 6 % alors que l'amplitude des bosses n'est que de 2 à 3 %, soit la moitié pour les deux profondeurs d'eau. Les ondes solitaires d'amplitude réduite supérieure ou égale à 0.5 déferlent à la génération.

D'autre part, il est intéressant de relever que suivant la loi de génération, la diminution de l'amplitude entre 6.5 m du batteur et 20 m varie également du simple au double, valant environ 3 % pour les lois Serre et 5 % pour les lois de l'eau peu profonde, pour une profondeur d'eau de 30 cm [cf fig. (C.4.a)]. Pour une profondeur d'eau de 20 cm [cf fig. (C.4.b)], les lois de génération se différencient moins bien sur ce point.

L'écart entre les lois de Serre et de l'eau peu profonde sur la diminution d'amplitude de l'onde solitaire sur 14 m de parcours tend à montrer que cette diminution ne serait pas tant due à une dissipation de l'onde solitaire mais aussi à son

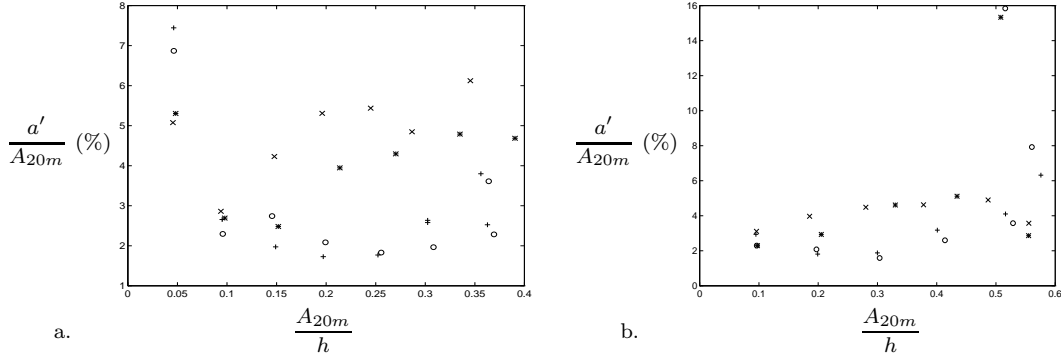


FIG. C.3 – Amplitude du creux ou de la bosse secondaire en pourcentage de l'amplitude réduite de l'onde solitaire en fonction de cette même amplitude réduite pour une profondeur d'eau de : (a) $h_0 = 30\text{cm}$ (b) $h_0 = 20\text{cm}$; (+) loi Serre analytique (o) loi Serre numérique (x) loi eau peu profonde 1^{er} ordre (*) loi eau peu profonde 2^e ordre

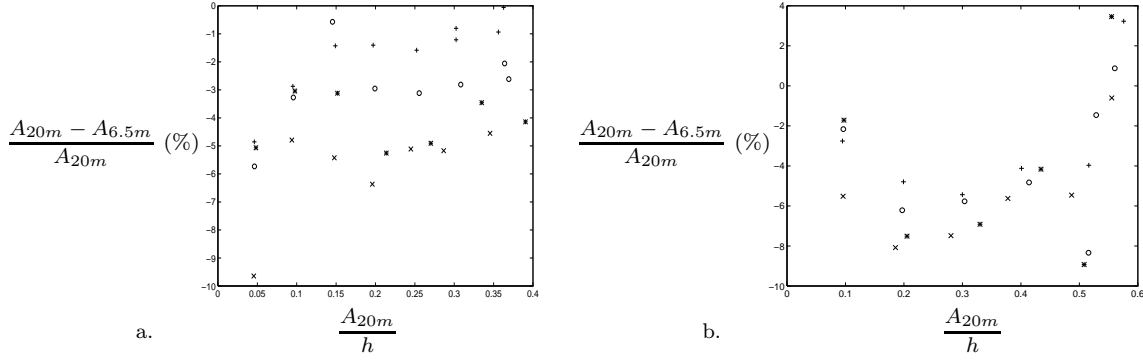


FIG. C.4 – Variation d'amplitude entre 6.5 m et 20 m de l'amplitude en fonction de l'amplitude réduite de l'onde solitaire à 20 m pour une profondeur d'eau de : (a) $h_0 = 30\text{cm}$ (b) $h_0 = 20\text{cm}$; (+) loi Serre analytique (o) loi Serre numérique (x) loi eau peu profonde 1^{er} ordre (*) loi eau peu profonde 2^e ordre

établissement. En effet, si l'on attribue cette diminution d'amplitude à la dissipation, on peut calculer cette diminution d'amplitude à l'aide de la formule de Keulegan [36] qui s'écrit :

$$\frac{A}{h_0} = \frac{A_0}{h_0} \left[1 + K \left(\frac{A_0}{h_0} \right)^{0.25} \right]^{-4} \quad (\text{C.5})$$

avec K coefficient de dissipation de Keulegan :

$$K = \frac{x}{12h_0} \left(1 + \frac{2h_0}{w} \right) \left(\frac{\nu^2}{gh_0^3} \right)^{0.25} \quad (\text{C.6})$$

et :

- h_0 , la profondeur de fluide au repos,
- A_0 et A , les amplitudes de l'onde solitaire respectivement initiale et à la distance x ,
- ν , viscosité cinématique du fluide (pour l'eau, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$),

- w , la largeur du canal (ce terme traduit la dissipation sur les parois),
- g , accélération de la gravité.

En appliquant la formule de Keulegan (C.5) pour une onde solitaire d'amplitude réduite initiale $\frac{A_0}{h_0} = 0.3$ par exemple, la diminution d'amplitude de cette onde sur $x = 13.5$ m dû à la dissipation pour une profondeur d'eau $h_0 = 0.3$ m est de 3.3 %, valeur inférieure à la diminution d'amplitude effectivement observée pour les lois de génération de l'eau peu profonde. En fait, comme le suggère Santos [70], cette formule ne serait pas valide dans les premiers temps de la propagation, pour $\frac{x}{h_0} \leq 50$ soit dans notre cas, pour $x \leq 15$ m, car l'onde n'est pas établie. Enfin, on peut penser que pour la loi de génération de Serre, l'onde est quasi-établie à 6 m du batteur et que la diminution d'amplitude serait effectivement dû à la dissipation. Par contre, pour les lois de génération de l'eau peu profonde, il est clair qu'à 6 m du batteur, l'onde n'est pas établie, ce qui montre que la loi de génération est imparfaite.

On peut également comparer l'amplitude de l'onde prescrite à celle effectivement mesurée pour juger de la qualité de la loi de génération. On représente sur les figures (C.5.a) et (C.5.b) l'amplitude réduite obtenue à 20 m en fonction de celle prescrite pour deux profondeurs d'eau $h = 30$ cm et $h = 20$ cm.

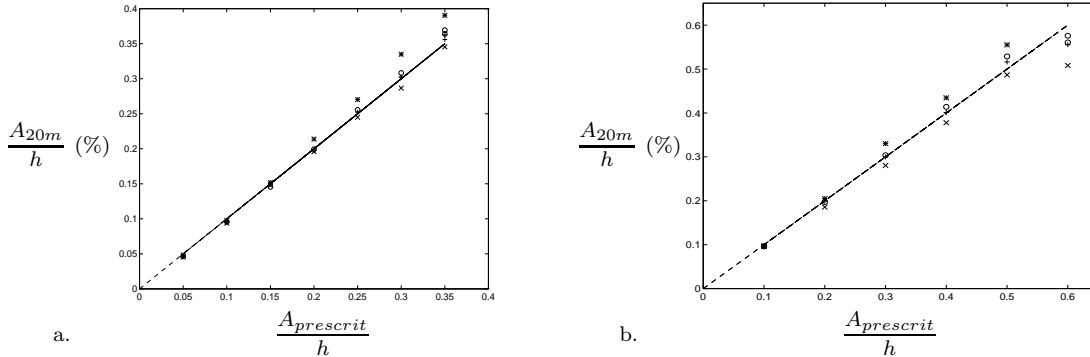


FIG. C.5 – Amplitude réduite de l'onde solitaire à 20 m en fonction de l'amplitude réduite prescrite pour une profondeur d'eau de : (a) $h_0 = 30$ cm (b) $h_0 = 20$ cm; (+) loi Serre analytique (o) loi Serre numérique (x) loi eau peu profonde 1^{er} ordre (*) loi eau peu profonde 2^e ordre

Il est ainsi intéressant de noter que l'amplitude de l'onde est variable suivant la loi de mouvement. En particulier, la loi en eau peu profonde développée au 2nd ordre conduit à des amplitudes systématiquement plus élevées que celles prescrites, celle du 1^{er} ordre à des amplitudes plus faibles. Les lois Serre fournissent quant à elles des ondes dont l'amplitude est sensiblement égale à celles requises sur les gammes considérées.

C.4 Conclusion

Fort de ces tests, il semble clair que les lois de génération obtenues à partir de la solution "onde solitaire" de Serre (qui s'avèrent d'ailleurs équivalentes) permettent

d'obtenir des ondes plus "stables", plus tôt et d'amplitudes fiables, ce que nous recherchions pour les problèmes d'interaction.

L'explication de cette prédominance de la solution de Serre vient du fait que la loi de mouvement du batteur est essentiellement fonction de la célérité de l'onde, particulièrement mieux décrite chez Serre dès les amplitudes réduites de 0.15 [cf annexe B].

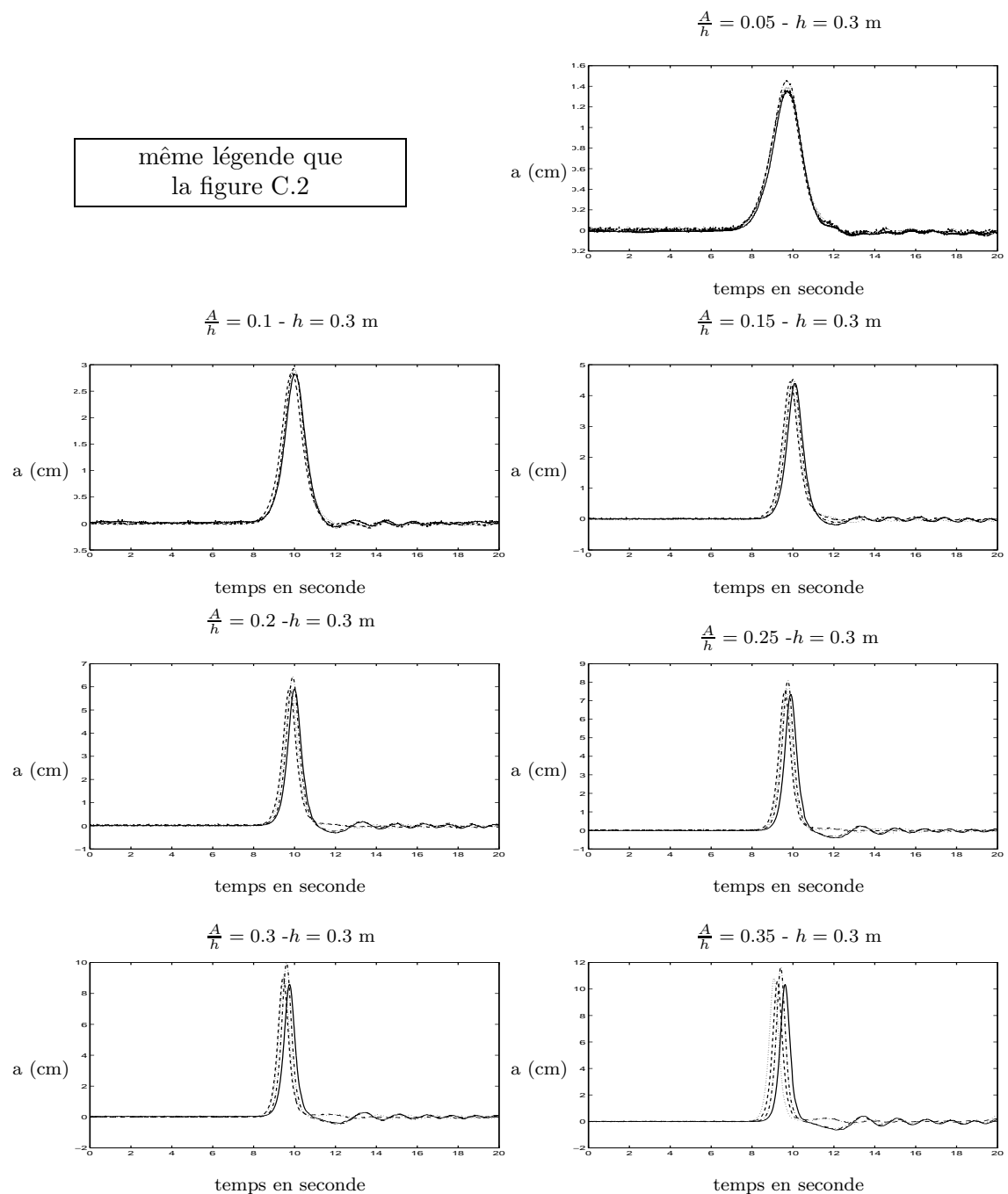


FIG. C.6 – Ondes solitaires générées pour les 4 lois de mouvement testées - Enregistrement du dénivelé de la surface libre a à 20 m environ du batteur piston

Annexe D

Modes verticaux d'une stratification continue

D.1 Modes verticaux linéaires avec rotation

On écrit les équations du mouvement avec rotation pour des perturbations de très petites amplitudes dans un fluide dont la densité varie suivant la verticale $\rho(z)$. On suppose de plus que la vitesse verticale des perturbations s'écrit :

$$w = W(z)e^{i(kx-\omega t)}$$

où k est le nombre d'onde horizontal et ω la fréquence de l'onde.

Avec ces hypothèses, on obtient pour $W(z)$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants suivante :

$$W_{zz} - \frac{N^2 - \omega^2}{f^2 - \omega^2} k^2 W = 0 \quad (\text{D.1})$$

avec :

– la fréquence de Brünt-Väisälä,

$$N^2(z) = -\frac{g}{\rho(z)} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (\text{D.2})$$

– la fréquence inertielle de Coriolis, f

et les conditions limites suivantes :

– imperméabilité de la surface libre ; en $z = 0$:

$$(\omega^2 - f^2)W_z - gk^2W = 0 \quad (\text{D.3})$$

Cependant, dans la plupart des cas océanographiques, la condition à la surface libre (D.3) est simplifiée et devient simplement :

$$W_{(z=0)} = 0 \quad (\text{D.4})$$

– imperméabilité du fond ; en $z = -d$:

$$W = 0 \quad (\text{D.5})$$

Le détail des calculs permettant d'aboutir à l'équation (D.1) est présenté par Philipps [60] pour le cas sans rotation et par Gill [26] pour le cas avec rotation.

La vitesse horizontale dans le cas bidimensionnel se déduit de la vitesse verticale en utilisant l'équation de la continuité. En supposant que la vitesse horizontale s'écrit sous la forme suivante : $u(x, z) = U(z)e^{i(kx - \omega t)}$, la continuité fournit la relation suivante :

$$U(z) = \frac{W_z}{ik} \quad (\text{D.6})$$

L'équation (D.1) est un problème différentiel aux valeurs propres dont il est possible de trouver les solutions analytiquement dans des cas très restreints. Par exemple, dans le cas où la fréquence de Brünt-Väisälä est constante, ce qui correspond au cas d'une stratification linéaire, les valeurs et vecteurs propres solutions sont les couples $(k_i = \frac{i\pi}{d}, \sin(\lambda_i z))$ où i est entier.

En général, l'équation (D.1) admet une infinité de valeurs propres solutions discrètes. On présente dans ce paragraphe la résolution numérique pratique de l'équation (D.1) pour une distribution $N(z)$ donnée.

Supposons que l'on dispose d'un profil de densité le long de la verticale, discrétisé avec un pas régulier, soit : $\rho_i = \rho(idz)$, $i \in [0, n]$.

On détermine la fréquence de Brünt-Väisälä associée en discrétisant (D.2) :

$$N_i = -\sqrt{\frac{g}{\rho_i} \frac{\rho_{i+1} - \rho_{i-1}}{2dz}} \quad , \quad i \in [0, n] \quad (\text{D.7})$$

avec :

$$\rho_{-1} = 2\rho_0 - \rho_1$$

$$\rho_{n+1} = 2\rho_n - \rho_{n-1}, \text{ en imposant } \rho_{zz} = 0 \text{ à la surface et au fond.}$$

On discrétise (D.1) en utilisant un schéma centré en différences finies :

$$\frac{f^2 - \omega^2}{N_i^2 - \omega^2} \frac{W_{i-1} - 2W_i + W_{i+1}}{(dz)^2} = k^2 W_i \quad , \quad i \in [1, n-1] \quad (\text{D.8})$$

et les conditions limites suivantes :

$$\frac{(\omega^2 - f^2)}{gdz} (W_1 - W_0) - k^2 W_0 = 0$$

$$W_n = 0$$

Le problème discret est donc un problème aux valeurs propres où il nous faut déterminer les couples $(k_j^2, W_{ij})_{i \in [0, n-1], j \in [0, n-1]}$ respectivement valeurs propres et vecteurs propres de la matrice \mathcal{M} suivante :

$$[\mathcal{M}] = \begin{bmatrix} -\nu_0 & \nu_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -2\nu_1 & \nu_1 & \nu_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \nu_2 & -2\nu_2 & \nu_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \nu_i & -2\nu_i & \nu_i & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \nu_{n-2} & -2\nu_{n-2} & \nu_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \nu_{n-1} & -2\nu_{n-1} \end{bmatrix}$$

avec : $\nu_i = \frac{f^2 - \omega^2}{(N_i^2 - \omega^2)(dz)^2}$, $i \in [1, n - 1]$ et $\nu_0 = \frac{(\omega^2 - f^2)}{gdz}$.

Les vecteurs propres $W = [W_{ij}, 0]$ sont les vitesses verticales associées à chaque mode interne vertical et leur nombre dépend du nombre de points de discrétisation du profil de densité.

Ce problème aux valeurs propres est facilement résolu par Matlab.

D.2 Approximation KdV sans rotation

En appliquant la distorsion KdV à une fonction de courant ϕ dans les équations du mouvement, on obtient à l'ordre zéro un problème de Sturm-Liouville comme précédemment. Il s'écrit d'après [35] :

$$(\bar{\rho}\phi_z)_z - \frac{g\bar{\rho}_z}{c_0^2}\phi = 0 \quad (\text{D.9})$$

avec les conditions limites suivantes :

$$\phi_{fond} = \phi_{surface} = 0$$

où :

g est l'accélération de la pesanteur

$\bar{\rho}(z)$ est la densité au repos

c_0 est la célérité au 1^{er} ordre (i.e. linéaire).

Pour la vitesse verticale, l'équation correspondante à (D.9) s'écrit :

$$W_{zz} - \frac{N^2}{g}W_z + \frac{N^2}{c_0^2}W = 0 \quad (\text{D.10})$$

avec N^2 fréquence de Brünt-Väisälä et W la vitesse verticale. Les conditions limites étant :

$$W_{fond} = W_{surface} = 0$$

Ce problème est en fait la limite ondes longues (i.e. $\omega = 0$) du problème des modes verticaux linéaires, sans rotation.

La méthode employée pour la résolution numérique pratique de ce problème aux valeurs propres est très similaire à celle du paragraphe D.1. Une complication supplémentaire apparaît cependant couramment. En effet, dans le cas de profil de densité constante, la fréquence de Brünt-Väisälä est nulle et le problème de Sturm-Liouville dégénère en une simple équation différentielle :

$$W_{zz} = 0$$

En particulier, dans le cas d'un profil de densité en tanh, la fréquence de Brünt-Väisälä est quasi-nulle près du fond et de la surface et est maximum au niveau de la pycnocline. Dans ce cas, la résolution numérique pratique se déroule de la façon suivante. On discrétise l'axe des z en n points, soit $z_i, i \in [1, n]$. On distingue une zone médiane repérée par $[z_m, z_p]$ où la fréquence de Brünt-Väisälä est strictement

supérieure à zéro (pratiquement cette limite est un critère). Dans cette zone, on résoud le problème discret suivant :

$$\frac{2W_i - W_{i+1} - W_{i-1}}{(dz)^2 N_i^2} + \frac{W_{i+1} - W_{i-1}}{2gdz} = \frac{1}{c_0^2} W_i \quad , \quad i \in [m+1, p-1] \quad (\text{D.11})$$

avec les conditions limites suivantes :

$$\frac{W_m \left[2 - \frac{z_{m-1} - z_0}{z_m - z_0} \right] - W_{m+1}}{(dz)^2 N_m^2} + \frac{W_{m+1} - W_m \frac{z_{m-1} - z_0}{z_m - z_0}}{2gdz} = \frac{1}{c_0^2} W_m \quad (\text{D.12})$$

$$\frac{W_p \left[2 - \frac{z_n - z_{p+1}}{z_n - z_p} \right] - W_{p-1}}{(dz)^2 N_p^2} - \frac{W_{p-1} - W_p \frac{z_n - z_{p+1}}{z_n - z_p}}{2gdz} = \frac{1}{c_0^2} W_p \quad (\text{D.13})$$

Ces conditions limites traduisent les conditions limites en z_0 et z_n et les équations différentielles $W_{zz} = 0$ dans les deux zones extrêmes ($z \in [z_0, z_{m-1}]$ et $z \in [z_{p+1}, z_n]$), en supposant également la continuité de W et sa dérivée.

Liste des tableaux

2.1	<i>Rapport de la longueur d'onde à une latitude donnée à la longueur d'onde à l'équateur pour les différentes composantes de marée usuelles (X signifie qu'il n'y a pas d'onde libre de cette fréquence à cette latitude ; en particulier, il n'existe pas d'onde de Poincaré M2 au delà de 74.45 ° de latitude</i>	29
3.1	<i>Fréquences principales de la marée à l'équilibre (Source : Doodson & Warburg [17])</i>	44
3.2	<i>Positions des mouillages fixes pour le campagne Malin Shelf 1996 .</i>	45
3.3	<i>Pourcentage d'énergie contenue dans le mode barotrope relativement à l'énergie totale. Pourcentage d'énergie contenue dans les 3 premiers modes baroclines relativement à l'énergie barocline pour la station S140 sur 3 périodes de 3 jours (la période 2 s'étend du 17/07/96 à 00h00 au 20/07/96 à 00h00)</i>	51
3.4	<i>Moyennes, amplitudes et phases diurne et semi-diurne en cm/s des composantes EST et NORD de la vitesse barotrope pour la station S140 sur 3 périodes de 3 jours</i>	52
3.5	<i>Description des ellipses de vitesse pour la projection de la vitesse barotrope à la station S140 sur 3 périodes de 3 jours</i>	52
3.6	<i>Moyennes et écart-types en cm/s des composantes EST et NORD de la vitesse barocline pour la station S140 sur 3 périodes de 3 jours</i>	55
3.7	<i>Méthode 1 de calcul du bi-couche équivalent aux profils instantanés (CTD) de densité mesurés en S140 (la condition à la surface utilisée pour le calcul des modes verticaux est la condition complète)</i>	57
3.8	<i>Méthode 2 de calcul du bi-couche équivalent aux profils instantanés (CTD) de densité mesurés en S140 (la condition à la surface utilisée pour le calcul des modes verticaux est la condition complète)</i>	58
3.9	<i>Niveaux d'interface moyens et température in-situ associée avec les mêmes notations que pour les tableaux (3.7) et (3.8)</i>	58
3.10	<i>Amplitudes des composantes issues de l'analyse harmonique de la marée barocline (identifiée aux déplacements de l'isotherme proche du niveau de l'interface du bi-couche équivalent) en S140</i>	61
3.11	<i>Calcul de la marée interne pour une marée barotrope en incidence normale</i>	63
3.12	<i>Composante M2 de la marée barotrope</i>	64
3.13	<i>Calcul de la marée interne pour une marée barotrope en incidence $\alpha = 70^\circ$</i>	65

3.14	<i>Calcul de la marée interne pour une marée barotrope en incidence $\alpha = 80^\circ$</i>	66
3.15	<i>Amplitude de la composante M2 de la marée barocline sur le plateau : comparaison du modèle aux mesures (a_m)</i>	67
3.16	<i>Vitesse associée à la composante M2 de la marée barocline sur le plateau : comparaison de la composante EST du modèle aux mesures</i>	67
3.17	<i>Energies cinétiques : comparaison du modèle aux mesures en fonction de la période de mesure et du profil CTD</i>	67
3.18	<i>Energies potentielles baroclines : comparaison du modèle aux mesures</i>	70
3.19	<i>Positions des mouillages fixes pour le campagne Malin Shelf 1983</i> .	71
4.1	<i>Deux premiers termes de la décomposition en série entière de μ des coefficients de la relation à la surface libre (4.24) et de l'inverse de la gravité effective $G(X)$</i>	91
5.1	<i>Récapitulatif des configurations expérimentales testées</i>	103
5.2	<i>Instabilité de Faraday</i>	105
5.3	<i>Variation de la phase à l'origine</i>	115
6.1	<i>Montée du niveau de surface Δh en fonction de l'abaissement de l'interface ΔH pour un rapport de densité de 1.058</i>	133
6.2	<i>Caractéristiques des 3 groupes de bi-couches équivalents obtenues par les 2 méthodes proposées pour la détermination du bi-couche équivalent</i>	138
C.1	<i>Coefficients issus de l'interpolation par $\alpha \tanh(\beta t)$ du déplacement $X(t)$ du batteur calculé numériquement</i>	166

Table des figures

1.1	<i>Image SAR des îles Galapagos</i>	9
2.1	<i>Modèle de génération de Baines (a) géométrie (b) stratification</i> . .	14
2.2	<i>Notations utilisées pour étudier un écoulement tridimensionnel avec rotation en bi-couche</i>	16
2.3	<i>Notations utilisées pour étudier les ondes transmises et réfléchies par une marche en bi-couche avec rotation</i>	23
2.4	<i>Vue de dessus de la marche</i>	25
2.5	<i>(a) Angles incident et réfracté (b) Amplitudes des ondes baroclines réfléchies et transmises à différentes latitudes en fonction de l'angle d'incidence de la marée barotrope, adimensionnalisées par les amplitudes pour une incidence frontale : (- -) à l'équateur i.e. $f = 0$ (—) $56^\circ 28'$ i.e. Malin Shelf (-.-) 74° i.e. à la latitude maximum d'existence des ondes de Poincaré [$\rho_1 = 1026 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 1027 \text{ kg/m}^3$, $h_1 = 50 \text{ m}$, $h_2 = 1450 \text{ m}$ et $b = 1350 \text{ m}$]</i>	30
2.6	<i>(a) Débit de forçage barotrope déterminé à partir de la vitesse perpendiculaire au plateau barotrope calculée avec mon modèle sur le plateau en fonction de l'angle d'incidence pour (o) [$\rho_1 = 1026 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 1027 \text{ kg/m}^3$, $h_1 = 50 \text{ m}$, $h_2 = 1450 \text{ m}$ et $b = 1350 \text{ m}$] et (★) [$\rho_1 = 1026 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 1027 \text{ kg/m}^3$, $h_1 = 50 \text{ m}$, $h_2 = 3950 \text{ m}$ et $b = 3850 \text{ m}$]; Amplitude des ondes baroclines réfléchies (...) et transmises (—) calculées par mon modèle et amplitude du déplacement d'interface sur le plateau et côté haute mer donné par le modèle de Baines (- -) en fonction de l'angle d'incidence de la marée barotrope (b) Q donné par (o) (c) Q donné par (★)</i>	32
3.1	<i>Calcul numérique de la marée externe M2 pour l'océan mondial [25]</i>	35
3.2	<i>Iso-phases et iso-amplitudes de la marée M2 sur le Malin Shelf d'après (a) calcul numérique de Xing & Davies [82] (b) Howarth & Pugh [30]</i>	36
3.3	<i>La marée barotrope M2 sur le Malin Shelf d'après le calcul numérique de Xing & Davies [82] (a) axes principaux des ellipses de vitesse en surface (b) flux d'énergie</i>	37
3.4	<i>Carte de la frontière atlantique de l'Europe : les 3 sites de mesure sont les zones grisées et les mouillages de mesure sont repérés par les points noirs</i>	38

3.5	<i>Profils bathymétriques et hydrologiques : (a) campagne Malin Shelf 1996 (section à 56°28'N) (b) campagne Iberian Shelf 1994 (section à 41°N) [z = 0 représente le niveau moyen de la surface libre] . . .</i>	39
3.6	<i>Angles θ de propagation des modes verticaux d'après la formule (3.1) (- -) et pente α du talus (—) pour la campagne Malin Shelf 1996</i>	40
3.7	<i>Stratification continue de densité $\rho(z)$ et bi-couche équivalent (ρ_1 densité de la couche supérieure et ρ_2 densité de la couche inférieure)</i>	42
3.8	<i>Bathymétrie en vue de dessus pour la campagne Malin Shelf 1996 .</i>	45
3.9	<i>Profils verticaux diurnes à S140 de : (a) σ_θ (b) température potentielle θ (c) salinité S, (—) le 14/07/96 à 12h49 et (- -) le 23/07/96 à 13h17</i>	46
3.10	<i>Profils verticaux nocturnes à S140 de : (a) σ_θ (b) température potentielle θ (c) salinité S, (—) le 14/07/96 à 3h21 et (- -) le 23/07/96 à 1h35</i>	47
3.11	<i>Profils verticaux de température in-situ à S140. (a) 1^{re} période : (—) moyenne sur 3 jours (du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00) des mesures TC, (- -) profil CTD le 14/07 à 03h21, (-.-) profil CTD le 15/07 à 11h41 et (...) profil CTD le 15/07 à 01h49 (b) 2^e période : (—) moyenne sur 3 jours (du 21/07 à 00h00 au 24/07 à 00h00) des mesures TC (- -) profil CTD le 22/07 à 19h38, (-.-) profil CTD le 23/07 à 01h35 et (...) profil CTD le 23/07 à 13h17</i>	48
3.12	<i>Profils verticaux diurnes à S140E de : (a) σ_θ (b) température potentielle θ (c) salinité S, (—) le 15/07/96 à 18h20 et (- -) le 23/07/96 à 17h19</i>	48
3.13	<i>(a) Distribution sur la colonne d'eau des modes empiriques P_n calculés sur la composante EST du champ de vitesse horizontale pour la période du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00 en S140. (b) projection de la vitesse horizontale sur le : (—) 1^{er} mode barocline, (-.-) 2^e mode barocline (...) 3^e mode barocline, (- -) mode barotrope . . .</i>	49
3.14	<i>(a) Distribution sur la colonne d'eau des modes empiriques P_n calculés sur la composante NORD du champ de vitesse horizontale pour la période du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00 en S140. (b) projection de la vitesse horizontale sur le : (—) 1^{er} mode barocline, (-.-) 2^e mode barocline (...) 3^e mode barocline, (- -) mode barotrope</i>	49
3.15	<i>(a) Distribution sur la colonne d'eau des modes empiriques P_n calculés sur la composante EST du champ de vitesse horizontale pour la période 3 (du 21/07 à 00h00 au 24/07 à 00h00) en S140. (b) projection de la vitesse horizontale sur le : (—) 1^{er} mode barocline, (-.-) 2^e mode barocline (...) 3^e mode barocline, (- -) mode barotrope</i>	50
3.16	<i>(a) Distribution sur la colonne d'eau des modes empiriques calculés P_n sur la composante NORD du champ de vitesse horizontale pour la période 3 (du 21/07 à 00h00 au 24/07 à 00h00) en S140. (b) projection de la vitesse horizontale sur le : (—) 1^{er} mode barocline, (-.-) 2^e mode barocline (...) 3^e mode barocline, (- -) mode barotrope</i>	50
3.17	<i>Décomposition sur 3 harmoniques de la projection de la marée sur le mode barotrope empirique (a) de la composante EST (b) de la composante NORD pour la période 1 (du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00) en S140</i>	51

3.18	<i>Ellipses de vitesse de la vitesse barotrope pour la station S140 (a) $T=12.42$ h (b) $T=23.93$ h : (—) période 1, (- -) période 2 (-.-) période 3. U_{nord} est la composante Nord de la vitesse et U_{est} est la composante Est de la vitesse au même instant</i>	52
3.19	<i>Distribution sur la colonne d'eau de l'orientation (en degré dans le sens trigonométrique depuis l'Est) des ellipses de vitesses baroclines M2 en S140 : (—) période 1 (- -) période 2</i>	53
3.20	<i>Spectres d'énergies des projections des composantes de vitesses Est (—) et Nord (- -) obtenues par la méthode EOF pour le mode (a) barotrope et (b) barocline sur la période 1 en S140 (le signal a été filtré par une moyenne glissante sur 3 heures)</i>	54
3.21	<i>Distribution verticale des modes internes <u>dynamiques</u> pour une onde M2 (12.42h) à partir du profil de densité du 13/07/96 à 20h41 (—) 1^{er} mode (- -) 2^e mode (-.-) 3^e mode (...) 4^e mode : (a) σ_θ (b) fréquence de Brünt-Väisälä N^2 (c) vitesse verticale W (d) vitesse horizontale U</i>	56
3.22	<i>Profils verticaux normés de la composante EST de la vitesse horizontale du 1^{er} mode barocline : (a) mode empirique calculé sur la période 1 (—); mode dynamique CTD 2 (- -); mode dynamique CTD 3 (...); mode dynamique CTD 4 (-.-); mode dynamique CTD 5 (ooo); (b) mode empirique calculé sur la période 3 (—); mode dynamique CTD 8 (- -); mode dynamique CTD 9 (...); mode dynamique CTD 10 (-.-); mode dynamique CTD 11 (ooo)</i>	56
3.23	<i>Position des isothermes en S140 (a) du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00 (b) du 20/07 à 00h00 au 23/07 à 00h00</i>	59
3.24	<i>Analyse harmonique des déplacements d'isothermes en S140 (a) 12°C du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00 (b) 12.5°C du 21/07 à 00h00 au 24/07 à 00h00 : (—) signal expérimental (- -) signal ajusté avec les périodes 23.93h, 12.42 h et 6.21 h.</i>	60
3.25	<i>Analyse harmonique des déplacements d'isothermes en S140 (a) sur l'isotherme 11°C du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00 (b) sur l'isotherme 11.5°C du 21/07 à 00h00 au 24/07 à 00h00 : (—) signal expérimental (- -) signal ajusté avec les périodes 23.93h, 12.42 h et 6.21 h.</i>	60
3.26	<i>Analyse harmonique des déplacements de l'isotherme 12°C aux stations S140 (a) et S140E (b) du 14/07 à 00h00 au 16/07 à 00h00 : (—) signal expérimental (- -) signal ajusté avec les périodes 23.93h, 12.42 h et 6.21 h.</i>	61
3.27	<i>Spectre d'énergie des déplacements de l'isotherme 12°C mesurés du 13/07 au 28/07 en : (—) S140 et (- -) S140E (signal a été filtré par une moyenne glissante sur une heure). La barre verticale indique la limite $\frac{1}{f}$ de l'existence des ondes de Poincaré.</i>	62
3.28	<i>Angles incident et réfracté de la marée barotrope</i>	64
3.29	<i>Décomposition EOF des isothermes à la station S140 du 14/07 à 00h00 au 17/07 à 00h00 : (a) distribution verticale normée de chaque mode (—) mode 1 (- -) mode 2 (...) mode 3 (b) projection temporelle du mode 1 (c) projection temporelle du mode 2</i>	69

3.30	<i>Profils verticaux de fréquence de Brünt-Väisälä obtenus à partir des mesures (- -) TC (—) CTD complet (o) CTD interpolé aux points de mesures des TC</i>	69
3.31	<i>Bathymétrie approximative en vue de dessus de la campagne Malin Shelf 1983 (source : base de données Gebco)</i>	70
3.32	<i>Bathymétrie approximative en vue de dessus de la campagne Iberian Shelf 1994 (source : base de données Gebco)</i>	72
4.1	<i>Schéma de définition des notations théoriques</i>	81
4.2	<i>Etude graphique de la relation de dispersion simplifiée</i>	92
4.3	<i>Variations de $(k(X) - k_\infty)$ obtenues par le calcul simplifié</i>	94
4.4	<i>Déphasages en fonction de l'amplitude réduite de l'onde solitaire, celle-ci étant décrite par Serre, Korteweg & de Vries ou issue du calcul numérique de Byatt-Smith</i>	95
4.5	<i>Déphasages en fonction de l'amplitude réduite d'une onde solitaire décrite par Serre pour différentes fréquences de l'onde courte</i>	96
4.6	<i>Modulations d'amplitude de la perturbation à la surface libre lors d'une interaction forte (a) et faible (b) avec une onde solitaire décrite par Serre d'amplitudes réduites $\frac{A}{h_0} = 0.1$ (—) et $\frac{A}{h_0} = 0.3$ (- -) - exemple pour $h_0 = 30$ cm et $k_\infty = 16.09$</i>	96
5.1	<i>Schéma du canal</i>	100
5.2	<i>Schéma d'une sonde résistive (unités en mm)</i>	101
5.3	<i>Ménisque sur une sonde capacitive</i>	101
5.4	<i>Comparaison des sondes résistive et capacitive</i>	102
5.5	<i>Enregistrement de houle courte</i>	103
5.6	<i>Définitions des coins</i>	104
5.7	<i>Spectre de la dénivelée de surface mesurée à 1 m (—) et à 4 m (- -) du batteur pour une fréquence de (a) $f = 3.25$ Hz et (b) $f = 3.7$ Hz</i>	106
5.8	<i>Exemple de soliton KdV 1^{er} ordre</i>	107
5.9	<i>Evolution d'un soliton KdV 1^{er} ordre le long du canal</i>	108
5.10	<i>Solitons générés par différentes lois</i>	109
5.11	<i>Exemple typique d'interaction</i>	110
5.12	<i>Erreurs dues à l'onde dispersive</i>	112
5.13	<i>Variabilité de la pulsation du batteur plongeant</i>	114
5.14	<i>Déphasages mesurés sur un train de houle établi (a) moyenne (b) écart-type</i>	115
5.15	<i>Resultats expérimentaux des interactions externes</i>	118
5.16	<i>Comparaison des expériences aux théories : <u>Interaction faible</u></i>	120
5.17	<i>Comparaison des expériences aux théories : <u>Interaction forte</u></i>	121
5.18	<i>Limite haute fréquence du modèle WKB du chapitre 4 comparé au modèle heuristique pour une onde solitaire décrite par Serre (—) : déphasage calculé à l'aide du modèle WKB : en interaction forte pour une fréquence de 1 Hz (o) et 5 Hz (...) en interaction faible pour une fréquence de 1 Hz (- -) et 5 Hz (-.-)</i>	122
5.19	<i>Exemple typique du déferlement</i>	122
6.1	<i>Vue schématique du dispositif expérimental</i>	127

6.2	<i>Génération de l'onde solitaire</i>	127
6.3	<i>Photo de la génération de l'onde interne, la bande noire correspond à l'interface</i>	128
6.4	<i>Photo d'une onde solitaire établie</i>	128
6.5	<i>Photo d'un moment de l'interaction</i>	129
6.6	<i>Remplissage du canal</i>	130
6.7	<i>Profil de densité à la fin du remplissage</i>	130
6.8	<i>Exemple typique d'étalonnage des sondes capacitives et résistives</i> .	131
6.9	<i>Schéma du remplissage</i>	131
6.10	<i>Comparaison de mesures de la variation de niveau de la surface lors du remplissage d'eau douce</i>	132
6.11	<i>Mesures de la variation de niveau de la surface lors du passage d'une onde interne</i>	133
6.12	<i>Notations correspondant à la formule (6.1)</i>	134
6.13	<i>Schéma de principe des sondes à ultra-sons en milieu stratifié</i> . . .	134
6.14	<i>Evolution de la stratification sur 2 jours pour un rapport de couche initial de 0.8 et un rapport de densité initial de 2.7 % : le 08/07/1997 à 10h10 (a), à 14h20 (b) et à 18h (c); le 09/07/1997 à 10h30 (d.), à 14h30 (e) et à 19h30 (f)</i>	135
6.15	<i>(a) Profil de densité mesuré le 29/07/97 à 11h (—) et profil de densité de la forme tanh ajusté sur le profil mesuré (- -) (b) même chose pour le 29/07/97 à 17h15</i>	136
6.16	<i>(a) Profil en tanh ajusté sur le profil mesuré le 05/07/97 à 12h15 (—) et bi-couche équivalent calculé par la méthode 1 (- -) et par la méthode 2 (...); (b) distribution verticale de fréquence de Brunt-Vaisälä associée; (c) fonction propre (déplacement) associée au 1^{er} mode</i>	137
6.17	<i>Caractéristiques du bi-couche équivalent calculé par : (a) méthode 1 (b) méthode 2</i>	137
6.18	<i>Célérité en fonction de l'amplitude réduite de l'onde solitaire obtenue par une loi : (—) KdV stratifié et son intervalle de confiance; (- -) KdV bi-couche [méthode 1]; (-.-) KdV bi-couche [méthode 2] pour différents rapports de couche initiaux : (a) groupe 1 (b) groupe 2 (c) groupe 3</i>	139
6.19	<i>Célérité en fonction de l'amplitude réduite de l'onde solitaire obtenue par une loi KdV stratifié (—) comparée aux célérités expérimentales mesurées en interaction forte (+) et faible (o) pour différents rapports de couche initiaux : (a) groupe 1 (b) groupe 2 (c) groupe 3 [(- -) célérité en fonction de l'amplitude réduite de l'onde solitaire obtenue par une loi m-KdV pour le bi-couche équivalent]</i>	140
6.20	<i>Mesures des dénivelées de surface (—) et d'interface (- -) lors d'une interaction forte entre de la houle de surface de fréquence 2.5 Hz ($ak \sim 0.15$) et une onde solitaire interne à différentes distances repérées depuis l'extrémité du canal où est générée l'onde solitaire : (a) $x=7.05$ m; (b) $x=10$ m; (c) $x=10.2$; (d) $x=10.4$; (e) $x=10.6$; (f) $x=10.8$</i>	141

6.21	Mesures des dénivelées de surface (—) et d'interface (- -) lors d'une <u>interaction faible</u> entre de la houle de surface de fréquence 2.5 Hz ($ak \sim 0.15$) et une onde solitaire interne à différentes distances repérées depuis l'extrémité du canal où est générée l'onde solitaire : (a) $x=4.7$ m; (b) $x=8.7$ m; (c) $x=8.5$ m; (d) $x=8.3$ m; (e) $x=8.1$ m; (f) $x=7.9$ m	142
6.22	Valeur absolue du déphasage dimensionnel $\ \delta\phi\ $ d'une houle de surface de fréquence 2 Hz en fonction de l'amplitude de l'onde solitaire interne A en bi-couche, le bi-couche est caractérisé par le rapport de densité $\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = 0.03$ et le rapport de couche $R = \frac{H_0 - h_0}{H_0} = 0.8$: (—) interaction forte (- -) interaction faible	143
6.23	Enveloppes inférieure (- -), supérieure (-.-) et différence (—) d'un enregistrement de houle de surface en interaction forte (a) et faible (b) avec une onde solitaire interne	145
6.24	Carré du maximum de modulation d'amplitude de la houle courte en fonction du rapport de la différence de célérité de la houle et de l'onde solitaire dans le repère stationnaire de l'onde solitaire prise au pic de l'onde solitaire et loin à l'amont ou à l'aval : (o) expériences pour $f=2$ Hz et (+) expériences pour $f=2.5$ Hz; (—) conservation de l'action d'onde pour $f=2$ Hz et (- -) conservation de l'action d'onde pour $f=2.5$ Hz	146
6.25	Logarithme du maximum de modulation d'amplitude de la houle courte en fonction du logarithme du rapport de la différence de célérité de la houle et de l'onde solitaire dans le repère stationnaire de l'onde solitaire prise au pic de l'onde solitaire et loin à l'amont ou à l'aval : (o) expériences pour $f=2$ Hz et (+) expériences pour $f=2.5$ Hz	147
B.1	Nombre de Froude en fonction de l'amplitude réduite : (—) solution numérique de Byatt-Smith; (- -) solution de Serre; (-.-) solution de KdV et de l'eau peu profonde au 1 ^{er} ordre; (...) solution de l'eau peu profonde au 2 ^e ordre (o) expériences	156
B.2	Dénivelée adimensionnelle de la surface libre dans le repère stationnaire pour deux amplitudes réduites (a) $\frac{A}{h} = 0.2$ (b) $\frac{A}{h} = 0.4$; (—) solution numérique de Byatt-Smith; (- -) solution de Serre; (-.-) solution de KdV et de l'eau peu profonde au 1 ^{er} ordre; (...) solution de l'eau peu profonde au 2 ^e ordre	157
B.3	Paramètre de tendance en fonction du nombre de Froude : (—) solution exacte dite de Stokes; (- -) solution de Serre; (-.-) solution de KdV et de l'eau peu profonde au 1 ^{er} ordre; (...) solution de l'eau peu profonde au 2 ^e ordre	158
B.4	Dénivelée adimensionnelle de la surface libre dans le repère stationnaire (a) et en un point de l'espace en fonction du temps (b) pour une amplitude réduite $\frac{A}{h} = 0.25$; (—) solution numérique de Byatt-Smith; (- -) solution de Serre; (-.-) solution de KdV et de l'eau peu profonde au 1 ^{er} ordre; (o) expériences	159

B.5 *Vitesse horizontale (a) et verticale (b) adimensionnelles à la surface libre dans le repère fixe pour une amplitude réduite $\frac{A}{h} = 0.4$; (—) solution numérique de Byatt-Smith; (- -) solution de Serre; (-.-) solution de KdV et de l'eau peu profonde au 1^{er} ordre* 159

C.1 *Domaine physique (a,b) et domaine des variables de Miche (α, β)* 162

C.2 *Différentes lois de génération* 167

C.3 *Amplitude du creux ou de la bosse secondaire en pourcentage de l'amplitude réduite de l'onde solitaire en fonction de cette même amplitude réduite pour une profondeur d'eau de : (a) $h_0 = 30\text{cm}$ (b) $h_0 = 20\text{cm}$; (+) loi Serre analytique (o) loi Serre numérique (x) loi eau peu profonde 1^{er} ordre (*) loi eau peu profonde 2^e ordre* 168

C.4 *Variation d'amplitude entre 6.5 m et 20 m de l'amplitude en fonction de l'amplitude réduite de l'onde solitaire à 20 m pour une profondeur d'eau de : (a) $h_0 = 30\text{cm}$ (b) $h_0 = 20\text{cm}$; (+) loi Serre analytique (o) loi Serre numérique (x) loi eau peu profonde 1^{er} ordre (*) loi eau peu profonde 2^e ordre* 168

C.5 *Amplitude réduite de l'onde solitaire à 20 m en fonction de l'amplitude réduite prescrite pour une profondeur d'eau de : (a) $h_0 = 30\text{cm}$ (b) $h_0 = 20\text{cm}$; (+) loi Serre analytique (o) loi Serre numérique (x) loi eau peu profonde 1^{er} ordre (*) loi eau peu profonde 2^e ordre* 169

C.6 *Solitons générés par différentes lois* 171

Bibliographie

- [1] P.G. BAINES. The generation of internal tides by flat-bump topography. *Deep-Sea Research*, 20 :179–201, 1973.
- [2] P.G. BAINES. On internal tide generation models. *Deep-Sea Research*, 29(3A) :307–338, 1982.
- [3] E. BARTHELEMY. *Etude des ondes longues internes et de leur dynamique dans les zones côtières*. PhD thesis, Université Joseph FOURIER - GRENOBLE I, 1989.
- [4] E. BARTHELEMY, D. CLAMOND, and E. MORIN. Etude expérimentale de l'interaction des ondes longues et des ondes courtes. In *Actes des 3^e Journées de l'Hydrodynamique, Grenoble*, pages 139–146. Ecole Centrale de Nantes, 18-20 février 1991.
- [5] A.YA. BASOVICH. Transformation of the surface wave spectrum due to the action of an internal wave. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 15 :448–452, 1979.
- [6] A.YA. BASOVICH and V.V. BAHANOV. Surface wave kinematics in the field of an internal wave. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 20 :50–54, 1984.
- [7] A.YA. BASOVICH and V.I. TALANOV. Transformation of short surface wave on inhomogeneous currents. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 13 :514–519, 1977.
- [8] T.B. BENJAMIN and J.E. FEIR. The disintegration of waves trains on deep water - part 1. theory. *Journal of Fluids Mechanics*, 27 :417–430, 1967.
- [9] T.B. BENJAMIN and F. URSELL. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proceedings of the Royal Society of London*, A. 225 :354–359, 1954.
- [10] F.P. BRETHERTON and C.J.R. GARRETT. Wavetrains in inhomogeneous moving media. *PRSL*, A. 302 :529–554, 1969.
- [11] J.G.B. BYATT-SMITH. An exact integral equation for steady surface waves. *Proceedings of the Royal Society of London*, A. 315 :405–418, 1969.
- [12] J.G.B. BYATT-SMITH and M.S. LONGUET-HIGGINS. On the speed and profile of steep solitary waves. *Proceedings of the Royal Society of London*, A. 350 :175–189, 1976.
- [13] J.S. CHU, S.R. LONG, and O.M. PHILIPPS. Measurements of the interaction of wave groups with shorter wind-generated waves. *Journal of Fluids Mechanics*, 245 :191–210, 1992.

- [14] V.H. CHU and C.C. MEI. On slowly-varying stokes waves. *Journal of Fluids Mechanics*, 41 :873–887, 1970.
- [15] D. CLAMOND. *Amplitudes et phases dans la théorie des ondes de gravité*. PhD thesis, Université Joseph FOURIER - GRENOBLE I, octobre 1994.
- [16] M.W. DINGEMANS. *Water waves propagation over uneven bottom, Part 1 - Linear wave propagation*. Advanced Series on Ocean Engineering vol. 13, World Scientific, 1997.
- [17] A.T. DOODSON and H.D. WARBURG. *Admiralty manual of tides*, pages 30–78. Hydrographic department, Admiralty, 1941.
- [18] S. DOUADY. Experimental study of the faraday instability. *Journal of Fluids Mechanics*, 221 :383–409, 1990.
- [19] P.G. DRAZIN and W.H. REID. *Hydrodynamics stability*, pages 354–361. Cambridge University Press, 1981.
- [20] K.B. DYSTHE and K.P. DAS. Coupling between a surface-wave spectrum and an internal wave : modulational interaction. *Journal of Fluids Mechanics*, 104 :483–503, 1981.
- [21] D. CLAMOND et E. BARTHELEMY. Etude expérimentale du déphasage dans l'interaction houle-onde solitaire. *Compte-rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, 320 :277–280, 1995.
- [22] G. EWING. Slicks, surface film and internal waves. *Journal of Marine Research*, 9(3) :161–187, 1950.
- [23] M. FLEURY, M. MORY, E.J. HOPFINGER, and D. AUCHERE. Effects of rotation on turbulent mixing across a density interface. *Journal of Fluids Mechanics*, 223 :165–191, 1991.
- [24] A.E. GARGETT and B.A. HUGHES. On the interaction of surface and internal waves. *Journal of Fluids Mechanics*, 52 :179–191, 1972.
- [25] M.-L. GENCO. *Les marées dans l'océan Atlantique : Modélisation et bilan énergétique*. PhD thesis, Université Joseph FOURIER - GRENOBLE I, janvier 1993.
- [26] A.E. GILL. *Atmosphere - Ocean Dynamics*, pages 130–131. Academic Press, 1982.
- [27] S. GUIBOURG. *Modélisations numérique et expérimentale des houles bidimensionnelles en zone côtière*. PhD thesis, Université Joseph FOURIER - GRENOBLE I, octobre 1994.
- [28] J.L. HAMMACK and H. SEGUR. The korteweg-de vries equation and water waves. part 2 - comparison with experiments. *JFM*, 65 :289–314, 1974.
- [29] K.R. HELFRICH and W.K. MELVILLE. On long nonlinear internal waves over slope-shelf topography. *Journal of Fluids Mechanics*, 167 :285–308, 1986.
- [30] M.J. HOWARTH and D.T. PUGH. *Physical Oceanography of Coastal and Shelf Seas*, chapter 4. Elsevier Oceanography Series, 1983.
- [31] B.A. HUGHES. The effect of internal waves on surface wind waves 2. theoretical analysis. *Journal of Geophysical Research*, 82 :455–465, 1978.
- [32] B.A. HUGHES and T.W. DAWSON. Joint canada-u.s. ocean wave investigation project : an overview of the georgia strait experiment. *Journal of Geophysical Research*, 93(C 10) :12219–12234, 1988.

- [33] B.A. HUGHES and H.L. GRANT. The effect of internal waves on surface wind waves 1. experimental measurements. *Journal of Geophysical Research*, 82 :443–454, 1978.
- [34] J.M. HUTHNANCE. Internal tides and waves near the shelf edge. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 48 :81–106, 1989.
- [35] T.W. KAO, F-S. PAN, and D. RENOUEARD. Internal solitons on the pycnocline : generation, propagation, and shoaling and breaking over a slope. *Journal of Fluids Mechanics*, 159 :19–53, 1985.
- [36] G.H. KEULEGAN. Gradual damping of solitary waves. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, 40 :487–498, 1948.
- [37] C. KHARIF. Some aspects of the kinematics of short waves over longer gravity waves. In *Water Waves kinematics*, pages 265–279. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [38] D.J. KORTEWEG and G. DE VRIES. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of stationary waves. *Phil. Mag.*, 39(5) :422–443, 1895.
- [39] D.D. KOSAMBI. Statistics in function space. *Journal Indian Mathematical society*, 7 :76–88, 1943.
- [40] P.K. KUNDU, J.S. ALLEN, and R.L. SMITH. Modal decomposition of the velocity field near the oregon coast. *Journal of Physical Oceanography*, 5(4) :683–704, 1975.
- [41] J.L. LARGIER. The internal tide over the shelf inshore of cape point valley, south africa. *Journal of Geophysical Research*, 99(C5) :10023–10034, 1994.
- [42] M.A. LAVRENTIEV. On the theory of long waves. *A.M.S. Translation series*, 11(1) :273–319, 1962.
- [43] LEBLOND and MYSAK. *Waves in the ocean*, page 602. Elsevier Oceanography series 20, 1978.
- [44] J.E. LEWIS, B.M. LAKE, and D.R.S. KO. On the interaction of internal waves and surface gravity waves. *Journal of Fluids Mechanics*, 63 :773–800, 1974.
- [45] M.J. LIGHTHILL. *Waves in Fluids*. Cambridge University Press, 1978.
- [46] M.S. LONGUET-HIGGINS and R.W. STEWART. Changes in form of short gravity waves on long waves and tidal currents. *Journal of Fluids Mechanics*, 8 :565–583, 1960.
- [47] E.H. LUCASSEN-REYNDERS and J. LUCASSEN. Properties of capillary waves. In *Advances in colloid and interface science*, pages 347–395. Elsevier Publishing Company, 1969.
- [48] C.C. MEL. *The applied dynamics of ocean surface waves*, chapter Refraction by slowly varying depth or current, pages 89–108. Advanced Series on Ocean Engineering, 1992.
- [49] W.K. MELVILLE. The instability and breaking of deep-water waves. *Journal of Fluids Mechanics*, 115 :165–185, 1982.
- [50] W.K. MELVILLE. Wave modulation and breakdown. *Journal of Fluids Mechanics*, 128 :489–506, 1983.

- [51] H. MICHALLET. *Etude théorique et expérimentale des ondes longues interfaciales*. PhD thesis, Université Joseph FOURIER - GRENOBLE I, décembre 1995.
- [52] H. MICHALLET and E. BARTHELEMY. Ultrasonic probes and data processing to study interfacial solitary waves. *Experiments in Fluids*, 22 :380–386, 1997.
- [53] H. MICHALLET and K. GUIZIEN. Sonde capacitive et houle haute fréquence. Rapport SOGREAH-IMG, 1996.
- [54] W. MUNK. *Evolution of Physical Oceanography*, chapter Internal waves and small processes, pages 292–341. MIT Press, 1981.
- [55] M. NACIRI and C.C. MEI. Evolution of a short surface wave on a very long surface wave of finite amplitude. *Journal of Fluids Mechanics*, 235 :415–452, 1992.
- [56] A.L. NEW. Internal tidal mixing in the bay of biscay. *Deep-Sea Research*, 35(5) :691–709, 1987.
- [57] Ph. NICOLAS. *Utilisation de variables distordues dans la théorie des ondes de gravité : application à la réfraction et à la génération*. PhD thesis, Université Joseph FOURIER - GRENOBLE I, septembre 1993.
- [58] A.R. OSBORNE and T.L. BURCH. Internal solitons in the adaman sea. *Science*, 208 :451–460, 1967.
- [59] D.H. PEREGRINE. Interaction of water waves and currents. *Adv. Appl. Mech.*, 16 :9–117, 1976.
- [60] O.M. PHILIPPS. *The dynamics of the upper ocean*, chapter Internal waves, pages 158–197. Cambridge University Press, 1977.
- [61] O.M. PHILIPPS and M.L. BANNER. Wave breaking in the presence of wind drift and swell. *Journal of Fluids Mechanics*, 66 :625–640, 1974.
- [62] M.J. PINETTES, D. RENOARD, and J.P. GERMAIN. Analytical and experimental study of the oblique passing of a solitary wave over a shelf in a two-layer fluid. *Fluid Dynamics Research*, 16 :217–235, 1995.
- [63] A. RAMAMOMJIARISOA. On the kinematics of short waves in the presence of surface flows of larger scale. *Journal of Fluids Mechanics*, 298 :249–269, 1995.
- [64] M. RATTRAY. On the coastal generation of internal tides. *Tellus XII*, 1 :54–62, 1960.
- [65] M. RATTRAY, J.G. DWORSKI, and P.E. KOVALA. Generation of long internal waves at the continental slope. *Deep-Sea Research*, 16 :179–195, 1969.
- [66] M. RATTRAY and S.J. PRINSENBERG. Effects of continental slope and variable brunt-vaisala frequency on the coastal generation of internal tides. *Deep-Sea Research*, 22 :251–263, 1975.
- [67] M.H. RIZK and D.R.S. KO. Interaction between small-scale surface waves and large-scale internal waves. *Physics of Fluids*, 21(11) :1900–1907, 1978.
- [68] C.L. RUFENACH, L.S. FEDOR, J.R. APEL, and F.I. GONZALES. Surface and internal waves observations. *Advances in geophysics*, 27 :141–196, 1984.

- [69] H. SANDSTROM and J.A. ELLIOTT. Internal tide and solitons on the scotian shelf : a nutrient pump at work. *Journal of Geophysical Research*, 89(C 4) :6415–6426, 1984.
- [70] F.J. SEABRA SANTOS. *Contribution à l'étude des ondes de gravité bidimensionnelles en eau peu profonde*. PhD thesis, Université Joseph FOURIER - GRENOBLE I, 1985.
- [71] F. SERRE. Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. *La Houille Blanche*, 8 :374–388, 1953.
- [72] T.J. SHERWIN. *Observations of low frequency internal waves on the Malin Shelf*. PhD thesis, University College of North Wales, 1987.
- [73] T.J. SHERWIN. Analysis of an internal tide observed on the malin shelf, north of ireland. *Journal of Physical Oceanography*, 18(7) :1035–1050, 1988.
- [74] C.E. SYNOLAKIS. Generation of long waves in laboratory. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 116(2) :252–266, 1990.
- [75] A. TEMPERVILLE. *Contribution à la théorie des ondes de gravité en eau peu profonde*. PhD thesis, Université scientifique et médicale et Institut National Polytechnique de Grenoble, mai 1985. Thèse d'Etat.
- [76] P.J.H. UNNA. Sea waves. *Nature*, 159 :239–242, 1947.
- [77] J.G. WEINGAND, H.G. FARMER, M. RATTRAY, and S.J. PRINSENBURG. Effects of friction and surface tide angle of incidence on the coastal generation of internal tides. *J. Marine Res.*, 27 :241–259, 1969.
- [78] F. WELT. Rapport de recherches postdoctorales. Génération et absorption d'ondes solitaires, 1989.
- [79] G.B. WHITHAM. Non-linear dispersion of water waves. *JFM*, 27 :399–412, 1967.
- [80] G.B. WHITHAM. Non-linear dispersion of water waves. *Journal of Fluids Mechanics*, 27 :399–412, 1967.
- [81] L.M. De WITT, M.D. LEVINE, C.A. PAULSON, and W.V. BURT. Semidiurnal internal tide in jasin : Observations and simulation. *Journal of Geophysical Research*, 91(C2) :2581–2592, 1986.
- [82] J. XING and A.M. DAVIES. A three dimensional model of internal tides on the malin-hebrides shelf and shelf-edge. *Journal of Geophysical Research*, 103(C12) :27,821–27,847, 1998.