

UNIVERSITE PARIS X - NANTERRE

Unité de Formation et de Recherche
de Sciences Economiques, Gestion, Mathématiques et Informatique

TERRE, RENTE ET CHOIX DE TECHNIQUES

Une étude sur la théorie néo-ricardienne

vol. II

Thèse de doctorat
présentée et soutenue publiquement par

GUIDO ERREYGERS

Directeur de recherche:

M. le Professeur Christian BIDARD

Membres du Jury:

MM. les Professeurs Gilbert ABRAHAM-FROIS, Edmond BERREBI
Jean CARTELIER, Wilfried PARYS, Philippe SAUCIER

juin 1990

UNIVERSITE PARIS X - NANTERRE

Unité de Formation et de Recherche
de Sciences Economiques, Gestion, Mathématiques et Informatique

TERRE, RENTE ET CHOIX DE TECHNIQUES

Une étude sur la théorie néo-ricardienne

vol. II

Thèse de doctorat
présentée et soutenue publiquement par
GUIDO ERREYGERS

Directeur de recherche:

M. le Professeur Christian BIDARD

Membres du Jury:

MM. les Professeurs Gilbert ABRAHAM-FROIS, Edmond BERREBI
Jean CARTELIER, Wilfried PARYS, Philippe SAUCIER

juin 1990

CHAPITRE 7

LE SYSTEME ETALON EN PRESENCE DE TERRES

=====

1. INTRODUCTION

Dans les deux chapitres précédents, j'ai analysé les propriétés des marchandises fondamentales et non fondamentales. Le concept de marchandise (non) fondamentale n'est pas le seul concept inventé par Sraffa. Un autre concept, sur lequel il a écrit encore plus, est celui de système étalon (cf. en particulier les chapitres 3, 4, 5 et 8 de *Production of Commodities*). Le présent chapitre sera consacré au système étalon, et plus spécifiquement à sa définition en présence de terres.

Le concept de système étalon, et les concepts dérivés de rapport et numéraire étalon, ont fait couler beaucoup d'encre. J'aimerais qu'il soit clair dès le début que dans les pages suivantes, je n'entrerai pas dans le débat sur la signification et la pertinence du système étalon. Je remarque seulement que certains commentateurs suggèrent de ne pas y attacher trop d'importance (cf. Salvadori & Steedman, 1988a, pp. 178-179, 1988b, pp. 226-227) ou d'y renoncer tout court (cf. Flaschel, 1984, 1986a, 1986b).

Sraffa lui-même a signalé que la présence de terres a des effets particuliers sur le système étalon (cf. les sections 87 & 90 de *Production of Commodities*). Les remarques de Sraffa sur ce point sont toutefois lapidaires, et par exemple Abraham-Frois & Berrebi (1979a, p. 5) les qualifient des "propos parfois sibyllins". Il n'est donc guère surprenant

que beaucoup de commentateurs ont essayé d'expliciter et d'expliquer le raisonnement de Sraffa ¹.

La thèse centrale de ce chapitre est que la solution proposée par Sraffa et la plupart de ses commentateurs pour tenir compte de la présence de terres n'est pas la meilleure possible. La source des difficultés est que leur solution est basée sur l'hypothèse des terres-marchandises. Dès qu'on remplace cette hypothèse par l'hypothèse des terres-ressources, une autre solution, meilleure selon moi, apparaît.

La structure du chapitre est la suivante. D'abord je rappelle que Sraffa a développé la notion de système étalon en cherchant un numéraire neutre (section 2). Ensuite je décris la construction du système étalon en l'absence de terres (section 3). Puis, j'explique comment Sraffa et ses commentateurs construisent le système étalon en présence de terres (section 4). Après cela, je propose une solution alternative, basée sur l'hypothèse des terres-ressources (section 5). Enfin j'introduis une notion nouvelle, celle de système synthétique (section 6).

¹ Cf. les commentaires de Schefold (1971, pp. 87-89), Dardi (1977, pp. 38-39, p. 47), Vidonne (1977b), Lipietz (1978, 1979), Abraham-Frois & Berrebi (1979a, 1979b), Cartelier (1979), Berthomieu (1982, pp. 109-113).

2. LE PROBLEME DU NUMERAIRE

Nous étudions un système de production donné, composé de n branches de production qui produisent k marchandises à l'aide de m qualités de terres ($m \geq 0$) et de travail, et qui est tel que le nombre de branches est égal à la somme du nombre de marchandises et du nombre de terres ($n = k+m$). Le taux de profit étant fixé de façon exogène, les prix de production sont déterminés par les n équations de prix :

$$\mathbf{Bp} = (1+r)\mathbf{Ap} + \mathbf{Tz} + \mathbf{l}w \quad (1)$$

conjointement avec l'équation du numéraire :

$$\mathbf{n}'\mathbf{p} = 1 \quad (2)$$

où le vecteur $[k \times 1]$ \mathbf{n} représente les quantités des k marchandises qui constituent le numéraire. Par exemple : si la première marchandise sert de numéraire (c'est-à-dire si $p_1 \equiv 1$), on a $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, ..., $n_k = 0$. La marchandise composite \mathbf{n} , de préférence semi-positive (évidemment $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ n'aurait pas de sens), peut être choisie librement.

Le choix du numéraire ne pose de problème que si l'on veut comparer les solutions du système $(\mathbf{p}, \mathbf{z}, w)$ correspondant à différentes valeurs du taux de profit. Supposons que nous soyons en mesure d'observer les prix de trois marchandises (disons 1, 2 et 3) pour deux valeurs différentes du taux de profit (disons r_a et r_b). Si la première marchandise sert de numéraire ($p_1 \equiv 1$), nous aurons :

$$\begin{array}{lll}
 p_1(r_a) = 1 & p_2(r_a) = 2 & p_3(r_a) = 3 \\
 p_1(r_b) = 1 & p_2(r_b) = 3 & p_3(r_b) = 2.
 \end{array}$$

En prenant les solutions correspondant à $r = r_a$ pour base de comparaison, nous observons que le prix de la marchandise 1 est stationnaire, que le prix de la marchandise 2 augmente, et que le prix de la marchandise 3 diminue.

Supposons ensuite que c'est la deuxième marchandise qui sert de numéraire ($p_2 \equiv 1$). Il s'avère alors que :

$$\begin{array}{lll}
 p_1(r_a) = 1/2 & p_2(r_a) = 1 & p_3(r_a) = 3/2 \\
 p_1(r_b) = 1/3 & p_2(r_b) = 1 & p_3(r_b) = 2/3.
 \end{array}$$

Maintenant nous observons que le prix de la marchandise 2 est stationnaire, tandis que les prix des marchandises 1 et 3 diminuent.

Supposons enfin que la troisième marchandise serve de numéraire ($p_3 \equiv 1$). Il s'avère que :

$$\begin{array}{lll}
 p_1(r_a) = 1/3 & p_2(r_a) = 2/3 & p_3(r_a) = 1 \\
 p_1(r_b) = 1/2 & p_2(r_b) = 3/2 & p_3(r_b) = 1.
 \end{array}$$

Nous observons encore une autre évolution des prix : le prix de la marchandise 3 reste constant, mais les prix des marchandises 1 et 2 augmentent.

Suivant le numéraire, le prix d'une marchandise peut donc aussi bien diminuer, augmenter, ou rester constant. Il semble alors impossible de dire quelle est l'influence d'un changement du taux de profit sur le prix d'une marchandise, comme le remarquait

Sraffa :

The necessity of having to express the price of one commodity in terms of another which is arbitrarily chosen as standard, complicates the study of the price-movements which accompany a change in distribution. It is impossible to tell of any particular price-fluctuation whether it arises from the peculiarities of the commodity which is being measured or from those of the measuring standard. (Sraffa, 1960, § 23, p. 18)

La particularité du numéraire neutre est de dévoiler le 'vrai' comportement des prix. C'est en cherchant un numéraire neutre que Sraffa a développé le concept du système étalon.

3. LE SYSTEME ETALON EN L'ABSENCE DE TERRES

3.1. Un numéraire neutre

Sraffa a consacré relativement beaucoup de pages à la recherche du critère auquel un numéraire neutre doit satisfaire (Sraffa, 1960, §§ 13-25, pp. 12-20). Plutôt que de répéter et éventuellement de critiquer son raisonnement ², j'énonce ici immédiatement sa conclusion. Selon Sraffa, un numéraire neutre est une marchandise composite qui :

(...) consists of the same commodities (combined in the same proportions) as does the aggregate of its own means of production - in other words, such that both product and means of production are quantities of the self-same composite commodity. (*ibid.*, § 24, p. 19)

Un numéraire neutre doit par conséquent être composé de façon que le rapport entre la quantité de la marchandise j qui figure dans le numéraire et la quantité de cette marchandise qui est nécessaire pour produire l'ensemble des marchandises du numéraire est le même quelle que soit la marchandise j .

Nous savons que l'élément sur la i -ième ligne et la j -ième colonne de la matrice $H \equiv (B-A)^{-1}A$ représente la quantité de la marchandise j nécessaire pour produire une unité nette de la marchandise i . Pour produire n_1 unités nettes de la marchandise 1, n_2 unités nettes de la marchandise 2, ..., et n_k unités nettes de la marchandise k , on a par conséquent besoin d'au total $n_1h_{1j} + n_2h_{2j} + \dots + n_kh_{kj} = n'H_j$ unités de la marchandise j . Le critère de Sraffa est alors formalisé comme suit. Le numéraire n est dit neutre s'il

² Certains, comme par exemple Flaschel (1986a), sont allés jusqu'à nier que le numéraire proposé par Sraffa soit le numéraire neutre qu'il recherchait. Cette thèse ne plaît évidemment pas aux auteurs qui se réclament de l'héritage sraffien, et leur réaction fut immédiate (cf. le commentaire de Schefold, 1986, et la réplique de Flaschel, 1986b). Je n'entrerai pas dans cette discussion, que je laisse volontiers aux 'sraffologues' plus compétents.

existe un nombre réel R tel que pour chaque marchandise j :

$$n_j/n'H_j = R \quad (3)$$

ou encore (ce qui est équivalent) s'il existe un nombre réel R tel que :

$$\mathbf{n}' = R\mathbf{n}'\mathbf{H} \quad (4)$$

Le système d'équations (4) exprime mathématiquement que le numéraire neutre (\mathbf{n}') et ses moyens de production agrégés ($\mathbf{n}'\mathbf{H}$) doivent être des quantités (respectivement 1 et $1/R$) d'une même marchandise composite. Sraffa a appelé R le *rapport étalon* ("Standard Ratio").

Puisque la matrice \mathbf{H} est carrée, le rapport étalon inverse $1/R$ s'interprète comme une valeur propre de la matrice \mathbf{H} , et le numéraire \mathbf{n}' comme un vecteur-ligne propre de \mathbf{H} associé à cette valeur. Naturellement, on ne s'intéresse qu'aux valeurs propres réelles et positives. Supposons pour l'instant qu'il existe au moins une telle valeur propre. A chaque valeur R correspond un vecteur propre \mathbf{n} qui normalement ne possède qu'un seul degré de liberté (mais parfois il en possède plus). Sraffa a proposé d'éliminer ce degré de liberté en normalisant le numéraire de façon que sa valeur-travail soit égale à 1, c'est-à-dire en introduisant l'équation supplémentaire :

$$\mathbf{n}'\mathbf{v} = 1 \quad (5)$$

3.2. Le système étalon

Le raisonnement qui précède reprend l'esprit, non la lettre de celui de Sraffa. En effet, au lieu de raisonner en termes des données 'intégrées' H et v , Sraffa raisonnait sur les données originelles A , B , et l . La procédure qu'il a conçue pour construire un numéraire neutre consiste à ajuster les dimensions des n branches de production de façon que le produit net du système ajusté satisfasse au critère de neutralité du numéraire. Voici comment il a lui-même décrit la procédure :

Suppose we segregate from the actual economic system such fractions of the individual basic industries as will together form a complete miniature system endowed with the property that the various commodities are represented among its aggregate means of production *in the same proportions* as they are among its products. (*ibid.*, § 25, p. 19)

Sraffa appelait un système-miniature qui satisfait à ce critère un *système étalon*.

Un système étalon est donc construit en modifiant (hypothétiquement) les dimensions des n branches de production. Mathématiquement, cela signifie que chaque équation i du système (1) est multipliée par un facteur q_i . Les nombres réels q_1, q_2, \dots, q_n sont appelés les multiplicateurs; nous pouvons les regrouper dans une matrice carrée $[n \times n]$ diagonale Q (où $q_{ii} = q_i$, et $q_{ij} = 0$ si $i \neq j$). Le système étalon se représente comme suit :

$$QB_p = (1+r)QA_p + Qlw \quad (6)$$

Le critère auquel ce système doit satisfaire est que le rapport entre la quantité nette de la marchandise j produite par le système étalon et la quantité de cette marchandise utilisée par le système étalon en tant que moyen de production est le même quelle que soit la marchandise j . En termes plus formels, il existe un nombre réel R (le rapport

étalon) tel que pour chaque marchandise j :

$$u'(QB_j - QA_j) / u'QA_j = R \quad (7)$$

ou encore (ce qui est équivalent) un nombre réel R tel que :

$$u'(QB - QA) = Ru'QA \quad (8)$$

Au lieu de représenter les multiplicateurs sous forme d'une matrice Q , on peut les représenter aussi sous forme d'un vecteur q ; puisque Q est une matrice diagonale, il est alors évident que $q' \equiv u'Q$. Cela veut dire que nous pouvons réécrire (8) comme :

$$q'(B - A) = Rq'A \quad (9)$$

Comme auparavant, supposons qu'il existe au moins un rapport étalon R réel et positif qui est solution de (9). A chacun de ces rapports étalon correspond alors un vecteur q qui est normalement déterminé à un scalaire près (mais il peut arriver qu'il possède plusieurs degrés de liberté). Sraffa a proposé de fixer ce scalaire de manière que le système étalon utilise au total la même quantité de travail que le système originel. Par convention, le système originel utilise au total $u'l = 1$ unité de travail. Cela nous donne l'équation supplémentaire suivante :

$$q'l \equiv u'Ql = 1 \quad (10)$$

Nous disposons maintenant de deux procédures pour construire un numéraire

neutre. La procédure 'directe' consiste à déterminer un numéraire et un rapport étalon à l'aide de la matrice \mathbf{H} et du vecteur \mathbf{v} ; la procédure 'indirecte', en revanche, consiste à déterminer d'abord un système et un rapport étalon à l'aide des matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} et du vecteur \mathbf{l} , et de calculer ensuite le numéraire étalon comme produit net du système étalon. Les deux procédures sont néanmoins parfaitement équivalentes. Si le vecteur \mathbf{n}' et le scalaire R sont solutions des équations (4) et (5), alors le vecteur $\mathbf{q}' \equiv \mathbf{n}'(\mathbf{B}-\mathbf{A})^{-1}$ et le scalaire R sont solutions des équations (9) et (10); inversement, si le vecteur \mathbf{q}' et le scalaire R sont solutions des équations (9) et (10), alors le vecteur $\mathbf{n}' \equiv \mathbf{q}'(\mathbf{B}-\mathbf{A})$ et le scalaire R sont solutions des équations (4) et (5). Bien qu'équivalente à la procédure directe, la procédure indirecte lui est toutefois légèrement supérieure car elle est utilisable même si la matrice des produits nets $(\mathbf{B}-\mathbf{A})$ n'est pas inversible.

3.3. Le rapport étalon en tant que taux de profit maximum

Supposons que le nombre réel et positif R et le vecteur \mathbf{n} satisfassent aux conditions (4)-(5). Si l'on exprime les prix et le salaire en termes du numéraire \mathbf{n} , la relation entre le salaire w et le taux de profit r est linéaire et décroissante. En effet, écrivons le système de prix comme suit (cf. le paragraphe 5.1 du chapitre 5) :

$$\mathbf{p} = r\mathbf{H}\mathbf{p} + \mathbf{v}w \quad (11)$$

Multiplions les deux côtés par le vecteur \mathbf{n}' :

$$\mathbf{n}'\mathbf{p} = \mathbf{n}'\mathbf{H}\mathbf{p} + \mathbf{n}'\mathbf{v}w \quad (12)$$

Choisir \mathbf{n} comme numéraire signifie que $\mathbf{n}'\mathbf{p} \equiv 1$. En tenant compte de (4) et (5) il

vient :

$$1 = (1/R)r + w \quad (13)$$

ou encore que :

$$w = 1 - (1/R)r \quad (14)$$

Si le taux de profit était nul, le salaire serait par conséquent égal à 1; en revanche, si le taux de profit était égal à R, le salaire serait nul. Le taux de profit 0 est celui pour lequel le produit net [= $u'(B-A)p$] va entièrement aux salaires [= $u'lw$], tandis que le taux de profit R est celui pour lequel le produit net va entièrement aux profits [= $ru'Ap$]. Cette propriété conduisait Sraffa à caractériser R comme le *taux de profit maximum* :

We shall call *Maximum rate of profits* the rate of profits as it would be if the whole of the national income went to profits. And we shall denote by a single letter, R, the two coincident ratios, namely the Maximum rate of profits and the 'balancing' ratio of net product to means of production. (Sraffa, 1960, § 22, p. 17)

Un problème surgit évidemment lorsqu'il existe plusieurs candidats, c'est-à-dire lorsqu'il existe plusieurs valeurs réelles et positives R qui satisfont aux conditions (4)-(5). Sraffa a alors proposé la règle suivante ³ : parmi tous les candidats possibles, il faut choisir la plus petite valeur positive (*ibid.*, § 42, pp. 29-31, § 64, pp. 53-54). Dans les systèmes de production simple, cette valeur de R est la seule à laquelle correspond un vecteur de

³ J'ignore pour un instant l'existence de marchandises non fondamentales; leur statut sera examiné dans le paragraphe suivant.

multiplicateurs q positif. Dans les systèmes de production jointe, par contre, cette propriété n'est plus généralement vraie (et Sraffa en était bien conscient). La raison pour laquelle Sraffa n'a cependant pas changé la règle est que le numéraire correspondant à cette valeur de R est le seul en termes duquel les prix sont finis lorsqu'on fait augmenter le taux de profit de 0 à R (*ibid.*, § 64, p. 54).

Le raisonnement de Sraffa semble reposer sur l'hypothèse implicite que si l'on exprime les prix en termes du numéraire étalon correspondant à la plus petite valeur positive de R , il existe un intervalle de valeurs du taux de profit $[r_0, R]$, avec $r_0 \leq 0$, pour lequel le vecteur de prix p est semi-positif. Bien que cette hypothèse soit toujours vérifiée en production simple, elle ne l'est pas forcément pour les systèmes de production jointe, même si l'on remplace l'exigence $r_0 \leq 0$ par l'exigence plus faible $r_0 < R$ (cf. Bidard, 1986b, pp. 53-59). Si l'idée est maintenue (mais on pourrait douter qu'il le faille) que les concepts de rapport étalon et de taux de profit maximum sont inséparables, alors le rapport étalon peut s'avérer autre que la plus petite des valeurs positives de R .

Mais la présence de production jointe pose un problème plus grave. En production simple, il existe toujours au moins une valeur positive de R (et donc un rapport étalon/taux de profit maximum) qui satisfait aux critères (4)-(5)⁴. En production jointe, en revanche, il arrive qu'il n'existe aucune valeur positive (ou même réelle) qui satisfasse aux conditions (4)-(5) (cf. Manara, 1980[1968], pp. 9-11). L'existence même du système étalon est donc menacée. Ces constatations ont amené Bidard (1986b, pp. 59-65) et Abraham-Frois & Berrebi (1989, pp. 135-138) à redéfinir

⁴ Je signale à ce propos qu'à un rapport étalon R peuvent correspondre plusieurs numéraires étalon linéairement indépendants. A cet égard, la référence fondamentale est Miyao (1977); cf. aussi les contributions de Blakley & Gosling (1967), de Abraham-Frois & Berrebi (1978), de Bidard (1978), et de d'Autume (1985).

des concepts de rapport étalon et de taux de profit maximum à la 'von Neumann'.

3.4. Le rôle des marchandises non fondamentales

Lorsqu'il existe des marchandises non fondamentales, la matrice des moyens de production directement et indirectement utilisés, \mathbf{H} , est décomposable (cf. le paragraphe 2.3 du chapitre 5). Cette matrice s'écrit :

$$\mathbf{H} \equiv (\mathbf{B}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \quad (15)$$

où les colonnes de la matrice carrée \mathbf{H}_{11} représentent les marchandises fondamentales, et celles de la matrice carrée \mathbf{H}_{22} les marchandises non fondamentales. Sraffa (1960, §§ 35 & 62-63, appendices B & C) était convaincu que les marchandises non fondamentales ne figurent jamais dans le numéraire étalon. Mathématiquement, la conviction de Sraffa revient à supposer que le rapport étalon/taux de profit maximum inverse, $1/R$, est toujours une valeur propre de la matrice \mathbf{H}_{11} . En effet, pour que le numéraire étalon $\mathbf{n}' = [\mathbf{n}_1' \quad \mathbf{n}_2']$, où \mathbf{n}_1 regroupe les marchandises fondamentales et \mathbf{n}_2 les marchandises non fondamentales, soit du type $[\mathbf{n}_1' \quad \mathbf{0}']$, c'est-à-dire ne contienne aucune marchandise non fondamentale, il faut que $1/R$ soit une valeur propre et \mathbf{n}_1' un vecteur-ligne propre de \mathbf{H}_{11} . En présence de marchandises non fondamentales, la condition (4) s'écrit comme suit :

$$[\mathbf{n}_1' \quad \mathbf{n}_2'] = R [\mathbf{n}_1' \quad \mathbf{n}_2'] \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Si $n_2 = 0$, il s'en suit que :

$$n_1' = Rn_1'H_{11} \quad (17)$$

En dehors des problèmes liés à l'existence d'une solution, cette approche présente une sérieuse difficulté. La notion de taux de profit maximum implique que R devrait être le maximum d'un intervalle de valeurs du taux de profit $[r_0, R]$ pour lequel le salaire w est non négatif et le vecteur de prix p semi-positif. Or, même dans les systèmes de production simple (pour ne traiter que le cas le moins complexe), il n'est pas garanti que la plus grande valeur propre positive de H_{11} (c'est celle qui correspond au rapport R de Sraffa) possède cette propriété. Plus précisément, si la plus grande valeur propre positive de la matrice H_{22} est supérieure à la plus grande valeur propre positive de H_{11} (cf. le fameux exemple des fèves de l'appendice B de *Production of Commodities*), le rapport étalon de Sraffa peut difficilement être considéré comme le taux de profit maximum. Les prix de certaines marchandises non fondamentales seraient en effet négatifs pour les valeurs du taux de profit situées entre les inverses des deux valeurs propres mentionnées. Toujours pour les systèmes de production simple, le seul candidat qui peut être à la fois rapport étalon et taux de profit maximum, est l'inverse de la plus grande valeur propre positive de la matrice H . Si cette valeur n'est pas la plus grande valeur propre positive de H_{11} , le numéraire étalon correspondant contient inévitablement des marchandises non fondamentales ⁵.

Bien que Sraffa fût sans doute conscient du problème posé par la présence de (certaines) marchandises non fondamentales, il ne l'a pas traité adéquatement, ce qui

⁵ Cf. les contributions de Parys (1980, pp. 104-175), Benitez-Sanchez (1986), Bidard (1986c), Abraham-Frois & Berrebi (1987, pp. 105-132; 1989, pp. 129-132).

a été rapidement perçu par Newman (1962, pp. 66-67) (cf. également Zaghini, 1967). La raison pour laquelle il a préféré l'ignorer plutôt que de le résoudre de manière satisfaisante était peut-être qu'il jugeait le problème peu réaliste. C'est en tout cas l'impression soulevée par l'extrait suivant de la lettre bien connue que Sraffa a adressée à Peter Newman le 4 juin 1962 :

In a real system, however, there is not one but a large number of basic products, and the ratio R resulting from the *system* which they form is practically certain to be much smaller than the own ratio of anyone *separate* non-basic (or any of such small groups of interconnected non-basics as may exist). (lettre publiée annexe à Bharadwaj, 1970, p. 426)

4. LE SYSTEME ETALON EN PRESENCE DE TERRES, SOUS L'HYPOTHESE DES TERRES-MARCHANDISES

4.1. Le statut des terres

Nous avons vu dans le chapitre précédent que lorsqu'on adopte l'hypothèse des terres-marchandises, les terres sont toujours non fondamentales. Et puisque selon Sraffa les marchandises non fondamentales ne figurent jamais dans le numéraire étalon, les terres seront écartées du numéraire étalon :

The similarity of rent-earning natural resources with non-basic products shows itself at once in the impossibility of their being counted among the components of the Standard product, since they appear on one side only of the production process. (Sraffa, 1960, § 85, p. 74)

Mathématiquement, le raisonnement de Sraffa est le suivant. Nous savons (cf. le paragraphe 4.1 du chapitre 4) que Sraffa avait en tête la matrice des produits B^S et la matrice des moyens de production A^S suivantes :

$$B^S = [B \quad 0] \quad , \quad A^S = [A \quad T] \quad (18)$$

où A et B renvoient aux marchandises 'ordinaires', et T aux marchandises-terres. Désignons par q^S le vecteur des multiplicateurs et par R^S le rapport étalon qui sont solutions des équations (9)-(10) appliquées aux matrices A^S et B^S ; cela implique que :

$$q^S [B^S - (1+R^S)A^S] = 0' \quad (19)$$

En tenant compte de (18), il vient :

$$q^S [0 - (1+R^S)T] = 0 \quad (20)$$

ou encore :

$$(1+R^S)q^S T = 0 \quad (21)$$

Il faut que R^S soit positif; mais alors (21) ne peut être satisfait que si :

$$q^S T = 0 \quad (22)$$

Cela signifie que quel que soit le rapport étalon, les terres sont toujours écartées du numéraire étalon.

Retournons toutefois à l'interprétation usuelle de l'hypothèse des terres-marchandises (cf. le paragraphe 4.2 du chapitre 4), et supposons la matrice des produits égale à B^T et celle des moyens de production à A^T :

$$B^T = [B \quad T] \quad , \quad A^T = [A \quad T] \quad (23)$$

Désignons maintenant par q^T le vecteur des multiplicateurs et par R^T le rapport étalon qui sont solutions des équations (9)-(10) appliquées aux matrices A^T et B^T ; cela implique que :

$$q^T [B^T - (1+R^T)A^T] = 0 \quad (24)$$

En tenant compte de (23), nous en déduisons que :

$$\mathbf{q}^T [\mathbf{T} - (1 + \mathbf{R}^T) \mathbf{T}] = \mathbf{0}' \quad (25)$$

d'où il vient que :

$$\mathbf{R}^T \mathbf{q}^T \mathbf{T} = \mathbf{0}' \quad (26)$$

Evidemment, il faut que \mathbf{R}^T soit positif; mais alors (26) ne peut être satisfait que si :

$$\mathbf{q}^T \mathbf{T} = \mathbf{0}' \quad (27)$$

Cela signifie une nouvelle fois que quel que soit le rapport étalon, les terres sont toujours écartées du numéraire étalon ⁶.

Sraffa (*ibid.*, §§ 87 & 90, pp. 75 & 77) soulignait que l'inévitable élimination des terres peut entraîner que le vecteur des multiplicateurs \mathbf{q}^T contienne des éléments négatifs, même si toutes les branches sont à produit unique. (En l'absence de terres, si toutes les branches sont à produit unique, le vecteur \mathbf{q} qui correspond à la plus grande valeur propre positive de la matrice \mathbf{H} est toujours semi-positif.) A titre d'illustration, supposons avec Sraffa que le blé soit produit par deux méthodes de production, et que ces deux méthodes soient les seules à utiliser la terre qui est de qualité uniforme. Disons que la première méthode utilise une quantité t_1 de terre, et la deuxième une

⁶ Signalons néanmoins que pour n'importe quel vecteur de multiplicateurs \mathbf{q} (même ceux qui ne correspondent pas à un rapport étalon), le numéraire $\mathbf{q}'(\mathbf{B}^T - \mathbf{A}^T)$ ne contient jamais de terres, car les m dernières lignes de $(\mathbf{B}^T - \mathbf{A}^T)$ sont nulles. Ceci n'est pas le cas pour le numéraire $\mathbf{q}'(\mathbf{B}^S - \mathbf{A}^S)$; pour que les éléments de ce numéraire correspondant aux terres soient nuls, il faut en effet que $\mathbf{q}'\mathbf{T} = \mathbf{0}'$.

quantité t_2 ($t_1 > 0$, $t_2 > 0$, $t_1 + t_2 = 1$). La condition (27) s'écrit alors :

$$q_1 t_1 + q_2 t_2 = 0 \quad (28)$$

Puisque $t_2 = 1 - t_1$, il vient :

$$q_1 = -[(1 - t_1)/t_1]q_2 \quad (29)$$

où l'expression entre crochets est positive. Il est alors clair que q_1 et q_2 seront ou bien tous les deux nuls, ou bien de signe contraire, comme l'observait Sraffa :

Both equations would enter the Standard system, although with coefficients of opposite signs and of such values as would in the aggregate eliminate the land from the means of production of that system. (*ibid.*, § 87, p. 75)

Cette possibilité de multiplicateurs négatifs constitue par ailleurs la raison principale pour laquelle Sraffa a dû préciser les conditions sous lesquelles les propriétés des 'systèmes de production simple' ('systems of single-product industries') restent vraies (cf. le paragraphe 5.4 du chapitre 4)

4.2. Un exemple numérique

Un exemple aidera à comprendre l'influence des terres-marchandises sur le système-étalon. Considérons l'économie suivante, où deux marchandises (le blé et le fer) sont produites à l'aide de travail et de terre par trois branches de production.

branche 1 :

0.1 unité de blé ⊕ 0.3 unité de fer ⊕ 0.5 unité de terre ⊕ 0.3 unité de travail

→ 0.5 unité de blé

branche 2 :

0.2 unité de blé ⊕ 0.1 unité de fer ⊕ 0.5 unité de terre ⊕ 0.5 unité de travail

→ 0.5 unité de blé

branche 3 :

0.3 unité de blé ⊕ 0.2 unité de fer ⊕ 0 unité de terre ⊕ 0.2 unité de travail

→ 1 unité de fer

En termes matriciels, l'économie est donc représentée par les matrices et vecteurs suivants :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Les matrices \mathbf{A}^T et \mathbf{B}^T sont par conséquent :

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Cherchons d'abord quel serait le rapport étalon R^T . Etant donné que le rapport étalon doit être une solution du système (9), R^T se trouve parmi les racines de

l'équation suivante :

$$\det [\mathbf{B}^T - (1+r)\mathbf{A}^T] = 0 \quad (32)$$

Cette équation a trois racines réelles : $r_1 = -1$, $r_2 = 0$, et $r_3 = 1/4$. Ni la racine négative, ni la racine nulle ne peuvent être retenues. Par conséquent, il faut que le rapport étalon soit égal à $1/4$.

Le vecteur des multiplicateurs \mathbf{q}^T qui est solution des équations (9)-(10) lorsque $R^T = 1/4$, est égal à :

$$\mathbf{q}^T = [-15/2 \quad 15/2 \quad -5/2] \quad (33)$$

Les observations de Sraffa sont donc confirmées. D'une part, bien que le système ne contienne que des branches à produit unique, certains multiplicateurs sont négatifs. D'autre part, les deux branches qui utilisent la terre et produisent le blé entrent dans le système étalon avec des coefficients de signe contraire ($q_1 = -15/2 = -q_2$).

4.3. Un cas de 'faux' rapport étalon

Nous avons vu que Sraffa identifiait le rapport étalon avec le taux de profit maximum (cf. le paragraphe 3.3). Cette identification repose implicitement sur l'hypothèse que le vecteur de prix, mesuré en termes du numéraire étalon, est semi-positif pour un intervalle de valeurs du taux de profit $[r_0, R^T]$. Or, cette hypothèse n'est pas toujours satisfaite, même s'il n'existe qu'un seul candidat pour le rapport étalon, et que toutes les branches sont à produit unique.

Reconsidérons l'exemple numérique ci-dessus. Nous n'avons pas encore calculé

le numéraire étalon n^T qui correspond au rapport étalon R^T . Il s'avère que :

$$n^T \equiv q^T [B^T - A^T] = [0 \quad -1/2 \quad 0] \quad (34)$$

Premier problème : ce numéraire est semi-négatif, ce qui est très difficile à imaginer. Si l'on adoptait ce numéraire, le prix du fer (la deuxième marchandise) serait toujours négatif ($p_2 \equiv -2$). Deuxième problème : pour n'importe quel taux de profit situé dans l'intervalle $(0, 1/4]$, le vecteur des prix, mesurés en termes du numéraire étalon, est négatif⁷. De deux choses l'une :

- ou bien le rapport étalon est identifié avec le taux de profit maximum; mais alors le seul candidat ($r = 1/4$) doit être rejeté, car il n'est manifestement pas le taux de profit maximum;
- ou bien le rapport étalon n'est plus identifié avec le taux de profit maximum; en principe on pourrait alors accepter $1/4$ comme rapport étalon.

Le problème majeur de la deuxième alternative, c'est qu'il faut soit donner un sens à un vecteur-numéraire négatif (si la définition du numéraire étalon ne change pas), soit proposer une nouvelle définition du numéraire étalon. De plus, l'abandon du critère du taux de profit maximum crée un vide lorsqu'il s'agit de faire une sélection parmi plusieurs candidats. Et même si une telle sélection n'est pas nécessaire, le résultat est discutable. Il peut en effet arriver que le rapport étalon soit le taux de profit ... minimum ! C'est le cas dans notre exemple numérique. Si l'on prenait le blé (par exemple) pour numéraire (c'est-à-dire : $p_1 \equiv 1$), alors les prix et le salaire seraient tous non négatifs pour les valeurs du taux de profit situées dans l'intervalle $[1/4, 3/7]$. (Le

⁷ Par exemple, pour $r = 1/4$ (et donc $w = 0$), on a :

$$p^T = [-4 \quad -2 \quad -6].$$

taux de profit $r = 1/4$ correspond à $w = 0$, et le taux de profit $r = 3/7$ à $p_3 = 0$.)

Toutes ces difficultés laissent planer un doute sur la validité en présence de terres de la définition du système étalon utilisée jusqu'ici. La cause principale des difficultés me semble résider dans la présupposition que le salaire et le taux de profit évoluent normalement de façon inverse⁸. La propriété paraît plausible pour les systèmes de production sans terres⁹. Etant donné que le produit net $[= u'(B-A)p]$ est entièrement réparti entre les profits $[= ru'Ap]$ et les salaires $[= wu'l = w]$, il est intuitivement clair que la part des profits $[= ru'Ap/u'(B-A)p]$ augmentera normalement lorsque le taux de profit croît, et que cela implique, sauf dans le cas où la valeur des moyens de production agrégés $[= u'Ap]$ évolue de façon 'exceptionnelle', que w diminuera lorsque r croît.

Mon sentiment est que cette propriété est moins plausible en présence de terres. A mon avis, il faut remplacer la règle qu'il existe 'normalement' ou 'probablement' une relation inverse entre le salaire et le taux de profit par la règle plus faible qu'il existe 'dans une majorité des cas' une relation inverse entre le salaire et le taux de profit. En d'autres termes, il faut s'habituer à l'idée qu'il n'est point exceptionnel que le salaire et le taux de profit évoluent dans le même sens. (Le langage est un peu flou, mais je reviendrai à cette question plus loin.) Cela signifie aussi qu'en présence de terres, la notion de système étalon (comme précédemment la notion de système de production simple) doit être modifiée. Je veux maintenant montrer que si l'on conçoit les terres comme des ressources (non comme des marchandises), cette modification se présente pour ainsi dire de toute évidence.

⁸ Cette présupposition explique peut-être pourquoi certains commentateurs attachent une grande importance à la démonstration que la relation $w(r)$ est de la forme $w = 1 - (1/R)r$ si l'on adopte le numéraire étalon.

⁹ Cf. également (dans le contexte du choix de techniques) les propositions de Schefold (1988a, pp. 108-109).

5. LE SYSTEME ETALON EN PRESENCE DE TERRES, SOUS L'HYPOTHESE DES TERRES-RESSOURCES

5.1. Le traitement des ressources

Je rappelle qu'en l'absence de terres, il n'existe qu'une seule ressource (le travail), dont les quantités utilisées par les différentes branches sont représentées par le vecteur $[n \times 1]$ \mathbf{l} . En présence de terres (conçues comme des ressources), il existe $m + 1$ ressources (les m terres et le travail), dont les quantités utilisées par les différentes branches sont représentées par la matrice $[n \times (m + 1)]$ \mathbf{L} .

Le principe de base sur lequel je vais construire la nouvelle notion de système étalon est que toutes les ressources doivent être traitées de la même façon. En l'absence de terres, la seule ressource de l'économie (le travail) joue un rôle purement passif. Le rapport étalon \mathbf{R} et la structure du vecteur des multiplicateurs \mathbf{q} sont en effet déterminés indépendamment du vecteur de travail \mathbf{l} ; le vecteur de travail ne sert qu'à normaliser le vecteur \mathbf{q} . Observons toutefois que la ressource n'est pas éliminée du système, bien au contraire : le système étalon et le système originel utilisent globalement la même quantité de la ressource ($\mathbf{q}'\mathbf{l} = \mathbf{u}'\mathbf{l} = 1$). En présence de $m + 1$ ressources, toutes traitées de la même façon, il semble naturel de modifier cette règle de manière à ce que le système étalon et le système originel utilisent globalement la même quantité de *chaque* ressource ($\mathbf{q}'\mathbf{L} = \mathbf{u}'\mathbf{L} = \mathbf{u}'$). Cela nous donne du même coup $m + 1$ équations au lieu d'une seule, et on pourrait se demander si le système étalon ne risque pas d'être surdéterminé. La réponse est négative, car là où il y avait auparavant n équations, il n'y a maintenant que $n - m$ équations. En effet, la condition que le rapport entre la quantité nette de la marchandise j produite par le système étalon et la quantité de cette marchandise utilisée par le système étalon en tant que moyen de production doit être

le même quelle que soit la marchandise j , ne nous fournit en présence de m terres que $k = n-m$ équations.

5.2. Le système étalon global

Mathématiquement, ce que je propose est ceci : déterminons le rapport étalon R^* et le vecteur des multiplicateurs q^* en tant que solutions des $n+1$ équations suivantes :

$$q^*(B-A) = R^* q^* A \quad (35)$$

$$q^* L = u' \quad (36)$$

Une fois connu le vecteur q^* , construisons alors le numéraire étalon n^* selon la définition habituelle :

$$n^* = q^*(B-A) \quad (37)$$

Le parallélisme entre les équations (35)-(36) et les équations (9)-(10) est frappant. Tout comme les k équations (9), les k équations (35) expriment que le rapport entre la quantité nette d'une marchandise produite par le système étalon et la quantité de cette marchandise utilisée par le système étalon en tant que moyen de production est le même pour les k marchandises de l'économie. Et comme l'équation (10), les $m+1$ équations (36) expriment que la quantité d'une ressource utilisée globalement par le système étalon est pour chaque ressource la même que celle utilisée globalement par le système originel.

Ce qui frappe le plus, peut-être, c'est que les ressources jouent maintenant un

rôle actif. En effet, le rapport étalon R^* et la structure du vecteur q^* ne sont plus déterminés indépendamment de la matrice des ressources L , car le système d'équations (35) contient maintenant seulement $n-m$ équations, nombre en général insuffisant pour déterminer n inconnues (le rapport étalon et $n-1$ rapports q_i/q_j). L'un des effets de ce changement de rôle est que deux économies dont les matrices des produits nets $(B-A)$ sont égales mais les matrices des ressources différentes, ne possèdent pas nécessairement le même rapport étalon.

Il est évident que le système étalon défini par les équations (35)-(36) est différent du système étalon construit sous l'hypothèse des terres-marchandises. Auparavant les terres étaient éliminées du système ($q^T T = 0$), maintenant elles lui appartiennent toutes ($q^* T = u$). Le rapport étalon R^* , le vecteur des multiplicateurs q^* , et le numéraire étalon n^* sont par conséquent en général différents du rapport étalon R^T , du vecteur des multiplicateurs q^T , et du numéraire étalon n^T . Pour bien distinguer les deux systèmes étalon, je désignerai le système étalon défini par les équations (35)-(36) sous le terme de 'système étalon global'. Dans le paragraphe suivant, je vais dériver deux propriétés intéressantes de ce système étalon global.

5.3. Deux propriétés du système étalon global

En ce qui concerne les systèmes de production sans terres, deux voies sont ouvertes pour arriver à un numéraire étalon neutre (cf. la section 3). La voie 'indirecte' (suivie par Sraffa) consiste à faire un détour par le système étalon : d'abord on détermine le rapport étalon R et le vecteur des multiplicateurs q à l'aide de la matrice des moyens de production A , de la matrice des produits B , et du vecteur de travail l , et après on calcule le numéraire étalon n par les équations $n' \equiv q'(B-A)$. La voie 'directe', en revanche, consiste à déterminer immédiatement le rapport étalon R et le numéraire

étalon \mathbf{n} à l'aide de la matrice des moyens de production directement et indirectement utilisés \mathbf{H} et du vecteur des valeurs-travail \mathbf{v} .

En ce qui concerne les systèmes de production avec terres, la procédure présentée dans le paragraphe précédent constitue évidemment une voie indirecte au numéraire étalon. A première vue, il semble impossible de trouver une voie directe pour ce cas, en raison de la non existence de la matrice $(\mathbf{B}-\mathbf{A})^{-1}$. Pourtant cette voie directe existe bel et bien. Il est en effet possible de déterminer directement le rapport étalon R^* et numéraire étalon \mathbf{n}^* à l'aide de la matrice \mathbf{H}^* et du vecteur \mathbf{v}^* que j'ai définis dans le chapitre précédent (cf. le paragraphe 3.6). Je rappelle que la matrice \mathbf{H}^* et le vecteur \mathbf{v}^* réunissent l'information permettant de décrire les relations entre les prix des k marchandises (\mathbf{p}), la somme des rémunérations des m ressources ($\mathbf{u}'\mathbf{w}$), et le taux de profit (r) :

$$\mathbf{p} = r\mathbf{H}^*\mathbf{p} + \mathbf{v}^*(\mathbf{u}'\mathbf{w}) \quad (38)$$

En présence de terres, la matrice \mathbf{H}^* et le vecteur \mathbf{v}^* globalisent donc l'information contenue auparavant dans la matrice \mathbf{H} et le vecteur \mathbf{v} . Il est maintenant possible de démontrer que le rapport étalon inverse $1/R^*$ est une valeur propre de \mathbf{H}^* et que le numéraire étalon \mathbf{n}^* est un vecteur-ligne propre de la matrice \mathbf{H}^* associé à la valeur propre $1/R^*$:

THEOREME 7.1. Voies directe et indirecte d'accès au numéraire étalon n^*

Si le rapport étalon R^* et le vecteur des multiplicateurs q^* sont solutions des $n+1$ équations

$$q^*(B-A) = R^* q^* A$$

$$q^* L = u',$$

alors le rapport étalon R^* et le numéraire étalon n^* , défini par $n^* \equiv q^*(B-A)$, sont solutions des $k+1$ équations

$$n^* = R^* n^* H^*$$

$$n^* v^* = 1.$$

Cette propriété confirme que le statut de H^* et de v^* pour les systèmes de production avec terres est analogue à celui de H et de v pour les systèmes de production sans terres.

Une deuxième propriété est maintenant facile à démontrer. Adoptons le numéraire étalon n^* pour mesurer les prix. Multiplions les deux côtés de (38) par n^* ; il vient que :

$$n^* p = r n^* H^* p + n^* v^* (u'w) \quad (39)$$

La marchandise composite n^* étant le numéraire, nous avons $n^* p \equiv 1$. Sachant du théorème 7.1 que $n^* = R^* n^* H^*$ et $n^* v^* = 1$, nous en déduisons que :

$$1 = (1/R^*)r + u'w \quad (40)$$

ou encore :

$$u'w = 1 - (1/R^*)r \quad (41)$$

Il existe par conséquent une relation linéaire et inverse entre la *somme* des rémunérations des ressources et le taux de profit. Cette relation est la généralisation, pour la production en présence de terres, de la relation linéaire inverse entre le salaire et le taux de profit valable pour la production en l'absence de terres (cf. l'équation (14)). Je souligne qu'au lieu d'imposer une relation linéairement décroissante entre la rémunération de l'une des m ressources et le taux de profit, le numéraire étalon n^* impose une telle relation entre la rémunération *globale* des ressources et le taux de profit ¹⁰.

Il n'est guère étonnant que nous arrivions à ce résultat. En ce qui concerne les systèmes de production sans terres (cf. le paragraphe 4.3), j'ai signalé qu'il est plausible que la part des salaires dans le produit net diminue et la part des profits dans le produit net augmente lorsque le taux de profit croît. Le salaire étant pris pour une approximation de la part des salaires et le taux de profit pour une approximation de la part des profits, il est également plausible que la relation $w(r)$ soit décroissante. Toutefois en présence de terres cette relation ne me semble plus tenir comme auparavant. L'explication de ce phénomène est simple. Avec ou sans terres, il faut admettre qu'il est normal, ou pour le moins probable, que la part des profits dans le produit net augmente lorsque le taux de profit croît. Il faut alors aussi admettre que la part restante du produit net (c'est-à-dire la somme des rémunérations des ressources)

¹⁰ La valeur R^* peut maintenant être interprétée comme le taux de profit *virtuellement* maximum. En effet, si $r = R^*$, on aura $u'w = 0$, ce qui signifie qu'au moins une des rémunérations w_i est négative. Le 'vrai' taux de profit maximum sera par conséquent normalement inférieur à R^* .

tend normalement à diminuer. En d'autres termes, ce qui est en général plausible ce n'est pas tant l'antagonisme salaires/profits que l'antagonisme non-profits/profits.

Auparavant, l'existence d'une relation décroissante entre w et r (et sa linéarisation par le numéraire étalon) pouvait être considérée comme témoignant de l'antagonisme salaires/profits. Par analogie, l'existence d'une relation décroissante entre la somme des rémunérations des ressources ($u'w$) et r (et sa linéarisation par le numéraire étalon global) peut être vue comme l'expression de l'antagonisme plus profond non-profits/profits. Que ce soit le numéraire étalon global n^* qui impose une relation linéairement décroissante entre la somme des rémunérations des ressources et le taux de profit, constitue à mon avis un argument fort en faveur de la thèse que la notion de système étalon global généralise la notion de système étalon.

Il apparaît donc qu'en présence de terres, deux propositions peuvent être avancées : (1) il existe 'normalement' ou 'probablement' une relation inverse entre la somme des rémunérations des ressources et le taux de profit; et (2) il existe 'dans une majorité des cas' une relation inverse entre la rémunération d'une ressource et le taux de profit. La deuxième proposition est basée sur l'idée que si la somme d'une série diminue, la chance que l'un de ses termes diminue est plus grande que celle qu'il augmente. Je souligne néanmoins que cette proposition ne signifie pas pour autant que l'existence d'une relation non inverse entre la rémunération d'une ressource et le taux de profit doive être considérée comme 'exceptionnelle'. Ainsi, l'usage d'adjectifs comme 'pathologique' (Schefold, 1975, p. 150), 'anomale' (Montani, 1975, p. 89) ou 'irrégulière' (D'Agata, 1984, p. 80) pour décrire une relation $w(r)$ qui est (localement) croissante me paraît exagéré.

5.4. Un exemple numérique

Pour illustrer ceci, retournons à l'exemple numérique du paragraphe 4.2. Calculons d'abord le rapport étalon global R^* et le vecteur des multiplicateurs q^* . Il y a deux solutions aux équations (35)-(36) :

$$R^* = 2/3, \quad q^* = [1 \quad 1 \quad 1] \quad (42)$$

$$R^* = 4, \quad q^* = [-1 \quad 3 \quad -1] \quad (43)$$

Les numéraires $q^*(B-A)$ qui leur correspondent sont respectivement :

$$n^* = [0.4 \quad 0.4] \quad (44)$$

$$n^* = [0.8 \quad -0.8] \quad (45)$$

La présence d'une composante négative dans le numéraire correspondant à $R^* = 4$ est une première raison pour considérer $R^* = 2/3$ comme le vrai rapport étalon. Une seconde raison est que le vecteur des multiplicateurs correspondant à $R^* = 2/3$ est celui qui identifie système originel et système étalon ($q^* = u$). Les proportions du système originel sont en effet déjà les proportions recherchées par Sraffa, et on comprend mal pourquoi on chercherait à changer une situation qui n'en a pas besoin.

Si l'on adopte alors le numéraire étalon (44) en tant que mesure des prix, la relation entre la somme du salaire et de la rente ($w+z$) et le taux de profit (r) s'avère comme annoncé linéaire et décroissante :

$$(w+z) = 1 - (3/2)r \quad (46)$$

Les relations entre le salaire et le taux de profit, et entre la rente et le taux de profit, par contre, ne sont pas linéaires. Dans le premier cas la relation est même croissante; on calcule en effet que :

$$w = \frac{5(1+r)(4r-1)}{4(4-r)} \quad (47)$$

$$z = \frac{(7+2r)(3-7r)}{4(4-r)} \quad (48)$$

La voie directe pour arriver au numéraire étalon consiste à déterminer les vecteurs-lignes propres de la matrice \mathbf{H}^* , et d'en fixer la grandeur à l'aide du vecteur \mathbf{v}^* . Il s'avère que :

$$\mathbf{H}^* = (1/8) \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}^* = (1/8) \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (49)$$

On vérifie sans problème que les numéraires donnés par (44) et (45) satisfont aux critères du théorème 7.1.

6. LE SYSTEME SYNTHETIQUE

6.1. L'interprétation de la matrice H^* et du vecteur v^*

Nous avons à deux reprises rencontré la matrice H^* et le vecteur v^* : d'abord lorsqu'il s'agissait de définir les marchandises globalement non fondamentales (cf. le paragraphe 3.6 du chapitre précédent), et puis de trouver une voie d'accès directe au numéraire étalon global (cf. la section précédente). Cette matrice et ce vecteur synthétisent pour ainsi dire l'information contenue dans les données originelles A , B , T , et I . Qu'il soit possible de décrire les relations entre prix des marchandises, somme des rémunérations des ressources et taux de profit comme :

$$p = rH^*p + v^*(u'w) \quad (50)$$

suggère, en effet, que le nombre v_i^* représente la quantité d'une 'ressource synthétique' directement et indirectement utilisée dans la production d'une unité nette de la marchandise i . Qu'il s'agisse d'un mélange hybride des $m+1$ ressources de l'économie est indiqué par le fait que la rémunération de cette ressource est la somme des rémunérations des $m+1$ ressources.

Nous savons qu'en l'absence de terres, la matrice $[kxk] H$ s'obtient par transformation de la matrice $[kxk] A$ (car $H \equiv [B-A]^{-1}A$), et le vecteur $[kx1] v$ par transformation du vecteur $[kx1] I$ (car $v \equiv [B-A]^{-1}I$). La matrice H et le vecteur v sont donc obtenus en transformant une matrice et un vecteur de mêmes dimensions. On peut alors se demander s'il n'existe, pour les systèmes de production avec terres, des matrices $[kxk] A^*$ et B^* et un vecteur $[kx1] I^*$ qui se rapportent à H^* et v^* comme A , B et I se rapportent à H et v en l'absence de terres.

6.2. Le système synthétique

Naturellement, il serait souhaitable que ce que j'appellerai dorénavant le 'système synthétique', décrit par A^* , B^* et I^* , ait un lien 'visible' avec le système originel, décrit par A , B , et L . Plus précisément, j'aimerais que la manière de passer du système originel au système synthétique soit analogue au passage usuel du système originel au système fondamental. Je rappelle que le système fondamental est obtenu en multipliant les équations du système originel (convenablement arrangées) par une matrice de transformation M , dont le nombre de lignes est égal au nombre de marchandises fondamentales (disons g) et le nombre de colonnes égal au nombre de branches (cf. les paragraphes 2.2 et 2.3 du chapitre 5). La matrice M est de la forme suivante :

$$M = [I \quad -F] \quad (51)$$

ce qui veut dire que la i -ième équation du système fondamental est construite en ajoutant les $k-g$ dernières équations du système originel, multipliées respectivement par les nombres $-f_{i1}$, $-f_{i2}$, ..., $-f_{i,k-g}$, à la i -ième équation du système originel.

Le problème à résoudre est donc en premier lieu de trouver une matrice $[k \times k]$ A^* , une matrice $[k \times k]$ B^* et un vecteur $[k \times 1]$ I^* tels que :

$$B^* p = (1+r)A^* p + I^*(u'w) \quad (52)$$

$$(B^* - A^*)^{-1} A^* = H^* \quad (53)$$

$$(B^* - A^*)^{-1} I^* = v^* \quad (54)$$

En second lieu, il s'agit de trouver une matrice $[k \times n]$ M^* , dont le nombre de lignes est égal à celui des marchandises et le nombre de colonnes égal à celui des branches, composée de la manière suivante :

$$M^* = [I \quad -F^*] \quad (55)$$

et qui est telle que :

$$M^*A = A^* \quad (56)$$

$$M^*B = B^* \quad (57)$$

$$M^*L = I^*u' \quad (58)$$

De toutes ces conditions, c'est la dernière qui est cruciale. Une fois trouvée une matrice M^* du type (55) qui satisfait à la condition (58) et qui rend la matrice $M^*(B-A)$ inversible, le tour est joué. En effet, nous aurons alors :

$$[M^*(B-A)]^{-1}I^* = v^* \quad (59)$$

sinon le système de prix aurait deux solutions différentes lorsque le taux de profit est nul ¹¹. Et nous aurons aussi ¹² :

¹¹ Supposons que $[M^*(B-A)]^{-1}I^* = v^0 \neq v^*$. Alors pour $r = 0$, il y aurait deux solutions du vecteur de prix $p(0)$: selon (50), on obtiendrait $p(0) = v^*(u'w)$, et après multiplication du système de prix originel par $[M^*(B-A)]^{-1}M^*$ on obtiendrait $p(0) = v^0(u'w)$.

$$[M^*(B-A)]^{-1}M^*A = H^* \quad (60)$$

ce qui signifie qu'en posant $B^* \equiv M^*B$ et $A^* \equiv M^*A$, nous avons trouvé une solution au problème.

En général, il existe plusieurs manières d'arranger les équations pour trouver une matrice M^* satisfaisant à la condition (58). Mais si nous voulons donner un sens au système synthétique, il est souhaitable que les données synthétiques (A^*, B^*, I^*) soient dans la mesure du possible non négatives.

Je me limiterai ici à démontrer le résultat suivant : les équations du système originel peuvent en général être arrangées de telle façon qu'il existe une matrice de transformation M^* qui définit un vecteur de ressource synthétique I^* positif. Considérons en effet des partitions de la matrice des ressources L du type suivant :

$$L = \begin{bmatrix} T_1 & l_1 \\ T_2 & l_2 \end{bmatrix} \quad (61)$$

où T_1 est une matrice $[k \times n]$, T_2 une matrice $[m \times m]$ inversible, l_1 un vecteur $[k \times 1]$, et l_2 un vecteur $[m \times 1]$. Supposons qu'il existe une matrice M^* telle que $M^*L = I^*u'$. Etant donné (61), cela signifie que :

¹² Supposons que $[M^*(B-A)]^{-1}M^*A = H^0 \neq H^*$. Alors il y aurait pour n'importe quelle valeur positive de r deux solutions du vecteur de prix $p(r)$: selon (50), il faut que $[I-rH^*]p(r) = v^*(u'w)$, tandis qu'après multiplication du système de prix originel par $[M^*(B-A)]^{-1}M^*$ on obtiendrait, en tenant compte du fait que $[M^*(B-A)]^{-1}M^*L = v^*u'$, $[I-rH^0]p(r) = v^*(u'w)$. Les deux solutions ne sont égales que si $r[H^*-H^0]p(r) = 0$, pour toutes les valeurs possibles de r et $p(r)$. En général, cela n'est possible que si $H^* = H^0$.

$$T_1 - F^*T_2 = l^*u' \quad (62)$$

$$l_1 - F^*l_2 = l^* \quad (63)$$

De (62) il vient :

$$F^* = (T_1 - l^*u')T_2^{-1} \quad (64)$$

Après substitution dans (63) et quelques manipulations, nous arrivons à :

$$l_1 - T_1T_2^{-1}l_2 = l^*(1 - u'T_2^{-1}l_2) \quad (65)$$

En tenant compte de $(u'l_1 + u'l_2) = 1$ et de $(u'T_1 + u'T_2) = u'$, nous en déduisons que ¹³ :

$$l^* = \frac{1}{u'(l_1 - T_1T_2^{-1}l_2)} (l_1 - T_1T_2^{-1}l_2) \quad (66)$$

Pour démontrer que $l^* > 0$, il suffit de démontrer que $(l_1 - T_1T_2^{-1}l_2) > 0$. D'où l'intérêt du théorème suivant :

¹³ Accidentellement, ceci révèle que la quantité de la ressource synthétique directement utilisée par le système synthétique est égal à 1, car $u'l^* = 1$.

THEOREME 7.2. Existence d'un vecteur l^* positif

Les équations du système originel peuvent normalement ¹⁴ être arrangées de façon que le vecteur $[k \times 1] (l_1 - T_1 T_2^{-1} l_2)$ soit positif.

Ce théorème ne dit rien sur le nombre d'arrangements des lignes pour lesquels le vecteur $(l_1 - T_1 T_2^{-1} l_2)$ est positif. S'il n'existe qu'un seul tel arrangement de lignes, je propose d'appeler *le* système synthétique le système de production fictif décrit par les matrices et le vecteur A^* , B^* et l^* , qui satisfont aux conditions (52)-(58), et pour lequel l^* est un vecteur positif.

Je termine en observant que la matrice $-F^*$ qui correspond à un vecteur l^* positif est probablement non négative, ce qui implique que les matrices A^* et B^* sont probablement aussi non négatives. Cette observation découle du fait que $l_1 - F^* l_2 = l^*$, et $-u' F^* = u'$. La dernière égalité montre par ailleurs que la manière de construire le système synthétique est telle que les m dernières équations du système de production sont entièrement réparties entre les k premières équations. En d'autres termes, $-f_{ij}$ est la fraction de la j -ième équation que l'on ajoute à la i -ième équation, et la somme $(-f_{1j}) + (-f_{2j}) + \dots + (-f_{kj})$ est pour chaque j égale à 1.

6.3. Un exemple numérique

Retournons à nouveau à l'exemple numérique du paragraphe 4.2. Réarrangeons d'abord les équations; remplaçons la première équation par la troisième, et la troisième par la première. Les matrices A et B , et les vecteurs T et l deviennent alors :

¹⁴ Le sens du mot normalement est expliqué en annexe.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Les matrices \mathbf{F}^* et \mathbf{M}^* qui mènent au système synthétique sont :

$$\mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

Le système synthétique est donc obtenu en ajoutant la troisième à la première équation.

Il s'avère ensuite que :

$$\mathbf{M}^* \mathbf{A} = \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\mathbf{M}^* \mathbf{B} = \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$\mathbf{M}^* \mathbf{T} = \mathbf{M}^* \mathbf{l} \mathbf{u}' = \mathbf{I}^* \mathbf{u}' = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} [1 \quad 1] \quad (71)$$

On vérifie sans problème que $(\mathbf{B}^* - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{A}^* \equiv \mathbf{H}^*$ et $(\mathbf{B}^* - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{l}^* \equiv \mathbf{v}^*$.

7. CONCLUSION

Dans ce chapitre j'ai examiné deux solutions au problème de la construction du système étalon en présence de terres.

La solution de Sraffa et de ses commentateurs est basée sur l'hypothèse que les terres sont des marchandises. L'essentiel de cette solution est que les terres, comme de règle toutes les marchandises non fondamentales, sont éliminées du produit net du système étalon, et ne figurent donc pas dans le numéraire étalon. L'une des raisons pour lesquelles cette solution ne me paraît pas la meilleure, est que le taux étalon, s'il existe, peut bien être le taux de profit minimum au lieu du taux de profit maximum recherché par Sraffa.

J'ai présenté une solution alternative, basée sur l'hypothèse que les terres sont des ressources, non des marchandises. L'essentiel de cette proposition est que les terres ne sont pas éliminées du système étalon, et y jouent un rôle comparable au travail. Le taux étalon, s'il existe, s'avère différent du taux étalon obtenu selon l'hypothèse des terres-marchandises. On pourrait l'interpréter comme le taux de profit virtuellement maximum.

J'ai enfin introduit la notion nouvelle de système synthétique. Ce système est un système artificiel (comme le système fondamental), où k branches de production produisent k marchandises à l'aide de ces k marchandises et d'une ressource synthétique, dont la rémunération est la somme des rentes et du salaire.

ANNEXE

=====

THEOREME 7.1.

Si le rapport étalon R^* et le vecteur des multiplicateurs q^* sont solutions des $n+1$ équations

$$q^*(B-A) = R^* q^* A$$

$$q^* L = u,$$

alors le rapport étalon R^* et le numéraire étalon n^* , défini par $n^* = q^*(B-A)$, sont solutions des $k+1$ équations

$$n^* = R^* n^* H^*$$

$$n^* v^* = 1.$$

Démonstration

(Je reprends la notation et les définitions introduites dans les paragraphes 3.3 et 3.6 du chapitre précédent.)

Pour une ressource quelconque i nous avons par définition :

$$[B-A \quad -L_{(i)}]^{-1} A = \begin{bmatrix} H(i) \\ J(i) \end{bmatrix} \quad (A1)$$

Il s'en suit que :

$$[B-A \quad -L_{(i)}] \begin{bmatrix} H(i) \\ J(i) \end{bmatrix} = A \quad (A2)$$

d'où :

$$[B-A]H(i) = A + L_{(i)}J(i) \quad (A3)$$

De façon analogue :

$$[B-A]v(i) = L_i + L_{(i)}s(i) \quad (A4)$$

Etant donné que $q^*L_i = 1$ et $q^*L_{(i)} = u'$, il résulte après multiplication des deux côtés de (A4) par le vecteur q^* , que :

$$q^*[B-A]v(i) = 1 + u's(i) \quad (A5)$$

Comme $q^*L_{(i)} = u'$, nous avons :

$$q^*L_{(i)} - \frac{q^*[B-A]v(i)u'}{[1+u's(i)]} = 0' \quad (A6)$$

Puisque par hypothèse $q^*(B-A) = R^*q^*A$, nous pouvons écrire :

$$q^*[B-A] = R^*q^*A + R^* \left\{ q^*L_{(i)} - \frac{q^*[B-A]v(i)u'}{[1+u's(i)]} \right\} J(i) \quad (A7)$$

Réarrangeons ensuite les termes de (A7) :

$$q^*[B-A] = R^*q^*[A+L_{(i)}J(i)] - \frac{1}{[1+u's(i)]} R^*q^*[B-A]v(i)u'J(i) \quad (A8)$$

En tenant compte de (A3) il vient :

$$\mathbf{q}^{*'}[\mathbf{B}-\mathbf{A}] = \mathbf{R}^* \mathbf{q}^{*'}[\mathbf{B}-\mathbf{A}] \left\{ \mathbf{H}(i) - \frac{1}{[1+\mathbf{u}'\mathbf{s}(i)]} \mathbf{v}(i)\mathbf{u}'\mathbf{J}(i) \right\} \quad (\text{A9})$$

d'où :

$$\mathbf{q}^{*'}[\mathbf{B}-\mathbf{A}] = \mathbf{R}^* \mathbf{q}^{*'}[\mathbf{B}-\mathbf{A}] \mathbf{H}^* \quad (\text{A10})$$

En posant $\mathbf{n}^{*'} = \mathbf{q}^{*'}(\mathbf{B}-\mathbf{A})$, nous arrivons à :

$$\mathbf{n}^{*'} = \mathbf{R}^* \mathbf{n}^{*'} \mathbf{H}^* \quad (\text{A11})$$

Et puisque $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}(i)/[1+\mathbf{u}'\mathbf{s}(i)]$, il vient de (A5) que :

$$\mathbf{n}^{*'} \mathbf{v}^* = 1 \quad (\text{A12})$$

■

THEOREME 7.2

Les équations du système originel peuvent normalement être arrangées de façon que le vecteur $[\mathbf{kx1}] (\mathbf{l}_1 - \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{l}_2)$ soit positif.

Remarque

Le mot 'normalement' signifie ici que les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :

H.I Soit \mathbf{T}_x une matrice $[\mathbf{m} \times \mathbf{m}]$ composée de m différentes lignes non nulles de la

matrice des terres T . Alors $\text{rg}[T_X] = m$.

H.II Soit L_X une matrice $[(m+1) \times (m+1)]$ composée de $m+1$ différentes lignes de la matrice de ressources L , et qui contient une matrice $[m \times m]$ T_X composée de m lignes non nulles de T . Alors $\text{rg}[L_X] = m+1$.

Le but de ces hypothèses est d'assurer que l'algorithme sur lequel est basée la démonstration ne dégénère pas.

Démonstration

1. Préliminaires

Arrangeons les équations du système de prix de façon que les m dernières lignes de T forment une matrice inversible T_2 . (Puisque par hypothèse $\text{rg}[T] = m$, cela est toujours possible.) Désignons les branches ainsi arrangées par les indices $1, 2, \dots, n$. Définissons ensuite deux ensembles d'indices, J et H : $J = \{1, 2, \dots, k\}$ et $H = \{k+1, k+2, \dots, k+m\}$. T_1 est donc composée des lignes de T dont les indices se trouvent dans J , et T_2 des lignes dont les indices se trouvent dans H .

La démonstration est basée sur l'idée suivante. Si la partition de la matrice L correspondant aux ensembles J et H est telle que $(l_1 - T_1 T_2^{-1} l_2) \neq 0$, alors nous procédons à un échange de lignes entre J et H , qui consiste à transférer une ligne de H à J et une ligne de J à H . Les nouveaux ensembles seront appelés J' et H' , et les matrices et vecteurs correspondants T_1, T_2, l_1 , et l_2 . Ces échanges continuent jusqu'au moment où on arrive à des ensembles J^* et H^* tels que $(l_{1^*} - T_{1^*} T_{2^*}^{-1} l_{2^*}) > 0$.

Je définis des nombres $x_i(H), x_i(H'), \dots, x_i(H^*)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) comme suit :

$$x_i(H) \equiv l_i - T^i T_2^{-1} l_2 \quad (\text{A13})$$

$$x_i(H') \equiv l_i - T^i T_2^{-1} l_2, \quad (\text{A14})$$

$$x_i(H^*) \equiv l_i - T^i T_{2*}^{-1} l_{2*} \quad (\text{A15})$$

Par analogie avec les notations T_1 et T_2 , les vecteurs $[k \times 1] x_1(\cdot)$ sont composés des k $x_i(\cdot)$ pour lesquels $i \in J$, et les vecteurs $[m \times 1] x_2(\cdot)$ des m $x_i(\cdot)$ pour lesquels $i \in H$. De la même façon, les vecteurs $[k \times 1] x_1(\cdot)$ sont composés des k $x_i(\cdot)$ pour lesquels $i \in J'$, et les vecteurs $[m \times 1] x_2(\cdot)$ des m $x_i(\cdot)$ pour lesquels $i \in H'$, etc.

Observons maintenant que $\forall i \in H : x_i(H) = 0$; donc $x_2(H) = \mathbf{0}$. De la même façon, $x_2(H') = \mathbf{0}, \dots, x_{2*}(H^*) = \mathbf{0}$. Observons ensuite que $\forall i \in J : x_i(H) \neq 0$. Supposons en effet que l'on ait pour un $i \in J : x_i(H) = l_i - T^i T_2^{-1} l_2 = 0$. Cela voudrait dire que :

$$\begin{bmatrix} T^i & l_i \\ T_2 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^i T_2^{-1} T_2 & T^i T_2^{-1} l_2 \\ T_2 & l_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A16})$$

Puisque la première ligne de cette matrice est linéairement dépendante des m autres lignes, le rang de la matrice serait inférieur à $m + 1$, ce qui contredirait l'hypothèse H.II.

2. Effets d'un échange de lignes entre J et H

J'examine d'abord ce qui se passe si nous transférons la ligne j de J à H et la ligne h de H à J . Nous avons par conséquent : $J' = [J \setminus \{j\}] \cup \{h\}$ et $H' = [H \setminus \{h\}] \cup \{j\}$. Je suppose que la matrice T_2 , ainsi obtenue est inversible. Pour commencer, considérons les vecteurs $x_2(H')$ et $x_2(H)$:

$$x_2(H') = l_2 - T_2 T_2^{-1} l_2, \quad (\text{A17})$$

$$\mathbf{x}_2(\mathbf{H}) = \mathbf{l}_2 - \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{l}_2 \quad (\text{A18})$$

De (A17) il vient :

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{x}_2(\mathbf{H}') + \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{l}_2, \quad (\text{A19})$$

Après substitution dans (A18) cela donne :

$$\mathbf{x}_2(\mathbf{H}) = -\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{x}_2(\mathbf{H}') \quad (\text{A20})$$

Observons maintenant que le vecteur $\mathbf{x}_2(\mathbf{H}')$ ne contient qu'un seul élément non nul, à savoir $x_h(\mathbf{H}')$. A son tour, le vecteur $\mathbf{x}_2(\mathbf{H})$ ne contient qu'un seul élément non nul, à savoir $x_j(\mathbf{H})$. Cela signifie que (A20) se réduit à :

$$x_j(\mathbf{H}) = -\mathbf{T}^j [\mathbf{T}_2^{-1}]_h x_h(\mathbf{H}') \quad (\text{A21})$$

soit :

$$x_h(\mathbf{H}') = -x_j(\mathbf{H}) / \mathbf{T}^j [\mathbf{T}_2^{-1}]_h \quad (\text{A22})$$

Examiner les effets de l'échange des lignes h et j , revient à examiner la différence entre le vecteur $\mathbf{x}(\mathbf{H})$ et le vecteur $\mathbf{x}(\mathbf{H}')$. Par définition nous avons, pour une ligne quelconque i :

$$x_1(H) = l_1 - T^i T_2^{-1} l_2 \quad (A23)$$

$$x_1(H') = l_1 - T^j T_2^{-1} l_2, \quad (A24)$$

Il vient :

$$x_1(H') - x_1(H) = T^i [T_2^{-1} l_2 - T_2^{-1} l_2] \quad (A25)$$

Après multiplication des deux côtés de (A17) par T_2^{-1} , il en résulte que :

$$T_2^{-1} x_2(H') = T_2^{-1} l_2 - T_2^{-1} l_2, \quad (A26)$$

Comme $x_h(H')$ est le seul élément non nul de $x_2(H')$, cela signifie :

$$[T_2^{-1}]_h x_h(H') = T_2^{-1} l_2 - T_2^{-1} l_2, \quad (A27)$$

Après substitution dans (A25) nous obtenons :

$$x_1(H') - x_1(H) = T^i [T_2^{-1}]_h x_h(H') \quad (A28)$$

et enfin, en tenant compte de (A22) :

$$x_1(H') - x_1(H) = -\{T^i [T_2^{-1}]_h / T^j [T_2^{-1}]_h\} x_j(H) \quad (A29)$$

3. L'algorithme

Le but des échanges est d'arriver à des ensembles J^* et H^* qui sont tels que $x_{1^*}(H^*) > 0$. Considérons la situation de départ, et supposons qu'un échange est nécessaire, c'est-à-dire que pour au moins un $g \in J : x_g(H) < 0$. Comme $x_g(H) = l_g - T^g T_2^{-1} l_2$, il existe au moins un $h \in H : T^g [T_2^{-1}]_h > 0$. Etant donné h , choisissons alors, parmi tous les éléments de J , l'élément j pour lequel le rapport $T^j [T_2^{-1}]_h / x_j(H)$ est le plus petit. Ce rapport est toujours négatif, car il l'est pour g . En plus, l'élément j est unique; s'il ne l'était pas, il y aurait une contradiction de l'hypothèse H.II (cf. plus loin).

Nous sommes maintenant en mesure de décrire ce qui se passe si nous échangeons les lignes h et j . De (A29) il suit que pour tous les éléments $i \in J$:

$$\frac{x_i(H')}{x_i(H)} = 1 - \frac{T^i [T_2^{-1}]_h / x_i(H)}{T^j [T_2^{-1}]_h / x_j(H)} \quad (\text{A30})$$

Puisque nous avons choisi j de façon que le rapport $T^j [T_2^{-1}]_h / x_j(H)$ soit minimal, il vient :

$$\frac{T^i [T_2^{-1}]_h / x_i(H)}{T^j [T_2^{-1}]_h / x_j(H)} \leq 1 \quad (\text{A31})$$

quel que soit i . Cela signifie que :

$$x_i(H') / x_i(H) \geq 0 \quad (\text{A32})$$

A l'exception de l'élément j , tous les éléments $i \in J$ conservent donc leur signe. (Si $x_i(H')$ était nul pour un $i \in J$, $i \neq j$, alors l'hypothèse H.II serait contredite.)

Deux possibilités doivent être distinguées : $x_j(H) < 0$, et $x_j(H) > 0$. Dans le premier cas, nous avons : $x_j(H) < 0$ qui devient $x_j(H') = 0$, et $x_h(H) = 0$ qui devient $x_h(H') > 0$. En d'autres termes, le vecteur $x(H')$ compte un élément négatif de moins que le vecteur $x(H)$. Si de tels changements pouvaient être répétés, on arriverait rapidement à un vecteur $x(H^*)$ qui est non négatif. Dans le second cas, nous avons : $x_j(H) > 0$ qui devient $x_j(H') = 0$, et $x_h(H) = 0$ qui devient $x_h(H') > 0$. En d'autres termes, le vecteur $x(H')$ compte le même nombre d'éléments négatifs que le vecteur $x(H)$. De (A30) il vient pourtant que $x_g(H) < x_g(H') < 0$, c'est-à-dire : la valeur de l'élément à partir duquel nous avons sélectionné les éléments h et j augmente. Cela veut dire que si la valeur de l'élément g est restée négative, par répétition de la procédure de remplacement en partant toujours de ce même élément, sa valeur deviendrait à un certain moment inévitablement nulle. Il est en effet impossible que l'on commence à 'cycler', ou que la procédure doive être répétée 'à l'infini'. Quoi qu'il arrive, on trouvera donc toujours un vecteur $x(H^*)$ qui est non négatif.

4. Non dégénérescence de l'algorithme

Dans ce qui précède j'ai tacitement supposé que le remplacement proposé par l'algorithme peut toujours être effectué. Le seul cas où il ne pourrait l'être se produirait si l'algorithme proposait de remplacer une ligne de T_2 par une ligne nulle de T_1 , car alors la matrice T_2 , ne serait pas inversible. Mais cela ne peut se produire. En effet, pour que la ligne j de T_1 soit sélectionnée pour entrer dans la matrice T_2 , il faut que le rapport $T^j[T_2^{-1}]_h/x_j(H)$ soit négatif (cf. supra). Mais dans le cas où la ligne T^j est nulle, ce rapport est nul. ■

CONCLUSION DE LA PARTIE II

=====
Partant de l'hypothèse que l'on étudie un système économique donné, j'ai analysé et critiqué la façon dont Sraffa a traité la terre et la rente dans le chapitre XI de *Production of Commodities*. Ensuite le rôle de la terre en ce qui concerne les marchandises (non) fondamentales et le système étalon a été examiné à partir de deux hypothèses différentes. Les terres ont d'abord été conçues comme des marchandises qui sortent de la production de la même manière qu'elles y entrent. Cette hypothèse semble très proche de celle que Sraffa doit avoir eu en tête. Une conception alternative est de considérer les terres comme des ressources. Cette dernière hypothèse me paraît plus appropriée pour rendre compte de la spécificité des terres, et je pense qu'elle est supérieure à la première. J'ai montré que l'adoption de l'hypothèse des terres-ressources permet de retrouver et d'enrichir les notions de marchandise (non) fondamentale et de système étalon formulées par Sraffa en l'absence de terres.

PARTIE III

LE CHOIX DE TECHNIQUES

EN PRESENCE DE TERRES

INTRODUCTION A LA PARTIE III

=====

Le but de la troisième Partie de la thèse est d'étudier le rôle de la terre et de la rente dans le problème du choix de techniques. Dans la Partie II, la terre et la rente étaient examinées du point de vue d'un observateur qui connaît les branches de production, et qui sait combien de marchandises chacune d'elles a produites, et de combien de marchandises chacune d'elles a besoin pour recommencer la production dans la période suivante. Maintenant, je prends un autre point de vue. Partant d'une liste des méthodes de production disponibles, je me demanderai : étant donné la demande et le taux de profit, quelles méthodes de production, et activées à quels niveaux, pourraient constituer un système de production stable ?

Ce changement de perspective permet de renouer avec la problématique des auteurs classiques, qui s'intéressaient beaucoup à l'analyse dynamique. Ricardo, par exemple, voulait déterminer les effets de l'expansion de la population et de la demande sur la répartition du produit net entre profit, rente et salaire. Même si l'on fait abstraction des progrès techniques, un tel projet nécessite que l'on sache quelles méthodes de production doivent être activées en fonction de la demande. Le problème à résoudre n'est pas simple, car il concerne tant les quantités que les prix. D'une part, il faut que les méthodes activées soient en mesure de satisfaire la demande, et de l'autre il faut que les prix, les rentes et le salaire assurent la stabilité du système.

Je me concentrerai sur les questions de l'*existence* et de l'*unicité* des systèmes de production 'stables'. L'intérêt de la question de l'existence est évidente : la non existence

de systèmes 'stables' pour certaines demandes signifie ou bien que l'économie se heurte à ses limites physiques, ou bien que les règles (économiques) du jeu sont irréconciliables. L'intérêt de la question de l'unicité l'est peut-être moins. J'observe cependant que si l'on veut établir des résultats concernant, par exemple, l'évolution des rentes sous l'influence de l'expansion de la demande, il faut savoir si l'économie peut suivre un seul ou plusieurs chemins. La résolution des questions de l'existence et de l'unicité est donc préalable à l'étude de la dynamique.

Le premier chapitre de la Partie III commencera donc par définir le concept de système de production 'stable', que j'appellerai, suivant la terminologie introduite par Salvadori, système de production 'de coût minimal'. (D'autres, comme Bidard et Schefold, préfèrent parler de système de production 'dominant'.) C'est de toute évidence un chapitre qui est fondamental pour pouvoir comprendre ce qui va suivre. J'y expliquerai notamment comment les contraintes de terre peuvent être intégrées d'une façon élégante. En outre, j'énoncerai les principales hypothèses simplificatrices.

Dans le deuxième chapitre de la Partie III (chapitre 9), je passerai en revue les résultats qui ont été obtenus jusqu'à présent en ce qui concerne l'existence et l'unicité des systèmes de production de coût minimal. Il apparaîtra que beaucoup reste à faire pour les cas plus généraux, notamment pour les économies où il existe plusieurs marchandises agricoles.

Dans les trois chapitres suivants je tenterai ensuite de combler un peu ce vide. Le chapitre 10 servira à introduire les concepts de technique et de domaine de production. La notion de 'technique' généralise la notion de 'système de production' : où 'système de production' renvoie à un ensemble de méthodes activées à des niveaux donnés, 'technique' renvoie à un ensemble de méthodes actives, sans que l'on dise quelque chose sur les niveaux d'activité de ces méthodes. Le 'domaine de production'

d'une technique sera alors l'ensemble des demandes que tous les systèmes de production associés à une technique sont en mesure de satisfaire.

Le chapitre 11 traitera ensuite des relations entre plusieurs techniques et domaines de production. J'y définirai les notions de 'voisinage' et de 'rivalité' à partir des propriétés de deux domaines de production. Ces notions auront une importance primordiale dans le dernier chapitre de la thèse, consacré à l'existence et l'unicité des techniques de coût minimal. Je démontrerai un théorème permettant de découvrir pour quels taux de profits il existe au moins une technique de coût minimal. Je démontrerai également un théorème stipulant un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait unicité des techniques de coût minimal.

CHAPITRE 8

LES SYSTEMES DE PRODUCTION DE COUT MINIMAL

EN PRESENCE DE TERRES

=====

1. INTRODUCTION

Partant d'un ensemble de méthodes de production disponibles, le problème du choix de techniques est essentiellement celui de déterminer quelles méthodes devraient être activées, et à quels niveaux, étant donnés la demande et le taux de profit. En l'absence de terres ce problème est moins compliqué qu'en leur présence. L'introduction de terres équivaut en effet à l'introduction de restrictions quantitatives à la capacité de production, et il est clair que ces restrictions, si elles sont pertinentes, ne peuvent être sans influence sur le choix entre les méthodes de production.

Sraffa s'occupait brièvement du problème du choix de techniques dans le seul chapitre de la dernière partie de *Production of Commodities by Means of Commodities*, à savoir le chapitre 12 "Switch in methods of production". La terre est absente de ce chapitre, mais comme nous avons vu plus haut (cf. le chapitre 4) Sraffa abordait déjà le problème du choix de techniques en présence de terres dans le chapitre sur la terre. Malgré les indications de Sraffa dans l'Avant-propos, *Production of Commodities* offre donc bien un point de départ pour l'étude d'un système économique en changement.

Aujourd'hui, trente ans après la publication de *Production of Commodities*, beaucoup de progrès a été fait dans ce domaine, et on peut même dire que Sraffa a été dépassé. Il est notamment établi que ce que disait Sraffa sur le choix de techniques en présence de production jointe, est faux (cf. Bidard, 1984, pp. 203-205, Salvadori, 1985, pp. 163-164).

Dans ce qui suit, je choisis de ne pas revenir sur l'histoire de la théorie du choix de techniques, et de commencer immédiatement par présenter comment le problème est actuellement formalisé. A partir de maintenant, j'abandonne donc l'hypothèse que nous étudions un système économique *donné*; cela implique que je cesse d'observer un ensemble de branches dont les quantités produites sont données. Le problème sera précisément de déterminer, en fonction de la demande, *quel* système de production devrait se réaliser. Comme l'a clairement observé Steedman (1980b, p. 5), il est alors absolument nécessaire de faire une hypothèse sur les rendements, ce qui n'était pas le cas aussi longtemps que nous étions en train d'étudier un système de production donné. Avec la plupart des auteurs, je suppose que chaque méthode produit à rendements constants.

La structure du chapitre est la suivante. D'abord, je présente les données de base, et je décris tout particulièrement comment les contraintes de terre peuvent être traduites en méthodes de production 'fictives', les méthodes de 'repos' (section 2). Ensuite, j'introduis la notion de système de production de coût minimal, dont la théorie du choix de techniques tente à démontrer l'existence et l'unicité (section 3). Après cela, j'explique sous quelles hypothèses simplificatrices je traiterai le problème du choix de techniques (section 4). Je finis par reformuler la définition du système de production de coût minimal, étant données les hypothèses de la section précédente (section 5).

2. LA DEFINITION D'UN SYSTEME DE PRODUCTION DE COUT MINIMAL

2.1. Le problème du choix de techniques

Brièvement, le problème du choix de techniques est le suivant. On se donne :

- le taux de profit (variable distributive exogène);
- la demande (éventuellement sous forme de fonctions de demande);
- la liste des méthodes de production disponibles;
- les quantités de terre disponibles;

et on essaie de déterminer :

- les méthodes de production qui doivent être activées, et leurs niveaux;
- les prix, le salaire et les rentes qui correspondent à cette situation.

Dans cette section, j'introduis les méthodes de production et les terres; je reviens sur la demande dans la section suivante (cf. le paragraphe 3.6).

2.2. Les méthodes de production

Par hypothèse, il existe k marchandises (1, 2, ..., k), m terres (1, 2, ..., m), et n méthodes de production ($1_p, 2_p, \dots, n_p$). Comme auparavant les branches de production, les méthodes de production sont caractérisées par des relations qui décrivent les quantités de moyens de production, de terres et de travail qui doivent être employés pour produire un certain nombre de produits. En termes formels, la relation suivante décrit les quantités de marchandises $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}$, les quantités de terre $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{im}$ et la quantité de travail $(l_p)_i$ utilisées par la méthode de production i_p pour produire les quantités de marchandises $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ik}$:

$$(A_p)^i, (T_p)^i, (l_p)_i \rightarrow (B_p)^i \quad (1)$$

où $(A_P)^i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ik}]$ est un vecteur $[1 \times k]$ représentant les quantités de marchandises utilisées en tant que capital circulant par la méthode i_P , $(T_P)^i = [t_{i1} \ t_{i2} \ \dots \ t_{im}]$ un vecteur $[1 \times m]$ représentant les quantités de terres utilisées par la méthode i_P , $(l_P)_i$ un nombre représentant la quantité de travail utilisée par la méthode i_P , et $(B_P)^i = [b_{i1} \ b_{i2} \ \dots \ b_{ik}]$ un vecteur $[1 \times k]$ représentant les quantités de marchandises produites par la méthode i_P . Je suppose que $(A_P)^i \geq 0'$, $(T_P)^i \geq 0'$, $(l_P)_i > 0$, et $(B_P)^i \geq 0'$.

L'hypothèse fondamentale concernant les méthodes de production est qu'elles fonctionnent toutes à rendements constants. Soit $(x_P)_i$ le niveau d'activité de la méthode de production i_P ; l'hypothèse des rendements constants signifie alors que quel que soit le niveau d'activité de la méthode i_P *physiquement possible*, une fois connue une relation du type (1), la relation suivante est toujours vérifiée :

$$(x_P)_i(A_P)^i, (x_P)_i(T_P)^i, (x_P)_i(l_P)_i \rightarrow (x_P)_i(B_P)^i \quad (2)$$

En d'autres termes, l'échelle de la production n'affecte pas les 'proportions' entre les moyens de production, les terres, le travail et les produits d'une méthode de production. J'adopte donc l'hypothèse suivante :

H.1. Chaque méthode de production est caractérisée par des rendements constants.

Tout comme les branches (cf. le paragraphe 4.3 du chapitre 4), les méthodes qui utilisent une quantité positive d'au moins une terre $[(T_P)^i \geq 0']$ seront appelées méthodes de production *agricoles*, et les méthodes qui n'utilisent aucune quantité positive de terre

$[(T_P)^i = 0]$ méthodes de production *industrielles*. Je suppose que les g premières méthodes de production $[1_P, 2_P, \dots, g_P]$ sont agricoles, et les $n-g$ méthodes restantes $[(g+1)_P, (g+2)_P, \dots, n_P]$ industrielles. Les marchandises qui sont produites par au moins une méthode agricole seront appelées marchandises *agricoles*, et celles qui ne le sont pas marchandises *industrielles*. Je suppose que les a premières marchandises $[1, 2, \dots, a]$ sont agricoles et les $k-a$ marchandises restantes $[a+1, a+2, \dots, k]$ industrielles.

Représentons maintenant l'information sur les méthodes de production sous forme matricielle. Soit A_P la matrice $[n \times k]$ des moyens de production, B_P la matrice $[n \times k]$ des produits, T_P la matrice $[n \times m]$ des terres, et l_P le vecteur $[n \times 1]$ de travail; nous avons alors :

$$A_P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B_P = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad T_P = \begin{bmatrix} T_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad l_P = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Les lignes de cette matrice et de ce vecteur correspondent aux méthodes de production, tandis que les colonnes correspondent aux marchandises (dans le cas de A_P et B_P), aux terres (dans le cas de T_P) et au travail (dans le cas de l_P). Les lignes sont réparties en deux groupes pour distinguer les méthodes agricoles des méthodes industrielles (l'indice 1 renvoie aux méthodes agricoles, l'indice 2 aux méthodes industrielles). Les colonnes des matrices A_P et B_P sont également réparties en deux groupes, pour distinguer les marchandises agricoles des marchandises industrielles (l'indice 1 renvoie aux marchandises agricoles, l'indice 2 aux marchandises industrielles). A_{11} et B_{11} sont donc des matrices $[g \times a]$, T_1 une matrice $[g \times m]$, l_1 un vecteur $[g \times 1]$, etc.

Le nombre $(x_P)_i$ représente le niveau d'activité de la méthode de production i_P , et le vecteur $[n \times 1]$ x_P le vecteur composé des n niveaux d'activités :

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

où, par analogie avec la partition de \mathbf{l}_p , le vecteur $[gx1]$ x_1 représente les niveaux d'activité des méthodes agricoles, et le vecteur $[(n-g)x1]$ x_2 les niveaux d'activité des méthodes industrielles.

En ce qui concerne l'unité de mesure dans laquelle le niveau d'activité de la méthode agricole i_p est exprimée (en d'autres termes, l'unité de mesure choisie pour exprimer la i -ième ligne des matrices et vecteurs \mathbf{A}_p , \mathbf{B}_p , \mathbf{T}_p , et \mathbf{l}_p), je suppose que $(\mathbf{x}_p)_i = 1$ correspond au niveau d'activité maximal de la méthode, d'où il suit que l'on a toujours $0 \leq (\mathbf{x}_p)_i \leq 1$. Comme nous verrons dans un instant, ce sont les contraintes de terre qui imposent des limites à la capacité de production des méthodes agricoles. Je suppose que la surface totale de chaque type de terre est égale à 1. Le niveau d'activité maximal de la méthode agricole i_p est alors le niveau pour lequel cette méthode utilise la surface totale d'au moins un type de terre j , tout en utilisant moins que la surface totale des autres terres h . En termes formels, le vecteur des terres de la méthode agricole i_p , $(\mathbf{T}_p)^i$, est tel que $(\mathbf{T}_p)^i \leq \mathbf{u}'$ et $(\mathbf{T}_p)^i \not\leq \mathbf{u}'$. Les méthodes industrielles, par contre, ne sont soumises à aucune contrainte. L'unité de mesure de leurs niveaux d'activité peut donc être choisie arbitrairement.

Deux cas spéciaux méritent d'être signalés. Si chaque méthode de production agricole n'utilise qu'une seule qualité de terre, et que chacune de ces méthodes utilise une qualité de terre spécifique (le nombre de qualités de terre, m , est donc égale au nombre de méthodes de production agricoles, g), je dirai qu'on se trouve en *régime de rente extensive*. En revanche, si chaque méthode de production n'utilise qu'une seule

qualité de terre, mais que chacune de ces méthodes utilise la même qualité de terre (le nombre de qualités de terre est donc égale à 1), je dirai qu'on se trouve en *régime de rente intensive*. (Si en outre il n'existe qu'une seule marchandise agricole ($a = 1$), je parlerai de régime de rente extensive ou intensive *pure*.) En régime de rente extensive, les terres sont donc parfaitement spécialisées (car chaque terre ne peut être utilisée que par une seule méthode de production), tandis qu'en régime de rente intensive la terre est parfaitement non spécialisée (car elle est utilisée par n'importe quelle méthode de production agricole).

2.3. Les méthodes de repos

Il est clair que la surface disponible d'une terre ne sera pas toujours entièrement cultivée. Il s'avérera utile de traiter l'activité qui consiste à laisser la terre i ($i = 1, 2, \dots, m$) en jachère *explicitement* comme une méthode additionnelle. De prime abord, une telle méthode apparaît comme une méthode de production fictive, car son activité consiste à utiliser une quantité de terre pour ne produire rien du tout ¹. A la réflexion, toutefois, son existence reflète une exigence économique bien réelle. Laisser une partie de la terre en jachère est une manière d'utiliser la terre qui constitue toujours une alternative réelle aux autres manières d'utiliser la terre. Il faut que *toutes* ces manières d'utiliser la terre soient économiquement compatibles, sinon la stabilité de l'économie serait en danger. Plus spécifiquement, si laisser la terre en jachère était plus rentable que cultiver la terre, il y aurait une tendance à renoncer à la culture. En revanche, si laisser la terre en jachère était moins rentable que cultiver la terre, il y aurait une incitation à ne plus la laisser non cultivée (cf. plus loin, le paragraphe 3.5).

¹ Bidard (1987, p. 205), en revanche, parle de "méthodes fictives d'élimination de chacune des terres".

Il paraît alors approprié de définir autant de méthodes de production fictives que de types de terres. J'appellerai ces méthodes de production fictives désormais *méthodes de repos* (leur but étant de laisser reposer la terre), et je les désignerai par $1_0, 2_0, \dots, m_0$. Comme les méthodes de production, les méthodes de repos sont décrites par des relations du type suivant :

$$(A_0)^i, (T_0)^i, (I_0)_i \rightarrow (B_0)^i \quad (5)$$

Ainsi, la méthode qui consiste à laisser (une partie de) la terre de qualité "1" en jachère, c'est-à-dire la méthode de repos 1_0 , est caractérisée par les données suivantes :

$$(A_0)^1 = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

$$(B_0)^1 = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

$$(T_0)^1 = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

$$(I_0)_1 = 0.$$

Par analogie, la méthode qui consiste à laisser (une partie de) la terre de qualité "m" en jachère, c'est-à-dire la méthode de repos m_0 , est caractérisée par les données suivantes :

$$(A_0)^m = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

$$(B_0)^m = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

$$(T_0)^m = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$$

$$(I_0)_m = 0.$$

En regroupant l'information sur toutes les m méthodes de repos dans les matrices $[mxk]$ A_0 et B_0 , la matrice $[mxm]$ T_0 , et le vecteur $[mx1]$ l_0 , il est clair que l'on obtient :

$$A_0 \equiv 0, \quad B_0 \equiv 0, \quad T_0 \equiv I, \quad l_0 \equiv 0 \quad (6)$$

L'information sur les méthodes de repos doit maintenant être intégrée dans la matrice des moyens de production, la matrice des produits, la matrice des terres, et le vecteur de travail. Nous savons que les matrices A_p , B_p , et T_p , et le vecteur l_p renvoient aux méthodes de production, tandis que les matrices A_0 , B_0 , et T_0 , et le vecteur l_0 renvoient aux méthodes de repos. Regroupons l'information sur les méthodes de production *et* de repos dans les matrices A , B , et T , et le vecteur l :

$$A = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_p \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_p \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_p \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} l_0 \\ l_p \end{bmatrix} \quad (7)$$

Tenant compte de (3) et de (6), nous pouvons récrire (7) comme :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} I \\ T_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

De façon analogue, je définis un vecteur d'activités $[(m+n) \times 1]$ x en réunissant le vecteur d'activités $[mx1]$ des méthodes de repos (x_0) avec le vecteur d'activités $[nx1]$ des méthodes de production (x_p) :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Si $(\mathbf{x}_0)_i > 0$, je dirai que la méthode de repos i est active; si, par contre, $(\mathbf{x}_0)_i = 0$, je dirai que la méthode de repos i est non active (mutatis mutandis pour les méthodes de production).

3. LA DEFINITION DES SYSTEMES DE PRODUCTION DE COUT MINIMAL

3.1. Les conditions à remplir par un système de production

Une fois établie la liste des $m+n$ méthodes (de repos et de production), l'étape suivante est de construire des systèmes de production. Chaque vecteur d'activité x semi-positif caractérise un système de production. On peut en effet supposer que les branches de production du système de production défini par le vecteur x sont constituées par les méthodes de production actives, c'est-à-dire les méthodes i pour lesquelles $(x_p)_i > 0$, activées aux niveaux $(x_p)_i$.

Etant donné le taux de profit et la demande, la question est de savoir si un système de production donné respecte les contraintes physiques et économiques qui pèsent sur l'économie. Plus précisément, la solution devrait obéir les cinq exigences suivantes ² :

- I. les quantités de terre requises sont inférieures ou égales aux quantités disponibles;
- II. les catégories de terre dont la surface n'est pas entièrement cultivée ne paient pas de rente;
- III. les prix, les rentes et le salaire sont non négatifs et tels que les comptes de toutes les méthodes actives sont en équilibre;
- IV. les prix, les rentes et le salaire sont tels que aucune méthode non active ne rapporte de surprofit;
- V. la demande est satisfaite.

² Cette liste est basée principalement sur Salvadori (1986, esp. pp. 99-100).

Avant de présenter ces conditions de façon plus détaillée, je signale qu'elles n'imposent pas (au moins pour le moment) que les prix, les rentes et le salaire soient uniquement déterminés. Elles exigent seulement qu'il existe un ensemble de prix, de rentes et de salaire satisfaisant les conditions III et IV.

3.2. Les contraintes de terre

Si la quantité d'une terre requise par les méthodes de production actives excédait la quantité disponible, il serait physiquement impossible que le système de production se réalise. La quantité de la terre i ($i = 1, 2, \dots, m$) requise par les méthodes de production actives est naturellement égale à la somme des quantités utilisées par toutes les méthodes de production j ($j = 1, 2, \dots, g$), actives ou non actives. En termes plus formels, cette quantité est donc égale à $[(x_p)_1(T_p)_{1i} + (x_p)_2(T_p)_{2i} + \dots + (x_p)_g(T_p)_{gi}]$, c'est-à-dire à $x_1'(T_1)_i$. La quantité disponible, d'autre part, est évidemment la surface totale, qui est par convention pour chaque terre égale à 1. En utilisant une notation vectorielle, et en prenant toutes les terres simultanément en considération, nous pouvons conclure qu'il faut avoir :

$$x_1' T_1 \leq u' \quad (10)$$

Par un raisonnement analogue, on déduit que les quantités de terre requises par les méthodes de repos actives ne peuvent excéder les quantités disponibles. Comme $T_0 = I$, cela signifie qu'il faut aussi avoir :

$$x_0' \leq u' \quad (11)$$

Mais ce n'est pas tout. Les terres ne peuvent en effet être employées que par les méthodes de production ou par les méthodes de repos. En d'autres termes, la surface disponible d'une terre quelconque i doit être répartie entre la culture [la fraction $(x_p)_1(T_p)_{1i} + (x_p)_2(T_p)_{2i} + \dots + (x_p)_g(T_p)_{gi}$] et la jachère [la fraction $(x_0)_i$]. En notation vectorielle, cela signifie qu'il est nécessaire que :

$$x_0' + x_1'T_1 = u' \quad (12)$$

Puisque les vecteurs d'activité x_0 et x_1 sont naturellement non négatifs, les conditions (10) et (11) sont impliquées par la condition (12).

3.3. La non rentabilité des terres (partiellement) en jachère

La condition suivante est une contrainte proprement économique. Elle concerne la détermination des rentes (z_i). Par hypothèse, la concurrence des propriétaires des terres empêche le paiement d'une rente sur une terre qui n'est que partiellement (ou pas du tout) cultivée; seule une terre entièrement cultivée, c'est-à-dire 'rare', peut donc payer une rente. Comme nous venons de voir, la terre de qualité i est entièrement cultivée si la fraction de la terre i destinée à la culture, $x_1'(T_1)_i$, couvre toute la surface disponible [$x_1'(T_1)_i = 1$]. Il s'en suit que pour une terre entièrement cultivée i , le produit $[1-x_1'(T_1)_i].z_i$ est toujours nul. Mais cela vaut aussi pour les terres dont une partie ou la totalité de la surface disponible est laissée en jachère. Le terme $[1-x_1'(T_1)_i]$ est dans ce cas positif, mais comme la rente z_i est alors par hypothèse nulle, leur produit est également nul. Etant donné que les rentes z_i doivent être toutes non négatives, et que la condition (9) doit être satisfaite, cette hypothèse n'est respectée que si et seulement si la somme de tous les produits $[1-x_1'(T_1)_i].z_i$ est nulle. En d'autres termes, la contrainte

suivante doit être satisfaite :

$$(\mathbf{u}' - \mathbf{x}_1' \mathbf{T}_1) \mathbf{z} = 0 \quad (13)$$

Vu la contrainte (12), on pourrait remplacer la contrainte (13) aussi par la contrainte suivante :

$$\mathbf{x}_0' \mathbf{z} = 0 \quad (14)$$

La contrainte (14) exprime qu'une terre i dont une partie ou la totalité de la surface disponible est laissée en jachère [$(\mathbf{x}_0)_i > 0$] ne peut rapporter de rente.

3.4. Les comptes des méthodes actives

Dans le cadre de la théorie des prix de production, les prix des k marchandises p_i (regroupés dans le vecteur [$k \times 1$] \mathbf{p}), les rentes des m terres z_i (regroupées dans le vecteur [$m \times 1$] \mathbf{z}), le salaire w , et le taux de profit r doivent être tels que les comptes des méthodes actives soient 'en équilibre', c'est-à-dire que leurs recettes recouvrent exactement leurs dépenses. Si les recettes d'une méthode excédaient ses dépenses, cette méthode rapporterait un surprofit, ce qui provoquerait un mouvement de capital vers cette méthode; le système de production ne serait donc pas stable. Inversement, si les dépenses d'une méthode excédaient ses recettes, cette méthode serait à perte, ce qui provoquerait une fuite de capital et le système serait à nouveau instable. Pour qu'il y ait stabilité, il est donc nécessaire que les méthodes actives ne rapportent ni surprofits, ni pertes.

Du côté des recettes d'une méthode de production active i_p figure la valeur de

sa production 'brute' [= $(B_p)^i p$]. Du côté des dépenses, on trouve quatre composants différents : les frais de remplacement des moyens de production [= $(A_p)^i p$], le profit [= $r(A_p)^i p$], la rente [= $(T_p)^i z$], et le salaire [= $(l_p)_i w$]. Pour chaque méthode de production active i_p , il faut par conséquent que :

$$(B_p)^i p - (1+r)(A_p)^i p - (T_p)^i z - (l_p)_i w = 0 \quad (15)$$

Du côté des recettes d'une méthode de repos active i_0 , on ne trouve rien du tout, car la méthode ne produit rien [= 0]. Du côté des dépenses, on trouve seulement la rente de la terre i [= z_i]. Pour chaque méthode de repos active i_0 , il faut par conséquent que :

$$-z_i = 0 \quad (16)$$

Observons que la contrainte (16) est identique à la contrainte (14); toutes les deux stipulent en effet que si la méthode de repos i_0 est active [$(x_0)_i > 0$], la rente de la terre i [z_i] doit être nulle.

3.5. Les comptes des méthodes non actives

Toujours pour assurer la stabilité du système de production, il est nécessaire que les méthodes non actives ne rapportent pas de surprofits. En effet, si une méthode non active rapportait un surprofit, les capitalistes auraient intérêt à investir dans cette méthode, et par conséquent elle ne serait plus non active. Pour chaque méthode de production i_p non active il faut donc que la condition suivante soit satisfaite :

$$(\mathbf{B}_p)^i p - (1+r)(\mathbf{A}_p)^i p - (\mathbf{T}_p)^i z - (\mathbf{l}_p)_i w \leq 0 \quad (17)$$

Etant donné (6), il faut ensuite que pour chaque méthode de repos i_0 non active la condition suivante soit satisfaite :

$$-z_i \leq 0 \quad (18)$$

Observons que la contrainte (18) est identique à la condition que les rentes des terres 'rares' doivent être non négatives; toutes les deux stipulent en effet que si la méthode de repos i_0 est non active, c'est-à-dire si la terre i est entièrement cultivée $[(\mathbf{x}_0)_i = 0]$, la rente de la terre i $[z_i]$ doit être non négative.

Selon les contraintes du paragraphe précédent, les méthodes actives ne devraient rapporter de surprofits (cf. (15) et (16)). Puisque le vecteur d'activité \mathbf{x} est par hypothèse non négatif, les quatre conditions (15)-(18) sont équivalentes aux deux conditions suivantes :

$$\mathbf{B}p - (1+r)\mathbf{A}p - \mathbf{T}z - \mathbf{l}w \leq 0 \quad (19)$$

$$\mathbf{x}'[\mathbf{B}p - (1+r)\mathbf{A}p - \mathbf{T}z - \mathbf{l}w] = 0 \quad (20)$$

3.6. La satisfaction de la demande

Suivant la suggestion de Salvadori (1986, p. 94), je définis la demande finale comme un ensemble de quantités *données* de marchandises; je suppose donc que la demande finale est fixe. Je la représente par le vecteur $[k \times 1] \mathbf{d}$, où d_i ($i = 1, 2, \dots, k$) est la quantité de la marchandise i figurant dans la demande finale. La demande finale doit être satisfaite

par le produit net global (l'offre) de l'économie. Puisque le produit net global de l'économie est égal à $x'(B-A)$, c'est-à-dire à la production brute [= $x'B$] moins la 'consommation' des branches de production [= $x'A$], l'équilibre de l'offre et de la demande peut être exprimée sous forme de la contrainte suivante :

$$x'(B-A) = d' \quad (21)$$

Bien entendu il y a d'autres possibilités. Ainsi Quadrio-Curzio (1966, pp. 81-84) définit les exigences pour l'utilisation en fonction de la croissance maximale du système étant donné le nombre de travailleurs. Montani (1977[1972], p. 118) et Kurz (1977, p. 245) raisonnent en termes de la demande brute des marchandises. Bidard (1987, p. 199) se sert du concept de r-produit net. Enfin, Salvadori (1983, pp. 73-74) fait dépendre la demande finale des solutions x , p , z et w .

3.7. La définition des systèmes de production de coût minimal

Un système de production qui satisfait aux cinq conditions ci-dessus énoncées sera appelé un *système de production de coût minimal*. En termes formels, sa définition est la suivante.

DEFINITION 8.1. Système de production de coût minimal

Etant donnés le taux de profit r et la demande \mathbf{d} , le système de production caractérisé par le vecteur d'activité \mathbf{x} est un *système de production de coût minimal* s'il existe un vecteur de prix \mathbf{p} , un vecteur de rentes \mathbf{z} , et un salaire w tels que :

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, w \geq 0$$

$$\mathbf{x}_0' + \mathbf{x}_1' \mathbf{T}_1 = \mathbf{u}'$$

$$\mathbf{B}\mathbf{p} - (1+r)\mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{T}\mathbf{z} - lw \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}'[\mathbf{B}\mathbf{p} - (1+r)\mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{T}\mathbf{z} - lw] = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}'(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = \mathbf{d}'.$$

Un système de production de coût minimal est donc un système qui est physiquement possible, qui obéit à la logique des prix de production, qui est stable, et qui satisfait la demande. C'est probablement la propriété de stabilité qui est la plus importante, comme le souligne Salvadori :

(...) une fois ce système mis en oeuvre, il n'y a aucune incitation à modifier l'état existant, les méthodes de production non activées (...) étant moins profitables et moins rentables que celles qui sont à l'intérieur du système de production (...); un système de production de coût minimal est donc stable. (Salvadori, 1987, p. 166)

4. QUELQUES HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

4.1. Les méthodes et les marchandises industrielles

J'ai déjà signalé que je suppose que toutes les méthodes de production fonctionnent à rendements constants. Pour réduire encore plus la complexité du problème du choix de techniques, j'introduis maintenant plusieurs hypothèses simplificatrices.

Commençons par les méthodes de production industrielles. J'adopte les hypothèses suivantes :

H.2. Le nombre de méthodes industrielles ($n-g$) est égal au nombre de marchandises industrielles ($k-a$).

H.3. Dans n'importe quel système de production de coût minimal, toutes les ($n-g$) méthodes industrielles sont actives.

Le but de ces hypothèses est de réduire le problème d'un choix parmi $n+m$ méthodes agricoles et industrielles au problème d'un choix parmi $g+m$ méthodes agricoles. Dans un certain sens, ces hypothèses reviennent à écarter l'industrie du problème ³. Mathématiquement, l'hypothèse H.2 signifie que B_{22} , la matrice des marchandises industrielles produites par les méthodes de production industrielles, est une matrice carrée $[(n-g) \times (n-g)]$, et l'hypothèse H.3 que x_2 , le vecteur d'activité des méthodes industrielles, est un vecteur $[(n-g) \times 1]$ positif ($x_2 > 0$).

³ Cf. Woods (1987) pour l'étude d'un système où le nombre de méthodes industrielles excède le nombre de marchandises industrielles.

4.2. L'absence de production jointe

Nous avons vu (cf. la section 3 du chapitre 4) que la présence de production jointe complique sérieusement l'étude d'un système de production. Puisque la présence de terres constitue déjà en elle-même une assez grande complication, j'adopte l'hypothèse (irréaliste) qu'il n'y a pas de production jointe :

H.4. Chaque méthode de production ne produit qu'une seule marchandise.

L'analyse qui suit devrait donc être considérée comme la première étape d'une étude plus générale.

L'hypothèse H.4 me permet de classer les méthodes de production de la manière suivante ⁴ : les méthodes agricoles 1, 2, ..., g_1 produisent la marchandise agricole 1, les méthodes agricoles g_1+1 , g_1+2 , ..., g_2 la marchandise agricole 2, ..., les méthodes agricoles $g_{a-1}+1$, $g_{a-1}+2$, ..., g la marchandise agricole a , la méthode industrielle $g+1$ la marchandise industrielle $a+1$, la méthode industrielle $g+2$ la marchandise industrielle $a+2$, ..., et finalement la méthode n la marchandise industrielle k . Mathématiquement, l'adoption de l'hypothèse H.4 signifie alors que B_{21} , la matrice des marchandises agricoles produites par les méthodes de production industrielles, est nulle, que la matrice B_{22} , la matrice des marchandises industrielles produites par les méthodes de production industrielles, est une matrice diagonale, et que B_{11} , la matrice des marchandises agricoles produites par les méthodes de production agricoles, est une matrice rectangulaire 'quasi-diagonale', dont les blocs constituant la diagonale principale sont des vecteurs.

⁴ Pour faciliter la lecture, j'omets ici les indices P.

4.3. Les limites du taux de profit

Une dernière hypothèse concerne le taux de profit. Puisque par hypothèse le nombre de méthodes industrielles actives est égal au nombre de marchandises industrielles (H.2), et que nous connaissons également par hypothèse les méthodes de production actives dans l'industrie (H.3), nous pouvons déterminer avec exactitude le taux de profit maximal que l'industrie supporterait. Il est égal à la plus petite racine positive de l'équation suivante :

$$\det [\mathbf{B}_{22} - (1+r)\mathbf{A}_{22}] = 0 \quad (22)$$

Si le taux de profit était égal à cette valeur, le vecteur de prix des marchandises industrielles serait semi-positif à condition que le vecteur de prix des marchandises agricoles et le salaire étaient nul. Evidemment, si les méthodes de production agricoles actives utilisent des marchandises industrielles dont le prix est positif, une telle chose ne peut se produire, et le taux de profit maximal du système de production est inférieur à la plus petite racine positive de l'équation (22). Quoi qu'il en soit, pour que le vecteur de prix des marchandises agricoles soit semi-positif, il faut en tout cas que le taux de profit soit inférieur à cette racine. En vertu des théorèmes sur les matrices non négatives (cf. par exemple Debreu & Herstein, 1953, p. 601), cela signifie que l'inverse de la matrice $[\mathbf{B}_{22} - (1+r)\mathbf{A}_{22}]$ est semi-positif. J'adopte alors l'hypothèse suivante :

H.5 Le taux de profit r est tel que $[\mathbf{B}_{22} - (1+r)\mathbf{A}_{22}]^{-1} \geq \mathbf{0}$.

5. LA DEFINITION RECONSIDEREE

5.1. La demande équivalente

Les hypothèses que je viens d'introduire permettent, dans un certain sens, d'éliminer les marchandises industrielles de l'analyse. Nous savons que ce sont les contraintes de terres qui limitent la capacité de production d'un système. Comme elles ne pèsent que sur l'agriculture, c'est principalement la production des marchandises agricoles qui en subit les conséquences. La production des marchandises industrielles n'est touchée qu'indirectement, par le biais de la limitation des quantités de marchandises agricoles que l'industrie peut employer en tant que moyens de production. L'idée est de traduire les quantités demandées des marchandises industrielles en quantités équivalentes de marchandises agricoles.

Le système de production caractérisé par le vecteur d'activité x satisfait la demande d si x est solution du système d'équations suivant :

$$x'(B-A) = d' \quad (23)$$

Puisque les méthodes de repos ne produisent rien du tout, le système d'équations (23) n'est satisfait que si le vecteur d'activité des méthodes de production x_p est solution de :

$$x_p'(B_p-A_p) = d' \quad (24)$$

Partitionnons maintenant le vecteur d'activité $[nx1] x_p$ en un vecteur d'activité $[gx1]$ des méthodes agricoles x_1 et un vecteur d'activité $[(n-g)x1]$ des méthodes industrielles x_2 ,

et partitionnons le vecteur de demande $[k \times 1]$ \mathbf{d} en un vecteur de demande $[a \times 1]$ des marchandises agricoles \mathbf{d}_1 et un vecteur de demande $[(k-a)]$ des marchandises industrielles \mathbf{d}_2 . Comme par hypothèse $\mathbf{B}_{21} = \mathbf{0}$, le système (24) s'écrit :

$$\mathbf{x}_1'(\mathbf{B}_{11}-\mathbf{A}_{11}) - \mathbf{x}_2'\mathbf{A}_{21} = \mathbf{d}_1' \quad (25a)$$

$$- \mathbf{x}_1'\mathbf{A}_{12} + \mathbf{x}_2'(\mathbf{B}_{22}-\mathbf{A}_{22}) = \mathbf{d}_2' \quad (25b)$$

Les hypothèses H.2 et H.3 assurent que la matrice $(\mathbf{B}_{22}-\mathbf{A}_{22})$ est carrée, et l'hypothèse H.5 qu'elle est inversible. De (25b) il vient que :

$$\mathbf{x}_2' = (\mathbf{d}_2' + \mathbf{x}_1'\mathbf{A}_{12})(\mathbf{B}_{22}-\mathbf{A}_{22})^{-1} \quad (26)$$

Après substitution de la valeur de \mathbf{x}_2 donnée par le côté droit de (26) en (25a), j'obtiens le système d'équations :

$$\mathbf{x}_1'[\mathbf{B}_{11}-\mathbf{A}_{11}-\mathbf{A}_{12}(\mathbf{B}_{22}-\mathbf{A}_{22})^{-1}\mathbf{A}_{21}] = \mathbf{d}_1' + \mathbf{d}_2'(\mathbf{B}_{22}-\mathbf{A}_{22})^{-1}\mathbf{A}_{21} \quad (27)$$

Le côté gauche de (27) contient trois composants :

- le vecteur $\mathbf{x}_1'\mathbf{B}_{11}$ représente la *production brute* de marchandises agricoles;
- le vecteur $\mathbf{x}_1'\mathbf{A}_{11}$ représente la *demande intermédiaire directe* de marchandises agricoles, émanant de l'agriculture;
- le vecteur $\mathbf{x}_1'\mathbf{A}_{12}(\mathbf{B}_{22}-\mathbf{A}_{22})^{-1}\mathbf{A}_{21}$ représente la *demande intermédiaire indirecte* de marchandises agricoles, émanant de l'agriculture : ces quantités, utilisées en tant que moyens de production agricoles dans l'industrie, permettent à l'industrie de

produire les moyens de production industriels nécessaires pour activer les méthodes de production agricoles aux niveaux x_1 .

Le côté gauche représente donc l'*offre nette* de marchandises agricoles lorsque les méthodes de production agricoles sont activées aux niveaux x_1 , c'est-à-dire les quantités des marchandises agricoles qui seront soit consommées, soit utilisées en tant que moyens de production par l'industrie afin de produire les quantités des marchandises industrielles souhaitées par les consommateurs. Ce sont précisément les deux composants que l'on retrouve au côté droit de (27) :

- le vecteur d_1' représente la *demande finale* de marchandises agricoles, émanant des consommateurs;
- le vecteur $d_2'(B_{22}-A_{22})^{-1}A_{21}$ représente la *demande intermédiaire* de marchandises agricoles, émanant de l'industrie, due exclusivement à la demande nette de marchandises industrielles : ces quantités, utilisées en tant que moyens de production agricoles dans l'industrie, permettent à l'industrie de produire la demande nette de marchandises industrielles d_2 .

Le côté droit, qui ne dépend donc pas du vecteur d'activité x_1 , transforme en quelque sorte les quantités nettes demandées de toutes les marchandises en quantités équivalentes de marchandises agricoles. Je l'appellerai la *demande équivalente* et la représenterai par le vecteur $[ax1] q$:

$$q = d_1' + d_2'(B_{22}-A_{22})^{-1}A_{21} \quad (28)$$

Le système d'équations (27) exprime donc que l'offre nette de l'agriculture doit être égale à la demande équivalente q .

Simplifions un peu la notation, et définissons une matrice $[gxa] E_1$ de la façon

suivante :

$$E_1 \equiv B_{11} - A_{11} - A_{12}(B_{22} - A_{22})^{-1}A_{21} \quad (29)$$

Les lignes de E_1 représentent les offres nettes de marchandises agricoles que chaque méthode de production agricole est en mesure de produire. Etant donnée l'absence de production jointe, sur chaque ligne exactement un élément est positif⁵. Supposons que la méthode i_p est une méthode qui produit la marchandise j . Alors l'élément $(E_1)_{ij}$, qui est positif, représente l'offre nette maximale de la marchandise j que la méthode i_p produirait si celle-ci était la seule méthode agricole activée conjointement avec les méthodes industrielles, et que ces dernières soient activées à des niveaux tels que leur production nette soit tout juste suffisante pour fournir à la méthode agricole i_p les moyens de production industriels nécessaires pour l'activer à pleine capacité. Par analogie, les éléments $(E_1)_{ih}$ ($h \neq j$), qui sont négatifs ou nuls, représentent les quantités des marchandises agricoles h dont la méthode i_p et les méthodes industrielles auraient directement et indirectement besoin si la méthode agricole i_p était la seule méthode agricole activée conjointement avec les méthodes industrielles, et que ces dernières soient activées à des niveaux tels que leur production nette soit tout juste suffisante pour fournir à la méthode agricole i_p les moyens de production industriels nécessaires pour l'activer à pleine capacité.

Au lieu de voir si le vecteur d'activité $[nx1]$ des méthodes de production x_p satisfait la demande d (cf. le système d'équations (24)), une autre voie est maintenant ouverte. Pour commencer, il faut voir si le vecteur d'activité $[gx1]$ des méthodes de

⁵ Je suppose qu'il n'existe pas de méthodes parasites, c'est-à-dire des méthodes pour lesquelles aucun élément de E_1 n'est positif. Dans un contexte légèrement différent, la notion de méthode parasite a été discutée par Georgescu-Roegen (1979).

production agricoles x_1 satisfait la demande équivalente q , c'est-à-dire si x_1 est une solution du système d'équations suivant :

$$x_1' E_1 = q' \quad (30)$$

Si c'est le cas, on peut calculer à l'aide de (26) quel vecteur d'activité $[(n-g) \times 1]$ des méthodes industrielles x_2 est compatible avec le vecteur x_1 . Puisque les méthodes industrielles ne sont sujettes à aucune contrainte autre que la capacité productrice de l'agriculture, leurs niveaux d'activité peuvent toujours être adaptés au niveaux déterminés par l'agriculture. Sous les hypothèses que je viens d'énoncer, le problème de la satisfaction de la demande se réduit finalement à trouver les justes niveaux d'activité des méthodes agricoles.

5.2. Le système de prix

Nous venons d'éliminer en quelque sorte les marchandises industrielles du système de quantités. Je montre maintenant qu'il est de façon analogue possible d'éliminer les prix des marchandises industrielles du système des prix. Puisque l'hypothèse H.3 stipule que quel que soit le système de production de coût minimal, les méthodes industrielles sont toutes actives, les comptes des méthodes industrielles sont tous en équilibre (cf. le paragraphe 3.4). En d'autres termes, les prix et le salaire satisfont aux $(n-g)$ équations suivantes :

$$B_{22}p_2 = (1+r)(A_{21}p_1 + A_{22}p_2) + l_2w \quad (31)$$

L'hypothèse H.5 assure que l'inverse de la matrice $[B_{22} - (1+r)A_{22}]$ existe. Il apparaît

alors que les prix des marchandises industrielles (p_2) doivent avoir une relation très précise avec les prix des marchandises agricoles (p_1) et le salaire (w), car de (31) il vient :

$$p_2 = [B_{22} - (1+r)A_{22}]^{-1}[(1+r)A_{21}p_1 + l_2w] \quad (32)$$

Etant donné (32), il est clair que :

$$\begin{aligned} B_{11}p_1 - (1+r)(A_{11}p_1 + A_{12}p_2) - l_1w = \\ B_{11}p_1 - (1+r)\{A_{11} + (1+r)A_{12}[B_{22} - (1+r)A_{22}]^{-1}A_{21}\}p_1 - \{l_1 + (1+r)A_{12}[B_{22} - (1+r)A_{22}]^{-1}l_2\}w \end{aligned} \quad (33)$$

Définissons ensuite une matrice $[gx\alpha]$ $E_1(r)$ et un vecteur $[gx1]$ $f_1(r)$ de la façon suivante ⁶ :

$$E_1(r) \equiv B_{11} - (1+r)\{A_{11} + (1+r)A_{12}[B_{22} - (1+r)A_{22}]^{-1}A_{21}\} \quad (34)$$

$$f_1(r) \equiv l_1 + (1+r)A_{12}[B_{22} - (1+r)A_{22}]^{-1}l_2 \quad (35)$$

Tenant compte de (33)-(35), nous pouvons alors reformuler les conditions (19)-(20), pour autant qu'elles ont trait aux méthodes de production agricoles, comme suit :

$$E_1(r)p_1 - f_1(r)w - T_1z \leq 0 \quad (36)$$

⁶ Remarquez que $E_1(0) = E_1$ (comparez (34) à (29)).

$$x_1'[E_1(r)p_1 - f_1(r)w - T_1z] = 0 \quad (37)$$

Tout cela signifie qu'au lieu de voir s'il existe un vecteur de prix semi-positif p , un vecteur de rentes non négatif z et un salaire non négatif w qui satisfont aux conditions (19)-(20), il suffit de voir s'il existe un vecteur de prix des marchandises agricoles semi-positif p_1 , un vecteur de rentes non négatif z et un salaire non négatif w qui remplissent les conditions (36)-(37). En effet, s'il existe une telle solution aux équations (36)-(37), nous pouvons à l'aide de (32) facilement calculer quel vecteur de prix des marchandises industrielles p_2 est compatible à cette solution. En vertu de l'hypothèse H.5, cette valeur de p_2 est nécessairement semi-positif.

5.3. La définition des systèmes de production de coût minimal reformulée

La mise à l'écart des marchandises industrielles permet de simplifier la définition des systèmes de production de coût minimal énoncée plus haut (cf. le paragraphe 3.7). Deux manipulations additionnelles sont encore nécessaires. Par analogie avec l'adjonction de m lignes nulles aux matrices A_p et B_p (cf. le paragraphe 2.3), ajoutons m lignes nulles à la matrice $E_1(r)$ afin de tenir compte des m méthodes de repos. Nous obtenons :

$$E(r) = \begin{bmatrix} E_0(r) \\ E_1(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_1(r) \end{bmatrix} \quad (38)$$

J'appellerai $E(r)$ la matrice des *r-offres nettes*, et la matrice $E \equiv E(0)$ la matrice des *offres nettes* (sous-entendu : des marchandises agricoles). De la même façon, ajoutons m éléments nuls au vecteur $f_1(r)$:

$$\mathbf{f}(r) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0(r) \\ \mathbf{f}_1(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_1(r) \end{bmatrix} \quad (39)$$

J'appellerai le vecteur $\mathbf{f}(r)$ le vecteur de *r-travail net*, et $\mathbf{f} [\equiv \mathbf{f}(0)]$ le vecteur de *travail net*. Je définirai aussi un vecteur $[(m+g) \times 1]$ des niveaux d'activité des méthodes agricoles $\hat{\mathbf{x}}$ et une matrice $[(m+g) \times m]$ des terres utilisées par les méthodes agricoles $\hat{\mathbf{T}}$ de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{T}_1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Etant données les hypothèses H.1-H.5, la définition 8.1 peut maintenant être reformulée comme suit :

DEFINITION 8.1*. **Système de production de coût minimal**

Etant donnés le taux de profit r et la demande équivalente q , le système de production caractérisé par les vecteurs d'activité x_0 et x_1 est un *système de production de coût minimal* s'il existe un vecteur de prix p_1 , un vecteur de rentes z , et un salaire w tels que :

$$x_0 \geq 0, x_1 \geq 0, p \geq 0, z \geq 0, w \geq 0$$

$$x_0' + x_1' T_1 = u'$$

$$E(r)p_1 - \hat{T}z - f(r)w \leq 0$$

$$\hat{x}[E(r)p_1 - \hat{T}z - f(r)w] = 0$$

$$x_1' E_1 = q'$$

6. CONCLUSION

L'objet de la théorie du choix de techniques est de déterminer s'il existe des systèmes de production de coût minimal (et le cas échéant, combien), étant donnés la demande et le taux de profit. Dans ce chapitre, la notion de système de production de coût minimal a été formellement définie : c'est un système physiquement possible (les contraintes de terre sont respectées), qui obéit à la logique des prix de production (les comptes des méthodes actives sont en équilibre), qui est stable (aucune méthode non active ne rapporte de surprofits), et qui satisfait la demande (pour chaque marchandise, la quantité offerte est égale à la quantité demandée).

L'autre but du chapitre était d'énoncer les principales hypothèses que j'adopterai dans les chapitres suivants. Ces hypothèses stipulent que le nombre de marchandises industrielles est égal au nombre de méthodes de production industrielles, que toutes les méthodes industrielles sont toujours activées, qu'il y a absence de production jointe, et que le taux de profit est tel que les prix des marchandises industrielles peuvent être positifs. L'adoption de ces hypothèses permet de mettre à l'écart les marchandises et méthodes industrielles, et de reformuler le problème du choix de techniques exclusivement en termes des marchandises et méthodes agricoles.

CHAPITRE 9

LES RESULTATS ETABLIS

=====

1. INTRODUCTION

Bien que les auteurs qui ont étudié le problème du choix de techniques en présence de terres ne se soient pas toujours explicitement servis du concept de système de production de coût minimal, ils ont démontré un certain nombre de propriétés des systèmes de production de coût minimal en présence de terres. Le but de ce chapitre est de donner un aperçu des résultats obtenus jusqu'à présent.

Je me concentrerai sur les résultats concernant l'existence et l'unicité des systèmes de production de coût minimal. Avant que l'on puisse dire quelque chose de l'évolution des prix, du salaire et des rentes sous l'influence d'une expansion de la demande, pour ne donner qu'un exemple, il est indispensable que l'on sache pour quels vecteurs de demande il existe un système de production de coût minimal, et le cas échéant, s'il en existe plusieurs.

Ce sont avant tout les régimes de rente extensive et intensive *pure* qui ont été examinés. Du point de vue mathématique ceci est compréhensible, car il est de bonne méthode de commencer par les cas les plus simples. Il est tout aussi clair que les recherches ne devraient pas s'arrêter là. Or, dès que l'on fait augmenter le nombre de marchandises agricoles, les choses se compliquent considérablement, ce dont témoigne

la difficulté d'obtenir des résultats 'positifs' pour les cas plus généraux.

La structure du chapitre est la suivante. D'abord je rappelle très brièvement ce que l'on a démontré en ce qui concerne le choix de techniques en l'absence de terres (section 2). Ensuite je discute les résultats obtenus sur l'existence et l'unicité des systèmes de production de coût minimal en régimes de rente extensive et intensive (section 3). Enfin, j'énonce deux théorèmes concernant l'existence et l'unicité des systèmes de production de coût minimal dans le cas général (section 4).

2. LE CHOIX DE TECHNIQUES EN L'ABSENCE DE TERRES

2.1. La production simple

Si chaque méthode de production est une méthode à produit unique, le problème du choix de techniques est somme tout aisément résolu (cf. Abraham-Frois & Berrebi, 1987, pp. 254-258). Sraffa lui-même avait, dans le chapitre 12 "Switching in methods of production" de *Production of Commodities*, établi que dans ce cas les systèmes de production de coût minimal peuvent être trouvés à l'aide du critère de la maximization du salaire, indépendamment du numéraire adopté. En effet, étant donnés le taux de profit et un quelconque numéraire semi-positif, le système de production qui, de tous les systèmes de production productifs ¹, paie le salaire (non négatif) le plus élevé, est le système de production de coût minimal, quel que soit le vecteur de demande d . Il s'en suit que le système de production de coût minimal est normalement unique. Ce n'est qu'aux points de 'switching', lorsque le taux de profit est tel que deux systèmes de production ayant en commun $k-1$ méthodes de production actives paient simultanément le salaire le plus élevé, qu'il existe plusieurs systèmes de production de coût minimal. A noter toutefois qu'aux points de 'switching', les deux systèmes de production de coût minimal déterminent les mêmes prix.

Le fait que le système de coût minimal soit indépendant du vecteur de demande signifie que le 'théorème de non-substitution' est vérifié. Ce théorème découvert indépendamment par Samuelson et Georgescu-Roegen en 1951, stipule que pour un taux de profit donné, les prix et le salaire sont indépendants de la composition de la

¹ J'appelle un système de production *productif* si les méthodes qui constituent le système peuvent être activées à des niveaux tels que le système produit une quantité nette positive de chaque marchandise. (Pour une définition rigoureuse, cf. le paragraphe 3.7 du chapitre suivant.)

demande (cf. Salvadori, 1987c). Ce résultat jouera un rôle important dans le dernier chapitre de la thèse.

2.2. La production jointe

Dès qu'une méthode de production produit plusieurs marchandises, les choses se compliquent considérablement (cf. Bidard, 1984, pp. 187-189, 1990a, pp. 320-323, Salvadori, 1985, pp. 163-172). Contrairement à l'affirmation de Sraffa (1960, section 96, p. 87), le critère de la maximisation du salaire ne permet plus de trouver les systèmes de production de coût minimal : pour un numéraire quelconque, le système de production de coût minimal ne paie pas nécessairement le salaire le plus élevé. Si un système de production est de coût minimal pour un vecteur de demande d , il ne l'est pas forcément pour tous les vecteurs de demande. En plus, l'unicité des systèmes de production de coût minimal (en dehors des points de 'switching') n'est plus garantie : plusieurs systèmes de production de coût minimal, caractérisés par des ensembles de prix différents, pourraient alors être adoptés. Enfin, il peut aussi arriver qu'aucun système de production ne soit de coût minimal, bien qu'il existe des systèmes de production en mesure de satisfaire la demande et que les prix et le salaire associés à ces systèmes soient positifs.

Aussi bien Salvadori (1982, 1984) que Bidard (1984, 1990b) ont fait des progrès en ce qui concerne l'identification des conditions sous lesquelles l'existence et l'unicité des systèmes de production de coût minimal sont garanties. Les théorèmes qu'il ont établis sont de nature assez compliquée; au lieu d'essayer de les expliquer, je préfère passer immédiatement à l'étude de l'existence et de l'unicité des systèmes de production de coût minimal en présence de terres.

3. LE CHOIX DE TECHNIQUES EN PRESENCE DE TERRES : LES REGIMES DE RENTE EXTENSIVE ET INTENSIVE

3.1. La spécificité des terres

Nous avons vu qu'il est possible, pourvu que le taux de profit soit positif, de traiter les terres comme des produits joints, plus précisément comme des marchandises qui sortent de la production de la même façon qu'elles y entrent. Cela signifie qu'il existe une bonne raison de croire que le problème du choix de techniques en présence de terres (comme le problème du choix de techniques en présence de capital fixe) pourrait être ramené à un cas spécial de la théorie du choix de techniques en systèmes de production jointe. Or, peu d'auteurs ont suivi cette piste (une exception importante étant Bidard (1987), cf. le paragraphe 4.2), sans doute parce que la réduction des terres à des marchandises reflète insuffisamment leur spécificité. En effet, comme je l'ai déjà signalé (cf. le paragraphe 4.2 du chapitre 4), les terres posent des problèmes tout à fait spécifiques en raison de l'impossibilité d'en augmenter les quantités disponibles. Autrement dit, la présence de contraintes quantitatives est un phénomène *sui generis*, qu'il semble approprié, pour ne pas dire nécessaire, de traiter conformément. L'étude des systèmes économiques avec terres s'est donc développée à côté plutôt qu'à l'intérieur de l'étude des systèmes de production jointe. Dans les deux paragraphes suivants, je donne un aperçu des conclusions les plus importantes établies jusqu'à présent.

3.2. Le régime de rente extensive

En régime de rente extensive, les terres sont parfaitement spécialisées : chaque méthode de production agricole utilise sa propre qualité de terre. Nous verrons plus loin (cf. le paragraphe 2.1 du chapitre 10) que dans ce cas un système de production de coût

minimal est, en sus des $k-a$ méthodes de production industrielles, toujours composé de $a+m$ méthodes agricoles. Parmi ces $a+m$ méthodes agricoles doit figurer en tout cas au moins une méthode qui produit la marchandise agricole 1, au moins une méthode qui produit la marchandise 2, ..., et au moins une méthode qui produit la marchandise agricole a , sinon le système ne pourrait jamais produire une quantité nette positive de chaque marchandise. Les m autres méthodes agricoles sont choisies parmi les m méthodes de repos et les $g-a$ méthodes de production agricoles restantes.

A la suite de Sraffa, la plupart des auteurs qui ont examiné le problème du choix de techniques en régime de rente extensive ², se sont le plus souvent bornés à l'examen du régime de rente extensive *pure*, c'est-à-dire où le blé est la seule marchandise agricole. Pour ce régime, les résultats les plus importants que l'on a établis sont :

- (E1) S'il existe un système de production de coût minimal pour le vecteur de demande \mathbf{d} , il existe également un système de production de coût minimal pour les vecteurs de demande plus petits que \mathbf{d} .
- (E2) S'il existe un système de production de coût minimal pour le vecteur de demande \mathbf{d} , il est unique (sauf par hasard, c'est-à-dire si le taux de profit est situé sur un point de "switching" entre deux systèmes de production de coût minimal).
- (E3) Lorsque le vecteur de demande augmente, le niveau d'activité d'aucune méthode de production agricole ne diminue; plus précisément : dès qu'une méthode de production agricole est activée, son niveau d'activité augmente chaque fois que

² Cf. Quadrio-Curzio (1966), Schefold (1971), Montani (1977[1972]), Kurz (1977), (1978), Abraham-Frois & Berrebi (1980), Saucier (1981).

la demande augmente, et une fois atteint le niveau d'activité maximal, la méthode reste activée à ce niveau.

- (E4) Lorsque le vecteur de demande augmente et le système de production de coût minimal change de composition, le salaire (mesuré en blé) diminue, les prix des marchandises industrielles (mesurés en blé) diminuent, et les rentes (mesurées en blé) augmentent.
- (E5) L'ordre de rentabilité, c'est-à-dire le classement des méthodes de production agricoles selon la grandeur de la rente par hectare qu'elles rapportent, peut changer lorsque le système de production de coût minimal change de composition.

Pour les régimes de rente extensive à plusieurs marchandises agricoles, beaucoup moins de résultats sont connus ³. Dans un article de 1984, prolongeant le travail qu'il avait entamé dans sa thèse de 1981, Saucier a présenté un exemple numérique qui démontre que certains des résultats valables en régimes de rente extensive pure ne sont plus valables en régime de rente extensive à deux marchandises agricoles. Ainsi il est arrivé aux conclusions suivantes :

Si au moins deux biens distincts nécessitent pour leur fabrication l'utilisation directe de ressources primaires limitées, il n'est plus généralement possible, même à un taux de profit donné, d'opérer un classement entre les terres. Lorsque la demande augmente, une terre

³ Je répète qu'à mes yeux, le modèle présenté par D'Agata (1984) n'est pas un modèle de rente extensive; il en est de même pour le modèle de Butault & Jeanclaude (1987) qui, tout comme D'Agata, étudient des situations où il existe deux marchandises agricoles ($a = 2$), quatre méthodes de production agricoles ($g = 4$) et deux qualités de terre ($m = 2$). Je ne parle de régime de rente extensive que si le nombre de méthodes de production agricoles est égal au nombre de qualités de terre ($g = m$).

peut fort bien être mise en culture, puis abandonnée au profit d'une autre et être à nouveau utilisée pour un niveau de la demande plus élevé. Ce résultat a un corollaire important : la rente imputée à une terre ou à toute autre ressource primaire limitée peut *diminuer* voire *disparaître avec une augmentation de la demande*. (Saucier, 1984, p. 166)

Saucier a donc démontré que les résultats (E3) et (E4) ne sont plus valides dès qu'il existe une pluralité de marchandises agricoles. Sur les résultats (E1) et (E2), concernant l'existence et l'unicité des systèmes de production de coût minimal, qui m'intéressent ici le plus, Saucier est cependant resté silencieux. Il reste donc à voir sous quelles conditions l'existence et l'unicité des systèmes de production de coût minimal est garantie en régime de rente extensive à plusieurs marchandises agricoles.

3.3. Le régime de rente intensive

Le régime de rente intensive est en quelque sorte l'opposé du régime de rente extensive, car la terre n'y est pas du tout spécialisée : chaque méthode de production agricole utilise en effet la même qualité de terre. A nouveau, nous verrons plus loin (cf. le paragraphe 2.1 du chapitre 10) que dans ce cas un système de production de coût minimal est, en sus des $k-a$ méthodes de production industrielles, toujours composé de $a+1$ méthodes agricoles. Parmi ces $a+1$ méthodes agricoles doit figurer en tout cas au moins une méthode qui produit la marchandise agricole 1, au moins une méthode qui produit la marchandise 2, ..., et au moins une méthode qui produit la marchandise agricole a , sinon le système ne pourrait jamais produire une quantité nette positive de chaque marchandise. L'autre méthode agricole est soit la méthode de repos (si la terre n'est pas rare), soit une méthode de production agricole (si la terre est rare). Sraffa (1960, section 89, p. 77) avait donc raison de souligner que dans ce cas pour seulement une marchandise agricole deux méthodes de production peuvent être simultanément

actives.

Comme pour le régime de rente extensive, c'est avant tout le régime de rente intensive pure, où le blé est la seule marchandise agricole, qui a été examiné. Les résultats les plus importants que l'on a établis pour le régime de rente intensive pure sont :

- (I1) S'il existe un système de production de coût minimal pour le vecteur de demande d , il existe également un système de production de coût minimal pour les vecteurs de demande plus petits que d .
- (I2) S'il existe un système de production de coût minimal pour le vecteur de demande d , il n'est pas forcément unique; en d'autres termes, même si le taux de profit n'est pas situé sur un point de "switching" entre deux systèmes de production de coût minimal, il peut y avoir plus d'un seul système de production de coût minimal.
- (I3) Lorsque le vecteur de demande augmente et que la terre est devenue rare, le niveau d'activité de l'une des deux méthodes de production agricoles actives diminue, tandis que le niveau d'activité de l'autre méthode agricole active augmente ⁴.
- (I4) Lorsque le vecteur de demande augmente et que le système de production de

⁴ Comme le disait Sraffa :

The increase [of production on the land] takes place through the gradual extension of the method that produces more corn at a higher unit cost, at the expense of the method that produces less. (1960, section 88, p. 76).

coût minimal (unique) change de composition, le salaire (mesuré en blé) diminue, les prix des marchandises industrielles (mesurés en blé) diminuent, et la rente (mesurée en blé) augmente.

- (I5) L'ordre de rentabilité change lorsque le système de production de coût minimal change de composition.

Par rapport aux résultats établis pour le régime de rente extensive pure, c'est surtout le résultat (I2), concernant l'unicité des systèmes de production de coût minimal, qui frappe. Qu'en régime de rente intensive pure le système de production ne soit pas nécessairement unique a été démontré par D'Agata (1983, pp. 151-152) ⁵. L'importance de ce résultat ne devrait pas être sous-estimée ⁶. Il montre en effet que même dans une situation tout à fait simple (absence de production jointe, chaque méthode utilise une seule qualité de terre) l'unicité des systèmes de production de coût minimal n'est plus garantie. L'un des objectifs de cette thèse est précisément d'indiquer sous quelles conditions l'unicité des systèmes de production de coût minimal est garantie (cf. le chapitre 12).

⁵ Montani (1975, pp. 92-93) avait déjà démontré cette possibilité en prenant le salaire comme variable exogène.

⁶ Comme le tente de faire par exemple Schefold (1988a, p. 110n), mais sans beaucoup de conviction.

4. LE CHOIX DE TECHNIQUES EN PRESENCE DE TERRES : LE CAS GENERAL

4.1. Un théorème sur l'existence

Peu d'auteurs ont examiné le cas général, où le nombre de marchandises agricoles est un entier positif quelconque ($a \geq 1$), où une méthode de production agricole peut utiliser plusieurs terres, etc. En ce qui concerne l'existence de systèmes de production de coût minimal, pratiquement le seul résultat positif est exprimé par ce que j'appellerai désormais le théorème d'existence de Salvadori (cf. Salvadori, 1986, pp. 102-103, 1987, pp. 168-169). Ce théorème fournit une condition *suffisante* pour l'existence de systèmes de production de coût minimal dans le cas général ⁷. Tenant compte des méthodes de repos, nous pouvons présenter ce théorème comme suit.

THEOREME 9.1. Existence de systèmes de production de coût minimal
(théorème d'existence de Salvadori)

S'il existe un vecteur $[(n+m) \times 1]$ y non négatif tel que

$$y'[B-(1+r)A] \geq d'$$

$$y'T = u'$$

alors il existe un système de production de coût minimal pour la demande d .

Comment interpréter la condition du théorème ? Salvadori observe que celle-ci :

(...) constitue une généralisation aux systèmes avec terre de la condition usuelle de viabilité en production simple. Mais alors que la condition usuelle de viabilité est à la fois nécessaire

⁷ Je souligne que le théorème d'existence de Salvadori ne présuppose pas que le nombre de méthodes de production industrielles est égal à celui des marchandises industrielles.

et suffisante pour assurer la positivité des prix en production simple, [la condition du théorème] ne constitue qu'une condition *suffisante*. (Salvadori, 1987, p. 168)

Un exemple numérique montrera clairement que la condition de Salvadori n'est pas nécessaire, ou en d'autres termes que le théorème ne couvre pas tous les systèmes de production de coût minimal. Imaginons une économie qui produit trois marchandises, à savoir deux marchandises agricoles : le blé (la marchandise 1) et l'avoine (la marchandise 2), et une marchandise industrielle : la faucille (la marchandise 3). Par conséquent, $k = 3$ et $a = 2$. Il existe cinq méthodes de production : deux méthodes pour le blé (les méthodes 1 & 2), deux méthodes pour l'avoine (les méthodes 3 & 4), et une méthode pour la faucille (la méthode 5). Par conséquent, $n = 5$ et $g = 4$. Je suppose qu'on se trouve en régime de rente extensive; puisqu'il existe quatre méthodes de production agricoles, il existe donc également quatre qualités de terre et quatre méthodes de repos ($m = 4$).

Les méthodes de production sont décrites par les relations suivantes :

méthode 1 :

2 unités de blé \otimes 2 unités d'avoine \otimes 0 unités de faucilles \otimes 1 unité de terre de qualité 1 \otimes 10 unités de travail

→ 6 unités de blé

méthode 2 :

2 unités de blé \otimes 2 unités d'avoine \otimes 2 unités de faucilles \otimes 1 unité de terre de qualité 2 \otimes 4 unités de travail

→ 12 unités de blé

méthode 3 :

4 unités de blé ⊗ 2 unités d'avoine ⊗ 0 unités de faucilles ⊗ 1 unité de terre de qualité 3 ⊗ 36 unités de travail

→ 18 unités d'avoine

méthode 4 :

0 unités de blé ⊗ 2 unités d'avoine ⊗ 2 unités de faucilles ⊗ 1 unité de terre de qualité 4 ⊗ 4 unités de travail

→ 10 unités d'avoine

méthode 5 :

1 unité de blé ⊗ 1 unité d'avoine ⊗ 1 unité de faucilles ⊗ 5 unités de travail

→ 3 unités de faucilles

En termes matriciels, cela veut dire :

$$A^P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^P = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad T^P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad I^P = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 36 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Supposons que le taux de profit est égal à 30% ($r = 3/10$). Un peu de calcul (ou un micro-ordinateur) permet alors de déterminer la région des vecteurs de demande d pour lesquels la condition du théorème d'existence de Salvadori est satisfaite. En 'traduisant' ces vecteurs d en quantités de 'demande équivalente' q (cf. le paragraphe

5.1 du chapitre précédent), nous sommes en mesure de représenter graphiquement la région des vecteurs q pour lesquels la condition du théorème d'existence de Salvadori est satisfaite (cf. la figure 9.1). Cette région est la partie du premier quadrant située au-dessous des droites passant respectivement par les points $(-7.19, 20.81)$ et $(0.22, 16.22)$, les points $(0.22, 16.22)$ et $(3.62, 13.62)$, les points $(3.62, 13.62)$ et $(5.61, 8.21)$, et les points $(5.61, 8.21)$ et $(10.81, -7.19)$ ⁸.

Il est également possible (le calcul sera fait dans le chapitre 12) de déterminer la région de *tous* les vecteurs de demande pour lesquels il existe un système de production de coût minimal, étant donné le taux de profit de 30%. En termes de quantités de demande équivalente, cette région est la partie du premier quadrant située au-dessous des droites passant respectivement par les points $(-5, 23)$ et $(4, 20)$, les points $(4, 20)$ et $(8, 18)$, les points $(8, 18)$ et $(9, 11)$, et les points $(9, 11)$ et $(13, -5)$. Il est donc immédiatement clair (cf. la figure 9.1) que cette région est beaucoup plus grande que la région 'capturée' par le théorème de Salvadori. La région capturée ne recouvre en effet qu'à peu près 46.5% de la région de tous les vecteurs de demande pour lesquels il existe un système de production de coût minimal.

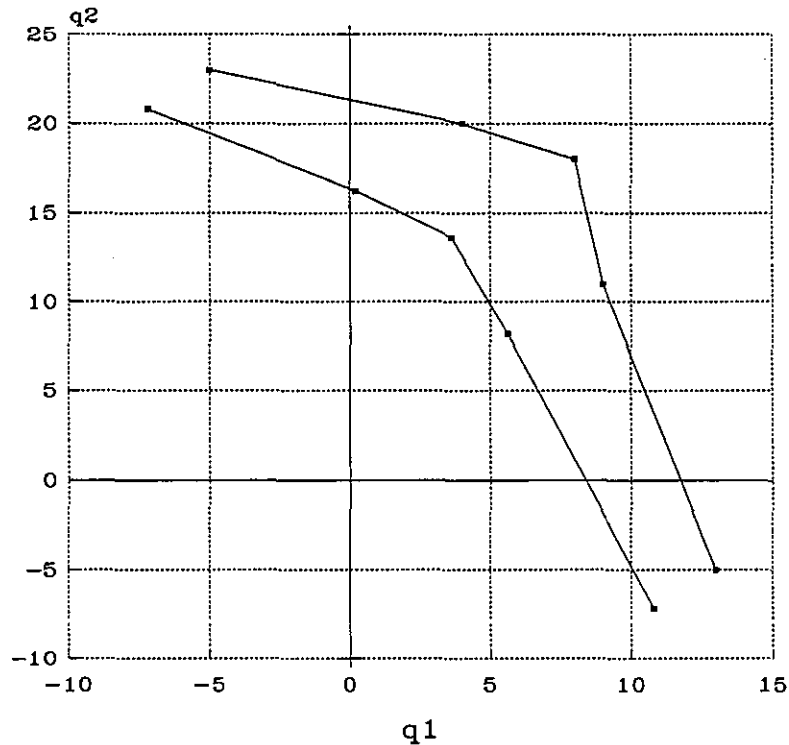
Le théorème d'existence de Salvadori ne permet donc d'affirmer l'existence que de certains systèmes de production de coût minimal. Lorsque le taux de profit est nul, le théorème est cependant efficace à 100%. Pour $r = 0$, la condition du théorème

⁸ Ces points correspondent respectivement aux valeurs suivantes du vecteur y :

point	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
$(-7.19, 20.81)$	1	1	0	0	0	0	1	1	1.53
$(0.22, 16.22)$	1	0	0	0	0	1	1	1	3.06
$(3.62, 13.62)$	0	0	0	0	1	1	1	1	3.06
$(5.61, 8.21)$	0	0	0	1	1	1	1	0	1.53
$(10.81, -7.19)$	0	0	1	1	1	1	0	0	1.53

Les chiffres ont été arrondis.

FIGURE 9.1



d'existence de Salvadori est en effet une condition nécessaire pour qu'il existe un système de production de coût minimal. Si le système de production caractérisé par le vecteur d'activité x est de coût minimal et $r = 0$, il suit de la définition des systèmes de production de coût minimal que le vecteur $s = x$ satisfait la condition du théorème. Lorsque le taux de profit augmente, l'efficacité du théorème tend cependant à diminuer, et comme l'exemple numérique le montre, il arrive que le théorème ne couvre pas la moitié des systèmes de production de coût minimal.

4.2. Une extension

Il est possible de rendre le théorème d'existence de Salvadori plus puissant en tirant parti du fait que les marchandises industrielles peuvent être 'éliminées' (cf. la section

5 du chapitre précédent). Le théorème de Salvadori est formulé en termes de la matrice des produits \mathbf{B} , de la matrice des moyens de production \mathbf{A} , de la matrice des terres \mathbf{T} , et du vecteur de demande \mathbf{d} . Pour commencer, reformulons ce théorème en termes de la matrice des offres nettes $\mathbf{E}(r)$, de la matrice des terres utilisées par l'agriculture $\hat{\mathbf{T}}$, et du vecteur de demande équivalente \mathbf{q} .

Le but du théorème est de trouver un vecteur $[(n+m) \times 1]$ non négatif \mathbf{y} satisfaisant aux inégalités et équations suivantes :

$$\mathbf{y}'[\mathbf{B}-(1+r)\mathbf{A}] \geq \mathbf{d}' \quad (2)$$

$$\mathbf{y}'\mathbf{T} = \mathbf{u}' \quad (3)$$

Partitionnons le vecteur \mathbf{y} en trois sous-vecteurs : un vecteur $[m \times 1]$ \mathbf{y}_0 , associé aux méthodes de repos, un vecteur $[g \times 1]$ \mathbf{y}_1 , associé aux méthodes de production agricoles, et un vecteur $[(n-g) \times 1]$ \mathbf{y}_2 , associé aux méthodes de production agricoles. Suivant les partitions de \mathbf{B} , \mathbf{A} , \mathbf{T} et \mathbf{d} déjà introduits dans le chapitre 8, écrivons (2) et (3) comme suit :

$$[\mathbf{y}_0' \quad \mathbf{y}_1' \quad \mathbf{y}_2'] \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{11}-(1+r)\mathbf{A}_{11} & -(1+r)\mathbf{A}_{12} \\ -(1+r)\mathbf{A}_{21} & \mathbf{B}_{22}-(1+r)\mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \geq [\mathbf{d}_1' \quad \mathbf{d}_2'] \quad (4)$$

$$[y_0' \ y_1' \ y_2'] \begin{bmatrix} I \\ T_1 \\ 0 \end{bmatrix} = u' \quad (5)$$

Nous cherchons donc des solutions non négatives y_0 , y_1 et y_2 aux inégalités et équations suivantes :

$$y_1' [B_{11} - (1+r)A_{11}] - (1+r)y_2' A_{21} \geq d_1' \quad (6a)$$

$$-(1+r)y_1' A_{12} + y_2' [B_{22} - (1+r)A_{22}] \geq d_2' \quad (6b)$$

$$y_0' + y_1' T_1 = u' \quad (6c)$$

Etant donné que $[B_{22} - (1+r)A_{22}]^{-1} \geq 0$ (cf. le paragraphe 4.3 du chapitre précédent), l'inégalité (6b) est équivalente à l'inégalité suivante :

$$y_2' \geq [d_2' + (1+r)y_1' A_{12}] [B_{22} - (1+r)A_{22}]^{-1} \quad (7)$$

Comme $d_2 \geq 0$ et $A_{12} \geq 0$, pour n'importe quel vecteur non négatif y_1 , le plus petit vecteur y_2 qui satisfait (7) est égal à :

$$y_2' = [d_2' + (1+r)y_1' A_{12}] [B_{22} - (1+r)A_{22}]^{-1} \quad (8)$$

Il est clair que si y_1 est non négatif, alors le vecteur y_2 défini par (8) est lui aussi non négatif. Le vrai problème est donc de savoir si, après substitution de cette valeur de y_2 en (6a), il existe un vecteur non négatif y_1 qui satisfait l'inégalité. Après substitution de (8) en (6a), il vient :

$$y_1' [B_{11} - (1+r)A_{11}] - (1+r)[d_2' + (1+r)y_1'A_{12}] [B_{22} - (1+r)A_{22}]^{-1} A_{21} \geq d_1' \quad (9)$$

Réarrangeons les termes de la façon suivante :

$$y_1' [B_{11} - (1+r)A_{11} - (1+r)^2 A_{12} [B_{22} - (1+r)A_{22}]^{-1} A_{21}] \geq d_1' + (1+r)d_2' [B_{22} - (1+r)A_{22}]^{-1} A_{21} \quad (10)$$

Sachant du chapitre précédent que :

$$E_1(r) \equiv B_{11} - (1+r)A_{11} - (1+r)^2 A_{12} [B_{22} - (1+r)A_{22}]^{-1} A_{21} \quad (11)$$

nous sommes donc en mesure de conclure que chercher une solution non négative y au système (2)-(3) revient à chercher des solutions non négatives y_0 et y_1 au système (12)-(13) :

$$y_1' E_1(r) \geq d_1' + (1+r)d_2' [B_{22} - (1+r)A_{22}]^{-1} A_{21} \quad (12)$$

$$y_0' + y_1' T_1 = u' \quad (13)$$

Je souligne que les deux problèmes sont strictement équivalents (s'il existe une solution

non négative \mathbf{y}^* pour une demande égale à \mathbf{d}^* , il existe aussi une solution non négative \mathbf{y}_1^* pour un côté droit de (12) égal à $\mathbf{d}_1^* + (1+r)\mathbf{d}_2^*[\mathbf{B}_{22} - (1+r)\mathbf{A}_{22}]^{-1}\mathbf{A}_{21}$, et vice versa), et que cette équivalence dépend crucialement de l'hypothèse de l'absence de choix de techniques dans l'industrie (égalité du nombre de méthodes et de marchandises industrielles) et du fait que l'inverse de $[\mathbf{B}_{22} - (1+r)\mathbf{A}_{22}]^{-1}$ est semi-positive.

Les manipulations qui mènent au système (12)-(13) permettent bien de simplifier le problème (aussi bien le nombre d'inégalités que le nombre d'inconnues a été diminué de $n-g$), mais ne permettent pas de trouver de nouvelles solutions. Une autre voie est cependant ouverte. En effet, au lieu d'appliquer le théorème de Salvadori aux données originales \mathbf{B} , \mathbf{A} , \mathbf{T} et \mathbf{d} , comme je viens de faire, il est tout aussi légitime de l'appliquer aux données transformées $\mathbf{E}(r)$, $\hat{\mathbf{T}}$ et \mathbf{q} . Autrement dit, le théorème de Salvadori peut également être démontré en remplaçant

$\mathbf{B} - (1+r)\mathbf{A}$ par $\mathbf{E}(r)$,
 \mathbf{T} par $\hat{\mathbf{T}}$, et
 \mathbf{d} par \mathbf{q} .

Nous pouvons alors énoncer la version suivante du théorème d'existence de Salvadori :

THEOREME 9.2. Existence de systèmes de production de coût minimal
(théorème d'existence de Salvadori modifié)

S'il existe un vecteur $[(m+g) \times 1]$ \hat{y} non négatif tel que

$$\hat{y}'E(r) \geq q'$$

$$\hat{y}'\hat{T} = u'$$

alors il existe un système de production de coût minimal pour la demande équivalente q .

Observons que la condition du théorème 9.2 diffère de la condition du théorème 9.1. La condition du théorème 9.2 s'écrit :

$$y_1'E_1(r) \geq q' \tag{14}$$

$$y_0' + y_1'T_1 = u' \tag{15}$$

Etant donné que :

$$q' \equiv d_1' + d_2'[B_{22} - A_{22}]^{-1}A_{21} \tag{16}$$

et que pour $r > 0$:

$$[B_{22} - A_{22}]^{-1} \leq (1+r)[B_{22} - (1+r)A_{22}]^{-1} \tag{17}$$

il s'en suit que normalement ⁹ l'inégalité suivante est satisfaite :

⁹ Evidemment, si $A_{21} = 0$, il s'agit d'une égalité au lieu d'une inégalité.

$$q' \leq d_1' + (1+r)d_2' [B_{22} - (1+r)A_{22}]^{-1} A_{21} \quad (18)$$

Après comparaison du système (14)-(15), qui est équivalent à la condition du théorème 9.2, avec le système (12)-(13), qui est équivalent à la condition du théorème 9.1, il faut conclure que la condition du théorème 9.2 est moins restrictive que la condition du théorème 9.1. En général il existe des vecteurs de demande d qui satisfont la condition du théorème 9.2 sans satisfaire la condition du théorème 9.1. Le théorème 9.2 permet par conséquent de découvrir des systèmes de production de coût minimal que le théorème 9.1 (appliqué aux données A , B , T et d) ne permettait pas de découvrir.

L'hypothèse de l'absence de choix de techniques dans l'industrie offre donc la possibilité de rendre le théorème d'existence de Salvadori un peu plus puissant. La question est de savoir s'il s'agit d'une amélioration importante. L'exemple numérique que j'ai présenté dans le paragraphe précédent suggère que l'amélioration est plutôt marginale. Le taux de profit étant égal à 30%, la région des vecteurs q pour lesquels le théorème 9.2 est satisfait n'est en effet guère plus grande que la région des vecteurs q pour lesquels le théorème 9.1 est satisfait ¹⁰. Peut-être la performance s'améliore-t-elle lorsqu'il existe relativement beaucoup de méthodes industrielles, mais le progrès par rapport au théorème 9.1 semble néanmoins modeste.

4.3. Un théorème d'unicité

Pour démontrer son théorème, Salvadori s'est basé principalement sur un algorithme de programmation linéaire. S'appuyant sur un théorème relatif à l'existence et l'unicité de

¹⁰ La région est maintenant caractérisée par les points extrêmes (-7.19, 21.16), (0.22, 16.58), (3.62, 13.98), (5.61, 8.21), et (10.81, -7.19).

systèmes de production de coût minimal en production jointe sans terre, Bidard (1987, pp. 204-207) a prouvé que la condition du théorème de Salvadori serait à la fois suffisante pour l'existence *et* l'unicité des systèmes de production de coût minimal à condition que la demande était exprimée en termes de "r-produits nets" ¹¹. Le théorème de Bidard s'énonce comme suit :

THEOREME 9.3. Existence et unicité des systèmes de production de coût minimal (théorème de Bidard)

S'il existe un vecteur $[(m+n) \times 1]$ y non négatif tel que

$$y'[B-(1+r)A] \geq d'$$

$$y'T = u'$$

alors il existe un et (sauf exception) un seul système de production de coût minimal *version Bidard* pour le vecteur de demande d .

Ce théorème ne nous permet pas de conclure à l'unicité des systèmes de production de coût minimal suivant la définition 8.1. Cette règle admet cependant une exception : les résultats du théorème de Bidard pour $r = 0$ concernent aussi l'unicité dans le sens de la définition 8.1. En effet, pour $r = 0$, la version Bidard de la définition d'un système de production de coût minimal coïncide avec notre définition 8.1. Plus spécifiquement, cela signifie que pour $r = 0$, l'unicité des systèmes de production de coût minimal est garantie. (Ce résultat sera démontré de façon indépendante dans le chapitre 12.)

¹¹ Formellement, le vecteur d'activité x recherché par Bidard est un vecteur qui satisfait $x'[B-(1+r)A] = d'$, au lieu d'un vecteur qui satisfait $x'[B-A] = d'$. La définition de système de production de coût minimal *version Bidard* est par conséquent obtenue en remplaçant dans la définition 8.1 la condition $x'[B-A] = d'$ par la condition $x'[B-(1+r)A] = d'$.

5. CONCLUSION

Même sous les hypothèses simplificatrices adoptées dans le chapitre précédent, le problème du choix de techniques en présence de terres est loin d'être résolu. Les régimes de rente extensive et intensive *pure* sont les mieux étudiés. En ce qui concerne le régime de rente extensive *pure*, il a été établi que s'il existe un système de production de coût minimal pour le vecteur de demande d , il en existe également un pour les vecteurs de demande plus petits, et que les systèmes de production de coût minimal sont normalement uniques. En ce qui concerne le régime de rente intensive pure, par contre, les systèmes de production de coût minimal ne sont plus nécessairement uniques.

Peu de résultats sont connus concernant l'existence et l'unicité des systèmes de production de coût minimal dans le cas général. Le théorème d'existence de Salvadori, en termes de la matrice des r -produits nets, fournit une condition suffisante pour qu'il existe des systèmes de production de coût minimal. Un exemple numérique a montré que la 'performance' du théorème, mesurée par le rapport entre le 'nombre' de systèmes de production de coût minimal découverts par le théorème et le 'nombre total' de systèmes de production de coût minimal, peut être plutôt médiocre. Le théorème de Bidard, enfin, permet de conclure que s'il existe un système de production de coût minimal lorsque le taux de profit est nul, alors ce système est normalement unique.

CHAPITRE 10

LES TECHNIQUES ET LEURS DOMAINES DE PRODUCTION

=====

1. INTRODUCTION

Nous venons de voir que les résultats les plus généraux concernant l'existence et l'unicité des systèmes de production de coût minimal sont exprimés par les théorèmes de Salvadori et de Bidard. Ces théorèmes témoignent d'une approche que l'on pourrait qualifier d'"intégrale", car elle consiste à établir un lien entre l'existence (et éventuellement l'unicité) et une propriété de l'ensemble des méthodes disponibles. Plus précisément, les théorèmes de Salvadori et de Bidard font correspondre une propriété mathématique de la matrice des r-produits nets et de la matrice des terres à l'existence et (le cas échéant à l'unicité) des systèmes de production de coût minimal.

Les résultats établis pour les 'modèles de blé' (régime de rente extensive ou intensive pure) ont été obtenus grâce à une approche différente. Cette approche consiste à examiner systématiquement tous les systèmes de production possibles. On procède donc par étapes, en ne prenant en compte, pendant chaque étape, qu'un échantillon de méthodes de production actives. C'est avec cette approche que je renouerai dans les chapitres qui suivent, et à l'aide de laquelle j'essaierai d'obtenir des résultats nouveaux concernant l'existence et l'unicité des systèmes de production de coût minimal.

Puisqu'il existe en général une infinité de systèmes de production, cette approche

paraît à première vue irréalisable. L'hypothèse des rendements constants entraîne toutefois que le nombre d'échantillons à examiner est fini. En effet, à tous les systèmes de production caractérisés par les mêmes méthodes actives (mais activées à des niveaux différents), est associé un seul ensemble de prix, de rentes et de salaire. Au lieu d'examiner tous les systèmes de production possibles, on peut alors se borner à examiner tous les ensembles de méthodes actives (que j'appellerai *techniques*). Pour chaque technique on déterminera alors d'une part quelles demandes les systèmes de production définies par cette technique sont capables de satisfaire, et d'autre part quel ensemble de prix, de rentes, et de salaire correspond à la technique. Dans ce chapitre, je me concentrerai exclusivement sur le premier aspect.

La structure du chapitre est alors la suivante. D'abord je définis et caractérise les ensembles de méthodes qui constituent des techniques (section 2). Ensuite, j'examine les vecteurs de demande équivalente qu'une technique donnée peut satisfaire (section 3).

2. LES TECHNIQUES

2.1. La définition d'une technique

Auparavant, je me donnais la demande, représentée par le vecteur \mathbf{d} , et le problème était de trouver un système de production, caractérisé par un vecteur d'activité \mathbf{x} , capable d'être un système de coût minimal par rapport à la demande \mathbf{d} . Maintenant, le problème est inversé : la donnée première est un ensemble de méthodes actives, et j'essaie de voir s'il existe des demandes pour lesquelles cet ensemble définit un système de production de coût minimal.

La raison pour partir d'un ensemble de méthodes actives, est que les prix, les rentes et le salaire ne dépendent que des méthodes actives¹. L'hypothèse des rendements constants assure que les prix, les rentes et le salaire sont indépendants des niveaux auxquels les méthodes sont activées. Par analogie avec ce que Sraffa faisait partout dans *Production of Commodities*, à savoir supposer que le nombre de branches du système de production est tout juste suffisant pour déterminer les inconnues du système, je ne considérerai ici que les ensembles de méthodes actives qui sont capables de bien déterminer les prix, les rentes et le salaire. En d'autres termes, étant donné le taux de profit, il faut que les ensembles de méthodes actives soient en mesure de déterminer au total $k+m+1$ inconnues :

- * k prix de marchandises
- * m rentes
- * 1 salaire.

¹ Naturellement, je continue à supposer que le taux de profit et le numéraire sont donnés.

A chaque méthode active correspond une équation de prix. Puisque par hypothèse les $n-g = k-a$ méthodes industrielles sont toutes actives (cf. le paragraphe 4.1 du chapitre 8), on dispose donc en dehors des méthodes (de production et/ou de repos) agricoles, de $k-a+1$ équations :

- * $k-a$ méthodes industrielles actives
- * 1 numéraire.

Pour que les inconnues soient bien déterminées, il faut et il suffit normalement que le nombre d'équations soit égal au nombre d'inconnues. En l'occurrence, cela n'est possible que si le nombre de méthodes agricoles actives est égal à la différence entre $k+m+1$ et $k-a+1$, c'est-à-dire à $a+m$, la somme du nombre de marchandises agricoles (a) et du nombre de terres (m).

Dans ce qui suit, j'appellerai les ensembles de méthodes de production et/ou de repos agricoles qui, conjointement aux méthodes de production industrielles, sont capables de déterminer les prix, les rentes et le salaire des *techniques*. Une technique est donc définie comme :

DEFINITION 10.1. Technique

Une *technique* est un ensemble de $a+m$ méthodes de production et/ou de repos agricoles actives qui, conjointement aux $k-a$ méthodes de production industrielles, sont en mesure de bien déterminer les prix des k marchandises, les rentes des m terres, et le salaire, étant donnés le taux de profit et le numéraire.

2.2. La composition des techniques

On pourrait penser qu'il suffit de se donner un quelconque ensemble de $a+m$ méthodes agricoles pour composer une technique. Mais cela n'est pas le cas, et le but de ce paragraphe est de fournir un critère mathématique pour déterminer quels ensembles de $a+m$ méthodes agricoles constituent une technique.

Supposons que Y est un ensemble de $a+m$ méthodes agricoles actives. Pour que les méthodes de cet ensemble définissent un système de production de coût minimal, l'une des conditions à remplir est que les prix, les rentes et le salaire sont tels que les comptes de ces méthodes sont 'en équilibre' (cf. le paragraphe 3.4 du chapitre 8). Puisque nous pouvons éliminer les prix des marchandises industrielles du système de prix (cf. le paragraphe 5.2 du chapitre 8), cela signifie que pour toute méthode agricole active i , l'équation suivante doit être satisfaite :

$$E^i(r)p_1 - \hat{T}^i z - f_i(r)w = 0 \quad (1)$$

où $E^i(r)$ représente la i -ième ligne de la matrice des r -offres nettes $E(r)$, \hat{T}^i la i -ième ligne de la matrice des terres utilisées par l'agriculture \hat{T} , et $f_i(r)$ le i -ième élément du vecteur de r -travail net $f(r)$. Désignons ensuite par $E^Y(r)$ la matrice $[(a+m) \times a]$ composée des $a+m$ lignes de la matrice $E(r)$ qui correspondent aux méthodes appartenant à l'ensemble Y , par \hat{T}^Y la matrice $[(a+m) \times m]$ composée des $a+m$ lignes de la matrice N qui correspondent aux méthodes appartenant à l'ensemble Y , et par $f^Y(r)$ le vecteur $[(a+m) \times 1]$ composé des $a+m$ éléments du vecteur $f(r)$ qui correspondent aux méthodes appartenant à l'ensemble Y . Il est alors clair que le système d'équations suivant doit être satisfait :

$$E^Y(r)p_1 - \hat{T}^Y z - f^Y(r)w = 0 \quad (2)$$

Ce système peut être réécrit comme :

$$[E^Y(r) \quad -\hat{T}^Y] \begin{bmatrix} p_1 \\ z \end{bmatrix} = f^Y(r)w \quad (3)$$

Cette manière d'écrire le système de prix révèle que mathématiquement, étant donné le taux de profit et le numéraire, le vecteur des prix agricoles p_1 , le vecteur des rentes z et le salaire w ne sont bien déterminés que si le déterminant de la matrice $[E^Y(r) \quad -\hat{T}^Y]$ n'est pas identiquement nul pour tous les taux de profit r ². L'ensemble des techniques, T , peut donc être défini de la façon suivante :

$$T = \{ Y \mid Y \text{ est un ensemble de } a+m \text{ méthodes agricoles} \\ \text{actives tel que } \det [E^Y(r) \quad -\hat{T}^Y] \neq 0 \} \quad (4)$$

Puisque les $a+m$ méthodes agricoles actives sont choisies parmi $g+m$ méthodes agricoles disponibles, l'ensemble des techniques contient au maximum $(g+m)!/[(g-a)!(a+m)!]$ éléments. Il est toutefois improbable que le nombre de techniques soit égal à ce maximum. En d'autres termes, il peut très bien arriver que certains ensembles de $a+m$ méthodes agricoles ne soient pas des techniques. C'est par

² Il n'est cependant pas interdit que le déterminant soit nul pour un nombre fini de valeurs de r (ces valeurs correspondent à $w = 0$). Si ces valeurs sont des racines semi-simples de l'équation $\det [E^Y(r) \quad -\hat{T}^Y] = 0$, alors les prix et les rentes correspondant à ces valeurs de r sont également uniquement définis (cf. Schefold, 1977, p. 22).

exemple le cas lorsqu'il existe une qualité de terre (disons la terre de qualité j) qui n'est utilisée par aucune des $a+m$ méthodes agricoles sélectionnées. La j -ième colonne de la matrice \hat{T}^Y est alors entièrement composée de zéros, ce qui fait que le rang de la matrice $[E^Y(r) \quad -\hat{T}^Y]$ est inférieur à $a+m$, et que l'ensemble Y ne peut constituer une technique.

A titre d'illustration, reconsidérons l'exemple numérique du paragraphe 4.1 du chapitre précédent. En ce qui concerne les méthodes de production, les données sont les suivantes :

$$A_P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_P = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad T_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad l_P = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 36 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Les méthodes de repos, de leur côté, peuvent être représentées de la manière suivante :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad l_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Il s'en suit que la matrice des terres utilisées par les méthodes agricoles est égale à :

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Une technique doit être composée de $a+m = 2+4 = 6$ méthodes agricoles. Supposons que l'on choisisse l'ensemble composé des trois premières méthodes de repos et des trois premières méthodes de production comme candidat-technique. La matrice \hat{T}^Y correspondant à cet ensemble est :

$$\hat{T}^Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Puisque la dernière colonne de cette matrice est nulle, l'ensemble choisi ne peut être une technique. Ainsi, dans cet exemple, 4 des 28 candidats-techniques doivent être éliminés : il s'agit des ensembles $\{1_0, 2_0, 3_0, 1_P, 2_P, 3_P\}$, $\{1_0, 2_0, 4_0, 1_P, 2_P, 4_P\}$, $\{1_0, 3_0, 4_0, 1_P, 3_P, 4_P\}$, et $\{2_0, 3_0, 4_0, 2_P, 3_P, 4_P\}$. Il reste donc 24 techniques, que je désignerai par les lettres capitales cursives A, B, \dots, X (cf. le tableau 10.1).

TABLEAU 10.1 : Les Techniques

Méthodes →	1 ₀	2 ₀	3 ₀	4 ₀	1 _P	2 _P	3 _P	4 _P
Technique :								
A	x	x	x	x	x	x		
B	x	x	x	x	x		x	
C	x	x	x	x	x			x
D	x	x	x	x		x	x	
E	x	x	x	x		x		x
F	x	x	x	x			x	x
G	x	x	x		x	x		x
H	x	x	x		x		x	x
I	x	x	x			x	x	x
J	x	x		x	x	x	x	
K	x	x		x	x		x	x
L	x	x		x		x	x	x
M	x		x	x	x	x	x	
N	x		x	x	x	x		x
O	x		x	x		x	x	x
P		x	x	x	x	x	x	
Q		x	x	x	x	x		x
R		x	x	x	x		x	x
S	x	x			x	x	x	x
T	x		x		x	x	x	x
U	x			x	x	x	x	x
V		x	x		x	x	x	x
W		x		x	x	x	x	x
X			x	x	x	x	x	x

2.3. Les techniques 'primaires' et les techniques 'semi-productives'

Suivant leur composition, plusieurs catégories de techniques peuvent être distinguées. Supposons que Y soit une technique; partitionnons alors l'ensemble Y en deux sous-ensembles : l'ensemble Y_0 , regroupant les méthodes de *repos* éléments de Y , et l'ensemble Y_p , regroupant les méthodes de *production* éléments de Y . Considérons d'abord l'ensemble des méthodes de repos actives, Y_0 . Puisqu'il existe m méthodes de repos, et chaque technique est composée de $a+m$ méthodes, l'ensemble Y_0 contient au maximum m méthodes. Cela signifie que si Y_0 contient le maximum de méthodes, il contient toutes les méthodes de repos, $\{1_0, 2_0, \dots, m_0\}$. J'appellerai une technique qui contient toutes les méthodes de repos une technique *primaire*. Voici la définition :

DEFINITION 10.2. Technique primaire

Une technique est dite *primaire* si elle contient toutes les méthodes de repos, c'est-à-dire si aucune terre n'est pleinement cultivée.

La raison pour laquelle je désigne cette propriété par le mot primaire, est que les techniques primaires correspondent à des situations où aucune des m terres n'est rare. Autrement dit, elles correspondent à des situations où toutes les terres sont gratuites, car la demande est satisfaite en activant seulement a méthodes de production agricoles qui n'utilisent la surface entière disponible d'aucune terre. Il est intuitivement clair que ceci ne se produit que si la demande est relativement faible, par exemple au début d'une phase d'expansion de l'économie.

Considérons ensuite l'ensemble des méthodes de production actives, Y_p . De ce qui vient d'être dit, il s'en suit que le nombre de méthodes de production actives varie entre a (si toutes les méthodes de repos sont actives) et $a+m$ (si aucune des méthodes

de repos n'est active). J'appellerai une technique *semi-productive* si elle contient, pour chaque marchandise agricole, au moins une méthode qui la produit. Voici la définition.

DEFINITION 10.3. Technique semi-productive

Une technique est dite *semi-productive* si elle contient au moins une méthode qui produit la marchandise 1, au moins une méthode qui produit la marchandise 2, ..., et au moins une méthode qui produit la marchandise a .

La raison pour laquelle je désigne cette propriété par le mot *semi-productive*, est que seules les techniques semi-productives peuvent être productives. En effet, s'il existait une marchandise agricole qui n'est pas représentée parmi les méthodes de production actives, alors quels que soient les niveaux d'activité (non négatifs) des méthodes actives, on ne pourrait jamais produire une quantité nette *positive* de la marchandise agricole non représentée.

Reconsidérons l'exemple numérique du paragraphe précédent. En consultant le tableau 10.1, on constate facilement que les techniques A , B , C , D , E , et F sont toutes primaires. Il est également facile à constater que les techniques A et F ne sont pas semi-productives. Dans le cas de la technique A , les méthodes de production qui sont actives (1_p , 2_p) produisent toutes les deux la marchandise 1; dans le cas de la technique F , les méthodes de production qui sont actives (3_p , 4_p) produisent toutes les deux la marchandise 2.

3. LES DOMAINES DE PRODUCTION DES TECHNIQUES

3.1. La définition d'un domaine de production

Avant de voir si une technique est en mesure de définir un système de production de coût minimal, il est nécessaire de déterminer quels vecteurs de demande la technique pourrait satisfaire. Autrement dit, il faut calculer quels produits nets la technique pourrait produire. La capacité de production d'une technique dépend de deux sortes de facteurs : d'une part les caractéristiques des méthodes de production actives, et d'autre part les contraintes de terre. Ceci étant dit, il devrait être clair que le vecteur de demande \mathbf{d} peut être satisfait par la technique Y si les méthodes de production appartenant à Y sont capables de produire le produit net \mathbf{d} *en respectant* les contraintes de terre.

Pour formaliser cela, définissons par analogie avec les définitions des matrices \mathbf{E}^Y et $\hat{\mathbf{T}}^Y$ un vecteur d'activité $[(a+m) \times 1]$ des méthodes agricoles actives $\hat{\mathbf{x}}^Y$ qui regroupe les niveaux d'activité des méthodes appartenant à la technique Y . Nous avons vu (cf. le paragraphe 5.1 du chapitre 8) que le système de production caractérisé par le vecteur d'activité $\hat{\mathbf{x}}$ satisfait le vecteur de demande équivalente \mathbf{q} en respectant les contraintes de terre si :

$$\hat{\mathbf{x}}' \mathbf{E} = \mathbf{q}' \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{x}}' \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{u}' \quad (10)$$

De façon analogue, nous pouvons alors dire que la technique Y est en mesure de satisfaire tous les vecteurs de demande équivalente \mathbf{q} pour lesquels il existe un vecteur

d'activité \hat{x}^Y non négatif tel que :

$$\hat{x}^Y, \mathbf{E}^Y = \mathbf{q}' \quad (11)$$

$$\hat{x}^Y, \hat{\mathbf{T}}^Y = \mathbf{u}' \quad (12)$$

Le système (11) exprime qu'en activant les $a+m$ méthodes de la technique Y aux niveaux spécifiés par le vecteur \hat{x}^Y , la technique produit une offre nette de marchandises agricoles égale à \mathbf{q} . Le système (12) exprime que les niveaux d'activité sont tels que les contraintes physiques de l'économie sont respectées, c'est-à-dire que la surface disponible de chaque qualité de terre est entièrement répartie entre culture et jachère. J'appellerai *domaine de production de la technique Y* l'ensemble des vecteurs d'offre nette \mathbf{q} que les méthodes de la technique Y peuvent produire en respectant les contraintes de terre. Voici la définition formelle.

DEFINITION 10.4. Domaine de production

Le *domaine de production de la technique Y* , $Q(Y)$, est l'ensemble des vecteurs d'offre nette de marchandises agricoles que la technique Y peut produire en respectant les contraintes de terre.

En termes mathématiques, le domaine de production de la technique Y , $Q(Y)$, est par conséquent égal à :

$$Q(Y) = \{ \mathbf{q} \mid \exists \hat{x}^Y \geq 0 : \hat{x}^Y, \mathbf{E}^Y = \mathbf{q}' \text{ et } \hat{x}^Y, \hat{\mathbf{T}}^Y = \mathbf{u}' \} \quad (13)$$

3.2. Les méthodes 'variables' et les méthodes 'constantes'

De prime abord, on pourrait croire que le domaine de production de la technique Y est déterminé en laissant varier les niveaux d'activité de chaque méthode appartenant à la technique Y entre leurs niveaux minimaux (= 0) et leurs niveaux maximaux (= 1). Le fait que les contraintes de terre doivent être respectées, impose toutefois des limites plus strictes aux niveaux d'activité admissibles. Je montrerai à présent qu'il est même possible que les niveaux d'activité de certaines méthodes actives ne peuvent varier.

La surface disponible de chaque terre doit être entièrement utilisée par les méthodes actives. Supposons maintenant qu'il existe un groupe F_T de f terres ($1 \leq f < m$) et un groupe F_M de f méthodes actives (donc $F_M \subset Y$) tels que les méthodes appartenant au groupe F_M sont les seules méthodes actives à utiliser les terres appartenant au groupe F_T . En termes mathématiques, on pourrait donc dire que la matrice des terres utilisées par les méthodes actives est "décomposable"³, c'est-à-dire qu'après un réarrangement de ses $a+m$ lignes et de ses m colonnes, la matrice \hat{T}^Y peut être ramenée à la forme suivante :

$$\hat{T}^Y = \begin{bmatrix} (\hat{T}^Y)_{11} & 0 \\ (\hat{T}^Y)_{21} & (\hat{T}^Y)_{22} \end{bmatrix} \quad (14)$$

où $(\hat{T}^Y)_{22}$ est une matrice carrée $[f \times f]$ ⁴. (Les méthodes du groupe F_M correspondent alors aux lignes de la matrice $(\hat{T}^Y)_{22}$, tandis que les terres du groupe F_T correspondent

³ Normalement, la propriété de décomposabilité n'est attribuée qu'aux matrices carrées; je l'applique ici à une matrice rectangulaire.

⁴ Puisque Y est une technique, la matrice $[E^Y(r) \quad -\hat{T}^Y]$ est, sauf pour au maximum a valeurs du taux de profit, de rang $a+m$. Il s'en suit que la matrice $(\hat{T}^Y)_{22}$ est inversible.

aux colonnes de cette matrice.) Pour voir que les niveaux d'activité des méthodes appartenant à l'ensemble F_M sont invariables, partitionnons le vecteur d'activité \hat{x}^Y en deux : le vecteur $[(a+m-f)x1]$ $(\hat{x}^Y)_1$ regroupant les niveaux d'activité des méthodes actives qui n'appartiennent pas au groupe F_M , et le vecteur $[fx1]$ $(\hat{x}^Y)_2$ regroupant les niveaux d'activité des méthodes actives qui appartiennent au groupe F_M . Nous pouvons alors récrire la condition (12), exprimant que chacune des terres est entièrement utilisée par les méthodes actives, comme suit :

$$(\hat{x}^Y)_1'(\hat{T}^Y)_{11} + (\hat{x}^Y)_2'(\hat{T}^Y)_{21} = u' \quad (15a)$$

$$(\hat{x}^Y)_2'(\hat{T}^Y)_{22} = u' \quad (15b)$$

Puisque $(\hat{T}^Y)_{22}$ est une matrice inversible, il suit de (15b) que :

$$(\hat{x}^Y)_2' = u'[(\hat{T}^Y)_{22}]^{-1} \quad (16)$$

En d'autres termes, les niveaux d'activité des méthodes appartenant au groupe F_M sont parfaitement déterminés par le système (16).

La présence de méthodes actives *constantes* (comme j'appellerai dorénavant les méthodes appartenant à un groupe F_M) n'est point exceptionnelle. En régime de rente extensive, par exemple, quelle que soit la technique, il existe toujours un ensemble de $m-a$ méthodes actives constantes ⁵. En effet, en régime de rente extensive, chaque terre j ne peut être utilisée que par deux méthodes, à savoir la méthode de production j_p et

⁵ En régime de rente intensive, par contre, il n'existe jamais de méthodes actives constantes.

la méthode de repos j_0 . Observons ensuite que chaque ligne de la matrice des terres utilisées par les méthodes actives \hat{T}^Y contient exactement un élément positif (égal à 1, pour être exact). Puisque Y est une technique, aucune des colonnes de \hat{T}^Y n'est nulle. Etant donné que le nombre de lignes de \hat{T}^Y est égal à $a+m$, et le nombre de ses colonnes égal à m , il s'en suit qu'il existe exactement a terres qui sont utilisées simultanément par une méthode de production active *et* une méthode de repos active. Cela signifie qu'il existe toujours $m+a - 2a = m-a$ méthodes actives qui utilisent à elles seules $m-a$ terres, ce qui implique que les niveaux d'activité de ces méthodes doivent être invariables.

A titre d'illustration, reconsidérons une nouvelle fois l'exemple numérique précédent. Prenons la technique S , composée des méthodes de repos 1_0 et 2_0 et des quatre méthodes de production : $S = \{1_0, 2_0, 1_P, 2_P, 3_P, 4_P\}$. La matrice des terres qui correspond à cette technique, est la suivante :

$$\hat{T}^S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Il est clair que les méthodes de production 3_P et 4_P (représentées respectivement par la cinquième et la sixième ligne de \hat{T}^S) constituent ici l'ensemble des méthodes actives constantes. On calcule sans difficultés qu'ils doivent tous les deux être activés à leurs niveaux maximaux.

La distinction entre méthodes actives *constantes* et méthodes actives *variables* généralise la distinction habituelle (faite en régime de rente extensive) entre méthodes

infra-marginales et méthodes *marginales*. La nouvelle distinction est plus générale, non seulement parce qu'elle s'applique à tous les cas de figure, mais également parce qu'elle prend en compte tant les méthodes de production que celles de repos. La distinction entre méthodes *infra-marginales* et méthodes *marginales* est en effet le plus souvent seulement appliquée aux méthodes de production, ce qui fait, par exemple, qu'en régime de rente extensive le nombre de méthodes *infra-marginales* peut différer de technique en technique, tandis que le nombre de méthodes constantes y est toujours égal à $m-a$.

3.3. Les techniques impossibles

Maintenant que nous savons que les méthodes actives peuvent être réparties en méthodes variables et méthodes constantes, il est possible d'identifier un certain nombre de techniques qui ne pourraient jamais se réaliser. Il s'agit des techniques dont une ou plusieurs méthodes actives constantes devraient être activées à des niveaux inadmissibles. Je les appellerai techniques *impossibles* :

DEFINITION 10.5. Technique impossible

Une technique est dite *impossible* si une ou plusieurs de ses méthodes actives constantes devraient être activées à des niveaux qui ne peuvent être réalisés.

En termes mathématiques, une technique impossible est donc une technique pour laquelle au moins un élément du vecteur d'activité des méthodes actives constantes, $(\hat{x}^Y)_2$, est soit négatif, soit supérieur à 1. Evidemment, les techniques impossibles ne peuvent en aucun cas définir un système de production de coût minimal.

3.4. Les côtés du domaine de production

Nous avons défini le domaine de production de la technique Y , noté $Q(Y)$, comme l'ensemble des vecteurs d'offres nettes de marchandises agricoles q que la technique peut satisfaire en respectant les contraintes de terres. La distinction entre méthodes actives constantes et méthodes actives variables étant clarifiée, il est possible de dire quelque chose sur la 'forme' de ce domaine de production. Celle-ci dépend en effet seulement des méthodes actives *variables*; les méthodes actives *constantes* n'ont d'influence que sur la position du domaine de production.

Le niveau d'activité d'une méthode active variable i doit naturellement être non négatif. Si l'on calcule maintenant, pour chaque méthode active variable i , la région de l'espace des offres nettes de marchandises agricoles pour laquelle le niveau d'activité de la méthode i est non négatif tandis que les contraintes de terres sont respectées, et si l'on prend ensuite l'intersection de toutes ces régions, on aura trouvé le domaine de production de la technique Y . D'une part, étant donné les contraintes de terres, tous les points (= vecteurs d'offres nettes) qui se trouvent en dehors de cette intersection, ne peuvent être atteints par la technique Y sans qu'au moins une des méthodes actives variables ne soit activée à un niveau négatif. D'autre part, tous les points qui se trouvent à l'intérieur de l'intersection, peuvent être satisfaits en activant les méthodes actives à des niveaux non négatifs et en respectant les contraintes de terres. Le domaine de production est donc constitué par tous les points appartenant à l'intersection.

Il faut voir maintenant comment déterminer, pour chaque méthode active variable i , la région où le niveau d'activité de la méthode i est non négatif sans que les contraintes de terres ne soient violées. En termes mathématiques, nous cherchons donc les vecteurs d'offres nettes q qui satisfont le système suivant :

$$\hat{x}^Y, E^Y = q' \quad (18)$$

$$\hat{x}^Y, \hat{T}^Y = u' \quad (19)$$

$$I^i \hat{x}^Y \geq 0 \quad (20)$$

où I^i représente la i -ième ligne de la matrice d'identité $[(a+m) \times (a+m)] I$. La frontière de cette région est composée des vecteurs q qui satisfont le système (18)-(20) lorsque le niveau d'activité de la méthode i est à son minimum, c'est-à-dire lorsque la méthode i n'est pas activée ($I^i \hat{x}^Y = 0$). Définissons maintenant un vecteur $[(a+m-1) \times 1] \hat{x}^{Y,i}$, une matrice $[(a+m-1) \times a] E^{Y,i}$ et une matrice $[(a+m-1) \times m] \hat{T}^{Y,i}$ en supprimant respectivement le i -ième élément du vecteur \hat{x}^Y , la i -ième ligne de la matrice E^Y et la i -ième ligne de la matrice \hat{T}^Y . La frontière de la région associée à la méthode active variable i est alors composée des vecteurs q qui satisfont le système d'équations suivant :

$$(\hat{x}^{Y,i}), E^{Y,i} = q' \quad (21)$$

$$(\hat{x}^{Y,i}), \hat{T}^{Y,i} = u' \quad (22)$$

En termes mathématiques rigoureux, la 'région' en question est un *demi-espace*, et la 'frontière' un *hyperplan* dans l'espace de dimension $a \times q_1 \times q_2 \times \dots \times q_a$. L'équation de cet hyperplan peut être trouvée de la façon suivante. D'abord, cherchons le vecteur $[(a+m) \times 1] c(Y,i)$ qui est solution du système d'équations suivant ⁶ :

⁶ La dernière équation ne sert qu'à fixer la dimension du vecteur $c(A,i)$.

$$[\mathbf{E}^{Y,i} \quad -\hat{\mathbf{T}}^{Y,i}] \mathbf{c}(Y,i) = \mathbf{0} \quad (23)$$

$$\mathbf{I}^1 \mathbf{c}(Y,i) = 1 \quad (24)$$

Observons ensuite que le système (21)-(22) s'écrit :

$$(\hat{\mathbf{x}}^{Y,i})' [\mathbf{E}^{Y,i} \quad -\hat{\mathbf{T}}^{Y,i}] = [\mathbf{q}' \quad -\mathbf{u}'] \quad (25)$$

Multiplions les deux côtés du système (25) par le vecteur $\mathbf{c}(Y,i)$. Etant donné (23), il s'en suit que pour tous les vecteurs \mathbf{q} appartenant à la frontière l'équation suivante est vérifiée :

$$[\mathbf{q}' \quad -\mathbf{u}'] \mathbf{c}(Y,i) = 0 \quad (26)$$

Partitionnons le vecteur $\mathbf{c}(Y,i)$ en deux sous-vecteurs : le vecteur $\mathbf{c}_p(Y,i)$ regroupant les a premiers éléments et le vecteur $\mathbf{c}_0(Y,i)$ regroupant les m derniers éléments :

$$\mathbf{c}(Y,i) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_p(Y,i) \\ \mathbf{c}_0(Y,i) \end{bmatrix} \quad (27)$$

Nous pouvons alors réécrire l'équation (26) :

$$\mathbf{q}' \mathbf{c}_p(Y,i) = \mathbf{u}' \mathbf{c}_0(Y,i) \quad (28)$$

Cette équation définit l'hyperplan de tous les vecteurs \mathbf{q} qui constituent la frontière du

demi-espace associé à la méthode active variable i . J'appellerai la partie de cet hyperplan qui correspond à des niveaux non négatifs de toutes les méthodes actives le côté du domaine de production Y associé à la méthode active i . Il s'en suit que le nombre de côtés du domaine de production d'une technique est normalement égal au nombre de méthodes actives variables de cette technique.

3.5. Un exemple numérique

Il paraît utile d'illustrer ce qui vient d'être dit à l'aide de l'exemple numérique déjà utilisé. Essayons de déterminer le domaine de production de la technique $S = \{1_0, 2_0, 1_P, 2_P, 3_P, 4_P\}$.

Pour commencer, calculons la matrice des offres nettes de marchandises agricoles E . Puisque par définition $E_0 = 0$, il nous reste qu'à calculer la matrice des offres nettes des méthodes de production agricoles E_1 (cf. l'équation (29) du chapitre 8). Etant donné que $(B_{22} - A_{22})^{-1} = 1/2$, on calcule sans trop de problèmes que :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 9 & -3 \\ -4 & 16 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \quad (29)$$

La matrice des offres nettes correspondant aux méthodes appartenant à la technique Y est alors la suivante :

$$E^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4 & -2 \\ 9 & -3 \\ -4 & 16 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Nous savons (cf. le paragraphe 3.2) que dans cette technique les méthodes de production 3_p et 4_p sont les méthodes actives constantes. Pour trouver le domaine de production, nous devons calculer quatre hyperplans, correspondant respectivement aux méthodes de repos 1_0 et 2_0 et aux méthodes de production 1_p et 2_p . Les quatre vecteurs $c(S,i)$ à l'aide desquels on peut décrire ces hyperplans, sont les suivants :

$$c(S,1_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ 44 \\ 20 \end{bmatrix} \quad c(S,2_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 28 \\ 13 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$c(S,1_p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 44 \\ 20 \end{bmatrix} \quad c(S,2_p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 28 \\ 13 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Selon la procédure décrite par les équations (26)-(28), nous obtenons les quatre équations suivantes, caractérisant les hyperplans associés respectivement aux méthodes actives variables 1_0 , 2_0 , 1_p , et 2_p :

$$q_1 + 3q_2 = 62 \quad (33)$$

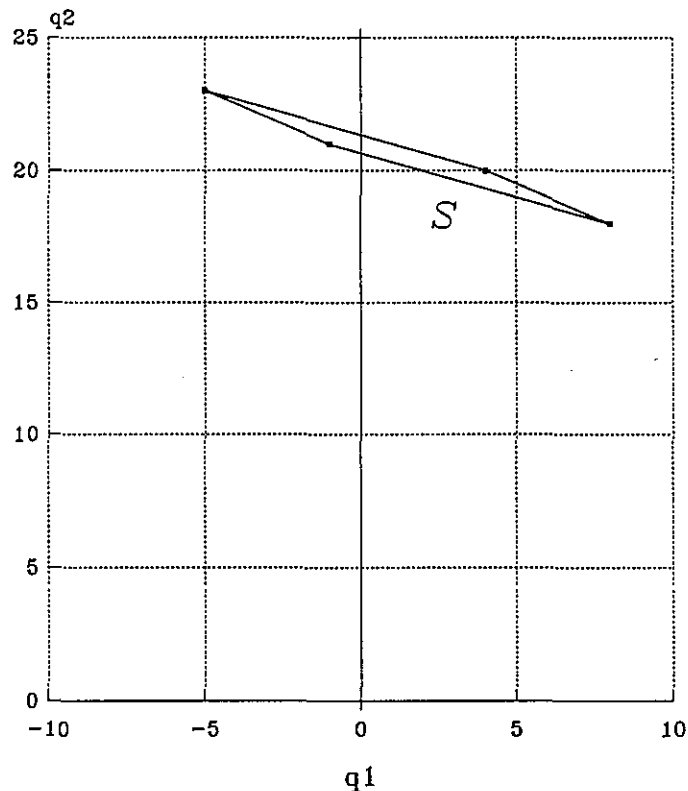
$$q_1 + 2q_2 = 44 \quad (34)$$

$$q_1 + 3q_2 = 64 \quad (35)$$

$$q_1 + 2q_2 = 41 \quad (36)$$

Graphiquement, le domaine de la production apparaît comme un parallélogramme dont les point extrêmes sont (8,18), (-1,21), (-5,23) et (4,20) (cf. la figure 10.1).

FIGURE 10.1



En régime de rente extensive, les hyperplans se présentent toujours en paires d'hyperplans parallèles. Ceci découle du fait qu'en régime de rente extensive, il existe une complémentarité parfaite entre la méthode de production et la méthode de repos qui utilisent la même qualité de terre. Ainsi, la méthode de production agricole i_p ne

peut être une méthode active variable sans que la méthode de repos i_0 ne soit également active et variable (et vice versa). Puisque ces deux méthodes sont les seules à employer la terre de qualité i , la non activation de la méthode de repos i_0 doit correspondre à l'activation maximale de la méthode de production i_p (sinon les contraintes de terre ne seraient pas satisfaites). Cela signifie que les hyperplans associés aux méthodes i_0 et i_p sont parallèles. J'observe toutefois qu'il n'est pas de règle que les hyperplans se présentent en paires d'hyperplans parallèles. En régime de rente intensive, par exemple, les hyperplans ne sont jamais parallèles.

3.6. Les techniques dégénérées

Ayant défini les côtés d'un domaine de production, nous sommes en état de distinguer le domaine de production *intérieur* de ses *frontières*. J'appellerai *frontières* d'un domaine de production l'ensemble des côtés du domaine, et j'appellerai domaine de production *intérieur* le domaine de production sans ses frontières. Je désignerai les frontières du domaine de production $Q(Y)$ par $\bar{Q}(Y)$, et son domaine de production intérieur par $\tilde{Q}(Y)$.

Il peut arriver que le domaine de production intérieur d'une technique soit vide. En régime de rente extensive, par exemple, ceci serait le cas si deux hyperplans, au lieu d'être parallèles, étaient identiques. J'appellerai *dégénérée* une technique dont le domaine de production n'est composé que de ses frontières :

DEFINITION 10.6. Technique dégénérée

Une technique est dite *dégénérée* si son domaine de production intérieur est vide, c'est-à-dire si son domaine de production s'identifie à ses frontières.

Mathématiquement, la technique Y est dégénérée si le rang de la matrice $[E^Y \quad -\hat{T}^Y]$ est inférieur à $a+m$. Dans ce qui suit, je suppose qu'il n'existe pas de techniques dégénérées :

H.6. Aucune technique n'est dégénérée.

Cette hypothèse n'implique aucune perte significative de généralité. Par rapport aux domaines de production des techniques non dégénérées, les domaines de production des techniques dégénérées ont en effet un poids négligeable. Autrement dit, si l'on choisissait un vecteur de demande équivalente q par hasard, la chance que ce vecteur appartient à un domaine de production d'une technique dégénérée est nulle ⁷.

3.7. Les techniques productives

Plus haut (cf. le paragraphe 2.3), j'ai qualifié les techniques qui contiennent au moins une méthode qui produit la marchandise 1, au moins une méthode qui produit la marchandise 2, ..., et au moins une méthode qui produit la marchandise a *semi-productives*. J'appellerai maintenant *productives* les techniques qui sont capables de produire une offre nette *positive* de *chaque* marchandise agricole. Voici la définition formelle :

DEFINITION 10.7. Technique productive

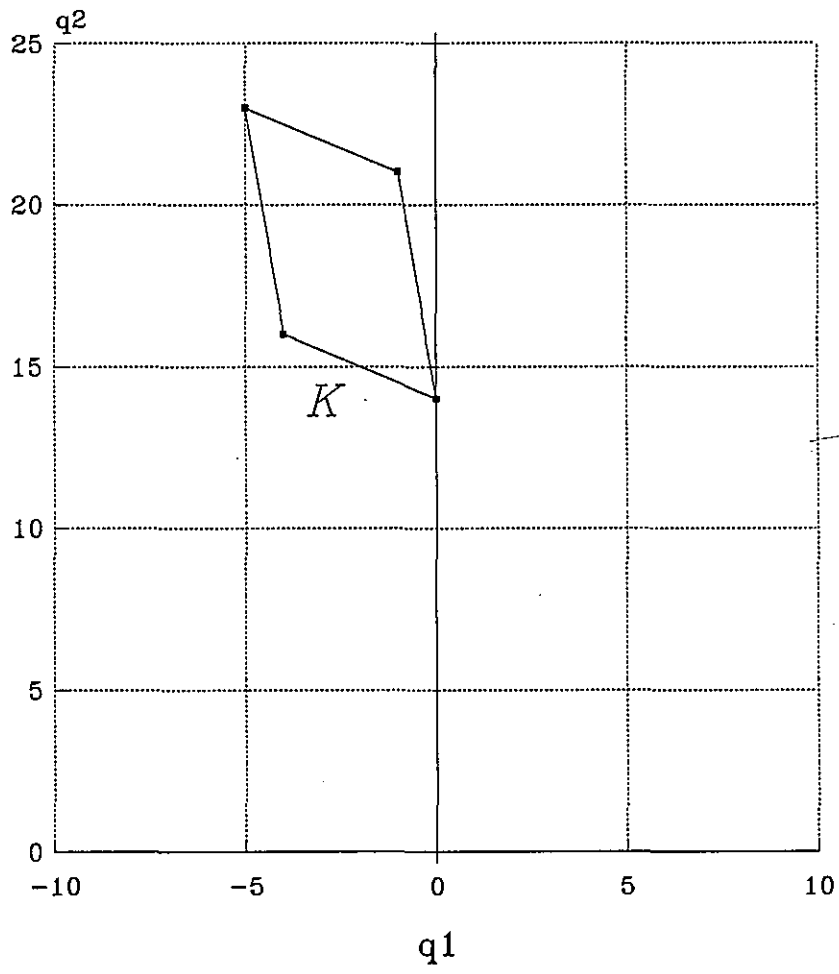
Une technique est dite *productive* si son domaine de production intérieur comprend au moins un vecteur q positif.

⁷ Je remarque que le domaine de production intérieur d'un ensemble de moins de $a+m$ méthodes actives est nécessairement vide. Ceci justifie le choix de restreindre la notion de technique aux ensembles d'exactly $a+m$ méthodes actives.

Dans ce qui suit, je suppose (implicitement) que le vecteur de demande finale de marchandises agricoles est positif ($\mathbf{d}_1 > \mathbf{0}$). Compte tenu de la définition de la demande équivalente (cf. le paragraphe 5.1 du chapitre 8), il s'en suit que le vecteur de demande équivalente \mathbf{q} est aussi positif. Cela signifie que seules les techniques productives sont en mesure de satisfaire la demande équivalente.

Evidemment une technique doit être semi-productive pour être productive. L'inverse n'est pas vraie; une technique peut en effet être semi-productive sans pour autant être productive. Illustrons cela à l'aide de l'exemple numérique du chapitre 9. Prenons la technique K , composée de trois méthodes de repos et de trois méthodes de production : $K = \{ 1_0, 2_0, 4_0, 1_p, 3_p, 4_p \}$. Cette technique est semi-productive, car pour chacune des marchandises agricoles, une méthode de production est active (la méthode 1_p pour le blé, et les méthodes 3_p et 4_p pour l'avoine). Il est possible de calculer que le domaine de production de cette technique se situe entre les points $(-4, 16)$, $(-5, 23)$, $(-1, 21)$, et $(0, 14)$. Comme le montre la figure 10.2, le domaine de production de la technique ne contient aucun vecteur positif, et par conséquent la technique K n'est pas productive.

FIGURE 10.2



4. CONCLUSION

Le but principal de ce chapitre a été d'introduire et d'analyser la notion de technique. J'ai défini une technique comme un ensemble de méthodes agricoles actives, égal en nombre à la somme du nombre de marchandises agricoles et du nombre de terres, qui est en mesure, conjointement aux méthodes industrielles, de déterminer les prix, les rentes, et le salaire. Deux catégories de techniques ont été distinguées à cause de leur composition particulière. Une technique primaire est une technique à l'intérieur de laquelle toutes les méthodes de repos sont actives; une technique semi-productive est une technique à l'intérieur de laquelle pour chaque marchandise agricole au moins une méthode de production est active.

Le deuxième but du chapitre a été de déterminer le domaine de production d'une technique, c'est-à-dire l'ensemble des demandes équivalentes qu'une technique est en mesure de satisfaire. J'ai attiré l'attention sur le fait important que l'on peut parfois partitionner l'ensemble des méthodes actives en deux sous-ensembles : l'ensemble des méthodes actives variables, et l'ensemble des méthodes actives constantes. (Cette distinction généralise la distinction traditionnelle entre méthodes marginales et méthodes infra-marginales.) J'ai ensuite montré que chaque méthode active variable caractérise un des côtés du domaine de production d'une technique. A la fin, deux catégories de techniques ont été distinguées à cause de leurs domaines de production remarquables. Une technique dégénérée est une technique dont le domaine de production s'identifie à ses côtés. Une technique productive est une technique dont le domaine de production contient au moins un vecteur positif.

CHAPITRE 11

LE VOISINAGE ET LA RIVALITE

=====

1. INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, j'ai considéré une technique quelconque 'en isolement'. Dans le présent chapitre, j'examinerai les relations entre plusieurs techniques. Le but de cet examen est de préparer le terrain afin de démontrer des résultats nouveaux concernant l'existence et l'unicité des techniques de coût minimal.

Je décrirai les relations entre les techniques en termes des propriétés de leurs domaines de production. Les notions-clé seront celles du *voisinage* et de la *rivalité*, qui sont définies à partir de deux techniques. Lorsque plusieurs techniques entrent en jeu, ces deux notions seront utilisées pour caractériser certaines propriétés du domaine de production 'agrégé' d'un ensemble de techniques.

La structure du chapitre est la suivante. D'abord j'introduis la notion de voisinage (section 2), et immédiatement après celle de rivalité (section 3). Ensuite, je définis ce qu'est le domaine de production agrégé d'un ensemble de techniques, et j'énonce deux propriétés qu'un domaine de production agrégé est susceptible de posséder (section 4).

2. LE VOISINAGE

2.1. La définition du voisinage

Je rappelle que le domaine de production d'une technique, $Q(Y)$, est constitué des vecteurs d'offres nettes de marchandises agricoles q que la technique peut produire en respectant les contraintes de terre. En termes formels, le domaine de production d'une technique quelconque Y est défini comme suit :

$$Q(Y) = \{ q \mid \exists \hat{x}^Y \geq 0 : \hat{x}^Y E^Y = q' \text{ et } \hat{x}^Y \hat{T}^Y = u' \} \quad (1)$$

où E^Y représente la matrice des offres nettes des méthodes agricoles actives, \hat{T}^Y la matrice des terres utilisées par les méthodes agricoles actives, et \hat{x}^Y le vecteur d'activité des méthodes agricoles actives. Les côtés du domaine de production sont constitués des vecteurs d'offres nettes que la technique est en mesure de produire lorsque le niveau d'activité d'une méthode active variable est nul, sous contrainte que les niveaux d'activité de toutes les autres méthodes agricoles actives sont non négatifs, et que la surface disponible de chaque terre est entièrement utilisée. Les frontières du domaine de production $Q(Y)$, notées $\bar{Q}(Y)$, sont constituées par l'union de ses côtés. Le domaine de production intérieur, noté $\tilde{Q}(Y)$, est égal au domaine de production sans ses frontières. En termes formels, nous avons par conséquent :

$$\bar{Q}(Y) = \{ q \mid \exists \hat{x}^Y \geq 0, \hat{x}^Y \neq 0 : \hat{x}^Y E^Y = q' \text{ et } \hat{x}^Y \hat{T}^Y = u' \} \quad (2)$$

$$\tilde{Q}(Y) = \{ q \mid \exists \hat{x}^Y > 0 : \hat{x}^Y E^Y = q' \text{ et } \hat{x}^Y \hat{T}^Y = u' \} \quad (3)$$

La notion de voisinage concerne les techniques dont les domaines de production sont adjacents. La définition exacte est la suivante.

DEFINITION 11.1. Voisinage

Les techniques Y et Z sont dites *voisines* si leurs domaines de production ont en commun un de leurs côtés.

Je souligne qu'il ne suffit pas que le domaine de production de la technique Y se trouve 'aux environs' du domaine de la technique Z , ou même le 'recouvre' (partiellement) pour que les techniques Y et Z soient voisines. Il faut absolument que leurs domaines de production aient en commun un de leurs côtés.

2.2. La composition de techniques voisines

Il est intuitivement clair que deux techniques ne peuvent être voisines que si elles se ressemblent. Plus précisément, il est nécessaire que deux techniques voisines aient en commun $a+m-1$ méthodes actives. Nous savons que chaque côté d'un domaine de production fait partie d'un hyperplan déterminé par la non activation de l'une des méthodes actives variables (cf. le paragraphe 3.4 du chapitre précédent). Soit i une méthode active variable quelconque de la technique Y . A chaque méthode active variable i on peut alors associer un hyperplan que l'on décrit à l'aide du vecteur $c(Y,i)$ solution des équations suivantes :

$$[E^{Y,i} \quad -\hat{T}^{Y,i}] c(Y,i) = 0 \quad (4)$$

$$I^1 c(Y,i) = 1 \quad (5)$$

où la matrice $[(a+m-1) \times a]$ $E^{Y,i}$ représente la matrice des offres nettes E^Y sans la ligne correspondant à la méthode i , et la matrice $[(a+m-1) \times m]$ $\hat{T}^{Y,i}$ la matrice des terres \hat{T}^Y sans la ligne correspondant à la méthode i . Soit j une méthode active variable quelconque de la technique Z . A chaque méthode active variable j on peut de façon analogue associer un hyperplan que l'on décrit à l'aide du vecteur $c(Z,j)$ solution des équations suivantes :

$$[E^{Z,j} \quad -\hat{T}^{Z,j}] c(Z,j) = 0 \quad (6)$$

$$I^1 c(Z,j) = 1 \quad (7)$$

Si Y et Z avaient moins que $a+m-1$ méthodes actives en commun, on ne pourrait jamais trouver une méthode i et une méthode j telles que les matrices $[E^{Y,i} \quad -\hat{T}^{Y,i}]$ et $[E^{Z,j} \quad -\hat{T}^{Z,j}]$ seraient égales, et par conséquent les vecteurs $c(Y,i)$ et $c(Z,j)$ ne pourraient être égaux que par hasard. En revanche, si les techniques Y et Z étaient identiques à une seule méthode active variable près, elles auraient bien un hyperplan et partant aussi un côté en commun.

Le fait d'avoir en commun $a+m-1$ méthodes n'est toutefois pas une condition suffisante pour que deux techniques soient voisines. Il faut en effet que les méthodes actives constantes de l'une technique appartiennent toutes à l'autre technique et vice-versa.

2.3. Un exemple numérique

Reconsidérons l'exemple numérique présenté dans le chapitre 9. Dans le chapitre 10,

nous avons déjà calculé le domaine de production de la technique S , composée des méthodes de repos 1_0 et 2_0 et de toutes les quatre méthodes de production. Ce domaine est situé entre les points $(8, 18)$, $(-1, 21)$, $(-5, 23)$ et $(4, 20)$. Calculons à présent le domaine de la technique V , composée des méthodes de repos 2_0 et 3_0 et de toutes les quatre méthodes de production. Comme la technique S et la technique V ont $a+m-1$ méthodes en commun, il est intéressant de voir si elles sont voisines.

A l'intérieur de la technique S , ce sont les méthodes de production 3_p et 4_p qui jouent le rôle de méthodes actives constantes. A l'intérieur de la technique V , en revanche, ce sont les méthodes de production 1_p et 4_p qui jouent ce rôle. Les hyperplans associés aux quatre méthodes actives variables peuvent être décrits à l'aide des vecteurs $c(V,i)$ suivants :

$$c(V,2_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.25 \\ 3.5 \\ 8.25 \\ 0 \\ 0.75 \end{bmatrix} \quad c(V,3_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ 44 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$c(V,2_p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.25 \\ 3.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0.75 \end{bmatrix} \quad c(V,3_p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Selon la procédure expliquée plus haut (cf. le paragraphe 3.4 du chapitre précédent), nous obtenons les quatre équations suivantes, caractérisant les hyperplans (ici : des droites) associés respectivement aux méthodes actives variables 2_0 , 3_0 , 2_p , et 3_p :

$$q_1 + (1/4)q_2 = 25/2 \quad (10)$$

$$q_1 + 3q_2 = 62 \quad (11)$$

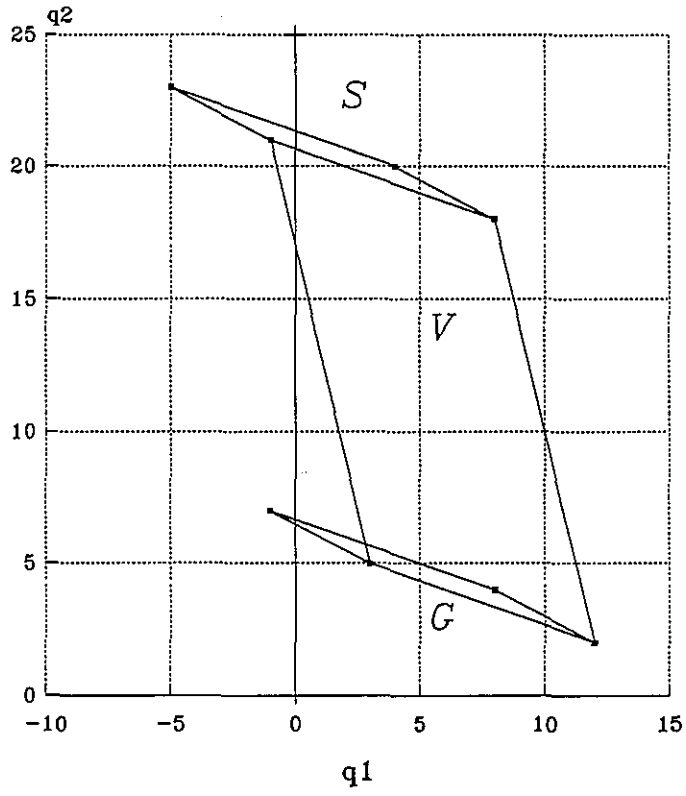
$$q_1 + (1/4)q_2 = 17/4 \quad (12)$$

$$q_1 + 3q_2 = 18 \quad (13)$$

On peut alors facilement calculer que les points extrêmes du domaine de production de la technique V sont $(12, 2)$, $(3, 5)$, $(-1, 21)$ et $(8, 18)$. Il apparaît clairement (cf. la figure 11.1) que les domaines des techniques S et V ont un de leurs côtés en commun. En d'autres termes, les techniques S et V sont voisines.

Considérons ensuite la technique G , composée des méthodes de repos 1_0 , 2_0 et 3_0 et des méthodes de production 1_p , 2_p et 4_p . Comme la technique V , la technique G a $a+m+1$ méthodes en commun avec la technique S . A la différence de la technique V , la technique G ne contient cependant pas toutes les méthodes actives constantes de la technique S . La méthode 3_p n'appartient en effet pas à la technique G , et ceci entraîne que les techniques S et G ne sont pas voisines. Les calculs le confirment : les points extrêmes du domaine de production de la technique G sont $(12, 2)$, $(3, 5)$, $(-1, 7)$ et $(8, 4)$, ce qui signifie que les techniques S et G n'ont aucun côté en commun (cf. la figure 11.1).

FIGURE 11.1



3. LA RIVALITE

3.1. La définition de rivalité

Puisque les domaines de production de deux techniques voisines sont adjacents, elles sont en mesure de satisfaire 'à peu près' les mêmes vecteurs de demande équivalente. Par définition, les domaines de production de deux techniques voisines ont en commun une partie de leurs frontières. Si leurs domaines de production ont en commun plus qu'une partie de leurs frontières, je dirai qu'elles sont *rivales*. La définition de la rivalité est la suivante :

DEFINITION 11.2. Rivalité

Deux techniques voisines sont dites *rivales* si elles sont tous les deux capables de satisfaire des demandes équivalentes q autres que celles du côté en commun de leurs domaines de production.

Mathématiquement parlant, les techniques voisines Y et Z sont rivales si leurs domaines de production *intérieurs* ne sont pas disjoints : $\tilde{Q}(Y) \cap \tilde{Q}(Z) \neq \emptyset$. En d'autres termes, il existe des vecteurs de demande équivalente autres que ceux situés sur la frontière en commun entre les deux techniques, qui peuvent être satisfaits aussi bien par la technique Y que par la technique Z . Pour ces vecteurs de demande, la technique Y et la technique Z sont donc 'rivales'.

Je souligne que la notion de rivalité ne concerne que les techniques qui sont *voisines*. Deux techniques qui ne sont pas voisines, mais dont les domaines de production intérieurs se recouvrent néanmoins partiellement, ne seront pas appelées rivales.

3.2. Un critère concernant la rivalité

Pour contrôler si deux techniques que l'on suspecte d'être rivales le sont vraiment, il paraît à première vue nécessaire que l'on calcule le domaine de production de chacune de ces techniques. Il n'est pas nécessaire d'aller aussi loin, car il existe un test plus court pour vérifier si deux techniques voisines sont rivales.

Supposons que nous voulons savoir si les techniques voisines Y et Z sont rivales. Disons que i est la méthode qui est spécifique à la technique Y , tandis que j est la méthode qui est spécifique à la technique Z ; en d'autres termes : $[Y \cap Z] \cup \{i\} = Y$ et $[Y \cap Z] \cup \{j\} = Z$. Etant voisines, les techniques Y et Z partagent l'un des hyperplans entre lesquels leurs domaines de production respectifs sont situés. Désignons le vecteur qui décrit cet hyperplan en commun par $c(Y,Z)$. Puisque i et j sont les méthodes qui distinguent la technique Y de la technique Z , il est clair que $c(Y,Z) = c(Y,i) = c(Z,j)$.

Le domaine de production intérieur d'une technique est situé soit entièrement au-dessus, soit entièrement au-dessous de l'hyperplan commun ¹. Ce n'est en effet que d'un seul côté de l'hyperplan que le niveau d'activité de la méthode i (dans le cas de la technique Y) ou de la méthode j (dans le cas de la technique Z) est positif. Comme le niveau d'activité maximal de n'importe quelle méthode agricole est égal à 1, le domaine de production intérieur de la technique Y se situe entièrement entre l'hyperplan en commun, caractérisé par la non activation de la méthode i , et un hyperplan parallèle, caractérisé par l'activation maximale de la méthode i , toujours en respectant les contraintes de terre. De même le domaine de production intérieur de la technique Z se situe entièrement entre l'hyperplan en commun, caractérisé par la non activation de la méthode j , et un hyperplan parallèle, caractérisé par l'activation

¹ Le point q^* est situé *au-dessus* de l'hyperplan $q^*c = b$ si $q^*c > b$, et *au-dessous* de cet hyperplan si $q^*c < b$.

maximale de la méthode j , toujours en respectant les contraintes de terre.

Prenons le cas de la technique Y . Par analogie avec la manière dont nous avons calculé l'équation de l'hyperplan commun (cf. le paragraphe 3.4 du chapitre précédent), il est clair que tous les vecteurs \mathbf{q} qui sont situés sur cet hyperplan parallèle caractérisé par l'activation maximale de la méthode i satisfont le système d'équations suivant :

$$\mathbf{E}^i + (\hat{\mathbf{x}}^{Y,i})' \mathbf{E}^{Y,i} = \mathbf{q}' \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{T}}^i + (\hat{\mathbf{x}}^{Y,i})' \hat{\mathbf{T}}^{Y,i} = \mathbf{u}' \quad (15)$$

où \mathbf{E}^i et $\hat{\mathbf{T}}^i$ représentent la i -ième ligne respectivement de la matrice des offres nettes de marchandises agricoles \mathbf{E} et de la matrice des terres utilisées par l'agriculture $\hat{\mathbf{T}}$. Synthétiquement, nous pouvons écrire ce système comme suit :

$$[\mathbf{E}^i \quad -\hat{\mathbf{T}}^i] + (\hat{\mathbf{x}}^{Y,i})' [\mathbf{E}^{Y,i} \quad -\hat{\mathbf{T}}^{Y,i}] = [\mathbf{q}' \quad -\mathbf{u}'] \quad (16)$$

Multiplions maintenant les deux côtés de ce système par le vecteur $\mathbf{c}(Y,i)$. Vu la définition de ce vecteur (cf. le paragraphe 2.2), tous les vecteurs \mathbf{q} appartenant à l'hyperplan parallèle satisfont l'équation :

$$[\mathbf{q}' \quad -\mathbf{u}'] \mathbf{c}(Y,i) = [\mathbf{E}^i \quad -\hat{\mathbf{T}}^i] \mathbf{c}(Y,i) \quad (17)$$

En tenant compte de la partition du vecteur $\mathbf{c}(Y,i)$ en deux sous-vecteurs, le vecteur $\mathbf{c}_p(Y,i)$ regroupant les a premiers éléments et le vecteur $\mathbf{c}_0(Y,i)$ regroupant les m derniers éléments :

$$c(Y,i) = \begin{bmatrix} c_P(Y,i) \\ c_0(Y,i) \end{bmatrix} \quad (18)$$

l'équation qui décrit l'hyperplan parallèle est :

$$q'c_P(Y,i) = E^i c_P(Y,i) + (u' - \hat{T}^i) c_0(Y,i) \quad (19)$$

De façon analogue, l'hyperplan parallèle correspondant à l'activation maximale de la méthode j est décrit par l'équation suivante :

$$q'c_P(Z,j) = E^j c_P(Z,j) + (u' - \hat{T}^j) c_0(Z,j) \quad (20)$$

Etant donné (i) que les domaines de production de deux techniques voisines ont un de leurs côtés en commun, et (ii) que chacun des deux domaines de production intérieurs se situe soit au-dessus, soit au-dessous du côté en commun, leurs domaines de production intérieurs ne se recouvrent pas si et seulement si le domaine de production intérieur de l'une technique se situe au-dessus, et celui de l'autre technique au-dessous de l'hyperplan en commun. Autrement dit : deux techniques voisines ne sont rivales que si et seulement si leurs domaines de production se situent soit tous les deux au-dessus, soit tous les deux au-dessous de l'hyperplan en commun. Il y aura donc rivalité si et seulement si les deux hyperplans parallèles se trouvent 'du même côté' de l'hyperplan en commun.

Traduisons cela en termes mathématiques. Par hypothèse nous avons $c(Y,i) = c(Z,j) = c(Y,Z)$. Nous pouvons donc écrire les équations (19) et (20) des hyperplans

parallèles respectivement comme :

$$q'c_p(Y,Z) = E^i c_p(Y,Z) + (u' - \hat{T}^i) c_0(Y,Z) \quad (21)$$

$$q'c_p(Y,Z) = E^j c_p(Y,Z) + (u' - \hat{T}^j) c_0(Y,Z) \quad (22)$$

L'équation de l'hyperplan en commun s'écrit naturellement comme suit : -

$$q'c_p(Y,Z) = u' c_0(Y,Z) \quad (23)$$

Dans ces conditions, pour que les hyperplans parallèles se trouvent tous les deux *au-dessus* de l'hyperplan en commun, il faut et il suffit que les constantes des côtés droits des équations (21) et (22) soient toutes les deux plus grandes que la constante du côté droit de l'équation (23). En termes formels :

$$E^i c_p(Y,Z) + (u' - \hat{T}^i) c_0(Y,Z) > u' c_0(Y,Z) \quad (24)$$

$$E^j c_p(Y,Z) + (u' - \hat{T}^j) c_0(Y,Z) > u' c_0(Y,Z) \quad (25)$$

Evidemment, cela n'est possible que si et seulement si :

$$E^i c_p(Y,Z) - \hat{T}^i c_0(Y,Z) > 0 \quad (26)$$

$$E^j c_p(Y,Z) - \hat{T}^j c_0(Y,Z) > 0 \quad (27)$$

Par analogie, pour que les hyperplans parallèles se trouvent tous les deux *au-dessous* de l'hyperplan en commun, il faut et il suffit que les constantes des côtés droits des équations (21) et (22) soient toutes les deux plus petites que la constante du côté droit de l'équation (23) :

$$E^i c_p(Y,Z) + (u' - \hat{T}^i) c_0(Y,Z) < u' c_0(Y,Z) \quad (28)$$

$$E^j c_p(Y,Z) + (u' - \hat{T}^j) c_0(Y,Z) < u' c_0(Y,Z) \quad (29)$$

ce qui n'est possible que si et seulement si :

$$E^i c_p(Y,Z) - \hat{T}^i c_0(Y,Z) < 0 \quad (30)$$

$$E^j c_p(Y,Z) - \hat{T}^j c_0(Y,Z) < 0 \quad (31)$$

On peut alors résumer et dire que les hyperplans parallèles ne se trouvent du même côté de l'hyperplan en commun que si et seulement si :

$$\frac{E^i c_p(Y,Z) - \hat{T}^i c_0(Y,Z)}{E^j c_p(Y,Z) - \hat{T}^j c_0(Y,Z)} > 0 \quad (32)$$

Il suffit donc de vérifier si la condition (32) est satisfaite pour savoir si deux techniques voisines sont rivales.

3.3. Un exemple numérique

Reconsidérons une nouvelle fois l'exemple numérique du chapitre 9. Nous savons déjà (cf. le paragraphe 2.3 de la section précédente) que les techniques S et V sont voisines. Vérifions à présent, à l'aide du critère que nous venons de dériver, si elles sont rivales ou non.

Je rappelle que $S = \{ 1_0, 2_0, 1_P, 2_P, 3_P, 4_P \}$ et que $V = \{ 2_0, 3_0, 1_P, 2_P, 3_P, 4_P \}$. Il s'en suit que ce sont les méthodes 1_0 et 3_0 qui distinguent les deux techniques. Le vecteur $c(S,V)$ qui décrit l'hyperplan en commun entre les deux techniques est par conséquent égal à $c(S,1_0) = c(V,3_0)$ (cf. le paragraphe 3.5 du chapitre 10 et le paragraphe 2.3 de la section précédente), c'est-à-dire :

$$c(S,V) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ 44 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Pour appliquer le critère, nous avons besoin des lignes de la matrice des offres nettes de marchandises agricoles E et de la matrice des terres utilisées par l'agriculture \hat{T} qui correspondent aux méthodes de repos 1_0 et 3_0 . Commençons par la méthode 1_0 . Les lignes recherchées sont respectivement la première ligne de la matrice E_0 et la première ligne de la matrice T_0 . Il s'avère que :

$$(E_0)^1 = [0 \quad 0] \quad (34)$$

$$(T_0)^1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (35)$$

En ce qui concerne la méthode 3_0 , les lignes recherchées sont respectivement la troisième ligne de la matrice E_0 et la troisième ligne de la matrice T_0 . Il s'avère maintenant que :

$$(E_0)^3 = [0 \quad 0] \quad (36)$$

$$(T_0)^3 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad (37)$$

Il est maintenant facile d'appliquer le critère (32). Nous avons en effet :

$$\frac{(E_0)^1 c_P(S, V) - (T_0)^1 c_0(S, V)}{(E_0)^3 c_P(S, V) - (T_0)^3 c_0(S, V)} = \frac{(T_0)^1 c_0(S, V)}{(T_0)^3 c_0(S, V)} = \frac{-2}{44} < 0 \quad (38)$$

La conclusion est que les techniques S et V ne sont pas rivales, ce qui était par ailleurs déjà clair de la figure 11.1.

Comparons ensuite la technique S avec une autre de ces voisines, à savoir la technique $T = \{ 1_0, 3_0, 1_P, 2_P, 3_P, 4_P \}$. Ce sont maintenant les méthodes 2_0 et 3_0 qui distinguent les deux techniques. Le vecteur $c(S, T)$ qui décrit l'hyperplan en commun entre les deux techniques est par conséquent égal à $c(S, 2_0) = c(T, 3_0)$. Des calculs déjà faits (cf. le paragraphe 3.5 du chapitre 10) il ressort que :

$$c(S, T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 28 \\ 13 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Pour appliquer le critère, nous avons à présent besoin des lignes de la matrice des offres nettes de marchandises agricoles E et de la matrice des terres utilisées par l'agriculture \hat{T} qui correspondent aux méthodes de repos 2_0 et 3_0 . Les lignes correspondant à la méthode 2_0 sont respectivement la deuxième ligne de la matrice E_0 et la deuxième ligne de la matrice T_0 . Il est clair que :

$$(E_0)^2 = [0 \quad 0] \quad (40)$$

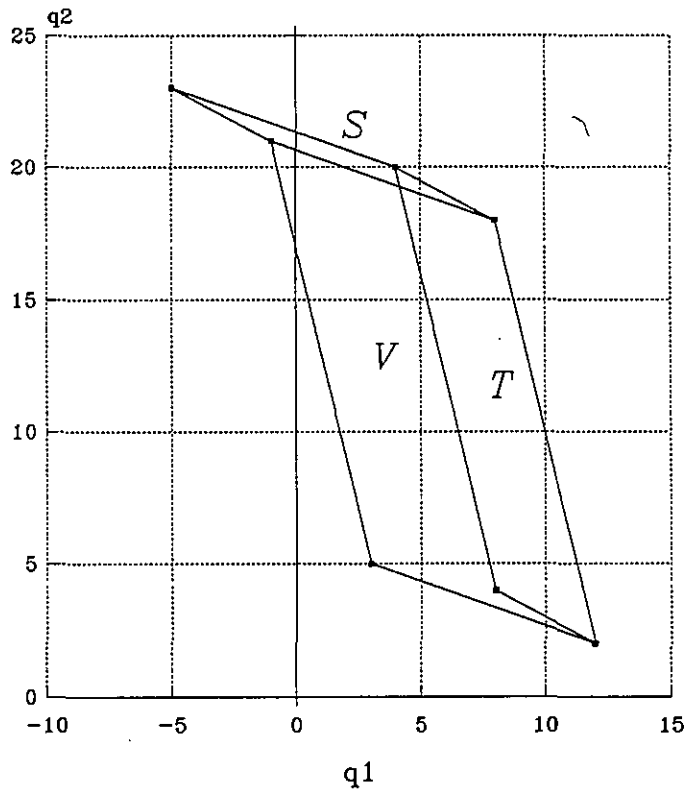
$$(T_0)^2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad (41)$$

L'application du critère (32) nous donne alors :

$$\frac{(E_0)^2 c_P(S, T) - (T_0)^2 c_0(S, T)}{(E_0)^3 c_P(S, T) - (T_0)^3 c_0(S, T)} = \frac{(T_0)^2 c_0(S, T)}{(T_0)^3 c_0(S, T)} = \frac{3}{28} > 0 \quad (42)$$

Contrairement au cas précédent, il ressort maintenant que les techniques S et T sont rivales. La représentation graphique des domaines de production de S , T et V confirme cette conclusion (cf. la figure 11.2).

FIGURE 11.2



4. LE DOMAINE DE PRODUCTION AGREGE

4.1. La définition d'un domaine de production agrégé

Dans ce qui suit, je ne vais pas toujours prendre en compte l'ensemble de toutes les techniques T . En effet, les théorèmes principaux du chapitre suivant n'auront trait qu'aux certains sous-ensembles de l'ensemble de techniques. Supposons que C soit un sous-ensemble non vide de l'ensemble des techniques T ($C \subseteq T$). J'appellerai *domaine de production agrégé de l'ensemble de techniques C* l'ensemble de tous les vecteurs d'offres nettes q obtenus en agrégeant les domaines de production des techniques appartenant à C . Je représenterai le domaine de production agrégé de l'ensemble C par $Q[C]$. La définition formelle de $Q[C]$ est la suivante :

DEFINITION 11.3. Domaine de production agrégé

Le domaine de production agrégé de l'ensemble de techniques C, $Q[C]$, est l'union de tous les domaines de production des techniques de C.

En termes mathématiques, si $C = \{ C_1, C_2, \dots, C_g \}$, le domaine de production agrégé $Q[C]$ est égal à :

$$Q[C] = Q(C_1) \cup Q(C_2) \cup \dots \cup Q(C_g) \quad (43)$$

4.2. Les domaines de production agrégés enchaînés et bien ordonnés

Dans le chapitre suivant, je démontrerai un théorème concernant les ensembles de techniques $C = \{ C_1, C_2, \dots, C_g \}$ dont les domaines de production agrégés $Q[C]$ possèdent deux propriétés spécifiques. Ces propriétés concernent d'une part la manière

dont les domaines de production des techniques C_1, C_2, \dots, C_g sont liés, et d'autre part ce qui se passe si les domaines de production *intérieurs* de deux techniques C_i et C_j se chevauchent.

J'appellerai le domaine de production agrégé $Q[C]$ *enchaîné* si chaque technique appartenant à l'ensemble C est directement ou indirectement voisine de toute autre technique de l'ensemble C . En termes formels :

DEFINITION 11.4. Domaine de production agrégé enchaîné

Le domaine de production agrégé de l'ensemble de techniques C est dit *enchaîné* si quelles que soient les techniques C_i et C_j éléments de C , ou bien la technique C_i est voisine de la technique C_j , ou bien il existe une chaîne de h techniques Y_1, Y_2, \dots, Y_h ($h \geq 1$), toutes éléments de l'ensemble C , telles que C_i est voisine de Y_1 , Y_1 voisine de Y_2 , ..., et Y_h voisine de C_j .

De façon vague, un domaine enchaîné est 'd'une pièce'.

Ensuite, j'appellerai le domaine de production agrégé $Q[C]$ *bien ordonné* si chaque fois qu'il y a chevauchement entre les domaines de production intérieurs de deux techniques appartenant à C , ou bien les deux techniques sont voisines (et par conséquent rivales), ou bien les deux techniques sont reliées par une chaîne de techniques voisines, toutes appartenant à C , et telles qu'au moins une technique est rivale d'une autre. La définition formelle est la suivante :

DEFINITION 11.5. Domaine de production agrégé bien ordonné

Le domaine de production agrégé de l'ensemble de techniques C est dit *bien ordonné* si dans le cas où les domaines de production intérieurs de deux techniques C_i et C_j éléments de C se recouvrent (partiellement), ou bien la technique C_i est voisine (et donc rivale) de C_j , ou bien il existe une chaîne de h techniques Y_1, Y_2, \dots, Y_h ($h \geq 1$), toutes éléments de l'ensemble C , telles que C_i est voisine de Y_1 , Y_1 voisine de Y_2 , ..., et Y_h voisine de C_j , et au moins un de ces $h+1$ couples de techniques voisines est un couple de techniques rivales.

De façon vague, 'bien ordonné' signifie que la 'cause' du chevauchement entre domaines de production intérieurs qui constituent le domaine de production agrégé $Q[C]$ est la rivalité entre deux techniques éléments de l'ensemble C . Evidemment, un domaine de production agrégé 'sans chevauchements' (c'est-à-dire, entièrement composé de domaines de production dont les domaines de production intérieurs sont tous disjoints), est bien ordonné.

Pour désigner les ensembles de techniques dont les domaines de production sont à la fois enchaînés et bien ordonnés, j'utiliserai le terme *complet*. Voici la définition :

DEFINITION 11.6. Ensemble de techniques complet

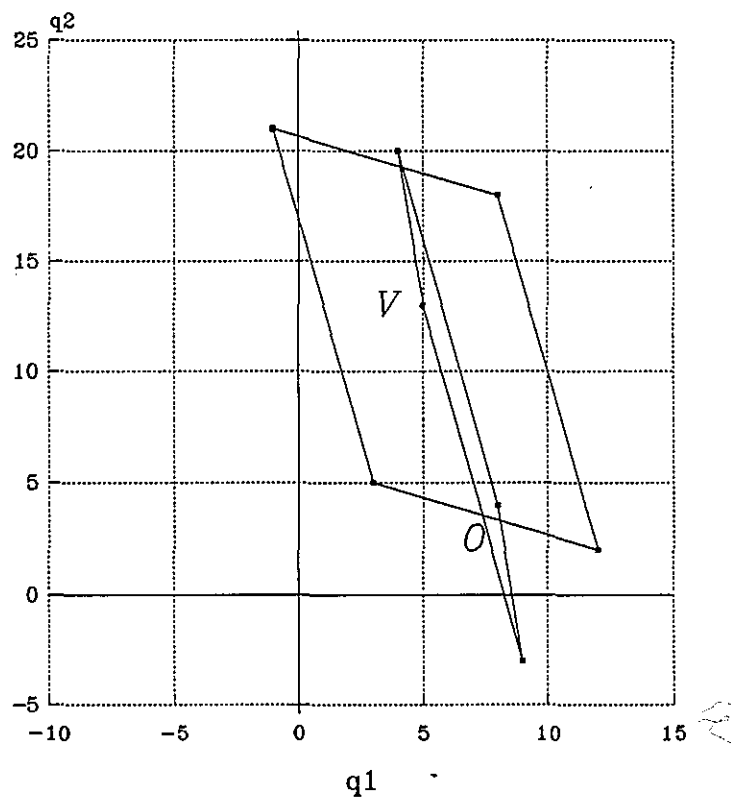
L'ensemble de techniques C est dit *complet* si son domaine de production agrégé $Q[C]$ est enchaîné et bien ordonné.

Les ensembles complets joueront un rôle essentiel dans les hypothèses du théorème d'unicité du chapitre suivant.

4.3. Un exemple numérique

Toujours en partant du même exemple numérique, examinons si l'ensemble de techniques $C = \{ O, V \}$ est complet. Nous savons déjà (cf. le paragraphe 2.3) que les points extrêmes du domaine de production de la technique $V = \{ 2_0, 3_0, 1_P, 2_P, 3_P, 4_P \}$ sont respectivement $(12, 2)$, $(3, 5)$, $(-1, 21)$ et $(8, 18)$. Il est également possible de calculer que les points extrêmes du domaine de production de la technique $O = \{ 1_0, 3_0, 4_0, 2_P, 3_P, 4_P \}$ sont respectivement $(9, -3)$, $(5, 13)$, $(4, 20)$ et $(8, 4)$.

FIGURE 11.3



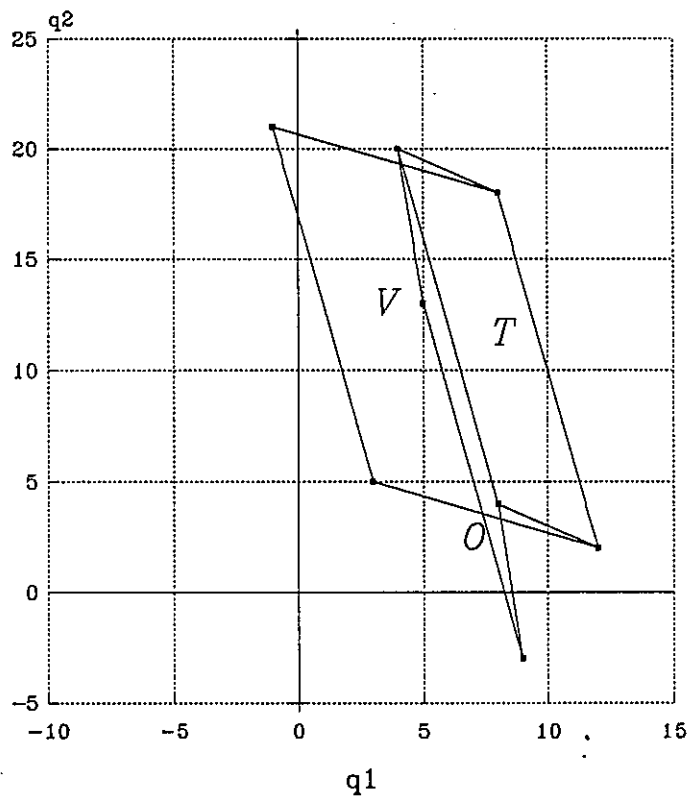
La représentation graphique de ces deux domaines (cf. la figure 11.3) montre alors clairement que :

- ni directement, ni indirectement, la technique O n'est voisine de la technique V ;
- les domaines de production intérieurs des techniques O et V se recouvrent partiellement sans qu'il n'existe de rivalité.

L'ensemble de techniques C n'est ni enchaîné, ni bien ordonné.

Examinons maintenant si l'ensemble de techniques $C' = \{ O, T, V \}$ est complet. Plus haut (cf. la figure 11.2) nous avons vu que les points extrêmes du domaine de production de la technique $T = \{ 1_0, 3_0, 1_P, 2_P, 3_P, 4_P \}$ sont respectivement $(12, 2)$, $(8, 4)$, $(4, 20)$ et $(8, 18)$. De plus, j'ai montré que les techniques T et V sont voisines et

FIGURE 11.4



rivales (cf. le paragraphe 3.3). On peut également montrer que les techniques O et T sont voisines (mais pas rivales), comme l'illustre la figure 11.4. Cela signifie donc en premier lieu que le domaine de production est enchaîné. De plus, le domaine de production agrégé est également bien ordonné. En effet, les domaines de production intérieurs des techniques V et T se recouvrent partiellement, mais V et T sont rivales; les domaines de production intérieurs des techniques V et O se recouvrent aussi, mais il existe une 'chaîne' de techniques éléments de C , à savoir la chaîne composée de la technique T , qui relie V à O , et qui est telle que T est rivale de V .

5. CONCLUSION

Le but de ce chapitre a été de décrire les relations entre plusieurs techniques à l'aide des propriétés de leurs domaines de production.

J'ai commencé par étudier les relations entre deux techniques. J'ai qualifié deux techniques *voisines* si leurs domaines de production ont en commun un de leurs côtés. J'ai qualifié deux techniques voisines *rivales* si leurs domaines de production intérieurs se recouvrent (partiellement). Un critère a été établi pour vérifier si deux techniques voisines sont rivales.

Ensuite, j'ai utilisé ces notions pour décrire les relations entre les techniques d'un ensemble quelconque. Le domaine de production agrégé d'un ensemble de techniques a été défini comme l'union des domaines de production des techniques appartenant à cet ensemble. En ce qui concerne les domaines de production agrégés, j'ai énoncé deux propriétés importantes. Le domaine de production agrégé de l'ensemble C est dit *enchaîné* si n'importe quelle technique de C est directement ou indirectement voisine de n'importe quelle autre technique de C. Le domaine est dit *bien ordonné* si en cas de chevauchement entre les domaines de production de deux techniques appartenant à C, ces deux techniques sont directement ou indirectement rivales. Un ensemble de techniques dont le domaine de production agrégé est à la fois enchaîné et bien ordonné est appelé *complet*.

CHAPITRE 12

EXISTENCE ET UNICITE DES TECHNIQUES

DE COUT MINIMAL EN PRESENCE DE TERRE

=====

1. INTRODUCTION

Le terrain est maintenant suffisamment préparé pour pouvoir entamer l'examen de l'existence et de l'unicité des techniques de coût minimal. A ce stade il peut être utile de remettre à l'esprit la différence entre 'système de production' et 'technique'. Un système de production est caractérisé par un vecteur d'activité. Un système de production de coût minimal est défini en fonction d'un vecteur de demande donné. Ainsi, pour que le système de production caractérisé par le vecteur d'activité \hat{x} soit de coût minimal par rapport à la demande équivalente q , il faut que l'offre nette de marchandises agricoles de ce système soit égale à la demande équivalente donnée [$\hat{x}'E = q$]. Une technique, en revanche, n'est qu'une liste de méthodes actives. Une technique de coût minimal ne sera pas définie en fonction d'un vecteur de demande donné. En effet, je remplacerai le critère de la satisfaction de la demande q par le critère qu'une technique ne peut être de coût minimal que si son domaine de production comprend au moins un vecteur q positif. Lorsque je dirai que la technique Y est de coût minimal, j'entends alors qu'il existe un système de coût minimal caractérisé par un

vecteur \hat{x}^Y pour chaque vecteur q appartenant au domaine de la technique Y .

En ce qui concerne l'existence de techniques de coût minimal, j'essaierai alors de fournir une réponse à la question suivante : étant donné le taux de profit, sous quelles conditions existe-t-il au moins une technique de coût minimal ? En ce qui concerne l'unicité des techniques de coût minimal, la question sera : étant donné le taux de profit, sous quelles conditions le domaine de production (intérieur) d'une technique de coût minimal ne recouvre-t-il pas le domaine de production (intérieur) d'aucune autre technique de coût minimal ? Pour pouvoir répondre à cette dernière question, je ferai l'hypothèse que le domaine de production agrégé de l'ensemble des techniques de coût minimal est enchaîné et bien ordonné.

Une remarque encore avant de commencer. Il est important de voir que la façon dont je viens de définir une technique de coût minimal est telle que l'existence de plusieurs techniques de coût minimal n'implique pas que leur unicité ne soit pas garantie. En effet, si les domaines de production (intérieurs) de toutes les techniques de coût minimal sont disjoints, alors il y a unicité des techniques de coût minimal.

La structure du chapitre est alors la suivante. D'abord je définis d'une manière précise ce qu'est une technique de coût minimal (section 2). Ensuite je m'arrête sur les techniques qui sont à la fois primaires et semi-productives, car elles joueront un rôle important dans les théorèmes sur l'existence et l'unicité (section 3). Après cela, je suis en état de présenter un théorème sur l'existence (section 4), et puis un théorème sur l'unicité des techniques de coût minimal (section 5). Pour faciliter la lecture, je regroupe les démonstrations des théorèmes 12.1, 12.2, 12.4 et 12.7 dans l'annexe de ce chapitre.

2. LES TECHNIQUES DE COUT MINIMAL

2.1. Les prix, les rentes et le salaire associés à une technique

J'ai défini une technique comme un ensemble de $a+m$ méthodes agricoles actives qui détermine les prix, les rentes et le salaire, étant donné le taux de profit et le numéraire (cf. le paragraphe 2.1 du chapitre 10). Dans ce qui suit, je supposerai toujours que la première marchandise (le blé) sert de numéraire ¹. Je désignerai par $p_1(Y,r)$ les prix des k marchandises agricoles, par $z(Y,r)$ les rentes des m terres, et par $w(Y,r)$ le salaire déterminés par la technique Y lorsque le taux de profit est r . En d'autres termes, si les $a+m$ méthodes de la technique Y étaient toutes actives, les comptes de toutes ces techniques devraient être en équilibre (cf. le paragraphe 3.4 du chapitre 8), ce qui n'est possible que si les prix, les rentes et le salaire satisfont au système d'équations suivant :

$$E^Y(r)p_1(Y,r) - \hat{T}^Y z(Y,r) - f^Y(r)w(Y,r) = 0 \quad (1)$$

$$I^1 p_1(Y,r) = 1 \quad (2)$$

Comme auparavant, $E^Y(r)$ représente les $a+m$ lignes de la matrice des r -offres nettes de marchandises agricoles qui correspondent aux méthodes éléments de la technique Y , \hat{T}^Y les $a+m$ lignes de la matrice des terres qui correspondent aux méthodes éléments de la technique Y , et $f^Y(r)$ les $a+m$ éléments du vecteur de r -travail net qui correspondent aux $a+m$ méthodes éléments de la technique Y . Les $a+m$ équations du

¹ J'ai besoin d'un numéraire pour définir les ensembles $P(r)$, $Z(r)$, $W(r)$ et $S(r)$ dans le paragraphe suivant. Le choix de techniques ne dépend cependant pas du numéraire, qui peut être choisi librement. Je me distancie donc des remarques de Guichard (1987, pp. 121-123), qui laisse entendre le contraire.

système (1) expriment que les comptes des $a+m$ méthodes appartenant à la technique Y doivent être en équilibre, tandis que l'équation (2) exprime que le blé sert de numéraire. Si Y est une technique, ces $a+m+1$ équations suffisent normalement ² pour déterminer les k prix, les m rentes et le salaire, le taux de profit étant donné.

Savoir si la technique Y peut définir des systèmes de production de coût minimal dépend des comptes des méthodes qui n'appartiennent pas à la technique Y , c'est-à-dire des comptes des méthodes non actives. Définissons, pour chaque méthode i , un nombre $s_i(Y,r)$ égal à la différence entre les recettes de la méthode i et ses dépenses, étant donné le taux de profit r et les prix, les rentes et le salaire déterminés par la technique Y . En termes formels, nous avons :

$$s_i(Y,r) \equiv E^i(r)p_1(Y,r) - \hat{T}^i z(Y,r) - f_i(r)w(Y,r) \quad (3)$$

Si $s_i(Y,r) > 0$, le compte de la méthode i est excédentaire, et si $s_i(Y,r) < 0$ déficitaire. Dans le premier cas, on dit aussi que la méthode i rapporte un surprofit. En notation vectorielle, nous avons évidemment :

$$s(Y,r) \equiv E(r)p_1(Y,r) - \hat{T}z(Y,r) - f(r)w(Y,r) \quad (4)$$

J'appellerai $s(Y,r)$ le vecteur des surprofits. En distinguant les m méthodes de repos des g méthodes de production agricoles disponibles, nous pouvons réécrire (4) comme suit :

$$s_0(Y,r) \equiv E_0(r)p_1(Y,r) - T_0 z(Y,r) - f_0(r)w(Y,r) \quad (5)$$

² Cf. la note 2 du chapitre 10.

$$s_1(Y,r) \equiv E_1(r)p_1(Y,r) - T_1z(Y,r) - f_1(r)w(Y,r) \quad (6)$$

où le vecteur $[mx1]$ $s_0(Y,r)$ représente les surprofits des m méthodes de repos, et le vecteur $[gx1]$ $s_1(Y,r)$ représente les surprofits des g méthodes de production agricoles. En tenant compte des définitions de la matrice des r -offres nettes $E(r)$ et du vecteur de r -travail net $f(r)$ (cf. le paragraphe 5.3 du chapitre 8) et du fait que $T_0 \equiv I$, nous réduisons (5) à la forme suivante :

$$s_0(Y,r) \equiv -z(Y,r) \quad (7)$$

En d'autres termes, les méthodes de repos ne rapportent pas de surprofits, si et seulement si le vecteur des rentes déterminé par la technique Y est non négatif.

Notons aussi qu'en représentant les $a+m$ éléments du vecteur des surprofits $s(Y,r)$ qui correspondent aux méthodes appartenant à la technique Y par $s^Y(Y,r)$, le système (1) se réécrit de la façon suivante :

$$s^Y(Y,r) = 0 \quad (8)$$

2.2. Les techniques de coût minimal

Dans le chapitre 8, j'ai énoncé la définition d'un système de production de coût minimal. En formulant cette définition, je supposais que la demande était donnée. J'abandonne à présent cette hypothèse, et au lieu de chercher les systèmes de production de coût minimal à vecteur de demande donné, je cherche les techniques de coût minimal pour au moins un vecteur de demande. Au lieu de parler de *systèmes de production de coût minimal* je parlerai donc de *techniques de coût minimal*. Une *technique* sera dite de coût

minimal si elle définit au moins un système de production de coût minimal. En d'autres termes, la technique Y sera dite de coût minimal si les méthodes appartenant à la technique Y peuvent être activées à des niveaux tels que le système de production ainsi défini soit un système de production de coût minimal pour une demande égale au produit net de ce système de production.

Vu la définition du système de production de coût minimal, il existe cinq raisons pour lesquelles une technique Y ne pourrait pas être de coût minimal :

- (1) la technique Y détermine un prix négatif pour au moins une des k marchandises agricoles [$p_1(Y,r) \neq 0$];
- (2) la technique Y détermine une rente négative pour au moins une des m terres [$z(Y,r) \neq 0$];
- (3) la technique Y détermine un salaire négatif [$w(Y,r) < 0$];
- (4) aux prix, aux rentes et au salaire déterminés par la technique Y , il existe une méthode non active qui rapporte un surprofit [$s(Y,r) \neq 0$];
- (5) la technique Y n'est pas productive [le domaine de production de la technique, $Q(Y)$, ne contient aucun élément positif].

Les trois premières raisons sont évidentes. La quatrième raison concerne la stabilité de l'économie. Si l'une des méthodes non actives rapportait un surprofit, il y aurait une incitation à investir dans cette méthode, et donc à l'activer. La cinquième raison exclut les techniques qui ne peuvent satisfaire aucun vecteur de demande équivalente positif. C'est la seule des cinq qui ne dépend pas de la valeur du taux de profit. En d'autres termes, lorsque le taux de profit change, une technique qui était stable peut bien devenir instable, mais une technique qui était productive ne peut jamais devenir non productive.

Formalisons un peu ce raisonnement, et faisons correspondre à chacune de ces raisons un ensemble qui regroupe les techniques pour lesquelles cette cause ne constitue pas un obstacle pour qu'elles soient de coût minimal. Autrement dit, étant donné le taux de profit r et le numéraire, définissons un ensemble $P(r)$ regroupant les techniques qui déterminent un vecteur de prix semi-positif, un ensemble $Z(r)$ regroupant les techniques qui déterminent un vecteur des rentes non négatif, un ensemble $W(r)$ regroupant les techniques qui déterminent un salaire non négatif, un ensemble $S(r)$ regroupant les techniques qui déterminent un vecteur des surprofits non positif, et un ensemble Q regroupant les techniques qui sont productives. En termes mathématiques, les ensembles $P(r)$, $W(r)$, $Z(r)$, $Y(r)$ et Q sont définis de la manière suivante :

$$P(r) \equiv \{ Y \in T \mid p_1(Y,r) \geq 0 \} \quad (9)$$

$$Z(r) \equiv \{ Y \in T \mid z(Y,r) \geq 0 \} \quad (10)$$

$$W(r) \equiv \{ Y \in T \mid w(Y,r) \geq 0 \} \quad (11)$$

$$S(r) \equiv \{ Y \in T \mid s(Y,r) \leq 0 \} \quad (12)$$

$$Q \equiv \{ Y \in T \mid \exists q > 0 : q \in Q(Y) \} \quad (13)$$

Définissons ensuite l'ensemble de techniques $C(r)$ qui regroupe toutes les techniques de coût minimal, le taux de profit étant égal à r . Une technique de coût minimal est par définition une technique pour laquelle tous les prix, toutes les rentes et le salaire sont non négatifs (évidemment pas tous nuls), qui est stable, et qui est capable de produire

un vecteur d'offres nettes positif. L'ensemble des techniques de coût minimal est donc :

$$C(r) \equiv \{ Y \in T \mid p_1(Y,r) \geq 0, z(Y,r) \geq 0, w(Y,r) \geq 0, \\ s(Y,r) \leq 0, \text{ et } \exists q > 0 : q \in Q(Y) \} \quad (14)$$

D'après les définitions (9)-(13), une autre manière de définir l'ensemble des techniques de coût minimal $C(r)$ est la suivante :

$$C(r) \equiv P(r) \cap Z(r) \cap W(r) \cap S(r) \cap Q \quad (15)$$

2.3. Deux théorèmes sur l'ensemble des techniques de coût minimal

La définition (15) exprime que l'ensemble des techniques de coût minimal peut être trouvé en prenant l'intersection de cinq autres ensembles : l'ensemble des techniques à prix (semi-)positifs, l'ensemble des techniques à rentes non négatives, l'ensemble des techniques à salaire non négatif, l'ensemble des techniques stables, et l'ensemble des techniques productives. Toutefois il est inutile de prendre en considération deux de ces cinq ensembles. Voici les théorèmes.

THEOREME 12.1. Redondance de l'ensemble $Z(r)$

Une technique stable est ipso facto une technique pour laquelle le vecteur des rentes est non négatif.

THEOREME 12.2. Redondance de l'ensemble $P(r)$

Une technique qui paie un salaire non négatif, qui est stable et productive est ipso facto une technique pour laquelle le vecteur des prix est semi-positif.

En termes mathématiques, le théorème 12.1 signifie que si le vecteur des surprofits $s(Y,r)$ est non positif, alors le vecteur des rentes $z(Y,r)$ est nécessairement non négatif. Le théorème 12.2, à son tour, signifie que si le salaire $w(Y,r)$ est non négatif, le vecteur des surprofits $s(Y,r)$ non positif, et la technique Y productive, alors le vecteur des prix $p_1(Y,r)$ est nécessairement semi-positif. Nous pouvons par conséquent récrire (15) comme suit :

$$C(r) = W(r) \cap S(r) \cap Q \quad (16)$$

Pour savoir si une technique est une technique de coût minimal, il suffit donc de vérifier qu'elle détermine un salaire non négatif, qu'elle est stable et qu'elle est productive ³.

2.4. Un exemple numérique

Pour illustrer que l'ensemble des techniques de coût minimal n'est pas forcément le même pour deux taux de profit différents, je me sers à nouveau de l'exemple numérique présenté dans le chapitre 9. Supposons que l'on veuille connaître les techniques de coût minimal lorsque le taux de profit est nul et lorsque le taux de profit est 30%. Après avoir calculé les prix, les rentes et le salaire associés à chacune des 24 techniques de l'exemple, j'ai construit les deux tableaux suivants, indiquant celles des 24 techniques considérées qui appartiennent respectivement à l'ensemble des techniques payant un

³ La redondance des ensembles $Z(r)$ et $P(r)$ n'implique pas pour autant que l'on puisse déterminer si une technique est de coût minimal sans connaître les rentes et les prix. Il faut en effet connaître les prix et les rentes pour vérifier si une technique est stable ou non. Notons par ailleurs que la redondance de l'ensemble $P(r)$ dépend de l'hypothèse de l'absence de production jointe, tandis que la redondance de l'ensemble $Z(r)$ ne dépend d'aucune des hypothèses spécifiques adoptées dans la section 4 du chapitre 8.

salaire non négatif, à l'ensemble des techniques stables, et à l'ensemble des techniques productives. Les techniques de coût minimal sont celles qui appartiennent à ces trois ensembles.

Il ressort des tableaux 12.1 et 12.2 que les ensembles des techniques de coût minimal pour $r = 0$ et pour $r = 0.3$ sont respectivement $C(0) = \{ E, I, N, T \}$ et $C(0.3) = \{ E, I, M, O, U \}$. Il est donc clair que la composition de l'ensemble des techniques de coût minimal peut changer avec le taux de profit.

TABLEAU 12.1 : Les Techniques de Coût Minimal ($r = 0$)

Ensembles →	W(0)	S(0)	Q	C(0)
Technique :				
A				
B	x		x	
C	x		x	
D	x		x	
E	x	x	x	x
F				
G			x	
H	x		x	
I	x	x	x	x
J			x	
K	x			
L	x		x	
M	x		x	
N	x	x	x	x
O			x	
P	x		x	
Q	x		x	
R			x	
S		x	x	
T	x	x	x	x
U	x		x	
V	x		x	
W	x		x	
X		x	x	

TABLEAU 12.2 : Les Techniques de Coût Minimal ($r = 0.3$)

Ensembles →	W(0.3)	S(0.3)	Q	C(0.3)
Technique :				
A				
B	x		x	
C	x		x	
D	x		x	
E	x	x	x	x
F	x			
G			x	
H	x		x	
I	x	x	x	x
J			x	
K	x			
L	x		x	
M	x	x	x	x
N	x		x	
O	x	x	x	x
P	x		x	
Q	x		x	
R	x		x	
S		x	x	
T	x		x	
U	x	x	x	x
V	x		x	
W	x		x	
X	x		x	

3. LES TECHNIQUES PRIMAIRES SEMI-PRODUCTIVES

3.1. Les définitions des techniques primaires et (semi-)productives

Nous avons antérieurement défini les techniques primaires comme celles qui contiennent toutes les méthodes de repos (cf. le paragraphe 2.3 du chapitre 10). Puisqu'il existe m terres et par conséquent m méthodes de repos, et étant donné qu'une technique est toujours composée de $a+m$ méthodes agricoles, une technique primaire contient exactement a méthodes de production agricoles, c'est-à-dire autant de méthodes de production agricoles que de marchandises agricoles. Nous avons en outre signalé que seules les techniques semi-productives peuvent être productives. Je rappelle qu'une technique est semi-productive si elle contient au moins une méthode qui produit la marchandise agricole 1, au moins une méthode qui produit la marchandise agricole 2, ..., et au moins une méthode qui produit la marchandise a . Cela signifie par conséquent qu'une technique primaire ne peut être une technique de coût minimal que si elle contient *exactement* une méthode qui produit la marchandise 1, *exactement* une méthode qui produit la marchandise 2, ..., et *exactement* une méthode qui produit la marchandise a .

3.2. La stabilité des techniques primaires semi-productives

Prenons une technique primaire semi-productive quelconque Y , et examinons les conditions de sa stabilité. Considérons d'abord les méthodes de repos actives. Puisque Y est une technique primaire, l'ensemble des méthodes de repos actives Y_0 contient toutes les méthodes de repos, c'est-à-dire : $Y_0 = \{ 1_0, 2_0, \dots, m_0 \}$. Par hypothèse, les comptes des méthodes actives sont tous en équilibre [$s^Y(Y,r) = 0$]. Appliquée aux méthodes de repos, cette hypothèse signifie que toutes les rentes sont nulles. En effet,

par définition le surprofit rapporté par la méthode de repos i_0 est l'opposé de la rente de la terre i [en notation vectorielle : $s_0(Y,r) = -z(Y,r)$, cf. l'équation (7)]. Si toutes les méthodes de repos sont actives, il faut que $s_0(Y,r) = 0$, et les rentes sont toutes nulles [$z(Y,r) = 0$].

Considérons ensuite les méthodes de production actives. Comme je viens de signaler, une technique primaire contient a méthodes de production; l'ensemble des méthodes de production actives Y_p contient donc a éléments. Les rentes étant toutes nulles, écrivons les équations de prix correspondant aux a méthodes de production actives comme suit :

$$E_1^Y(r)p_1(Y,r) - f_1^Y(r)w(Y,r) = 0 \quad (17)$$

où la matrice $[axa] E_1^Y(r)$ représente les a lignes de la matrice des r -offres nettes $E(r)$ correspondant aux méthodes de production appartenant à la technique Y , et le vecteur $[ax1] f_1^Y(r)$ les a lignes du vecteur de r -travail net $f(r)$ correspondant aux méthodes de production appartenant à la technique Y . Etant donnés le taux de profit et le numéraire, les prix des a marchandises agricoles et le salaire sont donc déterminés par le système d'équations (17).

Par hypothèse, la technique Y n'est pas seulement primaire, mais aussi semi-productive. Cela implique que chaque marchandise agricole est représentée par *exactement* une méthode de production dans la technique Y . Dans ces conditions, le système d'équations (17) se comporte comme un système de prix d'un système de production simple. D'une part, la matrice carrée $E_1^Y(r)$ est une matrice de r -produits nets, comparable à la matrice $I-(1+r)A$ d'un système de production simple. En effet, sur chaque ligne et sur chaque colonne au maximum un élément est positif. (Comme pour

les systèmes de production simple, on peut arranger les lignes de telle façon que la première méthode est la méthode qui produit la première marchandise, et ainsi de suite. Les éléments positifs se trouvent alors sur la diagonale principale.) D'autre part, le vecteur $f_1^Y(r)$ est un vecteur de travail, comparable au vecteur l d'un système de production simple. La valeur de ce vecteur change lorsque le taux de profit change, mais tant que le taux de profit n'excède pas les limites imposées par l'hypothèse H.5 (cf. le paragraphe 4.3 du chapitre 8), le vecteur $f_1^Y(r)$ est positif.

Cette information est importante d'un double point de vue. En premier lieu, les prix et le salaire associés à une quelconque technique primaire semi-productive Y ne sont non négatifs que pour un taux de profit inférieur ou égal à la plus petite racine positive de l'équation $\det [E_1^Y(r)] = 0$ (cf. le paragraphe 3.2 du chapitre 4) ⁴. Cette équation possède une racine positive si et seulement si la technique primaire Y est productive, c'est-à-dire si et seulement si $[E_1^Y(0)]^{-1} \geq 0$. En second lieu, (normalement) une seule technique primaire semi-productive est stable. En faisant abstraction des contraintes de terre, on peut en effet appliquer le théorème de non-substitution (cf. le paragraphe 2.1 du chapitre 9) à l'ensemble des techniques primaires semi-productives. S'il n'y avait pas les contraintes de terre (et donc pas de rentes), les techniques primaires semi-productives seraient les seules à entrer en compétition, et le problème du choix de techniques se réduirait alors au problème du choix de techniques en production simple sans terres. Ainsi :

⁴ Comme il est bien connu, cette racine représente le taux de profit maximum de la technique Y .

THEOREME 12.3. Stabilité des techniques primaires semi-productives

Etant donné le taux de profit, il n'existe normalement qu'une seule technique primaire semi-productive stable. De toutes les techniques primaires semi-productives, c'est celle qui paie le salaire le plus élevé.

3.3. Un exemple numérique

Retournons à nouveau à l'exemple numérique bien connu. A l'aide du tableau 10.1, on peut déterminer que 4 des 6 techniques primaires sont semi-productives, à savoir les techniques *B*, *C*, *D*, *E*. Plus haut (cf. le paragraphe 2.4) nous avons vu que pour $r = 0$, l'ensemble des techniques de coût minimal est égal à $C(0) = \{ E, I, N, T \}$, et que pour $r = 0.3$, cet ensemble est égal à $C(0.3) = \{ E, I, M, O, U \}$. Dans les deux cas, seule la technique primaire semi-productive *E* fait partie de l'ensembles des techniques de coût minimal.

Ceci n'est cependant pas le cas pour n'importe quelle valeur du taux de profit. Il est en effet possible de calculer que la technique *E* n'est la technique primaire semi-productive stable que pour les taux de profit situés entre 0 et 30.89% (chiffre arrondi). Pour les taux de profit situés entre 30.89% et 56.37% (chiffres arrondis) c'est la technique *D* qui remplace la technique *E*, et pour les taux de profit supérieurs à 56.37% (chiffre arrondi) c'est la technique *B* qui remplace à son tour la technique *D*.

4. L'EXISTENCE DE TECHNIQUES DE COUT MINIMAL

4.1. La nature du résultat recherché

Je rappelle que lorsqu'on cherche les *techniques* de coût minimal, on ne se donne pas la demande. Les demandes pour lesquelles il existe un système de production de coût minimal sont déterminées 'après coup', c'est-à-dire une fois trouvées les techniques de coût minimal. En effet, si Y est une technique de coût minimal (étant donné le taux de profit), alors Y définit des systèmes de production de coût minimal pour tous les vecteurs de demande équivalente (positifs) appartenant au domaine de production $Q(Y)$ de la technique. Inversement, s'il existe un système de production de coût minimal pour une demande équivalente q , alors ce système de production est normalement ⁵ composé de $a+m$ méthodes actives, ce qui implique l'existence d'une technique de coût minimal. En termes mathématiques, l'ensemble des vecteurs de demande équivalente pour lesquelles il existe un système de production de coût minimal s'identifie au domaine de production agrégé $Q[C(r)]$ de l'ensemble des techniques de coût minimal $C(r)$.

La première question que j'essaierai de répondre est alors la suivante : pour quels taux de profit existe-t-il au moins une technique de coût minimal ? En d'autres termes, sous quelles conditions l'ensemble des techniques de coût minimal $C(r)$ n'est-il pas vide ? Ce n'est qu'à partir du moment où l'existence d'au moins une technique de coût minimal est assurée, qu'il vaut la peine d'essayer de déterminer l'ensembles des techniques de coût minimal, et de passer éventuellement au calcul du domaine de production agrégé de l'ensemble des techniques de coût minimal.

⁵ C'est-à-dire, sauf par hasard; cf. le paragraphe 3.6 du chapitre 10.

4.2. Un théorème d'existence

Tournons-nous vers les techniques primaires semi-productives pour apporter une réponse à la question de l'existence. Dans la section précédente, nous avons vu que, pour un taux de profit donné, il n'existe normalement qu'une seule technique primaire semi-productive stable, et que cette technique est celle qui, de toutes les techniques primaires semi-productives, paie le salaire le plus élevé. Ce résultat ne concerne que les techniques primaires semi-productives. En ce qui concerne la relation entre les techniques primaires semi-productives et les autres techniques, on peut démontrer le théorème suivant.

THEOREME 12.4. Implication de l'existence de techniques de coût minimal

S'il existe une technique de coût minimal Y qui n'est pas primaire semi-productive, il existe aussi une technique de coût minimal Z qui est primaire semi-productive, et qui paie un salaire au moins aussi élevé que le salaire payé par la technique Y .

Ce théorème affirme donc que dans le cas où il existe des techniques de coût minimal, il se trouve toujours une technique primaire semi-productive parmi les techniques de coût minimal. En soi, le théorème 12.4 ne nous permet cependant pas de dire pour quels taux de profit il existe au moins une technique de coût minimal. C'est la combinaison de ce théorème avec le précédent qui fournit la clé de la résolution du problème.

Pour être de coût minimal, une technique doit remplir trois exigences : elle doit être stable, payer un salaire non négatif, et être productive. Nous avons déjà qu'une technique primaire semi-productive doit être productive pour être en mesure de payer un salaire non négatif (cf. le paragraphe 3.2), et aussi qu'une telle technique paie un

salaires non négatifs si et seulement si le taux de profit est inférieur ou égal au taux de profit maximum de la technique. Pour qu'il existe au moins une technique primaire semi-productive de coût minimal, il est donc nécessaire qu'au moins une technique primaire semi-productive soit productive, et que le taux de profit soit inférieur ou égal au taux de profit maximum de la technique qui, de toutes les techniques primaires productives, possède le taux de profit maximum le plus élevé. Le théorème 12.3 exprime ensuite que la technique primaire semi-productive qui paie le salaire le plus élevé est la seule technique primaire semi-productive qui est stable. Cela signifie que les deux conditions que je viens d'énoncer sont non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes pour l'existence d'au moins une technique primaire semi-productive de coût minimal.

Qu'il existe au moins une technique primaire semi-productive de coût minimal est évidemment une condition suffisante pour qu'il existe au moins une technique de coût minimal. Mais ce n'est pas tout : le théorème 12.4 exprime en effet que l'existence d'une technique primaire semi-productive de coût minimal est également nécessaire pour qu'il existe des techniques de coût minimal. Il s'en suit que les deux conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de techniques primaires semi-productives de coût minimal, sont aussi nécessaires et suffisantes pour l'existence de techniques de coût minimal en général. Nous avons donc établi le théorème suivant :

THEOREME 12.5. Existence de techniques de coût minimal

Il existe des techniques de coût minimal si et seulement s'il existe une technique primaire (semi-)productive qui paie un salaire non négatif.

Cela signifie plus spécifiquement qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de techniques de coût minimal, est que le taux de profit soit inférieur ou égal

au plus élevé des taux de profit maximum des techniques primaires productives.

4.3. Un exemple numérique

Reconsidérons l'exemple numérique du chapitre 9. Il existe quatre techniques primaires semi-productives, à savoir les techniques *B*, *C*, *D* et *E*. Les taux de profit maximum de ces techniques sont respectivement (chiffres arrondis) :

technique *B* : $r = 93.73\%$

technique *C* : $r = 55.22\%$

technique *D* : $r = 72.67\%$

technique *E* : $r = 54.18\%$.

Selon le critère établi à l'instant, il existe donc des techniques de coût minimal si et seulement si le taux de profit est inférieur ou égal à 93.73% .

5. L'UNICITE DES TECHNIQUES DE COUT MINIMAL

5.1. La nature du résultat recherché

Après l'étude de l'existence, il est naturel de passer à l'étude de l'unicité des techniques de coût minimal. Tout d'abord, précisons ce que nous entendons ici par 'unicité'. Si la technique Y est de coût minimal, cela signifie que pour chaque vecteur de demande équivalente appartenant à son domaine de production, la technique Y définit un système de production de coût minimal. En d'autres termes, pour n'importe quel vecteur de demande équivalente q appartenant à $Q(Y)$ il existe un vecteur d'activité $\hat{x}^Y(q)$ qui caractérise un système de production de coût minimal. On pourrait être tenté de dire qu'il y a unicité des techniques de coût minimal si et seulement si, quelle que soit la technique de coût minimal Y , tous les vecteurs de demande équivalente appartenant au domaine de production de la technique Y ne peuvent être satisfaits par aucune autre technique de coût minimal.

Cette manière de définir l'unicité des techniques de coût minimal paraît trop stricte. Dès qu'il existe plusieurs techniques de coût minimal, il est probable que certaines d'entre elles sont voisines. Deux techniques ne peuvent être voisines qu'à condition que leurs domaines de production respectifs aient un de leurs côtés en commun. Si l'unicité des techniques de coût minimal était définie comme ci-dessus, la présence de techniques voisines impliquerait donc la non unicité des techniques de coût minimal, mais dans le cas où la *seule* raison pour parler de non unicité est le fait que des techniques voisines ont un de leurs côtés en commun, cette conclusion semble plutôt malheureuse. En effet, si le vecteur de demande q était situé sur un côté en commun entre les techniques de coût minimal voisines Y et Z , apparemment chacune de ces techniques de coût minimal définirait un système de production de coût minimal,

caractérisé respectivement par les vecteurs d'activité $\hat{x}^Y(q)$ et $\hat{x}^Z(q)$, mais en réalité il n'existerait qu'un seul système de production de coût minimal : pour produire les vecteurs de demande situés sur le côté en commun, les techniques voisines doivent activer les mêmes $a+m-1$ méthodes, et de ce fait on aura $\hat{x}^Y(q) = \hat{x}^Z(q)$ ⁶.

Il est donc approprié de ne pas tenir compte des vecteurs de demande situés sur les frontières des domaines de production. Par conséquent, je dirai qu'il y a unicité des techniques de coût minimal si, quelle que soit la technique de coût minimal Y , tous les vecteurs de demande équivalente appartenant au domaine de production *intérieur* de la technique Y ne peuvent être satisfaits par aucune autre technique de coût minimal.

5.2. L'unicité et la rivalité

L'unicité des techniques de coût minimal dépend donc des positions des domaines de production intérieurs des techniques de coût minimal. Je rappelle que la notion de rivalité concerne aussi la relation entre domaines de production intérieurs : j'ai en effet défini deux techniques voisines *rivales* si leurs domaines de production intérieurs se recouvrent (partiellement). Le théorème suivant établit maintenant un lien entre la rivalité et l'unicité des techniques de coût minimal.

THEOREME 12.6. Unicité et rivalité

Si l'ensemble des techniques de coût minimal $C(r)$ est complet, alors il y a unicité des techniques de coût minimal si et seulement s'il y a absence de rivalité dans $C(r)$.

⁶ Les prix, les rentes, et le salaire associés à la technique Y et à la technique Z ne sont cependant pas les mêmes.

D'après la définition d'un ensemble de techniques complet, ce théorème est presque évident. Un ensemble de techniques complet est en effet un ensemble dont le domaine de production agrégé est enchaîné et bien ordonné. Un domaine bien ordonné est un domaine où l'apparition de chevauchements entre domaines de production intérieurs implique qu'au moins deux techniques de l'ensemble sont rivales. Il s'en suit que si l'ensemble des techniques de coût minimal était complet, l'absence de rivalité impliquerait l'absence de chevauchements entre domaines de production intérieurs et l'unicité des techniques de coût minimal serait garantie. Inversement, en cas d'unicité des techniques de coût minimal, il ne peut y avoir de chevauchements entre domaines de production, et par conséquent il est certain qu'aucune technique de coût minimal n'est rivale d'une autre technique de coût minimal.

Le théorème 12.6 énonce donc une condition sous laquelle l'unicité des techniques de coût minimal et l'absence de rivalité parmi les techniques de coût minimal sont équivalentes. Dans ce qui suit, je supposerai que cette condition est toujours satisfaite. Autrement dit, j'adopte l'hypothèse suivante :

H.7. Quel que soit le taux de profit r , l'ensemble des techniques de coût minimal $C(r)$ est un ensemble complet.

Evidemment, il serait souhaitable que l'on sache s'il s'agit là d'une hypothèse 'faible' ou d'une hypothèse 'forte'. A défaut de pouvoir trancher cette question, j'espère que le lecteur voudra croire avec moi que l'hypothèse ne soit pas 'excessivement forte'.

5.3. Les techniques blanches et les techniques noires

Avant de présenter le théorème sur l'unicité des techniques de coût minimal, j'ai besoin

d'une distinction supplémentaire. Celle-ci a trait à l'évolution du salaire en fonction du taux de profit. Pour un taux de profit donné, j'appellerai une technique soit *blanche*, soit *noire*. Prenons une technique quelconque Y . Lorsque le taux de profit est nul, je considère la technique comme 'blanche'. Augmentons maintenant le taux de profit. Aussi longtemps que le salaire $w(Y,r)$ ne change pas de signe *en passant par 0*, la technique reste 'blanche'. En d'autres termes, le salaire $w(Y,r)$ peut changer de signe sans que la technique ne devienne 'noire', à condition que le salaire $w(Y,r)$ change de signe en passant par l'infini. A partir du moment où le salaire change de signe en passant par 0, la technique devient 'noire'. Elle peut cependant redevenir 'blanche' si le salaire change à nouveau de signe *en passant par 0*. Lorsque le taux de profit augmente, la technique peut donc changer plusieurs fois 'de couleur'.

Mathématiquement, les valeurs du taux de profit pour lesquelles la technique Y change de couleur correspondent aux racines de l'équation suivante :

$$\det [E^Y(r) \quad -\hat{T}^Y] = 0 \quad (18)$$

c'est-à-dire aux valeurs du taux de profit pour lesquelles le déterminant de la matrice composée des lignes de la matrice d'offres nettes $E(r)$ et de la matrice des terres \hat{T} qui correspondent aux méthodes appartenant à la technique Y est nul. Ceci est clair si l'on écrit le système de prix associé à la technique Y de la manière suivante :

$$[E^Y(r) \quad -\hat{T}^Y] \begin{bmatrix} p_1(Y,r) \\ z(Y,r) \end{bmatrix} = f^Y(r)w(Y,r) \quad (19)$$

Le salaire $w(Y,r)$ n'est nul que si la matrice $[E^Y(r) \quad -\hat{T}^Y]$ est singulière, ce qui signifie

que son déterminant est nul.

En termes formels et sans doute peu élégants, je propose alors la définition suivante d'une technique 'blanche'.

DEFINITION 12.1. Technique blanche

La technique Y est dite *blanche* pour le taux de profit r si l'une des conditions suivantes est remplie ⁷ :

- (1) le déterminant de la matrice $[E^Y(r) \quad -\hat{T}^Y]$ et le déterminant de la matrice $[E^Y \quad -\hat{T}^Y]$ ont le même signe;
- (2) le déterminant de la matrice $[E^Y(r) \quad -\hat{T}^Y]$ est nul et pour n'importe quel nombre suffisamment petit ϵ le rapport entre le déterminant de la matrice $[E^Y(r+\epsilon) \quad -\hat{T}^Y]$ et le déterminant de la matrice $[E^Y \quad -\hat{T}^Y]$ est du même signe que $w(Y, r+\epsilon)$.

La condition (1) exprime que la technique ne change pas de couleur aussi longtemps que le salaire ne change pas de signe en passant par 0. La condition (2) sert uniquement à déterminer la couleur de la technique lorsqu'elle se trouve à un point de transition.

L'ensemble des techniques qui sont blanches pour le taux de profit r , sera désigné par $B(r)$:

$$B(r) = \{ Y \in T \mid Y \text{ est blanche pour le taux de profit } r \} \quad (20)$$

Evidemment, pour $r = 0$, l'ensemble des techniques blanches comprend toutes les techniques : $B(0) \equiv T$.

⁷ Je rappelle que $E \equiv E(0)$.

5.4. Le théorème d'unicité des techniques de coût minimal

Nous sommes enfin en mesure de présenter le théorème fondamental sur l'unicité des techniques de coût minimal. Une fois les techniques blanches distinguées des techniques noires, ce théorème s'avère d'une simplicité surprenante.

THEOREME 12.7. Unicité des techniques de coût minimal

Sous les hypothèses H.1-H.7, il y a normalement ⁸ unicité des techniques de coût minimal si et seulement si toutes les techniques de coût minimal sont blanches.

Le théorème est puissant car il fournit une condition nécessaire *et* suffisante, à savoir $C(r) \subseteq B(r)$, pour qu'il y ait unicité des techniques de coût minimal. Il permet ainsi d'affirmer que si au moins une des techniques de coût minimal est noire, il y a multiplicité de techniques de coût minimal pour certaines régions du domaine de production agrégé de l'ensemble des techniques de coût minimal. En d'autres termes : pour une partie du domaine de production agrégé de l'ensemble des techniques de coût minimal, il existe au moins deux techniques de coût minimal concurrentielles.

Un corollaire intéressant de ce théorème concerne l'unicité des techniques de coût minimal lorsque le taux de profit est nul ⁹ :

⁸ Le sens du mot 'normalement' est expliqué au début de la démonstration en annexe.

⁹ Ce résultat découle aussi du théorème de Bidard signalé dans le paragraphe 4.3 du chapitre 9. D'Agata (1983, p. 157) a par ailleurs montré que ce résultat est valide pour le régime de rente intensive pure.

COROLLAIRE 12.7.1. Unicité des techniques de coût minimal pour $r = 0$

Lorsque le taux de profit est nul, l'unicité des techniques de coût minimal est toujours garantie.

La démonstration de ce corollaire est immédiate : puisque d'une part toutes les techniques sont blanches lorsque le taux de profit est nul [$B(0) = T$], et que de l'autre toutes les techniques de coût minimal sont des techniques [$C(0) \subseteq T$], toutes les techniques de coût minimal sont blanches lorsque le taux de profit est nul [$C(0) \subseteq B(0)$]. L'unicité des techniques de coût minimal n'est donc mise en danger que si le taux de profit est positif.

5.5. Les techniques harmonieuses

Selon le théorème 12.7, la cause de la non unicité des techniques de coût minimal est l'apparition de techniques de coût minimal noires. Il est alors intéressant de savoir quelles techniques sont susceptibles d'être à la fois de coût minimal et noires, ou, alternativement, quelles techniques sont toujours blanches lorsqu'elles sont de coût minimal. Je vais à présent identifier une catégorie de techniques de la deuxième espèce, c'est-à-dire une catégorie de techniques qui ne peuvent être de coût minimal sans être blanches.

Prenons une quelconque technique Y . Plus haut, j'ai observé qu'il est (parfois) possible de partitionner l'ensemble des méthodes actives Y en deux groupes : un groupe de méthodes actives *variables* et un groupe de méthodes actives *constantes* (cf. le paragraphe 3.2 du chapitre 10). Je rappelle qu'un groupe de f méthodes actives est considéré comme un groupe de méthodes actives constantes si ces f méthodes sont les seules méthodes actives à utiliser un groupe de f terres. Les rentes de ces f terres ne

peuvent par conséquent être déterminées par les $a+m-f$ méthodes actives variables. En d'autres termes, elles sont déterminées par les f méthodes actives constantes une fois que les prix des a marchandises agricoles, les rentes des $m-f$ terres restantes et le salaire sont déterminés par les $a+m-f$ méthodes actives variables.

A l'intérieur de l'ensemble des méthodes actives variables, nous pouvons ensuite distinguer les méthodes de repos des méthodes de production. Si la méthode de repos i_0 est une méthode active variable, c'est-à-dire si une partie de la terre de qualité i reste en jachère, la rente de la terre i sera nulle. Dans l'hypothèse où il existe ν méthodes de repos actives variables, il reste par conséquent $m-f-\nu$ rentes non nulles à déterminer. Les $a+m-f-\nu$ méthodes de production actives variables doivent donc déterminer les prix des a marchandises agricoles, les rentes de ces $m-f-\nu$ terres et le salaire.

Deux possibilités peuvent maintenant se produire : ou bien $m = f-\nu$, ou bien $m > f-\nu$. Dans le premier cas, aucune rente ne doit être déterminée par les méthodes de production actives variables. Cela implique que les équations de prix des méthodes de production actives variables constituent un système de prix 'carré', c'est-à-dire un système composé d'autant d'équations que de prix à déterminer. En effet, soit Y^* l'ensemble des méthodes de production actives variables. Si $m = f-\nu$, le système de prix constitué par les méthodes de production actives variables peut être écrit de la façon suivante :

$$E^{Y^*}(r)p_1(Y,r) - f^{Y^*}(r)w(Y,r) = 0 \quad (21)$$

où la matrice $[axa] E^{Y^*}(r)$ regroupe les a lignes de la matrice $E(r)$ correspondant aux a méthodes de production actives variables, et le vecteur $[ax1] f^{Y^*}(r)$ les a éléments du vecteur $f(r)$ correspondant aux a méthodes de production actives variables.

Supposons maintenant que pour chaque marchandise agricole exactement une méthode de production est active et variable. Le système de prix (21) est alors comparable au système de prix d'un système de production simple. Dans ces conditions, la relation entre le salaire et le taux de profit est décroissante. Cela implique que s'il existe un intervalle de valeurs du taux de profit pour lesquelles la technique Y paie un salaire non négatif, cet intervalle sera identique à l'intervalle des valeurs du taux de profit pour lesquelles la technique Y est blanche. En d'autres termes, la technique Y ne pourra être de coût minimal sans qu'elle ne soit blanche.

Je propose d'appeler les techniques caractérisées par un ensemble de a méthodes de production actives variables et dans lequel chaque marchandise agricole est représentée par exactement une méthode de production techniques *harmonieuses*. Voici la définition formelle.

DEFINITION 12.2. Technique harmonieuse

Une technique est dite *harmonieuse* si son ensemble de méthodes de production actives variables contient exactement une méthode qui produit la marchandise 1, une méthode qui produit la marchandise 2, ..., et exactement une méthode qui produit la marchandise a .

Les techniques primaires semi-productives sont harmonieuses : ces techniques contiennent en effet exactement a méthodes de production actives, et aucune de ces méthodes ne peut être constante ¹⁰. Puisque selon le théorème 12.4 l'existence de

¹⁰ Supposons que x méthodes de production actives étaient constantes, et que ces x méthodes utilisaient ensemble y terres différentes (évidemment $x > 0$ et $y > 0$). Puisque toutes les m méthodes de repos sont par hypothèse actives, il faudrait alors que les y méthodes de repos correspondant aux y terres utilisées par les méthodes de production actives constantes fassent partie de l'ensemble des méthodes actives constantes. Cela signifierait que cet ensemble comprend $x+y$ méthodes qui utilisent

techniques de coût minimal implique qu'il existe une technique primaire semi-productive de coût minimal, l'existence de techniques de coût minimal implique qu'il se trouve toujours au moins une technique blanche parmi les techniques de coût minimal.

Il ressort de cette discussion que les techniques de coût minimal noires doivent être recherchées parmi les techniques non harmonieuses. Je souligne que ces techniques ne sont pas obligatoirement noires lorsqu'elles sont de coût minimal; il s'agit d'une possibilité, et non d'une nécessité ¹¹.

5.6. Le régime de rente extensive pure

Appliquons maintenant ces propriétés des techniques harmonieuses au régime de rente extensive pure. Je rappelle que je parle de régime de rente extensive pure lorsque les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) chaque méthode de production agricole n'utilise qu'une seule qualité de terre;
- (ii) chaque qualité de terre n'est utilisée que par deux méthodes : une méthode de repos et une seule méthode de production agricole (en combinaison avec la première condition ceci signifie que le nombre de méthodes de production agricoles est égal au nombre de terres, $g = m$);

ensemble y terres différentes. Mais alors cet ensemble ne peut être un ensemble de méthodes actives constantes, car un tel ensemble doit être composé d'autant de méthodes actives que de terres utilisées par ces méthodes.

¹¹ Se référant à un modèle où chaque méthode agricole n'utilise qu'une seule terre (un cas spécial du modèle analysé ici), D'Agata (1984, pp. 90-91) distingue deux possibilités :

- (1) sur chaque terre rare une seule marchandise est produite;
- (2) sur au moins une terre rare plusieurs marchandises sont produites.

Il semble identifier la cause des problèmes (dont la non unicité des techniques de coût minimal) à l'existence de techniques de coût minimal du type (2). L'exemple numérique du paragraphe 5.7 montrera cependant que même si toutes les techniques de coût minimal sont du type (1), l'unicité n'est pas garantie. C'est donc la distinction entre techniques harmonieuses et non harmonieuses qui est pertinente, et non celle de D'Agata.

(iii) il n'existe qu'une seule marchandise agricole ($a = 1$).

En régime de rente extensive pure, une technique comprend donc toujours $1+m$ méthodes actives. Pour qu'un ensemble de $1+m$ méthodes actives Y puisse être considérée comme une technique, il faut qu'elle contienne, pour chaque qualité de terre, au moins une méthode qui utilise cette terre. Pour une qualité de terre i quelconque, il y a par conséquent trois possibilités :

- (1) la méthode de production i_p et celle de repos i_0 sont actives;
- (2) seule la méthode de production i_p est active;
- (3) seule la méthode de repos i_0 est active.

Comme une technique est composée de $1+m$ méthodes, et que pour chacune des m terres une de ces trois possibilités se réalise, il s'en suit que pour exactement une terre tant la méthode de production que la méthode de repos seront actives. Observons maintenant que dans le cas où seule la méthode de production i_p , mais non celle de repos i_0 , est active, la méthode i_p appartient aux méthodes actives constantes. L'ensemble de ces méthodes constitue en effet un groupe de méthodes actives qui sont les seules méthodes actives à utiliser un même nombre de terres. Par analogie, on déduit que dans le cas où seule la méthode de repos i_0 , et non la méthode de production i_p , est active, la méthode i_0 appartient aux méthodes actives constantes. Cela signifie qu'il existe au total $m-1$ méthodes actives constantes. Autrement dit, il n'existe que deux méthodes actives variables, à savoir une méthode de production et une méthode de repos, qui utilisent toutes les deux la même qualité de terre. (La méthode de production en question est celle que l'on qualifie habituellement la méthode *marginale*.)

Puisque chaque technique ne contient qu'une seule méthode de production active variable, et que toutes les méthodes de production agricoles produisent l'unique marchandise agricole existante, en régime de rente extensive pure chaque technique est

automatiquement harmonieuse. Une technique de coût minimal est donc toujours blanche, ce qui signifie qu'en régime de rente extensive pure l'unicité des techniques de coût minimal est garantie, quel que soit le taux de profit (cf. le paragraphe 3.2 du chapitre 9) ¹².

Je signale aussi brièvement pourquoi l'unicité des techniques de coût minimal n'est pas garantie en régime de rente intensive pure (cf. le paragraphe 3.3 du chapitre 9). En régime de rente intensive, il n'existe qu'une seule qualité de terre. En régime de rente intensive pure, une technique doit donc être composée de deux méthodes actives. Puisque toutes les méthodes agricoles disponibles utilisent la même qualité de terre, il est impossible qu'il existe des méthodes actives constantes. Il n'existe par conséquent qu'un nombre restreint de techniques harmonieuses, à savoir les techniques composées d'une méthode de production agricole et de la seule méthode de repos disponible. Les autres techniques, composées de deux méthodes de production actives, ne sont pas harmonieuses, et il ne peut être exclu qu'il se trouve parmi elles une technique noire de coût minimal.

5.7. Un exemple numérique

Retournons une dernière fois à l'exemple numérique du chapitre 9, et supposons que le taux de profit est égal à 30%. Plus haut nous avons déjà déterminé que l'ensemble des techniques de coût minimal comprend dans ce cas cinq techniques, c'est-à-dire : $C(0.3) = \{ E, I, M, O, U \}$. Vérifions maintenant s'il y a unicité des techniques de coût minimal.

Selon le théorème 12.7, l'unicité est garantie si et seulement si toutes les

¹² L'unicité n'est toutefois plus garantie à partir du moment où il existe plusieurs marchandises agricoles. Je le montrerai à l'aide de l'exemple numérique du paragraphe suivant.

techniques de coût minimal sont blanches. Observons d'abord que des cinq techniques de coût minimal, il y en a quatre qui sont harmonieuses. En effet, les ensembles des méthodes de production actives variables sont respectivement :

pour la technique E : $\{ 2_P, 4_P \}$,

pour la technique I : $\{ 2_P, 3_P \}$,

pour la technique M : $\{ 1_P, 3_P \}$,

pour la technique O : $\{ 3_P, 4_P \}$,

pour la technique U : $\{ 1_P, 4_P \}$.

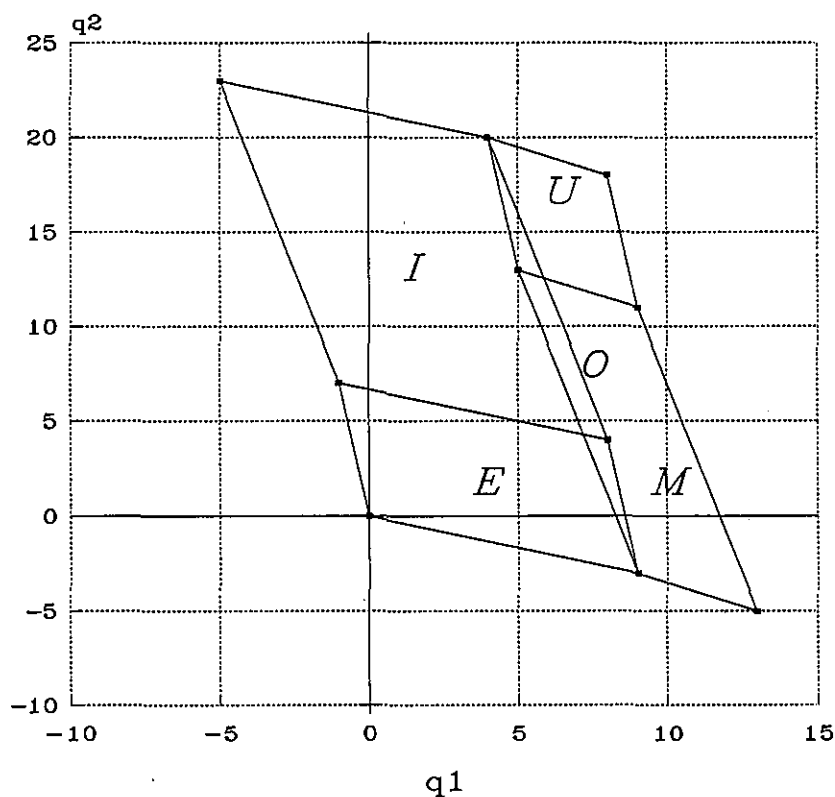
Seule la technique O s'avère non harmonieuse, car c'est la seule dont l'ensemble des méthodes actives variables est composé de deux méthodes produisant la même marchandise (en l'occurrence, l'avoine). La technique O est donc la seule des cinq qui pourrait être noire. Examinons alors le comportement de la relation entre le salaire et le taux de profit déterminée par la technique O . Il est possible de calculer que cette relation est décrite par la fonction suivante :

$$w(O,r) = \frac{(1 + r)(6 - 23r + r^2)}{3(-18 + 53r - r^2)} \quad (22)$$

Pour $r = 0$, le salaire est négatif ($-1/9$). Lorsque le taux de profit augmente, le salaire ne change qu'une seule fois de signe en passant par 0, car le numérateur de (22) ne possède qu'une seule racine positive. Cette racine est égale à $r = 26.39\%$ (chiffre arrondi). Cela implique que la technique O est *blanche* lorsque le taux de profit se trouve entre 0 et 26.39%, et *noire* lorsque le taux de profit excède 26.39%. Pour $r = 30\%$, la technique O est donc noire, ce qui signifie qu'il existe une région du

domaine de production agrégé de l'ensemble des techniques de coût minimal pour laquelle plusieurs techniques de coût minimal sont en compétition ¹³.

FIGURE 12.1



¹³ J'observe toutefois que la technique *O* n'est de coût minimal que pour les valeurs du taux de profit situées entre 26.39% et 30.89%. Un autre intervalle de valeurs du taux de profit pour lequel il y a non unicité des techniques de coût minimal est l'intervalle entre 50% et 56.37%. Pour cet intervalle c'est la technique *S* qui est simultanément de coût minimal et noire.

La représentation graphique du domaine de production agrégé confirme cette conclusion (cf. la figure 12.1)¹⁴. Pour les demandes situées dans le triangle défini par les points (5, 13), (4, 20) et (41/7, 88/7), les techniques *I*, *O* et *U* sont en compétition; pour les demandes situées dans le quadrilatère défini par les points (5, 13), (41/7, 88/7), (8, 4) et (79/11, 47/11), les techniques *I*, *M* et *O* sont en compétition; et pour les demandes situées dans le triangle défini par les points (79/11, 47/11), (8, 4) et (9, -3), les techniques *E*, *M* et *O* sont en compétition.

Supposons, par exemple, que la demande équivalente est égale à sept unités de blé (la marchandise 1) et à sept unités d'avoine (la marchandise 2), c'est-à-dire : $q' = [7 \ 7]$. Il existe alors trois systèmes de production de coût minimal, associés respectivement aux techniques *I*, *M* et *O*. Les vecteurs d'activités seraient les suivants :

technique *I* :

$$x_0' = (1/33) [\ 33 \quad 1 \quad 27 \quad 0 \]$$

$$x_1' = (1/33) [\ 0 \quad 32 \quad 6 \quad 33 \]$$

$$x_5 = 65/33$$

technique *M* :

$$x_0' = (1/14) [\ 12 \quad 0 \quad 5 \quad 14 \]$$

$$x_1' = (1/14) [\ 2 \quad 14 \quad 9 \quad 0 \]$$

$$x_5 = 1$$

¹⁴ Cette figure montre par ailleurs que le domaine de production agrégé de l'ensemble des techniques de coût minimal est enchaîné et bien ordonné, ce qui est nécessaire pour pouvoir appliquer le théorème sur l'unicité.

technique O :

$$x_0' = (1/3) [3 \quad 0 \quad 2 \quad 1]$$

$$x_1' = (1/3) [0 \quad 3 \quad 1 \quad 2]$$

$$x_5 = 5/3$$

Les prix, les rentes et le salaire associés aux cinq techniques de coût minimal sont donnés par le tableau 12.3.

TABLEAU 12.3 : Les Prix, les Rentes et le Salaire ($r = 30\%$)

Variable →	P ₁	P ₂	P ₃	z ₁	z ₂	z ₃	z ₄	w
Technique E :	1	0.94	2.266	0	0	0	0	0.266
Technique I :	1	0.950	2.262	0	0	0	0.102	0.262
Technique M :	1	0.704	1.765	0	2.353	0	0	0.157
Technique O :	1	0.712	1.781	0	2.277	0	0	0.160
Technique U :	1	0.705	1.765	0	2.352	0.010	0	0.157

L'exemple numérique sert également à illustrer les conséquences non négligeables de la non unicité des techniques de coût minimal sur la répartition du revenu. Pour chacun des trois systèmes de production de coût minimal de l'exemple, j'ai calculé les valeurs du produit net, des profits, des rentes et des salaires (cf. le tableau 12.4).

TABLEAU 12.4 : La Répartition du Produit net ($q' = [7, 7]$, $r = 30\%$)

Grandeur →	Produit net	Profits	Rentes	Salaires
Techn. <i>I</i> :	13.65 (100%)	7.19 (52.7%)	0.10 (0.7%)	6.36 (46.6%)
Techn. <i>M</i> :	11.93 (100%)	4.31 (36.1%)	2.35 (19.7%)	5.27 (44.2%)
Techn. <i>O</i> :	11.98 (100%)	5.38 (44.9%)	2.28 (19.0%)	4.32 (36.1%)

Les différences entre les trois systèmes s'avèrent considérables. La part des profits varie entre 36.1% et 52.7%, la part des rentes entre 0.7% et 19.7%, et la part des salaires entre 36.1% et 46.6%. Ceci met en lumière que l'étude de l'unicité des systèmes de production de coût minimal n'est pas dépourvue d'intérêt.

6. CONCLUSION

Etant donnés le taux de profit et le numéraire, une technique de coût minimal a été définie comme remplissant les conditions suivantes : elle détermine un vecteur de prix semi-positif, un vecteur de rentes non négatif, et un salaire non négatif, elle est stable, et elle est productive. J'ai démontré qu'une technique qui paie un salaire non négatif, qui est stable, et qui est productive, est toujours une technique de coût minimal.

Sur la base du théorème de non-substitution, j'ai ensuite montré qu'il n'existe normalement qu'une seule technique primaire semi-productive qui est stable. Ce résultat est important en vue de l'existence de techniques de coût minimal. J'ai en effet démontré que s'il existe au moins une technique de coût minimal, il se trouve toujours une technique primaire semi-productive parmi les techniques de coût minimal. Le théorème principal concernant l'existence de techniques de coût minimal dit alors ceci : il existe au moins une technique de coût minimal si et seulement s'il existe une technique primaire semi-productive de coût minimal. Ce théorème permet de déterminer avec précision pour quels taux de profit l'ensemble des techniques de coût minimal n'est pas vide.

Ensuite j'ai adopté l'hypothèse que l'ensemble des techniques de coût minimal est complet. Il est alors possible de démontrer que la condition de l'unicité des techniques de coût minimal est équivalente à l'absence de rivalité parmi les techniques de coût minimal. Ce résultat m'a permis d'énoncer le théorème fondamental sur l'unicité des techniques de coût minimal : normalement, il y a unicité des techniques de coût minimal si et seulement si toutes les techniques de coût minimal sont blanches. Une technique est dite 'blanche' pour le taux de profit r^* si le nombre de fois que sa courbe salaire/taux de profit change de signe entre $r = 0$ et $r = r^*$ en passant par 0, est nul ou

pair. Il suit de ce théorème que l'unicité des techniques de coût minimal est garantie pour $r = 0$.

J'ai défini une technique comme 'harmonieuse' lorsque chaque marchandise agricole est représentée par exactement une méthode de production dans l'ensemble des méthodes de production actives variables. Les techniques harmonieuses sont toujours blanches lorsqu'elles sont de coût minimal. Il est alors possible de démontrer qu'en régime de rente extensive pure l'unicité est toujours garantie. Mais sitôt qu'il existe plusieurs marchandises agricoles, l'unicité n'est plus assurée.

ANNEXE

=====

THEOREME 12.1. Redondance de l'ensemble $Z(r)$

Si $Y \in S(r)$, alors $Y \in Z(r)$.

Démonstration

Quelle que soit la technique Y , nous avons par définition : $s(Y,r) \equiv -z(Y,r)$. Pour une technique Y qui est stable [$Y \in S(r)$], nous avons par définition : $s(Y,r) \leq 0$. Si la technique Y est stable, il s'en suit par conséquent que $-z(Y,r) \leq 0$. En d'autres termes, $z(Y,r) \geq 0$, c'est-à-dire $Y \in Z(r)$. ■

THEOREME 12.2. Redondance de l'ensemble $P(r)$

Si $Y \in [W(r) \cap S(r) \cap Q]$, alors $Y \in P(r)$.

Démonstration

Prenons une technique quelconque Y qui est productive [$Y \in Q$]. La technique Y contient donc certainement un sous-ensemble de a méthodes H composé d'une méthode qui produit la marchandise 1, une méthode qui produit la marchandise 2, ..., et une méthode qui produit la marchandise a . Les équations de prix des méthodes appartenant à ce sous-ensemble H sont écrites sous forme du système suivant :

$$E^H(r)p_1(Y,r) - f^H(r)w(Y,r) = \hat{T}^H z(Y,r) \quad (A1)$$

Supposons maintenant que la technique Y est stable [$Y \in S(r)$], et qu'elle paie un salaire non négatif [$Y \in W(r)$]. Il s'en suit donc que $z(Y,r) \geq 0$ (cf. le théorème 12.1), et que $w(Y,r) \geq 0$. Dans le cas où $w(Y,r)$ est positif, définissons un vecteur $f^{H(r)\#}$ comme suit :

$$f^{H(r)\#} \equiv f^H(r) + \hat{T}^H z(Y,r)/w(Y,r) \quad (A2)$$

Récrivons ensuite le système (A1) de la manière suivante :

$$E^{H(r)} p_1(Y,r) - f^{H(r)\#} w(Y,r) = 0 \quad (A3)$$

Ce système est comparable au système de prix d'une économie de production simple sans terres : la matrice carrée $E^{H(r)}$ est la contrepartie de la matrice $[I-(1+r)A]$, tandis que le vecteur positif $f^{H(r)\#}$ est la contrepartie du vecteur de travail l . Puisque le salaire $w(Y,r)$ est positif, le taux de profit est inférieur au taux de profit maximal de ce pseudo-système 'simple'. Cela signifie (cf. le paragraphe 3.2 du chapitre 4) que le vecteur de prix $p_1(Y,r)$ est positif. En d'autres termes, $Y \in P(r)$. Dans le cas où le salaire $w(Y,r)$ est nul, nous pouvons faire jouer un argument de continuité pour affirmer que $p_1(Y,r) \geq 0$, et donc toujours $Y \in P(r)$. ■

THEOREME 12.4. Implication de l'existence de techniques de coût minimal

S'il existe une technique $Y \in C(r)$ qui n'est pas primaire semi-productive, il existe toujours une technique primaire semi-productive $Z \in C(r)$, et qui est telle que $w(Y,r) \leq w(Z,r)$.

Démonstration

Prenons une quelconque technique Y qui n'est pas primaire semi-productive mais qui est de coût minimal [$Y \in C(r)$], et supposons qu'elle paie un salaire positif [$w(Y,r) > 0$]. Puisque Y est une technique de coût minimal, elle est certainement productive. De la démonstration du théorème 12.2 nous savons que chaque technique Y productive contient un sous-ensemble de a méthodes H composé d'une méthode qui produit la marchandise 1, une méthode qui produit la marchandise 2, ..., et une méthode qui produit la marchandise a . Que la technique Y paie un salaire positif, implique que la matrice $E^H(r)$ est inversible; sur la base des résultats établis pour les systèmes de production simple sans terres, on peut même affirmer que cette inverse est semi-positive.

Considérons maintenant la technique X , composée des a méthodes de production appartenant à H et des m méthodes de repos. Puisque toutes les méthodes de repos sont actives, les rentes sont toutes nulles. Les équations de prix des a méthodes de production appartenant à X sont écrites sous forme du système suivant :

$$E^H(r)p_1(X,r) - f^H(r)w(X,r) = 0 \quad (A4)$$

Comme $[E^H(r)]^{-1} \geq 0$, $w(X,r)$ est positif. De (A4) il vient ensuite que :

$$p_1(X,r)/w(X,r) = [E^H(r)]^{-1}f^H(r) \quad (A5)$$

En ce qui concerne la technique Y , il vient de (A3) que :

$$p_1(Y,r)/w(Y,r) = [E^H(r)]^{-1}f^H(r)^\# \quad (A6)$$

Vu que $f^H(r)^\# \geq f^H(r)$, il suit de (A5) et de (A6) que :

$$p_1(Y,r) \geq [w(Y,r)/w(X,r)]p_1(X,r) \quad (A7)$$

Puisque le numéraire est dans les deux cas le même, il faut par conséquent que :

$$w(Y,r) \leq w(X,r) \quad (A8)$$

Rien ne nous permet cependant d'affirmer que $X \in C(r)$. Il est en effet bien possible que X ne soit pas stable. Observons toutefois que X est une technique primaire semi-productive. Nous pouvons alors nous baser sur le théorème 12.3 pour affirmer qu'il existe une technique primaire semi-productive Z qui est stable et paie un salaire au moins aussi élevé que le salaire payé par la technique X . Comme $w(Y,r) > 0$ et que $w(Y,r) \leq w(X,r) \leq w(Z,r)$, la technique Z paie un salaire positif, ce qui signifie qu'elle est productive (cf. le paragraphe 3.2 du texte). La technique Z paie donc un salaire positif, est stable et est productive; la technique Z est donc de coût minimal [$Z \in C(r)$]. Comme à la fin de la démonstration du théorème 12.2, nous pouvons invoquer un argument de continuité pour affirmer que le raisonnement peut être étendu au cas où le salaire payé par la technique Y est nul. ■

THEOREME 12.7. Unicité des techniques de coût minimal

Normalement, il y a unicité des techniques de coût minimal si et seulement si $C(r) \subseteq B(r)$.

DémonstrationI) *Preliminaires*

Le mot 'normalement' signifie que je fais abstraction des situations où il y a "switching" entre techniques de coût minimal. Plus précisément, je suppose que le taux de profit est tel qu'aucun couple de techniques voisines de coût minimal Y et Z ne paie le même salaire.

Selon le théorème 12.6, il y a unicité des techniques de coût minimal si et seulement s'il y a absence de rivalité entre les techniques de coût minimal. Puisque la rivalité est une affaire entre techniques voisines, il faut se concentrer sur les relations entre celles-ci. Dans ce qui suit, je prends en considération deux techniques de coût minimal voisines Y et Z . Je suppose que ce sont les méthodes i et j qui distinguent les deux techniques; plus précisément, je suppose que $Y = \{i\} \cup [Y \cap Z]$ et que $Z = \{j\} \cup [Y \cap Z]$. Puisque par hypothèse $w(Y,r) \neq w(Z,r)$, je suppose que $w(Y,r) < w(Z,r)$. Que les salaires payés par les deux techniques voisines ne soient pas égaux, implique que la méthode i est déficitaire selon les prix, le salaire et les rentes déterminés par la technique Z [$s_i(Z,r) < 0$], et que la méthode j est déficitaire selon les prix, le salaire et les rentes déterminés par la technique Y [$s_j(Y,r) < 0$] (cf. les équations (A33) et (A34) plus loin dans la démonstration). Définissons maintenant le nombre $X(r)$ de la manière suivante :

$$X(r) = \frac{s_i(Z,r)/w(Z,r)}{s_j(Y,r)/w(Y,r)} \quad (A9)$$

Ce que je viens de dire signifie que ce nombre est soit positif, soit nul; il est nul uniquement si $w(Y,r) = 0$.

La structure de la démonstration est maintenant comme suit. D'abord, j'établis un lien entre la rivalité et le signe de $X(0)$. Ensuite, j'en déduis le rapport entre $X(0)$ et $X(r)$. Puis j'établis un lien entre le signe du rapport $X(r)/X(0)$ et la couleur des techniques Y et Z . Je termine en généralisant le résultat obtenu à l'ensemble des techniques de coût minimal.

II) *La rivalité et le signe de $X(0)$*

Par hypothèse, les techniques Y et Z sont voisines. Dans le chapitre 11 (notamment les paragraphes 2.2 et 3.2) nous avons vu que cela implique que le côté que leurs domaines de production ont en commun fait partie d'un hyperplan décrit par l'équation suivante :

$$q'c_p(Y,Z) = u'c_0(Y,Z) \quad (\text{A10})$$

Les vecteurs $c_p(Y,Z)$ et $c_0(Y,Z)$ sont solutions des équations suivantes :

$$E^{YrZ}c_p(Y,Z) - \hat{T}^{YrZ}c_0(Y,Z) = 0 \quad (\text{A11})$$

$$I^1c_p(Y,Z) = 1 \quad (\text{A12})$$

Dans le même chapitre 11 (cf. paragraphe 3.2), nous avons vu qu'il y a rivalité entre Y et Z si et seulement si :

$$\frac{E^i c_p(Y,Z) - \hat{T}^i c_0(Y,Z)}{E^j c_p(Y,Z) - \hat{T}^j c_0(Y,Z)} > 0 \quad (A13)$$

Considérons maintenant les équations de prix pour $r = 0$. Les prix, les rentes et le salaire correspondant respectivement à Y et à Z sont tels que :

$$E^Y p_1(Y,0) - \hat{T}^Y z(Y,0) = f^Y w(Y,0) \quad (A14)$$

$$E^Z p_1(Z,0) - \hat{T}^Z z(Z,0) = f^Z w(Z,0) \quad (A15)$$

En nous concentrant sur les $a+m-1$ méthodes en commun entre Y et Z , nous déduisons après quelques manipulations que :

$$[E^{Y \cap Z} \quad -\hat{T}^{Y \cap Z}] \left[\begin{array}{c} w(Z,0)p_1(Y,0) \\ w(Z,0)z(Y,0) \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} w(Y,0)p_1(Z,0) \\ w(Y,0)z(Z,0) \end{array} \right] = 0 \quad (A16)$$

Le vecteur à la droite de la matrice $[E^{Y \cap Z} \quad -\hat{T}^{Y \cap Z}]$ est par conséquent proportionnel au vecteur $c(Y,Z)$, qui sert à décrire l'hyperplan commun aux deux techniques.

De (A14) et de la définition de $s_i(Z,0)$, il vient ensuite que :

$$[E^i \quad -\hat{T}^i] \left[\begin{array}{c} w(Z,0)p_1(Y,0) \\ w(Z,0)z(Y,0) \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} w(Y,0)p_1(Z,0) \\ w(Y,0)z(Z,0) \end{array} \right] = -w(Y,0)s_i(Z,0) \quad (A17)$$

De façon analogue, il vient de (A15) et de la définition de $s_j(Y,0)$ que :

$$[E^j - \hat{T}^j] \left[\begin{array}{c} w(Z,0)p_1(Y,0) \\ w(Z,0)z(Y,0) \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} w(Y,0)p_1(Z,0) \\ w(Y,0)z(Z,0) \end{array} \right] = w(Z,0)s_j(Y,0) \quad (A18)$$

Puisque le vecteur entre parenthèses est proportionnel au vecteur $c(Y,Z)$, nous pouvons combiner (A13), (A17) et (A18) pour conclure qu'il y a rivalité entre Y et Z si et seulement si :

$$\frac{s_i(Z,0)/w(Z,0)}{s_j(Y,0)/w(Y,0)} < 0 \quad (A19)$$

III) *Le rapport entre $X(0)$ et $X(r)$*

Pour le taux de profit r , les prix, les rentes et le salaire associés à la technique Y sont définis par les $a+m$ équations du système suivant :

$$E^Y(r)p_1(Y,r) - f^Y(r)w(Y,r) = \hat{T}^Y z(Y,r) \quad (A20)$$

conjointement avec l'équation du numéraire :

$$I^1 p_1(Y,r) = 1 \quad (A21)$$

Comme $Y = \{i\} \cup [Y \cap Z]$, réécrivons les équations du système (A20) comme suit :

$$E^i(r)p_1(Y,r) - f_i(r)w(Y,r) = \hat{T}^i z(Y,r) \quad (A22a)$$

$$E^{YrZ}(r)p_1(Y,r) - f^{YrZ}(r)w(Y,r) = \hat{T}^{YrZ}z(Y,r) \quad (A22b)$$

Considérons maintenant l'équation du numéraire (A21) conjointement aux équations (A22b). Définissons une matrice $F(r)$ et un vecteur $g(r)$ comme suit :

$$F(r) = \begin{bmatrix} I^1 & 0' \\ E^{YrZ}(r) & -\hat{T}^{YrZ} \end{bmatrix} \quad g(r) = \begin{bmatrix} 0 \\ f^{YrZ}(r) \end{bmatrix} \quad (A23)$$

La réunion des équations (A21) et (A22b) nous donne :

$$F(r) \begin{bmatrix} p_1(Y,r) \\ z(Y,r) \end{bmatrix} = I_1 + g(r)w(Y,r) \quad (A24)$$

Puisque $F(r)$ est une matrice carrée, il s'en suit que :

$$\begin{bmatrix} p_1(Y,r) \\ z(Y,r) \end{bmatrix} = [F(r)]^{-1}I_1 + [F(r)]^{-1}g(r)w(Y,r) \quad (A25)$$

Après substitution de (A25) en (A22a), il vient que :

$$w(Y,r) = \frac{[E^i(r) \ -\hat{T}^i] [F(r)]^{-1}I_1}{f_i(r) - [E^i(r) \ -\hat{T}^i] [F(r)]^{-1}g(r)} \quad (A26)$$

Il résulte donc que :

$$w(Y,r) = 0 \Leftrightarrow [E^i(r) \ -\hat{T}^i] [F(r)]^{-1}I_1 = 0 \Leftrightarrow \det [E^Y(r) \ -\hat{T}^Y] = 0 \quad (A27)$$

$$w(Y,r) \rightarrow \infty \Leftrightarrow f_i(r) - [E^i(r) - \hat{T}^i] [F(r)]^{-1} g(r) = 0 \quad (A28)$$

Par un raisonnement analogue, on trouve que :

$$\begin{bmatrix} p_1(Z,r) \\ z(Z,r) \end{bmatrix} = [F(r)]^{-1} I_1 + [F(r)]^{-1} g(r) w(Z,r) \quad (A29)$$

$$w(Z,r) = \frac{[E^j(r) - \hat{T}^j] [F(r)]^{-1} I_1}{f_j(r) - [E^j(r) - \hat{T}^j] [F(r)]^{-1} g(r)} \quad (A30)$$

Par définition, nous avons :

$$s_i(Z,r) \equiv E^i(r) p_1(Z,r) - \hat{T}^i z(Z,r) - f_i(r) w(Z,r) \quad (A31)$$

$$s_j(Y,r) \equiv E^j(r) p_1(Y,r) - \hat{T}^j z(Y,r) - f_j(r) w(Y,r) \quad (A32)$$

A l'aide de (A25), (A26), (A29) et (A30) nous déduisons que :

$$s_i(Z,r) = \{ f_i(r) - [E^i(r) - \hat{T}^i] [F(r)]^{-1} g(r) \} [w(Y,r) - w(Z,r)] \quad (A33)$$

$$s_j(Y,r) = - \{ f_j(r) - [E^j(r) - \hat{T}^j] [F(r)]^{-1} g(r) \} [w(Y,r) - w(Z,r)] \quad (A34)$$

Puisque $w(Y,r) \neq w(Z,r)$, nous arrivons à la conclusion que :

$$\frac{s_i(Z,r)}{s_j(Y,r)} = - \frac{f_i(r) - [E^i(r) \hat{T}^i] [F(r)]^{-1} g(r)}{f_j(r) - [E^j(r) \hat{T}^j] [F(r)]^{-1} g(r)} \quad (\text{A35})$$

En vue de la définition de $X(r)$, de (A26), et de (A30), il vient alors que :

$$X(r) = - \frac{[E^i(r) \hat{T}^i] [F(r)]^{-1} I_1}{[E^j(r) \hat{T}^j] [F(r)]^{-1} I_1} \quad (\text{A36})$$

Pour $r = 0$, on arrive par conséquent au résultat suivant :

$$X(0) = - \frac{[E^i \hat{T}^i] [F(0)]^{-1} I_1}{[E^j \hat{T}^j] [F(0)]^{-1} I_1} \quad (\text{A37})$$

Tout cela nous donne :

$$\frac{X(r)}{X(0)} = \frac{[E^i(r) \hat{T}^i] [F(r)]^{-1} I_1 / [E^i \hat{T}^i] [F(0)]^{-1} I_1}{[E^j(r) \hat{T}^j] [F(r)]^{-1} I_1 / [E^j \hat{T}^j] [F(0)]^{-1} I_1} \quad (\text{A38})$$

IV) *Le rapport $X(r)/X(0)$ et la couleur des techniques*

Je vais maintenant établir une relation entre le signe de $X(r)$, le signe de $X(0)$, et la couleur des techniques Y et Z . J'ai déjà signalé que le nombre $X(r)$ peut être positif [si $w(Y,r) > 0$] ou nul [si $w(Y,r) = 0$]. Le nombre $X(0)$ peut être positif ou négatif; puisque nous avons exclu les techniques dégénérées, le nombre $X(0)$ ne peut être nul.

Considérons d'abord la situation où $X(r) > 0$. Le signe du nombre $X(0)$ est alors égal au signe du côté droit de (A38). Le signe du numérateur de ce côté droit est égal au signe de $\{ \det [E^Y(r) \hat{T}^Y] / \det [E^Y \hat{T}^Y] \}$. En effet, selon (A27) le polynôme $[E^i(r) \hat{T}^i] [F(r)]^{-1} I_1$ ne change de signe que si le polynôme $\det [E^Y(r) \hat{T}^Y]$ change

également de signe. De la même façon, le signe du dénominateur du côté droit de (A38) est égal au signe de $\{ \det [E^Z(r) \quad -\hat{T}^Z] / \det [E^Z \quad -\hat{T}^Z] \}$. Etant donnée la définition de techniques blanches et noires, nous concluons que le signe de $X(0)$ est *positif* si et seulement si, pour le taux de profit r , ou bien Y et Z sont toutes les deux blanches, ou bien Y et Z sont toutes les deux noires. Le signe de $X(0)$ est en revanche *négatif* si et seulement si, pour le taux de profit r , l'une des techniques Y et Z est blanche et l'autre noire. En d'autres termes, il y a rivalité entre les techniques Y et Z si et seulement si, pour le taux de profit r , l'une des techniques est blanche et l'autre noire.

Considérons à présent la deuxième possibilité : $X(r) = 0$, c'est-à-dire $w(Y,r) = 0$. Pour déterminer dans ces conditions le signe de $X(0)$, il faut observer l'état du système dans un voisinage de r . Choisissons un taux de profit $(r+\epsilon)$ proche de r , avec ϵ suffisamment petit pour que $w(Y,r+\epsilon)$ soit encore plus petit que $w(Z,r+\epsilon)$, que le signe de $w(Z,r+\epsilon)$ soit toujours positif, et que le signe de $\det [E^Z(r+\epsilon) \quad -\hat{T}^Z]$ reste celui de $\det [E^Z(r) \quad -\hat{T}^Z]$. Tout cela implique que le signe de $X(r+\epsilon)$ est égal au signe de $w(Y,r+\epsilon)$. Le signe de $\det [E^Y(r+\epsilon) \quad -\hat{T}^Y]$ sera soit positif, soit négatif, et par conséquent $\{ \det [E^Y(r+\epsilon) \quad -\hat{T}^Y] / \det [E^Y \quad -\hat{T}^Y] \}$ sera non nul. Deux cas doivent maintenant être distingués : pour le taux de profit r , la technique Y est soit blanche [$Y \in B(r)$], soit noire [$Y \notin B(r)$]. Si $Y \in B(r)$, il résulte de la définition de technique blanche que pour ϵ suffisamment petit, $\{ \det [E^Y(r+\epsilon) \quad -\hat{T}^Y] / \det [E^Y \quad -\hat{T}^Y] \}$ et $w(Y,r+\epsilon)$ ont le même signe. En revanche, si $Y \notin B(r)$, il résulte que pour ϵ suffisamment petit, $\{ \det [E^Y(r+\epsilon) \quad -\hat{T}^Y] / \det [E^Y \quad -\hat{T}^Y] \}$ et $w(Y,r+\epsilon)$ sont de signe contraire.

Pour le taux de profit $(r+\epsilon)$, l'équivalent de (A38) est :

$$\frac{X(r+\epsilon)}{X(0)} = \frac{[E^i(r+\epsilon) \ -\hat{T}^i] [F(r+\epsilon)]^{-1} I_1 / [E^i \ -\hat{T}^i] [F(0)]^{-1} I_1}{[E^j(r+\epsilon) \ -\hat{T}^j] [F(r+\epsilon)]^{-1} I_1 / [E^j \ -\hat{T}^j] [F(0)]^{-1} I_1} \quad (A39)$$

Dans le cas où $Y \in B(r)$, $X(r+\epsilon)$ et le numérateur du côté droit de (A39) sont tous les deux positifs. Le signe de $X(0)$ est par conséquent égal au signe du dénominateur du côté droit de (A39). Il ressort alors que le signe de $X(0)$ est *positif* si $Z \in B(r)$, et *négatif* si $Z \notin B(r)$. Dans le cas où $Y \notin B(r)$, en revanche, $X(r+\epsilon)$ et le numérateur du côté droit de (A39) sont de signe contraire. Le signe de $X(0)$ est par conséquent opposé au signe du dénominateur du côté droit de (A39). Il en résulte que le signe de $X(0)$ est *positif* si $Z \notin B(r)$, et *négatif* si $Z \in B(r)$. En d'autres termes, même si le salaire payé par la technique Y est nul, il y a rivalité entre les techniques Y et Z si et seulement si, pour le taux de profit r , l'une des techniques est blanche et l'autre noire.

V) Conclusion pour l'ensemble des techniques de coût minimal

Je récapitule. Que $w(Y,r)$ soit positif ou nul, les techniques de coût minimal voisines Y et Z sont rivales si et seulement si, pour le taux de profit r , l'une des deux est blanche et l'autre noire. Par hypothèse, l'ensemble des techniques de coût minimal $C(r)$ est complet. Cela implique que $C(r)$ est enchaîné, c'est-à-dire que les techniques de coût minimal forment un enchaînement de techniques voisines. Il y a donc absence de rivalité entre les techniques de coût minimal si et seulement si les techniques de coût minimal sont ou bien *toutes* blanches, ou bien *toutes* noires.

Selon le théorème 12.4, si $C(r)$ n'est pas vide, il existe toujours une technique primaire semi-productive de coût minimal. Comme je signale dans le texte (cf. le paragraphe 5.5), une telle technique est nécessairement blanche lorsqu'elle est de coût minimal. Il se trouve donc toujours au moins une technique blanche parmi les

techniques de coût minimal. Cela signifie qu'il y a absence de rivalité entre les techniques de coût minimal si et seulement si les techniques de coût minimal sont *toutes* blanches. Sur la base du théorème 12.6, nous pouvons alors conclure qu'il y a unicité des techniques de coût minimal si et seulement si les techniques de coût minimal sont *toutes* blanches.■

CONCLUSION DE LA PARTIE III

=====

La question de l'existence et de l'unicité des techniques de coût minimal a été examinée en partant d'hypothèses simplificatrices, dont les plus importantes sont l'existence de rendements constants, l'absence de production jointe, et l'égalité du nombre de marchandises et de méthodes industrielles. Je viens de démontrer deux théorèmes concernant l'existence et l'unicité des techniques de coût minimal. Le théorème relatif à l'existence affirme qu'il existe au moins une technique de coût minimal si et seulement s'il existe une technique primaire semi-productive qui paie un salaire non négatif. Le théorème relatif à l'unicité affirme qu'il y a unicité des techniques de coût minimal si et seulement si toutes les techniques de coût minimal sont blanches. (Ce théorème suppose que l'ensemble des techniques de coût minimal est complet.)

Le fait que ces théorèmes n'ont été démontrés que sous des conditions restrictives (cf. les hypothèses simplificatrices) signifie que leur importance ne devrait être exagérée. Au moins deux choses restent à faire. D'une part, la généralité ou non de l'hypothèse que l'ensemble des techniques de coût minimal est complet doit être examinée. D'autre part, il faut voir quelle serait l'influence de la relaxation d'une ou plusieurs des hypothèses simplificatrices adoptées.

CONCLUSION GENERALE

=====

Les trois économistes classiques dont j'ai examiné les théories de la rente dans la première partie de la thèse, ont proposé plusieurs explications de la rente. L'espèce de rente que l'on associe le plus souvent à l'économie politique classique est sans doute la rente *différentielle*; aussi l'avons-nous rencontrée chez nos trois auteurs. L'importance attribuée à la rente différentielle varie néanmoins selon l'auteur. Smith, par exemple, n'a qu'effleuré la théorie de la rente différentielle, tandis que Ricardo en a fait l'une des bases de son système. A côté de la rente différentielle, Smith semble avoir distingué au moins deux autres espèces de rente. Je les ai appelées la *rente-profit* et la *rente ordinaire*. La rente-profit est payée pour l'usage des terres cultivées, et elle constitue une sorte de compensation des dépenses originelles d'amélioration des terres. La rente ordinaire est payée pour l'usage des terres non cultivées, mais seulement si ces terres sont 'rares'. A son tour, Marx a voulu démontrer la possibilité d'une *rente absolue*. Cette rente serait payée parce que les propriétaires de terres, en raison de leur monopole sur certaines ressources naturelles indispensables à la production, seraient en mesure d'accaparer une partie de la plus-value créée dans l'agriculture.

Une analyse critique des écrits de Ricardo et de Marx a montré que si l'on examine leurs théories de la rente à la lumière de leurs théories de la valeur (et en particulier de la théorie de la valeur-travail), leurs théories de la rente s'avèrent ou bien intenable (cf. le cas de la rente absolue de Marx), ou bien valables seulement sous des conditions extrêmement restrictives (cf. l'hypothèse de la composition identique en

valeur des capitaux et le maintien de cette hypothèse dans le temps). L'un des mérites de Sraffa a été de formuler une théorie des prix (celle des *prix de production*) qui, tout en s'inspirant des théories classiques, permet toutefois de traiter la rente et la terre sans qu'il ne soit nécessaire d'introduire des conditions restrictives.

Dans *Production of Commodities* Sraffa a étudié un système économique *donné*, et toute l'analyse de la deuxième partie de la thèse a été élaborée en adoptant ce point de vue. En ce qui concerne le traitement de la terre, l'idée principale de Sraffa était de considérer la terre comme une marchandise, quoiqu'une marchandise tout à fait exceptionnelle. En effet, selon Sraffa la terre entre dans la production en tant que moyen de production, mais n'est pas produite. Cette idée est cependant irréconciliable avec l'une des hypothèses de base de Sraffa, et doit par conséquent être abandonnée. Il se présente alors deux alternatives : ou bien la terre est conçue comme une marchandise qui sort de la production de la même façon qu'elle y entre (l'interprétation proposée par Schefold), ou bien elle est conçue comme une ressource. Dans la deuxième partie de la thèse, j'ai longuement analysé les conséquences de ces deux interprétations pour les notions typiquement sraffiennes comme 'marchandise non fondamentale' et 'système étalon'. Au moins deux conclusions peuvent être tirées de cette analyse. La première est que l'interprétation de la terre-ressource permet de retrouver et d'enrichir les notions de 'marchandise non fondamentale' et 'système étalon'. La seconde est que les solutions obtenues à partir de cette interprétation semblent 'meilleures' que celles obtenues à partir de l'interprétation de la terre-marchandise. En somme, l'interprétation de la terre-ressource paraît mieux refléter la spécificité de la terre.

Dans la troisième partie de la thèse, le point de vue de Sraffa a été abandonné. Au lieu d'examiner un système de production donné, le problème a été de 'construire' des systèmes de production 'stables' partant d'un ensemble de méthodes de production

disponibles. Ce changement de perspective rend nécessaire l'introduction explicite de la *demande*, et plus généralement la spécification des conditions à remplir par les systèmes de production 'stables', qui ont été qualifiés de *systèmes de production de coût minimal*. L'analyse a été concentrée sur les questions de l'existence et de l'unicité des systèmes de production de coût minimal. Peut-être le résultat le plus important est-il que, même dans des situations relativement simples (absence de production jointe, spécialisation extrême des terres, etc.), l'unicité n'est plus garantie à partir du moment où il existe plusieurs marchandises agricoles. Ce résultat montre que la présence de contraintes quantitatives (c'est-à-dire : de terres) complique considérablement la question du choix de techniques, et qu'il serait faux d'extrapoler sans réserve les résultats obtenus en l'absence de contraintes quantitatives à des situations où il existe de telles contraintes, aussi faibles soient-elles.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ABRAHAM-FROIS, Gilbert & Edmond BERREBI (1976), Théorie de la Valeur, des Prix et de l'Accumulation, Paris, Economica.

ABRAHAM-FROIS, Gilbert & Edmond BERREBI (1978), "Pluralité des marchandises étalon : existence et construction", Revue d'Economie Politique, vol. 88(5), pp. 688-712.

ABRAHAM-FROIS, Gilbert & Edmond BERREBI (1979a), "A propos d'une incohérence logique de P. Sraffa", Cahiers d'Economie Politique, no. 5, pp. 5-10.

ABRAHAM-FROIS, Gilbert & Edmond BERREBI (1979b), "En réponse à J. Cartelier et A. Lipietz", Cahiers d'Economie Politique, no. 5, pp. 37-39.

ABRAHAM-FROIS, Gilbert & Edmond BERREBI (1980), Rentes, Rareté, Surprofits, Paris, Economica.

ABRAHAM-FROIS, Gilbert & Edmond BERREBI (1987), Prix, Profits et Rythmes d'Accumulation, Paris, Economica.

ABRAHAM-FROIS, Gilbert & Edmond BERREBI (1989), "A la recherche de l'étalon invariable des valeurs", Revue d'Economie Politique, vol. 99(1), pp. 123-140.

ANDERSON, James (1968[1777]), Observations on the Means of Exciting a Spirit of National Industry, New York, Augustus M. Kelley.

d'AUTUME, Antoine (1985), "Prix, taux de profit et étalons", Revue d'Economie Politique, vol. 95(1), pp. 27-50.

BALL, Michael (1977), "Differential rent and the role of landed property", International Journal of Urban and Regional Research, vol. 1(3), pp. 380-403.

BALL, Michael (1980), "On Marx's theory of agricultural rent : a reply to Ben Fine", Economy and Society, vol. 9(3), pp. 304-326.

BENITEZ SANCHEZ, Alberto (1986), "L'étalon dans la théorie de Piero Sraffa", Cahiers d'Economie Politique, no. 12, pp. 131-146.

BERTHOMIEU, Claude (1982), "La théorie de la rente et les systèmes de prix de production : un examen critique et une proposition" in : Richard ARENA e.a., Etudes d'Economie Classique et Néo-ricardienne, Paris, Presses Universitaires de France, pp. 87-113.

BHARADWAJ, Krishna (1970), "On the maximum number of switches between two production systems", Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik, vol. 106(4), pp. 409-429.

BHARADWAJ, Krishna (1983), "On a controversy over Ricardo's theory of distribution", Cambridge Journal of Economics, vol. 7(1), pp. 11-36.

BIDARD, Christian (1978), "Sur le système-étalon de Sraffa", Revue d'Economie Politique, vol. 88(5), pp. 739-745.

BIDARD, Christian (1984), "Choix techniques en production jointe" in : Christian BIDARD (Ed.), La Production Jointe. Nouveaux Débats, Paris, Economica, pp. 186-210.

BIDARD, Christian (1986a), "Production de marchandises, Corrigendum", Economie Appliquée, vol. 39(1), pp. 113-138.

BIDARD, Christian (1986b), "The maximum rate of profits in joint production", Metroeconomica, vol. 38(1), pp. 53-66.

BIDARD, Christian (1986c), "Biens non fondamentaux et marchandises homothétiques", Cahiers d'Economie Politique, no. 12, pp. 147-153.

BIDARD, Christian (1987), "Il n'y a plus de rente" in : Christian BIDARD (Ed.), La Rente. Actualité de l'Approche Classique, Paris, Economica, pp. 187-207.

BIDARD, Christian (1990a), "Une théorie sraffienne des choix techniques" in : Richard ARENA (Ed.), Sraffa. Trente Ans après, Paris, Presses Universitaires de France, pp. 311-324.

BIDARD, Christian (1990b), "An algorithmic theory of the choice of techniques", à paraître dans Econometrica.

BIDARD, Christian & John E. WOODS (1989), "Taxes, lands and non-basics in joint production", Oxford Economic Papers, vol. 41(4), pp. 802-812.

BLAKLEY, G.R. & W.F. GOSSLING (1967), "The existence, uniqueness and stability of the standard system", Review of Economic Studies, vol. 34(4), pp. 427-431.

BLAUG, Mark (1985), "What Ricardo said and what Ricardo meant" in : Giovanni A. CARAVALE (Ed.), The legacy of Ricardo, Oxford, Basil Blackwell, pp. 3-10.

BOMEL, Philippe (1987), "A propos du 'Statut de la rente chez Sraffa'. Une note", Revue Economique, vol. 38(1), pp. 157-163.

von BORTKIEWICZ, Ladislaus (1911), "Die Rodbertus'sche Grundrententheorie und die Marx'sche Lehre von der absoluten Grundrente", Archiv für die Geschichte des Sozialismus und der Arbeiterbewegung, vol. 1, pp. 1-40, 391-434.

BUCHANAN, Daniel H. (1929), "The historical approach to rent and price theory", Economica, vol. 9(26), pp. 123-155.

BURMEISTER, Edwin (1968), "On a theorem by Sraffa", Economica, vol. 35(1), pp. 83-87.

BURMEISTER, Edwin (1975), "A comment on 'This age of Leontief ... and who ?'", Journal of Economic Literature, vol. 13(2), pp. 454-457.

BURMEISTER, Edwin (1977), "The irrelevance of Sraffa's analysis without constant returns to scale", Journal of Economic Literature, vol. 15(1), pp. 68-70.

BUTAULT, J.P. & A. JEANCLAUDE (1987), "Rente ricardienne et spécialisation des terres" in : Christian BIDARD (Ed.), La Rente. Actualité de l'Approche Classique, Paris, Economica, pp. 129-151.

CANNAN, Edwin (1953[1893]), A History of the Theories of Production and Distribution in English Political Economy from 1776 to 1848, London, Staples Press.

CANNAN, Edwin (1929), A Review of Economic Theory, London, King.

CARTELIER, Jean (1979), "La théorie de la rente dans la logique ricardienne", Cahiers d'Economie Politique, no. 5, pp. 11-20.

COLLIER, Irwin R. Jr. (1986), "On Marxian value, exploitation and the transformation problem : a geometric approach", Journal of Comparative Economics, vol. 10(3), pp. 325-337.

D'AGATA, Antonio (1983), "The existence and unicity of cost-minimizing systems in intensive rent theory", Metroeconomica, vol. 35(1), pp. 147-158.

D'AGATA, Antonio (1984), "Molteplicità di merci agricole e rendita differenziale estensiva", Ricerche Economiche, vol 38(1), pp. 78-94.

D'AGATA, Antonio (1986), "Non-produced means of production in Sraffa's system : basics, non-basics and quasi-basics. A comment", Cambridge Journal of Economics, vol. 10(4), pp. 379-386.

DARDI, Marco (1977), "Margini 'spuri' e sistema-tipo nella teoria della rendita intensiva", Giornale degli Economisti e Annali di Economia, vol. 36(1), pp. 25-56.

DEBREU, Gérard & Israel Nathan HERSTEIN (1953), "Nonnegative square matrices", Econometrica, vol. 21(4), pp. 597-607.

DIATKINE, Daniel (1979), "La terre existe-t-elle ? Le statut de la terre dans la théorie des prix de production de P. Sraffa", Cahiers d'Economie Politique, no. 5, pp. 55-74.

DIEHL, Karl (1899), "Die Grundrententheorie im ökonomischen System von Karl Marx", Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, vol. 72 (Dritte Folge, Band 17), pp. 433-480.

DOBB, Maurice (1973), Theories of Value and Distribution since Adam Smith, Cambridge, Cambridge University Press.

DOSTALER, Gilles (1978), Marx, la Valeur et l'Economie Politique, Paris, Anthropos.

DUBOEUF, Françoise (1988), "Le processus de formation économique du taux de la rente et du taux de salaire chez Smith", Economies et Sociétés (Série PE), no. 10, pp. 27-51.

DUMENIL, Gérard (1980), De la Valeur aux Prix de Production. Une Réinterprétation de la Transformation, Paris, Economica.

DUMENIL, Gérard (1982), "Une approche fonctionnelle du théorème marxien fondamental d'Okishio-Morishima", Cahiers d'Economie Politique, no. 7, pp. 129-139.

DUMENIL, Gérard & Dominique LEVY (1984), "The unifying formalism of domination : value, price, distribution and growth in joint production", Zeitschrift für Nationalökonomie, vol. 44(4), pp. 349-371.

EATWELL, John (1975), "The interpretation of Ricardo's *Essay on Profits*", Economica, vol. 42(166), pp. 182-187.

EATWELL, John (1977), "The irrelevance of returns to scale in Sraffa's analysis", Journal of Economic Literature, vol. 15(1), pp. 61-68.

ERREYGERS, Guido (1989), "On indirect taxation and weakly basic commodities", Zeitschrift für Nationalökonomie, vol. 50(2), pp. 139-156.

FACCARELLO, Gilbert (1982), "Sraffa versus Ricardo : the historical irrelevance of the 'corn-profit' model", Economy and Society, vol. 11(2), pp. 122-137.

FILIPPINI, Carlo & Luigi FILIPPINI (1979), "La relazione tra saggio di salario e saggio di profitto in produzione congiunta", Rivista Internazionale di Scienze Sociali, vol. 87(4), pp. 425-441.

FILIPPINI, Carlo & Luigi FILIPPINI (1982), "Two theorems on joint production", Economic Journal, vol. 92(366), pp. 386-390.

FINE, Ben (1979), "On Marx's theory of agricultural rent", Economy and Society, vol. 8(3), pp. 241-278.

FLASCHEL, Peter (1981), "On two concepts of basic commodities for joint production systems", Zeitschrift für Nationalökonomie, vol. 42(3), pp. 259-280.

FLASCHEL, Peter (1984), "The standard commodity and the theory of income distribution - a critical note", Australian Economic Papers, vol. 23(42), pp. 123-129.

FLASCHEL, Peter (1986a), "Sraffa's standard commodity : no fulfillment of Ricardo's dream of an 'invariable measure of value'", Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, vol. 142(3), pp. 588-602.

FLASCHEL, Peter (1986b), "The standard commodity as a tool of economic analysis : a reply to Schefold", Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, vol. 142(3), pp. 623-625.

GAREGNANI, Pierangelo (1982), "On Hollander's interpretation of Ricardo's early theory of profits", Cambridge Journal of Economics, vol. 6(1), pp. 65-77.

GAREGNANI, Pierangelo (1983), "Ricardo's early theory of profits and its rational foundation : a reply to Professor Hollander", Cambridge Journal of Economics, vol. 7(2), pp. 175-178.

GEE, J.M.A (1981), "The origin of rent in Adam Smith's *Wealth of Nations* : an anti-neoclassical view", History of Political Economy, vol. 13(1), pp. 1-18.

GEORGESCU-ROEGEN, Nicholas (1979), "Energy analysis and economic valuation", Southern Economic Journal, vol. 45(4), pp. 1023-1058.

GIBSON, Bill (1984), "Profit and rent in a classical theory of exhaustible and renewable resources", Zeitschrift für Nationalökonomie, vol. 44(2), pp. 131-149.

GIBSON, Bill & Darryl McLEOD (1983), "Non-produced means of production in Sraffa's system : basics, non-basics and quasi-basics", Cambridge Journal of Economics, vol. 7(2), pp. 141-150.

GIBSON, Bill & Darryl McLEOD (1983), "Technical change and the theory of rent : reply to D'Agata", Cambridge Journal of Economics, vol. 10(4), pp. 387-391.

GUICHARD, Jean-Paul (1987), "L'identité de nature des deux formes de rente différentielle et la difficulté de leur prise en compte dans le modèle néo-ricardien" in : Christian BIDARD (Ed.), La Rente. Actualité de l'Approche Classique, Paris, Economica, pp. 99-128.

GUIGOU, Jean-Louis (1982), *La Rente Foncière. Les Théories et leur Evolution depuis 1650*, Paris, Economica, 1982.

HOLLANDER, Samuel (1973a), The Economics of Adam Smith, London, Heinemann.

HOLLANDER, Samuel (1973b), "Ricardo's analysis of the profit rate, 1813-1815", Economica, vol. 40(159), pp. 260-282.

HOLLANDER, Samuel (1975), "Ricardo and the corn-profit model : reply to Eatwell", Economica, vol. 42(166), pp. 188-202. ,

HOLLANDER, Samuel (1979), The Economics of David Ricardo, London, Heinemann.

HOLLANDER, Samuel (1982), "A reply", Journal of Post-Keynesian Economics, vol. 4(3), pp. 360-372.

HOLLANDER, Samuel (1983), "Professor Garegnani's defence of Sraffa on the material rate of profit", Cambridge Journal of Economics, vol. 7(2), pp. 167-174.

HOLLANDER, Samuel (1986), "On a 'new interpretation' of Ricardo's early treatment of profitability", Economic Journal, vol. 96(384), pp. 1091-1097.

KING, John Edward (1982), "Value and exploitation : some recent debates" in : Ian BRADLEY & Michael HOWARD (Eds.), Classical and Marxian Political Economy - Essays in Honour of Ronald L. Meek, London, McMillan, pp. 157-187.

KURZ, Heinz D. (1977), Zur Neoricardianischen Theorie des Allgemeinen Gleichgewichts der Produktion und Zirkulation. Wert und Verteilung in Piero Sraffas "Production of Commodities by Means of Commodities", Berlin, Duncker & Humblot.

KURZ, Heinz D. (1978), "Rent theory in a multisectoral model" Oxford Economic Papers, vol. 30(1), pp. 16-37.

LEVINE, A. L. (1974), "This age of Leontief ... and who ?", Journal of Economic Literature, vol. 12(3), pp. 872-881.

LEVINE, A. L. (1975), "'This age of Leontief ... and who ?' A reply", Journal of Economic Literature, vol. 13(2), pp. 457-461.

LEVINE, A. L. (1977), "The irrelevance of returns to scale in Sraffa's analysis ; a comment", Journal of Economic Literature, vol. 15(1), pp. 70-72.

LIPIETZ, Alain (1978), "Terre, rente et rareté", Revue d'Economie Politique, vol. 88(5), pp. 746-754.

LIPIETZ, Alain (1979a), "Les mystères de la rente absolue. Commentaire sur les incohérences d'un texte de Sraffa", Cahiers d'Economie Politique, no. 5, pp. 21-35.

LIPIETZ, Alain (1979b), "Nouvelle solution au problème de la transformation : le cas du capital fixe et de la rente", Recherches Economiques de Louvain, vol. 45(4), pp. 371-389.

LIPIETZ, Alain (1982), "Retour au problème de la 'transformation des valeurs en prix de production'", Cahiers d'Economie Politique, no. 7, pp. 141-165.

LIPIETZ, Alain (1983), Le Monde Enchanté. De la Valeur à l'Envol Inflationniste, Paris, La Découverte/Maspéro.

LIPPI, Marco (1979), Value and Naturalism in Marx, London, New Left Books.

MANARA, Carlo Felice (1980[1968]), "Sraffa's model for the joint production of commodities by means of commodities" in : Luigi L. PASINETTI (Ed.), Essays on the Theory of Joint Production, New York, Columbia University Press, pp. 1-15.

MANDEL, Ernest (1987), "Marx, Karl Heinrich" in : John EATWELL, Murray MILGATE & Peter NEWMAN (Eds.), The New Palgrave. A Dictionary of Economics, London, MacMillan, vol. 3, pp. 367-383.

MARANGONI, Giandemetrio (1984), "Prezzi positivi e merce tipo nel modello di produzione congiunta di Piero Sraffa", Rivista Internazionale di Scienze Economiche e Commerciali, vol. 31(12), pp. 1186-1200.

MARANGONI, Giandemetrio (1985), Il Modello di Produzione di Mercì a Mezzo di Mercì di Piero Sraffa, Padova, Cedam, 1985.

MARX, Karl (1964[1864-1865]), Das Kapital. Drittes Buch, Marx-Engels Werke, vol. 25, Berlin, Dietz.

MARX, Karl (1967[1861-1863]), Theorien über den Mehrwert, Marx-Engels Werke, vols. 26.1-26.3, Berlin, Dietz.

MARX, Karl & Friedrich ENGELS (1964[1860-1864]), Briefe. Januar 1860 - September 1864, Marx-Engels Werke, vol. 30, Berlin, Dietz.

METCALFE, J.S. & Ian STEEDMAN (1971), "Some effects of taxation in a linear model of production", The Manchester School, vol. 39(3), pp. 171-185.

MIYAO, Takahiro (1977), "A generalization of Sraffa's standard commodity and its complete characterization", International Economic Review, vol. 18(1), pp. 151-162.

MONTANI, Guido (1975), "Scarce natural resources and income distribution", Metroeconomica, vol. 27(1), pp. 68-101.

MONTANI, Guido (1977[1972]), "La théorie néo-ricardienne de la rente" in : Gilbert FACCARELLO & Philippe de LAVERGNE (Eds.), Une Nouvelle Approche en Economie Politique ? Essais sur Sraffa, Paris, Economica, pp. 118-139.

MORISHIMA, Michio (1973), Marx's Economics. A Dual Theory of Value and Growth, Cambridge, Cambridge University Press.

MORISHIMA, Michio (1976), "Positive profits with negative surplus value : a comment", Economic Journal, vol. 86(343), pp. 599-603.

NASSISI, Anna Maria (1986), Rendita e Profitto in Ricardo e Marx, Bari, Dedalo.

NASSISI, Anna Maria (1987), "Marx et Bortkiewicz sur la rente absolue" in : Christian BIDARD (Ed.), La Rente. Actualité de l'Approche Classique, Paris, Economica, pp. 11-20.

NEGISHI, Takashi (1985), Economic Theories in a Non-Walrasian Tradition, Cambridge, Cambridge University Press.

NEWMAN, Peter (1962), "Production of commodities by means of commodities", Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik, vol. 98(1), pp. 58-75.

PARYS, Wilfried (1977), "A simple criterion for equal value composition of capital", Quarterly Journal of Economics, vol. 91(3), pp. 511-512.

PARYS, Wilfried (1980), Analytische Aspecten van Sraffa's Werk en van Verwante Vraagstukken uit de Klassieke Prijs Theorie, thèse de doctorat, UFSIA, Université d'Anvers.

PARYS, Wilfried (1986), "Standard commodities and the transformation problem", Economie Appliquée, vol. 39(1), pp. 181-190.

PASINETTI, Luigi L. (1980[1973]), "The notion of vertical integration in economic analysis" in Luigi L. PASINETTI (Ed.), Essays on the Theory of Joint Production, New York, Columbia University Press, pp. 16-43.

PASINETTI, Luigi L. (1980), "A note on basics, non-basics and joint production" in Luigi L. PASINETTI (Ed.), Essays on the Theory of Joint Production, New York, Columbia University Press, pp. 51-54.

PEACH, Terry (1984), "David Ricardo's early treatment of profitability : a new interpretation", Economic Journal, vol. 94(376), pp. 733-751.

PEACH, Terry (1986), "Ricardo's early treatment of profitability : reply to Hollander and Prendergast", Economic Journal, vol. 96(384), pp. 1105-1112.

PORTA, Pier Luigi (1978), "Il dibattito tra Ricardo e Malthus : aspetti di teoria del valore e della distribuzione", Giornale degli Economisti e Annali di Economia, vol. 37(5-6,7-8), pp. 317-344, 453-468.

PORTA, Pier Luigi (1985), "The debate on Ricardo : old results in new frameworks" in : Giovanni A. CARAVALE (Ed.), The legacy of Ricardo, Oxford, Basil Blackwell, pp. 217-238.

PORTA, Pier Luigi (1988), "The classical theory of price : a note on the sraffian interpretation", Economies et Sociétés (Série PE), no. 10, pp. 53-74.

PRENDERGAST, Renée (1986), "A comment on 'David Ricardo's early treatment of profitability : a new interpretation'", Economic Journal, vol. 96(384), pp. 1098-1104.

QUADRIO CURZIO, Alberto (1966), Rendita e Distribuzione in un Modello Economico Plurisettoriale [Università di Torino, Studi del Laboratorio di Economia Politica, S. Cognetti de Martiis, IIIa serie, vol. VIII], Milano, Giuffrè Editore.

QUADRIO CURZIO, Alberto (1980), "Rent, income distribution and orders of efficiency and rentability" in Luigi L. PASINETTI (Ed.), Essays on the Theory of Joint Production, New York, Columbia University Press, pp. 218-240.

RICARDO, David (1951[1815]), An Essay on the Influence of a Low Price of Corn on the Profits of Stock, in : The Works and Correspondence of David Ricardo, edited by Piero Sraffa with the collaboration of M.H. Dobb, Cambridge, Cambridge University Press, vol. IV, pp. 9-41.

RICARDO, David (1951[1817¹,1821³]), On the Principles of Political Economy, and Taxation, in : The Works and Correspondence of David Ricardo, edited by Piero Sraffa with the collaboration of M.H. Dobb, Cambridge, Cambridge University Press, vol. I.

RONCAGLIA, Alessandro (1982a), "Hollander's Ricardo", Journal of Post-Keynesian Economics, vol. 4(3), pp. 339-359.

RONCAGLIA, Alessandro (1982b), "Rejoinder", Journal of Post-Keynesian Economics, vol. 4(3), pp. 373-375.

ROSENBLUTH, G. (1969), "A note on labour, wages, and rent in Smith's theory of value", Canadian Journal of Economics, vol. 2(2), pp. 308-314.

SALVADORI, Neri (1982), "Existence of cost-minimizing systems within the Sraffa framework", Zeitschrift für Nationalökonomie, vol. 42(3), pp. 281-298.

SALVADORI, Neri (1983), "On a new variety of rent", Metroeconomica, vol. 35(1), pp. 73-85.

SALVADORI, Neri (1985a), "Switching in methods of production and joint production", The Manchester School, vol. 53(2), pp. 156-178.

SALVADORI, Neri (1985b), "Was Sraffa making no assumption on returns ?", Metroeconomica, vol. 37(2), pp. 175-186.

SALVADORI, Neri (1986), "Land and choice of techniques within the Sraffa framework", Australian Economic Papers, vol. 25(46), pp. 94-105.

SALVADORI, Neri (1987a), "Les ressources naturelles rares dans la théorie de Sraffa" in : Christian BIDARD (Ed.), La Rente. Actualité de l'Approche Classique, Paris, Economica, pp. 161-176.

SALVADORI, Neri (1987b), "Basics and non-basics" in : John EATWELL, Murray MILGATE & Peter NEWMAN (Eds.), The New Palgrave. A Dictionary of Economics, London, MacMillan, vol. 1, pp. 199-201.

SALVADORI, Neri (1987c), "Non-substitution theorems" in : John EATWELL, Murray MILGATE & Peter NEWMAN (Eds.), The New Palgrave. A Dictionary of Economics, London, MacMillan, vol. 3, pp. 680-682.

SALVADORI, Neri & Ian STEEDMAN (1988a), "Joint production analysis in a sraffian framework", Bulletin of Economic Research, vol. 40(3), pp. 165-195.

SALVADORI, Neri & Ian STEEDMAN (1988b), "Four questions concerning joint production", Political Economy, vol. 4(2), pp. 223-229.

SAUCIER, Philippe (1981), Le Choix des Techniques en Situation de Limitations de Ressources, Thèse pour le doctorat d'Etat, Université de Paris II.

SAUCIER, Philippe (1984), "L'évolution des rentes dans une économie en croissance" in : Gilbert ABRAHAM-FROIS (Ed.), L'Economie Classique. Nouvelles Perspectives, Paris, Economica, pp. 165-179.

SAUCIER, Philippe (1987), "La résurgence du concept de rente" in : Christian BIDARD (Ed.), La rente. Actualité de l'Approche Classique, Paris, Economica, pp. 1-10.

SCHEFOLD, Bertram (1971), Theorie der Kuppelproduktion, Basel, publication privée.

SCHEFOLD, Bertram (1975), "Le système de Sraffa et la production jointe - deux exemples d'application" in : Claude BERTHOMIEU, Jean & Lysiane CARTELIER (Eds.), Ricardiens, Keynésiens et Marxistes, Grenoble, Presses Universitaires de

Grenoble, pp. 141-156.

SCHEFOLD, Bertram (1978), "Multiple product techniques with properties of single product systems", Zeitschrift für Nationalökonomie, vol. 38(1-2), pp. 29-53.

SCHEFOLD, Bertram (1986), "The standard commodity as a tool of economic analysis : a comment on Flaschel", Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, vol. 142(3), pp. 603-622.

SCHEFOLD, Bertram (1988a), "The dominant technique in joint production systems", Cambridge Journal of Economics, vol. 12(1), pp. 97-123.

SCHEFOLD, Bertram (1988b), "Joint production. A further assessment", Political Economy, vol. 4(2), pp. 231-241.

SCHEFOLD, Bertram (1989), Mr Sraffa on Joint Production and Other Essays, London, Unwin Hyman.

SCHUMPETER, Joseph A. (1954), History of Economic Analysis (Edited from manuscript by Elisabeth Boody Schumpeter), London, George Allen & Unwin, 1954.

SCOTT, Allen J. (1976), "Land and land rent : an interpretative review of the French literature", Progress in Geography, vol. 9, pp. 101-145.

SEMMLER, Willi (1983), "On the classical theory of taxation. An analysis of tax incidence in a linear production model", Metroeconomica, vol. 35(1-2), pp. 129-146.

SMITH, Adam (1976[1776¹,1791⁶]), An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations, edited by R.H. Campbell, A.S. Skinner & W.B. Todd (The Glasgow edition of the works and correspondence of Adam Smith, vol. I), Oxford, Clarendon Press, 2 vols.

SPITZ, Philipp (1916), "Das Problem der allgemeinen Grundrente bei Ricardo, Rodbertus und Marx", Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, vol. 106 (Dritte Folge, Band 51), pp. 492-524, 593-629.

SRAFFA, Piero (1951), "Introduction" in : David RICARDO (1951[1817¹,1821³]), On the Principles of Political Economy, and Taxation (The Works and Correspondence of David Ricardo, edited by Piero Sraffa with the collaboration of M.H. Dobb, vol. I), Cambridge, Cambridge University Press, pp. xiii-lxii.

SRAFFA, Piero (1960), Production of Commodities by Means of Commodities, Cambridge, Cambridge University Press.

SRAFFA, Piero (1970[1960]), Production de Marchandises par des Marchandises, Paris, Dunod.

SRAFFA, Piero (1979[1960]), Produzione di Merci a Mezzo di Merci, Torino, Einaudi (Paperbacks 35).

STEEDMAN, Ian (1975), "Positive profits with negative surplus value", Economic Journal, vol. 85(337), pp. 114-123.

STEEDMAN, Ian (1976a), "Positive profits with negative surplus value : a reply", Economic Journal, vol. 86(343), pp. 604-607.

STEEDMAN, Ian (1976b), "Positive profits with negative surplus value : a reply to Wolfstetter", Economic Journal, vol. 86(344), pp. 873-876.

STEEDMAN, Ian (1977), Marx after Sraffa, London, New Left Books.

STEEDMAN, Ian (1980a), "Basics, non-basics and joint production" in Luigi L. PASINETTI (Ed.), Essays on the Theory of Joint Production, New York, Columbia University Press, pp. 44-50.

STEEDMAN, Ian (1980b), "Returns to scale and the switch in methods of production", Studi Economici, vol. 35, pp. 5-14.

STEEDMAN, Ian (1982a), "Joint production and the wage-rent frontier", Economic Journal, vol. 92, pp. 377-385.

STEEDMAN, Ian (1982b), "Marx on Ricardo", in : Ian BRADLEY & Michael HOWARD (Eds.), Classical and Marxian Political Economy - Essays in Honour of Ronald L. Meek, London, McMillan, pp. 115-156.

STEEDMAN, Ian (1984), "L'importance empirique de la production jointe" in : Christian BIDARD (Ed.), La Production Jointe. Nouveaux Débats, Paris, Economica, pp. 5-20.

STIGLER, George J. (1976), "The successes and failures of Professor Smith", Journal of Political Economy, vol. 84(6), pp. 1199-1213.

TURGOT, Anne Robert Jacques (1914[1766]), "Réflexions sur la formation et la distribution des richesses" in : Gustave SCHELLE (Ed.), Oeuvres de Turgot et Documents le concernant, Paris, Félix Alcan, 1913-1923, vol. II, pp. 533-601.

VALASSINA, Giovanna (1976), La Teoria della Rendita nella Storia del Pensiero Economico, Milano, Vita e Pensiero.

VIDONNE, Paul (1977a), "Une présentation critique de la rente ricardienne", Revue Economique, vol. 28(2), pp. 227-239.

VIDONNE, Paul (1977b), "La rente et l'étalon avec ressource rare homogène", Revue Economique, vol. 28(5), pp. 832-848.

VIDONNE, Paul (1986), La Formation de la Pensée Economique, Paris, Economica.

WOLFSTETTER, Elmar (1976), "Positive profits with negative surplus value : a comment", Economic Journal, vol. 86(344), pp. 864-872.

WOODS, John Edward (1987), "A note on rent", Oxford Economic Papers, vol. 39(2), pp. 388-411.

ZAGHINI, Enrico (1967), "On non-basic commodities", Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik, vol. 103(2), pp. 257-266.

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS	3
INTRODUCTION GENERALE	4
NOTATION MATHEMATIQUE	7
PARTIE I	
LES THEORIES DE LA RENTE	
DE TROIS GRANDS AUTEURS CLASSIQUES :	
SMITH, RICARDO, MARX	8
INTRODUCTION A LA PARTIE I	9
CHAPITRE 1	
LA TERRE ET LA RENTE CHEZ ADAM SMITH	11
1. INTRODUCTION	11
2. L'INCOHERENCE DE SMITH	14
2.1. La rente en tant que déterminant du prix	14
2.2. La rente en tant que résidu	15
2.3. L'interprétation de l'incohérence	17
3. LA RENTE-PROFIT	20
3.1. Les marchandises qui rapportent toujours une rente	20
3.2. Le blé rapporte toujours une rente	21
4. LA RENTE ORDINAIRE	26
4.1. Les marchandises qui rapportent parfois une rente	26
4.2. L'insuffisance de l'offre naturelle et de la terre non cultivée	28

4.3.	La dynamique de la rente	31
4.4.	La rente ordinaire	31
5.	LA RENTE DIFFERENTIELLE	33
5.1.	La rente des mines	33
5.2.	La rente différentielle	34
6.	CONCLUSION	36

CHAPITRE 2

LA TERRE ET LA RENTE CHEZ DAVID RICARDO

1.	INTRODUCTION	38
2.	LA CRITIQUE DE SMITH	41
2.1.	La négation de la rente-profit	41
2.2.	L'exclusion de la rente ordinaire	42
2.3.	La généralisation de la rente différentielle	43
3.	LA THEORIE DE LA RENTE DANS L'ESSAY	45
3.1.	La thèse	45
3.2.	Le modèle	46
3.3.	Une analyse critique : la question des valeurs	50
3.4.	L'interprétation de Sraffa	54
4.	LA THEORIE DE LA RENTE DANS LES <i>PRINCIPLES</i>	56
4.1.	Les éléments nouveaux	56
4.2.	La rente, le profit et le salaire	58
4.3.	Une analyse critique (I) : la question des valeurs	62
4.4.	Une analyse critique (II) : les deux erreurs qui se compensent	68
5.	CONCLUSION	72

CHAPITRE 3

LA TERRE ET LA RENTE CHEZ KARL MARX 74

1.	INTRODUCTION	74
2.	LA THEORIE DE LA VALEUR-TRAVAIL DE MARX	78
2.1.	Les valeurs-travail	78
2.2.	La transformation des valeurs en prix moyens	81
2.3.	La critique de la transformation	83
3.	LA RENTE ABSOLUE	86
3.1.	La rente absolue dans les <i>Theorien über den Mehrwert</i>	86
3.2.	La formalisation de la rente absolue	88
3.3.	La rente absolue dans <i>Das Kapital</i>	91
3.4.	Une analyse critique : l'indétermination de la rente absolue	94
4.	LA RENTE DIFFERENTIELLE	99
4.1.	Les rendements décroissants	99
4.2.	Le raisonnement 'marginal' versus le raisonnement 'moyen'	100
4.3.	La marge de Ricardo et la marge de Marx	101
5.	CONCLUSION	105

CONCLUSION DE LA PARTIE I 107

PARTIE II

LA THEORIE DE LA RENTE

DE PIERO SRAFFA 108

INTRODUCTION A LA PARTIE II 109

CHAPITRE 4

LA TERRE ET LA RENTE SELON PIERO SRAFFA 111

1.	INTRODUCTION	111
2.	LE CADRE DE <i>PRODUCTION OF COMMODITIES</i>	114
2.1.	L'étude d'un système économique donné	114
2.2.	Les branches de production	116
2.3.	Le marché et les prix	118
2.4.	La répartition de la valeur d'échange du surplus	121
2.5.	Le nombre de branches et le nombre de marchandises	123
2.6.	Quelques conventions	124
3.	SYSTEMES DE PRODUCTION SIMPLE ET DE PRODUCTION JOINTE	127
3.1.	La distinction entre production simple et production jointe	127
3.2.	Les prix et le salaire en systèmes de production simple	128
3.3.	Les prix et le salaire en systèmes de production jointe	131
4.	LA TERRE ET LA PRODUCTION JOINTE	134
4.1.	La terre en tant que marchandise non produite	134
4.2.	La terre en tant que produit joint	138
4.3.	La terre en tant que ressource	143
5.	LA THEORIE DE LA RENTE DANS <i>PRODUCTION OF COMMODITIES</i>	146
5.1.	La rente et la rareté	146
5.2.	La rente extensive	148
5.3.	La rente intensive	152
5.4.	La multiplicité des marchandises agricoles	156
6.	CONCLUSION	159

CHAPITRE 5

MARCHANDISES FONDAMENTALES ET NON FONDAMENTALES

EN L'ABSENCE DE TERRES 161

1.	INTRODUCTION	161
2.	MARCHANDISES FONDAMENTALES ET NON FONDAMENTALES	164
2.1.	Une récapitulation des hypothèses de base	164
2.2.	Les marchandises non fondamentales en production simple	165
2.3.	Les marchandises non fondamentales en production jointe	167
3.	LA TAXATION INDIRECTE	172
3.1.	La taxation des quantités produites	172
3.2.	Sraffa sur les effets d'une taxe	174
4.	MARCHANDISES FAIBLEMENT FONDAMENTALES	176
4.1.	Un exemple numérique	176
4.2.	Les marchandises faiblement fondamentales	178
5.	CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES DE L'EXISTENCE DE MARCHANDISES FAIBLEMENT FONDAMENTALES	180
5.1.	Un théorème en termes de la matrice H et du vecteur v	180
5.2.	Un théorème en termes des matrices A et B et du vecteur l	183
5.3.	Les marchandises non fondamentales et les marchandises faiblement fondamentales comparées	185
6.	TROIS CAS SPECIAUX	187
6.1.	Les marchandises faiblement fondamentales en production simple	187
6.2.	Les biens-salaire déguisés	188
6.3.	Les marchandises neutres	190

7.	MARCHANDISES NON FONDAMENTALES ET MARCHANDISES FAIBLES	193
7.1.	Les marchandises non fondamentales	193
7.2.	Les marchandises faibles	194
8.	CONCLUSION	197

	ANNEXE	199
--	--------------	-----

	LEMME 5.1	199
	THEOREME 5.1	199
	THEOREME 5.2	202

CHAPITRE 6

	MARCHANDISES FONDAMENTALES ET NON FONDAMENTALES EN PRESENCE DE TERRES	205
--	--	-----

1.	INTRODUCTION	205
2.	LES TERRES-MARCHANDISES	207
2.1.	Les hypothèses de base	207
2.2.	Les critères de Sraffa et de Manara	210
2.3.	Marchandises quasi-fondamentales ?	213
2.4.	Un critère de décomposabilité	216
2.5.	Un exemple numérique	217
3.	LES TERRES-RESSOURCES	221
3.1.	Les hypothèses de base	221
3.2.	La non fondamentalité par rapport à une ressource	222
3.3.	Un critère concernant la non fondamentalité par rapport à une ressource	223
3.4.	Les relations entre les diverses formes de non fondamentalité	227
3.5.	La particularité des marchandises fortes	230
3.6.	Les marchandises globalement non fondamentales	232

4.	CONCLUSION	236
----	------------------	-----

CHAPITRE 7

	LE SYSTEME ETALON EN PRESENCE DE TERRES	238
--	---	-----

1.	INTRODUCTION	238
2.	LE PROBLEME DU NUMERAIRE	240
3.	LE SYSTEME ETALON EN L'ABSENCE DE TERRES	243
3.1.	Un numéraire neutre	243
3.2.	Le système étalon	245
3.3.	Le rapport étalon en tant que taux de profit maximum	247
3.4.	Le rôle des marchandises non fondamentales	250
4.	LE SYSTEME ETALON EN PRESENCE DE TERRES, SOUS L'HYPOTHESE DES TERRES-MARCHANDISES	253
4.1.	Le statut des terres	253
4.2.	Un exemple numérique	256
4.3.	Un cas de 'faux' rapport étalon	258
5.	LE SYSTEME ETALON EN PRESENCE DE TERRES, SOUS L'HYPOTHESE DES TERRES-RESSOURCES	261
5.1.	Le traitement des ressources	261
5.2.	Le système étalon global	262
5.3.	Deux propriétés du système étalon global	263
5.4.	Un exemple numérique	268
6.	LE SYSTEME SYNTHETIQUE	270
6.1.	L'interprétation de la matrice H^* et du vecteur v^*	270
6.2.	Le système synthétique	271
6.3.	Un exemple numérique	275

7.	CONCLUSION	277
	ANNEXE	278
	THEOREME 7.1	278
	THEOREME 7.2	280

	CONCLUSION DE LA PARTIE II	287
--	----------------------------------	-----

PARTIE III

	LE CHOIX DE TECHNIQUES EN PRESENCE DE TERRES	288
--	---	-----

	INTRODUCTION A LA PARTIE III	289
--	------------------------------------	-----

CHAPITRE 8

	LES SYSTEMES DE PRODUCTION DE COUT MINIMAL EN PRESENCE DE TERRES	292
--	---	-----

1.	INTRODUCTION	292
2.	LA DEFINITION D'UN SYSTEME DE PRODUCTION DE COUT MINIMAL	294
2.1.	Le problème du choix de techniques	294
2.2.	Les méthodes de production	294
2.3.	Les méthodes de repos	298
3.	LA DEFINITION DES SYSTEMES DE PRODUCTION DE COUT MINIMAL	302
3.1.	Les conditions à remplir par un système de production	302
3.2.	Les contraintes de terre	303
3.3.	La non rentabilité des terres (partiellement) en jachère	304

3.4.	Les comptes des méthodes actives	305
3.5.	Les comptes des méthodes non actives	306
3.6.	La satisfaction de la demande	307
3.7.	La définition des systèmes de production de coût minimal	308
4.	QUELQUES HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES	310
4.1.	Les méthodes et les marchandises industrielles	310
4.2.	L'absence de production jointe	310
4.3.	Les limites du taux de profit	312
5.	LA DEFINITION RECONSIDEREE	313
5.1.	La demande équivalente	313
5.2.	Le système de prix	317
5.3.	La définition des systèmes de production de coût minimal reformulée ...	319
6.	CONCLUSION	322

CHAPITRE 9

LES RESULTATS ETABLIS	323
-----------------------------	-----

1.	INTRODUCTION	323
2.	LE CHOIX DE TECHNIQUES EN L'ABSENCE DE TERRES	325
2.1.	La production simple	325
2.2.	La production jointe	326
3.	LE CHOIX DE TECHNIQUES EN PRESENCE DE TERRES : LES REGIMES DE RENTE EXTENSIVE ET INTENSIVE	327
3.1.	La spécificité des terres	327
3.2.	Le régime de rente extensive	327
3.3.	Le régime de rente intensive	330

4.	LE CHOIX DE TECHNIQUES EN PRESENCE DE TERRES : LE CAS GENERAL	333
4.1.	Un théorème sur l'existence	333
4.2.	Une extension	337
4.3.	Un théorème d'unicité	343
5.	CONCLUSION	345

CHAPITRE 10

LES TECHNIQUES ET LEURS DOMAINES DE PRODUCTION ... 346

1.	INTRODUCTION	346
2.	LES TECHNIQUES	348
2.1.	La définition d'une technique	348
2.2.	La composition des techniques	350
2.3.	Les techniques 'primaires' et les techniques 'semi-productives'	355
3.	LES DOMAINES DE PRODUCTION DES TECHNIQUES	357
3.1.	La définition d'un domaine de production	357
3.2.	Les méthodes 'variables' et les méthodes 'constantes'	359
3.3.	Les techniques impossibles	362
3.4.	Les côtés du domaine de production	363
3.5.	Un exemple numérique	366
3.6.	Les techniques dégénérées	369
3.7.	Les techniques productives	370
4.	CONCLUSION	373

CHAPITRE 11

LE VOISINAGE ET LA RIVALITE

1.	INTRODUCTION	374
----	--------------------	-----

2.	LE VOISINAGE	375
2.1.	La définition du voisinage	375
2.2.	La composition de techniques voisines	376
2.3.	Un exemple numérique	377
3.	LA RIVALITE	381
3.1.	La définition de rivalité	381
3.2.	Un critère concernant la rivalité	382
3.3.	Un exemple numérique	387
4.	LE DOMAINE DE PRODUCTION AGREGE	391
4.1.	La définition d'un domaine de production agrégé	391
4.2.	Les domaines de production agrégés enchaînés et bien ordonnés	391
4.3.	Un exemple numérique	394
5.	CONCLUSION	397

CHAPITRE 12

EXISTENCE ET UNICITE DES TECHNIQUES DE COUT MINIMAL EN PRESENCE DE TERRE

1.	INTRODUCTION	398
2.	LES TECHNIQUES DE COUT MINIMAL	400
2.1.	Les prix, les rentes et le salaire associés à une technique	400
2.2.	Les techniques de coût minimal	402
2.3.	Deux théorèmes sur l'ensemble des techniques de coût minimal	405
2.4.	Un exemple numérique	406
3.	LES TECHNIQUES PRIMAIRES SEMI-PRODUCTIVES	410
3.1.	Les définitions des techniques primaires et (semi-)productives	410
3.2.	La stabilité des techniques primaires semi-productives	410

3.3.	Un exemple numérique	413
4.	L'EXISTENCE DE TECHNIQUES DE COUT MINIMAL	414
4.1.	La nature du résultat recherché	414
4.2.	Un théorème d'existence	415
4.3.	Un exemple numérique	417
5.	L'UNICITE DES TECHNIQUES DE COUT MINIMAL	418
5.1.	La nature du résultat recherché	418
5.2.	L'unicité et la rivalité	419
5.3.	Les techniques blanches et les techniques noires	420
5.4.	Le théorème d'unicité des techniques de coût minimal	423
5.5.	Les techniques harmonieuses	424
5.6.	Le régime de rente extensive pure	427
5.7.	Un exemple numérique	429
6.	CONCLUSION	435
	ANNEXE	437
	THEOREME 12.1	437
	THEOREME 12.2	437
	THEOREME 12.4	439
	THEOREME 12.7	441
	CONCLUSION DE LA PARTIE III	451
	CONCLUSION GENERALE	452
	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	455

TABLEAUX

Tableau 10.1	354
Tableau 12.1	408
Tableau 12.2	409
Tableau 12.3	433
Tableau 12.4	434

FIGURES

Figure 9.1	337
Figure 10.1	368
Figure 10.2	372
Figure 11.1	380
Figure 11.2	390
Figure 11.3	394
Figure 11.4	395
Figure 12.1	431

