



HAL
open science

Nombre d'intersection et d'entrelacement de courbes discrètes et application à la caractérisation de la préservation de la topologie en imagerie

Sébastien Fourey

► **To cite this version:**

Sébastien Fourey. Nombre d'intersection et d'entrelacement de courbes discrètes et application à la caractérisation de la préservation de la topologie en imagerie. Mathématique discrète [cs.DM]. Université de Caen, 2000. Français. NNT: . tel-03808915

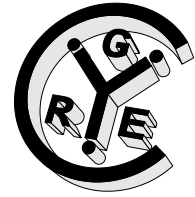
HAL Id: tel-03808915

<https://hal.science/tel-03808915>

Submitted on 10 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE CAEN/BASSE-NORMANDIE
U.F.R. de SCIENCES
ÉCOLE DOCTORALE SIMEM

THÈSE

présentée par
M. Sébastien FOUREY
et soutenue
le 11 juillet 2000
en vue de l'obtention du

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN
Spécialité : Informatique
(Arrêté du 30 Mars 1992)

Titre :

**Nombre d'intersection et d'entrelacement de courbes
discrètes et application à la caractérisation de la
préservation de la topologie en imagerie**

JURY

Directeur de thèse : Rémy MALGOUYRES

M. Jean-Marc CHASSERY
M. Tat Yung KONG
M. Maurice NIVAT
M. Gilles BERTRAND
M. Rémy MALGOUYRES
M. Jean-Pierre RÉVEILLÈS
Mme Marinette REVENU
M. Mohamed TAJINE

Rapporteur
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier Rémy Malgouyres, Maître de conférence HDR à l'ISMRA¹ de Caen, tout d'abord pour m'avoir proposé un sujet de thèse original, intéressant, à la fois ciblé mais néanmoins ouvert ; mais surtout pour sa disponibilité, ses nombreux et précieux conseils, et enfin pour son implication constante qui font de lui un modèle, à mon sens, pour qui veut encadrer une thèse.

Merci à Madame Marinette Revenu, Professeur à l'ISMRA de Caen, pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe Image du GREYC², pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse et pour ses remarques concernant ce mémoire.

Je fais part de ma plus sincère gratitude aux professeurs Jean-Marc Chassery, Tat Yung Kong et Maurice Nivat qui ont accepté de rapporter cette thèse. Je remercie également les professeurs Gilles Bertrand, Jean-Pierre Réveillès et Mohamed Tajine, pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse, mais aussi pour leur aide dans la "finition" de ce mémoire.

Sous la menace bien sûr, je remercie tous mes collègues doctorants, post-doctorants et membres permanents du GREYC Image qu'il serait risqué de nommer individuellement ici, de peur d'en oublier. La grande sympathie qu'ils ont montré à mon égard les rend en partie responsable de l'aboutissement de ce travail.

Enfin, je dis un grand merci à ma famille pour son soutien et sa confiance tout au long de ces quelques années d'études.

1. Institut des Sciences de la Matière et du Rayonnement

2. Groupe de recherche en Informatique, Image et Instrumentation de Caen

Table des matières

Introduction	9
I Définitions et notions de base en géométrie discrète	13
Introduction à la Partie I	15
1 Espaces discrets	17
1.1 Ensembles, relations et chemins	17
1.2 Images discrètes	20
1.3 Relations d'adjacence dans \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3	21
1.4 Complémentarité entre relations d'adjacence	23
2 Notions de base en géométrie discrète	27
2.1 Indice, index et Théorème de Jordan	27
2.1.1 Indice d'un pixel	28
2.1.2 L'index	29
2.1.3 Un Théorème de Jordan discret	33
2.2 Homotopie	34
2.2.1 Homotopie en topologie classique	35
2.2.2 Homotopie pour les chemins discrets	37
2.3 Le groupe fondamental discret	44
2.3.1 Définition	45
2.3.2 Morphisme de groupes induit par l'application d'inclusion	47
3 Préservation de la topologie	49
3.1 Déformations préservant la topologie	49
3.2 Propriété de simplicité et homotopie	51
3.3 Préservation de la topologie dans \mathbb{Z}^2	54
Conclusion à la Partie I	61
II Préservation de la topologie dans les surfaces discrètes	63
Introduction à la Partie II	65

4	Surfaces discrètes	69
4.1	Surfaces de voxels et surfaces de surfels	69
4.2	Surfaces discrètes, surfels	70
4.3	Relations d'adjacence entre surfels	72
4.3.1	Relation de e -adjacence	72
4.3.2	Relation de v -adjacence	76
4.4	Le groupe fondamental d'une surface discrète	79
4.4.1	Cellule de déformation et hypothèse sur Σ	79
4.4.2	Quelques exemples	81
5	Préservation de la topologie dans les surfaces discrètes	83
5.1	Surfel simple et homotopie	84
5.2	Sous-homotopie et caractéristique d'Euler	88
5.3	Groupe fondamental discret et sous-homotopie	89
5.4	Conclusion des Chapitres 4 et 5	91
6	Le nombre d'intersection	95
6.1	Définition	95
6.2	Propriétés principales	103
6.3	Propriétés utiles	104
6.3.1	Changement de signe par permutation des chemins	104
6.3.2	Commutativité	107
6.3.3	Propriété d'additivité	115
6.4	Preuve des théorèmes principaux	116
6.4.1	Un autre définition de la v -homotopie pour les chemins	117
6.4.2	Preuve du Théorème 9 quand $(n, \bar{n}) = (e, v)$	120
6.4.3	Un autre définition de l'homotopie pour les e -chemins	121
6.4.4	Nombre d'intersection avec un e -loop	123
6.4.5	Preuve du Théorème 9 quand $(n, \bar{n}) = (v, e)$	124
7	Un nouveau Théorème de Jordan	127
8	Nouvelles propriétés de l'index 2D	131
9	Nouvelle caractérisation de la préservation de topologie	139
9.1	Un nouveau théorème sur la sous-homotopie dans les surfaces	139
9.2	Première étape de la preuve	141
9.3	Deuxième étape de la preuve	143
9.3.1	Bord d'edgels d'une composante connexe $X \subset \Sigma$	143
9.3.2	Groupe libre	144
9.3.3	Élément du groupe libre associé à un n -chemin	145
9.3.4	Lemmes importants	148
9.4	Preuve du Théorème 13	151
	Conclusion à la Partie II	153

III Une contribution à l'étude de la topologie de \mathbb{Z}^3.	155
Introduction à la Partie III	157
10 Caractérisations existantes de la préservation de la topologie	161
10.1 Utilisation de la caractéristique d'Euler	162
10.1.1 Définition de $\chi_n(X)$	162
10.1.2 Première caractérisation des voxels n -simples	164
10.1.3 Caractérisation des voxels n -simples utilisant $\chi_n(N_{26}(x) \cap X)$	165
10.2 Caractérisation à l'aide des voisinages géodésiques	166
10.3 Utilisation du groupe fondamental discret	171
10.4 Autres approches pour une caractérisation locale	173
11 Le nombre d'entrelacement	175
11.1 Motivation	175
11.2 Le nombre d'entrelacement discret	177
11.3 Un nouvel invariant topologique	183
11.4 Propriétés utiles	183
11.4.1 Une définition équivalente du nombre d'entrelacement	184
11.4.2 La propriété de concaténation	185
11.5 Preuves des Théorèmes principaux	190
11.5.1 Invariance par déformation du $6/(6+)$ -chemin	190
11.5.2 Invariance par déformation du 26 -chemin	195
11.5.3 Indépendance par déformation du 18 -chemin	198
12 Une caractérisation concise de la préservation de la topologie	203
12.1 Caractérisation locale de la nouvelle définition	204
12.2 La caractérisation locale est bien celle de la définition précédente	218
Conclusion à la Partie III	227
Conclusion et perspectives	229
Notations	233
Annexes	235
A Preuve du Lemme 12.6	237
Bibliographie	251

Introduction

La topologie est la branche des mathématiques qui proclame qu'un *donuts* n'est rien d'autre qu'une tasse à café particulière, pour peu que celle-ci ait une anse. La reconnaissance des formes est un domaine de recherche en informatique qui essaie de donner à un ordinateur la capacité de faire la différence entre un *donuts* et une tasse à café. Même si ces deux motivations peuvent paraître contradictoires, l'étude des propriétés topologiques des espaces discrets est un domaine de recherche important pour la reconnaissance des formes en informatique. En effet, depuis le début des années 1970, la définition de notions de topologie adaptées au cadre discret a permis de définir, de formaliser mathématiquement et de justifier les algorithmes utilisés dans les programmes d'analyse et de traitement de l'image. Les opérations préservant la topologie font partie de cet ensemble d'algorithmes, et il n'est nul besoin de rappeler l'intérêt des algorithmes d'amincissement *homotopiques* par exemple dans les applications de reconnaissance de l'écriture.

Maintenant, en dehors des images bi-dimensionnelles, les images de l'espace discret \mathbb{Z}^3 constituent un champ d'investigation intéressant auquel s'intéressent quantités de travaux récents. Dans ce cadre, deux notions principales ont été utilisées pour caractériser la préservation de la topologie. La première, la caractéristique d'Euler, a été adaptée de la topologie classique et de la théorie des graphes. La seconde, le groupe fondamental, a été transposée de la topologie algébrique au cadre discret ([Kon89]). Pour cette thèse, notre motivation est l'étude des éléments de base du groupe fondamental discret : les *classes d'homotopie* de chemins. Aussi, en définissant et en utilisant de nouveaux outils dédiés à l'étude de ces classes, nous prouvons de nouveaux théorèmes qui montrent que le groupe fondamental discret est un outil puissant pour l'étude des propriétés topologiques dans un espace discret. De plus, nous fournissons dans ce mémoire les preuves complètes des résultats obtenus, preuves qui font appel aux seules notions de géométrie discrète classiquement utilisées comme les relations d'adjacence et bien sûr l'arithmétique entière.

Dans une première partie, nous allons présenter des notations et rappeler certaines notions mathématiques concernant les ensembles et la théorie des graphes. Ces définitions, ainsi que quelques autres notions mathématiques élémentaires, supposées connues, comme les correspondances et applications, ainsi que quelques connaissances sur les groupes, permettront au lecteur de comprendre tous les résultats énoncés par la suite ainsi que les preuves qui en seront données. Nous introduirons ensuite des définitions classiques plus spécifiques au cadre de la géométrie discrète et qui seront utilisées, voire généralisées, par la suite. Enfin, nous terminerons cette partie par la description, à l'aide d'exemples, du problème qui constitue la motivation première de cette thèse : la caractérisation de la préservation de la topologie dans un espace discret.

Dans une seconde partie, nous présentons un cadre nouveau pour l'étude du problème précédemment énoncé. Ce cadre est constitué par les objets connus dans la littérature sous le nom de *bords discrets* (ou *digital boundaries*, voir [AFH81, HU83, Her92, RKW91, Udu94]) et que nous appellerons simplement des *surfaces discrètes*, puisqu'aucune confusion n'est possible ici avec un autre type de surface discrète qui a été introduit par plusieurs auteurs ([MR81, Mal94, MB97]). Ce type d'objet discret présente un grand intérêt pratique puisqu'il est à la base d'outils de visualisation et de traitement d'images 3D ([HKL⁺81, HU83, Udu82, Len96, Len97]). Or, pour chacune de ces tâches, les problèmes liés à la préservation de la topologie apparaissent quand on s'intéresse à la définition d'algorithmes de squelettisation dans ce cadre ([ML00]). En effet, l'utilisation d'un algorithme d'amincissement s'avère être un outil efficace dans les programmes dédiés à la visualisation des objets 3D (i.e. de leur surface) mais aussi à l'analyse des objets sous-jacents. Nous rappellerons dans cette partie des résultats précédemment obtenus qui concernent la préservation de la topologie dans les surfaces discrètes ([ML00]) ; ensuite nous introduirons un nouvel outil pour la démonstration de théorèmes dans ce cadre : le nombre d'intersection de chemins. Des propriétés importantes seront démontrées qui font du nombre d'intersection un outil permettant entre autres la distinction des classes d'homotopie de chemins dans une surface discrète. Alors, en utilisant ces propriétés, nous donnerons la preuve d'un nouveau théorème de Jordan pour des courbes discrètes dessinées à la surface d'une partie de \mathbb{Z}^3 . Finalement, ce nouvel outil permettra de donner la preuve d'un nouveau théorème qui montrera que le groupe fondamental discret est suffisant pour caractériser la préservation de la topologie dans les surfaces discrètes, excepté dans un cas trivial très particulier.

Dans un troisième partie, nous nous intéresserons non plus au cadre des surfaces mais au problème de la préservation de la topologie dans l'espace discret \mathbb{Z}^3 . Dans ce but, on remarque que les surfaces discrètes peuvent être considérées comme un cadre de travail intermédiaire entre les espaces \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 . Dans cette dernière partie, nous fournissons le résultat d'un travail dont le but est d'obtenir une formalisation rigoureuse d'une caractérisation globale des *points simples* dans \mathbb{Z}^3 . Ces points sont définis classiquement comme des points qui peuvent être effacés dans une image (binaire) sans en modifier les propriétés topologiques ([Mor81, BM94, Ber94, Ma94, Kon95]). Plus précisément, nous nous intéresserons dans cette partie à la correspondance "évidente" entre les propriétés topologiques d'une partie de \mathbb{Z}^3 et celles de son complémentaire. Une fois de plus, nous nous intéresserons à une caractérisation de ces propriétés utilisant le groupe fondamental discret. Aussi, après avoir défini un analogue du nombre d'entrelacement (invariant de base en théorie des noeuds) pour des chemins fermés dans \mathbb{Z}^3 et prouvé son invariance par déformation *continue* des chemins, nous serons en mesure de montrer la correspondance précédemment évoquée entre l'objet et son complémentaire. En effet, le nombre d'entrelacement, de la même façon que le nombre d'intersection introduit dans la seconde partie, permet de distinguer les classes d'homotopie de chemins fermés dans \mathbb{Z}^3 . Finalement, nous concluons avec une question ouverte concernant le problème de la caractérisation de la préservation de la topologie, question qui suggère un lien entre la géométrie discrète et la théorie des noeuds.

Première partie

Définitions et notions de base en géométrie discrète

Introduction à la Partie I

Dans cette première partie, nous introduisons les notations et définitions de base qui seront utilisées dans la suite. Après un très bref rappel de certaines notions de la théorie des ensembles et des graphes, nous rappellerons quelques notions classiques de géométrie discrète comme les relations d'adjacence et la connexité. Nous donnerons aussi la définition de ce qui pourrait être appelé la *déformation continue d'un chemin discret*, formellement : la relation d'homotopie entre chemins dans un espace discret. Cette dernière définition aboutira à celle du groupe fondamental discret qui a été introduit dans le cadre discret par T.Y. Kong dans [Kon89]. Finalement, nous poserons plusieurs définitions concernant la préservation de la topologie pour les parties d'un espace discret avec une illustration le cas de l'espace \mathbb{Z}^2 .

Chapitre 1

Espaces discrets

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions de base qui seront utilisées dans toute la suite.

1.1 Ensembles, relations et chemins

Dans cette section, E est un ensemble.

Notation 1.1 (complémentaire, ensemble des parties) Si X est une partie de E , on note \bar{X} le complémentaire de X dans E , i.e l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans X . On note aussi $P(E)$ l'ensemble des toutes les parties de E .

Maintenant, rappelons les définitions d'une relation binaire et d'une relation d'équivalence sur E .

Définition 1.1 (relation binaire) Une relation binaire \mathcal{R} sur E est une partie de l'ensemble produit $E \times E$.

- \mathcal{R} est dite symétrique si pour tout couple d'éléments a et b de E , on a :
 $(a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$.
- \mathcal{R} est dite réflexive si $(e, e) \in \mathcal{R}$ pour tout élément e de E .
- \mathcal{R} est dite transitive si pour tout élément a, b et c de E , alors $(a, b) \in \mathcal{R}$ et $(b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$.
- \mathcal{R} est dite anti-réflexive si pour tout élément e de E on a $(e, e) \notin \mathcal{R}$.

- \mathcal{R} est dite anti-symétrique si pour tout a et tout b dans E , alors $(a, b) \in \mathcal{R}$ et $(b, a) \in \mathcal{R}$ entraîne $a = b$.

Nous rappelons aussi les définitions suivantes de clôture d'une relation binaire \mathcal{R} .

Définition 1.2 Si \mathcal{R} est une relation binaire sur E , la clôture symétrique et transitive de la relation \mathcal{R} est la relation \mathcal{R}_{st} définie par :

$$\mathcal{R}_{st} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} \exists(z_0, \dots, z_l) \text{ tel que pour } i = 0, \dots, l-1, \text{ on ait } (x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{R} \text{ ou} \\ \text{bien } (x_{i+1}, x_i) \in \mathcal{R}. \end{array} \right. \right\}$$

Définition 1.3 Si \mathcal{R} est une relation binaire sur E , la clôture transitive de la relation \mathcal{R} est la relation \mathcal{R}_t définie par :

$$\mathcal{R}_t = \left\{ (x, y) \left| \exists(z_0, \dots, z_l) \text{ tel que pour } i = 0, \dots, l-1 \text{ on ait } (x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{R}. \right. \right\}$$

Définition 1.4 (relation d'équivalence, classe d'équivalence) Une relation binaire \mathcal{R}_{eq} sur E est appelée une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive. Si \mathcal{R}_{eq} est une relation d'équivalence sur E et $e \in E$, la classe d'équivalence de e par \mathcal{R}_{eq} , notée $[e]_{\mathcal{R}_{eq}}$, est définie par :

$$[e]_{\mathcal{R}_{eq}} = \{ x \in E \mid (x, e) \in \mathcal{R}_{eq} \}.$$

Dans le cadre de la géométrie discrète, la notion suivante de *relation d'adjacence* sera très souvent utilisée, en tant qu'analogue de la notion continue de voisinage.

Définition 1.5 (relation d'adjacence) Une relation binaire \mathcal{R} sur E est appelée relation d'adjacence si elle est symétrique et anti-réflexive.

Dans la suite de cette section, \mathcal{R} est une relation d'adjacence sur E .

Définition 1.6 (\mathcal{R} -adjacence, \mathcal{R} -voisinage $N_{\mathcal{R}}(x)$) Soient $x \in E$ et $y \in E$. On dit que x et y sont \mathcal{R} -adjacents si $(x, y) \in \mathcal{R}$. De plus, si X est une partie de E on dit que $x \notin X$ est \mathcal{R} -adjacent à X s'il existe un élément $y \in X$ tel que $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Étant donné un élément x de E , on note $N_{\mathcal{R}}(x)$ l'ensemble des éléments de E qui sont \mathcal{R} -adjacents à x . On appelle cet ensemble le \mathcal{R} -voisinage de x .

Remarque 1.1 Le lecteur est mis en garde contre la confusion possible entre le mot "voisinage" utilisé ici, et le même mot utilisé en topologie. En effet, alors que le voisinage d'un point défini en topologie contient toujours ce point, un voisinage au sens de la

Définition 1.6 est l'ensemble des spels voisins d'un spel donné suivant une certaine relation d'adjacence, sans ce spel lui-même. De même, la notation $N_{\mathcal{R}}(x)$ utilisée ici diffère légèrement de celle utilisée par de nombreux auteurs qui réservent la notation $N_{\mathcal{R}}(x)$ pour un ensemble contenant l'élément x alors que $N_{\mathcal{R}}^(x)$ désigne le voisinage tel qu'il est défini ici.*

Définition 1.7 (adjacence entre ensembles) *Soient X et Y deux parties de E . On dit que X et Y sont \mathcal{R} -adjacents s'il existe deux éléments $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $(x, y) \in \mathcal{R}$.*

Définition 1.8 (\mathcal{R} -chemin, \mathcal{R} -connexité, composantes \mathcal{R} -connexes) *Soient a et b deux éléments de E . Un \mathcal{R} -chemin π de a à b et de longueur l dans E est un $(l + 1)$ -uplet $\pi = (x_0, \dots, x_l)$ d'éléments de E tel que $a = x_0$, $b = x_l$ et pour tout $i \in \{0, \dots, l - 1\}$ les éléments x_i et x_{i+1} sont \mathcal{R} -adjacents (i.e. $(x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{R}$) ou égaux. Le \mathcal{R} -chemin π est dit fermé si $x_0 = x_l$; et x_0 est alors appelé le point de base ou encore l'extrémité de π . Le chemin π est dit simple si $x_i \neq x_j$ dès que $i \neq j$ (excepté quand $\{i, j\} = \{0, l\}$ si π est fermé). On dit que deux éléments a et b de E sont \mathcal{R} -connectés dans E s'il existe un \mathcal{R} -chemin de a à b dans E . De façon évidente, la relation de \mathcal{R} -connexité est une relation d'équivalence sur E et les classes d'équivalence de cette relation sont appelées les composantes \mathcal{R} -connexes de E . En d'autres termes, une composante \mathcal{R} -connexe de E est une partie maximale de E dans laquelle deux éléments sont toujours \mathcal{R} -connectés dans E .*

Nous définissons aussi ce que l'on appellera par la suite un *demi-tour* dans un chemin.

Définition 1.9 (demi-tour) *Soit $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ un \mathcal{R} -chemin dans E . On dit que π possède un demi-tour à l'indice k si $y_{k-1} = y_{k+1}$.*

Notation 1.2 Dans tout ce mémoire, et afin de ne pas alourdir les notations, pour tout chemin fermé $\pi = (x_0, \dots, x_q)$ et tout entier $i \in \{0, \dots, q\}$ on notera x_{i+1} [resp. x_{i-1}] pour $x_{i+1 \bmod q}$ [resp. $x_{i-1 \bmod q}$], où $a + b \bmod q$ est le seul entier positif r vérifiant $a + b = nq + r$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et tel que $r \in \{0, \dots, q - 1\}$.

Définition 1.10 (changement de paramètre) *Soient $\pi = (y_0, \dots, y_p)$ et $\pi' = (y'_0, \dots, y'_p)$ deux \mathcal{R} -chemins fermés de longueur p dans E . Les deux chemins π et*

π' sont dits identiques à un changement de paramètre près si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- Il existe $k_0 \in \{0, \dots, p\}$ tel que pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$ on ait $y'_k = y_{k_0+k}$.
- Il existe $k_0 \in \{0, \dots, p\}$ tel que pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$ on ait $y'_k = y_{k_0-k}$.

Maintenant, on définit l'opération de concaténation des chemins.

Définition 1.11 (concaténation de chemins, chemin inverse) Soient deux \mathcal{R} -chemins $\pi = (y_0, \dots, y_p)$ et $\pi' = (y'_0, \dots, y'_q)$ dans E tels que $y_p = y'_0$. On appelle concaténé des chemins π et π' , et on note $\pi.\pi'$, le \mathcal{R} -chemin $(y_0, \dots, y_{p-1}, y'_0, \dots, y'_q)$. On définit aussi l'inverse de π , noté π^{-1} , comme le \mathcal{R} -chemin $(y_p, y_{p-1}, y_{p-2}, \dots, y_0)$.

Notation 1.3 Soit $\pi = (x_i)_{i=0, \dots, p}$ un \mathcal{R} -chemin dans E , on note π^* l'ensemble :

$$\pi^* = \{y \in E \mid \exists i \in \{0, \dots, p\} \text{ tel que } y = x_i \}.$$

Définition 1.12 (chemin trivial) Soit $a \in E$, le chemin fermé $\pi = (a, a)$ de a à a (de longueur 1) appelé un chemin trivial réduit à a .

Définition 1.13 (\mathcal{R} -courbe fermée simple) Une partie finie C de E est appelée une \mathcal{R} -courbe fermée simple si elle est \mathcal{R} -connexe et que tout élément x de C est \mathcal{R} -adjacent à exactement deux autres éléments de C . Dans ce cas, on peut trouver un \mathcal{R} -chemin fermé simple c dans E tel que $c^* = C$ qu'on appelle une paramétrisation de la courbe C . Notons que tous les chemins de cette forme sont identiques à un changement de paramètre près (voir Définition 1.10). On appelle aussi c une \mathcal{R} -courbe fermée simple paramétrée.

1.2 Images discrètes

Dans cette section, on introduit les notions d'espace discret et d'objet discret. Tout d'abord, on appelle espace discret tout couple $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ où \mathcal{R} est une relation d'adjacence sur l'ensemble \mathcal{E} . Signalons que les espaces discrets ainsi définis ne doivent pas être confondus avec les espaces munis d'une topologie discrète définis en topologie classique. Dans un souci de simplicité, étant donné un couple $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$, on appelle aussi \mathcal{E} un espace discret. Un élément x d'un espace discret \mathcal{E} est appelé un *spel* (raccourci de "space element").

Dans la suite, et sauf indication contraire, $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ est un espace discret.

Définition 1.14 (image discrète, objet, fond) Une image discrète \mathcal{I} sur \mathcal{E} est un couple (\mathcal{E}, X) où X est une partie de \mathcal{E} . L'ensemble X est appelé un objet discret. Les éléments de X sont appelés des 1-spels ou encore spels noirs alors que les éléments de \overline{X} sont appelés des 0-spels ou spels blancs. L'ensemble \overline{X} est aussi appelé le fond de l'objet X ou encore le fond de l'image discrète \mathcal{I} .

Il est maintenant nécessaire de donner des exemples concrets, à la fois d'espaces discrets mais aussi d'images discrètes. Dans la Figure 1.1 est représentée par des points noirs une partie de l'ensemble \mathbb{Z}^2 . Un élément de \mathbb{Z}^2 , classiquement appelé un *pixel* (raccourci de l'anglais “*picture element*”), peut être représenté par un point mais est le plus souvent identifié à un carré unitaire centré sur un point de coordonnées entières du plan Euclidien. Dans la Figure 1.2, on a représenté, à l'aide de cubes unitaires, une partie de \mathbb{Z}^3 . De façon similaire, un élément de \mathbb{Z}^3 , classiquement appelé un *voxel* (raccourci de l'anglais “*volume element*”), est représenté soit par un point de coordonnées entières mais est associé le plus souvent à un cube unitaire centré sur un point de coordonnées entières.

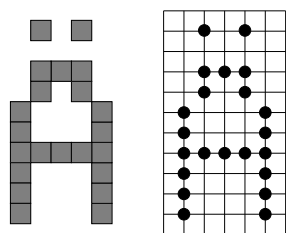


FIG. 1.1: Deux représentations d'une partie de \mathbb{Z}^2 .

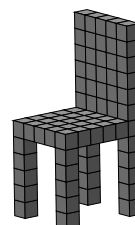


FIG. 1.2: Une vue d'un objet de \mathbb{Z}^3 .

1.3 Relations d'adjacence dans \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3

Dans cette section, on présente des relations d'adjacence dans \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 qui définissent des structures d'espaces discrets. Notons que toutes les propriétés topologiques des objets discrets que l'on peut étudier dépendent directement du choix d'une relation d'adjacence (en fait, généralement de deux relations comme il sera expliqué dans la section 1.4). Même s'il est possible de définir d'autres types de relations d'adjacence, celles qui sont présentées ici sont les plus communément utilisées.

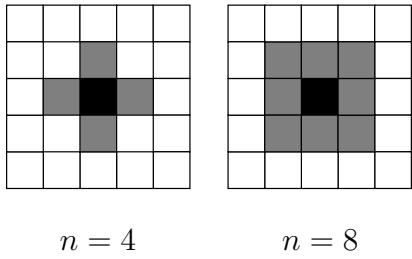


FIG. 1.3: Un pixel x (en noir) et les ensembles $N_n(x)$ pour $n \in \{4, 8\}$ (en gris).

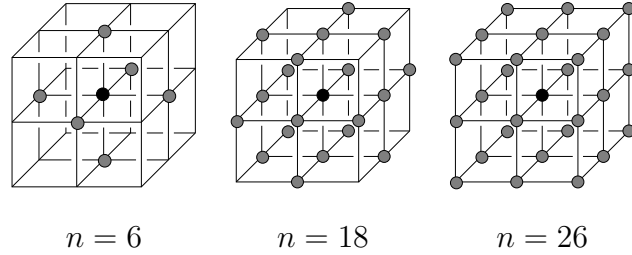


FIG. 1.4: Un voxel x (point noir) et les ensembles $N_n(x)$ pour $n \in \{6, 18, 26\}$ (en gris).

Tout d'abord, nous introduisons les notations suivantes pour les espaces discrets de type \mathbb{Z}^d (pour d entier positif).

Notation 1.4 Si $x \in \mathbb{Z}^d$, avec $d > 0$, on note x^i la i^{ieme} coordonnée de x pour $i \in \{1, \dots, d\}$, soit $x = (x^1, x^2, \dots, x^d)$.

Définition 1.15 (\mathcal{R}_4 et \mathcal{R}_8) On définit les deux relations d'adjacence \mathcal{R}_4 et \mathcal{R}_8 sur \mathbb{Z}^2 comme suit :

$$\mathcal{R}_4 = \{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 / |x^1 - y^1| + |x^2 - y^2| = 1 \}$$

et,

$$\mathcal{R}_8 = \{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 / x \neq y \text{ et } |x^1 - y^1| \cdot |x^2 - y^2| \leq 1 \}$$

Définition 1.16 (\mathcal{R}_n pour $n \in \{6, 18, 26\}$) On définit les relations d'adjacence \mathcal{R}_6 , \mathcal{R}_{18} et \mathcal{R}_{26} sur \mathbb{Z}^3 par :

$$\mathcal{R}_{26} = \{ (x, y) \in \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3 / \text{Max}[|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|, |x^3 - y^3|] = 1 \}$$

$$\mathcal{R}_{18} = \{ (x, y) \in \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3 / |x^1 - y^1| + |x^2 - y^2| + |x^3 - y^3| \leq 2 \} \cap \mathcal{R}_{26}$$

$$\mathcal{R}_6 = \{ (x, y) \in \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3 / |x^1 - y^1| + |x^2 - y^2| + |x^3 - y^3| = 1 \}$$

Notation 1.5 (préfixe “ n –”) Afin d'améliorer la lisibilité, et puisque les relations d'adjacence seront très utilisées par la suite, on abrégera “ \mathcal{R}_n ” par “ n ” dans toutes les notations qui ont été introduites jusqu'ici. Par exemple, 6–adjacence sera utilisé pour \mathcal{R}_6 –adjacence de même que $N_{26}(x)$ est la notation abrégée de $N_{\mathcal{R}_{26}}(x)$.

Les différents voisinages (voir Définition 1.6) associés aux relations d'adjacence des Définitions 1.15 et 1.16 sont représentés dans les Figures 1.3 et 1.4.

1.4 Complémentarité entre relations d'adjacence

Nous allons justifier maintenant la nécessité d'utiliser deux relations d'adjacence, et non une seule, pour traiter des propriétés topologiques d'une image. En effet, un des buts de la géométrie discrète est l'étude des propriétés topologiques des images discrètes. Dans ce contexte, la connexité est bien entendu une notion fondamentale. Toutefois, afin d'éviter des paradoxes topologiques, nous devons ajouter quelques restrictions concernant l'utilisation des relations d'adjacence quand on considère à la fois un objet et son fond. De tels paradoxes apparaissent par exemple quand on essaie de définir les *trous* d'un objet de \mathbb{Z}^2 et les *cavités* d'un objet de \mathbb{Z}^3 . En effet, on espère intuitivement pouvoir définir les trous dans \mathbb{Z}^2 et les cavités dans \mathbb{Z}^3 d'un objet comme les composantes connexes finies du complémentaire de cet objet. Cependant, si la même relation d'adjacence est utilisée pour définir les composantes connexes d'un objet X et celles de son complémentaire, alors ce type de définition donne lieu à des situations inacceptables. Ainsi, dans la Figure 1.5(a), l'ensemble $X \subset \mathbb{Z}^2$ composé des pixels noirs est 8-connexe et on s'attend à ce qu'il possède un trou, c.a.d. qu'il *entoure* une composante connexe de pixels blancs. Toutefois, puisque les deux pixels blancs marqués d'un point sont 8-adjacents, il n'est possible de définir un trou dans ce cas que comme une composante 4-connexe de pixels blancs. De la même façon, nous avons représenté dans la Figure 1.5(b) un 4-chemin fermé simple. Puisque les deux pixels noirs fléchés ne sont pas 4-adjacents, on s'attend à ce que ce chemin n'entoure qu'une seule composante connexe de pixels blancs. Ceci n'est alors vrai que si les deux pixels blancs marqués d'un point sont eux mêmes adjacents, c'est à dire si on considère le complémentaire du 4-chemin avec la relation de 8-connexité. Selon T.Y. Kong ([KR89]), ce principe de relations d'adjacence complémentaires a été établi pour la première fois dans [DHM67].

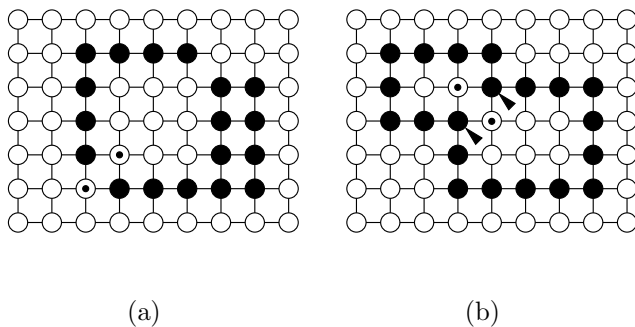


FIG. 1.5: Deux objets de \mathbb{Z}^2 .

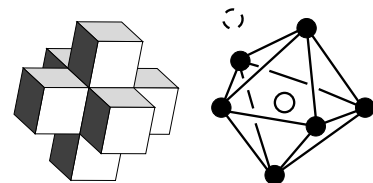


FIG. 1.6: Une sphère topologique en 18 ou 26-connexité.

Maintenant, les mêmes considérations s'appliquent aux parties de \mathbb{Z}^3 comme illustré par la Figure 1.6. Soit X l'objet constitué de tous les voxels visibles dans la partie gauche de cette figure (Figure 1.6). Alors, si les voxels noirs sont considérés comme faisant partie d'un objet 26 ou 18–connexe, on s'attend à ce que le voxel blanc intérieur à cet objet soit *isolé* (i.e. voisin d'aucun autre voxel blanc); de telle sorte que l'ensemble des voxels noirs constitue une sphère topologique (ayant une cavité). De façon évidente, cela n'est vrai que si la relation de 6–adjacence est utilisée pour considérer l'ensemble \overline{X} .

Finalement, pour un espace discret quelconque $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$, on résume ces considérations par l'utilisation de couples $(\mathcal{R}, \overline{\mathcal{R}})$ de relations d'adjacences, la relation de \mathcal{R} –adjacence étant associée à un objet tandis que la relation de $\overline{\mathcal{R}}$ –adjacence est associée à son complémentaire. Pour les images dans \mathbb{Z}^2 , nous utiliserons $(n, \overline{n}) \in \{(4, 8), (8, 4)\}$ et pour des images dans \mathbb{Z}^3 , nous utiliserons $(n, \overline{n}) \in \{(6, 26), (6+, 18), (26, 6), (18, 6+)\}$. Insistons sur la nécessité de noter “6+” la relation de 6–adjacence associée à la relation de 18–adjacence (notez que $\mathcal{R}_{6+} = \mathcal{R}_6$ d'après la Définition 1.16). En effet, ceci nous permet d'abrégier certaines notations puisque la donnée de la seule relation d'adjacence utilisée pour les objets suffit à préciser celle qui est utilisée pour le complémentaire (si $n = 26$ alors $\overline{n} = 6$, si $n = 6+$ alors $\overline{n} = 18$, etc.). Dans la suite, les couple (n, \overline{n}) énumérés précédemment sont aussi appelés des couples de *relations d'adjacence complémentaires*.

De façon plus générale, on suppose par la suite que la donnée d'une relation d'adjacence \mathcal{R} associée à un objet X implique l'utilisation d'une unique relation d'adjacence $\overline{\mathcal{R}}$ pour son complémentaire; de telle sorte que la notation $\overline{\mathcal{R}}$ est correctement définie. Ainsi, dès qu'une relation d'adjacence est définie (e.g. (6+)), on doit préciser une fois pour toutes la relation d'adjacence complémentaire utilisée.

Maintenant, étant donné une couple $(\mathcal{R}, \overline{\mathcal{R}})$ de relations d'adjacence complémentaires, on utilisera aussi les notions suivantes :

Définition 1.17 (\mathcal{R} –composantes noires/blanches) *Soient $\mathcal{I} = (\mathcal{E}, X)$ une image discrète et \mathcal{R} une relation d'adjacence sur \mathcal{E} . Une composante \mathcal{R} –connexe de X [resp. une composante $\overline{\mathcal{R}}$ –connexe de \overline{X}] est appelée une composante noire [resp. composante blanche ou encore composante de fond].*

La définition qui suit ne doit pas être confondue avec la notion de *tunnel* qui sera introduite dans la suite.

Définition 1.18 (\mathcal{R} -cavité) Soient $\mathcal{I} = (\mathcal{E}, X)$ une image discrète et \mathcal{R} une relation d'adjacence sur \mathcal{E} . Une composante $\overline{\mathcal{R}}$ -connexe finie de \overline{X} est appelée une \mathcal{R} -cavité de X . Une cavité dans \mathbb{Z}^2 est aussi appelée un trou.

Définition 1.19 (spel \mathcal{R} -isolé, spel \mathcal{R} -intérieur) Soient X une partie de \mathcal{E} et $x \in X$. On dit que x est un spel \mathcal{R} -isolé de X quand $N_{\mathcal{R}}(x) \cap X = \emptyset$; et x appelé spel \mathcal{R} -intérieur de X si $N_{\overline{\mathcal{R}}}(x) \cap \overline{X} = \emptyset$.

Chapitre 2

Notions de base en géométrie discrète

Dans ce chapitre, nous présentons plusieurs notions qui ont été introduites par différents auteurs dans le cadre de la géométrie discrète. Pour certaines d'entre elles, nous essayons de montrer leur similitude avec des notions classiques de topologie et aussi la façon dont elles sont dérivées de leurs analogues continues.

Toutes ces notions sont présentées ici principalement pour deux raisons. D'une part, elles ont montré leur utilité pour l'étude des propriétés topologiques des images discrètes. D'autre part, les outils qui seront développés dans la Partie II et la Partie III utilisent ces notions et parfois les généralisent.

2.1 Indice, index et Théorème de Jordan

Nous rappelons ici, les définitions de deux outils qui ont été utilisés pour montrer des résultats fondamentaux en géométrie discrète.

- Le premier, que l'on appellera *indice*, a été introduit par A. Rosenfeld dans [Ros70] et utilisé pour prouver un théorème de Jordan (Théorème 4 de la sous-section 2.1.3) pour des images discrètes dans \mathbb{Z}^2 . En effet, ce nombre sert à caractériser le fait qu'un pixel donné se situe soit à l'*intérieur*, soit à l'*extérieur* d'une n -courbe fermée simple.
- Le second, que l'on appellera *index* (en anglais : *2D winding number*) a été introduit

par R. Malgouyres ([Mal94]) dans le but de distinguer les composantes connexes du complémentaire d'un n -chemin fermé quelconque de \mathbb{Z}^2 , et plus particulièrement dans le but de caractériser l'appartenance d'un pixel à l'*extérieur* d'un tel chemin.

2.1.1 Indice d'un pixel

Ce nombre est associé à un pixel x du complémentaire d'un n -chemin fermé simple $c = (x_0, \dots, x_q)$ dans \mathbb{Z}^2 pour $n \in \{4, 8\}$.

Soient $x = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ un pixel dans le complémentaire \bar{c}^* des pixels de c et $\Delta_x = \{(a + k, b) \mid k \in \mathbb{N}\}$. La demi droite Δ_x ainsi définie (voir Figure 2.1) rencontre c sur plusieurs *intervalles d'intersection*. On définit $\Lambda_{x,c}$ comme étant l'ensemble des intervalles d'intersection entre c et Δ_x :

$$\Lambda_{x,c} = \{(k_1, k_2) \mid \{x_{k_1-1}, x_{k_2+1}\} \cap \Delta_x = \emptyset \text{ et } x_k \in \Delta_x \text{ pour } k_1 \leq k \leq k_2\}.$$

Maintenant, pour tout intervalle d'intersection $\lambda = (k_1, k_2) \in \Lambda_{x,c}$, on dit que Δ_x *tangente* c en λ si $(x_{k_1-1}^2 - b)(x_{k_2+1}^2 - b) = 1$ (i.e. x_{k_1-1} et x_{k_2+1} se trouvent du même "côté" de Δ_x) et on dit que Δ_x *traverse* c en λ si $(x_{k_1-1}^2 - b)(x_{k_2+1}^2 - b) = -1$.

Dans [Ros70], Rosenfeld a défini les ensembles *intérieur* et *extérieur* associés à une n -courbe fermée simple c de la façon suivante :

- Si $\Delta_{x,c}$ traverse c un nombre impair de fois, alors x appartient à l'*intérieur* de c .
- sinon, x appartient à l'*extérieur* de c .

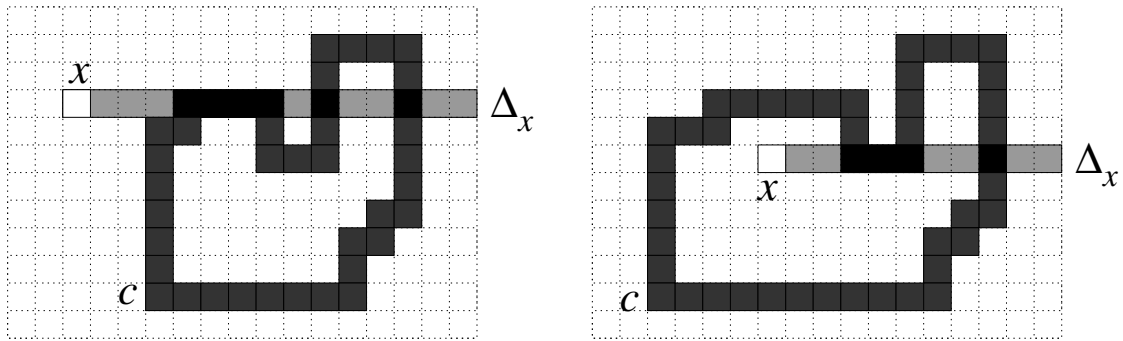
Utilisant cette définition de l'indice, Rosenfeld a tout d'abord prouvé la Proposition suivante :

Proposition 2.1 ([Ros70]) *L'intérieur et l'extérieur d'une 4-courbe fermée simple de longueur strictement supérieure à 4 sont tous les deux non vides.*

Ensuite, il démontra que :

Proposition 2.2 ([Ros70]) *Soit c une 4-courbe fermée simple de longueur strictement supérieure à 4. Si x est un pixel intérieur à c et y est un pixel extérieur à c , alors, tout 8-chemin de x à y rencontre c .*

Les deux propositions précédentes établissent simplement le fait que le complémentaire de la courbe fermée simple c ne peut être 8-connexe puisqu'il existe (Proposition 2.1)



(a) La demi-droite Δ_x traverse c deux fois, i.e. x est à l'extérieur de c .

(b) La demi-droite Δ_x traverse c seulement une fois, i.e. x est intérieur à c .

FIG. 2.1: Définition des pixels intérieurs et extérieurs à c dans $\overline{c^*}$ quand c est une 4-courbe fermée simple.

deux pixels x et y dans $\overline{c^*}$ qui ne sont pas 8-connectés dans $\overline{c^*}$ (Proposition 2.2). Plus tard, dans [Ros73], Rosenfeld acheva la preuve du Théorème de Jordan qui établit que le complémentaire d'une 4-courbe fermée simple de longueur strictement supérieure à 4 est composé de deux composantes 8-connexes, qui coïncident évidemment avec les ensembles intérieur et extérieur (voir sous-section 2.1.3).

Avec des preuves plus longues mais pas plus difficiles, toutes les propositions données dans cette sous-section peuvent être démontrées, avec des définitions adaptées, dans le cas où c est une 8-courbe fermée simple.

Maintenant, cet outil simple mais néanmoins utile peut être amélioré pour distinguer les composantes connexes du complémentaire d'un n -chemin fermé quelconque (pour $n \in \{4, 8\}$), pas nécessairement simple. Ceci nous amène à la définition de l'index (*winding number*) d'un chemin autour d'un point de \mathbb{Z}^2 qui a été utilisé par R. Malgouyres.

2.1.2 L'index

Motivation : un Théorème de Jordan dans \mathbb{Z}^3

Dans [Mal94, Mal97a], R. Malgouyres a utilisé l'index, dont la définition est rappelée dans cette section. Il avait besoin de cet outil afin de montrer un théorème de Jordan, l'analogue de celui de Rosenfeld pour les courbes fermées simples dans \mathbb{Z}^2 , mais cette fois pour un certain type de surface dans \mathbb{Z}^3 qui a été défini dans [Mal94, Mal97a] : les

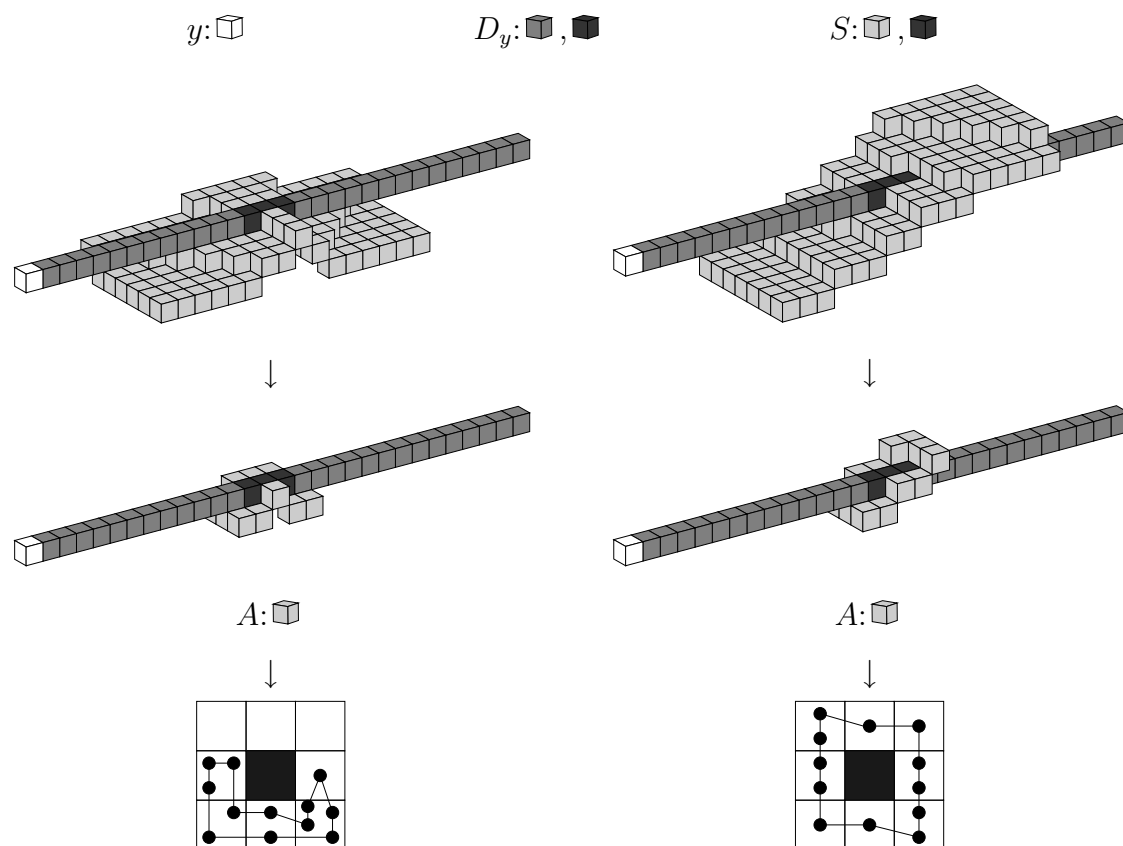
\mathcal{MA} –surfaces. Une telle surface est un ensemble de voxels dont le 26–voisinage vérifie une certaine *condition locale* (le lecteur intéressé par les différentes caractérisations de surfaces constituées de voxels pourra se reporter aux références [MR81], [Mal97a], [BM99], [Fou97], [MB99] ou encore [MB99]). Il est alors démontré que tout ensemble 26–connexe de voxels tels que chaque voxel vérifie la condition locale mentionnée précédemment, sépare effectivement son complémentaire en deux composantes 6–connexes.

Comme dans le cas 2D, une première étape dans la démonstration de cette propriété consiste en la définition des voxels *intérieurs* et *extérieurs* du complémentaire d’une surface fermée S . Alors, une méthode analogue à celle décrite dans la sous-section précédente est de compter le nombre de fois qu’une demi-droite D_y , partant d’un voxel y , et parallèle à un des axes de coordonnées, traverse la surface. Dans le cas 3D, il faut là encore distinguer une intersection *tangente* entre D_y et S d’une intersection *transversale*. Ces deux types d’intersections sont illustrés respectivement par la Figure 2.2(a) et la Figure 2.2(b). Aussi, afin de distinguer ces deux types d’intersections, on considère tout d’abord l’ensemble A des voxels de S qui sont 26–adjacents à cette intersection (voir les images centrales de la Figure 2.2). Alors, R. Malgouyres a montré qu’il est possible de donner une paramétrisation périodique mais unique, à un changement d’orientation près, de l’ensemble A ([Mal97a] et [Mal95]) et, par la même occasion, de sa projection sur un plan discret à deux dimensions orthogonal à la demi-droite D_y . En raison de la définition même des surfaces considérées, cette projection de l’ensemble A peut en fait être paramétrée par un 8–chemin fermé. Maintenant, étant donné un tel 8–chemin, qui est clairement inclus dans une grille 3×3 , le fait que la demi-droite D_y traverse ou tangente simplement la surface S est équivalent au fait que le pixel central du voisinage 3×3 (images du bas des Figures 2.2(a) et 2.2(b)) soit intérieur ou bien extérieur au 8–chemin fermé obtenu par projection.

Aussi, on doit donner une définition précise de l’intérieur et de l’extérieur d’un 8–chemin fermé (non simple).

Index

La définition de l’index est quasiment identique à celle de l’indice qui a été rappelée dans la sous-section 2.1.1 mais cette fois ne compte pas uniquement le nombre de fois où une demi-droite traverse le chemin considéré mais plutôt le nombre d’*intersections*


 (a) La demi-droite D_y tangente la surface.

 (b) La demi-droite D_y traverse la surface.

FIG. 2.2: Images du haut: Deux types d'intersections entre une demi-droite D_y partant de y et une partie d'une MA -surface. Images centrales: L'ensemble A des voxels 26-adjacents à un voxel de l'intersection. Images du bas: La projection 2D de l'ensemble A sur un plan orthogonal à D_y peut être paramétrée à l'aide d'un 8-chemin fermé (non nécessairement simple).

transversales orientées entre la demi-droite et le chemin.

Soit $x = (a, b)$ un pixel du complémentaire d'un 8–chemin fermé (pas nécessairement simple) $c = (x_0, \dots, x_q)$ dans \mathbb{Z}^2 pour $n \in \{4, 8\}$. Soit Δ_x^α une demi-droite (un *rayon*) définie de la manière suivante pour $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\Delta_x^1 = \{(a + k, b) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

$$\Delta_x^2 = \{(a, b + k) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

$$\Delta_x^3 = \{(a - k, b) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

$$\Delta_x^4 = \{(a, b - k) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

La demi-droite Δ_x^α ainsi définie (voir Δ_x^1 dans la Figure 2.4) rencontre c sur plusieurs *intervalles d'intersections*. On définit $\Lambda_{x,c}^\alpha$ comme l'ensemble des intervalles d'intersections entre c et Δ_x^α :

$$\Lambda_{x,c}^\alpha = \{(k_1, k_2) \mid \{x_{k_1-1}, x_{k_2+1}\} \cap \Delta_x^\alpha = \emptyset \text{ et } \forall k_1 \leq k \leq k_2, x_k \in \Delta_x^\alpha\}.$$

Maintenant, pour un intervalle d'intersection $\lambda = (k_1, k_2) \in \Lambda_{x,c}^\alpha$, on dit que λ est une *intersection tangente* entre c et Δ_x^α si $(x_{k_1-1}^2 - b) \cdot (x_{k_2+1}^2 - b) = 1$ (i.e. x_{k_1-1} et x_{k_2+1} se trouvent du même ‘coté’ de Δ_x^α) et on dit que λ est une *intersection transversale* entre c et Δ_x^α si $(x_{k_1-1}^2 - b) \cdot (x_{k_2+1}^2 - b) = -1$. Dans ce dernier cas, on associe à λ soit la valeur $+1$ ou la valeur -1 selon l'orientation de l'intersection suivant la convention de signes donnée dans la Figure 2.3. Alors, l'index $W_{x,c}^\alpha$ n'est autre que la somme des *contributions* de tous les intervalles d'intersections de Δ_x^α , valant 0 , $+1$ ou -1 respectivement pour les intersections tangentes, transversales positives et transversales négatives (voir les exemples donnés dans la Figure 2.5). Alors, le théorème suivant a été démontré dans [Mal94].

Théorème 1 ([Mal94]) *Soit c une 8–chemin fermé dans \mathbb{Z}^2 et $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus c^*$. Alors,*
 $W_{x,c}^1 = W_{x,c}^2 = W_{x,c}^3 = W_{x,c}^4$.

Ce théorème permet d'abrégier $W_{x,c}^\alpha$ par $W_{x,c}$ puisque sa valeur ne dépend pas du choix de la demi-droite Δ_x^α pour $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$, et montre que l'index est une notion intrinsèque. Qui plus est, le théorème suivant établit le fait que l'index peut servir à distinguer des pixels qui n'appartiennent pas à la même composante 4–connexe du complémentaire d'un 8–chemin fermé. Toutefois, il ne fournit pas une condition nécessaire permettant de caractériser cette dernière propriété.

Théorème 2 ([Mal94]) *Soit c un 8–chemin fermé dans \mathbb{Z}^2 et $\{x, y\} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus c^*$. Si x et y sont 4–connectés dans $\overline{c^*}$ alors $W_{x,c}^\alpha = W_{y,c}^\alpha$.*

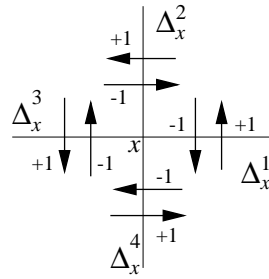


FIG. 2.3: *Convention de signes pour les intersections transversales.*

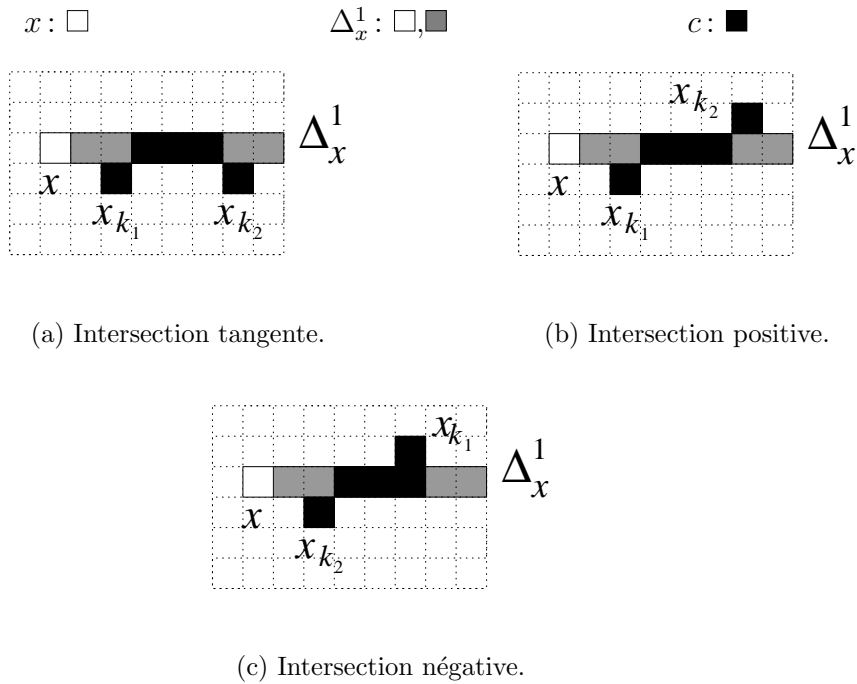


FIG. 2.4: *Intersections tangentes et transversales.*

Dans le Chapitre 6 nous introduisons le *nombre d'intersection* entre deux chemins reposants sur un type de surface discrète (ce type de surface qui constitue un espace discret au sens présenté dans le chapitre précédent sera formellement défini dans le Chapitre 4). Alors, des propriétés nouvelles de l'index peuvent être déduites des propriétés du nombre d'intersection (voir Chapitre 8). Le Théorème 2 apparaîtra alors comme un corollaire immédiat de propriétés plus générales du nombre d'intersections.

2.1.3 Un Théorème de Jordan discret

Dans cette sous-section, nous rappelons un résultat simple mais important dû à A. Rosenfeld concernant un théorème de Jordan sur les courbes discrètes. Cette propriété simple est l'analogie discret du résultat similaire bien connu portant sur les courbes fermées

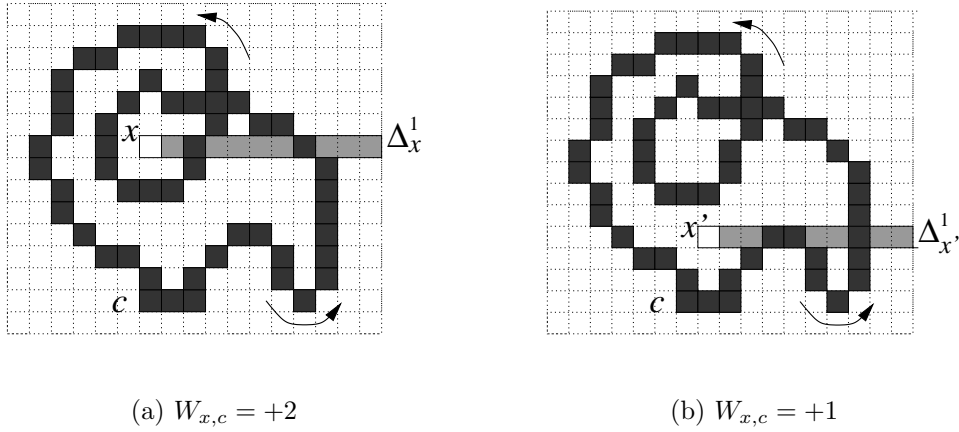


FIG. 2.5: Deux exemples de valeurs d'index.

simples dans \mathbb{R}^2 . Elle peut être vue comme un premier exemple de résultat classique de topologie qui peut être transposé au cadre discret. Dans la Partie II (Chapitre 7), on donnera la démonstration d'un nouveau Théorème de Jordan dans le cadre des surfaces discrètes, démonstration qui utilise un nouvel outil, le *nombre d'intersection*, de telle sorte que le Théorème de Jordan dans \mathbb{Z}^2 devient une restriction de ce nouveau théorème au cas du plan discret.

Nous rappelons qu'une courbe fermée simple dans \mathbb{R}^2 est une application continue f de l'intervalle fermé réel $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^2 tel que $f(0) = f(1)$ et telle que la restriction de f à l'intervalle $[0, 1[$ est injective.

Théorème 3 (Courbes de Jordan) *Si f est une courbe fermée simple dans \mathbb{R}^2 , alors $\mathbb{R}^2 \setminus f([0, 1])$ a deux composantes connexes, dont une exactement est bornée.*

Dans [Ros70] et [Ros73], A. Rosenfeld a montré le théorème suivant :

Théorème 4 ([Ros73]) *Si c est une n -courbe fermée simple dans \mathbb{Z}^2 (de longueur supérieure à 4 si $n = 4$), alors $\mathbb{Z}^2 \setminus c^*$ a deux composantes \bar{n} -connexes, dont une exactement est bornée.*

2.2 Homotopie

Dans cette section, il est question d'une autre notion très utile de topologie algébrique qui peut être définie dans un contexte discret : l'homotopie de chemins. Tout d'abord, on rappelle la définition d'une *homotopie* en topologie algébrique pour ensuite montrer

comment cette notion peut être définie de manière cohérente dans le cadre discret. Muni de cette définition, il sera alors possible d'introduire dans la section suivante le *groupe fondamental discret* qui est le sujet d'investigation central de cette thèse.

2.2.1 Homotopie en topologie classique

Tout d'abord, nous posons quelques définitions de topologie générale. Toutefois, puisque notre propos n'est pas de rappeler ici toutes les notions de topologie classique, ces notions peuvent être trouvées par exemple dans [Kin93, Mau80], notamment la définition d'une application continue qui sera utilisée dans ce qui suit.

Définition 2.1 (espace topologique) *Un espace topologique est un couple (E, \mathcal{O}) où E est un ensemble et $\mathcal{O} \subset P(E)$ vérifie les trois conditions suivantes :*

- i) $\emptyset \in \mathcal{O}$ et $E \in \mathcal{O}$.*
- ii) La réunion d'une famille quelconque d'éléments de \mathcal{O} appartient à \mathcal{O} .*
- iii) L'intersection de deux éléments de \mathcal{O} appartient à \mathcal{O} .*

Les éléments de \mathcal{O} sont appelés les ensembles ouverts de l'espace topologique (E, \mathcal{O}) . L'ensemble \mathcal{O} est aussi appelé une topologie sur E .

Définition 2.2 (chemin) *Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique et soient x et y deux éléments de E . Un chemin f de x à y dans E est une application continue de l'intervalle $[0, 1]^1$ dans E telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$. Le chemin f est dit fermé si $f(0) = f(1)$. Un chemin trivial dans E est un chemin f_0 constant sur l'intervalle $[0, 1]$ (i.e $\exists x \in E, \forall t \in [0, 1], f_0(t) = x$).*

Définition 2.3 (concaténation des chemins) *Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique, et soient f et g deux chemins dans E tels que $f(1) = g(0)$. On définit le chemin concaténé des deux chemins f et g , noté $f.g$, comme suit :*

$$\begin{aligned} f.g : \quad [0, 1] &\longrightarrow X \\ s \in [0, \frac{1}{2}] &\longmapsto f(2s) \\ s \in [\frac{1}{2}, 1] &\longmapsto g(2(s - \frac{1}{2})) \end{aligned}$$

1. $[0, 1]$ est ici muni de la structure topologique induite par l'espace topologique associé à la structure métrique (\mathbb{R}, d) où d est la distance dans \mathbb{R} définie par $d(x, y) = |x - y|$ pour tout couple (x, y) de \mathbb{R}^2 .

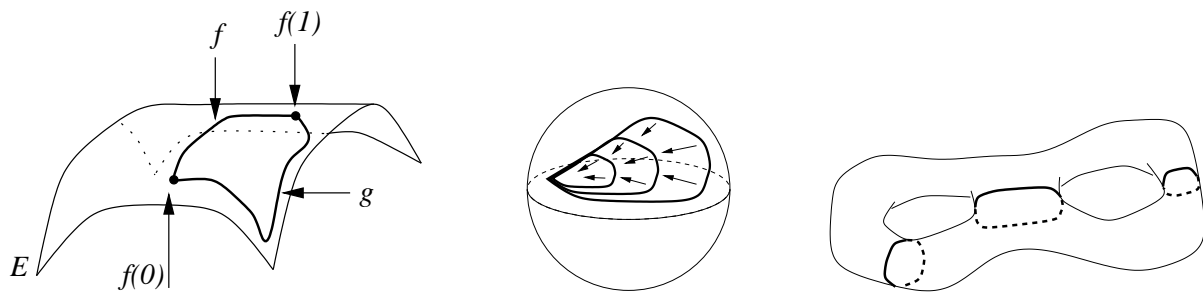
Définition 2.4 (homotopie à extrémités fixées) Soit f et g deux chemins dans un espace topologique (E, \mathcal{O}) et ayant les mêmes extrémités (i.e. $f(0) = g(0)$ et $f(1) = g(1)$). On dit que les chemins f et g sont homotopes à extrémités fixées dans E s'il existe une application continue $H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow E$ telle que pour tout $s \in [0, 1]$, on ait $H(0, s) = f(s)$, $H(1, s) = g(s)$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $H(t, 0) = f(0) = g(0)$ et $H(t, 1) = f(1) = g(1)$.

Définition 2.5 (homotopie relative à un point base) Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique et $x \in E$. Deux chemins fermés f et g de x à x dans E sont dit homotopes relativement à x s'ils sont homotopes à extrémités fixées dans E .

Remarque 2.1 Si on note $A_B(X)$ pour $X \subset E$ l'ensemble des chemins fermés dans X d'un point B à un point B (qu'on appelle le point base), alors la relation d'homotopie relativement à B est une relation d'équivalence sur $A_B(X)$.

Une définition importante est celle d'un *espace simplement connexe*.

Définition 2.6 (espace simplement connexe) Un espace topologique (E, \mathcal{O}) connexe par arcs est dit simplement connexe si pour tout point base $x \in E$, tout chemin fermé de x à x est homotope relativement au point x à un chemin trivial (un tel chemin est dit réductible).



(a) Deux chemins f et g homotopes dans E .

(b) Un espace topologique simplement connexe (sphère dans \mathbb{R}^3).

(c) Un exemple d'espace topologique qui n'est pas simplement connexe (une surface fermée dans \mathbb{R}^3).

FIG. 2.6: La relation d'homotopie dans un espace topologique et la notion d'espace simplement connexe.

Le Lemme 2.3 sera utilisé dans la section suivante afin de justifier la définition de l'homotopie pour les chemins dans un espace discret. Ce lemme, qui provient de la définition même de l'homotopie et de celle d'un espace simplement connexe, est illustré par la Figure 2.7.

Lemme 2.3 *Soient f et g deux chemins dans un espace topologique (E, \mathcal{O}) , et soit V une partie de E telle que le sous espace topologique (V, \mathcal{O}') de (E, \mathcal{O}) induit par V soit simplement connexe. De plus, soit $I = [a, b] \subset [0, 1]$ tel que $\forall x \in [0, a] \cup [b, 1]$, on ait $f(x) = g(x)$; et $\forall x \in [a, b]$, on ait $f(x) \in V$ et $g(x) \in V$. Alors f et g sont homotopes à extrémités fixées dans E .*

Schéma de preuve : Tout d'abord, on doit rappeler un résultat classique de topologie algébrique qui établit que la concaténation de chemins est une opération compatible avec la relation d'homotopie à extrémités fixées. En d'autres termes, pour toutes applications f, f', g et g' telles que $f(1) = f'(1) = g(0) = g'(0)$, si f et f' sont homotopes à extrémités fixées dans E alors $f.g$ et $f'.g$ sont homotopes à extrémités fixées dans E ; et si g et g' sont homotopes à extrémités fixées dans E alors $f.g$ et $f.g'$ sont homotopes à extrémités fixées dans E . Maintenant, on peut définir les chemins suivants dans E :

$$\begin{array}{ll} f_1 : [0, 1] \longrightarrow E & f_3 : [0, 1] \longrightarrow E \\ s \longmapsto f(sa) & s \longmapsto f(b + s(1 - b)) \\ f_2 : [0, 1] \longrightarrow E & g_2 : [0, 1] \longrightarrow E \\ s \longmapsto f(a + s(b - a)) & s \longmapsto g(a + s(b - a)) \end{array}$$

Il est alors immédiat que $f = f_1.f_2.f_3$ et $g = f_1.g_2.f_3$. De plus, f_2 et g_2 sont des applications continues de $[0, 1]$ dans V qui est simplement connexe. Suivant la Définition 2.6, on déduit alors que f_2 et g_2 sont homotopes à extrémités fixées dans V (et donc dans E). Finalement, on obtient que f et g sont homotopes à extrémités fixées dans E . \square

2.2.2 Homotopie pour les chemins discrets

Dans cette sous-section, on montre comment la définition de l'homotopie entre chemins dans un espace topologique peut être transposée au cadre discret. Tout d'abord, notons qu'un \mathcal{R} -chemin de longueur l dans un objet X tel que défini dans la Section 1.1 peut aussi être défini comme une application de l'intervalle entier $\{0, \dots, l\}$ dans X telle que deux entiers consécutifs sont envoyés sur deux spels \mathcal{R} -adjacents de X . Maintenant, nous devons définir la relation d'homotopie entre de tels chemins. Ici, nous donnons une

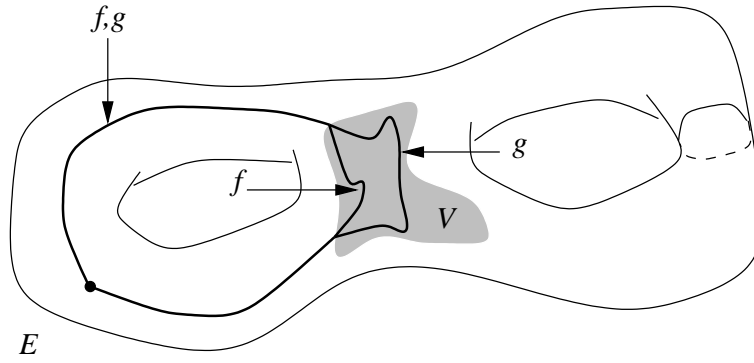


FIG. 2.7: Deux application f et g qui sont identiques sauf dans une partie simplement connexe V de E .

justification intuitive de la Définition qui suivra. Pour une définition et une justification détaillée, se reporter à [Kon89].

Tout d'abord, et puisque les exemples seront choisis dans les espaces discrets \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 , nous devons définir les parties suivantes de \mathbb{Z}^3 :

Définition 2.7 Un carré 2×2 de \mathbb{Z}^3 est l'un des trois ensembles suivants pour $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{Z}^3$:

$$\begin{aligned} & \{(x^1, x^2, x^3), (x^1 + 1, x^2, x^3), (x^1, x^2 + 1, x^3), (x^1 + 1, x^2 + 1, x^3)\}, \\ & \{(x^1, x^2, x^3), (x^1 + 1, x^2, x^3), (x^1, x^2, x^3 + 1), (x^1 + 1, x^2, x^3 + 1)\} \text{ et} \\ & \{(x^1, x^2, x^3), (x^1, x^2 + 1, x^3), (x^1, x^2, x^3 + 1), (x^1, x^2 + 1, x^3 + 1)\}. \end{aligned}$$

Définition 2.8 Un cube $2 \times 2 \times 2$ dans \mathbb{Z}^3 est un ensemble de la forme suivante pour $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{Z}^3$:

$$\begin{aligned} & \{(x^1, x^2, x^3), (x^1 + 1, x^2, x^3), (x^1 + 1, x^2, x^3), (x^1 + 1, x^2 + 1, x^3), (x^1, x^2, x^3 + 1), \\ & (x^1 + 1, x^2, x^3 + 1), (x^1 + 1, x^2, x^3 + 1), (x^1 + 1, x^2 + 1, x^3 + 1)\}. \end{aligned}$$

Puisque la notion de continuité ne peut être utilisée directement dans le cas discret, nous devons utiliser un moyen indirect pour caractériser le fait qu'un \mathcal{R} -chemin discret peut être déformé de façon *continue* en un autre chemin. Ainsi, suivant la propriété énoncée par le Lemme 2.3, une définition convenable peut être donnée en utilisant des *cellules* de taille minimale mais suffisante, simplement connexes et que l'on appellera des *cellules de \mathcal{R} -déformation élémentaire* ; cellules dans lesquelles deux chemins fermés ayant les mêmes extrémités sont intuitivement toujours homotopes. Étant donné un espace discret \mathcal{E} et deux relations d'adjacences complémentaires $(\mathcal{R}, \overline{\mathcal{R}})$, on peut définir les *cellules de*

\mathcal{R} -déformation élémentaire dans cet espace. Alors, la définition d'une \mathcal{R} -déformation élémentaire peut être donnée de la manière suivante : deux chemins sont dit équivalents à une \mathcal{R} -déformation élémentaire près s'ils sont identiques sauf dans une cellule de \mathcal{R} -déformation élémentaire.

On donne les définitions suivantes pour les cellules de \mathcal{R} -déformation élémentaire dans les espaces discrets classiques. Observons que le choix de ces cellules doit satisfaire deux critères principaux. Le premier est que toute partie connexe X d'une cellule doit être simplement connexe au sens de la Définition 2.6 appliquée à son "analogue continu". Le second critère est que la cellule de déformation doit être suffisamment grande pour permettre les déformations élémentaires dans des parties *étroites* d'un objet quand cela doit raisonnablement être possible. Le premier critère est illustré par la Figure 2.8 dans laquelle sont représentées plusieurs parties 26-connexes d'un cube $2 \times 2 \times 2$ de \mathbb{Z}^3 . L'analogue continu de chacun de ces objets est alors simplement l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 appartenant aux voxels (un voxel est identifié à un cube unitaire de \mathbb{R}^3) de l'objet. Il est alors évident que chacun de ces objets est simplement connexe. Dans la Figure 2.10(a) est représentée une partie 6-connexe d'un cube $2 \times 2 \times 2$. Dans ce cas, et puisque la relation d'adjacence utilisée pour le complémentaire est la relation de 26-adjacence, on obtient que les deux voxels blancs (i.e. non représentés) du cube sont 26-adjacents de telle sorte que l'analogue continu de cet objet (Figure 2.10(b)) n'est pas simplement connexe. Ainsi, la cellule de 26-déformation élémentaire ne peut pas être un cube $2 \times 2 \times 2$; par contre un carré 2×2 conviendra puisqu'il vérifie ce premier critère mais aussi le second (c'est une cellule suffisamment grande). Cependant, pour $(n, \bar{n}) \in \{(26, 6), (18, 6+), (6+, 18)\}$ un carré 2×2 peut ne pas suffire pour effectuer des déformations de n -chemins dans un objet n -connexe alors que ces déformations sont envisageables de façon évidente. Par exemple, aucune déformation élémentaire non triviale ne serait possible dans un carré 2×2 , pour un chemin quelconque, dans l'objet représenté par la Figure 2.9 (une partie de plan discret). Aussi, pour $(n, \bar{n}) \in \{(26, 6), (18, 6+), (6+, 18)\}$ on définira une cellule de n -déformation élémentaire comme étant un cube $2 \times 2 \times 2$.

Dans la suite de cette sous-section, $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ est un espace discret, les relations \mathcal{R} et $\bar{\mathcal{R}}$ sont deux relations d'adjacences complémentaires et X est une partie de \mathcal{E} .

Définition 2.9 (cellule de déformation élémentaire dans \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3) *Selon le*

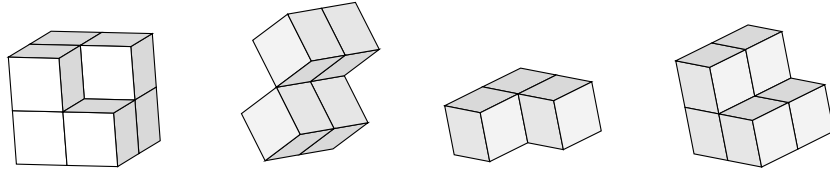


FIG. 2.8: Quelques parties d'un cube $2 \times 2 \times 2$ de \mathbb{Z}^3 .

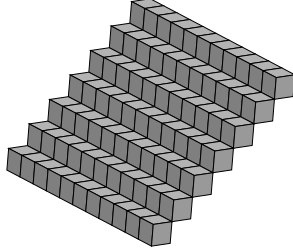
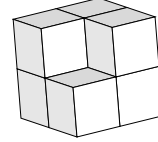
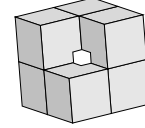


FIG. 2.9: Un carré 2×2 n'est pas une cellule de déformation élémentaire suffisamment grande pour $(n, \bar{n}) = (26, 6)$ ou $(n, \bar{n}) = (18, 6+)$.



(a)



(b)

FIG. 2.10: Une partie d'un cube $2 \times 2 \times 2$ pour $(n, \bar{n}) = (6, 26)$.

couple de relations d'adjacence complémentaires (n, \bar{n}) on a :

- Si $\mathcal{E} = \mathbb{Z}^2$, une cellule de déformation élémentaire est un carré 2×2 de pixels.
- Si $\mathcal{E} = \mathbb{Z}^3$ et $(n, \bar{n}) = (6, 26)$, une cellule de déformation élémentaire est un carré 2×2 de voxels.
- Si $\mathcal{E} = \mathbb{Z}^3$ et $(n, \bar{n}) \in \{(26, 6), (18, 6), (6+, 18)\}$, une cellule de déformation élémentaire est un cube $2 \times 2 \times 2$ de voxels.

La remarque suivante sera intéressante pour la suite.

Remarque 2.2 *Quelque soit l'espace discret \mathcal{E} considéré, deux spels \mathcal{R} -adjacents sont toujours inclus dans une même cellule de \mathcal{R} -déformation élémentaire associée à \mathcal{E} .*

Maintenant, on peut définir la relation de déformation élémentaire entre deux chemins d'un espace discret et enfin la relation d'homotopie entre de tels chemins.

Définition 2.10 (\mathcal{R} -déformation élémentaire) *Soient π et π' deux \mathcal{R} -chemins dans X . Les deux chemins π et π' sont dit identiques à une \mathcal{R} -déformation élémentaire près, et on note $\pi \sim_{\mathcal{R}} \pi'$, si $\pi = \pi_1 \cdot \gamma \cdot \pi_2$ et $\pi' = \pi_1 \cdot \gamma' \cdot \pi_2$ où γ et γ' sont deux \mathcal{R} -chemins*

ayant les mêmes extrémités et tous les deux inclus dans une même cellule de \mathcal{R} -déformation élémentaire de \mathcal{E} .

Définition 2.11 (\mathcal{R} -homotopie de chemins discrets) Deux \mathcal{R} -chemins π et π' dans X sont \mathcal{R} -homotopes à extrémités fixées dans X , et on note alors $\pi \simeq_{\mathcal{R}} \pi'$, s'il existe une suite π_1, \dots, π_l de \mathcal{R} -chemins dans X tels que $\pi = \pi_1$, $\pi' = \pi_l$ et pour $i = 1, \dots, l - 1$ les chemins π_i et π_{i+1} sont identiques à une \mathcal{R} -déformation élémentaire près.

Définition 2.12 (chemin réductible) Un \mathcal{R} -chemin fermé π d'un spel x à x dans X est dit \mathcal{R} -réductible dans X si $\pi \simeq_{\mathcal{R}} (x, x)$ dans X .

Remarque 2.3 Dans la suite, on ne précisera pas que la relation d'homotopie est "à extrémités fixées" puisque la définition de la relation de \mathcal{R} -déformation élémentaire implique que la déformation s'effectue à extrémités fixées.

Deux exemples de n -déformations élémentaires sont illustrés par la Figure 2.11 pour $n = 4$ dans \mathbb{Z}^2 et par la Figure 2.12 pour $n = 6+$ dans \mathbb{Z}^3 .

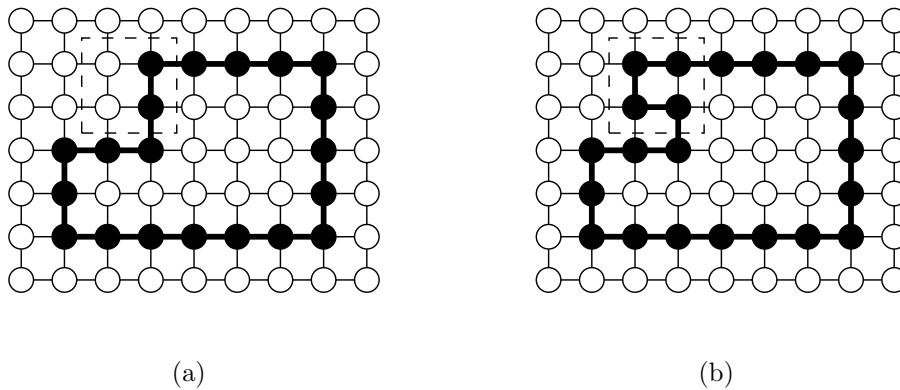


FIG. 2.11: Les deux 4-chemins noirs sont identiques à une 4-déformation élémentaire près.

A partir des définitions précédentes, nous pouvons donner la définition d'un *objet discret simplement connexe*. Notons que nous avons utilisé la notion de connexité simple pour les parties de cellules de déformation élémentaire afin d'obtenir la Définition 2.9. On pourrait alors penser que la connexité simple dans le cas discret n'est alors pas bien définie. Cependant, le fait qu'une partie de taille réduite d'un espace discret soit simplement connexe est admissible de façon intuitive et ne requiert pas la définition d'autres outils

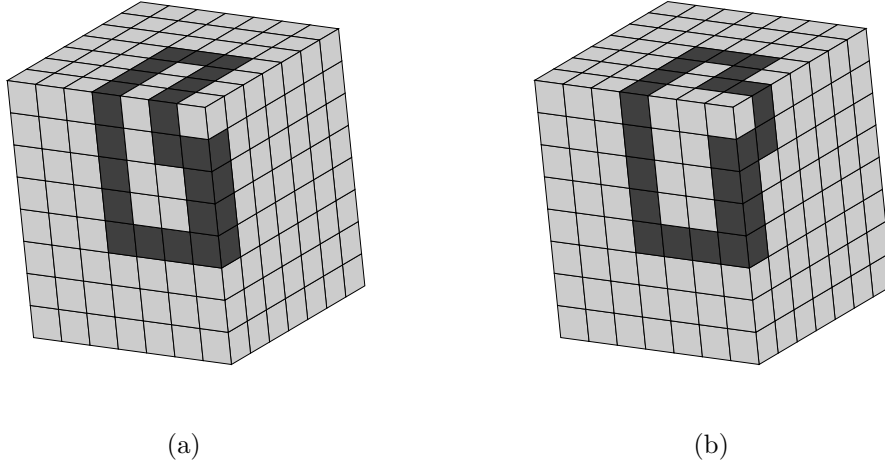


FIG. 2.12: Les deux $(6+)$ -chemins noirs sont identiques à une $(6+)$ -déformation élémentaire près.

mathématiques que ceux qui ont été introduits ici. Cette propriété admise des cellules de déformation élémentaire conduit de plus aux relations de déformations communément utilisées, qui peuvent d'une certaine manière être qualifiées de conventionnelles.

Maintenant, nous donnons la définition d'un ensemble *simplement connexe* sans avoir recours à la définition d'un analogue continu de l'objet en question. A ce stade, plusieurs définitions peuvent être données qui sont similaires à leurs analogues continus mais qui s'énoncent simplement dans le cadre discret.

Définition 2.13 (ensemble simplement \mathcal{R} -connexe) *L'ensemble X est dit simplement \mathcal{R} -connexe si pour tout point de base $x \in X$, tout \mathcal{R} -chemin fermé π de x à x dans X est \mathcal{R} -réductible dans X .*

Un exemple de partie de \mathbb{Z}^3 qui n'est pas simplement connexe est représenté dans la Figure 2.13.

Le Lemme suivant sera utilisé dans la Section 2.3 .

Lemme 2.4 *Soit π un \mathcal{R} -chemin d'un spel y_0 à un spel y_p dans un objet X . Alors, le \mathcal{R} -chemin $\pi.\pi^{-1}$ de y_0 à y_0 est \mathcal{R} -homotope au chemin (y_0, y_0) dans X (i.e. $\pi.\pi^{-1}$ est \mathcal{R} -réductible dans X).*

Preuve : Soit $\pi = (y_0, \dots, y_p)$. Alors, pour $k \in \{0, \dots, p\}$ on note β^k le \mathcal{R} -chemin (y_0, y_1, \dots, y_k) . On prouve dans un premier temps que pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$ le chemin fermé $\beta^j.(\beta^j)^{-1}$ est \mathcal{R} -homotope au chemin $\beta^{j-1}.(\beta^{j-1})^{-1}$. En effet, pour un tel entier

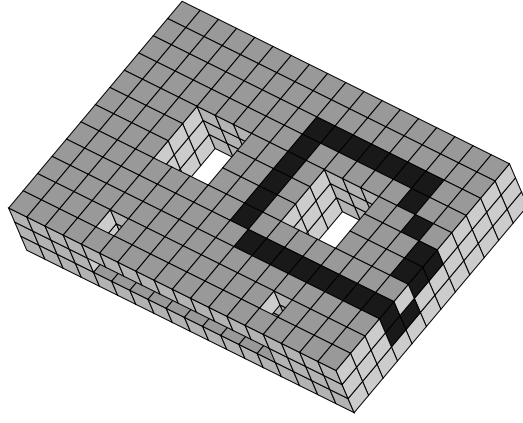


FIG. 2.13: Cet objet de \mathbb{Z}^3 n'est pas simplement 18-connexé puisque le 18-chemin (en noir) n'est pas 18-réductible.

j on a $\beta^j.(\beta^j)^{-1} = \beta^{j-1}.(y_{j-1}, y_j, y_{j-1}).(\beta^{j-1})^{-1}$. Alors, les deux spels y_{j-1} et y_j appartenant à une même cellule de déformation élémentaire (Remarque 2.2), on en déduit que le chemin $\beta^j.(\beta^j)^{-1}$ est \mathcal{R} -homotope au chemin $\beta^{j-1}.(y_{j-1}).(\beta^{j-1})^{-1} = \beta^{j-1}.(\beta^{j-1})^{-1}$. Finalement, par induction on obtient que $\pi.\pi^{-1} = \beta^p.(\beta^p)^{-1} \sim_{\mathcal{R}} \beta^{p-1}.(\beta^{p-1})^{-1} \sim_{\mathcal{R}} \dots \sim_{\mathcal{R}} \beta^0.(\beta^0)^{-1} = (y_0, y_0)$. \square

En utilisant le Lemme 2.4, on peut d'ores et déjà montrer la Proposition 2.5 qui nous sera utile par la suite.

Proposition 2.5 *L'ensemble X est simplement \mathcal{R} -connexe si et seulement si deux \mathcal{R} -chemins quelconques π et π' ayant les mêmes extrémités sont \mathcal{R} -homotopes dans X .*

Preuve : Tout d'abord, supposons que deux chemins π et π' ayant les mêmes extrémités soient toujours \mathcal{R} -homotopes dans X . Alors, soit x un spel de X et $c = (x_0, \dots, x_q)$ un \mathcal{R} -chemin fermé de x à x dans X (i.e. $x_0 = x_q = x$). Alors, il est immédiat que c est \mathcal{R} -homotope au chemin (x, x) , ou encore c est réductible dans X . Finalement, X est simplement \mathcal{R} -connexe.

Maintenant, supposons que tout \mathcal{R} -chemin fermé soit réductible dans X . Alors, soient π_1 et π_2 deux \mathcal{R} -chemins d'un spel x à un spel y dans X . Alors, on a $(y, y) \simeq_{\mathcal{R}} \pi_1^{-1}.\pi_2$ dans X puisque $\pi_1^{-1}.\pi_2$ est un \mathcal{R} -chemin fermé dans X . Puisque π_1 est de façon évidente \mathcal{R} -homotope au chemin $\pi_1.(y, y)$ on obtient que $\pi_1 \simeq_{\mathcal{R}} \pi_1.\pi_1^{-1}.\pi_2$ dans X . D'après le Lemme 2.4, on a $\pi_1.\pi_1^{-1} \simeq_{\mathcal{R}} (x, x)$ et finalement $\pi_1 \simeq_{\mathcal{R}} (x, x).\pi_2 \simeq_{\mathcal{R}} \pi_2$ dans X . \square

Le lemme suivant nous sera lui aussi utile.

Lemme 2.6 *Soit π un \mathcal{R} -chemin fermé \mathcal{R} -réductible dans X et soit π' un \mathcal{R} -chemin fermé tel que π et π' soient identiques à un changement de paramètre près. Alors, π' est \mathcal{R} -réductible dans X .*

Preuve : Si les deux \mathcal{R} -chemins $\pi = (y_0, \dots, y_p)$ et $\pi' = (y'_0, \dots, y'_p)$ sont identiques à un changement de paramètre près, alors l'une des deux situations suivantes est vérifiée :

$$i) \quad \pi' = (y_{k_0}, y_{k_0+1}, \dots, y_p) \cdot (y_0, y_1, \dots, y_{k_0})$$

$$ii) \quad \pi' = (y_{k_0}, y_{k_0-1}, \dots, y_0) \cdot (y_p, y_{p-1}, \dots, y_{k_0})$$

Cas *i*) : Soit γ le chemin (y_0, \dots, y_{k_0}) . Alors, d'après le Lemme 2.4, le chemin $\gamma^{-1} \cdot \gamma$ qui est un chemin fermé de y_{k_0} à y_{k_0} est réductible, donc π' est \mathcal{R} -homotope au chemin $\gamma^{-1} \cdot \gamma \cdot \pi' = \gamma^{-1} \cdot \gamma \cdot (y_{k_0}, y_{k_0+1}, \dots, y_p) \cdot (y_0, y_1, \dots, y_{k_0})$ où $\gamma \cdot (y_{k_0}, y_{k_0+1}, \dots, y_p)$ n'est autre que le chemin π . Alors, il est immédiat que $\gamma^{-1} \cdot \gamma \cdot \pi'$ est \mathcal{R} -homotope au chemin $\gamma^{-1} \cdot (y_0, y_1, \dots, y_{k_0}) = \gamma^{-1} \cdot \gamma$ lui même réductible selon le Lemme 2.4. Finalement, π' est réductible dans X .

Cas *ii*) : Le chemin π' du cas *ii*) n'est autre que l'inverse du chemin π' du cas *i*). Alors, on admet sans preuve que si un chemin c est réductible, alors son inverse c^{-1} l'est aussi. Ainsi, si le chemin π' du cas *i*) est réductible, le chemin π' du cas *ii*) est aussi réductible.

□

2.3 Le groupe fondamental discret

Dans cette section, on introduit un outil important dans la cadre de la géométrie discrète qui fournit un moyen formel et rigoureux pour caractériser la préservation de la topologie dans des espaces discrets : le groupe fondamental qui a été introduit par T.Y Kong [Kon89]. L'un des buts de la Partie II est de fournir la preuve d'un nouveau théorème qui montre que le groupe fondamental est suffisant pour caractériser la *sous homotopie* au sein des surfaces discrètes (la notion de sous homotopie sera définie formellement dans le Chapitre 3). D'autre part, il est aussi utilisé dans la caractérisation des points simples en 3D qui a été simplifiée dans la Partie III. On rappelle une fois de plus que le groupe fondamental discret est en fait la notion centrale de l'étude présentée ici.

2.3.1 Définition

La définition du groupe fondamental discret a été donnée pour la première fois par T.Y. Kong dans [Kon89]. Cette définition est similaire à celle du groupe fondamental de la topologie algébrique et repose sur la notion d'homotopie (voir [Spa66]).

Soit X une partie \mathcal{R} -connexe de \mathcal{E} et soit $B \in X$ un spel appelé *point base* (ou *spel de base*). On note $A_{\mathcal{R}}^B(X)$ l'ensemble de tous les \mathcal{R} -chemins fermés de B à B dans X . On remarque tout d'abord que la relation de \mathcal{R} -homotopie est une relation d'équivalence dans $A_{\mathcal{R}}^B(X)$.

On note $\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B)$ l'ensemble des classes d'équivalences de chemins de $A_{\mathcal{R}}^B(X)$ par la relation de \mathcal{R} -homotopie (i.e. $\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B) = A_{\mathcal{R}}^B(X) / \simeq_{\mathcal{R}}$).

Notation 2.1 Pour tout chemin fermé $c \in A_{\mathcal{R}}^B(X)$, on note $[c]_{\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B)}$ la classe d'équivalence de c dans $\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B)$. Quand aucune confusion n'est possible, on note une telle classe simplement $[c]$. Remarquons que la première notation est diffère légèrement de celle utilisée dans la Définition 1.4. De plus, afin d'améliorer la lisibilité, on pourra noter $[1]_{\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B)}$ au lieu de $[(B, B)]_{\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B)}$.

Maintenant, on peut définir la correspondance suivante :

Définition 2.14 (correspondance C) On note C la correspondance entre les deux ensembles $\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B) \times \Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B)$ et $\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B)$ définie de la manière suivante :

$$C = \{ ([a], [b]), [a.b] \mid a, b \in A_{\mathcal{R}}^B(X) \}$$

On utilisera le Lemme suivant afin de montrer que C est un application (Proposition 2.8).

Lemme 2.7 ($\simeq_{\mathcal{R}}$ est compatible avec “.”) Soient a, b, a' et b' quatre chemins de l'ensemble $A_{\mathcal{R}}^B(X)$, si $a \simeq_{\mathcal{R}} a'$ et $b \simeq_{\mathcal{R}} b'$, alors $a.b \simeq_{\mathcal{R}} a'.b'$.

Preuve : Par définition même de la relation de \mathcal{R} -homotopie, si $a \simeq_{\mathcal{R}} a'$ alors $a.b \simeq_{\mathcal{R}} a'.b$. En effet, si $a = a_0 \sim_{\mathcal{R}} a_1 \sim_{\mathcal{R}} \dots \sim_{\mathcal{R}} a_l = a'$ est une séquence de \mathcal{R} -déformations élémentaires dans X , alors la séquence suivante $a.b = a_0.b \sim_{\mathcal{R}} a_1.b \sim_{\mathcal{R}} \dots \sim_{\mathcal{R}} a_l.b = a'.b$ en est une aussi. De la même façon, $a'.b \simeq_{\mathcal{R}} a'.b'$. \square

Proposition 2.8 C est une application.

Preuve : Soient $(([a], [b]), [a.b]) \in C$ et $(([a'], [b']), [a'.b']) \in C$. Supposons que $([a], [b]) = ([a'], [b'])$, i.e. $a \simeq_{\mathcal{R}} a'$ et $b \simeq_{\mathcal{R}} b'$. D'après le Lemme 2.7, on en déduit que $a.b \simeq_{\mathcal{R}} a'.b'$, i.e. $[a.b] = [a'.b']$. \square

Définition 2.15 Selon la Proposition 2.8 l'application suivante est bien définie :

$$\begin{aligned} * : \Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B) \times \Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B) &\longrightarrow \Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B) \\ ([\pi_1], [\pi_2]) &\longmapsto [\pi_1] * [\pi_2] = [\pi_1.\pi_2] \end{aligned}$$

Alors, $*$ est une opération interne sur $\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B)$.

Proposition 2.9 $(\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B), *)$ est un groupe.

Preuve : On note π_{id} le chemin trivial (B, B) .

- L'opération $*$ est associative; en effet, par définition des opérations “ $*$ ” et “ $.$ ”, on a $([a] * [b]) * [c] = [a.b] * [c] = [(a.b).c] = [a.(b.c)] = [a] * [b.c] = [a] * ([b] * [c])$.
- Pour toute classe d'homotopie $[\pi] \in \Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B)$ on a $[\pi] * [\pi_{id}] = [\pi_{id}] * [\pi] = [\pi]$. En effet, pour tout chemin $\pi \in A_{\mathcal{R}}^B(X)$, les chemins $\pi.(B, B)$ et $(B, B).\pi$ sont tous les deux \mathcal{R} -homotopes à π (en fait $\pi.(B, B)$ et π sont identiques à une \mathcal{R} -déformation élémentaire près). Ainsi, π_{id} est l'élément neutre associé à la structure $(\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B), *)$.
- Pour toute classe d'équivalence $[\pi]$ de $\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B)$, on pose $[\pi]^{-1} = [\pi^{-1}]$. Alors, $[\pi] * [\pi]^{-1} = [\pi] * [\pi^{-1}] = [\pi.\pi^{-1}]$. D'après le Lemme 2.4, le chemin $\pi.\pi^{-1}$ est \mathcal{R} -homotope au chemin trivial (B, B) . Ainsi, $[\pi] * [\pi]^{-1} = [\pi_{id}]$. De la même façon, $[\pi]^{-1} * [\pi] = [\pi_{id}]$.

\square

La proposition suivante signifie que le groupe fondamental discret, à isomorphisme près, ne dépend pas du choix d'un point base dans une même composante \mathcal{R} -connexe de X .

Proposition 2.10 Soient B et B' deux spels qui sont \mathcal{R} -connectés dans X . Alors les groupes $\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B)$ et $\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B')$ sont isomorphes.

Preuve : Soit c un \mathcal{R} -chemin de B à B' dans X et I l'application suivante :

$$\begin{aligned} I : \Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B) &\longrightarrow \Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B') \\ [\pi] &\longmapsto [c^{-1}.\pi.c] \end{aligned}$$

Tout d'abord, on montre que I est un morphisme de groupes. Soient π_1 et π_2 deux chemins dans $A_{\mathcal{R}}^B(X)$. On a $I([\pi_1] * [\pi_2]) = I([\pi_1.\pi_2]) = [c^{-1}.\pi_1.\pi_2.c]$. D'autre part, $I([\pi_1]) = [c^{-1}.\pi_1.c]$ et $I([\pi_2]) = [c^{-1}.\pi_2.c]$ donc $I([\pi_1]) * I([\pi_2]) = [c^{-1}.\pi_1.c] * [c^{-1}.\pi_2.c] = [c^{-1}.\pi_1.c.c^{-1}.\pi_2.c]$. Mais, d'après le Lemme 2.4, on sait que $c.c^{-1} \simeq_{\mathcal{R}} (B, B)$ et on obtient que $[c^{-1}.\pi_1.c.c^{-1}.\pi_2.c] = [c^{-1}.\pi_1.\pi_2.c]$. Finalement, $I([\pi_1] * [\pi_2]) = I([\pi_1]) * I([\pi_2])$.

Maintenant, soit $\pi' \in A_{\mathcal{R}}^{B'}(X)$ (i.e. $[\pi'] \in \Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B')$), alors le chemin $\pi = c.\pi'.c^{-1}$ de B à B dans X vérifie $I([\pi]) = [\pi']$. En effet, $I([c.\pi'.c^{-1}]) = [c^{-1}.c.\pi'.c^{-1}.c]$ et d'après le Lemme 2.4, on a $c^{-1}.c.\pi'.c^{-1}.c \simeq_{\mathcal{R}} \pi'$ de sorte que $[c^{-1}.c.\pi'.c^{-1}.c] = [\pi']$. Donc I est un morphisme surjectif.

Supposons que π_1 et π_2 soient deux chemins de $A_{\mathcal{R}}^B(X)$ tels que $I([\pi_1]) = I([\pi_2])$. Alors les chemins $c^{-1}.\pi_1.c$ et $c^{-1}.\pi_2.c$ sont \mathcal{R} -homotopes dans X . Maintenant, si $c^{-1}.\pi_1.c \simeq_{\mathcal{R}} c^{-1}.\pi_2.c$ alors $c.c^{-1}.\pi_1.c \simeq_{\mathcal{R}} c.c^{-1}.\pi_2.c$ (remarquons que ces deux derniers chemins sont des chemins de B vers B'). De la même façon, on déduit que $c.c^{-1}.\pi_1.c.c^{-1} \simeq_{\mathcal{R}} c.c^{-1}.\pi_2.c.c^{-1}$ (chemins de B à B). D'après le Lemme 2.4, on obtient que $\pi_1 \simeq_{\mathcal{R}} \pi_2$ et donc que $[\pi_1] = [\pi_2]$. Finalement, I est un morphisme injectif. \square

2.3.2 Morphisme de groupes induit par l'application d'inclusion

La notion de morphisme de groupes induit par l'inclusion sera utilisée dans les parties suivantes pour caractériser la préservation de la topologie quand un ensemble de spels (Partie II) ou un spel seul (Partie III) est supprimé d'un objet.

Soient $Y \subset X$ deux parties d'un espace discret $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ et B un spel de Y . On note $i : Y \rightarrow X$ l'application d'inclusion de Y dans X (i.e. $\forall x \in Y, i(x) = x$). Alors, on peut définir l'application i_+ de $A_{\mathcal{R}}^B(Y)$ à $A_{\mathcal{R}}^B(X)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} i_+ : \quad A_{\mathcal{R}}^B(Y) &\longrightarrow A_{\mathcal{R}}^B(X) \\ (x_0, x_1, \dots, x_q) &\longmapsto (i(x_0), i(x_1), \dots, i(x_q)) = (x_0, x_1, \dots, x_q) \end{aligned}$$

Cette application associe à un chemin de $A_{\mathcal{R}}^B(Y)$ le même chemin en tant que chemin de $A_{\mathcal{R}}^B(X)$. Alors on peut définir de manière canonique le morphisme de groupes suivant :

Définition 2.16 *On définit i_* , le morphisme de groupes induit par l'inclusion de Y dans X par :*

$$\begin{aligned} i_* : \quad \Pi_1^{\mathcal{R}}(Y, B) &\longrightarrow \Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B) \\ [c]_{\Pi_1^{\mathcal{R}}(Y, B)} &\longmapsto [c]_{\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B)} \end{aligned}$$

Cette application est bien définie puisque deux \mathcal{R} –chemins qui sont \mathcal{R} –homotopes dans Y le sont évidemment aussi dans X de sorte qu’une classe d’homotopie $[c]_{\Pi_1^{\mathcal{R}}(Y, B)}$ est envoyée par cette application sur une unique classe d’homotopie de $\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B)$. Enfin, cette application est clairement un morphisme de groupes par définition même de l’opération $*$ (Définition 2.15).

Chapitre 3

Préservation de la topologie

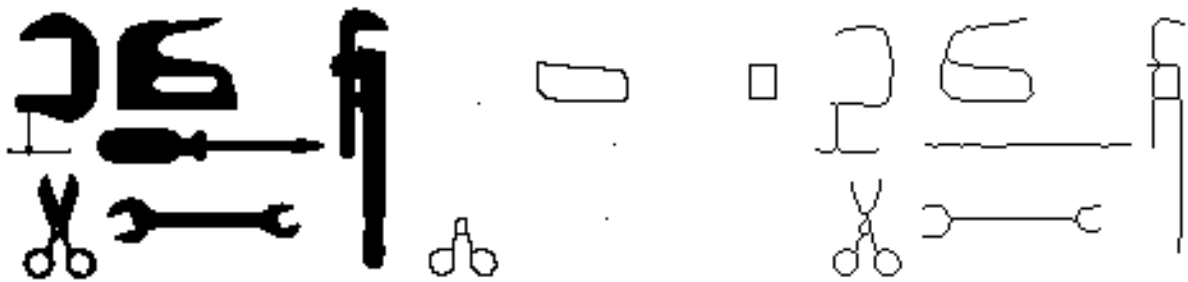
Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de déformation préservant la topologie d'un objet discret. Tandis que les Sections 2.2 et 2.3 étaient dédiées à la définition de déformations *continues* pour les chemins dans un objet discret, une autre notion d'homotopie peut être définie pour les objets discrets eux-mêmes. Tout d'abord, nous allons rappeler une application importante de cette notion d'homotopie : les algorithmes de squelettisation homotopiques. Ensuite, nous donnerons plusieurs définitions génériques avant d'en donner leurs illustrations dans le cas de \mathbb{Z}^2 .

3.1 Déformations préservant la topologie

Ici, nous présentons une première approche de la notion de *préservation de la topologie dans un espace discret* en prenant des exemples dans le cas de l'espace \mathbb{Z}^2 muni des relations d'adjacence habituelles, sans toutefois définir formellement cette notion centrale. Cependant, cette section nous permettra de motiver les quelques définitions qui seront données dans la Section 3.2. Dans une section suivante, nous utiliserons ces définitions pour formaliser les résultats principaux obtenus par différents auteurs en ce qui concerne la préservation de la topologie dans \mathbb{Z}^2 .

Dans la chaîne de traitement d'images, comme par exemple à des fins de reconnaissance des formes, il est parfois nécessaire d'extraire des informations d'ordre topologique d'une image. Cette extraction peut alors s'effectuer après une première étape qui consiste en l'utilisation d'un algorithme dit de *squelettisation homotopique* (aussi appelé algorithme d'*amincissement homotopique*). Ici, *homotopique* signifie qu'un tel algorithme préserve

les propriétés topologiques de l'image qui lui est donnée en entrée. Étant donné un objet X dans un espace discret \mathcal{E} , il produit un autre objet $Y \subset X$ qui est topologiquement équivalent à l'objet X mais de taille inférieure (au sens du nombre de spels qu'il contient). Plus précisément, Y est de dimension inférieure à X comme illustré dans la Figure 3.1(b), où toutes les parties larges possédant au moins un trou sont réduites à un réseau de courbes (voir les ciseaux de la Figure 3.1(a)), et toutes les parties dépourvues de trou sont réduites à un pixel unique. En pratique, il est souvent utile d'utiliser des algorithmes de squelettisation qui préservent certaines propriétés géométriques des objets comme illustré par la Figure 3.1(c). Maintenant, la méthode la plus utilisée pour effectuer une telle extraction consiste en la suppression séquentielle, et parfois parallèle, de spels, en prenant soin de ne pas modifier les propriétés topologiques de l'image. Dans ce cas, comme dans celui des déformations plus générales qui seront décrites plus loin, on a besoin de caractériser le fait que la suppression d'un spel modifie ou ne modifie pas les propriétés topologiques d'une image.



(a) Une image de départ.

(b) Résultat obtenu après un amincissement complet de l'image de départ.

(c) Résultat obtenu après un amincissement partiel de l'image de départ.

FIG. 3.1: Illustration du résultat possible de l'application d'un algorithme de squelettisation dans \mathbb{Z}^2 .

D'autre part, il est parfois utile de tester si un autre type de déformation continue peut être appliquée à une image donnée afin d'obtenir une autre image. Par exemple, on peut se demander si l'image de la Figure 3.2(a) peut être déformée de façon continue en celle de la Figure 3.2(b). Clairement, la définition d'une *déformation continue* dans un espace discret ne doit pas autoriser une telle déformation. Dans ce cas, les notions qui vont suivre sont aussi intéressantes.

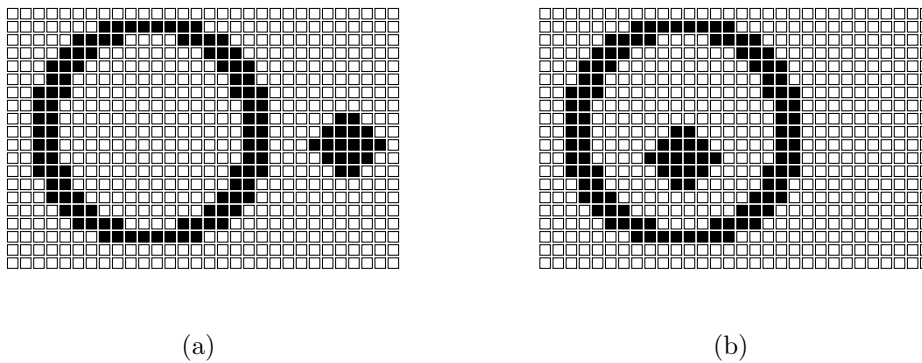


FIG. 3.2: Ces deux images peuvent elles être déformées l'une en l'autre par une déformation continue ?

En effet, un moyen classique de définir une déformation préservant la topologie d'un objet discret est de la diviser en une séquence de déformations élémentaires qui consistent, pour chacune d'entre elles, en la suppression ou l'ajout d'un unique spel de l'objet considéré. La notion fondamentale de cette méthode est celle de *spel simple*. Un *spel simple* est ainsi défini comme un spel dont la suppression laisse inchangées les propriétés topologiques de l'objet. Cependant, une telle définition n'est évidemment pas acceptable. En effet, aucune définition précise n'a été donnée jusqu'ici de ce que l'on entend par "propriété topologique" d'un objet discret. En fait, cette définition dépend de l'espace discret considéré. Clairement, un objet de \mathbb{Z}^2 est caractérisé de point de vue topologique par le nombre de ses composantes connexes noires et blanches et par les relations d'inclusions entre ces composantes (voir Figure 3.2). Cette définition des propriétés topologiques d'une image binaire 2D amène à celle des pixels simples qui elle même aboutit à une *caractérisation locale* de ces points simples.

Dans la section suivante, nous introduirons entre autres les notions de simplicité, de caractérisation locale, de sous-homotopie. Notons que toutes ces définitions sont valables pour un espace discret quelconque pour peu que l'on ait défini une première propriété : la simplicité.

3.2 Propriété de simplicité et homotopie

Puisque la définition d'un *spel simple* est très dépendante de l'espace discret considéré, et puisque beaucoup des définitions qui vont suivre reposent sur cette dernière notion, nous introduisons tout d'abord la notion de *propriété de simplicité* de manière générique.

Notons que le terme de “simplicité” doit uniquement évoquer ici le fait que ce type de propriété sera utilisé par la suite dans le cadre de la préservation de la topologie, même si le type de propriété ainsi défini est beaucoup plus général. Afin de donner un sens pratique à toutes les définitions suivantes, et en tant qu’introduction aux questions qui seront examinées dans les Parties II et III, nous illustrons ces notions pour le cas de \mathbb{Z}^2 dans la sous-section suivante.

Définition 3.1 (propriété de simplicité) Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ un espace discret et soit $P(\mathcal{E})$ l’ensemble des parties de \mathcal{E} . Une propriété de simplicité \mathcal{S} dans \mathcal{E} est une application de $P(\mathcal{E}) \times \mathcal{E}$ dans $\{0, 1\}$. Si X est une partie de \mathcal{E} , un spel x est dit \mathcal{S} -simple pour X si $\mathcal{S}(X, x) = 1$.

Utilisant cette définition d’un spel \mathcal{S} -simple, on peut définir les parties \mathcal{S} -simples de X comme des ensembles qui peuvent être ordonnés de telle sorte qu’un effacement séquentiel de leurs spels selon cet ordre ne supprime que des spels \mathcal{S} -simples.

Définition 3.2 (ensemble \mathcal{S} -simple) Soient $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ un espace discret et \mathcal{S} une propriété de simplicité sur \mathcal{E} . De plus, soit $X \subset \mathcal{E}$ et soit $D = \{x_0, x_1, \dots, x_l\}$ une partie de X . L’ensemble D est appelé ensemble \mathcal{S} -simple pour X s’il existe une permutation σ de $\{0, \dots, l\}$ telle que pour $i = 0, \dots, l$ le spel $x_{\sigma(i)}$ est \mathcal{S} -simple pour $X \setminus \{x_{\sigma(j)} \mid j < i\}$.

La définition d’un spel \mathcal{S} -simple nous permet de définir une notion fondamentale de la géométrie discrète, plus spécialement dans le cadre des algorithmes de squelettisation : la *sous-homotopie*.

Définition 3.3 (sous \mathcal{S} -homotopie) Soient $Y \subset X$ deux parties d’un espace discret \mathcal{E} et soit \mathcal{S} une propriété de simplicité sur \mathcal{E} . L’ensemble Y est dit sous \mathcal{S} -homotope à X si l’ensemble $Y \setminus X$ est un ensemble \mathcal{S} -simple pour X . En d’autres termes, s’il existe une séquence $S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_k$ de parties de \mathcal{E} telle que $Y = S_0$, $X = S_k$ et pour $i = 0 \dots k - 1$, l’ensemble S_i est obtenu par suppression d’un spel \mathcal{S} -simple de S_{i+1} .

Si la définition de la sous-homotopie est clairement liée au processus d’amincissement homotopique, il est cependant utile de définir une relation plus générale qui relie des objets discrets qui sont équivalents à un certain type de déformation continue près. En effet, à des fins d’analyse d’images, on peut vouloir caractériser le fait que chacun des

deux objets représentés dans la Figure 3.3 peut être obtenu par déformation continue de l'autre. Un moyen naturel de définir cette relation d'équivalence entre objets est une fois encore d'utiliser la notion de spel simple. Ce type de déformation est aussi appelé *déformation simple* dans [RKN98]. Ici, nous utiliserons le terme d'*homotopie symétrique*.



FIG. 3.3: Deux parties de \mathbb{Z}^2 qui sont équivalentes à une déformation “continue” près.

Définition 3.4 (S-homotopie symétrique) Soient X et Y deux parties d'un espace discret \mathcal{E} et \mathcal{S} un propriété de simplicité dans \mathcal{E} . L'ensemble X est dit symétriquement \mathcal{S} -homotope à Y s'il existe une séquence S_0, S_1, \dots, S_k de parties de \mathcal{E} telle que $X = S_0$, $Y = S_k$ et pour $i = 0 \dots k-1$, l'ensemble S_i est obtenu par suppression d'un spel \mathcal{S} -simple de S_{i+1} ou bien l'ensemble S_{i+1} est obtenu par suppression d'un spel \mathcal{S} -simple de S_i .

Maintenant, nous introduisons les notions de *caractérisation locale* et de *propriété locale*. Une *caractérisation locale* peut être définie comme une application de $P(\mathcal{E}) \times \mathcal{E}$ dans $\{0, 1\}$, dont la valeur est calculée pour tout $x \in \mathcal{E}$ en examinant un ensemble réduit de spels.

Définition 3.5 (caractérisation locale, propriété locale) Soient $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ un espace discret et X un objet dans \mathcal{E} . Une caractérisation locale est une application C de la forme :

$$C : P(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$(X, x) \longmapsto \mathcal{V}(N_{\mathcal{R}}(x) \cap X)$$

Où \mathcal{V} est une application de $P(\mathcal{E})$ dans $\{0, 1\}$. On dit qu'un spel $x \in \mathcal{E}$ satisfait la caractérisation locale C dans X si $C(X, x) = 1$. Une propriété sur les spels d'une partie d'un espace discret est dite locale s'il existe une caractérisation locale C telle qu'un spel x possède cette propriété relativement à X si et seulement si $C(X, x) = 1$.

3.3 Préservation de la topologie dans \mathbb{Z}^2

Dans cette section, X est un objet de l'espace discret (\mathbb{Z}^2, n) pour $(n, \bar{n}) \in \{(4, 8), (8, 4)\}$. Dans ce cadre, il est communément admis que la suppression d'un pixel de X modifie la topologie de X si elle change le nombre de composantes n -connexes de X ou bien le nombre de composantes \bar{n} -connexes de \bar{X} . Ceci est résumé par l'énoncé de la propriété de simplicité \mathcal{S}_n suivante :

Définition 3.6 *Un pixel $x \in X$ est dit \mathcal{S}_n -simple pour X si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

- i) X et $X \setminus \{x\}$ ont le même nombre de composantes n -connexes.*
- ii) \bar{X} et $\bar{X} \cup \{x\}$ ont le même nombre de composantes \bar{n} -connexes.*

Afin d'éviter des notations trop lourdes, et puisqu'aucune confusion n'est possible, nous abrègerons par la suite le terme \mathcal{S}_n -simple en n -simple.

On peut illustrer sur un exemple le fait que la suppression ou l'ajout de pixels n -simples ne peut pas changer les propriétés topologiques d'une image discrète à deux dimensions. En effet, comme mentionné précédemment, une telle image est caractérisée par le nombre de ses composantes blanches et noires, mais aussi par leur relations d'inclusions. Dans la Figure 3.4, nous avons représenté pour un objet X l'ensemble des pixels (en gris) qui vérifient les propriétés de la Définition 3.6. Cela signifie qu'on peut effacer n'importe lequel de ces pixels gris tout en préservant les propriétés topologiques de l'image. Réciproquement, la suppression d'un pixel noir quelconque aboutit quand à elle à la modification des propriétés topologiques de l'image (selon le couple de relations d'adjacence (n, \bar{n}) considéré).

Une propriété très utile des pixels \mathcal{S}_n -simples est qu'il peuvent être caractérisés localement. En effet, le théorème suivant peut être trouvé dans [Ros70] :

Théorème 5 (caractérisation locale des pixels simples)

Le pixel $x \in X$ est

n -simple pour X si et seulement si :

- i) $N_n(x) \cap X$ est non vide et n -connexe.*
- ii) $N_{\bar{n}}(x) \cap \bar{X}$ est non vide et \bar{n} -connexe.*

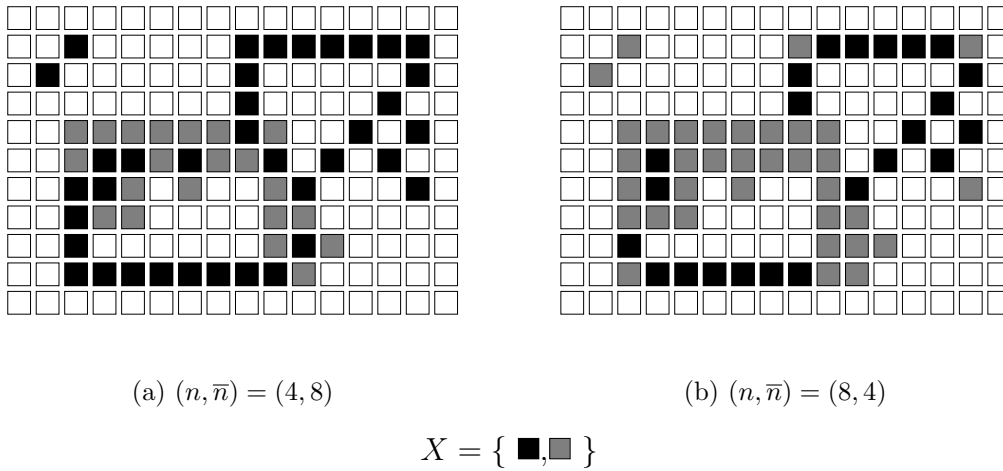


FIG. 3.4: Illustration de la propriété de simplicité \mathcal{S}_n pour $n \in \{4, 8\}$, seuls les pixels gris sont n -simples pour X .

Il est clair que ce théorème fournit une caractérisation locale de la propriété de simplicité \mathcal{S}_n au sens de la Définition 3.5 puisque les voisinages $N_n(x)$ et $N_{\bar{n}}(x)$ sont tous les deux des parties de $N_8(x)$. Dans la Figure 3.5, nous avons représentés quelques exemples de 8-voisinages et donné leurs propriétés de simplicité correspondantes d'après cette caractérisation locale. Par exemple, le pixel noir x de la Figure 3.5(f) n'est pas 8-simple puisque $N_4(x) \cap \bar{X} = \emptyset$. A ce stade, on remarque que le problème de la préservation de la topologie d'une image dans \mathbb{Z}^2 se réduit à des considérations de connexité dans le voisinage d'un pixel. Dans les parties suivantes, on verra que la même remarque peut être faite pour d'autres types d'espaces discrets.

La définition des pixels n -simples dans \mathbb{Z}^2 permet de définir les ensembles n -simples, la sous n -homotopie et la n -homotopie symétrique suivant les Définitions 3.2, 3.3 et 3.4. Ensuite, un résultat important est la possibilité de caractériser le fait qu'une partie Y de X soit sous n -homotope à X . En effet, la proposition suivante, appartenant au folklore, permet d'obtenir un algorithme efficace pour vérifier si un objet Y est sous n -homotope à un autre objet X dans lequel il est inclus.

Proposition 3.1 (caractérisation de la sous-homotopie dans \mathbb{Z}^2) Soient Y et X deux parties de \mathbb{Z}^2 telles que $Y \subset X$. L'ensemble Y est sous n -homotope à X si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i) Chaque composante n -connexe de X contient exactement une unique composante n -connexe de Y .

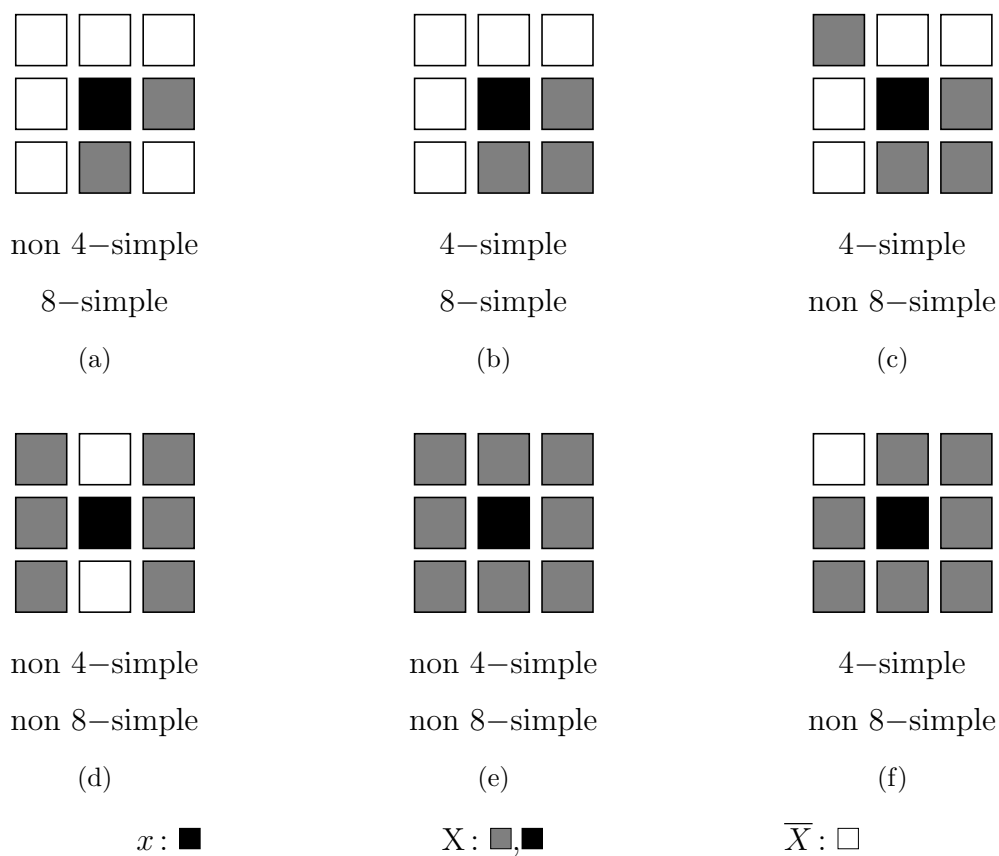
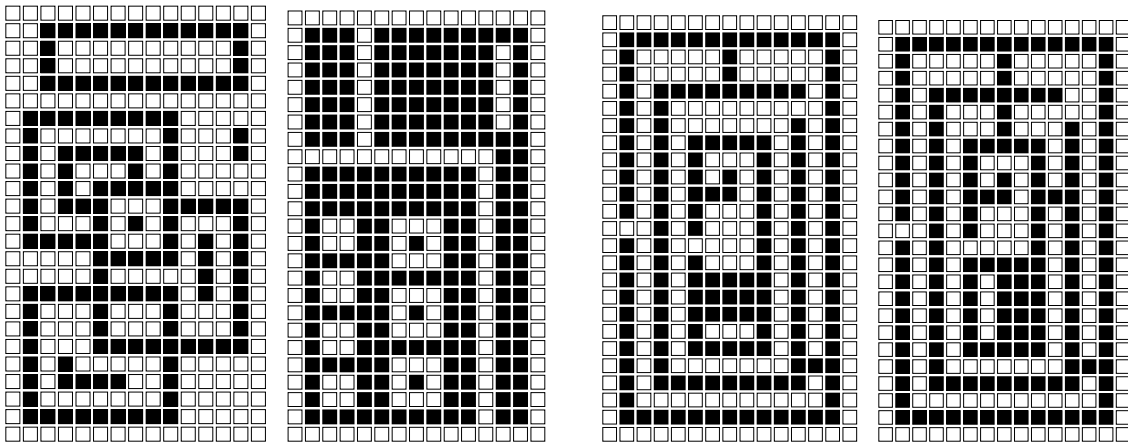


FIG. 3.5: *Pixels simples et non simples (pixel central x).*

ii) Chaque composante \bar{n} -connexe de \bar{Y} contient exactement une unique composante \bar{n} -connexe de \bar{X} .

Maintenant, une question similaire peut être posée pour l'homotopie symétrique. Ainsi, un récent travail de A. Rosenfeld et al. dans [RKN98] donne une caractérisation de l'homotopie symétrique qui utilise la notion d'*arbre d'adjacence* associé à une image. En d'autres termes, les auteurs de cet article fournissent un moyen de vérifier que les deux objets représentés dans la Figure 3.6(a) sont symétriquement n -homotopes, mais aussi d'affirmer que les deux objets de la Figure 3.6(b) ne le sont pas. Une utilisation similaire des arbres d'adjacence pour caractériser l'homotopie symétrique peut aussi être trouvée dans Bykov et Zerlakov [BZ96].



(a) Deux objets symétriquement n -homotopes.

(b) Deux objets qui ne sont pas symétriquement n -homotopes.

FIG. 3.6: Homotopie symétrique dans \mathbb{Z}^2 ($n \in \{4, 8\}$)

Tout d'abord, nous devons rappeler les définitions suivantes qui ont été légèrement adaptées de [RKN98]:

Définition 3.7 (relation “entoure” , [RKN98]) Soient U , V et W trois parties de \mathbb{Z}^2 disjointes deux à deux. On dit que V n -sépare U de W si tout n -chemin d'un pixel de U à un pixel de W contient au moins un pixel de V . Maintenant, soit B une composante n -connexe noire d'une image \mathcal{I} dans \mathbb{Z}^2 et soit W une composante \bar{n} -connexe blanche de \mathcal{I} . On dit que B entoure W si B n -sépare W de tous les pixels de \bar{B} sauf un nombre fini d'entre eux. Respectivement, on dit que W entoure B si W \bar{n} -sépare B de tous les pixels de \bar{B} sauf un nombre fini d'entre eux.

Définition 3.8 (arbre d’adjacence [RKN98]) *Soit X un objet dans une image discrète \mathcal{I} de \mathbb{Z}^2 . Alors, le graphe, dont les sommets sont les composantes blanches et noires de \mathcal{I} et dont les arêtes suivent la fermeture symétrique de la relation “entoure” sur ces composantes connexes, est un arbre appelé arbre d’adjacence de \mathcal{I} que l’on note $\mathcal{A}(\mathcal{I})$.*

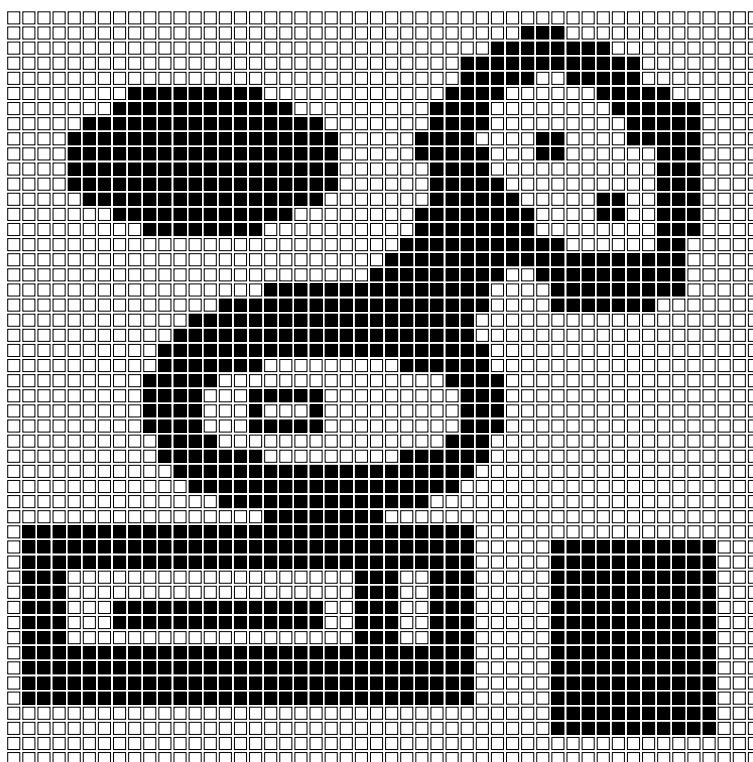
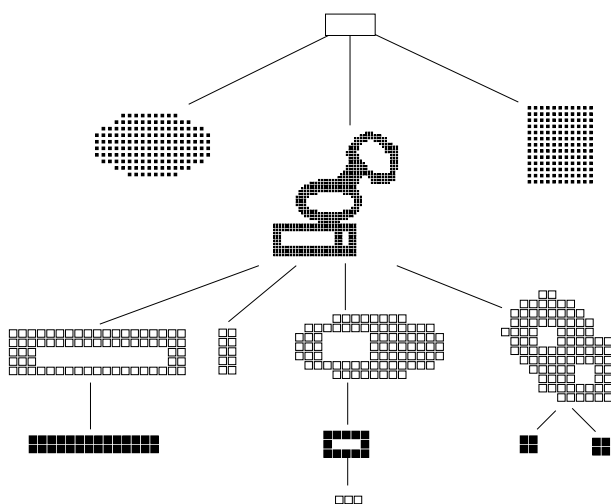
Les feuilles d’un tel arbre sont les composantes connexes qui n’entourent aucune autre composante blanche ou noire, comme par exemple une composante connexe noire dépourvue de trou. Dans la Figure 3.7(b) nous avons représenté l’arbre d’adjacence associé à l’image de la Figure 3.7(a). La racine de cet arbre est la composante connexe blanche non bornée qui entoure toute autre composante connexe, blanche ou noire. Dans la Figure 3.7(c), on donne la forme canonique de l’arbre d’adjacence dans lequel les composantes connexes sont représentées par des sommets de la couleur correspondante.

Dans [RKN98], Rosenfeld et al. ont démontré le théorème suivant qui fournit un algorithme permettant de décider si deux objets 2D sont symétriquement homotopes ou non. En effet, ce théorème réduit le problème précédent à celui de l’isomorphisme de graphes.

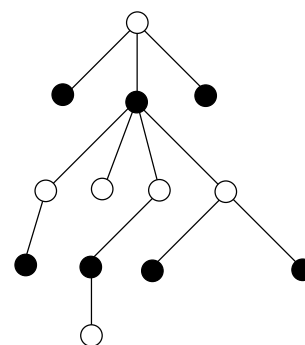
Proposition 3.2 ([RKN98]) *Soient \mathcal{I} et \mathcal{I}' deux images discrètes dans \mathbb{Z}^2 dont les graphes d’adjacences associés sont respectivement $\mathcal{A}(\mathcal{I})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{I}')$. Soit X [resp. X'] l’ensemble des pixels noirs de \mathcal{I} [resp. \mathcal{I}']. Alors, les ensembles X et X' sont symétriquement n -homotopes si et seulement si $\mathcal{A}(\mathcal{I})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{I}')$ sont isomorphes.*

Notons que le résultat le plus difficile qui a dû être prouvé pour démontrer cette Proposition est le fait que deux images qui ont des arbres d’adjacences associés isomorphes peuvent être obtenus l’un à partir de l’autre par une séquence d’ajouts et de suppressions de pixels simples.

Afin d’éviter une possible confusion entre le problème de la caractérisation de la sous-homotopie et celui de l’homotopie symétrique, nous donnons l’exemple représenté dans la Figure 3.8. En effet, l’objet de la Figure 3.8(b) n’est clairement pas sous n -homotope à l’objet de la Figure 3.8(a) (au moins) parce que le pixel marqué dans la Figure 3.8(a) n’est pas n -simple pour $n = 4$ ou $n = 8$, et cela reste vrai après une séquence quelconque d’effacements de pixels n -simples de cet objet. Cette image peut être trouvée dans [Mey92] comme un exemple de deux images qui ne sont pas “topologiquement équivalentes”. Toutefois, les mots “topologiquement équivalentes” sont employés dans cet article dans le contexte de la squelettisation homotopique. Dans ce cadre, l’équivalence topologique est souvent utilisée pour exprimer ce que nous appelons ici la sous-homotopie.

(a) Une image de \mathbb{Z}^2 .

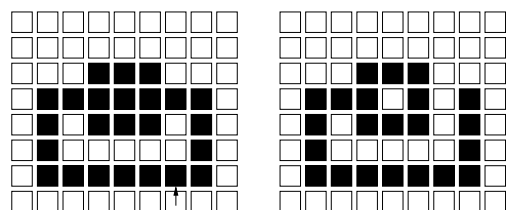
(b) L'arbre associé dont les sommets sont les composantes connexes noires et blanches de l'image. La racine en est la composante extérieure blanche (non bornée).



(c) Une représentation plus canonique de l'arbre d'adjacence.

FIG. 3.7: Arbre d'adjacence associé à une image 2D.

Par contre, les deux objets de la Figure 3.8 sont bien symétriquement homotopes, à notre sens, comme illustré par la Figure 3.9. Dans cette figure, l'ensemble des pixels gris est un ensemble simple pour chacune des images intermédiaires (voir Définition 3.2), et on montre ainsi comment chaque image peut être obtenue à partir de celle qui la précède par une séquence d'ajouts ou de suppressions de pixels simples. Cette exemple simple montre que le lecteur doit se méfier d'une possible confusion entre homotopie symétrique (i.e. équivalence homotopique) et sous-homotopie.



(a)

(b)

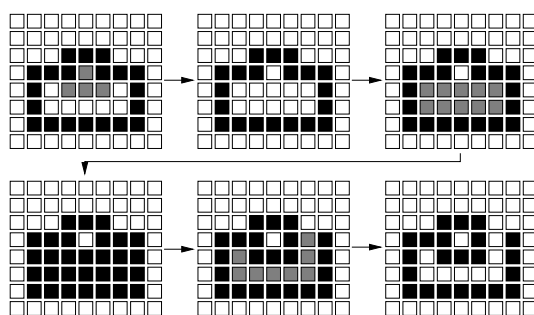


FIG. 3.8: L'objet de droite n'est pas sous n -homotope à l'objet de gauche pour $n \in \{4, 8\}$.

FIG. 3.9: Une suite d'ajouts et d'effacements d'ensembles n -simples (pour $n \in \{4, 8\}$).

Conclusion à la Partie I

Dans cette partie, nous avons défini la notion d'image discrète et fourni un formalisme qui permet de discuter des propriétés topologiques dans les espaces discrets. Plusieurs exemples ont été donnés dans le cas de l'espace \mathbb{Z}^2 ; toutefois, pratiquement toutes les notions introduites l'ont été dans le cadre d'un espace discret quelconque associé à une certaine relation d'adjacence.

Dans les deux parties suivantes, nous nous intéresserons à d'autres types d'espaces discrets. Le premier de ces espaces est celui des *surfaces* d'objets de \mathbb{Z}^3 et le second qui sera considéré est \mathbb{Z}^3 lui-même. Dans les deux cas, notre étude est motivée par l'utilisation du groupe fondamental discret pour caractériser la préservation de la topologie dans ces espaces. Plus précisément, notre motivation est de montrer que le groupe fondamental discret est un outil puissant dans ce contexte. À chaque fois, ce but a été atteint en définissant préalablement de nouveaux outils tels que le *nombre d'intersection* et le *nombre d'entrelacement*.

Deuxième partie

Préservation de la topologie dans les surfaces discrètes

Introduction à la Partie II

Dans le cas 2D, les algorithmes de squelettisation homotopiques ont fait leurs preuves en tant qu'outils de base, essentiels pour la reconnaissance des formes et la classification d'objets représentés dans une grille plane. Aussi, la préservation de la topologie dans le cas 3D est une question importante si on veut développer des outils utiles et efficaces pour l'analyse d'images 3D. De nombreux auteurs ont déjà travaillé sur ces algorithmes de squelettisation homotopique, et on peut retenir de ces travaux une définition simple de la sous homotopie entre deux objets de \mathbb{Z}^3 (voir [Kon89], [Ber94] ou [Kon95]).

Maintenant, une question ouverte persiste concernant l'existence d'un algorithme efficace, ou du moins raisonnablement utilisable, permettant de décider si un objet 3D Y est sous homotope à un autre objet X dans lequel il est inclus. Alors qu'une condition nécessaire et suffisante portant sur les composantes connexes et les trous de l'objet existe dans \mathbb{Z}^2 (Proposition 3.1, Partie I), le cas 3D est loin d'être aussi trivial. Aujourd'hui, une condition nécessaire $\mathcal{P}(X, Y)$ peut être donnée en termes de propriétés des morphismes entre groupes fondamentaux ([Kon89]) induits par les inclusions entre les composantes connexes de X , Y , \bar{X} et \bar{Y} (voir Section 2.3.2). Cependant, on peut trouver des exemples qui montrent que cette condition n'est pas suffisante (voir la conclusion générale). Néanmoins, dans le cadre intermédiaire que constituent les surfaces discrètes qui vont être étudiées dans cette partie, nous montrons ici que le groupe fondamental est suffisant pour caractériser la sous-homotopie. En effet, un autre type d'objet discret est largement utilisé pour la visualisation et l'analyse d'images 3D : les *surfaces discrètes* aussi appelées *surfaces surfels* afin d'éviter la confusion avec les surfaces définies comme ensembles de voxels. Les surfaces surfels constituent la partie "visible" d'un objet 3D quand ce dernier est identifié à un ensemble de cubes unitaires (les voxels). Ces surfaces sont composées de carrés unitaires à deux dimensions, les faces des voxels, aussi appelés des *surfels* (comme abréviation de l'anglais *surface elements*). La détermination

de la surface, ou bordure, d'un objet de \mathbb{Z}^3 est une première étape à la visualisation en 3D de l'objet considéré, mais fournit aussi une donnée intéressante, notamment en raison de sa taille réduite, sur laquelle des algorithmes efficaces de traitement et d'analyse peuvent être utilisés. Par exemple, ce type de surface a été utilisé dans [ML00] par R. Malgouyres et A. Lenoir pour extraire des informations anatomiques d'images acquises par Résonance Magnétique Nucléaire (RMN). En effet, les premiers travaux portant sur de telles surfaces discrètes étaient motivés par leurs applications en imagerie médicale (voir [HKL⁺81, HW83, Her92]). Ainsi, un problème qui a inspiré l'article de R. Malgouyres et A. Lenoir était la mise au point d'une méthode d'extraction du fond des sillons corticaux de l'image d'un cerveau humain. Afin d'essayer de réaliser cette extraction, ils ont dû appliquer un algorithme de squelettisation à une image binaire dessinée à la surface de l'objet correspondant à l'encéphale, cette image binaire ayant été obtenue par seuillage de l'image de la courbure moyenne calculée en chaque surfel d'après la méthode décrite dans [Len97].

En effet, l'ensemble des surfels de courbure négative peut être vu comme une application de l'ensemble des surfels de la surface vers l'ensemble $\{0, 1\}$; c'est à dire comme un objet dans un certain espace discret que constitue cette surface. Plus généralement, toute propriété qui peut être testée pour chaque surfel peut fournir un objet dans cet espace. Ainsi, un algorithme de squelettisation pour ce type d'objet devra utiliser la notion de surfel simple comme définie de manière intuitive dans la partie précédente. Ceci montre le besoin d'un cadre théorique pour l'étude de la préservation de la topologie pour les parties d'une surface discrète.

Dans ce but, il est possible de définir des relations d'adjacence convenables de telle sorte qu'une surface discrète constitue un espace discret à part entière pour lequel toutes les notions génériques qui ont été introduites dans la partie précédente sont bien définies. Notamment, on peut définir dans ce cadre la connexité, l'homotopie entre chemins, les surfels simples et l'homotopie entre parties d'une surface. Dans [ML00], les auteurs ont montré qu'un critère similaire à la condition $\mathcal{P}(X, Y)$ mentionnée précédemment, faisant appel au groupe fondamental discret et considérant les intersections entre *cavités*, est une condition *nécessaire et suffisante* permettant de caractériser la sous homotopie entre parties d'une surface discrète. On appelle ici *cavité* d'un ensemble de surfel X une composante connexe du complémentaire de X dans la surface considérée (Définition 1.18).

Depuis ce dernier article, il était pressenti que la condition portant sur les intersections de trous était elle même une conséquence de la condition sur les groupes fondamentaux, sauf dans un cas trivial et bien particulier. Le but de cette partie est d'établir et de montrer ce résultat et de donner ainsi un nouveau théorème concernant la sous homotopie entre parties d'une surface. (Théorème 13 du Chapitre 9). Ce théorème constitue une nouvelle caractérisation qui montre que le groupe fondamental permet de caractériser de façon complète la sous homotopie dans ce cadre.

Toutefois, le manque d'outils théoriques adaptés au cadre discret et permettant l'étude des classes d'homotopie de chemins (i.e les éléments du groupe fondamental discret) nous amène à définir et à utiliser un nouvel outil: le *nombre d'intersection* qui a été introduit par l'auteur et R. Malgouyres dans [FM99b]. On montre que ce nombre, qui compte le nombre d'intersections orientées entre deux types de chemins, est invariant par déformation homotopique des chemins considérés. Ainsi, il peut être utilisé pour montrer que deux chemins ne sont pas homotopes. En particulier, il peut être par exemple utilisé pour montrer qu'un chemin donné n'est pas réductible. Cette dernière propriété peut être vue comme une généralisation de certaines notions introduites dans [RN97] où Rosenfeld et Nakamura ont étudié les propriétés des courbes fermées simples dans \mathbb{Z}^2 , en considérant par exemple des courbes entourant des trous. Par contre, dans notre cas, nous nous intéressons à des chemins discrets plus généraux dans une surface et qui peuvent ainsi entourer des *cavités* (\simeq trous 2D) mais aussi et surtout des *tunnels*, particularité que l'on ne rencontre pas en dimension 2. Cette notion de tunnel sera introduite dans le Chapitre 5.

Dans le Chapitre 4, nous donnons la définition d'une surface discrète et introduisons les définitions de base qui nous permettent de discuter des propriétés topologiques de ce type d'espace discret. Alors, dans le Chapitre 6, nous introduisons le nombre d'intersection puis nous posons et démontrons ses propriétés principales. Ensuite, deux applications de ce nouvel outil sont données dans les Chapitres 7 et 8, respectivement un nouveau théorème de Jordan dans ce type d'espace et une nouvelle propriété de l'index 2D introduit dans la Section 2.1.2. Finalement, nous terminerons avec le résultat essentiel de cette partie au Chapitre 9: la preuve d'un nouveau théorème portant sur la caractérisation de la sous homotopie au sein d'une surface discrète.

Chapitre 4

Surfaces discrètes

4.1 Surfaces de voxels et surfaces de surfels

Dans la sous-section 2.1.2, nous avons mentionné les \mathcal{MA} –surfaces qui ont été définies par R. Malgouyres dans [Mal94]. En fait, ces surfaces font partie d’une catégorie d’objets *fins* et *séparants* de \mathbb{Z}^3 qui ont été définis comme étant des surfaces discrètes par plusieurs auteurs. Brièvement, l’idée de ces définitions est de donner des caractérisations locales qui garantissent qu’un objet, dont tous les voxels vérifient ces caractérisations, possède cette propriété de finesse mais surtout sépare son complémentaire en deux composantes connexes (voir Définition 3.7 et Théorème 4 pour l’analogie 2D de cette notion de séparation). La propriété de finesse s’énonce simplement de la manière suivante : chaque voxel de l’objet est adjacent à chacune des composantes connexes du fond. De tels objets sont appelés aussi *ensembles fortement séparants*. Maintenant, R. Malgouyres a montré dans [Mal96] qu’on ne peut donner de caractérisation locale qui corresponde à la classe entière des objets fortement séparants. Aussi, il est impossible de trouver un analogue dans \mathbb{Z}^3 à la caractérisation locale des courbes fermées simples donnée par A. Rosenfeld dans [Ros75], courbes qui sont les analogues en dimension 2 de la classe des objets fortement séparants de \mathbb{Z}^3 (voir la sous-section 2.1.3).

Toutefois, plusieurs définitions ont été introduites pour des classes d’objets plus restreintes que celle des objets fortement séparants, et qui, elles, admettent des caractérisations locales. Ainsi, D.G. Morgenthaler et A. Rosenfeld ont tout d’abord introduit la notion de *n–surface fermée simple* pour $n \in \{6, 26\}$ dans [MR81]. Plus tard, dans [Mal97a], R. Malgouyres a introduit la définition des \mathcal{MA} –surfaces, et finalement, des travaux

plus récents avec G. Bertrand ont abouti à la définition des *surfaces fortes*, dont il est prouvé qu'elles sont les moins restrictives (voir [MB97, MB99]).

Maintenant, nous nous intéressons dans cette partie à une définition de surface qui est intrinsèquement différente de celle évoquée précédemment. En effet, dans cette partie, nous ne considérons plus les surfaces comme des parties de \mathbb{Z}^3 mais comme des sous-ensembles particuliers de la relation \mathcal{R}_6 vue comme une partie de $\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3$. En effet, nous montrerons dans la suite que certaines de ces parties peuvent être considérées comme un espace discret à part entière avec des relations d'adjacence bien définies.

4.2 Surfaces discrètes, surfels

Les surfaces discrètes considérées dans cette partie sont faites de faces carrées unitaires, appelées *surfels*, qui sont les éléments de base de la partie visible d'un objet de \mathbb{Z}^3 quand il est représenté comme un ensemble de voxels.

Définition 4.1 (surfel) *Soit $B \subset \mathbb{Z}^3$, alors on appelle surfel de B un couple (a, b) tel que $a \in B$, $b \in \overline{B}$ et a est 6-adjacent à b .*

Un surfel est en fait la face partagée par deux voxels 6-adjacents, le premier appartenant à l'objet, le second au complémentaire de cet objet (voir Figure 4.1). Une telle face est orientée suivant la normale sortante issue de son centre. Cette définition d'un surfel est proche de la définition classique qui peut être trouvée dans [Udu94] mais restreinte au cas 3D. En fait, on appelle une *facette de voxel* la face partagée par deux voxels 6-adjacents, mais un surfel est la face commune à deux voxels 6-adjacents dont le premier est dans l'objet et le second fait partie du fond. Ainsi, un voxel peut être associé au maximum à 6 surfels (voir Figure 4.2) selon la valeur de ses 6-voisins, et chaque surfel possède quatre *arêtes* et quatre *sommets* comme illustré par la Figure 4.3.

Maintenant, on introduit la notion de *bord* entre une composante connexe noire et une composante connexe blanche d'un image de \mathbb{Z}^3 , en utilisant une notation similaire à celle trouvée dans [UA90].

Définition 4.2 (bord) *Soit $(n, \bar{n}) \in \{(6+, 18), (18, 6+)\}$. Soit O une partie n -connexe de \mathbb{Z}^3 et V une de ses composantes connexes de fond. On définit le (n, \bar{n}) -bord entre O*

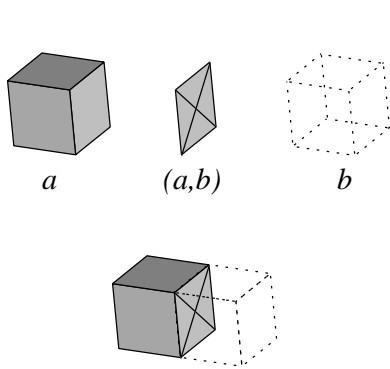


FIG. 4.1: Un surfel (a, b) , la face partagée par un voxel noir et un voxel blanc.

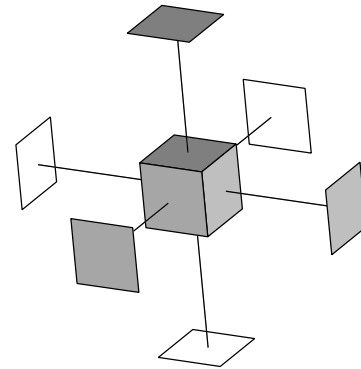


FIG. 4.2: Un voxel peut être associé à au plus 6 surfels.

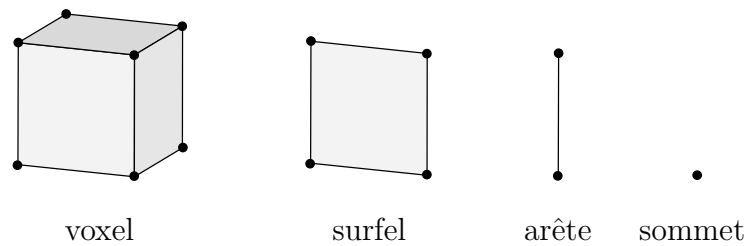


FIG. 4.3: Quelques termes.

et V , noté $\delta_n(O, V)$:

$$\delta_n(O, V) = \{(a, b) \mid a \in O, b \in V \text{ et } a \text{ est } 6\text{-adjacent à } b\}$$

Dans la suite de cette partie, O et V sont deux parties de \mathbb{Z}^3 qui vérifient les conditions de la Définition 4.2 et $\Sigma = \delta_n(O, V)$ est le (n, \bar{n}) -bord entre O et V pour $n \in \{6+, 18\}$; Σ sera appelé une *surface discrète*.

La surface discrète Σ possède la propriété de Jordan au sens de la définition donnée dans [Udu94]. En effet, pour tout 6-chemin $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ d'un voxel y_0 de O à un voxel y_p de V , il existe un indice $j \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $y_j \in O$ et $y_{j+1} \in V$, en d'autres termes, le chemin π "traverse" Σ .

On remarque que cette définition est très proche de celle d'un complexe cellulaire. Toutefois, une propriété importante des surfaces discrètes est que les surfels qui la constitue, sont contraints par des considérations géométriques fortes dans \mathbb{Z}^3 . Aussi, le lecteur doit garder à l'esprit qu'un surfel n'est autre qu'un couple de l'une des formes suivantes pour un certain triplet (x, y, z) de \mathbb{Z}^3 :

$$((x, y, z), (x \pm 1, y, z)), ((x, y, z), (x, y \pm 1, z)), ((x, y, z), (x, y, z \pm 1)).$$

4.3 Relations d'adjacence entre surfels

Dans cette section, nous définissons deux relations d'adjacence entre surfels qui permettent l'application au surfaces discrètes de toutes les notions génériques portant sur les espaces discrets qui ont été introduites dans la Partie I

4.3.1 Relation de e -adjacence

Un surfel dans une surface discrète partage une arête donnée avec au plus trois autres surfels comme illustré dans la Figure 4.4 (cette propriété est généralisée au surfaces discrètes de \mathbb{Z}^n dans la Proposition 3.5 de [Udu94]). Ceci amène la définition de la relation d'adjacence \mathcal{R}_{edge} :

Définition 4.3 (\mathcal{R}_{edge}) *On définit la relation d'adjacence \mathcal{R}_{edge} dans Σ de la manière suivante :*

$$\mathcal{R}_{edge} = \left\{ ((a, b), (a', b')) \left| \begin{array}{l} (a, b) \in \Sigma, (a', b') \in \Sigma \\ a, b, a' \text{ et } b' \text{ appartiennent à un carré } 2 \times 2 \text{ de } \mathbb{Z}^3 \end{array} \right. \right\}$$

Intuitivement, deux surfels sont dits \mathcal{R}_{edge} -adjacents s'ils partagent une arête.

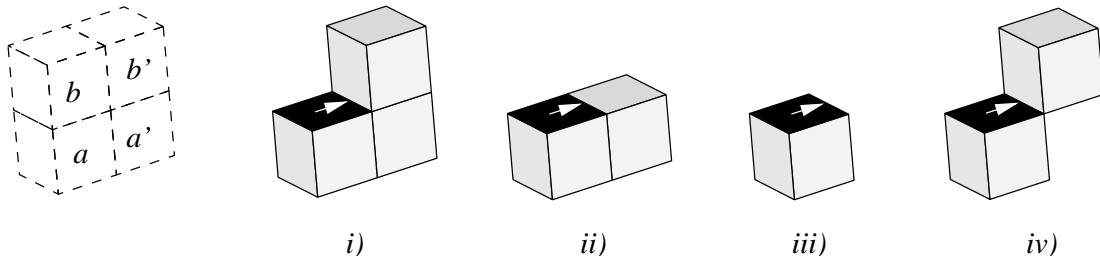


FIG. 4.4: Le surfel (a, b) peut partager une de ses arêtes avec au plus trois autres surfels.

Ainsi, le surfel (a, b) de la Figure 4.4 partage l'arête marquée d'une flèche soit avec le surfel (b', b) (cas *i*), soit avec le surfel (a', b') (cas *ii*), soit avec le surfel (a, a') (cas *iii*), ou bien simultanément avec les surfels (b', b) , (b', a') et (a, a') dans le cas *iv*. Cette relation est bien une relation d'adjacence dans l'espace discret Σ . Cependant, comme rappelé dans l'introduction de cette partie, nous sommes intéressés par une caractérisation de la préservation de la topologie pour les parties d'une surface discrète. Mais il est apparu qu'aucune propriété topologique cohérente ne peut être étudiée pour l'espace des surfaces discrètes muni de cette relation \mathcal{R}_{edge} . En effet, les relations d'adjacence utilisées pour les espaces discrets \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 ont la bonne propriété d'être en relation très étroite

avec la localisation spatiale des spels. Par contre, la relation \mathcal{R}_{edge} fournit des graphes d'adjacences inutilisables. De plus, les notions d'adjacence et de connexité dans l'ensemble des surfels associés à une image de \mathbb{Z}^3 ont été introduites en premier lieu dans le but de mettre au point des algorithmes efficaces de suivi de surface (*boundary tracking*), dont le rôle est de construire rapidement l'objet qui compose la partie visible d'un objet de \mathbb{Z}^3 , i.e. sa surface, stockée dans une structure de donnée adaptée. Dans ce but, la relation \mathcal{R}_{edge} présente aussi un inconvénient majeur. En effet, le fait qu'un trop grand nombre de chemins différents dans le graphe d'adjacence passent par un surfel donné, empêche la mise au point d'un algorithme efficace basé sur des calculs locaux, et qui permette de retrouver la surface complète d'un objet. Toutefois, on peut définir une relation d'adjacence \mathcal{R}_e entre surfels, dépendante de la relation de n -adjacence considérée pour l'objet ($n \in \{6+, 18\}$), de telle sorte qu'un surfel possède exactement quatre \mathcal{R}_e -voisins, soit exactement un par arête. La définition de ce graphe régulier classique sur Σ peut être trouvé par exemple dans [RKW91] est peut s'énoncer de la manière suivante :

Définition 4.4 (\mathcal{R}_e) Soient (a, b) et (a', b') deux surfels de Σ . Les surfels (a, b) et (a', b') sont dit \mathcal{R}_e -adjacents si $((a, b), (a', b')) \in \mathcal{R}_{edge}$ et :

- Si $(n, \bar{n}) = (6+, 18)$ alors a et a' sont 6-connectés par un 6-chemin de longueur $l < 3$ dans O .
- Si $(n, \bar{n}) = (18, 6+)$ alors b et b' sont 6-connectés par un 6-chemin de longueur $l < 3$ dans V .

Une paire $\{(a, b), (a', b')\}$ de surfels \mathcal{R}_e -adjacents de Σ est appelé un edgel.

Les deux conditions de la définition précédente permettent de déterminer, parmi les surfels qui partagent l'arête marquée d'une flèche avec le surfel noir la Figure 4.4(iv), celui qui est \mathcal{R}_e -adjacent à ce surfel.

Notation 4.1 Dans la suite, afin d'alléger les notations, nous abrégeons la relation d'adjacence " \mathcal{R}_e " par simplement " e ". Ainsi, on remplacera par exemple \mathcal{R}_e -adjacence par e -adjacence.

Il est important de voir que la définition de la relation de e -adjacence est cohérente avec les propriétés topologiques de l'objet *enveloppé* par la surface. En effet, d'après le théorème suivant, qui est en fait une justification des algorithmes de suivi de surfaces, a

été démontré par E. Artzy dans [AFH81] et en utilisant des considérations topologiques par G.T. Herman dans [HW83]. Ce théorème sera utile par la suite.

Théorème 6 Σ est e -connexe.

Maintenant, une autre approche de la propriété de e -connexité de Σ peut être donnée. En effet, nous avons défini Σ comme l'ensemble des spels entre un ensemble n -connexe de voxels et l'une de ses composantes (\bar{n} -connexes) de fond. Alors, un résultat important est que la surface Σ est e -connexe (Théorème 6). Mais la réciproque est aussi vraie. Soient $B \subset \mathbb{Z}^3$ et S l'ensemble des surfels de B . Alors, une composante e -connexe de surfels de S coïncide avec un (n, \bar{n}) -bord $\delta_n(I, E)$, où I est une composante n -connexe de B et E est une composante \bar{n} -connexe de \bar{B} . Ainsi, les objets des Figures 4.5(a) et 4.5(b) ne sont ni l'un ni l'autre $(6+)$ -connexes de telle sorte que l'ensemble des surfels associés n'est pas e -connexe, par définition de la e -connexité dans le cas $(n, \bar{n}) = (6+, 18)$. Maintenant, l'objet représenté dans la Figure 4.6 est 18 -connexe et l'ensemble de ses surfels est alors e -connexe pour $(n, \bar{n}) = (18, 6+)$.

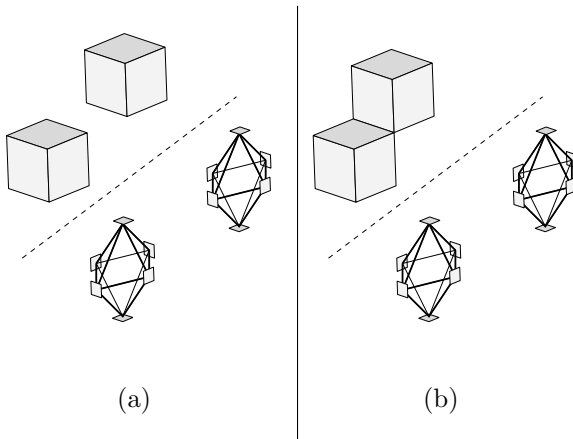


FIG. 4.5: Deux objets de \mathbb{Z}^3 et les graphes de e -adjacence associés à l'ensemble de leur surfels pour $n = 6+$.

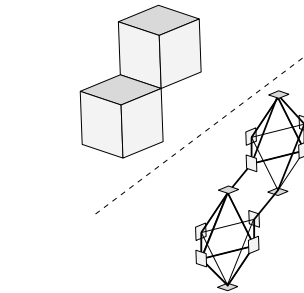
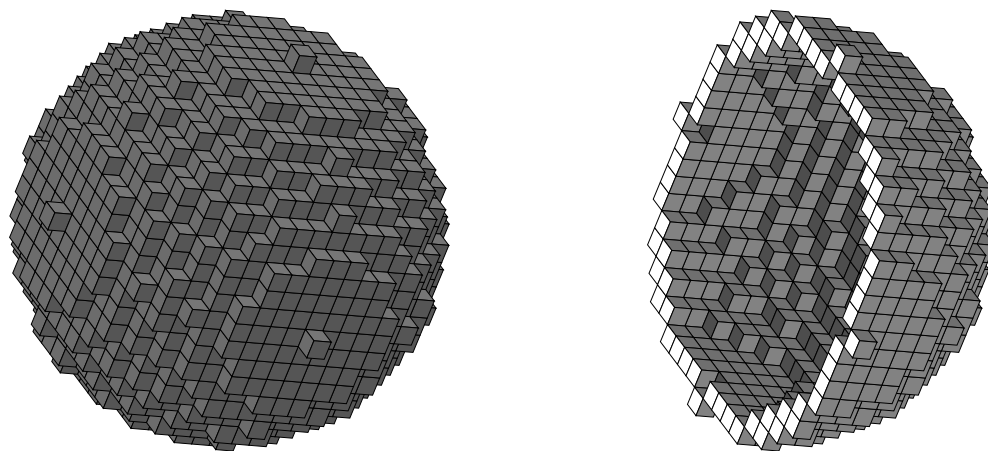


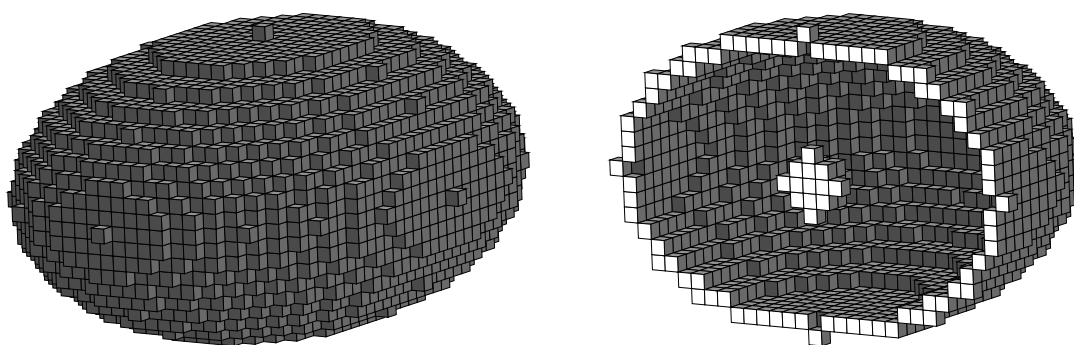
FIG. 4.6: Un objet de \mathbb{Z}^3 et le graphe de e -adjacence associé à l'ensemble de ses surfels pour $n = 18$.

De plus, ces objets sont composés de deux composantes 6 -connexes dépourvues de cavités. Plus généralement, il est évident que pour tout objet B dans \mathbb{Z}^3 et tout couple $(n, \bar{n}) \in \{(6+, 18), (18, 6+)\}$, le nombre de composantes e -connexes de l'ensemble des surfels de B (i.e le nombre de (n, \bar{n}) -bords) est égal au nombre de composantes n -connexes de B plus le nombre de composantes \bar{n} -connexes de \bar{B} moins un. Par exemple, la sphère (creuse) de la Figure 4.7(a) possède deux $(18, 6+)$ -bords alors que l'objet représenté dans la Figure 4.8 en possède trois.



(a) Vue du bord externe.

(b) Une vue en coupe de la sphère.

FIG. 4.7: *Un sphère discrète dans \mathbb{Z}^3 pour $n = 18$.*

(a) Vue du bord externe.

(b) Vue en coupe de l'objet.

FIG. 4.8: *Un objet de \mathbb{Z}^3 avec deux composantes connexes et une cavité pour $n = 18$.*

Maintenant, suivant la la Définition 4.4, les notions de e -chemins et de e -connexité dans les surfaces discrètes sont bien définies d'après les définitions génériques qui en ont été données dans la Section 1.1.

4.3.2 Relation de v -adjacence

Maintenant, une partie (un objet) d'une surface discrète peut être considérée comme une image binaire dessinée sur le bord d'un objet de \mathbb{Z}^3 telle que représentée dans la Figure 4.9. Alors, dans une étude des propriétés topologiques d'une telle image, on s'attend à ce que des propriétés de base soient toujours satisfaites, comme par exemple une propriété de Jordan qui a été décrite pour les espaces \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 dans le Chapitre 2. Ainsi, soit C l'ensemble des surfels noirs de la Figure 4.9. Cet ensemble C est une e -courbe fermée simple suivant la Définition 1.13 et on peut raisonnablement attendre d'un telle courbe, dans ce cas particulier¹, qu'elle sépare son fond (l'ensemble des surfels blancs) en deux composantes distinctes. Toutefois, comme cela se produit dans \mathbb{Z}^2 , cette propriété est évidemment fausse si la relation de e -adjacence est utilisée pour le fond de l'image. En effet, les trois surfels marqués d'une croix appartiennent à trois composantes e -connexes distinctes du fond de C , qui possède alors quatre composantes e -connexes.

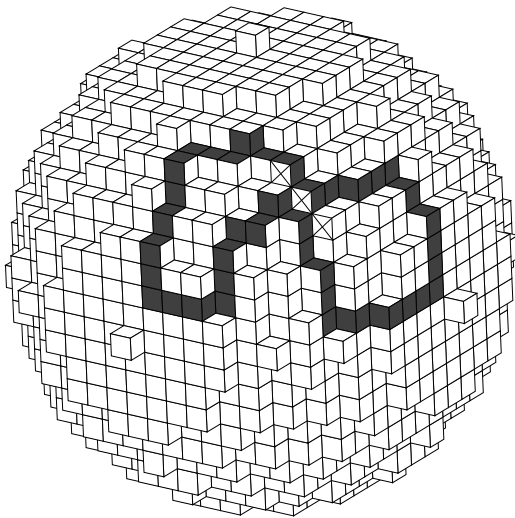


FIG. 4.9: En noir, une e -courbe fermée simple de surfels C , dont le fond possède quatre composantes e -connexes.

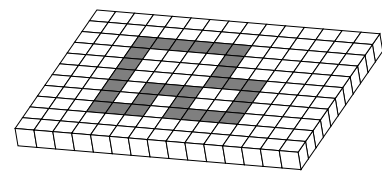


FIG. 4.10: La partie supérieure de cette surface peut être assimilée à un rectangle de \mathbb{Z}^2 .

Une fois encore, cet exemple montre la nécessité d'introduire une autre relation d'adja-

1. Le but du Chapitre 7 est principalement de préciser en quoi ce cas est particulier

cence entre surfels qui relie deux surfels qui partagent un sommet, en d'autres termes, une relation analogue à la relation de 8-adjacence dans \mathbb{Z}^2 . En effet, la relation de e -adjacence dans une surface discrète plane coïncide avec la relation de 4-adjacence dans \mathbb{Z}^2 comme illustré par la Figure 4.10. Toutefois, la définition suivante ne sera pas satisfaisante.

Définition 4.5 (\mathcal{R}_{vertex}) *On définit la relation d'adjacence $\mathcal{R}_{vertex} \subset \Sigma \times \Sigma$ de la manière suivante :*

$$\mathcal{R}_{vertex} = \left\{ ((a, b), (a', b')) \left| \begin{array}{l} (a, b) \in \Sigma, (a', b') \in \Sigma \\ a, b, a' \text{ et } b' \text{ appartiennent à un même cube } 2 \times 2 \times 2 \text{ de } \mathbb{Z}^3 \end{array} \right. \right\}$$

En d'autre termes, les surfels (a, b) et (a', b') sont \mathcal{R}_{vertex} -adjacents s'ils ont un sommet commun.

Remarque 4.1 *La donnée d'un sommet p d'un surfel (a, b) est équivalente à la donnée de l'un des quatre cubes $2 \times 2 \times 2$ qui contiennent les deux voxels a et b . En effet, ce cube $2 \times 2 \times 2$ contiendra aussi tout couple de voxels a' et b' tel que (a', b') partage avec (a, b) le sommet p .*

Cependant, cette relation présente une fois encore l'inconvénient de relier entre eux des ensembles de surfels dont l'analogue continu n'est vraisemblablement pas connexe comme illustré dans la Figure 4.11. Dans la Figure 4.12, nous avons représenté deux objets de \mathbb{Z}^3 , dans lesquels, quand $(n, \bar{n}) = (6+, 18)$, les deux voxels marqués d'une croix ne sont pas $(6+)$ -adjacents. Par contre, dans le cas de la Figure 4.12(a), les deux surfels marqués d'une croix sont \mathcal{R}_{vertex} -adjacents alors qu'ils ne le sont pas dans la Figure 4.12(b). Puisque ceci n'est évidemment pas satisfaisant, nous introduisons une relation d'adjacence plus restrictive \mathcal{R}_v .

Définition 4.6 (\mathcal{R}_v) *Soient (a, b) et (a', b') deux surfels de Σ . Alors $((a, b), (a', b')) \in \mathcal{R}_v$ si et seulement si :*

- i) $((a, b), (a', b')) \in \mathcal{R}_{vertex}$, et*
- ii) Il existe un e -chemin (y_0, \dots, y_k) dans Σ tel que $y_0 = (a, b)$, $y_k = (a', b')$ et pour $i = 1, \dots, k - 1$, on a $(y_i, (a, b)) \in \mathcal{R}_{vertex}$ et $(y_i, (a', b')) \in \mathcal{R}_{vertex}$.*

En d'autres termes, les conditions i) et ii) entraînent que les surfels de $\{y_0, \dots, y_k\}$ partagent tous le même sommet.

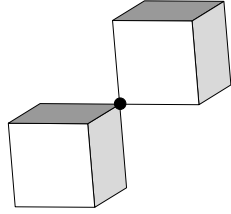
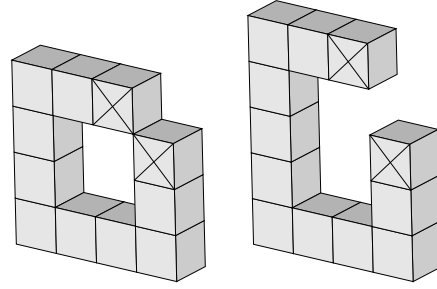


FIG. 4.11: Deux voxels qui ne sont ni $(6+)$ -adjacents ni 18 -adjacents alors qu'il définissent des surfels qui sont $\mathcal{R}_{\text{vertex}}$ -adjacents.



(a) (b)

FIG. 4.12: Deux objets dont les $(6+, 18)$ -bords ont les mêmes propriétés topologiques.

Maintenant, nous donnons une définition différente mais équivalente de la relation de \mathcal{R}_v -adjacence qui fait appel à la notion de *loop* dans une surface discrète. De plus, la notion de *loop* sera utile dans la suite puisque l'ensemble de surfels qu'elle définit sera utilisé comme cellule de déformation élémentaire (voir la définition de ces cellules dans la section 2.2.2) dans l'espace constitué par une surface discrète.

Définition 4.7 (Loop) Un loop \mathcal{L} de Σ est un ensemble e -connexe de surfels qui partagent tous un sommet p donné. Maintenant, soit x un surfel de Σ , et soient a une arête de x et p un sommet de a . Alors, il existe un unique surfel x' , e -adjacent à x et qui partage le sommet p et l'arête a avec x . Maintenant, un troisième surfel $x'' \neq x$, e -adjacent à x' partage p avec x et x' . En répétant ce processus, il est possible de construire un e -chemin fermé simple π de x à x tel que $\pi^* = \mathcal{L}$ est un loop de Σ . Le chemin π est appelé une paramétrisation du loop \mathcal{L} .

Maintenant, la définition suivante est équivalente à la Définition 4.8.

Définition 4.8 (\mathcal{R}_v) Soient $x \in \Sigma$ et $y \in \Sigma$. Les deux surfels x et y sont dits \mathcal{R}_v -adjacents s'il existe un loop \mathcal{L} de Σ tel que $\{x, y\} \subset \mathcal{L}$.

Notation 4.2 Dans la suite, afin d'alléger les notations, nous abrégons " \mathcal{R}_v " par simplement " v ".

On s'aperçoit que la donnée d'un sommet n'est pas suffisante pour définir un loop puisque'un même sommet peut être associé avec deux loops distincts. En effet, si on considère

le $(18, 6+)$ –bord Σ de l’objet de la Figure 4.13, et dont tous les voxels sont visibles ; alors le sommet matérialisé par un point noir définit deux loops. Le premier est composé des six surfels visibles qui partagent ce sommet, et le second est composé de trois surfels cachés. De la même façon, si on considère le $(6+, 18)$ –bord du même objet, ce sommet définit trois loops différents dont chacun est composé de trois surfels.

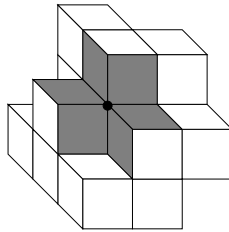


FIG. 4.13: *Exemple de loop.*

4.4 Le groupe fondamental d’une surface discrète

A ce stade, toutes les notions introduites de façon générique pour un espace discret dans la Partie I, sont applicables à l’espace constitué par une surface discrète muni des relations complémentaires de e –adjacence et v –adjacence. Toutes, sauf la notion d’homotopie de chemins (et donc le groupe fondamental discret). Suivant les étapes de la définition donnée dans la sous-section 2.2.2, nous devons définir tout d’abord les cellules de déformation élémentaire dans une surface discrète.

Notation 4.3 Dans la suite de cette partie, et sans autres précisions, le préfixe “ n –” est utilisé soit pour “ e –”, soit pour “ v –”, et non plus pour une relation d’adjacence dans \mathbb{Z}^2 ou \mathbb{Z}^3 . On rappellera ceci simplement en écrivant $n \in \{e, v\}$.

4.4.1 Cellule de déformation et hypothèse sur Σ

Définition 4.9 (cellule de déformation élémentaire dans Σ) *Les cellules de n –déformation élémentaire ($n \in \{e, v\}$) dans une surface discrète sont les loops de Σ .*

Cette dernière définition amène à la formulation suivante de la Définition 2.10 : deux n –chemins dans une partie X d’une surface discrète Σ ayant les mêmes extrémités sont dits identiques à une n –déformation élémentaire près s’ils sont identiques sauf dans un loop de Σ (voir Figure 4.14).

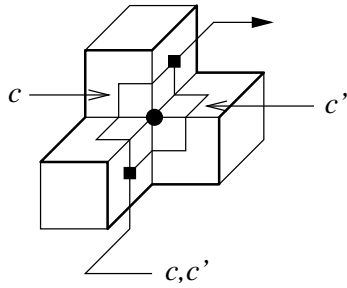


FIG. 4.14: Illustration d'une e -déformation élémentaire.

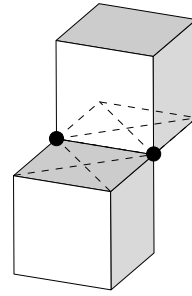


FIG. 4.15: Les deux surfels de ce $(18,6+)$ -bord qui sont marqués d'une croix ne sont pas e -adjacents mais appartiennent à deux loops distincts.

La Définition 4.9 permet aussi de définir la relation de \mathcal{R} -homotopie pour les chemins de surfels pour $\mathcal{R} \in \{e, v\}$ comme illustré dans la Figure 4.16. Ainsi, le e -chemin c_1 de Figure 4.16(a) est obtenu par une e -déformation élémentaire du e -chemin c_2 de la Figure 4.16(b). Finalement, le chemin c_1 est e -homotope au e -chemin c_3 de la Figure 4.16(c).

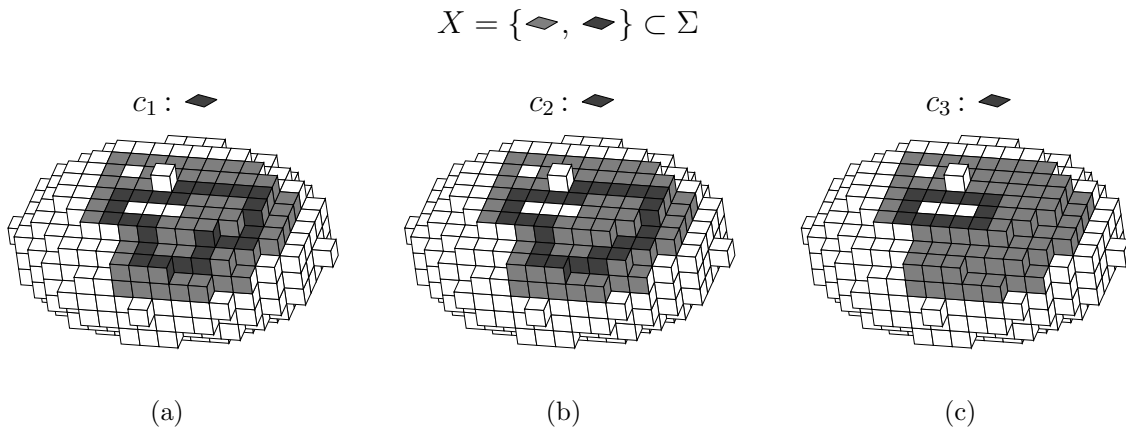


FIG. 4.16: Exemple de chemins e -homotopes dans une partie X d'une surface Σ .

Maintenant, dans le cas où $\Sigma = \delta_{(18,6+)}(O, V)$ (i.e. O est 18 -connexe), nous devons éviter une configuration particulière en faisant l'hypothèse que tous les loops de la surface sont des *disques topologiques* de telle sorte que la situation de la Figure 4.17 ne se produise pas (voir [ML00]). Une façon formelle d'exprimer cette hypothèse est de dire que deux surfels qui ne sont pas e -adjacents ne peuvent appartenir à deux loops différents (voir Figure 4.15). Une formulation équivalente peut être énoncée de la façon suivante : on suppose que $\Sigma = \delta_{18}(O, V)$ et que s'il existe dans O deux voxels 18 -adjacents mais pas

6-adjacents alors, au moins une des deux propriétés suivantes est satisfaite :

- Les deux voxels ont un 18-voisin commun dans O .
- Les deux voxels ont deux 26-voisins communs qui sont eux mêmes 26-adjacents.

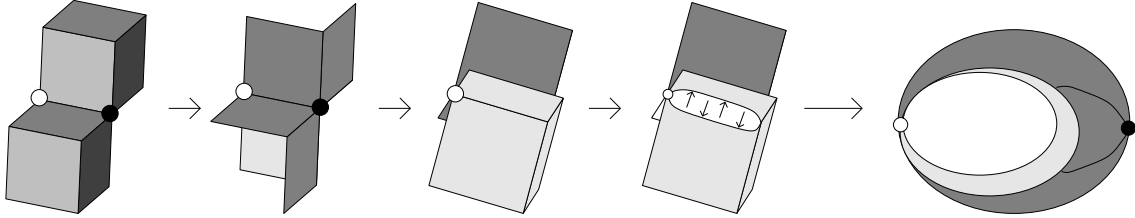


FIG. 4.17: Un cas pour lequel l'analogie continu d'un loop n'est pas un disque topologique

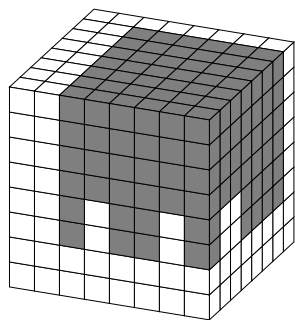
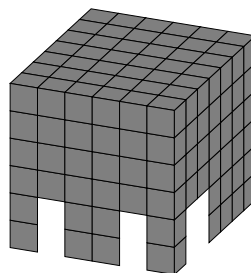
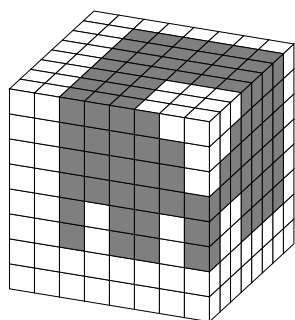
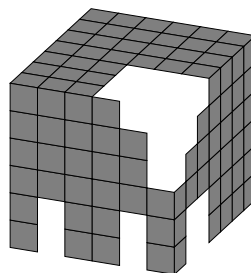
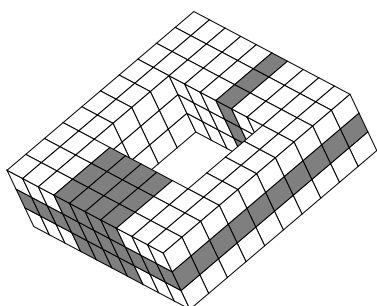
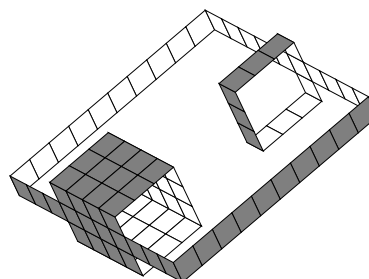
Cette restriction est nécessaire et suffisante pour garantir qu'un loop est un disque topologique. Nous avons besoin d'une restriction similaire sur \bar{O} quand $\Sigma = \delta_{6+}(O, V)$. Dans la suite, on fera appel à la remarque suivante :

Remarque 4.2 *Exactement un loop de Σ peut contenir deux surfels qui sont v -adjacents mais pas e -adjacents.*

4.4.2 Quelques exemples

Dans la suite de cette partie on montrera que le groupe fondamental discret, qui peut être utilisé pour définir les surfels simples dans une surface discrète, est aussi suffisant pour caractériser la sous homotopie dans ce type d'espace.

Afin d'illustrer ceci, nous donnons ici quelques exemples d'objets dans une surface discrète dont les groupes fondamentaux ne sont pas isomorphes. Ainsi, l'objet X_1 représenté dans la Figure 4.18 est simplement connexe au sens de la Définition 2.13. En d'autre termes, pour tout surfel $x \in X_1$, le groupe fondamental discret $\Pi_1^n(X_1, x)$ est réduit à la classe du chemin trivial (x, x) . Pour sa part, l'objet X_2 de la Figure 4.19 n'est pas simplement connexe puisqu'il est clair que pour tout $x \in X_2$, il existe un chemin fermé de x à x qui n'est pas réductible dans X_2 . Dans l'objet X_3 de la Figure 4.20, et pour tout surfel $x \in X_3$ on peut montrer qu'il existe trois éléments de $\Pi_1^n(X_3, x)$ tels que chacun ne puisse être exprimé comme un produit impliquant les deux autres.

(a) En gris, une partie $X_1 \subset \Sigma_1$.(b) L'ensemble X_1 .FIG. 4.18: X_1 est un ensemble simplement n -connexe de surfels.(a) En gris, une partie $X_2 \subset \Sigma_2$.(b) L'ensemble X_2 .FIG. 4.19: X_2 n'est pas simplement n -connexe.(a) En gris, une partie $X_3 \subset \Sigma_3$.(b) L'ensemble X_3 .FIG. 4.20: X_3 n'est pas simplement n -connexe. De plus, pour tout $p_2 \in X_2$ et $p_3 \in X_3$, les groupes $\Pi_1^n(X_2, p_2)$ et $\Pi_1^n(X_3, p_3)$ ne sont pas isomorphes.

Chapitre 5

Préservation de la topologie dans les surfaces discrètes

Dans ce chapitre, nous rappelons les résultats de travaux réalisés par R. Malgouyres et A. Lenoir sur la définition et la caractérisation de la préservation de la topologie pour les parties de surfaces discrètes. Ces travaux étaient motivés par la nécessité d'une justification formelle d'un algorithme de squelettisation utilisé pour extraire des données anatomiques à partir d'une image de la courbure moyenne à la surface du cerveau.

Dans [ML00], R. Malgouyres et A. Lenoir ont donné trois caractérisations équivalentes de l'homotopie, elle-même définie en utilisant classiquement la définition d'un surfel simple basée sur des propriétés locales de connexité. Dans le contexte des surfaces discrètes, de même que pour la 3D, l'homotopie peut être considérée comme un cas particulier de la *déformation de rétraction* telle que définie pour les complexes cellulaires.

Maintenant, dans le cadre des surfaces discrètes, la préservation de la topologie devient plus difficile à caractériser par rapport au cas 2D, ceci en raison du fait que les surfaces discrètes, de même que les parties de surfaces discrètes, peuvent posséder des *tunnels*. En effet, alors que les parties de \mathbb{Z}^2 sont caractérisées complètement d'un point de vue topologique par des seules considérations de connexité et "d'inclusion géographique", les parties de surfaces discrètes, comme les parties de \mathbb{Z}^3 , sont aussi caractérisées par le nombre et la position de leurs tunnels. Ces *tunnels* ne sont toutefois pas simples à définir de façon formelle. Néanmoins, une idée intuitive de leur nature peut être donnée. En effet, nous disons que l'objet de la Figure 5.1(a) possède un tunnel alors que celui de la Figure 5.1(b) n'en a pas. Qui plus est, il est clair qu'une telle propriété ne peut s'exprimer

à l'aide de seules propriétés de connexité. En effet, chacun des objets de la Figure 5.1 est connexe et sans cavité.

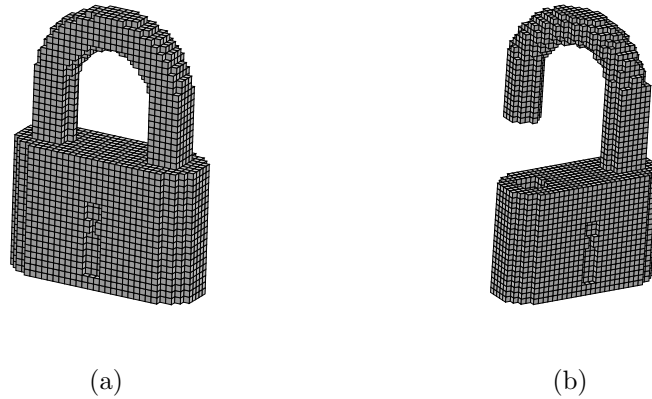


FIG. 5.1: *Illustration de la notion de tunnel.*

Dans ce chapitre X est une partie d'une surface Σ .

5.1 Surfel simple et homotopie

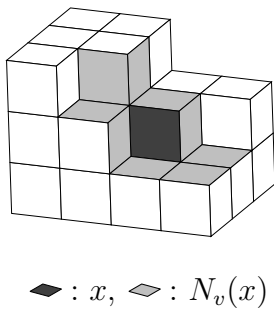


FIG. 5.2: *Le v -voisinage d'un surfel.*

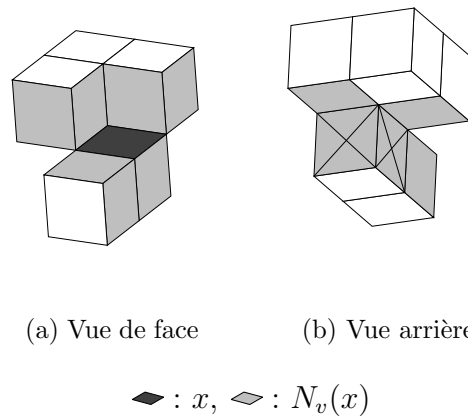


FIG. 5.3: *Un surfel dont le v -voisinage n'est pas un disque topologique.*

Soit x un surfel de Σ . Comme précisé dans la Section 4.4, on suppose que tout loop dans Σ est un disque topologique. Cependant, le v -voisinage du surfel x n'est lui-même pas toujours un disque topologique. Dans la Figure 5.2, nous avons représenté en gris clair le v -voisinage $N_v(x)$ d'un surfel donné, et dans la Figure 5.3 nous avons représenté un autre surfel dont le v -voisinage n'est pas un disque topologique puisque les deux surfels marqués d'une croix dans la Figure 5.3(b) sont e -adjacents. Alors, il convient de définir une

“topologie” sur $N_v(x) \cup \{x\}$ selon laquelle cet ensemble constitue un disque topologique. Nous utilisons dans ce but un graphe particulier construit à partir de l’ensemble $N_v(x) \cup \{x\}$ et de la relation d’adjacence suivante :

Définition 5.1 (relation de n_x -adjacence) Soit $x \in \Sigma$ et soient y et y' deux surfels de $N_v(x) \cup \{x\}$. On dit que y et y' sont n_x -adjacents s’ils sont n -adjacents et appartiennent à un même loop qui contient x (voir Figure 5.4).

Par exemple, dans la Figure 5.3(b), les deux surfels marqués d’une croix ne sont ni e_x -adjacents ni v_x -adjacents si x est le surfel noir de la Figure 5.3(a).

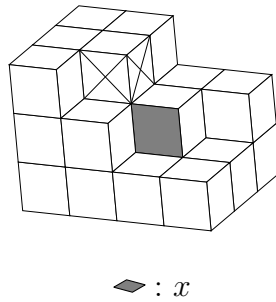


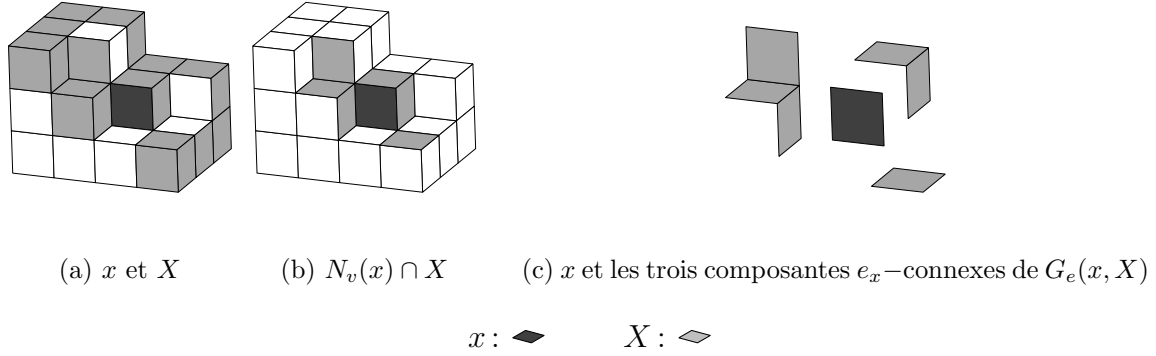
FIG. 5.4: Les deux surfels marqués d’une croix sont e_x -adjacents.

Définition 5.2 ($G_n(x, X)$) Soient $x \in \Sigma$ et $(n, \bar{n}) \in \{(e, v), (v, e)\}$. On note $G_n(x, X)$ l’ensemble des composantes n_x -connexes de $N_v(x) \cap X$. Notons que $G_n(x, X)$ est une ensemble d’ensembles et pas un ensemble de surfels. On notera $\mathcal{C}_n^x[G_n(x, X)]$ l’ensemble des toutes les composantes n_x -connexes de $G_n(x, X)$ qui contiennent un surfel n -adjacent à x .

Dans la Figure 5.5(c) sont représentées les trois composantes e_x -connexes de $G_e(x, X)$ associées au surfel x et à l’ensemble X de la Figure 5.5(a). Remarquons que la composante connexe de $G_e(x, X)$ qui est réduite à un surfel unique n’est pas e -adjacente à x de sorte que $\mathcal{C}_e^x[G_e(x, X)]$ n’a que deux éléments.

R. Malgouyres et A. Lenoir ont proposé la définition suivante d’une propriété de simplicité pour les surfels (un surfel x de X est dit n -intérieur à X si $G_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 0$, il est dit n -isolé si $G_n(x, X) = 0$).

Définition 5.3 (surfel simple [ML00]) Un surfel x est dit n -simple dans X si x n’est pas n -intérieur à X et le nombre $\text{Card}(\mathcal{C}_n^x[G_n(x, X)])$ de composantes n_x -connexes de $G_n(x, X)$ qui sont n -adjacentes à x est égale à 1.

FIG. 5.5: Exemple d'un ensemble $G_e(x, X)$.

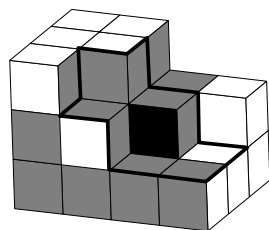
Remarque 5.1 De façon similaire au cas 3D, si le surfel x n'est ni n -isolé ni n -intérieur alors on a $\text{Card}(\mathcal{C}_n^x[G_n(x, X)]) = \text{Card}(\mathcal{C}_n^x[G_{\bar{n}}(x, \bar{X})])$.

Dans la Figure 5.6 nous avons représenté plusieurs exemples de v -voisinages de surfels n -simples et non n -simples dans une surface Σ . Ces exemples peuvent servir à résumer une partie des résultats de [ML00]. En effet, on remarque par exemple que la suppression du surfel noir x de la Figure 5.6(b) aboutit à la création d'une composante e -connexe dans $\bar{X} \cup \{x\}$ de sorte que ce surfel n'est pas v -simple pour l'ensemble X considéré. On remarque aussi que la suppression du surfel x de la Figure 5.6(d) entraînerait la création d'une composante e -connexe de X pour $(n, \bar{n}) = (e, v)$. Toujours dans le cas de la Figure 5.6(d) mais pour $(n, \bar{n}) = (v, e)$ on voit que la suppression du surfel x peut provoquer la séparation d'une composante v -connexe de X ou bien la suppression d'un *tunnel* de X selon l'existence d'un v -chemin dans X entre les surfels de $N_v(x) \cap X$ qui ne sont pas v -connectés dans $N_v(x) \cap X$.

La Définition 5.3 aboutit aux définitions de la sous-homotopie et de l'homotopie symétrique telles que présentées dans le Chapitre 3. La sous-homotopie étant définie de façon identique dans [ML00] comme suit :

Définition 5.4 (sous-homotopie) Soient $Y \subset X \subset \Sigma$. L'ensemble Y est dit sous n -homotope à X si et seulement si Y peut être obtenu à partir de X par suppression séquentielle de surfels n -simples.

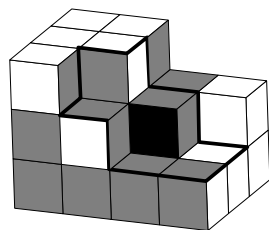
Cette notion d'homotopie permet de définir des algorithmes de squelettisation homotopique pour les parties de surfaces discrètes. Remarquons que cette définition de la *préservation de la topologie* repose sur la définition des surfels simples. La définition des



e -simple

non v -simple puisque $\text{Card}(\mathcal{C}_e^x[G_e(x, \overline{X})]) = 0$

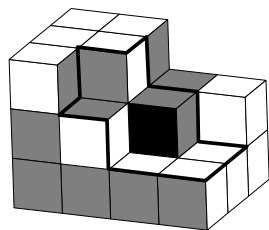
(a)



non e -simple puisque $\text{Card}(\mathcal{C}_e^x[G_e(x, X)]) = 2$

non v -simple puisque $\text{Card}(\mathcal{C}_e^x[G_e(x, \overline{X})]) = 0$

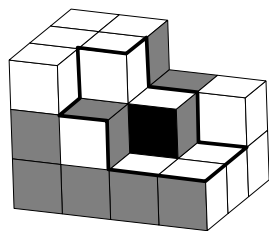
(b)



e -simple

non v -simple puisque $\text{Card}(\mathcal{C}_v^x[G_v(x, X)]) = 2$

(c)



non e -simple puisque $\text{Card}(\mathcal{C}_e^x[G_e(x, X)]) = 2$

non v -simple puisque $\text{Card}(\mathcal{C}_v^x[G_v(x, X)]) = 2$

(d)

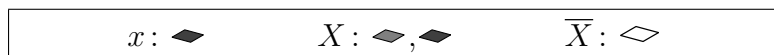


FIG. 5.6: Exemples de surfels n -simples et non n -simples pour $(n, \overline{n}) \in \{(e, v), (v, e)\}$.

surfels simples qui a été rappelée ici respecte les conditions classiques qui empêchent la déconnexion ou la reconnexion locale de l'objet et/ou de son complémentaire dans un certain voisinage. Dans [ML00], une justification de cette dernière définition d'un surfel simple est donnée en utilisant la caractéristique d'Euler. Ainsi, un surfel est simple si sa contribution à la caractéristique d'Euler de l'objet est nulle.

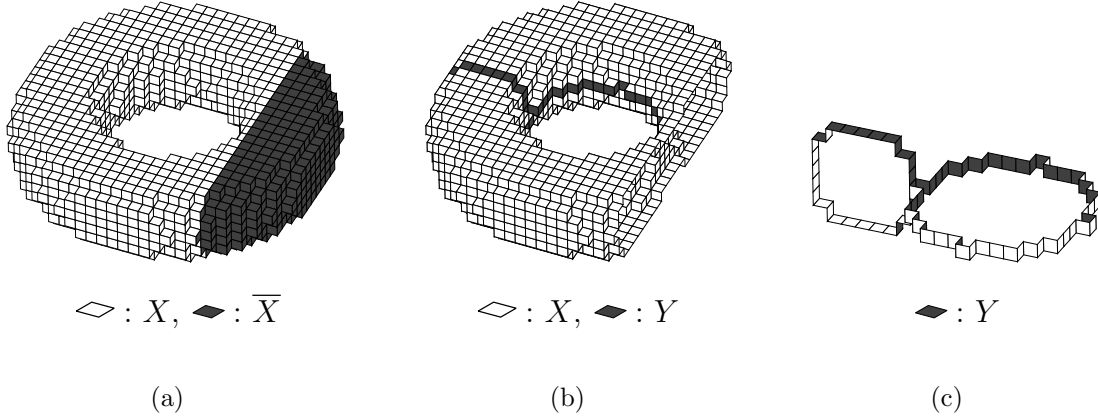


FIG. 5.7: Une partie Y de X qui est sous n -homotope à X pour $n \in \{e, v\}$.

Maintenant, on s'intéresse dans les deux sections suivantes aux caractérisations existantes de la sous-homotopie dans le cadre des surfaces discrètes. La première utilise la caractéristique d'Euler et la seconde le groupe fondamental discret.

5.2 Sous-homotopie et caractéristique d'Euler

Dans le Chapitre 9, nous utiliserons les notions de *disque topologique* et de *sphère topologique* dans le contexte des surfaces discrètes. Afin de définir ces termes, nous utilisons la notion classique de caractéristique d'Euler qui a été définie pour ce cadre dans [ML00]. De plus, nous rappelons la caractérisation de la sous-homotopie dans les surfaces discrètes qui utilise cet invariant topologique classique. Dans cette section, X désigne une partie de Σ et $n \in \{e, v\}$.

Définition 5.5 ($\{0, 1, 2\}$ -cellule) *On associe une dimension aux surfels, edgels et loops qui vaut respectivement 2, 1 et 0. On peut identifier un surfel x avec l'ensemble $\{x\}$. On appelle un surfel une 2-cellule, un edgel une 1-cellule et un loop une 0-cellule.*

Définition 5.6 (n -caractéristique d'Euler élémentaire d'une cellule) *Pour $d \in \{0, 1, 2\}$ et pour une d -cellule c , on définit la n -caractéristique d'Euler élémentaire de*

c dans X , noté $\chi_n^d(X, c)$, de la manière suivante :

$$\chi_n^d(X, c) = (-1)^d \cdot \text{Card}(\mathcal{C}_n(c \cap X)).$$

Notons que le seul cas pour lequel $\chi_n^d(X, c)$ peut être différent de 0, 1 ou -1 correspond à celui où c est un loop et $n = e$. Si \mathcal{E}_Σ et \mathcal{L}_Σ sont respectivement l'ensemble des edgels et l'ensemble des loops de Σ , on note :

$$\chi_n^2(X) = \sum_{s \in \Sigma} \chi_n^2(X, s), \quad \chi_n^1(X) = \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}_\Sigma} \chi_n^1(X, \epsilon) \quad \text{et} \quad \chi_n^0(X) = \sum_{l \in \mathcal{L}_\Sigma} \chi_n^0(X, l).$$

Définition 5.7 (n -caractéristique d'Euler) On définit la n -caractéristique d'Euler de X , notée $\chi_n(X)$, comme la quantité suivante :

$$\chi_n(X) = \chi_n^0(X) + \chi_n^1(X) + \chi_n^2(X) = \text{Card}(X) + \chi_n^1(X) + \chi_n^2(X).$$

Par exemple, la n -caractéristique d'Euler associée à un ensemble X constitué de deux surfels qui sont v -adjacents mais pas e -adjacents vaut 2 si $n = e$ ($\chi_e(X) = 2 - 8 + 8$) alors qu'elle sera égale à 1 si $n = v$ ($\chi_v(X) = 2 - 8 + 7$).

Le théorème suivant a été démontré dans [ML00]. Il fournit une caractérisation implémentable de la sous-homotopie dans les surfaces discrètes :

Théorème 7 ([ML00]) Si $Y \subset X$ sont deux parties n -connexes de Σ , alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Y est sous n -homotope à X .

ii) $\chi_n(X) = \chi_n(Y)$ et chaque composante \bar{n} -connexe de \bar{Y} contient un surfel de \bar{X} .

Ainsi, soient X et Y les deux parties d'une surface discrète Σ représentées dans la Figure 5.8. L'ensemble Y n'est pas sous n -homotope à X puisque, même si la seule composante \bar{n} -connexe de \bar{Y} contient effectivement un surfel de \bar{X} , sa n -caractéristique d'Euler (égale à 0) est différente de celle de X .

5.3 Groupe fondamental discret et sous-homotopie

Le Théorème 7 fournit une caractérisation qui permet de vérifier "algorithmiquement" la sous-homotopie entre deux parties d'une surfaces discrète. Maintenant, la définition de l'homotopie a été introduite en utilisant la notion de surfel simple, elle même dérivée de la définition des pixels simples dans \mathbb{Z}^2 . La caractérisation de la sous-homotopie qui

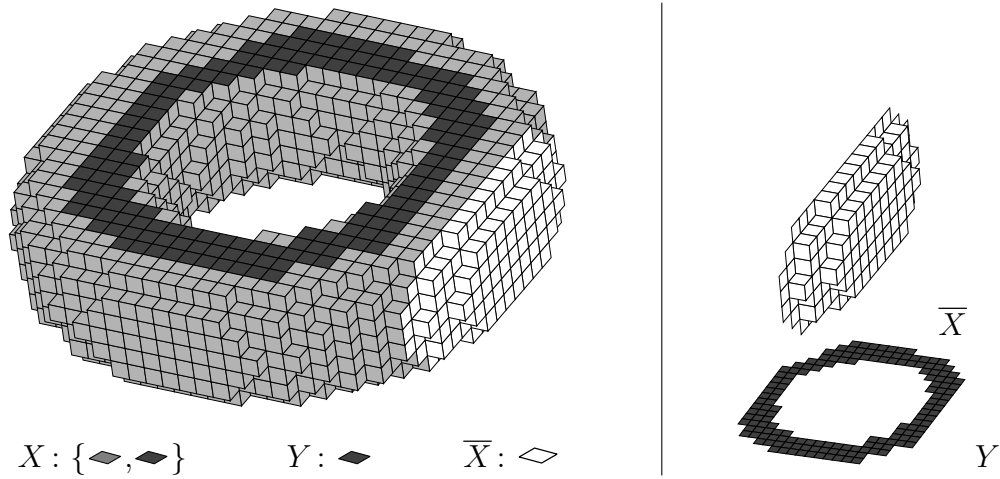


FIG. 5.8: $\chi_n(X) = -1$ et $\chi_n(Y) = 0$ pour $n \in \{e, v\}$.

utilise la caractéristique d'Euler constitue alors une forme de *validation* de la définition de la sous-homotopie et montre que cette définition est cohérente. En effet, la suppression séquentielle de surfels simples ne peut modifier ni le nombre de composantes connexes, ni le nombre de tunnels dans une surface. Cependant, le cas 3D montre que la caractéristique d'Euler, malgré son grand avantage d'être facilement calculable et de permettre de compter le nombre de tunnels d'un objet, ne fournit pas d'information sur la localisation de ces tunnels. Cet inconvénient majeur nous amène à étudier une autre caractérisation de la préservation de la topologie faisant appel à un autre invariant topologique. Un des buts de [ML00] était de fournir une autre caractérisation de la sous-homotopie dans les surfaces discrètes qui utilise le groupe fondamental discret. Finalement, le théorème suivant a été démontré dans [ML00].

Théorème 8 ([ML00]) *Soient $Y \subset X$ deux parties n -connexes de Σ . L'ensemble Y est sous n -homotope à X si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées pour tout surfel $B \in Y$:*

- i) Le morphisme $i_* : \Pi_1^n(Y, B) \longrightarrow \Pi_1^n(X, B)$ induit par l'application d'inclusion $i : Y \longrightarrow X$ est un isomorphisme.*
- ii) Chaque composante \bar{n} -connexe de \bar{Y} contient un surfel de \bar{X} .*

La preuve de ce dernier théorème utilise le Lemme suivant.

Lemme 5.1 ([ML00]) *Soient $X \subset \Sigma$, et soit $x \in X$ un surfel n -simple de X . Alors, pour tout $B \in X \setminus \{x\}$, le morphisme de groupes $i_* : \Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B) \longrightarrow \Pi_1^n(X, B)$ induit*

par l'inclusion de $X \setminus \{x\}$ dans X est un isomorphisme de groupes.

On rappelle le lemme suivant qui est une conséquence directe du Théorème 7 (voir Section 5.2) et du Théorème 8.

Lemme 5.2 *Soit Z une partie n -connexe de Σ , alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) Il existe un surfel z dans Z tel que $\{z\}$ est sous n -homotope à Z .*
- ii) \bar{Z} possède exactement une composante \bar{n} -connexe et $\chi_n(Z) = 1$.*
- iii) $Z \neq \Sigma$ et $\Pi_1^n(Z, B) = \{[(B, B)]\}$ pour tout $B \in Z$.*
- iv) $Z \neq \Sigma$ et $\chi_n(Z) = 1$.*

Le Lemme 5.2 permet la définition d'un *disque topologique* et d'une *sphère topologique*.

Définition 5.8 *Une partie n -connexe Z de Σ est appelée un disque topologique si elle vérifie les quatre conditions du Lemme 5.2.*

Définition 5.9 *Si $Z = \Sigma$ et $\chi_n(Z) = 2$, on dit que Z est une sphère topologique.*

Soient X et Y les deux parties de la surface représentée dans la Figure 5.8. Le Théorème 8 permet bel et bien de vérifier que l'objet Y n'est pas sous n -homotope à X . En effet, soit B le surfel marqué d'une croix dans la Figure 5.9, alors la classe d'homotopie du chemin c de la Figure 5.9 dans $\Pi_1^n(X, B)$ ne peut évidemment pas être atteinte par le morphisme i_* induit par l'inclusion de Y dans X . Ceci parce-qu'aucun chemin fermé de $A_n^B(Y)$ est n -homotope au chemin fermé c dans X . Alors, i_* n'est pas surjectif et donc, d'après le Théorème 8, l'ensemble Y ne peut être sous n -homotope à X .

5.4 Conclusion des Chapitres 4 et 5

Nous avons rappelé dans les deux chapitres précédents la définition d'un nouveau cadre pour les problèmes de préservation de la topologie, motivé par une application pratique : la squelettisation homotopique d'une image binaire dessinée à la surface d'un objet 3D. Toutefois, depuis [ML00], le fait que le groupe fondamental discret soit suffisant pour

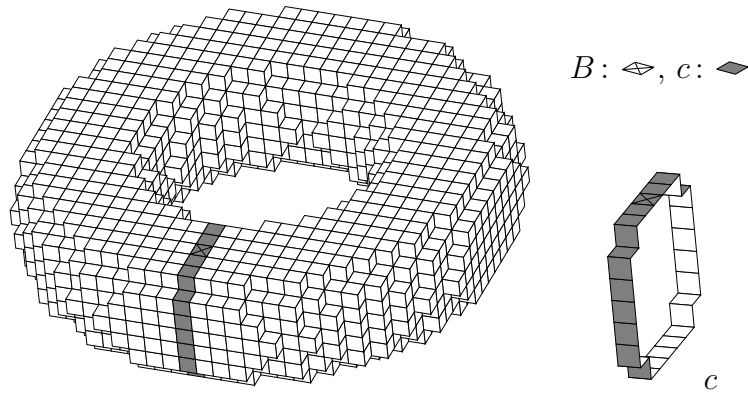


FIG. 5.9: Un chemin fermé c dans l'ensemble X de la Figure 5.8.

caractériser complètement la sous-homotopie au sein des surfaces discrètes était une conjecture. En d'autres termes, il était établi de manière intuitive que la condition *ii*) du Théorème 8 est en fait une conséquence de la condition *i*), excepté dans un cas très particulier. La preuve de ce qui devient un théorème est donnée dans le Chapitre 9 et a été précédemment publiée par l'auteur et R. Malgouyres dans [FM99a] dans une forme légèrement différente de celle présentée ici. Finalement, la version plus concise de cette preuve qui est présentée ici est soumise à publication ([FMb]). Cette preuve fait appel à un nouvel outil dont la définition est donnée dans le prochain chapitre: le *nombre d'intersection*.

Afin d'illustrer l'utilité de cet outil avant d'en donner la définition, nous expliquons ici de manière intuitive un moyen de prouver l'affirmation suivante: "*Ceci parce-qu'aucun chemin fermé de $A_n^B(Y)$ est n -homotope au chemin fermé c dans X* " (cf. paragraphe suivant la Définition 5.9). En effet, supposons que l'on ait défini le nombre d'intersections réelles $\mathcal{I}_{\pi,c}$ entre deux chemins de surfels π et c (de façon similaire à la définition de l'index 2D de la Section 2.1.2). Maintenant, supposons que l'on ait aussi montré que ce nombre reste inchangé quand on applique une déformation homotopique à l'un des deux chemins. Alors il devient facile de prouver qu'aucun e -chemin dans l'ensemble Y de la Figure 5.8 est n -homotope au chemin c de la Figure 5.9. En effet, soit π le v -chemin fermé dans \bar{X} représenté dans la Figure 5.10. Il est clair que $\mathcal{I}_{\pi,c} = \pm 1 \neq 0$. Maintenant, supposons qu'il existe dans Y un e -chemin c' qui soit homotope à c dans X . Alors, on devrait avoir $\mathcal{I}_{c,\pi} = \mathcal{I}_{c',\pi}$. Cependant, il est évident que c' , inclus dans Y , a un nombre d'intersection avec π égal à zéro. Finalement, ceci entraîne qu'un tel chemin c ne peut exister.

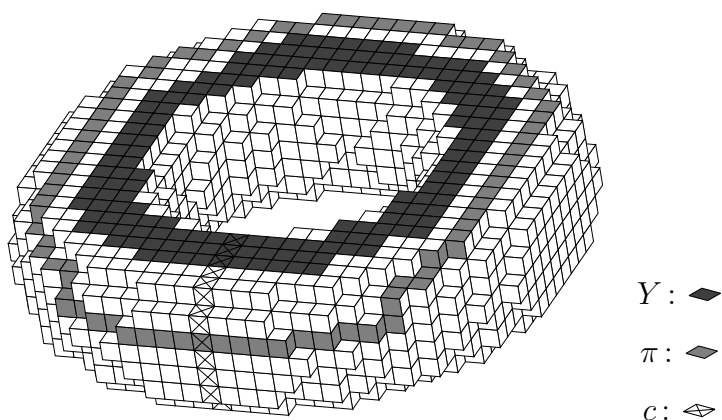


FIG. 5.10: *Aucun chemin fermé dans Y n'est n -homotope dans Σ au chemin fermé c .*

Chapitre 6

Le nombre d'intersection

Dans ce chapitre, nous introduisons un nouvel outil pour démontrer des théorèmes dans le cadre des surfaces discrètes qui a été présenté dans [FM99b]. L'idée principale de cet outil est de compter le nombre d'*intersections réelles* entre un v -chemin et un e -chemin. Une fois de plus, nous devons utiliser des relations d'adjacences complémentaires afin d'éviter le paradoxe topologique de deux chemins qui pourraient se croiser sans se rencontrer (i.e. sans intersection). De plus, le nombre d'intersection sera utilisé afin de montrer qu'un n -chemin fermé π donné n'est pas réductible dans un objet, et ceci sera possible en montrant l'existence d'un \bar{n} -chemin fermé dans l'objet dont le nombre d'intersection avec π est différent de zéro.

En effet, comme mentionné à la fin du chapitre précédent, la propriété principale de ce nombre est qu'il reste inchangé quand on applique une déformation homotopique à l'un des deux chemins. Du fait de cette propriété, le nombre d'intersection est qualifié de nouvel invariant topologique dans le cadre discret.

Dans la suite de ce chapitre, Σ est une surface discrète telle que définie dans le Chapitre 4.

6.1 Définition

Afin de définir les *intersections orientées*, on définit une orientation pour les surfels pour pouvoir définir ensuite ce que l'on appellera les "coté droit" et "coté gauche" locaux d'un n -chemin.

Notation 6.1 (arêtes orientées) Un surfel possédant quatre sommets, on peut ordonner ces sommets en distinguant, comme dans [RKW91], un sommet pour chacun des six

types de surfels, et en utilisant le sens de rotation trigonométrique autour de la normale sortante du surfel. Chaque sommet d'un surfel donné est alors associé avec un entier dans $\{0, 1, 2, 3\}$ (voir Figure 6.1). Avec cette paramétrisation des sommets, on peut définir les *arêtes orientées* comme des couples de sommets consécutifs suivant l'ordre cyclique. Ainsi, pour chaque surfel, nous avons défini les arêtes orientées suivantes: $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ et $(3, 0)$. Pour un e -chemin $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ et pour $k \in \{0, \dots, p\}$, on définit $front_\pi(k)$ quand $y_k \neq y_{k+1}$ [resp. $back_\pi(k)$ quand $y_k \neq y_{k-1}$] comme l'arête orientée du surfel y_k partagée en tant qu'arête par y_k et y_{k+1} [resp. y_k et y_{k-1}]. Notons que $back_\pi(0)$ et $front_\pi(p)$ ne sont pas définies si π n'est pas fermé.

Notation 6.2 Pour un surfel x et un numéro de sommet $w \in \{0, 1, 2, 3\}$ donné, on note $\mathcal{L}_w(x)$ le seul loop associé au sommet w de x qui contient le surfel x .

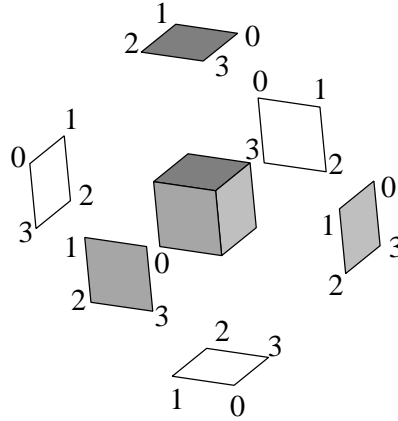


FIG. 6.1: Paramétrisation des sommets pour chaque type de surfel de telle sorte que les arêtes orientées sont $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ et $(3, 0)$.

Le lemme suivant nous permettra d'introduire la notion de paramétrisation canonique du v -voisinage d'un surfel.

Lemme 6.1 Soit x un surfel de Σ . Alors, $N_v(x)$ est une e_x -courbe fermée simple.

Preuve : Il suffit de montrer que pour tout surfel y de $N_v(x)$, il existe exactement deux surfels z_1 et z_2 dans $N_v(x)$ tels que y est e_x -adjacent à z_1 et z_2 .

Soit donc y un surfel de $N_v(x)$. Dans un premier temps, supposons que y et x ne sont pas e -adjacents. Alors, d'après la Remarque 4.2, exactement un loop \mathcal{L} de Σ peut contenir à la fois x et y . Soient z_1 et z_2 les deux seuls surfels de \mathcal{L} qui sont e -adjacents à y (par

définition même d'un loop). Il s'ensuit que z_1 et z_2 sont les deux seuls surfels e -adjacents à y qui puissent appartenir à un loop qui contient x . En d'autres termes, z_1 et z_2 sont les deux seuls surfels e_x -adjacents à y .

Maintenant, on peut supposer que x et y sont e -adjacents. On peut aussi supposer, tout en restant général, que y partage en tant qu'arête avec x l'arête orientée $(0, 1)$ de y . Alors, exactement deux loops contiennent à la fois x et y : $\mathcal{L}_0(y)$ et $\mathcal{L}_1(y)$. Soit z_1 l'unique surfel de Σ qui partage en tant qu'arête avec y l'arête orientée $(3, 0)$ de y ; et soit z_2 l'unique surfel de Σ qui partage en tant qu'arête avec y l'arête orientée $(1, 2)$ de y . Il est alors immédiat que $\{z_1, z_2\} \subset N_v(x)$ et $z_1 \neq z_2$. De façon évidente, le surfel z_3 qui partage en tant qu'arête avec y l'arête orientée $(2, 3)$ de y ne peut appartenir ni à \mathcal{L}_1 ni à \mathcal{L}_2 . Finalement, z_1 et z_2 sont les deux seuls surfels de Σ qui sont e_x -adjacents à y .

D'autre part, on doit établir le fait que $N_v(x)$ est e_x -connexe. Ceci est une conséquence directe du fait que $N_v(x)$ est la réunion des quatre loops qui contiennent x , dans laquelle on supprime le surfel x lui-même. Maintenant, ces loops peuvent être ordonnés suivant l'ordre cyclique sur les sommets de x ; chaque loop étant e -connexe et partageant un surfel avec son successeur et son prédécesseur selon cet ordre. On en déduit que la réunion (moins $\{x\}$) introduite précédemment est e_x -connexe. \square

Afin d'illustrer ce dernier Lemme, nous avons représenté dans la Figure 6.2 le graphe de e_x -adjacence G dans $N_v(x)$ où x est un surfel dont le voisinage est une e_x -courbe fermée simple mais pas une e -courbe fermée simple.

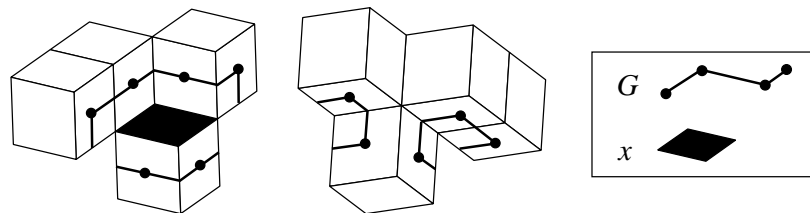


FIG. 6.2: *Vue de face et vue arrière d'une surface $\Sigma = \delta_{18}(O, V)$, un surfel x (en noir), et le graphe G de e_x -adjacence dans $N_v(x)$.*

Maintenant, pour un surfel y donné dans $N_v(x)$, il existe exactement deux paramétrisations (voir Définition 1.13) $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ et $\pi' = (y'_k)_{k=0, \dots, p'}$ de la e_x -courbe fermée simple $\mathcal{C} = N_v(x)$ telles que $y_0 = y'_0$. De plus, il est immédiat que $\pi^{-1} = \pi'$ (voir Figure 6.3). Alors, on peut définir de la manière suivante une paramétrisation canonique du v -voisinage d'un surfel x qui commence à un surfel y donné de $N_v(x)$.

Définition 6.1 (paramétrisation canonique de $N_v(x)$) Soient $x \in \Sigma$ et $y \in N_v(x)$. On définit la paramétrisation canonique de $N_v(x)$ associée au surfel y , notée $\mathcal{C}_y(x)$, comme le seul e_x -chemin fermé simple $\pi = (y_0, \dots, y_p)$ de $y = y_0$ à $y = y_p$ tel que π est une paramétrisation de la e_x -courbe fermée simple $\mathcal{C} = N_v(x)$ et qui vérifie la propriété suivante : pour tout $k \in \{0, \dots, p-1\}$, on a $x \in \mathcal{L}_{w_k}(y_k)$ où $(w_k - 1 \bmod 4, w_k)$ est l'arête orientée de y_k partagée en tant qu'arête par y_k et y_{k+1} .

En d'autres termes, $\mathcal{C}_y(x)$ est le seul e_x -chemin π de y à y dans $N_v(x)$ tel que x se situe toujours à gauche de π pour un observateur qui marcherait sur π , en regardant dans la direction du surfel suivant dans la paramétrisation. Dans le cas de la Figure 6.3, on obtient que $\mathcal{C}_{y_0}(x)$ est le e_x -chemin π' . En effet, les flèches dans la partie inférieure de cette figure représentent les arêtes orientées des surfels y_i [resp. y'_i], partagées en tant qu'arêtes par y_i et y_{i+1} [resp. y'_i et y'_{i+1}] pour $i \in \{0, \dots, 9\}$.

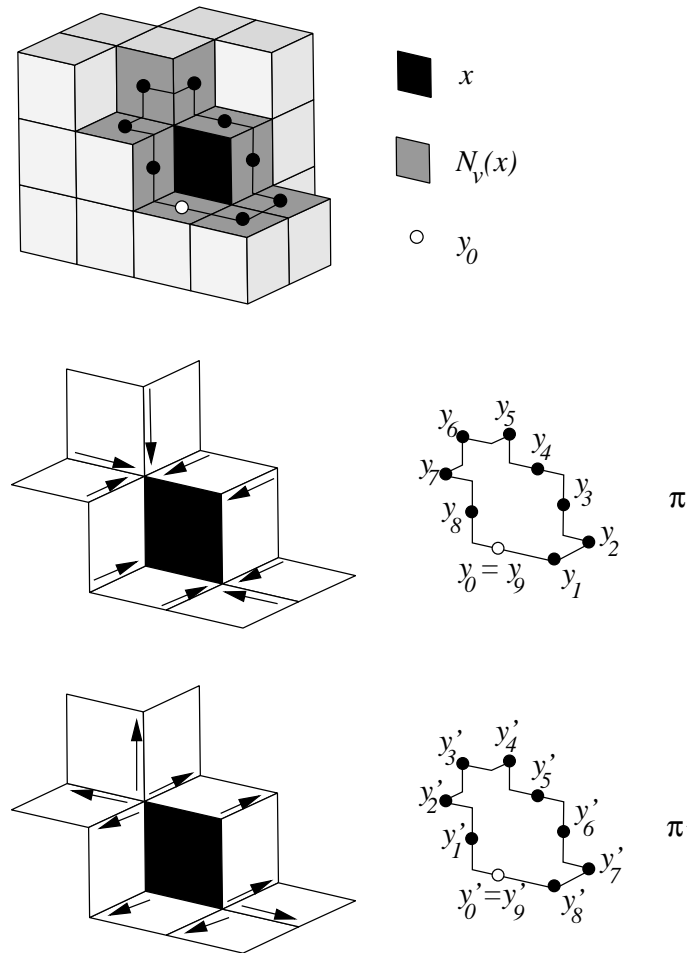


FIG. 6.3: Les deux paramétrisations $\pi = (y_0, \dots, y_9)$ et $\pi' = (y'_0, \dots, y'_9)$ de $N_v(x)$ issues de $y_0 = y'_0$.

On peut maintenant définir de façon locale, en chaque surfel y_k d'un n -chemin π , les cotés gauches et droits de π dans la surface, en tenant compte de l'orientation de cette surface. Ces ensembles gauche et droit sont des parties disjointes du v -voisinage du surfel y_k .

Définition 6.2 (partie gauche et partie droite locale) Soit $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ un n -chemin pour $n \in \{e, v\}$ et soit $k \in \{1, \dots, p-1\}$ ($k \in \{0, \dots, p\}$ si π est fermé). Alors, soit $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_l) = \mathcal{C}_{y_{k-1}}(y_k)$ la paramétrisation canonique de $N_v(y_k)$ associée à y_{k-1} . Enfin, soit h l'unique entier de $\{1, \dots, l\}$ tel que $y_{k+1} = \gamma_h$. On définit les ensembles de surfels $Left_\pi(k)$ et $Right_\pi(k)$ par :

Si $l = h$ (i.e $y_{k-1} = y_{k+1}$) alors $Left_\pi(k) = Right_\pi(k) = \emptyset$, sinon,

$$Right_\pi(k) = N_v(y_k) \cap \{\gamma_i \mid 0 < i < h - 1\}$$

$$Left_\pi(k) = N_v(y_k) \cap \{\gamma_i \mid h + 1 < i < l\}$$

Remarquons que les deux ensembles $Right_\pi(0)$ et $Left_\pi(0)$ ne sont pas définis dans le cas où π n'est pas fermé (puisque la notation y_{i-1} n'a pas de sens pour $i = 0$ dans ce cas).

Plusieurs exemples d'ensembles $Left_\pi(k)$ et $Right_\pi(k)$ sont représentés dans la Figure 6.5 pour des e -chemins et dans la Figure 6.6 pour des v -chemins qui ne sont pas des e -chemins.

Il est important de remarquer qu'il est impossible de définir les cotés gauche et droit d'une marche quand on ne connaît de cette marche que la position précédente et la position suivante qui sont identiques. Simplement, on définit les ensembles gauche et droit comme vides dans ce cas (voir Figure 6.4).

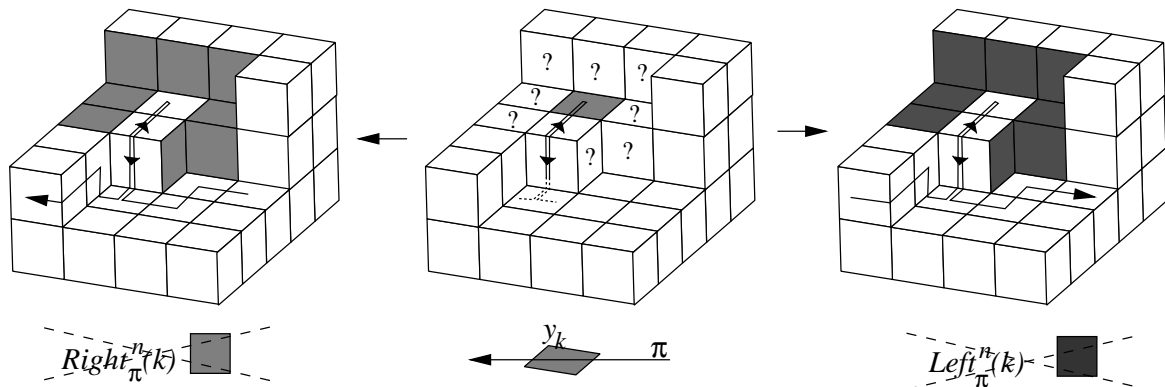


FIG. 6.4: Illustration du cas où les ensembles gauche et droit sont définis comme vides.

Maintenant, les trois remarques suivantes sont des conséquences directes des définitions précédentes.

Remarque 6.1 Si $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ est un n -chemin [resp. un n -chemin fermé] et $i \in \{1, \dots, q-1\}$ [resp. $i \in \{0, \dots, q\}$] est tel que x_{i+1} et x_{i-1} sont e -adjacents, alors soit $Right_c(i) = \emptyset$ et $Left_c(i) = N_v(x_i) \setminus \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$; ou $Left_c(i) = \emptyset$ et $Right_c(i) = N_v(x_i) \setminus \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$. Voir dans la Figure 6.5(c) l'exemple d'une telle situation. Réciproquement, un de ces deux ensembles peut être vide quand les deux surfels x_{i-1} et x_{i+1} sont soit égaux soit e -adjacents.

Remarque 6.2 Si $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ est un n -chemin sur Σ , alors $Left_c(i) \cap Right_c(i) = \emptyset$ pour tout $i \in \{1, \dots, q-1\}$ (pour tout $i \in \{0, \dots, q\}$ si c est fermé).

Remarque 6.3 Si $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ est un n -chemin sur Σ et x_i est un surfel de c tel que x_{i-1} et x_{i+1} ne sont ni égaux ni n_{x_i} -adjacents; alors les ensembles $Left_c(i)$ et $Right_c(i)$ sont tout deux non vides et chacun contient un surfel qui est \bar{n} -adjacent à x_i .

Deux exemples de configurations qui vérifient la remarque précédente sont représentés dans la Figure 6.5(a) et la Figure 6.6(a). En effet, les deux surfels x_{i-1} et x_{i+1} de la Figure 6.6(a) ne sont pas v_x -adjacents de telle sorte que $Left_c(i) \cap N_e(x) \neq \emptyset$ et $Right_c(i) \cap N_e(x) \neq \emptyset$. Finalement, des contre-exemples sont donnés dans la Figure 6.5(c) et la Figure 6.6(b).

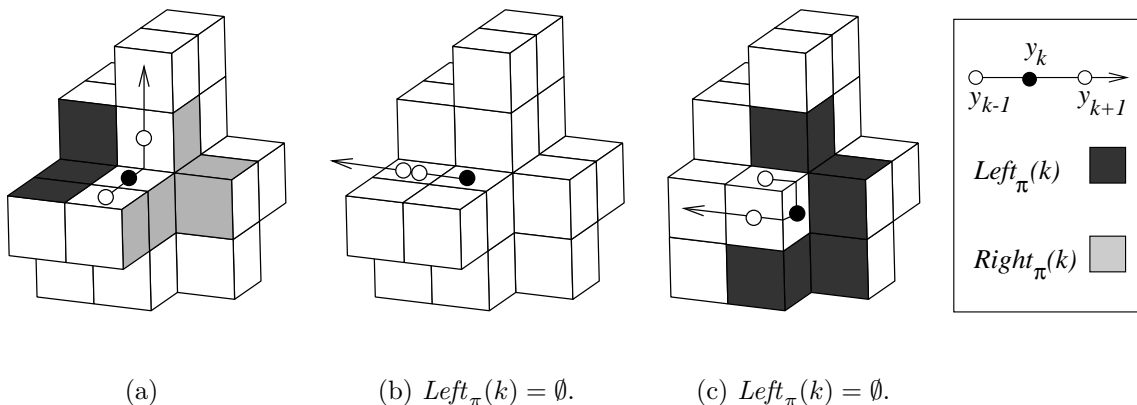


FIG. 6.5: Des exemples d'ensembles $Left_\pi(k)$ et $Right_\pi(k)$ où $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$.

La propriété suivante est la condition nécessaire et suffisante qui permet la définition du nombre d'intersection entre deux chemins.

Notation 6.3 Soient $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ un n -chemin et $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ un \bar{n} -chemin dans

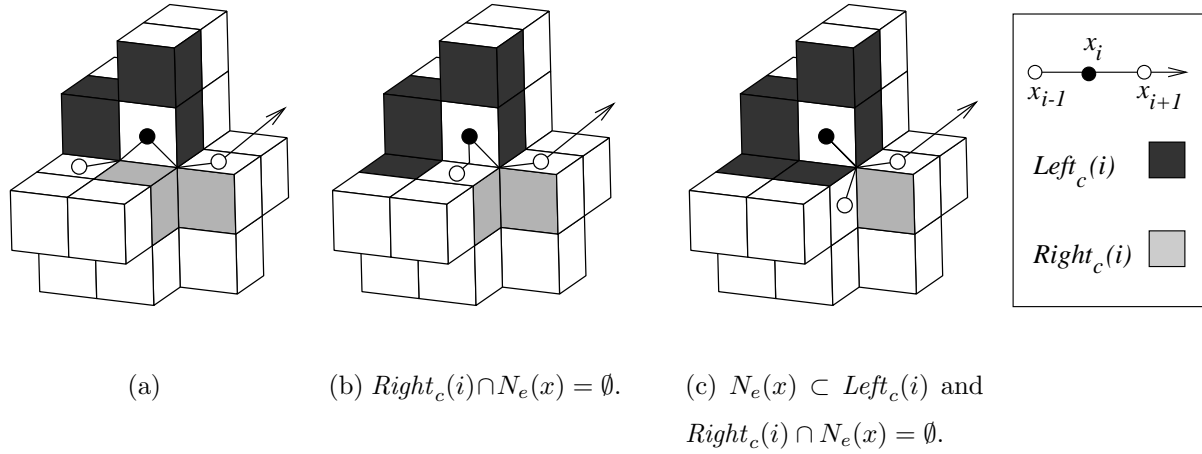


FIG. 6.6: Des exemples d'ensembles $Left_c(i)$ et $Right_c(i)$ où $c = (x_i)_{i=0, \dots, q}$ est un v -chemin qui n'est pas un e -chemin.

Σ . On dit que la propriété $\mathcal{P}(\pi, c)$ est satisfaite si dans le cas où π n'est pas fermé, alors ni y_0 ni y_p n'appartiennent à c^* .

Maintenant, nous pouvons définir la contribution au nombre d'intersection d'un couple d'indices.

Définition 6.3 (contribution au nombre d'intersection) Soient $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ un n -chemin et $c = (x_i)_{i=0, \dots, q}$ un \bar{n} -chemin tels que $\mathcal{P}(\pi, c)$ soit vérifiée. Soient $k \in \{0, \dots, p-1\}$ et $i \in \{0, \dots, q\}$. On définit la contribution au nombre d'intersection de π et c du couple (k, i) noté $\mathcal{I}_{\pi, c}(k, i)$, qui est égale à zéro si $x_i \neq y_k$, sinon $\mathcal{I}_{\pi, c}(k, i) = \mathcal{I}_{\pi, c}^-(k, i) + \mathcal{I}_{\pi, c}^+(k, i)$ où :

$\mathcal{I}_{\pi, c}^-(k, i) = 0 \text{ si } i = 0,$ $\mathcal{I}_{\pi, c}^-(k, i) = 0.5 \text{ si } x_{i-1} \in Right_\pi(k),$ $\mathcal{I}_{\pi, c}^-(k, i) = -0.5 \text{ si } x_{i-1} \in Left_\pi(k),$ $\mathcal{I}_{\pi, c}^-(k, i) = 0 \text{ sinon.}$	$\mathcal{I}_{\pi, c}^+(k, i) = 0 \text{ si } i = q,$ $\mathcal{I}_{\pi, c}^+(k, i) = -0.5 \text{ si } x_{i+1} \in Right_\pi(k),$ $\mathcal{I}_{\pi, c}^+(k, i) = 0.5 \text{ si } x_{i+1} \in Left_\pi(k),$ $\mathcal{I}_{\pi, c}^+(k, i) = 0 \text{ sinon.}$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Remarquons que $\mathcal{I}_{\pi, c}(k, i) = 0$ si $x_{i-1} = x_{i+1}$ ou $y_{k-1} = y_{k+1}$ (puisque $Left_\pi(k) = Right_\pi(k) = \emptyset$ dans ce dernier cas).

On remarque que $\mathcal{I}_{\pi, c}^-(k, i)$ dépend de la position de x_{i-1} par rapport au n -chemin π en y_k , et $\mathcal{I}_{\pi, c}^+(k, i)$ dépend de la position de x_{i+1} . Remarquons aussi que $\mathcal{I}_{\pi, c}(0, i) = 0$ pour tout $i \in \{0, \dots, q\}$ si π n'est pas fermé puisque la propriété $\mathcal{P}(\pi, c)$ impose que $x_i \neq y_0$ pour $i \in \{0, \dots, q\}$ dans ce cas. En effet, sinon $\mathcal{I}_{\pi, c}(0, i)$ ne serait pas défini quand π n'est pas fermé et $x_i = y_0$.

Définition 6.4 (Nombre d'Intersection) Soit $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ un n -chemin et soit $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ un \bar{n} -chemin tels que la propriété $\mathcal{P}(\pi, c)$ soit vérifiée. Le nombre d'intersection du n -chemin π et du \bar{n} -chemin c , noté $\mathcal{I}_{\pi,c}$, est défini par :

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=0}^q \mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i|x_i=y_k} \mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = \sum_{i=0}^q \sum_{k|x_i=y_k} \mathcal{I}_{\pi,c}(k, i).$$

Notation 6.4 Soient $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ un n -chemin et $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ un \bar{n} -chemin tels que la propriété $\mathcal{P}(\pi, c)$ soit vérifiée, alors, pour $h \in \{0, \dots, p\}$ et $l \in \{0, \dots, q\}$ on note :

$$\mathcal{I}_{\pi,c}^\pi(l) = \sum_{k=0}^{p-1} \mathcal{I}_{\pi,c}(k, l) \text{ et } \mathcal{I}_{\pi,c}^c(h) = \sum_{i=0}^q \mathcal{I}_{\pi,c}(h, i).$$

Nous avons représenté dans la Figure 6.7 et la Figure 6.8 deux exemples de paires de chemins. Alors que tout chemin fermé de surfels dans la surface discrète de la Figure 6.7 est réductible dans la surface entière, cela n'est pas vrai pour la surface de la Figure 6.8. En effet, les deux chemins dessinés sur cette figure ont un nombre d'intersection de ± 1 selon les orientations respectives de leur paramétrisations, et ceci sera suffisant (en utilisant les propriétés qui seront établies dans la suite) pour montrer qu'aucun des deux n'est réductible.

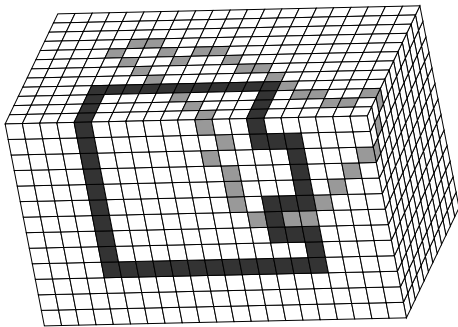


FIG. 6.7: Un v -chemin c (en gris) et un e -chemin π (en noir) tels que $\mathcal{I}_{\pi,c} = 0$.

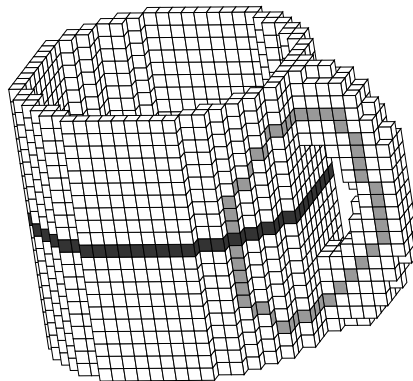


FIG. 6.8: Un v -chemin c et un e -chemin π tels que $\mathcal{I}_{\pi,c} = \pm 1$.

Remarque 6.4 Le nombre d'intersection $\mathcal{I}_{\pi,c}$ n'est pas défini quand le chemin $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ n'est pas fermé et que des surfels de c appartiennent à $\{y_0, y_p\}$ (i.e. quand $\mathcal{P}(\pi, c)$ n'est pas vérifiée). Cependant, $\mathcal{I}_{\pi,c}$ est bien défini dans la cas où $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ n'est pas fermé et π^* contient soit l'un soit deux des surfels x_0 et x_q . Dans ce dernier cas, $\mathcal{I}_{\pi,c}$ peut ne pas être entier (voir Figure 6.9).

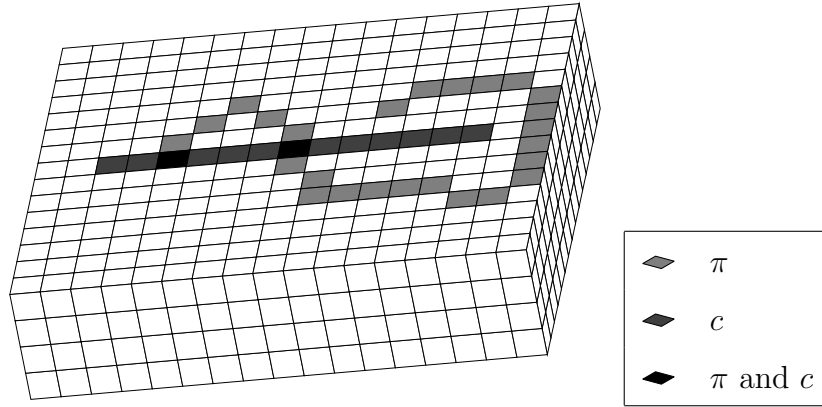


FIG. 6.9: Le nombre d'intersection $\mathcal{I}_{c,\pi}$ n'est pas défini puisque π^* contient une des extrémités de c . Toutefois, $\mathcal{I}_{\pi,c} = \pm 0.5$.

Remarque 6.5 Par définition de $\mathcal{I}_{\pi,c}$, on a $\mathcal{I}_{\pi,c} = 0$ si π ou bien c est un chemin trivial (Définition 1.12).

Dans les preuves données par la suite, nous utiliserons la définition suivante :

Définition 6.5 Soit π un n -chemin dans Σ et $\pi' = (y'_0, y'_1)$ un \bar{n} -chemin dans Σ de longueur 1. On dit que π' entre dans π si $y'_0 \notin \pi^*$ et $y'_1 \in \pi^*$; et on dit que π' sort de π si $y'_0 \in \pi^*$ et $y'_1 \notin \pi^*$.

6.2 Propriétés principales

Dans cette section, nous introduisons les théorèmes principaux concernant le nombre d'intersection et qui ont été présentés dans [FM99b] et [FMb] avec des preuves moins complètes. En effet, les preuves qui seront données ici sont plus concises que celles des articles mentionnés précédemment.

Théorème 9 Soit $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ un n -chemin dans Σ ($n \in \{e, v\}$). De plus, soient $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ et $c' = (x'_i)_{i=0,\dots,q'}$ deux \bar{n} -chemins tels que $\mathcal{P}(\pi, c)$ et $\mathcal{P}(\pi, c')$ soient vérifiées. Si c' est \bar{n} -homotope à c dans Σ (dans $\Sigma \setminus \{y_0, y_p\}$ si π n'est pas fermé), alors $\mathcal{I}_{\pi,c} = \mathcal{I}_{\pi,c'}$.

En d'autres termes, le nombre d'intersection entre un n -chemin π et un \bar{n} -chemin c , tel que défini dans la section précédente, est invariant par déformation homotopique du

chemin c . Tout d'abord, nous montrons la proposition suivante qui établit une propriété de commutativité du nombre d'intersection (à un changement de signe près).

Proposition 6.2 *Soit $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ un n -chemin de Σ et $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ un \bar{n} -chemin de Σ tel que les propriétés $\mathcal{P}(\pi, c)$ et $\mathcal{P}(c, \pi)$ soit vérifiées. Alors, $\mathcal{I}_{\pi,c} = -\mathcal{I}_{c,\pi}$.*

La propriété établie par le Théorème 9 peut être utilisée avec la Proposition 6.2 pour montrer qu'un n -chemin fermé α ($n \in \{e, v\}$) n'est pas n -homotope à un chemin trivial, ceci en trouvant un \bar{n} -chemin β dont le nombre d'intersection avec α est différent de zéro. D'une manière plus générale, il peut être utilisé pour distinguer deux n -chemins qui ne sont pas n -homotopes si leurs nombres d'intersection avec un troisième \bar{n} -chemin est différent.

En effet, le théorème suivant est une conséquence immédiate du Théorème 9 et de la Proposition 6.2.

Théorème 10 *Soient $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ et $\pi' = (y'_k)_{k=0,\dots,p'}$ deux n -chemins dans Σ ($n \in \{e, v\}$). De plus, soit $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ un \bar{n} -chemin tel que les propriétés $\mathcal{P}(\pi, c)$, $\mathcal{P}(\pi', c)$, $\mathcal{P}(c, \pi)$, et $\mathcal{P}(c, \pi')$ soient vérifiées. Si π' est n -homotope à π dans Σ (dans $\Sigma \setminus \{x_0, x_q\}$ si c n'est pas fermé), alors $\mathcal{I}_{\pi,c} = \mathcal{I}_{\pi',c}$.*

Preuve : D'après la Proposition 6.2 et puisque $\mathcal{P}(\pi, c)$ et $\mathcal{P}(c, \pi)$ son vérifiées on a $\mathcal{I}_{\pi,c} = -\mathcal{I}_{c,\pi}$. D'autre part, toujours d'après la Proposition 6.2 et puisque $\mathcal{P}(\pi', c)$ et $\mathcal{P}(c, \pi')$ sont vérifiées on a $\mathcal{I}_{\pi',c} = -\mathcal{I}_{c,\pi'}$. Finalement, d'après le Théorème 9, puisque $\mathcal{P}(c, \pi)$ et $\mathcal{P}(c, \pi')$ sont vérifiées ; et comme π' est n -homotope à π dans Σ (dans $\Sigma \setminus \{x_0, x_q\}$ si c n'est pas fermé) alors $\mathcal{I}_{c,\pi} = \mathcal{I}_{c,\pi'}$. \square

La preuve du Théorème 9 viendra après la section suivante dans laquelle sont établies plusieurs propriétés utiles du nombre d'intersection.

6.3 Propriétés utiles

6.3.1 Changement de signe par permutation des chemins

Proposition 6.3 *Soient π un n -chemin et c un \bar{n} -chemin tels que $\mathcal{P}(\pi, c)$ est vérifiée. Alors $\mathcal{I}_{\pi,c} = -\mathcal{I}_{\pi^{-1},c}$.*

Avant de montrer la Proposition 6.3, nous posons tout d'abord les lemmes suivants.

Lemme 6.4 *Soit $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ un n -chemin dans Σ . Alors, $Left_\pi(k) = Right_{\pi^{-1}}(p-k)$ et $Right_\pi(k) = Left_{\pi^{-1}}(p-k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$. De plus, si π est fermé, alors $Left_\pi(0) = Right_{\pi^{-1}}(0)$ et $Right_\pi(0) = Left_{\pi^{-1}}(0)$.*

Preuve : Soient $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ et $\pi^{-1} = (y'_k)_{k=0,\dots,p}$.

Si π est fermé, alors $y_0 = y'_0$, $y_1 = y'_{p-1}$ et $y_{p-1} = y'_1$. Soit $\beta = \mathcal{C}_{y_{p-1}}(y_0) = (\beta^0, \dots, \beta^{l_0})$ la paramétrisation canonique de $N_v(y_0)$ associée à y_{p-1} . Et soit h_0 l'unique entier de $\{1, \dots, l_0\}$ tel que $y_{p-1} = \beta^{h_0}$. Si $h_0 = l_0$ il est immédiat que $Left_\pi(0) = Right_{\pi^{-1}}(0) = Right_\pi(0) = Left_{\pi^{-1}}(0) = \emptyset$. Si $h_0 < l_0$ alors de la même manière le chemin $\beta' = (\beta^{h_0}, \beta^{h_0+1}, \dots, \beta^{l_0}).(\beta^0, \beta^1, \dots, \beta^{h_0})$ est la paramétrisation canonique du v -voisinage $N_v(y'_0) = N_v(y_0)$ associée au surfel $y'_{p-1} = y_1$ (voir Définition 6.1). Finalement, d'après la Définition 6.2, $Left_\pi(0) = Right_{\pi^{-1}}(0)$ et $Right_\pi(0) = Left_{\pi^{-1}}(0)$.

Maintenant, pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$ on remarque que $y_k = y'_{p-k}$, $y_{k-1} = y'_{(p-k)+1}$ et $y_{k+1} = y'_{(p-k)-1}$. Pour un tel k , soit $\gamma = \mathcal{C}_{y_{k-1}}(y_k) = (\gamma^0, \dots, \gamma^l)$ la paramétrisation canonique de $N_v(y_k)$ associée à y_{k-1} . Et soit h l'unique entier de $\{1, \dots, l\}$ tel que $y_{k+1} = \gamma^h$.

Si $h = l$ il est immédiat que $Left_\pi(k) = Right_{\pi^{-1}}(p-k) = Right_\pi(k) = Left_{\pi^{-1}}(p-k) = \emptyset$. Si $h < l$ alors il est aussi immédiat que $\gamma' = (\gamma^h, \gamma^{h+1}, \dots, \gamma^l).(\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^h)$ est la paramétrisation canonique de $N_v(y'_{p-k}) = N_v(y_k)$ associée au surfel $y'_{(p-k)-1} = y_{k+1}$ (voir Définition 6.1). Finalement, d'après la Définition 6.2, $Left_\pi(k) = Right_{\pi^{-1}}(p-k)$ et $Right_\pi(k) = Left_{\pi^{-1}}(p-k)$. \square

Lemme 6.5 *Soient $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ un n -chemin de longueur p dans Σ et $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ un \bar{n} -chemin de longueur q dans Σ tel que $\mathcal{P}(\pi, c)$ soit vérifiée. Alors, $\mathcal{I}_{\pi, c}(k, i) = -\mathcal{I}_{\pi^{-1}, c}(p-k, i)$ pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$ et tout $i \in \{0, \dots, q\}$. Si π est fermé, alors $\mathcal{I}_{\pi, c}(0, i) = -\mathcal{I}_{\pi^{-1}, c}(0, i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, q\}$.*

Preuve : Soit $\pi^{-1} = (y'_0, \dots, y'_p)$. D'après le Lemme 6.4, on a $Right_\pi(k) = Left_{\pi^{-1}}(p-k)$ et $Left_\pi(k) = Right_{\pi^{-1}}(p-k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$. Alors, suivant la Définition 6.3, on a $\mathcal{I}_{\pi, c}(k, i) = -\mathcal{I}_{\pi^{-1}, c}(p-k, i)$ pour $i \in \{0, \dots, q\}$. Si π est fermé et toujours d'après le Lemme 6.4 et la Définition 6.3, on a $Right_\pi(0) = Left_{\pi^{-1}}(0)$ et $Left_\pi(0) = Right_{\pi^{-1}}(0)$ de sorte que $\mathcal{I}_{\pi, c}(0, i) = -\mathcal{I}_{\pi^{-1}, c}(0, i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, q\}$. \square

Preuve de la Proposition 6.3 : Soient $\pi = (y_0, \dots, y_p)$, $\pi^{-1} = (y'_0, \dots, y'_p)$ et $c = (x_0, \dots, x_q)$.

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = \left[\sum_{i=0}^q \mathcal{I}_{\pi,c}(0, i) \right] + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=0}^q \mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) \quad (6.1)$$

$$\mathcal{I}_{\pi^{-1},c} = \left[\sum_{i=0}^q \mathcal{I}_{\pi^{-1},c}(0, i) \right] + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=0}^q \mathcal{I}_{\pi^{-1},c}(p-k, i) \quad (6.2)$$

D'après le Lemme 6.5, on a $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{\pi^{-1},c}(p-k, i)$ pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$ et tout $i \in \{0, \dots, q\}$. De plus, si π n'est pas fermé et puisque $\mathcal{P}(\pi, c)$ est vérifiée, alors $\mathcal{I}_{\pi,c}(0, i) = \mathcal{I}_{\pi^{-1},c}(0, i) = 0$ pour tout $i \in \{0, \dots, q\}$ (puisque $x_i \neq y_0$ pour de tels entiers i). Si π est fermé et toujours d'après le Lemme 6.5, on a $\mathcal{I}_{\pi,c}(0, i) = -\mathcal{I}_{\pi^{-1},c}(0, i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, q\}$. Finalement, $\mathcal{I}_{\pi,c} = -\mathcal{I}_{\pi^{-1},c}$ d'après les équations (6.1) et (6.2). \square

Proposition 6.6 Soit $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ un n -chemin et soit $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ un \bar{n} -chemin tel que la propriété $\mathcal{P}(\pi, c)$ soit vérifiée ; alors $\mathcal{I}_{\pi,c} = -\mathcal{I}_{\pi,c^{-1}}$.

Afin de montrer la Proposition 6.6, nous établissons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 6.7 Soit $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ un n -chemin de longueur p dans Σ et soit $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ un \bar{n} -chemin de longueur q dans Σ tel que la propriété $\mathcal{P}(\pi, c)$ soit vérifiée. Alors, $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{\pi,c^{-1}}(k, q-i)$ pour tout $k \in \{0, \dots, p-1\}$ et tout $i \in \{0, \dots, q\}$.

Preuve : Soit $c^{-1} = (x'_0, \dots, x'_q)$ tel que pour tout $i \in \{0, \dots, q\}$ on ait $x_i = x'_{q-i}$.

- Pour $i \in \{1, \dots, q-1\}$ on remarque que $x_i = x'_{q-i}$, $x_{i-1} = x'_{(q-i)+1}$ et $x_{i+1} = x'_{(q-i)-1}$. Ainsi, suivant la Définition 6.3 pour un tel i , on a $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{\pi,c^{-1}}(k, q-i)$ pour tout $k \in \{0, \dots, p-1\}$.

- Pour $i = 0$, puisque $x_0 = x'_q$ et $x_1 = x'_{q-1}$, on a aussi $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, 0) = \mathcal{I}_{\pi,c}^+(k, 0) = -\mathcal{I}_{\pi,c^{-1}}^-(k, q) = -\mathcal{I}_{\pi,c^{-1}}(k, q-0)$ pour tout $k \in \{0, \dots, p-1\}$.

- Pour $i = q$, puisque $x_q = x'_0$ et $x_{q-1} = x'_1$, on a aussi $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, q) = \mathcal{I}_{\pi,c}^-(k, q) = -\mathcal{I}_{\pi,c^{-1}}^+(k, 0) = -\mathcal{I}_{\pi,c^{-1}}(k, q-q)$ pour tout $k \in \{0, \dots, p-1\}$.

Finalement, pour tout $k \in \{0, \dots, p-1\}$ et tout $i \in \{1, \dots, q-1\}$ on a $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{\pi,c}(k, q-i)$. \square

Preuve de la Proposition 6.6 : Soit $c^{-1} = (x'_0, \dots, x'_q)$ tel que pour tout $i \in \{0, \dots, q\}$ on ait $x_i = x'_{q-i}$. Alors,

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=0}^q \mathcal{I}_{\pi,c}(k, i)$$

Mais, d'après le Lemme 6.7, on sait que $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{\pi,c^{-1}}(k, q - i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, q\}$ et tout $k \in \{0, \dots, p - 1\}$. Il est alors immédiat que,

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=0}^q -\mathcal{I}_{\pi,c^{-1}}(k, i) = -\mathcal{I}_{\pi,c^{-1}}$$

□

6.3.2 Commutativité

Dans les preuves qui suivront, nous utiliserons la Proposition 6.2 qui a été introduite dans la Section 6.2 et qui établit le fait que l'échange des rôles joués par les deux chemins dans la définition du nombre d'intersection aboutit à un simple changement de signe de ce nombre d'intersection, quand une telle permutation est possible. En effet, dans le cas où π est fermé et c ne l'est pas, alors, si au moins une des extrémités de c appartient à π^* , le nombre d'intersection $\mathcal{I}_{\pi,c}$ est bien défini tandis que le nombre $\mathcal{I}_{c,\pi}$ ne l'est pas. L'idée de cette propriété de commutativité est résumé par la Figure 6.10 dans laquelle on peut dire que c traverse π de gauche à droite en remarquant l'une ou l'autre des deux propriétés suivantes :

- c entre dans π par la gauche en a et sort de π par la droite de π en b , ou bien
- π entre dans c par la droite de c en a et sort de c par la gauche de c en b .

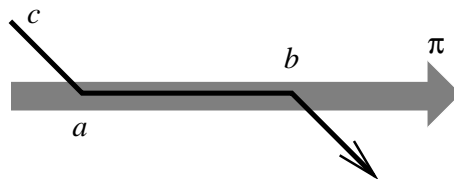


FIG. 6.10: Il y a deux façons de s'apercevoir que c croise π de gauche à droite.

On rappelle la Proposition 6.2 :

Proposition 6.2 Soient $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ un n -chemin dans Σ et $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ un \bar{n} -chemin dans Σ tels que $\mathcal{P}(\pi, c)$ et $\mathcal{P}(c, \pi)$ sont vérifiées. Alors, $\mathcal{I}_{\pi,c} = -\mathcal{I}_{c,\pi}$.

Afin de prouver ce résultat très intuitif, nous devons d'abord établir quelques lemmes techniques.

Lemme 6.8 *Soit $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ un n -chemin dans Σ et soit $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ un \bar{n} -chemin de Σ tels que $\mathcal{P}(\pi, c)$ et $\mathcal{P}(c, \pi)$ soient vérifiées. Pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$ ($k \in \{0, \dots, p-1\}$ si π est fermé) et tout $i \in \{1, \dots, q-1\}$, on a $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{c,\pi}(i, k)$.*

Preuve du Lemme 6.8 : Selon la Définition 6.3, les cas où $x_i \neq y_k$, $x_{i-1} = x_{i+1}$ ou $y_{k-1} = y_{k+1}$ sont immédiats puisqu'alors $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = \mathcal{I}_{c,\pi}(i, k) = 0$. Aussi, on suppose dans la suite de cette preuve que $x_i = y_k$, $x_{i-1} \neq x_{i+1}$ et $y_{k-1} \neq y_{k+1}$. De façon similaire, si $x_{i-1} = y_{k-1}$ et $x_{i+1} = y_{k+1}$, ou si $x_{i-1} = y_{k+1}$ et $x_{i+1} = y_{k-1}$ il est immédiat que $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = \mathcal{I}_{c,\pi}(i, k) = 0$. Alors, on peut aussi supposer dans la suite que $\{y_{k-1}, y_{k+1}\} \neq \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$; restent alors les cas suivants :

Cas 1 : $x_{i-1} = y_{k-1}$ (voir Figure 6.11) de sorte que $\mathcal{I}_{\pi,c}^-(k, i) = \mathcal{I}_{c,\pi}^-(i, k) = 0$. Alors, soit $\gamma = (\gamma^0, \dots, \gamma^l) = \mathcal{C}_{y_{k-1}}(y_k) = \mathcal{C}_{x_{i-1}}(x_i)$ la paramétrisation canonique de $N_v(y_k) = N_v(x_i)$ et soit h l'unique entier de $\{1, \dots, l\}$ tel que $y_{k+1} = \gamma^h$. D'après les hypothèses faites précédemment, $x_{i+1} \notin \{\gamma^0 = \gamma^l, \gamma^h\}$.

Si $x_{i+1} = \gamma^j$ pour $0 < j < h$ alors $x_{i+1} \in \text{Right}_\pi(k)$ et $h > j$ entraînent que $y_{k+1} \in \text{Left}_c(i)$ (voir Définition 6.2). D'après la Définition 6.3, on a alors $\mathcal{I}_{\pi,c}^+(k, i) = -\mathcal{I}_{c,\pi}^+(i, k) = 0.5$ et finalement $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{c,\pi}(i, k)$.

Si $x_{i+1} = \gamma^j$ pour $h < j < l$ alors $x_{i+1} \in \text{Left}_\pi(k)$ et $j > h$ entraînent que $y_{k+1} \in \text{Right}_c(i)$ (voir Définition 6.2). D'après la Définition 6.3, on a alors $\mathcal{I}_{\pi,c}^+(k, i) = -\mathcal{I}_{c,\pi}^+(i, k) = 0.5$ et donc $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{c,\pi}(i, k)$.

Cas 2 $x_{i-1} = y_{k+1}$ (voir Figure 6.11) de telle sorte que $\mathcal{I}_{\pi,c}^-(k, i) = \mathcal{I}_{c,\pi}^-(i, k) = 0$.

On remarque que $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{\pi^{-1},c}(p-k, i)$ et $\mathcal{I}_{c,\pi}(i, k) = -\mathcal{I}_{c,\pi^{-1}}(i, p-k)$ (Lemme 6.5). Ainsi, on doit montrer que $\mathcal{I}_{\pi^{-1},c}(p-k, i) = \mathcal{I}_{c,\pi^{-1}}(i, p-k)$. Maintenant, si $\pi^{-1} = (y'_0, \dots, y'_p)$ alors $y_k = y'_{p-k}$ et $y_{k+1} = y'_{(p-k)-1}$; nous sommes ramenés au cas précédent à l'indice $p-k$ de π^{-1} .

Cas 3 $x_{i+1} = y_{k+1}$ (voir Figure 6.11) de sorte que $\mathcal{I}_{\pi,c}^+(k, i) = \mathcal{I}_{c,\pi}^+(i, k) = 0$. On remarque que $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{\pi^{-1},c}(p-k, i) = \mathcal{I}_{\pi^{-1},c^{-1}}(p-k, q-i)$ (d'après le Lemme 6.5 et le Lemme 6.7), de même $\mathcal{I}_{c,\pi}(i, k) = \mathcal{I}_{c^{-1},\pi^{-1}}(q-i, p-k)$. Il est alors suffisant de montrer que $\mathcal{I}_{\pi^{-1},c^{-1}}(p-k, q-i) = -\mathcal{I}_{c^{-1},\pi^{-1}}(p-k, q-i)$. Si $c^{-1} = (x'_0, \dots, x'_q)$ et

$\pi^{-1} = (y'_0, \dots, y'_q)$ alors, d'une part $x_i = x'_{q-i}$, $x_{i+1} = x'_{(q-i)-1}$ et $x_{i-1} = x'_{(q-i)+1}$. D'autre part, $y_k = y'_{p-k \bmod p}$, $y_{k-1 \bmod p} = y'_{(p-k)+1 \bmod p}$ et $y_{k+1 \bmod p} = y'_{(p-k)-1 \bmod p}$. Nous sommes alors ramenés au cas 1 avec les indices $(p - k \bmod p)$ et $(q - i \bmod p)$ des chemins π^{-1} et c^{-1} .

Cas 4 $x_{i+1} = y_{k-1}$ (voir Figure 6.11) de sorte que $\mathcal{I}_{\pi,c}^+(k, i) = \mathcal{I}_{c,\pi}^+(i, k) = 0$. On remarque que $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{\pi,c^{-1}}(k, q - i)$ et $\mathcal{I}_{\pi,c}(c, \pi) = -\mathcal{I}_{c^{-1},\pi}(q - i, k)$ (Lemme 6.7). Il est alors suffisant de montrer que $\mathcal{I}_{\pi,c^{-1}}(k, q - i) = \mathcal{I}_{c^{-1},\pi}(q - i, k)$. Si $c^{-1} = (x'_0, \dots, x'_q)$ alors $x_i = x'_{q-i}$, $x_{i-1} = x'_{(q-i)+1}$ et $x_{i+1} = x'_{(q-i)-1}$; ce cas est donc équivalent au cas 1.

Cas 5 Si $\{x_{i+1}, x_{i-1}\} \cap \{y_{k-1}, y_{k+1}\} = \emptyset$

Soit $\gamma = (\gamma^0, \dots, \gamma^l) = \mathcal{C}_{y_{k-1}}(y_k)$ la paramétrisation canonique de $N_v(y_k)$ et soit h l'unique entier de $\{1, \dots, l\}$ tel que $y_{k+1} = \gamma^h$. Alors il existe m et m' tels que $\gamma^m = x_{i-1}$ et $\gamma^{m'} = x_{i+1}$. Puisque $\{x_{i+1}, x_{i-1}\} \cap \{\gamma^0 = \gamma^l, \gamma^h\} = \emptyset$ on obtient que $\{m, m'\} \subset \{1, \dots, h-1\} \cup \{h+1, \dots, l-1\}$. Les cas suivants sont illustrés dans la Figure 6.12.

i) Si $1 < m < m' < h$ alors

$$\gamma' = (\gamma^m, \dots, \gamma^{m'}) \cdot (\gamma^{m'}, \dots, \gamma^h) \cdot (\gamma^h, \dots, \gamma^l) \cdot (\gamma^0, \dots, \gamma^m)$$

est la paramétrisation canonique $\mathcal{C}_{x_{i-1}}(x_i)$ de $N_v(x_i)$. Aussi, on a $\{x_{i-1}, x_{i+1}\} \subset \text{Right}_\pi(k)$ et $\{\gamma^0 = y_{k-1}, \gamma^h = k_{k+1}\} \subset \text{Left}_c(i)$. Finalement, d'après la Définition 6.3, on obtient que $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = \mathcal{I}_{c,\pi}(i, k) = 0$.

ii) Si $1 < m' < m < h$ alors

$$\gamma' = (\gamma^m, \dots, \gamma^h) \cdot (\gamma^h, \dots, \gamma^l) \cdot (\gamma^0, \dots, \gamma^{m'}) \cdot (\gamma^{m'}, \dots, \gamma^m)$$

est la paramétrisation canonique $\mathcal{C}_{x_{i-1}}(x_i)$ de $N_v(x_i)$. Alors, $\{x_{i-1}, x_{i+1}\} \subset \text{Right}_\pi(k)$ et $\{\gamma^l = y_{k-1}, \gamma^h = k_{k+1}\} \subset \text{Left}_c(i)$. Finalement, d'après la Définition 6.3, on obtient que $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = \mathcal{I}_{c,\pi}(i, k) = 0$.

iii) Si $h < m < m' < l$ alors

$$\gamma' = (\gamma^m, \dots, \gamma^{m'}) \cdot (\gamma^{m'}, \dots, \gamma^l) \cdot (\gamma^0, \dots, \gamma^h) \cdot (\gamma^h, \dots, \gamma^m)$$

est la paramétrisation canonique $\mathcal{C}_{x_{i-1}}(x_i)$ de $N_v(x_i)$. Alors, $\{x_{i-1}, x_{i+1}\} \subset \text{Left}_\pi(k)$ et $\{\gamma^0 = y_{k-1}, \gamma^h = k_{k+1}\} \subset \text{Left}_c(i)$. Finalement, d'après la Définition 6.3, on obtient que $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{c,\pi}(i, k) = 0$.

iv) Si $h < m' < m < l$ alors

$$\gamma' = (\gamma^m, \dots, \gamma^l) \cdot (\gamma^0, \dots, \gamma^h) \cdot (\gamma^h, \dots, \gamma^{m'}) \cdot (\gamma^{m'}, \dots, \gamma^m)$$

est la paramétrisation canonique $\mathcal{C}_{x_{i-1}}(x_i)$ de $N_v(x_i)$. Alors, $\{x_{i-1}, x_{i+1}\} \subset \text{Left}_\pi(k)$ et $\{\gamma^l = y_{k-1}, \gamma^h = k_{k+1}\} \subset \text{Right}_c(i)$. Finalement, d'après la Définition 6.3, on obtient $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{c,\pi}(i, k) = 0$.

v) Si $0 < m < h < m' < l$ alors

$$\gamma' = (\gamma^m, \dots, \gamma^h) \cdot (\gamma^h, \dots, \gamma^{m'}) \cdot (\gamma^{m'}, \dots, \gamma^l) \cdot (\gamma^0, \dots, \gamma^m)$$

est la paramétrisation canonique $\mathcal{C}_{x_{i-1}}(x_i)$ de $N_v(x_i)$. Il est alors immédiat que $x_{i-1} \in \text{Right}_\pi(k)$, $x_{i+1} \in \text{Left}_\pi(k)$, $y_{k-1} = \gamma^0 \in \text{Left}_c(i)$ et $y_{k+1} = \gamma^h \in \text{Right}_c(i)$. Finalement, d'après la Définition 6.3, on obtient $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{c,\pi}(i, k) = +1$.

vi) Si $0 < m' < h < m < l$ alors

$$\gamma' = (\gamma^m, \dots, \gamma^l) \cdot (\gamma^0, \dots, \gamma^{m'}) \cdot (\gamma^{m'}, \dots, \gamma^h) \cdot (\gamma^h, \dots, \gamma^m)$$

est la paramétrisation canonique $\mathcal{C}_{x_{i-1}}(x_i)$ de $N_v(x_i)$. Alors, $x_{i-1} \in \text{Left}_\pi(k)$, $x_{i+1} \in \text{Right}_\pi(k)$, $y_{k-1} = \gamma^0 \in \text{Right}_c(i)$ et $y_{k+1} = \gamma^h \in \text{Left}_c(i)$. Finalement, d'après la Définition 6.3, on obtient $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{c,\pi}(i, k) = -1$.

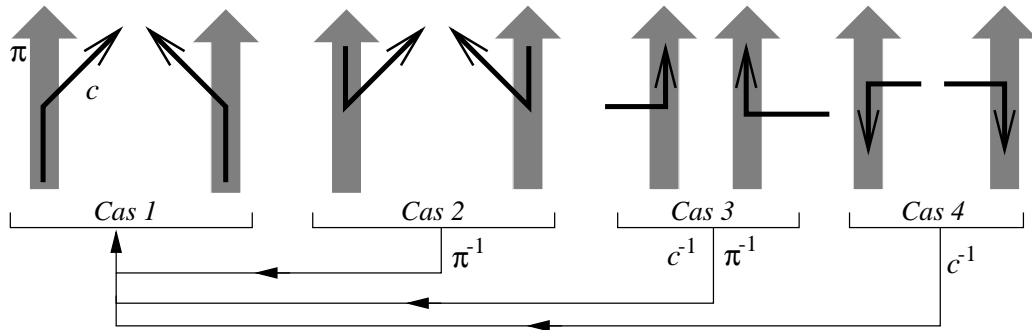


FIG. 6.11: Illustration des cas examinés dans la preuve du Lemme 6.8 quand $\{x_{i-1}, x_{i+1}\} \cap \{y_{k-1}, y_{k+1}\} \neq \emptyset$

□

La définition suivante nous permettra d'utiliser le Lemme 6.8 pour les indices correspondant aux extrémités du chemin c ou du chemin π de ce lemme quand le chemin en question est fermé.

Définition 6.6 (décalage) Soit $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ un n -chemin fermé dans Σ de longueur $p > 1$. On note $Sh(\pi)$ (pour shift) le n -chemin fermé $(y_{p-1}, y_0, \dots, y_{p-1})$ qui est le

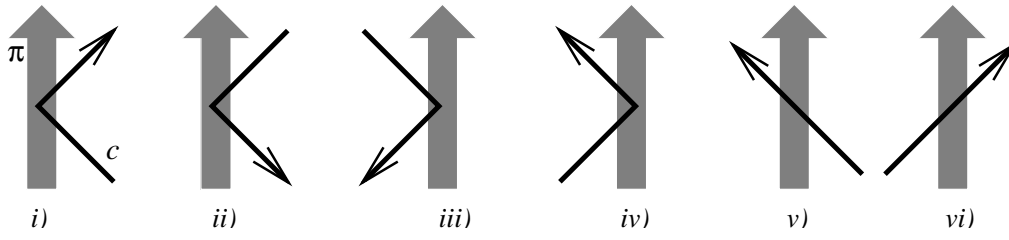


FIG. 6.12: Illustration des cas examinés dans la preuve du Lemme 6.8 quand $\{x_{i-1}, x_{i+1}\} \cap \{y_{k-1}, y_{k+1}\} = \emptyset$

résultat d'un décalage des surfels de π d'une valeur d'indice dans la direction opposée à sa paramétrisation.

On aura aussi besoin du lemme suivant.

Lemme 6.9 Soit $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ un n -chemin fermé dans Σ et soit $c = (x_i)_{i=0, \dots, q}$ un \bar{n} -chemin dans Σ . Si π est de longueur $p > 1$, alors $\mathcal{I}_{\pi, c}(0, i) = \mathcal{I}_{Sh(\pi), c}(1, i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, q\}$.

Corollaire 6.10 Soit $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ un n -chemin fermé dans Σ et soit $c = (x_i)_{i=0, \dots, q}$ un \bar{n} -chemin dans Σ , alors $\mathcal{I}_{\pi, c} = \mathcal{I}_{Sh(\pi), c}$.

Preuve du Lemme 6.9 : Soit $Sh(\pi) = (y'_0, \dots, y'_p)$ tel que $y_{p-1} = y'_0$, $y_0 = y'_1$ et $y_1 = y'_2$. Alors, on a $Right_{\pi}(0) = Right_{Sh(\pi)}(1)$ et $Left_{\pi}(0) = Left_{Sh(\pi)}(1)$ de sorte que $\mathcal{I}_{\pi, c}(0, i) = \mathcal{I}_{Sh(\pi), c}(1, i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, q\}$. \square

Lemme 6.11 Soit $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ un n -chemin et soit $c = (x_i)_{i=0, \dots, q}$ un \bar{n} -chemin fermé dans Σ . Si c est de longueur $q > 1$, alors $\mathcal{I}_{\pi, Sh(c)}(k, 1) = \mathcal{I}_{\pi, c}(k, 0) + \mathcal{I}_{\pi, c}(k, q)$ pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$.

Corollaire 6.12 Soit $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ un n -chemin et soit $c = (x_i)_{i=0, \dots, q}$ un \bar{n} -chemin fermé dans Σ , alors $\mathcal{I}_{\pi, c} = \mathcal{I}_{\pi, Sh(c)}$.

Preuve du Lemme 6.11 : Soit $Sh(c) = (x'_0, \dots, x'_q)$ tel que $x_{q-1} = x'_0$, $x_0 = x'_1$ et $x_1 = x'_2$. On a $\mathcal{I}_{\pi, Sh(c)}(k, 1) = \mathcal{I}_{\pi, Sh(c)}^-(k, 1) + \mathcal{I}_{\pi, Sh(c)}^+(k, 1)$. Puisque $x_0 = x'_1$ et $x_{q-1} = x'_0$ on a $\mathcal{I}_{\pi, Sh(c)}^-(k, 1) = \mathcal{I}_{\pi, c}^-(k, q)$ pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$. De plus, puisque $x_0 = x'_1$ et $x_1 = x'_2$ on a $\mathcal{I}_{\pi, Sh(c)}^+(k, 1) = \mathcal{I}_{\pi, c}^+(k, 0)$ pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$.

Finalement, $\mathcal{I}_{\pi, Sh(c)}(k, 1) = \mathcal{I}_{\pi, c}^+(k, 0) + \mathcal{I}_{\pi, c}^-(k, q)$ pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$; mais suivant la Définition 6.3, on a $\mathcal{I}_{\pi, c}^+(k, 0) = \mathcal{I}_{\pi, c}(k, 0)$ et $\mathcal{I}_{\pi, c}^-(k, q) = \mathcal{I}_{\pi, c}(k, q)$. \square

Afin de montrer la Proposition 6.2 nous aurons besoin des deux lemmes suivants qui établissent le “comportement” des contributions au nombre d'intersection des extrémités de chacun des chemins π et c de cette Proposition.

Lemme 6.13 *Soient $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ un n -chemin fermé et $c = (x_i)_{i=0, \dots, q}$ un \bar{n} -chemin dans Σ . Alors, $\mathcal{I}_{\pi, c}(0, i) = -(\mathcal{I}_{c, \pi}(i, 0) + \mathcal{I}_{c, \pi}(i, p))$ pour tout $i \in \{1, \dots, q-1\}$.*

Preuve : D'après le Lemme 6.9, $\mathcal{I}_{\pi, c}(0, i) = \mathcal{I}_{Sh(\pi), c}(1, i)$. Ensuite, d'après le Lemme 6.8 et pour tout $i \in \{1, \dots, q-1\}$, on a $\mathcal{I}_{Sh(\pi), c}(1, i) = -\mathcal{I}_{c, Sh(\pi)}(i, 1)$. Maintenant, puisque π est fermé et suivant le Lemme 6.11, on obtient que $-\mathcal{I}_{c, Sh(\pi)}(i, 1) = -(\mathcal{I}_{c, \pi}(i, 0) + \mathcal{I}_{c, \pi}(i, p))$. \square

Lemme 6.14 *Soit $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ un n -chemin fermé et soit $c = (x_i)_{i=0, \dots, q}$ un \bar{n} -chemin fermé dans Σ . Alors $\mathcal{I}_{\pi, c}(0, 0) + \mathcal{I}_{\pi, c}(0, q) = -(\mathcal{I}_{c, \pi}(0, 0) + \mathcal{I}_{c, \pi}(0, p))$*

Preuve : D'après le Lemme 6.9, $\mathcal{I}_{\pi, c}(0, 0) + \mathcal{I}_{\pi, c}(0, q) = \mathcal{I}_{Sh(\pi), c}(1, 0) + \mathcal{I}_{Sh(\pi), c}(1, q)$ et d'après le Lemme 6.11, $\mathcal{I}_{Sh(\pi), c}(1, 0) + \mathcal{I}_{Sh(\pi), c}(1, q) = \mathcal{I}_{Sh(\pi), Sh(c)}(1, 1)$. Alors, suivant le Lemme 6.8, $\mathcal{I}_{Sh(\pi), Sh(c)}(1, 1) = -\mathcal{I}_{Sh(c), Sh(\pi)}(1, 1)$. Une nouvelle fois, le Lemme 6.9 entraîne que $-\mathcal{I}_{Sh(c), Sh(\pi)}(1, 1) = -\mathcal{I}_{c, Sh(\pi)}(0, 1)$ alors que le Lemme 6.11 implique que $-\mathcal{I}_{c, Sh(\pi)}(0, 1) = -(\mathcal{I}_{c, \pi}(0, 0) + \mathcal{I}_{c, \pi}(0, p))$.

Finalement, on obtient que $\mathcal{I}_{\pi, c}(0, 0) + \mathcal{I}_{\pi, c}(0, q) = -(\mathcal{I}_{c, \pi}(0, 0) + \mathcal{I}_{c, \pi}(0, p))$. \square

Preuve de la Proposition 6.2 : La somme de la Définition 6.4 peut être écrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\pi, c} &= \mathcal{I}_{\pi, c}(0, 0) + \mathcal{I}_{\pi, c}(0, q) + \sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{\pi, c}(0, i) + \\ &\quad \sum_{k=1}^{p-1} \left[\mathcal{I}_{\pi, c}(k, 0) + \mathcal{I}_{\pi, c}(k, q) + \sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{\pi, c}(k, i) \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

• Si π est fermé alors le Lemme 6.13 implique que $\mathcal{I}_{\pi, c}(0, i) = -\mathcal{I}_{c, \pi}(i, 0) - \mathcal{I}_{c, \pi}(i, p)$ pour $i \in \{1, \dots, q-1\}$. Donc, $\sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{\pi, c}(0, i) = -\sum_{i=1}^{q-1} [\mathcal{I}_{c, \pi}(i, 0) + \mathcal{I}_{c, \pi}(i, p)]$. De plus, d'après le Lemme 6.8, $\mathcal{I}_{\pi, c}(k, i) = -\mathcal{I}_{c, \pi}(i, k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$ et tout $i \in \{1, \dots, q-1\}$.

Ainsi, l'équation (6.3) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\pi,c} = & \mathcal{I}_{\pi,c}(0,0) + \mathcal{I}_{\pi,c}(0,q) + \sum_{i=1}^{q-1} -[\mathcal{I}_{c,\pi}(i,0) + \mathcal{I}_{c,\pi}(i,p)] + \\ & \sum_{k=1}^{p-1} \left[\mathcal{I}_{\pi,c}(k,0) + \mathcal{I}_{\pi,c}(k,q) + \sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i,k) \right] \end{aligned} \quad (6.4)$$

- Si c est fermé, alors le Lemme 6.13 implique que $\mathcal{I}_{c,\pi}(0,k) = -(\mathcal{I}_{\pi,c}(k,0) + \mathcal{I}_{\pi,c}(k,q))$ pour $k \in \{1, \dots, p-1\}$ de sorte que l'équation (6.4) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\pi,c} = & \mathcal{I}_{\pi,c}(0,0) + \mathcal{I}_{\pi,c}(0,q) - \sum_{i=1}^{q-1} [\mathcal{I}_{c,\pi}(i,0) + \mathcal{I}_{c,\pi}(i,p)] + \\ & \sum_{k=1}^{p-1} \left[-\mathcal{I}_{c,\pi}(0,k) - \sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i,k) \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

Si π et c sont des chemins fermés, on obtient d'après le Lemme 6.14 que $\mathcal{I}_{\pi,c}(0,0) + \mathcal{I}_{\pi,c}(0,q) = \mathcal{I}_{c,\pi}(0,0) + \mathcal{I}_{c,\pi}(0,p)$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\pi,c} = & -(\mathcal{I}_{c,\pi}(0,0) + \mathcal{I}_{c,\pi}(0,p)) - \sum_{i=1}^{q-1} [\mathcal{I}_{c,\pi}(i,0) + \mathcal{I}_{c,\pi}(i,p)] + \\ & \sum_{k=1}^{p-1} \left[-\mathcal{I}_{c,\pi}(0,k) - \sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i,k) \right] \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = -\sum_{i=0}^{q-1} [\mathcal{I}_{c,\pi}(i,0) + \mathcal{I}_{c,\pi}(i,p)] - \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=0}^{q-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i,k) \quad (6.7)$$

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = -\sum_{i=0}^{q-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i,0) - \sum_{i=0}^{q-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i,p) - \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=0}^{q-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i,k) \quad (6.8)$$

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = -\sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^{q-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i,k) = -\mathcal{I}_{c,\pi}$$

- Si c n'est pas fermé et puisque $\mathcal{P}(c,\pi)$ est vérifiée, alors $\mathcal{I}_{c,\pi}(0,k) = \mathcal{I}_{\pi,c}(k,0) = \mathcal{I}_{\pi,c}(k,q) = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$. Ainsi, l'équation (6.4) devient :

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = \sum_{i=1}^{q-1} -(\mathcal{I}_{c,\pi}(i,0) + \mathcal{I}_{c,\pi}(i,p)) - \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i,k)$$

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = -\sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i,0) - \sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i,p) - \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i,k)$$

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = -\sum_{k=0}^p \sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i,k) = -\sum_{i=1}^{q-1} \sum_{k=0}^p \mathcal{I}_{c,\pi}(i,k)$$

Puisque $\mathcal{I}_{c,\pi}(0, k) = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$,

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = - \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{k=0}^p \mathcal{I}_{c,\pi}(i, k) = -\mathcal{I}_{c,\pi}$$

• Si π n'est pas fermé et puisque $\mathcal{P}(\pi, c)$ est vérifiée, alors $\mathcal{I}_{\pi,c}(0, i) = \mathcal{I}_{\pi,c}(p, i) = \mathcal{I}_{c,\pi}(i, 0) = \mathcal{I}_{c,\pi}(i, p) = 0$ pour $i \in \{0, \dots, q\}$ de sorte que $\sum_{i=0}^q \mathcal{I}_{\pi,c}(0, i) = 0$. L'équation (6.3) devient :

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = \sum_{k=1}^{p-1} \left[\mathcal{I}_{\pi,c}(k, 0) + \mathcal{I}_{\pi,c}(k, q) + \sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) \right]$$

D'après le Lemme 6.8, $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{c,\pi}(i, k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$ et tout $i \in \{1, \dots, q-1\}$. Donc,

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = \sum_{k=1}^{p-1} \left[\mathcal{I}_{\pi,c}(k, 0) + \mathcal{I}_{\pi,c}(k, q) - \sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i, k) \right] \quad (6.10)$$

– Si c est fermé, alors le Lemme 6.13 implique que $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, 0) + \mathcal{I}_{\pi,c}(k, q) = -\mathcal{I}_{c,\pi}(0, k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$ et l'équation (6.10) devient :

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=0}^{q-1} -\mathcal{I}_{c,\pi}(i, k) = \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{k=1}^{p-1} -\mathcal{I}_{c,\pi}(i, k)$$

De plus, $\mathcal{I}_{c,\pi}(i, 0) = \mathcal{I}_{c,\pi}(i, p) = 0$ pour tout $i \in \{0, \dots, q\}$ puisque π n'est pas fermé et $\mathcal{P}(\pi, c)$ est vérifiée, ainsi :

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{k=0}^p -\mathcal{I}_{c,\pi}(i, k) = -\mathcal{I}_{c,\pi}$$

– Si c n'est pas fermé alors $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, 0) = \mathcal{I}_{\pi,c}(k, q) = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$ puisque $\mathcal{P}(c, \pi)$ est vérifiée. L'équation (6.10) devient :

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = - \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i, k)$$

D'après le Lemme 6.8, on a $\mathcal{I}_{\pi,c}(k, i) = -\mathcal{I}_{c,\pi}(i, k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$ et tout $i \in \{1, \dots, q-1\}$. Alors,

$$\mathcal{I}_{\pi,c} = - \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{k=1}^{p-1} \mathcal{I}_{c,\pi}(i, k) = -\mathcal{I}_{c,\pi}$$

□

6.3.3 Propriété d'additivité

La Proposition 6.15 sera elle aussi utile pour les preuves qui suivront.

Proposition 6.15 *Soit $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ un n -chemin dans Σ ; et soient $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ et $c' = (x'_i)_{i=0,\dots,q'}$ deux \bar{n} -chemins dans Σ tels que $x_q = x'_0$. Si $\mathcal{P}(\pi, c)$ et $\mathcal{P}(\pi, c')$ sont vérifiées, alors $\mathcal{I}_{\pi, c.c'} = \mathcal{I}_{\pi, c} + \mathcal{I}_{\pi, c'}$.*

Preuve de la Proposition 6.15 : Calculons $\mathcal{I}_{\pi, c.c'}$ avec $c.c' = (z_0, \dots, z_{q+q'})$. Il est suffisant de montrer que pour $k \in \{1, \dots, p-1\}$ (pour $k \in \{0, \dots, p\}$ si π est fermé) :

$$\sum_{i=0}^{q+q'} \mathcal{I}_{\pi, c.c'}(k, i) = \sum_{i=0}^q \mathcal{I}_{\pi, c}(k, i) + \sum_{i=0}^{q'} \mathcal{I}_{\pi, c'}(k, i) \quad (6.11)$$

On écrit simplement que pour $k \in \{0, \dots, p-1\}$ ($k \in \{0, \dots, p\}$ si π est fermé) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{q+q'} \mathcal{I}_{\pi, c.c'}(k, i) &= \mathcal{I}_{\pi, c.c'}(k, 0) + \left[\sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{\pi, c.c'}(k, i) \right] + \mathcal{I}_{\pi, c.c'}(k, q) \\ &+ \left[\sum_{i=q+1}^{q+q'-1} \mathcal{I}_{\pi, c.c'}(k, i) \right] + \mathcal{I}_{\pi, c.c'}(k, q+q') \end{aligned} \quad (6.12)$$

Maintenant, pour un tel k on remarque que $\mathcal{I}_{\pi, c}(k, 0) = \mathcal{I}_{\pi, c}^+(k, 0)$ d'après la Définition 6.3. Puisque $x_0 = z_0$ et $x_1 = z_1$ on obtient que $\mathcal{I}_{\pi, c}^+(k, 0) = \mathcal{I}_{\pi, c.c'}^+(k, 0)$ qui est aussi égal à $\mathcal{I}_{\pi, c.c'}(k, 0)$ d'après la Définition 6.3. De la même façon, on montre que $\mathcal{I}_{\pi, c.c'}(k, q+q') = \mathcal{I}_{\pi, c'}(k, q')$.

Pour $i \in \{1, \dots, q-1\}$, on a $\mathcal{I}_{\pi, c.c'}(k, i) = \mathcal{I}_{\pi, c}(k, i)$ puisque $x_i = z_i$, $x_{i-1} = z_{i-1}$ et $x_{i+1} = z_{i+1}$. De même, pour $i \in \{q+1, \dots, q+q'-1\}$, on a $\mathcal{I}_{\pi, c.c'}(k, i) = \mathcal{I}_{\pi, c'}(k, i-q)$ puisque $x_i = z_{i-q}$, $x_{i-1} = z_{(i-q)-1}$ et $x_{i+1} = z_{(i-q)+1}$.

De plus, on a $\mathcal{I}_{\pi, c.c'}(k, q) = \mathcal{I}_{\pi, c.c'}^-(k, q) + \mathcal{I}_{\pi, c.c'}^+(k, q)$. Alors, on remarque que $\mathcal{I}_{\pi, c}(k, q) = \mathcal{I}_{\pi, c}^-(k, q)$ et $\mathcal{I}_{\pi, c'}(k, 0) = \mathcal{I}_{\pi, c'}^+(k, 0)$. Mais, $\mathcal{I}_{\pi, c}^-(k, q) = \mathcal{I}_{\pi, c.c'}^-(k, q)$ puisque $x_q = z_q$ et $x_{q-1} = z_{q-1}$. De même, $\mathcal{I}_{\pi, c'}^+(k, 0) = \mathcal{I}_{\pi, c.c'}^+(k, q)$ puisque $x'_0 = z_q$ et $x'_1 = z_{q+1}$. Finalement, $\mathcal{I}_{\pi, c.c'}(k, q) = \mathcal{I}_{\pi, c}(k, q) + \mathcal{I}_{\pi, c'}(k, 0)$.

En remplaçant les termes correspondants dans l'équation (6.12) on obtient que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{q+q'} \mathcal{I}_{\pi, c.c'}(k, i) &= \mathcal{I}_{\pi, c.c'}(k, 0) + \left[\sum_{i=1}^{q-1} \mathcal{I}_{\pi, c}(k, i) \right] + \mathcal{I}_{\pi, c}(k, q) \\ &+ \mathcal{I}_{\pi, c'}(k, 0) + \left[\sum_{i=1}^{q'-1} \mathcal{I}_{\pi, c'}(k, i) \right] + \mathcal{I}_{\pi, c'}(k, q') \end{aligned}$$

ou encore,

$$\sum_{i=0}^{q+q'} \mathcal{I}_{\pi,c,c'}(k,i) = \sum_{i=0}^q \mathcal{I}_{\pi,c}(k,i) + \sum_{i=0}^{q'} \mathcal{I}_{\pi,c'}(k,i)$$

Finalement, $\mathcal{I}_{\pi,c,c'} = \mathcal{I}_{\pi,c} + \mathcal{I}_{\pi,c'}$. \square

Corollaire 6.16 *Soient $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ et $\pi' = (y'_k)_{k=0,\dots,p'}$ deux n -chemins dans une surface discrète Σ tels que $y_p = y'_0$; et soit $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ un \bar{n} -chemin dans Σ . Si les propriétés $\mathcal{P}(\pi, c)$, $\mathcal{P}(\pi', c)$, $\mathcal{P}(c, \pi)$ et $\mathcal{P}(c, \pi')$ sont vérifiées alors $\mathcal{I}_{\pi.\pi',c} = \mathcal{I}_{\pi,c} + \mathcal{I}_{\pi',c}$.*

Preuve : Puisque $\mathcal{P}(c, \pi)$ et $\mathcal{P}(c, \pi')$ sont vérifiées il est immédiat que $\mathcal{P}(c, \pi.\pi')$ l'est aussi. Alors, d'après la Proposition 6.2, on a $\mathcal{I}_{\pi.\pi',c} = \mathcal{I}_{c,\pi.\pi'}$. Maintenant, d'après la Proposition 6.15 on obtient que $\mathcal{I}_{c,\pi.\pi'} = \mathcal{I}_{c,\pi} + \mathcal{I}_{c,\pi'}$. Mais, d'après les hypothèses de ce corollaire et toujours en utilisant la Proposition 6.2 on a $\mathcal{I}_{c,\pi} = \mathcal{I}_{\pi,c}$ et $\mathcal{I}_{c,\pi'} = \mathcal{I}_{\pi',c}$. \square

6.4 Preuve des théorèmes principaux

La preuve du Théorème 9 est légèrement différente selon que $(n, \bar{n}) = (e, v)$ ou $(n, \bar{n}) = (v, e)$. Toutefois, dans les deux cas, nous définirons tout d'abord une relation de déformation entre chemins (qui est en fait équivalente à la relation d'homotopie, comme établi par la Proposition 6.24 et par la Proposition 6.17 respectivement pour $n = v$ et $n = e$).

Pour $n = v$, cette nouvelle transformation est basée sur l'insertion de triplets de surfels, ou sur l'insertion de demi-tours dans un chemin. Alors, la Proposition 6.18 établira le fait qu'un triplet de surfels a toujours un nombre d'intersection nul avec n'importe quel e -chemin (à condition que ce e -chemin soit fermé, sinon le triplet ne doit pas rencontrer une extrémité du e -chemin). Pour $n = e$, cette nouvelle déformation repose sur l'insertion de e -loops de surfels (Définition 6.10), ou bien sur l'insertion de demi-tours dans le chemin. Alors, la Proposition 6.25 établira de manière similaire à la Proposition 6.18 qu'un e -loop a toujours un nombre d'intersection nul avec un v -chemin quelconque (à condition que ce v -chemin soit fermé, sinon le e -loop ne doit pas rencontrer une extrémité du v -chemin).

Finalement, en utilisant la Proposition 6.15, une preuve immédiate du Théorème 9 pour $n = e$ et $n = v$ sera donnée.

Remarque 6.6 *Tout en restant général, on suppose dans cette section que tous les chemins mentionnés vérifient la propriété suivante : deux surfels consécutifs dans un chemin sont distincts.*

6.4.1 Un autre définition de la v -homotopie pour les chemins

Tout d'abord, nous introduisons la notion de \mathcal{T} -déformation élémentaire qui permet de définir immédiatement la relation de \mathcal{T} -déformation.

Définition 6.7 (demi-tour) *Un n -chemin fermé simple $\pi = (x_0, x_1, x_0)$ dans Σ est appelé un demi-tour dans Σ .*

Définition 6.8 (triplet) *Un v -chemin fermé simple $\pi = (x_0, x_1, x_2, x_0)$ inclus dans un loop de Σ est appelé un triplet dans Σ .*

Définition 6.9 *Soit $X \subset \Sigma$, et soient $c = (x_i)_{i=0, \dots, q}$ et $c' = (x'_i)_{i=0, \dots, q'}$ deux v -chemins dans X . Le chemin c' est appelé une \mathcal{T} -déformation élémentaire de c dans X (et on note $c \sim_{\mathcal{T}} c'$) si $c = \pi_1.(s).\pi_2$ et $c' = \pi_1.\gamma.\pi_2$; ou si $c = \pi_1.\gamma.\pi_2$ et $c' = \pi_1.(s).\pi_2$. Où γ est un demi-tour de s à s dans X , ou bien γ est un triplet de s à s dans X . On définit le relation de \mathcal{T} -déformation comme la fermeture transitive de la relation de \mathcal{T} -déformation élémentaire.*

En d'autres termes, la relation de \mathcal{T} -déformation élémentaire relie deux v -chemins qui sont quasiment identiques sauf que l'un est obtenu par insertion dans l'autre d'un triplet de surfels qui appartiennent à un même loop, ou bien par insertion dans l'autre d'un demi-tour. Maintenant, on peut établir la proposition suivante :

Proposition 6.17 *Soit $X \subset \Sigma$. Deux v -chemins c et c' sont v -homotopes dans X si et seulement si ils sont équivalents à une \mathcal{T} -déformation près.*

Preuve : Tout d'abord, une \mathcal{T} -déformation élémentaire est un cas particulier de v -déformation élémentaire pour laquelle les v -chemins γ et γ' de la Définition 2.10 sont des chemins fermés, dont l'un est réduit à un unique surfel et l'autre est un triplet ou un demi-tour, et qui sont donc tous les deux inclus dans un loop, i.e. une cellule de déformation élémentaire. Il est alors immédiat que si deux v -chemins sont équivalents à une \mathcal{T} -déformation près, alors ils sont v -homotopes.

Maintenant, il est suffisant de prouver que, si deux v -chemins sont identiques à une v -déformation élémentaire près, alors ils sont équivalents à une \mathcal{T} -déformation près. Soient c et c' deux v -chemins identiques à une v -déformation élémentaire près, i.e. $c = \pi_1 \cdot \gamma \cdot \pi_2$ et $c' = \pi_1 \cdot \gamma' \cdot \pi_2$ où γ et γ' sont deux chemins ayant les mêmes extrémités et inclus dans un même loop.

On montre tout d'abord que tout v -chemin $\alpha = (a_0, \dots, a_h)$ de longueur l supérieure à 1 et inclus dans un loop est une \mathcal{T} -déformation du chemin (a_0, a_h) . On procède par induction sur la longueur l . Soit α_k un v -chemin inclus dans un loop \mathcal{L} et de longueur l_k . On distingue deux cas :

- Soit $\alpha_k = (a_0, a_1)$, ou bien
- α_k est un chemin de longueur $l_k \geq 2$. Dans ce cas, $\alpha_k = \omega.(a, b, c)$ où $\{a, b, c\} \subset \mathcal{L}$ et ω peut être réduit à (a) si $l = 2$. Alors le chemin α_k est une \mathcal{T} -déformation élémentaire du chemin $\alpha' = \omega.(a, b, c).(c, b, a, c).(c)$. Maintenant, $\alpha' = \omega.(a, b).(b, c, b).(b, a, c)$ est une \mathcal{T} -déformation élémentaire du chemin $\alpha'' = \omega.(a, b, a, c)$ qui est lui-même une \mathcal{T} -déformation élémentaire du chemin $\alpha_{k+1} = \omega.(a, c)$. On obtient que le chemin α_k est une \mathcal{T} -déformation du chemin $\alpha_{k+1} = \omega.(a, c)$, qui est un chemin de longueur $l_{k+1} = l_k - 1$.

Finalement, ou bien le chemin α_k est de longueur 1 ou bien il est prouvé que α_k est une \mathcal{T} -déformation d'un chemin α_{k+1} dans X dont la longueur est inférieure à celle de α_k . Par induction, en posant $\alpha_0 = \alpha$, il doit exister un entier $k' \geq 0$ tel que $\alpha_{k'}$ soit de longueur 1 (i.e. $\alpha_{k'} = (a_0, a_h)$) et qui soit une \mathcal{T} -déformation de α .

Alors, nous venons de montrer que les deux chemins γ et γ' sont équivalents à une \mathcal{T} -déformation près dans X au chemin réduit à leurs extrémités. Il est alors immédiat que ces deux chemins sont eux-mêmes équivalents à une \mathcal{T} -déformation près dans X . \square

Nombre d'intersection avec un triplet

Dans cette sous-section, nous montrons la proposition suivante qui établit le fait qu'un triplet c (Définition 6.8) a un nombre d'intersection égale à zéro avec n'importe quel e -chemin π pour peu que la propriété $\mathcal{P}(\pi, c)$ soit vérifiée.

Proposition 6.18 *Soit c un triplet dans Σ et soit $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ un e -chemin dans Σ tel que $\mathcal{P}(\pi, c)$ soit vérifiée. Alors, $\mathcal{I}_{\pi, c} = 0$.*

Afin de montrer la Proposition 6.18, nous prouvons tout d'abord les deux lemmes suivants.

Lemme 6.19 *Soit $c = (x_0, x_1, x_2, x_0)$ un triplet dans Σ . Alors, selon le sens de la paramétrisation de c , l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

- $\forall i \in \{0, 1, 2\}, \text{Left}_c(i) \cap N_e(x_i) = \emptyset.$
- $\forall i \in \{0, 1, 2\}, \text{Right}_c(i) \cap N_e(x_i) = \emptyset.$

Preuve : Ce lemme est la conséquence de considérations locales. En effet, puisque pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$ les trois surfels x_{i-1} , x_i et x_{i+1} appartiennent à un même loop, alors, selon le sens de la paramétrisation, exactement un des intervalles entre x_{i-1} et x_{i+1} dans paramétrisation canonique de $N_v(x_i)$ ne peut contenir de surfel e -adjacent à x_i . Et il est alors évident que cet intervalle coïncide soit avec $\text{Left}_c(i)$ pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$ ou bien avec $\text{Right}_c(i)$ pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$. \square

Lemme 6.20 *Soit $c = (x_0, x_1, x_2, x_0)$ un triplet dans Σ . Alors, une des deux propriétés suivantes est satisfaite :*

- $\mathcal{I}_{c,\pi} = -0.5$ pour tout e -chemin π de longueur 1 qui entre dans c et $\mathcal{I}_{c,\pi} = +0.5$ pour tout e -chemin π de longueur 1 qui sort de c .
- $\mathcal{I}_{c,\pi} = +0.5$ pour tout e -chemin π de longueur 1 qui entre dans c et $\mathcal{I}_{c,\pi} = -0.5$ pour tout e -chemin π de longueur 1 qui sort de c .

Preuve : Ce lemme est une conséquence directe du Lemme 6.19 et de la Définition 6.3. \square

Preuve de la Proposition 6.18 : Soient $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ et $\pi_h = (y_h, y_{h+1})$ pour $h \in \{0, \dots, p-1\}$ tels que $\pi = \pi_0.\pi_1.\dots.\pi_{p-1}$. Puisque c est fermé, alors la propriété $\mathcal{P}(c, \pi')$ est vérifiée et puisque la propriété $\mathcal{P}(\pi, c)$ est aussi vérifiée, d'après la Proposition 6.2 on a $\mathcal{I}_{\pi,c} = -\mathcal{I}_{c,\pi}$.

De plus, puisque c est fermé, la propriété $\mathcal{P}(c, \pi')$ est vérifiée pour tout e -chemin π' dans Σ . Alors, la Proposition 6.15 entraîne :

$$\mathcal{I}_{c,\pi} = \mathcal{I}_{c,\pi_0} + \mathcal{I}_{c,\pi_1} + \dots + \mathcal{I}_{c,\pi_{q-1}}$$

Tout d'abord, il est immédiat que $\mathcal{I}_{c,\pi_h} = 0$ pour tout $h \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que π_h n'entre pas dans c ni ne sorte de c . En effet, \mathcal{I}_{c,π_h} est évidemment égal à zéro si $c^* \cap \pi_h^* = \emptyset$; et puisque c est de longueur 3 il est aussi immédiat (d'après la Définition 6.3) que $\mathcal{I}_{c,\pi_h} = 0$ quand $\pi_h^* \subset c^*$. De plus, puisque π est soit fermé ou bien c^* ne contient ni y_0 ni y_p (propriété $\mathcal{P}(\pi, c)$), il est immédiat que le nombre de chemins π_h qui entrent dans c est égal au nombre de chemins π_h qui sortent de c . Alors, d'après le Lemme 6.20, on obtient que $\mathcal{I}_{c,\pi} = \sum_{h=0}^{p-1} \mathcal{I}_{c,\pi_h} = 0$. Finalement, $\mathcal{I}_{\pi,c} = -\mathcal{I}_{c,\pi} = 0$. \square

Remarque 6.7 *Le nombre d'intersection $\mathcal{I}_{\pi,c}$ d'un e -chemin π avec un triplet c est soit égal à zéro, soit indéfini. En effet, si $\mathcal{P}(\pi, c)$ n'est pas vérifiée, alors $\mathcal{I}_{\pi,c}$ n'est pas défini (voir Figure 6.13).*

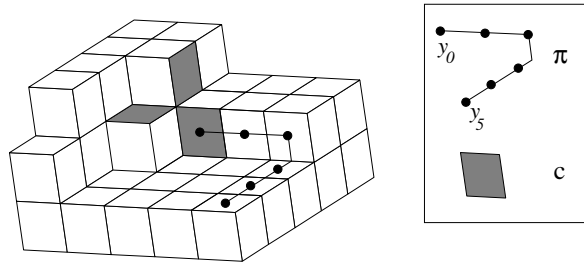


FIG. 6.13: $\mathcal{I}_{\pi,c}$ n'est pas défini puisque $y_0 \in c^*$, alors que $\mathcal{I}_{c,\pi} = \pm 0.5$.

Maintenant, on peut terminer la preuve du Théorème 9 pour $n = e$ en utilisant les Propositions 6.17, 6.15 et 6.18.

6.4.2 Preuve du Théorème 9 quand $(n, \bar{n}) = (e, v)$

On donne ici la preuve du théorème principal concernant le nombre d'intersection dans le cas d'une v -déformation homotopique du v -chemin c .

Preuve du Théorème 9 pour $(n, \bar{n}) = (e, v)$: D'après la Proposition 6.17 il est suffisant de montrer le Théorème 9 dans le cas où c' est une \mathcal{T} -déformation élémentaire de c dans X . Suivant la Définition 6.9, on peut supposer que $c = c_1.(s).c_2$ et $c' = c_1.\gamma.c_2$, où γ est un demi-tour ou bien un triplet de s à s dans X . Puisque $\mathcal{P}(\pi, c)$ est vérifiée, il est immédiat que $\mathcal{P}(\pi, c_1)$, $\mathcal{P}(\pi, \gamma)$ et $\mathcal{P}(\pi, c_2)$ sont aussi vérifiées. Alors, d'après la Proposition 6.15, on a $\mathcal{I}_{\pi,c} = \mathcal{I}_{\pi,c_1} + \mathcal{I}_{\pi,\gamma} + \mathcal{I}_{\pi,c_2}$.

Si γ est un demi-tour dans X , i.e $\gamma = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^3)$ où $\gamma^3 = \gamma^0$, alors il est immédiat d'après la Définition 6.3 que $\mathcal{I}_{\pi, \gamma}^\pi(0) = 0$ et $\mathcal{I}_{\pi, \gamma}^\pi(1) = 0$ de sorte que $\mathcal{I}_{\pi, \gamma} = 0$. D'autre part, si γ est un triplet, alors $\mathcal{I}_{\pi, \gamma} = 0$ d'après la Proposition 6.18.

Dans les deux cas, il reste que $\mathcal{I}_{\pi, c} = \mathcal{I}_{\pi, c_1} + \mathcal{I}_{\pi, c_2} = \mathcal{I}_{\pi, c_1.c_2} = \mathcal{I}_{\pi, c'}$. \square

6.4.3 Un autre définition de l'homotopie pour les e -chemins

Définition 6.10 (e -loop) La paramétrisation (voir Définition 4.7) d'un loop contenant un surfel x de Σ et qui commence au surfel x est appelée un e -loop de x à x dans Σ (voir Figure 6.14).

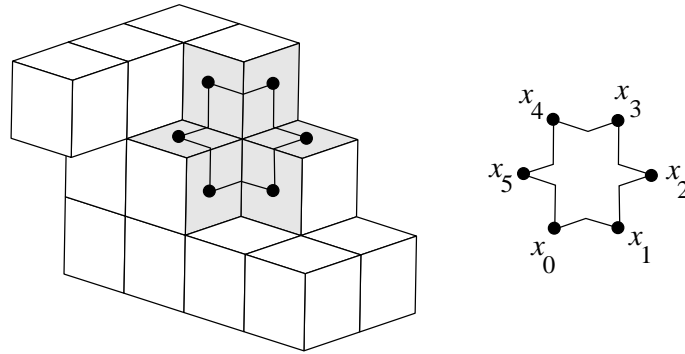


FIG. 6.14: Un e -loop $c = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_0)$ dans une surface discrète Σ .

Tout d'abord, nous introduisons la notion de \mathcal{E} -déformation élémentaire de telle sorte que la relation de \mathcal{E} -déformation suive immédiatement.

Définition 6.11 Soit $X \subset \Sigma$, et soient c et c' deux e -chemins dans X . Le chemin c est appelé une \mathcal{E} -déformation de c' dans X (et on note $c \sim_{\mathcal{E}} c'$) si $c = c_1.(s).c_2$ et $c' = c_1.\gamma.c_2$, ou bien si $c = c_1.\gamma.c_2$ et $c' = c_1.(s).c_2$. Où γ est un e -loop ou un demi-tour de s à s dans X . Dans ce cas, on dit aussi que c et c' sont identiques à une \mathcal{E} -déformation élémentaire près. On définit le relation de \mathcal{E} -déformation (notée $\simeq_{\mathcal{E}}$) comme la clôture transitive de la relation de \mathcal{E} -déformation élémentaire.

En d'autres termes, la relation de \mathcal{E} -déformation élémentaire relie deux e -chemins qui sont quasiment identiques, sauf que l'un est obtenu par insertion dans l'autre d'un e -chemin fermé simple inclus dans un loop. Maintenant, on peut établir la proposition suivante :

Lemme 6.21 *Soit c un e -chemin dans Σ . Alors, soit c est simple ou bien $c = c_1.\beta.c_2$ où β est un chemin fermé simple de longueur supérieure à 1.*

Preuve : Soit $c = (x_0, \dots, x_q)$. Alors, si c n'est pas simple, soit $h \in \{0, \dots, q\}$ et soit $l \in \{0, \dots, q\}$ tel que $x_h = x_l$ et $l > h$; et supposons que l soit minimal pour cette propriété. Ainsi, $c = (x_0, \dots, x_h).(x_h, \dots, x_l).(x_l, \dots, x_q)$ et (x_h, \dots, x_l) est simple. \square

Lemme 6.22 *Soit $c = (x_i)_{i=0, \dots, q}$ un e -chemin dans X inclus dans un loop \mathcal{L} de Σ . Alors, c est une \mathcal{E} -déformation d'un chemin simple de x_0 à x_q dans X .*

Preuve : On procède par induction sur la longueur d'un chemin α^k pour $k \geq 0$ avec $\alpha^0 = c$. Soit α^k un e -chemin dans X de longueur l_k et inclus dans \mathcal{L} . D'après le Lemme 6.21, α^k est simple ou bien il existe un chemin fermé simple β^k de longueur supérieure à 1 tel que $\alpha^k = \alpha_1^k.\beta^k.\alpha_2^k$. Puisque β_k est évidemment inclus dans \mathcal{L} , alors β^k est un e -loop ou bien un demi-tour dans X de sorte que α^k est une \mathcal{E} -déformation élémentaire du chemin $\alpha^{k+1} = \alpha_1^k.\alpha_2^k$. De plus, le chemin α^{k+1} est de longueur $l_{k+1} < l_k$ puisque β^k est de longueur supérieure à 1. Comme la longueur l_k est par définition supérieure ou égale à zéro, on en déduit qu'il existe un entier $l \geq 0$ tel que α^l est simple. De plus, pour $i = 0, \dots, l-1$, le chemin α^{i+1} est une \mathcal{E} -déformation élémentaire de α^i de telle sorte que α^l est une \mathcal{E} -déformation de $\alpha^0 = \pi$. \square

Lemme 6.23 *Soit $c = (x_i)_{i=0, \dots, q}$ un e -chemin dans X . Alors, le chemin $c.c^{-1}$ est une \mathcal{E} -déformation du chemin trivial (x_0, x_0) .*

Preuve : La preuve de ce lemme est identique à celle du Lemme 2.4. \square

Proposition 6.24 *Soit $X \subset \Sigma$. Deux e -chemins c et c' sont e -homotopes dans X si et seulement si il sont équivalents à une \mathcal{E} -déformation près.*

Preuve : Tout d'abord, une \mathcal{E} -déformation élémentaire est une e -déformation élémentaire pour laquelle les e -chemins γ et γ' de la Définition 2.10 sont des chemins fermés, dont l'un est trivial et l'autre est un e -chemin fermé simple inclus dans un loop, i.e. une cellule de déformation élémentaire. Il s'ensuit immédiatement que si deux e -chemins sont équivalents à une \mathcal{E} -déformation près alors ils sont e -homotopes.

Maintenant, il est suffisant de montrer que, si deux e -chemins sont équivalents à une e -déformation élémentaire près dans X , alors ils sont équivalents à une \mathcal{E} -déformation près dans X . Soient c et c' deux e -chemins qui sont équivalents à une e -déformation élémentaire près, i.e. $c = c_1.\gamma.c_2$ et $c' = c_1.\gamma'.c_2$ où γ et γ' sont deux chemins dans X ayant les mêmes extrémités et inclus dans un même loop \mathcal{L} .

D'après le Lemme 6.22, le chemin γ [resp. γ'] est une \mathcal{E} -déformation d'un chemin simple β [resp. β'] inclus dans \mathcal{L} . Alors, $c \simeq_{\mathcal{E}} c_1.\beta.c_2$ et $c' \simeq_{\mathcal{E}} c_1.\beta'.c_2$ où β et β' sont des chemins simples.

Si $\beta = \beta'$, alors il est immédiat que $c \simeq_{\mathcal{E}} c'$.

Si β et β' ne sont pas identiques mais tous les deux fermés, alors β et β' sont des e -chemins fermés simples dans \mathcal{L} donc $c_1.\beta.c_2 \sim_{\mathcal{E}} c_1.c_2$ et $c_1.\beta'.c_2 \sim_{\mathcal{E}} c_1.c_2$ (Lemme 6.22). Alors, $c \simeq_{\mathcal{E}} (c_1.c_2) \simeq_{\mathcal{E}} c'$.

Si β et β' ne sont pas identiques et ne sont pas fermés, soient a et b les deux extrémités de β qui sont distinctes. Par définition d'un loop, il existe exactement deux e -chemins fermés simples différents dans un loop entre deux surfels distincts de ce loop (voir Figure 6.14). Puisque $\beta \neq \beta'$, alors $\beta^* \cap \beta'^* = \{a, b\}$. On en déduit que le chemin $\beta^{-1}.\beta'$ est un chemin fermé simple de b à b dans \mathcal{L} . Donc $c_1.\beta \sim_{\mathcal{E}} c_1.\beta.\beta^{-1}.\beta'.c_2$. Mais, d'après le Lemme 6.23, $c_1.\beta.\beta^{-1}.\beta'.c_2 \simeq_{\mathcal{E}} c_1.\beta'.c_2$ de sorte que $c_1.\beta.c_2 \simeq_{\mathcal{E}} c_1.\beta'.c_2$. Finalement, $c \simeq_{\mathcal{E}} c'$. \square

6.4.4 Nombre d'intersection avec un e -loop

Proposition 6.25 *Soit c un e -loop dans Σ , alors $\mathcal{I}_{c,\pi} = 0$ pour tout v -chemin π dans Σ tel que $\mathcal{P}(\pi, c)$ soit vérifiée.*

Lemme 6.26 *Soit $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ un e -loop dans Σ . Alors, selon le sens de la paramétrisation de c , l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

$$- \forall i \in \{0, \dots, q\}, \text{Left}_c(i) \cap c^* = \emptyset \text{ et } \text{Right}_c(i) \subset c^*.$$

$$- \forall i \in \{0, \dots, q\}, \text{Right}_c(i) \cap c^* = \emptyset \text{ et } \text{Left}_c(i) \subset c^*.$$

Preuve : Ce lemme provient de considérations locales suivant la définition d'un e -loop, celle d'une paramétrisation canonique du v -voisinage d'un surfel, et la définition des ensembles Left et Right . \square

Lemme 6.27 Soit $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ un e -loop dans Σ . Alors, selon le sens de la paramétrisation de c , l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

- $\mathcal{I}_{c,\pi} = -0.5$ pour tout v -chemin π de longueur 1 qui entre dans c et $\mathcal{I}_{c,\pi} = +0.5$ pour tout v -chemin π de longueur 1 qui sort de c .
- $\mathcal{I}_{c,\pi} = +0.5$ pour tout v -chemin π de longueur 1 qui entre dans c et $\mathcal{I}_{c,\pi} = -0.5$ pour tout v -chemin π de longueur 1 qui sort de c .

Preuve : Ce lemme est une conséquence directe du Lemme 6.26. \square

Preuve de la Proposition 6.25 : Soient $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ et $\pi_h = (y_h, y_{h+1})$ pour $h \in \{0, \dots, p-1\}$ de telle sorte que $\pi = \pi_0 \cdot \pi_1 \cdot \dots \cdot \pi_{p-1}$. Comme c est fermé, la propriété $\mathcal{P}(c, \pi')$ est vérifiée pour tout v -chemin π' dans Σ , et d'après la Proposition 6.15 on a :

$$\mathcal{I}_{c,\pi} = \mathcal{I}_{c,\pi_0} + \mathcal{I}_{c,\pi_1} + \dots + \mathcal{I}_{c,\pi_{p-1}}$$

Tout d'abord, il est immédiat que $\mathcal{I}_{c,\pi_h} = 0$ pour tout $h \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que π_h n'entre dans c ni ne sorte de c . En effet, $\mathcal{I}_{c,\pi}$ est évidemment égale à 0 quand $\pi_h^* \cap c^* = \emptyset$; et dans le cas où $\pi_h^* \subset c^*$, alors d'après le Lemme 6.27 on obtient aussi $\mathcal{I}_{c,\pi_h} = 0$. De plus, puisque π est fermé ou bien alors c^* ne contient ni y_0 ni y_p (propriété $\mathcal{P}(\pi, c)$), il est immédiat que le nombre de chemins π_h qui entrent dans c est égal au nombre de π_h qui sortent de c . Alors, d'après le Lemme 6.27, on obtient $\mathcal{I}_{c,\pi} = \sum_{k=0}^{p-1} \mathcal{I}_{c,\pi_k} = 0$. \square

Remarque 6.8 Le nombre d'intersection $\mathcal{I}_{c,\pi}$ d'un e -loop c avec un v -chemin π peut ne pas être égale à zéro si $\mathcal{P}(\pi, c)$ n'est pas vérifiée, comme illustré dans la Figure 6.15.

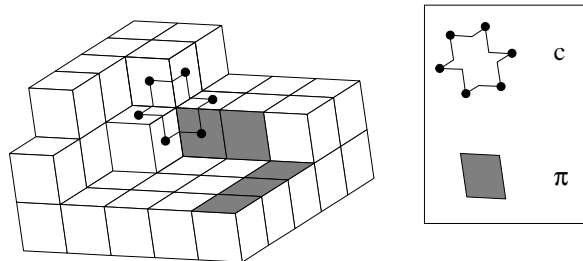


FIG. 6.15: Un e -loop c et un v -chemin π tels que $\mathcal{I}_{c,\pi} = \pm 0.5$.

6.4.5 Preuve du Théorème 9 quand $(n, \bar{n}) = (v, e)$

Preuve du Théorème 9 pour $(n, \bar{n}) = (v, e)$: Suivant la Proposition 6.24, il est suffisant de montrer que $\mathcal{I}_{\pi, c} = \mathcal{I}_{\pi, c'}$ quand c et c' sont deux e -chemins identiques à une \mathcal{E} -déformation élémentaire près dans X (dans $X \setminus \{y_0, y_p\}$ si π n'est pas fermé). Alors, soit $c = c_1 \cdot \gamma \cdot c_2$ et soit $c' = c_1 \cdot (s) \cdot c_2 = c_1 \cdot c_2$ où γ est un e -loop ou un demi-tour de s à s dans X (dans $X \setminus \{y_0, y_p\}$ si π n'est pas fermé).

Puisque $\mathcal{P}(\pi, c')$ est vérifiée, il est alors immédiat que $\mathcal{P}(\pi, c_1)$, $\mathcal{P}(\pi, \gamma)$ et $\mathcal{P}(\pi, c_2)$ le sont aussi. Alors, suivant la Propriété 6.15, on a $\mathcal{I}_{\pi, c_1 \cdot \gamma \cdot c_2} = \mathcal{I}_{\pi, c_1} + \mathcal{I}_{\pi, \gamma} + \mathcal{I}_{\pi, c_2}$.

Si $\gamma = (y_0, y_1 \cdot y_2)$ où $y_2 = y_0$ est un demi-tour dans X (dans $X \setminus \{y_0, y_p\}$ si π n'est pas fermé), alors il est immédiat d'après la Définition 6.3 et la Définition 6.4 que $\mathcal{I}_{\pi, \gamma} = 0$.

Si γ est un e -loop, alors $\mathcal{P}(\gamma, \pi)$ est vérifiée ainsi que $\mathcal{P}(\pi, \gamma)$. Alors, d'après la Proposition 6.2, on a $\mathcal{I}_{\pi, \gamma} = -\mathcal{I}_{\gamma, \pi}$ et d'après la Proposition 6.25, $\mathcal{I}_{\gamma, \pi} = 0$. Finalement, $\mathcal{I}_{\pi, c'} = \mathcal{I}_{\pi, c_1} + \mathcal{I}_{\pi, c_2}$ et d'après la Proposition 6.15 il est immédiat que $\mathcal{I}_{\pi, c'} = \mathcal{I}_{\pi, c_1 \cdot c_2} = \mathcal{I}_{\pi, c}$.

□

Conclusion

Nous avons défini le nombre d'intersection entre un v -chemin et un e -chemin reposant sur une surface discrète, et nous avons montré que ce nombre d'intersections "réelles" entre deux chemins de surfels est invariant par déformation homotopique de l'un ou l'autre des deux chemins. Le nombre d'intersection est un nouvel "invariant topologique" dans le cadre des surfaces discrètes. Alors, il peut être utilisé pour prouver un nouveau Théorème de Jordan pour des courbes de surfels (prochain Chapitre). Dans le Chapitre 9, nous utiliserons cet outil afin de démontrer un théorème important relatif à la caractérisation de la préservation de la topologie dans les surfaces discrètes.

Chapitre 7

Un nouveau Théorème de Jordan

En utilisant le nombre d'intersection, on démontre aisément le nouveau théorème de Jordan discret suivant.

Théorème 11 *Si $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ est une paramétrisation d'une n -courbe fermée simple de surfels dans une surface discrète Σ qui n'est pas incluse dans un loop et qui est n -réductible dans Σ (i.e. $\pi \simeq_n (y_0, y_p)$), alors $\Sigma \setminus \pi^*$ possède exactement deux composantes \bar{n} -connexes.*

Voir la Figure 6.7 pour un exemple de courbes fermées simples qui vérifient les hypothèses du Théorème 11 et la Figure 6.8 pour un contre-exemple (courbes qui ne sont pas réductibles).

Dans la suite de ce chapitre, $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ est un n -chemin qui vérifie les hypothèses du Théorème 11. Nous utiliserons les trois lemmes suivants :

Lemme 7.1 *Pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$, les ensembles $Left_\pi(k)$ et $Right_\pi(k)$ sont tous les deux non vides. De plus, y_k est \bar{n} -adjacent à un surfel α de $Left_\pi(k)$ et \bar{n} -adjacent à un surfel β de $Right_\pi(k)$.*

Preuve : Supposons que $Left_\pi(k) = \emptyset$, alors, d'après la Définition 6.2, y_{k-1} et y_{k+1} sont e -adjacents. Ainsi, y_{k+1} est e -adjacent (et donc v -adjacent) à la fois à y_k et à y_{k-1} . Puisque π est de longueur supérieure à 3 (sinon π^* serait inclus dans un loop) on en déduit qu'il existe un surfel $y_j \notin \{y_{k-1}, y_k, y_{k+1}\}$ qui est n -adjacent à y_{k+1} ; et ceci contredit le fait que π^* est une n -courbe fermée simple. Alors, $Left_\pi(k) \neq \emptyset$ et de façon similaire on montre que $Right_\pi(k) \neq \emptyset$.

Si $n = e$ il est immédiat que $Right_\pi(k)$ [resp. $Left_\pi(k)$] contient un surfel α [resp. β] qui est v -adjacent à y_k .

Si $n = v$ alors on peut supposer qu'aucun surfel de $Left_\pi(k)$ [resp. $Right_\pi(k)$] n'est e -adjacent à y_k . Alors, cela entraîne que y_{k+1} et y_{k-1} appartiennent à un même loop de telle sorte que c^* n'est pas une v -courbe fermée simple. \square

Lemme 7.2 *Il existe deux surfels α et β dans $\Sigma \setminus \pi^*$ qui sont \bar{n} -adjacents à un surfel y_k de π et qui ne sont pas \bar{n} -connectés dans $\Sigma \setminus \pi^*$.*

Preuve : Soient α et β les deux surfels définis dans le Lemme 7.1. Maintenant, on suppose l'existence d'un \bar{n} -chemin $c = (x_i)_{i=0, \dots, q}$ dans $\Sigma \setminus \pi^*$ entre les surfels α et β , \bar{n} -voisins du surfel y_k , et qui n'intersecte pas π^* . On note $c' = (x_0 = \alpha, \dots, x_q = \beta, y_k, \alpha)$ qui est un \bar{n} -chemin fermé. Alors, d'après la définition des deux surfels α et β , et par définition du nombre d'intersection entre π et c' , on a $\mathcal{I}_{\pi, c'} = \pm 1$. Maintenant, puisque π est n -homotope à un chemin trivial et d'après le Théorème 9 (Remarque 6.5), on devrait avoir $\mathcal{I}_{\pi, c'} = 0$. Ceci contredit l'existence du chemin c (voir Figure 7.1 et Figure 7.2). Alors, α et β ne sont pas \bar{n} -connectés dans $\Sigma \setminus \pi^*$. \square

Lemme 7.3 *Soient y_k et y_{k+1} deux surfels consécutifs de π pour $k \in \{0, \dots, p\}$. Pour tout surfel $s \notin \pi^*$, qui est \bar{n} -adjacent à y_k , il existe un surfel $t \notin \pi^*$, \bar{n} -adjacent à y_{k+1} , et un \bar{n} -chemin de s à t dans $\Sigma \setminus \pi^*$.*

Ce lemme est illustré par la Figure 7.3. **Preuve :** **Cas où $(n, \bar{n}) = (e, v)$** Dans ce cas, le lemme peut être démontré par des considérations locales. En effet, on peut supposer que y_{k+1} partage en tant qu'arête avec y_k l'arête orientée $(0, 1)$ de y_k . Alors on considère les cas suivants :

- y_{k-1} partage en tant qu'arête avec y_k l'arête orientée $(1, 2)$ de y_k . Alors, soit a le surfel qui partage avec y_k l'arête orientée $(2, 3)$ de y_k et soit b le surfel qui partage l'arête orientée $(3, 0)$ de y_k . Ni a ni b ne peuvent appartenir à π^* (sinon, π n'est pas une e -courbe fermée simple). Maintenant, pour tout surfel s de $N_v(y_k) \setminus \pi^*$ on a :
 - $s \in \mathcal{L}_1(y_k)$ donc s est v -adjacent à $y_{k+1} \in \mathcal{L}_0(y_k)$.
 - $s \in \mathcal{L}_2(y_k)$ donc s est v -adjacent (ou égal) à a qui est aussi v -adjacent à b , lui-même v -adjacent à y_{k+1} .

- $s \in \mathcal{L}_3(y_k)$ donc s est v -adjacent ou égal à b lui-même v -adjacent à y_{k+1} .
- $s \in \mathcal{L}_0(y_k)$ donc s est v -adjacent ou égal à y_{k+1} .
- y_{k-1} partage en tant qu'arête avec y_k l'arête orientée $(2, 3)$ de y_k . Alors, soit a le surfel qui partage avec y_k l'arête orientée $(1, 2)$ de y_k et b le surfel qui partage avec y_k l'arête orientée $(3, 0)$ de y_k . Ni a ni b ne peuvent appartenir à π^* . Maintenant, pour tout surfel s de $N_v(y_k) \setminus \pi^*$ on a :
 - $s \in \mathcal{L}_0(y_k)$ où $s \in \mathcal{L}_1(y_k)$ donc s est v -adjacent ou égal à y_{k+1} .
 - $s \in \mathcal{L}_2(y_k)$ donc s est v -adjacent (ou égal) à a lui-même v -adjacent à y_{k+1} .
 - $s \in \mathcal{L}_3(y_k)$ donc s est v -adjacent ou égal à b lui-même v -adjacent à y_{k+1} .
- y_{k-1} partage avec y_k l'arête orientée $(3, 0)$ de y_k . Ce cas est similaire au premier.

Dans tous les cas, nous sommes en mesure de construire un v -chemin dans $\Sigma \setminus \pi^*$ de s à un surfel t qui est v -adjacent à y_{k+1} .

Cas où $(n, \bar{n}) = (v, e)$ Puisque π est une v -courbe fermée simple, alors $N_v(y_k) \setminus \{y_{k-1}, y_{k+1}\} = N_v(y_k) \setminus \pi^*$. De plus, $N_v(y_k) \setminus \{y_{k-1}, y_{k+1}\}$ possède exactement deux composantes e_{y_k} -connexes qui contiennent chacune un surfel e -adjacent à y_k (Remarque 6.3). De façon évidente, y_{k+1} est e -adjacent à chacune des composantes e_{y_k} -connexes de $\overline{\pi^*}$ précédentes. Alors, tout surfel s dans l'une de ces composantes connexes est e -connecté dans $\Sigma \setminus \pi^*$ à un surfel t qui est e -adjacent à y_{k+1} (voir Figure 7.3). \square

Preuve du Théorème 11 : Soit y_k un surfel de π pour $k \in \{0, \dots, p\}$. D'après le Lemme 7.2 il existe deux surfels α et β dans $\overline{\pi^*}$ qui sont \bar{n} -adjacents au surfel y_k et non \bar{n} -connectés dans $\Sigma \setminus \pi^*$. En particulier, $\Sigma \setminus \pi^*$ possède au moins deux composantes \bar{n} -connexes.

De plus, pour tout surfel $x \in \Sigma \setminus \pi^*$, puisque Σ est e -connexe (Théorème 6), alors il existe un \bar{n} -chemin c' dans $\Sigma \setminus \pi^*$ de x à un autre surfel x' qui est \bar{n} -adjacent à un surfel y_h de π^* ($h \in \{0, \dots, p\}$).

En utilisant autant de fois que nécessaire le Lemme 7.3, on voit que le surfel x' est \bar{n} -connecté dans $\overline{\pi^*}$ au surfel x'' de $N_{\bar{n}}(y_k) \setminus \{y_{k-1}, y_{k+1}\}$.

Si $n = v$ et puisque $Left_{\pi}(k)$ et $Right_{\pi}(k)$ ne peuvent contenir d'autres surfels de π que y_{k-1} et y_{k+1} de sorte que $Left_{\pi}(k) \cup Right_{\pi}(k) = N_v(y_k) \setminus \{y_{k-1}, y_{k+1}\}$, alors x'' est soit e -connecté à α , soit e -connecté à β dans $\overline{\pi^*}$.

Si $n = e$, alors aucun surfel de π autre que y_{k-1} et y_{k+1} n'est e -adjacent à y_k . On en déduit immédiatement que $N_v(y_k) \setminus \pi^*$ possède exactement deux composantes v_{y_k} -connexes incluses respectivement dans $Left_\pi(k)$ et $Right_\pi(k)$. Alors, x'' est v_{y_k} -connecté soit à α soit à β dans $\overline{\pi^*}$.

Finalement, dans les deux cas, il reste que x est \bar{n} -connecté soit à α soit à β dans $\Sigma \setminus \pi^*$, surfels qui ne sont pas eux-mêmes \bar{n} -connectés dans cet ensemble. Alors, $\Sigma \setminus \pi^*$ possède exactement deux composantes \bar{n} -connexes. \square

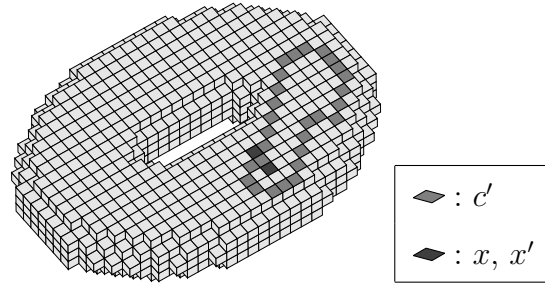
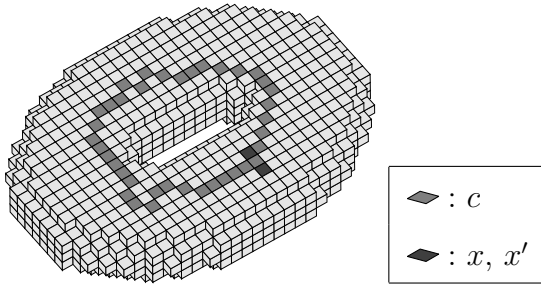


FIG. 7.1: Les deux surfels x et x' peuvent être reliés par un e -chemin dans $\overline{c^*}$. Alors, c n'est pas v -réductible dans Σ .

FIG. 7.2: Puisque c' est v -réductible dans Σ , les deux surfels x et x' ne peuvent être e -connectés dans $\overline{c^*}$ (Lemme 7.2).

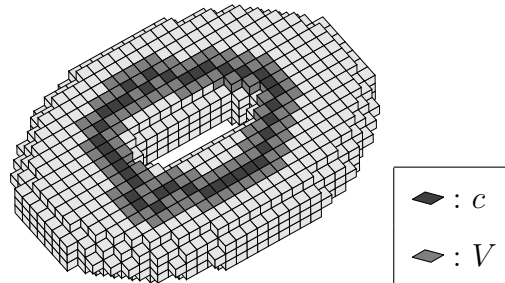


FIG. 7.3: Tout surfel de l'ensemble V (ensemble des surfels de Σ qui sont e -adjacents à c^*) est soit e -connecté au surfel x de la Figure 7.1 dans $\Sigma \setminus c^*$, soit e -connecté dans $\Sigma \setminus c^*$ au surfel x' de la Figure 7.1.

Chapitre 8

Nouvelles propriétés de l'index 2D

Dans ce chapitre, on présente une propriété nouvelle de l'index 2D (tel que défini dans la Section 2.1.2) qui peut être déduite de la propriété principale du nombre d'intersection. En effet, il est établi ici que l'index d'un chemin discret c dans \mathbb{Z}^2 autour d'un pixel $x \notin c^*$ est le même pour tout chemin fermé c' qui est n -homotope à c dans $\mathbb{Z}^2 \setminus \{x\}$, pour $n \in \{4, 8\}$ (une telle propriété était jusqu'à présent admise sans preuve). En effet, nous définissons tout d'abord un index 2D généralisé, en utilisant le nombre d'intersection, et les propriétés de ce nombre proviennent des propriétés principales du nombre d'intersection. Par exemple, en utilisant cette nouvelle définition, nous serons aussi en mesure de donner une preuve immédiate du fait que les index $W_{x,c}$ et $W_{x',c}$, d'un n -chemin c respectivement autour des pixels x et x' , sont égaux pour peu que les deux pixels x et x' appartiennent à la même composante \bar{n} -connexe de \bar{c}^* . Toutefois, nous ne sommes pas intéressés ici par la donnée d'un algorithme efficace qui permette de calculer cet index 2D généralisé. Par contre, nous étudions ici de nouvelles propriétés qui sont des conséquences directes de cette nouvelle définition.

De plus, la définition de l'index 2D généralisé fournit une nouvelle définition de l'index qui peut être calculé en utilisant n'importe quel demi \bar{n} -chemin (Définition 8.6) issu d'un pixel x au lieu d'une demi-droite partant de ce même pixel x du complémentaire d'un n -chemin fermé c .

Tout d'abord, introduisons une bijection entre une image bornée sur \mathbb{Z}^2 et la même image dessinée sur une surface Σ . Nous utiliserons pour cela les définitions suivantes.

Définition 8.1 ($l \times h$ -rectangle) *Soit $(l, h) \in \mathbb{Z}^2$. Une partie R de \mathbb{Z}^2 est appelée un $l \times h$ -rectangle s'il existe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $R = \{ (x+i, y+j) \mid 1 \leq i \leq l \text{ et } 1 \leq j \leq h \}$*

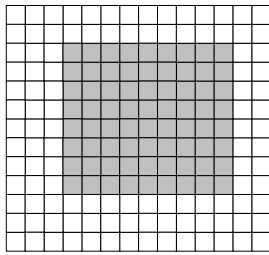
(voir Figure 8.1(a)). Un $l \times h$ -rectangle pourra aussi être appelé simplement un rectangle.

Définition 8.2 ($l \times h$ -boite) Soit R un $l \times h$ -rectangle. On définit la $l \times h$ -boite \mathcal{B} de \mathbb{Z}^3 associée à R par : $\mathcal{B} = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{Z}^3 \mid (x, y) \in R \}$ (voir Figure 8.1(b)). Une $l \times h$ -boite pourra aussi être appelée simplement une boite.

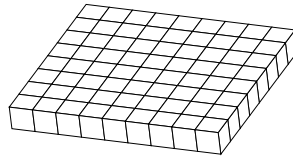
Définition 8.3 ($l \times h$ -surface) Soit R un $l \times h$ -rectangle et \mathcal{B} la $l \times h$ -boite associée à R . On définit la $l \times h$ -surface Σ_R associée à R par : $\Sigma_R = \delta_{6+}(\mathcal{B}, \overline{\mathcal{B}})$ (voir Figure 8.1(b)). Une $l \times h$ -surface pourra être appelée simplement un rectangle.

Finalement, on peut définir la partie supérieure d'une $l \times h$ -surface :

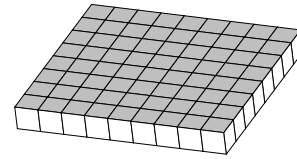
Définition 8.4 (partie supérieure d'une $l \times h$ -surface) Soit R un $l \times h$ -rectangle et \mathcal{B} la $l \times h$ -boite associée à R . De plus, soit Σ_R la $l \times h$ -surface associée à R . On définit la partie supérieure de Σ_R , notée $Up(\Sigma_R)$, comme l'ensemble des surfels de Σ_R de la forme $((x, y, 0), (x, y, 1))$ pour tout $(x, y) \in R$. (voir Figure 8.1(c)).



(a) En gris : un 9×8 -rectangle dans \mathbb{Z}^2 .



(b) La 9×8 -surface visible d'une 9×8 -boite.



(c) En gris : la partie supérieur d'une 9×8 -surface

FIG. 8.1: Illustrations des Définitions 8.1 à 8.4

Dans la suite de ce chapitre, quand aucune autre précision n'est donnée, on considère $(n, \bar{n}, m, \bar{m}) = (4, 8, e, v)$, ou bien $(n, \bar{n}, m, \bar{m}) = (8, 4, v, e)$. De plus, R est un $l \times r$ -rectangle de \mathbb{Z}^2 et Σ_R est la $l \times r$ -surface associée à R . On notera aussi Z la partie supérieure de Σ_R (i.e. $Z = Up(\Sigma_R)$):

Maintenant, on peut définir l'application suivante.

Définition 8.5 (application \mathcal{C}) On définit la bijection \mathcal{C} entre R et Z par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \quad R &\longrightarrow Z \\ (x, y) &\longmapsto ((x, y, 0), (x, y, 1)) \end{aligned}$$

La remarque suivante est immédiate :

Remarque 8.1 *Pour tous pixels x et y du rectangle R :*

- $\mathcal{R}_4(x, y)$ si et seulement si $\mathcal{R}_e(\mathcal{C}(x), \mathcal{C}(y))$.
- $\mathcal{R}_8(x, y)$ si et seulement si $\mathcal{R}_v(\mathcal{C}(x), \mathcal{C}(y))$.

Notation 8.1 *Pour tout n -chemin $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ tel que $\pi^* \subset R$, on note $\mathcal{C}(\pi)$ le m -chemin π' de Z défini par $\pi' = (\mathcal{C}(y_0), \dots, \mathcal{C}(y_p))$ (π' est bien un m -chemin d'après la Remarque 8.1).*

On utilisera aussi la notion suivante de demi-chemin (voir Figure 8.2).

Définition 8.6 (ensemble des demi n -chemins) *Un n -chemin $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ avec $p > 0$ est appelé un demi n -chemin dans \mathbb{Z}^2 issu de y_0 et relatif à R si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

- i) $y_0 \in R$.
- ii) Il existe un entier N (aussi noté $N_\infty(\pi)$) tel que $\{y_0, \dots, y_N\} \subset R$ et pour tout $k > N$ on a $y_k \notin R$.

On note $\mathcal{H}_n^x(R)$ l'ensemble des demi n -chemins dans \mathbb{Z}^2 issus du pixel x et relatifs à R , et par $\mathcal{H}_n(R)$ la réunion des ensembles $\mathcal{H}_n^x(R)$ pour $x \in R$.

Soit x_0 un surfel de \bar{Z} . Maintenant, soit z un surfel de Z qui soit e -adjacent à \bar{Z} . On peut alors associer à z exactement un de ses (au plus deux) e -voisins, que l'on notera $t(z)$, dans \bar{Z} . De plus, on peut aussi associer au surfel $t(z)$ un e -chemin arbitraire dans \bar{Z} de $t(z)$ à x_0 (voir Figure 8.3(a)). Finalement, nous venons de "définir" une application G du bord de R dans l'ensemble des e -chemins dans \bar{Z} qui commencent à un surfel donné $t(z)$ e -adjacent à un surfel $z \in Z$, et qui se terminent en x_0 . Alors, nous pouvons définir l'application $\tilde{\mathcal{C}}$ qui associe à un demi n -chemin $\pi = (y_0, \dots, y_p)$ de $\mathcal{H}_n^{y_0}(R)$ (voir Figure 8.3(b)) le chemin π' dans Σ défini par : $\pi' = (y_0, \dots, y_N, t(y_N)).G(y_N)$ où $N = N_\infty(\pi)$ (voir Figure 8.3(c)).

La proposition suivante est donnée ici sans preuve. En effet, elle est une conséquence immédiate de la définition de l'index 2D (Section 2.1.2) et de la définition du nombre d'intersection (Section 6.1).

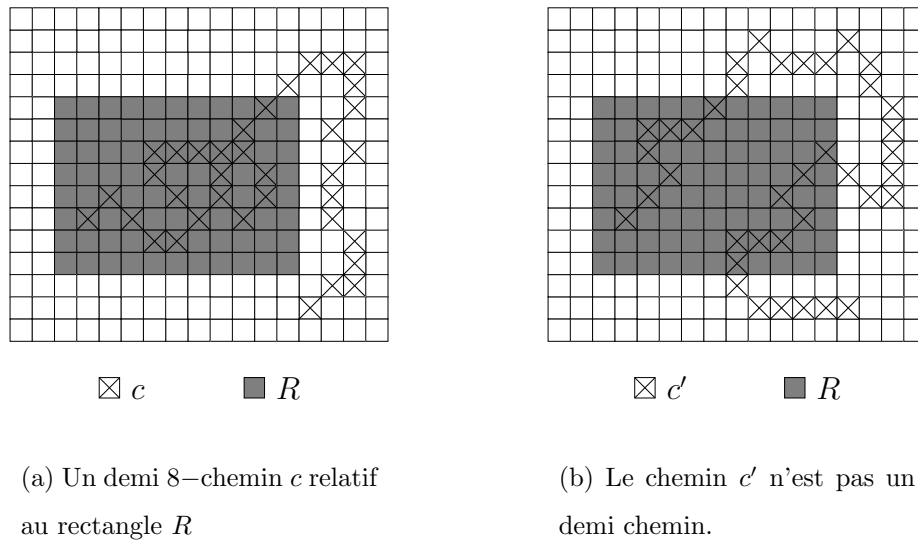


FIG. 8.2: Exemple et contre-exemple de demi-chemins relatifs à un rectangle R .

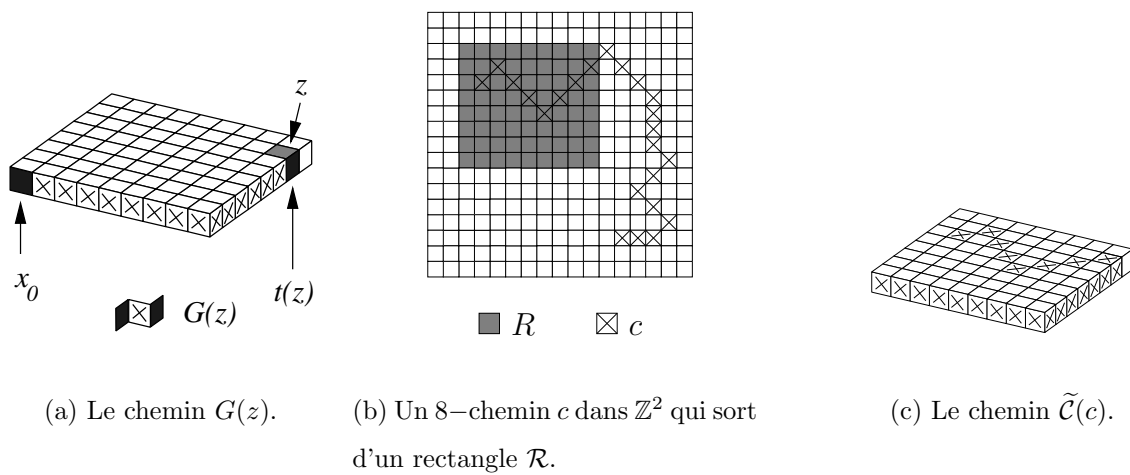


FIG. 8.3: Illustration de la construction d'une application $\tilde{\mathcal{C}}$ qui associe un n –chemin dans R avec un m –chemin dans Σ_R .

Proposition 8.1 *Soit c un n -chemin fermé dans R et x un pixel de $R \setminus c^*$. De plus, soit $\pi' = \tilde{\mathcal{C}}(\Delta_x^\alpha)$ pour $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$, alors $W_{x,c}^\alpha = \mathcal{I}_{\pi',c(c)}$ (voir Section 2.1.1 pour la définition de la demi-droite Δ_x^α).*

La remarque suivante provient de la Proposition 2.5 et du fait que Σ_R est de façon évidente simplement n -connexe pour $n \in \{e, v\}$ (le lecteur ayant besoin d'une preuve de ceci peut le montrer en utilisant le fait que $\chi_n(\Sigma_R) = 2$ et la définition d'un disque).

Remarque 8.2 *Soit c un \bar{n} -chemin fermé dans R et x un pixel de $R \setminus c^*$. Si π_1 et π_2 sont deux demi n -chemins de $\mathcal{H}_n^x(R)$, alors $\tilde{\mathcal{C}}(\pi_1)$ et $\tilde{\mathcal{C}}(\pi_2)$ sont m -homotopes.*

Maintenant, nous pouvons aussi établir la proposition suivante qui nous permettra de justifier la Définition 8.7.

Proposition 8.2 *Soit c un \bar{n} -chemin fermé dans R et x un pixel de $R \setminus c^*$. Si π_1 et π_2 sont deux demi n -chemins de $\mathcal{H}_n^x(R)$ alors $\mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{C}}(\pi_1),c(c)} = \mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{C}}(\pi_2),c(c)}$.*

Preuve : Suivant la Remarque 8.2, on a $\tilde{\mathcal{C}}(\pi_1) \simeq_m \tilde{\mathcal{C}}(\pi_2)$ dans Σ . Maintenant, les propriétés $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{C}}(\pi_1), \mathcal{C}(c))$, $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{C}}(\pi_2), \mathcal{C}(c))$, $\mathcal{P}(\mathcal{C}(c), \tilde{\mathcal{C}}(\pi_1))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{C}(c), \tilde{\mathcal{C}}(\pi_2))$ sont évidemment vérifiées de sorte que d'après le Théorème 10 on a $\mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{C}}(\pi_1),c(c)} = \mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{C}}(\pi_2),c(c)}$ (voir Figure 8.4).

□

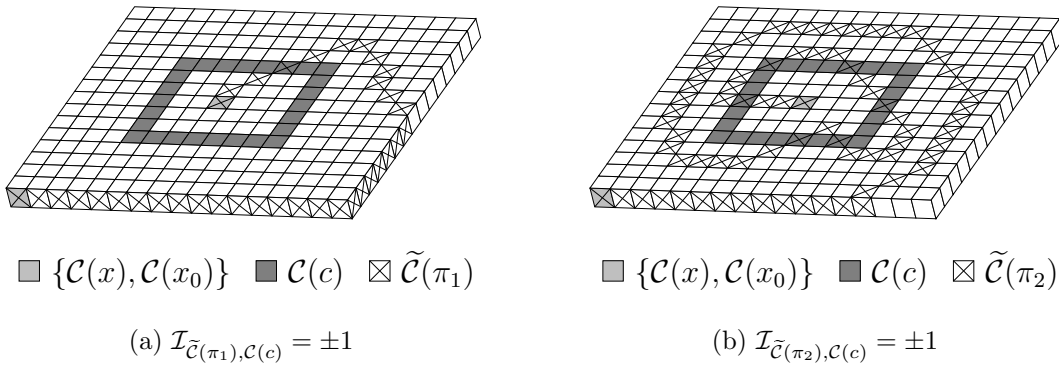
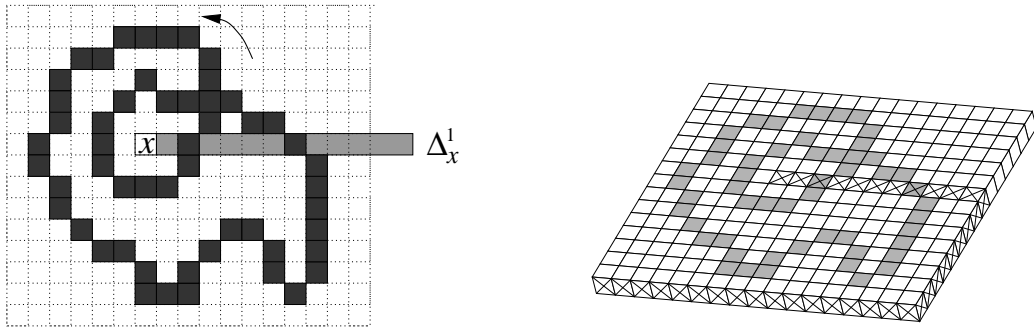


FIG. 8.4: Illustration de la Proposition 8.2

On remarque qu'une demi-droite Δ_x^α issue de x (voir Section 2.1.1) appartient à $\mathcal{H}_x^n(R)$ pour $n \in \{4, 8\}$ comme illustré par la Figure 8.5(a). On obtient donc immédiatement que la définition suivante d'un nouvel index 2D coïncide avec la définition de la Section 2.1.2 dans le cas particulier où π est une demi droite (voir Figure 8.5).

Définition 8.7 (index 2D généralisé) Soit c un n -chemin fermé dans \mathbb{Z}^2 tel que $c^* \subset R$. On définit l'index 2D généralisé de c autour de x , noté $\Omega_{x,c}$, de la manière suivante : $\Omega_{x,c} = \mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{C}}(\pi), \mathcal{C}(c)}$ où π est un \bar{n} -chemin quelconque de \mathcal{H}_n^x .

Cet index 2D généralisé est bien défini puisqu'il ne dépend effectivement pas du choix d'un demi \bar{n} -chemin π d'après la Proposition 8.2. Ceci permet d'établir le théorème suivant qui n'est qu'une restriction du Théorème 9 dans le contexte des images à deux dimensions (voir Figure 8.6).



(a) Un 15×17 -rectangle R , un pixel x et un 8 -chemin c inclus dans $R \setminus \{x\}$. La demi-droite Δ_x^1 est un demi 4 -chemin relatif à R . $W_{x,c}^1 = 1$.

(b) $c' = \mathcal{C}(c)$ et $\pi' = \tilde{\mathcal{C}}(\Delta_x^1)$. $\mathcal{I}_{\pi', c'} = 1$.

FIG. 8.5: L'index 2D classique et l'index 2D généralisé.

Maintenant, on peut établir le théorème suivant.

Théorème 12 Soit $x \in \mathbb{Z}^2$ et soient c et c' deux n -chemins qui sont n -homotopes dans $R \setminus \{x\}$. Alors, $W_{x,c} = W_{x,c'}$.

Preuve : D'après la Définition 8.7 on a $W_{x,c} = \mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{C}}(\Delta_x^1), \mathcal{C}(c)}$ et $W_{x,c'} = \mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{C}}(\Delta_x^1), \mathcal{C}(c')}$. Par définition de l'application \mathcal{C} , il est alors immédiat que $\mathcal{C}(c) \simeq_m \mathcal{C}(c')$ dans $Z\{\mathcal{C}(x)\}$. Alors, puisque $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{C}}(\Delta_x^1), \mathcal{C}(c))$ et $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{C}}(\Delta_x^1), \mathcal{C}(c'))$ sont évidemment vérifiées, et d'après le Théorème 9, on a $\mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{C}}(\Delta_x^1), \mathcal{C}(c)} = \mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{C}}(\Delta_x^1), \mathcal{C}(c')}$. \square

On remarque que ce dernier théorème peut être généralisé à toute n -déformation homotopique des chemins dans $\mathbb{Z}^2 \setminus \{x\}$ au lieu de $R \setminus \{x\}$.

La proposition suivante a été démontrée par R. Malgouyres dans [Mal94] en utilisant une preuve moins immédiate en raison de la *restriction* imposée par l'utilisation d'une demi-

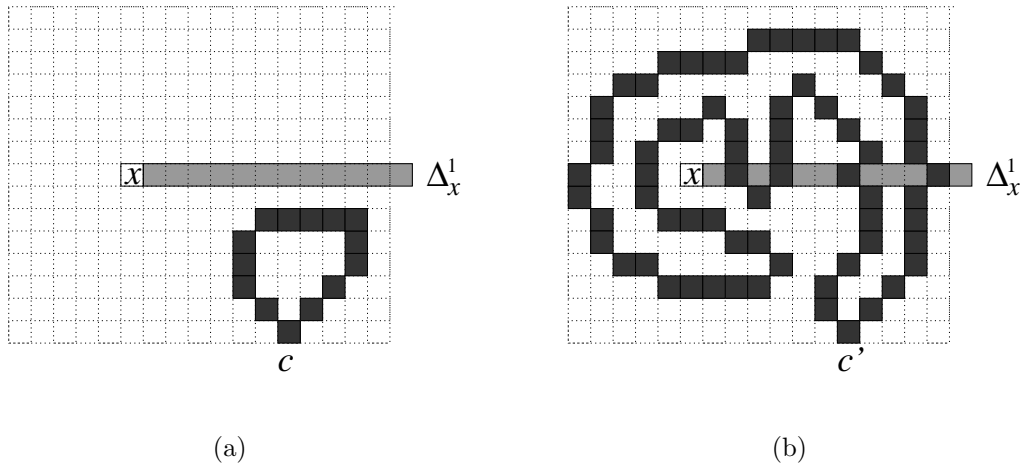


FIG. 8.6: L'index 2D $W_{x,c}$ est inchangé après une 8-déformation homotopique de c dans $\mathbb{Z}^2 \setminus \{x\}$.

droite dans la définition de $W_{x,c}$. Maintenant, cette proposition devient une conséquence directe de la définition de $\Omega_{x,c}$.

Proposition 8.3 ([Mal94]) *Soit x un pixel de \mathbb{Z}^2 et c un n -chemin fermé dans $\mathbb{Z}^2 \setminus \{x\}$. Si x' est un pixel de \bar{c}^* qui est \bar{n} -connecté à x dans \bar{c}^* alors $\Omega_{x,c} = \Omega_{x',c}$.*

Schéma de preuve (différente de celle donnée dans [Mal94]) : Soit R un rectangle de \mathbb{Z}^2 tel que $c^* \cup \{x, x'\} \subset R$ mais aussi tel que x et x' sont \bar{n} -connectés dans $R \setminus c^*$. On a $\Omega_{x,c} = \mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{C}}(\pi), \mathcal{C}(c)}$ où π est un demi \bar{n} -chemin issu de x et relatif à R . Alors, soit γ un \bar{n} -chemin de x' à x dans $R \setminus c^*$. Puisque $x \notin c^*$ et $\gamma^* \cap c^* = \emptyset$, il est alors immédiat d'après la définition du nombre d'intersection que $\mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{C}}(\pi), \mathcal{C}(c)} = \mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{C}}(\gamma.\pi), \mathcal{C}(c)}$. Maintenant, le \bar{n} -chemin $\gamma.\pi$ est un demi \bar{n} -chemin issu x' et relatif à R de sorte que $\mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{C}}(\gamma.\pi), \mathcal{C}(c)} = \Omega_{x',c}$. Finalement, $\Omega_{x',c} = \Omega_{x,c}$. \square

Dans la Figure 8.7(a) nous avons représenté un 4-chemin fermé c dans un rectangle R et un demi 8-chemin π issu d'un pixel x (pixel foncé marqué d'une croix) qui permet de calculer l'index 2D généralisé de c autour de x . D'après la Définition 8.7, on utilise les chemins correspondants qui sont représentés dans la Figure 8.7(b). Alors les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- Les deux pixels x et x' sont 8-connectés dans R par un 8-chemin γ qui ne rencontre pas c .
- Les deux pixels foncés $\tilde{\mathcal{C}}(x)$ et $\tilde{\mathcal{C}}(x')$ sont connectés dans $Up(\Sigma_R)$ par un v -chemin

$\tilde{\mathcal{C}}(\gamma)$ qui ne rencontre pas $\tilde{\mathcal{C}}(c)$.

Alors, le chemin $\gamma.\pi$ est un demi 8–chemin issu de x' et relatif à R , et il est clair que

$$\mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{C}}(\gamma.\pi), \tilde{\mathcal{C}}(c)} = \mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{C}}(\pi), \tilde{\mathcal{C}}(c)}.$$

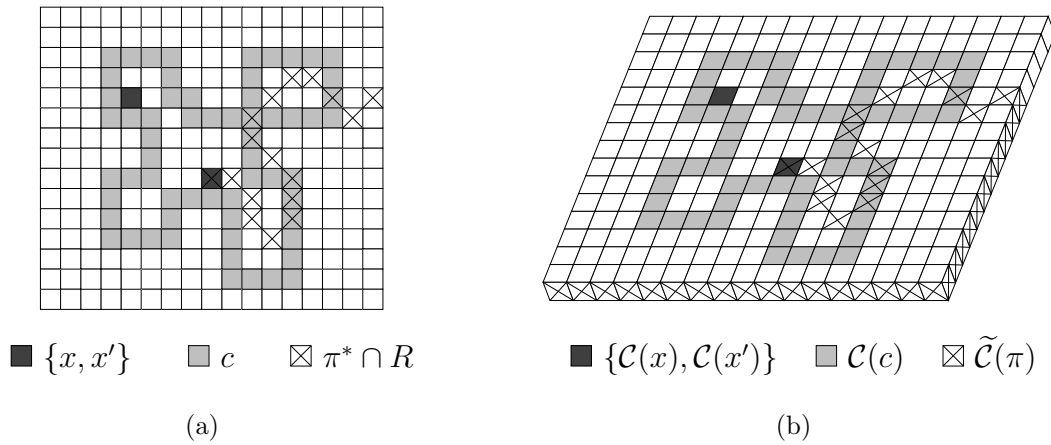


FIG. 8.7: L'index 2D généralisé du 8–chemin fermé c (Figure (a)) est le même autour de chacun des deux pixels gris foncé.

Chapitre 9

Nouvelle caractérisation de la préservation de topologie

9.1 Un nouveau théorème sur la sous-homotopie dans les surfaces

Dans le Chapitre 5 nous avons donné la définition de l'homotopie entre parties d'une surface discrète Σ . Dans cette section, nous nous intéressons à la caractérisation de l'homotopie qui utilise le groupe fondamental discret (voir Sections 2.3 et 5.3). En utilisant le nombre d'intersection défini dans le Chapitre 6, nous établissons une nouvelle caractérisation de la sous-homotopie dans les surfaces discrètes.

Le but de cette section est de montrer que la condition “ i_* est un isomorphisme” du Théorème 8 est suffisante pour affirmer que chaque composante \bar{n} -connexe de \bar{Y} contient un surfel de \bar{X} , excepté dans le cas très particulier où X est la surface Σ toute entière qui est une sphère topologique (voir Définition 5.9), et Y est un disque obtenu par suppression dans X d'un disque topologique (Définition 5.8). En d'autres termes, sauf de la cas précédemment évoqué, la Condition 2 du Théorème 8 est en fait une conséquence de la Condition 1 du Théorème 8. Ceci revient à démontrer le théorème suivant :

Théorème 13 *Soit $Y \subset X \subset \Sigma$ deux parties n -connexes telles que $X \neq \Sigma$ ou Σ n'est pas une sphère ou $X \setminus Y$ n'est pas un disque topologique, ou bien Y n'est pas un disque topologique, alors :*

Y est sous n -homotope à X si et seulement si le morphisme $i_ : \Pi_1^n(Y, B) \longrightarrow \Pi_1^n(X, B)$*

induit par l'application d'inclusion $i : Y \longrightarrow X$ est un isomorphisme pour tout surfel de base $B \in Y$.

Afin de montrer ce théorème, on suppose qu'un certain couple d'ensembles (X, Y) vérifie la Condition 1 du Théorème 8, mais ne vérifie pas la Condition 2 du Théorème 8. En d'autres termes, on suppose que i_* est un isomorphisme pour tout point base $B \in Y$ et on suppose aussi l'existence d'une composante \bar{n} -connexe de \bar{Y} qui ne contienne aucun surfel de \bar{X} . Nommément, on suppose l'existence d'une composante \bar{n} -connexe de \bar{Y} , notée A , telle que $A \subset X$. Dans une première étape, on montrera que cette composante \bar{n} -connexe A est nécessairement un disque topologique. Dans une seconde étape, on montrera que l'ensemble $X \setminus A$ est lui aussi un disque topologique, en fait égal à Y , et on conclura que $X = \Sigma$ et que X est une sphère topologique.

Dans la suite de cette section, $Y \subset X$ sont deux parties n -connexes d'un surface discrète Σ , et on suppose que pour tout surfel $B \in Y$, le morphisme de groupes i_* entre $\Pi_1^n(Y, B)$ et $\Pi_1^n(X, B)$ induit par l'application d'inclusion de Y dans X , est un isomorphisme, comme dans le Théorème 8.

Dans les preuves qui suivent, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 9.1 *Soient $Y \subset X$ deux parties n -connexes de Σ et B un surfel de Y . Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) Le morphisme $i_* : \Pi_1^n(Y, B) \longrightarrow \Pi_1^n(X, B)$ induit par l'inclusion de Y dans X est un isomorphisme.*
- ii) Pour tout surfel B' de Y , le morphisme $i'_* : \Pi_1^n(Y, B') \longrightarrow \Pi_1^n(X, B')$ induit par l'inclusion de Y dans X est un isomorphisme.*

Preuve : Nous devons simplement montrer que la propriété *i)* implique la propriété *ii)*. Supposons que $i_* : \Pi_1^n(Y, B) \longrightarrow \Pi_1^n(X, B)$ soit un isomorphisme de groupes et soit B' un surfel quelconque de Y . Alors, soit i'_* le morphisme de groupes de $\Pi_1^n(Y, B')$ dans $\Pi_1^n(X, B')$ induit par l'inclusion de Y dans X . Maintenant, d'après la Proposition 2.10, soit i_Y et i_X les deux isomorphismes canoniques respectivement de $\Pi_1^n(Y, B)$ dans $\Pi_1^n(Y, B')$ et de $\Pi_1^n(X, B)$ dans $\Pi_1^n(X, B')$. Clairement, on a $i'_* = i_X \circ i_* \circ i_Y^{-1}$ de sorte que i'_* est un isomorphisme. \square

9.2 Première étape de la preuve

Dans cette section, A est une composante \bar{n} -connexe de \bar{Y} qui ne contient aucun surfel de \bar{X} (i.e. $A \subset X$) et B est un surfel de Y (B est le surfel de base des groupes fondamentaux qui sont considérés dans cette section).

Lemme 9.2 *Il existe un surfel $x_0 \in A$ tel que le morphisme :*

$$i''_* : \Pi_1^n(Y \cup (A \setminus \{x_0\}), B) \longrightarrow \Pi_1^n(X, B)$$

induit par l'application d'inclusion $i'' : Y \cup (A \setminus \{x_0\}) \longrightarrow X$ est un isomorphisme et Y est sous n -homotope à $Y \cup (A \setminus \{x_0\})$.

Corollaire 9.3 *L'ensemble $\{x_0\}$ est sous \bar{n} -homotope à A , de telle sorte que A est un disque topologique pour la relation de \bar{n} -adjacence.*

Avant de démontrer le Lemme 9.2, nous devons prouver deux résultats préliminaires.

Lemme 9.4 *Soit x_0 un surfel de A . Si A contient au moins deux surfels, alors il existe un surfel $x \neq x_0$ dans A qui est n -adjacent à Y et qui est n -simple pour $Y \cup \{x\}$.*

Corollaire 9.5 *Soit x_0 un surfel de A . Si A contient au moins deux surfels, alors il existe un surfel $x \neq x_0$ dans A qui est n -adjacent à Y et qui est \bar{n} -simple pour A .*

Preuve : D'après le Lemme 9.4, il existe un surfel $x \neq x_0$ dans A qui est n -adjacent à Y et n -simple pour $Y \cup \{x\}$. Alors, x n'est ni n -isolé dans $Y \cup \{x\}$ ni n -intérieur à $Y \cup \{x\}$ (puisque $A \subset \bar{Y}$ est \bar{n} -connexe et $x \neq x_0$). Donc, suivant la Remarque 5.1 et puisque x est n -simple pour $Y \cup \{x\}$ on a $\text{Card}(\mathcal{C}_n^x[G_n(x, Y \cup \{x\})]) = \text{Card}(\mathcal{C}_n^x[G_{\bar{n}}(x, \overline{Y \cup \{x\}})]) = 1$. Maintenant, comme $x \in A$ ne peut être \bar{n} -adjacent à une autre composantes \bar{n} -connexe de \bar{Y} autre que A , on obtient que $\mathcal{C}_n^x[G_{\bar{n}}(x, \overline{Y \cup \{x\}})] = \mathcal{C}_n^x[G_{\bar{n}}(x, A)]$. Alors, puisque x est n -adjacent à Y , il n'est pas \bar{n} -intérieur à A , donc x est \bar{n} -simple pour A . \square

Preuve du Lemme 9.4 : Soit x un surfel de $A \subset \bar{Y}$ qui soit n -adjacent à Y et dont la distance à x_0 est maximale parmi tous les surfels de A qui sont n -adjacents à Y . La distance utilisée ici étant la longueur d'un plus court n -chemin dans A entre deux de ses surfels. Montrons que le surfel x est n -simple pour $Y \cup \{x\}$. On a $G_n(x, Y \cup \{x\}) = G_n(x, Y)$ et $G_{\bar{n}}(x, \bar{Y} \setminus \{x\}) = G_{\bar{n}}(x, \bar{Y})$. Supposons que ce surfel x ne soit pas n -simple pour $Y \cup \{x\}$. Puisque x n'est ni n -isolé ni n -intérieur à $Y \cup \{x\}$, ceci entraîne que

$Card(\mathcal{C}_n^x(G_n(x, Y))) = Card(\mathcal{C}_{\bar{n}}^x(G_{\bar{n}}(x, \bar{Y}))) \geq 2$ (Remarque 5.1). Soient a et b deux surfels n -adjacents à x choisis respectivement dans deux composantes n_x -connexes distinctes de $G_n(x, Y)$ qui sont n -adjacentes à x .

Notons π_0 le n -chemin (b, x, a) . Puisque a et b sont n -adjacents à x et n'appartiennent pas à la même composante n_x -connexe de $N_v(x) \cap Y$, alors a n'est pas n_x -adjacent à b . D'après la Remarque 6.3, on en déduit qu'aucun des ensembles $Left_{\pi_0}(1)$ et $Right_{\pi_0}(1)$ n'est vide et que chacun de ces deux ensembles contient un surfel qui est \bar{n} -adjacent à x . De plus, si on suppose que tous les surfels de $Left_{\pi_0}(1)$ ou $Right_{\pi_0}(1)$ qui sont \bar{n} -adjacents à x appartiennent à Y , il est immédiat que les deux surfels a et b sont n_x -connectés dans $N_v(x) \cap Y$. Alors, il doit exister deux surfels s_1 et s_2 qui sont \bar{n} -adjacents à x et tels que $s_1 \in Right_{\pi_0}(1) \cap A$ et $s_2 \in Left_{\pi_0}(1) \cap A$. En outre, on peut supposer que s_1 et s_2 sont n -adjacents à Y . Puisque l'ensemble Y est n -connexe, il existe un n -chemin β_1 de a à B dans Y et un n -chemin β_2 de B à b dans Y .

Maintenant, un \bar{n} -chemin $\alpha_1 = (s_1, \dots, x_0)$ dans $A \setminus \{x\}$ de s_1 au surfel x_0 doit exister puisque la \bar{n} -distance entre x et x_0 est maximale parmi tous les surfels de A qui sont n -adjacents à Y . En effet, dans le cas contraire, soit c un plus court \bar{n} -chemin de longueur l entre x et x_0 dans A . Si s_1 n'est pas \bar{n} -connecté à x_0 dans $A \setminus \{x\}$ et puisque s_1 est \bar{n} -adjacent à x , alors s_1 se trouve à distance $l + 1$ de x_0 dans A . Ceci contredit le fait que x se trouve à distance maximale l de x_0 par rapport à tous les surfels de A qui sont n -adjacents à Y . De façon similaire, il doit exister un \bar{n} -chemin $\alpha_2 = (s_2, \dots, x_0)$ de s_2 à x_0 dans $A \setminus \{x\}$.

Soit α le \bar{n} -chemin fermé $\alpha = (x).\alpha_1.\alpha_2^{-1}.(x)$ dans A . Remarquons que, par construction même des chemins α_1 et α_2 , on a $x \notin \alpha_1^*$ et $x \notin \alpha_2^*$. On peut aussi construire un n -chemin fermé $\beta = (B).\beta_2.\pi_0.\beta_1.(B)$ de B à B dans $Y \cup \{x\}$ avec $\pi_0 = (b, x, a)$ et $x \notin \beta_1^* \cup \beta_2^*$ puisque β_1 et β_2 sont des n -chemins dans Y . On en déduit que les deux chemins α et β se croisent une seule fois en x , et comme $s_1 \in Right_{\pi_0}(1)$ et $s_2 \in Left_{\pi_0}(1)$, on a $\mathcal{I}_{\alpha, \beta} = -\mathcal{I}_{\beta, \alpha} = 1$.

Maintenant, le morphisme i_* de $\Pi_1^n(Y, B)$ à $\Pi_1^n(X, B)$ induit par l'inclusion de Y dans X est un isomorphisme. En particulier, i_* est surjectif, donc pour toute classe d'équivalence $[c']_{\Pi_1^n(X, B)}$, il existe un n -chemin fermé $c \in A_n^B(Y)$ qui est n -homotope à c' dans X et tel que $i_*([c]_{\Pi_1^n(Y, B)}) = [c']_{\Pi_1^n(X, B)}$. Dans notre cas, il existe un n -chemin $\gamma \in A_n^B(Y)$ qui est n -homotope au n -chemin β dans X et $i_*([\gamma]_{\Pi_1^n(Y, B)}) = [\beta]_{\Pi_1^n(X, B)}$. Si γ est n -homotope

à β dans X , et d'après le Théorème 9, on déduit que $\mathcal{I}_{\alpha,\beta} = \mathcal{I}_{\alpha,\gamma} = 1$. Mais comme α est un \bar{n} -chemin dans $A \subset \bar{Y}$ et γ est un n -chemin dans Y , on a $\gamma^* \cap \alpha^* = \emptyset$ et donc $\mathcal{I}_{\alpha,\gamma} = 0$, ce qui est une contradiction. Finalement, le surfel x doit être n -simple pour $Y \cup \{x\}$. \square

Remarque 9.1 *Si x est un surfel n -simple pour $Y \cup \{x\}$, puisque x est \bar{n} -simple dans A , alors l'ensemble $A \setminus \{x\}$ est \bar{n} -connexe.*

Preuve du Lemme 9.2 : Par induction du Lemme 9.4 (et en utilisant le Lemme 5.1) on montre qu'il existe une séquence de surfels (s_0, \dots, s_l) telle que pour tout $i \in \{0, \dots, l\}$, le surfel $s_i \in A$ est n -simple pour $Y \cup \{s_0, \dots, s_i\}$ et $A \setminus \{s_0, \dots, s_l\} = \{x_0\}$. Ainsi, Y est sous n -homotope à $Y \cup (A \setminus \{x_0\})$. D'après le Lemme 5.1, le morphisme $i_*^i : \Pi_1^n(Y \cup \{s_0, \dots, s_{i-1}\}, B) \longrightarrow \Pi_1^n(Y \cup \{s_0, \dots, s_i\}, B)$ induit par l'inclusion de $Y \cup \{s_0, \dots, s_{i-1}\}$ dans $Y \cup \{s_0, \dots, s_i\}$ est un isomorphisme de groupes. D'autre part, le morphisme $i_*^i : \Pi_1^n(Y, B) \longrightarrow \Pi_1^n(Y \cup \{s_i | i = 0, \dots, l\} = Y \cup (A \setminus \{x_0\}), B)$ induit par l'application d'inclusion $i' : Y \longrightarrow Y \cup (A \setminus \{x_0\})$ est tel que $i_*^i = i_*^i \circ \dots \circ i_*^0$. Alors, le morphisme i_*^i est aussi un isomorphisme. De plus, puisque i_* est un isomorphisme, on en déduit que $i_*'' = i_* \circ i_*'^{-1}$ est un isomorphisme de $\Pi_1^n(Y \cup (A \setminus \{x_0\}), B)$ dans $\Pi_1^n(X, B)$. \square

9.3 Deuxième étape de la preuve

Dans la Section 9.2 nous avons montré que Y est sous n -homotope à $Y \cup (A \setminus \{x_0\})$ où x_0 est un surfel isolé de $\overline{Y \cup (A \setminus \{x_0\})}$. Dans cette section, nous établissons le fait que, à la condition que le n -chemin de surfels entourant $\{x_0\}$ dans $Y \cup (A \setminus \{x_0\})$ soit n -réductible dans $Y \cup (A \setminus \{x_0\})$, alors $Y \cup (A \setminus \{x_0\})$ est un disque topologique.

9.3.1 Bord d'edgels d'une composante connexe $X \subset \Sigma$

Tout d'abord, nous devons définir explicitement ce que l'on appellera un "bord" d'un ensemble connexe de surfels. Soit X une composante n -connexe d'une surface Σ .

Définition 9.1 (edgel de bord) *On appelle edgel de bord de X un couple (x, y) de surfels de Σ tel que $x \in X$ et $y \in \bar{X}$. On note $\mathcal{B}(X)$ l'ensemble des edgels de bords de X .*

Définition 9.2 (relation de s -adjacence) *On dit que deux edgels de bord (x, y) et (x', y') de $\mathcal{B}(X)$ sont s -adjacents si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

- x, y, x' et y' appartiennent à un même loop \mathcal{L} de Σ .
- $x \neq x'$ ou bien $y \neq y'$.
- x est e -connecté à x' dans $\mathcal{L} \cap X$ si $n = e$, et y est e -connecté à y' dans $\mathcal{L} \cap \bar{X}$ si $n = v$.

On définit la relation de s -connexité entre edgels de bord comme la fermeture transitive de cette relation d'adjacence. La définition d'un s -chemin d'edgels de bord est aussi immédiate. Remarquons que toute composante s -connexe d'edgels de bord de X est une s -courbe fermée simple (en effet, chaque edgel de bord a exactement deux s -voisins, un par loop qui contient cet edgel) qui est appelé un bord de X , alors qu'une paramétrisation d'une telle courbe fermée simple est appelé un bord paramétré de X .

Définition 9.3 (n -chemin $c_n(s)$) *Soit $s = (s_0, \dots, s_l)$ un bord paramétré de bord de X tel que $s_i = (x_i, y_i)$ pour $i \in \{0, \dots, l\}$. On définit le n -chemin (de surfels) associé à s noté $c_n(s)$ dans les deux cas suivants :*

- Si $n = e$ et pour $i \in \{0, \dots, l-1\}$, on appelle c_i le plus court e -chemin reliant x_i à x_{i+1} dans $X \cap \mathcal{L}$, où \mathcal{L} est l'unique loop contenant $\{x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}\}$ (chemin qui existe par définition de la relation de s -adjacence entre s_i et s_{i+1}). Alors, $c_e(s) = c_0 * \dots * c_{l-1}$.
- Si $n = v$ et pour $i \in \{0, \dots, l-1\}$, alors x_i est v -adjacent à x_{i+1} . On définit alors $c_v(s) = (x_0, \dots, x_l)$.

Remarque 9.2 *Pour tout s -chemin d'edgels de bord $s = (s_0 = (x_0, y_0), \dots, s_l = (x_l, y_l))$ de X et pour $n \in \{e, v\}$, tous les surfels de $c_n(s)$ sont \bar{n} -adjacents à \bar{X} .*

9.3.2 Groupe libre

Dans la suite, nous utiliserons la notion de *groupe libre (non-Abélien)* à m générateurs. Soit $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_m\} \cup \{a_1^{-1}, \dots, a_m^{-1}\}$ un alphabet avec $2m$ symboles, et soit \mathcal{W}_m l'ensemble de tous les mots sur cet alphabet (i.e. ensemble de séquences de lettres sur cet

alphabet). On dit que deux mots $w \in \mathcal{W}_m$ et $w' \in \mathcal{W}_m$ sont *identiques à une simplification élémentaire près* si l'un des deux mots peut être obtenu en insérant ou en supprimant dans l'autre une séquence de la forme $a_i^{-1}a_i$ ou encore une séquence de la forme $a_i a_i^{-1}$ avec $i \in \{1, \dots, m\}$. Maintenant, deux mots $w \in \mathcal{W}_m$ et $w' \in \mathcal{W}_m$ sont dits *librement équivalents* s'il existe une suite finie $w = w_1, \dots, w_k = w'$ de mots de \mathcal{W}_m telle que pour $i = 2, \dots, k$ les mots w_{i-1} et w_i sont identiques à une simplification élémentaire près. Ceci définit une relation d'équivalence sur \mathcal{W}_m et on note \mathcal{F}_m l'ensemble des classes d'équivalences de cette relation. De plus, si w est un mot de \mathcal{W}_m , on note \bar{w} la classe d'équivalence du mot w . La concaténation des mots définit une opération interne sur \mathcal{F}_m qui fournit à \mathcal{F}_m une structure de groupe (on définit $\bar{w}_1 \bar{w}_2 = \overline{w_1 w_2}$). Le groupe ainsi défini est appelé le *groupe libre* à m générateurs sur \mathcal{A} . Classiquement, on note $w_1 w_2$ le mot obtenu par concaténation des mots w_1 et w_2 .

On note aussi 1_m l'élément neutre de \mathcal{F}_m qui est égal à $\bar{\epsilon}$ où ϵ est le mot vide. Le seul résultat que l'on admet ici sur le groupe libre est le résultat classique qui stipule que si un mot $w \in \mathcal{L}_m$ est tel que $\bar{w} = 1_m$ et si w n'est pas le mot vide, alors il existe dans w deux lettres consécutives $a_i a_i^{-1}$ ou bien $a_i^{-1} a_i$ pour $i \in \{1, \dots, m\}$. Cette remarque fournit immédiatement un algorithme pour décider si un mot $w \in \mathcal{W}_m$ est tel que $\bar{w} = 1_m$, en effectuant la suite de simplifications élémentaires.

9.3.3 Élément du groupe libre associé à un n -chemin

Dans la suite, $X = \{x_1, \dots, x_l\}$ est une partie n -connexe de Σ de cardinal $l > 1$.

Notation 9.1 Si x est un surfel de X , on note $o(x)$ le nombre d'éléments de $\mathcal{C}_n^x[G_n(x, X)]$, ensemble des composantes n_x -connexes de $N_v(x) \cap X$ qui sont n -adjacentes à x . On remarque que $o(x_i)$ est au plus égal à 4. Alors, on peut attribuer un numéro t dans $\{1, \dots, o(x_i)\}$ à chaque élément de $\mathcal{C}_n^{x_i}[G_n(x_i, X)]$ de sorte que cela donne un sens à l'expression " $t^{\text{ième}}$ composante de $\mathcal{C}_n^{x_i}[G_n(x_i, X)]$ ".

Définition 9.4 (Alphabet \mathcal{A}_X) On définit l'alphabet \mathcal{A}_X de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_X &= \{x_{1,1}, \dots, x_{1,o(x_1)}, x_{2,1}, \dots, x_{2,o(x_2)}, \dots, x_{l,1}, \dots, x_{l,o(x_l)}\} \\ &\cup \{x_{1,1}^{-1}, \dots, x_{1,o(x_1)}^{-1}, x_{2,1}^{-1}, \dots, x_{2,o(x_2)}^{-1}, \dots, x_{l,1}^{-1}, \dots, x_{l,o(x_l)}^{-1}\} \end{aligned}$$

Où les symboles $\{x_{i,1}, \dots, x_{i,o(i)}\}$ sont associés au surfel x_i , et le symbole $x_{i,j}$ est associé au $j^{\text{ième}}$ élément de $\mathcal{C}_n^{x_i}[G_n(x_i, X)]$.

Définition 9.5 (mot associé à un chemin) Si $\pi = (y_0, y_1)$ est un n -chemin dans X de longueur 1 et tel que $y_0 = x_a$ et $y_1 = x_b$ pour $\{a, b\} \subset \{0, \dots, l\}$. On associe à π un mot $w_n(\pi, X)$ de l'alphabet \mathcal{A}_X défini par $w_n(\pi, X) = x_{a,t}x_{b,u}^{-1}$ où t et u sont tels que x_b appartient à la $t^{\text{ième}}$ composante de $\mathcal{C}_n^{x_a}[G_n(x_a, X)]$ et x_a appartient à la $u^{\text{ième}}$ composante de $\mathcal{C}_n^{x_b}[G_n(x_b, X)]$.

Si $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ est un n -chemin de longueur $q > 1$ dans X , on définit le mot $w_n(\pi, X)$ de la manière suivante :

$$w_n(\pi, X) = w_n((y_0, y_1), X)w_n((y_1, y_2), X)w_n((y_2, y_3), X) \dots w_n((y_{p-1}, y_p), X)$$

Et on définit $w_n(\pi, X)$ comme le mot vide si π est de longueur 0 ou si π est un chemin trivial (i.e. fermé de longueur 1).

Définition 9.6 (élément du groupe libre associé à un chemin) Si π est un n -chemin dans X et \mathcal{A}_X possède $2m$ éléments. On définit l'élément $\nu_n(\pi, X)$ du groupe libre à m générateurs sur \mathcal{A}_X par : $\nu_n(\pi, X) = \overline{w_n(\pi, X)}$.

Remarque 9.3 Si π_1 et π_2 sont deux n -chemins dans X tels que le dernier surfel de π_1 est égal au premier surfel de π_2 . Alors, $\overline{w_n(\pi_1.\pi_2, X)} = \overline{w_n(\pi_1, X)w_n(\pi_2, X)}$

Remarque 9.4 Si π est un n -chemin dans X , alors, par construction, $w_n(\pi, X)$ ne peut contenir de séquence $x_{i,t}x_{i,t}^{-1}$ pour $i \in \{0, \dots, l\}$ et $t \in \{1, \dots, o(x_i)\}$.

Proposition 9.6 Soit X une partie n -connexe de Σ composée d'au moins deux surfels. Soient π et π' deux n -chemins dans X . Si $\pi \simeq_n \pi'$ alors $\nu(\pi, X) = \nu(\pi', X)$.

La preuve de la Proposition 9.6 repose sur les trois lemmes suivants.

Lemme 9.7 Si π est un n -demi-tour dans X , alors $\nu_n(\pi, X) = 1_{2m}$.

Preuve : Soit $\pi = (y_0, y_1, y_0)$ un n -demi-tour dans X tel que $y_0 = x_a$ et $y_1 = x_b$. D'après la Définition 9.6, $w_n(\pi, X) = x_{a,u}x_{b,t}^{-1}x_{b,t}x_{a,u}^{-1}$ si y_1 appartient à la $t^{\text{ième}}$ composante de $\mathcal{C}_n^{y_0}[G_n(y_0, X)]$; et y_0 appartient à la $u^{\text{ième}}$ composante de $\mathcal{C}_n^{y_1}[G_n(y_1, X)]$. Finalement, il est immédiat que $\overline{w_n(\pi, X)} = 1_{2m}$. \square

Lemme 9.8 Si π est un triplet de X , alors $\nu_v(\pi, X) = 1_{2m}$.

Preuve : Soit $\pi = (y_0, y_1, y_2, y_0)$ un triplet dans X . Alors, on peut supposer sans perte de généralité (à une renumérotation près des surfels de X) que $y_0 = x_0$, $y_1 = x_1$ et $y_2 = x_2$. Comme y_0, y_1 et y_0 appartiennent à un même loop, les surfels y_1 et y_2 sont dans la même composante de $\mathcal{C}_v^{y_0}[G_v(y_0, X)]$ (disons la première, toujours sans perte de généralité); les deux surfels y_0 et y_2 appartiennent à la même (disons la seconde) composante de $\mathcal{C}_v^{y_1}[G_v(y_1, X)]$; et les deux surfels y_0 et y_1 appartiennent à la même (disons la troisième) composante de $\mathcal{C}_v^{y_2}[G_v(y_2, X)]$. Ainsi, $w_v((y_0, y_1), X) = x_{0,1}x_{1,2}^{-1}$, $w_v((y_1, y_2), X) = x_{1,2}x_{2,3}^{-1}$, et $w_v((y_2, y_0), X) = x_{2,3}x_{0,1}^{-1}$ de sorte que $w(\pi, X) = x_{0,1}x_{1,2}^{-1}x_{1,2}x_{2,3}^{-1}x_{2,3}x_{0,1}^{-1}$. Alors, $\overline{w(\pi, X)} = \overline{x_{0,1}x_{1,2}^{-1}x_{1,2}x_{2,3}^{-1}x_{2,3}x_{0,1}^{-1}} = \overline{x_{0,1}x_{2,3}^{-1}x_{2,3}x_{1,0}^{-1}} = \overline{x_{1,0}x_{1,0}^{-1}} = 1_{2m}$. \square

Lemme 9.9 *Si π est un e -loop dans X , alors $\nu_e(\pi, X) = 1_{2m}$.*

Preuve : Soit $\pi = (y_0, \dots, y_p)$ un e -loop dans X . Tout d'abord, on remarque que $p > 2$ et on peut supposer que $y_i = x_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$. Alors, d'après la Définition 9.5 on a $w_v(\pi, X) = w_v((x_0, x_1), X)w_v((x_1, x_2), X) \dots w_v((x_{p-1}, x_p), X)$.

De plus, pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$, notons $\sigma(k)$ le numéro associé à la composante de $\mathcal{C}_v^{x_k}[G_v(x_k, X)]$ qui contient le surfel x_{k-1} . Alors, par définition d'un e -loop dans X , il est immédiat que $\sigma(k)$ est aussi le numéro de la composante de $\mathcal{C}_v^{x_k}[G_v(x_k, X)]$ qui contient le surfel x_{k+1} (en effet, x_{k-1} et x_{k+1} sont tous deux e -connectés dans $\pi^* \subset N_v(x_k) \cap X$). D'autre part, il est aussi évident que x_1 et x_{p-1} appartiennent tous les deux à la même composante de $\mathcal{C}_v^{x_0}[G_v(x_0, X)]$, disons la première. On obtient que :

$$w_v(\pi, X) = x_{0,1}x_{1,\sigma(1)}^{-1}x_{1,\sigma(1)}x_{2,\sigma(2)}^{-1}x_{2,\sigma(2)}x_{3,\sigma(2)}^{-1} \dots x_{p-1,\sigma(p-1)}^{-1}x_{p-1,\sigma(p-1)}x_{0,1}^{-1}$$

Finalement : $\overline{w_v(\pi, X)} = \overline{x_{0,1}x_{0,1}^{-1}} = 1_{2m}$. \square

Preuve de la Proposition 9.6 :

D'après la Proposition 6.24 et la Proposition 6.17, il est suffisant de montrer cette proposition dans le cas où π et π' sont identiques à une \mathcal{T} -déformation élémentaire près quand $n = v$, et sont identiques à une \mathcal{S} -déformation élémentaire près quand $n = e$.

Si $n = e$ on suppose que $\pi = \pi_1 \cdot (s) \cdot \pi_2$ et $\pi' = \pi_1 \cdot \gamma \cdot \pi_2$ où γ est un e -demi-tour ou bien un e -loop dans X . Alors, suivant la Remarque 9.3 on a $\nu_e(\pi, X) = \overline{w_e(\pi_1, X)w_e(\pi_2, X)}$ et $\nu_e(\pi', X) = \overline{w_e(\pi_1, X)w_e(\gamma, X)w_e(\pi_2, X)}$. Maintenant, d'après le Lemme 9.7 et le Lemme 9.9, on a $\overline{w_e(\gamma, X)} = 1_{2m}$ et on obtient que $\overline{w_e(\pi_1, X)w_e(\gamma, X)w_e(\pi_2, X)} = \overline{w_e(\pi_1, X)w_e(\pi_2, X)}$. Finalement, $\nu_e(\pi, X) = \nu_e(\pi', X)$.

Si $n = v$ on suppose que $\pi = \pi_1.(s).\pi_2$ et $\pi' = \pi_1.\gamma.\pi_2$ où γ est un v -demi-tour ou un triplet dans X . Alors, suivant la Remarque 9.3 on a $\nu_v(\pi, X) = \overline{w_v(\pi_1, X)w_v(\pi_2, X)}$ et $\nu_v(\pi', X) = \overline{w_v(\pi_1, X)w_v(\gamma, X)w_v(\pi_2, X)}$. Maintenant, d'après le Lemme 9.7 et le Lemme 9.8, on a $\overline{w_n(\gamma, X)} = 1_{2m}$ et on obtient alors que $\overline{w_v(\pi_1, X)w_v(\gamma, X)w_v(\pi_2, X)} = \overline{w_v(\pi_1, X)w_v(\pi_2, X)}$. Finalement, $\nu_v(\pi, X) = \nu_v(\pi', X)$. \square

9.3.4 Lemmes importants

Le résultat principal de cette section se trouve dans la proposition suivante :

Proposition 9.10 *Soit Y une partie n -connexe de Σ et x_0 un surfel \bar{n} -isolé de \bar{Y} (i.e. x_0 n'a aucun \bar{n} -voisin dans \bar{Y}). Soit s le bord paramétré $((a, x_0), (b, x_0), (c, x_0), (d, x_0))$ où a, b, c et d sont les quatre e -voisins ainsi nommés de x_0 dans Y . Si $c_n(s)$ est n -homotope à un chemin trivial dans Y , alors Y est un disque topologique.*

Dans la suite de cette section, Y est une partie n -connexe de Σ et s est un bord paramétré de Y (i.e. s est une paramétrisation d'une s -courbe d'edgels de bord de Y). Afin de montrer la Proposition 9.10, nous devons tout d'abord établir les lemmes suivants.

Lemme 9.11 *Si le n -chemin $c_n(s)$ est n -homotope dans Y à un chemin trivial, et $(c_n(s))^*$ contient plus d'un surfel alors $c_n(s)$ contient un surfel qui est n -simple pour Y .*

Pour montrer le Lemme 9.11, nous utilisons le Lemme 9.12 .

Lemme 9.12 *Si $w_n(c_n(s), X)$ contient une séquence $x_{i,k}^{-1}x_{i,k}$ pour un entier $i \in \{1, \dots, l\}$ et un entier k dans $\{1, \dots, o(x_j)\}$ alors le surfel c^k de $c_n(s)$ tel que $x_i = c^k$ est n -simple pour X .*

Preuve : Si on trouve la séquence $x_{j,b}^{-1}x_{j,b}$ dans $w_n(c_n(s), X)$, alors plus précisément et selon la Définition 9.5, on trouve la séquence $x_{k,u}x_{j,b}^{-1}x_{j,b}x_{k',t}$ pour deux entiers k et k' dans $\{1, \dots, l\}$, u dans $\{1, \dots, o(x_k)\}$ et t dans $\{1, \dots, o(x_{k'})\}$. Cela signifie qu'il existe dans $c_n(s)$ un sous séquence (c^p, \dots, c^{p+q}) telle que :

- $w_n((c^p, \dots, c^{p+q}), X) = w_n((c^p, c^{p+1}), X) \dots w_n((c^{p+q-1}, c^{p+q}), X) = x_{j,b}^{-1}x_{j,b}$.
- $c^p = x_k$ appartient à la b^{ieme} composante de $\mathcal{C}_n^{x_j}[G_n(x_j, X)]$, et x_j appartient à la u^{ieme} composante de $\mathcal{C}_n^{x_k}[G_n(x_k, X)]$.

- $c^{p+q} = x_{k'}$ appartient à la b^{ieme} composante de $\mathcal{C}_n^{x_j}[G_n(x_j, X)]$, et x_j appartient à la t^{ieme} composante de $\mathcal{C}_n^{x_{k'}}[G_n(x_{k'}, X)]$.
- $c^k = x_j$ pour tout $k \in \{p+1, \dots, p+q\}$

En d'autres termes, le bord paramétré passe d'une composante n_{x_i} -connexe de $G_n(x_i, X)$ à x_i puis passe de x_i à la même composante n_{x_i} -connexe de $G_n(x_i, X)$. Il est alors immédiat que $G_n(x_i, X)$ possède une unique composante n_{x_i} -connexe (voir Figure 9.1) n -adjacente à x_i qui est lui même \bar{n} -adjacent à un surfel de \bar{X} (Remarque 9.2). Alors, x_i est n -simple pour X . \square

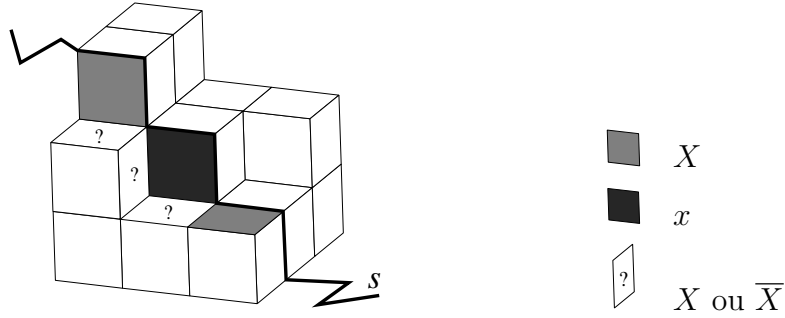


FIG. 9.1: Si les deux surfels gris appartiennent à la même composante v_x -connexe de $G_v(x, X)$ il est clair que $\text{Card}(\mathcal{C}_v^x[G_v(x, X)]) = 1$ et $\text{Card}(\mathcal{C}_e^x[G_e(x, \bar{X})]) = 1$.

Preuve du Lemme 9.11 : Puisque $c_n(s)$ est fermé et de longueur supérieure à 1 on en déduit que $w_n(c_n(s), X)$ est un mot sur \mathcal{A}_X de longueur (nombre de symboles) supérieure ou égale à 4 (voir Définition 9.5). Maintenant, puisque $c_n(s)$ est n -homotope à un chemin trivial dans Y , d'après la Proposition 9.6 et la Définition 9.5 pour un mot associé à un chemin trivial, on a $\overline{w_n(c_n(s), X)} = 1_{2m}$. Donc, $w_n(c_n(s), X)$, étant de longueur supérieure à 1, doit nécessairement contenir une séquence $x_{j,b}^{-1}x_{j,b}$ associée au surfel x_j et à la b^{ieme} composante n_{x_j} -connexe de $G_n(x_j, X)$ n -adjacente à x_j . En effet, par définition du mot $w_n(c_n(s), X)$, ce mot ne peut pas contenir de séquence de la forme $x_{j,b}x_{j,b}^{-1}$ pour tout $j \in \{0, \dots, l\}$. Mais, d'après le Lemme 9.11, ceci implique que $c_n(s)$ contient un surfel qui est n -simple pour X . \square

Définition 9.7 (edgels de bord associés à un élément de $\mathcal{C}_n^x[G_n(x, X)]$) Soit x un surfel n -simple de $Z \subset \Sigma$, et soient C et D les seules composantes connexes respectives de $\mathcal{C}_n^x[G_n(x, Z)]$ et $\mathcal{C}_n^x[G_n(x, \bar{Z})]$ (voir Définition 5.3 et Remarque 5.1). Les deux edgels de

la forme (a, b) et (a', b') , où $\{a, a'\} \subset C$ et $\{b, b'\} \subset D$, sont appelés les deux edgels de bord associés à la composante C (voir Figure 9.2).

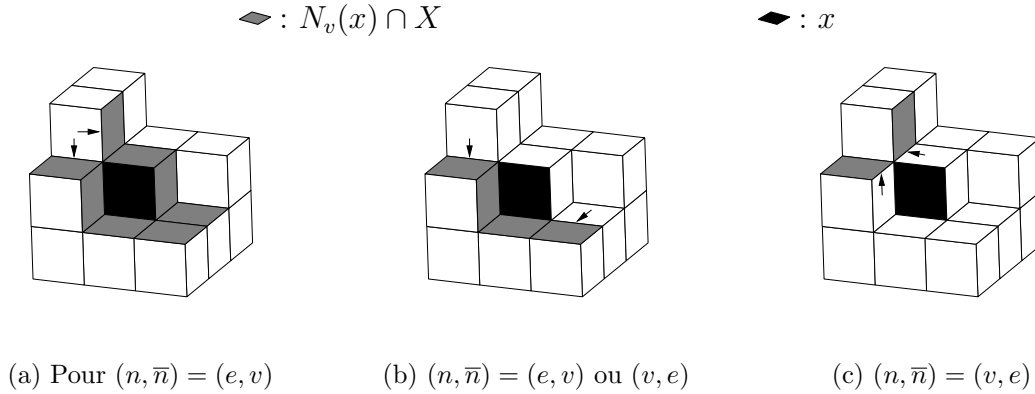


FIG. 9.2: Edgels de bord associés à une composante n_x -connexe de $G_n(x, X)$.

Lemme 9.13 Soit x un surfel de $c_n(s)$ qui est n -simple pour Y . Soient f et f' les deux edgels de bord associés à l'unique composante connexe N_0 de $G_n(x, Y)$. Enfin, soit s' le bord paramétré de $Y \setminus \{x\}$ qui contient les deux edgels f et f' et tel que $c_n(s')$ est un chemin de x' à x' où $x' \neq x$. Alors, le chemin de surfel $c_n(s')$ est n -réductible dans $Y \setminus \{x\}$.

Schéma de preuve : Tout d'abord, $c_n(s)^*$ contient nécessairement plus d'un surfel puisque x est simple. Alors il est possible de trouver un chemin d'edgels s_2 tel que $c_n(s)$ et $c_n(s_2)$ soient équivalents à un changement de paramètre près mais tel que l'origine de $c_n(s_2)$ soit différente de x . D'après le Lemme 2.6, $c_n(s_2)$ est n -réductible lui aussi.

Maintenant, soit s' le s -chemin obtenu en supprimant dans s_2 les edgels situés entre f et f' et qui contiennent x (de tels edgels peuvent ne pas exister comme c'est le cas dans la Figure 9.2(a)) et en remplaçant éventuellement ces edgels par des edgels de la forme (x, q) où q appartient à N_0 . Si $f = (b, d)$ et $f' = (b', d')$ alors soit γ le sous-chemin de $c_n(s_2)$ reliant b à b' associé au s -chemin reliant f à f' dans s_2 , et soit γ' le sous-chemin de $c_n(s')$ reliant b à b' associé au s -chemin reliant f à f' dans s' . Alors ces deux chemins ont les mêmes extrémités et sont inclus dans $C \cup \{x\}$ où C est la seule composante n_x -connexe de $C_n^x[G_n(x, Y)]$. Alors, il est évident que γ est n -homotope à γ' dans Y , de sorte que les chemins $c_n(s_2)$ et $c_n(s')$ sont n -homotopes eux aussi. Finalement, $c_n(s_2)$ est réductible dans Y . \square

Preuve de la Proposition 9.10 : On montre l'existence d'une séquence d'effacement de surfels n -simples qui mène à $\{y\}$ à partir de Y où y est un surfel de Y .

Soit $s^0 = ((a, x_0), (b, x_0), (c, x_0), (d, x_0))$ le bord paramétré de la Proposition 9.10 et posons $Y^0 = Y$. Maintenant, si $m \geq 0$ et si s^m est un bord paramétré de l'ensemble Y^m ayant au moins 2 surfels, tel que $c_n(s^m)$ soit n -réductible dans Y^m , alors, le Lemme 9.11 montre que $c_n(s^m)$ contient un surfel n -simple pour Y^m que l'on note y^m . Soit N_0^m la composante connexe de $G_n(y^m, Y^m)$ n -adjacente à y^m et soient f et f' les deux edgels de bord associés à N_0^m . De plus, soient $Y^{m+1} = Y^m \setminus \{y^m\}$ et s^{m+1} le bord paramétré de Y^{m+1} qui contient les deux edgels de bord f et f' comme défini dans le Lemme 9.13; et soit enfin b^{m+1} le surfel de base de $c_n(s^{m+1})$ (différent de y^m suivant le Lemme 9.13).

D'après le Lemme 9.13, le chemin $c_n(s^m)$ est n -homotope à $c_n(s^{m+1})$ dans Y^m et $c_n(s^{m+1})$ est n -réductible dans Y^m .

Maintenant, soit $i_*^m : \Pi_1^n(Y^{m+1}, b^{m+1}) \longrightarrow \Pi_1^n(Y^m, b^{m+1})$ le morphisme induit par l'inclusion de Y^{m+1} dans Y^m . Puisque y^m est n -simple pour Y , le Lemme 5.1 entraîne que le morphisme i_*^m est un morphisme de groupes, en particulier i_*^m est injectif.

Alors, $i_*^m([c_n(s^{m+1})]_{\Pi_1^n(Y^{m+1}, b^{m+1})}) = [c_n(s^{m+1})]_{\Pi_1^n(Y^m, b^{m+1})}$ mais comme le chemin $c_n(s^{m+1})$ est n -réductible dans Y^m , on obtient que $i_*^m([c_n(s^{m+1})]_{\Pi_1^n(Y^{m+1}, b^{m+1})}) = [1]_{\Pi_1^n(Y^m, b^{m+1})}$. D'autre part, on a $i_*^m([1]_{\Pi_1^n(Y^{m+1}, b^{m+1})}) = [1]_{\Pi_1^n(Y^m, b^{m+1})}$. Puisque i_*^m est injectif, alors $[1]_{\Pi_1^n(Y^{m+1}, b^{m+1})} = [c_n(s^{m+1})]_{\Pi_1^n(Y^{m+1}, b^{m+1})}$. En d'autres termes, le n -chemin $c_n(s^{m+1})$ est réductible dans Y^{m+1} , donc Y^{m+1} et s^{m+1} vérifient toujours les conditions du Lemme 9.11.

Par induction sur l'entier m on montre alors que tant que l'ensemble Y^m possède plus de deux surfels, on peut trouver un surfel $y^m \in Y^m$ qui est n -simple pour Y^m et donc un ensemble $Y^{m+1} = Y^m \setminus \{y^m\}$ qui est sous n -homotope à Y^m et inclus strictement dans Y^m . Finalement, il doit exister un entier k tel que Y^k soit réduit à un unique surfel $\{y\}$. Il est alors évident, par construction, que $Y^k = \{y\}$ est sous n -homotope à $Y^0 = Y$, de sorte que Y est un disque topologique. \square

9.4 Preuve du Théorème 13

Preuve du Théorème 13 : Nous utilisons le Théorème 8 et montrons que la Condition 2 est une conséquence de la Condition 1 excepté dans un cas très particulier. Aussi, on suppose que la Condition 1 du Théorème 8 est vérifiée et qu'il existe une composante

\bar{n} -connexe A de \bar{Y} qui est incluse dans X (i.e. A ne contient aucun surfel de \bar{X}).

D'après le Lemme 9.2 il existe un surfel x_0 dans A tel que Y est sous n -homotope à $Y \cup (A \setminus \{x_0\})$. Alors, puisque i_* et $i''_* : \Pi_1^n(Y, B) \longrightarrow \Pi_1^n(Y \cup (A \setminus \{x_0\}), B)$ sont des isomorphismes pour tout $B \in Y$, le morphisme de groupes $i'_* : \Pi_1^n(Y \cup (A \setminus \{x_0\}), B) \longrightarrow \Pi_1^n(X, B)$ induit par l'application d'inclusion $i' : Y \cup (A \setminus \{x_0\}) \longrightarrow X$ et tel que $i_* = i'_* \circ i''_*$ est un isomorphisme. Comme x_0 appartient à la composante \bar{n} -connexe A de \bar{Y} , le surfel x_0 est un surfel \bar{n} -isolé de $\overline{Y \cup (A \setminus \{x_0\})}$ et soit s une paramétrisation du bord séparant $Y \cup (A \setminus \{x_0\})$ de $\{x_0\}$. Soit $c_n(s)$ le n -chemin associé au s -chemin s .

Tout d'abord, on suppose que $c_n(s)$ n'est pas réductible dans $Y \cup (A \setminus \{x_0\})$. Il est clair que le même chemin $c_n(s)$ est réductible dans $Y \cup A$ et donc aussi dans X . Ainsi, soit z_0 le surfel de base de $c_n(s)$ et j_* le morphisme de $\Pi_1^n(Y \cup (A \setminus \{x_0\}), z_0)$ dans $\Pi_1^n(X, z_0)$ induit par l'inclusion de $Y \cup (A \setminus \{x_0\})$ dans X . Alors, j_* ne peut être injectif, et d'après le Lemme 9.1 le morphisme i'_* ne peut être un isomorphisme puisque B et z_0 sont n -connectés dans $Y \cup (A \setminus \{x_0\})$. On obtient alors que i_* n'est pas un isomorphisme et on a ainsi une contradiction.

Donc $c_n(s)$ est n -réductible dans $Y \cup (A \setminus \{x_0\})$. Alors, d'après la Proposition 9.10 on sait que $Y \cup (A \setminus \{x_0\})$ est un disque topologique. D'après le Lemme 9.2, Y est n -homotope à $Y \cup (A \setminus \{x_0\})$ et donc $\chi_n(Y) = \chi_n(Y \cup (A \setminus \{x_0\})) = 1$. Puisque $Y \neq \Sigma$, l'ensemble Y est un disque topologique (Définition 5.8). La Condition 2 du Lemme 5.2 montre que \bar{Y} possède une seule composante \bar{n} -connexe et donc $\bar{Y} = A$. D'après le Lemme 9.2 il est immédiat que $\{x_0\}$ est sous \bar{n} -homotope à A , de sorte que A est un disque topologique. Alors, $Y \cup A = \Sigma$ et $Y \cup A \subset X \subset \Sigma$ donc $X = \Sigma$. Comme $\chi_n(Y) = 1$ et $\chi_{\bar{n}}(\bar{Y}) = \chi_n(A) = 1$, alors $\chi_n(\Sigma) = \chi_n(Y) + \chi_{\bar{n}}(\bar{Y}) = 2$. Ceci achève la démonstration du fait que la Condition 1 du Théorème 8 est une conséquence de la Condition 2 du Théorème 8 excepté dans le cas particulier où X est la totalité de la surface Σ qui est elle-même une sphère et \bar{Y} est un disque topologique de même que Y . Finalement, on obtient le Théorème 13. \square

Conclusion à la Partie II

Le nombre d'intersection, qui a été utilisé tout d'abord pour montrer un Théorème de Jordan pour courbes fermées simples dans une surface discrète (voir [FM99b]), a été utilisé ici entre autres outils pour prouver que le groupe fondamental discret peut être utilisé pour caractériser complètement la sous-homotopie entre les parties d'une surface discrète. Ainsi, le nombre d'intersection apparaît comme un bon outil pour démontrer des théorèmes concernant la topologie des surfaces discrètes.

Maintenant, nous avons terminé la démonstration du fait que la préservation de la topologie dans les surfaces discrètes est étroitement liée à des propriétés mettant en jeu les groupes fondamentaux des objets. De plus, le cadre des surfaces discrètes apparaît comme un cadre intermédiaire pour la géométrie discrète à mi-chemin entre les espaces discrets 2D et 3D. Cependant, la caractérisation de la sous-homotopie entre les parties de \mathbb{Z}^3 reste toujours un problème ouvert et difficile. En effet, le groupe fondamental discret n'est pas suffisant dans ce cas.

Aussi, les résultats de cette partie montrent que les surfaces discrètes constituent un cadre de recherche intéressant et fructueux, intermédiaire entre le cas 2D et le cas 3D.

Il est d'autre part intéressant de remarquer que les nombres d'intersections *réelles* possibles entre des chemins fermés dessinés sur une surface fermée de \mathbb{R}^3 est lié au genre de cette surface. En effet, il est par exemple possible de dessiner deux courbes qui ne s'intersectent qu'une seule fois sur la surface d'un tore plein, alors que ceci est impossible sur une sphère. Le nombre d'intersection qui a été défini ici permet de telles considérations dans le cas des surfaces discrètes.

Troisième partie

Une contribution à l'étude de la
topologie de \mathbb{Z}^3 .

Introduction à la Partie III

Le groupe fondamental discret, tel qu'il a été introduit par Kong dans [Kon89], met en jeu des classes d'équivalence de chemins suivant une relation de déformation entre chemins fermés dans un espace discret. C'est un outil important dans le domaine de la géométrie discrète, et, en particulier, il est utilisé comme critère de préservation de la topologie des objets discrets 3D (voir [KR89],[Ber94] et [FMa]). Maintenant, une question persiste concernant l'existence d'une caractérisation "décidable" de la sous-homotopie entre objets de \mathbb{Z}^3 ; caractérisation qui ne consisterait pas en une exploration combinatoire de toutes les séquences possibles d'effacements de voxels simples telles que décrites dans la Définition 3.3. Une question aussi difficile ne peut être résolue aujourd'hui en raison du manque d'outils théoriques pour l'étude de la topologie des objets discrets de dimension trois. En particulier, nous devons trouver de nouveaux outils dédiés à l'étude des classes d'homotopie de chemins discrets dans \mathbb{Z}^3 .

Plusieurs auteurs ont déjà étudié les classes d'homotopie de chemins en 2D. Rosenfeld et Nakamura dans [RN97] ont, entre autres, établi la relation entre les trous 2D et le fait que deux courbes puissent ou ne puissent pas être déformées l'une en l'autre. Dans [Mal00], Malgouyres donne un algorithme qui permet de décider si deux chemins fermés dans un objet de \mathbb{Z}^2 sont ou ne sont pas homotopes. Dans [FM99b] et [FM99a], nous avons introduit un nouvel outil qui aide à distinguer les classes d'homotopie de chemins qui reposent sur la surface d'un objet 3D, et qui a été présenté dans la partie précédente de ce mémoire. Un des buts de cette troisième partie est de fournir une condition suffisante du fait qu'un chemin fermé dans un objet $X \subset \mathbb{Z}^3$ ne peut être déformé dans X en un autre chemin.

Plus précisément, nous introduisons ici un analogue au *nombre d'entrelacement* des courbes fermées simples dans \mathbb{R}^3 défini en topologie classique et en théorie des noeuds (voir [Rol]). Intuitivement, le nombre d'entrelacement compte le nombre de fois qu'un chemin

fermé donné est entrelacé autour d'un autre chemin fermé avec lequel a une intersection vide. Ce nombre possède les mêmes propriétés que son analogue continu. Une propriété intuitive est qu'il reste inchangé quand l'un des deux chemins considérés est déformé de façon *continue*, i.e. par une déformation homotopique au sens de la Définition 2.11, dans le complémentaire de l'autre chemin. De plus, comme étape dans la démonstration de la propriété précédente, nous prouvons aussi que le nombre d'entrelacement a un comportement cohérent vis à vis de la concaténation des chemins. En d'autres termes, le nombre d'entrelacement entre le concaténé de deux chemins et un troisième chemin n'est autre que la somme des nombres d'entrelacement de chacun des deux chemins avec le troisième. Grâce à sa propriété d'invariance, le nombre d'entrelacement peut être utilisé pratiquement et formellement pour distinguer deux classes d'équivalence de chemins, pour peu que l'on soit en mesure de trouver un chemin qui n'ait pas le même nombre d'entrelacement avec deux éléments, un dans chacune des deux classes en question.

Puisqu'il est "souhaité" que le nombre d'entrelacement discret soit invariant par déformation homotopique d'un des chemins dans le complémentaire de l'autre, ce nombre sera défini suivant la dualité classique des relations adjacence. Clairement, deux 26-chemins fermé liés l'un à l'autre peuvent être séparés par déformation homotopique d'un des chemins dans le complémentaire de l'autre, alors que cela est impossible si on considère un 6-chemin et un 26-chemin (avec les relations de déformation associées). Notons que dans cette partie, nous choisissons de ne pas considérer les analogues continus des chemins discrets afin de montrer la propriété principale du nombre d'entrelacement. D'autre part, les preuves données ici pour les théorèmes principaux se suffisent à elles mêmes et n'utilisent que les notions de base définies classiquement dans le cadre de la géométrie discrète et qui ont été rappelées dans la Partie I.

Enfin, le nombre d'entrelacement permet de donner une preuve intuitive du fait que le nombre de tunnels dans un objet $X \subset \mathbb{Z}^3$ est lié de façon stricte au nombre de tunnels dans son complémentaire (ceci fait l'objet du Chapitre 12). En effet, le nombre de tunnels mentionné ici doit être compris comme le nombre obtenu à partir du calcul de la caractéristique d'Euler. Dans ce cas, l'égalité entre les deux nombres est quasi-immédiate. Cependant, la caractéristique d'Euler ne fournit aucune information quant à la localisation des tunnels. Ce fait est illustré dans la Section 10.1. Une réponse à cet inconvénient se trouve dans l'utilisation du groupe fondamental discret. Mais il est alors difficile dans

ce cadre d'établir le lien entre les tunnels d'un objet et ceux de son complémentaire ; le nombre d'entrelacement est alors un outil précieux pour cela. Ainsi, dans le Chapitre 12, nous donnerons la preuve d'une nouvelle caractérisation concise des voxels simples en 3D utilisant le groupe fondamental discret. Cette caractérisation est dite nouvelle car elle n'implique pas le groupe fondamental du complémentaire d'un objet pour caractériser le fait qu'un voxel soit simple. En effet, il est montré dans ce chapitre que la nouvelle caractérisation est équivalente à une ancienne caractérisation, bien qu'elle ait une condition de moins.

Chapitre 10

Caractérisations existantes de la préservation de la topologie

Dans ce chapitre, nous expliquons comment plusieurs auteurs ont défini les voxels simples (i.e. spels simples dans \mathbb{Z}^3). En effet, il existe deux manières principales de caractériser la préservation de la topologie par suppression d'un voxel dans un objet de \mathbb{Z}^3 . La première utilise la caractéristique d'Euler alors que la seconde utilise le groupe fondamental discret. Ces deux méthodes sont issues de la topologie algébrique et ont été adaptées au cadre discret.

Comme introduit dans la Section 3.1, les déformations continues peuvent être simulées dans un espace discret par des séquences de déformations élémentaires locales (i.e. ajout ou suppression de spels) qui sont admises comme préservant la topologie d'un objet. Aussi, il est important d'établir rigoureusement la signification de la *préservation de la topologie* quand il est question de la suppression ou de l'ajout de spels. Pour les objets de \mathbb{Z}^3 , en plus des considérations de connexité similaires au cas 2D (voir Définition 3.6), nous devons aussi prendre soin de préserver les *tunnels* des objets. La présence d'un tunnel est la propriété qui distingue les deux objets représentés dans la Figure 5.1 de l'introduction au Chapitre 5. Maintenant, il existe deux moyens formels de définir les tunnels, comme cela a été mentionné dans la partie précédente. La caractéristique d'Euler peut être utilisée pour compter leur nombre mais s'avère insuffisante pour caractériser de manière complète la préservation de la topologie. Le second moyen, utilisant le groupe fondamental discret, se base sur le fait qu'un tunnel dans un objet de \mathbb{Z}^3 , de même que dans une surface discrète, peut être détecté par l'existence d'un chemin fermé qui ne soit pas réductible

dans l'objet considéré. Dans les deux sections suivantes nous rappelons chacune de ces deux façons de caractériser la simplicité d'un voxel.

10.1 Utilisation de la caractéristique d'Euler

10.1.1 Définition de $\chi_n(X)$

Étant donnée une partie P de \mathbb{R}^3 , on dit que P est *polyédral* si P peut être considéré comme la réunion de points, segments de droites fermés, triangles fermés et tétraèdres. Dans le contexte des *complexes cellulaires*, les points, segments, triangles et tétraèdres sont appelés des d -cellules (ou *cellules de dimension d*), où d vaut respectivement 0, 1, 2 et 3. Maintenant, la caractéristique d'Euler d'un tel objet, notée $\chi(P)$, est la somme alternée suivante (voir [KR89] ou [Mau80]) :

$$\chi(P) = \text{nb. de } 0\text{-cellules} - \text{nb. de } 1\text{-cellules} + \text{nb. de } 2\text{-cellules} - \text{nb. de } 3\text{-cellules} \quad (10.1)$$

Dans la Figure 10.1 nous avons représenté plusieurs ensembles polyédraux avec les sommes alternées correspondantes.

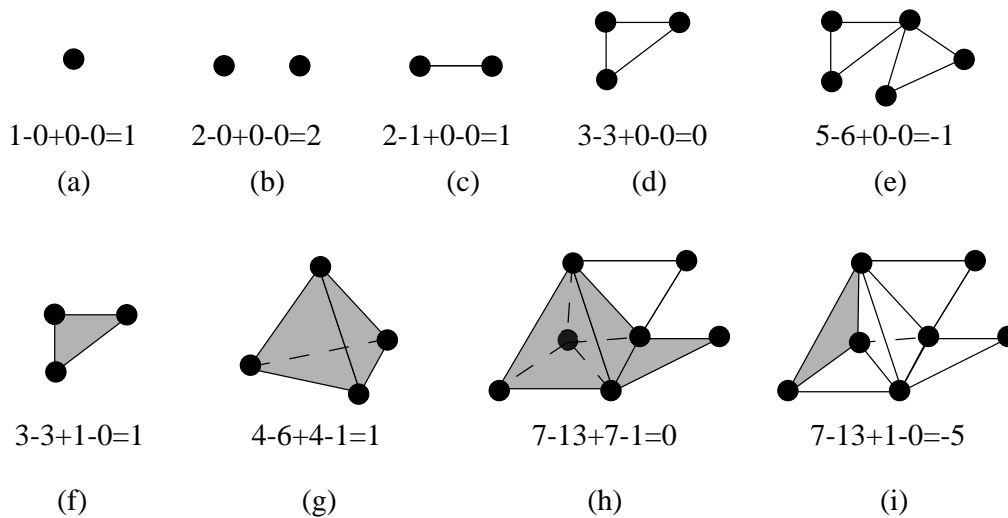


FIG. 10.1: Exemples de caractéristiques d'Euler pour divers ensembles polyédraux, et les sommes alternées correspondantes (Équation (10.1)).

Alors, on montre que la caractéristique d'Euler d'un ensemble P est aussi égale au nombre de composantes connexes de P plus le nombre de ses cavités moins le nombre de ses tunnels. Par exemple, l'ensemble représenté dans la Figure 10.1(e) est connexe et ne possède

aucune cavité, donc a deux tunnels. Maintenant, des méthodes ont été développées par quelques auteurs qui permettent de calculer la caractéristique d'Euler d'un objet discret. Cette définition d'une caractéristique d'Euler d'un objet discret utilise la notion d'*analogue continu polyhédral* d'un objet discret. Évidemment, la façon de construire un tel analogue continu est fonction du couple de relations d'adjacence considéré. Ainsi, l'analogue continu de l'objet représenté dans la Figure 10.2(a) peut être celui représenté dans la Figure 10.2(b) pour $(n, \bar{n}) = (26, 6)$ alors qu'il sera plutôt tel que celui de la Figure 10.2(c) si $(n, \bar{n}) = (6, 26)$. Il est conseillé de se reporter à [KRR92] pour plus de détails concernant la façon de construire un tel analogue continu. Si on note $C_n(X)$ l'ensemble polyhédral de \mathbb{R}^3 associé à un objet discret X , alors $\chi_n(X)$, la *caractéristique d'Euler de X* , est définie par $\chi_n(X) = \chi(C_n(X))$.

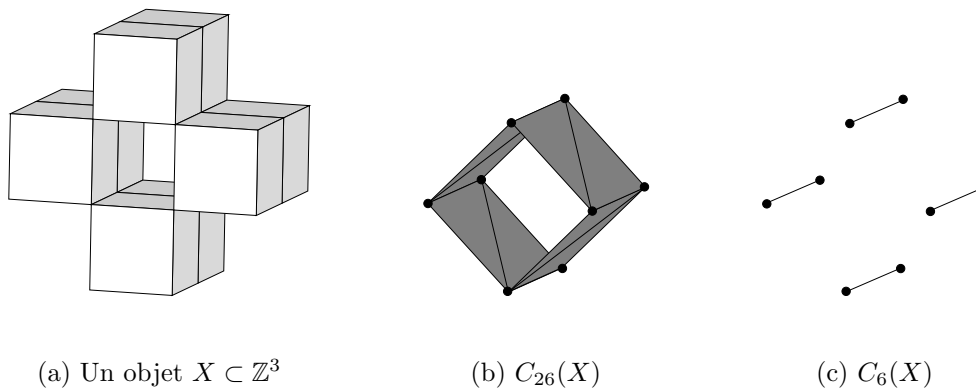


FIG. 10.2: Un objet X de \mathbb{Z}^3 et deux de ses analogues continus possibles.

Maintenant, étant donné une méthode de calcul de la caractéristique d'Euler d'un objet discret en considérant son analogue continu, et puisque le nombre de composantes connexes d'un objet et de son complémentaire sont facilement calculables, il est alors possible de donner le *nombre de tunnels* d'un objet de \mathbb{Z}^3 . Les tunnels ainsi définis peuvent être utilisés pour donner une caractérisation locale des voxels simples. Cependant, nous verrons que la caractéristique d'Euler ne permet pas de donner une caractérisation *globale* des voxels simples, même si elle est suffisante pour en donner une caractérisation locale.

10.1.2 Première caractérisation des voxels n -simples

Définition 10.1 (voxel simple : définition ambiguë) Soient $X \subset \mathbb{Z}^3$ et $x \in X$. Le voxel x est n -simple pour X si les quatre conditions suivantes sont satisfaites :

- i)* X et $X \setminus \{x\}$ ont le même nombre de composantes n -connexes.
- ii)* \bar{X} et $\bar{X} \cup \{x\}$ ont le même nombre de composantes \bar{n} -connexes.
- iii)* Aucun tunnel de X n'est supprimé ni créé par effacement de x .
- iv)* Aucun tunnel de \bar{X} n'est supprimé ou créé par effacement de x .

Cette première définition sera précisée dans la suite, et on verra qu'elle peut être caractérisée localement par des considérations de connexité dans un certain type de voisinage (section 10.2), ceci de manière analogue au cas des pixels simples en dimension deux.

Maintenant, comment caractériser le fait que des tunnels sont créés ou supprimés dans un objet ? On pourrait penser compter le nombre de ces tunnels en utilisant la caractéristique d'Euler, et vérifier ainsi les Conditions *iii)* et *iv)* de la Définition 10.1 comme on le fait pour les Conditions *i* et *ii*. Le problème d'une telle utilisation de cette caractérisation se résume dans l'observation de l'objet X de la Figure 10.3 considéré pour $(n, \bar{n}) = (6, 26)$. Dans ce cas, les deux objets représentés ont le même nombre de composantes connexes, de même que leurs complémentaires. De plus, ils ont tous les deux une caractéristique d'Euler égale à zéro. Toutefois, le voxel x qui a été supprimé de l'objet de la Figure 10.3(a) pour obtenir l'objet dont l'analogue continu est représenté dans la Figure 10.3(c), n'est évidemment pas simple. Le fait est qu'un tunnel a été créé alors qu'un autre a été supprimé par effacement du voxel x , de telle sorte que la caractéristique d'Euler reste inchangée.

En fait, le problème est que la caractéristique d'Euler ne permet pas de caractériser le fait qu'un tunnel a d'une certaine façon changé de place, puisqu'elle ne fournit aucune information sur la localisation des tunnels. Par contre, elle peut être utilisée pour montrer que des tunnels sont créés ou supprimés localement (i.e. dans le voisinage d'un voxel) mais pas de manière globale. Ainsi, la caractérisation locale qui sera rappelée dans la section suivante est correcte puisqu'elle caractérise localement les configurations pour lesquelles un voxel peut être supprimé tout en préservant les propriétés locales d'un objet. Mais

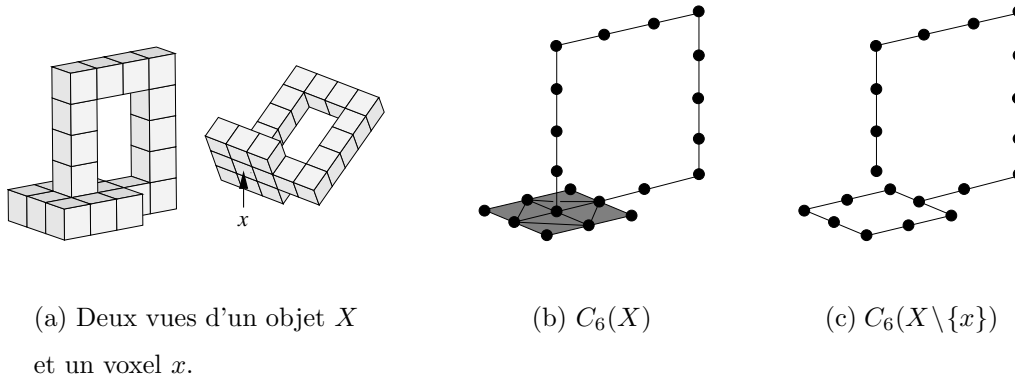


FIG. 10.3: *Un cas ou un tunnel est créé alors qu'un autre est supprimé simultanément.*

cette caractérisation n'est valide que parce que la suppression de tunnels "de grande taille" implique des déconnexions locales dans l'objet.

10.1.3 Caractérisation des voxels n -simples utilisant $\chi_n(N_{26}(x) \cap X)$

En utilisant la caractéristique d'Euler, Tsao et Fu dans [TF82] ont donné la caractérisation suivante pour les voxels simples. Dans cette définition, la caractéristique d'Euler est utilisée afin de vérifier que le nombre de tunnels ne change pas dans le voisinage du voxel considéré.

Définition 10.2 ([TF82]) *Soient X une partie de \mathbb{Z}^3 et $(n, \bar{n}) \in \{(6, 26), (26, 6)\}$. Le voxel x est un voxel n -simple si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

- i) x est n -adjacent à exactement une composante n -connexe de $N_{26}(x) \cap X$.*
- ii) x est \bar{n} -adjacent à exactement une composante \bar{n} -connexe de $N_{26}(x) \cap \bar{X}$.*
- iii) $\chi_n(X \cap N_{26}(x)) = \chi_n(\{x\} \cup (X \cap N_{26}(x)))$.*

Suivant cette caractérisation, le voxel dont le 26-voisinage est représenté dans la Figure 10.4 n'est pas 6-simple puisque la Condition *iii*) de la Définition 10.2 n'est pas vérifiée. En effet, dans ce cas, $C_6(\{x\} \cup (X \cap N_{26}(x)))$ possède un tunnel mais pas $C_6(X \cap N_{26}(x))$. Toutefois, dans la cas de la Figure 10.5, le voxel x n'est pas 6-simple car il est 6-adjacent à deux composantes 6-connexes de l'objet dans son 26-voisinage.

Néanmoins, dans ce cas, ni la Condition *i*), ni la Condition *iii*) de la Définition 10.2 n'est vérifiée. Dans cet exemple, on voit que la suppression d'un tunnel *de grande taille* est caractérisée localement par une déconnexion dans le voisinage du voxel. En effet, dans la Figure 10.3(a), le fait qu'un tunnel est supprimé par effacement du voxel x est détecté car le voxel x est adjacent à deux composantes 6-connexes de X dans son 26-voisinage. Suivant cette idée, G. Bertrand a trouvé des voisinages réduits pour lesquels la suppression de *petits tunnels* est elle aussi détectée simplement par une déconnexion locale : ces voisinages sont les voisinages géodésiques.

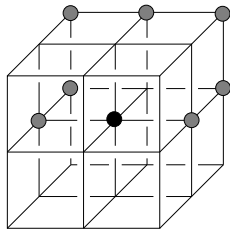


FIG. 10.4: *Un tunnel local pour $n = 6$ ou $n = 6+$.*

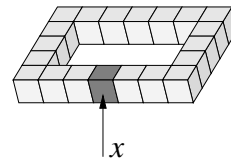


FIG. 10.5: *Un tunnel non local.*

10.2 Caractérisation à l'aide des voisinages géodésiques

Dans la sous-section précédente, on a vu que la Condition *iii*) de la Définition 10.2 était utile pour caractériser la présence de tunnels de petite taille dans le voisinage d'un voxel. Toutefois, pour les tunnels plus larges, il semble que des considérations de connexité soient suffisantes. En fait, il est possible de considérer des ensembles plus réduits que le 26-voisinage quand on teste la n -simplicité d'un voxel. Alors, les considérations de connexité à l'intérieur de tels ensembles sont suffisantes pour détecter à la fois l'éventuelle suppression de petits tunnels et la suppression de tunnels de plus grandes tailles, dans l'objet comme dans son complémentaire. Bien sûr, les modifications globales de la connexité d'un objet sont, elles aussi, caractérisées à l'aide de considérations impliquant ces voisinages réduits. Ainsi, les *voisinages géodésiques* ont été introduits par G. Bertrand dans [Ber94] et on rappelle ici leur définition. Dans la suite de cette section, X est une partie de \mathbb{Z}^3 et x est un voxel de X .

Tout d'abord, pour $n \in \{6, 6+, 18, 26\}$ on définit récursivement les ensembles $N_n^k(x, X)$

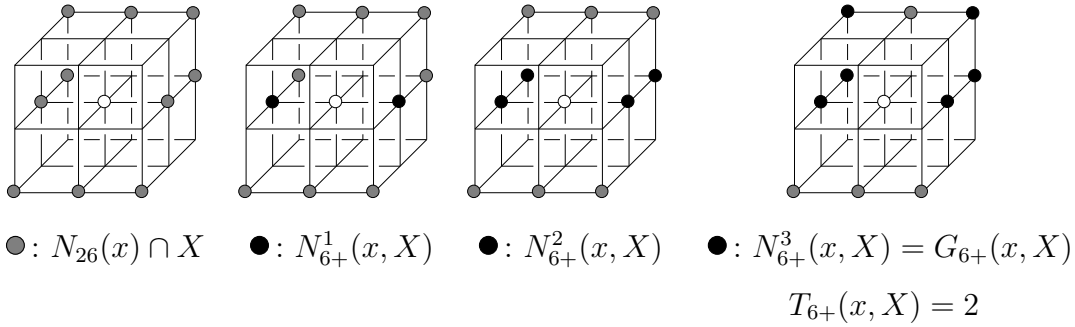
pour $k \in \{1, 2, 3\}$ de la manière suivante :

- $N_n^1(x, X) = N_n(x) \cap X$, et
- $N_n^k(x, X) = N_n^{k-1}(x, X) \cup \{y \in N_{26}(x) \mid \exists z \in N_n^{k-1}(x, X), y \in N_n(z)\}$.

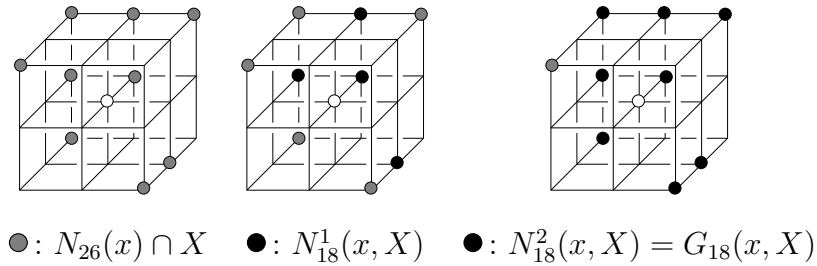
Définition 10.3 (voisinage géodésique [Ber94]) *Le n -voisinage géodésique de x dans X noté $G_n(x, X)$ pour $n \in \{6, 6+, 18, 26\}$ est défini de la manière suivante :*

- $G_6(x, X) = N_6^2(x, X)$ - $G_{6+}(x, X) = N_6^3(x, X)$
- $G_{18}(x, X) = N_{18}^2(x, X)$ - $G_{26}(x, X) = N_{26}(x) \cap X$

Le n -voisinage géodésique $G_n(x, X)$ peut être vu comme l'ensemble obtenu après un nombre fini de dilatations morphologiques du voxel x dans $N_{26}(x) \cap X$ en utilisant la boule élémentaire de n -adjacence comme élément structurant, ensemble dont on retire le voxel x . Quelques exemples de tels ensembles sont donnés dans la Figure 10.6.



(a) Construction de $G_{6+}(x, X)$



(b) Construction de $G_{18}(x, X)$

FIG. 10.6: Exemples de voisinages géodésiques

Définition 10.4 (nombres topologiques) *On définit le nombre topologique associé à x et X , et on note $T_n(x, X)$, le nombre de composantes n -connexes de $G_n(x, X)$.*

Maintenant, G. Bertrand a donné et démontré la caractérisation locale suivante pour des voxels simples, dans [Ber94] pour $(n, \bar{n}) \in \{(6+, 18), (18, 6+)\}$ et avec G. Malandain dans [BM94] pour $(n, \bar{n}) \in \{(6, 26), (26, 6)\}$.

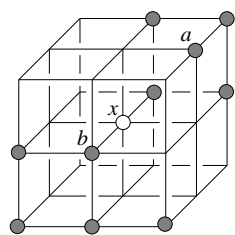
Proposition 10.1 *Le voxel $x \in X \subset \mathbb{Z}^3$ est n -simple pour X si et seulement si on a $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, X) = 1$.*

Cette proposition fournit une caractérisation locale efficace des voxels simples dans \mathbb{Z}^3 qui ne nécessite pas de calcul de la caractéristique d'Euler du voisinage d'un voxel x , contrairement à la Définition 10.2.

Nous avons représenté dans la Figure 10.7 plusieurs configurations locales de voxels qui sont pour certains n -simples et pour d'autres non n -simples pour $n \in \{6, 6+, 18, 26\}$. Par exemple, le voxel x de la Figure 10.7(a) n'est pas 18-simple car la suppression de ce voxel aboutirait, ou bien à la création d'une nouvelle composante 18-connecte, ou bien à la suppression d'un (*grand*) tunnel de l'objet X . Par contre, ce même voxel est 26-simple car les deux voxels a et b de cette figure sont 26-adjacents. Dans le cas de la Figure 10.7(b), le voxel x n'est pas 26-simple car l'effacement de x provoquerait soit la création d'une nouvelle composante 26-connecte, ou bien la suppression d'un 26-tunnel de X ; alors que ce voxel est 18-simple car le voxel p n'est pas 18-adjacent à x de sorte que cette déconnexion ou suppression de tunnel ne peut se produire si $n = 18$.

La cas de la Figure 10.7(d) nécessite une description plus détaillée. En effet, dans ce cas, le voxel x n'est pas 26-simple car $T_6(x, \bar{X}) = 2$ alors qu'il est 18-simple car $T_{18}(x, X) = T_{6+}(x, \bar{X}) = 1$. En d'autres termes, ce voxel n'est pas 26-simple car sa suppression provoquerait soit la reconnexion de deux composantes 6-connexes de \bar{X} , soit la création d'un 6-tunnel (de grande taille) dans \bar{X} . Dans le Chapitre 12, nous montrerons que dans ce cas, soit un 26-tunnel de X est créé ou bien deux composantes 6-connexes de \bar{X} sont reconnectées par effacement du voxel x .

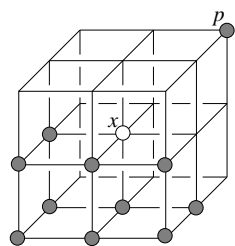
Dans le cas de la Figure 10.7(e) nous avons illustré l'utilité des voisinages géodésiques pour éviter le recours à la caractéristique d'Euler pour la détection des tunnels de tailles réduites. En effet, l'ensemble des voxels gris de cette figure, avec x , constitue un tunnel de X pour $(n, \bar{n}) = (6, 26)$ (les deux voxels de \bar{X} représentés en pointillés sont 26-adjacents) et on a $T_6(x, X) = 2$. Toutefois, pour $(n, \bar{n}) = (6+, 18)$ on remarque que ces mêmes voxels ne constituent pas un tunnel (les points de \bar{X} représentés en pointillés ne sont pas 18-adjacents) et on a $T_{6+}(x, X) = 1$.



● : $N_{26}(x) \cap X$

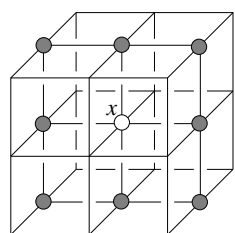
x n'est pas 18-simple car $T_{18}(x, X) = 2$
 x est 26-simple car $T_{26}(x, X) = T_6(x, \bar{X}) = 1$

(a)



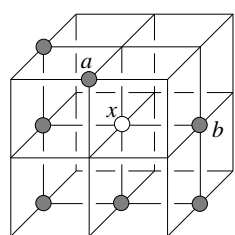
x est 18-simple car $T_{18}(x, X) = T_{6+}(x, \bar{X}) = 1$
 x n'est pas 26-simple car $T_{26}(x, X) = 2$

(b)



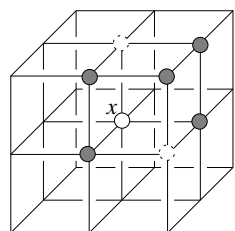
x n'est ni 26-simple ni 18-simple
 car $T_{26}(x, \bar{X}) = T_{18}(x, \bar{X}) = 2$

(c)



x est 18-simple car $T_{18}(x, X) = T_{6+}(x, \bar{X}) = 1$
 x n'est pas 26-simple car $T_6(x, \bar{X}) = 2$

(d)



x n'est pas 6-simple car $T_6(x, X) = 2$
 x est (6+)-simple car $T_{6+}(x, X) = T_{18}(x, \bar{X}) = 1$

(e)

FIG. 10.7: Voxels simples et non simples dans \mathbb{Z}^3 .

Maintenant, on peut trouver deux limites à l'utilisation de la caractéristique d'Euler pour caractériser la préservation de la topologie dans \mathbb{Z}^3 . Tout d'abord, il est très difficile de formaliser à l'aide de cette caractéristique le fait que les tunnels des Figures 10.3(b) et 10.3(c) sont *différents*. Et cette limite rend la caractérisation des voxels simples ambiguë. D'autre part, une autre définition des tunnels a été utilisée par Morgenthaler dans [Mor81] et aussi par Bertrand dans [Ber94, BM94]. Cette définition a été introduite comme solution à l'inconvénient de la caractéristique d'Euler évoqué précédemment, et utilise le fait qu'un tunnel est détecté par la présence d'un chemin fermé dans un objet qui n'est pas réductible dans cet objet, suivant l'idée de la définition d'une *partie simplement connexe* d'un espace topologique rappelée dans la Partie I. Cette idée, qui a motivé l'introduction par T.Y. Kong du groupe fondamental discret ([Kon89]), a alors été utilisée pour formaliser dans les preuves les phrases "*aucun tunnel n'est créé ni supprimé dans X* " et "*aucun tunnel n'est créé ni supprimé dans \bar{X}* " de la Définition 10.1. Cependant, certains arguments deviennent invalides dans ce nouveau contexte quand ils utilisent en même temps les deux définitions possibles d'un tunnel. Un exemple d'un tel argument se résume de la manière suivante: Morgenthaler a établi dans [Mor81] que $NH(X) = NH(\bar{X})$ où $NH(X)$ est le nombre de tunnels dans X (*Number of Holes* d'après la terminologie utilisée dans [Mor81]). Cette propriété est déduite de la définition de la caractéristique d'Euler. Maintenant, si un tunnel est créé dans le complémentaire de X par effacement du voxel x , i.e. il existe un chemin fermé π dans $\bar{X} \cup \{x\}$ qui est réductible dans $\bar{X} \cup \{x\}$ mais aucun chemin fermé dans \bar{X} n'est homotope au chemin π ; alors, comme $NH(\bar{X}) = NH(X)$, on déduit qu'un tunnel a été créé dans X .

En pratique, il n'est pas difficile de prouver qu'un tunnel est créé dans le complémentaire d'un objet par effacement d'un voxel (voir Section 12.1), alors qu'il est plus difficile de montrer la même chose pour l'objet sans utiliser l'argument précédent. Mais le fait est que ce dernier argument utilise deux approches différentes de la définition d'un tunnel qui font appel à deux invariants topologiques définis de manières distinctes: la caractéristique d'Euler et une version "informelle" du groupe fondamental discret. En effet, le lien entre ces deux invariants n'a pas été clairement démontré dans le cas discret, et ceci peut être jugé insatisfaisant. Maintenant, une formalisation convenable de la propriété de simplicité en 3D a été proposée par Kong en utilisant le groupe fondamental discret, à partir de l'idée donnée par Morgenthaler dans [Mor81]. Cette formalisation est présentée dans la sous-section suivante.

10.3 Utilisation du groupe fondamental discret

Le groupe fondamental discret, introduit par Kong dans [Kon89] et dont la définition est rappelée dans la Section 2.3, permet de formaliser la caractérisation des voxels simples de la manière suivante, qui n'est pas ambiguë contrairement à la définition Définition 10.1 :

Définition 10.5 *Soient $X \subset \mathbb{Z}^3$ et $x \in X$. Le voxel x est dit n -simple pour X ($n \in \{6, 6+, 18, 26\}$) si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :*

- i) X et $X \setminus \{x\}$ ont le même nombre de composantes n -connexes.*
- ii) \bar{X} et $\bar{X} \cup \{x\}$ ont le même nombre de composantes \bar{n} -connexes.*
- iii) Pour chaque voxel B de $X \setminus \{x\}$, le morphisme de groupes $i_* : \Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B) \longrightarrow \Pi_1^n(X, B)$ induit par l'application d'inclusion $i : X \setminus \{x\} \longrightarrow X$ est un isomorphisme.*
- iv) Pour chaque voxel B' dans \bar{X} , le morphisme de groupes $i'_* : \Pi_1^{\bar{n}}(\bar{X}, B') \longrightarrow \Pi_1^{\bar{n}}(\bar{X} \cup \{x\}, B')$ induit par l'application d'inclusion $i' : \bar{X} \longrightarrow \bar{X} \cup \{x\}$ est un isomorphisme.*

La définition du morphisme de groupes induit par une application d'inclusion peut être trouvé dans la Section 2.3.2.

Cette définition semble convenable puisqu'elle permet non seulement de formaliser le fait que X et $X \setminus \{x\}$ [resp. \bar{X} et $\bar{X} \cup \{x\}$] ont le même nombre de tunnels, mais surtout le fait que ces tunnels sont les mêmes. Comme illustration de cette propriété, on peut revenir à l'exemple donné page 165 (Figure 10.3).

Nous avons représenté dans la Figure 10.8(a) un objet X (points noirs) et un chemin fermé c d'un voxel B à B dans X . Alors, la classe d'homotopie $[c]_{\Pi_1^6(X, B)}$ est clairement l'élément neutre de $(\Pi_1^6(X, B), *)$ puisque c est 6-homotope au chemin (B, B) dans X . Toutefois, le même chemin c n'est de façon évidente pas 6-réductible dans $X \setminus \{x\}$ (Figure 10.8(b)). On en déduit que le morphisme de groupes i_* de $\Pi_1^6(X \setminus \{x\}, B)$ dans $\Pi_1^6(X, B)$ induit par l'inclusion de $X \setminus \{x\}$ dans X n'est pas injectif. En effet, $i_*([c]_{\Pi_1^6(X \setminus \{x\}, B)}) = i_*([(B, B)]_{\Pi_1^6(X \setminus \{x\}, B)})$ alors que $[c]_{\Pi_1^6(X \setminus \{x\}, B)} \neq [(B, B)]_{\Pi_1^6(X \setminus \{x\}, B)}$.

D'autre part, la classe d'équivalence du chemin c' dans l'objet représenté dans la Figure 10.9(a), qui n'est évidemment pas l'élément neutre de $(\Pi_1^6(X, B), *)$, ne peut être atteinte par le morphisme i_* car aucun chemin fermé dans $X \setminus \{x\}$ est 6-homotope au chemin c' dans X . En d'autres termes, le morphisme i_* n'est pas surjectif.

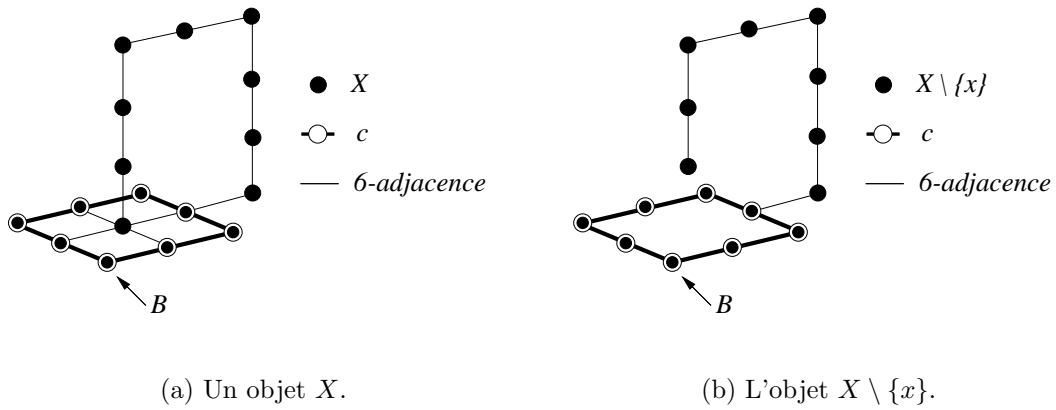


FIG. 10.8: Le morphisme de groupes induit par l'inclusion de $X \setminus \{x\}$ dans X n'est pas injectif.

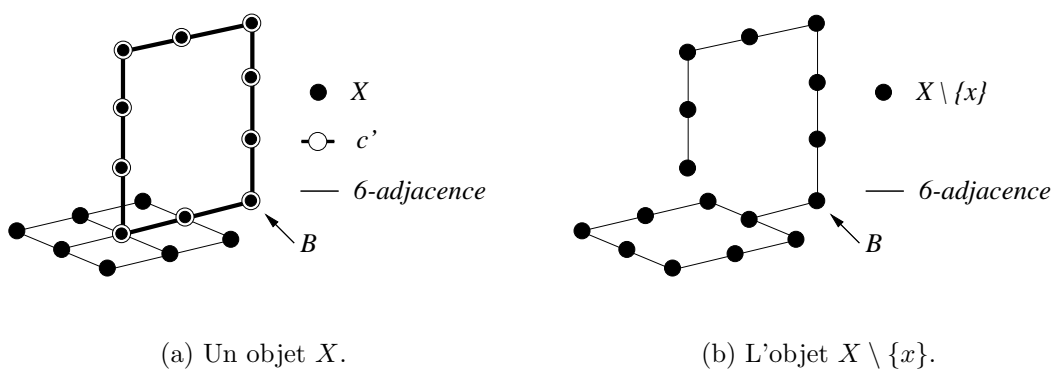


FIG. 10.9: Le morphisme induit par l'inclusion de $X \setminus \{x\}$ dans X n'est pas surjectif.

Finalement, on voit que la Condition *iii*) de la Définition 10.5 paraît suffisante pour détecter que, de façon simultanée, un tunnel est créé alors qu'un autre est supprimé.

10.4 Autres approches pour une caractérisation locale

Nous devons mentionner ici des travaux dont le but est de trouver des caractérisations locales des voxels simples qui soient calculables de manière efficace. Par exemple, Saha et al. ont donné dans [SC94] une caractérisation locale des voxels simples pour $(n, \bar{n}) = (26, 6)$ (équivalente à celle se trouvant dans [BM94]) et qui abouti à la définition d'un algorithme efficace de détection de ce type de point.

D'autre part, on peut encore utiliser une approche différente pour caractériser les points simples 3D. Ainsi, dans [Kon95], T.Y. Kong donne une caractérisation locale des points simples 3D, reposant sur la notion *d'ensemble de recollement*, qui possède la bonne propriété d'être plus "visuelle" que les autres caractérisations rappelées dans ce chapitre.

Chapitre 11

Le nombre d'entrelacement

Dans le chapitre précédent, nous avons rappelé la définition des voxels simples dans \mathbb{Z}^3 et donné quelques définitions formelles de cette propriété. Dans cette partie, nous sommes intéressés par la définition d'une caractérisation globale des voxels simples, basée sur l'utilisation du groupe fondamental, mais plus concise que la Définition 10.5. En effet, notre but est ici de montrer que la Condition *iv)* de la Définition 10.5 est une conséquence des Conditions *i)*, *ii)* et *iii)* de cette définition. Cette idée sera illustrée dans la section qui suit et constitue une des motivations de la définition du nombre d'entrelacement discret.

11.1 Motivation

La Condition *iii)* de la Définition 10.5 stipule qu'un voxel ne peut être simple, entre autres, que si tous les tunnels d'un objet existent toujours, *et aux mêmes endroits* dans l'objet privé du voxel considéré. D'autre part, cette condition précise aussi qu'aucun nouveau tunnel ne doit être créé dans l'objet après suppression du voxel en question. Considérons alors la configuration locale représentée dans la Figure 11.1(a) où le voxel central x n'est pas n -simple pour $n \in \{6, 6+, 18, 26\}$. En effet, cette configuration peut faire partie du cube creux X' représenté dans la Figure 11.1(b) de sorte que deux composantes connexes du complémentaire de cet objet soient réunies après effacement du voxel x (Condition *ii)* de la Définition 10.5). Néanmoins, cette configuration locale peut aussi être une partie de l'objet X'' de la Figure 11.1(c) de sorte qu'un tunnel apparaît dans $\overline{X''} \cup \{x\}$ comme illustré par la Figure 11.1(d). En effet, le chemin fermé c de la Figure 11.1(d) n'est pas réductible dans $\overline{X''} \cup \{x\}$ donc $\overline{X''} \cup \{x\}$ possède un tunnel, alors que $\overline{X''}$ n'en a pas. Nous

verrons dans la Section 12.1 comment la présence de ce tunnel dans $\overline{X''} \cup \{x\}$ peut être démontrée dans ce cas. Maintenant, nous remarquons aussi dans la Figure 11.1(d) que le chemin noir π dans $X'' \setminus \{x\}$ n'est lui aussi pas réductible dans $X'' \setminus \{x\}$. Cependant, ce fait intuitif n'est pas simple à démontrer en utilisant les seuls outils à notre disposition dans le cadre discret. Maintenant, une façon de prouver le fait que π n'est alors pas réductible dans $X'' \setminus \{x\}$ est de constater que les deux chemins π et c de la Figure 11.1(d) sont *liés* (ou *entrelacés*) et ne peuvent pas être déliés si la seule opération possible est une déformation homotopique de l'un des chemins π ou c , respectivement dans $X \setminus \{x\}$ et dans $\overline{X} \cup \{x\}$, et donc dans le complémentaire de l'autre.

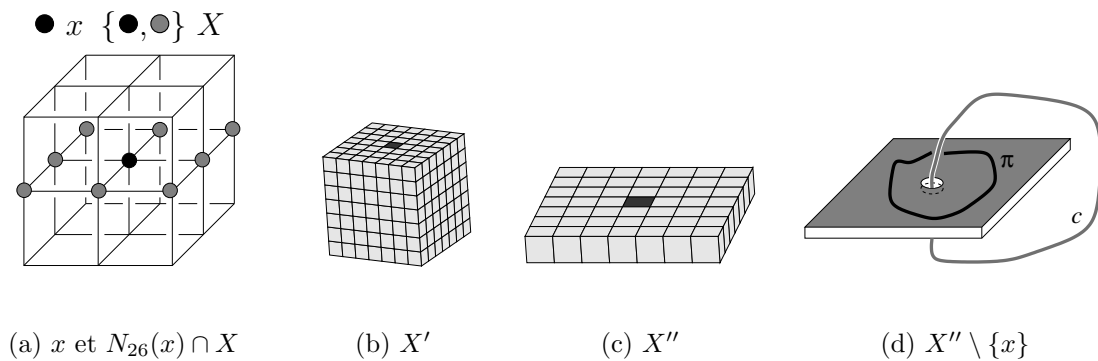


FIG. 11.1: Un tunnel est créé dans \overline{X} si et seulement si un tunnel est créé dans X (voir la preuve du Théorème 16).

De façon similaire, observons la configuration de la Figure 11.2(a). Si une telle configuration apparaît dans l'objet Y' de la Figure 11.2(b), alors le voxel y n'est pas simple car une composante connexe de Y' est séparée en deux par suppression du voxel y . Maintenant, la même configuration peut apparaître dans l'objet Y'' de la Figure 11.2(c), alors on peut prouver aisément (et de façon similaire au cas du chemin c de la Figure 11.1(c)) que le chemin fermé π' n'est pas réductible dans Y'' de sorte que Y'' possède un tunnel alors qu'il est clair que $Y'' \setminus \{y\}$ n'en a pas. Une nouvelle fois, en utilisant la propriété d'entrelacement mentionnée précédemment, on est aussi capable de montrer que le chemin fermé c' de la Figure 11.2(d) n'est lui non plus pas réductible dans $\overline{Y''}$; ainsi le tunnel de $\overline{Y''}$ aura lui aussi disparu après suppression du voxel y .

Tout ceci donne une idée du fait que la création [resp. la suppression] d'un tunnel dans un objet par effacement d'un voxel est étroitement liée à la création [resp. la suppression] d'un tunnel dans son complémentaire. En fait, une telle propriété se démontre de façon

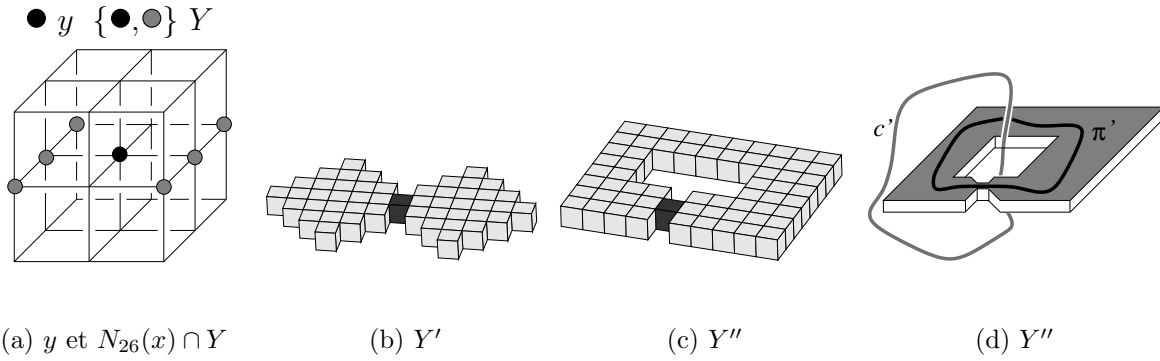


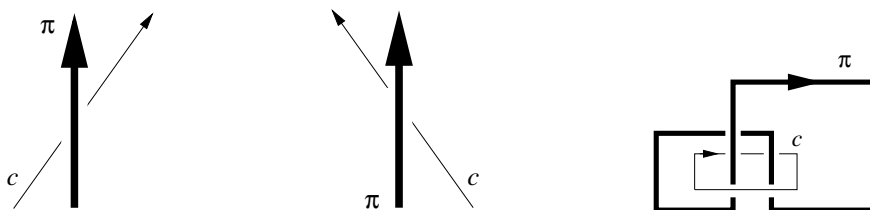
FIG. 11.2: Un tunnel est supprimé dans X si et seulement si un tunnel est supprimé dans \bar{X} .

directe quand on considère uniquement le nombre de tunnels calculé à l'aide de la caractéristique d'Euler. En effet, suivant [Mor81], si on note $NCC(X)$, $NC(X)$ et $NT(X)$ respectivement le nombre de composantes n -connexes, cavités et tunnels d'une partie X de \mathbb{Z}^3 , alors il est immédiat que $NCC(X) = NC(\bar{X})$ et $NC(X) = 1 + NCC(\bar{X})$. Mais la caractéristique d'Euler d'un objet discret, suivant l'équation 10.1, peut aussi être calculée en comptant le nombre d'occurrences d'un nombre fini de *motifs* élémentaires dans l'objet comme proposé dans [Mor81] et [Mor80]. Ensuite, suivant cette méthode de calcul, [Mor80] contient une preuve du fait que $\chi_{\bar{n}}(\bar{X}) = 1 + \chi_n(X)$. Finalement, en utilisant cette dernière égalité, il est immédiat que le nombre de tunnels dans X est égal au nombre de tunnels dans \bar{X} . Cependant, comme expliqué précédemment, le nombre de tunnels est un invariant topologique moins précis que le groupe fondamental discret. Néanmoins, le nombre d'entrelacement nous permettra d'établir une telle relation entre les tunnels de l'objet et les tunnels de son complémentaire en utilisant le seul invariant topologique considéré par la Définition 10.5 : le groupe fondamental discret.

11.2 Le nombre d'entrelacement discret

Dans cette section, nous définissons le nombre d'entrelacement entre deux chemins fermés de voxels qui ne s'intersectent pas. Ce nombre n'est autre que l'analogie du nombre d'entrelacement tel qu'il est défini en théorie des noeuds, mais pour des courbes discrètes. Il compte le nombre de fois qu'un chemin fermé donné est entrelacé avec un autre chemin fermé. Comme notre but est d'utiliser cet outil pour prouver des théorèmes portant sur la topologie d'un objet discret, nous sommes intéressés par le nombre d'en-

treilacement entre un n -chemin fermé et un \bar{n} -chemin fermé pour un couple (n, \bar{n}) de $\{(6+, 18), (6, 26), (18, 6+), (26, 6)\}$. Nous donnons trois exemples de telles paires de chemins fermés et leurs nombres d'entrelacement associés dans la Figure 11.2. Classiquement, le nombre d'entrelacement est calculé en comptant algébriquement le nombre d'occurrences de croisements, tels que ceux représentés dans la Figure 11.3, dans une projection régulière à deux dimensions des chemins (voir [Rol]). Dans notre cas, nous définissons le nombre d'entrelacement de telle sorte qu'il puisse être calculé par des opérations en entier portant sur les coordonnées des voxels constituant les chemins considérés.

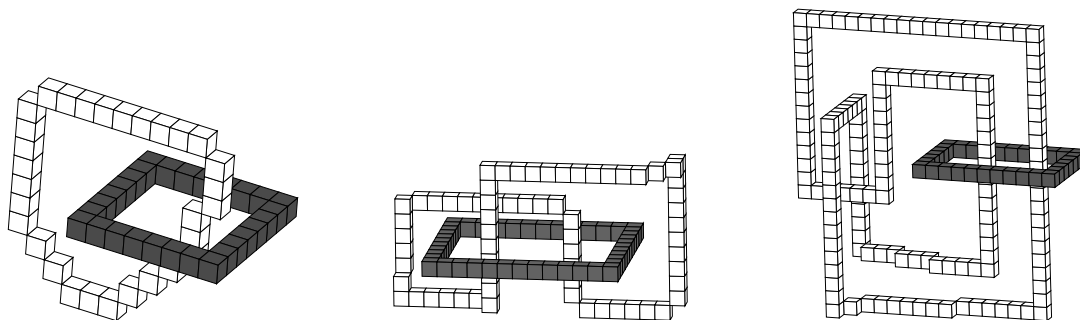


(a) Compter -1 pour chaque occurrence de ce type de croisement dans la projection.

(b) Compter +1 pour chaque croisement de ce type.

(c) Le nombre d'entrelacement associé à cette projection est -2.

FIG. 11.3: La façon dont est calculé le nombre d'entrelacement "classique" à partir d'une projection régulière des deux chemins c et π .



(a) Un 18-chemin fermé et un 6-chemin fermé dont le nombre d'entrelacement est ± 1 .

(b) Un 18-chemin fermé et un 6-chemin fermé dont le nombre d'entrelacement est ± 2 .

(c) Le lien de Whitehead, dont le nombre d'entrelacement est nul.

FIG. 11.4: Trois types de liens.

Par exemple, le nombre d'entrelacement peut être calculé immédiatement pour les deux

chemins représentés dans la Figure 11.5. Nous donnons le principe de base de ce calcul dans ce cas. Tout d’abord, nous choisissons de calculer le nombre d’entrelacement en utilisant une “pseudo-projection” 2D des deux chemins considérés sur le plan qui contient les deux premiers axes de coordonnées. Nous appelons cette projection une “pseudo-projection” 2D car la donnée de la troisième coordonnée des voxels n’est bien sûr pas oubliée. Alors, on remarque que le seul voxel du chemin gris qui a la même projection que des voxels blancs (exactement quatre d’entre eux) est le voxel x_i . Ensuite, on ne retient que les voxels du chemin blanc qui ont une troisième coordonnée supérieure à celle de x_i et la même projection que x_i (comme les voxels a et b dans la Figure 11.5). Pour chacun de ces voxels, une contribution dépendant de la position des voxels suivants et précédents du chemin blanc qui n’ont pas la même projection que x_i est calculée. Dans cet exemple, les deux contributions associées aux voxels a et b seront de signes opposés. La somme de toutes ces contributions est le nombre d’entrelacement des deux chemins, zéro dans ce cas. En fait, en utilisant des demi-contributions comme pour le nombre d’intersection introduit dans la partie précédente, nous comptons le nombre d’intersection transversales orientées entre les projections des deux chemins ; en ne considérant que les intersections pour lesquelles le premier chemin passe “devant” le second (considérant le troisième axe de coordonnée). Ainsi, dans la Figure 11.7(c) et la Figure 11.7(d) nous avons marqué en gris foncé les deux ensembles de voxels consécutifs du premier 6–chemin de la Figure 11.7(a) qui ont une projection identique avec des voxels (en gris clair) du 18–chemin. Alors, en prenant en compte la position des voxels marqués d’une croix, on peut déterminer si une telle *intersection projetée* est transversale ou non, ainsi que son signe (un exemple d’intersection tangente est donné dans la Figure 11.8). Finalement, en comptant algébriquement les trois projections transversales présentes dans la Figure 11.7, on obtient un nombre d’entrelacement de ± 1 en fonction des orientations des paramétrisations des chemins.

Notation 11.1 Nous noterons \mathcal{P} l’application suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \quad \mathbb{Z}^3 &\longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (x^1, x^2, x^3) &\longmapsto (x^1, x^2) \end{aligned}$$

Nous devons maintenant définir le *prédécesseur* [resp. le *successeur*] d’un voxel x_i d’un n –chemin c selon un projection \mathcal{P} qui est le premier voxel qui précède [resp. suit] x_i dans la paramétrisation de c et dont la projection par \mathcal{P} est différente de celle de x_i . Remarquons que les deux nombres $Pred$ et $Succ$ définis ici sont des indices de la paramétrisation des

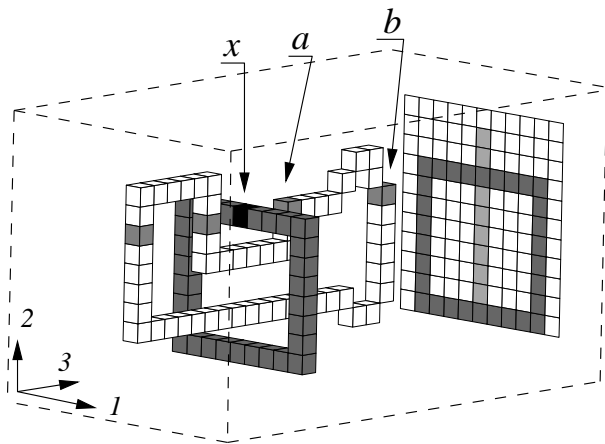


FIG. 11.5: Deux chemins fermés en 3D dont le nombre d'entrelacement est égal à zéro.

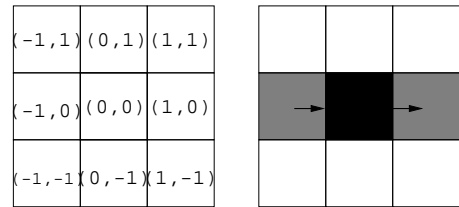


FIG. 11.6: Un mouvement projectif.

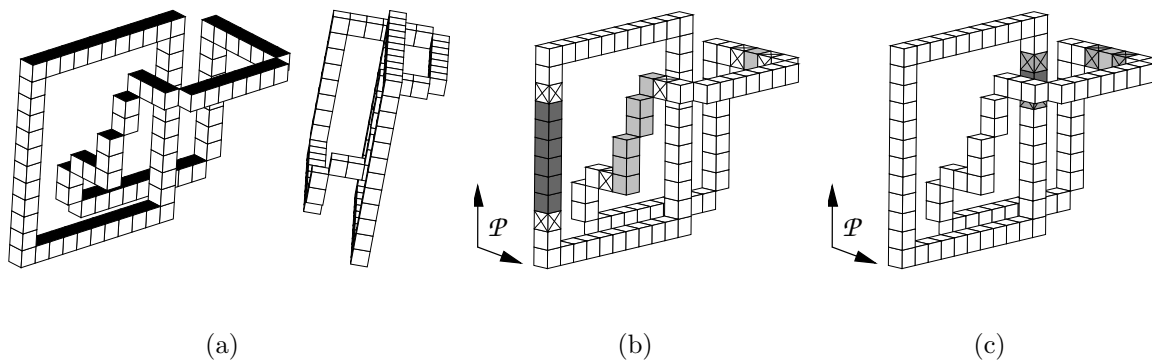


FIG. 11.7: Exemples d'intersections projectives transversales entre deux chemins fermés dans \mathbb{Z}^3 .

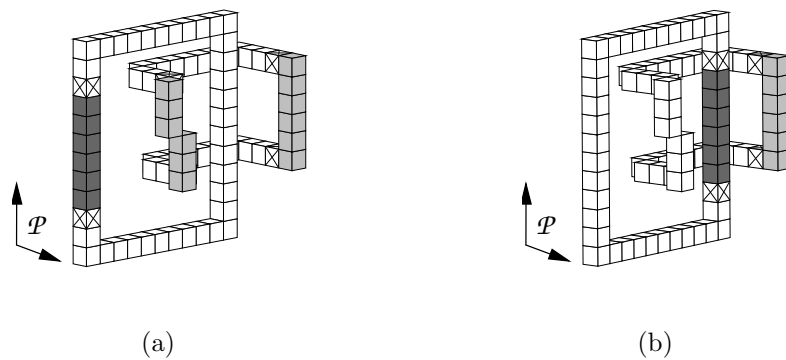


FIG. 11.8: Exemples d'intersections projectives tangentes entre deux chemins fermés dans \mathbb{Z}^3 .

chemins. Finalement, la donnée de ces indices nous permet de définir une orientation pour les intersections dans la projection des deux chemins fermés.

Définition 11.1 (*Pred et Succ*) Soient $c = (x_k)_{k=0,\dots,q}$ un n -chemin fermé et x_i un voxel de c pour $i \in \{0, \dots, q\}$. Alors, $Succ_c(i)$ est le plus petit entier l supérieur à i tel que $\mathcal{P}(x_i) \neq \mathcal{P}(x_l)$; si un tel entier l n'existe pas alors $Succ_c(i)$ est le plus petit entier $l < i$ tel que $\mathcal{P}(x_i) \neq \mathcal{P}(x_l)$. Si un tel l n'existe pas non plus, alors, clairement $\mathcal{P}(x_i) = \mathcal{P}(x_l)$ pour tout $l \in \{0, \dots, q\}$ et on définit $Succ_c(i) = i$.

De façon similaire, $Pred_c(i)$ est l'indice l précédant i dans la paramétrisation cyclique de c tel que $\mathcal{P}(x_i) \neq \mathcal{P}(x_l)$, ou bien $Pred_c(i) = i$ si $\mathcal{P}(x_i) = \mathcal{P}(x_l)$ pour tout $l \in \{0, \dots, q\}$.

Toujours dans le but de compter les intersections transversales dans la projection des deux chemins, nous définissons la notion suivante de mouvement projectif.

Définition 11.2 (mouvement projectif) Soit $c = (x_k)_{k=0,\dots,q}$ un n -chemin fermé et soit $i \in \{0, \dots, q\}$. De plus, soit V le 8-voisinage de $(0, 0)$ dans le plan discret (i.e. $V = (\{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}) \setminus \{(0, 0)\}$). On définit le mouvement projectif $P_c(i) \in V \times V$ associé à l'indice i de c par :

$$P_c(i) = ((x_{Pred_\pi(i)}^1 - x_i^1, x_{Pred_\pi(i)}^2 - x_i^2), (x_{Succ_\pi(i)}^1 - x_i^1, x_{Succ_\pi(i)}^2 - x_i^2)) = (P_c(i)^{Pred}, P_c(i)^{Succ}).$$

Le mouvement projectif représente la position des voxels précédant et suivant x_i dans c et dont la projection ne coïncide pas avec celle de x_i . Ces positions sont normalisées dans une grille 3×3 centrée sur le point de coordonnées $(0, 0)$ qui est associé à la projection de x_i . Ainsi, le mouvement projectif du voxel x_i de la Figure 11.5 est $((-1, 0), (1, 0))$ et peut être représenté comme dans la Figure 11.6. Notons que ce mouvement projectif ne sera utilisé pratiquement que pour les seuls indices $i \in \{0, \dots, q-1\}$ tels que $Pred_c(i) = i-1$. En effet, nous devons compter une seule et unique contribution au nombre d'entrelacement pour toute suite de voxels d'un des chemins qui ont la même projection, et nous choisissons de façon arbitraire de ne retenir que le premier voxel de chacune de ces suites.

Définition 11.3 (gauche et droite) Soit $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ un n -chemin et V l'ensemble introduit dans la Définition 11.2. On peut paramétrer l'ensemble des points de V en utilisant le sens trigonométrique autour du point $(0, 0)$. Alors, étant donné un mouvement projectif $\mathcal{P} = P_c(i)$, on définit les deux ensembles $Left(\mathcal{P})$ et $Right(\mathcal{P})$ de la manière suivante :

$Right(\mathcal{P})$ est l'ensemble des points rencontrés quand on parcourt V de \mathcal{P}^{Pred} vers \mathcal{P}^{Succ} en suivant la paramétrisation de V , sans les points \mathcal{P}^{Succ} et \mathcal{P}^{Pred} .

$Left(\mathcal{P})$ est l'ensemble des points rencontrés quand on parcourt l'ensemble V de \mathcal{P}^{Succ} à \mathcal{P}^{Pred} en suivant la paramétrisation de V , sans \mathcal{P}^{Succ} et \mathcal{P}^{Pred} .

Exemple : Si $\mathcal{P} = ((-1, 0), (1, -1))$ alors $Right(\mathcal{P}) = \{(-1, -1), (0, -1)\}$ et $Left(\mathcal{P}) = \{(1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1)\}$.

Notation 11.2 Dans la suite, on dira que deux chemins π et c vérifient la propriété $\mathcal{H}(\pi, c)$ si π est un n -chemin fermé pour $n \in \{6, 6+\}$ et c est un \bar{n} -chemin fermé tel que $c^* \cap \pi^* = \emptyset$.

Dans la suite de cette partie, on considère $n \in \{6, 6+\}$. De plus, afin de raccourcir les notations, nous utiliserons les notations suivantes pour les intervalles d'entiers.

Notation 11.3 Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ avec $a \leq b$. Alors on utilise les notations suivantes pour les intervalles d'entiers :

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{i \in \mathbb{Z} \mid a \leq i \leq b\} \\ [a, b[&= \{i \in \mathbb{Z} \mid a \leq i \text{ et } i < b\} \\]a, b] &= \{i \in \mathbb{Z} \mid a < i \text{ et } i \leq b\} \\]a, b[&= \{i \in \mathbb{Z} \mid a < i \text{ et } i < b\} \end{aligned}$$

Définition 11.4 (contribution au nombre d'entrelacement) Soient deux chemins fermés $\pi = (y_k)_{k=0, \dots, p}$ et $c = (x_i)_{i=0, \dots, q}$ tels que $\mathcal{H}(\pi, c)$ soit vérifiée. On définit comme suit $W_{\pi, c}(k, i)$, la contribution directe au nombre d'entrelacement d'un couple (k, i) , où $0 \leq k \leq p$ et $0 \leq i \leq q$.

– Si $y_k^3 > x_i^3$ ou $\mathcal{P}(y_k) \neq \mathcal{P}(x_i)$ ou $\mathcal{P}(y_k) = \mathcal{P}(y_{k-1})$ ou encore si $\mathcal{P}(x_i) = \mathcal{P}(x_{i-1})$ alors $W_{\pi, c}(k, i) = 0$,

– sinon, soit $\mathcal{P}_\pi = P_\pi(k)$ et $\mathcal{P}_c = P_c(i)$ les mouvements projectifs associés aux indices i et k (notons que dans ce cas $Pred_\pi(k) = k - 1$ et $Pred_c(i) = i - 1$):

– Si $\mathcal{P}_\pi^{Pred} = \mathcal{P}_\pi^{Succ}$ alors $W_{\pi, c}(k, i) = 0$,

– sinon $W_{\pi, c}(k, i) = W_{\pi, c}^-(k, i) + W_{\pi, c}^+(k, i)$ où

$$W_{\pi, c}^-(k, i) = -0.5 \text{ si } \mathcal{P}_c^{Pred} \in Left(\mathcal{P}_\pi), \quad W_{\pi, c}^+(k, i) = -0.5 \text{ si } \mathcal{P}_c^{Succ} \in Right(\mathcal{P}_\pi),$$

$$W_{\pi, c}^-(k, i) = 0.5 \text{ si } \mathcal{P}_c^{Pred} \in Right(\mathcal{P}_\pi), \quad W_{\pi, c}^+(k, i) = 0.5 \text{ si } \mathcal{P}_c^{Succ} \in Left(\mathcal{P}_\pi),$$

$$W_{\pi, c}^-(k, i) = 0 \text{ sinon.}$$

$$W_{\pi, c}^+(k, i) = 0 \text{ sinon.}$$

Définition 11.5 (nombre d'entrelacement) Soient $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ et $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ deux chemins fermés tels que $\mathcal{H}(\pi, c)$ soit vérifiée. On définit le nombre d'entrelacement de π et c (noté $L_{\pi,c}$) par :

$$L_{\pi,c} = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{q-1} W_{\pi,c}(k, i) \quad (11.1)$$

Notation 11.4 Étant donnés $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ et $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$, on note :

Pour $i \in [0, q-1]$, $L_{\pi,c}^\pi(i) = \sum_{k=0}^{p-1} W_{\pi,c}(k, i)$ et pour $k \in [0, p-1]$, $L_{\pi,c}^c(k) = \sum_{i=0}^{q-1} W_{\pi,c}(k, i)$.

11.3 Un nouvel invariant topologique

Nous présentons les deux résultats principaux qui sont prouvés dans ce chapitre à propos de l'invariance du nombre d'entrelacement après déformation homotopique de l'un des deux chemins pour lesquels il est défini. Ces résultats très intuitifs, une nouvelle fois identiques à ceux du cas continu, sont prouvés dans ce chapitre en utilisant des considérations techniques mais très simples mettant en jeu les coordonnées entières des voxels.

Théorème 14 Soient π et π' deux n -chemins fermés ($n \in \{6, 6+\}$) et c un \bar{n} -chemin fermé dans \mathbb{Z}^3 tel que $\pi^* \cap c^* = \emptyset$ et $\pi'^* \cap c^* = \emptyset$. Si π est n -homotope à π' dans $\mathbb{Z}^3 \setminus c^*$ alors $L_{\pi,c} = L_{\pi',c}$.

Théorème 15 Soit π un n -chemin fermé ($n \in \{6, 6+\}$), et soient c, c' deux \bar{n} -chemins fermés dans \mathbb{Z}^3 tels que $\pi^* \cap c^* = \emptyset$ et $\pi^* \cap c'^* = \emptyset$. Si c est \bar{n} -homotope à c' dans $\mathbb{Z}^3 \setminus \pi^*$ alors $L_{\pi,c} = L_{\pi,c'}$.

A titre d'illustration, on se convainc aisément que toute 18-déformation homotopique du 18-chemin fermé blanc de la Figure 11.4(b) dans le complémentaire du 6-chemin fermé gris ne peut modifier le nombre d'entrelacement associé à ces deux chemins.

11.4 Propriétés utiles

Dans cette section, on donne la définition de la contribution indirecte au nombre d'entrelacement qui fournit un moyen de calculer le nombre d'entrelacement en parcourant

les voxels du 18 ou du 26–chemin et en comptant les croisements avec la projection du 6–chemin. Ceci aboutit à une définition équivalente du nombre d'entrelacement, qui permet de prouver de façon similaire deux propositions concernant une propriété d'additivité du nombre d'entrelacement par concaténation des chemins (Proposition 11.3 et Proposition 11.2 de cette section). Cette propriété d'additivité sera utilisée dans la section suivante pour prouver les deux théorèmes principaux de ce chapitre.

11.4.1 Une définition équivalente du nombre d'entrelacement

Définition 11.6 (contribution indirecte au nombre d'entrelacement)

Soient $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ et $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ deux chemins fermés tels que $\mathcal{H}(\pi, c)$ soit vérifiée. On définit de la manière suivante $M_{c,\pi}(i, k)$, la contribution indirecte au nombre d'intersection d'un couple (i, k) où $0 \leq i \leq q$ et $0 \leq k \leq p$.

– Si $y_k^3 > x_i^3$ ou $\mathcal{P}(y_k) \neq \mathcal{P}(x_i)$ ou $\mathcal{P}(y_k) = \mathcal{P}(y_{k-1})$ ou encore $\mathcal{P}(x_i) = \mathcal{P}(x_{i-1})$ alors $M_{c,\pi}(i, k) = 0$,

– sinon, soient $\mathcal{P}_\pi = P_\pi(k)$ et $\mathcal{P}_c = P_c(i)$ les mouvements projectifs associés aux indices i et k :

– Si $\mathcal{P}_c^{Pred} = \mathcal{P}_c^{Succ}$ alors $M_{c,\pi}(i, k) = 0$,

– sinon $M_{c,\pi}(i, k) = M_{c,\pi}^-(i, k) + M_{c,\pi}^+(i, k)$ où :

$$M_{c,\pi}^-(i, k) = 0.5 \text{ si } \mathcal{P}_\pi^{Pred} \in \text{Left}(\mathcal{P}_c), \quad M_{c,\pi}^+(i, k) = 0.5 \text{ si } \mathcal{P}_\pi^{Succ} \in \text{Right}(\mathcal{P}_c),$$

$$M_{c,\pi}^-(i, k) = -0.5 \text{ si } \mathcal{P}_\pi^{Pred} \in \text{Right}(\mathcal{P}_c), \quad M_{c,\pi}^+(i, k) = -0.5 \text{ si } \mathcal{P}_\pi^{Succ} \in \text{Left}(\mathcal{P}_c),$$

$$M_{c,\pi}^-(i, k) = 0 \text{ sinon.} \quad M_{c,\pi}^+(i, k) = 0 \text{ sinon.}$$

Lemme 11.1 Soient $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$ et $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$ deux chemins fermés tels que $\mathcal{H}(\pi, c)$ soit vérifiée. Alors, $W_{\pi,c}(k, i) = M_{c,\pi}(i, k)$.

Preuve : La première condition de la Définition 11.4 et celle de la Définition 11.6 sont identiques. Maintenant, si $\mathcal{P}_\pi^{Pred} = \mathcal{P}_\pi^{Succ}$ alors $W_{\pi,c}(k, i) = 0$ mais il est alors clair que quelque soit la configuration \mathcal{P}_c , on a $M_{c,\pi}(i, k) = 0$ puisque \mathcal{P}_π^{Pred} et \mathcal{P}_π^{Succ} , soit se trouvent tous les deux du même coté de \mathcal{P}_c , soit sont tous les deux égaux à \mathcal{P}_c^{Pred} ou à \mathcal{P}_c^{Succ} . De la même façon, si $\mathcal{P}_c^{Pred} = \mathcal{P}_c^{Succ}$ alors $W_{\pi,c}(k, i) = M_{c,\pi}(i, k) = 0$.

Si $\mathcal{P}_\pi^{Pred} \neq \mathcal{P}_\pi^{Succ}$ et $\mathcal{P}_c^{Pred} \neq \mathcal{P}_c^{Succ}$, nous devrions évaluer $W_{c,\pi}(i, k)$ en fonction des positions des points \mathcal{P}_c^{Pred} et \mathcal{P}_c^{Succ} , qui fournissent immédiatement les positions de \mathcal{P}_π^{Pred}

et \mathcal{P}_π^{Succ} relatives à \mathcal{P}_c . Dans tous les cas, on remarque simplement que $M_{c,\pi}(i, k) = W_{\pi,c}(k, i)$. La Figure 11.9 donne un aperçu des quatorze configurations de mouvement projectifs qui peuvent se produire entre un n -chemin et un \bar{n} -chemin. Le lecteur peut vérifier aisément que les contributions directes et indirectes de ces points d'intersections sont égales. \square

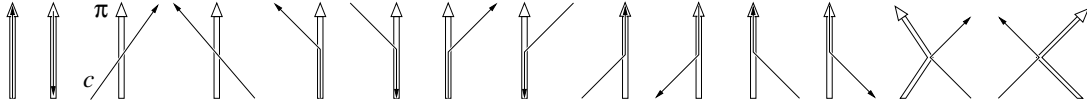


FIG. 11.9: Quatorze types d'intersections possibles dans un mouvement projectif.

Remarque 11.1 D'après le Lemme 11.1 on a : $L_{\pi,c} = \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{p-1} M_{c,\pi}(i, k)$. De plus, il est clair que le nombre d'entrelacement n'est pas dépendant du choix d'une paramétrisation pour l'un ou l'autre des chemins, pour peu que l'orientation de cette paramétrisation soit préservée.

11.4.2 La propriété de concaténation

Proposition 11.2 Soient π_1, π_2 deux n -chemins fermés ayant les mêmes extrémités et c un \bar{n} -chemin fermé tel que les hypothèses $\mathcal{H}(c, \pi_1)$ et $\mathcal{H}(c, \pi_2)$ soient vérifiées. Alors, $L_{\pi_1.\pi_2,c} = L_{\pi_1,c} + L_{\pi_2,c}$.

Preuve : Soit les chemins $c = (x_0, \dots, x_q)$, $\pi_1 = (z_0, \dots, z_{p_1})$, $\pi_2 = (t_0, \dots, t_{p_2})$ et $\pi_1.\pi_2 = (y_0, \dots, y_{p_1+p_2})$.

D'après la Définition 11.5, on doit montrer que $\sum_{i=0}^{q-1} L_{\pi_1.\pi_2,c}^{\pi_1.\pi_2}(i) = \sum_{i=0}^{q-1} L_{\pi_1,c}^{\pi_1}(i) + \sum_{i=0}^{q-1} L_{\pi_2,c}^{\pi_2}(i)$.

Plus précisément, il est suffisant de montrer que $L_{\pi_1.\pi_2,c}^{\pi_1.\pi_2}(i) = L_{\pi_1,c}^{\pi_1}(i) + L_{\pi_2,c}^{\pi_2}(i)$ pour tout $i \in [0, q - 1]$. Suivant la Définition 11.4, les deux termes de l'égalité précédente sont nuls si $\mathcal{P}(x_{i-1}) = \mathcal{P}(x_i)$ ou bien si $\mathcal{P}(x_{i-1}) = \mathcal{P}(x_{Succ_c(i)})$. Aussi, nous devons examiner uniquement le cas où le mouvement projectif $\mathcal{P} = P_c(i)$ (voir Définition 11.4) n'est pas trivial dans le sens où $\mathcal{P}^{Pred} \neq \mathcal{P}^{Succ}$.

Dans ce cas on montre que : $\sum_{k=0}^{p_1+p_2-1} M_{c,\pi_1.\pi_2}(i, k) = \sum_{k=0}^{p_1-1} M_{c,\pi_1}(i, k) + \sum_{k=0}^{p_2-1} M_{c,\pi_2}(i, k)$.

- Si π_1 et π_2 sont tous les deux des chemins fermés dont la projection est réduite à un unique point, i.e. $\mathcal{P}(z_0) = \mathcal{P}(z_k) = \mathcal{P}(t_0)$ pour tout $k \in [0, p_1 - 1]$ et $\mathcal{P}(t_0) = \mathcal{P}(t_k)$ pour tout $k \in [0, p_2 - 1]$ alors il est immédiat que $L_{\pi_1,c} = L_{\pi_2,c} = L_{\pi_1.\pi_2,c} = 0$.

• Si le chemin π_2 a une projection réduite à un seul point (i.e. $Succ_{\pi_2}(0) = 0$) et que la projection de π_1 n'est pas réduite à un seul point (i.e. $Succ_{\pi_1}(0) \neq 0$) alors $L_{\pi_2,c} = 0$ et on montre que $L_{\pi_1,c} = L_{\pi_1.\pi_2,c}$. En effet, dans ce cas et pour tout $i \in [0, q-1]$:

$$\begin{aligned} L_{\pi_1.\pi_2,c}^{\pi_1.\pi_2}(i) &= \sum_{k=0}^{Succ_{\pi_1.\pi_2}(0)-1} M_{c,\pi_1.\pi_2}(i, k) + \sum_{k=Succ_{\pi_1.\pi_2}(0)}^{Pred_{\pi_1.\pi_2}(0)-1} M_{c,\pi_1.\pi_2}(i, k) \\ &+ \sum_{k=Pred_{\pi_1.\pi_2}(0)}^{p_1+p_2-1} M_{c,\pi_1.\pi_2}(i, k) \end{aligned} \quad (11.2)$$

Mais, d'après la définition de $Succ_{\pi_1.\pi_2}(0)$ et $Pred_{\pi_1.\pi_2}(0)$ et du fait que la contribution indirecte d'un couple (k, i) est égale à zéro dans le cas où $\mathcal{P}(y_k) = \mathcal{P}(y_{k-1})$ on obtient que :

$$\sum_{k=Pred_{\pi_1.\pi_2}(0)}^{p_1+p_2-1} M_{c,\pi_1.\pi_2}(i, k) + \sum_{k=0}^{Succ_{\pi_1.\pi_2}(0)-1} M_{c,\pi_1.\pi_2}(i, k) = M_{c,\pi_1.\pi_2}(Pred_{\pi_1.\pi_2}(0) + 1, k)$$

On remarque également que $Pred_{\pi_1.\pi_2}(0) = Pred_{\pi_1}(0) \in]0, p_1[$ puisque $\mathcal{P}(y_k) = \mathcal{P}(y_{p_1})$ pour $k \in [p_1, p_1 + p_2]$. Mais $y_j = z_j$ pour tout $j \in [0, \dots, p_1]$ de sorte que $y_{Pred_{\pi_1.\pi_2}(0)} = z_{Pred_{\pi_1}(0)}$ et $y_{Pred_{\pi_1.\pi_2}(0)+1} = z_{Pred_{\pi_1}(0)+1}$. D'autre part, on a $Succ_{\pi_1.\pi_2}(Pred_{\pi_1.\pi_2}(0) + 1) = Succ_{\pi_1.\pi_2}(0)$ d'après la définition de $Succ$ et $Pred$. Mais $Succ_{\pi_1.\pi_2}(0) \in]0, p_1[$ de sorte que $Succ_{\pi_1.\pi_2}(0) = Succ_{\pi_1}(0) = Succ_{\pi_1}(Pred_{\pi_1}(0) + 1)$. Finalement, on obtient que :

$y_{Succ_{\pi_1.\pi_2}(Pred_{\pi_1.\pi_2}(0)+1)} = z_{Succ_{\pi_1}(Pred_{\pi_1}(0)+1)}$. Et, par définition de la contribution au nombre d'entrelacement, on a alors :

$$M_{c,\pi_1.\pi_2}(i, Pred_{\pi_1.\pi_2}(0) + 1) = M_{c,\pi_1}(i, Pred_{\pi_1}(0) + 1).$$

Suivant la définition de $Succ_{\pi_1}(0)$ et $Pred_{\pi_1}(0)$ et puisque la contribution d'un couple (k, i) est égale à 0 dans le cas où $\mathcal{P}(z_k) = \mathcal{P}(z_{k-1})$ on a :

$$M_{c,\pi_1}(i, Pred_{\pi_1}(0) + 1) = \sum_{k=Pred_{\pi_1}(0)+1}^{p_1-1} M_{c,\pi_1}(i, k) + \sum_{k=0}^{Succ_{\pi_1}(0)-1} M_{c,\pi_1}(i, k).$$

D'après l'expression de $L_{\pi_1.\pi_2,c}^{\pi_1.\pi_2}(i)$ dans l'équation 11.2, et comme la séquence des voxels de π_1 apparaît dans $\pi_1.\pi_2$ entre $Succ_{\pi_1.\pi_2}(0)$ et $Pred_{\pi_1.\pi_2}(0)$:

$$\begin{aligned} L_{\pi_1.\pi_2,c}^{\pi_1.\pi_2}(i) &= M_{c,\pi_1.\pi_2}(Pred_{\pi_1.\pi_2}(0) + 1, k) + \sum_{k=Succ_{\pi_1.\pi_2}(0)}^{Pred_{\pi_1.\pi_2}(0)} M_{c,\pi_1.\pi_2}(i, k) \\ &= M_{c,\pi_1}(Pred_{\pi_1}(0) + 1, k) + \sum_{k=Succ_{\pi_1}(0)}^{Pred_{\pi_1}(0)} M_{c,\pi_1}(i, k) \\ &= L_{\pi_1,c}^{\pi_1}(i) \end{aligned}$$

• Le cas où $Succ_{\pi_1}(0) = 0$ et $Succ_{\pi_2}(0) \neq 0$ est identique.

• Dans le cas où aucun des deux chemins π_1 et π_2 n'a sa projection réduite à un unique point (i.e. $Succ_{\pi_1}(0) \neq 0$ et $Succ_{\pi_2}(0) \neq 0$); alors, en utilisant les mêmes considérations que dans le cas précédent, on montre que :

$$L_{\pi_1, c}^{\pi_1}(i) = M_{c, \pi_1}(i, Pred_{\pi_1}(0) + 1) + \sum_{k=Succ_{\pi_1}(0)}^{Pred_{\pi_1}(0)} M_{c, \pi_1}(i, k) \quad (3.1)$$

$$L_{\pi_2, c}^{\pi_2}(i) = M_{c, \pi_2}(i, Pred_{\pi_2}(0) + 1) + \sum_{k=Succ_{\pi_2}(0)}^{Pred_{\pi_2}(0)} M_{c, \pi_2}(i, k) \quad (3.2)$$

$$L_{\pi_1 \cdot \pi_2, c}^{\pi_1 \cdot \pi_2}(i) = M_{c, \pi_1 \cdot \pi_2}(i, Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(0) + 1) + \sum_{k=Succ_{\pi_1 \cdot \pi_2}(0)}^{Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(p_1)} M_{c, \pi_1 \cdot \pi_2}(i, k) \quad (3.3)$$

$$+ M_{c, \pi_1 \cdot \pi_2}(i, Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(p_1) + 1) + \sum_{k=Succ_{\pi_1 \cdot \pi_2}(p_1)} M_{c, \pi_1 \cdot \pi_2}(i, k)$$

Pour $k \in [Succ_{\pi_1}(0), Pred_{\pi_1}(0)] = [Succ_{\pi_1 \cdot \pi_2}(0), Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(p_1)] \subset]0, p_1[$ on a $z_k = y_k$, $z_{k-1} = y_{k-1}$ et $z_{Succ_{\pi_1}(k)} = y_{Succ_{\pi_1 \cdot \pi_2}(k)}$, donc $M_{c, \pi_1}(i, k) = M_{c, \pi_1 \cdot \pi_2}(i, k)$. Alors, la somme de l'équation (2.1) est égale à la première somme de l'équation (2.3).

Pour $k \in [Succ_{\pi_2}(0), Pred_{\pi_2}(0)] = [Succ_{\pi_1 \cdot \pi_2}(p_1) - p_1, Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(0) - p_1] \subset]0, p_2[$ on a $t_k = y_{k+p_1}$, $t_{k-1} = y_{k+p_1-1}$ et $t_{Succ_{\pi_1}(k)} = y_{Succ_{\pi_1 \cdot \pi_2}(k)+p_1}$, donc $M_{c, \pi_2}(i, k) = W_{c, \pi_1 \cdot \pi_2}(i, k + p_1)$. Alors, la somme de l'équation (2.2) est égale à la deuxième somme de l'équation (2.3).

Il reste à montrer l'égalité entre $M_{c, \pi_1}(i, Pred_{\pi_1}(0) + 1) + M_{c, \pi_2}(i, Pred_{\pi_2}(0) + 1)$ et la somme $M_{c, \pi_1 \cdot \pi_2}(i, Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(0) + 1) + M_{c, \pi_1 \cdot \pi_2}(i, Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(p_1) + 1)$. Mais,

$$M_{c, \pi_1}^-(i, Pred_{\pi_1}(0) + 1) = M_{c, \pi_1 \cdot \pi_2}^-(i, Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(p_1) + 1) \text{ car } z_{Pred_{\pi_1}(0)} = y_{Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(p_1)}.$$

$$M_{c, \pi_1}^+(i, Pred_{\pi_1}(0) + 1) = M_{c, \pi_1 \cdot \pi_2}^+(i, Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(0) + 1) \text{ car } z_{Succ_{\pi_1}(Pred_{\pi_1}(0)+1)} = z_{Succ_{\pi_1}(0)} =$$

$$y_{Succ_{\pi_1 \cdot \pi_2}(0)} = y_{Succ_{\pi_1 \cdot \pi_2}(Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(0)+1)}.$$

$$M_{c, \pi_2}^-(i, Pred_{\pi_2}(0) + 1) = M_{c, \pi_1 \cdot \pi_2}^-(i, Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(0) + 1) \text{ car } t_{Pred_{\pi_2}(0)} = y_{Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(0)}.$$

$$M_{c, \pi_2}^+(i, Pred_{\pi_2}(0) + 1) = M_{c, \pi_1 \cdot \pi_2}^+(i, Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(p_1) + 1) \text{ car } t_{Succ_{\pi_2}(Pred_{\pi_2}(0)+1)} = t_{Succ_{\pi_2}(0)} =$$

$$t_{Succ_{\pi_1 \cdot \pi_2}(p_1)} = t_{Succ_{\pi_1 \cdot \pi_2}(Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(p_1)+1)}.$$

Finalement, $M_{c, \pi_1}(i, Pred_{\pi_1}(0) + 1) + M_{c, \pi_2}(i, Pred_{\pi_2}(0) + 1) = M_{c, \pi_1 \cdot \pi_2}(i, Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(0) + 1) + M_{c, \pi_1 \cdot \pi_2}(i, Pred_{\pi_1 \cdot \pi_2}(p_1) + 1)$. \square

Proposition 11.3 Soient c_1 et c_2 deux chemins fermés ayant les mêmes extrémités et π un chemin fermé tel que $\mathcal{H}(c_1, \pi)$ et $\mathcal{H}(c_2, \pi)$ sont vérifiées. Alors, $L_{\pi, c_1 \cdot c_2} = L_{\pi, c_1} + L_{\pi, c_2}$.

Preuve : Soient $\pi = (y_0, \dots, y_p)$, $c_1 = (z_0, \dots, z_{q_1})$, $c_2 = (t_0, \dots, t_{q_2})$ et $c_1.c_2 = (x_0, \dots, x_{q_1+q_2})$. Il nous faut montrer que $\sum_{k=0}^{p-1} L_{\pi, c_1.c_2}^{c_1.c_2}(k) = \sum_{k=0}^{p-1} L_{\pi, c_1}^{c_1}(k) + \sum_{k=0}^{p-1} L_{\pi, c_2}^{c_2}(k)$.

Plus précisément, on démontre que pour tout $k \in [0, p-1]$ on a :

$$L_{\pi, c_1.c_2}^{c_1.c_2}(k) = L_{\pi, c_1}^{c_1}(k) + L_{\pi, c_2}^{c_2}(k)$$

D'après la définition de la contribution directe d'un couple (k, i) au nombre d'entrelacement, les termes de l'égalité précédente sont tous les deux nuls si $\mathcal{P}(y_{k-1}) = \mathcal{P}(y_k)$ ou bien si $\mathcal{P}(y_{k-1}) = \mathcal{P}(y_{\text{Succ}_\pi(k)})$. Ainsi, il reste à examiner le cas où le mouvement projectif $\mathcal{P} = P_\pi(k)$ (voir Définition 11.4) n'est pas trivial dans le sens où $\mathcal{P}^{\text{Pred}} \neq \mathcal{P}^{\text{Succ}}$.

Dans ce cas, on doit prouver que :

$$\sum_{i=0}^{q_1+q_2-1} W_{\pi, c_1.c_2}(k, i) = \sum_{i=0}^{q_1-1} W_{\pi, c_1}(k, i) + \sum_{i=0}^{q_2-1} W_{\pi, c_2}(k, i)$$

- Si c_1 et c_2 sont tous les deux des chemins fermés dont la projection est réduite à un unique point, i.e. $\mathcal{P}(z_0) = \mathcal{P}(z_i)$ pour tout $i \in [0, q_1-1]$ et $\mathcal{P}(t_0) = \mathcal{P}(t_i)$ pour tout $i \in [0, q_2-1]$ alors il est immédiat que $L_{\pi, c_1} = L_{\pi, c_2} = L_{\pi, c_1.c_2} = 0$.

- Si le chemin c_2 a une projection réduite à un point (i.e. $\text{Succ}_{c_2}(0) = 0$ mais pas c_1 (i.e. $\text{Succ}_{c_1}(0) \neq 0$). Alors, $L_{\pi, c_1} = 0$ et on montre que $L_{\pi, c_2} = L_{\pi, c_1.c_2}$.

En effet, dans ce cas :

$$L_{\pi, c_1.c_2} = \sum_{i=0}^{\text{Succ}_{c_1.c_2}(0)-1} W_{\pi, c_1.c_2}(k, i) + \sum_{i=\text{Succ}_{c_1.c_2}(0)}^{\text{Pred}_{c_1.c_2}(0)} W_{\pi, c_1.c_2}(k, i) + \sum_{i=\text{Pred}_{c_1.c_2}(0)}^{q_1+q_2-1} W_{\pi, c_1.c_2}(k, i)$$

Mais par définition de $\text{Succ}_{c_1.c_2}(0)$ et $\text{Pred}_{c_1.c_2}(0)$; et d'après la définition de la contribution d'un couple (k, i) dans le cas où $\mathcal{P}(x_i) = \mathcal{P}(x_{i-1})$ on obtient que :

$$\sum_{i=\text{Pred}_{c_1.c_2}(0)}^{q_1+q_2-1} W_{\pi, c_1.c_2}(k, i) + \sum_{i=0}^{\text{Succ}_{c_1.c_2}(0)-1} W_{\pi, c_1.c_2}(k, i) = L_{\pi, c_1.c_2}(k, \text{Pred}_{c_1.c_2}(0) + 1)$$

On remarque aussi que $\text{Pred}_{c_1.c_2}(0) = \text{Pred}_{c_1}(0) \in]0, q_1[$ puisque $\mathcal{P}(x_j) = \mathcal{P}(x_{q_1})$ pour $j = q_1, \dots, q_1 + q_2$. Mais $x_j = z_j$ pour tout $j \in [0, q_1]$, donc :

$$-x_{\text{Pred}_{c_1.c_2}(0)} = z_{\text{Pred}_{c_1}(0)} \text{ et } x_{\text{Pred}_{c_1.c_2}(0)+1} = z_{\text{Pred}_{c_1}(0)+1}.$$

D'autre part, $\text{Succ}_{c_1.c_2}(\text{Pred}_{c_1.c_2}(0)+1) = \text{Succ}_{c_1.c_2}(0)$ par définition de Succ et Pred . Mais $\text{Succ}_{c_1.c_2}(0) \in]0, q_1[$ donc $\text{Succ}_{c_1.c_2}(0) = \text{Succ}_{c_1}(0) = \text{Succ}_{c_1}(\text{Pred}_{c_1}(0) + 1)$. Finalement,

$$-x_{\text{Succ}_{c_1.c_2}(\text{Pred}_{c_1.c_2}(0)+1)} = z_{\text{Succ}_{c_1}(\text{Pred}_{c_1}(0)+1)}.$$

D'après la définition de la contribution au nombre d'entrelacement on obtient que

$L_{\pi, c_1.c_2}(k, \text{Pred}_{c_1.c_2}(0) + 1) = L_{\pi, c_1}(k, \text{Pred}_{c_1}(0) + 1)$. Et, par définition de $\text{Succ}_{c_1}(0)$ et $\text{Pred}_{c_1}(0)$ et celle de la contribution d'un couple (k, i) dans le cas où $\mathcal{P}(z_i) = \mathcal{P}(z_{i-1})$ on a :

a :

$$L_{\pi, c_1}(k, \text{Pred}_{c_1}(0) + 1) = \sum_{i=\text{Pred}_{c_1}(0)}^{q_1-1} W_{\pi, c_1}(k, i) + \sum_{i=0}^{\text{Succ}_{c_1}(0)-1} W_{\pi, c_1}(k, i).$$

Calculons la somme $\sum_{i=\text{Succ}_{c_1 \cdot c_2}(0)}^{\text{Pred}_{c_1 \cdot c_2}(0)} W_{\pi, c_1 \cdot c_2}(k, i)$.

Pour $i \in [\text{Succ}_{c_1 \cdot c_2}(0), \text{Pred}_{c_1 \cdot c_2}(0)] = [\text{Succ}_{c_1}(0), \text{Succ}_{c_1}(0)] \subset]0, q_1[$ on a : $x_i = z_i$, $x_{i-1} = z_{i-1}$ et $\text{Succ}_{c_1 \cdot c_2}(i) \leq \text{Pred}_{c_1 \cdot c_2}(0) + 1 = \text{Pred}_{c_1}(0) + 1 \leq q_1$ de sorte que $x_{\text{Succ}_{c_1 \cdot c_2}(i)} = z_{\text{Succ}_{c_1}(i)}$. Ceci entraîne $W_{\pi, c_1 \cdot c_2}(k, i) = W_{\pi, c_1}(k, i)$ et donc

$$\sum_{i=\text{Succ}_{c_1 \cdot c_2}(0)}^{\text{Pred}_{c_1 \cdot c_2}(0)} W_{\pi, c_1 \cdot c_2}(k, i) = \sum_{i=\text{Succ}_{c_1}(0)}^{\text{Pred}_{c_1}(0)} W_{\pi, c_1}(k, i).$$

On obtient :

$$L_{\pi, c_1 \cdot c_2} = \sum_{i=\text{Pred}_{c_1}(0)}^{q_1-1} W_{\pi, c_1}(k, i) + \sum_{i=0}^{\text{Succ}_{c_1}(0)-1} W_{\pi, c_1}(k, i) + \sum_{i=\text{Succ}_{c_1}(0)}^{\text{Pred}_{c_1}(0)} W_{\pi, c_1}(k, i) = L_{\pi, c_1}.$$

- Le cas où $\text{Succ}_{c_1}(0) = 0$ et $\text{Succ}_{c_2}(0) \neq 0$ peut être démontré de façon similaire mais avec des notations plus lourdes nécessaires pour mettre en relation les voxels identiques de c_2 et $c_1 \cdot c_2$.

- Reste à examiner le cas où aucun des deux chemins c_1 et c_2 n'est de projection réduite à un seul point (i.e. $\text{Succ}_{c_1}(0) \neq 0$ et $\text{Succ}_{c_2}(0) \neq 0$).

Alors, en utilisant les mêmes considérations que dans les cas précédents, on montre que :

$$\begin{aligned} L_{\pi, c_1}^{c_1}(k) &= L_{\pi, c_1}(k, \text{Pred}_{c_1}(0) + 1) + \sum_{i=\text{Succ}_{c_1}(0)}^{\text{Pred}_{c_1}(0)} W_{\pi, c_1}(k, i) \\ L_{\pi, c_2}^{c_2}(k) &= L_{\pi, c_2}(k, \text{Pred}_{c_2}(0) + 1) + \sum_{i=\text{Succ}_{c_2}(0)}^{\text{Pred}_{c_2}(0)} W_{\pi, c_2}(k, i) \\ L_{\pi, c_1 \cdot c_2}^{c_1 \cdot c_2}(k) &= L_{\pi, c_1 \cdot c_2}(k, \text{Pred}_{c_1 \cdot c_2}(0) + 1) + \sum_{i=\text{Succ}_{c_1 \cdot c_2}(0)}^{\text{Pred}_{c_1 \cdot c_2}(q_1)} W_{\pi, c_1 \cdot c_2}(k, i) \\ &\quad + L_{\pi, c_1 \cdot c_2}(k, \text{Pred}_{c_1 \cdot c_2}(q_1) + 1) + \sum_{i=\text{Succ}_{c_1 \cdot c_2}(q_1)}^{\text{Pred}_{c_1 \cdot c_2}(0)} W_{\pi, c_1 \cdot c_2}(k, i) \end{aligned}$$

Pour $i \in [\text{Succ}_{c_1}(0), \text{Pred}_{c_1}(0)] = [\text{Succ}_{c_1 \cdot c_2}(0), \text{Pred}_{c_1 \cdot c_2}(q_1)] \subset]0, q_1[$ on a $z_i = x_i$, $z_{i-1} = x_{i-1}$ et $z_{\text{Succ}_{c_1}(i)} = x_{\text{Succ}_{c_1 \cdot c_2}(i)}$, donc $L_{\pi, c_1}(k, i) = L_{\pi, c_1 \cdot c_2}(k, i)$. Alors,

$$\sum_{i=\text{Succ}_{c_1}(0)}^{\text{Pred}_{c_1}(0)} W_{\pi, c_1}(k, i) = \sum_{i=\text{Succ}_{c_1 \cdot c_2}(0)}^{\text{Pred}_{c_1 \cdot c_2}(q_1)} W_{\pi, c_1 \cdot c_2}(k, i).$$

Pour $i \in [\text{Succ}_{c_2}(0), \text{Pred}_{c_2}(0)] = [\text{Succ}_{c_1 \cdot c_2}(q_1) - q_1, \text{Pred}_{c_1 \cdot c_2}(0) - q_1] \subset]0, q_2[$ on a $t_i = x_{i+q_1}$, $t_{i-1} = x_{i+q_1-1}$ et $t_{\text{Succ}_{c_1}(i)} = x_{\text{Succ}_{c_1 \cdot c_2}(i)+q_1}$, donc $L_{\pi, c_2}(k, i) = L_{\pi, c_1 \cdot c_2}(k, i+q_1)$. Alors,

$$\sum_{i=Succ_{c_2}(0)}^{Pred_{c_2}(0)} W_{\pi,c_2}(k, i) = \sum_{i=Succ_{c_1.c_2}(q_1)}^{Pred_{c_1.c_2}(0)} W_{\pi,c_1.c_2}(k, i).$$

D'autre part, $L_{\pi,c_1}(k, Pred_{c_1}(0) + 1) + L_{\pi,c_2}(k, Pred_{c_2}(0) + 1) = L_{\pi,c_1}^-(k, Pred_{c_1}(0) + 1) + L_{\pi,c_1}^+(k, Pred_{c_1}(0) + 1) + L_{\pi,c_2}^-(k, Pred_{c_2}(0) + 1) + L_{\pi,c_2}^+(k, Pred_{c_2}(0) + 1)$.

Mais,

$$\begin{aligned} L_{\pi,c_1}^-(k, Pred_{c_1}(0) + 1) &= L_{\pi,c_1.c_2}^-(k, Pred_{c_1.c_2}(q_1) + 1) \text{ puisque } z_{Pred_{c_1}(0)} = x_{Pred_{c_1.c_2}(q_1)}. \\ L_{\pi,c_1}^+(k, Pred_{c_1}(0) + 1) &= L_{\pi,c_1.c_2}^+(k, Pred_{c_1.c_2}(0) + 1) \text{ puisque } z_{Succ_{c_1}(Pred_{c_1}(0)+1)} = z_{Succ_{c_1}(0)} = \\ &x_{Succ_{c_1.c_2}(0)} = x_{Succ_{c_1.c_2}(Pred_{c_1.c_2}(0)+1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\pi,c_2}^-(k, Pred_{c_2}(0) + 1) &= L_{\pi,c_1.c_2}^-(k, Pred_{c_1.c_2}(0) + 1) \text{ puisque } t_{Pred_{c_2}(0)} = x_{Pred_{c_1.c_2}(0)}. \\ L_{\pi,c_2}^+(k, Pred_{c_2}(0) + 1) &= L_{\pi,c_1.c_2}^+(k, Pred_{c_1.c_2}(q_1) + 1) \text{ puisque } t_{Succ_{c_2}(Pred_{c_2}(0)+1)} = t_{Succ_{c_2}(0)} = \\ &t_{Succ_{c_1.c_2}(q_1)} = t_{Succ_{c_1.c_2}(Pred_{c_1.c_2}(q_1)+1)}. \end{aligned}$$

Enfin, $L_{\pi,c_1}(k, Pred_{c_1}(0) + 1) + L_{\pi,c_2}(k, Pred_{c_2}(0) + 1) = L_{\pi,c_1.c_2}(k, Pred_{c_1.c_2}(0) + 1) + L_{\pi,c_1.c_2}(k, Pred_{c_1.c_2}(q_1) + 1)$.

Alors,

$$\begin{aligned} L_{\pi,c_1}^{c_1}(k) + L_{\pi,c_2}^{c_2}(k) &= L_{\pi,c_1.c_2}(k, Pred_{c_1.c_2}(0) + 1) + L_{\pi,c_1.c_2}(k, Pred_{c_1.c_2}(q_1) + 1) \\ &+ \sum_{i=Succ_{c_1.c_2}(0)}^{Pred_{c_1.c_2}(q_1)} W_{\pi,c_1.c_2}(k, i) + \sum_{i=Succ_{c_1.c_2}(q_1)}^{Pred_{c_1.c_2}(0)} W_{\pi,c_1.c_2}(k, i) \\ &= L_{\pi,c_1.c_2}^{c_1.c_2}(k) \end{aligned}$$

□

11.5 Preuves des Théorèmes principaux

11.5.1 Invariance par déformation du $6/(6+)$ -chemin

Dans cette section, nous donnons la preuve du Théorème 14 dans le cas où $(n, \bar{n}) \in \{(6+, 18), (6, 26)\}$. L'idée principale de cette preuve est qu'une déformation homotopique d'un 6 -chemin ou d'un $(6+)$ -chemin peut être opérée par une séquence d'insertions et/ou de suppressions de chemins fermés simples inclus dans un cube ou un carré (tels que ceux représentés dans la Figure 11.10). Alors, en montrant que de tels n -chemins fermés de longueurs réduites ont un nombre d'entrelacement nul avec n'importe quel autre \bar{n} -chemin, on pourra démontrer le théorème principal en utilisant la Proposition 11.2.

Définition 11.7 Soient π et π' deux n -chemins fermés ($n \in \{6, 6+, 18, 26\}$) dans $X \subset$

\mathbb{Z}^3 . On dit que π et π' sont identiques à l'insertion/suppression d'une n -boucle simple près si $\pi = \pi_1.(p).\pi_2$ où p est un voxel, et $\pi' = \pi_1.\gamma.\pi_2$ où γ est un n -chemin fermé simple de p à p inclus dans un cube $2 \times 2 \times 2$ (un carré 2×2 si $(n, \bar{n}) = (6, 26)$); ou bien si $\pi = \pi_1.\gamma.\pi_2$ et $\pi' = \pi_1.(p).\pi_2$.

Proposition 11.4 Soient π et π' deux n -chemins ($n \in \{6, 6+, 18, 26\}$) dans $X \subset \mathbb{Z}^3$. Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) π est n -homotope à π' .

ii) Il existe une séquence $S = (\pi^0, \dots, \pi^l)$ telle que $\pi^0 = \pi$, $\pi^l = \pi'$ et pour $h = 1 \dots l$, les deux chemins π^{h-1} et π^h sont identiques à l'insertion/suppression d'une n -boucle simple près.

Quand la Propriété ii) est satisfaite, on note $\pi \equiv_{SL} \pi'$.

Preuve :

L'implication ii) \Rightarrow i) est immédiate d'après les définitions puisque l'insertion ou la suppression d'une n -boucle simple est une n -déformation élémentaire. Réciproquement, il est suffisant de montrer ii) en supposant que π et π' sont identiques à une n -déformation élémentaire près. Aussi, supposons que $\pi = \pi_1.\gamma.\pi_2$ et $\pi' = \pi_1.\gamma'.\pi_2$. Où γ et γ' ont les mêmes extrémités (disons p et q) et sont inclus dans un cube $2 \times 2 \times 2$ \mathcal{C} (un carré 2×2 si $(n, \bar{n}) = (6, 26)$).

On donne la séquence S : Tout d'abord, en insérant ou supprimant des boucles simples de la forme (x, y, x) dans π on obtient :

$\pi = \pi_1.\gamma.\pi_2 \equiv_{SL} \pi_1.\gamma.\gamma'^{-1}.\gamma'.\pi_2$. Maintenant, considérons le chemin fermé $\gamma.\gamma'^{-1}$ de p à p . On peut supprimer de façon séquentielle des sous-chemins de longueurs minimales du chemin fermé $\gamma.\gamma'^{-1}$ qui sont des boucles simples, jusqu'à obtenir un chemin qui est lui-même une boucle simple. Finalement, $\pi \equiv_{SL} \pi_1.\gamma.\gamma'^{-1}.\gamma'.\pi_2 \equiv_{SL} \pi_1.\gamma'.\pi_2 = \pi'$. \square

Lemme 11.5 Soit π une 6-boucle simple dans un carré 2×2 et soit c un 26-chemin tel que $\mathcal{H}(\pi, c)$ soit vérifiée, alors $L_{\pi, c} = 0$.

Preuve : De la Figure 11.10(a) à la Figure 11.10(f), toutes les 6-boucles simples incluses dans un carré 2×2 d'un point p à p sont représentées au choix d'une orientation près.

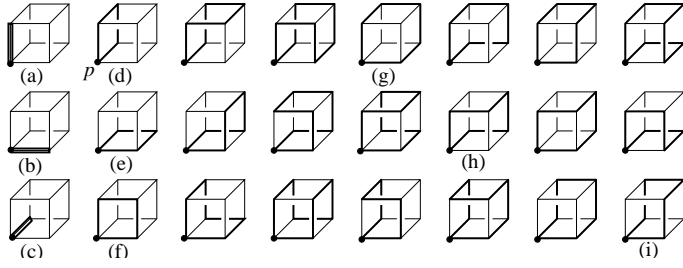


FIG. 11.10: Les 24 6–boucles simples possibles de p à p dans un cube $2 \times 2 \times 2$.

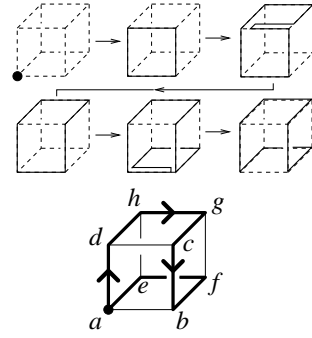


FIG. 11.11: Comment obtenir l'une des 6–boucles simples à partir de boucles élémentaires.

Dans cette preuve, nous n'examinerons que les cas de boucles simples issues d'un point p donné du carré 2×2 . En modifiant la paramétrisation de la boucle, il est clair que la preuve est valable pour tout autre voxel p dans un carré 2×2 .

- Cas des Figures 11.10(a) et 11.10(b) : Dans ce cas, $\pi = (x, y, x)$ et $L_{\pi,c} = L_{\pi,c}^c(0) + L_{\pi,c}^c(1) = 0$ par définition de la contribution au nombre d'entrelacement.
- Cas de la Figure 11.10(c) : Dans ce cas, $\pi = (x, y, x)$ et $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(y)$ de sorte que $L_{\pi,c} = 0$.
- Cas des Figures 11.10(d) et 11.10(e) :

Soit $\pi = (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 = y_0)$. Dans les deux cas et pour n'importe quelle paramétrisation, on vérifie aisément que $L_{\pi,c}^c(k) = 0$ pour $k = 0, \dots, 3$ soit parce-que $\mathcal{P}(y_k) = \mathcal{P}(y_{k-1})$, soit parce-que $P_\pi(k)^{Pred} = P_\pi(k)^{Succ}$.

- Cas de la Figure 11.10(f) :

On pose $c = (x_i)_{i=0,\dots,q}$, $\pi = (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 = y_0)$, $P = \{\mathcal{P}(y_0), \mathcal{P}(y_1), \mathcal{P}(y_2), \mathcal{P}(y_3)\}$ et soit $I = \{[i_1, i_2] \mid \mathcal{P}(x_{i_1-1}) \notin P, \mathcal{P}(x_{i_2+1}) \notin P \text{ et } \mathcal{P}(x_i) \in P \text{ pour tout } i \in [i_1, i_2]\}$. Si $\mathcal{P}(x_i) \in P$ pour tout $i \in [0, q]$ alors $I = \{[0, q-1]\}$.

Alors, il est clair que $L_{\pi,c} = \sum_{[i_1, i_2] \in I} \sum_{i=i_1}^{i_2} L_{\pi,c}^\pi(i)$.

Il est suffisant de prouver que pour tout $[i_1, i_2] \in I$ la somme $\sum_{i=i_1}^{i_2} L_{\pi,c}^\pi(i)$ est nulle. On peut alors choisir une orientation pour le chemin π , mais dans tous les cas on remarque que pour tout $i \in [i_1, i_2]$ il existe un seul indice $k(i) \in \{0, 1, 2, 3\}$ tel que $L_{\pi,c}^\pi(i) = W_{\pi,c}(k(i), i)$. Tout d'abord, pour un intervalle donné $[i_1, i_2]$, soit $x_i^3 < y_{k(i)}^3$ pour tout $i \in [i_1, i_2]$ ou bien $x_i^3 > y_{k(i)}^3$ pour tout $i \in [i_1, i_2]$. Dans le premier cas, $L_{\pi,c}^\pi(i) = 0$ pour tout $i \in [i_1, i_2]$ et il

n'y a plus rien à montrer. Dans le second cas, on peut considérer des entiers $a_0 < a_1 < \dots < a_l \leq a_{l+1}$ tels que : $[i_1, i_2] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_l, a_{l+1}]$, avec $\mathcal{P}(x_{a_i}) \neq \mathcal{P}(x_{a_{i-1}})$ pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$; et $\forall i \in \{0, \dots, l\}$, $\forall j \in [a_i, a_{i+1}[$ on a $\mathcal{P}(x_j) = \mathcal{P}(x_{a_i})$. Alors, pour tout $i \in \{0, \dots, l-1\}$:

$$\sum_{j=a_i}^{a_{i+1}-1} W_{\pi,c}(k(j), j) = W_{\pi,c}(k(a_i), a_i) \text{ et } \sum_{j=a_i}^{a_{l+1}} W_{\pi,c}(k(j), j) = W_{\pi,c}(k(a_l), a_l).$$

Par construction des intervalles $[a_i, a_{i+1}[$, on a :

$$\sum_{i \in [i_1, i_2]} W_{\pi,c}(k(i), i) = \sum_{i=1, \dots, l} W_{\pi,c}(k(a_i), a_i).$$

Maintenant, on prouve que pour $i = 1, \dots, l$, $W_{\pi,c}^+(k(a_i), a_i) + W_{\pi,c}^-(k(a_{i+1}), a_{i+1}) = 0$. En effet, soient $\beta_i = P_c(a_i)$ et $\alpha_i = P_\pi(k(a_i))$. Alors $W_{\pi,c}^+(k(a_i), a_i)$ dépend de la position du point β_i^{Succ} par rapport au mouvement projectif α_i . Si $\beta_i^{Succ} \in \{\alpha^{Pred}, \alpha^{Succ}\}$ alors on a $W_{\pi,c}^+(k(a_i), a_i) = 0$ et $W_{\pi,c}^-(k(a_{i+1}), a_{i+1}) = 0$ puisque $Pred_c(a_{i+1}) = a_i$. Si $\beta_i^{Succ} \notin \{\alpha^{Pred}, \alpha^{Succ}\}$ alors β^{Succ} est un point qui est 8-adjacent mais pas 4-adjacent à $(0, 0)$. Mais dans ce cas, et en fonction de l'orientation du chemin fermé π , si $\beta_i^{Succ} \in Right(\alpha_i)$ alors $\beta_{i+1}^{Pred} \in Right(\alpha_{i+1})$ et si $\beta_i^{Succ} \in Left(\alpha_i)$ alors $\beta_{i+1}^{Pred} \in Left(\alpha_{i+1})$.

On voit aussi que $W_{\pi,c}^-(k(a_0), a_0) + W_{\pi,c}^+(k(a_l), a_l) = 0$. En effet, selon l'orientation de la boucle réduite à un carré 2×2 , il est clair que les projections des voxels $P_c(a_0)^{Pred}$ et $P_c(a_l)^{Succ}$ appartiendront ou bien respectivement à $Right(P_\pi(k(a_0)))$ et $Right(P_\pi(k(a_l)))$ ou bien à $Left(P_\pi(k(a_0)))$ et $Left(P_\pi(k(a_l)))$. Dans le cas où $I = \{[0, q-1]\}$ alors $W_{\pi,c}^-(k(a_0), a_0) + W_{\pi,c}^+(k(a_l), a_l) = 0$ soit parce-que les deux termes sont nuls, soit pour la même raison que celle expliquée plus haut concernant les intervalles $[a_i, a_{i+1}[$ (contributions de signes opposés).

Finalement, pour tout intervalle $[i_1, i_2] \in I$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=i_1}^{i_2} L_{\pi,c}^\pi(i) &= \sum_{i=1}^l (W_{\pi,c}^-(k(a_i), a_i) + W_{\pi,c}^+(k(a_i), a_i)) \\ &= W_{\pi,c}^-(k(a_1), a_1) + W_{\pi,c}^+(k(a_l), a_l) + \\ &\quad \sum_{i=1}^l (W_{\pi,c}^+(k(a_i), a_i) W_{\pi,c}^-(k(a_{i+1}), a_{i+1})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Lemme 11.6 *Si π est une $(6+)$ -boucle simple incluse dans un cube $2 \times 2 \times 2$ et c est un 18-chemin fermé tel que l'hypothèse $\mathcal{H}(\pi, c)$ est vérifiée, alors $L_{\pi,c} = 0$.*

Preuve : Dans la Figure 11.10 sont représentés, à une orientation près et pour un point p donné, toutes les 6–boucles simples possibles dans un cube $2 \times 2 \times 2$ de p à p (la preuve pour n'importe lequel des sept autres points p est similaire).

Dans cette preuve, il suffit de montrer que $L_{\pi,c} = 0$ quand π est l'une des boucles (a) . . . (i) de la Figure 11.10. Alors, en utilisant la Proposition 11.2 et le fait que tout autre boucle de la Figure 11.10 peut être obtenue par une séquence d'insertions/suppressions de boucles de types (a) . . . (i), on aura montré que $L_{\pi,c} = 0$ quand π est n'importe laquelle des boucles de la Figure 11.10.

Dans la preuve du Lemme 11.5, nous avons déjà montré que $L_{\pi,c} = 0$ quand π est l'une des boucles du type (a), (b), (c), (d), (e) ou (f) (en effet, c , en tant que 18–chemin, est aussi un 26–chemin).

– Cas des Figures 11.10(g), (h) et (i) :

La preuve dans ces cas est identique à celle du cas de la Figure 11.10(f) (voir la preuve de la Proposition 11.5). Ainsi, on remarque là encore l'existence d'un entier $k(i)$ tel que $L_{\pi,c}^\pi(i) = W_{\pi,c}(k(i), i)$. En effet, seulement un des deux voxels de π qui ont la même projection ne peut avoir une contribution non nulle. On utilise encore une fois le fait que pour un intervalle $[i_1, i_2] \in I$ donné (tel que défini dans le cas précédent), soit $x_i^3 < y_{k(i)}^3$ pour tout $i \in [i_1, i_2]$, soit $x_i^3 > y_{k(i)}^3$ pour tout $i \in [i_1, i_2]$. En effet, ceci provient du fait que les deux voxels du cube qui ne sont pas des voxels de π ne sont pas 18–adjacents, de telle sorte que le chemin c ne peut avoir d'intervalle d'intersection projective avec π ayant des voxels de part et d'autre de π (au sens de la troisième coordonnée). Le reste de la preuve est identique.

– Autres cas: Maintenant, si π est une boucle simple dans \mathcal{C} telle que $L_{\pi,c} = 0$ et π' est une (6+)–boucle simple dans \mathcal{C} obtenue par insertion d'une des boucles (a), . . . , (i) dans π , alors $L_{\pi,c} = L_{\pi',c} = 0$. En effet, si $\pi = \pi_1.(x).\pi_2$ et $\pi' = \pi_1.\gamma.\pi_2$ où γ est une boucle de x à x de l'une des formes (a), . . . , (i), alors $L_{\pi_1.\gamma.\pi_2,c} = L_{\pi_2.\pi_1.\gamma,c}$ puisque le nombre d'entrelacement est invariant par changement de paramètre préservant l'orientation. De plus, d'après la Proposition 11.2 on a $L_{\pi_2.\pi_1.\gamma,c} = L_{\pi_2.\pi_1,c} + L_{\gamma,c}$. Comme on a prouvé que $L_{\gamma,c} = 0$ où γ est de l'une des formes (a), . . . , (i) alors $L_{\pi_2.\pi_1.\gamma,c} = L_{\pi_2.\pi_1,c}$ et on a encore $L_{\pi_2.\pi_1,c} = L_{\pi_1.\pi_2,c}$. Finalement, $L_{\pi',c} = L_{\pi,c}$.

Maintenant, on laisse au lecteur le soin de vérifier que chacun des quinze autres types de boucles simples de la Figure 11.10 peut être obtenu par une séquence d'insertions ou

suppressions de boucles de la forme $(a), \dots, (i)$ à partir d'un chemin trivial. Alors, on obtient que $L_{\pi,c} = 0$ quand π est n'importe laquelle des boucles représentées dans la Figure 11.10.

A titre d'exemple, on donne ici la séquence d'insertions/suppressions de boucles simples de types $(a) \dots (i)$ qui permet d'obtenir le chemin représenté dans la Figure 11.11 (Page 192) à partir d'un chemin réduit au voxel a .

(a, d, c, b, a) peut être obtenu à partir de (a) par insertion d'une boucle de la forme donnée dans la Figure 11.10(f).

$(a, d, h, g, c, d, c, b, a)$ peut être obtenu à partir (a, d, c, b, a) par insertion d'une boucle de la forme donnée dans la Figure 11.10(e).

(a, d, h, g, c, b, a) peut être obtenu à partir de $(a, d, h, g, c, d, c, b, a)$ par suppression d'une boucle comme celle de la Figure 11.10(b).

$(a, d, h, g, c, b, f, e, a, b, a)$ peut être obtenu à partir de (a, d, h, g, c, b, a) par insertion d'une boucle de la forme donnée par la Figure 11.10(e).

$(a, d, h, g, c, b, f, e, a)$ peut être obtenu à partir de $(a, d, h, g, c, b, f, e, a, b, a)$ par suppression d'une boucle comme celle de la Figure 11.10(b). \square

Preuve du Théorème 14 : D'après la Proposition 11.4 il est suffisant de démontrer le Théorème 14 dans la cas où π et π' sont identiques à l'insertion/suppression d'une n -boucle simple ($n \in \{6, 6+\}$). Dans ce cas, supposons que $\pi = \pi_1.(x).\pi_2$ et $\pi' = \pi_1.\gamma.\pi_2$ où γ est une boucle simple de x à x incluse dans un cube $2 \times 2 \times 2$ \mathcal{C} (dans un carré 2×2 si $(n, \bar{n}) = (6, 26)$). Comme le nombre d'entrelacement est invariant par changement de paramètre préservant l'orientation, on a $L_{\pi',c} = L_{\pi_1.\gamma.\pi_2,c} = L_{\gamma.\pi_2.\pi_1,c}$. D'après la Proposition 11.2, $L_{\gamma.\pi_2.\pi_1,c} = L_{\gamma,c} + L_{\pi_2.\pi_1,c}$ ($\pi_2.\pi_1$ est un n -chemin fermé de x à x de même que γ). Maintenant, comme γ est une boucle simple dans \mathcal{C} et d'après le Lemme 11.5 ou le Lemme 11.6 on a $L_{\gamma,c} = 0$. Finalement, $L_{\gamma.\pi_2.\pi_1,c} = L_{\pi_2.\pi_1,c} = L_{\pi_1.\pi_2,c} = L_{\pi,c}$. \square

11.5.2 Invariance par déformation du 26-chemin

Définition 11.8 Soient c et c' deux 26-chemins dans $X \subset \mathbb{Z}^3$. On dit que c et c' sont identiques à l'insertion d'un triangle ou d'un demi-tour près si :

- Soit $c = c_1.(x).c_2$ et $c' = c_1.(x, y, z, x).c_2$ où les voxels x, y et z sont inclus dans un cube $2 \times 2 \times 2$ \mathcal{C} ,
- soit $c = c_1.(x).c_2$ et $c' = c_1.(x, y, x).c_2$.

On dit que c et c' sont identiques à l'insertion/suppression d'un triangle ou d'un demi-tour près si soit c et c' , soit c' et c sont identiques à l'insertion d'un triangle ou d'un demi-tour près.

Proposition 11.7 Soient c et c' deux 26–chemins dans $X \subset \mathbb{Z}^3$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) c est 26–homotope à c' dans X .

ii) Il existe une séquence $S = (c^0 = c, \dots, c^k = c')$ de chemins dans X tels que pour tout $i \in [1, k[$ les chemins c^{i-1} et c^i sont identiques à l'insertion/suppression d'un triangle ou d'un demi-tour près.

Si la Propriété *ii)* est satisfaite, on note $c \equiv_{\text{TBF}} c'$.

Preuve : *ii)* \Rightarrow *i')* est immédiat car l'insertion d'un demi-tour ou d'un triangle est un cas particulier de 26–déformation élémentaire.

i') \Rightarrow *ii)* réciproquement, d'après la Définition 2.11, il est suffisant de prouver *ii)* si c et c' sont identiques à une 26–déformation élémentaire près. On suppose que $c = c_1 \cdot \gamma \cdot c_2$ et $c' = c_1 \cdot \gamma' \cdot c_2$ où γ et γ' ont les mêmes extrémités et sont inclus dans un cube $2 \times 2 \times 2 \mathcal{C}$. Par induction sur la longueur de γ on montre qu'il existe une séquence d'insertions de triangles ou de demi-tours qui permet de transformer γ en un chemin réduit à ses extrémités.

Supposons que $\gamma = \gamma^0$ soit de longueur $l \geq 2$. Alors on a $\gamma^0 = \gamma_1^0 \cdot (x, y, z) \cdot \gamma_2^0$. Maintenant, par insertion d'un demi-tour on peut obtenir le chemin $\gamma_1^0 \cdot (x, y, z) \cdot (z, x, z) \cdot \gamma_2^0 = \gamma_1^0 \cdot (x, y, z, x, z) \cdot \gamma_2^0$; ensuite, par suppression d'un triangle, on obtient le chemin $\gamma^1 = \gamma_1^0 \cdot (x, z) \cdot \gamma_2^0$ qui est de longueur $l - 1 < l$. Par induction, on peut obtenir un chemin $\gamma^k = (p, q)$ de longueur 1 où p et q sont les extrémités communes à γ et γ' .

De la même façon, on peut obtenir le chemin γ' à partir du chemin (p, q) après une séquence d'insertions de triangles et de suppressions de demi-tours. Finalement, une 26–déformation élémentaire peut se ramener à une séquence d'insertions/suppressions de triangles ou demi-tours. \square

Lemme 11.8 Si c est un 26–triangle, alors pour tout 6–chemin π tel que $\mathcal{H}(\pi, c)$ soit vérifiée, on a $L_{\pi, c} = 0$.

Preuve : Soit c un 26-triangle. On considère tout d'abord le cas où exactement deux voxels de c ont la même projection (les cas où tous les voxels de c ont la même projection entraîne immédiatement que $L_{\pi,c} = 0$).

On suppose que deux voxels de $c = (x_0, x_1, x_2, x_0)$, disons x_1 et x_2 sans perte de généralité, sont tels que $\mathcal{P}(x_1) = \mathcal{P}(x_2)$. Maintenant, pour tout 6-chemin π on a $L_{\pi,c} = L_{\pi,c}^\pi(0) + L_{\pi,c}^\pi(1) + L_{\pi,c}^\pi(2)$. Mais d'après la Définition 11.4, $L_{\pi,c}^\pi(0) = 0$ puisque $Succ_c(0) = 1$ et $Pred_c(0) = 2$ et $\mathcal{P}(x_1) = \mathcal{P}(x_2)$. On a aussi $L_{\pi,c}^\pi(1) = 0$ puisque $Succ_c(1) = Pred_c(1) = 0$. Finalement, $L_{\pi,c}^\pi(2) = 0$ car $\mathcal{P}(x_1) = \mathcal{P}(x_2)$.

Maintenant, supposons que les trois voxels de c ont des projections distinctes deux à deux.

Soient $c = (x_0, x_1, x_2, x_3 = x_0)$ et $\pi = (y_k)_{k=0,\dots,p}$; et soient $P = \{\mathcal{P}(x_0), \mathcal{P}(x_1), \mathcal{P}(x_2)\}$ et $K = \{[k_1, k_2] \mid \mathcal{P}(y_{k_1-1}) \notin P, \mathcal{P}(y_{k_2+1}) \notin P \text{ et } \mathcal{P}(y_i) \in P \text{ pour tout } i \in [k_1, k_2]\}$. Si $\mathcal{P}(y_k) \in P$ pour tout $k \in [0, p]$ alors $K = \{[0, p-1]\}$. Il est clair que $L_{\pi,c} = \sum_{[k_1, k_2] \in K} \sum_{k=k_1}^{k_2} L_{\pi,c}^c(k)$.

Pour tout $[k_1, k_2] \in K$ et tout $k \in [k_1, k_2]$ on note $i(k)$ le seul indice d'un voxel de c tel que $\mathcal{P}(x_{i(k)}) = \mathcal{P}(y_k)$. Alors, pour un tel k , on a $L_{\pi,c}^c(k) = W_{\pi,c}(k, i(k))$. Donc,

$$L_{\pi,c} = \sum_{[k_1, k_2] \in K} \sum_{k=k_1}^{k_2} W_{\pi,c}(k, i(k)).$$

Maintenant, par définition de la contribution au nombre d'entrelacement, il est clair que

$$\text{pour tout } [k_1, k_2] \in K : \sum_{k=k_1}^{k_2} W_{\pi,c}(k, i(k)) = \sum_{k=k_1}^{Pred_\pi(k_2)+1} W_{\pi,c}(k, i(k)).$$

Mais pour $k \in [k_1+1, Pred_\pi(k_2)]$, la contribution $W_{\pi,c}(k, i(k))$ est égale à 0 soit parce-que $\{P_\pi(k)^{Pred}, P_\pi(k)^{Succ}\} \subset \{P_c(i(k))^{Pred}, P_c(i(k))^{Succ}\}$, soit parce-que $\mathcal{P}(y_k) = \mathcal{P}(y_{k-1})$.

De la même façon, on remarque que $W_{\pi,c}^+(k_1, i(k_1)) = W_{\pi,c}^-(Pred_\pi(k_2)+1, i(Pred_\pi(k_2)+1)) = 0$. D'autre part, $W_{\pi,c}^-(k_1, i(k_1)) + W_{\pi,c}^+(Pred_\pi(k_2)+1, i(Pred_\pi(k_2)+1)) = 0$. En effet, selon le choix d'une paramétrisation du triangle c , il est clair que les projections des voxels $P_\pi(a_1)^{Pred}$ et $P_\pi(Pred_\pi(k_2)+1)^{Succ}$ appartiendront soit respectivement à $Right(P_c(i(a_1)))$ et $Right(P_c(i(Pred_\pi(k_2)+1))$; soit à $Left(P_c(i(a_1)))$ et $Left(P_c(i(Pred_\pi(k_2)+1))$. Si $K = \{[0, p-1]\}$ alors $W_{\pi,c}^-(0, i(0)) = W_{\pi,c}^+(Pred_\pi(p)+1, i(Pred_\pi(p)+1)) = 0$ d'après la définition de $W_{\pi,c}(k, i)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_1}^{k_2} W_{\pi,c}(k, i(k)) &= W_{\pi,c}(k_1, i(k_1)) + \sum_{k=k_1+1}^{Pred_\pi(k_2)} W_{\pi,c}(k, i(k)) \\ &\quad + W_{\pi,c}(Pred_\pi(k_2)+1, i(Pred_\pi(k_2)+1)) = 0 \end{aligned}$$

et finalement $L_{\pi,c} = 0$. \square

Preuve du Théorème 15 dans le cas (6, 26) : La preuve est identique à celle du Théorème 14 en utilisant la Proposition 11.7 au lieu de la Proposition 11.4 et la Proposition 11.3 au lieu de la Proposition 11.2. Le Lemme 11.8 montre que $L_{\pi,\gamma} = 0$ quand γ est un 26-triangle. Le cas où γ est un demi-tour est trivial et on a aussi $L_{\pi,\gamma} = 0$ dans cas. \square

11.5.3 Indépendance par déformation du 18-chemin

Définition 11.9 Soient c et c' deux 18-chemins fermés dans $X \subset \mathbb{Z}^3$. On dit que c et c' sont identiques à l'insertion d'un triangle, demi-tour ou carré près respectivement si :

– $c = c_1.(x).c_2$ et $c' = c_1.(x, y, z, x).c_2$ où les voxels x, y et z sont inclus dans un cube $2 \times 2 \times 2 \mathcal{C}$,

– $c = c_1.(x).c_2$ et $c' = c_1.(x, y, x).c_2$,

– $c = c_1.(x).c_2$ et $c' = c_1.\gamma.c_2$ où γ est un des chemins fermés représentés dans la Figure 11.13 (au choix d'une paramétrisation près).

On dit que c et c' sont identiques à l'insertion/suppression d'un triangle, demi-tour ou carré près si soit c et c' , soit c' et c sont identiques à l'insertion d'un triangle, demi-tour ou carré près.

Proposition 11.9 Soient c et c' deux 18-chemins fermés dans $X \subset \mathbb{Z}^3$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) c est 18-homotope à c' dans X .

ii) Il existe une séquence $S = (c^0, \dots, c^k)$ de chemins dans X avec $c^0 = c$ et $c^k = c'$, telle que pour tout $i \in [1, k]$, les chemins c^{i-1} et c^i sont identiques à l'insertion/suppression d'un triangle, demi-tour ou carré près.

Si la Propriété ii) est satisfaite, on note $c \equiv_{\text{TBS}} c'$.

Preuve : i) \Leftarrow ii) est évident car l'insertion/suppression d'un triangle, demi-tour ou carré est un cas particulier de 18-déformation élémentaire.

i) \Rightarrow ii) Réciproquement, d'après la Proposition 11.4, si c' et c sont 18-homotopes, alors il existe une séquence d'insertions/suppressions de 18-boucles simples qui permet d'obtenir c' à partir de c . On montre que chaque insertion/suppression d'une 18-boucle

simple peut se ramener à une séquence d'insertions/suppressions de triangles, demi-tours ou carrés.

Soit γ une 18–boucle simple dans un cube $2 \times 2 \times 2$. Par induction sur la longueur de γ , on montre que γ peut être transformé en un chemin trivial par une séquence d'insertion/suppression de triangles, demi-tours ou carrés. Ceci prouvera effectivement que toute 18–boucle simple peut être obtenue par une séquence d'insertions/suppressions de triangles, demi-tours ou carrés à partir d'un chemin trivial. Notons que tous les chemins de cette séquence ne contiennent que des voxels du chemin fermé γ de sorte que ces chemins sont tous bien des chemins dans X .

Soit $\gamma = \gamma^0$ une 18–boucle simple, alors étant donné un chemin γ^k on doit distinguer plusieurs cas :

- Si γ^k est trivial, il ne reste alors rien à prouver dans ce cas.
- Si γ^k est de longueur 2, soit $\gamma^k = (x, y, x)$, alors $\gamma^{k+1} = (x)$ peut être obtenu par suppression d'un demi-tour.
- Si γ^k est de longueur 3, soit $\gamma^k = (x, y, z, x)$, alors $\gamma^{k+1} = (x)$ peut être obtenu par suppression d'un triangle.
- Si γ^k est de longueur $l > 3$, alors on distingue deux cas :
 - S'il existe x, y et z dans γ^k tels que $\gamma^k = \gamma_1^k \cdot (x, y, z) \cdot \gamma_2^k$ où x est 18–adjacent à z . Dans ce cas, le chemin $\gamma_1^k \cdot (x, y, z) \cdot (z, x, z) \cdot \gamma_2^k = \gamma_1^k \cdot (x, y, z, x, z) \cdot \gamma_2^k$ peut être obtenu par insertion d'un demi-tour et alors le chemin $\gamma^{k+1} = \gamma_1^k \cdot (x, z) \cdot \gamma_2^k$ est obtenu par suppression d'un triangle. Le chemin γ^{k+1} est de longueur égale à $l - 1$.
 - S'il n'existe aucune sous-séquence (x, y, z) dans γ^k telle que x soit 18–adjacent à z . Alors, dans ce cas on montre que γ est un 18–carré (i.e. l'une des 18–boucles de la Figure 11.13). En effet, nous avons représenté dans la Figure 11.12 un cube $2 \times 2 \times 2$. Supposons que γ soit de longueur $l > 3$ et ne contienne pas de triangle. Considérons alors deux voxels quelconques consécutifs de γ ; à une rotation près, ces deux voxels peuvent avoir la configuration du couple (a, b) ou bien celle du couple (a, h) de la Figure 11.12. Tout d'abord, supposons que ces deux voxels aient la même configuration que les voxels a et b de la Figure 11.12 et essayons d'étendre ce "morceau" d'une 18–boucle simple en prenant soin de ne pas ajouter de voxel qui soit 18–adjacent au prédécesseur de son prédécesseur. Alors, le seul type de boucle que l'on peut obtenir est celui représenté par la Figure 11.13(b). De la même façon, en essayant d'étendre la séquence (a, h) en une

18–boucle simple, nous obtenons aussi le chemin représenté dans la Figure 11.13(b). Finalement, γ^k est un 18–carré qui peut être supprimé (par suppression d'un 18–carré!) pour obtenir un chemin trivial γ^{k+1} .

Dans tous les cas, on peut obtenir un chemin γ^{k+1} de longueur soit inférieure à l soit égale à 1 par insertion/suppression d'un triangle, demi-tour ou carré. Par induction, il est clair qu'il doit exister un entier h tel que γ^h est trivial. Alors, toute 18–boucle simple peut être insérée ou supprimée dans un 18–chemin fermé à l'aide d'une séquence d'insertions/suppressions de triangles, demi-tours ou carrés. Ceci suffit à montrer que $i) \Rightarrow ii)$.

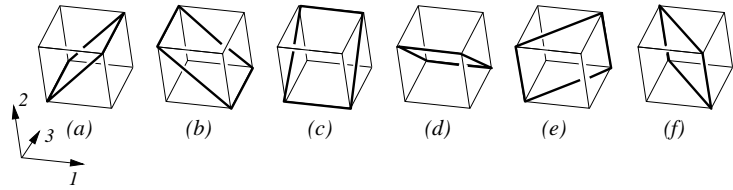
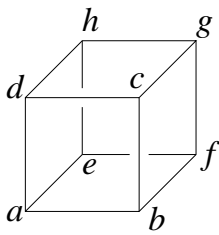


FIG. 11.12: Un cube $2 \times 2 \times 2$.

FIG. 11.13: Les 18–boucles simples dépourvues de triangles dans un cube $2 \times 2 \times 2$.

□

Lemme 11.10 Si c est un 18–carré et π est un $(6+)$ –chemin fermé tel que l'hypothèse $\mathcal{H}(\pi, c)$ soit vérifiée, alors $L_{\pi, c} = 0$.

Preuve : Soit $c = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_0)$.

– Cas d'un carré parmi ceux représentés dans la Figure 11.13(a) et la Figure 11.13(b).

Dans ce cas, on a $L_{\pi, c} = L_{\pi, c}^{\pi}(0) + L_{\pi, c}^{\pi}(1) + L_{\pi, c}^{\pi}(2) + L_{\pi, c}^{\pi}(3)$ mais pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ $L_{\pi, c}^{\pi}(i) = 0$ soit parce-que $\mathcal{P}(x_i) = \mathcal{P}(x_{i-1})$, soit parce-que $P_c(i)^{Pred} = P_c(i)^{Succ}$.

– Cas d'un carré d'une des formes représentées dans les Figures 11.13(c), 11.13(d), 11.13(e) et 11.13(f).

La preuve du lemme dans ce cas est identique au cas de la Figure 11.10(f) dans la preuve du Lemme 11.5, tout en étant légèrement plus simple puisque le cas où deux voxels consécutifs de π ont des projections 8–adjacentes qui ne sont pas 4–adjacentes ne peut se produire puisque c est un 6–chemin ou un $(6+)$ –chemin. Notons que, pour utiliser le Lemme 11.5, on doit utiliser la contribution indirecte $M_{c, \pi}$, au lieu de $W_{\pi, c}$ comme dans le Lemme 11.5. □

Preuve du Théorème 15 dans le cas $(6, 18)$: Un fois encore, la preuve est identique à celle du Théorème 14 en utilisant la Proposition 11.9 au lieu de la Proposition 11.4 et la Proposition 11.3 au lieu de la Proposition 11.2. Le Lemme 11.8 montre que $L_{\pi, \gamma} = 0$ quand γ est un 18-triangle (qui est aussi un 26-triangle). Le cas où γ est un demi-tour est trivial et on a aussi $L_{\pi, \gamma} = 0$ dans ce cas. Finalement, le Lemme 11.10 est utilisé pour prouver que $L_{\pi, \gamma} = 0$ quand γ est un carré. \square

Chapitre 12

Une caractérisation concise de la préservation de la topologie

Nous établissons dans ce chapitre le résultat principal de cette partie, à savoir le fait qu'un critère équivalent pour la préservation de la topologie est obtenu en utilisant les seules Conditions *i*), *ii*) et *iii*) de la Définition 10.5. En d'autres termes, nous prouvons dans ce chapitre le théorème suivant qui donne une définition des points simples équivalente à la Définition 10.5. Dans ce chapitre, $(n, \bar{n}) \in \{(26, 6), (6, 26)\}$.

Théorème 16 *Soient $X \subset \mathbb{Z}^3$ et $x \in X$. Le voxel x est n -simple pour $n \in \{6, 26\}$ si :*

- i) X et $X \setminus \{x\}$ ont le même nombre de composantes n -connexes.*
- ii) \bar{X} et $\bar{X} \cup \{x\}$ ont le même nombre de composantes \bar{n} -connexes.*
- iii) Pour chaque voxel B de $X \setminus \{x\}$, le morphisme de groupes $i_* : \Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B) \longrightarrow \Pi_1^n(X, B)$ induit par l'application d'inclusion $i : X \setminus \{x\} \longrightarrow X$ est un isomorphisme.*

Puisque les voxels qui satisfont à la Définition 10.5 vérifient évidemment les trois conditions du Théorème 16, nous n'avons qu'à démontrer que les voxels qui vérifient les conditions *i*), *ii*) et *iii*) du Théorème 16 satisfont aussi à la Définition 10.5. Pour ce faire, nous montrons tout d'abord que tout voxel vérifiant les trois conditions du Théorème 16 vérifie aussi la caractérisation locale des voxels simples donnée par la Proposition 10.1 (Section 10.2); et nous montrerons ensuite que cette caractérisation locale est telle que les voxels qui la vérifie satisfont aussi les quatre conditions de la Définition 10.5.

Dans la suite de ce chapitre, x est un voxel de X qui est une partie de \mathbb{Z}^3 et $(n, \bar{n}) \in \{(6, 26), (26, 6)\}$.

12.1 Caractérisation locale de la nouvelle définition

Le but de cette section est de prouver la proposition suivante qui établit le fait que les Conditions *i*), *ii*) et *iii*) du Théorème 16 impliquent que le voxel x vérifie la caractérisation locale des voxels simples utilisant les nombres topologiques (voir Section 10.2).

Proposition 12.1 *Si x vérifie les conditions du Théorème 16 alors $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1$.*

Afin de prouver cette proposition, nous devons introduire plusieurs autres proposition et lemmes. La preuve de la proposition suivante est adaptée de [BM94] pour le formalisme employé ici qui utilise le groupe fondamental discret.

Proposition 12.2 *Si $T_n(x, X) \geq 2$, alors soit une composante n -connexe de X est créée par suppression de x , soit il existe un voxel $B \in X \setminus \{x\}$ tel que le morphisme $i_* : \Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B) \longrightarrow \Pi_1^n(X, B)$ induit par l'inclusion de $X \setminus \{x\}$ dans X n'est pas surjectif.*

La preuve de la Proposition 12.2 utilisera le nombre suivant ν (voir la Section 10.2 pour la définition du voisinage géodésique $G_n(x, X)$).

Définition 12.1 *Soit C une composante n -connexe de $G_n(x, X)$ et soit $\alpha = (\alpha_i)_{i=0, \dots, l}$ un n -chemin fermé dans X . On dit que le n -chemin α passe de C à x à l'indice i si $\alpha_i \in C$ et $\alpha_{i+1} = x$; et on dit que α passe de x à C à l'indice i si $\alpha_i = x$ et $\alpha_{i+1} \in C$. Alors, on définit $\nu_n(x, \alpha, C)$ comme le nombre de fois où le chemin α passe de C à x moins le nombre de fois où α passe de x à C .*

Lemme 12.3 *Soit C une composante n -connexe de $G_n(x, X)$ et soient α et α' deux n -chemins fermés de B à B dans X où $B \in X \setminus \{x\}$. Si $\alpha \simeq_n \alpha'$ dans X alors $\nu_n(x, \alpha, C) = \nu_n(x, \alpha', C)$.*

Preuve du Lemme 12.3 : Il est suffisant de prouver ce lemme quand α et α' sont identiques à une n -déformation élémentaire près. Alors, on a $\alpha = \pi_1 \cdot \gamma \cdot \pi_2$ et $\alpha' = \pi_1 \cdot \gamma' \cdot \pi_2$

où γ et γ' ont les mêmes extrémités et sont tous les deux inclus dans un même cube $2 \times 2 \times 2 \mathcal{C}$ si $(n, \bar{n}) = (26, 6)$, dans un même carré 2×2 si $(n, \bar{n}) = (6, 26)$. Il est évident que $\nu_n(x, \alpha, C) - \nu_n(x, \alpha', C) = \nu_n(x, \gamma, C) - \nu_n(x, \gamma', C)$.

- Cas $(6, 26)$: Dans ce cas, \mathcal{C} est un carré 2×2 . Si $x \notin \mathcal{C}$ alors il est clair que $\nu_6(x, \gamma, C) = \nu_6(x, \gamma', C) = 0$. Si $x \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \cap C = \emptyset$ alors $\nu_6(x, \gamma, C) = \nu_6(x, \gamma', C) = 0$.

Maintenant, si $x \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \cap C \neq \emptyset$ alors soient a et b les deux extrémités communes aux chemins γ et γ' .

Si x n'a qu'un 6-voisin dans $X \cap \mathcal{C}$, alors comme $\mathcal{C} \cap C \neq \emptyset$ on en déduit que ce voxel appartient à C . Dans ce cas, $\nu_6(x, \gamma, C) = \nu_6(x, \gamma', C) = 0$ si $a = b = x$ ou $\{a, b\} \subset C$; $\nu_6(x, \gamma, C) = \nu_6(x, \gamma', C) = +1$ si $a \in C$ et $b = x$; et $\nu_6(x, \gamma, C) = \nu_6(x, \gamma', C) = -1$ si $a = x$ et $b \in C$.

Si x a deux 6-voisins dans $X \cap \mathcal{C}$ et ces deux voisins appartiennent à C alors $\nu_6(x, \gamma, C) = \nu_6(x, \gamma', C) = -1$ si $a \in C$ et $b = x$, $\nu_6(x, \gamma, C) = \nu_6(x, \gamma', C) = +1$ si $a = x$ et $b \in C$, $\nu_6(x, \gamma, C) = \nu_6(x, \gamma', C) = 0$ si $a = b = x$ ou $\{a, b\} \in C$.

Si x a deux 6-voisins dans $X \cap \mathcal{C}$ et seulement un de ces voxels, disons d , appartient à C , alors le voxel restant r de \mathcal{C} qui est 18-adjacent mais pas 6-adjacent à x ne peut appartenir à X et donc pas non plus à C . Il s'ensuit que γ et γ' sont tous les deux inclus dans $\{x, d, r\}$ et que $\nu_6(x, \gamma, C) = \nu_6(x, \gamma', C)$. Finalement, dans tous les cas on a $\nu_6(x, \gamma, C) = \nu_6(x, \gamma', C)$ de sorte que $\nu_6(x, \alpha, C) = \nu_6(x, \alpha', C)$.

- Cas $(26, 6)$: Si $x \notin \mathcal{C}$ alors il est clair que $\nu_{26}(x, \gamma, C) = \nu_{26}(x, \gamma', C) = 0$. Si $x \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \cap C = \emptyset$ alors $\nu_{26}(x, \gamma, C) = \nu_{26}(x, \gamma', C) = 0$. Maintenant, si $x \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \cap C \neq \emptyset$ alors $(\mathcal{C} \cap X) \subset C$ de sorte que γ, γ' sont inclus dans $C \cup \{x\}$. Soient a et b les deux extrémités communes aux chemins γ et γ' . Si $a = b = x$ alors $\nu_{26}(x, \gamma, C) = \nu_{26}(x, \gamma', C) = 0$. Si $a = x$ et $b \in C$ alors $\nu_{26}(x, \gamma, C) = \nu_{26}(x, \gamma', C) = -1$. Si $a \in C$ et $b = x$ alors $\nu_{26}(x, \gamma, C) = \nu_{26}(x, \gamma', C) = +1$. Si $\{a, b\} \subset C$ alors $\nu_{26}(x, \gamma, C) = \nu_{26}(x, \gamma', C) = 0$. Finalement, dans tous les cas on a $\nu_{26}(x, \gamma, C) = \nu_{26}(x, \gamma', C)$ de sorte que $\nu_{26}(x, \alpha, C) = \nu_{26}(x, \alpha', C)$. \square

Preuve de la Proposition 12.2 : Soient C_1 et C_2 les deux composantes n -connexes de $G_n(x, X)$ qui sont n -adjacentes à x . Si C_1 et C_2 ne sont pas n -connectées dans $X \setminus \{x\}$, puisqu'elles sont n -connectées dans X , alors une nouvelle composante n -connexe est créée par suppression de x .

Maintenant, supposons que C_1 et C_2 soient n -connectés dans $X \setminus \{x\}$. Soient a et b deux voxels de X qui sont n -adjacents à x et tels que $a \in C_1$ et $b \in C_2$. Alors, il

existe un n -chemin π de a à b dans $X \setminus \{x\}$. Maintenant, soit π' le n -chemin fermé $(a).\pi.(b, x, a)$. Il est clair que $\nu_n(x, \pi', C_1) = +1$ puisque $x \notin \pi^*$. Supposons qu'il existe dans $A_n^a(X \setminus \{x\})$ un n -chemin fermé α tel que $i_*([\alpha]_{\Pi_1^n(X \setminus \{x\}, a)}) = [\alpha]_{\Pi_1^n(X, a)} = [\pi']_{\Pi_1^n(X, a)}$. Alors, α serait n -homotope à π' dans X , mais comme $\alpha \in A_n^a(X \setminus \{x\})$ on en déduit que $\nu_n(x, \alpha, C_1) = 0$ alors que $\nu_n(x, \pi', C_1) = +1$ par construction du chemin π' . D'après le Lemme 12.3 on déduit que α ne peut pas être n -homotope à π' , aussi le morphisme $i_* : \Pi_1^n(X \setminus \{x\}, a) \longrightarrow \Pi_1^n(X, a)$ induit par l'inclusion de $X \setminus \{x\}$ dans X n'est pas surjectif. \square

Proposition 12.4 *Si $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 0$ alors \bar{X} a une composante \bar{n} -connexe de moins que $\bar{X} \cup \{x\}$.*

Preuve : Si $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 0$, alors aucun voxel de \bar{X} n'est \bar{n} -adjacent à x de sorte que $\{x\}$ est à lui seul une composante \bar{n} -connexe de $\bar{X} \setminus \{x\} = \bar{X} \cup \{x\}$. \square

Maintenant, en utilisant le nombre d'entrelacement défini au Chapitre 11 nous pouvons montrer la proposition suivante.

Proposition 12.5 *Si $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) \geq 2$ alors deux composantes \bar{n} -connexes de \bar{X} sont réunies par suppression de x ou bien il existe un voxel $B \in X \setminus \{x\}$ tel que le morphisme $i_* : \Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B) \longrightarrow \Pi_1^n(X, B)$ induit par l'inclusion de $X \setminus \{x\}$ dans X n'est pas injectif.*

L'idée principale de cette partie est d'utiliser le nombre d'entrelacement pour prouver la Proposition 12.5. En effet, avant ces travaux et l'utilisation possible du nombre d'entrelacement, on pouvait prouver assez facilement que lorsque $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) \geq 2$ et qu'aucune composante \bar{n} -connexe de \bar{X} n'est "supprimée" par effacement de x , alors il existe un voxel $V \in \bar{X}$ tel que le morphisme $i_*' : \Pi_1^{\bar{n}}(\bar{X}, V) \longrightarrow \Pi_1^{\bar{n}}(\bar{X} \cup \{x\}, V)$ induit par l'inclusion de \bar{X} dans $\bar{X} \cup \{x\}$ n'est pas surjectif (le preuve de ceci est identique à celle de la Proposition 12.2). En d'autres termes, "un tunnel est créé dans $\bar{X} \cup \{x\}$ " par effacement du voxel x de X . Ici, nous montrons que dans ce cas "un tunnel est aussi créé dans $X \setminus \{x\}$ ". Plus précisément, on montre qu'il existe un voxel $B \in X \setminus \{x\}$ tel que le morphisme $i_* : \Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B) \longrightarrow \Pi_1^n(X, B)$ induit par l'inclusion de $X \setminus \{x\}$ dans X n'est pas injectif.

Avant de prouver la Proposition 12.5, nous devons établir plusieurs lemmes qui utilisent les définitions suivantes.

Définition 12.2 (voxel 6–extrémité) *Soit x un voxel de $Z \subset \mathbb{Z}^3$, alors x est appelé un voxel 6–extrémité de Z si x possède exactement un 6–voisin dans Z .*

Définition 12.3 (ensemble $K_6(y, X, C)$) *Soit y un voxel de X tel que $T_6(y, X) = 1$ et $T_{26}(y, \bar{X}) \geq 2$. Soit $A = G_6(y, X)$, qui est 6–connexe, et soit C l’une des composantes 26–connexes de $G_{26}(y, \bar{X})$. Alors, $K_6^0(y, X, C)$ est l’ensemble des voxels de A qui sont 26–adjacents à un voxel de C . On définit $K_6(y, X, C)$ comme l’ensemble obtenu après la suppression récursive des voxels 6–extrémités dans K_6^0 .*

Définition 12.4 (voxel 26–gras) *Soit y un voxel de X , alors y est un voxel 26–gras dans X si tous les voxels de X qui sont 26–adjacents à y sont inclus dans un même cube $2 \times 2 \times 2$.*

Définition 12.5 (ensemble $K_{26}(y, X, C)$) *Soit y un voxel de X tel que $T_{26}(y, X) = 1$ et $T_6(y, \bar{X}) \geq 2$. Soit $A = G_{26}(y, X)$, qui est 26–connexe, et soit C une composante 6–connexe de $G_6(y, \bar{X})$. Alors, $K_{26}^0(y, X, C)$ est l’ensemble des voxels de A qui sont 6–adjacents à un voxel de C . On définit $K_{26}(y, X, C)$ comme l’ensemble obtenu après la suppression récursive des voxels 26–gras dans K_{26}^0 .*

Lemme 12.6 *Si $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) \geq 2$, alors il existe une composante \bar{n} –connexe C de $G_{\bar{n}}(x, \bar{X})$ telle que $K_n(x, X, C)$ est une n –courbe fermée simple.*

Preuve : Afin de démontrer ce lemme, nous avons examiné à l’aide d’un programme informatique toutes les 2^{26} configurations possibles de points dans $N_{26}(x)$. Pour chacune de ces configurations telles que $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) \geq 2$ (il y a 34 653 792 configurations ayant cette propriété si $(n, \bar{n}) = (26, 6)$ et 4 398 983 dans le cas $(n, \bar{n}) = (6, 26)$), nous avons déterminé les différentes composantes \bar{n} –connexes C_i de $G_{\bar{n}}(x, \bar{X})$ et vérifié que pour au moins une d’entre elles, l’ensemble $K_n(x, X, C_i)$, calculé d’après la Définition 12.3 ou la Définition 12.5, est une n –courbe fermée simple. Le code source en langage C de ce programme est disponible dans l’Annexe A. \square

Lemme 12.7 *Soit $x \in X$ tel que $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) \geq 2$ et soit $A = G_n(x, X)$. Alors il existe une n -courbe fermée simple paramétrée c dans A et un \bar{n} -chemin fermé $\beta = (a).\beta'.(b, x, a)$ tels que :*

- $\beta^* \subset \overline{N_{26}(x) \cap X}$,
- a et b sont les deux seuls voxels de β' dans $N_{26}(x)$,
- Si $(n, \bar{n}) = (6, 26)$ alors $L_{c,\beta} = \pm 1$ et si $(n, \bar{n}) = (26, 6)$ alors $L_{\beta,c} = \pm 1$.

Voir la Définition 11.5 pour la définition du nombre d'entrelacement $L_{\beta,c}$ ou $L_{c,\beta}$.

Preuve du Lemme 12.7 dans le cas $(n, \bar{n}) = (6, 26)$:

D'après le Lemme 12.6, si $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) \geq 2$ alors on peut trouver une 6-courbe fermée simple $c = K_6(x, X, C)$ dans $G_6(x, X)$ pour une certaine composante C . De plus, par définition de l'ensemble $K_6(x, X, C)$, chaque voxel de cette courbe est 26-adjacent à la composante 26-connexe C de $G_{26}(x, \bar{X})$. Dans la Figure 12.1, nous avons représenté à rotations et symétries près toutes les 6-courbes fermées simples possibles dans le 26-voisinage d'un voxel x . Nous devons examiner chacune de ces courbes et montrer qu'on peut trouver dans chaque cas une 6-courbe fermée simple dans $G_6(x, X)$ ainsi qu'un 26-chemin fermé β dans $\bar{X} \cup \{x\}$ qui vérifient les propriétés énoncées dans le Lemme 12.7. \square

Cas de la Figure 12.1(a)

D'après la définition de $K_6(x, X, C)$, chaque voxel de c doit être 26-adjacent à C . Alors, deux cas peuvent se produire : soit C est composé du seul voxel z ou bien C ne contient pas z . Si $C = \{z\}$, alors comme $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) \geq 2$, au moins un des voxels restants qui ne sont pas noirs doit appartenir à une composante connexe de $G_{26}(x, \bar{X}) = N_{26}(x) \cap X$ différente de $C = \{z\}$. Soit u un tel voxel, alors il est clair que u et z peuvent être connectés par un 26-chemin β' dans $\overline{N_{26}(x) \cap X}$ tel que $L_{c,(u).\beta'.(z,x,u)} = \pm 1$ comme représenté dans la Figure 12.2 où c est une paramétrisation de l'ensemble des voxels de la Figure 12.1(a). Dans cette figure, il est clair que le seul couple d'indices de c et $\beta = (u).\beta'.(z, x, u)$ qui ait une contribution (voir Définition 11.4) non nulle est le couple correspondant au voxel x de β et a de c . Maintenant, d'après la définition de cette contribution, on a $L_{c,\beta} = \pm 1$. Si $z \notin C$ et $z \notin X$ alors z constitue une composante 26-connexe de $G_{26}(x, \bar{X})$ et dans ce cas z peut être relié à un voxel quelconque de C par un chemin β' tel que le chemin

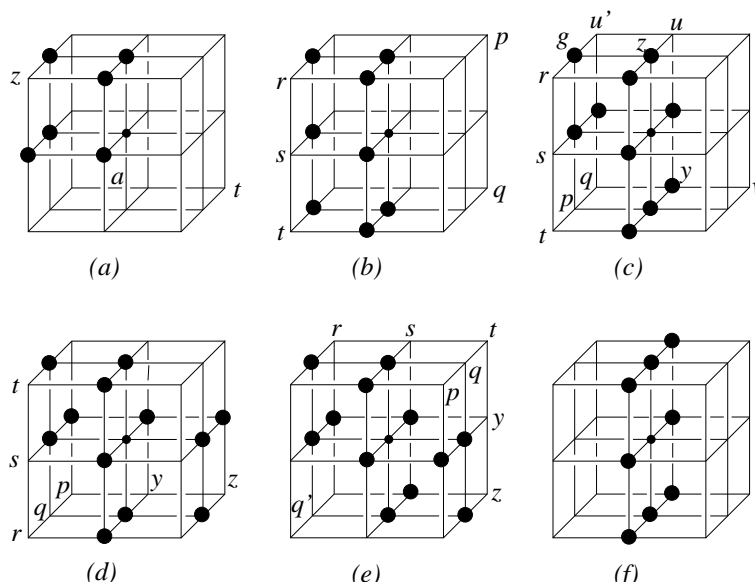


FIG. 12.1: Les 6-courbes fermées simples possibles (en points noirs) dans $N_{18}(x)$ à rotations et symétries près.

$\beta = (u).\beta'.(z, x, u)$ vérifie les propriétés du Lemme 12.7 avec la 6-courbe fermée simple c constituée par les voxels noirs de la Figure 12.1(a).

Finalement, il reste le cas où $z \notin C$ et $z \in X$. Dans ce cas, puisque tous les points de $K_6(x, X, C)$ sont 26-adjacents à C , et du fait que $G_{26}(x, \overline{X})$ doit avoir deux composantes connexes, l'une de ces composantes connexes doit être réduite au voxel t de la Figure 12.1(a). Maintenant, il s'ensuit que tous les points de $N_{26}(x) \cap N_{18}(t)$ doivent appartenir à X . Sinon, il est clair que t serait 26-adjacent à C ; en effet, pour tout voxel v de $N_{26}(x) \cap N_{18}(t)$ il est possible de trouver un voxel c^i du 6-chemin c tel que tout voxel de $N_{26}(x) \setminus (c^* \cup \{z\})$ qui est 26-adjacent à c^i est aussi 26-adjacent à v . On obtient la configuration représentée dans la Figure 12.3. Alors, soit c' la 6-courbe fermée simple constituée des 18-voisins de t , cette courbe est incluse dans C puisque C est connexe et que tous ses voxels sont dans $G_6(x, X)$. De plus, certains points représentés en pointillés dans la Figure 12.3 doivent ne pas appartenir à X (sinon, $T_{26}(x, X)$ serait égal à 1). Soit u l'un de ces voxels; de façon similaire au cas précédent, on peut construire un 26-chemin β' entre t et u tel que le chemin $\beta = (t).\beta'.(u, x, t)$ vérifie les propriétés du Lemme 12.7 avec c' .

Cas de la Figure 12.1(b)

Soit c_1 la 6-courbe fermée simple constituée par les points noirs de la Figure 12.1(b). Si la composante C est une partie de l'ensemble de voxels $\{r, s, t\}$ alors le voxel s doit

appartenir à C car C est 26–connexe et chacun des points de c_1 est 26–adjacent à C . Maintenant, il doit exister au moins une autre composante 26–connexe de voxels blancs (de \overline{X}) dans $N_{26}(x) \setminus (\{r, s, t\} \cup c_1^*)$. Soit u un voxel de cette composante, alors il existe un \bar{n} –chemin β' entre s et u tel que le chemin $\beta = (u).\beta'.(s, x, u)$ vérifie les propriétés du Lemme 12.7 avec la 6–courbe fermée simple c_1 .

Maintenant, supposons que $C \cap \{r, s, t\} = \emptyset$. Les mêmes considérations nous permettent de trouver les chemins β et c qui conviennent aussi dans le cas où le voxel s appartient à \overline{X} , ou bien quand $s \in X$ mais qu'un seul des voxels r et t est dans \overline{X} .

Dans le cas où $s \in X$ et $\{r, t\} \subset \overline{X}$ (voir Figure 12.4) on peut trouver un chemin β' reliant les deux voxels r et t , tel que le chemin $\beta = (r).\beta'.(t, x, r)$ vérifie les propriétés du Lemme 12.7 avec une 6–courbe fermée simple c_2 constituée par les voxels de $N_{26}(x) \cap X$ qui sont 18–adjacents à r .

Reste à examiner le cas où $\{r, s, t\} \subset X$. Dans ce cas, la même argument que celui utilisé dans le cas de la Figure 12.1(a) pour le voxel t implique que la composante 26–connexe de $G_{26}(x, \overline{X})$ différente de C est réduite soit à p soit à q , disons q comme dans la Figure 12.1(b). Il s'ensuit que les voxels de $N_{26}(x) \cap N_{18}(q)$ doivent appartenir à X . En particulier ces voxels constituent une 6–courbe fermée simple c_3 . Maintenant, soit u un voxel quelconque de la composante C , les voxels u et q peuvent être reliés par un chemin β' tel que le chemin $\beta = (q).\beta'.(u, x, q)$ et la courbe fermée simple c_3 vérifient les propriétés du Lemme 12.7.

Cas de la Figure 12.1(c)

Soit c l'ensemble des points noirs de la Figure 12.1(c).

Tout d'abord, on prouve que $\{p, q, r, s, t\} \cap \overline{X} \neq \emptyset$. En effet, supposons que $\{p, q, r, s, t\} \subset X$. Alors, comme $T_{26}(x, \overline{X}) \geq 2$, il doit exister au moins deux composantes 26–connexes dans $B = (\overline{c^*} \cap N_{26}(x)) \setminus \{p, q, r, s, t\}$. Puisque le voxel g doit être 26–adjacent à C , soit le voxel u soit le voxel u' appartient à C . Si $u' \in C$ et $u \notin C$, alors le voxel y (entre autre) ne pourrait être 26–adjacent à C puisque $C = \{u'\}$ dans ce cas. Il s'ensuit que u doit appartenir à C . Maintenant, les autres composantes 26–connexes de $G_{26}(x, \overline{X})$ doivent être réduites au voxel v (pour tout voxel restant $v' \in B$ différent de v , il est possible de trouver un voxel w de c tel que tout voxel B qui est 26–adjacent à w est soit égal, soit 26–adjacent à v' de sorte que ce voxel v' appartiendrait automatiquement à C s'il est dans \overline{X}). De plus, les voxels de $N_{26}(x) \cap N_{18}(v)$ doivent appartenir à X comme décrit

dans la Figure 12.5 de sorte que le voxel y de la Figure 12.5 qui appartient à c n'est pas 26-adjacent à C . Alors, $\{p, q, r, s, t\} \cap \overline{X} \neq \emptyset$.

Si $s \in X$ et $r \in \overline{X}$ alors C ne peut pas être réduit au voxel r ni inclus dans $\{t, p, q\}$ puisque tout les voxels noirs doivent être 26-adjacents à C . Il s'ensuit que $\{u, u'\} \cap C \neq \emptyset$ (g doit être 26-adjacent à C). On peut alors trouver un chemin β' reliant r à u ou bien à u' tel que le chemin $\beta = (r).\beta'.(u, x, r)$ ou bien $\beta = (r).\beta'.(u', x, r)$ vérifie les propriétés du Lemme 12.7 avec la courbe fermée simple c .

Si $s \in X$ et $r \in X$, alors soit u soit u' appartient à C et on peut trouver un chemin β' reliant u ou u' à un voxel de $\{t, p, q\}$ (qui doit être dans \overline{X}) tel qu'on puisse aisément construire un chemin β qui vérifie avec c les propriétés du Lemme 12.7.

Si $s \in \overline{X}$ et $p \in X$, alors C ne peut contenir le voxel s car y doit être 26-adjacent à C . Il s'ensuit que C ne peut contenir un des voxels de l'ensemble $\{r, s, t, p, q\}$ de sorte que soit u soit u' doit appartenir à C . Finalement, on peut trouver un chemin β' reliant s à u ou à u' tel que le chemin $\beta = (s).\beta'.(u, x, s)$ ou bien le chemin $\beta = (s).\beta'.(u', x, s)$ vérifie avec c les propriétés du Lemme 12.7.

Si $s \in \overline{X}$ et $p \in \overline{X}$, comme $T_{26}(x, \overline{X}) \geq 2$, il doit exister un voxel w de \overline{X} dans $(\overline{c^*} \cap N_{26}(x)) \setminus \{p, q, r, s, t\}$. Alors, un 26-chemin convenable β' reliant s à w peut être trouvé de sorte que le chemin $\beta = (s).\beta'.(w, x, s)$ vérifie avec c les propriétés du Lemme 12.7.

Cas de la Figure 12.1(d)

Soit c la courbe fermée simple constituée par l'ensemble des points noirs de la Figure 12.1(d).

On montre qu'un des voxels de $\{p, q, r, s, t, y, z\}$ doit appartenir à \overline{X} . Sinon, l'existence d'une composante connexe de $G_{26}(x, \overline{X})$ différente de C dans $\overline{c^* \cup \{p, q, r, s, t, y, z\}} \cap N_{26}(x)$ serait en contradiction avec le fait que tous les voxels de c sont 26-adjacents à C .

Maintenant, soit u un voxel de $\{p, q, r, s, t, y, z\} \cap \overline{X}$. Si $u \in C$ alors on peut vérifier aisément que n'importe quel voxel dans $\{p, q, r, s, t, y, z\}$ appartient soit à X soit à C . Alors, comme $T_{26}(x, \overline{X}) \geq 2$, il doit exister un voxel v de \overline{X} dans $\overline{c^* \cup \{p, q, r, s, t, y, z\}} \cap N_{26}(x)$. Maintenant, on peut trouver un 26-chemin β' reliant u à v et tel que le chemin $\beta = (u).\beta'.(v, x, u)$ vérifie avec c les propriétés du Lemme 12.7.

Cas de la Figure 12.1(e)

Dans ce cas, l'un des voxels q ou q' doit appartenir à \overline{X} . En effet, dans le cas contraire il ne pourrait exister de composante 26–connexe C dans $G_{26}(x, \overline{X})$ telle que tout voxel de la courbe c soit adjacent à C . On peut supposer sans perte de généralité que q appartient à \overline{X} (le cas où $q' \in \overline{X}$ est symétrique).

Si q n'est pas dans C alors C ne peut contenir un des voxels de $\{r, s, t, q, p, y, z\}$ (parce que tous les voxels de c sont 26–adjacent à C). Donc, il doit exister un voxel u de C dans $\overline{c^* \cup \{r, s, t, p, q, y, z\}} \cap N_{26}(x)$. Alors, on peut trouver un chemin β' entre u et q tel que le chemin $\beta = (u).\beta'.(q, x, u)$ vérifie les propriétés du Lemme 12.7. Si q appartient à C , alors un voxel quelconque de $\{r, s, t, p, y, z\}$ doit être soit dans X soit dans C (du fait que tout point noir doit être 26–adjacent à C). Comme $T_{26}(x, \overline{X}) \geq 2$, il doit exister au moins un voxel de \overline{X} dans $\overline{c^* \cup \{r, s, t, p, y, z\}} \cap N_{26}(x)$. Soit u un de ces voxels, alors un chemin β' reliant q à u peut être trouvé de sorte que le chemin $\beta = (q).\beta'.(u, x, q)$ vérifie avec c les propriétés du Lemme 12.7.

Cas de la Figure 12.1(f)

Soit c l'ensemble des points noirs de cette figure. Si on suppose qu'un des “côtés” de c dans $N_{26}(x)$ ne contient pas de voxel de \overline{X} , alors $N_{26}(x) \cap X$ contient au moins les points noirs représentés dans la Figure 12.6. De plus, chaque voxel de c doit être 26–adjacent à une composante C de $G_{26}(x, \overline{X})$, alors tous les voxels représentés en pointillés qui appartiendraient à \overline{X} seraient aussi adjacents à C . Ceci contredit le fait que $T_{26}(x, \overline{X}) \geq 2$. Il s'ensuit que chacun des deux “côtés” de c dans la Figure 12.1(f) doit contenir un voxel de \overline{X} ; on peut alors trouver deux voxels u et v de \overline{X} qui peuvent être reliés par un chemin β' tel que $\beta = (u).\beta'.(v, x, u)$ et la courbe c vérifient les propriétés du Lemme 12.7.

Preuve du Lemme 12.7 dans le cas (26, 6) :

D'après le Lemme 12.6, si $T_{26}(x, X) = 1$ et $T_6(x, \overline{X}) \geq 2$ on peut trouver une 26–courbe fermée simple $c = K_{26}(x, X, C)$ dans $G_{26}(x, X)$ pour une certaine composante C . En fait, par définition de l'ensemble $K_{26}(x, X, C)$, il est clair que la courbe fermée simple $K_{26}(x, X, C)$ est incluse dans $N_{18}(x)$. En effet, c ne peut pas contenir de voxel de $N_{26}(x) \setminus N_{18}(x)$ puisqu'un tel voxel serait un voxel 26–gras qui ne peut appartenir à $K_{26}(x, X, C)$. De plus, par définition de l'ensemble $K_{26}(x, X, C)$, chaque voxel de cette courbe est 6–adjacent à une composante 6–connexe de $G_6(x, \overline{X})$. Dans la Figure 12.9, nous avons représenté à rotations et symétries près toutes les 26–courbes fermées simples c dans le 18–voisinage d'un point x . Nous devons alors examiner chaque type de courbe et montrer

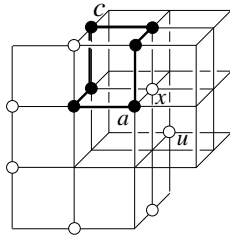


FIG. 12.2: Une 6-courbe fermée simple c et un 26-chemin fermé β tels que $L_{c,\beta} = \pm 1$.

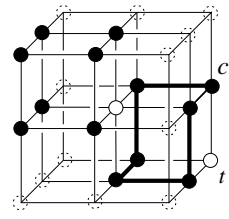


FIG. 12.3:

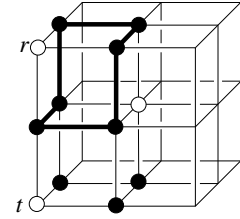


FIG. 12.4:

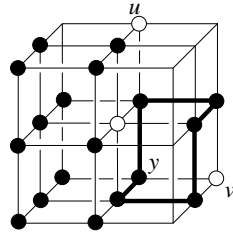


FIG. 12.5:

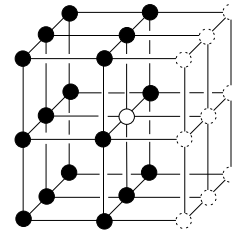


FIG. 12.6:

que pour chacune d'entre elles une 26-courbe fermée simple peut être trouvée ainsi qu'un 6-chemin fermé β dans $\bar{X} \cup \{x\}$ qui vérifient les propriétés du Lemme 12.7.

Cas de la Figure 12.9(a)

Soit c la 26-courbe fermée simple constituée des points noirs de la Figure 12.9(a), alors les voxels u et v doivent être tous les deux dans \bar{X} . En effet, il doit exister au moins deux composantes 6-connexes dans $G_6(x, \bar{X})$ et donc au moins deux voxels de \bar{X} doivent être 6-adjacents à x . Maintenant, les deux voxels u et v peuvent être connectés par un 6-chemin β' tel que c et $\beta = (u).\beta'.(v, x, u)$ vérifient les propriétés du Lemme 12.7.

Cas de la Figure 12.9(b)

Si u appartient à \bar{X} , alors comme $T_6(x, \bar{X}) \geq 2$, au moins un voxel ω de $\{p, q, r, s, t\}$ doit appartenir à \bar{X} . Un chemin β' de ce voxel ω au voxel u peut alors être trouvé de sorte que le chemin $\beta = (\omega).\beta'.(u, x, \omega)$ vérifie les propriétés du Lemme 12.7 avec une courbe fermée simple c constituée des points noirs de la Figure 12.9(b).

Si $u \in X$, alors puisque chaque voxel de la courbe doit être 6-adjacent à C , la composante C contient les voxels p, q, r et s ; et comme $T_6(x, \bar{X}) \geq 2$ le voxel t doit appartenir à \bar{X} et ne doit pas être connecté dans $G_6(x, \bar{X})$ à l'ensemble $\{p, q, r, s\}$. Il s'ensuit que les voxels de $N_{26}(x)$ qui sont 6-adjacents au point t doivent être dans X , de plus ils constituent une 26-courbe fermée simple c telle que c et un chemin $\beta = (q).\beta'.(t, x, q)$ (où β' est un chemin reliant q et t) vérifie les propriétés du Lemme 12.7.

Cas de la Figure 12.9(c)

Puisque le voxel y doit être 6-adjacent à C , on en déduit que soit $u \in C$ soit $s \in C$. Si $u \in C$, alors au moins un voxel dans $\{p, q, r, s, t\}$, disons p , doit appartenir à une autre composante 6-connexe de $G_6(x, \overline{X})$. On peut donc là encore trouver un 6-chemin β' reliant p à u tel que le chemin $\beta = (p).\beta'.(u, x, p)$ et la courbe c formée des points noirs de la Figure 12.9(c) vérifient les propriétés du Lemme 12.7.

Maintenant, si $s \in C$ et $u \in \overline{X}$ alors un chemin $\beta = (s).\beta'.(u, x, s)$ où β' est un chemin de s à u convient, toujours avec la 26-courbe fermée simple c constituée par les voxels noirs de la Figure 12.9(c).

Finalement, si $s \in C$ et $u \in X$ et du fait que tous les points noirs de la 26-courbe fermée simple de la Figure 12.9(c) sont 6-adjacents à C , on en déduit que C contient les voxels p, s et r . En raison de l'existence d'une autre composante 6-connexe différente de C dans $G_6(x, \overline{X})$, le voxel t doit appartenir à une telle composante. Comme t doit être connecté aux voxels s, r et p dans $G_6(x, \overline{X})$, les voxels b, c et d de la Figure 12.7 doivent appartenir à X . Dans ce cas, la 26-courbe fermée simple c constituée par les voxels a, b, c et d de la Figure 12.7, avec le 6-chemin $\beta = (s).\beta'.(t, x, s)$ où β' relie s à t , vérifient les propriétés du Lemme 12.7.

Cas de la Figure 12.9(d)

Comme y est 6-adjacent à C , soit $u \in C$ ou bien $q \in C$. Si $u \in C$ alors s doit lui aussi appartenir à C puisque C est 6-connexe et que tout voxel noir de la courbe doit être 6-adjacent à C ; de plus, au moins un voxel ω dans $\{p, q, r, t\}$ doit appartenir à \overline{X} car $T_6(x, \overline{X}) \geq 2$. On peut alors trouver un chemin β' de ce voxel ω au voxel u de sorte que le chemin $\beta = (\omega).\beta'.(u, x, \omega)$ vérifie les propriétés du Lemme 12.7 avec la 26-courbe fermée simple c constituée des points noirs de la Figure 12.9(d).

Le cas où $u \notin C$ mais $u \in \overline{X}$ est similaire puisque q doit appartenir à C dans ce cas. Le chemin β' à considérer alors relie u et q .

Maintenant, si $u \in X$ et donc $q \in C$, il est clair que r et p doivent appartenir à C . On montre aussi que dans ce cas le voxel s doit appartenir à \overline{X} . En effet, supposons que $s \in X$, alors le voxel t doit appartenir à une composante 6-connexe de $G_6(x, \overline{X})$ différente de C . Il s'ensuit que les voxels de $N_6(t) \cap N_{26}(x)$ doivent être dans X et $N_{26}(x) \cap X$ contient au moins les points noirs de la Figure 12.8. Mais dans ce cas, il est clair que le voxel a de la Figure 12.8 qui appartient à la courbe fermée simple de la Figure 12.9(d) ne peut pas

être 6-adjacent à la composante connexe C . Alors, $s \in \overline{X}$. Maintenant, si $s \in \overline{X}$, on peut trouver un chemin $\beta = (r).\beta'.(s, x, r)$ où β' relie r à s , qui, avec la courbe c constituée des points noirs de la Figure 12.9(d), vérifie les propriétés du Lemme 12.7.

Cas de la Figure 12.9(e)

Dans ce cas, soit c la 26-courbe fermée simple constituée par les points noirs de la Figure 12.9(e).

Comme y est 6-adjacent à C alors soit $u \in C$ soit $v \in C$. Si $u \in C$ alors q doit appartenir à C lui aussi et un voxel de $\{v, p, r\}$, disons v , doit appartenir à \overline{X} puisque $T_6(x, \overline{X}) \geq 2$. Un 6-chemin β' reliant v à u peut être trouvé de telle sorte que le chemin $\beta = (v).\beta'.(u, x, v)$ vérifie les propriétés du Lemme 12.7 avec la courbe c . Si $v \in C$ alors r et p doivent appartenir à C et soit u soit q , disons q , doit appartenir à une autre composante 6-connexe de $G_6(x, \overline{X})$ et donc à \overline{X} . Alors, on peut toujours trouver un chemin $\beta = (v).\beta'.(q, x, v)$ où β' relie v à q , qui vérifie les propriétés du Lemme 12.7.

Cas de la Figure 12.9(f)

Dans ce cas, soit c la 26-courbe fermée simple constituée par les points noirs de la Figure 12.9(f).

Comme y est 6-adjacent à C alors soit $u \in C$ soit $v \in C$.

Si $u \in C$ alors q et t doivent aussi appartenir à C puisque chaque point de c est 6-adjacent à un point de C qui est d'autre part 6-connexe. Il s'ensuit qu'au moins un voxel de $\{r, v, p\}$ doit appartenir à une autre composante 6-connexe de $G_6(x, \overline{X})$ différente de C et donc appartenir à \overline{X} . Finalement, on peut trouver un 6-chemin β' reliant un point de $\{r, v, p\}$ à u et donc un chemin β qui vérifie les propriétés du Lemme 12.7 avec la courbe fermée simple c . Le cas où $v \in C$ est similaire.

Cas de la Figure 12.9(g)

Soit c la 26-courbe fermée simple constituée par les points noirs de la Figure 12.9(g). Si $u \in C$ alors q doit appartenir à C et alors soit v soit r (peut être les deux) appartient à une composante 6-connexe de $G_6(x, \overline{X})$ différente de C , et donc à \overline{X} . Alors, on peut trouver un chemin β' reliant v ou r à u de sorte que le chemin $\beta = (v).\beta'.(u, x, v)$ ou $\beta = (r).\beta'.(u, x, r)$ vérifie les propriétés du Lemme 12.7 avec la courbe c . Le cas où $v \in C$ est similaire.

Cas des Figures 12.9(h), 12.9(i), 12.9(j) et 12.9(h)

Ces cas sont similaires aux cas précédents.

Cas de la Figure 12.9(l)

Le voxel y doit être 6-adjacent à C de sorte que soit $u \in C$ soit $v \in C$. Maintenant, on prouve que u ne peut être dans X . En effet, si $v \in C$ et $u \in X$, alors le point r doit aussi appartenir à C puisque y' doit être 6-adjacent à C . Comme C est 6-connexe, il doit exister un 6-chemin de r à v dans $G_6(x, \overline{X}) \subset N_{18}(x)$. Il est clair qu'un tel chemin doit contenir le voxel q et ceci contredit le fait que $T_6(x, \overline{X}) \geq 2$. Finalement, $u \in \overline{X}$.

Si $u \in C$ alors un voxel de $\{v, q, r\}$ doit appartenir à une composante 6-connexe de $G_6(x, \overline{X})$ différente de C et on peut trouver un 6-chemin β' d'un de ces voxels, disons v , à u tel que le chemin $\beta = (v).\beta'.(u, x, v)$ vérifie les propriétés du Lemme 12.7 avec la courbe c constituée des points noirs de la Figure 12.9(l).

La cas ou $v \in C$ et $u \in \overline{X}$ est similaire.

Cas de la Figure 12.9(m) et de la Figure 12.9(n)

Ces cas sont identiques au cas précédent et utilisent les mêmes arguments.

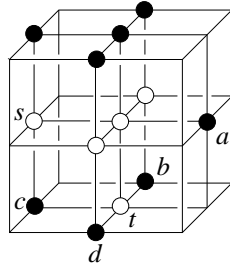


FIG. 12.7:

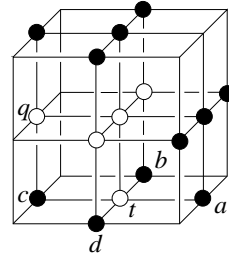


FIG. 12.8:

□

Lemme 12.8 Soit x un voxel de X tel que $T_n(x, X) = 1$. Alors, tout n -chemin fermé c dans $G_n(x, X)$ est n -réductible dans X .

Preuve : Soit $c = (c_0, \dots, c_p)$ avec $c_0 = c_p$. Si $(n, \bar{n}) = (26, 6)$, alors soit c' le chemin fermé obtenu par insertion du voxel x dans c entre toutes les paires de voxels consécutifs de c . Il est clair que $c \simeq_{26} c'$ dans X puisque pour toute paire de voxels consécutifs de c , le voxel x appartient à un cube $2 \times 2 \times 2$ qui contient ces deux voxels. Maintenant, c' est de la forme $c' = (c_0, x, c_1, x, \dots, x, c_n)$. Dans c' , chaque séquence de la forme (x, c_i, x) peut être réduite à (x) par une 26-déformation élémentaire. Il s'ensuit que $c \simeq_{26} c' \simeq_{26} (c_0, x, c_n) \simeq_{26} (c_0, c_n)$.

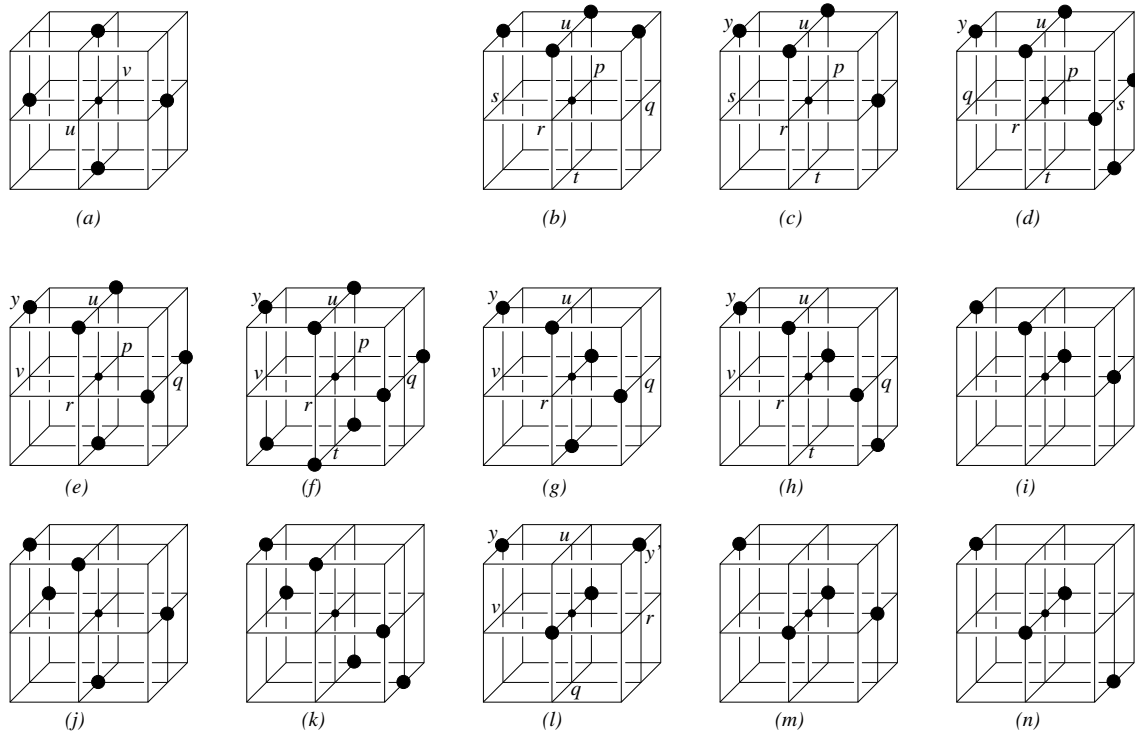


FIG. 12.9: Les 26-courbes fermées simples possibles de longueurs supérieures à trois dans $N_{26}(x)$ à rotations et symétries près.

Si $(n, \bar{n}) = (6, 26)$, on remarque tout d'abord que tout 6-chemin fermé dans $N_{18}(x)$ peut être déformé dans X en un chemin qui ne contient que des occurrences multiples du voxel x et des 6-voisins de x dans X . En effet, tout voxel z de c qui appartient à $N_{18} \setminus N_6(x)$ se trouve dans une sous-séquence (u, z, v) (notons que c peut aussi être composé d'un unique voxel de $N_{18}(x) \cap X$). Alors, u et v sont 6-voisins de x et les voxels u, z, v et x sont inclus dans un carré 2×2 . Ainsi, la séquence (u, z, v) peut être remplacée par (u, x, v) dans c par une 6-déformation élémentaire. En répétant ce type de déformation pour tout voxel z de ce type dans c , on obtient un chemin c' tel que $c'^* \subset (N_6(x) \cap X) \cup \{x\}$ et il est alors immédiat que $c' \simeq_6 (c_0, c_p)$ dans X . \square

Preuve de la Proposition 12.5 : Soit x un voxel de X tel que $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) \geq 2$. Soient c, β' et β les chemins du Lemme 12.7 et soient a et b les voxels extrémités de β' qui sont les deux seuls voxels de β' dans $N_{26}(x)$, de plus \bar{n} -adjacents à x . Si a et b ne sont pas \bar{n} -connectés dans \bar{X} alors il est clair qu'ils sont \bar{n} -connectés dans $\bar{X} \cup \{x\}$ de sorte que deux composantes \bar{n} -connexes de \bar{X} sont réunies par suppression du voxel x de X .

Si a et b sont connectés par un \bar{n} -chemin α dans \bar{X} . Alors, il est clair que les deux \bar{n} -chemins β' et α sont \bar{n} -homotopes à extrémités fixées dans $\overline{(N_{26}(x) \cap X) \cup \{x\}}$. Il s'ensuit que β est \bar{n} -homotope au chemin $\alpha' = (a).\alpha.(b, x, a)$ dans $\overline{(N_{26}(x) \cap X)}$. Puisque $\overline{(N_{26}(x) \cap X)} \subset \bar{c}^*$ et d'après le Théorème 15 on a alors $L_{c,\beta} = L_{c,\alpha'} = \pm 1$.

D'après le Théorème 14, on en déduit que le chemin c n'est pas n -réductible dans $\bar{\alpha}'^*$ et comme $\alpha'^* \subset \bar{X} \cup \{x\}$ alors $X \setminus \{x\} \subset \bar{\alpha}'^*$ de sorte que *a fortiori* α' ne peut être n -homotope à un chemin trivial dans $X \setminus \{x\}$. Formellement, si B est le voxel de $X \setminus \{x\}$ tel que c soit un n -chemin fermé de B à B , on a $[c]_{\Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B)} \neq [(B, B)]_{\Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B)}$.

Maintenant, d'après le Lemme 12.8, $c \simeq_n (B, B)$ dans X de sorte que $i_*([c]_{\Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B)}) = [c]_{\Pi_1^n(X, B)} = [(B, B)]_{\Pi_1^n(X, B)} = i_*([(B, B)]_{\Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B)})$ donc i_* n'est pas injectif. \square

Preuve de la Proposition 12.1 : Supposons que les propriétés *i*), *ii*) et *iii*) de la Définition 10.5 soient vérifiées.

D'après la Proposition 12.2 on en déduit que si i_* est surjectif pour chaque voxel B de $X \setminus \{x\}$, et qu'aucune composante n -connexe de X n'est créée par suppression du voxel x alors $T_n(x, X) < 2$. De plus, si aucune composante connexe de X n'est supprimée alors $T_n(x, X) \neq 0$ (en effet, $T_n(x, X) = 0$ signifie que $\{x\}$ est une composante n -connexe de X puisqu'aucun autre voxel de X n'est n -adjacent à x). Finalement, $T_n(x, X) = 1$.

D'après la Proposition 12.5, on déduit que si i_* est injectif pour tout voxel $B \in X \setminus \{x\}$, et que des composantes \bar{n} -connexes de \bar{X} ne sont pas réunies par ajout du voxel x dans \bar{X} , alors $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) < 2$. De plus, si aucune composante \bar{n} -connexe de \bar{X} n'est créée alors $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) \neq 0$ (en effet, $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 0$ signifie qu'aucun voxel de \bar{X} n'est \bar{n} -adjacent à x de sorte que $\{x\}$ est une composante \bar{n} -connexe de $\bar{X} \cup \{x\}$). Finalement, $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1$. \square

12.2 La caractérisation locale est bien celle de la définition précédente

Dans cette section, on démontre la proposition suivante :

Proposition 12.9 *Si $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1$, alors les conditions *i*), *ii*), *iii*) et *iv*) de la Définition 10.5 sont vérifiées.*

Afin de montrer la Proposition 12.9 nous établissons tout d'abord quelques propositions.

Proposition 12.10 *Si l'ensemble X possède plus de composantes n -connexes que $X \setminus \{x\}$ alors $T_n(x, X) = 0$.*

Preuve : Si X à plus de composantes n -connexes que $X \setminus \{x\}$ alors une composante connexe de X est supprimée par effacement de x , donc aucun autre voxel que x n'appartient à cette composante. Il s'ensuit que x n'a pas de n -voisin dans X et donc $T_n(x, X) = 0$. \square

Proposition 12.11 *Si l'ensemble $X \setminus \{x\}$ a plus de composantes n -connexes que X alors $T_n(x, X) \geq 2$.*

Preuve : Si $X \setminus \{x\}$ a plus de composantes n -connexes que X , alors une composante connexe de X a été créé par effacement de x . En d'autre termes, il existe deux voxels a et b dans X tels que a et b sont connectés dans X mais pas dans $X \setminus \{x\}$. Il s'ensuit que tout n -chemin entre a et b dans X contient le voxel x . Alors $T_n(x, X)$ ne peut être égal à zéro car dans ce cas aucun chemin entre a et b dans X ne pourrait contenir x . Maintenant, supposons que $T_n(x, X) = 1$. Dans ce cas, pour tout n -chemin c entre a et b dans X , on peut trouver un chemin c' de a à b dans $X \setminus \{x\}$. En effet, pour toute séquence de la forme (y, x, z) dans c , les voxels y et z appartiennent tous les deux à $G_n(x, X)$ qui est n -connexe donc il existe un n -chemin dans $X \setminus \{x\}$ entre y et z . Alors, une telle séquence (y, x, z) dans c peut être remplacée par un n -chemin qui ne contient pas x de sorte que a et b sont n -connectés dans $X \setminus \{x\}$, ce qui contredit la définition des voxels a et b . Finalement, on a $T_n(x, X) \geq 2$. \square

Proposition 12.12 *Si l'ensemble \overline{X} a plus de composantes \overline{n} -connexes que $\overline{X} \cup \{x\}$, alors $T_{\overline{n}}(x, \overline{X}) \geq 2$.*

Preuve : La preuve de cette proposition est identique à celle de la Proposition 12.11. \square

Proposition 12.13 *Si l'ensemble $\overline{X} \cup \{x\}$ a plus de composantes \overline{n} -connexes que \overline{X} , alors $T_{\overline{n}}(x, \overline{X}) = 0$.*

Preuve : La preuve est identique à celle de la Proposition 12.10. \square

Proposition 12.14 *Si $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1$ alors pour tout $B \in X \setminus \{x\}$ le morphisme $i_* : \Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B) \longrightarrow \Pi_1^n(X, B)$ induit par l'inclusion de $X \setminus \{x\}$ dans X est un isomorphisme.*

Corollaire 12.15 *Si $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1$ alors pour tout $B' \in \bar{X}$ le morphisme $i'_* : \Pi_1^{\bar{n}}(\bar{X}, B') \longrightarrow \Pi_1^{\bar{n}}(\bar{X} \cup \{x\}, B')$ induit par l'inclusion de \bar{X} dans $\bar{X} \cup \{x\}$ est un isomorphisme.*

Preuve du Corollaire 12.15 : Soient $Y = \bar{X} \cup \{x\}$ et $(m, \bar{m}) = (\bar{n}, n)$. De plus, soit B' un voxel de \bar{X} . Alors $T_m(x, Y) = 1$, $T_{\bar{m}}(x, \bar{Y}) = 1$ et $B' \in Y \setminus \{x\}$. D'après la Proposition 12.14, le morphisme $i_* : \Pi_1^m(Y \setminus \{x\}, B') \longrightarrow \Pi_1^m(Y, B')$ induit par l'application d'inclusion $i : Y \setminus \{x\} \longrightarrow Y$ est un isomorphisme. Mais, $Y \setminus \{x\} = \bar{X}$ et $Y = \bar{X} \cup \{x\}$ donc i_* n'est autre que le morphisme induit par l'inclusion de \bar{X} dans $\bar{X} \cup \{x\}$. \square

Afin de prouver la Proposition 12.14 nous allons dans un premier temps prouver que i_* est surjectif (conséquence du Lemme 12.17) puis établir le Lemme 12.22 qui nous permettra de prouver que i_* est injectif.

Lemme 12.16 *Si $T_n(x, X) = 1$ et a et b sont deux voxels de $N_n(x) \cap X$. Alors il existe un n -chemin simple γ entre a et b dans $G_n(x, X)$ tel que $(a, x, b) \simeq_n \gamma$ dans X .*

Preuve : Puisque $G_n(x, X)$ est n -connexe, alors il existe un n -chemin simple $\gamma = (y_0, \dots, y_k)$ dans $G_n(x, X)$ tel que $y_0 = a$ et $y_k = b$.

Si $(n, \bar{n}) = (26, 6)$, il est clair que les voxels $a = y_0$, x et y_1 sont inclus dans un cube $2 \times 2 \times 2$. Alors $(a, x, b) \sim_{26} (a, y_1, x, b)$ et on peut répéter ce processus puisque deux voxels consécutifs y_i et y_{i+1} dans γ sont toujours inclus dans un même cube $2 \times 2 \times 2$ contenant x . On obtient que $(a, x, b) \sim_{26} (a, y_1, x, b) \sim_{26} \dots \sim_{26} (a, y_1, \dots, y_{k-1}, x, b)$ et finalement, $(a, y_1, \dots, y_{k-1}, x, b) \sim_{26} (a = y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, b = y_k)$.

Si $(n, \bar{n}) = (6, 26)$ alors on remarque tout d'abord que k est nécessairement pair. Maintenant, $a = y_0 \in N_6(x) \cap X$ de sorte que $y_1 \in (N_{18}(x) \setminus N_6(x)) \cap X$ et $y_2 \in N_6(x) \cap X$. Alors les voxels y_0 , x , y_1 et y_2 sont inclus dans un carré 2×2 donc $(a = y_0, x) \sim_6 (y_0, y_1, y_2, x)$. On peut réitérer cette remarque et on obtient que $(a, x) \simeq_6 (y_0, \dots, y_k, x)$ et finalement $(a, x, b) \simeq_6 (y_0, \dots, y_k, x, y_k) \sim_6 (y_0, \dots, y_k)$. \square

Lemme 12.17 *Si $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1$ alors pour tout $B \in X \setminus \{x\}$ et tout n -chemin c dans $A_n^B(X)$, il existe un chemin c' dans $A_n^B(X \setminus \{x\})$ tel que $c \simeq_n c'$ dans X .*

Preuve : Soit $B \in X \setminus \{x\}$ et soit $c = (c_0, \dots, c_q)$ un n -chemin fermé de B à B dans X ($B = c_0 = c_l$). Pour toute séquence maximale (c_i, \dots, c_j) telle que $c_{i-1} \neq x$, $c_{j+1} \neq x$ et $c_k = x$ pour $k \in \{i, \dots, j\}$ il est évident que $c \simeq_n (c_0, \dots, c_{i-1}, x, c_{j+1}, \dots, c_q)$ (on remarque que $0 < i \leq j < l$). Maintenant, d'après le Lemme 12.16 et puisque $\{c_{i-1}, c_{j+1}\} \subset N_n(x)$, alors $(c_{i-1}, x, c_{j+1}) \simeq_n \gamma$ dans X où γ est un chemin de c_{i-1} à c_{j+1} dans $G_n(x, X)$ tel que $x \notin \gamma^*$. Finalement, $c \simeq_n (c_0, \dots, c_{i-1}) \cdot \gamma \cdot (c_{j+1}, \dots, c_q)$. En répétant ce type de n -déformation homotopique pour toutes les séquence maximales (c_i, \dots, c_j) de cette forme dans c , il est clair que c est n -homotope dans X à un n -chemin fermé c' tel que $x \notin c'^*$ (i.e. $c' \in A_n^B(X \setminus \{x\})$). \square

Lemme 12.18 *Si $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1$ alors deux chemins π_1 et π_2 qui ont les mêmes extrémités et sont inclus dans $G_n(x, X)$ sont n -homotopes à extrémités fixées dans $N_{26}(x) \cap X$.*

Pour prouver le Lemme 12.18 nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 12.19 *Si $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1$ alors tout n -chemin fermé simple dans $G_n(x, X)$ est n -réductible dans $N_{26}(x) \cap X$.*

Corollaire 12.20 *Si $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1$ alors tout n -chemin fermé dans $G_n(x, X)$ est n -réductible dans $N_{26}(x) \cap X$ (i.e. $G_n(x, X)$ est simplement n -connexe).*

Preuve du Lemme 12.19 pour $(n, \bar{n}) = (6, 26)$: Dans ce cas, il est immédiat que tout 6-chemin fermé simple dans $G_6(x, X) \subset N_{18}(x) \cap X$ est une 6-courbe fermée simple. Dans la Figure 12.1 nous avons représenté à rotations et symétries près toutes les 6-courbes fermées simples possibles dans $N_{18}(x)$.

Cas de la Figure 12.1(a) :

Soit c l'ensemble des points noirs de la Figure 12.1(a). Dans ce cas, soit $z \in X$ ou bien tous les points de $N_{26}(x) \setminus (c^* \cup \{z\})$ doivent appartenir à X . En effet, le cas où $z \in \bar{X}$ et un des points de $N_{26}(x) \setminus (c^* \cup \{z\})$ appartient à \bar{X} contredit le fait que $T_{26}(x, \bar{X}) = 1$.

Maintenant, si $z \in X$ il est clair que c est 6–réductible dans $N_{26}(x) \cap X$. De façon similaire, quand $z \notin X$ alors $N_{26}(x) \setminus (c^* \cup \{z\}) \subset X$ et c est bien sûr 6–réductible dans $N_{26}(x) \cap X$.

Cas de la Figure 12.1(b) : On a $\{r, s, t\} \subset X$ ou bien $N_{26}(x) \setminus (c^* \cup \{r, s, t\}) \subset X$. Dans les deux cas, on peut conclure de la même façon que dans le cas précédent.

Cas des Figures 12.1(c), . . . , (f) : Similaires aux cas précédents. \square

Lemme 12.21 *Soit $x \in X$ tel que $T_{26}(x, X) = 1$ et $T_6(x, \overline{X}) = 1$ et soit c la paramétrisation d'une 26–courbe fermée simple dans $G_{26}(x, X)$. Alors c est 26–réductible dans $G_{26}(x, X)$.*

Preuve : Dans la Figure 12.9 sont représentées à rotations et symétries près toutes les 26–courbes fermées simples de longueurs supérieures à trois possibles dans $N_{26}(x)$ (une 26–courbe fermée simple de longueur trois étant de façon évidente 26–réductible). Maintenant, on doit considérer chacune de ces courbes et montrer que, sous l'hypothèse que $T_{26}(x, X) = 1$ et $T_6(x, \overline{X}) = 1$, toute 26–courbe fermée simple paramétrée est 26–réductible dans $G_{26}(x, X)$. Suivant le Lemme 2.6, si une paramétrisation d'une des courbes est réductible, alors toute paramétrisation de cette courbe est réductible.

Cas de la Figure 12.9(a)

Dans ce cas, exactement un voxel dans $\{u, v\}$ doit appartenir à \overline{X} . En effet $\{u, v\} \subset X$ contredit le fait que $T_6(x, \overline{X}) = 1$ alors que $\{u, v\} \subset X$ implique que $T_6(x, \overline{X}) = 0$. Si $u \in X$ [resp. $v \in X$], il est alors évident que c est 26–réductible dans $G_{26}(x, X)$.

Cas de la Figure 12.9(b)

Si $u \in X$ alors il est clair que la courbe c est 26–réductible dans $G_{26}(x, X)$. Maintenant, si $u \notin X$ alors $\{p, q, r, s, t\} \subset X$. En effet, sinon $G_6(x, \overline{X})$ ne serait pas 6–connexe. A titre d'exemple, la Figure 12.10 montre une séquence de 26–déformations élémentaires dans $G_{26}(x, X)$ qui mènent de c au chemin réduit à ses extrémités quand c est une des paramétrisations de la courbe représentée dans la Figure 12.9(b).

Cas de la Figure 12.9(c)

Puisque $T_6(x, \overline{X}) = 1$ on en déduit que soit $u \in X$ soit $\{p, s, r, t\} \subset X$. Dans les deux cas, toute paramétrisation c de cette courbe est 26–réductible dans $G_{26}(x, X)$.

Cas de la Figure 12.9(d) Dans ce cas, soit $\{u, s\} \subset X$ soit $\{p, q, r, t\} \subset X$ et on peut conclure dans les deux cas qu'une paramétrisation quelconque c de cette courbe fermée

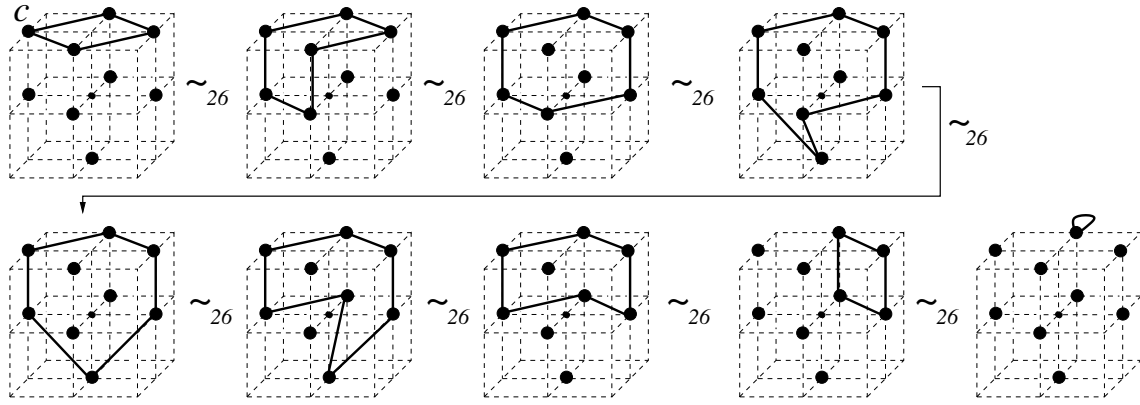


FIG. 12.10: Un 26-déformation homotopique du 26-chemin fermé c .

simple est 26-réductible dans $G_{26}(x, X)$.

Cas des Figures 12.9(e), ..., (n) Dans tous les cas, on peut séparer l'ensemble $N_6(x) \setminus c^*$ en deux parties A et B telles que $A \subset X$ ou bien $B \subset X$. Alors, l'inclusion d'une de ces deux parties dans X autorise la 26-déformation homotopique de c dans $G_{26}(x, X)$ en un chemin trivial. \square

Preuve du Lemme 12.19 pour $(n, \bar{n}) = (26, 6)$: On prouve ce lemme par induction sur la longueur du chemin c^i pour $i \geq 0$. Soit $c^0 = c$ et supposons que c^i est un 26-chemin fermé simple de longueur $l(c^i)$ dans $G_{26}(x, X)$ qui est 26-connexe.

Tout d'abord, supposons qu'il existe dans c^i trois voxels consécutifs qui soient inclus dans un cube $2 \times 2 \times 2$ \mathcal{C} . En d'autres termes, $c^i = c_1.(y, z, t).c_2$ où y, z et t appartiennent à \mathcal{C} . Alors, $c^i \sim_{26} c^{i+1} = c_1^i.(y, t).c_2^i$ qui est de longueur $l(c^{i+1}) = l(c^i) - 1$.

Maintenant, on suppose que pour toute séquence (y, z, t) dans c^i , les deux voxels y et t ne sont pas 26-adjacents. De plus, supposons qu'il existe dans c^i un voxel y tel que y ait plus de deux 26-voisins dans c^{i*} . En d'autres termes, on suppose qu'il existe un voxel z dans c^i qui n'est ni le successeur ni le prédécesseur de y dans c^i mais qui est 26-adjacent à y . Alors, $c^i = c_1^i.(y).c_2^i.(z).c_3^i$ avec $l(c_2^i) > 3$ (en effet, si $l(c_2^i) = 3$ alors $c_2^i = (y, u, z)$ et y est 26-adjacent à z). On peut aussi supposer que le chemin c_2^i est l'un des plus courts sous-chemins de cette forme dans c^i qui puisse être trouvé, satisfaisant cette propriété de 26-adjacence entre ses extrémités. Alors, il s'ensuit que tout voxel de c_2^i différent de y et z possède exactement deux voisins dans c_2^{i*} : son prédécesseur et son successeur dans c_2 . En effet, l'existence d'un voxel de c_2^i qui possède plus de deux 26-voisins dans c_2^{i*} contredirait le fait que c_2^i est un sous-chemin de c^i de longueur minimale dont les extrémités sont 26-adjacentes. De plus, y [resp. z] possède exactement deux voisins dans

c_2^{i*} : son successeur dans c_2^i et z [resp. son prédécesseur dans c_2^i et y]. Alors, c_2^{i*} est une n -courbe fermée simple et $c_2^i.(z, y)$ est une paramétrisation de cette courbe. D'après le Lemme 12.21, on a $c_2^i.(z, y) \simeq_{26} (y, y)$ dans $G_{26}(x, X)$. D'autre part, il est évident que $c^i \simeq_{26} c_1^i.(y).c_2^i.(z, y, z).c_3^i$ dans $G_{26}(x, X)$. Finalement, $c^i \simeq_{26} c_1^i.(y, z).c_3^i = c^{i+1}$ dans $G_{26}(x, X)$ et c^{i+1} est un 26-chemin fermé simple tel que $l(c^{i+1}) < l(c^i)$.

Reste le cas où tout voxel de c^i a exactement deux 26-voisins dans c^{i*} . Dans ce cas, c^i est la paramétrisation d'une n -courbe fermée simple et d'après le Lemme 12.21, c^i est n -réductible dans $G_{26}(x, X)$, i.e. $c^i \simeq_{26} c^{i+1}$ dans $G_{26}(x, X)$ avec $l(c^{i+1}) = 1$.

Dans tous les cas, le chemin c^i est 26-homotope à un 26-chemin fermé simple c^{i+1} tel que $l(c^{i+1}) < l(c^i)$. Par induction et puisque $l(c^i) \geq 1$, il doit exister un entier j tel que $l(c^j) = 1$ et $c^0 \simeq_{26} c^j$. \square

Preuve du Corollaire 12.20 : Si c n'est pas simple, alors il doit exister un n -chemin fermé simple γ d'un voxel $y \in c^*$ à y tel que $c = c_1.\gamma.c_2$. D'après le Lemme 12.19, on a $\gamma \simeq_n (y, y)$ dans $G_n(x, X)$ de sorte que $c \simeq c_1.c_2$ dans $G_n(x, X)$. Maintenant, on peut répéter ce processus pour obtenir que c est n -homotope à un chemin fermé simple dans $G_n(x, X)$ et finalement c est 26-réductible dans $G_n(x, X)$. \square

Preuve du Lemme 12.18 : Soient π et π' deux n -chemins entre un voxel a et un voxel b dans $G_n(x, X)$. D'après le Corollaire 12.20, l'ensemble $G_n(x, X)$ est simplement n -connexe et suivant la Proposition 2.5 il s'ensuit que π et π' sont n -homotopes dans $G_n(x, X)$. \square

Maintenant, nous prouvons le lemme suivant qui permet de démontrer que le morphisme i_* de la Proposition 12.14 est injectif.

Lemme 12.22 *Si $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1$ alors, pour tout voxel $B \in X \setminus \{x\}$, deux n -chemin fermés c et c' de $A_n^B(X \setminus \{x\})$ qui sont n -homotopes dans X sont n -homotopes dans $X \setminus \{x\}$.*

Preuve : Étant donné un n -chemin fermé c dans $A_n^B(X)$, on note $\sigma(c)$ le n -chemin de $A_n^B(X \setminus \{x\})$ qui est n -homotope à c dans X suivant la preuve du Lemme 12.17. Il est suffisant de montrer que si c et c' sont identiques à une n -déformation élémentaire près dans X alors les deux chemins $\sigma(c)$ et $\sigma(c')$ sont n -homotopes dans $X \setminus \{x\}$. On suppose que $c = c_1.\gamma.c_2$ et $c' = c_1.\gamma'.c_2$ où γ et γ' sont deux n -chemins ayant les mêmes

extrémités et inclus dans un même cube $2 \times 2 \times 2$ si $(n, \bar{n}) = (26, 6)$, dans un même carré 2×2 si $(n, \bar{n}) = (6, 26)$.

Si $x \notin \gamma^* \cup \gamma'^*$ on remarque que $\sigma(c) = \sigma(c_1) \cdot \gamma \cdot \sigma(c_2)$ et $\sigma(c') = \sigma(c_1) \cdot \gamma' \cdot \sigma(c_2)$, alors $c \sim_n c'$ dans $X \setminus \{x\}$.

Maintenant, si $x \in \gamma^* \cup \gamma'^*$, soit a le dernier voxel de c_1 différent de x et soit b le premier voxel de c_2 différent de x . De plus, soit δ le sous-chemin de c entre a et b , et soit δ' le sous-chemin de c' entre a et b . On note π_1 le sous-chemin de c entre son premier voxel et a et on note π_2 le sous-chemin de c entre b et son dernier voxel. Finalement, on a $c = \pi_1 \cdot \delta \cdot \pi_2$ et $c' = \pi_1 \cdot \delta' \cdot \pi_2$. Puisque a et b , les deux extrémités de δ et δ' , sont différentes de x , il s'ensuit que : $\sigma(c) = \sigma(\pi_1) \cdot \sigma(\delta) \cdot \sigma(\pi_2)$ et $\sigma(c') = \sigma(\pi_1) \cdot \sigma(\delta') \cdot \sigma(\pi_2)$.

Maintenant, puisque $x \in \gamma^* \cup \gamma'^*$ et comme γ et γ' sont des 6-chemins [resp. 26-chemins] inclus dans un carré 2×2 contenant x [resp. un cube $2 \times 2 \times 2$], il est immédiat que γ et γ' sont des chemins inclus dans $G_6(x, X) \cup \{x\}$ [resp. $G_{26}(x, X)$] et par construction les chemins δ et δ' le sont aussi. Maintenant, par définition de $\sigma(\delta)$ et $\sigma(\delta')$ (voir la preuve du Lemme 12.17) il est immédiat que $\sigma(\delta)$ et $\sigma(\delta')$ sont deux n -chemins dans $G_n(x, X)$ ayant les mêmes extrémités. D'après le Lemme 12.18, on en conclut que $\sigma(\delta) \simeq_n \sigma(\delta')$ dans $N_{26}(x) \cap X \subset X \setminus \{x\}$. Finalement, $\sigma(c) \simeq_n \sigma(c')$ dans $X \setminus \{x\}$. \square

Preuve de la Proposition 12.14 : Soit B un voxel de $X \setminus \{x\}$. D'après le Lemme 12.17, pour tout chemin fermé $c' \in A_n^B(X)$ (et donc pour toute classe d'homotopie de chemins $[c']_{\Pi_1^n(X, B)}$) il existe un chemin $c \in A_n^B(X \setminus \{x\})$ tel que $c \simeq_n c'$ dans X de sorte que $i_*([c]_{\Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B)}) = [c]_{\Pi_1^n(X, B)} = [c']_{\Pi_1^n(X, B)}$. Alors, le morphisme i_* est surjectif.

Maintenant, supposons que c_1 et c_2 soient deux chemins fermés de $A_n^B(X \setminus \{x\})$ tels que $[c_1]_{\Pi_1^n(X, B)} = [c_2]_{\Pi_1^n(X, B)}$. Par définition de i_* , on a $[c_1]_{\Pi_1^n(X, B)} = i_*([c_1]_{\Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B)})$ et $[c_2]_{\Pi_1^n(X, B)} = i_*([c_2]_{\Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B)})$. Alors, $c_1 \simeq_n c_2$ dans X et d'après le Lemme 12.22, on en déduit que $c_1 \simeq_n c_2$ dans $X \setminus \{x\}$. Finalement, on a $[c_1]_{\Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B)} = [c_2]_{\Pi_1^n(X \setminus \{x\}, B)}$ donc i_* est injectif. \square

Preuve de la Proposition 12.9 : Supposons que $T_n(x, X)$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1$. D'après la Proposition 12.10 et la Proposition 12.11, $T_n(x, X) = 1$ implique que la Condition *i*) de la Définition 10.5 est vérifiée. De plus, d'après la Proposition 12.12 et la Proposition 12.13, $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1$ implique la Condition *ii*) de la Définition 10.5. Finalement, suivant la Proposition 12.14 et le Corollaire 12.15, on a $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1 \Rightarrow iii)$ et *iv*). \square

Enfin, on peut donner la preuve du résultat principal de cette partie.

Preuve du Théorème 16 : Suivant la Définition 10.5, un voxel simple vérifie évidemment les trois conditions du Théorème 16. Maintenant, suivant la Proposition 12.1, un voxel vérifiant les trois conditions du Théorème 16 est tel que $T_n(x, X) = T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1$. Finalement, d'après la Proposition 12.9, si $T_n(x, X) = T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1$ alors x vérifie les quatre conditions de la Définition 10.5. \square

Conclusion à la Partie III

Dans cette partie, un nouvel outil pour l'étude des propriétés topologiques des objets de \mathbb{Z}^3 a été introduit. Cet outil, le nombre d'entrelacement, possède les mêmes propriétés que son analogue continu. Les preuves de ses propriétés les plus importantes ont été données sans avoir recours à des notions du domaine continu. En effet, les preuves données ici ne nécessitent pas d'autres outils que ceux rappelés dans la première partie de cette thèse. Le petit nombre de notions de géométrie discrète qui ont été utilisées montre que des propriétés fortes peuvent être démontrées dans le cadre théorique discret.

De plus, une application du nombre d'entrelacement pour montrer une nouvelle – parce que plus concise – caractérisation des points simples en 3D a été donnée (pour $(n, \bar{n}) \in \{(6, 26), (26, 6)\}$). Ce nouveau théorème montre l'utilité du nombre d'entrelacement pour prouver des théorèmes qui mettent en jeu le groupe fondamental discret dans \mathbb{Z}^3 .

Maintenant, même si le nombre d'entrelacement est bien défini pour les couples de relations d'adjacences (n, \bar{n}) dans $\{(6+, 18), (18, 6+)\}$, il n'a toujours pas été utilisé pour fournir une caractérisation des points simples 3D, similaire au Théorème 16, pour ces derniers couples de relations d'adjacence. Ceci puisqu'une question ouverte persiste concernant l'existence d'une courbe fermée simple, analogue aux courbes $K_6(x, X, C)$ et $K_{26}(x, X, C)$ (Définition 12.3 et Définition 12.5), dans ces cas. Néanmoins, des travaux futurs devraient permettre de trouver un processus simple (tel que “la suppression récursive des voxels 26–gras”) qui permette la construction d'une telle courbe pour une configuration donnée. Cela rendra alors possible la vérification de l'existence de cette courbe pour toutes les configurations satisfaisant la caractérisation locale des voxels simples.

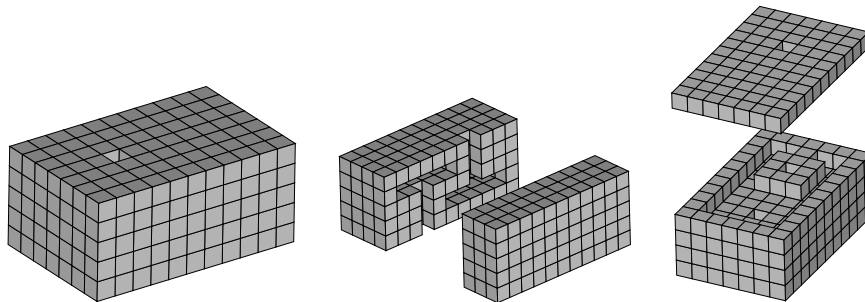
Conclusion et perspectives

Dans ce document, nous avons défini de nouveaux outils et démontré plusieurs théorèmes qui montrent que le groupe fondamental discret est un outil puissant pour la caractérisation de la préservation de la topologie dans un espace discret. On peut résumer ceci de la manière suivante :

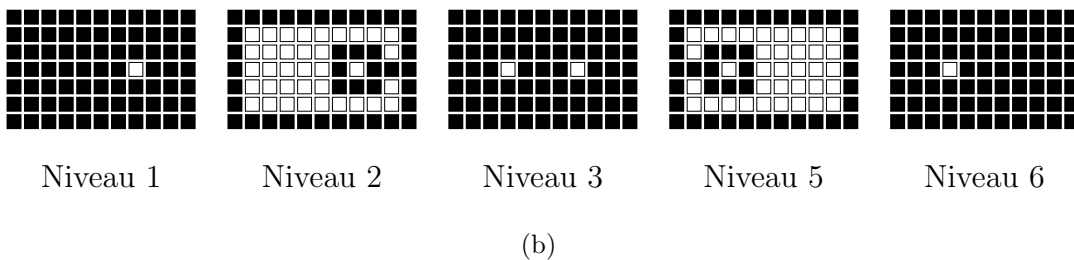
- Le groupe fondamental permet de définir correctement la notion de surfel simple dans une surface discrète. En d'autres termes, il permet de caractériser complètement la préservation de la topologie par suppression d'un unique spel dans un tel espace discret.
- Le groupe fondamental caractérise complètement la sous-homotopie entre les parties d'une surface discrète (excepté dans un cas très particulier).
- Il permet de définir correctement les voxels simples dans \mathbb{Z}^3 , c'est à dire de caractériser complètement la préservation de la topologie par suppression d'un unique voxel. De plus, cette caractérisation ne tient compte que de l'objet (et pas de son complémentaire).
- Il permet la formulation d'un critère théorique pour la sous-homotopie dans \mathbb{Z}^3 .

Cependant, il est prouvé que le groupe fondamental n'est pas suffisant pour caractériser la sous-homotopie dans \mathbb{Z}^3 . En effet, on pourrait essayer de trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie $Y \subset X$ soit sous n -homotope à X quand X et Y sont des parties de \mathbb{Z}^3 . Aujourd'hui, il apparaît qu'une telle condition sera très difficile à trouver avec les seuls outils à notre disposition. En effet, le groupe fondamental discret qui est très utile pour formuler une caractérisation globale des points simples en 3D (voir le Chapitre 10 et le Chapitre 12) montre ses limites dans la caractérisation de la sous-homotopie. Le fait est que les conditions naturelles de la Définition 10.5 ne sont pas

suffisantes puisque l'objet Z représenté dans la Figure 12.11 (merci à T.Y. Kong pour cet exemple que l'on peut trouver aussi à la page 189 de [Kin93]) a la propriété que tout élément de $A_6^B(Z)$ est réductible dans Z pour tout voxel $B \in Z$. Alors, soit x un voxel quelconque de Z , on en déduit que le morphisme $i_* : \Pi_1^6(\{x\}, x) \longrightarrow \Pi_1^6(Z, x)$ induit par l'inclusion de $\{x\}$ dans Z est un isomorphisme (la même remarque peut être faite pour $\overline{\{x\}}$ et \overline{Z}). Toutefois, l'ensemble $\{x\}$ n'est évidemment pas sous 6-homotope à Z puisque ce dernier ensemble ne possède aucun voxel 6-simple au sens du Théorème 16.



(a) Une vue en 3D de la maison à deux chambres.



(b)

FIG. 12.11: La maison à deux chambres (ou “Bing’s house-with-two-rooms”).

Maintenant, on pourrait aussi espérer trouver une condition nécessaire et suffisante pour que deux objets de \mathbb{Z}^3 soient symétriquement homotopes. Dans ce but, le groupe fondamental discret pourrait sembler être un outil utile. Intuitivement, l'objet Z introduit précédemment ainsi que son fond sont tous les deux caractérisés par le fait que pour tout voxel $B \in Z$ et tout voxel $B' \in \overline{Z}$, les groupes $\Pi_1^6(Z, B)$ et $\Pi_1^{26}(\overline{Z}, B')$ sont triviaux. Alors, comme il est de manière évidente possible d'ajouter ou retirer séquentiellement des voxels simples à l'ensemble Z pour obtenir finalement un objet réduit à un seul voxel; on pourrait penser que le groupe fondamental discret permet de caractériser l'homotopie symétrique (cette dernière notion est une nouvelle fois illustrée dans la Figure 12.12). Évidemment, la réponse à cet “espoir” est négative.

En effet, supposons qu'il existe un algorithme répondant toujours au problème suivant :

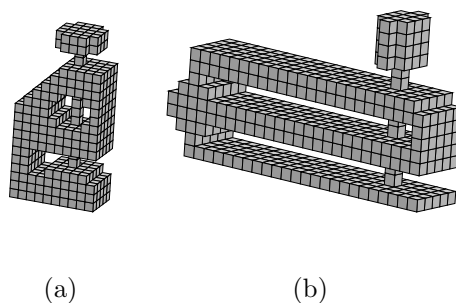


FIG. 12.12: Deux parties de \mathbb{Z}^3 qui sont symétriquement homotopes.

SH3D : **Donnée :** $X \subset \mathbb{Z}^3$ et $Y \subset \mathbb{Z}^3$

Résultat : OUI si X et Y sont symétriquement homotopes

NON sinon.

Aujourd'hui, aucune preuve n'a été donnée du fait que ce problème soit décidable. En effet, même une méthode naïve consistant à essayer toutes les séquences possibles de suppressions et d'effacements de voxels simples entre les deux objets considérés, n'est pas prouvée comme étant une méthode valide pour n'importe quelle donnée.

Maintenant, considérons le problème de la vérification du fait que deux noeuds dans \mathbb{R}^3 puissent ou ne puissent pas être déformés l'un en l'autre par une déformation continue ambiante. Ce problème aura peut être une solution quand on connaîtra un invariant complet des noeuds, qui n'a toujours pas été trouvé. Alors, il est clair qu'étant donnés deux noeuds dans \mathbb{R}^3 , on peut trouver un pas de discrétisation pour lequel on puisse donner une image discrète de chacun des noeuds de sorte que le problème de l'équivalence de ces noeuds se ramène à un cas du problème de l'homotopie symétrique dans \mathbb{Z}^3 (voir Figure 12.13). Rigoureusement, on devrait prouver que toute déformation continue ambiante d'un noeud peut être effectuée pour son équivalent discret par une séquence d'insertions ou suppressions de voxels simples. Notons que cette dernière propriété est certainement dépendante du pas de discrétisation. De plus, on devrait aussi prouver que l'homotopie symétrique ne peut mettre en relation deux objets dont les analogues continus ne sont pas équivalents à une déformation continue près. Néanmoins, le schéma donné ici devrait convaincre le lecteur que l'homotopie symétrique est un problème au moins aussi difficile que celui de l'équivalence des noeuds.

Cependant, un résultat classique de la théorie des noeuds, qui montre que le groupe du noeud (i.e. le groupe fondamental du complémentaire de la courbe de \mathbb{R}^3 représentant un noeud) n'est pas un invariant complet, réside dans le fait que les groupes fondamentaux (discrets) des complémentaires des objets X_1 et X_2 de la Figure 12.13 sont isomorphes alors que ces deux noeuds ne sont pas équivalents. En d'autres termes, les objets X_1 et X_2 ne sont pas symétriquement homotopes.

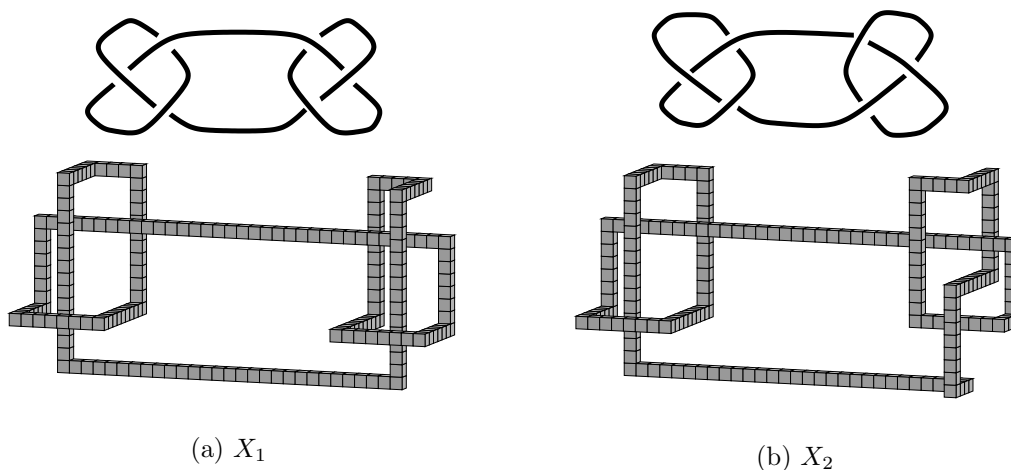


FIG. 12.13: Pour tout $B_1 \in \overline{X_1}$ et tout $B_2 \in \overline{X_2}$, les groupes fondamentaux $\Pi_1^n(\overline{X_1}, B_1)$ et $\Pi_1^n(\overline{X_2}, B_2)$ ne sont pas isomorphes.

Dans [NR00], Nakamura et Rosenfeld établissent le rapport entre les noeuds “polygonaux” dans \mathbb{R}^3 et les noeuds discrets dans \mathbb{Z}^3 . Ce dernier article peut être considéré comme une première tentative dans l'établissement d'un lien entre la théorie des noeuds et la caractérisation de l'homotopie symétrique dans \mathbb{Z}^3 .

Notations

Notation	Nom	Page
\bar{X}	complémentaire de l'ensemble X	17
$Card(X)$	cardinal de l'ensemble X	
(x_0, \dots, x_p) ou $(x_i)_{i=0, \dots, p}$	p -uplet	
$N_{\mathcal{R}}(x)$	\mathcal{R} -voisinage de x	18
$G_n(x, X)$ pour $n \in \{6, 6+, 18, 26\}$	n -voisinage géodésique (\mathbb{Z}^3)	167
$G_e(x, X)$	graphe de e_x -adjacence	85
$G_v(x, X)$	graphe de v_x -adjacence	85
$\mathcal{R}_4, \mathcal{R}_8$	Relations d'adjacences dans \mathbb{Z}^2	22
$\mathcal{R}_6, \mathcal{R}_{18}, \mathcal{R}_{26}$	Relations d'adjacences dans \mathbb{Z}^3	22
$\pi_1 \cdot \pi_2$	concaténation de chemins	20
π^*	ensemble des spels d'un chemin	20
$\sim_{\mathcal{R}}$	relation de \mathcal{R} -déformation élémentaire	40
$\simeq_{\mathcal{R}}$	relation de \mathcal{R} -homotopie	41
$A_{\mathcal{R}}^p(X)$	ensemble des \mathcal{R} -chemins fermés de p à p dans X	45
$\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, p)$	ensemble quotient de $A_{\mathcal{R}}^p(X)$ suivant $\simeq_{\mathcal{R}}$	45
$[c]_{\Pi_1^{\mathcal{R}}(X, B)}$	classe d'homotopie de c dans X suivant $\simeq_{\mathcal{R}}$	46
$\mathcal{I}_{\pi, c}$	Nombre d'intersection de π et c	101
$Left_{\pi}(k), Right_{\pi}(k)$	gauche et droite locales d'un chemin	99
$L_{\pi, c}$	Nombre d'entrelacement de π et c	183
$P_c(i)$	Mouvement projectif du chemin c en i	181
$c_n(s)$	n -chemin associé à une courbe d'edgels de bord	144

Annexes

Annexe A

Preuve du Lemme 12.6

Dans cette annexe, on donne le code source en langage C d'un programme qui examine toutes les configurations locales $3 \times 3 \times 3$ de points telles que $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) \geq 2$; et qui vérifie pour chacune de ces configurations qu'au moins un des ensembles $K_n(x, X, C)$ qui peuvent lui être associés est une n -courbe fermée simple pour $n \in \{6, 26\}$ et une certaine composante \bar{n} -connexe C de $G_{\bar{n}}(x, \bar{X})$.

Ce programme est décomposé en plusieurs fichiers. Le fichier `config.h` contient la déclaration des types de données utilisés ainsi que les déclarations des quelques fonctions manipulant les configurations locales (type `Config`). Ces fonctions sont définies dans le fichier `config.c`.

Description du type `Config`

Le type `Config` défini dans `config.h` est un entier long non-signé dans lequel le bit de poids n est associé à un des voxels de $N_{26}(x) \cap X$ suivant la convention donnée dans la Figure A.1. A titre d'illustration, nous donnons dans la Figure A.2 la signification du masque de bits "MASK_CUBE0" défini dans le fichier `config.h`. Ainsi, une opération comme "ajouter à la configuration `cnf_a` les 6-voisins du point numéro i de la configuration `cnf_b`" peut s'effectuer par un simple OU logique bit à bit. De la même façon, vérifier que tous les points d'une configuration appartiennent à un même cube $2 \times 2 \times 2$ peut se faire en utilisant la condition très efficace que l'on trouve dans le fichier `config.c` (fonction `In_2x2x2Cube()`).

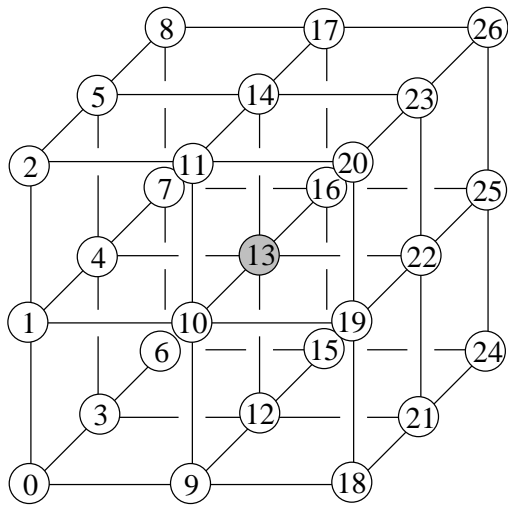


FIG. A.1: *Convention pour la numérotation des points de $N_{26}(x)$.*

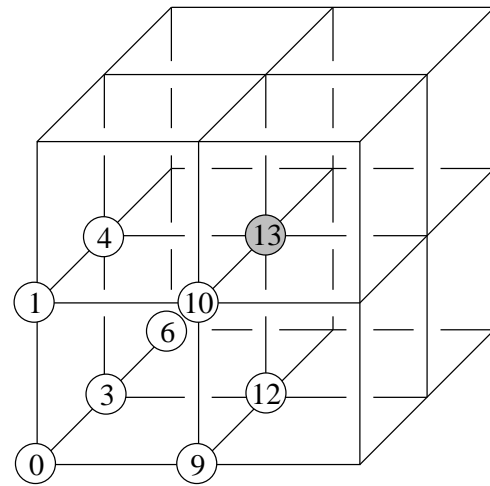


FIG. A.2: *Ce cube $2 \times 2 \times 2$ est représenté par l'entier $2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^4 + 2^9 + 2^{10} + 2^{13}$ (= "MASK_CUBE0" dans le fichier *config.h*).*

Fichier : Makefile

CC = gcc -Wall

proof: proof.c config.o
gcc -o proof proof.c config.o

config.o: config.h config.c
gcc -c config.c

Fichier : config.h

```
#ifndef CONFIG_H
```

```
#define CONFIG_H
```

```
/* *****
 * FICHER : config.h
 * AUTEUR : Sebastien FOUREY
 * DESCRIPTION : definition de plusieurs constantes et tableaux
 * pour la manipulation des configurations 3x3x3.
 *
 * Declaration des fonctions suivantes :
 *
 * int cnfCardinal(Config);
 * Config cnfComplement(Config);
 * int cnfNbConnectedComponents(Config, int list[][32])
 * Config cnfG6(Config cnf);
 * Config cnfG26(Config cnf);
 * Config FindConnectedComponent(Config, const Config []);
 * int SimpleClosed26Curve(Config);
 * int SimpleClosed6Curve(Config config);
 *
 *****
 */
```

```
#define CENTER 13
```

```
#define END 127
```

```
#define MASK_CONFIG 0x07FFFFFF
```

```
#define MASK_CENTER 0x00002000
```

```
#define MASK_N26 0x07FFDFFF
```

```
#define MASK_N18 0x2EBDEBA
```

```
#define MASK_N6 0x415410
```

```
#define MASK_0 0x1
```

```
#define MASK_1 0x2
```

```
#define MASK_2 0x4
```

```
#define MASK_3 0x8
```

```
#define MASK_4 0x10
```

```
#define MASK_5 0x20
```

```
#define MASK_6 0x40
```

```
#define MASK_7 0x80
```

```
#define MASK_8 0x100
```

```
#define MASK_9 0x200
```

```
#define MASK_10 0x400
```

```
#define MASK_11 0x800
```

```
#define MASK_13 0x2000
```

```
#define MASK_14 0x4000
```



```

#define MASK_15 0x8000
#define MASK_16 0x10000
#define MASK_12 0x1000 50
#define MASK_17 0x20000
#define MASK_18 0x40000
#define MASK_19 0x80000
#define MASK_20 0x100000
#define MASK_21 0x200000
#define MASK_22 0x400000
#define MASK_23 0x800000
#define MASK_24 0x1000000
#define MASK_25 0x2000000
#define MASK_26 0x4000000 60

#define MASK_CUBE0 0x361B
#define MASK_CUBE1 0x6C36
#define MASK_CUBE2 0x1B0D8
#define MASK_CUBE3 0x361B0
#define MASK_CUBE4 0x6C3600
#define MASK_CUBE5 0xD86C00
#define MASK_CUBE6 0x361B000
#define MASK_CUBE7 0x6C36000 70

typedef unsigned long Config;

/* The6Neighbors[i] est une configuration qui contient tous les points */
/* de N26(x) qui sont 6-adjacents au point numero i */
static const Config The6Neighbors[27] = {
    0x20a, 0x415, 0x822, 0x1051, 0xaa, 0x4114,
    0x8088, 0x10150, 0x200a0, 0x41401, 0x80a02, 0x104404,
    0x208208, 0x415410, 0x820820, 0x1011040, 0x2028080, 0x4014100,
    0x280200, 0x540400, 0x880800, 0x1441000, 0x2a80000, 0x4504000,
    0x2208000, 0x5410000, 0x2820000}; 80

static const Config The26Neighbors[27] = {
    0x161a, 0x5e3d, 0x4c32, 0x196d3, 0x3dfef, 0x34d96, 0x19098,
    0x3d178, 0x340b0, 0x6c141b, 0xfc5a3f, 0xd84436, 0x36d86db, 0x7ffdf,
    0x6db0db6, 0x36110d8, 0x7e2d1f8, 0x6c141b0, 0x681600, 0xf45e00, 0xc84c00,
    0x34d9600, 0x7bfde00, 0x65b4c00, 0x2619000, 0x5e3d000, 0x2c34000 };

static const int List6Neighbors[27][32] = 90
{{ 1, 3, 9, END },
 { 0, 2, 4, 10, END },
 { 1, 5, 11, END },
 { 0, 4, 6, 12, END },
 { 1, 3, 5, 7, END },
 { 2, 4, 8, 14, END },
 { 3, 7, 15, END },

```

```

{ 4, 6, 8, 16, END },
{ 5, 7, 17, END },
{ 0, 10, 12, 18, END },
{ 1, 9, 11, 19, END },
{ 2, 10, 14, 20, END },
{ 3, 9, 15, 21, END },
{ 4, 10, 12, 14, 16, 22, END },
{ 5, 11, 17, 23, END },
{ 6, 12, 16, 24, END },
{ 7, 15, 17, 25, END },
{ 8, 14, 16, 26, END },
{ 9, 19, 21, END },
{ 10, 18, 20, 22, END },
{ 11, 19, 23, END },
{ 12, 18, 22, 24, END },
{ 19, 21, 23, 25, END },
{ 14, 20, 22, 26, END },
{ 15, 21, 25, END },
{ 16, 22, 24, 26, END },
{ 17, 23, 25, END };

```

```

static const int List26Neighbors[27][32] =
{{ 1, 3, 4, 9, 10, 12, END },
{ 0, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 14, END },
{ 1, 4, 5, 10, 11, 14, END },
{ 0, 1, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 16, END },
{ 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, END },
{ 1, 2, 4, 7, 8, 10, 11, 14, 16, 17, END },
{ 3, 4, 7, 12, 15, 16, END },
{ 3, 4, 5, 6, 8, 12, 14, 15, 16, 17, END },
{ 4, 5, 7, 14, 16, 17, END },
{ 0, 1, 3, 4, 10, 12, 18, 19, 21, 22, END },
{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11, 12, 14, 18, 19, 20, 21, 22, 23, END },
{ 1, 2, 4, 5, 10, 14, 19, 20, 22, 23, END },
{ 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, END },
{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18,
19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, END },
{ 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, END },
{ 3, 4, 6, 7, 12, 16, 21, 22, 24, 25, END },
{ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 14, 15, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 26, END },
{ 4, 5, 7, 8, 14, 16, 22, 23, 25, 26, END },
{ 9, 10, 12, 19, 21, 22, END },
{ 9, 10, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 22, 23, END },
{ 10, 11, 14, 19, 22, 23, END },
{ 9, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 22, 24, 25, END },
{ 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, END },
{ 10, 11, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 25, 26, END },
{ 12, 15, 16, 21, 22, 25, END },

```

```
{ 12, 14, 15, 16, 17, 21, 22, 23, 24, 26, END },
{ 14, 16, 17, 22, 23, 25, END };
```

```
int cnfCardinal(Config);
/* Retourne le nombre de points dans la configuration */ 150
```

```
inline Config cnfComplement(Config);
/* Retourne la configuration complémentaire */
```

```
Config cnfG6(Config);
/* Retourne  $G_{\{6\}}(x,X)$  */
```

```
Config cnfG26(Config);
/* Retourne  $G_{\{26\}}(x,X)$  */
```

160

```
Config FindConnectedComponent(Config config, const Config TheNeighbors[]);
/* Retourne un composante  $n$ -connexe de la configuration
   TheNeighbors[i] est une configuration qui contient les points de
    $N_{\{26\}}(x)$  qui sont  $n$ -adjacents au point  $i$ 
   Retourne 0 si config est vide
*/
```

```
int SimpleClosed26Curve(Config);
/* Teste si les points de la configuration forment une 26-courbe ferme simple */ 170
```

```
int SimpleClosed6Curve(Config);
/* Teste si les points de la configuration forment une 6-courbe ferme simple */
```

```
int cnfNbConnectedComponents(const Config config, const int list_neighbors[27][32]);
/* Compte le nombre de composantes  $n$ -connexes dans la configuration */
```

```
#endif
```

180

Fichier : config.c

```

#include "config.h"
/* *****
 * FICHER : config.c
 * AUTEUR : Sebastien FOUREY
 * DESCRIPTION : definition des fonctions declarees dans config.h
 *****
 */

int cnfCardinal(Config config)
{
    int result=0;
    while (config)
    {
        if (config & 1) result++;
        config>>=1;
    }
    return result;
}

inline Config cnfComplement(Config config)
{ return (~config)&MASK_N26; }

Config cnfG6(Config config)
{
    Config result=0;
    Config add=0;

    result = config & MASK_N6;

    if (result & MASK_4) add |= The6Neighbors[4];
    if (result & MASK_10) add |= The6Neighbors[10];
    if (result & MASK_12) add |= The6Neighbors[12];
    if (result & MASK_14) add |= The6Neighbors[14];
    if (result & MASK_16) add |= The6Neighbors[16];
    if (result & MASK_22) add |= The6Neighbors[22];
    result |= (config & add);
    return result;
}

Config cnfG26(Config cnf)
{ return cnf & MASK_N26; }

Config FindConnectedComponent(Config config, const Config TheNeighbors[])
{
    Config old,grow,add;
    int i;

```

```

if (!config) return 0;
i=0;                                     /* Trouve un point de depart*/
while (!(config & (1<<i)) ) i++;          50

grow = 1<<i;                             /* Fait croitre la composante associee */
do
{                                         /* au point numero i jusqu'a stagnation*/
    old = grow;
    add=0;                                /* Ajoute a "grow" les voisins dans la */
    for (i=0; i<27; i++)                /* configuration des points de grow */
        if (grow & (1<<i))
            add |= (config & (TheNeighbors[i]));
    grow |= add;                          60
} while (grow != old);

return grow;
}

int SimpleClosed26Curve(Config config)
{
    int i;
    for (i=0; i<27; i++)
    {                                       70
        if ( ( config & (1<<i)) &&
            ( cnfCardinal( config & The26Neighbors[i]) != 2))
            return 0;
    }
    return 1;
}

int SimpleClosed6Curve(Config config)
{
    int i;                                80
    for (i=0; i<27; i++)
    {
        if ( ( config & (1<<i)) &&
            ( cnfCardinal(config & The6Neighbors[i]) != 2))
            return 0;
    }
    return 1;
}

int cnfNbConnectedComponents(const Config config, const int list_neighbors[27][32]) 90
{
    Config not_seen,mask;
    int n=0;
    int result=0;
    unsigned int queue[32];
    unsigned int * q_head = queue;

```


Fichier : proof.c

```

#include "config.h"
/* *****
*
*   FICHIER : proof.c
*   AUTEUR : Sebastien FOUREY
*   DESCRIPTION : Preuve automatique
*
*****
*/

/* Trouve toutes les composantes 6-connexes C de G_6(x,\overline{X}) et
* et verifie que pour chacune d'elle l'ensemble K est une 26-courbe
* fermee simple.
* Retourne 0 si aucun des ensembles K n'est une 26-courbe fermee simple
* Retourne 1 sinon */
int FindK26Candidates(Config configuration);

/* Trouve toutes les composantes 26-connexes C de G_26(x,\overline{X})
* et verifie que pour chacune d'elle l'ensemble K est une 6-courbe
* fermee simple.
* Retourne 0 si aucun des ensembles K n'est une 6-courbe fermee simple
* Retourne 1 sinon */
int FindK6Candidates(Config configuration);

/* Verifie que tous les points de la configuration
* appartient a un cube 2x2x2 */
int In_2x2x2Cube(Config config);

/* Fonction principale */
int main()
{
    Config config;
    unsigned long n;

    /* Preuve dans le cas (26,6) */
    printf("Verification config. : T26(x,X)=1 et T6(x,\overline{X})>=2\n");
    for (config= 0; config <= 0x07FFFFFF; config++)
    {
        if (!(config & MASK_CENTER) &&
            (cnfNbConnectedComponents(cnfG26(config),
                                     List26Neighbors) == 1) &&
            (cnfNbConnectedComponents(cnfG6(cnfComplement(config)),
                                     List6Neighbors) >= 2))
        {
            n++;
            if (!FindK26Candidates(config))
            {

```

```

        printf("Erreur: Pas de 26-cfs : %lu (%lx)\n",config,config);
        exit(-1);
    }
}
printf( " %lu configurations / T6(x,X)=1 et T6(x,overline{X})>=2 \n",n);

/* Preuve dans le cas (6,26) */
printf(" Verification config. : T6(x,X)=1 et T26(x,overline{X})>=2\n");
n=0;
for (config=0; config <= 0x07FFFFFF; config++)
{
    if (!(config & MASK_CENTER) &&
        (cnfNbConnectedComponents( cnfG6(config),
                                   List6Neighbors)==1) &&
        (cnfNbConnectedComponents(cnfG26(cnfComplement(config)),
                                   List26Neighbors)>=2))
    {
        n++;
        if (!FindK6Candidates(config))
        {
            printf("Erreur: Pas de 6-cfs : %lu (%lx)\n",config,config);
            exit(-1);
        }
    }
}
printf( " %lu configurations / T6(x,X)=1 et T26(x,overline{X})>=2\n",n);
}

/* Trouve toutes les composantes 6-connexes C de G_6(x,\overline{X}) et
 * et verifie que pour chacune d'elle l'ensemble K est une 26-courbe
 * fermee simple.
 * Retourne 0 si aucun des ensembles K n'est une 26-courbe fermee simple
 * Retourne 1 sinon */
int FindK26Candidates(Config configuration)
{
    Config K,K0,C;
    Config seen=0;
    Config G26 = configuration & MASK_N26; /* G26(x,X) */
    Config G6Comp = cnfG6(cnfComplement(configuration)); /* G6(x,\overline{X}) */
    int some_removal;
    int i,s;

    while (( C = FindConnectedComponent(G6Comp & ~seen, The6Neighbors))
    /* C est une composante 6-connexe de G6(x,\overline{X}) qui */
    /* n'a pas encore ete examinee */
    {
        K0=0; /* Construction de l'ensemble K0 associe a cc_complement */

```



```

for (i=0; i<27; i++)
{
    if ((G26 & (1<<i)) /* Le point "i" appartient a G26(x,X) */
        && (C & The6Neighbors[i])) /* et est 6-adjacent a C */ 100
        K0 = K0 | (1<<i); /* donc appartient a K0 */
}

/* Construction de l'ensemble K associe a C */
K = K0 & MASK_N18; /* Un voxel de N26(x)\setminusN18(x) */
/* ne peut etre isole dans X et est */
/* donc evidement un voxel gras. */

do { /* Suppression des voxels gras de K */ 110
    some_removal=0;
    for (i=0; i<27; i++)
    {
        if ( (K & (1<<i)) &&
            In_2x2x2Cube( (K & The26Neighbors[i]) & MASK_N26))
        {
            K = K ^ (1<<i);
            some_removal=1;
        }
    }
}
while (some_removal); 120

if (SimpleClosed26Curve(K)) return 1;
seen = seen | C;
}
return 0; /* Aucune 26-courbe f.s. trouvee !!! */
}

/* Trouve toutes les composantes 26-connexes C de G_26(x,\overline{X})
* et verifie que pour chacune d'elle l'ensemble K est une 6-courbe 130
* fermee simple.
* Retourne 0 si aucun des ensembles K n'est une 6-courbe fermee simple
* Retourne 1 sinon */
int FindK6Candidates(Config configuration)
{
    Config K,K0; /* Les ensembles K et K0 */
    Config seen=0; /* OU bit a bit de toutes les composantes C de */
    /* G26(x,\overline{X}) deja examinees */

    Config G6 = cnfG6(configuration); 140
    Config G26Comp = cnfG26((~configuration) & MASK_N26);
    Config C;
    int i,some_removal;

    /* Trouve une composante 26 connexe */

```

```

while ((C=FindConnectedComponent( G26Comp & ~seen, The26Neighbors)))
{
    K0=0;                /* K0 est l'ensemble des voxels de G6(x,X) */
    for (i=0; i<27; i++) /* qui sont 26-adjacents a C */
    {
        if ( (G6 & (1<<i)) &&
            ( C & The26Neighbors[i]))
            K0 = K0 | (1<<i);
    }
    K = K0;
    if (SimpleClosed6Curve(K)) return 1; /* Premier teste (optimisation) */

    do {                /* Suppression des voxels 6-extremites de K */
        some_removal=0;
        for (i=0; i<27; i++)
        {
            if ((K & (1<<i)) && (cnfCardinal(K & The6Neighbors[i]) == 1))
            {
                K = K ^ (1<<i);
                some_removal = 1;
            }
        }
    }
    while (some_removal);

    if (SimpleClosed6Curve(K)) return 1;
    seen |= C;
}
return 0;                /* Aucune 6-courbe f.s. trouvee !!! */
}

/* Verifie que tous les points de la configuration *
 * sont dans un cube 2x2x2 */
int In_2x2x2Cube(Config config)
{
    return ( config
        &&
        ( !(config & ~MASK_CUBE0)
          ||!(config & ~MASK_CUBE1)
          ||!(config & ~MASK_CUBE2)
          ||!(config & ~MASK_CUBE3)
          ||!(config & ~MASK_CUBE4)
          ||!(config & ~MASK_CUBE5)
          ||!(config & ~MASK_CUBE6)
          ||!(config & ~MASK_CUBE7)));
}

```


Bibliographie

- [ABP96] Z. AKTOUF, G. BERTRAND, et L. PERROTON. « A 3D-hole closing algorithm ». Dans *Proceedings of the 6th International Workshop DGCI'96*, pages 36–47, Novembre 1996.
- [AFH81] E. ARTZY, G. FRIEDER, et G. T. HERMAN. « The theory, design, implementation and evaluation of a three dimensional surface detection algorithm ». *Computer graphics and image processing*, 15(1):1–23, 1981.
- [AHL96] R. AHARONI, Gabor T. HERMAN, et M. LOEBL. « Jordan Graphs ». *Graphical Models and Image Processing*, 58(4):345–359, Juillet 1996.
- [Ale28] J. W. ALEXANDER. « Topological invariants of knots and links ». *Transactions of the American Mathematical Society*, 30:275–306, 1928.
- [ALV⁺93] A. ATAMENIA, E. LEPETRE, B. VIDAL, J. DELFOSSE, et K. BERGARD. « Objets Discrets en Synthse d’Images ». *Actes du colloque Gometrie Discrte en Imagerie, Fondements et applications*, pages 62–77, Septembre 1993. Strasbourg, France.
- [AT93] D. ATTALI et E. THIEL. « Du squelette discret ou continu ». *Actes du colloque Gometrie Discrte en Imagerie, Fondements et applications*, pages 236–244, Septembre 1993. Strasbourg, France.
- [BA95] G. BERTRAND et Z. AKTOUF. « Three-dimensional thinning algorithm using subfields ». Dans *Proceedings of SPIE'95, Vision Geometry III*, volume 2356, pages 113–124, 1995.
- [Ber92] G. BERTRAND. « A new topological classification of points in 3D images ». *2cnd European Conference Computer Vision*, pages 710–714, 1992.

- [Ber94] G. BERTRAND. « Simple points, topological numbers and geodesic neighborhoods in cubics grids ». *Patterns Recognition Letters*, 15:1003–1011, 1994.
- [Ber95] G. BERTRAND. « On P -simple points ». *Compte rendus de l'Académie des Sciences*, 321(1):11077–1084, 1995.
- [BM94] G. BERTRAND et G. MALANDAIN. « A new characterization of three-dimensional simple points ». *Pattern Recognition Letters*, 15:169–175, Fvriier 1994.
- [BM99] G. BERTRAND et R. MALGOUYRES. « Some topological properties of discrete surfaces ». *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 11:207–221, 1999.
- [Bre65] J. E. BRESENHAM. « Algorithm for computer control of a digital plotter ». *IBM System Journal*, 4(1):25–30, 1965.
- [Bre77] J. E. BRESENHAM. « A linear algorithm for incremental display of circular arcs ». *Computer Graphics and Image Processing*, 20(2):100–106, 1977.
- [BZ86] G. BURDE et H. ZIESCHANG. *Knots*. De Gruyter, Berlin, 1986.
- [BZ96] Alexander I. BYKOV et Leonid G. ZERKALOV. « Algorithms for homotopy classification of binary images ». *Pattern Recognition*, 29(4):565–574, 1996.
- [BZM99] A. I. BYKOV, L. G. ZERKALOV, et M.A. RODRIGUEZ PINEDA. « Index of a point of 3-D digital binary image and algorithm for computing its Euler characteristic ». *Pattern Recognition*, 32:845–850, 1999.
- [Cal96] J. CALAIS. *Elements de thorie des groupes*. Puf, 1996.
- [CC89] M. COSTER et J. L. CHERMANT. *Precis d'Analyse d'Images*. Editions du CNRS, 1989.
- [CM91] J. M. CHASSERY et A. MONTANVERT. *Gomtrie discrte en analyse d'images*. Hermes, 1991.
- [DG98] T. K. DEY et S. GUHA. « Computing Homology Group of Simplicial Complexes in \mathbb{R}^3 ». *Journal of the Association for Computing Machinery*, 45(2):266–287, Mars 1998.

- [DHM67] R. O. DUDA, P. E. HART, et J. H. MUNSON. « Graphical Data Processing Research Study and Experimental Investigation ». *AD650926*, pages 28–30, Mars 1967.
- [Dia93] Yuanan DIAO. « Minimal knotted polygons on the cubic lattice ». *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 2(4):413–425, 1993.
- [Dur95] S. DURAND. *Algorithmes de squelettisation dans le domaine discret en 2D et en 3D, Application sur des images RMN 3D afin d’obtenir le squelette des sillons du cerveau humain*. GREYC, 1995. Rapport de stage de DEA.
- [FMa] S. FOUREY et R. MALGOUYRES. « A concise characterization of 3D simple points ». A paratre dans les actes de DGCI’2000, Dcembre 2000.
- [FMb] S. FOUREY et R. MALGOUYRES. « Intersection Number and Topology preservation within digital surfaces ». *Theoretical Computer Science*. Soumis publication.
- [FM99a] S. FOUREY et R. MALGOUYRES. « Intersection Number and Topology Preservation within Digital Surfaces ». Dans *Proceedings of the Sixth International Workshop on Parallel Image Processing and Analysis (IWPIPA ’99)*, pages 138–158, Janvier 1999. Madras, Inde.
- [FM99b] S. FOUREY et R. MALGOUYRES. « Intersection number of paths lying on a digital surface and a new Jordan theorem ». Dans *Proceedings of the 8th International Conference Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI’99)*, volume 1568 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 104–117. Springer, Mars 1999. Marne la Valle, France.
- [FM00] S. FOUREY et R. MALGOUYRES. « A digital linking number for discrete curves ». Dans *Proceedings of the 7th International Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWICIA ’00)*, pages 59–77. University of Caen, Juillet 2000.
- [FMN89] T. J. FAN, G. MEDIONI, et R. NEVATA. « Recognising 3d Objects using Surface Descriptions ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1111:1140–1157, 1989.

- [Fou97] S. FOUREY. « Homotopie, surfaces discrtes et squelettisation dans \mathbb{Z}^3 (Homotopy, digital surfaces and thinning in \mathbb{Z}^3) ». *Mmoire de D.E.A. de l'Universit de Caen*, 1997. in french.
- [FR97] S. FEJES et Azriel ROSENFELD. « Discrete active models and applications ». *Pattern recognition*, 30(5):817–835, 1997.
- [Fra93] J. FRANCON. « Surfaces Discrettes ». *Actes du colloque Gometrie Discrte en Imagerie, Fondements et applications*, pages 35–440, Septembre 1993. Strasbourg, France.
- [FT91] A. T. FOMENKO et A. A. TUZHILIN. *Elements of the Geometry and Topology of Minimal Surfaces in Three-Dimensional Space*, volume 93 de *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, 1991.
- [GJ89] C. McA GORDON et J. JUEACKE. « Knots are determined by their complement ». *Journal of the American Mathematical Society*, 2:371–415, 1989.
- [Her92] Gabor T. HERMAN. « Discrete Multidimensional Jordan Surfaces ». *Graphical Models and Image Processing*, 54(6):507–515, 1992.
- [Her93] Gabor T. HERMAN. « Oriented Surfaces in Digital Space ». *Graphical Models and Image Processing*, 55(5):381–396, 1993.
- [Her98] Gabor T. HERMAN. « Finitary 1-simply connected digital spaces ». *Graphical Models and Image Processing*, 60(1):46–56, Janvier 1998.
- [HKL⁺81] Gabor T. HERMAN, D. M. KRAMER, P. C. LAUTERBUR, A. M. RUDIN, J.S. SHNEIDER, et J.K. UDUPA. « The three-dimensional display of NMR imaging ». Dans *Proceedings of SPIE*, volume 273, pages 35–40, 1981.
- [HU83] Gabor T. HERMAN et J. K. UDUPA. « Display of 3D discrete surfaces ». Dans *Proceedings of SPIE*, volume 283, 1983.
- [HW83] Gabor T. HERMAN et D. WEBSTER. « A topological proof of a surface tracking algorithm ». *Computer vision, Graphics Image Processing*, 23:162–177, 1983.
- [Kau87] L. H. KAUFFMAN. *On knots*. Annals of Mathematical Studies. Princeton University Press, 1987.

- [Kin93] L. Christine KINSEY. *Topology of surfaces*. Undergraduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1993.
- [KKM91] T. Yung KONG, R. KOPPERMAN, et P. R. MEYER. « A topological approach to digital topology ». *American Mathematical Monthly*, 98:901–917, Dcembre 1991.
- [Kon88] T. Yung KONG. « Polyhedral Analogs of Locally Finite Topological Spaces ». Dans R. M. SHORTT, éditeur, *General Topology and Applications: Proceedings of the 188 Northeast Conference, Middletown, CT (USA)*, volume 123 de *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, pages 153–164, 1988.
- [Kon89] T. Yung KONG. « A Digital Fundamental Group ». *Computer Graphics*, 13:159–166, 1989.
- [Kon95] T. Yung KONG. « On topology preservation in 2-D and 3-D thinning ». *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 9(5):813–844, 1995.
- [KR89] T. Yung KONG et Azriel ROSENFELD. « Digital topology: introduction and survey ». *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 48:357–393, 1989.
- [KRR92] T. Yung KONG, A. W. ROSCOE, et A. ROSENFELD. « Concepts of digital topology ». *Topology and its Applications*, 46:219–262, 1992.
- [KU92] T. Yung KONG et J. K. UDUPA. « NOTE: A justification of a fast surface tracking algorithm ». *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 54(2):162–170, Mars 1992.
- [Len96] A. LENOIR. « Fast Computation of the Normal Vector Field of the Surface of a 3-D Discrete Object ». Dans *Proceedings of DGCI'96*, volume 1176 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 101–112. Springer, 1996.
- [Len97] A. LENOIR. « Fast estimation of Mean Curvature on the Surface of a 3D Discrete Object ». Dans *Proceedings of DGCI'97*, volume 1347 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 213–222. Springer, 1997.

- [LPR91] C. N. LEE, T. POSTON, et Azriel ROSENFELD. « Winding and Euler numbers for 2D and 3D digital images ». *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 53(6):522–537, Novembre 1991.
- [Ma94] Cherng Min MA. « On topology preservation in 3D thinning ». *CVGIP: Image Understanding*, 59(3):328–339, Mai 1994.
- [Mal94] R. MALGOUYRES. « Une nouvelle caractérisation des surfaces de l'espace discret \mathbb{Z}^3 conduisant à un théorème de Jordan 3D discret ». PhD thesis, Université d'Auvergne, 1994.
- [Mal95] R. MALGOUYRES. « Graphs generalizing closed curves with linear construction of the Hamiltonian cycle ». *Theoretical Computer Science*, 143:189–249, 1995.
- [Mal96] R. MALGOUYRES. « There is no local characterization of separating and thin objects in \mathbb{Z}^3 ». *Theoretical Computer Science*, 163:303–308, 1996.
- [Mal97a] R. MALGOUYRES. « A definition of surfaces of \mathbb{Z}^3 : a new 3D discrete Jordan theorem ». *Theoretical Computer Science*, 186:1–41, 1997.
- [Mal97b] R. MALGOUYRES. « Homotopy in 2-dimensional Digital Images ». Dans *Proceedings of DGCI'97*, volume 1347 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 213–222. Springer, Dcembre 1997.
- [Mal97c] R. MALGOUYRES. « A local property of strong surfaces ». Dans *Proceedings of SPIE'97, Vision and Geometry VI*, volume 3168, 1997.
- [Mal98] R. MALGOUYRES. « Local characterization of strong surfaces within strongly separating objects ». *Pattern Recognition Letters*, 19:341–349, 1998.
- [Mal99] R. MALGOUYRES. « Presentation of the Fundamental Group in Digital Surfaces ». Dans *Proceedings of the 8th International Conference Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'99)*, volume 1568 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 136–150. Springer, Mars 1999. Marne la Valle, France.
- [Mal00] R. MALGOUYRES. « Homotopy in 2-dimensional Digital Images ». *Theoretical Computer Science*, 230:221–233, 2000.
- [Mau80] C. R. F. MAUNDER. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 1980.

- [MB92] G. MALANDAIN et G. BERTRAND. « Fast characterization of 3D simple points ». *Proc. 11th IAPR Int. Conf. on Pattern Recognition, The Hague, The netherlands*, 3:232–235, 1992.
- [MB97] R. MALGOUYRES et G. BERTRAND. « Complete locale characterization of strong 26-surfaces ». Dans *Proceedings of IWPIA '97, Hiroshima*, Septembre 1997.
- [MB99] R. MALGOUYRES et G. BERTRAND. « A new local property of strong n -surfaces ». *Pattern Recognition Letters*, 20(4):417–428, 1999.
- [MBA93] G. MALANDAIN, G. BERTRAND, et N. AYACHE. « Topological segmentation of discrete surface ». *International Journal of Computer Vision*, 10:183–197, 1993.
- [Mey92] F. MEYER. « Mathematical morphology: from two dimensions to three dimensions ». *Journal of microscopy*, 165(1):5–28, Janvier 1992.
- [MF98] R. MALGOUYRES et S. FOUREY. « Strong Surfaces, Surface skeletons and Image Superimposition ». Dans *Proceedings of the SPIE, Vision Geometry VII*, volume 3454, pages 16–27, 1998.
- [ML00] R. MALGOUYRES et A. LENOIR. « Topology preservation within digital surfaces ». *Graphical Models (GMIP)*, 62:71–84, 2000.
- [MO97] A. MCANDREW et C. OSBORNE. « The Euler characteristic on the face-centered cubic lattice ». *Pattern Recognition Letters*, 18:229–237, 1997.
- [Mor80] D. G. MORGENTHALER. « Three-dimensional digital topology: The genus ». Rapport Technique TR-980, Computer vision laboratory, Computer science center, University of Maryland, Novembre 1980.
- [Mor81] D. G. MORGENTHALER. « Three-dimensional simple points: serial erosion, parallel thinning, and skeletonization ». Rapport Technique TR-1005, Computer vision laboratory, Computer science center, University of Maryland, Fvrier 1981.
- [MR81] D. G. MORGENTHALER et Azriel ROSENFELD. « Surfaces in three-dimensional images ». *Information and Control*, 51:227–247, 1981.

- [MS96] Cherng Min MA et M. SONKA. « A fully parallel 3D thinning algorithm ». *Computer vision and image understanding*, 64(3):420–433, Novembre 1996.
- [NR97] Akira NAKAMURA et Azriel ROSENFELD. « Digital calculus ». *Information Science*, 98:83–98, 1997.
- [NR00] Akira NAKAMURA et Azriel ROSENFELD. « Digital knots ». *Soumis publication*, 2000.
- [Oss97] R. OSSERMAN, éditeur. *Geometry V, Minimal surfaces*, volume 90 de *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer, 1997.
- [Per93] L. PERROTON. « A 26–connected object surface tracking algorithm ». Dans *Actes du colloque Gometrie Discrete en Imagerie, Fondements et applications*, pages 1–10, Septembre 1993. Strasbourg, France.
- [Per96] D. PERRIN. *Cours d'Algre*. Ellipses, 1996.
- [Rei48] K. REIDEMESTER. *Knot theory*. Chelsea, New-York, 1948.
- [Rev93] J. P. REVEILLES. « Ideal Discrete Geometry ». *Actes du colloque Gometrie Discrete en Imagerie, Fondements et applications*, pages 108–134, Septembre 1993. Strasbourg, France.
- [RJB97] S. RUAN, C. JAGGI, et D. BLOYET. « Segmentation of CSF, Grey-Matter and White-Matter volumes using markov random fields ». *Journal of the International Federation for Medical & Biological Engineering*, 35:756, September 14–19 1997.
- [RKN98] Azriel ROSENFELD, T. Yung KONG, et A. NAKAMURA. « Topolgy-Preserving deformations of two-valued digital pictures ». *Graphical Models and Image Processing*, 60(1):24–34, Janvier 1998.
- [RKW91] Azriel ROSENFELD, T. Yung KONG, et A. Y. WU. « Digital Surfaces ». *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 53(4):305–312, 1991.
- [RM97] L. ROBERT et G. MALANDAIN. « Fast binary image processing using binary decision diagrams ». *Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 97–102, June 17–19 1997.

- [RN97] Azriel ROSENFELD et A. NAKAMURA. « Local deformation of digital curves ». *Pattern Recognition Letters*, 18:613–620, 1997.
- [Rol] Dale ROLFSEN. *Knots and Links*. Mathematics Lecture Series. University of British Columbia.
- [Ron86] Christian RONSE. « A topological characterization of thinning ». *Theoretical Computer Science*, 43:31–41, 1986.
- [Ros70] Azriel ROSENFELD. « Connectivity in digital pictures ». *Journal of the Association for Computing Machinery*, 17(1):146–160, Janvier 1970.
- [Ros73] Azriel ROSENFELD. « Arcs and curves in digital pictures ». *Journal of the Association for Computing Machinery*, 20(1):81–87, Janvier 1973.
- [Ros75] Azriel ROSENFELD. « A converse to the Jordan curve Theorem for digital curves ». *Information and Control*, 29:292–293, 1975.
- [Ros86] Azriel ROSENFELD. « “Continuous” functions on digital pictures ». *Pattern Recognition Letters*, 4:177–184, Juillet 1986.
- [RP66] Azriel ROSENFELD et John L. PFALTZ. « Sequential operations in digital picture processing ». *Journal of the Association for Computing Machinery*, 13(4):471–494, Octobre 1966.
- [SC94] P. K. SAHA et B. B. CHAUDHURI. « Detection of 3-D simple points for topology preserving transformations with application to thinning ». *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 16(10):1028–1032, Octobre 1994.
- [Ser82] J. SERRA. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, 1982.
- [Spa66] Edwin H. SPANIER. *Algebraic topology*. McGraw-Hill series in higher mathematics. McGraw-Hill, 1966.
- [SR71] R. STEFANELLI et A. ROSENFELD. « Some parallel thinning algorithms for digital pictures ». *Journal of the Association for Computing Machinery*, 18(2):255–264, Avril 1971.

- [TF82] Y. F. TSAO et K. S. FU. « A 3D parallel skeletonwise thinning algorithm ». Dans *Proceedings, IEEE PRIP Conference*, pages 678–683, 1982.
- [TM73] G. TOURLAKIS et J. MYLOPOULOS. « Some results in computational topology ». *Journal of the Association for Computing Machinery*, 20(3):439–455, Juillet 1973.
- [UA90] J. K. UDUPA et V. G. AJJANAGADDE. « Boundary and Object Labelling in Three-Dimensional Images ». *Computer vision, Graphics and Image Processing*, 51:355–369, 1990.
- [Udu82] J. K. UDUPA. « Interactive Segmentation and Boundary Surface Formation for 3D Digital Images ». *Computer vision, Graphics and Image Processing*, 18:213–235, 1982.
- [Udu94] J. K. UDUPA. « Multidimensional Digital Boundaries ». *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 56:311–323, 1994.