



**HAL**  
open science

# Simulation par la méthode des éléments spectraux des formes d'onde obtenues par corrélation de bruit sismique

Paul Cupillard

► **To cite this version:**

Paul Cupillard. Simulation par la méthode des éléments spectraux des formes d'onde obtenues par corrélation de bruit sismique. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Paris Diderot - Paris 7, 2008. Français. NNT: . tel-03790680

**HAL Id: tel-03790680**

**<https://hal.science/tel-03790680>**

Submitted on 28 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Université Paris 7 - Denis Diderot**  
**Institut de Physique du Globe de Paris**  
**Équipe de Sismologie**

**Thèse de Doctorat**

présentée par

**Paul Cupillard**

pour l'obtention du Titre de

**Docteur de l'Institut de Physique du Globe de Paris**

Spécialité : *Géophysique Interne*

---

**Simulation par la méthode des éléments spectraux  
des formes d'onde obtenues par corrélation de bruit sismique**

---

Soutenance le 30 avril 2008 devant le jury composé de :

M. Nikolai M. SHAPIRO ..... Président du jury  
M. Francisco J. SÁNCHEZ-SESMA ..... Rapporteur  
M. Michel CAMPILLO ..... Rapporteur  
M. Luis RIVERA ..... Examineur  
M. Jean-Paul MONTAGNER ..... Directeur de thèse  
M. Yann CAPDEVILLE ..... Co-directeur de thèse







# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>1 Caractéristiques des corrélations de bruit sismique</b>	<b>9</b>
1.1 Approche théorique . . . . .	9
1.1.1 Une revue . . . . .	9
1.1.2 Un développement basé sur le théorème de la phase stationnaire . . . . .	11
1.2 Approche numérique . . . . .	14
1.2.1 Abstract . . . . .	14
1.2.2 Introduction . . . . .	14
1.2.3 Uniform noise sources distribution . . . . .	15
1.2.4 Non-uniform noise sources distribution . . . . .	20
1.2.5 Conclusion . . . . .	30
1.2.6 Acknowledgments . . . . .	30
<b>2 Méthode des éléments spectraux à l'échelle régionale</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction . . . . .	33
2.2 Méthode des éléments spectraux en élastodynamique . . . . .	34
2.2.1 Formulation variationnelle du problème élastodynamique . . . . .	34
2.2.2 Discrétisation géométrique . . . . .	36
2.2.3 Approximation de Galerkin . . . . .	36
2.2.4 Formulation matricielle du problème semi-discret . . . . .	39
2.2.5 Discrétisation temporelle . . . . .	42
2.3 Spécificités d'une implémentation à l'échelle régionale . . . . .	43
2.3.1 Maillage . . . . .	44
2.3.2 <i>Perfectly Matched Layers</i> . . . . .	46
2.3.3 Implémentation parallèle . . . . .	48
2.3.4 Quelques remarques . . . . .	48
2.4 Validation . . . . .	51
2.4.1 Milieu homogène . . . . .	52
2.4.2 Milieu radialement hétérogène . . . . .	53
2.4.3 Milieu radialement hétérogène avec atténuation . . . . .	59
2.4.4 Milieu radialement hétérogène anisotrope . . . . .	59
2.A Annexe : Expression des polynômes de Lagrange . . . . .	63

2.B	Annexe : Expression des forces internes . . . . .	64
2.C	Annexe : Manuel d'utilisation de RegSEM . . . . .	66
2.C.1	The Mesh . . . . .	66
2.C.2	The Calculation . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Simulation 3D de deux séismes par la méthode des éléments spectraux</b>	<b>75</b>
3.1	Le modèle de Terre . . . . .	75
3.2	Simulation du séisme de Roumanie, 27 octobre 2004 . . . . .	78
3.3	Simulation du séisme d'Autriche, 12 avril 1998 . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Simulation de corrélations synthétiques par la méthode des éléments spectraux</b>	<b>89</b>
4.1	Introduction . . . . .	89
4.2	Le jeu de données synthétique . . . . .	90
4.3	Méthode . . . . .	93
4.3.1	Principe . . . . .	93
4.3.2	Démonstration . . . . .	95
4.4	Mise en œuvre . . . . .	97
4.4.1	Etape 1 : propagation d'une impulsion et renormalisation spectrale . . .	97
4.4.2	Etape 2 : renversement temporel et rétropropagation . . . . .	99
4.4.3	Etape 3 : Introduction de la source étendue dans les éléments spectraux et simulation des corrélations de bruit . . . . .	103
4.5	Conclusion . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Simulation de corrélations réelles par la méthode des éléments spectraux</b>	<b>109</b>
5.1	Le jeu de données . . . . .	109
5.1.1	Présentation . . . . .	109
5.1.2	Analyse . . . . .	112
5.2	Mise en œuvre de la simulation . . . . .	119
5.2.1	Etape 1 : propagation d'une impulsion et renormalisation spectrale . . .	119
5.2.2	Etape 2 : rétropropagation . . . . .	129
5.2.3	Etape 3 : simulation directe des corrélations de bruit par la méthode des éléments spectraux . . . . .	129
5.3	Conclusion . . . . .	136
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>137</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>139</b>

# Introduction générale

Quand elle n'étudie pas les mécanismes des tremblements de terre, la sismologie s'intéresse aux ondes émises par ces derniers à travers le globe pour tirer des informations sur la structure interne de notre planète. En effet, l'énergie libérée par certains séismes est telle que les ondes qui portent cette énergie peuvent se propager très profondément à l'intérieur de la Terre et être enregistrées en surface par des stations sismologiques situées à plusieurs milliers de kilomètres de l'épicentre. L'analyse de sismogrammes ainsi obtenus permet alors de conjecturer quant aux structures traversées par les différentes ondes sismiques. Effectué sur un grand nombre de données, ce type d'analyses peut donner lieu à des images tridimensionnelles de la vitesse sismique dans le sous-sol. Ces images sont appelées modèles tomographiques et constituent l'un des principaux apports de la sismologie aux sciences de la Terre. Elles permettent de mettre en évidence des hétérogénéités qu'il s'agit d'interpréter (panaches mantelliques ou plaques plongeantes par exemple) et qui, *in fine*, améliorent notre compréhension de la dynamique terrestre.

Toute méthode tomographique s'organise autour d'un problème direct et d'un problème inverse. Le problème direct consiste en l'élaboration d'un jeu de données synthétiques à partir d'un modèle de Terre et d'une théorie de propagation d'ondes. Le problème inverse, quant à lui, évalue la différence entre les données synthétiques et les données réelles pour proposer ensuite un nouveau modèle censé mieux expliquer les observables (Tarantola & Valette, 1982). Ce processus s'effectue de manière itérative et fournit au final des modèles tomographiques qui, de l'un à l'autre, diffèrent essentiellement de part l'information qui a été considérée. On distingue alors les tomographies de temps d'arrivée d'ondes de volume (par exemple Clayton & Comer, 1983; Grand, 1994; Van der Hilst *et al.*, 1997), les tomographies de vitesses de groupe ou de phase d'ondes de surface (par exemple Nataf *et al.*, 1986; Romanowicz, 1990; Montagner & Tanimoto, 1991; Trampert & Woodhouse, 1995; Ekström *et al.*, 1997) et les tomographies, plus rares, de formes d'ondes (Woodhouse & Dziewonski, 1984; Li & Romanowicz, 1996).

Si les modèles proposés s'améliorent au fil des ans, notamment en raison d'un nombre sans cesse croissant de données utilisées (on peut citer par exemple Ritsema *et al.* 1999 qui se servent à la fois d'ondes de surface et d'ondes de volume, ou encore Dedayle *et al.* 2005 qui considèrent plus de 200 000 formes d'ondes dans leur inversion), tous souffrent néanmoins d'approximations dans la résolution du problème direct, approximations qui ont pour effet de restreindre le domaine de validité de l'équation d'onde. La théorie des rais, par exemple, est une approximation haute fréquence utilisée pour calculer les temps d'arrivée d'ondes de volume et ne peut prendre en compte l'effet des structures qui ne sont pas sur le rai reliant l'épicentre à la station. De même, les vitesses de groupe ou de phase d'ondes de surfaces sont déterminées en supposant que la sensibilité des ondes aux structures est confinée sur le grand cercle défini par la source et le récepteur. Quant aux formes d'ondes, elles sont généralement calculées via une

sommation des modes propres de la Terre qui, pour tenir compte de l'atténuation, de l'ellipticité ou des hétérogénéités latérales de vitesses, requiert un couplage entre les différents modes. Ce couplage peut être pris en considération par des théories de perturbation. D'un point de vue pratique, les tomographes ne les ont jamais utilisées qu'au premier ordre, ce qui restreint leur domaine de validité aux faibles contrastes de vitesses. Pour certaines zones, comme la croûte ou la couche D", cela est éminemment problématique. De plus, Woodhouse & Dziewonski (1984) ne gardent que la perturbation sur la phase et obtiennent alors des noyaux de sensibilité 1D qui ne sont adaptés qu'aux ondes de surface. Li & Romanowicz (1995) arrivent à considérer les ondes de volume en appliquant également la perturbation sur l'amplitude. Leurs noyaux de sensibilité sont alors 2D, ce qui est mieux mais reste limité.

Des théories plus sophistiquées ont été proposées pour tenter de dépasser toutes ces approximations. Dahlen *et al.* (2000) et Zhao *et al.* (2000) ont ainsi introduit des noyaux de sensibilité 3D, appelés *Banana Doughnuts*, qui étendent la théorie des rais aux fréquences finies. Etant donné un type d'onde et un couple source-récepteur, ces noyaux permettent de répartir la différence de temps d'arrivée observée entre un synthétique et une donnée sur toute la zone de Fresnel correspondant à l'onde et au couple considérés. Déjà utilisée pour construire un modèle tomographique global (Montelli *et al.*, 2004), cette théorie va beaucoup plus loin que la théorie des rais mais ne prend malheureusement pas en compte toute l'information contenue dans les sismogrammes. L'inversion de formes d'ondes, qui n'a pas cette limitation, a alors fortement intéressé les tomographes. Une théorie de perturbation au second ordre appliquée aux modes propres de la Terre a été proposée (Lognonné & Romanowicz, 1990) mais n'a jamais été mise en œuvre en raison de l'important coût de calcul qu'elle nécessite. Les méthodes numériques de type éléments finis ou différences finies peuvent également modéliser des sismogrammes synthétiques mais impliquent, elles aussi, des coûts de calcul élevés. Cependant, la récente apparition des éléments spectraux (Seriani, 1998; Komatitsch & Vilotte, 1998; Komatitsch & Tromp, 1999; Chaljub, 2000; Capdeville, 2000; Komatitsch & Tromp, 2002a,b; Komatitsch *et al.*, 2002) invite à réfléchir sérieusement quant à sa possible utilisation dans un processus d'inversion. Cette méthode est en effet capable de résoudre l'équation de l'élasto-dynamique sans restriction sur les contrastes de vitesses dans le milieu de propagation. Malheureusement, il est difficilement concevable de l'utiliser dans une inversion classique censée calculer des dérivées de Fréchet, car même implémentée en parallèle et exécutée sur un cluster puissant, le coût de calcul demeurerait trop important. En effet, pour chaque événement, le nombre de dérivées de Fréchet à calculer à chaque itération est égale au nombre de paramètres  $N_p$  qui décrivent le modèle. Chacune de ces dérivées nécessite une simulation si bien que chaque itération demande  $N_s = (N_p + 1)N_e \sim 1\,000\,000$  simulations (où  $N_e$  est le nombre d'événements). Pour passer outre ce problème, Tromp *et al.* (2005) montrent que le calcul des dérivées de Fréchet associées à un événement peut être évité en rétropropageant le champ adjoint (Tarantola, 1984), le nombre de simulations passant alors à  $2N_e$ . Cette astuce, combinée à la *Source Stacking Technique* proposée par Capdeville *et al.* (2005), peut même réduire  $N_s$  à 2. Malheureusement, aucune application à des données réelles n'a encore vu le jour suite à ces développements.

Parallèlement à toutes ces recherches, il a été récemment montré que la fonction de Green entre deux récepteurs pouvait être retrouvée en corrélant le bruit de fond sismique enregistré aux récepteurs en question (Shapiro & Campillo, 2004). Cette remarquable découverte, qui lève le rideau sur un nouveau jeu de données tout à fait intéressant, a très vite suscité un engouement fort. En effet, certaines régions du globe pourvues d'un réseau dense de sismomètres ont tout à coup pu être imagées avec une résolution sans précédent. La première tomographie a été mise en

œuvre par Shapiro *et al.* (2005) et concerne la Californie du sud. Les signaux qui émergent des corrélations de bruit de fond sismique étant dominés par les ondes de surface, il a été possible de mesurer leurs vitesses de groupe pour des périodes allant de 5 à 20 secondes, et cela pour tous les azimuts. Il en résulte des cartes qui exhibent clairement les principales unités géologiques de la croûte. A la suite de ce travail, d'autres régions ont été explorées comme le Tibet (Yao *et al.*, 2006), la Corée du sud (Cho *et al.*, 2007), la Nouvelle-Zélande (Lin *et al.*, 2007) ou l'Europe (Yang *et al.*, 2007).

C'est en héliosismologie que l'imagerie passive (ainsi nommée parce qu'elle utilise des ondes générées par des fluctuations aléatoires du milieu et non par des sources actives) a été mise en œuvre pour la première fois (Duvall *et al.*, 1993). Le bruit corrélé était alors l'intensité des fluctuations de la surface du Soleil. Plus tard, en acoustique, Weaver & Lobkis (2001) ont pu extraire les fonctions de Green d'un bloc d'aluminium en corrélant l'agitation thermique qui l'animait. Ces mêmes auteurs ont montré qu'il était possible de créer un champ aléatoire en plaçant une source dans une cavité réverbérante et que la corrélation d'un tel champ enregistré par deux récepteurs distincts permettait de retrouver la fonction de Green entre ces récepteurs (Lobkis & Weaver, 2001). Cela a inspiré les sismologues qui ont utilisé des enregistrements de coda (partie finale d'un sismogramme qui correspond aux multiples réflexions du champ d'onde incident dans la croûte (Aki, 1969; Aki & Chouet, 1975)) pour reconstruire la fonction de Green entre différents couples de stations (Campillo & Paul, 2003). Le bruit sismique, essentiellement généré par les océans (Longuet-Higgins, 1950), commença à être employé un an plus tard (Shapiro & Campillo, 2004).

Le travail présenté ici se propose d'étudier la possibilité de modéliser numériquement les données issues des corrélations de bruit sismique. Ces données sont maintenant très largement exploitées et il est légitime de se demander ce qu'on peut en attendre vis-à-vis des techniques de modélisation modernes. En effet, nous avons vu qu'en tomographie classique (entendez "qui utilise des enregistrements de séismes"), d'énormes efforts avaient été concentrés sur le problème direct pour simuler des formes d'onde complètes avec le moins d'approximations possible. Il en est résulté des méthodes performantes, comme les éléments spectraux, et la question se pose alors : peut-on espérer modéliser, via des simulations sophistiquées, les formes d'onde des fonctions de Green obtenues par corrélation de bruit ? La réponse n'est pas évidente car le bruit sismique qui règne sur Terre, principalement généré par les océans, a des caractéristiques tout à fait singulières. On note en particulier des spectres chahutés et une répartition inhomogène en espace et en temps. Cela se répercute sur les corrélations si bien que les formes d'onde obtenues ne sont pas exactement les fonctions de Green. Dans une simulation numérique, le simple emploi d'une force impulsionnelle à l'emplacement d'une station ne suffira donc pas pour retrouver les corrélations construites avec les autres stations du réseau. Une source spécifique devra être construite pour ce genre de données ; c'est le challenge que nous allons relever.

L'exposé suivra le plan ci-dessous :

- Dans le premier chapitre, nous étudierons les caractéristiques des formes d'onde obtenues par corrélation de bruit. Nous reprendrons le développement théorique de Roux *et al.* (2005) puis dépasserons les limites de ce développement en utilisant une approche numérique.
- Dans le deuxième chapitre, nous présenterons les grands principes de la méthode des éléments spectraux et tâcherons de mettre en lumière les spécificités de son implémentation à l'échelle régionale. Cette échelle va particulièrement nous intéresser puisqu'il s'agit de

celle mise en jeu dans les corrélations de bruit. Nous finirons donc le chapitre en validant un code éléments spectraux régional qui nous sera utile pour toute la suite.

- Au chapitre 3, nous procéderons à la simulation de deux séismes dans un modèle de Terre 3D. Cela nous permettra de mettre en évidence la puissance des éléments spectraux et de discuter un certain nombre de problèmes géophysiques importants qui résistent encore à l'acuité de nos simulations.
- Le quatrième chapitre sera consacré à la méthode censée nous permettre de simuler la forme d'onde des corrélations de bruit. Basée sur le renversement temporel, cette méthode sera tout d'abord exposée d'un point de vue théorique avant d'être appliquée à un jeu de données synthétiques.
- Dans le cinquième et dernier chapitre, nous tenterons une première application à des données réelles de la méthode présentée au chapitre 4. Nous verrons alors que, malgré les restrictions et contraintes imposées par le bruit sismique réel, les résultats sont très encourageants.

# Chapitre 1

## Quelques caractéristiques des fonctions de Green obtenues à partir des corrélations de bruit sismique

Le bruit de fond sismique, habituellement considéré comme inutile et même gênant, a montré ces dernières années qu'il contenait une information cohérente et pouvait s'avérer très intéressant pour étudier la structure interne de la Terre. En effet, la corrélation du bruit sismique enregistrée à deux stations distinctes permet de retrouver la fonction de Green entre ces deux stations (Shapiro & Campillo, 2004). Cette découverte, dont ont découlé de nombreuses tomographies (par exemple Shapiro *et al.*, 2005; Yao *et al.*, 2006; Cho *et al.*, 2007; Lin *et al.*, 2007; Yang *et al.*, 2007; Brenguier *et al.*, 2007), fait suite à des expériences concluantes menées dans d'autres domaines : héliosismologie (Duvall *et al.*, 1993), acoustique (Weaver & Lobkis, 2001; Lobkis & Weaver, 2001), océanographie (Roux & Kuperman, 2004).

Parallèlement à ces expériences ont été développées des théories qui tentent d'expliquer le phénomène. Dans la première partie de ce chapitre, nous présenterons brièvement ces théories et nous nous attarderons sur l'une d'entre elles qui, s'appuyant parfois sur des hypothèses très éloignées des conditions expérimentales, révèle néanmoins certains aspects importants des fonctions de Green obtenues avec du bruit réel. Dans une deuxième partie, nous utiliserons une approche numérique pour générer du bruit dans un contexte plus réaliste. Nous construirons alors des corrélations qui nous permettront de discuter avec davantage de précision les caractéristiques des fonctions de Green obtenues dans les conditions imposées par la nature.

### 1.1 Approche théorique

#### 1.1.1 Une revue

En 2001, Weaver & Lobkis auto-corrèlent les fluctuations thermiques enregistrées en un point de la surface d'un bloc d'aluminium et retrouvent alors la fonction de Green entre ce point et lui-même. Pour expliquer ce résultat, ils voient les fluctuations thermiques comme un champ diffus et le décrivent par une somme de modes équipartitionnés, c'est-à-dire ayant tous

le même niveau d'énergie et une phase aléatoire. Cette description n'est valable qu'en milieu fermé mais permet de démontrer facilement que la corrélation conduit à la fonction de Green.

Ces mêmes auteurs procèdent à une autre expérience (Lobkis & Weaver, 2001). Dans une cavité réverbérante, ils placent une source et enregistrent le champ d'onde en deux points distincts. La corrélation des deux enregistrements, sur un temps suffisamment long, amène là-aussi à la fonction de Green. L'argument des modes équipartitionnés est une nouvelle fois évoqué, car suite à l'explosion de la source, de multiples réflexions se produisent au sein de la cavité et donnent lieu à un champ diffus ayant les mêmes propriétés que les fluctuations de la première expérience. Les sismologues, qui savent que la coda sismique correspond aux réflexions des ondes dans la croûte terrestre (Aki, 1969; Aki & Chouet, 1975), ont alors eu l'idée de corréler ces codas. L'équipartition des ondes ayant déjà été observée sur de tels enregistrements (Hennino *et al.*, 2001), il y avait en effet de bonnes chances pour que des fonctions de Green émergent. Campillo & Paul (2003) furent les premiers à le mettre en évidence.

En milieu ouvert, un champ diffus ne peut plus s'écrire comme une somme de modes équipartitionnés. Pour montrer que la fonction de Green entre deux points peut se retrouver à partir de l'inter-corrélation, Sánchez-Sesma & Campillo (2006) et Sánchez-Sesma *et al.* (2006) utilisent alors une superposition d'ondes planes se propageant dans toutes les directions et ayant des phases incohérentes. Dans un premier temps, leur démonstration se limite aux ondes scalaires, puis s'élargit au cas élastique pour lequel les ondes sont vectorielles. Par ailleurs, ils retrouvent l'équipartition et montrent clairement qu'elle est nécessaire pour construire la fonction de Green exacte.

Une autre manière d'interpréter la reconstruction des fonctions de Green consiste à utiliser une analogie entre les corrélations et les expériences de retournement temporel (Derode *et al.*, 2003). En effet, si on se donne deux récepteurs  $A$  et  $B$  et une source  $S$ , on peut montrer que la corrélation des enregistrements en  $A$  et en  $B$  d'un signal venu de  $S$  équivaut à la rétropropagation vers  $B$  d'un signal émis par  $A$  et enregistré en  $S$ . L'équation de cavité exposée par Draeger & Fink (1999) conduit ensuite aisément à la fonction de Green. Cette équation n'étant valable qu'en milieu fermé, l'introduction d'un ensemble de sources entourant continûment les deux points  $A$  et  $B$  est nécessaire à la démonstration en milieu ouvert.

Le théorème de réciprocité peut également être employé. Wapenaar (2004) en développe les termes dans le cas d'un milieu limité par une surface libre et montre que la corrélation d'un champ enregistré en deux points de cette surface conduit à la fonction de Green. Plus tard, il s'intéressera aux milieux non réciproques (Wapenaar, 2006). Dans ce type de milieu, la propagation de  $A$  vers  $B$  diffère de la propagation de  $B$  vers  $A$ , mais le théorème de réciprocité s'applique toujours (car *réciprocité* n'a alors rien à voir avec la réciprocité du milieu).

Bien d'autres théories ont été proposées. On peut citer, à titre indicatif, Weaver & Lobkis (2003) et Van Tiggelen (2003), qui utilisent le théorème de fluctuation-dissipation, ou encore Gouédard *et al.* (2008), qui font suite aux travaux mathématiques de Colin de Verdière (2006a,b) pour exposer un développement très général. Chacune de ces théories a ses qualités et ses limites, et il en va de même de celle que nous allons présenter maintenant. Son développement est construit autour du théorème de la phase stationnaire. C'est Snieder (2004) qui le premier a utilisé ce théorème. Il a été suivi par Sabra *et al.* (2005) et Roux *et al.* (2005). Les équations qui vont suivre sont directement tirées de ce dernier article; elles nous serviront de base pour discuter les caractéristiques des corrélations de bruit sismique.

### 1.1.2 Un développement basé sur le théorème de la phase stationnaire

En 2004, Snieder utilise le théorème de la phase stationnaire pour expliquer la reconstruction des fonctions de Green à partir des corrélations de bruit. Il se cantonne tout d'abord au cas des ondes scalaires, puis développe sa théorie pour les ondes de surface en milieu élastique. Quelques mois plus tard, Roux *et al.* (2005) reprennent son idée, leur but étant de démontrer le résultat en milieu atténuant, chose qui n'a jamais été faite auparavant. Ils commencent par se placer dans le cas simple d'un milieu acoustique homogène non atténuant et travaillent en 3D. La fonction de Green entre deux points distincts  $A$  et  $B$  (dont les vecteurs-positions en coordonnées cartésiennes seront notés respectivement  $\mathbf{r}_A$  et  $\mathbf{r}_B$ ) est alors

$$G(\mathbf{r}_B, t; \mathbf{r}_A, 0) = \frac{1}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|}{c}\right) \quad (1.1)$$

où  $c$  est la vitesse du son dans le milieu.

Donnons-nous des sources de bruit  $S(\mathbf{r}_S, t_S)$  distribuées dans le temps et dans l'espace. Le champ en  $A$  qui en résulte s'écrit

$$P(\mathbf{r}_A, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r}_S \int_{-\infty}^t S(\mathbf{r}_S, t_S) G(\mathbf{r}_A, t; \mathbf{r}_S, t_S) dt_S \quad (1.2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S|} S\left(\mathbf{r}_S, t - \frac{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S|}{c}\right). \quad (1.3)$$

De la même manière, on peut écrire le champ reçu en  $B$ . On forme alors l'inter-corrélation des deux signaux et on obtient

$$C_{AB}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{r}_A, \tau) P(\mathbf{r}_B, t + \tau) d\tau \quad (1.4)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{r}_S d\mathbf{r}'_S d\tau}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S| |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}'_S|} S\left(\mathbf{r}_S, \tau - \frac{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S|}{c}\right) S\left(\mathbf{r}'_S, t + \tau - \frac{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}'_S|}{c}\right). \quad (1.5)$$

Cette expression peut aisément se simplifier si l'on considère sa moyenne d'ensemble  $\langle C_{AB}(t) \rangle$ . En effet, sur un ensemble de réalisations, les sources de bruit sont décorréliées en temps et en espace si bien que

$$\langle S(\mathbf{r}_S, t_S) S(\mathbf{r}'_S, t'_S) \rangle = Y^2 \delta(t_S - t'_S) \delta(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}'_S) \quad (1.6)$$

où  $Y^2$  est la puissance acoustique des sources que l'on suppose ici constante en temps et en espace. L'équation (1.5) devient alors

$$\langle C_{AB}(t) \rangle = Y^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{r}_S d\tau}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_S| |\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S|} \delta\left(t + \frac{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S|}{c} - \frac{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_S|}{c}\right). \quad (1.7)$$

L'intégration sur  $\tau$  correspond à une accumulation de sources de bruit dans le temps. En pratique, cette intégration se fait sur un temps fini  $T$ . Si on note  $\nu$  le taux de création de sources de bruit en  $m^{-3}s^{-1}$ , alors

$$\langle C_{AB}(t) \rangle = Y^2 T \nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_S| |\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S|} \delta\left(t + \frac{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S|}{c} - \frac{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_S|}{c}\right). \quad (1.8)$$

L'expression qui est en argument du delta de Dirac montre que les sources  $\mathbf{r}_S$  qui vont produire du signal à un temps  $t$  donné vérifient  $|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_S| - |\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S| = ct$ . En notant  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$  les coordonnées de  $\mathbf{r}_S$  et en prenant  $\mathbf{r}_A = (a, 0, 0)$  et  $\mathbf{r}_B = (-a, 0, 0)$  avec  $a \in \mathbb{R}^{+*}$ , cette dernière relation se réécrit

$$y^2 + z^2 - x^2 \left( \frac{4a^2}{c^2 t^2} - 1 \right) = a^2 \left( \frac{c^2 t^2}{4a^2} - 1 \right), \text{ si } t \neq 0. \quad (1.9)$$

(1.9) est l'équation d'un hyperboloïde de révolution autour de l'axe  $(Ox)$ . Cela signifie que le signal observé au temps  $t$  sur la corrélation est dû uniquement aux sources se trouvant sur un hyperboloïde. La coupe, dans le plan  $z = 0$ , de quelques-uns de ces hyperboloïdes (chacun correspondant à une valeur de  $t$ ) est représentée figure 1.1. On y voit clairement que les sources qui vont fournir de l'énergie à  $t = \pm \frac{2a}{c}$ , qui est le temps de parcours entre A et B, se situent sur la droite  $(AB)$ . Plus précisément, ce sont les sources situées sur la demi-droite  $x \geq a$  (respectivement  $x \leq -a$ ) qui contribueront au signal obtenu en  $t = \frac{2a}{c}$  (respectivement  $t = -\frac{2a}{c}$ ). Si l'on avait choisi de calculer la corrélation  $C_{BA}(t)$ , alors ce serait l'inverse. Notons par ailleurs que le cas  $x = 0$  correspond au temps  $t = 0$ .

La figure 1.2 représente le terme d'amplitude  $\frac{1}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S| |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_S|}$  que chaque hyperboloïde fournit à la corrélation. Pour que ce terme ne diverge pas, nous avons considéré pour chaque hyperboloïde l'amplitude due à un segment d'hyperbole du plan  $z = 0$ , la longueur du segment étant bien évidemment la même d'une hyperbole à une autre. Il apparaît alors que les contributions les plus importantes viennent des sources situées sur les demi-droites  $x \geq a$  et  $x \leq -a$ .

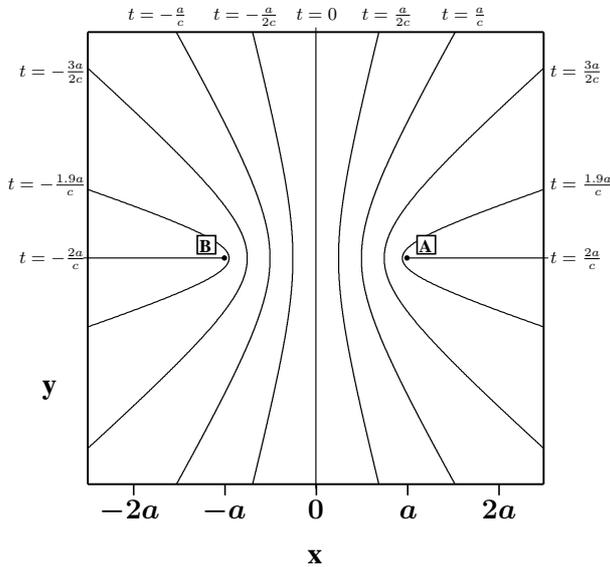


FIG. 1.1 – Intersection des hyperboloïdes régis par l'équation (1.9) avec le plan  $z = 0$ . Les courbes obtenues sont des hyperboles. Chacune d'elles contribue au signal observé à un temps  $t$  de la corrélation des signaux enregistrés aux points A et B.

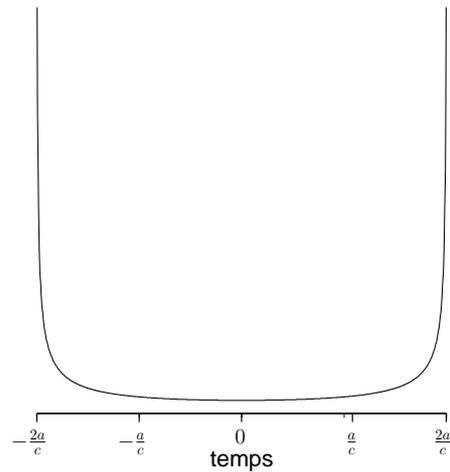


FIG. 1.2 – Amplitude que les hyperboles du type de celles représentées figure 1.1 fournissent à la corrélation d'enregistrements effectués en deux points distants de  $2a$ . Chaque hyperbole est repérée par le temps auquel elle contribue dans la corrélation.

Introduisons maintenant l'atténuation (nous aurions pu le faire depuis le début, mais l'écriture des équations auraient été extrêmement lourde). Pour cela, nous suivons une nouvelle fois Roux *et al.* (2005) et procédons de manière classique en ajoutant une partie imaginaire à la vitesse du milieu :  $c = c_0 + ic_i$  avec  $c_i \ll c_0$ . La fonction de Green entre  $A$  et  $B$  s'écrit alors

$$G(\mathbf{r}_B, t; \mathbf{r}_A, 0) = \frac{1}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|}{c_0} \right) \right] \exp \left( -\omega c_i \frac{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|}{c_0^2} \right) d\omega. \quad (1.10)$$

En suivant le même développement que celui effectué dans le cas non-atténuant, on obtient l'équivalent de l'équation (1.8) :

$$\begin{aligned} \langle C_{AB}(t) \rangle &= \frac{Y^2 T \mathbf{v}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{r}_S d\omega}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S| |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_S|} \exp \left[ -\frac{\omega c_i}{c_0^2} (|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S| + |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_S|) \right] \\ &\quad \exp \left[ i\omega \left( t + \frac{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S|}{c_0} - \frac{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_S|}{c_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

où  $\omega$  est la fréquence angulaire.

La principale différence entre l'équation (1.11) et le cas non-atténuant réside dans l'exponentielle décroissante. Celle-ci dépend de la fréquence et a pour effet de diminuer l'amplitude. Cependant, les remarques que nous avons faites au sujet des hyperboloïdes restent valables. Pour continuer le calcul on peut donc appliquer un changement de variables adapté à ces hyperboloïdes. En écrivant

$$\begin{cases} x = a \sin(\theta) \cosh(\phi) \\ y = a \cos(\theta) \sinh(\phi) \cos(\psi) \\ z = a \cos(\theta) \sinh(\phi) \sin(\psi) \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ \phi \in \mathbb{R}^+ \\ \psi \in [0, 2\pi] \end{cases} \quad (1.12)$$

l'équation (1.11) devient

$$\begin{aligned} \langle C_{AB}(t) \rangle &= \frac{aY^2 T \mathbf{v}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^{+\infty} \sinh(\phi) \exp \left( -\frac{2a \cosh(\phi) \omega c_i}{c_0^2} \right) d\phi \\ &\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \exp \left[ i\omega \left( t + \frac{2a \sin(\theta)}{c_0} \right) \right] d\theta. \end{aligned} \quad (1.13)$$

On intègre ensuite sur  $\theta$  et sur  $\phi$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \langle C_{AB}(t) \rangle &= \frac{Y^2 T \mathbf{v} c_0^3}{8\pi a c_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{i\omega^2} \exp \left( -\frac{2a\omega c_i}{c_0^2} \right) \\ &\quad \left[ \exp \left( i\omega \left( t + \frac{2a}{c_0} \right) \right) - \exp \left( i\omega \left( t - \frac{2a}{c_0} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Cette manière de résoudre l'équation (1.11) revient à utiliser le théorème de la phase stationnaire. En effet, dans l'équation en question, on remarque que le terme de phase varie beaucoup plus vite que le terme d'amplitude, sauf quand la position  $\mathbf{r}_S$  des sources  $S$  se rapprochent des demi-droites  $x \geq a$  et  $x \leq -a$ . Aux différents points de ces demi-droites, les dérivées partielles de la phase en viennent même à s'annuler. Le théorème de la phase stationnaire indique alors que seule la contribution de ces points va compter dans l'intégration. Cela permet de calculer l'intégration spatiale (1.11) et de retrouver l'équation (1.14).

Une dernière étape est nécessaire à l'émergence de la fonction de Green. Elle consiste à dériver (1.14) par rapport au temps :

$$\frac{d\langle C_{AB}(t) \rangle}{dt} = \frac{Y^2 T v c_0^3}{4\pi c_i} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{1}{2a} \exp\left(-\frac{2a\omega c_i}{c_0^2}\right) \exp\left(i\omega\left(t + \frac{2a}{c_0}\right)\right) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{1}{2a} \exp\left(-\frac{2a\omega c_i}{c_0^2}\right) \exp\left(i\omega\left(t - \frac{2a}{c_0}\right)\right) \right]. \quad (1.15)$$

Dans cette expression apparaissent deux intégrales. Chacune d'elles est une fonction de Green que vient moduler un facteur  $\frac{1}{\omega}$ . Ce facteur vient de la définition que nous avons donnée de l'atténuation et se comporte comme un filtre passe-bas. La différence entre les deux intégrales est que l'une est causale (partie positive de la corrélation) alors que l'autre acausale (partie négative de la corrélation).

## 1.2 Approche numérique

Cette sous-partie est tirée d'un article soumis à *Geophysical Journal International* sous le titre : **Effects of 1-bit normalization and whitening on waveforms obtained by correlation of a diffuse anisotropic wavefield generated with synthetic seismic noise sources in an attenuating spherically symmetric Earth.**

### 1.2.1 Abstract

Cross-correlation of ambient seismic noise recorded by a pair of stations is now commonly recognized to contain the Green's function between the stations. In this study, we carry out numerical experiments which consists in generating seismic noise at the surface of a sphere and correlating records of the wavefield produced by such a noise. Obtained waveforms are then compared with exact Green's functions to investigate quality and features of the reconstructed signals. Both uniform and non-uniform noise sources distribution are considered. We turn a particular attention to the effect on correlations of signal-processings like 1-bit normalization and whitening that are very often applied to the real seismic recordings. An important result is that geometrical spreading and absorption are retrieved whatever the technique we use to process the noise.

### 1.2.2 Introduction

Recent developments have shown that the Green's function between two distant seismometers can emerge from the cross-correlation of several days of seismic noise recorded at the seismometers (Shapiro & Campillo, 2004). This provides new data that are greatly interesting for seismologists because they enable to get informations about the Earth structure in aseismic regions. Group-speeds on inter-station paths are now widely measured and numerous high-resolution tomographic images appeared in the last three years (e.g. Shapiro *et al.*, 2005; Yao *et al.*, 2006; Cho *et al.*, 2007; Lin *et al.*, 2007; Yang *et al.*, 2007; Stehly *et al.*, 2008).

The emergence of the Green's function between two stations is possible because the noise sources distribution creates a diffuse spatially and temporally incoherent wavefield that buries, however, a small coherent part. This small coherent part is due to the sources that produce paths which go through both receivers and a time-averaged correlation between noise recorded at these receivers enables to recover it. Prior to be used in seismology, this result was successfully retrieved in helioseismology (Duvall *et al.*, 1993) and ultrasonics (Weaver & Lobkis, 2001; Lobkis & Weaver, 2001; Weaver & Lobkis, 2003). Many theoretical developments tried to explain the phenomenon. Lobkis & Weaver (2001) first describe the diffuse wavefield as a sum of equipartitioned modes and show that correlation between two records of such a field yields to the Green's function. More recently, the diffuse wavefield was seen as an uncorrelated and isotropic mix of plane waves of all propagation directions (Weaver & Lobkis, 2003). With this definition, Sánchez-Sesma & Campillo (2006) and Sánchez-Sesma *et al.* (2006) show that equipartition is a necessary condition to retrieve the exact Green's function. Other developments, based on an analogy with time-reversal experiments (Derode *et al.*, 2003), fluctuation-dissipation (Van Tiggelen, 2003) or reciprocity theorem (Wapenaar, 2004), and stationary-phase derivation (Snieder, 2004; Roux *et al.*, 2005; Sabra *et al.*, 2005), also demonstrate the emergence of Green's functions from ambient noise correlations.

All the theories only take into account the case of uniformly distributed noise sources. Now, as Sánchez-Sesma & Campillo (2006) assess, "an anisotropic flux as well as the absence of equipartition has to be considered to fully understand the limitations of the method". Indeed, noise consistently observed in seismic records mainly comes from the oceans (Longuet-Higgins, 1950) so that its distribution at the surface of the Earth clearly is non homogeneous. In this paper, we study the effect of such a distribution by computing correlations of numerically generated seismic noise in an attenuating sphere. We will also look at the effect on correlations of two processes that are commonly applied to the noise records : 1-bit normalization and whitening. 1-bit normalization is a procedure for reducing the weight of the earthquakes that inevitably lie in seismic records. It consists in retaining only the sign of the raw signal by replacing all positive amplitudes with a 1 and all negative amplitudes with a -1. A spectrum whitening is often practiced as well to enhance frequencies with low amplitude. Other noise-processings, not studied in this article, can be found in Bensen *et al.* (2007).

Our investigation will deal not only with the phase but also with the amplitude of the waves. Indeed, travel times of ambient noise correlations have been extensively used so far and we think it is time now to question what we can expect from the whole waveforms of these data. Our synthetic correlations will be compared with exact Green's functions computed with normal-mode summation, and a particular attention will be turned to the behaviour of the correlations with respect to the attenuation (i.e. geometrical spreading and absorption).

### 1.2.3 Uniform noise sources distribution

In this part, we compute synthetic noise at the surface of a spherical Earth to mimick the continuous oscillations that are consistently observed in seismic records and commonly considered to come from interaction between atmosphere, ocean and sea floor. In the frequency domain, such oscillations are not flat : two peaks generally rise around 14 and 7 s period which are referred to primary and secondary microseisms respectively (Longuet-Higgins, 1950; Friedrich *et al.*, 1998; Stehly *et al.*, 2006; Kedar *et al.*, 2007). Moreover, at longer periods (2-7 mHz),

we observe the so-called Earth "hum" (Nawa *et al.*, 1998; Rhie & Romanowicz, 2004). In this work, we do not try to simulate the complex mechanisms which produce this kind of spectra. We will consider simple noise sources with flat spectrum in a certain frequency-band.

To create our synthetic noise, we randomly position three hundred sources in the Earth surface. For each spatial component of each source, we generate a 24-hours time signal with random phase and flat spectrum filtered between 2 and 13 mHz. Using normal-modes summation (e.g. Woodhouse & Girnius, 1982) in the Preliminary Reference Earth Model (Dziewonski & Anderson, 1981), the effect of all the sources is computed at three stations A, B and C located on the Equator at longitude  $0^\circ$ ,  $20^\circ$  and  $70^\circ$  respectively (see figure 1.3). Correlations between vertical components of displacement received at the stations are then calculated. That is the result of what we call a "realization". We perform 12 640 realizations (the total number of sources is then 3 792 000), we stack all of them and we obtain the waveforms represented figure 1.4. Three different cases are studied corresponding to different processes applied to the noise records : we distinguish raw noise (nothing is done), 1-bit noise (meaning that we completely disregard the amplitude) and whitened noise (meaning that the spectral amplitudes of each record are set to 1 in the chosen frequency band). Symmetric signals are observed for all the cases, positive parts corresponding to correlations of A by B (or C) and negative parts to correlations of B (or C) by A. In addition, slight differences appear depending on the process : whereas raw and 1-bit noise correlations are very similar, waveforms from whitened noise reveal differences in amplitude some times.

With the normal-modes summation method, the Green's tensors between A and B and between A and C can be easily calculated. We are therefore able to estimate how far our correlations are from their corresponding Green's functions. To make the comparison possible, we have to time-derivate our results and correct them for the power spectral density of the noise. Indeed, different authors (Lobkis & Weaver, 2001; Snieder, 2004; Weaver & Lobkis, 2005b; Sánchez-Sesma *et al.*, 2007) have demonstrated that in 3D

$$C_{AX}(\omega) = Q S(\omega) \frac{G(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_X, \omega)}{i\omega}, \quad (1.16)$$

where  $C_{AX}$  is the correlation of a station X by station A,  $\omega$  is the angular frequency,  $\mathbf{r}_A$  (resp.  $\mathbf{r}_X$ ) is the position of A (resp. X),  $S$  is the power spectral density,  $G(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_X, \omega)$  is the Green's function between A and X, and  $Q$  is an amplitude factor. The effect of  $S$  explains the difference between the whitened noise correlations and the other waveforms in figure 1.4, whitened noise power spectral density being very different from the other power spectral densities (see figure 1.5).

Figure 1.6 shows the comparison between Green's functions and the derivatives of our synthetic correlations with and without power spectral density correction. For each kind of noise-processing (raw, 1-bit normalization and whitening), we see that the power spectral density correction improves the waveform fit, confirming equation (1.16). Nevertheless, discrepancies remain that we interpret as an incapacity of the noise sources to correctly excite the overtones : as noise sources are positionned on the surface of the medium, there are no much sources on the antifresnel zone for the overtones. This is even clearer in figure 1.7 where we have plotted the comparison between the A-C Green's function and the corrected derivative of the corresponding raw noise correlation in a sufficiently wide time-window to see not only R1 but also R2. All the harmonic modes that appear between the main arrivals R1 and R2 are recovered but with a small amplitude with respect to the fundamental mode, so we can say that the correlation

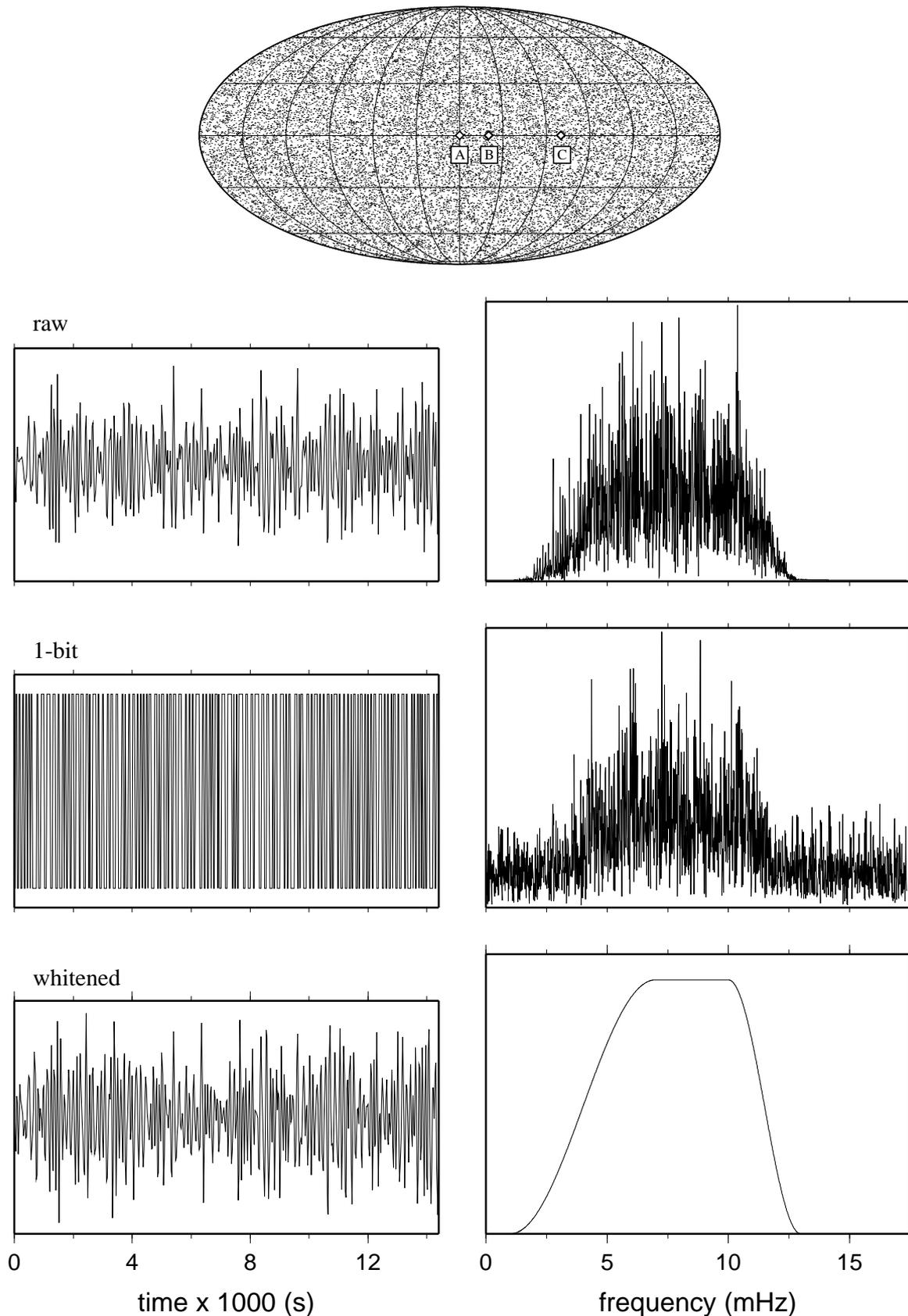


FIG. 1.3 – Location of receivers A, B and C (top). Station B (resp. C) is  $20^\circ$  (resp.  $70^\circ$ ) far from A. Tiny dot pixels indicate location of 24 000 noise sources coming from 80 realizations of our numerical experiment. An example of noise recorded at station A is presented (left) for the three different noise-processings we consider (raw, 1-bit normalization and whitening). We also plot the Fourier transform of these recordings (right).

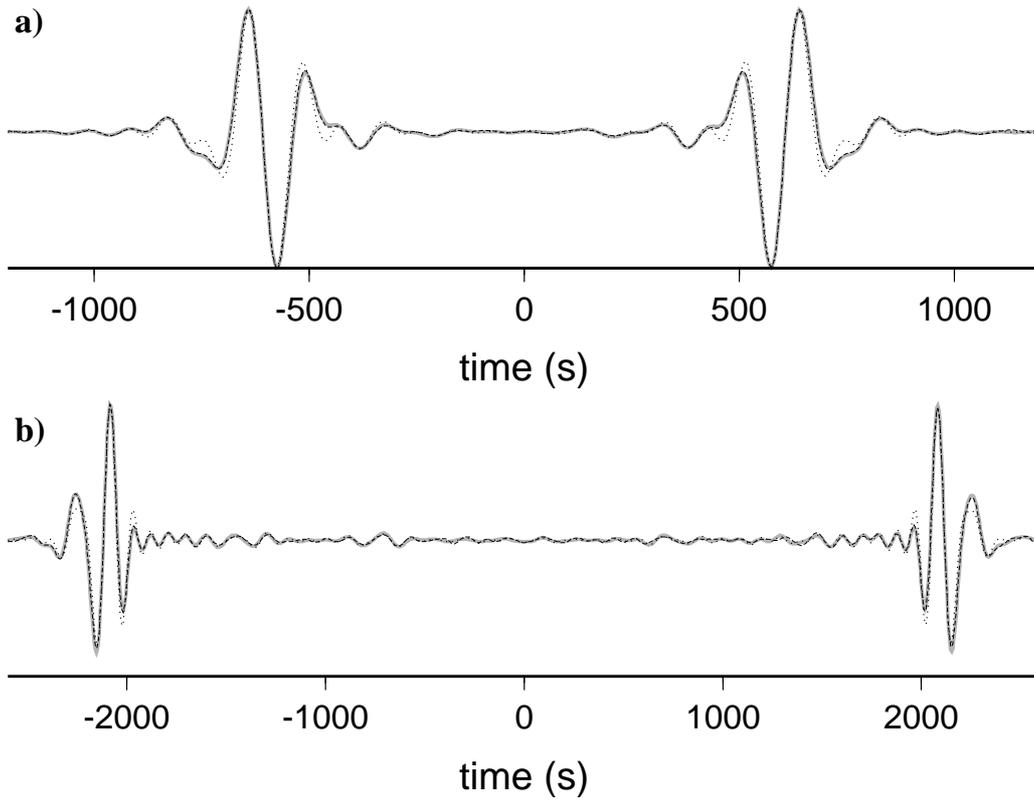


FIG. 1.4 – **a)** Cross-correlations between vertical components of displacement recorded at stations A and B. Thick gray line is the correlation waveform computed with unprocessed noise (raw noise), dashed line corresponds to the correlation from 1-bit noise and dotted line to the correlation from whitened noise. **b)** Same as a) for stations A and C.

is not the Green's function. As a consequence, equation (1.16) has to be rewritten. To correctly weight the overtones, we introduce a depth-dependent source term  $S(r, \omega)$  (where  $r$  is the radial component of the spherical coordinates  $(r, \theta, \phi)$ ) so that

$$C_{AX}(\omega) = Q \int_0^{R_T} S(r, \omega) \frac{G[(r, \theta_A, \phi_A), \mathbf{r}_X, \omega]}{i\omega} dr, \quad (1.17)$$

where  $R_T$  is the radius of the Earth and  $\theta_A$  (resp.  $\phi_A$ ) is the colatitude (resp. the longitude) of station A. In this expression, we see that the correlation  $C_{AX}$  is not directly linked to the Green's function between A and X anymore. Another way to take into account the low amplitudes of the overtones would probably consist in replacing the depth expansion by a punctual source involving high spatial derivatives (like earthquake sources are represented by a gradient of a dirac). We did not explore this possibility here. Note that  $S$ , as defined in equation (1.17), remains to be found. On real ambient seismic noise correlations that are usually computed at smaller scale with higher frequencies than here, the same phenomenon is observed : only the surface-wave part of the Green's function emerges and the body-wave part is unreachable. Nevertheless, we have to mention that, in the particular context of a very dense network with stations separated by a couple of kilometers, Roux *et al.* (2005) succeeded in observing P-waves.

Another remark, even more important, has to be done about figure 1.6. Indeed, for traces obtained with stations A and B, amplitude coefficients  $Q$  of the different waveforms are chosen to make the maxima the same. These coefficients  $Q$  are also used for traces from stations A

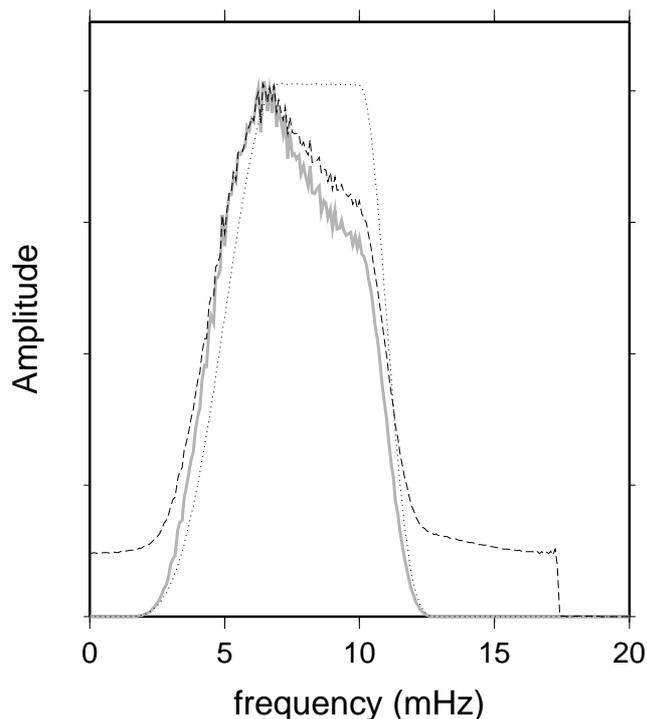


FIG. 1.5 – Power spectral density for raw noise (thick gray line), 1-bit noise (dashed line) and whitened noise (dotted line) recorded at station A.

and C, so  $Q$  is independent of  $X$ , and we see that relative amplitude between signal from A and B and signal from A and C is conserved for each kind of noise-processing. This means that information about geometrical as well as intrinsic attenuation is contained on correlations whatever the technique we use to process the noise recordings. Travel times have been preferentially considered so far on seismic noise correlations, but the use of amplitude is now more and more questioned, and the result we present here is essential in this perspective. Nevertheless, it is in disagreement with the experimental result from Larose *et al.* (2007) who recover the geometrical spreading with raw data but lose it with 1-bit or whitened noise. We don't have yet an explanation for this difference.

To end with this first numerical experiment, we investigate the convergence of the correlations. Figure 1.8 displays, according to the number of realizations, the error between the Green's functions and the correlations derivatives corrected from the power spectral density. Not surprisingly, the error decreases as the number of realizations increases. Moreover, the error from stations A and C is systematically larger than the error from stations A and B. This is consistent with theoretical (Weaver & Lobkis, 2005a) and experimental (Larose *et al.*, 2007) works which show that the more distant the receivers are, the worse the convergence is. We see also that error associated with 1-bit noise is permanently larger than errors from whitened and raw noise. This is probably due to the enhancement of additional frequencies larger than 13 mHz or lower than 2 mHz that the power spectral density correction can't completely remove. In 2004, Larose *et al.* studied the effect of 1-bit normalization on coda waves cross-correlation and found that the signal-to-noise ratio increased compared to the one from raw noise. This is not in disagreement with what we see here because, in their case, 1-bit normalization has the advantage to "reinforce the weight of the longest and most diffracted scattering paths relatively to early arrivals" (Larose *et al.*, 2004). In figure 1.8, we also note that error from whitened noise is a bit larger than error from raw noise. Anyway, at the end of the experience, a very small and stable error is reached for all the noise-processings and for both A-B and A-C case, giving an indication that waveforms previously discussed in figure 1.4 and 1.6 are the best as possible.

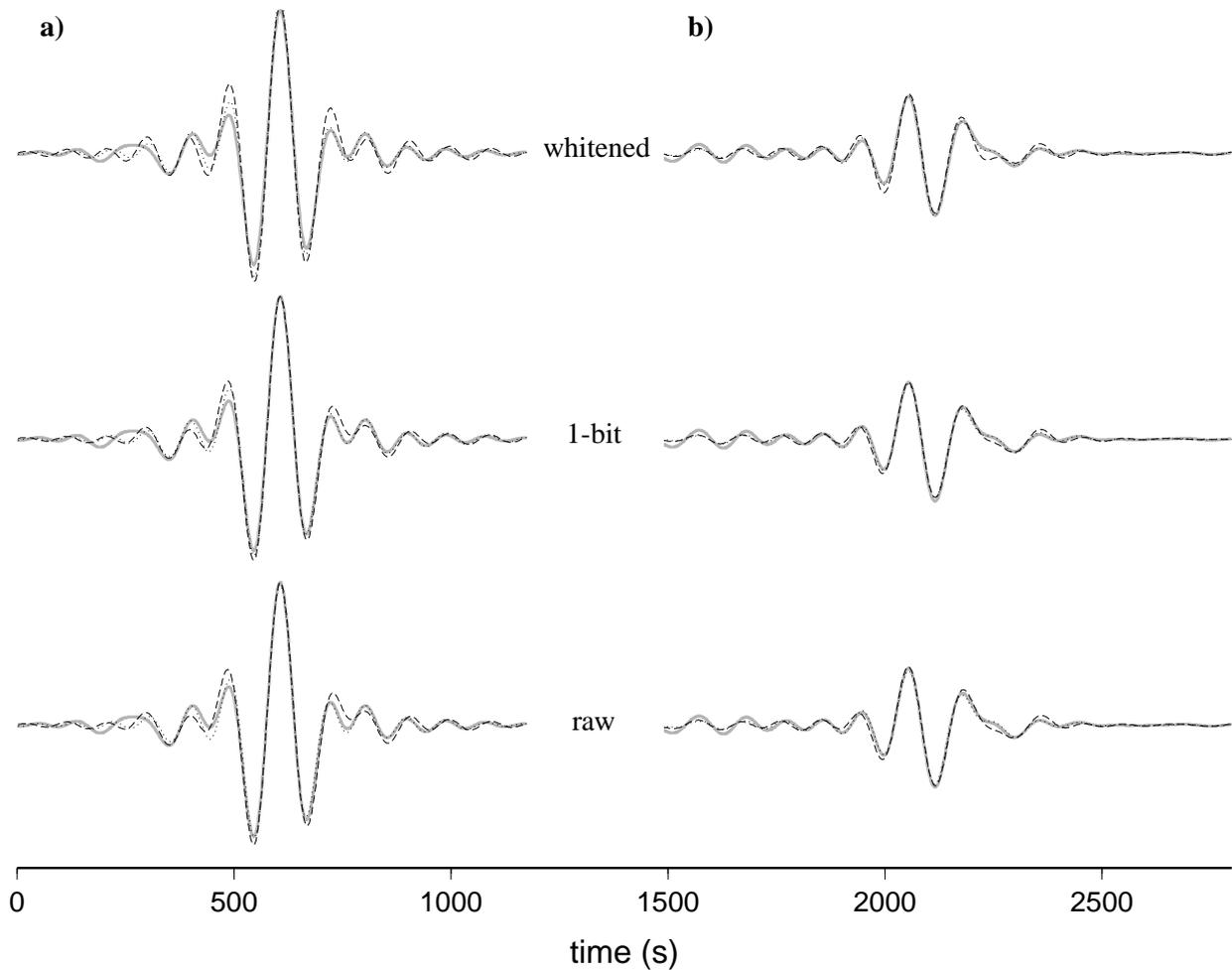


FIG. 1.6 – **a)** Comparison, for each kind of process applied to the noise records (raw, 1-bit normalization and whitening), between the A-B Green's function (gray lines) and the derivatives of our synthetic cross-correlations with (dotted lines) and without (dashed lines) power spectral density correction. The amplitude coefficient  $Q$  of each trace is chosen in order to make the maxima the same. **b)** Same as a) for stations A and C. We consider the amplitude coefficients  $Q$  used in a) and we see that the attenuation is retrieved for the three different kinds of process.

#### 1.2.4 Non-uniform noise sources distribution

This part consists in doing the same experiment as the one in the previous section except that noise sources are now confined in a  $50^\circ$ -radius disk at the surface of the sphere. It is very important to study such a non-uniformly distributed sources case because seismic noise in the Earth mainly comes from the oceans and is therefore non uniformly distributed. Here, the space-limited "noisy" area produces an anisotropic energy flux that is very difficult to consider for analytical analysis and, therefore, has never been clearly taken into account. We study cross-correlations waveforms for different azimuths by using records from 24 stations located in two circles around a central station A (see figure 1.9). Stations 1 to 12 (resp. 13 to 24) are positioned each  $30^\circ$  on a A-centered  $20^\circ$ -radius (resp.  $70^\circ$ -radius) circle. Longitude-latitude coordinates of the central station A are  $(0^\circ, 0^\circ)$ . Coordinates of the noise disk centre are  $(-70^\circ, 0^\circ)$ . To smooth the limit between the noisy area and the rest of the Earth surface, we apply a taper to the noise amplitude of the sources located near this limit. Cross-correlations between

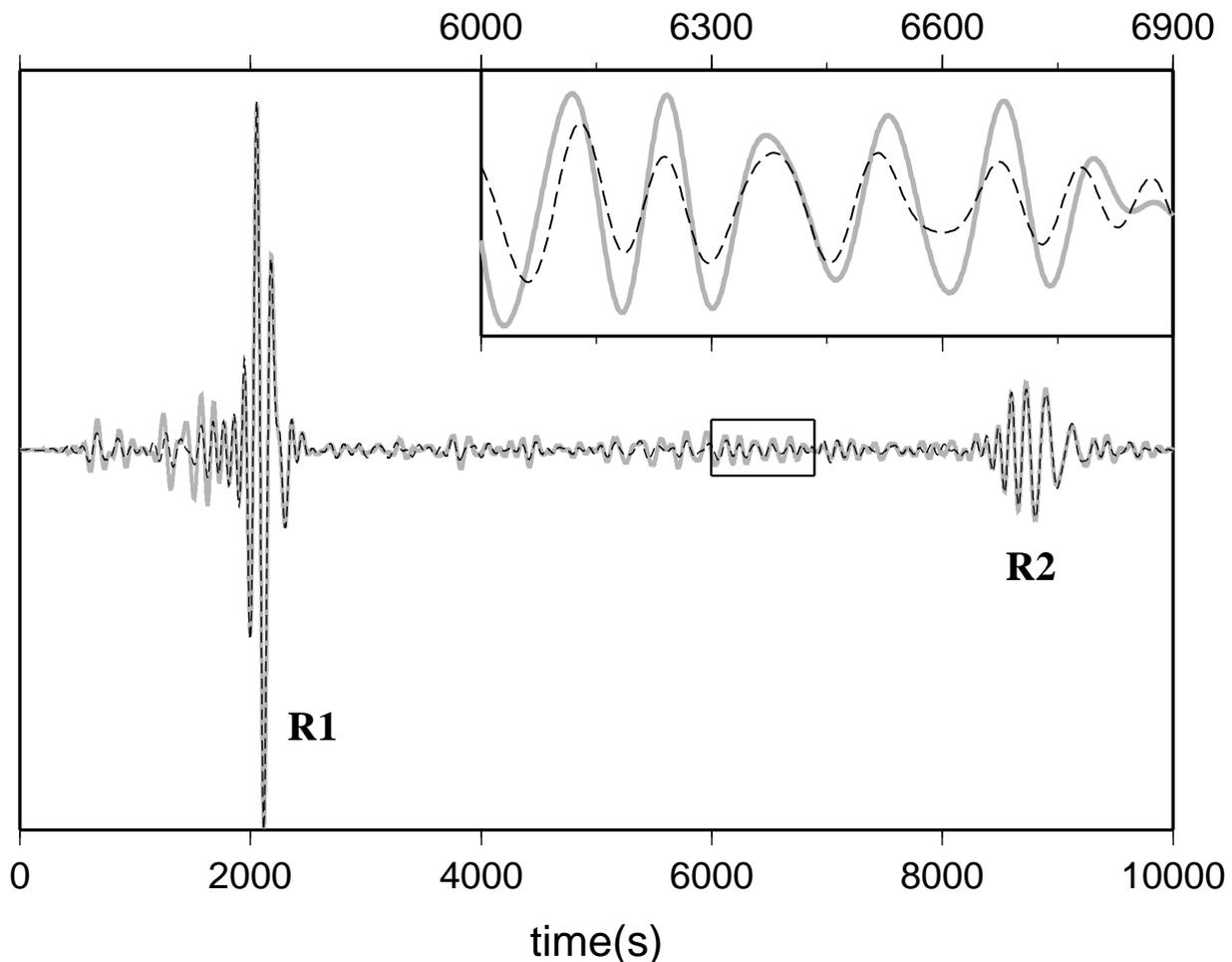


FIG. 1.7 – Comparison between the A-C Green's function (thick gray line) and the corrected derivative of the corresponding raw noise correlation (dashed line). Overtones between R1 and R2 are badly retrieved. To highlight this observation, we zoom in a part of the signal where it is particularly clear (top right window).

A and the stations numbered from 1 to 12 are plotted on figure 1.10. They result from 3000 realizations. Because of the symmetry of the noisy area with regard to the Equator, we only represent cross-correlations provided by the northern stations. For a given noise process (raw, 1-bit normalization or whitening), the same  $Q$  coefficient has been applied for all the traces in order to make the maxima of the lower correlations (i.e. correlations 6) the same. Thus, we lose the absolute amplitude but keep the relative one.

Let us first pay attention to the raw noise correlations from the  $20^\circ$ -radius circle (i.e. gray lines). Considerable asymmetry clearly appears on each trace (except on correlation 3), causal and acausal parts of the signals having very different amplitudes. This is due to the fact that these two parts do not see the same energy flux : both are sensitive to the noise sources located on the vicinity of the great circle that linked the two receivers # and A (where # refers to the number of any station), but the correlation of A by # (i.e. the positive part) is sensitive to wavefields going from # to A whereas the correlation of # by A (i.e. the negative part) is sensitive to wavefields going from A to #. As a consequence, on correlation 6 for example, the amplitude of the causal part is much larger than the acausal part, flux from 6 to A being more

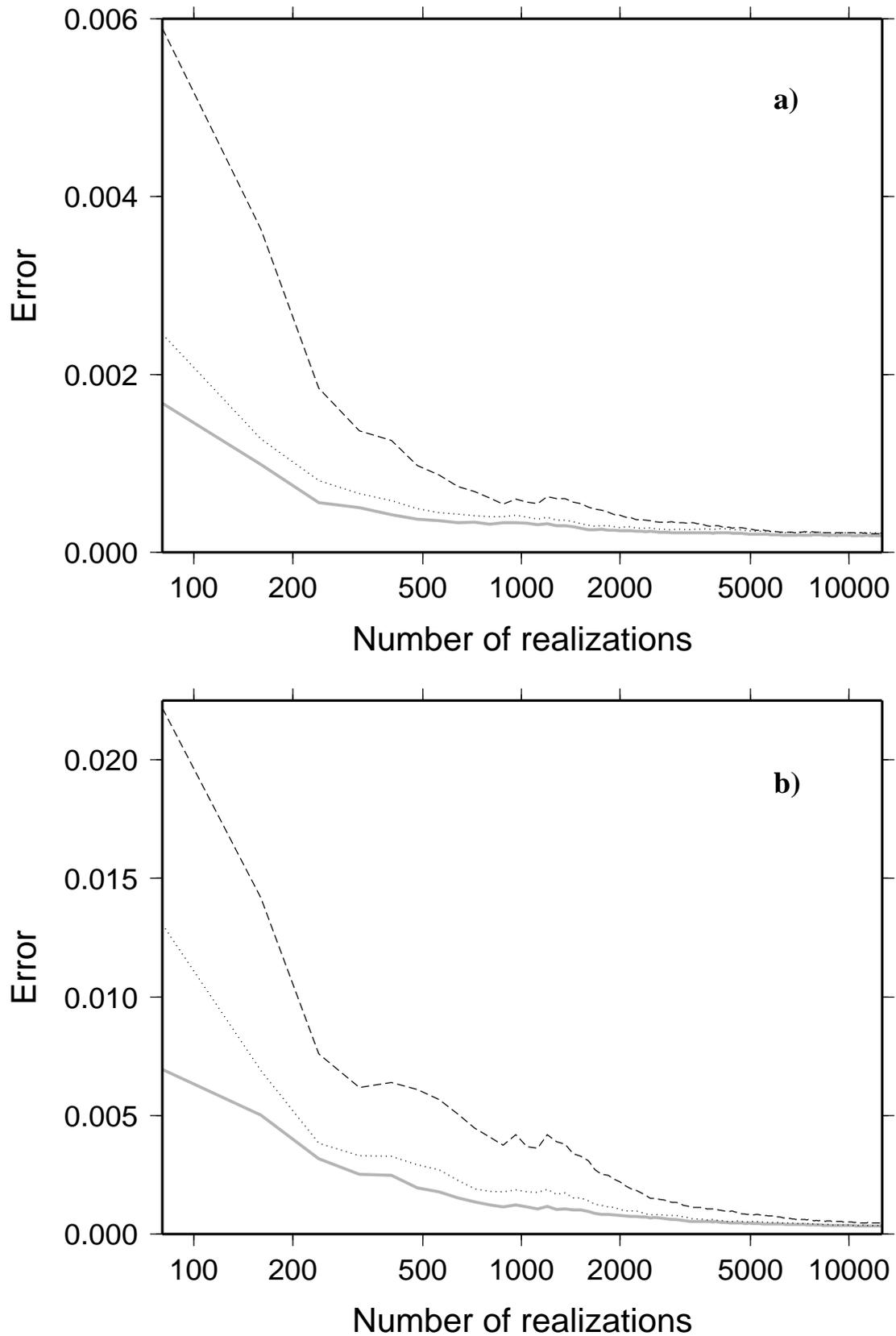


FIG. 1.8 – **a)** Error between the A-B Green's function and the derivatives of our synthetic correlations corrected from the power spectral density. The error is calculated each 80 realizations. Gray (resp. dashed and dotted) line corresponds to raw (resp. 1-bit and whitened) noise. **b)** Same as a) for stations A and C.

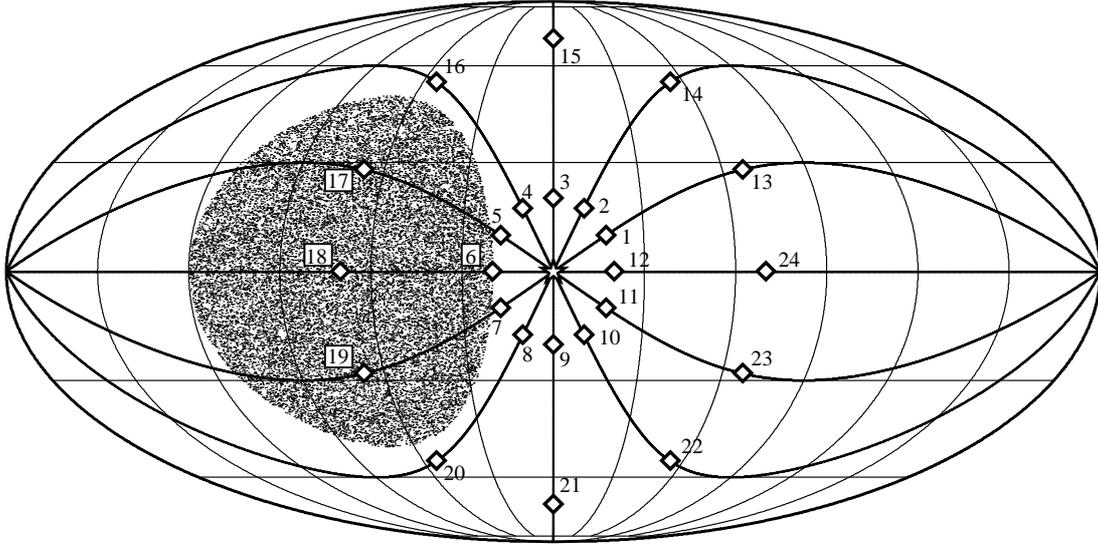


FIG. 1.9 – Location of the central station A (star) and the other receivers (numbered from 1 to 24). Stations 1 to 12 (resp. 13 to 24) are  $20^\circ$  (resp.  $70^\circ$ ) far from A and spaced by an angle of  $30^\circ$ , defining twelve azimuths. Great circles that link the stations to the centre A are plotted to highlight the different azimuths. In addition, tiny dots indicate location of 24 000 noise sources coming from 80 realizations of our numerical experiment.

important than flux from A to 6 due to the position of the noisy area. This phenomenon is the so-called "directivity effect" which has been demonstrated theoretically by various authors using the stationary phase theorem (Snieder, 2004; Roux *et al.*, 2005; Sabra *et al.*, 2005) and often observed on real data (e.g. Stehly *et al.*, 2006; Nishida & Fukao, 2007). It involves amplitude differences on single trace but also from a trace to another : if we go through the azimuths, considering for example correlations of 12, 1, 2 and 3 by A (i.e. negative part of the four upper signals in figure 1.10), the amplitude strongly decreases due to the fact that there are less and less noise sources on the vicinity of the great circles defined by the different pairs of stations. To take into account the directivity effect in equation (1.17), we propose to extend our source term in the horizontal directions  $\theta$  and  $\phi$  around station A. Thus we obtained

$$C_{AX}(\omega) = Q \int_0^{R_T} \int_{\theta_A - \theta'}^{\theta_A + \theta'} \int_{\phi_A - \phi'}^{\phi_A + \phi'} S(r, \theta, \phi, \omega) \frac{G[(r, \theta, \phi), \mathbf{r}_X, \omega]}{i\omega} dr d\theta d\phi. \quad (1.18)$$

$\theta'$  and  $\phi'$  define the "thickness" of the virtual source  $S$ . This thickness is assumed to be small with regard to the inter-stations distance, what is reasonable because correlations are not so far from Green's functions so we cannot be far from a point source.

In figure 1.10, consider now the correlations computed with 1-bit noise and whitened noise. We find the directivity effect again and the waveforms are comparable with the raw noise correlations. Nevertheless, spectrum changes due to the 1-bit normalization on one hand, and to the whitening on the other hand, are strong enough to produce non negligible differences. In particular, we note that these two processes increase the power spectral density  $S$  in A (see figure 1.11) so that the correlation of station 12 (resp. 1 and 2) by A has now an amplitude similar to the one of the correlation of A by 6 (resp. 7 and 8, i.e. 5 and 4 because of the symmetry with regard to the Equator). We do not observe this on raw noise correlations because the difference of the energy flux recorded in 6 (resp. 5 and 4) and A is preserved.

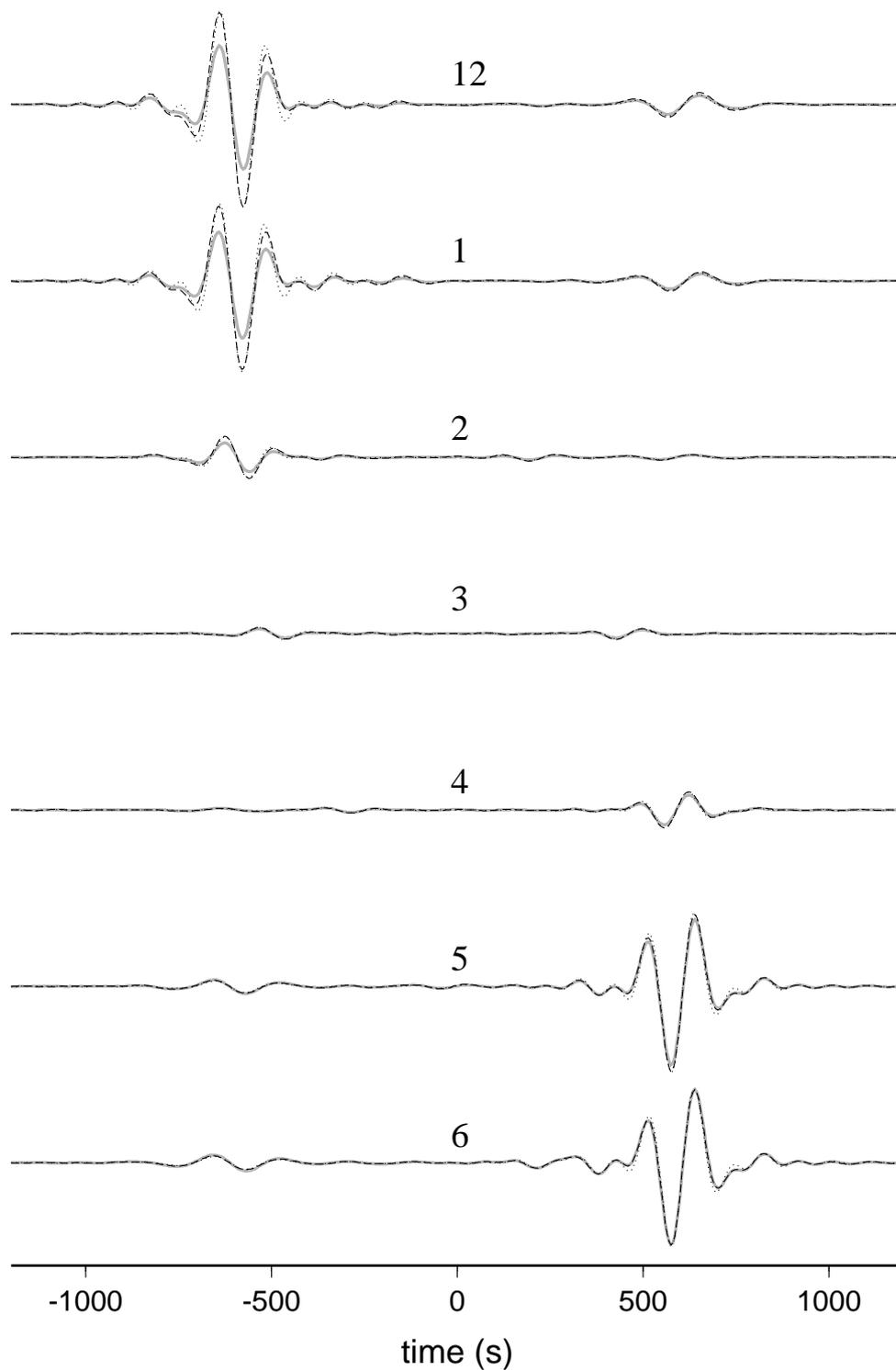


FIG. 1.10 – Cross-correlations between noise recorded at the central station A and the noise from the northern stations on the  $20^\circ$ -radius circle. Each waveform is identified by its corresponding station number : trace # refers to correlation between station # and A, positive part (resp. negative part) being the result of the correlation of A by # (resp # by A). Gray line waveforms are the raw noise correlations, dashed line waveforms are the 1-bit noise correlations and dotted line waveforms correspond to the correlations computed with whitened noise.

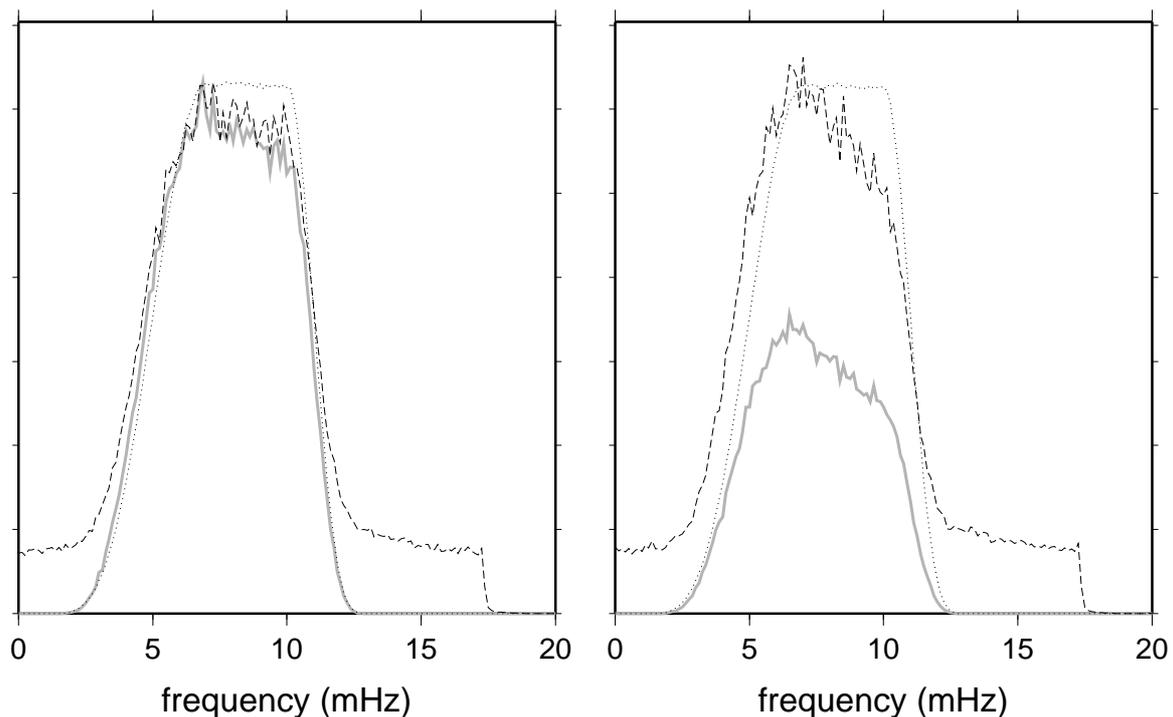


FIG. 1.11 – Power spectral density recorded at station 6 (left) and station A (right) for raw noise (gray line), 1-bit noise (dashed line) and whitened noise (dotted line).

For the stations in the  $70^\circ$ -radius circle (see figure 1.12), most of the observations written above are still valid. The main difference with the  $20^\circ$ -radius circle case is the amplitude of the positive part of the correlation from station 18 (resp. 17 and 16) : although this station has the same azimuth as station 6 (resp. 5 and 4), its relative amplitude is lower because it is located in the noisy area so that all the sources between A and the station poorly contribute to the emergence of the signal.

As in the previous section, we compare Green's functions and the derivatives of our correlations. Three azimuths are studied :  $90^\circ$  (i.e. stations 12 and 24, see figure 1.13),  $60^\circ$  (i.e. stations 1 and 13, see figure 1.14) and  $30^\circ$  (i.e. stations 2 and 14, see figure 1.15). For the first azimuth, results are very similar to those observed in the uniformly distributed noise sources case : the power spectral density correction improves the waveforms fit, overtones are not well excited and attenuation is retrieved for the three different noise-processings. We note that the convergence is not perfectly reached between A and 24 : slight difference in amplitude is observed between the Green's function and the correlations, particularly for the 1-bit noise correlation. This is consistent with the study of convergence we made in the previous section (see figure 1.8) : 3 000 realizations cannot allow to get the best convergence and the 1-bit noise provides the largest error. Results from azimuth  $60^\circ$  are identical to those from azimuth  $90^\circ$ , but results from azimuth  $30^\circ$  are very different. An important phase shift between the Green's functions and the correlations is observed, both for station 2 and station 14. This is because the emergence of the signal is only due to sources far from the vicinity of the great circle, and contribution of such sources provides uncorrect travel times. This effect is not clearly discussed but is substantially contained in the theoretical development of Roux *et al.* (2005). It has been also observed on real data (Stehly *et al.*, 2007) and is commonly considered to imply negligible perturbations on travel times measurements. Moreover, the convergence is too bad to retrieve the attenuation.

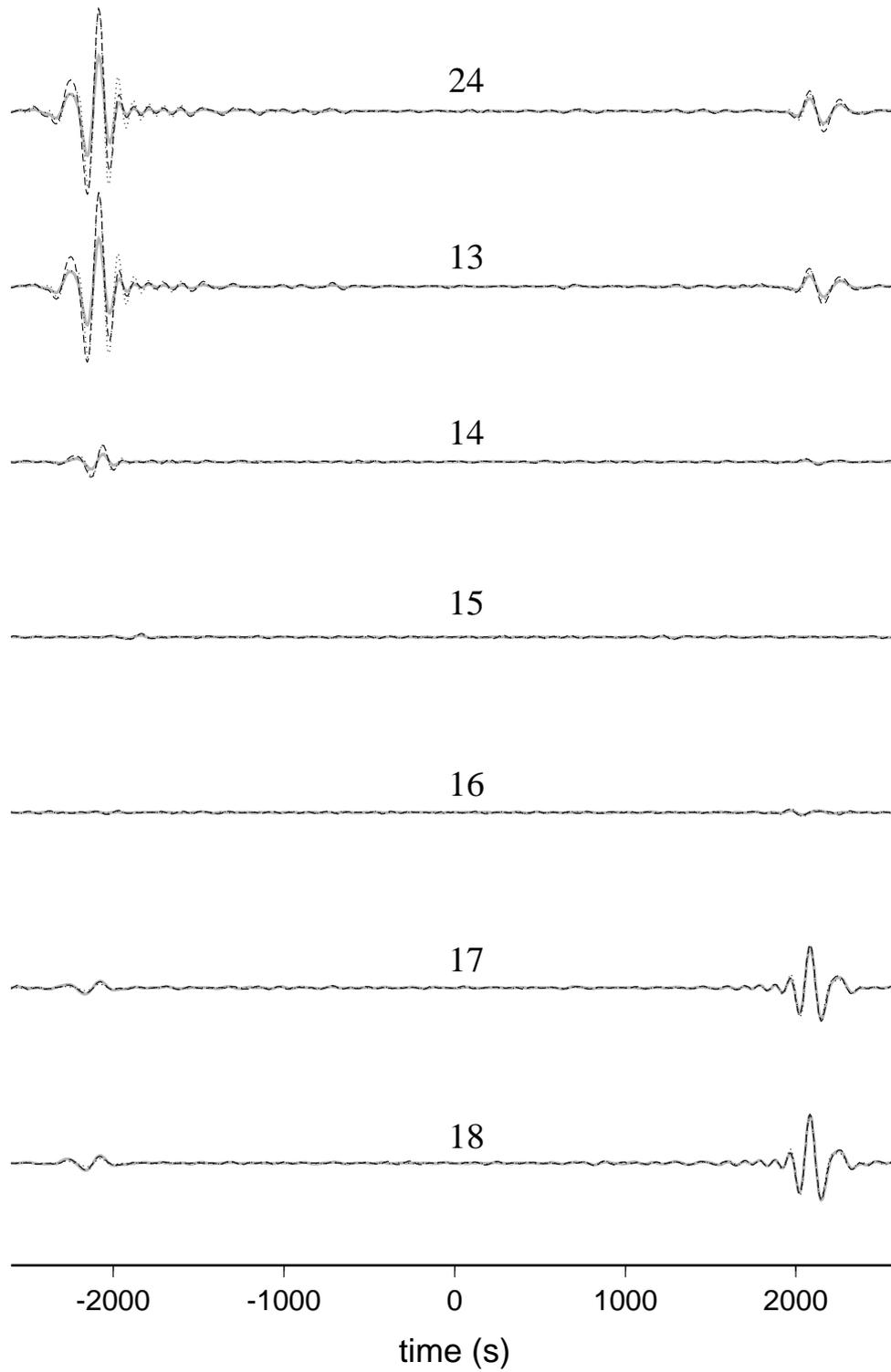


FIG. 1.12 – Same as figure 1.10 for stations located on the 70°-radius circle.

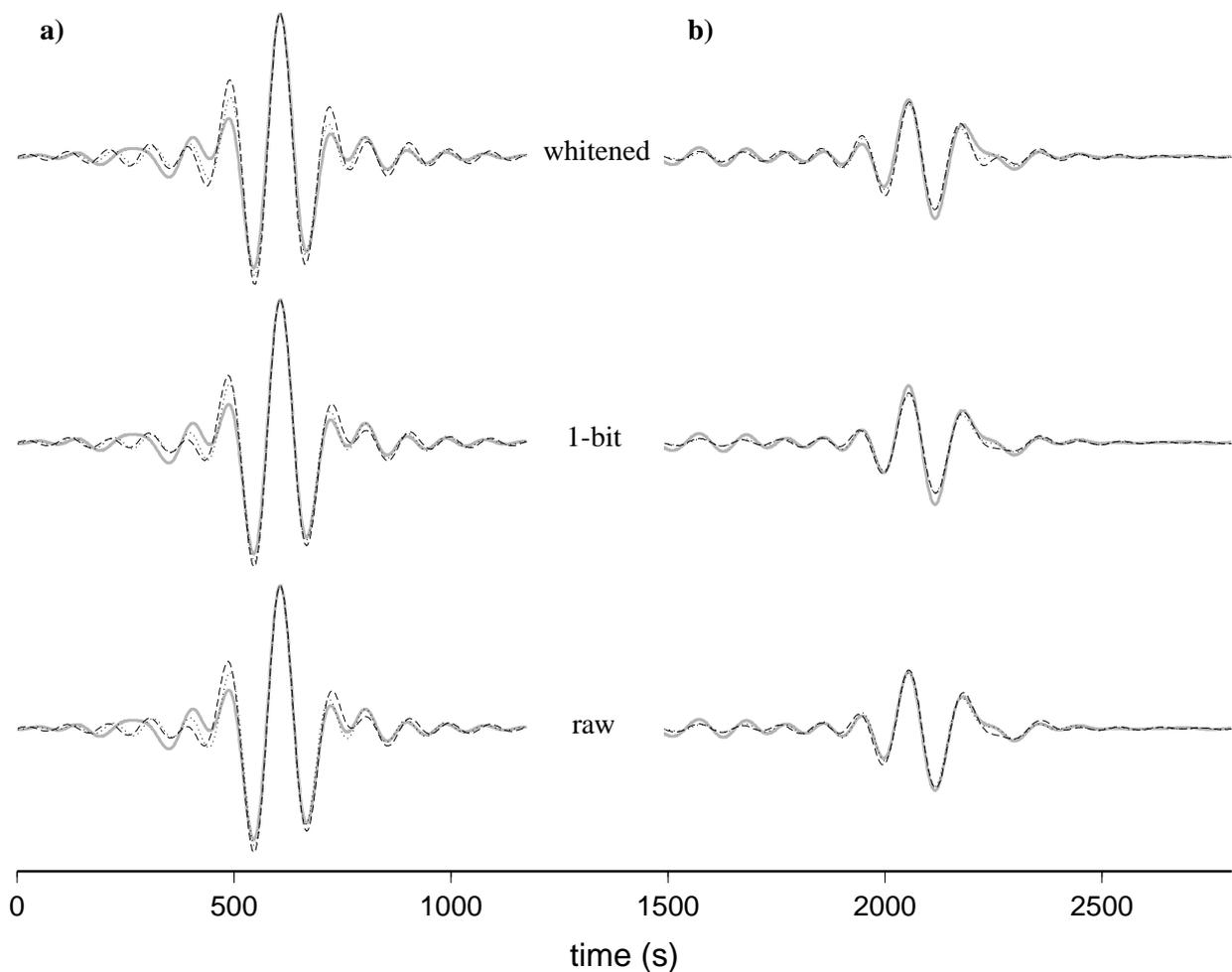


FIG. 1.13 – **a)** Comparison between the derivative of the correlation of station 12 by A and the corresponding Green's function. Gray lines correspond to the Green's function whereas dotted and dashed lines are correlations respectively with and without power spectral density correction. The amplitude coefficient  $Q$  of each trace is chosen in order to make the maxima the same. **b)** Same as a) for station 24. We consider the amplitude coefficients  $Q$  used in a) and we see that the attenuation is retrieved for the three different kinds of process.

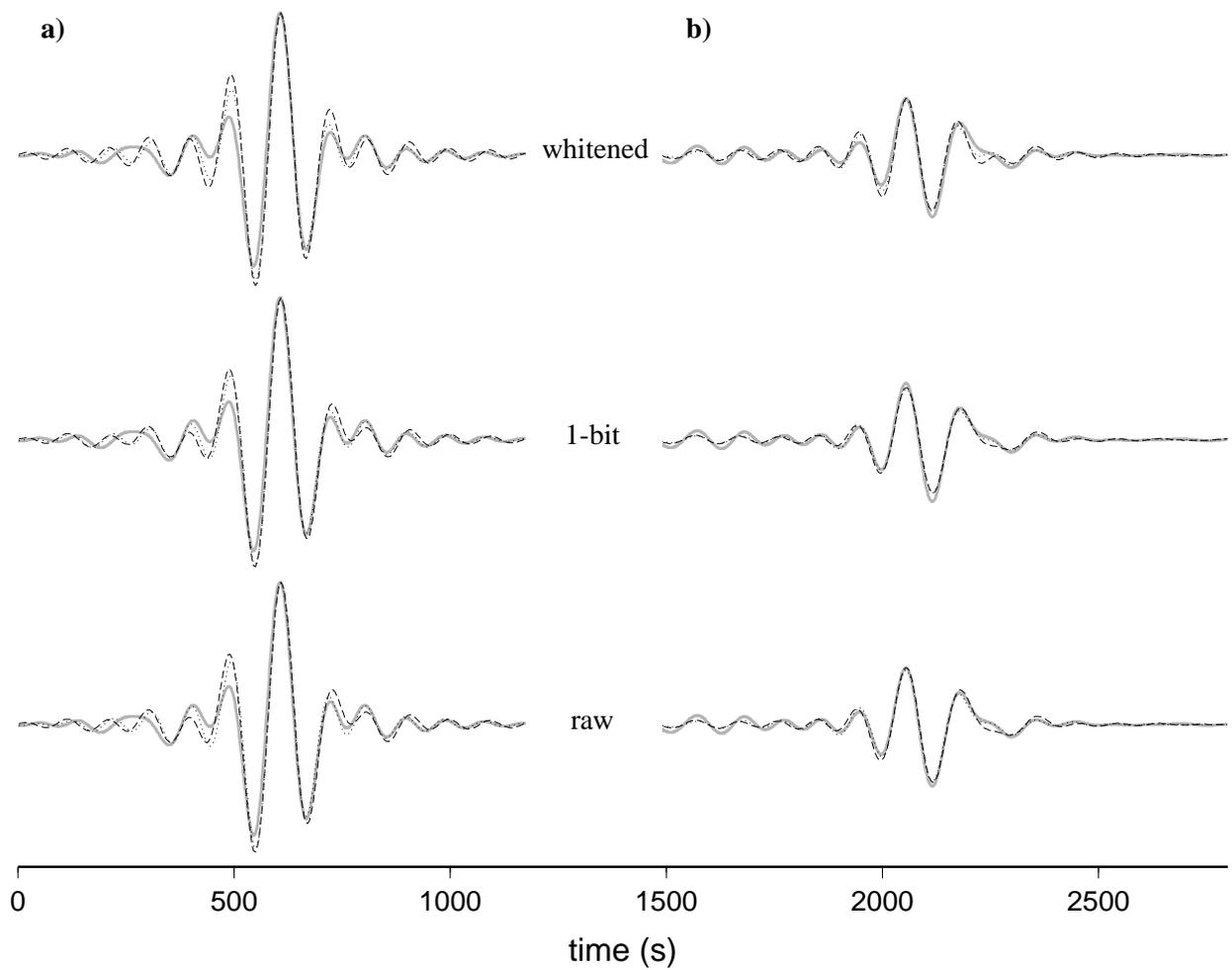


FIG. 1.14 – Same as figure 1.13 for stations 1 and 13.

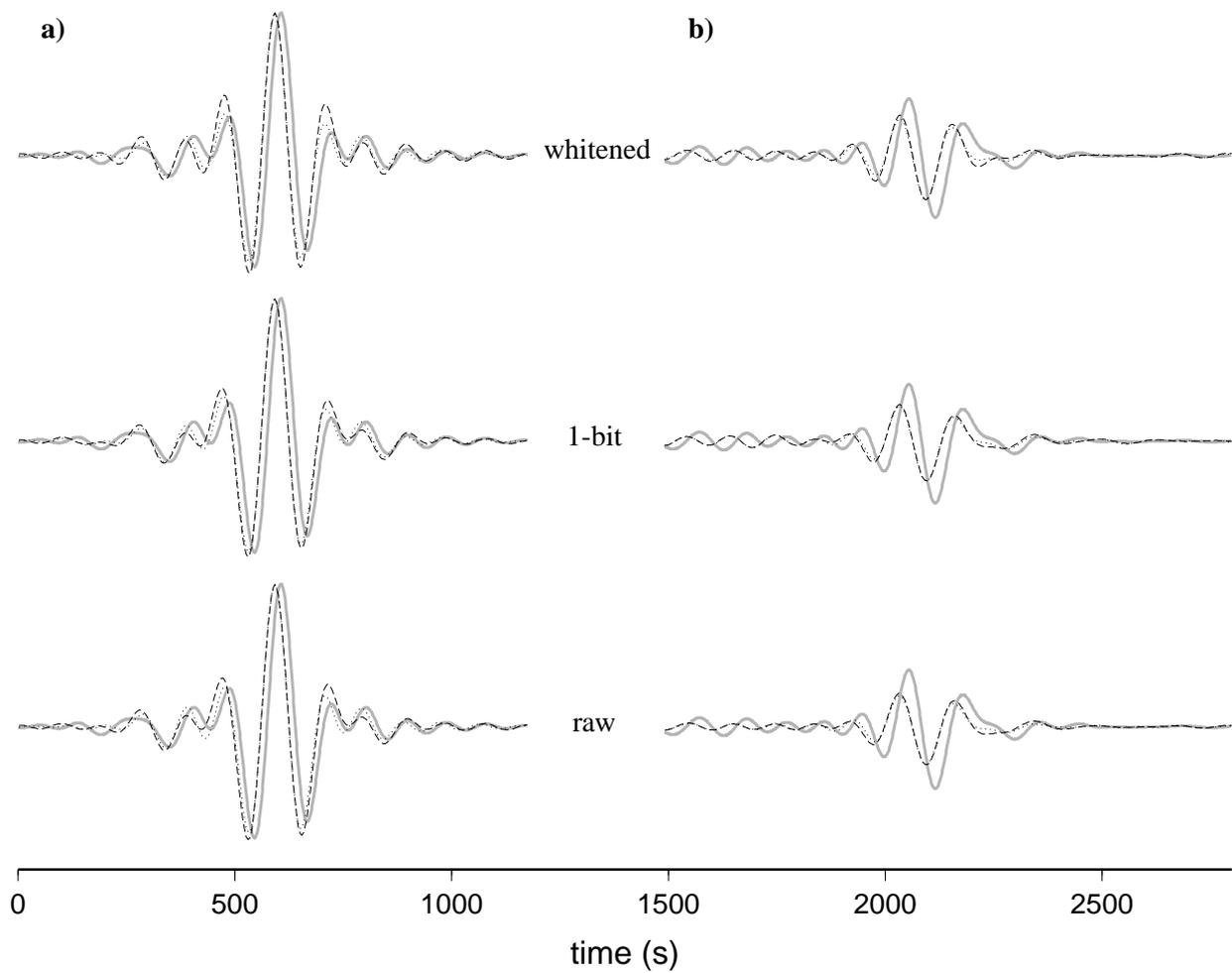


FIG. 1.15 – Same as figure 1.13 for stations 2 and 14.

To highlight the reconstruction of the attenuation, we perform a last experiment in which the noise sources are in a  $20^\circ$ -radius disk centered at point  $(-30^\circ, 0^\circ)$ . We compute the correlations between noise recorded in A and noise from other stations located on the Equator at longitude  $40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$  and  $90^\circ$ . For the three different noise-processings, comparison between the derivative of these correlations and their corresponding Green's functions are plotted figure 1.16. We used the same  $Q$  for all the distances and we clearly retrieve the relative amplitudes.

### 1.2.5 Conclusion

We proposed an original experiment based on numerically generated noise to compute synthetic correlations in both contexts of uniform and non-uniform distribution of sources. We investigated the characteristics of the obtained waveforms by comparing them with exact Green's functions. Features explored in previous works have been retrieved such as the convergence conditions and the directivity effect. An important result is that we can recover the geometrical spreading as well as the absorption not only from raw noise correlations but also from 1-bit or whitened noise correlations. This is in disagreement with a recent result of Larose *et al.* (2007) so further investigations have to be led to determine more precisely the conditions of such attenuation reconstruction. This is a critical issue if we expect to use the amplitude of seismic noise correlations in the future. Another important issue is the determination of the virtual source  $S$  which would enable to perform direct simulation of correlations waveforms in 3D structure. This will be the subject of coming works.

### 1.2.6 Acknowledgments

We thank Nikolaï M. Shapiro and Laurent Stehly for enlightning discussions. We are also grateful to the *Service de Calcul Parallèle* of the IPGP and to David Weissenbach for his help in the implementation of our code on the EGEE grid. This work has also benefited from constructive remarks of Jean-Paul Montagner.

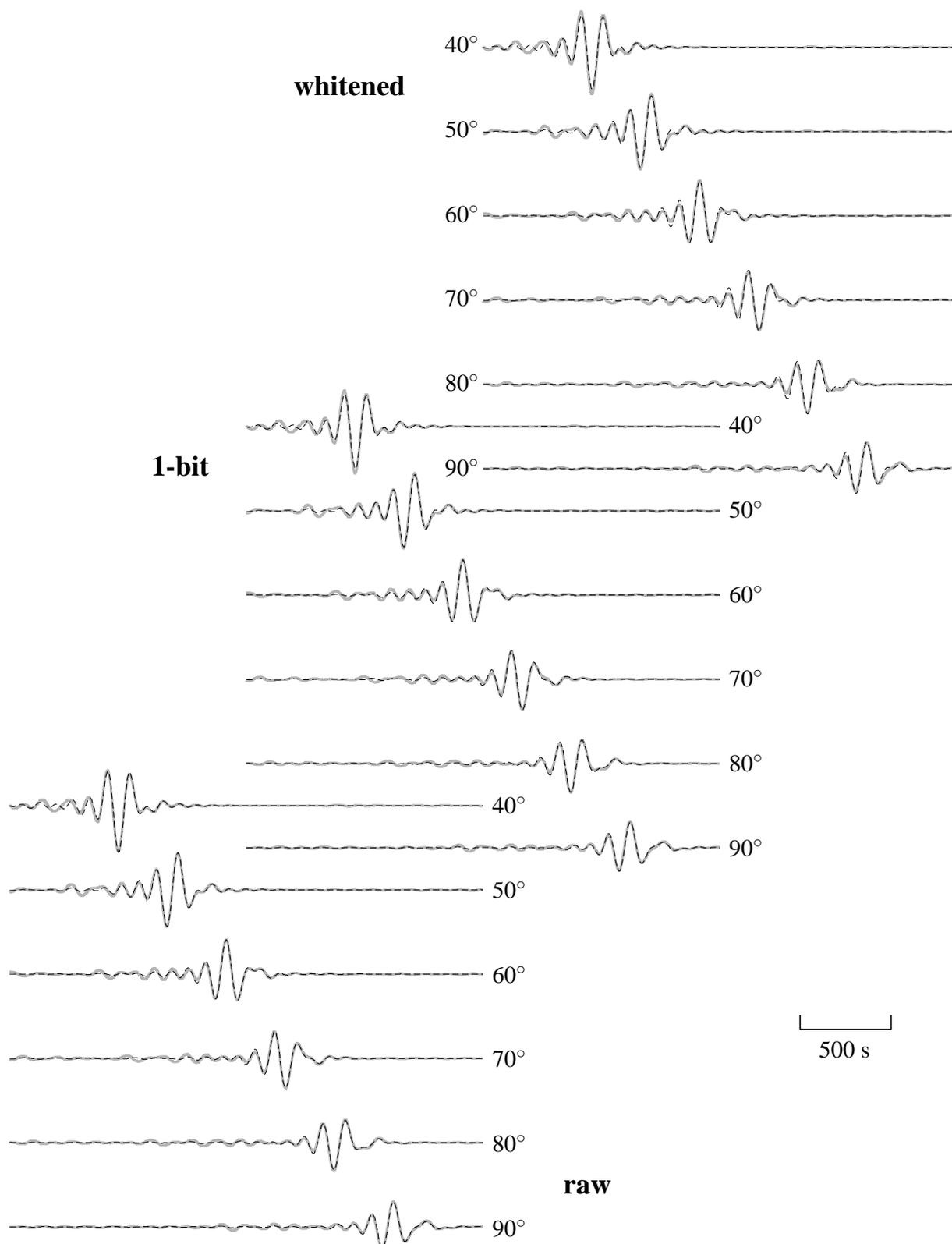


FIG. 1.16 – Comparison, for each kind of process applied to the noise records (raw, 1-bit normalization and whitening), between Green's functions (gray lines) and correlations derivatives with power spectral density correction (dashed lines) for different inter-stations distances ( $40^\circ$  to  $90^\circ$ ). For a given process, the same  $Q$  coefficient is used for all the traces. The attenuation is clearly recovered.



# Chapitre 2

## Modélisation numérique de la propagation d'ondes sismiques à l'échelle régionale par la méthode des éléments spectraux

### 2.1 Introduction

Résoudre l'équation de l'élastodynamique dans des modèles de Terre réalistes sans faire d'hypothèses sur le contraste des hétérogénéités nécessite l'utilisation d'une méthode numérique. Les plus classiques de ces méthodes sont au nombre de quatre : les différences finies, les méthodes intégrales, les méthodes spectrales et les éléments finis. Toutes ont déjà été appliquées avec succès dans certains cas favorables, mais toutes présentent également des limites plus ou moins importantes qui les rendent inadaptées à certaines situations. Les différences finies et les méthodes spectrales, par exemple, rencontrent de sérieux problèmes avec la condition de surface libre. La méthode des éléments finis, elle, intègre naturellement cette condition mais utilise des bases polynômiales d'ordre faible qui la rendent peu précise et dispersive.

La méthode des éléments spectraux (SEM), que nous allons présenter puis utiliser dans le présent travail, a été élaborée en mécanique des fluides (Patera, 1984; Maday & Patera, 1989). Il s'agit d'une méthode de type éléments finis qui fait intervenir des bases polynômiales d'ordre élevé en lien étroit avec une quadrature numérique de Gauss-Lobatto-Legendre. C'est dans les années -90 que son application s'étend à l'élastodynamique (Priolo *et al.*, 1994; Seriani & Priolo, 1994; Faccioli *et al.*, 1997; Komatitsch, 1997; Seriani, 1998; Komatitsch & Vilotte, 1998; Komatitsch & Tromp, 1999). Les résultats obtenus sont alors tout à fait remarquables, tant au niveau de la convergence qu'au niveau de la dispersion. De plus, l'algorithme se parallélise naturellement, rendant ainsi le coût de calcul raisonnable.

Les premières applications à des milieux réalistes ont essentiellement concerné la Terre globale (Chaljub, 2000; Komatitsch & Tromp, 2002a,b; Komatitsch *et al.*, 2002; Chaljub *et al.*, 2003). Rotation et gravité ont été ajoutées à l'équation d'onde, l'atténuation et les océans ont été pris en compte, et des déraffinements du maillage en profondeur ont été proposés afin de réduire le coût de calcul. Dans cette même optique, Capdeville (2000) et Capdeville *et al.* (2003) ont élaboré une méthode couplée éléments spectraux - solution modale. Par la suite, davantage

d'intérêt a été porté à l'échelle locale. La SEM est en effet un outil très efficace pour étudier les effets de site. Ainsi ont été réalisées des simulations dans les bassins de Los Angeles (Komatitsch *et al.*, 2004), de Grenoble (Chaljub *et al.*, 2007) et de Caracas (Delavaud, 2007). Ces simulations nécessitent l'utilisation de bords absorbants afin d'éviter des réflexions artificielles du champ d'onde aux limites du domaine d'étude.

Dans ce chapitre, je commencerai par présenter le SEM en reprenant le formalisme utilisé par Elise Delavaud dans sa thèse (Delavaud, 2007). J'exposerai ensuite quelques spécificités du code que j'ai conçu afin de simuler la propagation des ondes sismiques à l'échelle régionale. J'évoquerai notamment la géométrie du maillage, les bords absorbants et la parallélisation. Enfin, je validerai le code en question par des comparaisons avec la solution modale dans des modèles homogènes ou radialement hétérogènes, isotropes ou anisotropes, atténuants ou non-atténuants.

## 2.2 Méthode des éléments spectraux en élastodynamique

### 2.2.1 Formulation variationnelle du problème élastodynamique

Soit  $d$  la dimension spatiale de notre problème. On considère un milieu élastique hétérogène occupant un domaine ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  borné par une frontière  $\partial\Omega$ , et un intervalle de temps  $\mathbb{I} = [0, T]$  que l'on souhaite étudier. Le déplacement est noté  $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , où  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , et la vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ , où le symbole  $\dot{\cdot}$  correspond à la dérivée par rapport au temps. L'équation d'onde, issue de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement sous l'hypothèse de petites déformations, peut s'écrire sous la forme classique

$$\begin{aligned} \rho \dot{\mathbf{v}} &= \text{div}[\boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{f} \\ \rho \dot{\mathbf{u}} &= \rho \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.1)$$

où  $\rho(\mathbf{x}) > 0$  est la densité de masse et  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  une force de volume d'origine extérieure. Le tenseur des contraintes de Cauchy est noté  $\boldsymbol{\sigma} : \bar{\Omega} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^{d \times d}$  où  $\mathbb{S}$  est le sous-espace de dimension  $d(d+1)/2$  des tenseurs symétriques d'ordre deux.

Afin de résoudre l'équation différentielle (2.1), une loi de comportement du matériau reliant les contraintes dans le milieu à l'histoire de ses déformations est nécessaire. La loi de Hooke nous vient alors en aide. Elle relie linéairement le tenseur des contraintes au tenseur de déformation, noté  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}$ , par un tenseur d'ordre quatre,  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ , tel que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.2)$$

Le tenseur des paramètres élastiques  $\mathbf{C}$  possède un certain nombre de symétries si bien que, dans le cas général, seuls 21 paramètres demeurent indépendants. Par ailleurs,  $\mathbf{C}$  est défini positif :

$$\boldsymbol{\psi} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\psi} = \psi_{ij} C_{ijkl} \psi_{kl} > \alpha |\boldsymbol{\psi}|^2 \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{S}, \quad \text{avec } \alpha > 0 \quad (2.3)$$

Une dernière relation doit être introduite pour parachever la description du système étudié. Il s'agit de la définition du tenseur de déformation

$$\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2.4)$$

Pour compléter le problème et garantir une unique solution par intégration de (2.1) sur le domaine d'investigation  $\Omega$ , des conditions initiales et des conditions aux limites doivent être spécifiées. Les conditions initiales correspondent à la connaissance du déplacement et de la vitesse à un certain temps  $t_0$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (2.5)$$

Le problème aux limites, quant à lui, met en jeu des frontières physiques d'une part, et des frontières numériques d'autre part. Les frontières physiques peuvent être caractérisées par des conditions en traction ou des conditions de Dirichlet. Pour le premier type, la traction sur la frontière  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  (où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante à la frontière) est soit imposée par une valeur connue (condition de Neumann), soit définie en fonction de la vitesse. Pour les conditions de Dirichlet, c'est le déplacement qui est imposé sur la frontière. C'est ainsi que l'on peut introduire, par un déplacement nul, un bord rigide. Dans toute la suite, nous considérerons une condition de Neumann avec une traction  $\mathbf{t} = 0$  qui correspond au cas fréquemment rencontré de la surface libre. Quant aux frontières numériques, il s'agit de limites artificielles censées reproduire un domaine infini à l'aide de conditions absorbantes. Ces conditions constituent un problème difficile qui sera abordé dans la section 2.3.2.

Maintenant que le problème élastodynamique est correctement posé, il s'agit de le mettre sous une forme variationnelle. Cela nécessite l'introduction de l'espace des champs cinématiques admissibles

$$\mathcal{S}^t = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d \forall t \in \mathbb{I} \right\} \quad (2.6)$$

où  $H^1(\Omega)$  est l'espace de Sobolev formé de toutes les fonctions qui, ainsi que leur dérivée première au sens des distributions, appartiennent à  $L^2(\Omega)$ . On note  $\delta\mathcal{S}$  l'espace des variations admissibles à un temps donné  $t$  (fonctions test) associé à  $\mathcal{S}^t$ , défini par

$$\delta\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{w}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^d \right\} \quad (2.7)$$

La formulation variationnelle consiste alors à chercher le couple  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{S}^t \times \mathcal{S}^t$ , tel que  $\forall \mathbf{w} \in \delta\mathcal{S}$  et  $\forall t \in \mathbb{I}$  :

$$(\mathbf{w}, \rho \dot{\mathbf{v}}) = (\mathbf{w}, \mathbf{f}) - a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \quad (2.8)$$

$$(\mathbf{w}, \rho \dot{\mathbf{u}}) = (\mathbf{w}, \rho \mathbf{v}) \quad (2.9)$$

avec les conditions initiales

$$(\mathbf{w}, \mathbf{u}(\cdot, t = t_0)) = (\mathbf{w}, \mathbf{u}_0) \quad \text{et} \quad (\mathbf{w}, \mathbf{v}(\cdot, t = t_0)) = (\mathbf{w}, \mathbf{v}_0) \quad (2.10)$$

Les produits correspondent aux produits classiques dans  $L^2$  :

$$(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (2.11)$$

et

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{u} d\Omega \quad (2.12)$$

### 2.2.2 Discrétisation géométrique

L'approximation par éléments spectraux est basée sur la décomposition du domaine  $\bar{\Omega}$  en  $n_e$  éléments  $\bar{\Omega}_e$  qui ne se recouvrent pas :  $\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1, n_e} \bar{\Omega}_e$ . Pour tout  $e \neq e'$ , l'intersection  $\bar{\Omega}_e \cap \bar{\Omega}_{e'}$ , est soit vide, soit composée d'un sommet, d'une arête ou d'une face. Ceci définit une quadrangulation du domaine physique, notée  $\mathcal{S}^h(\bar{\Omega})$  où l'exposant  $h$  réfère à une échelle de longueur caractéristique paramétrisant la discrétisation spatiale du domaine, composée de quadrangles à 2D et d'hexaèdres à 3D. Cette discrétisation du domaine physique par quadrangulation est une spécificité de la SEM. Nous verrons par la suite qu'elle lui assure des propriétés de tensorisation avantageuses, bien que ce type de discrétisations reste moins flexible qu'une triangulation.

Le problème de l'élastodynamique peut alors être intégré élément par élément grâce à la propriété d'additivité de l'intégration :

$$(\mathbf{w}, \rho \dot{\mathbf{v}}) = \sum_{e=1}^{n_e} (\mathbf{w}^e, \rho^e \dot{\mathbf{v}}^e)_{\Omega_e} = \sum_{e=1}^{n_e} [(\mathbf{w}^e, \mathbf{f}^e)_{\Omega_e} - a(\mathbf{w}^e, \mathbf{u}^e)_{\Omega_e}] \quad (2.13)$$

où, par exemple,  $\mathbf{w}^e = \mathbf{w}|_{\bar{\Omega}_e}$  est la restriction de  $\mathbf{w}$  à  $\bar{\Omega}_e$ .

Afin de définir une formule de quadrature, les intégrales doivent être évaluées sur un domaine de référence  $\square = [-1, 1]^d$ . Chaque élément  $\bar{\Omega}_e$  est l'image de l'élément de référence  $\square$  par un difféomorphisme régulier  $\mathcal{F}_e : \square \rightarrow \bar{\Omega}_e$  tel que  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}_e(\boldsymbol{\xi})$  où  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)$  correspond au système de coordonnées cartésiennes défini sur l'élément de référence et  $\mathbf{x}$  au système de coordonnées physiques associé à l'élément  $\bar{\Omega}_e$ . Une telle transformation peut être définie à partir de fonctions de forme multidimensionnelles construites par tensorisation des polynômes de Lagrange 1D d'ordre  $n$ ,  $l_i^n, 1 \leq i \leq n+1$ , associés aux  $(n+1)$  points utilisés pour paramétriser le segment  $[-1, 1]$ . Afin de réduire les erreurs de quadrature, des fonctions de forme d'ordre peu élevé (un ou deux) sont préférées. Le difféomorphisme peut alors s'écrire

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{a}^i N_i(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.14)$$

où  $\{\mathbf{a}^i\}_{i=1, n_p}$  est l'ensemble des points de contrôle de  $\bar{\Omega}_e$  et  $N_i$  est le produit tensoriel de polynômes de Lagrange associés au nœud de contrôle  $\boldsymbol{\xi}^i$  de  $\square$  ( $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}^i) = \mathbf{a}^i$ ) :

$$N_i(\boldsymbol{\xi}) = \bigotimes_{j=1}^d l_i^{n_p}(\xi_j) \quad (2.15)$$

On a besoin de 4 et 8 ou 9 points de contrôle à 2D (figure 2.1) et de 8 et 20 ou 27 points à 3D pour obtenir des fonctions de forme linéaires et quadratiques respectivement. L'expression analytique de ces fonctions de forme a été écrite par exemple par Dhatt & Touzot (1984). Ces transformations assurent une coïncidence des frontières partagées par deux éléments.

### 2.2.3 Approximation de Galerkin

En liaison avec la quadrangulation  $\mathcal{S}^h$ , la discrétisation spatiale est assurée en remplaçant les espaces de dimension infinie  $\mathcal{S}^t$  et  $\delta \mathcal{S}$  par les sous-espaces de dimension finie  $\mathcal{S}^{t, h} \subset \mathcal{S}^t$

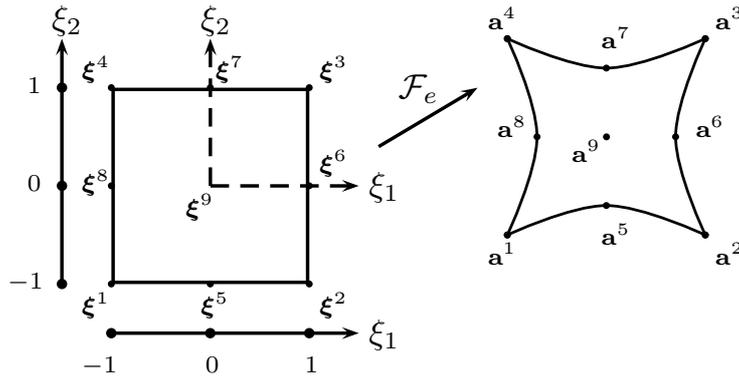


FIG. 2.1 – Exemple d’une transformation géométrique quadratique avec 9 points de contrôle entre l’élément de référence (à gauche) et l’élément physique. Figure extraite de la thèse de Komatitsch (1997).

et  $\delta\mathcal{S}^h \subset \delta\mathcal{S}$  basés sur une approximation polynômiale.

$$\mathcal{S}^{t,h} = \left\{ \mathbf{u}^h \in \mathcal{S}^t \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^{he} = \mathbf{u}^h|_{\bar{\Omega}_e} \circ \mathcal{F}_e \in \otimes_{i=1}^d [\mathbb{P}_N(\xi_i)] \right\} \quad (2.16)$$

$$\delta\mathcal{S}^h = \left\{ \mathbf{w}^h \in \delta\mathcal{S} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}^{he} = \mathbf{w}^h|_{\bar{\Omega}_e} \circ \mathcal{F}_e \in \otimes_{i=1}^d [\mathbb{P}_N(\xi_i)] \right\} \quad (2.17)$$

où  $\mathbb{P}_N(\xi_i)$  est l’espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $N$  définis sur  $[-1, 1]$ .

La spécificité de la SEM tient au choix d’une base en lien étroit avec la quadrature gaussienne utilisée pour calculer les intégrales de la formulation variationnelle. Cette base est obtenue à partir des polynômes de Lagrange orthogonaux  $\{h_k^N\}_{k=0,\dots,N}$  associés aux  $(N+1)$  nœuds de la quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL)  $\Xi_{N+1}^i : \{\xi_0^N, \xi_1^N, \dots, \xi_N^N\} \in [-1, 1]$ , tels que  $h_k^N(\xi_j^N) = \delta_{kj}$  (leur expression est donnée dans l’annexe 2.A). Par tensorisation, ces nœuds forment une grille définie pour chaque élément  $\bar{\Omega}_e$ ,  $\otimes_{i=1}^d \Xi_{N+1}^i = \{(\xi_r^N, \xi_s^N, \xi_t^N); 0 \leq r \leq N, 0 \leq s \leq N, 0 \leq t \leq N\}$  (figure 2.2). On remarque que cette grille est non-uniforme, avec des nœuds plus rapprochés près des bords (si  $h$  est la distance entre deux nœuds, elle décroît en  $1/h$  au centre et en  $1/h^2$  aux bords). L’approximation polynômiale dans chaque élément  $\bar{\Omega}_e \in \mathcal{S}^h$  est alors donnée par

$$u_{i|\bar{\Omega}_e}^h(\mathbf{x}) = I_N u_{i|\bar{\Omega}_e}(\mathbf{x}) = \sum_{r,s,t=0}^N u_i^{he}(\xi_r^N, \xi_s^N, \xi_t^N) h_r^N(\xi_1) h_s^N(\xi_2) h_t^N(\xi_3) \quad (2.18)$$

avec  $\mathbf{x} = \mathcal{F}_e(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}_e(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  et  $I_N$  l’opérateur d’interpolation de Lagrange. L’interpolation lagrangienne permet d’assurer la continuité  $\mathcal{C}^0$  entre les éléments. Pour la restriction  $\mathbf{u}_{i|\bar{\Omega}_e}$ ,  $I_N \mathbf{u}_{i|\bar{\Omega}_e} \circ \mathcal{F}_e$  est l’unique polynôme de  $\otimes_{i=1}^d [\mathbb{P}_N(\xi_i)]$  qui coïncide avec  $\mathbf{u}_{i|\bar{\Omega}_e}$  aux  $(N+1)^d$  nœuds de GLL. On note  $u_{i|rst}^{he} = u_i^{he}(\xi_r^N, \xi_s^N, \xi_t^N)$  les coefficients de la série qui constituent les inconnues que l’on cherche à déterminer.

Le choix d’une interpolation lagrangienne associée aux nœuds de GLL (on parle alors d’expansion nodale) fournit à la SEM une caractéristique de convergence très intéressante liée aux propriétés des polynômes de Legendre. Les polynômes de Legendre  $\{L_k\}_{k=0,\infty}$  formant une base de  $L^2(\Lambda)$ , où  $\Lambda$  est l’intervalle ouvert  $(-1, 1)$ , la série tronquée à l’ordre  $N$  de  $u \in L^2(\Lambda)$ ,

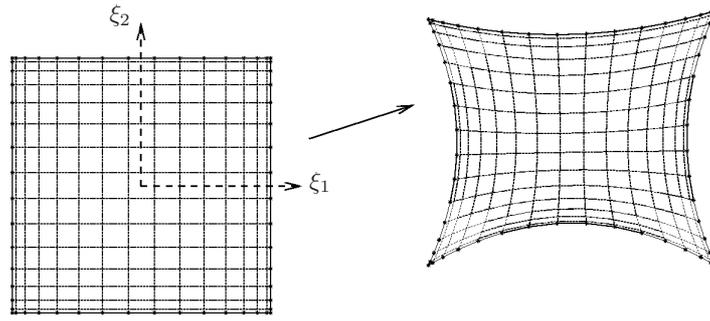


FIG. 2.2 – Grille définie par tensorisation des nœuds de GLL 1D sur l'élément de référence et sur un élément déformé, dans le cas 2D. Cette grille est non-uniforme : la distance entre les nœuds diminue près des bords. Figure extraite de la thèse de Komatitsch (1997).

$P_N u = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k L_k$  (expansion modale), est la meilleure approximation de  $u$  dans l'espace linéaire engendré par  $\{L_k\}_{k=0,N}$ , identique à  $\mathbb{P}_N$ . On peut montrer que

$$I_N u(\xi) = P_N u(\xi) + R_N u(\xi), \quad \forall \xi \in \Lambda \quad (2.19)$$

où  $R_N u$  est une erreur d'aliasing due à l'interpolation (Deville *et al.*, 2002). Elle dépend exclusivement des termes d'ordre élevé de la série spectrale de  $u$  dans la base des polynômes de Legendre (termes d'ordre  $> N$ ). Dans  $L^2(\Lambda)$ , l'erreur d'interpolation  $u - I_N u$  peut s'écrire en fonction de cette erreur d'aliasing et de l'erreur de troncature  $u - P_N u$  :

$$\|u - I_N u\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \|u - P_N u\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \|R_N u\|_{L^2(\Lambda)}^2 \quad (2.20)$$

L'erreur d'interpolation se rapprochera d'autant plus de l'erreur de troncature que les coefficients  $\hat{u}$  décroîtront vite avec l'ordre. Or les polynômes de Legendre, en tant que solution propre d'un problème de Sturm-Liouville (voir par exemple Arfken, 1985), assurent une propriété de convergence exponentielle. Gottlieb & Orzag (1977) ont en effet montré que, si une fonction régulière  $u$  peut être écrite comme une série de solutions propres d'un problème de Sturm-Liouville, alors les coefficients de cette série décroissent plus vite qu'algébriquement. Cette propriété est appelée précision spectrale et justifie le nom de la SEM. On obtient ainsi une erreur d'aliasing minimale.

L'approximation de la SEM ne se définit pas seulement par son choix de fonctions de base lagrangiennes mais aussi par sa règle de quadrature associée. Afin de rester consistant avec l'approximation polynômiale et de conserver une précision élevée, on utilise une quadrature de type Gauss-Lobatto-Legendre. Les  $(N+1)$  nœuds de GLL,  $\xi_0^N = -1 < \xi_1^N < \dots < 1 = \xi_N^N$ , étant définis comme les racines de  $(1-x^2)L_N'(x)$ , la règle de quadrature de GLL intègre exactement les polynômes de degré  $2N-1$  (Canuto *et al.*, 1987) :

$$\int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi = \sum_{k=0}^N \phi(\xi_k^N) \omega_k \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_{2N-1} \quad (2.21)$$

avec  $\omega_k = \frac{2}{N(N+1)} \frac{1}{L_N(\xi_k)^2} > 0$ , les poids de la quadrature.

On peut ainsi approcher les produits de (2.13) par des produits discrets définis par cette

règle d'intégration sur la grille tensorisée  $\otimes_{i=1}^d \Xi_{N+1}^i$  :

$$(\mathbf{w}^{he}, \mathbf{u}^{he})_{he} = \int_{\Omega_e} \mathbf{w}^{he}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^{he}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \simeq \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^N [\mathbf{w}^{he} \cdot \mathbf{u}^{he}](\xi_\alpha^N, \xi_\beta^N, \xi_\gamma^N) J^e(\xi_\alpha^N, \xi_\beta^N, \xi_\gamma^N) \omega_{\alpha\beta\gamma} \quad (2.22)$$

où  $J^e$  est le déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{F}^e = \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_e}{\partial \xi_i} \right]$  de la transformation géométrique  $\mathcal{F}_e$  et  $\omega_{\alpha\beta\gamma} = \omega_\alpha \omega_\beta \omega_\gamma$ . On peut remarquer que cette intégration n'est pas toujours exacte, puisque le produit  $\mathbf{w}^{he} \cdot \mathbf{u}^{he}$  est déjà dans  $\mathbb{P}_{2N}$ .

L'approximation de Galerkin du problème variationnel initial consiste alors à chercher le couple  $(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) \in \mathcal{S}^{t,h} \times \mathcal{S}^{t,h}$ , tel que  $\forall \mathbf{w}^h \in \delta \mathcal{S}^h$  et  $\forall t \in \mathbb{I}$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}^h, \rho^h \dot{\mathbf{v}}^h)_h &= (\mathbf{w}^h, \mathbf{f}^h)_h - a_h(\mathbf{w}^h, \mathbf{u}^h) \\ (\mathbf{w}^h, \rho^h \dot{\mathbf{u}}^h)_h &= (\mathbf{w}^h, \rho^h \mathbf{v}^h)_h \end{aligned} \quad (2.23)$$

où les produits discrets  $(\cdot, \cdot)_h$  sont définis à partir des produits  $(\cdot, \cdot)_{he}$ .

## 2.2.4 Formulation matricielle du problème semi-discret

Le problème considéré se ramène à la détermination des inconnues  $u_{rst}^{he}$  (et  $v_{rst}^{he}$ ) définies aux nœuds de GLL de chaque élément  $\bar{\Omega}_e$ . Une représentation vectorielle efficace des coefficients de l'interpolation polynômiale va maintenant être adoptée (Deville *et al.*, 2002).

Elle consiste à définir, par exemple à 3D

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^{he} &= \left( u_{i|1}^{he}, \dots, u_{i|\hat{k}}^{he}, \dots, u_{i|\mathcal{N}}^{he} \right)^T \\ &= \left( u_{i|000}^{he}, \dots, u_{i|rst}^{he}, \dots, u_{i|NNN}^{he} \right)^T \\ \mathbf{u}^{he} &= \left( \mathbf{u}_1^{he}, \mathbf{u}_2^{he}, \mathbf{u}_3^{he} \right)^T \\ \mathbf{U}_L^h &= \left( \mathbf{u}^{h1}, \mathbf{u}^{h2}, \dots, \mathbf{u}^{hn_e} \right)^T \end{aligned}$$

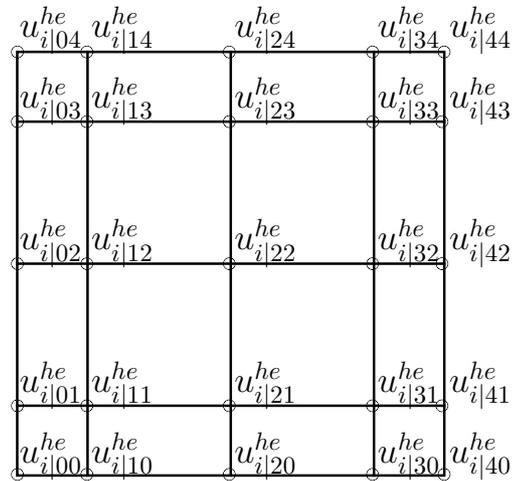


FIG. 2.3 – Numérotation indicielle 2D des champs aux nœuds de GLL dans l'élément de référence, pour  $N = 4$ .

où  $\mathcal{N} = (N+1)^3$  est le nombre total de coefficients dans un élément et  $\hat{k} = 1 + r + (N+1)s + (N+1)^2t$  relie la représentation indicielle 3D à la forme vectorielle classique (figure 2.3). Le vecteur  $\mathbf{u}^{he}$  regroupe les différentes composantes et  $\mathbf{U}_L^h \in \mathbb{R}^{n_e \cdot d \cdot \mathcal{N}}$  est construit comme la concaténation de tous les coefficients, composante par composante, venant de chaque élément. L'interpolation lagrangienne assurant la continuité entre les éléments, les nœuds communs à plusieurs éléments, au niveau d'un sommet, d'une arête ou d'une face, sont égaux. Cela induit

une numérotation globale qui ne compte qu'une seule fois ces nœuds. On note  $\mathcal{N}$  le nombre de nœuds distincts dans tout le maillage et  $\mathbf{U}^h \in \mathbb{R}^{d \cdot \mathcal{N}}$  le vecteur associé à cette numérotation globale. La condition de continuité entre les éléments assure l'existence d'une matrice de connectivité booléenne  $\mathbf{Q}$  qui permet de passer de la représentation globale à la représentation locale, élément par élément, par une action de copie des valeurs communes :  $\mathbf{U}_L^h = \mathbf{Q}\mathbf{U}^h$ . La matrice  $\mathbf{Q}$  n'est pas inversible mais on utilise sa transposée,  $\mathbf{Q}^T$ , en tant qu'opérateur d'assemblage par son action de sommation des contributions venant de chaque élément. Dans la pratique, ces matrices ne sont jamais calculées mais leur action est implémentée via des adressages indirects.

L'insertion de l'approximation polynômiale et de la règle de quadrature dans la formulation variationnelle (2.23) conduit à un système d'équations différentielles ordinaires, gouvernant l'évolution des champs aux positions globales des nœuds :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\dot{\mathbf{V}}^h &= \mathbb{F}^{ext} - \mathbb{F}^{int}(\mathbf{U}^h) \\ \dot{\mathbf{U}}^h &= \mathbf{V}^h \end{aligned} \quad (2.24)$$

où  $\mathbb{M}$  est la matrice de masse de taille  $(d \cdot \mathcal{N}) \times (d \cdot \mathcal{N})$  et où les vecteurs  $\mathbb{F}^{ext}$  et  $\mathbb{F}^{int}$  contiennent respectivement les forces externes et internes aux nœuds globaux.

Les matrices de masse et les vecteurs forces sont assemblés à partir des contributions élémentaires par une action de sommation aux nœuds communs :

$$\mathbb{M} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_e} \{\mathbb{M}^e\}; \quad \mathbb{F}^{ext} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_e} \{\mathbf{F}^{ext,e}\}; \quad \mathbb{F}^{int} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_e} \{\mathbf{F}^{int,e}\}$$

où  $\mathbf{A}_{e=1}^{n_e}$  est l'opération d'assemblage.

Ces matrices et vecteurs élémentaires sont obtenus en prenant pour la définition des  $\mathbf{w}^{he}$  les polynômes de Lagrange associés aux nœuds de la grille. On définit par exemple  $\mathbf{w}_{i|\hat{k}}^{he}$  comme le champ lié au nœud  $\mathbf{x}_{\hat{k}} = \mathcal{F}_e(\xi_r^N, \xi_s^N, \xi_t^N)$ ,  $\hat{k} = 1 + r + (N+1)s + (N+1)^2t$ , dont la  $i^e$  composante est  $h_r^N \otimes h_s^N \otimes h_t^N$  et les autres sont nulles.

## Matrice de masse

Pour chaque élément  $\bar{\Omega}_e$ , la matrice de masse est donnée par

$$\mathbb{M}^e = \mathbf{I}_d \otimes \hat{\mathbf{M}}^e \quad (2.25)$$

où le symbole  $\otimes$  est le produit tensoriel entre deux matrices,  $\mathbf{I}_d$  la matrice identité de taille  $d \times d$  et  $\hat{\mathbf{M}}^e$  une matrice diagonale définie par

$$\hat{M}_{\hat{k}\hat{k}}^e = \rho(\xi_r^N, \xi_s^N, \xi_t^N) J^e(\xi_r^N, \xi_s^N, \xi_t^N) \omega_{rst} \quad (2.26)$$

Dans la SEM, la matrice de masse est donc diagonale. Cette caractéristique vient du choix de la base des espaces discrets comme une base orthogonale, définie par les fonctions lagrangiennes associées aux mêmes nœuds que ceux de la quadrature gaussienne. Cette propriété est très utile pour la résolution des schémas en temps en élastodynamique qui requièrent l'action de  $\mathbb{M}^{-1}$ . La matrice pourra être calculée explicitement, une fois pour toute, et permettra l'utilisation de schémas en temps explicites. C'est une des propriétés principales de la SEM, autorisant des approximations d'ordre élevé dans l'élément.

### Forces internes

La contribution des forces internes,  $\mathbf{F}^{int,e} = (\mathbf{F}_1^{int,e}, \dots, \mathbf{F}_d^{int,e})$ , peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{F}_i^{int,e} = \sum_{l,m,n=1}^d \tilde{\mathbf{D}}_l^T \mathbf{C}_{ilmn}^e \tilde{\mathbf{D}}_n \mathbf{u}_m^{he} \mathbf{J}^e \boldsymbol{\omega} \quad (2.27)$$

où les vecteurs  $\mathbf{J}^e$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  et  $\mathbf{C}_{ilmn}^e$  regroupent le jacobien, les poids de GLL et les coefficients de rigidité à tous les nœuds de collocation dans l'élément  $\tilde{\Omega}_e$  et  $\tilde{\mathbf{D}}_n$  est un opérateur discret de dérivation résultant de la discrétisation de l'opérateur différentiel spatial  $\frac{\partial}{\partial x_n}$ . L'obtention de cette formule est détaillée dans l'annexe 2.B.

Une écriture alternative des forces internes fait apparaître une nouvelle matrice  $\boldsymbol{\Sigma}^{he}$  :

$$\mathbf{F}_i^{int,e} = \sum_{j,l,m=1}^d \tilde{\mathbf{D}}_j^T \boldsymbol{\Sigma}_{ij}^{he} \mathbf{J}^e \boldsymbol{\omega} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Sigma}_{ij}^{he} = \sum_{l,m=1}^d \mathbf{C}_{ijlm}^e \tilde{\mathbf{D}}_m \mathbf{u}_l^{he} = \mathbf{K}_{ij}^e \mathbf{u}^{he} \quad (2.28)$$

où  $\mathbf{K}_{ij}^e$  est une matrice diagonale par bloc symétrique définissant  $\mathbf{K}^e$  telle que

$$\boldsymbol{\Sigma}^{he} = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^{he} \quad (2.29)$$

Ce tenseur du second ordre représente, dans chaque élément  $\tilde{\Omega}_e$ , les valeurs sur la grille des nœuds de GLL d'un tenseur des contraintes discret qui, par définition, n'est pas continu entre éléments. Avec la même représentation vectorielle définie précédemment,

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ij}^{he} = (\boldsymbol{\Sigma}_{ij|1}^{he}, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_{ij|\hat{k}}^{he}, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_{ij|\mathcal{N}}^{he})^T \quad (2.30)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_L^h = (\boldsymbol{\Sigma}^{h1}, \boldsymbol{\Sigma}^{h2}, \dots, \boldsymbol{\Sigma}^{hn_e})^T; \quad \mathbf{K}_L = (\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2, \dots, \mathbf{K}^{n_e})^T \quad (2.31)$$

On peut réécrire le système dynamique discret (2.24) en utilisant la propriété de continuité de la vitesse

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \dot{\mathbf{V}}^h &= \mathbb{F}^{ext} - \mathbb{F}^{int}(\boldsymbol{\Sigma}_L^h \{\mathbf{U}_L^h\}) \\ \dot{\mathbf{U}}_L^h &= \mathbf{Q} \mathbf{V}^h \end{aligned} \quad (2.32)$$

avec par définition de la matrice de connectivité,  $\mathbf{V}_L^h = \mathbf{Q} \mathbf{V}^h$ . En utilisant l'équation (2.29), on obtient finalement le nouveau système

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \dot{\mathbf{V}}^h &= \mathbb{F}^{ext} - \mathbb{F}^{int}(\boldsymbol{\Sigma}_L^h) \\ \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_L^h &= \mathbf{K}_L \mathbf{Q} \mathbf{V}^h \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ce système est aussi celui qui découle directement de la formulation en vitesse-contrainte du problème élastodynamique discrétisé en éléments spectraux avec une approximation  $L^2$  sur la contrainte (Festa & Vilotte, 2005). Cette équivalence est très utile car elle va permettre d'écrire les PML dans un système du 1<sup>er</sup> ordre (voir section 2.3.2) alors qu'auparavant (Komatitsch & Tromp, 2003), des équations du 2<sup>nd</sup> ordre nécessitant un important coût de calcul étaient utilisées.

### Forces externes

Les forces externes  $\mathbf{F}^{ext,e} = (\mathbf{F}_1^{ext,e}, \dots, \mathbf{F}_d^{ext,e})$  sont contrôlées par une ou plusieurs sources d'excitation. Ces sources sont ponctuelles. Il peut s'agir d'une simple force, dont la densité associée s'écrit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) f(t) \quad (2.34)$$

( $\mathbf{x}_s$  indique la position du point-source et  $\mathbf{f}_0$  la direction et l'intensité de la force), ou bien d'un double-couple, souvent utilisé en sismologie pour modéliser le mécanisme des tremblements de terre et dont la densité de force peut s'écrire

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -\text{div}[\mathbf{m}(\mathbf{x})] f(t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}^0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (2.35)$$

où  $\mathbf{m}^0$  est un tenseur de moment sismique (i.e. un tenseur symétrique d'ordre deux ayant toutes les propriétés d'un tenseur des contraintes).

Dans le cas d'un double-couple, si le point source n'est pas sur la surface  $\partial\Omega$ , on montre facilement que

$$\mathbf{F}_i^{ext,e} = f(t) \nabla \mathbf{w}_i^{he}(\mathbf{x}_s) : \mathbf{m}^0 \quad (2.36)$$

Si le point-source correspond à un nœud de GLL, alors l'expression ci-dessus devient

$$\mathbf{F}_i^{ext,e} = f(t) \sum_{j=1}^d \tilde{\mathbf{D}}_j^T \mathbf{m}_{ij}^0 \quad (2.37)$$

Dans le cas général, en revanche, les dérivées des fonctions-tests ne se simplifient pas et le développement de (2.36) est alors plus compliqué à écrire.

### 2.2.5 Discrétisation temporelle

On s'intéresse maintenant à la discrétisation temporelle du système (2.24) évoluant dans l'intervalle de temps  $\mathbb{I} = [0, T]$ , discrétisé en un certain nombre de pas de temps  $\Delta t$ . Pour tout entier  $n$ , on définit le temps  $t_n = n\Delta t$  et l'on note  $\mathbf{U}^{h,n}$  (resp.  $\mathbf{V}^{h,n}$ ,  $\mathbf{A}^{h,n}$  et  $\mathbb{F}^{ext,n}$ ) le déplacement (resp. la vitesse, l'accélération et les forces extérieures) au temps  $t_n$ . L'évolution en temps est définie par l'équation de conservation de la quantité de mouvement totale en vitesse vérifiée à l'instant  $t_{n+\frac{1}{2}}$ , assurant une conservation de l'énergie totale :

$$\mathbf{V}^{h,n+1} = \mathbf{V}^{h,n} + \Delta t \mathbb{M}^{-1} \left[ \mathbb{F}^{ext,n+\frac{1}{2}} - \mathbb{F}^{int}(\mathbf{U}^{h,n+\frac{1}{2}}) \right] \quad (2.38)$$

où

$$\mathbf{U}^{h,n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^{h,n+1} + \mathbf{U}^{h,n}) \quad (2.39)$$

Le déplacement et l'accélération sont exprimés en fonction de la vitesse en utilisant un schéma de Newmark (Hughes, 1987) qui correspond à un développement en série de Taylor quadratique des champs dans l'intervalle de temps  $\mathbb{I}_n = [t_n, t_{n+1}]$ . Les paramètres de ce type de

schémas sont choisis de telle sorte que le moment angulaire total du système soit conservé et que l'évolution du déplacement devienne indépendante de l'accélération :

$$\mathbf{U}^{h,n+1} = \mathbf{U}^{h,n} + \Delta t \mathbf{V}^{h,n+\frac{1}{2}} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{A}^{h,n+1} = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{V}^{h,n+1} - \mathbf{V}^h) \quad (2.41)$$

L'évolution du système (2.32) est finalement obtenue en résolvant simultanément les équations (2.38) et (2.41). Ce schéma est traité de façon explicite en prenant comme valeur prédite  $\mathbf{V}^{h,n+1} = \mathbf{V}^{h,n}$ . En élastodynamique, dans le cas d'un milieu linéaire, une procédure de multi-prédiction-corrrection n'est pas nécessaire : un pas de temps suffisamment petit, choisi en fonction d'un critère de stabilité, assure une bonne précision avec une seule itération. Ce critère de stabilité définit un pas de temps  $\Delta t$  plus petit que le temps de propagation nécessaire à la propagation précise d'un signal entre les nœuds de la grille. Cette condition est fonction du nombre de Courant

$$n_c = \Delta t \left[ \frac{v_p}{\Delta x} \right]_{max} \quad (2.42)$$

où  $\left[ \frac{v_p}{\Delta x} \right]_{max}$  est la valeur maximale que peut prendre, lorsque l'on balaye tout le domaine d'étude, le rapport entre la vitesse la plus élevée (notée  $v_p$  car il s'agit le plus souvent de la vitesse des ondes P) et la distance  $\Delta x$  entre deux nœuds de GLL voisins dans le maillage. La grille de nœuds de GLL n'étant pas uniforme, les plus petites distances se trouveront près des bords des éléments, là où les nœuds sont le plus rapprochés. Pour un degré polynômial élevé,  $\Delta x_{bord}$  décroît selon une loi au carré. Ainsi, si l'on double le nombre de nœuds de GLL dans un élément  $e$ ,  $\left[ \frac{v_p}{\Delta x} \right]_{max}^e$  sera multiplié par 4. Des valeurs de  $n_c \leq 0.5$  garantissent la stabilité. Dans la pratique, on prendra des pas de temps correspondant à un nombre de courant tel que  $0.2 \leq n_c \leq 0.4$ , afin de diminuer l'erreur de dispersion.

La distance  $\Delta x_{min}$  est également un paramètre important qu'il est nécessaire de contrôler afin de limiter la dispersion numérique. On peut considérer qu'un minimum de 5 nœuds par longueur d'ondes est nécessaire. Dans un milieu linéaire, cette longueur d'onde est déterminée par le spectre émis par la source.

## 2.3 Spécificités d'une implémentation à l'échelle régionale

Dans le présent travail, nous nous intéressons à la propagation 3D des ondes sismiques à l'échelle régionale, c'est-à-dire à des distances source-récepteurs inférieures à  $90^\circ$  et à des fréquences pouvant aller jusqu'à 0.25Hz. Pour traiter ce genre de cas, nous avons implémenté la SEM dans un code ayant des caractéristiques appropriées. Le code en question se nomme RegSEM. Nous allons détailler ici le type de maillages qu'il sait non seulement prendre en compte mais également générer. Nous évoquerons aussi les bords absorbants, indispensables pour éviter toutes réflexions artificielles aux limites du domaine considéré, et nous parlerons de la parallélisation mise en œuvre pour réduire le temps de calcul. Nous finirons par quelques remarques sur d'autres particularités du code.

### 2.3.1 Maillage

RegSEM est un programme qui permet de simuler la propagation des ondes à l'échelle régionale. Nous ne travaillerons donc pas sur tout le globe mais sur des morceaux de Terre dont le volume  $\bar{\Omega}$  est défini par trois paramètres fournis par l'utilisateur : deux angles  $\alpha$  et  $\beta$ , et une profondeur  $d$  (figure 2.4). Un autre paramètre,  $\delta$ , donne la taille des éléments  $\bar{\Omega}_e$  qui décomposeront  $\bar{\Omega}$ . Ce paramètre doit être choisi en fonction de la longueur d'onde minimale et du degré polynômial que l'on veut utiliser. Comme il n'est pas, *a priori*, un multiple de  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ),  $\delta$  s'adapte de manière automatique pour donner  $\delta_\alpha$  (resp.  $\delta_\beta$ ).  $\delta$  s'adapte également en profondeur, en fonction des interfaces sphériques (elles aussi rentrées par l'utilisateur) et de la variation radiale des vitesses sismiques dans le milieu (généralement croissantes avec la profondeur). On note  $\delta_D^k$  les différentes épaisseurs, où  $k = 1, \dots, n_D$  avec  $n_D$  le nombre d'éléments en profondeur. On définit également  $\delta_D^0 = 0$  si bien que l'on peut écrire  $\sum_{k=0}^{n_D} \delta_D^k = D$ . Remarquons que, dans la figure 2.4, nous sommes dans le cas très simple d'un milieu homogène et donc  $\delta_D^k = \delta_D^{k'} \forall (k, k') \in \mathbb{N}_{+, \leq n_D}^2$ .

Maintenant que sont définis les éléments, on peut écrire les coordonnées des points de contrôle qui vont permettre l'interpolation géométrique (voir section 2.2.2). Celles-ci peuvent s'exprimer de la manière suivante :

- Si on travaille avec 8 points de contrôle par élément :

$$\tilde{\alpha}^i = \frac{-\alpha}{2} + i\delta_\alpha; \quad \tilde{\beta}^j = \frac{-\beta}{2} + j\delta_\beta; \quad \tilde{\gamma}^k = R_T + \sum_{k'=0}^k \delta_D^{k'} \quad (2.43)$$

avec  $0 \leq i \leq n_\alpha$ ,  $0 \leq j \leq n_\beta$  et  $0 \leq k \leq n_D$ , où  $n_\alpha$  (resp.  $n_\beta$ ) est le nombre d'éléments qui décomposent l'angle  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) et où  $R_T$  est le rayon de la Terre.

- Si on travaille avec 27 points de contrôle par élément :

$$\tilde{\alpha}^i = \frac{-\alpha}{2} + i\frac{\delta_\alpha}{2}; \quad \tilde{\beta}^j = \frac{-\beta}{2} + j\frac{\delta_\beta}{2}; \quad \tilde{\gamma}^k = R_T + \sum_{k'=0}^k \frac{\delta_D^{k'-E(k'/2)}}{2} \quad (2.44)$$

avec  $0 \leq i \leq 2n_\alpha$ ,  $0 \leq j \leq 2n_\beta$ ,  $0 \leq k \leq 2n_D$  et  $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$  la fonction partie entière.

Pour passer des coordonnées  $(\tilde{\alpha}^i, \tilde{\beta}^j, \tilde{\gamma}^k)$  aux coordonnées  $(x, y, z)_{ijk}$  dans le repère géocentrique cartésien, on utilise la transformation de la "sphère cubique" (Ronchi *et al.*, 1996) qui à tout point  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) \in [-\alpha/2; \alpha/2] \times [-\beta/2; \beta/2] \times [R_T - D, R_T]$  associe  $(x, y, z)$  tel que

$$x = \frac{\tilde{\gamma} \tan(\tilde{\alpha})}{\lambda}; \quad y = \frac{\tilde{\gamma} \tan(\tilde{\beta})}{\lambda}; \quad z = \frac{\tilde{\gamma}}{\lambda} \quad (2.45)$$

avec  $\lambda = \sqrt{1 + \tan^2(\tilde{\alpha}) + \tan^2(\tilde{\beta})}$ .

Ainsi défini, notre morceau de Terre est centré sur l'axe  $\mathbf{z}$ , le centre de notre surface supérieure correspondant au pôle Nord. Pour considérer n'importe quel morceau de Terre, l'utilisateur pourra entrer la longitude et la latitude d'un point C qui sera alors le nouveau centre de la surface supérieure. Une rotation sera définie pour faire tourner tout le volume, l'axe  $\mathbf{x}$  se retrouvant dans la direction nord-sud et l'axe  $\mathbf{y}$  dans la direction est-ouest.

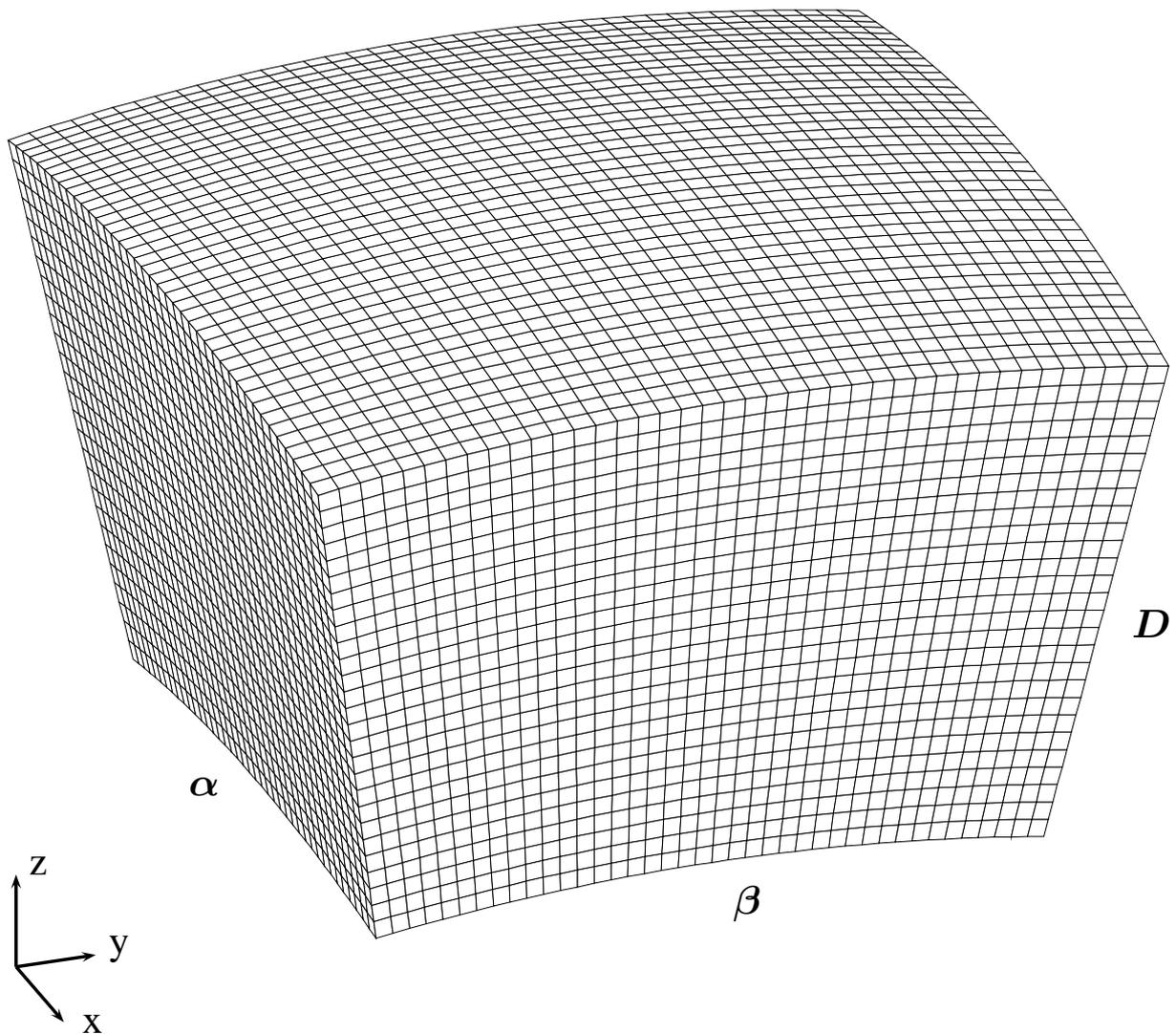


FIG. 2.4 – Exemple d'un morceau de Terre de dimension  $\alpha = \beta = 20^\circ$  et  $D = 1371 \text{ km}$ . La décomposition du morceau en éléments correspond au maillage d'un modèle de vitesse homogène si bien que tous les éléments ont la même épaisseur  $\delta_D = 49.96 \text{ km}$ . Horizontalement, la taille des éléments est  $\delta_\alpha = \delta_\beta = 0.5^\circ$ . Par ailleurs, on a représenté les axes du système géocentrique cartésien pour indiquer l'orientation du morceau de Terre.

Pour que la modélisation soit réaliste, il est par ailleurs très important de prendre en compte la topographie des interfaces. Outre celle de la surface, c'est surtout la topographie du moho qui va nous préoccuper. RegSEM peut aisément la prendre en compte pourvu que l'utilisateur fournisse un fichier correctement formaté (voir le manuel d'utilisation de RegSEM en annexe 2.C). Cependant, ses variations sont telles que la croûte, c'est-à-dire l'espace entre le Moho et la surface (espace que l'on maillera avec une seule couche d'éléments), est très épaisse à certains endroits (au niveau des chaînes de montagnes par exemple) et très fine à d'autres (sous les océans), si bien qu'elle va souvent constituer le facteur limitant des simulations, tant en ce qui concerne la fréquence maximale que le temps de calcul. En effet, si dans notre volume  $\Omega$  nous rencontrons une croûte de 60 km et que nous voulons simuler des fréquences allant jusqu'à 0.2 Hz, il nous faudra un ordre polynômial  $N \geq 12$ . Or, si  $\Omega$  présente également en un autre endroit une épaisseur de croûte de 7 km, l'ordre polynômial élevé impliquera un nombre de Courant très grand et par conséquent un coût de calcul très lourd. A l'avenir, on peut espérer que les techniques d'homogénéisation récemment introduites en sismologie (Capdeville & Marigo, 2007a) permettront de passer outre ces limitations et même de prendre en compte des discontinuités au sein de la croûte.

### 2.3.2 *Perfectly Matched Layers*

La SEM telle qu'elle est implémentée dans notre code requiert un domaine tronqué et doit donc inclure des conditions aux limites absorbantes pour supprimer le maximum de réflexions vers l'intérieur du domaine. Parmi toutes les techniques permettant de faire cela (voir par exemple l'introduction de Collino & Tsogka, 2001 pour une brève revue), ce sont les *Perfectly Matched Layers* (PML) qui sont généralement choisies dans le cadre des éléments spectraux. Il s'agit de couches conçues pour n'avoir aucun contraste d'impédance à l'interface avec le volume élastique et pour fournir une décroissance exponentielle de toute onde les pénétrant. Leur efficacité a été démontrée aussi bien pour les ondes de volume que pour les ondes de surface. Cependant, leur implémentation a nécessité, dans un premier temps, l'écriture d'un système du second ordre impliquant des variables additionnelles qui rendaient les PML coûteuses en mémoire et en temps de calcul (Komatitsch & Tromp, 2003). Récemment, Festa & Vilotte (2005) ont réussi à passer outre ce problème grâce à une implémentation des PML basée sur une formulation en vitesse-contrainte du problème élastodynamique. Ils montrent en effet que le schéma en vitesse-contrainte présenté dans la section 2.2.4, et dérivé de l'approximation de l'élastodynamique classique des SE basée sur la formulation variationnelle primale en déplacement, est équivalent, au moins au sens discret, à la discrétisation d'une formulation en vitesse-contrainte de l'élastodynamique, classiquement utilisée en sismologie. Une telle équivalence permet d'interfacer de façon optimisée les PML avec la formulation en déplacement de la SEM. L'implémentation dans la partie physique du domaine reste alors inchangée, seules les parties PML ayant recours à l'interprétation vitesse-contrainte.

Reprenons maintenant le formalisme de Festa & Vilotte (2005) pour établir le système du premier ordre en vitesse-contrainte qui va régir les PML. Dans le domaine de Fourier, les PML peuvent être vues comme un prolongement analytique des coordonnées réelles dans l'espace complexe (Teixeira & Chew, 1999). Considérant un système de coordonnées cartésien, on peut écrire ce prolongement

$$\tilde{x}_i = \int_0^{x_i} s_i(\zeta, \omega) d\zeta \quad (2.46)$$

où  $s_i$  est une fonction de la variable d'espace  $x_i$  et de la fréquence  $\omega$ . Selon le problème considéré, cette fonction peut avoir différente forme. Si une transformée de Fourier inverse est nécessaire pour revenir dans le domaine des temps, il est préférable que cette forme soit simple. Ainsi peut-on choisir, par exemple, la formulation de Bérenger (1994) :

$$s_i = 1 + i \frac{\mu_i(x_i)}{\omega}. \quad (2.47)$$

Cette expression implique qu'une onde plane  $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$  va voir son amplitude décroître à l'intérieur des PML dans la direction  $x_i$  d'un facteur  $e^{-\frac{k_i}{\omega} \int \mu_i(\zeta) d\zeta}$ . Pour les ondes non-dispersives, le rapport  $\frac{k_i}{\omega}$  est constant si bien que la valeur de l'exponentielle est indépendante de la fréquence. Pour les ondes dispersives, en revanche, la décroissance dépendra de la vitesse de phase.

La relation (2.46) implique un changement de métrique  $\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{Z}\mathbf{I}\mathbf{Z}$ , où  $\mathbf{I}$  est la métrique unité et

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Elle implique également une transformation du gradient

$$\tilde{\nabla} = \mathbf{Z}^{-1} \nabla \quad (2.49)$$

si bien que l'équation d'onde (2.1), sans force externe, se réécrit

$$i\omega\rho v_i = \frac{1}{s_j} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.50)$$

On remarque que  $\det(\mathbf{Z}) = s_1 s_2 s_3$ , donc la fonction  $\frac{\det(\mathbf{Z})}{s_j}$  dépend uniquement des coordonnées orthogonales à  $x_j$ , non de la coordonnée  $x_j$ , et peut par conséquent être intégrée au terme de la divergence ce qui donne

$$i\omega\rho \det(\mathbf{Z}) \mathbf{v} = \nabla[\det(\mathbf{Z}) \mathbf{Z}^{-1} \boldsymbol{\sigma}]. \quad (2.51)$$

Cette nouvelle équation d'onde fait apparaître le tenseur  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \det(\mathbf{Z}) \mathbf{Z}^{-1} \boldsymbol{\sigma}$ , qui n'est pas symétrique mais laisse la traction inchangée ( $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ ). Par ailleurs, le caractère hyperbolique du système est conservé.

Intéressons-nous maintenant à la loi de Hooke. Avec le changement de métrique, celle-ci se réécrit

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{Z}^{-1} = \tilde{\mathbf{C}} : \nabla \mathbf{u}, \quad (2.52)$$

avec

$$\tilde{C}_{ijkl} = \det(\mathbf{Z}) C_{mnst} Z_{im}^{-1} Z_{nj}^{-1} Z_{sk}^{-1}. \quad (2.53)$$

Les relations (2.51) et (2.52) forment un système dans le domaine fréquentiel. Un passage direct dans le domaine temporel impliquerait de lourdes convolutions, car  $\mathbf{Z}$  dépend de  $\omega$ . Ces convolutions peuvent être évitées en dérivant tout d'abord (2.52), puis en décomposant les champs  $\mathbf{v}$  et  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  selon les composantes de l'opérateur gradient. Cela ajoute des variables supplémentaires mais permet de passer facilement dans le domaine des temps. Par exemple, si je

décompose  $\nabla$  selon les directions normale et parallèle à l'interface entre le domaine PML et le milieu élastique, j'obtiens le système

$$\begin{cases} \rho(\dot{v}_i^m + \mu_m v_i^m) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta_{jm} \\ \dot{\sigma}_{ij}^m + \mu_m \sigma_{ij}^m = C_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \delta_{lm}, \end{cases} \quad (2.54)$$

où l'exposant  $m$ , dans le second membre, correspond à la seule composante non nulle de la dérivée, et où il n'y a pas de somme sur  $m$  dans le premier membre.

Pour être utilisé dans la SEM, le système (2.54) doit tout d'abord s'écrire sous forme variationnelle puis être discrétisé selon le processus présenté dans la section précédente. Nous ne jugeons pas utile de réécrire ici les équations correspondant à ce processus (voir pour cela Festa & Vilotte, 2005).

### 2.3.3 Implémentation parallèle

Comme la plupart des codes 3D utilisant la méthode des éléments spectraux, RegSEM peut s'exécuter sur des architectures parallèles. Cela permet de distribuer les différentes tâches de calcul sur un ensemble de processeurs qui travaillent de façon indépendante. Dans la SEM, la distribution se fait tout naturellement en imposant à chaque processeur le traitement d'une partie du domaine de calcul  $\bar{\Omega}$ .

Pour un découpage optimal du domaine, nous utilisons le logiciel Metis développé par l'équipe de George Karypis à l'université du Minnesota. Ce logiciel permet de partitionner  $\bar{\Omega}$  en sous-domaines équilibrés, c'est-à-dire de distribuer les rôles et les charges de travail de la façon la plus uniforme possible, ce qui est important puisque la machine parallèle travaille au rythme du plus lent de ses composants. Pour équilibrer ainsi les sous-domaines, il est conseillé d'affecter à chaque élément un poids correspondant à son coût de calcul : les éléments où sont mis en jeu de hauts degrés polynômiaux seront plus "lourds" que les autres, tout comme les éléments PML qui nécessitent plus de calculs que les éléments "normaux". Par ailleurs, Metis minimise les communications entre les différents sous-domaines (communications assurées par les routines de la bibliothèque MPI). Figure 2.5, on montre le découpage en six sous-domaines du volume présenté figure 2.4.

### 2.3.4 Quelques remarques

#### Topologie du maillage

L'implémentation d'un code éléments spectraux est composé de deux parties fondamentales : une phase de pré-traitement et une phase d'évolution en temps. Dans la première phase, les propriétés géométriques du maillage sont importées, la matrice de masse est assemblée, les coefficients des forces internes et externes sont calculés, la source et les récepteurs localisés. Toutes ces opérations ne sont effectuées qu'une seule fois, au début d'une simulation. Les calculs mis en jeu dans la partie évolutive, en revanche, sont effectués à chaque itération.

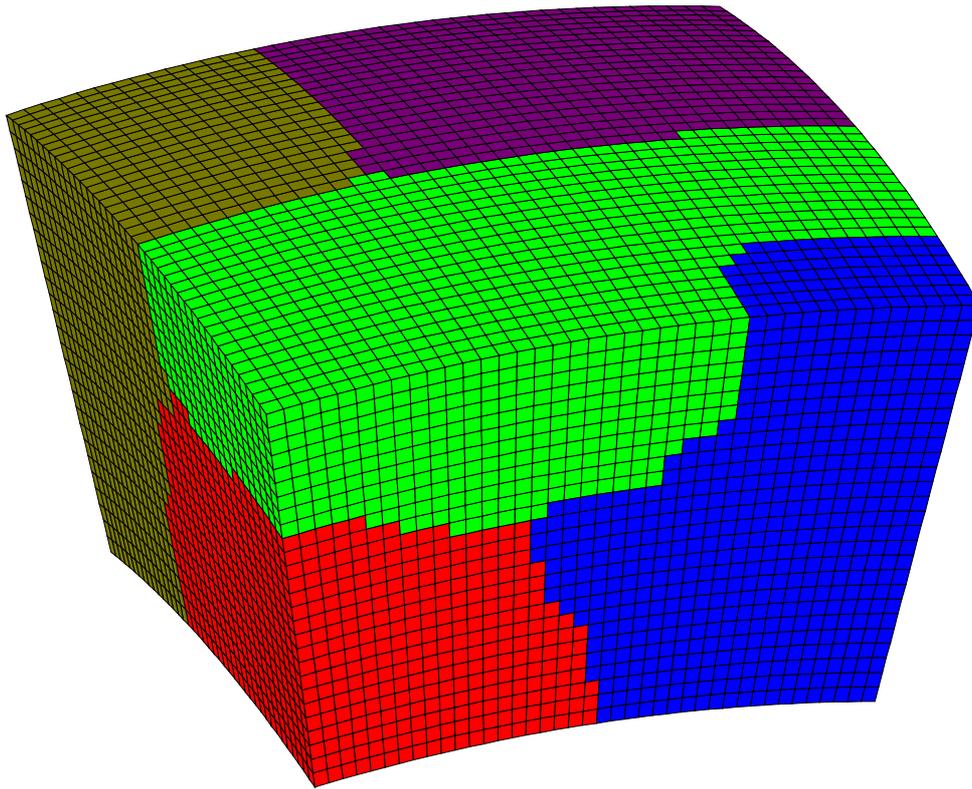


FIG. 2.5 – Morceau de Terre présenté figure 2.4 et partitionné ici en six sous-domaines par le logiciel Metis. Chaque couleur représente un des sous-domaines (seuls cinq sont visibles dans la perspective choisie ici).

Dans les deux phases, ce sont les éléments qui assurent les calculs, mais les faces, arêtes et sommets sont également considérés comme des objets à part entière, avec leur numérotation globale, chacun possédant les informations nécessaires à la résolution du système. Ces informations, et notamment les valeurs des champs de déplacement et de vitesse, ne sont pas dupliquées : une arête ne contient pas ses extrémités et une face ne contient pas ses arêtes ni un élément ses faces (figure 2.6). Pour certains calculs, en particulier celui des forces internes qui fait intervenir des dérivées impliquant les champs dans tout l'élément, y compris aux frontières, cela va nécessiter un assemblage interne, c'est-à-dire une récupération de la valeur des champs aux frontières par l'objet "élément". Cependant, l'assemblage externe (i.e. la sommation des contributions venant de chaque élément) va se faire facilement grâce à un adressage indirect assuré par un mapping de la numérotation locale (figure 2.7) vers la numérotation globale.

Outre qu'elle permet de mieux gérer les communications entre éléments (et, à plus grande échelle, entre processeurs), cette manière d'implémenter les éléments spectraux est extrêmement pratique si l'on veut considérer des maillages non structurés ou des conditions aux limites de type onde plane incidente. Ces deux cas n'ont pas été mis en œuvre dans cette thèse mais ont fait l'objet d'un travail considérable de la part d'Elise Delavaud qui, à partir des premières versions de RegSEM, a développé son propre code pour étudier les effets de site dans le bassin de Caracas (Delavaud, 2007).

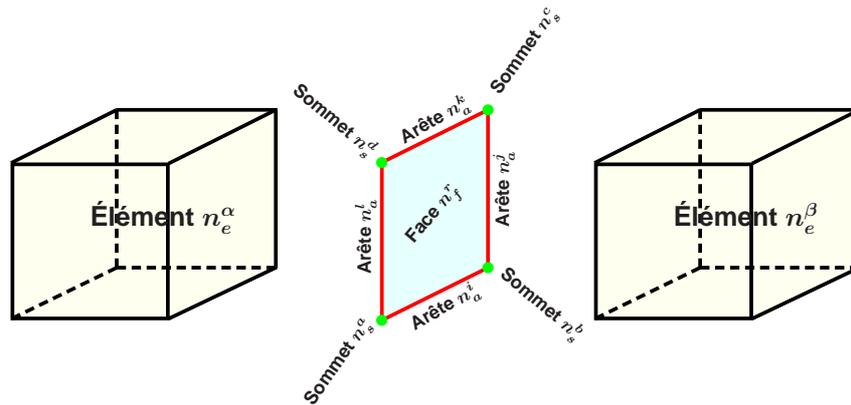


FIG. 2.6 – Schéma représentant les objets définis dans le code RegSEM, chacun possédant une numérotation globale : éléments  $\{n_e^n\}_{n=0,\dots,n_e}$ , faces  $\{n_f^n\}_{n=0,\dots,n_f}$ , arêtes  $\{n_a^n\}_{n=0,\dots,n_a}$  et sommets  $\{n_s^n\}_{n=0,\dots,n_s}$ . Ce sont les éléments qui pilotent les assemblages et les calculs des forces mais les champs de déplacement et de vitesse aux nœuds de GLL ne sont pas dupliqués. Figure extraite de la thèse de Delavaud (2007).

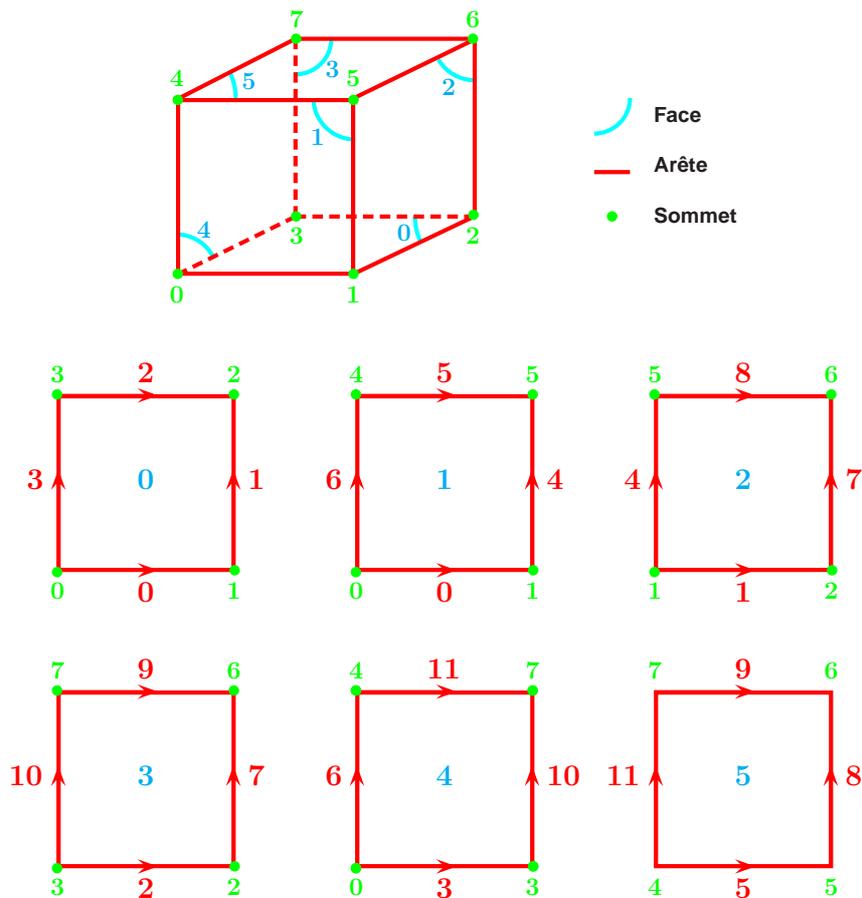


FIG. 2.7 – Numérotation locale des faces, arêtes et sommets. Les flèches indiquent l'orientation des arêtes et sont inutiles dans le cadre de cette thèse car elles servent essentiellement à considérer des maillages non structurés. Figure extraite de la thèse de Delavaud (2007).

### Anisotropie et atténuation

L'anisotropie peut être aisément prise en compte par RegSEM. Le tenseur des paramètres élastiques  $\mathbf{C}$  étant naturellement défini dans la méthode, il suffit à l'utilisateur de fournir ces paramètres en entrée. L'évolution en temps se déroule ensuite comme dans le cas isotrope.

RegSEM est par ailleurs muni de routines qui lui permettent de considérer l'atténuation intrinsèque de la Terre. Cette atténuation est introduite grâce à trois solides linéaires standards montés en série et caractérisés par des temps de relaxation en contrainte et en déformation (Liu *et al.*, 1976). Ces solides modifient les paramètres élastiques et par conséquent la loi de Hooke (Komatitsch & Tromp, 2002a). Notons que ce procédé ajoute des inconnus aux problèmes ce qui entraîne une augmentation du coût de calcul.

### Océans, ellipticité, gravité et rotation

L'effet des océans est pris en compte en plaçant à la surface de la Terre une charge correspondant à la masse de l'eau (Komatitsch & Tromp, 2002b). On retrouve ainsi le rôle des océans dans le bilan des forces mais aucune propagation d'ondes n'est faite dans des zones liquides. Par ailleurs, la charge appliquée en surface rend localement la matrice de masse non diagonale.

L'ellipticité elle aussi est prise en compte, via l'équation de Clairault (voir par exemple Dahlen & Tromp, 1998). En revanche, la rotation et la gravité restent à implémenter. Leur effet, bien que faible à l'échelle régionale, ne peut être négligé dans la perspective d'un calcul précis de sismogrammes synthétiques.

### Déraffinement du maillage en profondeur

Dans la Terre, les vitesses sismiques augmentent avec la profondeur si bien que les longueurs d'onde propagées grandissent à mesure que l'on s'enfonce dans le sol. Or les maillages générés par RegSEM (e.g. figure 2.4) sont tels que les éléments profonds sont de plus petite taille que les éléments superficiels. Cela implique un excès de calcul que nombre d'auteurs se sont efforcés d'éviter, que ce soit par un déraffinement géométrique du maillage (Komatitsch & Tromp, 2002a) ou par l'utilisation d'interfaces non-conformes (Chaljub, 2000; Chaljub *et al.*, 2003). Ces options ne sont pas encore disponibles dans notre code mais seront implémentées dans l'avenir.

## 2.4 Validation

Dans cette partie, nous allons tester la validité de la SEM implémentée à l'échelle régionale comme décrit dans la section précédente. Pour différents modèles (homogène ou radialement hétérogène, isotrope ou anisotrope, atténuant ou non-atténuant), des résultats issus de RegSEM seront comparés à des formes d'onde de référence calculées par sommation de modes propres. Pour chaque test, nous veillerons à considérer plusieurs distances épacentrales et plusieurs azimuts.

### 2.4.1 Milieu homogène

Pour notre premier test, nous nous donnons un milieu homogène ayant les caractéristiques suivantes :  $V_P = 8 \text{ km.s}^{-1}$ ,  $V_S = 5 \text{ km.s}^{-1}$  et  $\rho = 3000 \text{ kg.m}^{-3}$ , avec  $V_P$  la vitesse des ondes  $P$ ,  $V_S$  la vitesse des ondes  $S$ , et  $\rho$  la densité. Dans ce milieu, nous plaçons une source  $S$  à 100 km de profondeur et cinq récepteurs en surface. La position de la source et des récepteurs dans le plan horizontal est indiquée figure 2.8. Les stations STA1, STA2 et STA3 sont toutes dans le même azimut par rapport à  $S$  et leur distance épacentrale est respectivement  $12^\circ$ ,  $20^\circ$  et  $32^\circ$ . Les stations STA4 et STA5, quant à elles, sont situées à  $22,5^\circ$  de  $S$  dans deux azimuts perpendiculaires entre eux. On note que la source est une explosion dont le signal temporel associé est représenté figure 2.9. Ce signal est la transformée de Fourier inverse du spectre dessiné figure 2.10. On voit que la fréquence maximale qui va être propagée est 50 mHz, ce qui correspond à une longueur d'onde des ondes de Rayleigh d'environ 90 km. Dans notre simulation éléments spectraux, nous prendrons donc des éléments de  $1.5^\circ$  de côté avec un ordre polynômial  $N = 8$  (pour les éléments PML comme pour les éléments normaux). Le morceau de Terre, quant à lui, aura une taille de  $40^\circ \times 40^\circ \times 2000 \text{ km}$  si bien qu'après adaptation de la taille des éléments aux dimensions du morceau, nous nous retrouverons avec 9477 éléments de  $1.48^\circ \times 1.48^\circ \times 153.85 \text{ km}$ . Par ailleurs, nous utiliserons 27 points de contrôle par éléments et choisirons un pas de temps  $\Delta t = 0.25 \text{ s}$  pour avoir un nombre de Courant  $n_c = 0.35$ . Avec de tels paramètres, obtenir 1200 s de signal nécessite environ 46 minutes de calcul sur 16 nœuds biprocesseurs Opteron 256 à 2 GHz de l'ancien cluster du Service de Calcul Parallèle de l'IPGP. Les résultats sont présentés figure 2.11.

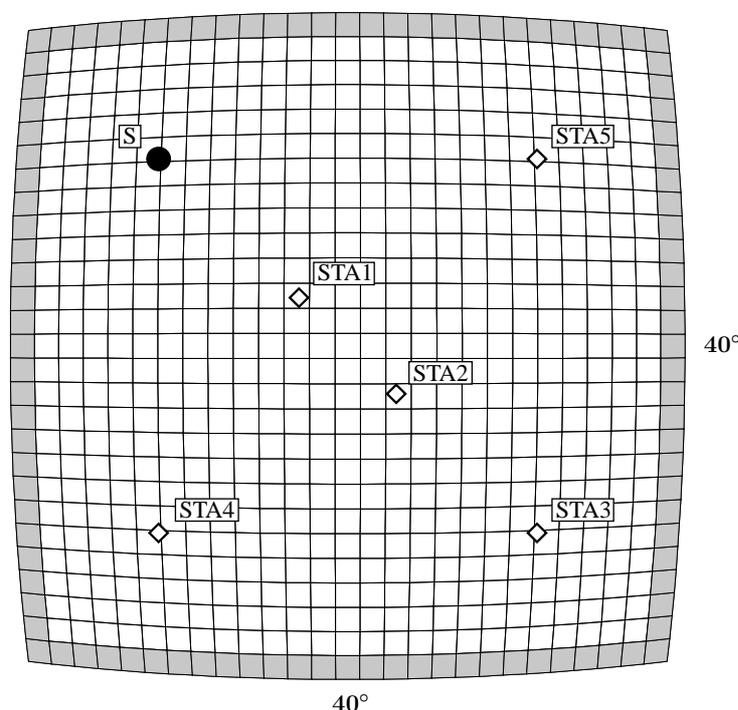


FIG. 2.8 – Vue du dessus du morceau de Terre utilisé pour le premier test. Horizontalement, le morceau a une taille de  $40^\circ \times 40^\circ$  et est décomposé en éléments de  $1.48^\circ \times 1.48^\circ$ . Les éléments grisés indiquent les PML. Sont également représentés la source et les récepteurs.

Dans un modèle à symétrie sphérique, une source explosive n'excite pas le mode de cisaillement transverse. Sur la figure 2.11, nous n'avons donc tracé que les composantes verticales et longitudinales du déplacement. Sur chaque dessin apparaît deux trains d'onde qui se séparent de plus en plus à mesure que la distance épacentrale augmente. Le premier train correspond à l'onde  $P$  et à ses phases réfléchies à la surface  $PP$ ,  $PPP$ , etc... Chaljub (2000) fait remarquer

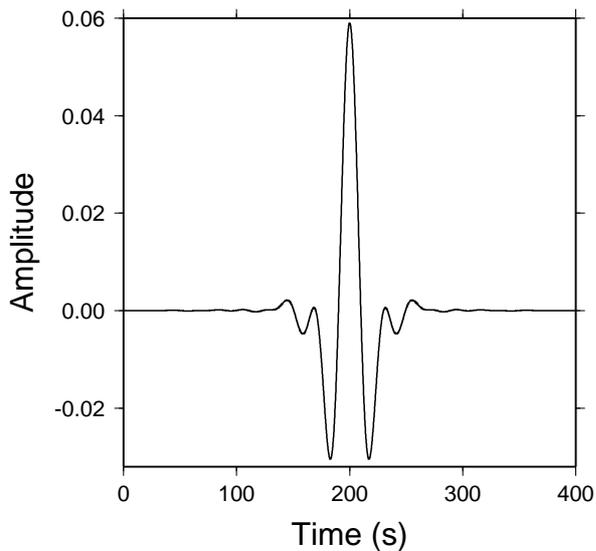


FIG. 2.9 – Ondelette source.

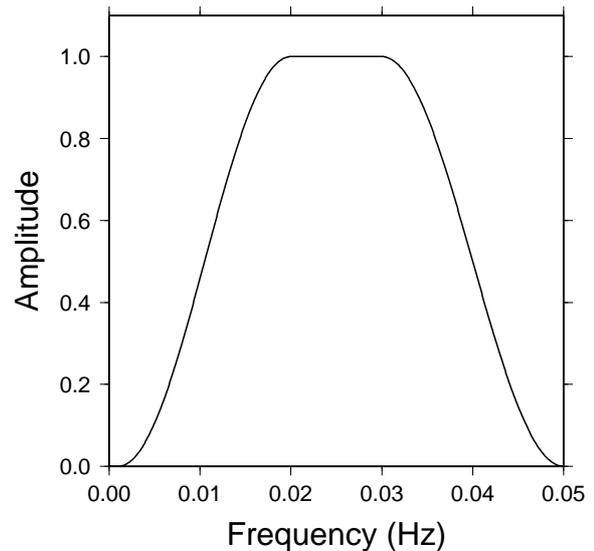


FIG. 2.10 – Spectre d'amplitude de l'ondelette source.

que ces réflexions multiples donne lieu à une onde de surface appelée phase "X" dont la polarisation est systématiquement tangente à la sphère, ce qui explique la forte amplitude du premier train d'onde sur les composantes longitudinales. Quant au deuxième train d'onde, il s'agit de l'onde de Rayleigh qui, ayant une polarisation elliptique rétrograde dans le plan du grand cercle reliant la source et le récepteur, s'enregistre logiquement sur la composante verticale et sur la composante longitudinale.

Pour toutes les traces, la différence entre la solution modale et la solution fournie par la SEM est très faible. L'erreur commise sur les formes d'onde est en effet de 0.5 % au maximum. Elle provient essentiellement d'un très léger déphasage induit par le schéma en temps qui n'est que d'ordre 2 alors que le schéma en espace, lui, converge très rapidement. On note également des résidus non nuls en fin de traces, en particulier sur les composantes verticales. Nous interprétons ces résidus comme des restes de réflexions non physiques que les PML n'ont pu absorber aux bords du domaine. Ces réflexions demeurent suffisamment faibles pour que la simulation éléments spectraux puisse être jugée amplement satisfaisante.

### 2.4.2 Milieu radialement hétérogène

Nous allons maintenant valider RegSEM dans le *Preliminary Reference Earth Model* (Dzie-wonski & Anderson, 1981) qui est un milieu 1D, c'est-à-dire un milieu latéralement homogène (ou radialement hétérogène, c'est au choix). Le profil des vitesses sismiques  $V_P$  et  $V_S$  et de la densité  $\rho$  dans ce milieu est indiqué figure 2.12.

La position de la source (toujours une explosion) et des récepteurs (toujours au nombre de cinq) sera sensiblement la même que celle du cas précédemment étudié. Le morceau de Terre sera cependant plus petit :  $25^\circ \times 25^\circ \times 1200 \text{ km}$ . On garde la même ondelette source que celle utilisée dans le premier test, mais les vitesses sismiques n'étant plus les mêmes, la longueur d'onde minimale va changer. En effet, la plus petite vitesse des ondes  $S$  dans PREM se trouve

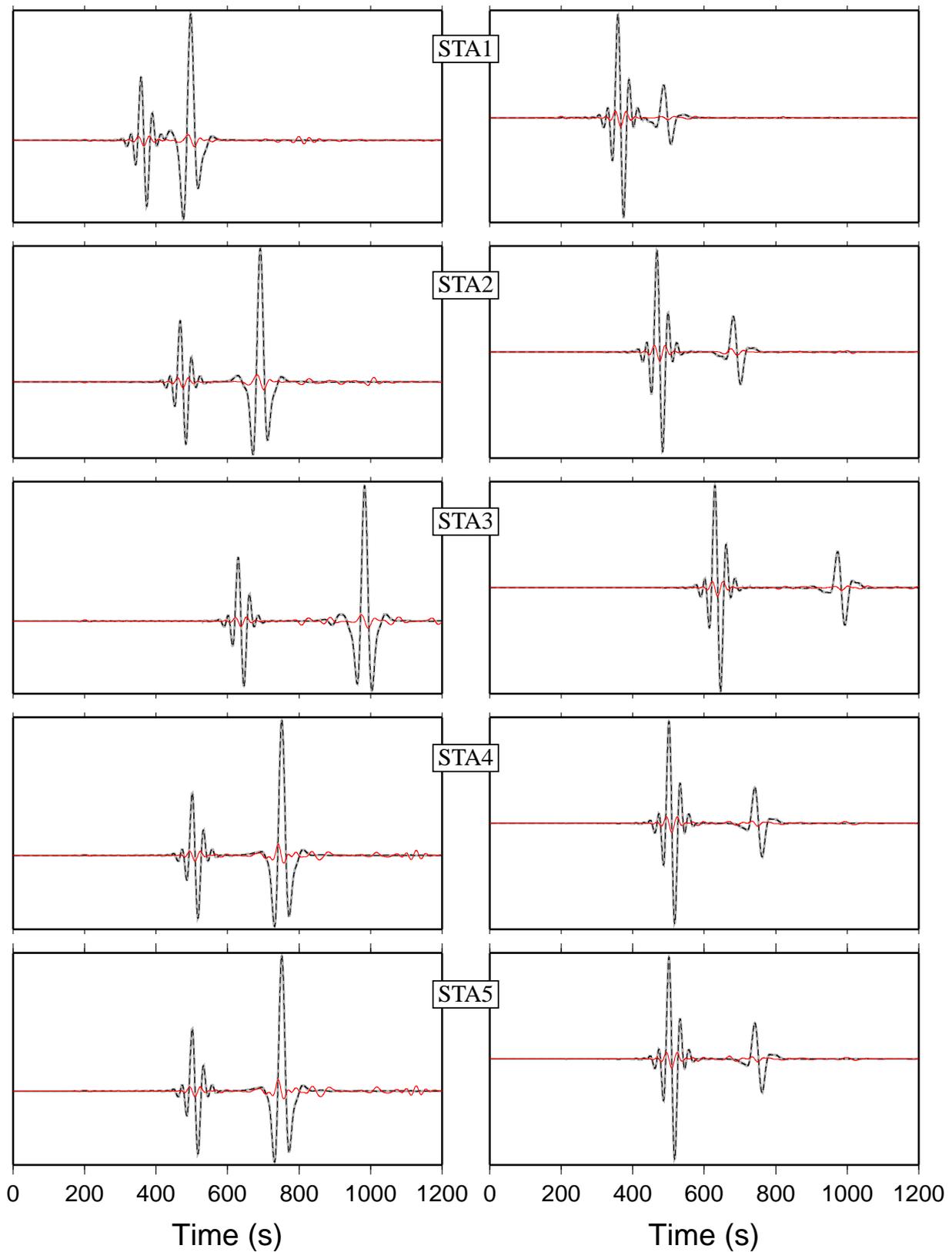


FIG. 2.11 – Déplacement vertical (à gauche) et longitudinal (à droite) enregistré aux cinq stations considérées dans le premier test (milieu homogène). En gris est représenté le résultat issu d'une sommation de modes propres et en tireté noir sont dessinées les traces provenant de Reg-SEM. On a également tracé le résidu  $\times 10$  (en rouge).

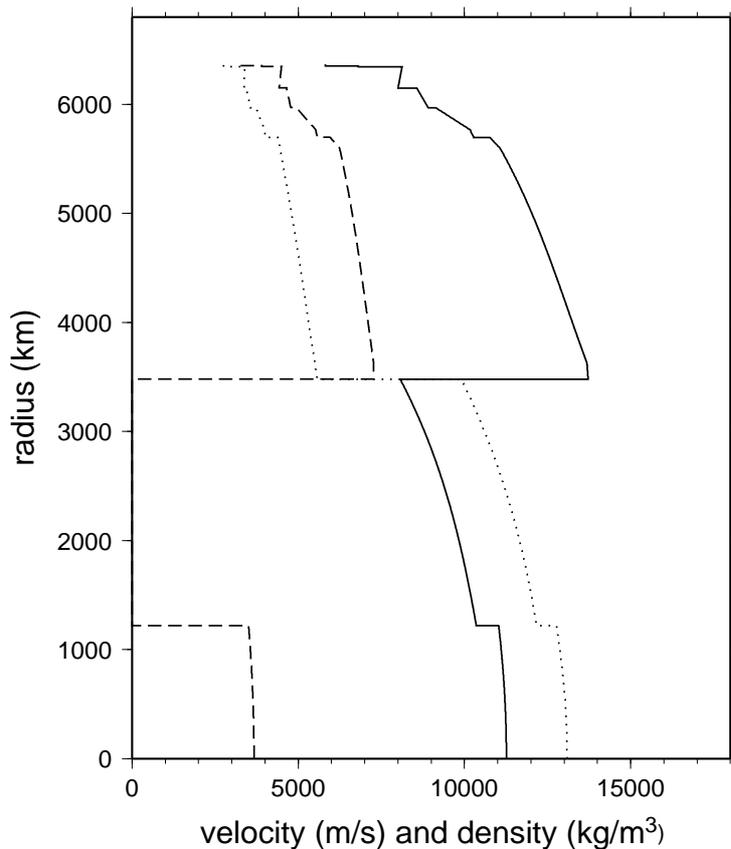


FIG. 2.12 – Vitesse des ondes  $P$  (noir), vitesse des ondes  $S$  (tireté) et densité (pointillé) dans le modèle PREM.

en surface et vaut 3.2 km/s, si bien qu'une onde de Rayleigh se propageant à la fréquence maximale (50 mHz) aura une longueur d'onde d'environ 60 km. Par conséquent, nous choisirons des éléments de  $0.8^\circ$  de côté avec un ordre polynômial  $N = 8$ . Après adaptation des éléments aux dimensions du morceau, la taille de ces derniers sera de  $0.78^\circ \times 0.78^\circ$  (figure 2.13). En profondeur, l'épaisseur des éléments est calculée pour mailler correctement les différentes interfaces qui composent le modèle PREM. Celles-ci sont nombreuses dans la partie la plus superficielle de la Terre : jusqu'à 1200 km, qui est la profondeur de notre morceau, on en compte pas moins de huit. Ces interfaces définissent des couches dont une, située entre 15 et 24.4 km de profondeur, est extrêmement fine. Cette couche impose alors un pas en temps très petit (nous prendrons  $dt = 0.025$  s) et entraîne un temps de calcul beaucoup plus important que celui obtenu dans un milieu homogène : sur 32 nœuds bipro Opteron 256, 1200 s de signal nécessite près de 5 h 15 de calcul. Ce temps pourrait se réduire considérablement si l'on considérait un ordre polynômial différent suivant les couches, mais cette option n'est malheureusement pas encore possible dans RegSEM.

Les composantes verticales et longitudinales du déplacement induit par une source située à 10 km de profondeur sont présentées figure 2.14. Les ondes de volume  $P$  et  $S$  ainsi que l'onde de Rayleigh sont visibles sur toutes les traces, sauf à la station STA1 où l'onde  $S$  est masquée par l'onde de Rayleigh. Les résidus, bien que faibles, sont plus importants que dans le premier test. Outre les petites réflexions artificielles sur le bord du domaine et le déphasage induit par le schéma en temps, on observe des résidus non nuls dûs à l'absence, dans la simulation éléments spectraux, des phases réfléchies à l'interface noyau-manteau (repérées par des flèches rouges sur la figure). En effet, notre morceau de Terre a une épaisseur de 1200 km et ne contient donc pas la CMB (pour *Core Mantle Boundary*) qui se trouve à environ 2900 km de profondeur sous

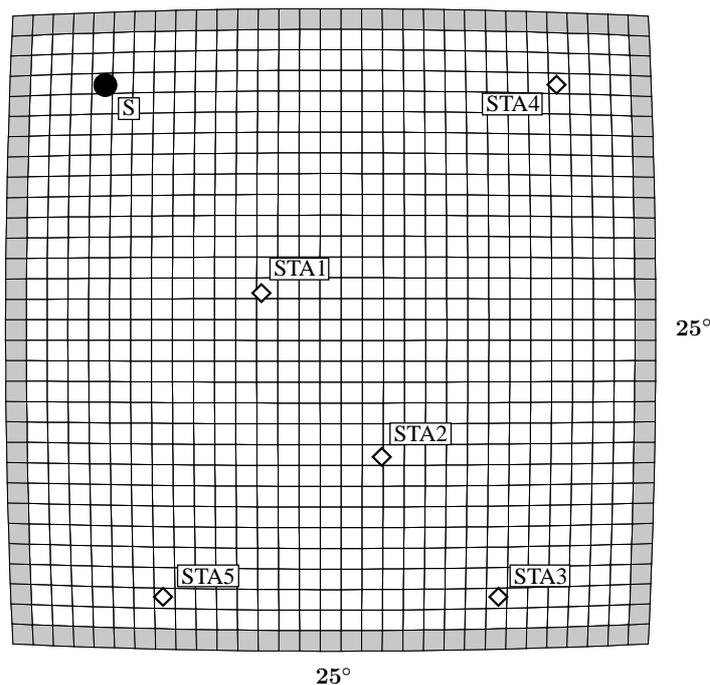


FIG. 2.13 – Vue du dessus du morceau de Terre utilisé pour le deuxième test. Horizontalement, le morceau a une taille de  $25^\circ \times 25^\circ$  et est décomposé en éléments de  $0.78^\circ \times 0.78^\circ$ . Les éléments grisés indiquent les PML. Sont également représentés la source et les récepteurs.

la surface terrestre. Par conséquent, les phases  $PcS$  et  $ScS$  apparaissent sur la courbe des résidus, notamment sur les composantes longitudinales (puisque les ondes  $S$  mises en jeu sont des ondes  $S_V$  et que l'incidence des phases  $PcS$  et  $ScS$  est quasi-verticale pour les distances épacentrales que nous considérons). Pour les composantes verticales, l'influence de ces phases sur la courbe des résidus commencent à être visible à partir de  $18^\circ$  de distance épacentrale, c'est-à-dire pour la station STA5. Sur ces composantes, une autre phase réfléchie à la CMB pose problème : il s'agit de la  $PcP$  (non indiquée sur la figure). Pour STA1, cette phase arrive peu après l'onde de Rayleigh et vient donc perturber la fin du signal correspondant à cette dernière. Pour STA3, c'est l'onde  $S$  qui arrive en même temps que la  $PcP$  si bien que de petites oscillations apparaissent sur le résidu. Enfin, pour les stations STA2, STA4 et STA5, l'onde  $PcP$  arrive avec l'onde de Rayleigh.

Pour mettre en évidence de manière encore plus nette l'absence des ondes de volume réfléchies à la base du manteau, nous montrons figure 2.15 le déplacement enregistré à la station STA3 pour une source située à 150 km de profondeur. Une telle source excite beaucoup moins le mode fondamental qu'une source superficielle si bien que l'onde de Rayleigh a une amplitude nettement plus faible que précédemment. Les ondes de volume sont ainsi mises en lumière et l'on voit très clairement que la solution fournie par les éléments spectraux ne contient pas les phases  $PcP$ ,  $PcS$  et  $ScS$ . La différence des formes d'onde se distingue à l'œil nu, sans qu'il soit nécessaire de représenter le résidu. Cela montre qu'à partir d'une certaine profondeur de source et d'une certaine distance épacentrale, la simulation éléments spectraux devra se faire avec un morceau de Terre allant jusqu'à la CMB, ce qui rend encore plus indispensable l'implémentation du déraffinement en profondeur, car un tel morceau requiert un coût de calcul important, surtout à hautes fréquences.

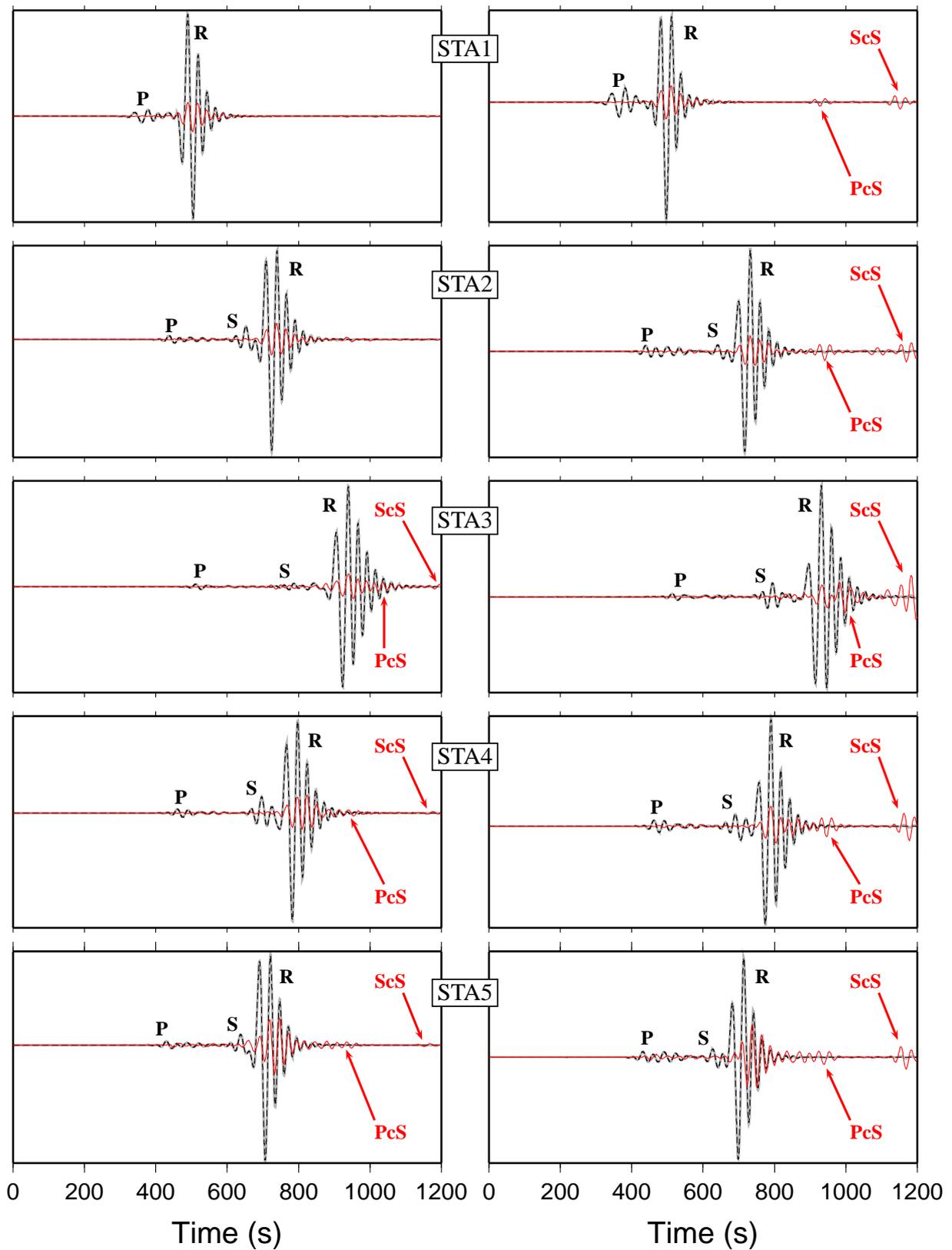


FIG. 2.14 – Déplacement vertical (à gauche) et longitudinal (à droite) enregistré aux cinq stations considérées dans le deuxième test (PREM). En gris est représenté le résultat issu d'une sommation de modes propres et en tireté noir sont dessinées les traces provenant de RegSEM. On a également tracé le résidu  $\times 10$  (en rouge) et repéré un certain nombre de phases.

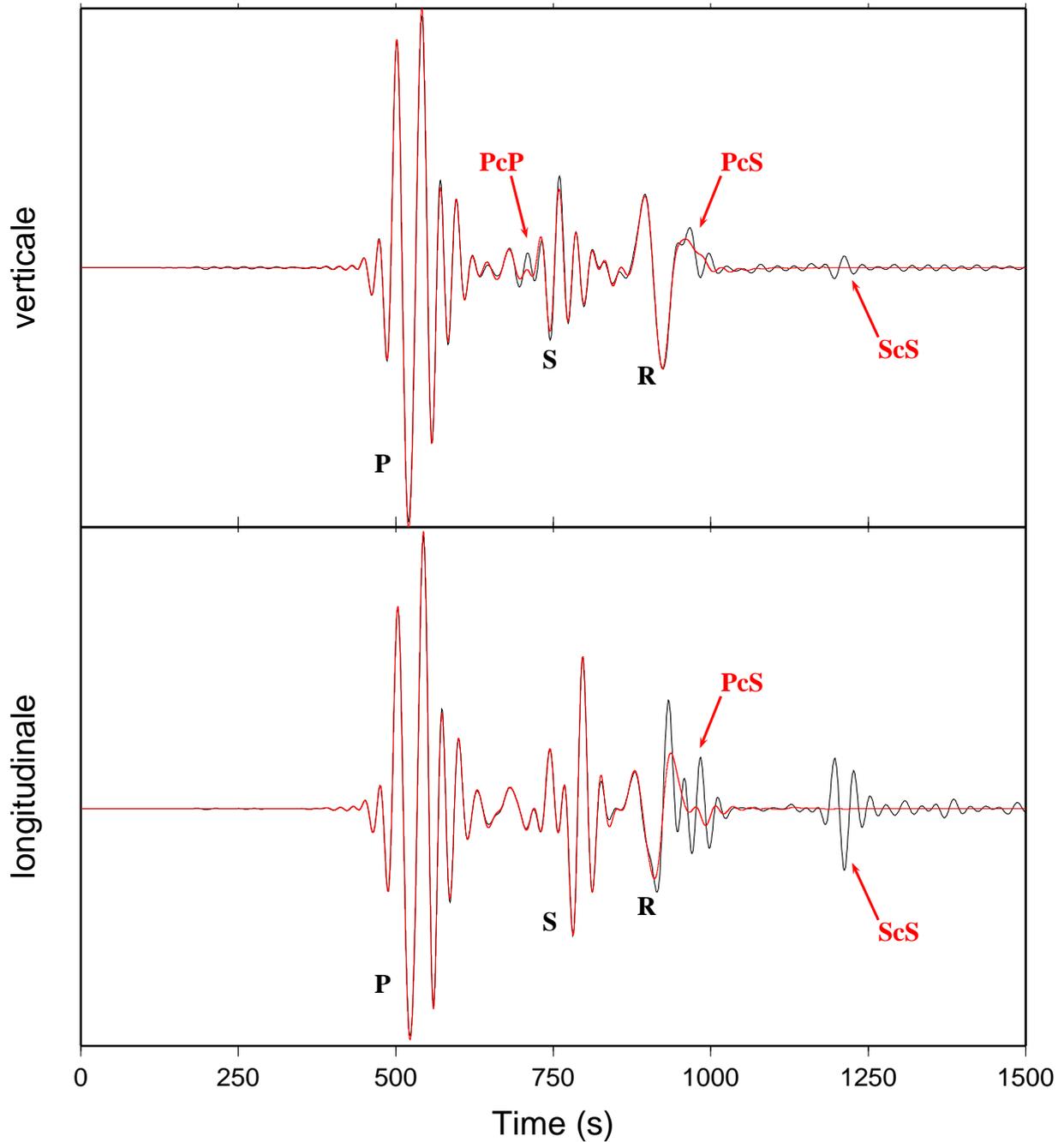


FIG. 2.15 – Comparaison entre la solution éléments spectraux (en rouge) et la solution modale (en noir) du déplacement enregistré à la station STA3 pour une source explosive à 150 km de profondeur.

### 2.4.3 Milieu radialement hétérogène avec atténuation

Dans ce troisième test, nous reproduisons la même simulation que celle effectuée dans la section précédente en ajoutant l'atténuation. Dans ce cas, nous ne disposons d'aucune solution exacte car l'anélasticité de la Terre ne peut être traitée qu'indirectement, en insérant une partie viscoélastique aux équations du mouvement (Liu *et al.*, 1976). Par conséquent, nous conserverons la solution modale comme solution de référence, mais nous garderons à l'esprit qu'une partie des résidus sera due à l'inévitable différence dans la prise en compte de l'atténuation par chacune des méthodes.

La comparaison entre les traces obtenues avec RegSEM et la solution modale est présentée figure 2.16. Comme prévu, l'atténuation entraîne une erreur au niveau des formes d'onde qui est un peu plus grande que celle observée dans le cas précédent. Cette erreur, essentiellement due à une différence d'amplitude, s'ajoute au déphasage induit par le schéma en temps. On remarque toujours l'absence des phases réfléchies à la CMB, et on note qu'un nouveau résidu apparaît à 200 s. Ce résidu provient d'une troncature un peu sévère de la sommation des modes qui entraîne une approximation sur le caractère ponctuel de la source (Chaljub, 2000; Capdeville, 2000).

### 2.4.4 Milieu radialement hétérogène anisotrope

Nous allons maintenant nous pencher sur l'anisotropie. Pour cela, nous réalisons un test identique à celui mis en œuvre dans la section 2.4.2. Dans cette section, le milieu de propagation était le PREM sans atténuation. Ici, nous y ajoutons une composante anisotrope : dans le manteau supérieur, la vitesse  $V_P$  des ondes  $P$  ne sera pas la même selon que l'onde se propage dans la direction verticale ou dans la direction horizontale (figure 2.17). Les résultats, présentés figure 2.18, montrent des erreurs comparables à celles observées dans le cas isotrope.

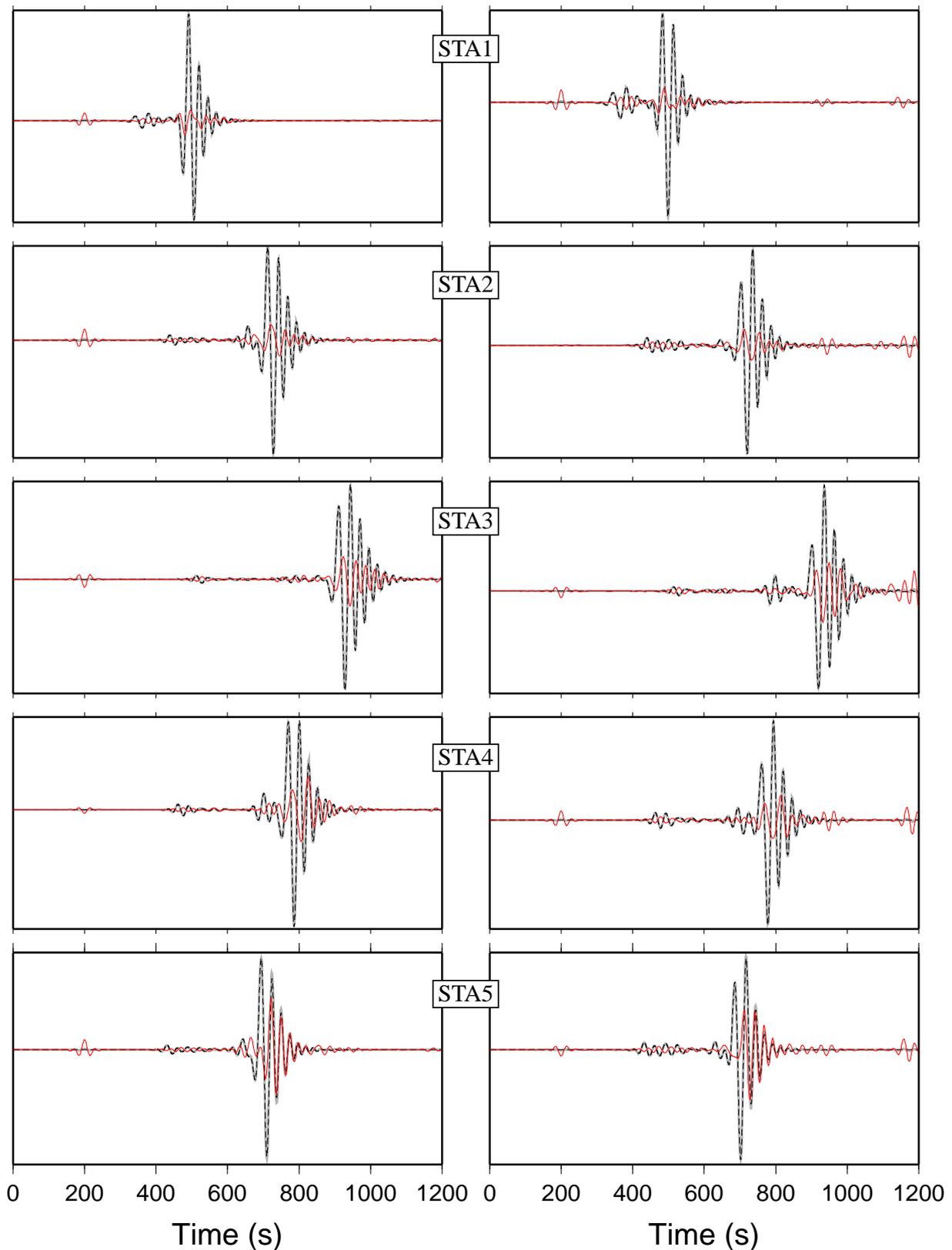


FIG. 2.16 – Déplacement vertical (à gauche) et longitudinal (à droite) enregistré aux cinq stations considérées dans le troisième test (PREM avec atténuation). En gris est représenté le résultat issu d'une sommation de modes propres et en tireté noir sont dessinées les traces provenant de RegSEM. Est également tracé le résidu  $\times 10$  (en rouge).

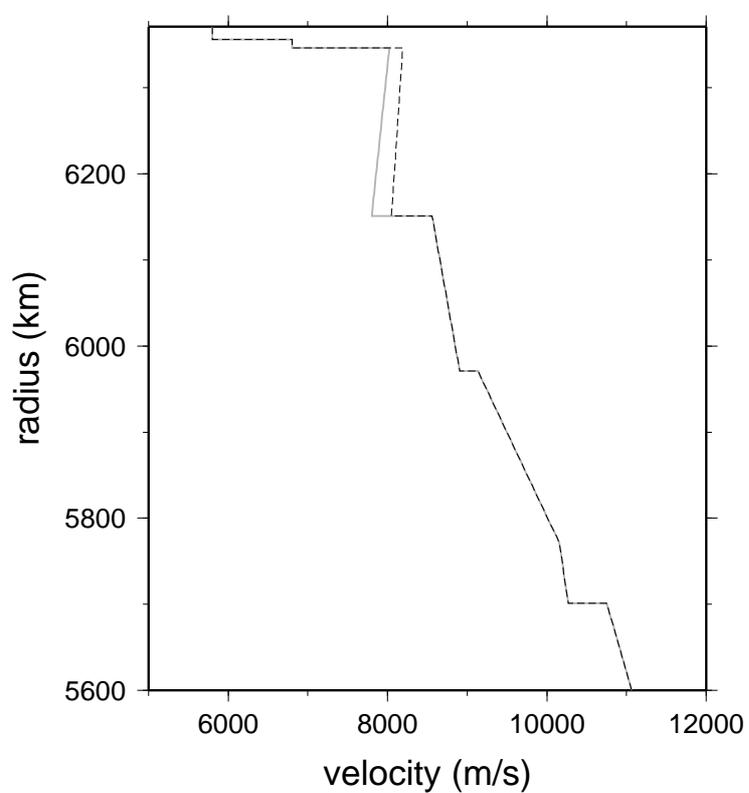


FIG. 2.17 – Vitesse des ondes  $P$  dans la direction verticale (gris) et dans la direction horizontale (tireté noir). Entre 24,4 km et 220 km de profondeur, ces vitesses ne sont pas les mêmes.

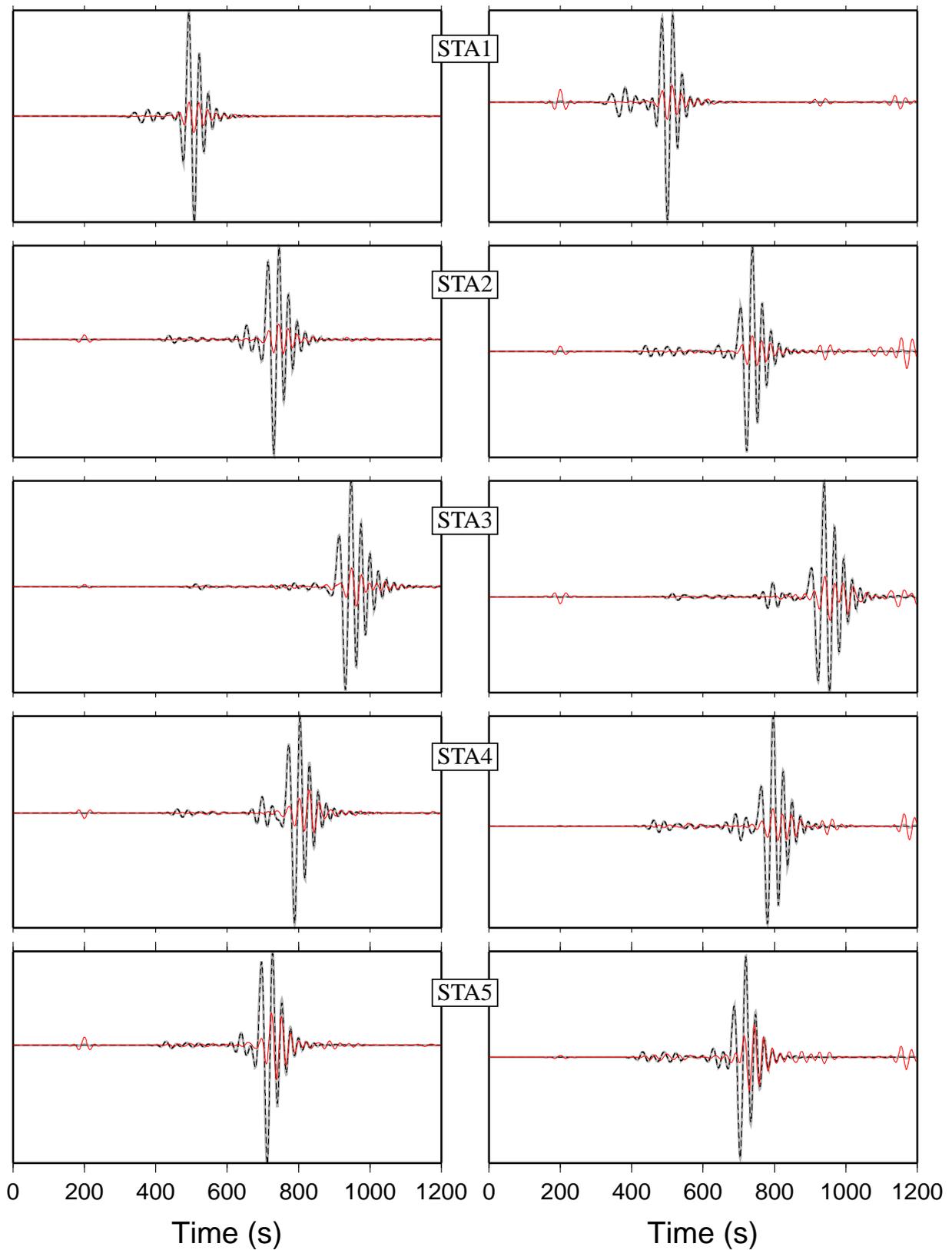


FIG. 2.18 – Déplacement vertical (à gauche) et longitudinal (à droite) enregistré aux cinq stations considérées dans le quatrième test (PREM anisotrope). En gris est représenté le résultat issu d'une sommation de modes propres et en tireté noir sont dessinées les traces provenant de RegSEM. Est également tracé le résidu  $\times 10$  (en rouge).

## 2.A Annexe : Expression des polynômes de Lagrange

Les matrices et vecteurs du problème discret sont obtenus en utilisant des fonctions tests construites à partir des polynômes de Lagrange  $\{h_i^N\}_{i=0,\dots,N}$  associés aux  $(N+1)$  nœuds de GLL  $\{\xi_i^N\}_{i=0,\dots,N}$ . Ces polynômes sont définis par :

$$h_i^N(\xi) = -\frac{1}{N(N+1)} \frac{(1-\xi^2)L'_N(\xi)}{(\xi-\xi_i^N)L_N(\xi_i^N)} \quad (2.55)$$

où  $L_N$  est un polynôme de Legendre. Il n'existe pas d'expression analytique directe pour définir les polynômes de Legendre. Ils peuvent être déterminés par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} L_0(\xi) &= 1 \quad \text{et} \quad L_1(\xi) = \xi, \\ (k+1)L_{k+1}(\xi) &= (2k+1)\xi L_k(\xi) - kL_{k-1}(\xi), \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

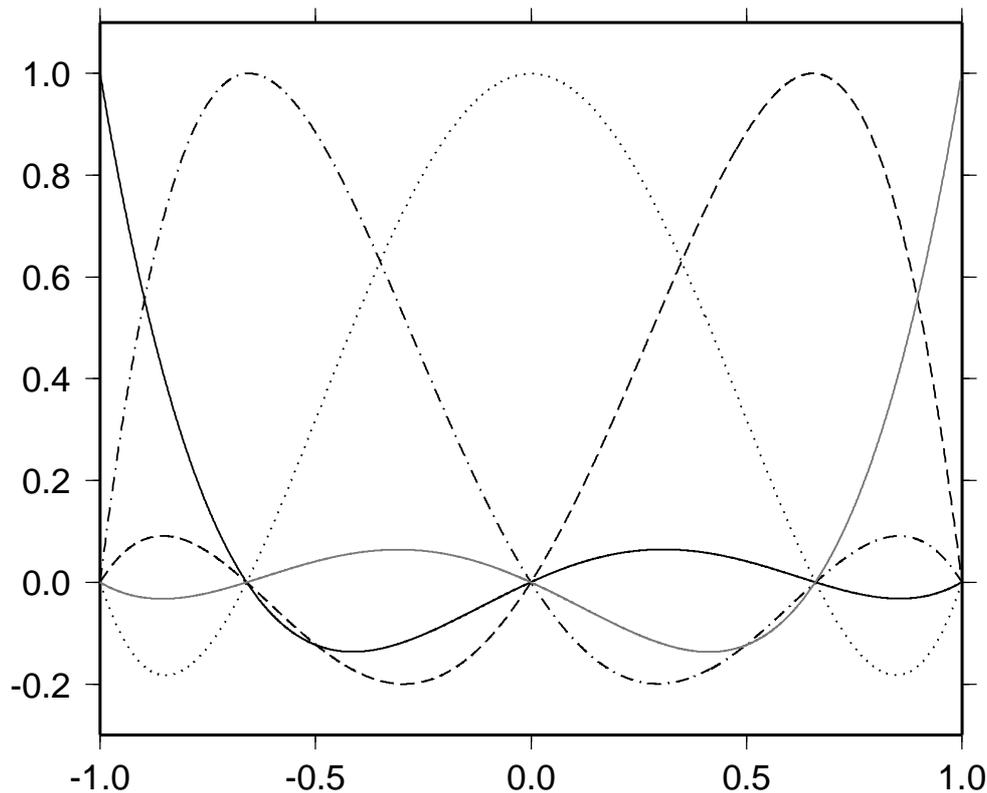


FIG. 2.19 – Polynômes de Lagrange d'ordre  $N = 4$  sur l'intervalle de référence  $\Lambda = [-1, 1]$ . Les 5 points de Gauss-Lobatto-Legendre correspondant apparaissent sur l'axe horizontal : en ces points, chaque polynôme de Lagrange est en effet, par définition, égal à 1 ou 0.

## 2.B Annexe : Expression des forces internes

Le vecteur élémentaire de forces internes associé à  $\bar{\Omega}_e$  est défini par :

$$\mathbf{F}^{int,e} = \int_{\Omega_e} [\nabla \mathbf{w}^{he} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^{he}] d\Omega = \int_{\square} [\nabla \mathbf{w}^{he} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^{he}] \mathbf{J}^e d\xi \quad (2.56)$$

Il fait intervenir l'opérateur gradient dans le domaine physique écrit en fonction des dérivées dans le domaine de référence.

La dérivée par rapport à  $\xi_i, i = 1, \dots, d$ , de  $\mathbf{u}^{he}$  aux nœuds de GLL  $(\xi_r^N, \xi_s^N, \xi_t^N)$  est calculée efficacement grâce à sa forme tensorisée et aux propriétés des fonctions lagrangiennes. Par exemple, la dérivée par rapport à  $\xi_1$  peut s'écrire

$$\begin{aligned} u_{i,\xi_1}^{he}(\xi_r^N, \xi_s^N, \xi_t^N) &= \frac{\partial u_i^{he}}{\partial \xi_1}(\xi_r^N, \xi_s^N, \xi_t^N) = \sum_{a,b,c=0}^N u_{i|abc}^{he} \frac{dh_a^N}{d\xi}(\xi_r^N) h_b^N(\xi_s) h_c^N(\xi_t) \\ &= \sum_{a=0}^N u_{i|ast}^{he} \frac{dh_a^N}{d\xi}(\xi_r^N) \\ &= \sum_{a=0}^N D_{ra}^N u_{i|ast}^{he} \end{aligned}$$

Ici,  $\mathbf{D}^N$  est la matrice de dérivée 1D, de taille  $(N+1)^2$ , associée aux  $(N+1)$  points de GLL, définie par

$$\mathbf{D}_{ij}^N = \begin{cases} \frac{L_N(\xi_i^N)}{L_N(\xi_j^N)} \frac{1}{\xi_i^N - \xi_j^N} & \text{si } i = j \\ -\frac{N(N+1)}{4} & \text{si } i = j = 0, \\ \frac{N(N+1)}{4} & \text{si } i = j = N, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.57)$$

A 3D, les dérivées peuvent s'écrire sous la forme vectorielle

$$\mathbf{u}_{i,\xi_j}^{he} = \mathbf{D}_j \mathbf{u}_i^{he} \quad (2.58)$$

avec

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{I}_{N+1} \otimes \mathbf{I}_{N+1} \otimes \mathbf{D}^N; \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{I}_{N+1} \otimes \mathbf{D}^N \otimes \mathbf{I}_{N+1}; \quad \mathbf{D}_3 = \mathbf{D}^N \otimes \mathbf{I}_{N+1} \otimes \mathbf{I}_{N+1} \quad (2.59)$$

où  $\mathbf{I}_{N+1}$  est la matrice identité de taille  $(N+1)^2$  et  $\otimes$  est le produit tensoriel matriciel.

Dans le domaine physique, la dérivée par rapport à  $x_j$  de  $\mathbf{u}^{he}$  est alors donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j}^{he} &= \sum_{p=1}^d \frac{\partial \mathbf{u}_i^{he}}{\partial \xi_p} (\mathbf{F}_{pj}^e)^{-1} = \sum_{p=1}^d \mathbf{D}_p \mathbf{u}_i^{he} (\mathbf{F}_{pj}^e)^{-1} = (\mathbf{u}_i^{he})^T \sum_{p=1}^d \mathbf{D}_p^T (\mathbf{F}_{pj}^e)^{-1} = (\mathbf{u}_i^{he})^T \tilde{\mathbf{D}}_j^T \\ &= \tilde{\mathbf{D}}_j \mathbf{u}_i^{he} \end{aligned} \quad (2.60)$$

où  $(\mathbf{F}_{pj}^e)^{-1} = \frac{\partial \xi_p}{\partial x_j}$  est la composante  $(p, j)$  de la matrice de dérivation associée à la transformation  $\mathcal{F}_e^{-1}$ , matrice qui ici est évaluée aux différents nœuds de GLL.

On considère la fonction test  $\mathbf{w}^{he}$ , liée au nœud  $\mathbf{x}_{\hat{k}} = \mathcal{F}_e(\xi_r^N, \xi_s^N, \xi_t^N)$ ,  $\hat{k} = 1 + r + (N + 1)s + (N + 1)^2t$ , dont la  $i^e$  composante est  $h_r^N \otimes h_s^N \otimes h_t^N$  et les autres sont nulles. En utilisant les matrices de dérivation introduites précédemment, on obtient la formule (2.27) pour décrire les forces internes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{i|\hat{k}}^{int,e} &= \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^N \sum_{k,l,m,n=1}^d \left[ \mathbf{w}_{k,l}^{he} \mathbf{C}_{klmn}^e \mathbf{u}_{m,n}^{he} \right]_{(\alpha,\beta,\gamma)} J_{(\alpha,\beta,\gamma)}^e \omega_{\alpha\beta\gamma} \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^N \sum_{k,l,m,n=1}^d \left[ (\mathbf{w}_k^{he})^T \tilde{\mathbf{D}}_l^T \mathbf{C}_{klmn}^e \tilde{\mathbf{D}}_n \mathbf{u}_m^{he} \right]_{(\alpha,\beta,\gamma)} J_{(\alpha,\beta,\gamma)}^e \omega_{\alpha\beta\gamma} \\
&= \sum_{l,m,n=1}^d \left[ \tilde{\mathbf{D}}_l^T \mathbf{C}_{ilmn}^e \tilde{\mathbf{D}}_n \mathbf{u}_m^{he} \right]_{\hat{k}} J_{\hat{k}}^e \omega_{\hat{k}}
\end{aligned}$$

où l'indice  $(\alpha,\beta,\gamma)$  indique que l'on prend la valeur des quantités discrètes au nœud  $(\xi_\alpha^N, \xi_\beta^N, \xi_\gamma^N)$ .

## 2.C Annexe : Manuel d'utilisation de RegSEM

### RegSEM.1 Manual

*RegSEM* is an efficient tool to simulate wave propagation in complex media. It uses the so-called spectral element method (SEM) which was developed in elastodynamics ten years ago (Komatitsch & Vilotte, 1998; Komatitsch & Tromp, 1999; Chaljub, 2000; Komatitsch & Tromp, 2002a,b).

The code was essentially written to study the seismic response of the Earth at the regional scale. Here we provide a short manual to help the new users.

### 2.C.1 The Mesh

The first step in a simulation experiment consists in building the mesh. This latter defines the elements which make up the spatial domain of the calculation.

The mesh can be created with the program *Mesher* in the directory *MESH*. This Fortran program can be compiled by a simple make, just precise in the *Makefile* the Fortran compiler you want to use. Note also that the C-library *Metis* (which is in the directory *MESH*) has to be compiled first.

#### Inputs

Several questions are asked to the user at the beginning of a run :

Do you want to take into account the Earth rotundity?

Depending on the scale you want to work (local or regional) you can choose to have a "deformed" spatial domain (enter  $y$ ) or a simple parallelepipedic chunk (enter  $n$ ).

- If you enter  $y$ , the following requirements appear :

Introduce the coordinates (lat, long) of the center  
This defines the geographic center  $C(\theta_C, \phi_C)$  of the surface of the chunk.

Introduce the lengths of the horizontal edges :  $X_i$  and  $Eta$   
(max : 90 degrees)

These two values define the lateral size of the region.  $X_i$  is the length of the chunk in the North-South direction. It defines a segment  $\Delta\phi$  of the meridian  $\phi_C$ . The middle of this segment is  $C$ .  $Eta$  is the length of the chunk in the East-West direction. It defines a segment for each great circle perpendicular to  $\Delta\phi$ . The middle of each segment is its intersection point with  $\Delta\phi$ .

Introduce the horizontal space step  
This defines the size of the elements.

Do you want PREM interfaces (1)  
PREM interfaces + 3D Moho (2)  
PREM interfaces + 3D Moho - 220km interface (3)  
another 1D model (4)

(1) meshes the interfaces of PREM (1221500 m, 5701000 m, 6291000 m, 3480000 m, 5771000 m, 6346600 m, 3630000 m, 5971000 m, 6356000 m, 5600000 m, 6151000 m, 6371000 m). Of course, in the following, you won't be forced to use PREM for the elastic velocities.

(2) meshes the interfaces of PREM as well, but it removes 6291000, 6346600 and 6356000 to put a 3D Moho. To do that, the program requires an ascii file you are supposed to provide : *Moho.asc*. From latitude *minlat* to latitude *maxlat* this file indicates the depth of the Moho for each point of a grid *dlat* \* *dlong*. The format of *Moho.asc* is the following :

*minlat maxlat dlat dlong*

*d(0,0)*

*d(0,1)*

:

:

*d(0,  $\frac{360}{dlong} - 1$ )*

*d(1,0)*

:

:

*d(i,j)*

:

:

*d( $\frac{maxlat-minlat}{dlat}, \frac{360}{dlong} - 1$ )*

where *d(i, j)* is the depth of the Moho for the point (*minlat* + *i* \* *dlat*, *j* \* *dlong*).

(3) is the same as (2) except that the discontinuity 6151000 is not meshed.

(4) enables to take into account all the spherical interfaces you want. If you choose this option then two questions are asked :

Introduce the number of layers

Introduce ? radii (in meters) (where ? is the number of layers + 1)

If you choose (1), (2) or (3) then only one question is asked :

Introduce the depth (in meters) of the bottom

Do you want to take into account the Earth ellipticity?  
No comment.

Do you want to have a topography at the surface?

If you enter y then you have to provide an ascii file : *Topo.asc*. This latter has to be formatted in the same way as *Moho.asc* (see before).

How many nodes do you want to describe the geometry of each element : 8, 20 or 27?

8 control points imply a linear interpolation of the geometry, 20 or 27 control points a quadratic one.

- If you enter `n`, the following requirements appear :

Introduce the lengths of the edges : `x_len, y_len, z_len`  
 These three values define the size of the parallelepiped. The cartesian coordinates `x,y,z` will then respectively vary in `[0;x_len]`, `[0;y_len]` and `[0;z_len]`.

Introduce the space steps : `dx, dy, dz`  
 These three values define the size of the elements.

Do you want PML ?

To avoid reflected waves on the chunk boundaries you can put Perfectly Matched Layers (PML). In this case, the elements at the limit of the region will have particular features allowing to absorb the incident field (Collino & Tsogka, 2001; Komatitsch & Tromp, 2003; Festa & Vilotte, 2005)

- If you enter `y`, the following requirements appear :

Introduce the polynomial order used for a PML element, and then for a normal element

It is possible to use a different polynomial order for the elements which make up the PML and for the "normal" elements. According to the polynomial order used, a weight which represents the calculation-time requirement is assigned to each element. These weight will be used latter to efficiently partition the mesh and allow a parallel computation.

Do you want a free surface at the top?

Here you can specify that the top of the region has not to be a PML.

- If you enter `n...` nothing to do...

Introduce the number of parts to partition the mesh

As mentionned before, a parallel calculation is needed to make the simulation-time as low as possible. Here you specify the number of processors you want to use.

**NB :** If a 3D Moho is meshed then informations about the thickness of the elements just above and below the discontinuity are returned at the end of the run.

## Ouputs

*Mesh*er provides text-files which will be used latter by the solver. There is one text-file per processor. Its name is *mesh4spec. ???* where *???* corresponds to the number assigned to the processor. Here is its structure :

n\_dim : Spatial dimension of the problem. Only 3 is possible for now.

curve : indicates if one works with a "deformed" domain or not.

model : Type of the interfaces contained in the mesh (1 : PREM, 2 : PREM + Moho, 3 : PREM + Moho - 220km, 4 : Other). If the domain is not deformed then the parameter is equal to zero.

ellipticity : indicates if the ellipticity is taken into account or not.

rotation : Matrix which rotates the real chunk to the calculation chunk centred on the north pole. This matrix appears only if one works with a deformed domain.

n\_glob\_nodes : Number of nodes describing the geometry of the subdomain which concerns the processor.

coord\_nodes : Cartesian coordinates of the nodes.

n\_elem : Number of elements in the subdomain.

mat\_index : assigns an integer to each element. This integer lies between 0 and 26 and refers to a "material" which is described in the materials properties file. Contents of this file are detailed latter.

moho : assigns an integer to each element. This integer is -1 for elements just below the moho, 1 for those just above, and 0 for the others.

n\_nodes : Number of nodes (or control points) used to describe the geometry of an element.

control\_nodes : indicates the control points assigned to each element.

n\_faces : number of faces in the subdomain.

near\_faces : indicates the 6 faces which belong to each element.

n\_edges : number of edges in the subdomain.

near\_edges : indicates the 12 edges which belong to each element.

n\_vertices : number of vertices in the subdomain.

near\_vertices : indicates the 8 vertices which belong to each element.

n\_proc : Number of processors.

comm : define how many and which faces, edges and vertices the processor is supposed to communicate with the other processors.

**NB :** If a 3D Moho (or a topography) is meshed then a file *moho.out* (respectively *topo.out*) is provided. This output-file indicates the Moho depth (respectively the elevation) in meters for each node ( $\theta, \phi$ ) of the mesh. It can be easily used as an input-file in a GMT-script to create maps.

## 2.C.2 The Calculation

Now we detail how the solver works. To make it executable you only have to do a `make`. Just precise in the *Makefile* the C and Fortran compilers you want to use.

### Inputs

The solver *spec.x* that you obtain after the compilation needs a couple of input-files that we present now.

a) *mesh4spec.???* :

See before.

b) *input.spec* :

This file mentions some parameters and describes the sources :

acceleration : indicates if an acceleration-scheme is used for the Newmark time-evolution or not.

velocity : indicates if a velocity-scheme is used for the Newmark time-evolution or not. This is the scheme you are obliged to choose because the acceleration-scheme is not available for now.

duration : Duration of the simulation (in *s*).

alpha : First Newmark parameter (*0.5* is the usual value).

beta : Second Newmark parameter (*0.5* is the usual value).

gamma : Third Newmark parameter (*1* is the usual value).

mesh\_file : First part of the mesh-files name (i.e. *mesh4spec.*).

mat\_file : Name of the materials properties file.

anisotropy : indicates if anisotropy has to be considered or not.

ocean : indicates if ocean has to be considered or not.

traces : indicates if you intend to use receivers and finally have seismograms or not.

snapshot : indicates if you intend to record the entire wavefield at some times or not. This option is not available for now so you are unhappily forced to enter  $F$ .

rcv\_file : Name of the receivers positions file. It has no effect if you don't intend to use receivers.

time\_interval : Time interval (in  $s$ ) to skip the snapshots. It has no effect if you don't intend to get snapshots.

n\_src : Number of sources.

coord\_src : Coordinates of the sources. Introduce cartesian coordinates  $x, y, z$  if you work in a parallelepiped, and spherical coordinates  $\theta(\text{lat}), \phi(\text{long}), d(\text{depth})$  if you work in a deformed chunk.

src\_type : Type of the source.  $1$  refers to a pulse and  $2$  refers to a seismic moment tensor.

pulse\_dir : Components of the pulse in the local system. This parameter has no effect if the source is not a pulse.

M\_diag : Values of the three diagonal terms of the moment tensor expressed in the spherical system. These parameters have no effect if the source is not a double-couple.

M\_non\_diag : Values of the three non-diagonal terms of the moment tensor.

time\_func : indicates the time-function you want to use for the source.  $1$  gives a Gaussian,  $2$  gives a Ricker and  $3$  makes the inverse Fourier transform of a bandwidth defined by four frequencies.

shift : Time (in  $s$ ) used to shift the time-function.

freq : Main frequency of the time-function  $2$ . This parameter has no effect if the time-function is not a Ricker.

bandwidth : Four frequencies (in  $Hz$ ) which define the bandwidth used to build the time-function  $3$ . These parameters have no effect if the time-function is not a Fourier transform of a bandwidth.

attenuation : Number of linear solids to mimick the attenuation. Write  $0$  for no attenuation.

attenuation\_band : Two periods (in  $s$ ) which define the attenuation band.

model\_period : period of the elastic model.

### c) The materials properties file :

We have mentionned in the first part that an integer corresponding to a "material" is assigned to each element. The aim of each line of the following file is to define a material :

n\_mat : Number of materials. It is supposed to be 27.

special\_NGLLz\_crust : In the crust, it is possible to put a special number of GLL in the vertical direction. This option is not available for now so write 0.

type, GLLx, GLLy, GLLz, dt : defines each material by a type (*S* for solid or *P* for PML), a number of Gauss-Lobatto-Legendre points per directions and a time-step (which is supposed to be the same for all the materials because the multi-time resolution is not available for now).

n, A, PMLx, Left, PMLy, Front, PMLz, Bottom : indicate for each PML material two dumping coefficients ( $n = 2$  and  $A = 10$  are usual values) and the position in the domain. *PMLx* (resp *PMLy*, *PMLz*) indicates if *x* (resp *y*, *z*) is a dumping direction or not. If *PMLx* = *T* (resp *PMLy*, *PMLz*) then *Left* (resp *Front*, *Bottom*) indicates if the dumping is according to the decreasing *x* (resp *y*, *z*) or not.

d) The receivers positions file :

n\_rcv : Number of receivers.

rcv\_name : Name of each receiver.

coord\_rcv : Coordinates of each receiver. Introduce cartesian coordinates *x, y, z* if you work in a parallelepiped, and spherical coordinates  $\theta$ (lat),  $\phi$ (long), *z*(elevation) if you work in a deformed chunk.

e) *read\_model.f90* :

This is a module that the user has to write to introduce his elastic model. *read\_model.f90* has to be in the directory *Modules* and contain two routines : *get\_value* (*i, j, k, rho, vp, vs, qmu, moho*) and *get\_value\_aniso* (*i, j, k, rho, vpv, vph, vsv, vsh, eta\_aniso, qmu, moho*). These routines are supposed to return the elastic parameters of any point in the chunk.

*get\_value* arguments :

*i, j, k* are double precision inputs which are *x, y, z* (in *m*) or *r,  $\theta$ (colat),  $\phi$ (long)* (in *m* and *rad*) depending on the chunk you consider.

*rho, vp, vs, qmu* are double precision outputs. *rho* is the density (in  $kg.m^{-3}$ ), *vp* and *vs* are the P and S waves velocities (in  $km.s^{-1}$ ) and *qmu* is the quality factor (that you have to provide even if you don't want attenuation).

*moho* is an optional integer input. It indicates if the point *i, j, k* is in an element just below the Moho (*-1*), in an element just above the Moho (*1*) or in another element (*0*). This argument can be useful to perfectly fit the elastic discontinuity to the 3D interface of the mesh. Note that this fit is automatically made for all the spherical interfaces from PREM.

*get\_value\_aniso* arguments :

*i, j, k, rho, qmu* and *moho* are same as *get\_value*.

*vpv, vph, vsv, vsh, eta\_aniso* are double precision outputs. *vpv, vph, vsv, vsh* are the vertical and horizontal P and S waves velocities (in  $km.s^{-1}$ ). *eta\_aniso* is the anisotropic parameter  $\eta$  (that you have to provide even if you don't want anisotropy).

## Outputs

As it is impossible to get snapshots, the only output-files you can have for now correspond to the seismograms recorded at the stations.

If you work in a deformed chunk, three files appear for each source-receiver pair. Each file refers to a component : `????_Rsrc!!!`, `????_Tsrc!!!`, `????_Zsrc!!!` (where `????` is the station name and `!!!` the number assigned to the source).

If you work in a parallelepiped then `????_X`, `????_Y`, `????_Z` are created.

These files are made up by two columns : the first one refers to time and the second one indicates values of displacement.



# Chapitre 3

## Exemple de deux séismes simulés dans un modèle 3D par la méthode des éléments spectraux

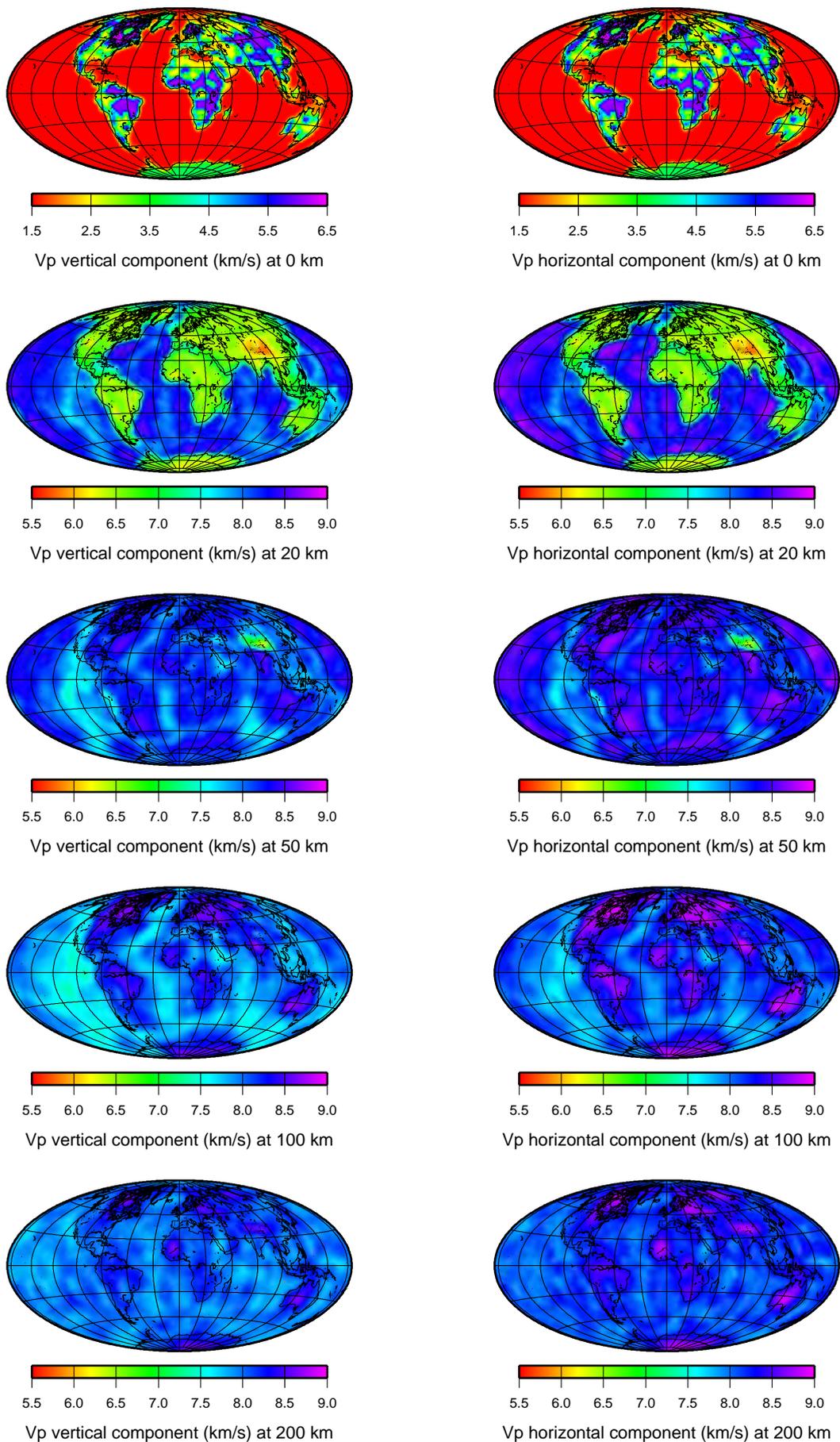
Si le but de cette thèse est, rappelons-le, d'utiliser les éléments spectraux pour simuler la forme d'onde des corrélations de bruit sismique, la SEM telle que nous l'avons implémentée n'en demeure pas moins et avant tout un outil très efficace pour calculer le champ d'onde dû à un séisme. Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de deux simulations réalisées dans un modèle 3D. Chaque simulation correspond à un séisme particulier, l'un ayant eu lieu en Roumanie le 27 octobre 2004 ( $M_w = 5.8$ ), l'autre en Autriche le 12 avril 1998 ( $M_w = 5.6$ ). Le modèle 3D considéré sera un dérivé du modèle CUB (Ritzwoller *et al.*, 2002; Shapiro & Ritzwoller, 2002).

### 3.1 Le modèle de Terre

CUB est un modèle de Terre globale radialement anisotrope obtenu par inversion d'un large jeu de données d'ondes de surface. L'inversion en question se fait en deux étapes. Dans un premier temps sont mesurées les courbes de dispersion des vitesses de phase et de groupe des ondes de Rayleigh et de Love (Ritzwoller *et al.*, 2002). Dans un deuxième temps, les courbes obtenues sont inversées par une méthode de type Monte-Carlo pour donner en chaque point d'une grille géographique de  $2^\circ \times 2^\circ$  un profil de vitesses sismiques (Shapiro & Ritzwoller, 2002). Quelques cartes de ces vitesses sont présentées figures 3.1 et 3.2. D'autres cartes ainsi que des profils 1D et 2D du modèle CUB sont disponibles sur le site

<http://ciei.colorado.edu/~nshapiro/MODEL/>.

Les mesures des vitesses de groupe sont effectuées pour des périodes allant de 16 à 200 s. Pour les vitesses de phase, la bande est plus étroite : de 40 à 150 s. A de telles périodes, les ondes de surface ne sont sensibles qu'aux structures comprises entre la surface de la Terre et quelques centaines de kilomètres de profondeur. Pour cette raison, CUB ne fournit pas de valeurs de paramètres élastiques au-dessous de 400 km. De plus, Shapiro & Ritzwoller (2002) précisent que les incertitudes commises sur les valeurs en question commencent à croître sensiblement

FIG. 3.1 – Vitesse des ondes  $P$  dans le modèle CUB.

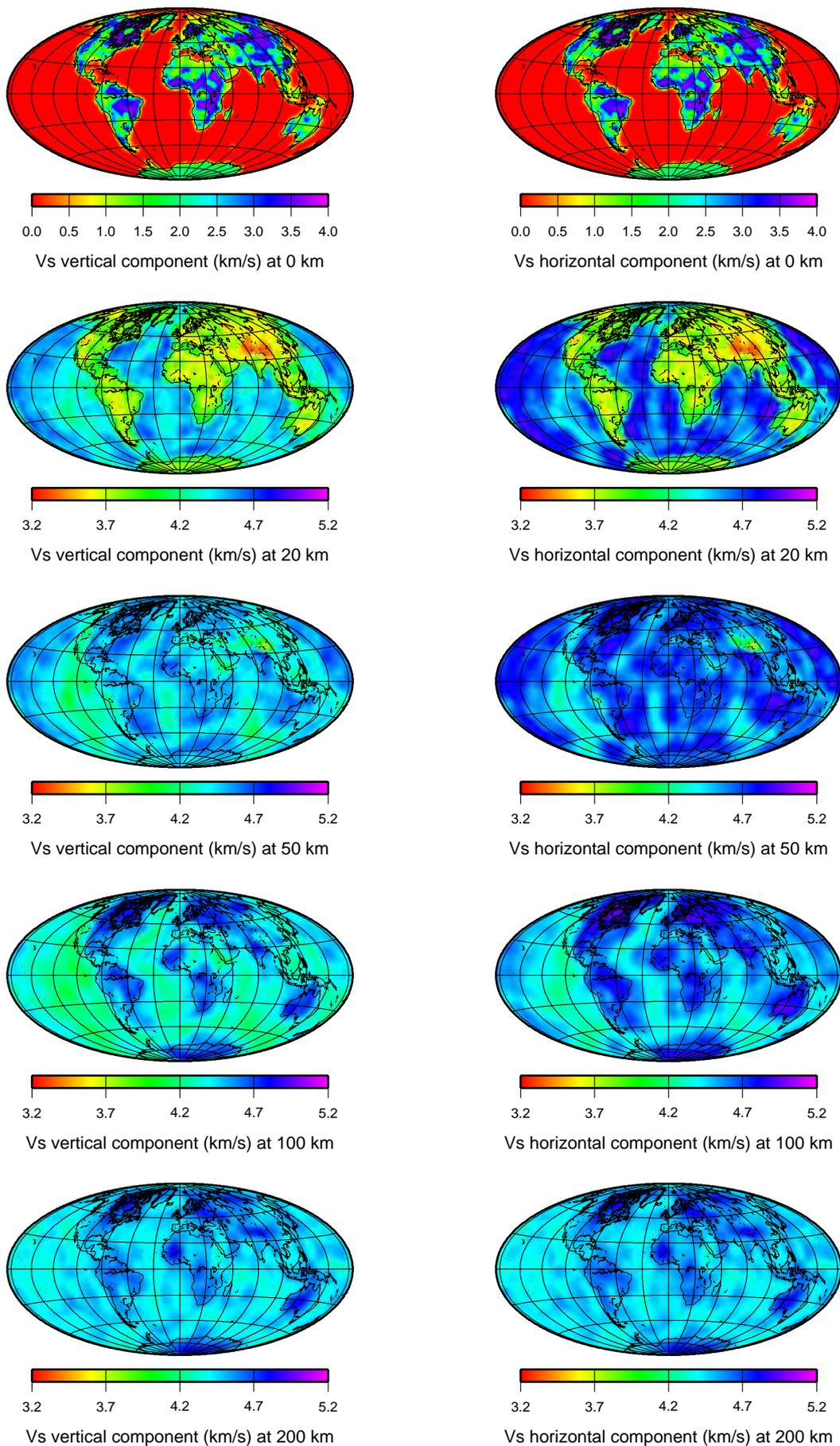


FIG. 3.2 – Vitesse des ondes S dans le modèle CUB.

à partir de 250 km de profondeur. Nous allons donc construire un nouveau modèle qui sera le modèle 1D PREM (Dziewonski & Anderson, 1981) au-dessous de 400 km et qui, entre 250 et 400 km de profondeur, passera progressivement de CUB à PREM.

CUB contient de nombreuses interfaces, notamment dans la croûte. Dans le processus qui permet de construire le modèle, le Moho est inversé. Est alors obtenue une interface 3D à l'origine de forts contrastes d'impédance et jouant par conséquent un grand rôle dans la propagation des ondes. Pour que notre simulation éléments spectraux soit la meilleure possible, nous veillerons à mailler cette interface. En revanche, toutes les discontinuités intermédiaires entre le Moho et la surface seront lissées. Les prendre en compte impliquerait en effet des pas de temps extrêmement faibles et, de fait, des coûts de calcul exorbitants. De plus, il n'est pas rare qu'une de ces discontinuités apparaisse ou disparaisse, créant ainsi des "coins" qui nécessiteraient des maillages spécifiques et compliqués. A haute fréquence, l'absence de ces interfaces peut être dramatique et constitue une limite importante de notre simulation. L'emploi des techniques d'homogénéisation (Capdeville & Marigo, 2007a,b) apparaît alors comme une urgence, que ce soit dans le cas particulier de RegSEM ou plus généralement dans toute application de type éléments finis impliquant la croûte.

La région qui va nous intéresser est l'Europe (figure 3.3). Elle bénéficie d'une bonne couverture de la part des données utilisées pour construire CUB. Souhaitant simuler des signaux jusqu'à 20 s de période, nous maillons la région par des éléments de  $0.7^\circ$  de côté dans lesquels un ordre polynômial  $N = 8$  sera utilisé. Etant donnée l'épaisseur minimale de la croûte, cela implique un pas de temps de 0.05s. Le morceau de Terre mesurant  $28^\circ \times 34^\circ \times 1500\text{ km}$ , générer 1200 s de signal requiert alors 1 h 45 de calcul sur 16 nœuds bipro quad-core Xeon E5420 à 2,5 GHz.

## 3.2 Simulation du séisme de Roumanie, 27 octobre 2004

Le premier séisme que nous allons simuler a eu lieu le 27 octobre 2004, à  $45.73^\circ$  de latitude nord et  $26.67^\circ$  de longitude est. Sa profondeur a été estimée à 93,8 km, et sa magnitude de moment à 5,8. Le mécanisme que nous allons prendre pour ce séisme est celui donné par le catalogue de Harvard et est représenté figure 3.4. Sur cette figure sont également indiquées les positions des stations que l'on va considérer. Ces stations proviennent des réseaux GEOSCOPE, GEOFON, GSN et MEDNET. Enfin, une topographie étant ajoutée au modèle CUB originel, nous représentons l'altitude affectée à chaque point de contrôle de la surface, sachant qu'il y a 27 points de contrôle par élément. Les valeurs de cette altitude sont issues de ETOPO5.

Les formes d'onde obtenues grâce à RegSEM sont confrontées aux données pour trois bandes de fréquence distinctes : 100 s - 200 s (figure 3.5), 50 s - 100 s (figure 3.6) et 20 s - 50 s (figure 3.7). Sur chaque figure, les signaux issus d'une sommation des modes propres calculés dans le PREM sont également dessinés. Par ailleurs, seul le déplacement vertical est analysé.

Pour la première bande de fréquence (figure 3.5), la plupart des formes d'onde sont bien retrouvées. Seules celles dont l'amplitude est faible et qui ont par conséquent du mal à sortir du bruit de fond sont incorrectement simulées. Il s'agit des traces issues des stations VTS et OBN. Pour les autres stations, les signaux calculés sont comparables aux données, bien que de petites différences à la fois en phase et en amplitude peuvent parfois s'observer. Si, dans

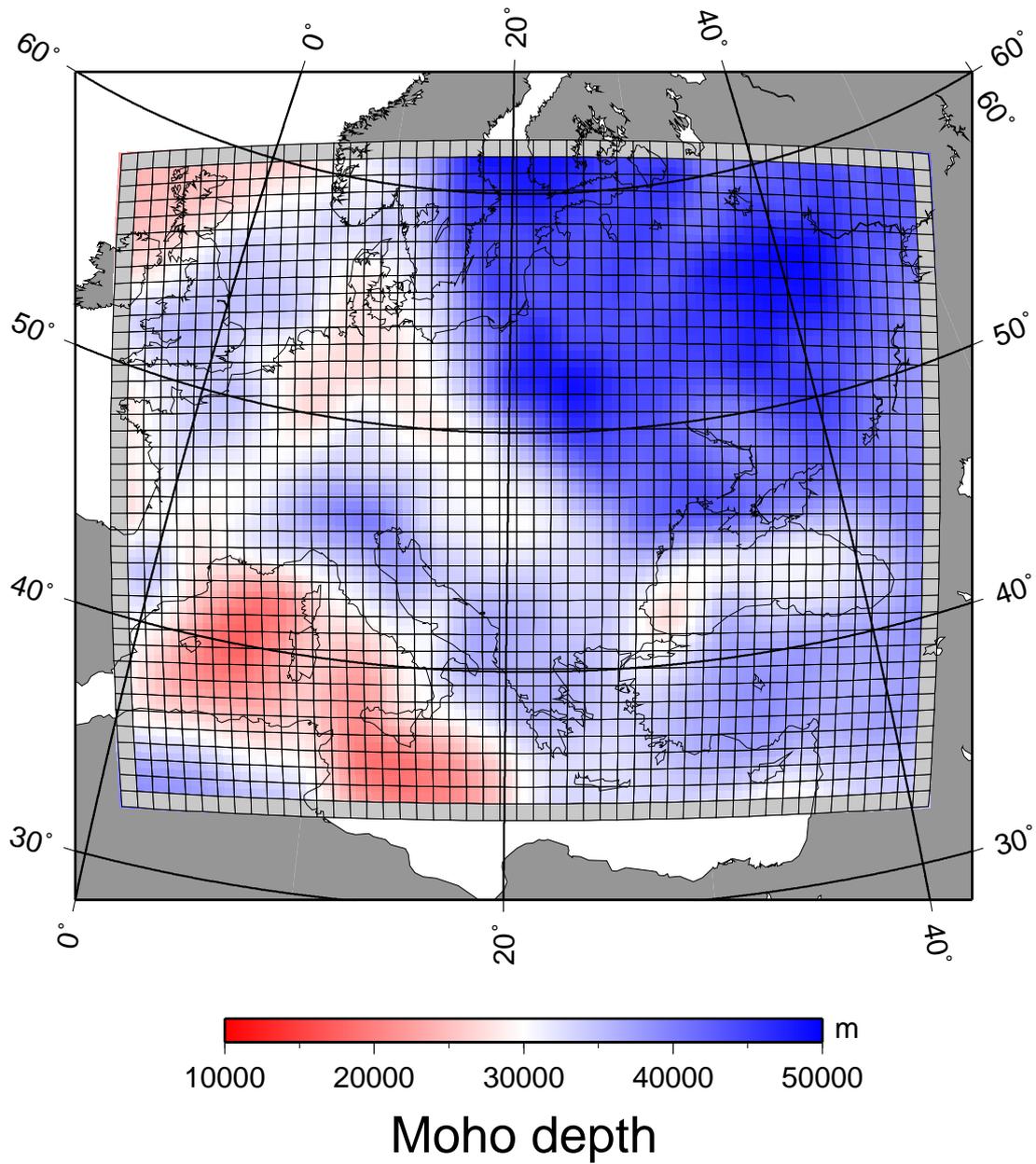


FIG. 3.3 – Carte de l'Europe à laquelle est superposé le morceau de Terre utilisé pour les simulations. Le morceau mesure  $28^\circ$  dans la direction nord-sud, et  $34^\circ$  dans la direction est-ouest. Il est décomposé par en éléments de  $0.7^\circ \times 0.7^\circ$ . La profondeur du Moho fournie par CUB est également représentée.

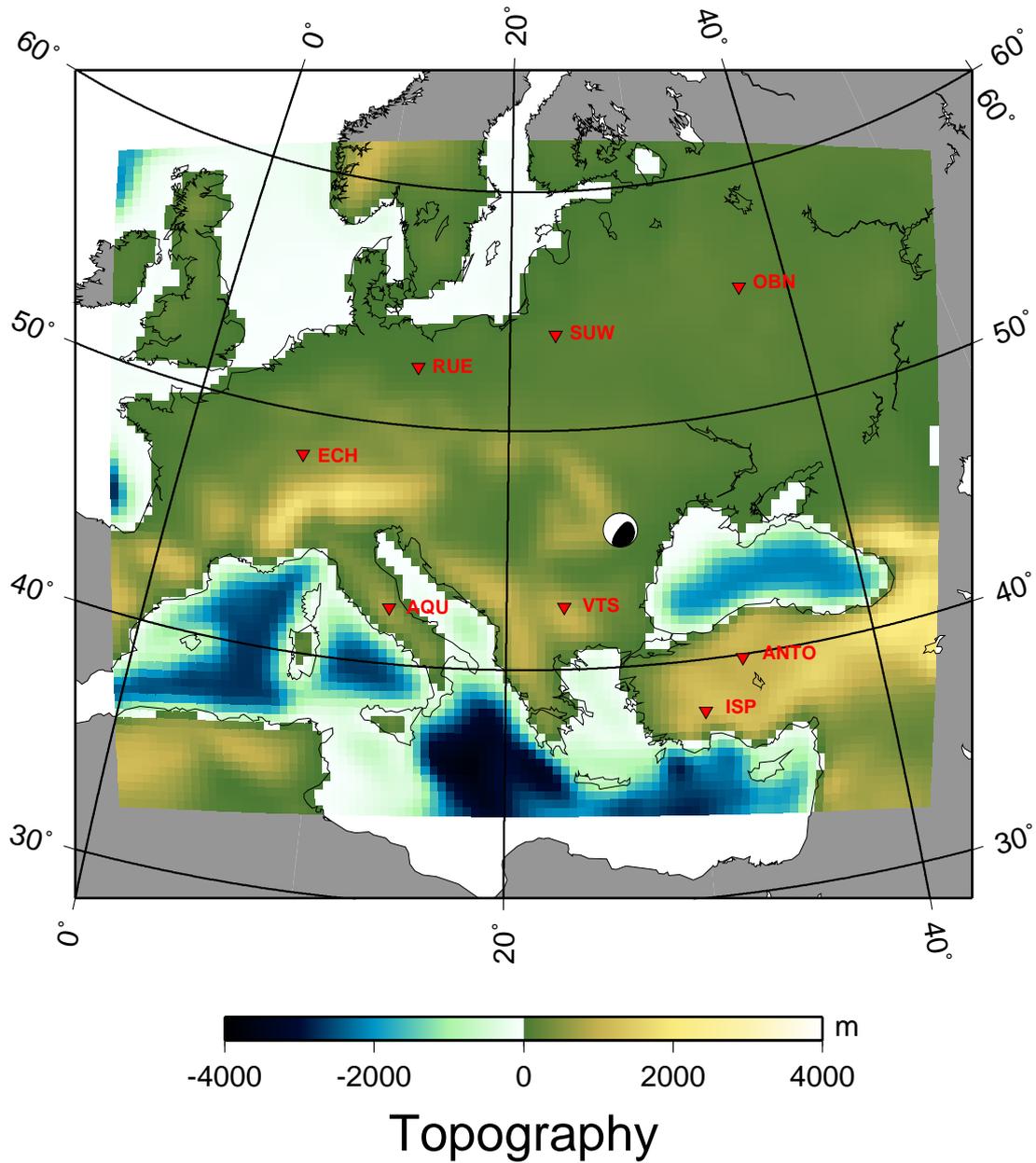


FIG. 3.4 – Configuration de la première simulation. Le mécanisme au foyer du séisme est indiqué par la sphère focale. Les stations sont repérées par des triangles rouges. En fond est représentée la topographie des points de contrôle qui gèrent la géométrie de la surface.

certains cas, le modèle 3D améliore très légèrement la forme d'onde obtenue par sommation de modes dans PREM (stations SUW et RUE par exemple), les différences entre les deux modèles sont généralement très faibles.

Pour la deuxième bande de fréquence (figure 3.6), toutes les données sortent nettement du bruit et peuvent donc être comparés aux signaux provenant de nos simulations. L'allure générale de l'ensemble des traces est correctement retrouvée, que ce soit par le PREM ou par le modèle dérivé de CUB. Cependant, une observation attentive met en évidence que le modèle 3D améliore systématiquement à la fois la phase et l'amplitude. Ce sont aux stations SUW, OBN et ECH que ces améliorations apparaissent le plus clairement.

Pour la troisième bande de fréquence (figure 3.7), les données sont beaucoup plus difficiles à simuler. PREM donne de très mauvais résultats aussi bien pour les ondes de volume  $P$  et  $S$  (en début de signal) que pour l'onde de surface (arrivée la plus énergétique). Le modèle dérivé de CUB, lui, est nettement meilleur. Si la qualité atteinte pour les deux bandes de fréquence précédentes est loin d'être obtenue, les ondes de volume et l'onde de Rayleigh sont en général assez bien approchées. Les arrivées tardives, qui correspondent à de multiples réflexions dans la croûte terrestre, sont en revanche très mal retrouvées. Le lissage que nous avons opéré sur les interfaces crustales de CUB se fait en effet cruellement sentir ici. De plus, nous considérons des fréquences qui touchent aux limites de celles utilisées pour traiter les données à l'origine de CUB. Il n'est donc pas très étonnant que le résultat ne soit pas aussi bon que celui des deux premières bandes de fréquence. Notons que les arrivées tardives mentionnées noient complètement les ondes réfléchies à la CMB. En effet, les traces issues de la sommation de modes contiennent ces ondes réfléchies mais ne retrouvent en aucune façon les signaux tardifs. L'absence de la CMB dans RegSEM n'est donc qu'une lacune très faible dans les simulations que nous mettons en œuvre ici.

### 3.3 Simulation du séisme d'Autriche, 12 avril 1998

D'une magnitude de moment  $N_w = 5.6$  et d'une profondeur estimée à 15 km, le séisme qui va maintenant nous intéresser s'est produit le 12 avril 1998 en Autriche, à  $46.39^\circ$  de latitude nord et  $13.5^\circ$  de longitude est. Figure 3.8 est représenté son mécanisme au foyer (tiré une nouvelle fois du catalogue de Harvard) ainsi que la position des huit stations que nous allons utiliser. Le fond de cette figure est une carte de la variation par rapport à PREM de la vitesse des ondes  $S$  polarisées verticalement dans le modèle CUB à 60 km de profondeur.

Nous considérons les mêmes bandes de fréquence que celles définies dans la section précédente. Entre 100 et 200 s, nous constatons à nouveau que PREM et le modèle 3D donnent des résultats très proches (figure 3.9). L'amplitude des signaux provenant du modèle 3D est en général un peu meilleure que celle des signaux issus de PREM, mais pas toujours. A la station AQU, par exemple, PREM ajuste mieux les données. Par ailleurs, le séisme étant moins puissant que celui de Roumanie, nous voyons que les stations éloignées de l'épicentre fournissent des traces émergeant à peine du niveau de bruit, ce qui rend délicate la comparaison avec les synthétiques.

Entre 50 et 100 s (figure 3.10), la différence entre PREM et le modèle dérivé de CUB se fait de plus en plus nette à mesure que la distance épacentrale augmente. Nous voyons alors

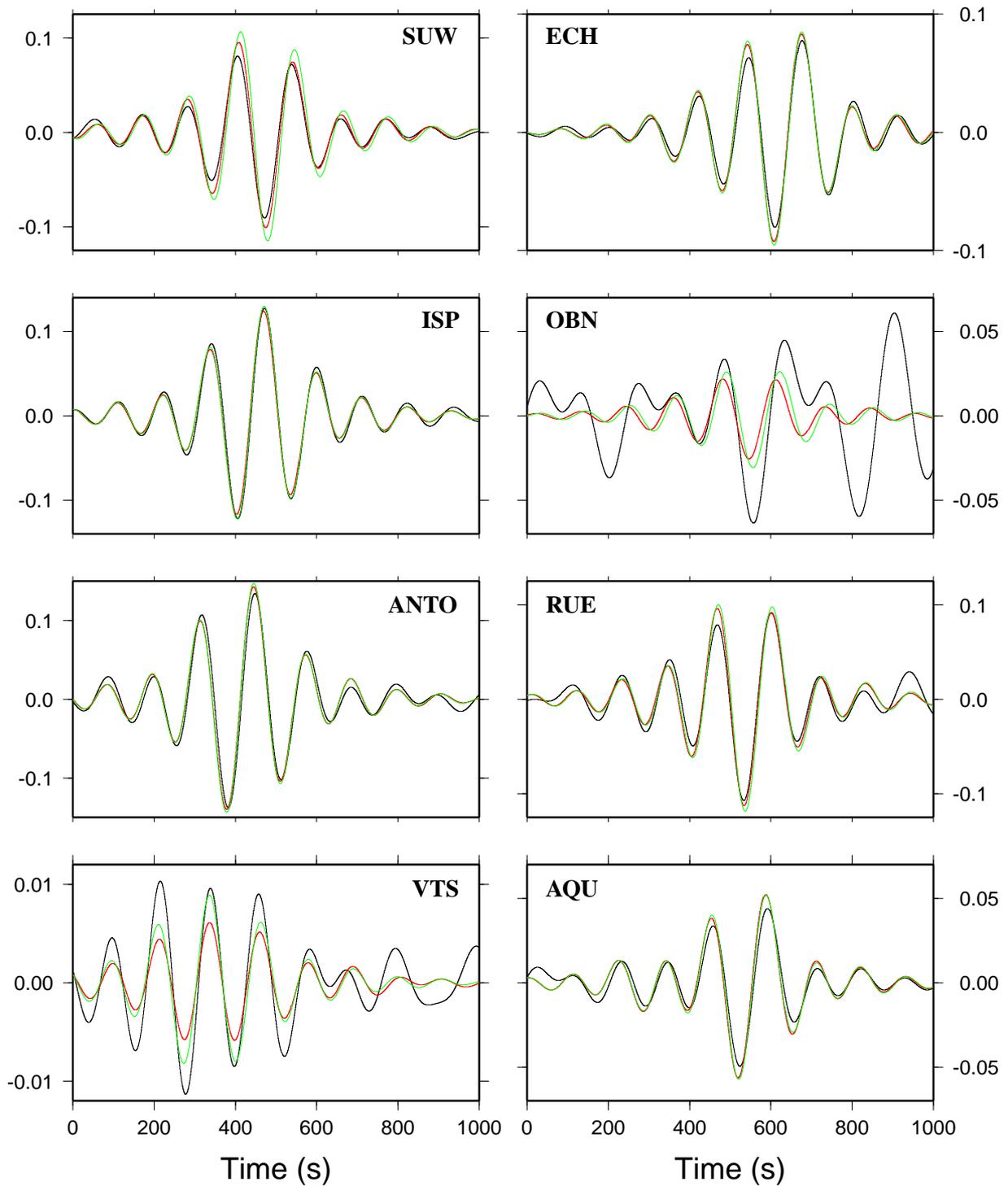


FIG. 3.5 – Enregistrements à huit stations différentes du séisme survenu le 27 octobre 2004 en Roumanie ( $M_w = 5.8$ ). En noir sont dessinées les données, en rouge les traces issues de la simulation éléments spectraux, et en vert le résultat d'une sommation de modes propres dans PREM. Les valeurs indiquées en ordonnée correspondent au déplacement vertical en micromètre. La bande de fréquence considérée est 100 s - 200 s.

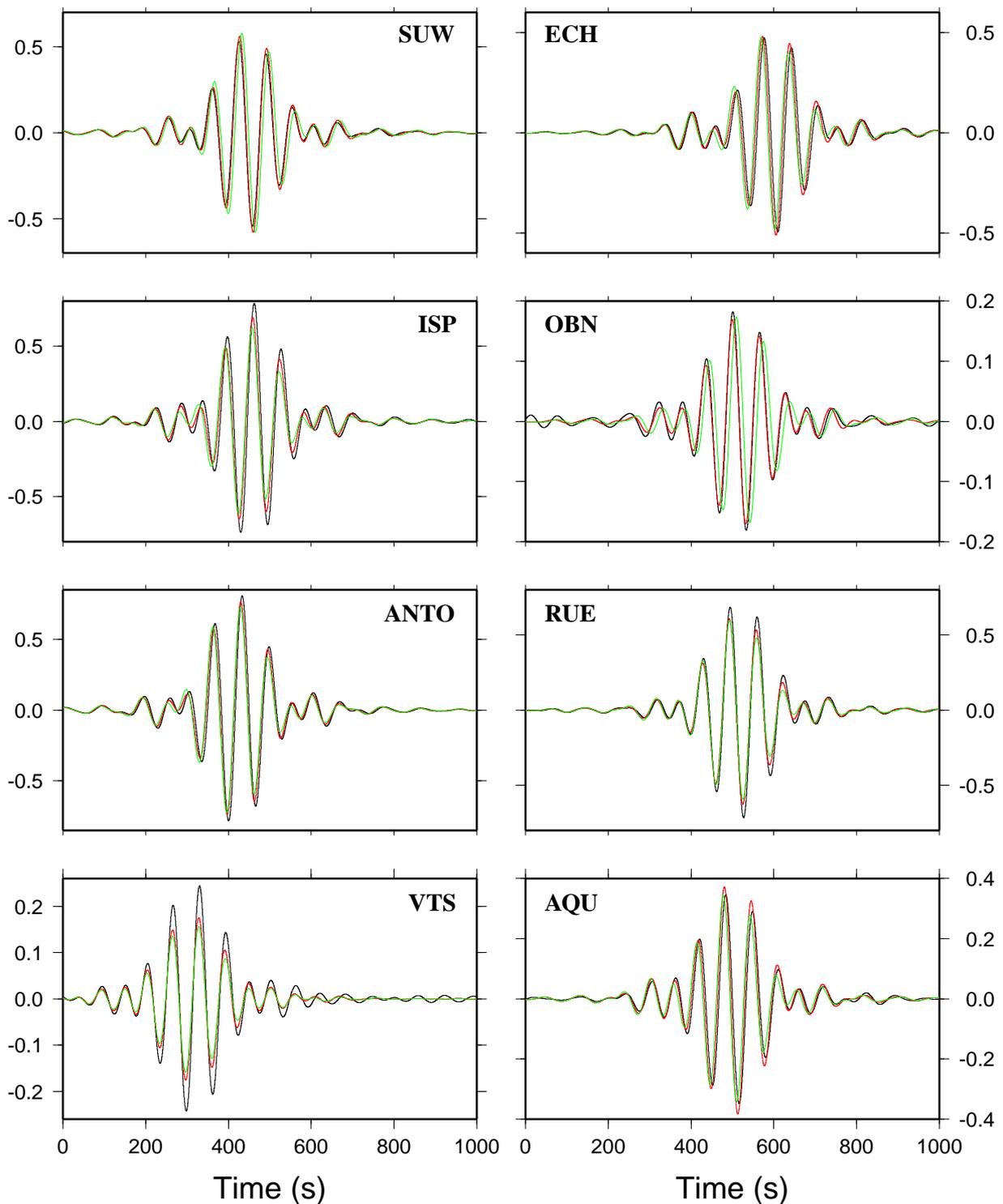


FIG. 3.6 – Enregistrements à huit stations différentes du séisme survenu le 27 octobre 2004 en Roumanie ( $M_w = 5.8$ ). En noir sont dessinées les données, en rouge les traces issues de la simulation éléments spectraux, et en vert le résultat d'une sommation de modes propres dans PREM. Les valeurs indiquées en ordonnée correspondent au déplacement vertical en micromètre. La bande de fréquence considérée est 50 s - 100 s.

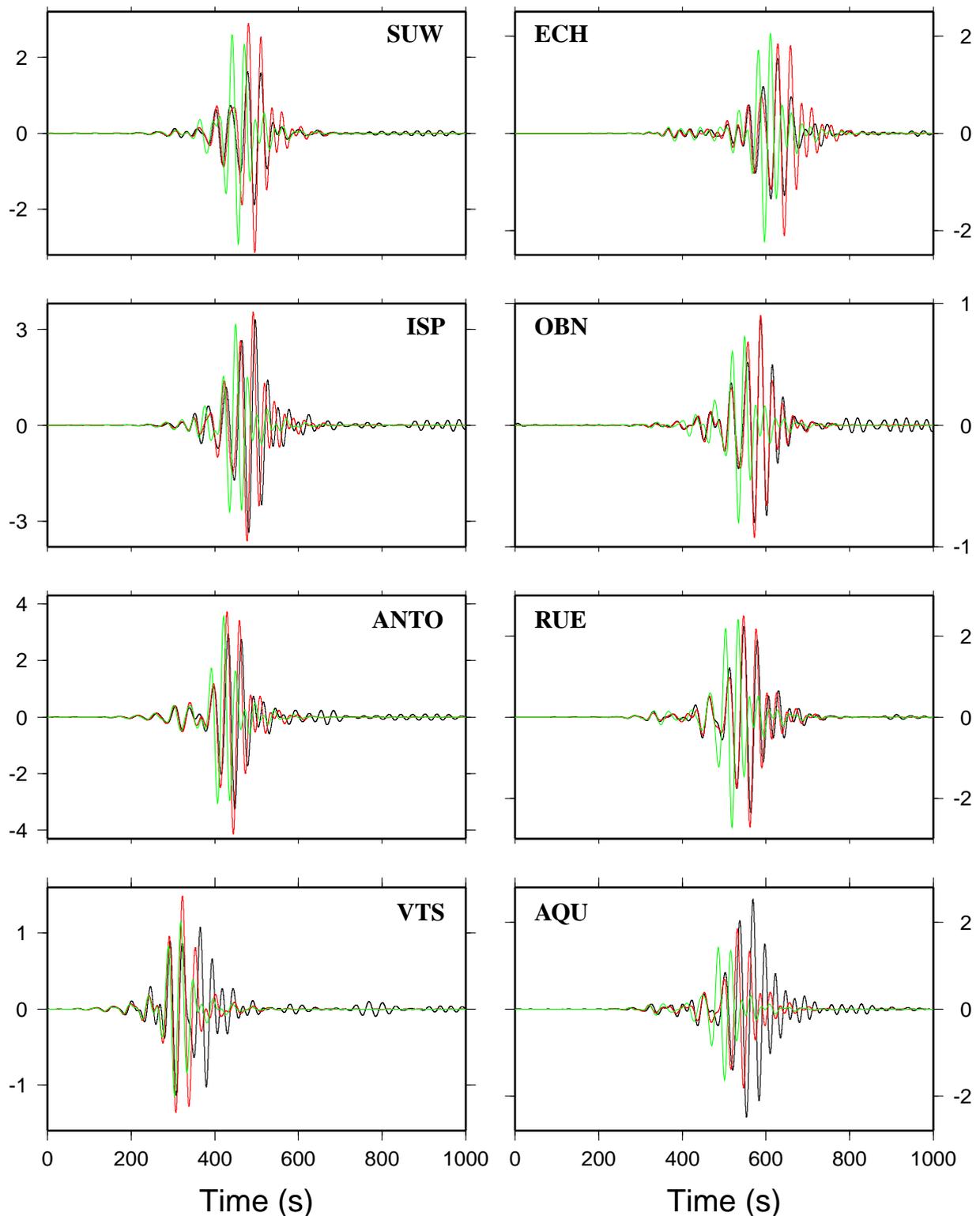


FIG. 3.7 – Enregistrements à huit stations différentes du séisme survenu le 27 octobre 2004 en Roumanie ( $M_w = 5.8$ ). En noir sont dessinées les données, en rouge les traces issues de la simulation éléments spectraux, et en vert le résultat d'une sommation de modes propres dans PREM. Les valeurs indiquées en ordonnée correspondent au déplacement vertical en micromètre. La bande de fréquence considérée est 20 s - 50 s.

que le modèle 3D donne de bien meilleurs résultats, notamment en terme de phase (voir les récepteurs ISP, ANTO et OBN). Cependant, la qualité des signaux synthétiques restent bien inférieure à celle obtenue dans le cas du séisme précédent pour la même bande de fréquence. Une des causes susceptibles d'expliquer cela est la profondeur du séisme étudié ici. Il s'agit en effet d'un évènement crustal, et il est fort probable que la structure qui environne l'hypocentre et qui affecte grandement le champ d'onde émis soit d'une complexité bien plus importante que celle prise en compte dans notre simulation.

Entre 20 et 50 s (figure 3.11), c'est sans surprise que nous constatons la médiocrité des traces issues de PREM. Les signaux du modèle 3D, en revanche, parviennent souvent à modéliser correctement la phase. A l'exception des stations AQU, SSB et SUW, les ondes de Rayleigh réelle et synthétique sont en effet bien en phase. Malheureusement, un sérieux problème d'amplitude subsiste, problème que nous pouvons une nouvelle fois attribuer en partie à la structure locale au point source. Par ailleurs, les arrivées tardives demeurent, comme dans le cas du séisme précédent, hors de portée de notre modélisation.

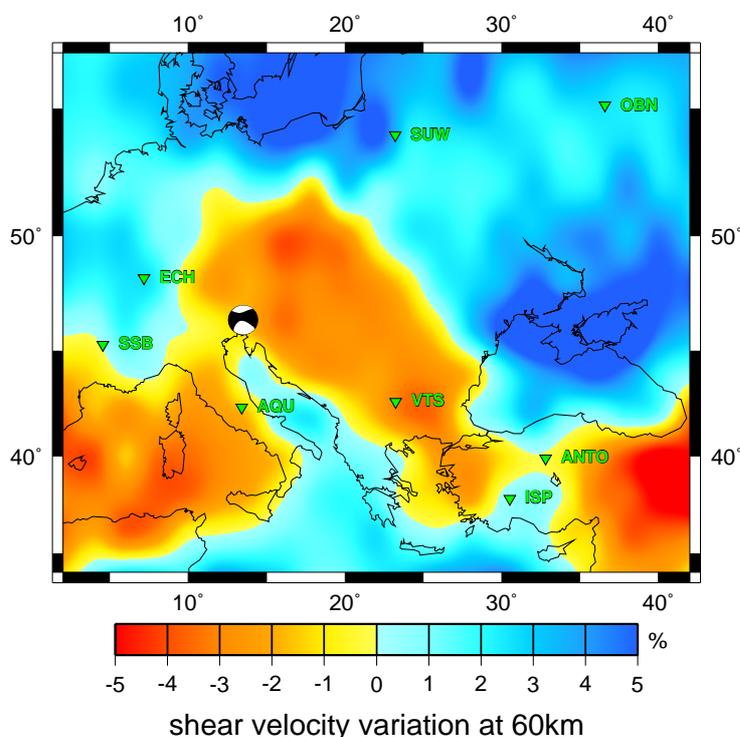


FIG. 3.8 – Configuration de la deuxième simulation. Est indiqué le mécanisme au foyer du séisme ainsi que la position des stations (triangles verts). En fond est représentée la variation par rapport à PREM de la vitesse des ondes S polarisées verticalement dans le modèle CUB à 60 km de profondeur.

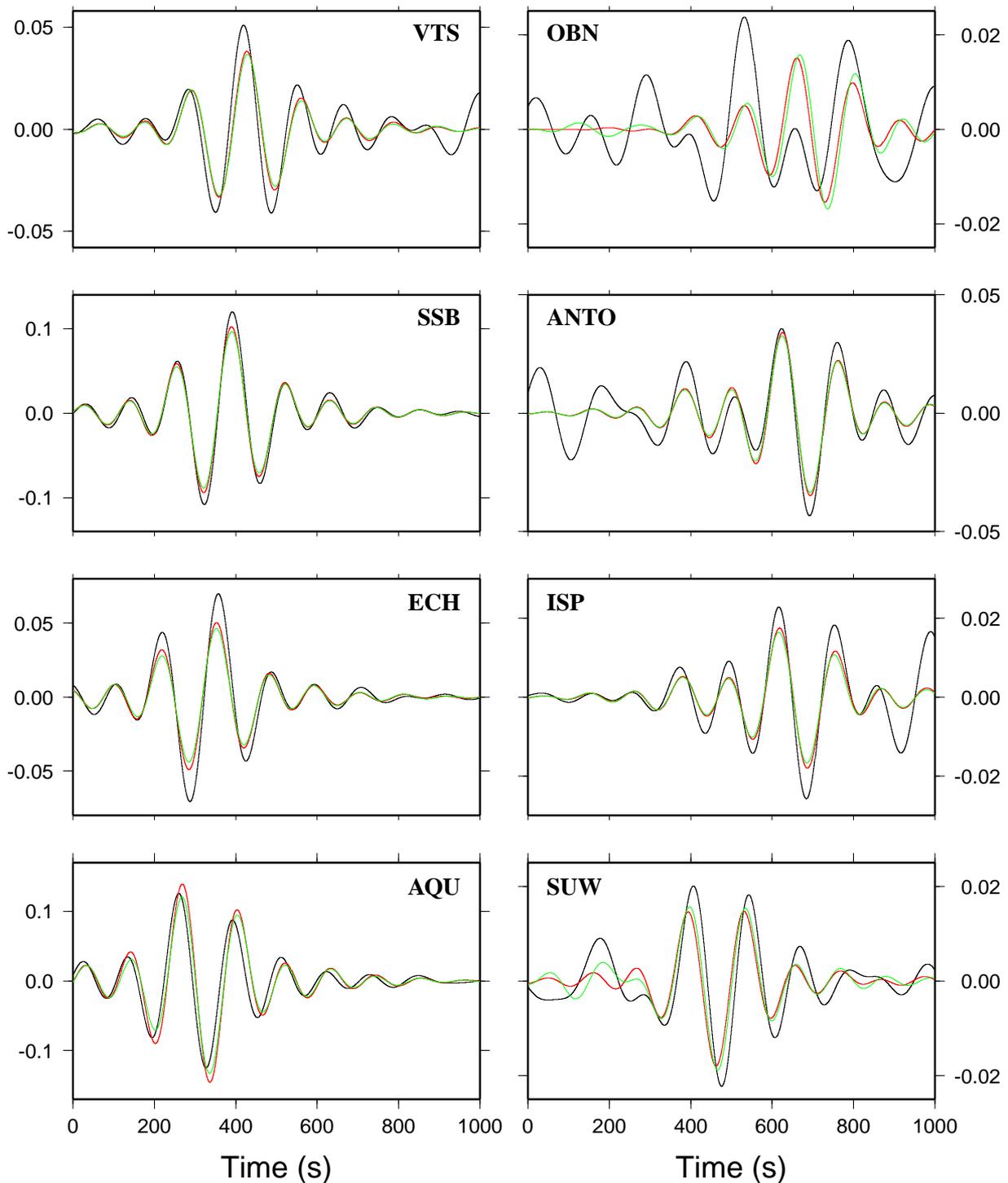


FIG. 3.9 – Enregistrements à huit stations différentes du séisme survenu le 12 avril 1998 en Autriche ( $M_w = 5.6$ ). En noir sont dessinées les données, en rouge les traces issues de la simulation éléments spectraux, et en vert le résultat d’une sommation de modes propres dans PREM. Les valeurs indiquées en ordonnée correspondent au déplacement vertical en micromètre. La bande de fréquence considérée est 100 s - 200 s.

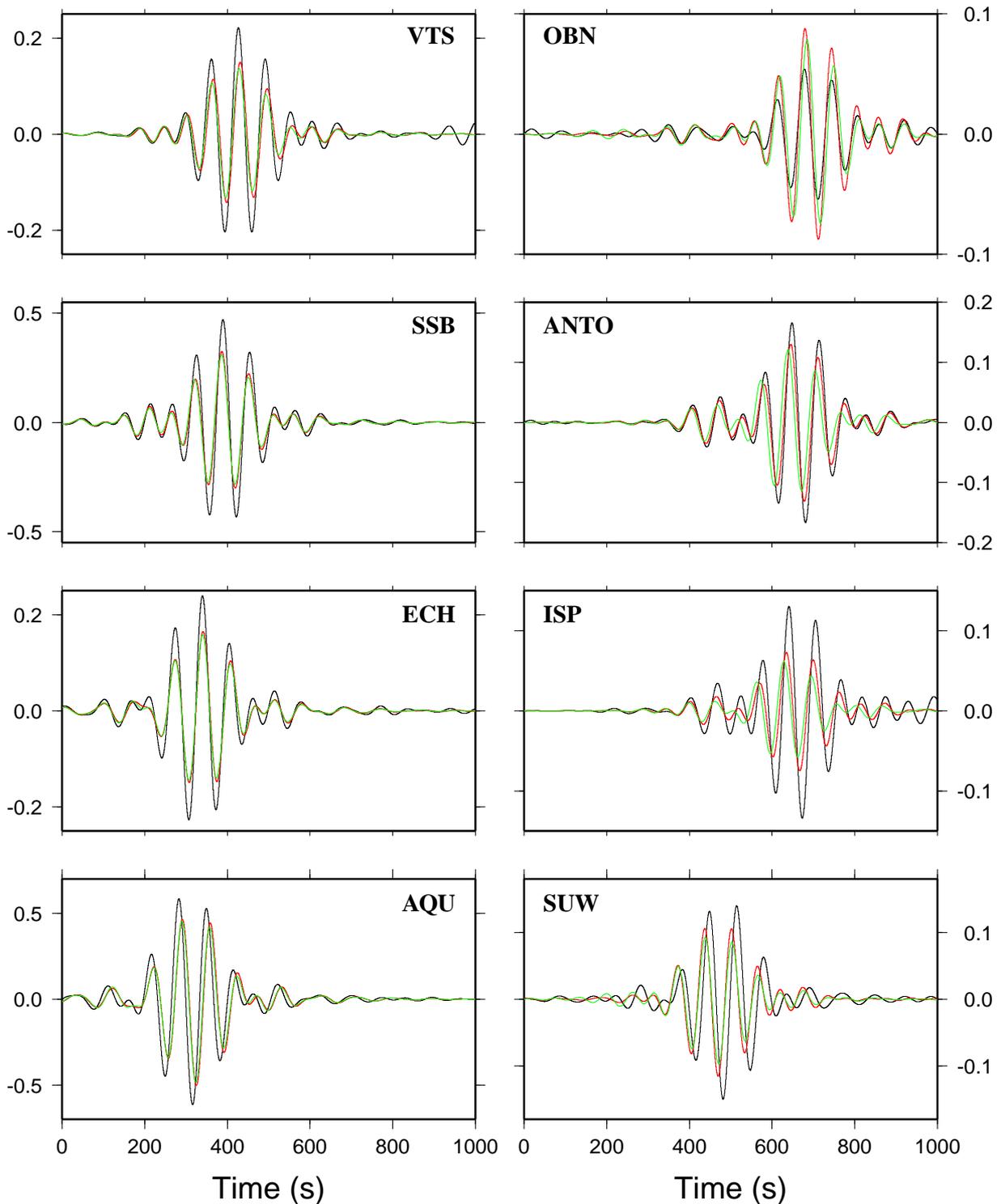


FIG. 3.10 – Enregistrements à huit stations différentes du séisme survenu le 12 avril 1998 en Autriche ( $M_w = 5.6$ ). En noir sont dessinées les données, en rouge les traces issues de la simulation éléments spectraux, et en vert le résultat d'une sommation de modes propres dans PREM. Les valeurs indiquées en ordonnée correspondent au déplacement vertical en micromètre. La bande de fréquence considérée est 50 s - 100 s.

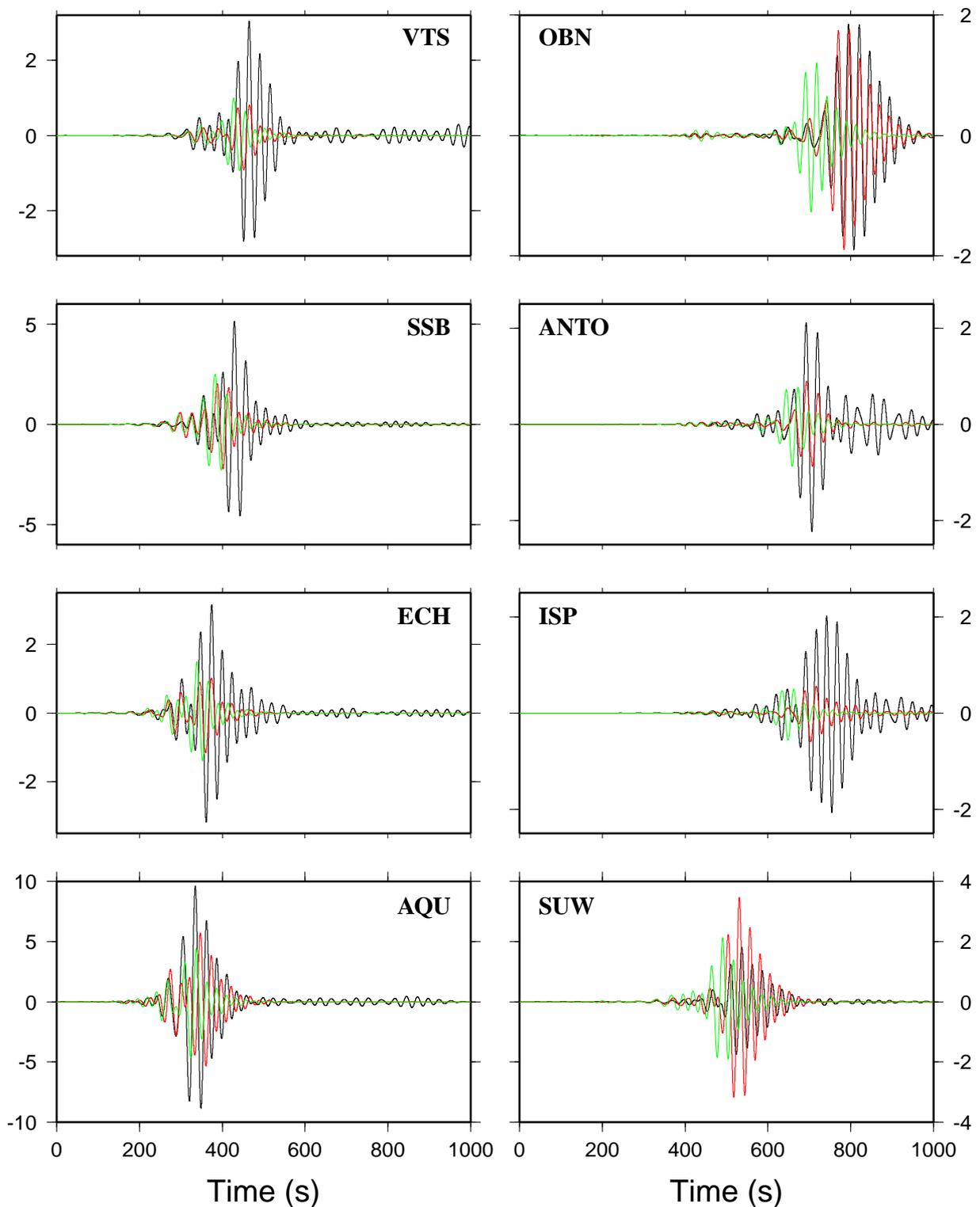


FIG. 3.11 – Enregistrements à huit stations différentes du séisme survenu le 12 avril 1998 en Autriche ( $M_w = 5.6$ ). En noir sont dessinées les données, en rouge les traces issues de la simulation éléments spectraux, et en vert le résultat d'une sommation de modes propres dans PREM. Les valeurs indiquées en ordonnée correspondent au déplacement vertical en micromètre. La bande de fréquence considérée est 20 s - 50 s.

# Chapitre 4

## Simulation de corrélations synthétiques par la méthode des éléments spectraux

### 4.1 Introduction

Depuis leur introduction il y a maintenant quatre ans (Shapiro & Campillo, 2004), les corrélations de bruit sismique ont connues un franc succès qui a donné lieu à de nombreuses images tomographiques de haute résolution (e.g. Shapiro *et al.*, 2005; Yao *et al.*, 2006; Cho *et al.*, 2007; Lin *et al.*, 2007; Yang *et al.*, 2007; Stehly *et al.*, 2008) et, plus récemment, à une technique de prévision des éruptions volcaniques (Brenuier *et al.*, 2008). Cependant, seule l'information sur la phase a été considérée jusqu'ici, et très rares sont les études qui évoquent l'amplitude (Larose *et al.*, 2007; Cupillard & Capdeville, 2008). Or c'est un des challenges des techniques tomographiques modernes que de prendre en compte le maximum d'informations dans les données, et d'énormes efforts ont été concentrés dans ce sens ces dernières décennies, notamment pour élaborer une résolution du problème direct qui permette de modéliser des formes d'onde complètes sans approximations sur le modèle de vitesses. Il en est résulté des méthodes performantes comme les éléments spectraux (Komatitsch & Vilotte, 1998; Komatitsch & Tromp, 1999; Chaljub, 2000; Capdeville, 2000; Komatitsch & Tromp, 2002a,b; Komatitsch *et al.*, 2002), et on peut maintenant se demander si les formes d'onde obtenues à partir des corrélations de bruit sismique peuvent ou non être utilisées dans le cadre de telles méthodes.

Dans le deuxième chapitre de cette thèse, nous avons présenté la méthode des éléments spectraux (SEM). Celle-ci permet, en une seule simulation et pour un modèles de vitesses 3D quelconque, de calculer la forme d'onde complète d'un signal reçu en différents récepteurs et induit par une source de type double-couple (censé représenter les séismes) ou force. Notre objectif, dans cette partie, va être d'utiliser la SEM pour modéliser les corrélations entre le bruit enregistré par une station donnée (que nous appellerons "station centrale") et le bruit enregistré à d'autres stations. Nous nous limiterons pour l'instant à des corrélations synthétiques obtenues à partir de bruit généré numériquement. Etant données les caractéristiques de telles corrélations (voir chapitre 1), nous verrons que le problème revient à créer une source étendue autour de la station centrale.

## 4.2 Le jeu de données synthétique

Le jeu de données que nous allons tenter de modéliser provient de l'expérience numérique menée dans la section 1.2.4. Cette expérience consiste à générer du bruit aléatoire dans une certaine zone à la surface de la Terre. A sa source, le bruit a un spectre plat entre 2 et 13 mHz, puis il se propage dans le modèle PREM (Dziewonski & Anderson, 1981). Le mouvement du sol induit par ce bruit est ensuite calculé pour 13 stations (une station "centrale" A et 12 stations situées à  $20^\circ$  de A dans différents azimuts) via une sommation de modes propres. Enfin, les corrélations entre l'enregistrement en A et les enregistrements aux autres stations sont calculées. La configuration de l'expérience est rappelée figure 4.1.

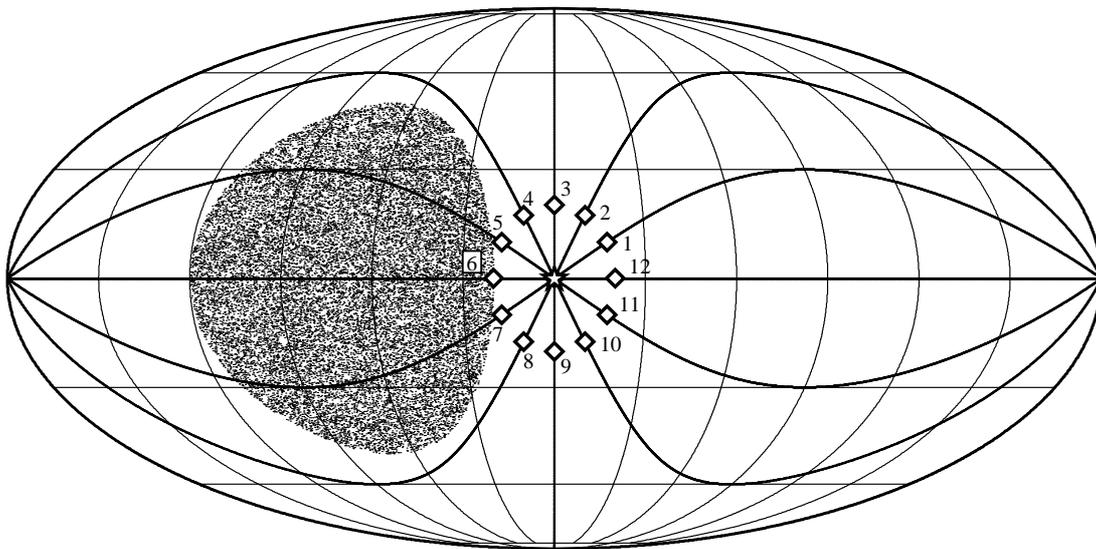


FIG. 4.1 – Configuration de l'expérience numérique à l'origine du jeu de données synthétique que l'on va utiliser. Les pixels gris sont autant de sources de bruit situées dans un cercle centré sur le point de coordonnées (longitude =  $-70^\circ$ , latitude =  $0^\circ$ ) et de rayon  $50^\circ$ . Le bruit se propage dans la Terre et est enregistré à la station A (représentée par l'étoile) et à douze autres stations (numérotées de 1 à 12) situées à  $20^\circ$  de A. D'épais traits noirs indiquent les grands cercles qui relient la station A aux autres stations.

Les signaux qui vont nous intéresser ici sont les corrélations du déplacement vertical enregistré aux stations 1 à 12 par le déplacement vertical enregistré en A, c'est-à-dire la partie négative des corrélations présentées figure 1.10. En passant ces corrélations dans les temps positifs et en les dérivant, on obtient la figure 4.2. Sur cette figure, nous voyons que les amplitudes des corrélations varient beaucoup d'un azimut à l'autre. Ceci est dû à la directivité induite par le caractère localisé des sources de bruit (voir par exemple Stehly *et al.* 2006 ou Cupillard & Capdeville 2008). Si l'on regarde les spectres des signaux, il est clair que cette directivité dépend de la fréquence. En effet, d'une corrélation à l'autre, les amplitudes spectrales diffèrent, ce qui signifie que le flux d'énergie du bruit allant de A vers une station # dépend non seulement de l'azimut de # par rapport à A mais également de la fréquence. Rappelons-nous que notre but, ici, est de modéliser les formes d'onde de la figure 4.2, c'est-à-dire de créer une source S qui, placé en A et rayonnant dans les trois dimensions de l'espace, sera capable de nous fournir pour chaque station # un signal ayant un spectre correct ainsi que la bonne amplitude par rapport au signal reçu aux autres stations. Pour réaliser cela, une des possibilités consiste à reprendre

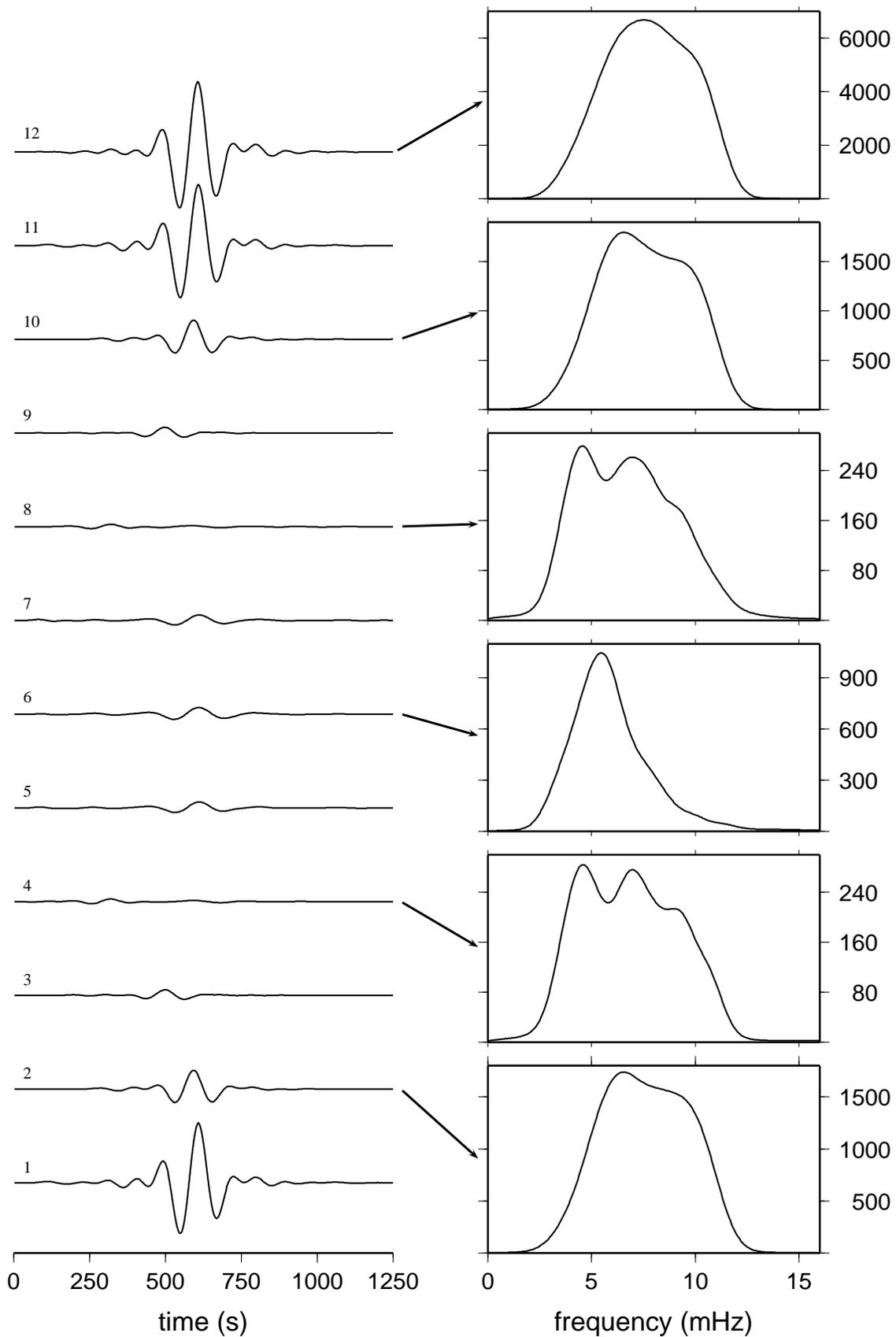


FIG. 4.2 – Représentation graphique des traces à modéliser (gauche). Chacune des traces est repérée par le numéro de la station dont elle est issue. Les spectres d’amplitude des stations paires sont par ailleurs représentés (droite).

l'équation (1.18) établie dans le premier chapitre :

$$C_{AX}(\omega) = Q \int_0^{R_T} \int_{\theta_A - \theta'}^{\theta_A + \theta'} \int_{\phi_A - \phi'}^{\phi_A + \phi'} S(r, \theta, \phi, \omega) \frac{G[(r, \theta, \phi), \mathbf{r}_X, \omega]}{i\omega} dr d\theta d\phi. \quad (4.1)$$

Dans cette expression, on retrouve la dérivée de la corrélation d'une station X par la station A en intégrant sur un volume fini autour de A la convolution d'une source  $S(r, \theta, \phi, \omega)$  et de la fonction de Green correspondante  $G[(r, \theta, \phi), \mathbf{r}_X, \omega]$ . On a donc à faire à une source étendue à la fois horizontalement et en profondeur et qui, pour convenir à notre problème, devra irradier les diagrammes présentés figure 4.3. Chacun de ces diagrammes représente l'amplitude d'une fréquence donnée en fonction de l'azimut par rapport à A. Pour couvrir tous les azimuts, nous avons procédé à une interpolation linéaire entre les valeurs relevées aux différentes stations. Apparaît une nouvelle fois la dépendance fréquentielle de la directivité. Cependant, cette dépendance est faible dans l'expérience menée ici et pourrait être beaucoup plus forte si une autre zone de bruit avec une autre bande de fréquence était ajoutée à la zone déjà existante. Dans l'avenir, c'est une expérience que nous espérons pouvoir mener.

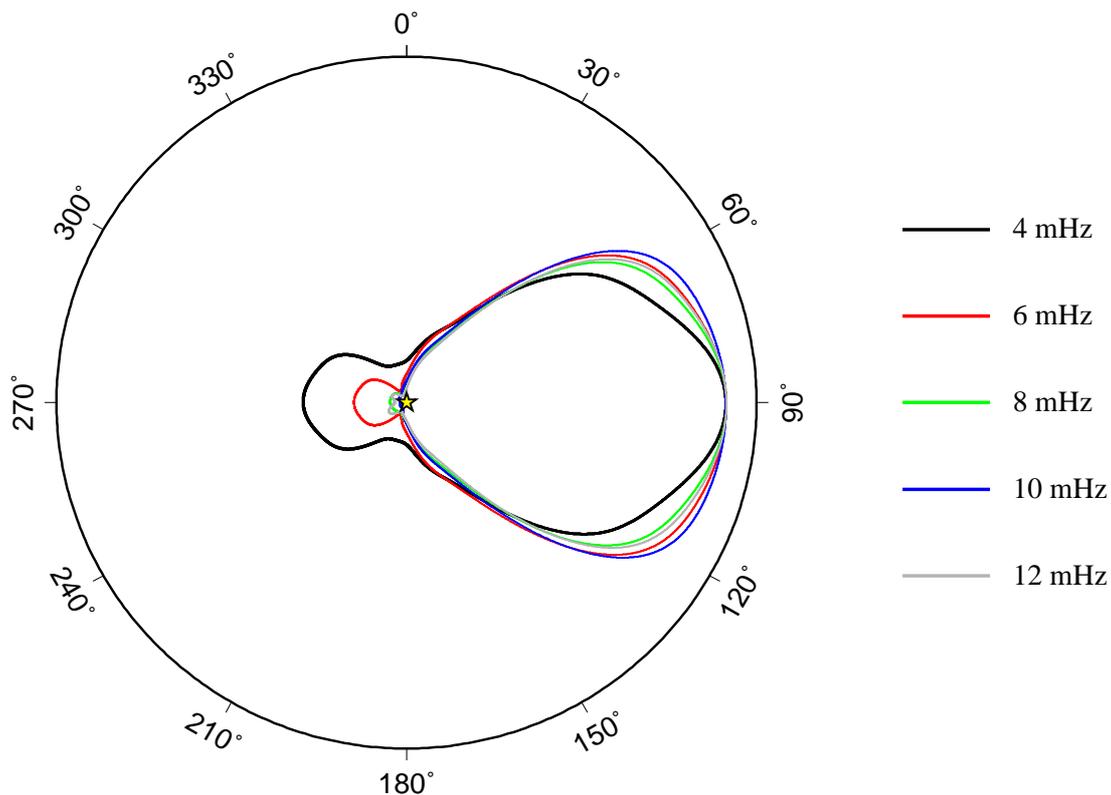


FIG. 4.3 – Diagrammes de radiation que devra fournir la source  $S$  (représentée par l'étoile jaune) pour modéliser correctement les données. Cinq fréquences sont considérées : 4, 6, 8, 10 et 12 mHz. Pour chaque diagramme, l'amplitude a été normalisée. Ce qui est mis en évidence, alors, est la différence de forme des diagrammes d'une fréquence à une autre.

## 4.3 Méthode

### 4.3.1 Principe

Pour construire la source que nous désirons, nous allons nous inspirer des expériences de retournement temporel opérées avec des ondes acoustiques par Derode *et al.* (2003). Voici ce que ces auteurs montrent :

Soient deux récepteurs I et J et une source K. Si K émet un signal impulsionnel, la corrélation dans le domaine des temps des enregistrements effectués en I et J peut s'écrire :

$$C_{JI}(t) = G(\mathbf{r}_I, \mathbf{r}_K, t) \otimes G(\mathbf{r}_J, \mathbf{r}_K, -t), \quad (4.2)$$

où  $\mathbf{r}_I$  (resp.  $\mathbf{r}_J, \mathbf{r}_K$ ) est le vecteur position de I (resp J, K),  $G$  est la fonction de Green et  $\otimes$  est l'opérateur de convolution. Le second membre de l'équation (4.2) est exactement le résultat que l'on retrouve en I si K rétropropage un signal impulsionnel venu de J. Ainsi, la corrélation est équivalente à une expérience de retournement temporel (figure 4.4).

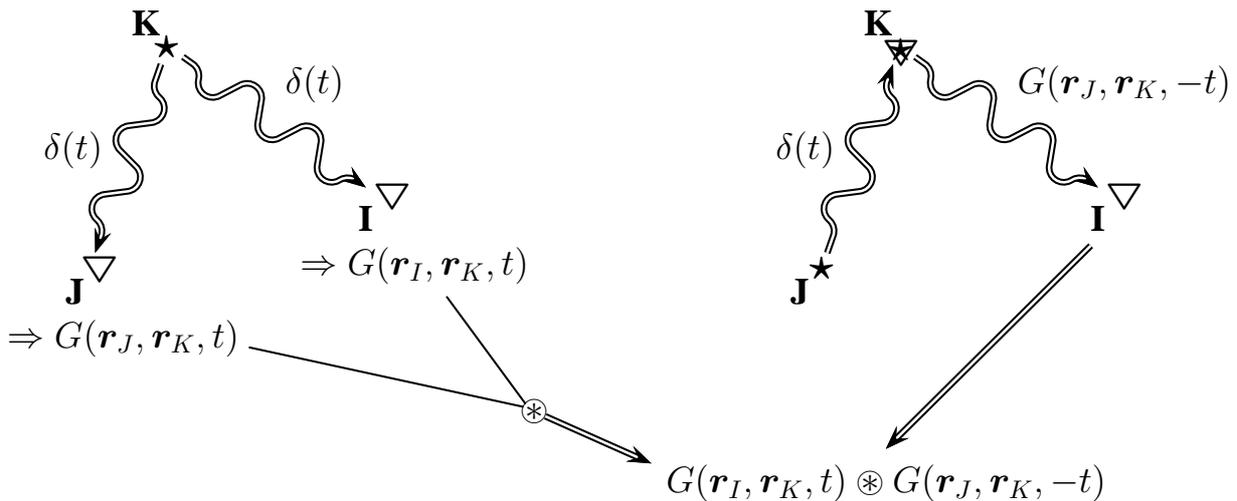


FIG. 4.4 – Equivalence entre corrélation et retournement temporel.

Maintenant, imaginons que l'on ait plusieurs sources K qui forment ensemble un contour  $S$  continu et fermé autour des deux récepteurs I et J. Dans ce cas, l'équivalence évoquée ci-dessus est toujours valable : la corrélation des enregistrements en I et en J du champ induit par toutes les sources K est égale à l'enregistrement en I d'un signal émis par J et rétropropagé par les sources K. L'avantage, maintenant, est que le résultat de la rétropropagation peut être évalué. En effet, lorsque le signal impulsionnel émis par J se propage partout dans le milieu jusqu'au contour  $S$  (étape 1), le champ reçu en I est la fonction de Green  $G(\mathbf{r}_J, \mathbf{r}_I, t)$ . Le contour  $S$  muni des sources K permettant un renversement temporel parfait, le signal qui sera enregistré en I lors de la rétropropagation (étape 2) sera  $G(\mathbf{r}_J, \mathbf{r}_I, -t)$ . A  $t = 0$ , le champ rétropropagé refocalise en J puis rediverge dans les temps positifs (étape 3). I enregistre alors  $G(\mathbf{r}_J, \mathbf{r}_I, t)$ . La corrélation étant égale au résultat de la rétropropagation (i.e. étape 2 + étape 3), on a

$$C_{JI}(t) = G(\mathbf{r}_J, \mathbf{r}_I, t) + G(\mathbf{r}_J, \mathbf{r}_I, -t). \quad (4.3)$$

Avec ce résultat, Derode *et al.* (2003) montrent bien que la corrélation de signaux venus de tous les azimuts permet de retrouver la fonction de Green entre deux points. Dans l'équivalence qu'ils utilisent, l'étape 2 (rétropropagation jusqu'à refocalisation en J) fournit la partie acausale de la corrélation tandis que l'étape 3 (redivergence à partir de J du champ rétropropagé) fournit la partie causale.

Pour créer notre source étendue, nous allons considérer les étapes 1 et 2 du processus qui vient d'être décrit. Dans l'étape 1, nous placerons une force impulsionnelle en J et calculerons numériquement les signaux reçus aux différents points K qui composent le contour S. Ces signaux correspondent bien évidemment à des fonctions de Green. Le spectre de chacune de ces fonctions de Green va alors être modifié afin de rendre compte des particularités du flux de bruit allant du point J à chaque point K. Dans l'étape 2, les nouveaux signaux ainsi formés seront rétropropagés jusqu'à refocalisation des ondes en J. Nous obtiendrons alors un petit volume autour de J qui contiendra l'essentiel de l'énergie présente dans le système. Ce volume constituera la source que nous cherchons et pourra être utilisé dans un problème direct de type éléments spectraux (ou autre) comme conditions initiales pour calculer le déplacement en n'importe quel point I du volume V contenu dans S. Un tel problème direct est équivalent à l'étape 3 du processus décrit par Derode *et al.* (2003), si bien que le déplacement calculé correspondra à la corrélation du bruit enregistré en I par le bruit enregistré en J.

Le principe de la méthode est résumé figure 4.5. Celui-ci ayant été énoncé, il s'agit maintenant de le démontrer rigoureusement, puis de détailler les modalités de sa mise en œuvre.

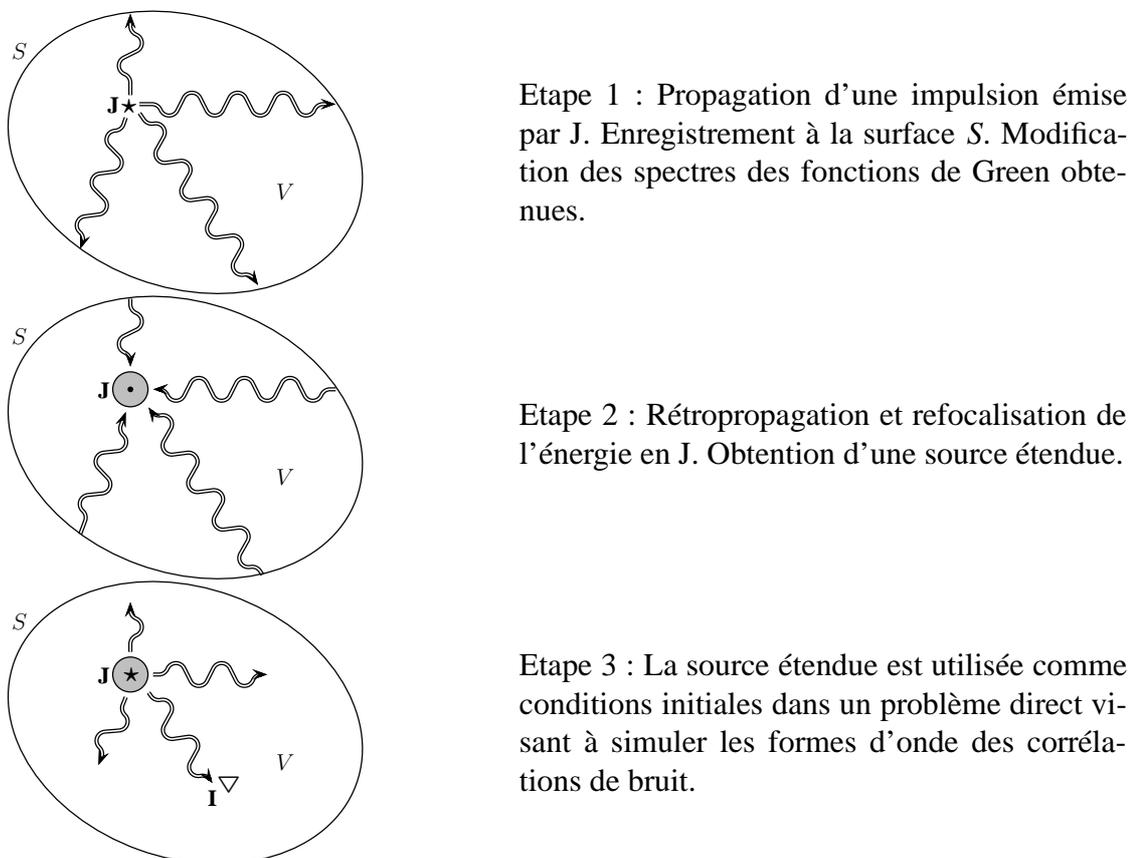


FIG. 4.5 – Schéma résumant la méthode qui va permettre de modéliser les corrélations de bruit.

### 4.3.2 Démonstration

Dans cette sous-partie, nous allons commencer par redémontrer le théorème de représentation. Nous utiliserons ensuite ce théorème pour valider le renversement temporel dans le cadre de l'élastodynamique.

#### Théorème de représentation

Soit un milieu élastique de volume  $V$  entouré d'une surface  $S$ . On note  $\mathbf{x}$  le vecteur position et on appelle  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$  le champ de déplacement à la fréquence  $\omega$  induit par une force volumique  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Soit  $\mathbf{g}$  une autre force volumique à l'origine d'un déplacement que l'on notera  $\mathbf{v}$ . Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2\mathbf{u} &= \text{div}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})] + \mathbf{f} \\ -\rho\omega^2\mathbf{v} &= \text{div}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})] + \mathbf{g} \end{aligned} \quad (4.4)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes dont nous rappelons qu'il est lié à un déplacement  $\mathbf{w}$  par le tenseur élastique d'ordre 4  $\mathbf{C}$  tel que

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) = \mathbf{C} : \nabla\mathbf{w}. \quad (4.5)$$

On remarque que

$$-\rho\omega^2 \int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = 0 \quad (4.6)$$

ce qui implique que

$$\int_V \mathbf{v} \cdot \text{div}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})] \, d\mathbf{x} - \int_V \mathbf{u} \cdot \text{div}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})] \, d\mathbf{x} + \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \, d\mathbf{x} - \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \, d\mathbf{x} = 0. \quad (4.7)$$

Le théorème de la divergence permet de développer le premier terme :

$$\int_V \mathbf{v} \cdot \text{div}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})] \, d\mathbf{x} = \int_V [\text{div}(\mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) - \nabla\mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})] \, d\mathbf{x} \quad (4.8)$$

$$= \oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} - \int_V \nabla\mathbf{v} : \mathbf{C} : \nabla\mathbf{u} \, d\mathbf{x} \quad (4.9)$$

où  $\mathbf{T}(\mathbf{u})$  est la traction définie par  $T_i(\mathbf{u}) = \sigma_{ij}n_j = C_{ijkl}\partial_k u_l n_j$  avec  $\mathbf{n}$  la normale sortante à la surface  $S$ . Cette traction correspond aux conditions aux limites associées au champ  $\mathbf{u}$ . Le même développement pour le deuxième terme donne

$$\int_V \mathbf{u} \cdot \text{div}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})] \, d\mathbf{x} = \oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_V \nabla\mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla\mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \quad (4.10)$$

Or  $C_{ijkl} = C_{klij}$  donc

$$\int_V \nabla\mathbf{v} : \mathbf{C} : \nabla\mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_V \nabla\mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla\mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad (4.11)$$

si bien que (4.7) devient

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} - \oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \, d\mathbf{x} - \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \, d\mathbf{x}. \quad (4.12)$$

L'expression (4.12) est le théorème de Betti. Si on prend  $g_i(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{in}$ , alors  $v_i(\mathbf{x}) = G_{in}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  (où  $\mathbf{G}$  est le tenseur de Green entre les points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ ) et le théorème de Betti conduit au théorème de représentation (Burridge & Knopoff, 1964) :

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{y}) &= \int_V G_{in}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &+ \oint_S G_{in}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_i(\mathbf{u}) d\mathbf{x} \\ &- \oint_S u_i(\mathbf{x}) C_{ijkl}(\mathbf{x}) \partial_k G_{ln}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ce théorème fournit de manière très générale, à partir de la fonction de Green du milieu, le champ déplacement dû à une force volumique  $\mathbf{f}$  pour des conditions aux limites données. Ces conditions aux limites sont spécifiées dans les deux intégrales de surface. La première fournit des conditions en traction tandis que la deuxième impose des conditions en déplacement aussi appelées conditions de Dirichlet.

### Renversement temporel

Soit un point de  $V$  repéré par son vecteur position  $\mathbf{y}'$ . Rétropropager la fonction de Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}', \omega)$  entre ce point et un point  $\mathbf{x}$  de la surface  $S$  consiste à appliquer à  $S$  les conditions en traction et en déplacement correspondant à la renversée temporelle de  $G$ , c'est-à-dire la fonction de Green conjuguée  $G^*$ . Si aucune force volumique n'est appliquée à  $V$ , alors on a

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{y}) &= \oint_S G_{in}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) C_{ijkl}(\mathbf{x}) \partial_k G_{lm}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}') n_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &- \oint_S G_{im}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}') C_{ijkl}(\mathbf{x}) \partial_k G_{ln}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

En utilisant le théorème de Betti (4.12), on obtient

$$u_n(\mathbf{y}) = \int_V G_{im}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}') \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{x} - \int_V G_{in}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta_{im} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}') d\mathbf{x} \quad (4.15)$$

$$= G_{nm}^*(\mathbf{y}, \mathbf{y}') - G_{mn}(\mathbf{y}', \mathbf{y}) \quad (4.16)$$

$$= -2\Im[G_{nm}(\mathbf{y}, \mathbf{y}')]. \quad (4.17)$$

Le passage de (4.16) à (4.17) se fait grâce au théorème de réciprocité, qui lui aussi se démontre par le théorème de Betti (Aki & Richards, 1980). Au final, on voit que, suite à la rétropropagation, le déplacement en un point  $\mathbf{y}$  de  $V$  s'exprime comme la partie imaginaire de la fonction de Green entre  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{y}'$ , ce qui correspond à la corrélation du bruit en  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{y}'$  dans le cas idéal, c'est-à-dire lorsque l'équipartition est satisfaite (Sánchez-Sesma & Campillo, 2006; Sánchez-Sesma *et al.*, 2006).

Notons ici que des expériences de renversement temporel ont déjà été menées dans le cas élastique. Larmat *et al.* (2006) ont en effet rétropropagé des enregistrements longue-période du grand séisme de Sumatra (26 décembre 2004) et ont retrouvé avec succès les paramètres spatio-temporels de la source.

## 4.4 Mise en œuvre

Nous allons maintenant appliquer notre méthode au jeu de données présenté en 4.2. La surface  $S$  que nous allons utiliser est un cylindre de révolution dont la génératrice est le rayon terrestre passant par  $A$ . La base supérieure de  $S$  sera une calotte qui coïncide avec la surface de la Terre et dont le diamètre est  $40^\circ$ . La base inférieure sera un disque dont le centre se situe à une profondeur que nous noterons  $D_b$ . Tout cela est schématisé figure 4.6.

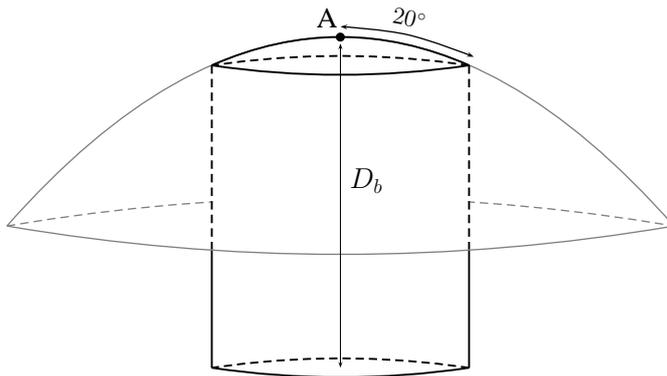


FIG. 4.6 – Schéma du contour fermé  $S$  (en noir) utilisé dans l'expérience de renversement temporel. En gris est représentée la surface de la Terre.

### 4.4.1 Etape 1 : propagation d'une impulsion et renormalisation spectrale

Dans un premier temps, nous calculons le champ de déplacement et la contrainte reçue en  $S$  à la suite d'une impulsion verticale placée en  $A$ . L'ondelette source associée à cette impulsion est présentée figure 4.7. Le modèle de vitesse considéré est le PREM (figure 2.12) et le calcul s'effectue grâce à une sommation des modes propres de la Terre (e.g. Woodhouse & Girnius, 1982). L'anélasticité est prise en compte.

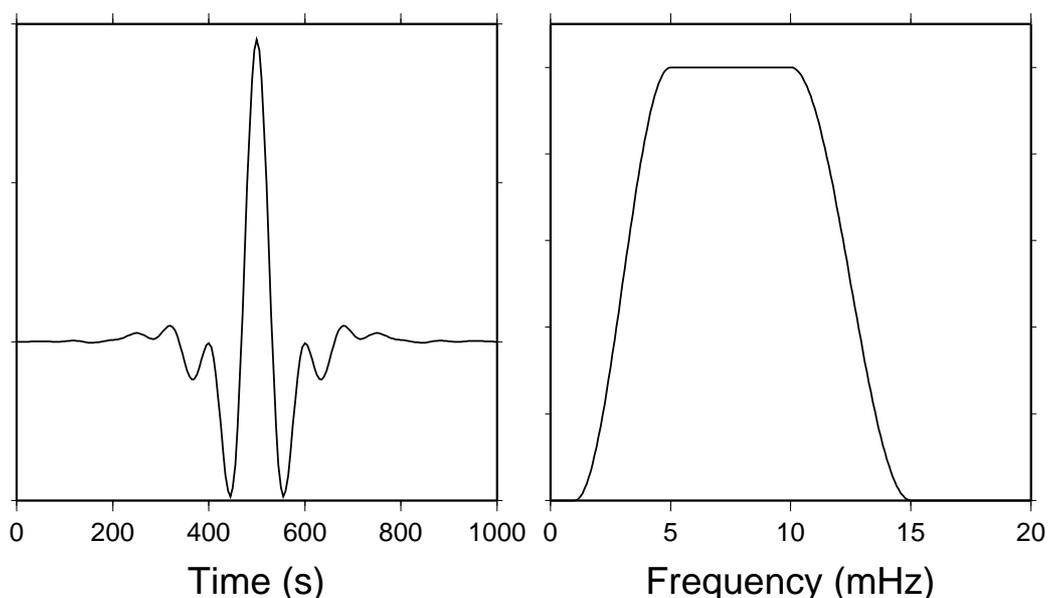


FIG. 4.7 – Ondelette source en temps (à gauche) et en fréquence (à droite) utilisée dans la première étape.

Les récepteurs qui discrétisent la surface  $S$  sont placés uniquement sur la surface latérale du cylindre. En effet, le flux d'énergie à la surface libre est nul, et  $D_b$  est pris suffisamment grand (870 km exactement) pour qu'aucune énergie ne traverse le disque inférieur. Sur la surface latérale, les récepteurs sont répartis sur différentes profondeurs. Ces profondeurs sont définies par les interfaces du modèle PREM et par les nœuds de Gauss-Lobatto-Legendre correspondant à l'ordre polynômial qui, dans chaque couche du modèle, sera utilisé par la quadrature (de type GLL) pour évaluer les intégrales surfaciques de l'équation (4.14) nécessaires à la rétropropagation au début de l'étape 2. Au final, nous nous retrouvons avec 20 profondeurs. A chacune de ces profondeurs, les récepteurs sont répartis régulièrement, tous les  $\Delta\alpha = 2.5^\circ$ . Le nombre total de récepteurs est alors de 2880.

Une fois le déplacement et la traction calculés, il faut opérer une renormalisation spectrale, c'est-à-dire modifier les spectres d'amplitude des trois composantes du déplacement et des trois composantes de la traction pour prendre en compte, selon l'azimut du récepteur par rapport au point A, les caractéristiques spectrales du flux de bruit allant de A au récepteur. Bien entendu, ces caractéristiques vont être tirées des données. Pour chaque azimut, nous ne disposons que de la composante verticale du déplacement en surface. Modifier les spectres des déplacements synthétiques verticaux calculés à la surface ne va donc pas poser de problème. Pour les autres composantes ainsi que les déplacements en profondeur, nous sommes en revanche contraint de faire une approximation : n'ayant pas de données correspondant à ces signaux, nous appliquerons les mêmes modifications spectrales que celles effectuées pour le déplacement vertical de surface tout en conservant les rapports d'amplitude avec ce dernier. Nous procéderons de la même manière en ce qui concerne la traction.

Pour expliquer cela de manière précise, appelons  $F^k(\omega)$  les caractéristiques spectrales du flux de bruit, où  $k$  fait référence à l'azimut  $\alpha_k = (k-1)\Delta\alpha$ ,  $1 \leq k \leq m$ ,  $m$  étant le nombre d'azimuts différents (144 ici). Notons  $u_i^{k,j}$  la  $i^{\text{ème}}$  composante du déplacement enregistré au récepteur d'azimut  $k$  et situé à la  $j^{\text{ème}}$  profondeur,  $1 \leq j \leq n$ , avec  $n$  le nombre de profondeurs (20 ici), la  $n^{\text{ème}}$  profondeur étant la plus superficielle. La renormalisation spectrale consiste alors à remplacer le spectre d'amplitude  $|u_i^{k,j}(\omega)|$  par le spectre  $A_i^{k,j}(\omega)$  défini par

$$A_i^{k,j}(\omega) = \frac{F^k(\omega)}{|u_3^{k,n}(\omega)|} |u_i^{k,j}(\omega)|, \quad (4.18)$$

où  $u_3^{k,n}$  est le déplacement vertical à la surface terrestre dans l'azimut  $k$ .

Qu'est-ce exactement que  $F^k$  ? Pour répondre à cette question, limitons-nous à l'étude de la composante verticale du déplacement à la surface libre. D'après l'équation (4.18), dans un azimut  $k$  donné, cette composante aura comme nouveau spectre  $A_3^{k,n}(\omega) = F^k(\omega)$ . Il nous faut donc choisir  $F^k$  tel que  $F^k(\omega) = S^k(\omega)P(\omega)$ , où  $S^k$  est le spectre du bruit pour l'azimut  $k$  et  $P$  le propagateur choisi pour la simulation (PREM ici). En effet, dans l'étape 2, la rétropropagation se fera dans le même milieu que celui utilisé dans cette étape si bien que la source étendue que l'on obtiendra sera bien celle que nous cherchons :  $S(\omega) \sim \sum_k S^k(\omega)P(\omega)P^{-1}(\omega) \sim \sum_k S^k(\omega)$ . Bien entendu,  $F^k$  sera extrait des corrélations  $C^k$ , mais le problème est que, si l'on travaille avec des données réelles, le milieu n'est pas connu (puisque, *in fine*, c'est lui que nous espérons retrouver via la tomographie) et nous avons  $C^k(\omega) = S^k(\omega)P'(\omega)$ , où  $P'$  est le propagateur correspondant au milieu réel. Passer de  $C^k$  à  $F^k$  va alors nécessiter quelques astuces dont nous parlerons au chapitre 5. Ici, ces astuces sont inutiles car nous connaissons le milieu dans le-

quel s'est propagé le bruit : il s'agit de PREM, donc  $P'(\omega) = P(\omega)$  et  $F^k(\omega) = C^k(\omega)$ . En ce qui concerne les azimuts pour lesquels nous n'avons pas de données, nous procéderons à une interpolation linéaire, comme pour la figure 4.3.

Les figures 4.8 et 4.9 montrent quelques exemples de signaux avant et après renormalisation. On rappelle que les composantes horizontales du déplacement en surface (i.e.  $u_1^{k,n}$  et  $u_2^{k,n}$ ) ainsi que les trois composantes des déplacements calculés en profondeur ont des spectres qui, après renormalisation, conservent les amplitudes relatives par rapport au spectre du déplacement vertical. Cela est visible à la fois sur les figures 4.8 et 4.9 et dans l'équation 4.18.

La rétropropagation de l'étape 2 impliquant également la traction  $\mathbf{T}$ , celle-ci doit aussi subir une renormalisation spectrale. Les nouveaux spectres  $\bar{A}$  seront construits de la même manière que les spectres  $A$  du déplacement :

$$\bar{A}_i^{k,j}(\omega) = \frac{F^k(\omega)}{|T_3^{k,n}(\omega)|} |T_i^{k,j}(\omega)|. \quad (4.19)$$

#### 4.4.2 Etape 2 : renversement temporel et rétropropagation

Dans cette étape, nous commençons par renverser la traction et le déplacement obtenus dans l'étape 1. Dans le domaine des fréquences, cela revient à considérer les champs conjugués  $\mathbf{T}^*$  et  $\mathbf{u}^*$ . Ces champs sont ensuite appliqués comme conditions aux limites à la surface  $S$ . Des ondes vont alors se propager à l'intérieur du volume  $V$  défini par  $S$  jusqu'à refocaliser en A.

Comme nous l'avons déjà dit, les intégrales de surface qui permettent de prendre en compte les conditions aux limites en traction et en déplacement à la surface  $S$  (voir équation (4.13)) vont être évaluées via une quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre (voir équation (2.21)). Cela explique pourquoi, dans chaque couche du modèle de vitesse, nous avons choisi de calculer, à l'étape 1, le déplacement et la traction aux nœuds de GLL associés à un certain ordre polynomial. Par ailleurs, les fonctions de Green du modèle (PREM) qui interviennent dans l'expression (4.13) seront calculées par sommation de modes propres. Seul le mode fondamental sera alors utilisé. En effet, dans le premier chapitre, nous avons vu que les modes harmoniques émergeaient des corrélations de bruit avec une amplitude faible. Nous nous permettons donc de les omettre ici.

Il est important de préciser que le développement théorique de la sous-section 4.3.2 s'applique à un milieu non-atténuant. Or il est essentiel pour nous de prendre en compte l'atténuation car les corrélations ont été générées dans un milieu atténuant. Dans la sommation de modes réalisées pour la rétropropagation, cela se fait aisément en prenant  $-Q$  comme facteur de qualité ( $Q$  étant le facteur de qualité du milieu de propagation de l'étape 1).

La figure 4.10 montre différents clichés du champ d'onde rétropropagé. A  $t = 0$ , l'énergie se focalise en A et définit un champ de vitesse et un champ de déplacement qui pourront être utilisés sous forme de conditions initiales comme source dans un problème direct. Quelques caractéristiques de cette source sont présentées figures 4.11 et 4.12.

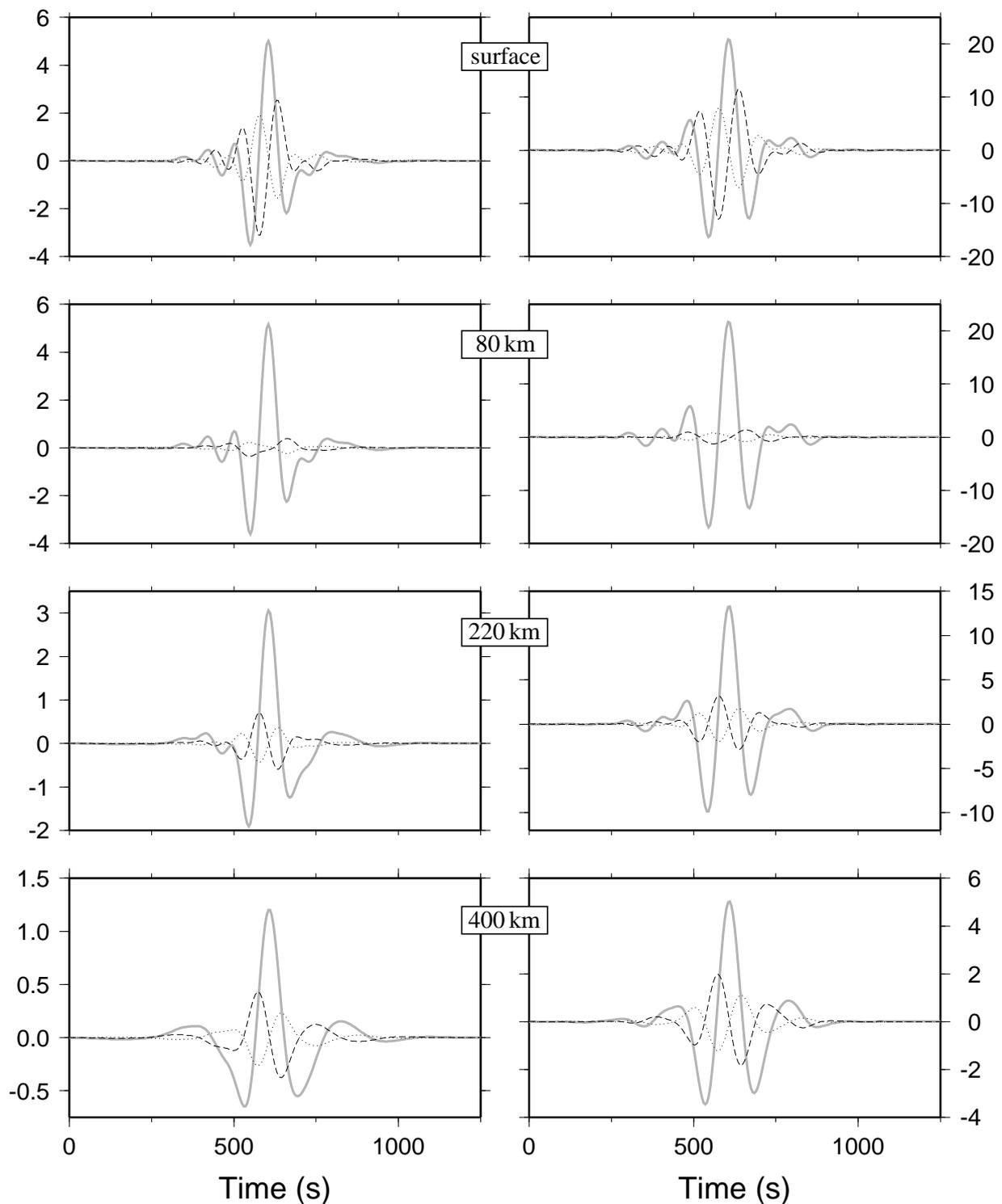


FIG. 4.8 – Valeur du déplacement à quatre profondeurs différentes pour l’azimut  $30^\circ$  avant (à gauche) et après (à droite) renormalisation spectrale. En gris est représenté le déplacement vertical tandis que les composantes horizontales nord-sud et est-ouest sont dessinées respectivement en tireté et pointillé noir. L’amplitude absolue n’ayant pas de sens dans notre problème, nous ne donnons pas d’unité à l’axe des ordonnées, l’important étant les amplitudes relatives d’une trace à l’autre.

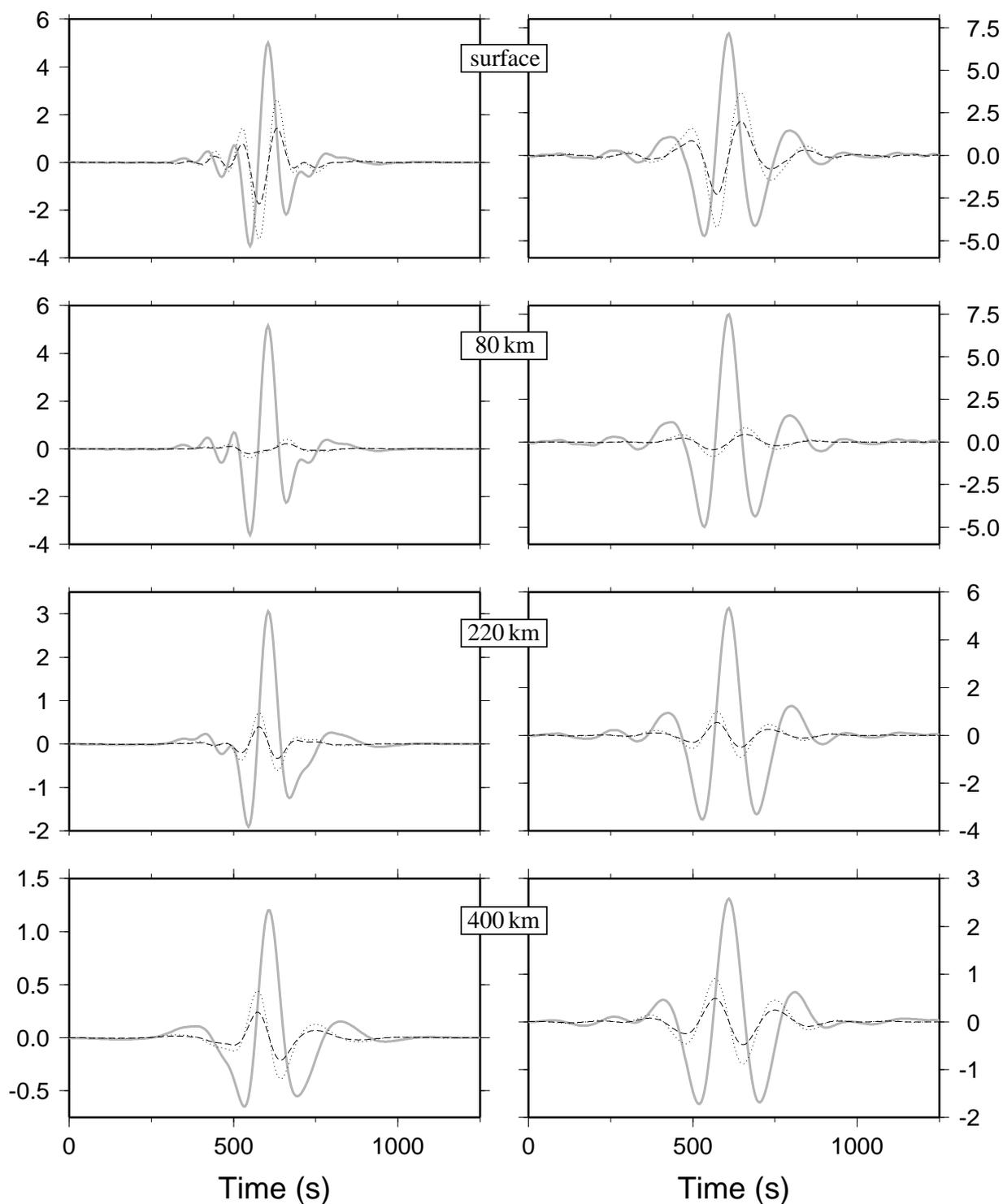


FIG. 4.9 – Valeur du déplacement à quatre profondeurs différentes pour l’azimut  $-60^\circ$  avant (à gauche) et après (à droite) renormalisation spectrale. En gris est représenté le déplacement vertical tandis que les composantes horizontales nord-sud et est-ouest sont dessinées respectivement en tireté et pointillé noir. L’amplitude absolue n’ayant pas de sens dans notre problème, nous ne donnons pas d’unité à l’axe des ordonnées, l’important étant les amplitudes relatives d’une trace à l’autre.

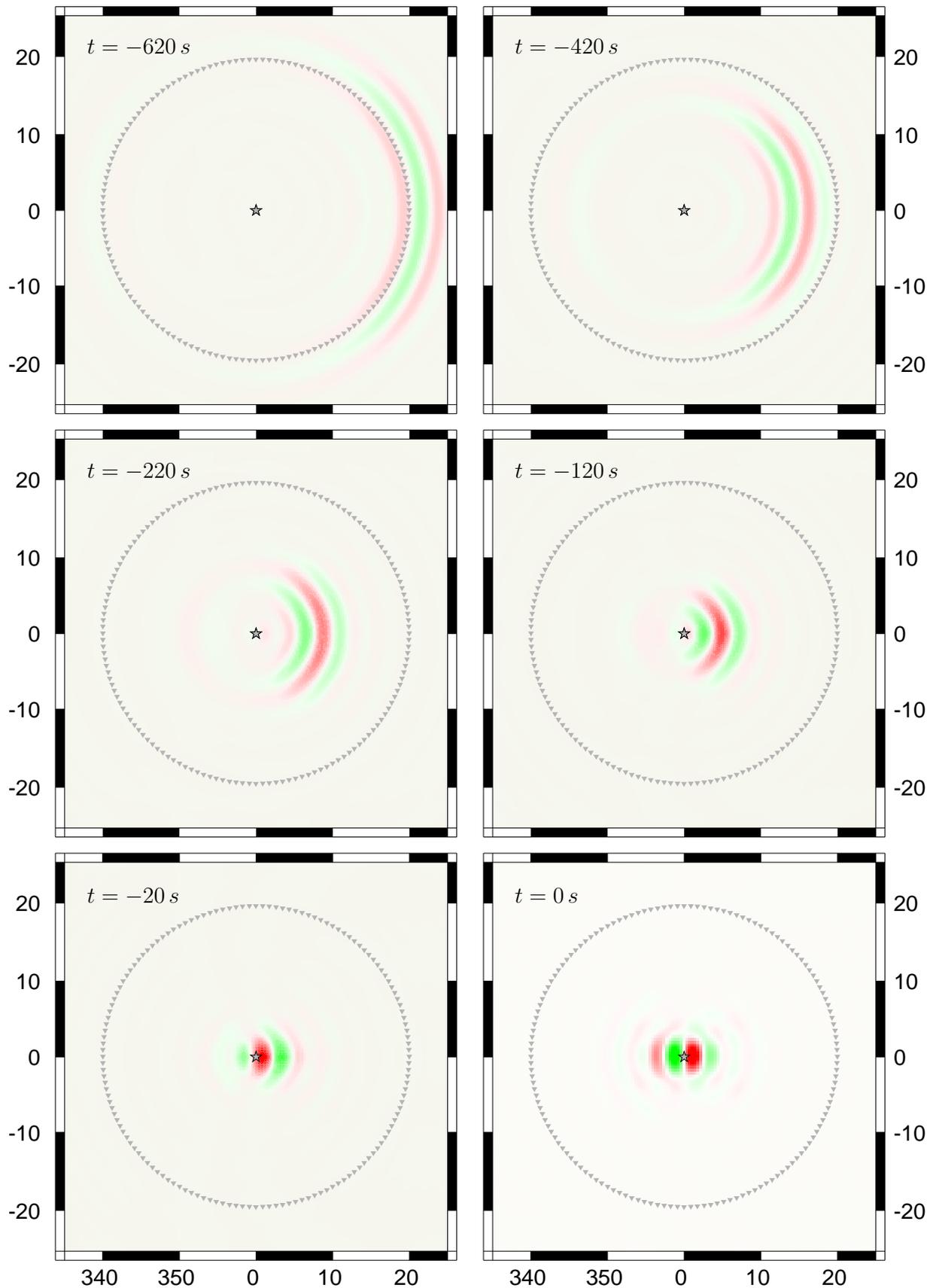


FIG. 4.10 – Différents clichés du champ rétropropagé. C'est la composante verticale du déplacement en surface qui est représentée ici. L'étoile indique la station centrale A et les petits triangles sont les stations en surface utilisées dans l'étape 1. L'échelle de couleur est donnée figure 4.11.

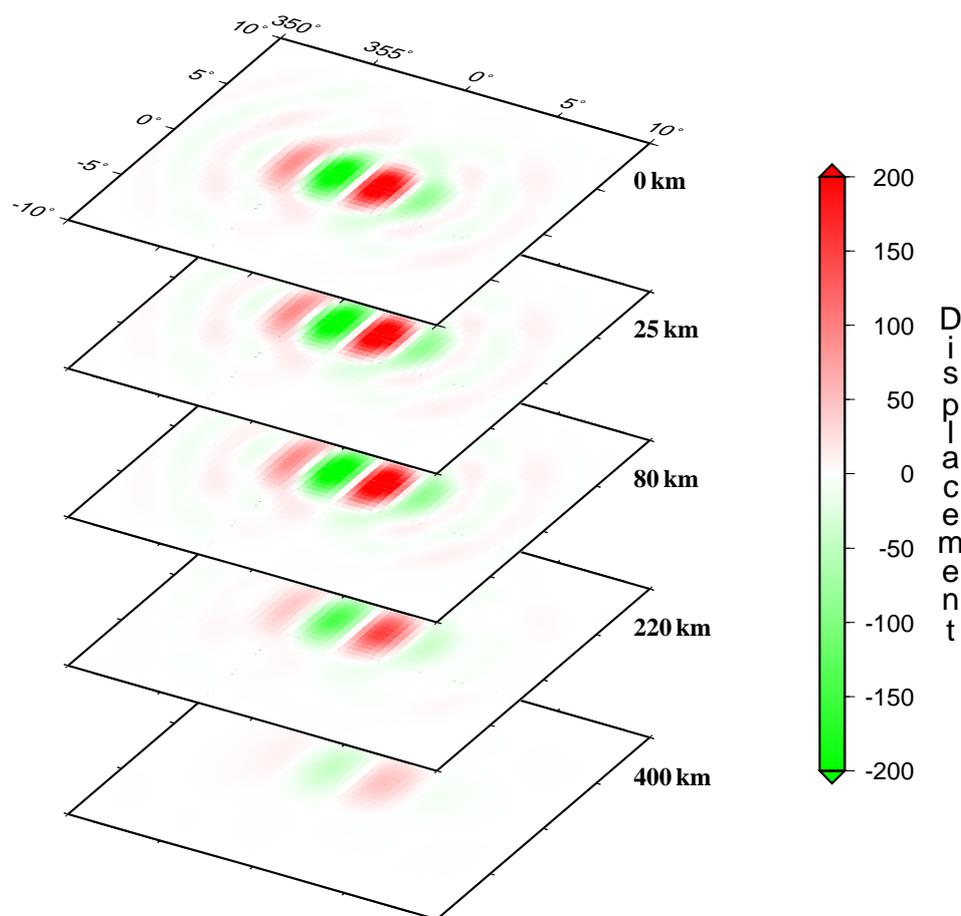


FIG. 4.11 – Composante verticale, dans le plan horizontal et pour différentes profondeurs, du déplacement obtenu à la refocalisation.

#### 4.4.3 Etape 3 : Introduction de la source étendue dans les éléments spectraux et simulation des corrélations de bruit

Nous allons maintenant procéder à une simulation éléments spectraux dans laquelle les champs de vitesse et de déplacement obtenus dans l'étape 2 vont constituer la source qui permettra, selon nos espérances, de retrouver les formes d'onde issues des corrélations de bruit présentées figure 4.2. Le modèle utilisé sera le PREM, dont nous savons qu'il est le milieu ayant servi à construire les corrélations. Ainsi, aucune erreur entre les formes d'onde simulées et les données synthétiques ne sera censée provenir de la structure.

Le morceau de Terre considéré dans la simulation éléments spectraux est dessiné, vu du dessus, figure 4.13. Sa taille est de  $60^\circ \times 60^\circ \times 1000$  km. La plus petite longueur d'onde propagée étant d'environ 180 km, nous utilisons des éléments de  $2.5^\circ$  de côté et un ordre polynômial  $N = 8$ . Par ailleurs, les fines couches superficielles du modèle PREM nous contraignent à adopter un pas de temps très petit : 0.025 s. Avec de tels paramètres, 1200 s de signal requiert 50 minutes de calcul sur 16 nœuds bi-processeurs Xéon quad-core du nouveau cluster du Service de Calcul Parallèle de l'IPGP. Bien évidemment, l'utilisation d'un ordre 4 permettrait d'adopter un pas de temps nettement plus grand, ce qui réduirait considérablement le temps de calcul, mais nous préférons utiliser un ordre 8 pour nous assurer une bonne convergence.

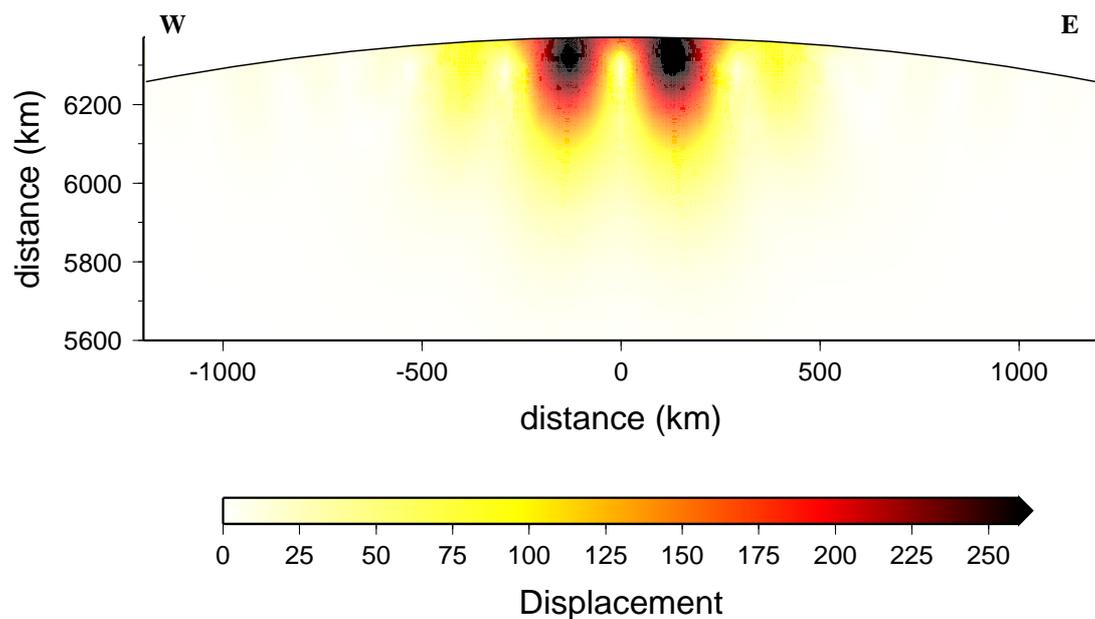


FIG. 4.12 – Coupe dans le plan équatorial de la norme du déplacement obtenu à la refocalisation.

Figure 4.14 sont représentés quelques clichés du champ d'onde en train de se propager. Les résultats de la propagation sont montrés figure 4.15 et 4.16. Sur la figures 4.15, les traces obtenues avec la SEM et la source étendue sont superposées aux données, sans aucune opération sur l'amplitude. Nous retrouvons très bien les amplitudes relatives ainsi que la forme d'onde de toutes les corrélations. Cependant, d'importants décalages de phase sont observés pour les traces issues des stations 2, 3 et 4, et de leur symétrique respectif par rapport à l'équateur, c'est-à-dire les stations 10, 9 et 8. Ces décalages sont encore plus flagrants lorsque l'on zoome sur chacune des formes d'onde (figure 4.16), mais ils n'ont rien de surprenant. En effet, les corrélations concernées proviennent de paires de stations pour lesquelles aucune source de bruit ne se trouve sur le grand cercle reliant les stations en question (voir figure 4.1). Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, les signaux issus de telles paires présentent des temps d'arrivée qui ne correspondent pas aux temps de trajet ballistiques d'une onde qui irait d'une station à l'autre. Dans l'expérience que nous menons, nous ne pouvons bien évidemment pas espérer retrouver ces temps d'arrivée "anormaux". Cela n'aurait par ailleurs qu'un faible intérêt car ce type de données n'apparaît quasiment jamais dans les corrélations effectuées avec du bruit réel (Stehly *et al.*, 2007).

Les formes d'onde que notre simulation parvient à modéliser correctement ne sont pas parfaites. Pour les corrélations issues des stations 5, 6 et 7, dont l'amplitude est faible, le signal émerge mais un bruit de fond non négligeable subsiste qui explique les différences entre le résultat de la modélisation et les données synthétiques. Quant aux signaux des stations 1, 11 et 12, les différences observées peuvent provenir de modes harmoniques ayant une petite contribution dans la forme d'onde de la corrélation, contribution que nous ne prenons pas en compte puisque seul le mode fondamental a été rétropropagé pour former la source virtuelle étendue. Nous remarquons d'ailleurs ici qu'une des caractéristiques de cette source est qu'elle ne propage qu'une onde de surface, ce qui est tout à fait original.

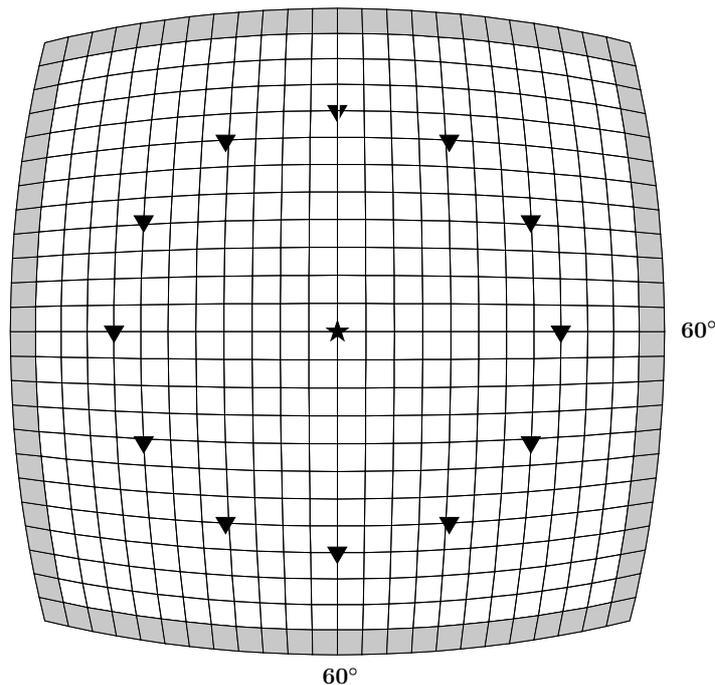


FIG. 4.13 – Vue du dessus du morceau de Terre utilisé pour la simulation éléments spectraux. Horizontalement, le morceau a une taille de  $60^\circ \times 60^\circ$  et est décomposé en éléments de  $2.5^\circ \times 2.5^\circ$ . Les éléments grisés indiquent les PML, l'étoile représente la station A (qui est aussi le centre de la source étendue) et les triangles sont les récepteurs.

## 4.5 Conclusion

Nous avons réussi à créer une source virtuelle capable de générer un champ anisotrope, c'est-à-dire une source qui irradie des amplitudes spectrales spécifiques pour chaque azimut. Ces amplitudes correspondent au flux de bruit sismique qui traverse la station centrale A où est appliquée la source et qui se retrouve dans les corrélations entre le bruit enregistré à cette station centrale et le bruit enregistré à différentes stations en différents azimuts autour de A. Notons que les corrélations avec A de deux stations distinctes mais qui ont le même azimut par rapport à A ne vont pas nécessairement "voir" le même flux de bruit (leurs zones anti-Fresnel étant différentes), si bien qu'une source virtuelle donnée ne sera valable que pour une certaine couronne autour de A.

Comme les tenseurs de moment sismique pour les séismes, les sources étendues que nous venons d'introduire peuvent être utilisées dans un problème direct pour modéliser les formes d'onde des nouvelles données que sont les corrélations de bruit sismique. Ainsi, l'étude tomographique des structures géologiques impliquées dans ces corrélations ne semble pas devoir se limiter aux temps d'arrivée. Grâce aux sources présentées et à la méthode des éléments spectraux, une utilisation de l'amplitude semble possible pour étudier la structure tridimensionnelle de la Terre. Dans le chapitre suivant, nous tentons de construire une source virtuelle pour modéliser des données réelles. Le problème direct éléments spectraux se fera alors avec RegSEM qui, comme dans ce chapitre, ne souffre pas de l'absence de la CMB car seule une onde de surface est propagée, les ondes de volume n'étant pas retrouvées dans les corrélations.

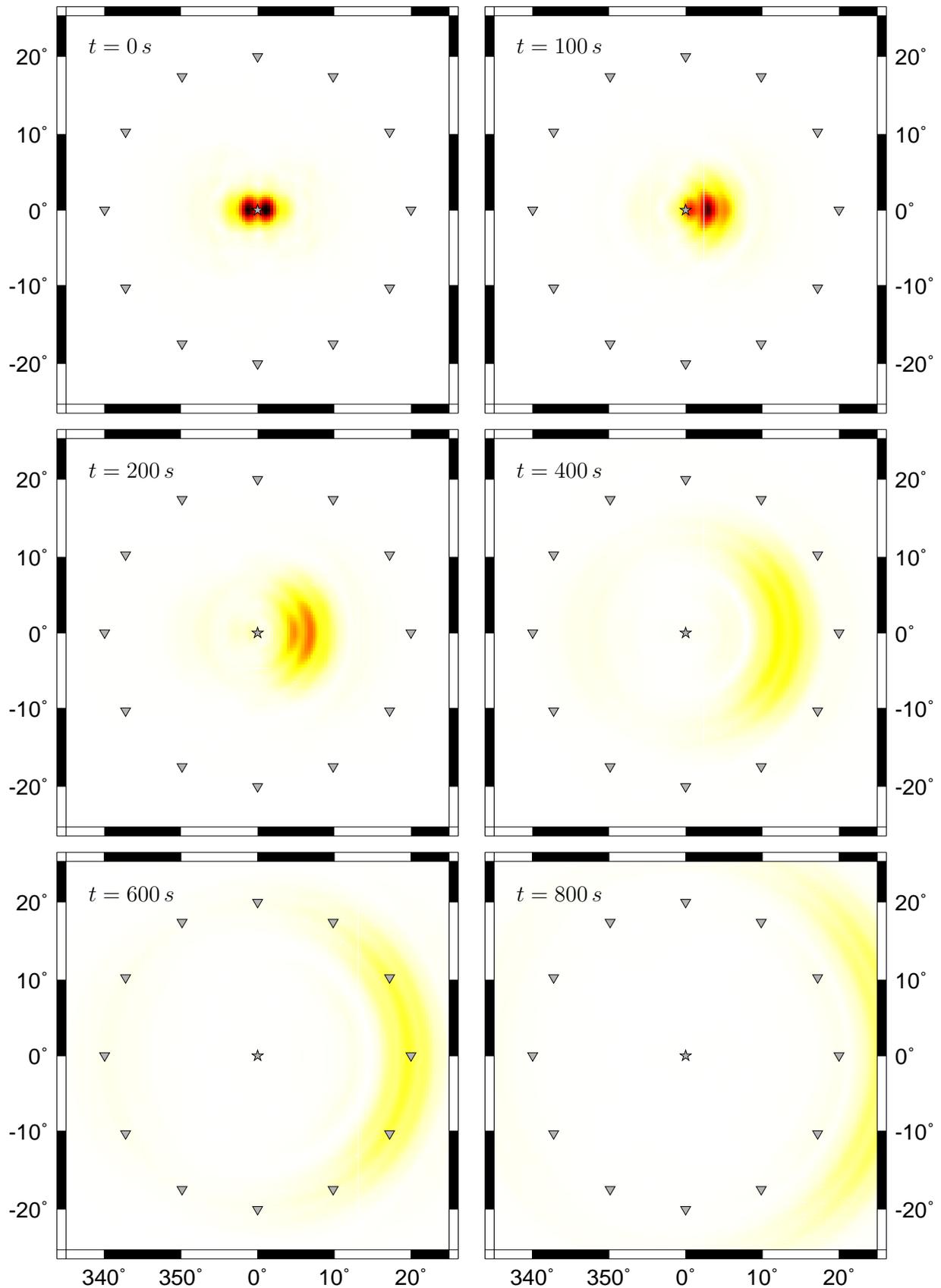


FIG. 4.14 – Norme du déplacement en surface à différents instants de la propagation. L'étoile indique la station centrale A et les triangles sont les récepteurs 1 à 12 définis en 4.2. L'échelle de couleur est celle de la figure 4.12.

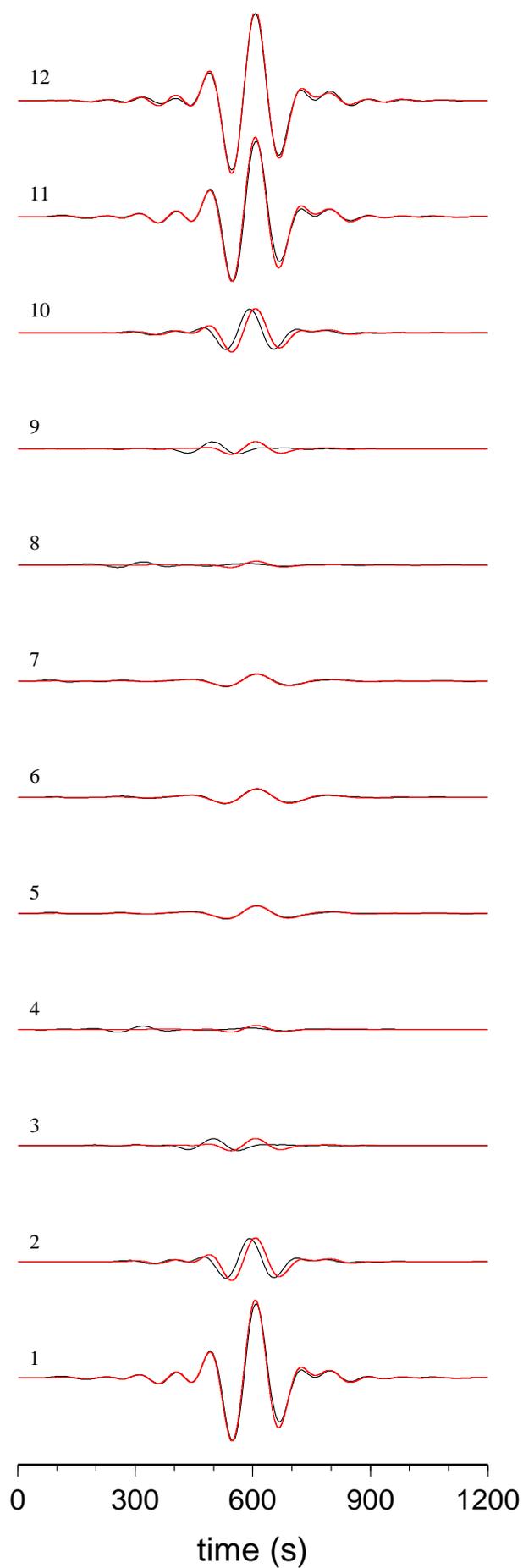


FIG. 4.15 – Déplacement vertical issu de la simulation éléments spectraux (en rouge) et données obtenues par corrélation de bruit (en noir). Le numéro qui repère chacune des traces indique la station d'où provient le signal.

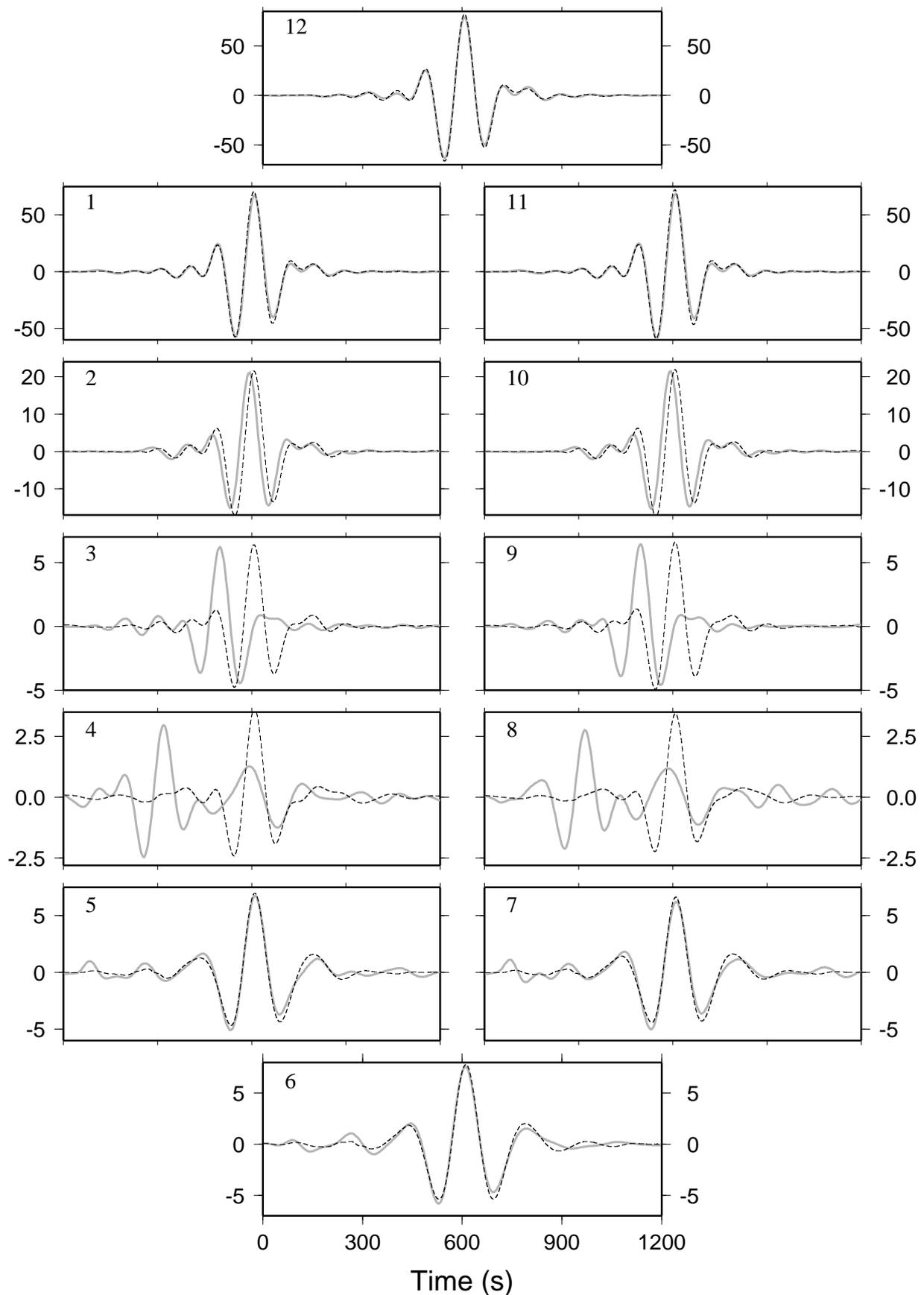


FIG. 4.16 – Comparaison des résultats de la simulation éléments spectraux (en pointillé noir) avec les données (en gris). Le numéro qui repère chacune des traces indique la station d'où provient le signal.

## Chapitre 5

# Simulation éléments spectraux de formes d'onde obtenues par corrélation de bruit sismique réel

La méthode décrite dans le précédent chapitre doit maintenant être testée avec des données réelles. Nous présentons ici les premiers résultats d'une simulation censée modéliser la forme d'onde de corrélations issues des nombreuses stations sismologiques qui couvrent le sol européen. Après avoir présenté le jeu de données que nous souhaitons simuler, nous nous attacherons à mettre en lumière les principales contraintes que pose le bruit sismique réel vis-à-vis de l'application de notre méthode. Grâce à quelques hypothèses, nous passerons outre ces contraintes et mettrons en œuvre notre simulation.

Une difficulté importante sera de séparer, dans les spectres des corrélations, ce qui relève du bruit de ce qui provient de la structure 3D du milieu de propagation. L'idée, alors, sera de construire pour quelques stations "centrales" proches les unes des autres des diagrammes indiquant, en fonction de l'azimut, l'amplitude spectrale observée dans les corrélations de chacune des stations centrales avec le reste du réseau. Les diagrammes ainsi construits seront ensuite sommés pour n'en former qu'un seul dans lequel ne restera que les amplitudes spectrales induites par le bruit. Autrement dit, nous supposerons que :

- les effets de propagation 3D sont locaux.
- Les sources de bruit sont suffisamment loin pour que les stations centrales voient toutes le même flux de bruit, la surface définie par les stations étant alors considérée comme ponctuelle par rapport à la distance qui sépare cette surface des sources de bruit.

## 5.1 Le jeu de données

### 5.1.1 Présentation

Avec la Californie et le Japon, l'Europe est une des régions les plus instrumentées du monde. Le grand nombre de stations sismologiques dont sa surface est pourvue rend favorable

l'étude de sa structure interne, que ce soit par l'intermédiaire de séismes (voir par exemple Marone *et al.* 2004 et les références qui y sont citées) ou grâce à des corrélations de bruit sismique (Yang *et al.*, 2007). Récemment, Stehly *et al.* (2008) ont utilisés de telles corrélations pour imager la structure crustale des Alpes. Ces auteurs obtiennent en particulier une topographie détaillée du Moho dans cette région. Le jeu de données qu'ils ont construit pour cela va nous fournir les formes d'onde que nous allons tenter de modéliser.

Stehly *et al.* (2008) emploient 12 000 trajets reliant une à une les 150 stations large-bande du réseau présenté figure 5.1. A chaque trajet correspondent cinq corrélations : une entre les composantes verticales de chaque station, une entre les composantes radiales, deux entre les composantes radiales et verticales, et une entre les composantes transverses. Le bruit considéré a été enregistré entre octobre 2004 et octobre 2005 et est blanchi entre 5 et 150 s de période avant d'être corrélé. Calculées tout d'abord sur des enregistrements de 24 heures, les corrélations sont ensuite sommées selon le nombre de jours disponibles. Parmi toutes les formes d'onde ainsi obtenues, celles qui vont nous intéresser sont celles qui mettent en jeu la station AIGLE (représentée par une étoile sur la figure 5.1). Cette station se trouve en Suisse, dans la partie la plus dense du réseau, et fournit souvent de bonnes corrélations car beaucoup de jours peuvent en général être sommés. Dans le cadre de la présente étude, seules les corrélations des composantes verticales seront considérées.

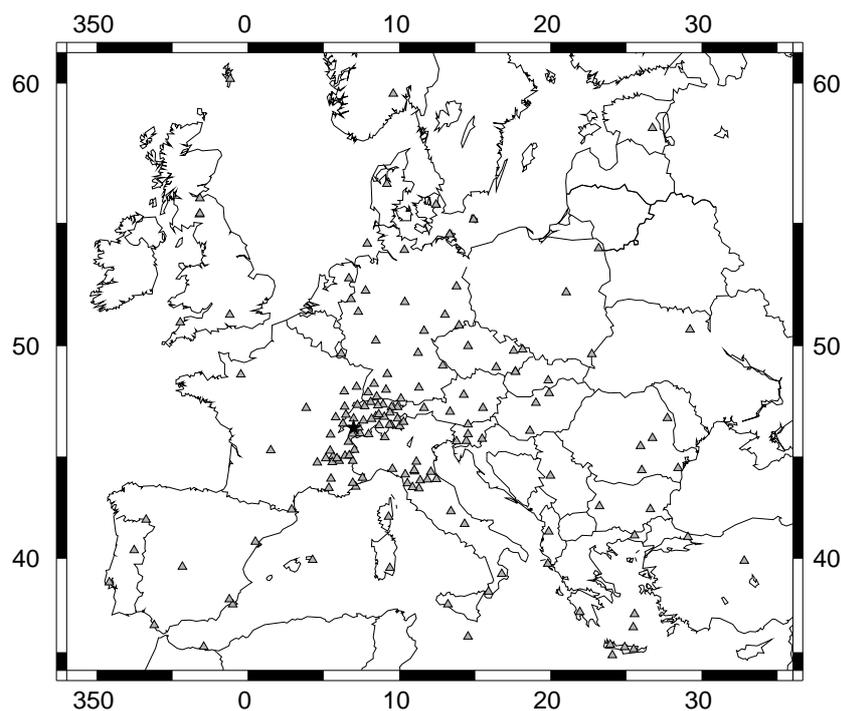


FIG. 5.1 – Carte montrant la localisation des stations à l'origine du jeu de données qui va nous intéresser. L'étoile indique la station AIGLE.

Quatre bandes de fréquence vont être systématiquement analysées dans la suite de ce travail : 5 s - 10 s, 10 s - 20 s, 20 s - 40 s et 40 s - 80 s. Il est très fréquent de distinguer ces quatre bandes lorsque l'on étudie les corrélations de bruit sismique (Stehly *et al.*, 2006, 2007). Les deux premières bandes correspondent au bruit microsismique et contiennent chacune un pic d'amplitude, l'un à 14 s, l'autre à 7 s (Longuet-Higgins, 1950; Friedrich *et al.*, 1998; Stehly *et al.*, 2006; Kedar *et al.*, 2007). Le pic à 14 s est associé à la microsismicité primaire qui résulte des ondes infragravitaires générées par les tempêtes dans les océans. Ces ondes dépendent des conditions météorologiques et leur enregistrement présente donc d'importantes variations saisonnières. En revanche, la microsismicité secondaire, dominée par le pic à 7 s, provient de

l'interaction non-linéaire des vagues au niveau des côtes et est considérée, dans l'état actuel des connaissances, comme relativement constante dans le temps. Entre 20 et 40 s, l'énergie du bruit est plus faible et les mécanismes qui en sont à l'origine sont similaires à ceux qui donnent naissance aux signaux observés entre 10 et 20 s (Stehly *et al.*, 2006). Au-dessus de 40 s et jusqu'à 80 s, l'énergie est encore plus faible. Notons que, au-delà de 80 s, le bruit enregistré à la surface du globe voit généralement son amplitude augmenter. Ce bruit est appelé "hum" et peut atteindre les 500 s de période (voir par exemple Rhie & Romanowicz 2004 ou Nishida & Fukao 2007 et les références qui y sont citées). Bien qu'énergétique, ces périodes permettent difficilement d'obtenir un signal sur les corrélations. Elles nécessitent en effet des enregistrements de bruit très longs, souvent supérieurs à une année.

Les figures 5.2, 5.3, 5.4 et 5.5 montrent, pour les quatre bandes de fréquence que l'on vient de mentionner, les corrélations réalisées avec plus de cent jours sommés entre AIGLE et les autres stations du réseaux. Il s'agit de corrélations de vitesses. Au-dessous de cent jours, les signaux sortent trop faiblement du bruit pour être exploités. Au final, nous disposons de 119 traces dont la partie positive correspond au bruit allant de AIGLE aux autres stations et dont la partie négative, à l'inverse, est dû au bruit allant des différentes stations vers AIGLE. Les sources de bruit étant localisées dans l'espace, le flux de bruit est anisotrope et implique une dissymétrie entre la partie négative et la partie positive de chaque corrélation (Stehly *et al.*, 2006). Par ailleurs, le signal se fait de plus en plus ténu à mesure que la distance à AIGLE croît, ce qui est tout à fait normal puisque la partie cohérente du bruit qui va d'une station à une autre et qui permet la reconstruction du signal s'amenuise quand la distance entre les stations augmente. Les figures 5.6 et 5.7 montrent les signaux issus de récepteurs qui, par rapport à AIGLE, sont situés entre 200 et 300 km et entre 800 et 1200 km respectivement. A haute fréquence, le rapport signal-sur-bruit est clairement plus élevé pour la première couronne. A basse fréquence, la différence se fait moins nette, le rapport signal-sur-bruit de la deuxième couronne devenant satisfaisant et les longueurs d'onde devenant telles que la distinction entre les parties positives et négatives des corrélations situées dans la couronne 200 km - 300 km s'avère difficile.

Contrairement aux signaux des figures montrant toute la gamme des distances à AIGLE, les traces des figures 5.6 et 5.7 n'ont pas été normalisées. Seule une division par le nombre de jours sommés a été effectuée, si bien qu'apparaissent, dans chacune des deux figures, les amplitudes relatives. Si ces amplitudes sont bien évidemment dûes en partie à la structure 3D du milieu de propagation ainsi qu'à l'atténuation à la fois intrinsèque et géométrique (Cupillard & Capdeville, 2008), c'est essentiellement le flux de bruit qui les contrôle. En effet, au sein d'une même couronne, les variations d'amplitude dûes à l'atténuation sont faibles, et l'on peut raisonnablement penser qu'il en est de même pour la structure (à moins d'un effet local très fort peu probable aux fréquences considérées ici). On constate alors une nouvelle fois l'anisotropie du flux de bruit, non seulement par la dissymétrie entre les parties positive et négative de chaque trace, mais également par la différence d'amplitude que l'on observe entre les différentes parties positives. Celles-ci correspondent en effet au flux qui traverse la station AIGLE selon différents azimuts. Bien que ces azimuts ne soient pas précisés ici (ils le seront plus tard), on sait que les stations ne se trouvent pas toutes dans le même azimut par rapport à A, et l'on constate alors que l'énergie du flux de bruit est différente d'un azimut à l'autre.

Cette anisotropie est dûe à la répartition non homogène des sources de bruit dans l'espace. Cette répartition varie dans le temps (à tout le moins pour certaines fréquences, typiquement 10 s - 20 s), et dans la suite de ce travail nous supposons que l'ensemble du réseau "voit" la

même variation temporelle. Autrement dit, nous supposerons que toutes les corrélations sont issues du même nombre de jours sommés et surtout des mêmes jours sommés. Cela est extrêmement important pour éviter, par exemple, qu'une station ne fournisse que du bruit enregistré pendant l'hiver alors qu'une station voisine n'aura enregistré qu'un bruit estival. En effet, ces stations donneraient, pour le même azimut, des amplitudes très différentes, ce qui serait hautement problématique pour notre simulation. Malheureusement, le nombre de jours sommés dans le jeu de données varie de 100 à plus de 300 et vérifie donc très mal l'hypothèse. En ce sens, les résultats que nous allons présenter peuvent être qualifiés de préliminaires, et il serait bon, à l'avenir, d'envisager une simulation avec un jeu de données tout aussi dense en espace mais plus homogène en temps.

### 5.1.2 Analyse

La méthode que nous souhaitons mettre en œuvre doit permettre de simuler les corrélations du bruit enregistré aux différentes stations du réseau par le bruit enregistré à AIGLE, c'est-à-dire les parties positives des signaux présentés jusqu'ici. Nous nous proposons d'analyser un peu plus en détails les amplitudes de ces signaux en traçant des diagrammes polaires représentant les amplitudes en question en fonction de l'azimut par rapport à AIGLE de chaque station (figures 5.8, 5.9, 5.10 et 5.11). Pour garder un nombre suffisant de données tout en assurant une large couverture azimutale des sources de bruit et éviter ainsi les faibles rapports signal-sur-bruit et les temps d'arrivée incorrects, nous restreignons le jeu de données aux corrélations construites avec plus de 160 jours. Nous éliminons également les récepteurs trop proches de AIGLE ( $< 100$  km).

Pour élaborer la figure 5.8 (resp. 5.9, 5.10 et 5.11), nous avons calculé l'intégrale du spectre de chaque signal entre 5 et 10 s (resp. 10 et 20 s, 20 et 40 s, et 40 et 80 s). Nous avons ensuite défini neuf couronnes telles que, pour chaque couronne, les variations d'amplitude causées par l'atténuation intrinsèque et l'atténuation géométrique soient petites devant les variations d'amplitude dûe à l'anisotropie du flux de bruit. Dans les points ainsi obtenus, nous avons fait passer une gaussienne de largeur à mi-hauteur  $H$ . Pour chacune des couronnes, cela permet de définir des valeurs pour les azimuts non-échantillonnés et de déterminer une valeur moyenne pour les azimuts où l'on a plusieurs données. Dans le cadre de l'hypothèse posée dans la section précédente (i.e. toutes les corrélations sont construites avec les mêmes jours), ce type de moyenne est supposée atténuer l'effet de la structure au profit de l'effet du flux de bruit. Le paramètre  $H$  doit être choisi en fonction du taux de variation azimutale de ce flux. Notre connaissance des sources de bruit est encore très pauvre et le taux en question est extrêmement mal connu. D'après les résultats de Friedrich *et al.* (1998) et de Stehly *et al.* (2006), nous prenons  $H = 20^\circ$ . Nous obtenons alors des diagrammes polaires censés montrer l'influence du flux de bruit sur les amplitudes des corrélations. Les losanges qui apparaissent sur ces diagrammes correspondent aux points de mesure après passage de la gaussienne. Nous avons fait cela pour que les figures soient les plus lisibles possible. Plus tard, d'autres figures montreront les points de mesure avant passage de la gaussienne et nous verrons alors qu'ils sont tous, à quelques exceptions près, très proches de la courbe issue du lissage gaussien.

Bien que nombre d'azimuts demeurent sans valeur (car nous avons volontairement ignoré les zones où deux stations consécutives sont éloignées de plus de  $50^\circ$ ), il apparaît clairement sur la figure 5.8 que les amplitudes des stations situées au sud-est de AIGLE sont beaucoup

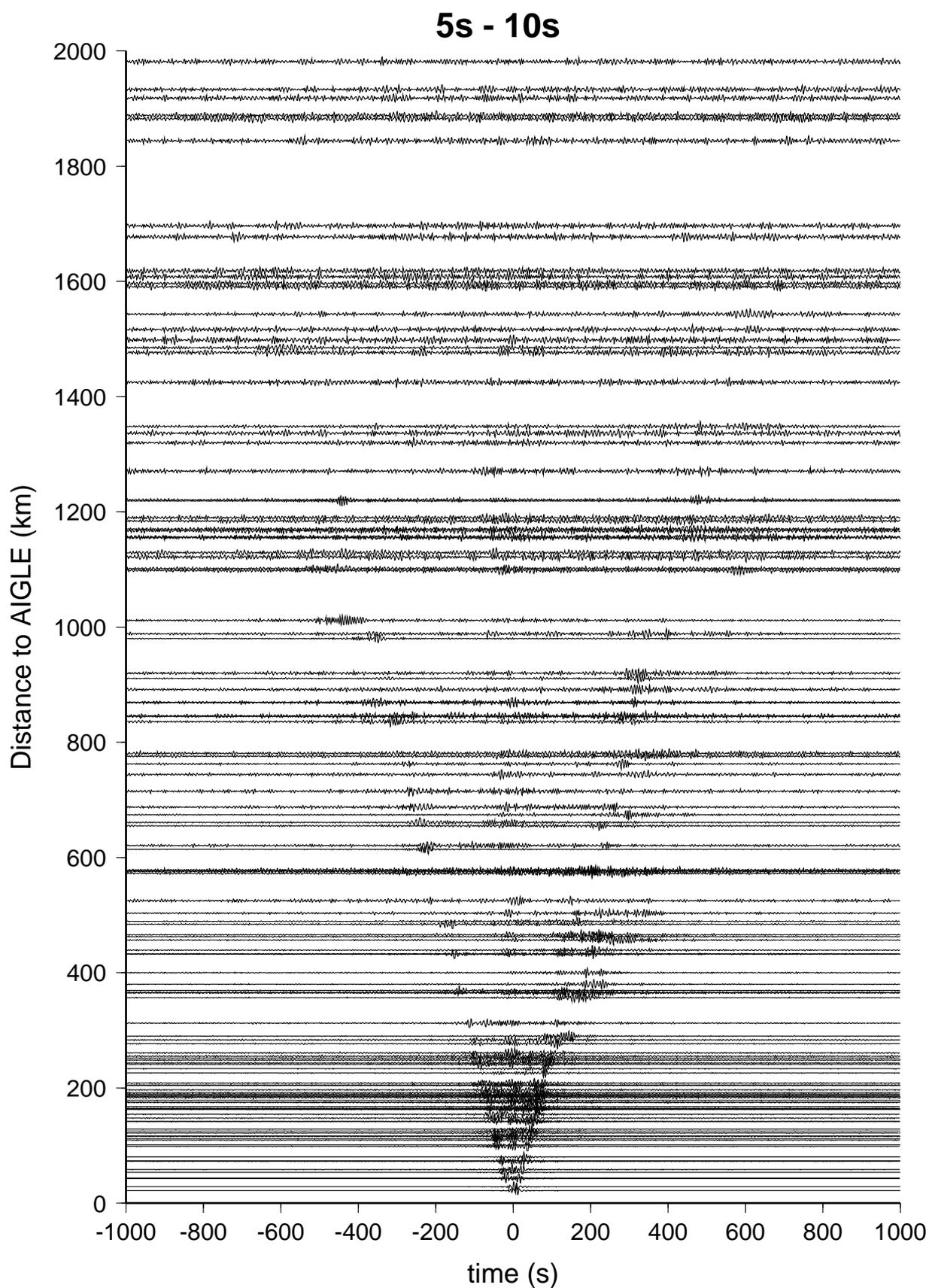


FIG. 5.2 – Corrélations filtrées entre 5 et 10 s du bruit vertical enregistré à la station AIGLE avec le bruit enregistré aux autres stations du réseau.

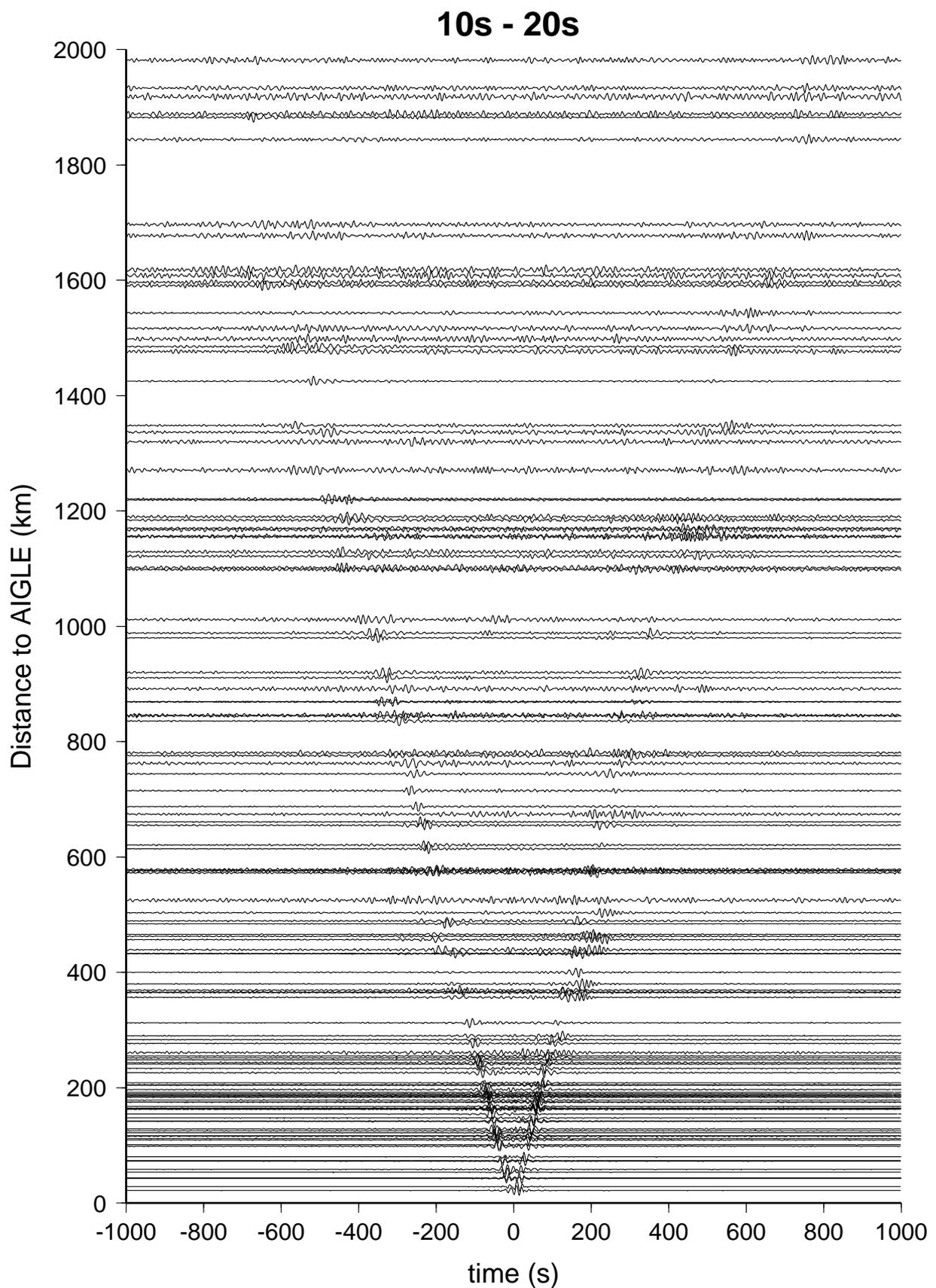


FIG. 5.3 – Corrélations filtrées entre 10 et 20 s du bruit vertical enregistré à la station AIGLE avec le bruit enregistré aux autres stations du réseau.

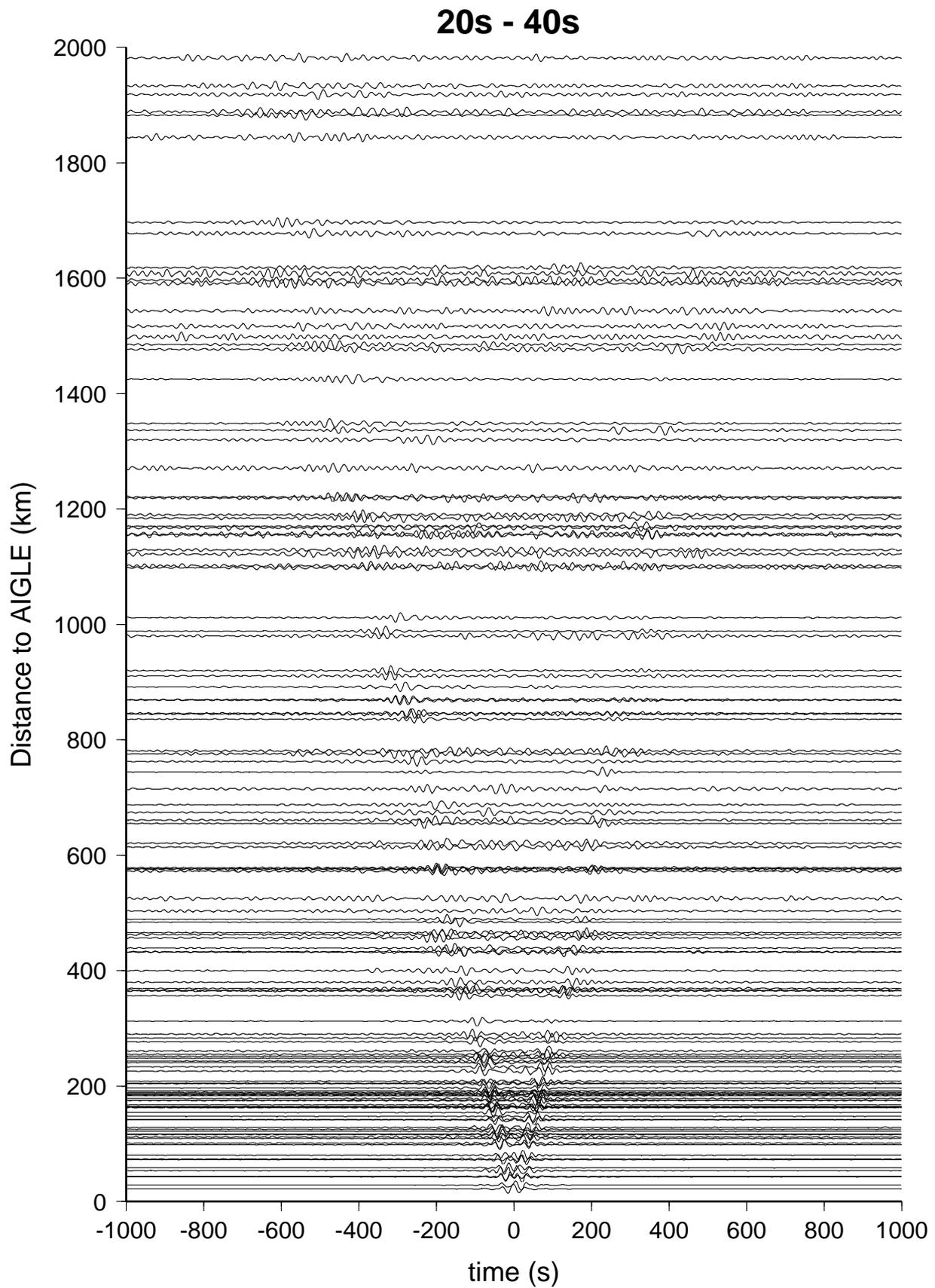


FIG. 5.4 – Corrélations filtrées entre 20 et 40 s du bruit vertical enregistré à la station AIGLE avec le bruit enregistré aux autres stations du réseau.

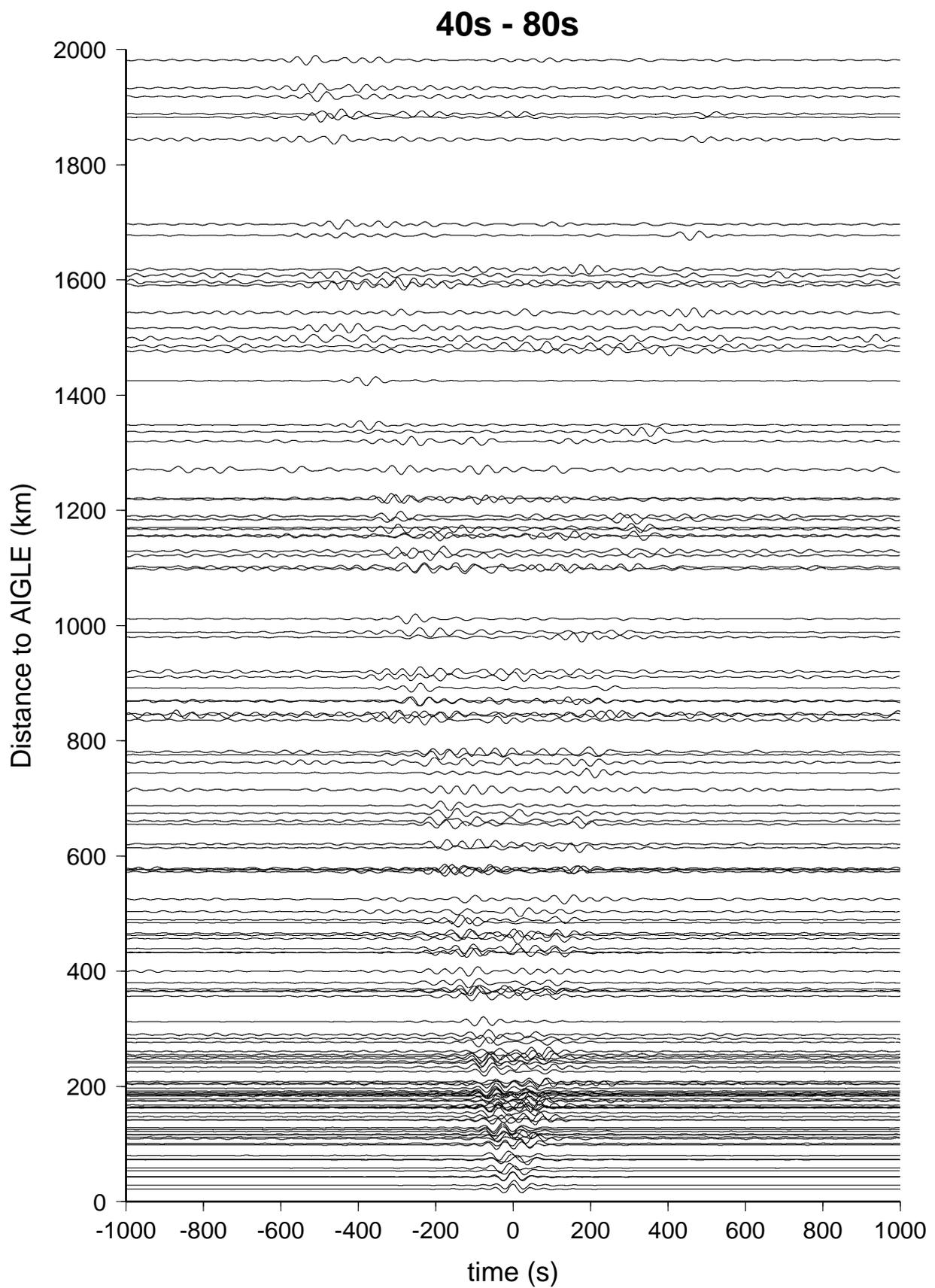


FIG. 5.5 – Corrélations filtrées entre 40 et 80 s du bruit vertical enregistré à la station AIGLE avec le bruit enregistré aux autres stations du réseau.

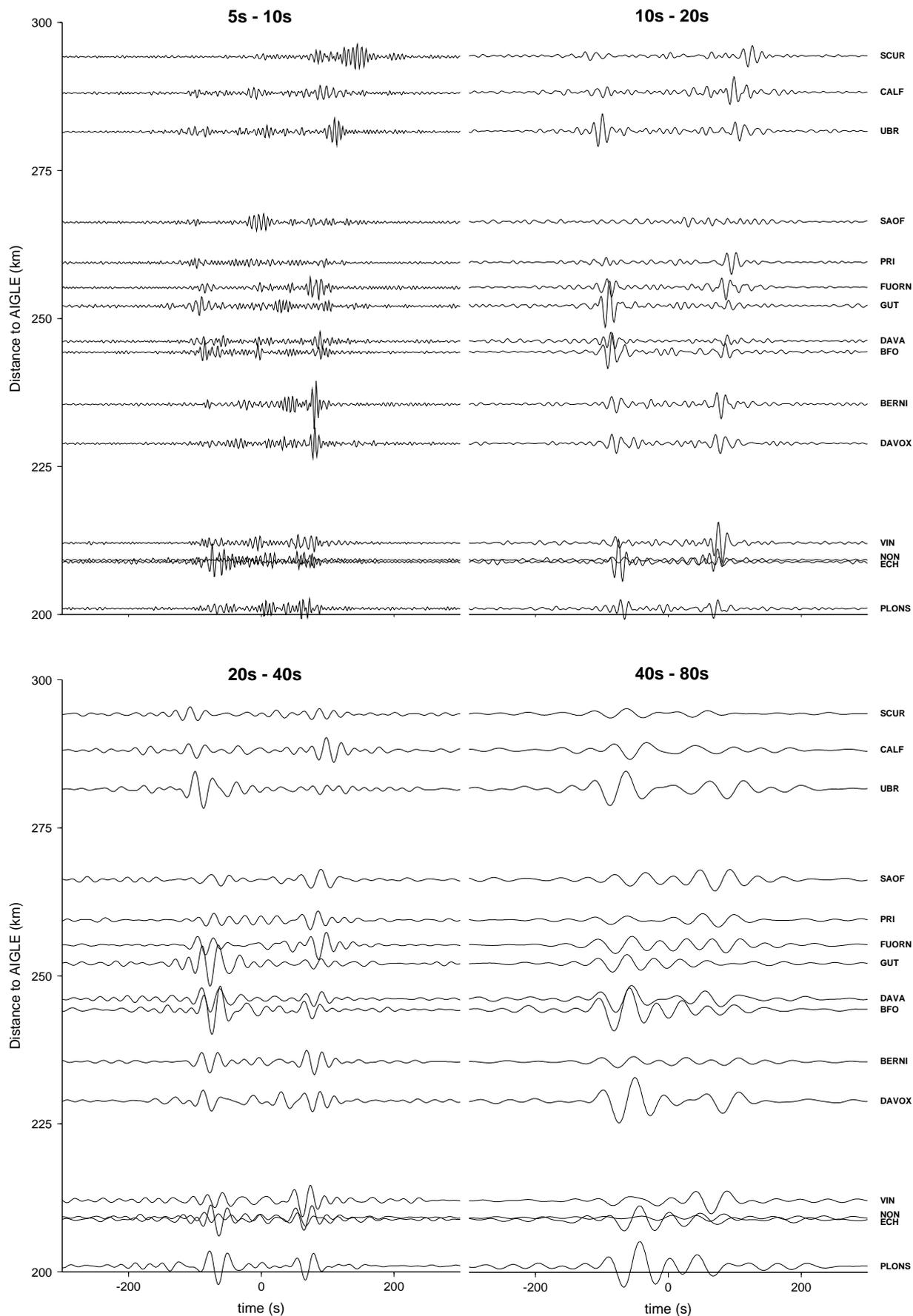


FIG. 5.6 – Corrélatons issues des stations situées à une distance de AIGLE comprise entre 200 et 300 km.

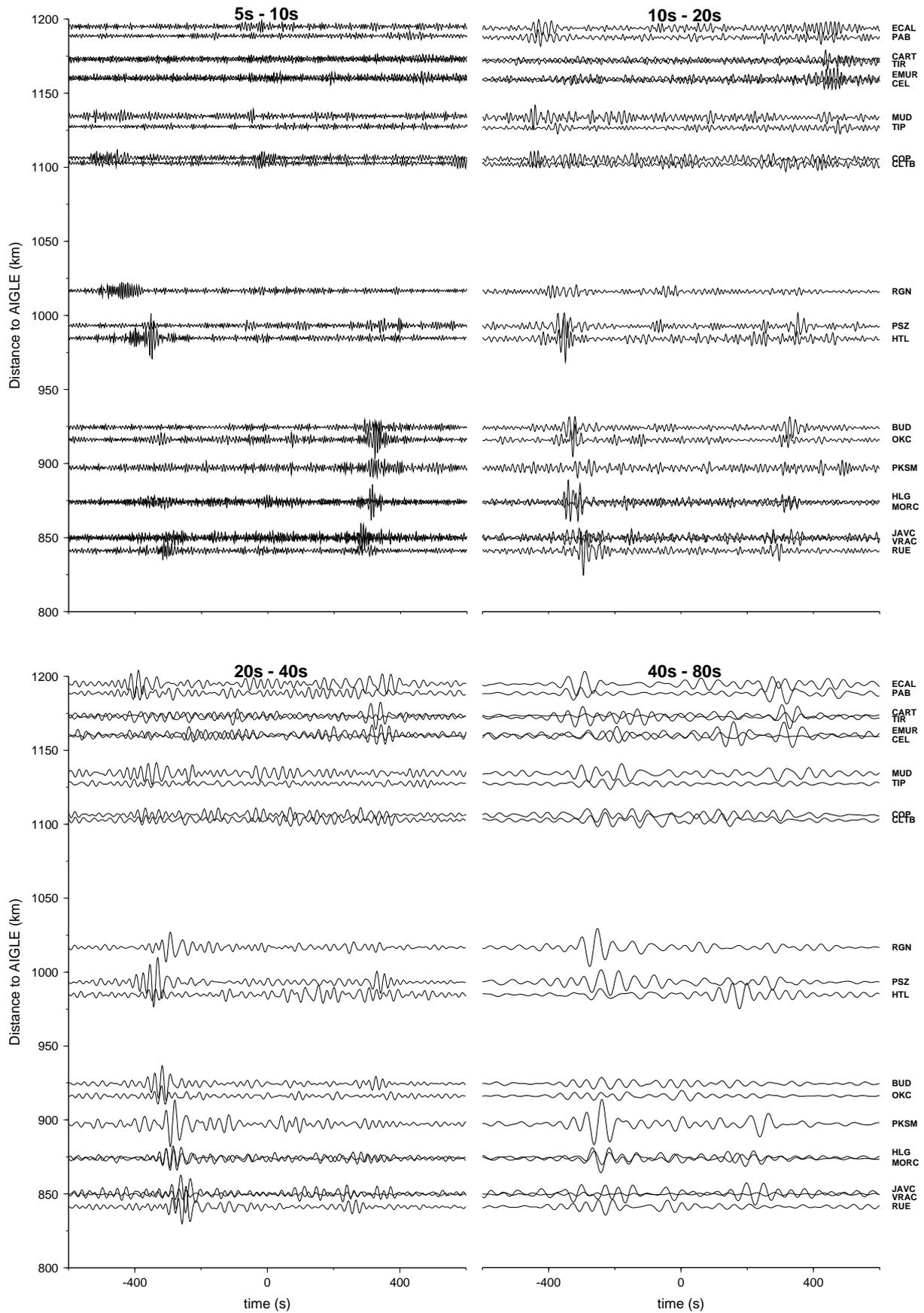


FIG. 5.7 – Corrélations issues des stations situées à une distance de AIGLE comprise entre 800 et 1200 km.

plus importantes qu'ailleurs. Cette tendance est nette pour les cinq premières couronnes, c'est-à-dire pour les stations situées entre 100 et 600 km de AIGLE. Cela indique que le bruit vient essentiellement du nord-ouest. Pour la sixième couronne (en rose), la tendance est moindre et finit par complètement disparaître dans la septième couronne (en jaune). Les amplitudes de cette dernière sont maximales dans l'azimut  $60^\circ$ . Pour les couronnes qui correspondent aux stations plus éloignées, le signal est très faible et les amplitudes observées sont quasiment celles du bruit qui règne sur les corrélations. Cette analyse montre qu'entre 5 et 10 s de période, le flux de bruit anisotrope qui intervient dans les corrélations de la couronne 100 - 600 km reste inchangé, au moins au premier ordre. Au-delà de 600 km, les zones anti-Fresnel mises en jeu ne sont plus les mêmes si bien que l'amplitude spectrale de chaque azimut change. Notre méthode ne permettant pas la prise en compte de ces changements, nous nous limiterons à la simulation des formes d'onde issues des cinq premières couronnes.

Entre 10 et 20 s (figure 5.9), les amplitudes des stations situées au sud-est sont toujours élevées, mais un bruit encore plus fort semble maintenant venir du nord. Cela est très net pour les couronnes 100 - 150 km et 150 - 200 km. Pour les stations entre 200 et 600 km, l'effet est moins évident mais il est difficile de le discuter en raison du faible nombre de récepteurs au sud de AIGLE. Enfin, à partir de la couronne 600 - 800 km, la forme du diagramme change radicalement, un bruit venant de l'est semblant prendre le dessus. Les mêmes observations peuvent être faites pour la bande de fréquence 20 s - 40 s (figure 5.10), la principale différence étant les faibles amplitudes que l'on observe désormais au sud-est. Ainsi constatons-nous, comme à haute fréquence, que les diagrammes des cinq premières couronnes sont à peu près les mêmes. Ils peuvent changer d'une fréquence à l'autre, cela ne constitue pas un problème pour notre simulation. Nous espérons donc toujours pouvoir modéliser les formes d'onde issues de ces couronnes.

Que les zones anti-Fresnel varient rapidement avec la distance inter-stations ou que la variation temporelle des sources de bruit soit telle que l'hypothèse des mêmes jours sommés ne tienne plus du tout, force est de constater que les diagrammes obtenus pour la bande de fréquence 40 s - 80 s diffèrent grandement d'une couronne à l'autre (figure 5.11). Dans ces conditions, nous abandonnons l'idée de simuler les formes d'onde pour cette bande de fréquence.

## 5.2 Mise en œuvre de la simulation

### 5.2.1 Etape 1 : propagation d'une impulsion et renormalisation spectrale

Comme au chapitre 4, la surface  $S$  sur laquelle nous allons calculer la réponse d'un certain milieu à une impulsion placée à la station centrale puis renormaliser les spectres pour enfin rétropropager le champ adjoint sera un cylindre dont la base supérieure coïncidera avec la surface de la Terre et dont la génératrice sera le rayon terrestre passant par la station centrale AIGLE. Puisque nous souhaitons simuler les signaux de la couronne 100 - 600 km, il est naturel de choisir le rayon du cylindre dans cet intervalle. Nous prendrons alors un rayon de 175 km car beaucoup de données sont disponibles à cette distance, ce qui facilitera la renormalisation. Par ailleurs, nous choisirons la profondeur de la base inférieure en fonction de la plus grande période (40 s ici). Ainsi prendrons-nous 200 km.

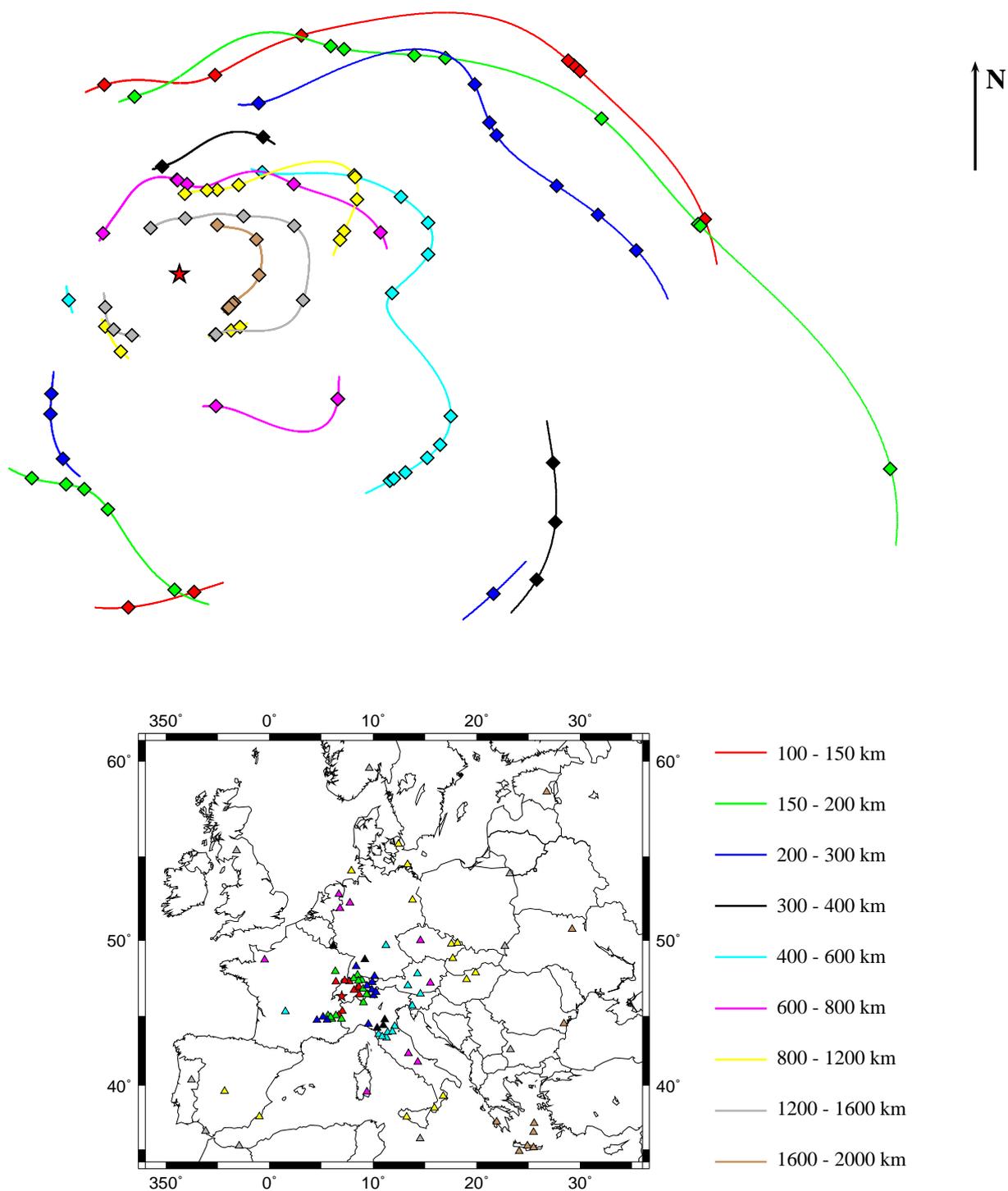


FIG. 5.8 – Amplitude spectrale des corrélations de bruit en fonction de l'azimut par rapport à la station centrale AIGLE (étoile rouge). La bande de fréquence considérée ici est 5 s - 10 s.

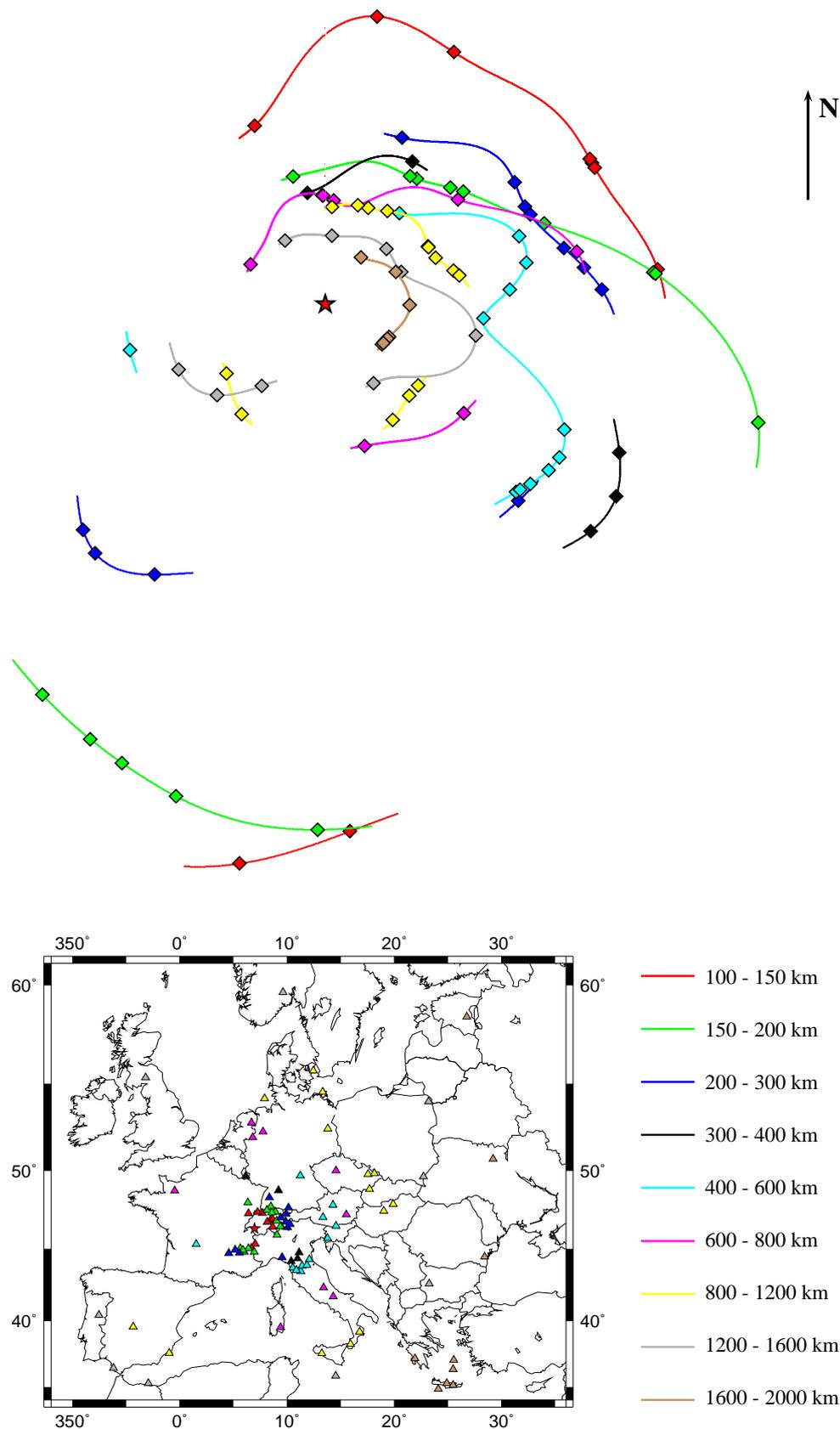


FIG. 5.9 – Amplitude spectrale des corrélations de bruit en fonction de l'azimut par rapport à la station centrale AIGLE (étoile rouge). La bande de fréquence considérée ici est 10 s - 20 s.

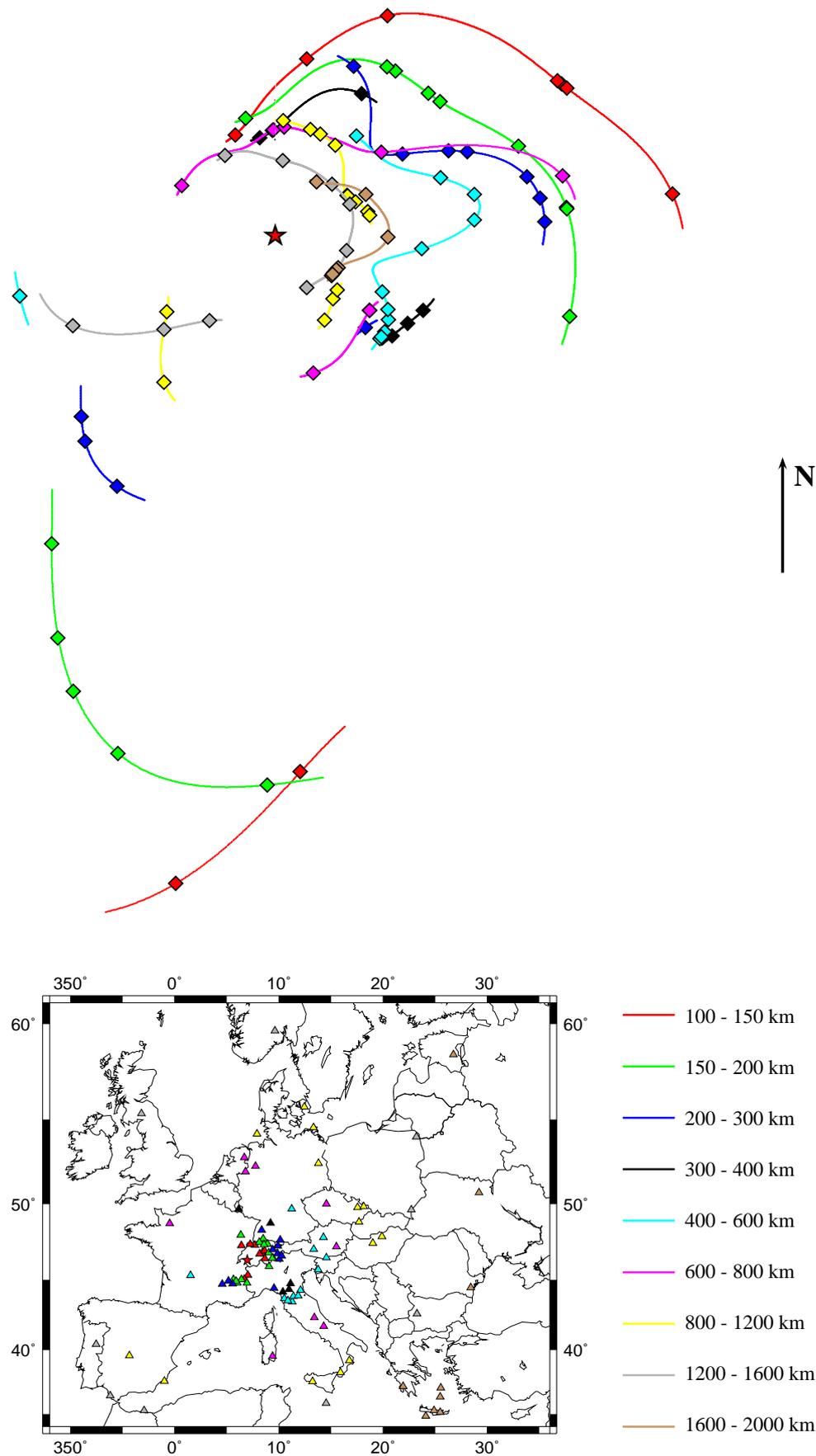


FIG. 5.10 – Amplitude spectrale des corrélations de bruit en fonction de l'azimut par rapport à la station centrale AIGLE (étoile rouge). La bande de fréquence considérée ici est 20 s - 40 s.

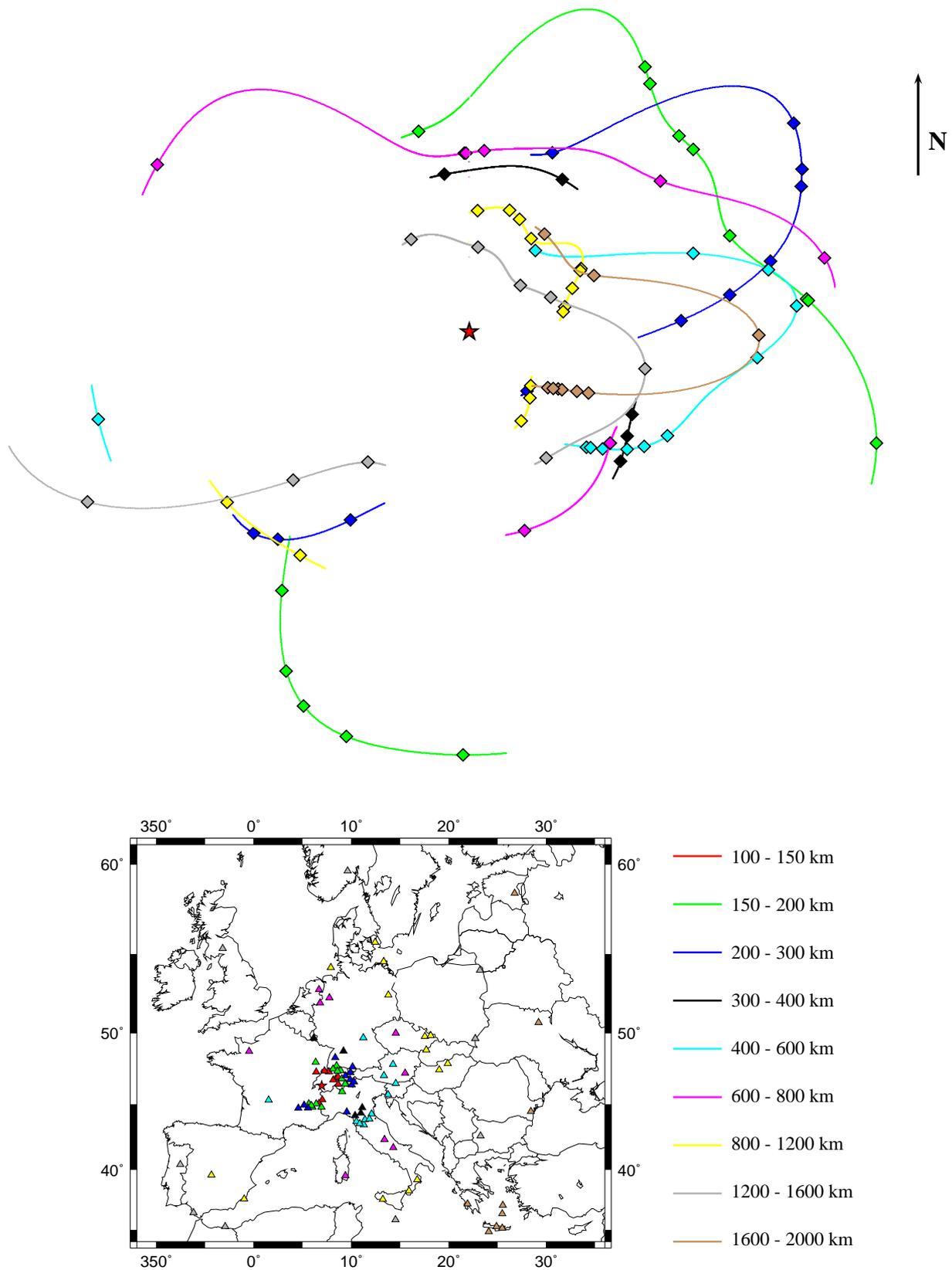


FIG. 5.11 – Amplitude spectrale des corrélations de bruit en fonction de l'azimut par rapport à la station centrale AIGLE (étoile rouge). La bande de fréquence considérée ici est 40 s - 80 s. A ces fréquences, les parties positive et négative des signaux de la couronne 100 - 150 km ne peuvent se distinguer. Nous ne dessinons donc pas les résultats de cette couronne.

La principale difficulté de l'étape 1, et plus généralement de l'application de notre méthode à des données réelles, est la construction de  $F^k$ . Introduite au chapitre 4,  $F^k$  est la fonction qui fournit à chaque azimuth  $k$  le spectre correspondant au flux de bruit qui intervient dans les corrélations  $C^k$ . Cette fonction est indispensable à la renormalisation des spectres des fonctions de Green calculées sur  $S$  (voir équations 4.18 et 4.19). Pour la déterminer, nous allons bien sûr utiliser les données. Le problème est que les amplitudes spectrales de celles-ci contiennent non seulement le flux de bruit mais également les effets de la structure 3D. Pour éliminer ces effets, nous allons procéder à une moyenne qui s'effectuera en deux temps. Dans un premier temps, nous calculerons les spectres des corrélations provenant de stations proches du cylindre  $S$  et lisserons les amplitudes de chaque fréquence par une gaussienne qui décrira tous les azimuths. Comme dans la section précédente, cela permettra de définir des valeurs pour les azimuths non-échantillonnés et de moyenniser les effets de la structure 3D pour les azimuths où plusieurs mesures sont disponibles. Dans un deuxième temps, nous referons le même lissage, mais cette fois-ci sur d'autres jeux de données dont les stations centrales ne seront pas AIGLE mais des stations toutes proches pour lesquelles nous supposerons que le bruit est le même que celui qui traverse AIGLE. Nous sommerons alors toutes les courbes obtenues et retrouverons, pour chaque azimuth, les amplitudes spectrales du flux de bruit propagé dans un modèle moyen que nous espérons proche du modèle que nous utiliserons dans nos calculs numériques, à savoir PREM.

Figure 5.12 sont présentées les intégrales sur différentes bandes de fréquence des spectres issus du lissage gaussien des stations situées dans la couronne 150 - 200 km autour de AIGLE. Les losanges indiquent la valeur des intégrales réalisées sur le spectre des données avant passage de la gaussienne. La plupart de ces losanges est proche de la courbe, l'écart provenant essentiellement de la structure 3D que nous éliminons en partie par la gaussienne. Lorsque les écarts sont importants, c'est que l'hypothèse des mêmes jours sommés pour toutes les corrélations n'est pas satisfaite. Cela constitue, rappelons-le, l'une des principales limites de la présente application.

Les figures 5.13, 5.14, 5.15, 5.16 et 5.17 sont identiques à la figure 5.12 mais concernent d'autres stations proches de AIGLE. Il s'agit des stations DIX, EMV, MMK, RSL et SENIN dont la localisation est précisée sur la carte 5.18. On constate bienheureusement que, pour chaque fréquence, l'allure des diagrammes se ressemble d'une station à l'autre. Entre 5 et 10 s de période, le bruit dominant vient de l'ouest et du nord-ouest tandis qu'à plus basse fréquence, le bruit semble davantage venir du nord, ce qui est en bon accord avec les résultats de Friedrich *et al.* (1998) et de Stehly *et al.* (2006).

La somme des diagrammes obtenus pour les différentes stations nous procure la figure 5.19 qui n'est autre que l'intégrale sur différentes bandes de fréquence de la fonction  $F^k$  que nous allons utiliser. Sur cette dernière figure ont été tracées les valeurs relatives aux zones pour lesquelles aucune donnée n'est disponible (i.e. l'ouest et le sud-est). Ces valeurs ont été déterminées par simple interpolation linéaire, et rien ne garantit qu'elles représentent correctement l'énergie du flux de bruit. Nous les utiliserons malgré tout dans notre renormalisation. Celle-ci se fera sur les trois composantes du déplacement et sur les trois composantes de la traction calculées dans 144 azimuths et 19 profondeurs, soient 2736 points. Notons que les données sont des corrélations de vitesses homogènes à des vitesses si bien que notre  $F^k$  sera divisé par la pulsation  $\omega$  afin de bien correspondre au spectre d'un déplacement.

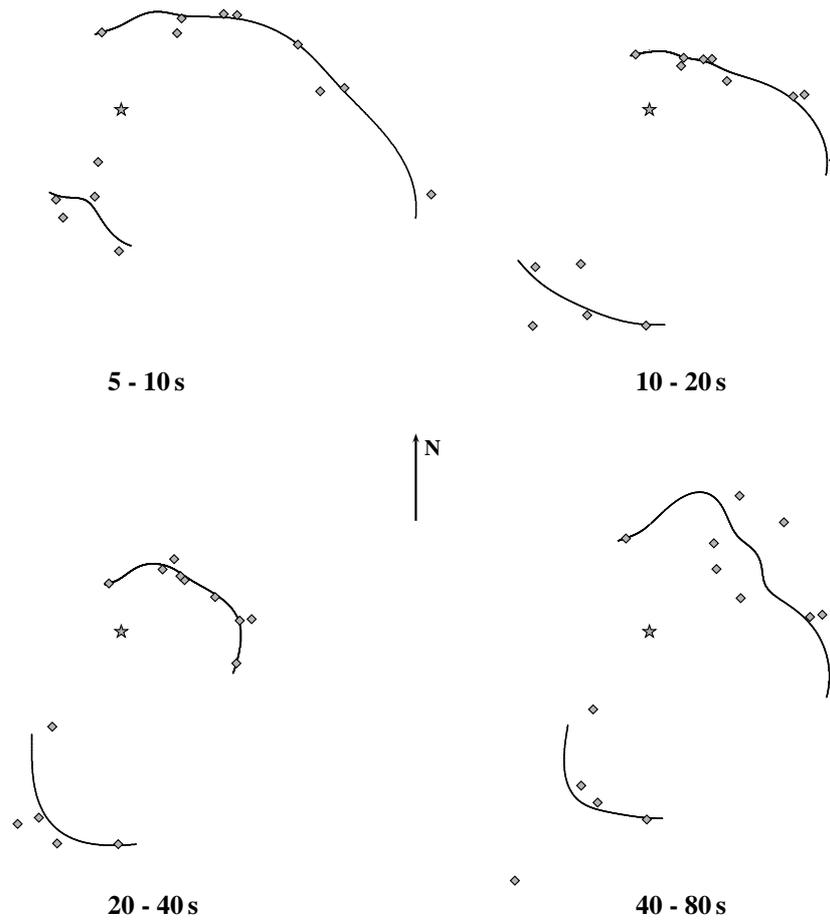


FIG. 5.12 – Amplitude spectrale de la couronne 150 - 200 km centré sur AIGLE (étoile).

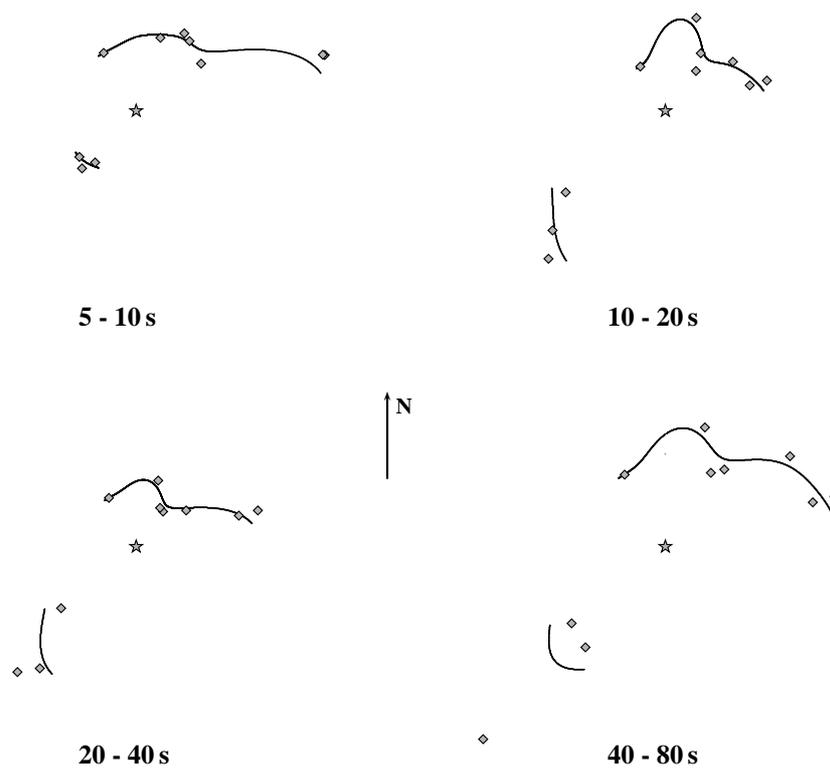


FIG. 5.13 – Amplitude spectrale de la couronne 150 - 200 km centré sur DIX (étoile).

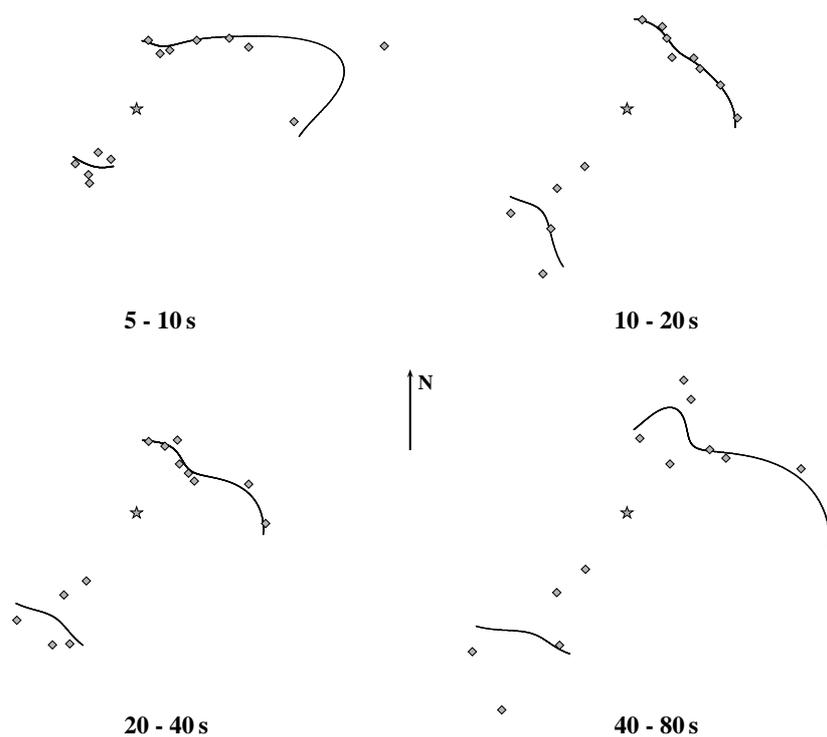


FIG. 5.14 – Amplitude spectrale de la couronne 150 - 200 km centré sur EMV (étoile).

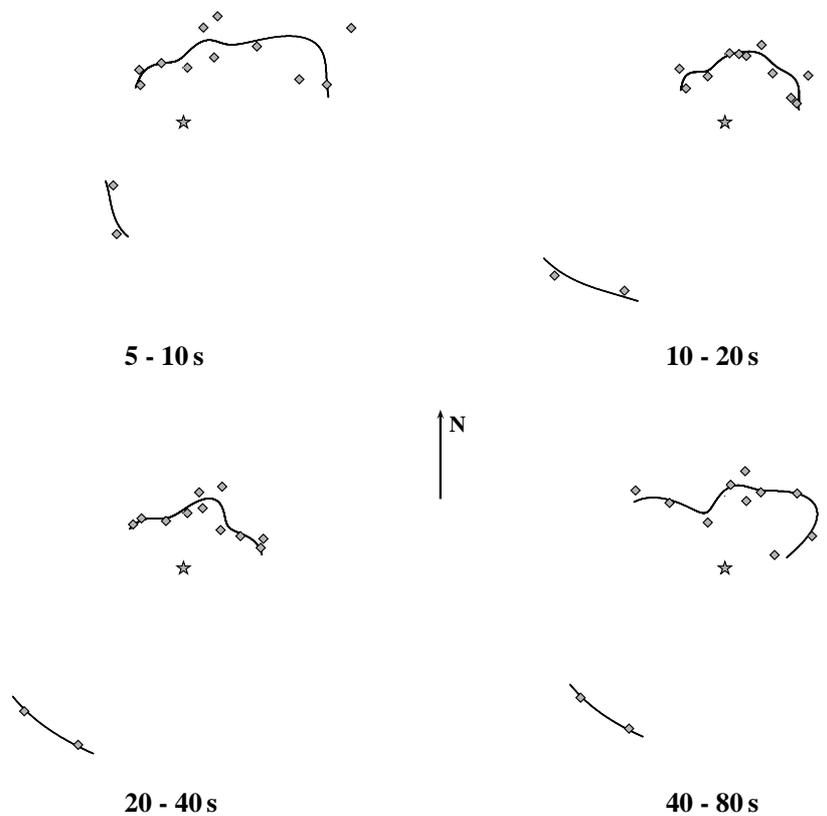


FIG. 5.15 – Amplitude spectrale de la couronne 150 - 200 km centré sur MMK (étoile).

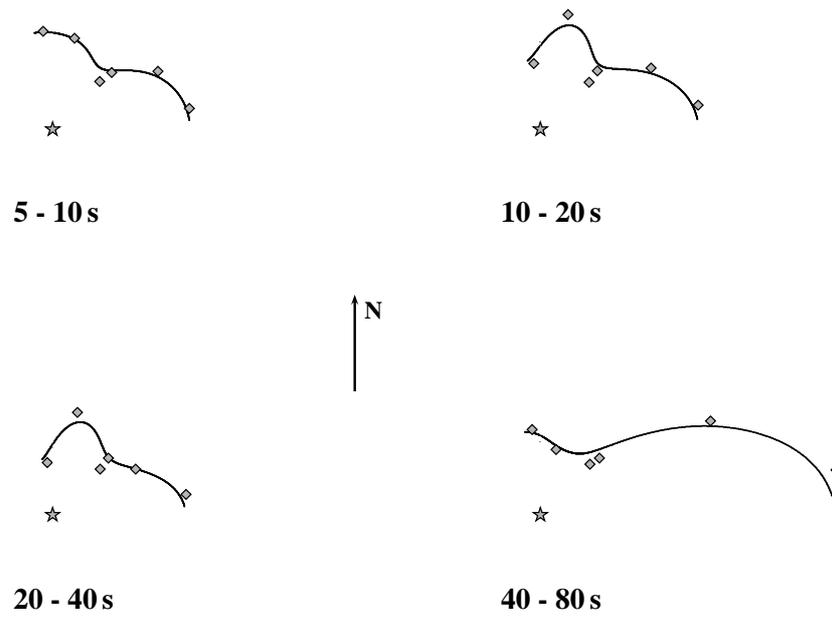


FIG. 5.16 – Amplitude spectrale de la couronne 150 - 200 km centré sur RSL (étoile).

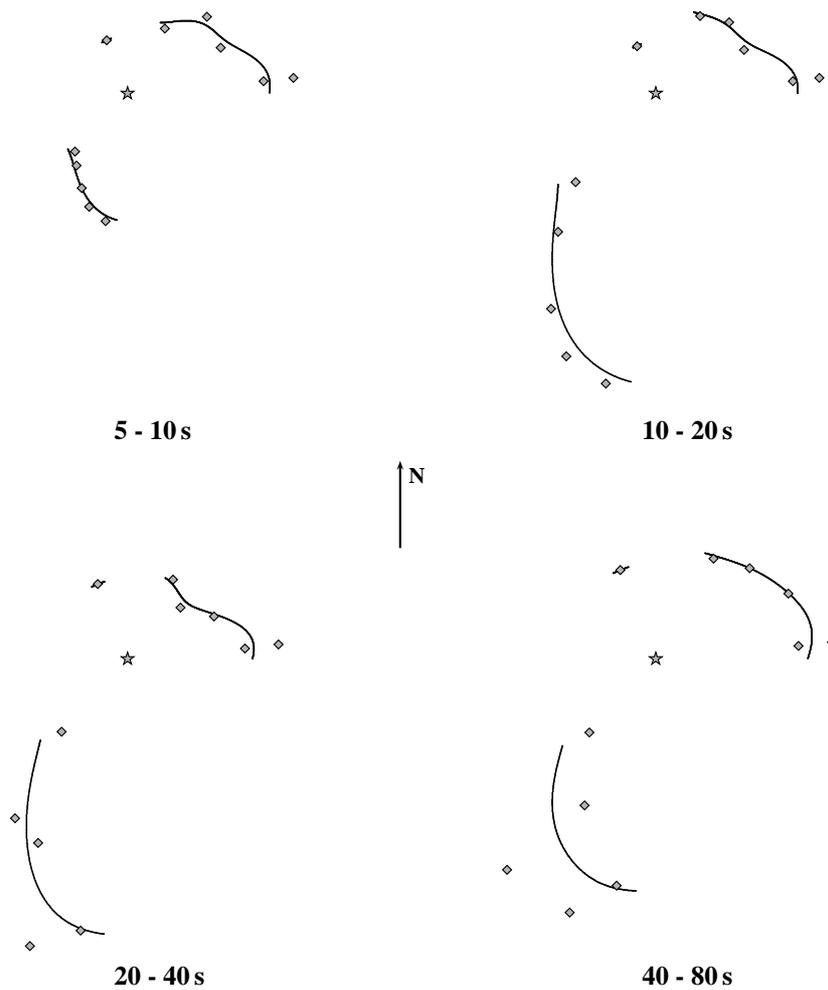


FIG. 5.17 – Amplitude spectrale de la couronne 150 - 200 km centré sur SENIN (étoile).

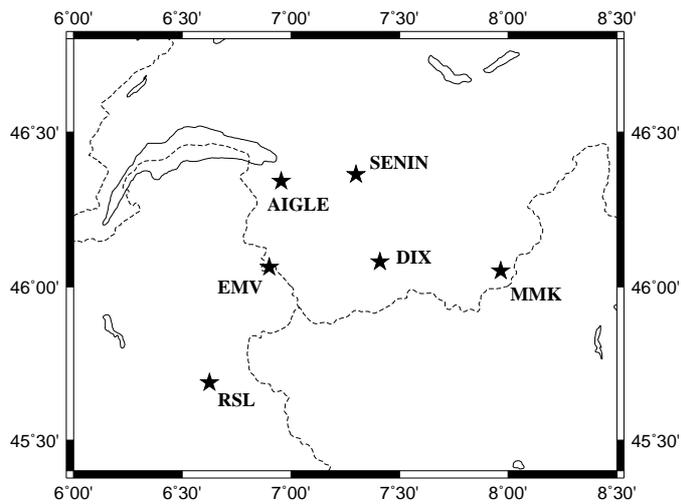


FIG. 5.18 – Carte montrant la position des stations utilisées pour construire  $F^k$ .

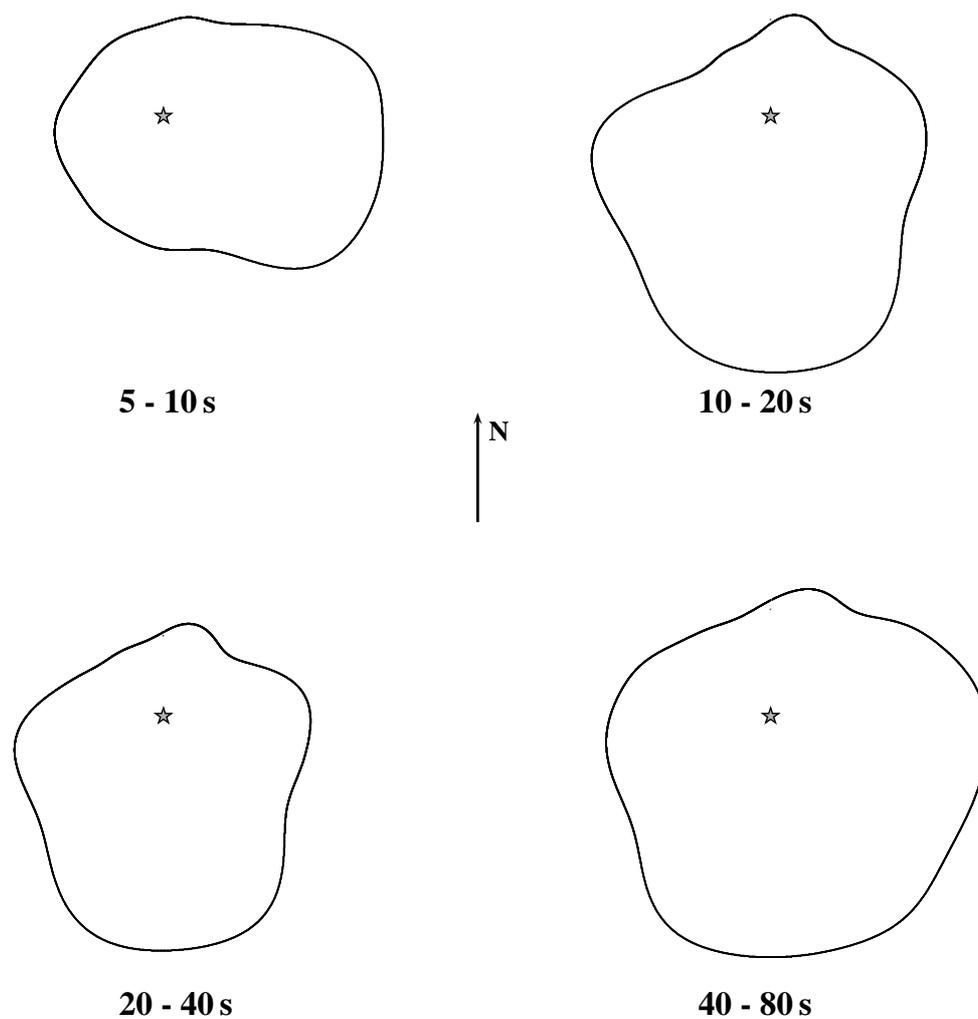


FIG. 5.19 – Diagramme représentant l'intégrale de  $F^k$  sur différentes bandes de fréquence en fonction de l'azimut  $k$ . L'étoile représente l'origine du repère polaire.

### 5.2.2 Etape 2 : rétropropagation

Dans cette étape, nous procédons comme au chapitre 4 pour rétropropager les champs conjugués de la traction et du déplacement calculés et renormalisés à la surface  $S$  dans la première étape. A 5 s de période, la sommation de modes propres utilisée pour déterminer les fonctions de Green du milieu nécessite un coût de calcul extrêmement important. Pour cette première application, nous nous limiterons donc aux périodes supérieures ou égales à 10 s. Sur 18 nœuds quad-core Xéon, 36 heures de calcul sont alors nécessaires. Pour prendre en compte de plus hautes fréquences, les éléments spectraux constituent une solution idéale, car alors le coût de calcul ne dépend pas du nombre de points censés décrire le champ rétropropagé dans le volume  $V$ . Etant donnée l'énergie du bruit entre 5 et 10 s et la qualité des données que cela implique, cette solution devra impérativement être envisagée dans l'avenir.

### 5.2.3 Etape 3 : simulation directe des corrélations de bruit par la méthode des éléments spectraux

A l'issue de l'étape 2, le champ rétropropagé refocalise à la station AIGLE et donne la source étendue que nous allons maintenant utiliser pour simuler les formes d'onde des corrélations de bruit issues des stations situées dans un rayon de 500 km autour de AIGLE. Deux simulations sont mises en œuvre, l'une dans le modèle PREM et l'autre dans le modèle CUB (Shapiro & Ritzwoller, 2002) modifié de la manière décrite dans le chapitre 3. Connaissant les caractéristiques de ces modèles, nous savons que les résultats que nous obtiendrons n'ajusteront probablement pas très bien les données. Nous espérons cependant montrer que le modèle 3D donne de meilleures formes d'onde que le modèle 1D, comme dans le cas des séismes simulés au chapitre 3. En effet, entre 20 et 40 s de période, nous avons vu que PREM est incapable de fournir des traces correctes tandis que le modèle dérivé de CUB peut parfois bien ajuster les données. Au-dessous de 20 s, nous sortons complètement du domaine de période utilisé dans la construction de CUB, mais ce dernier devrait tout de même continuer à nous donner de meilleures traces.

Les figures 5.20 et 5.21 montrent différents clichés du champ d'onde se propageant à la surface de la Terre respectivement dans PREM et dans CUB. L'échelle de couleur étant identique pour les deux figures, nous voyons sans surprise que le champ n'est pas le même d'un modèle à l'autre. On note en particulier que le front d'onde se propage plus lentement et est plus atténué dans le modèle 3D. Par ailleurs, à  $t = 100$  s, les fortes amplitudes apparaissent clairement déformées par le système alpin présent dans CUB alors que le front d'onde reste bien régulier dans PREM.

Les signaux reçus aux différentes stations du réseau sont présentés figures 5.22 et 5.23. Sur ces figures, les traces sont disposées selon la distance qui les séparent de la station AIGLE. Nous nous sommes permis de modifier légèrement ces distances afin d'espacer régulièrement les signaux et de les rendre ainsi tous bien visibles. Les résultats de la figure 5.22 correspondent aux formes d'onde filtrées entre 10 et 20 s tandis que la figure 5.23 montrent ces mêmes formes d'ondes entre 20 et 40 s. Au sein de chaque colonne, les amplitudes relatives sont conservées, ce qui n'est pas le cas d'une colonne à l'autre.

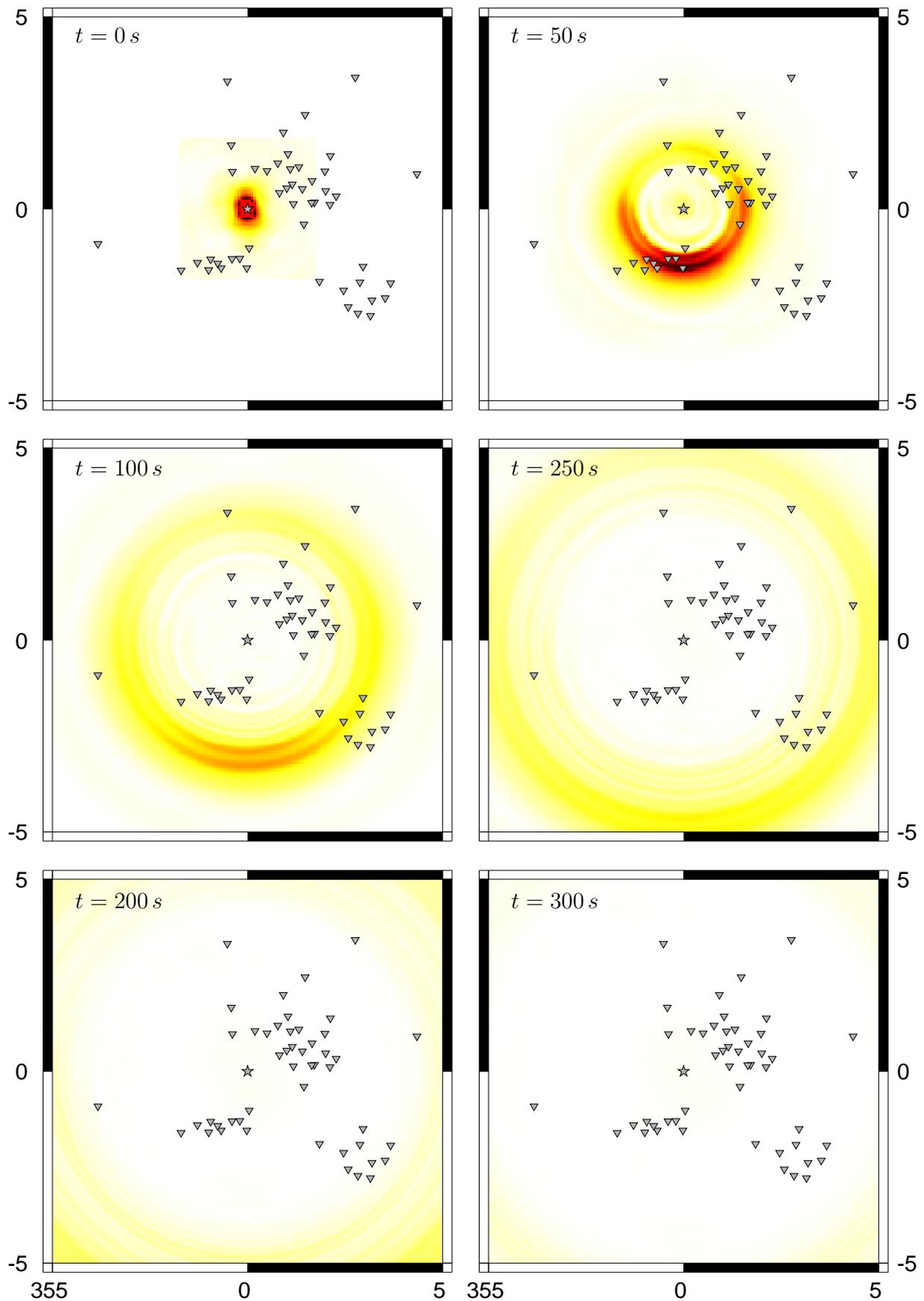


FIG. 5.20 – Six clichés de la norme du déplacement en surface. Le milieu de propagation est PREM. Les triangles représentent les stations et l'étoile est AIGLE.

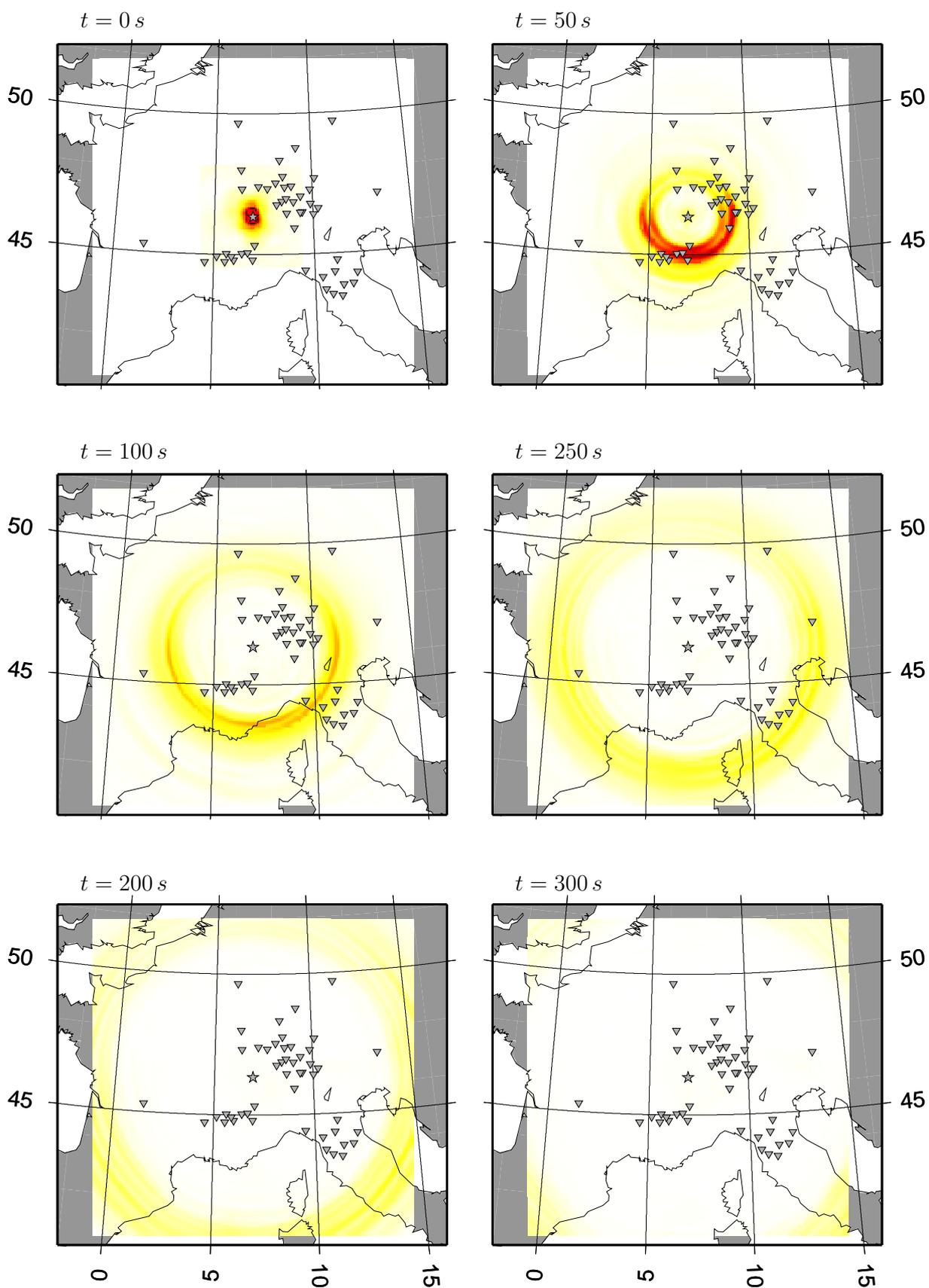


FIG. 5.21 – Six clichés de la norme du déplacement en surface. Le milieu de propagation est un modèle dérivé de CUB. Les triangles représentent les stations et l'étoile est AIGLE.

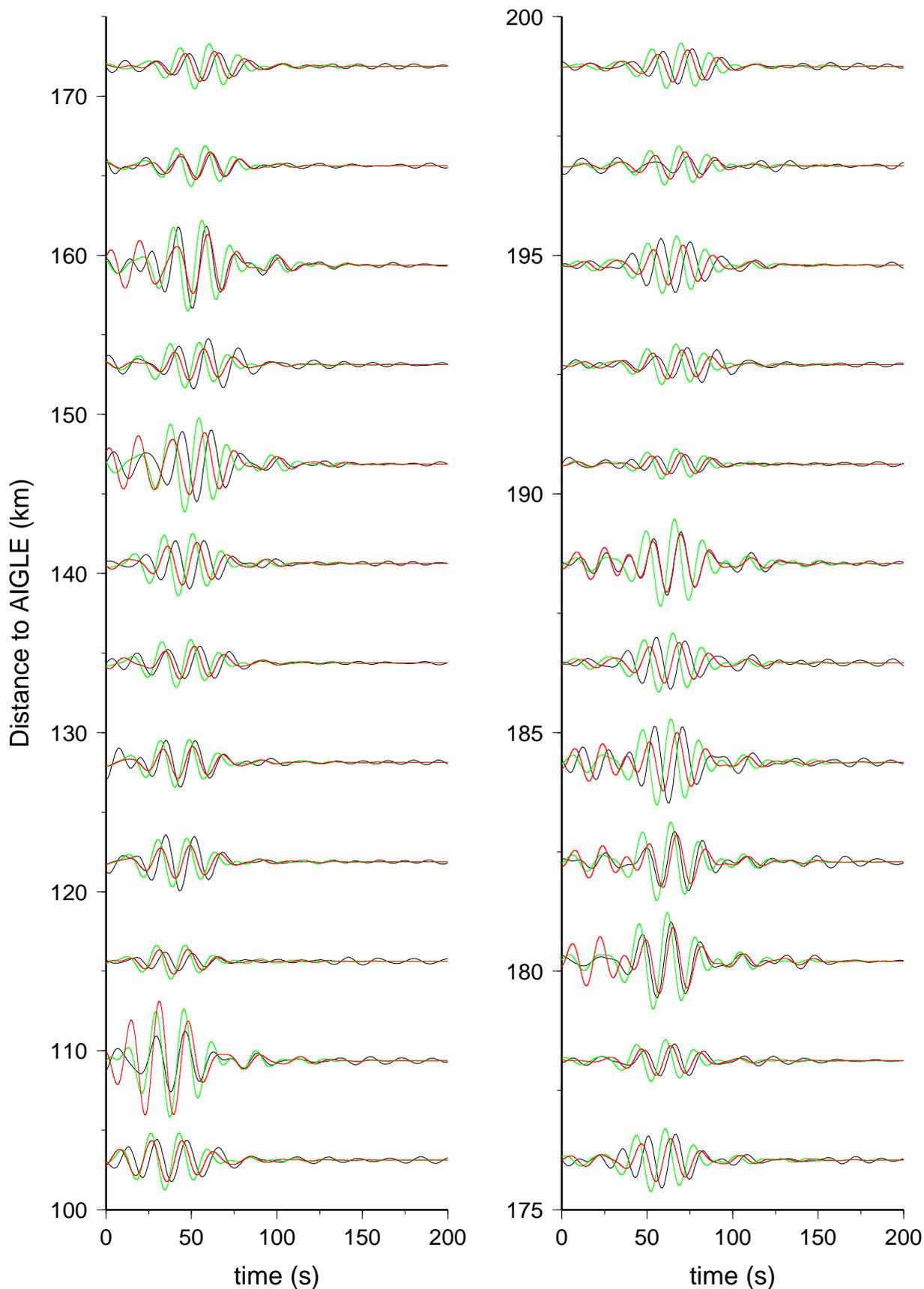
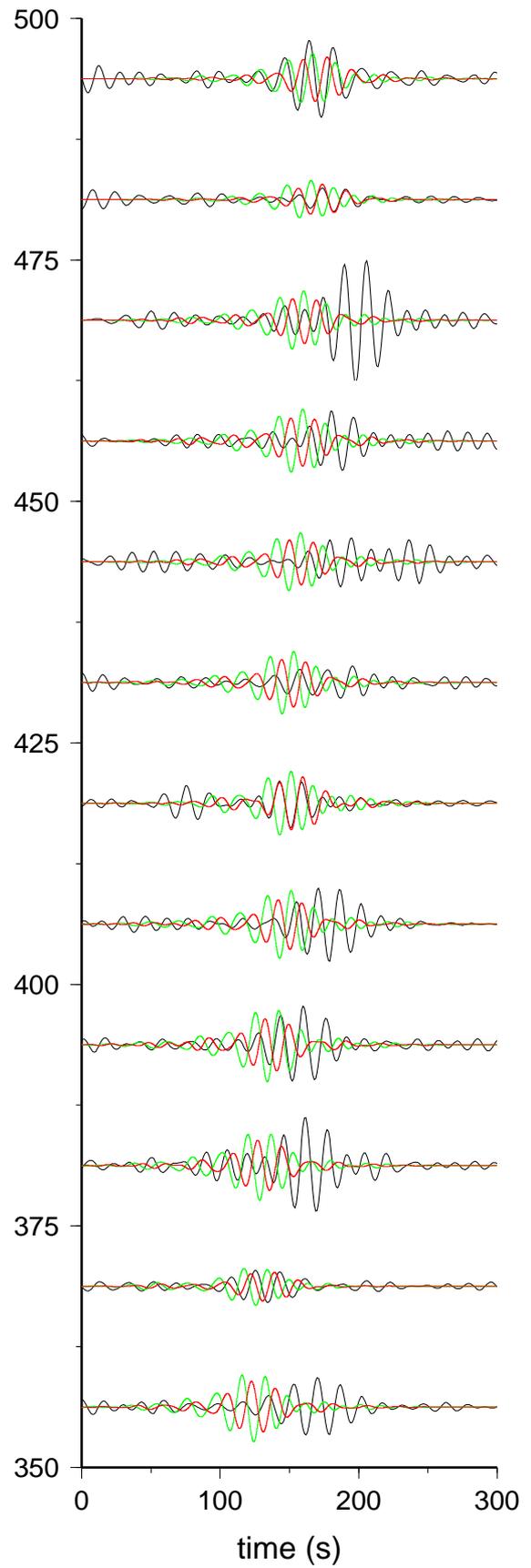
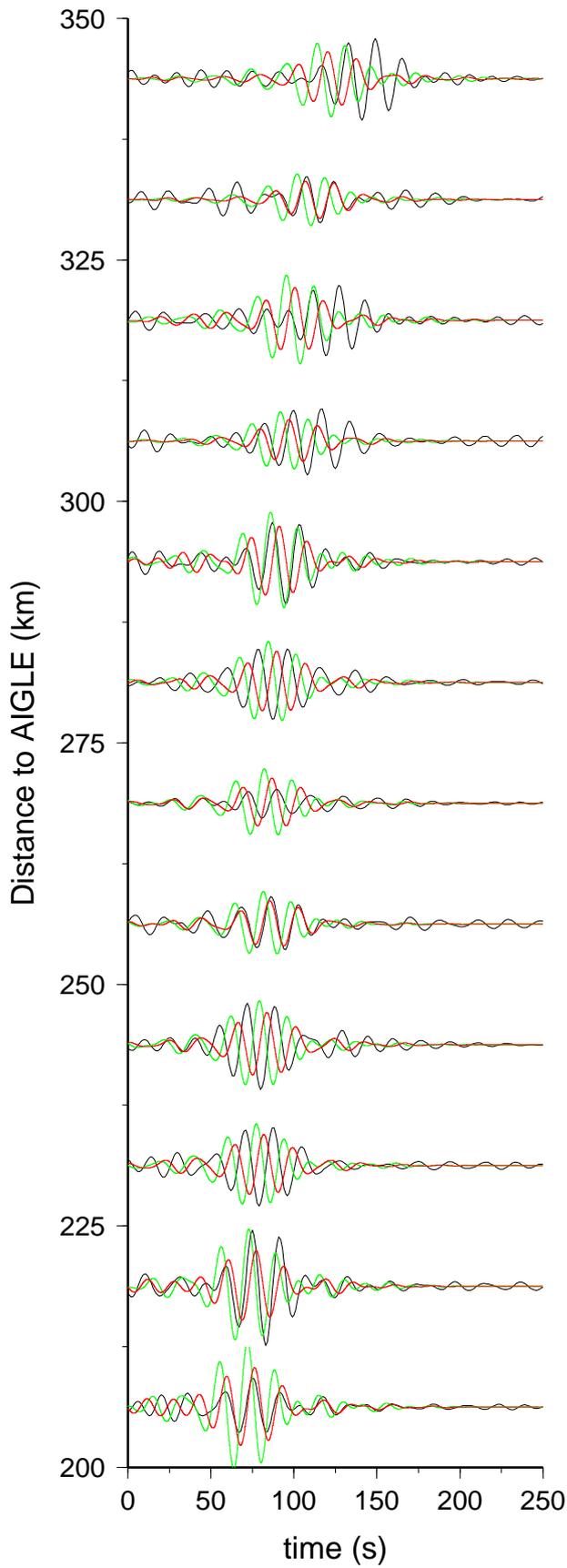


FIG. 5.22 – Comparaison des résultats de la simulation éléments spectraux dans PREM (en vert) et dans CUB (en rouge) avec les données (en noir). Les périodes des signaux présentés sont comprises entre 10 et 20 s.



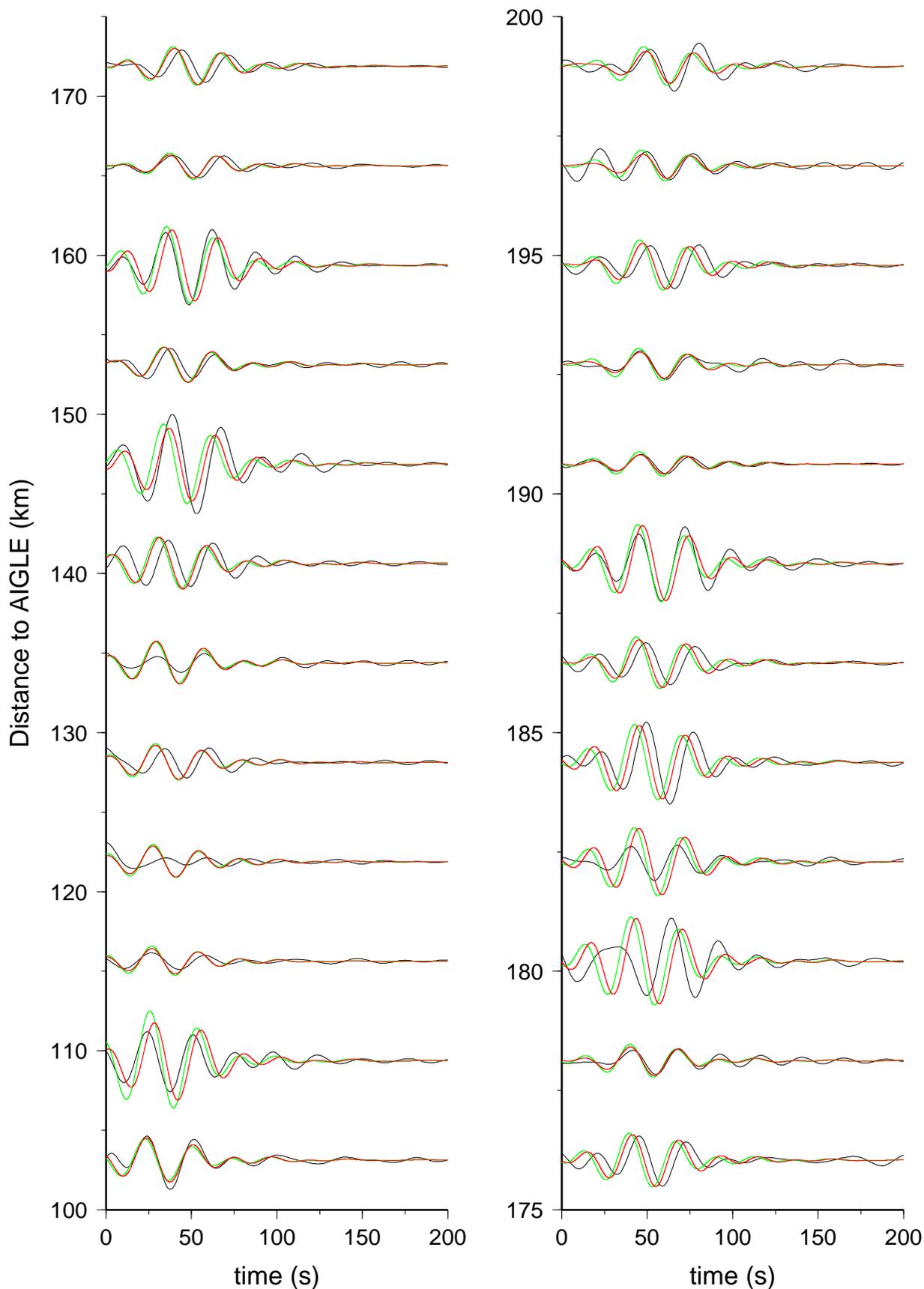
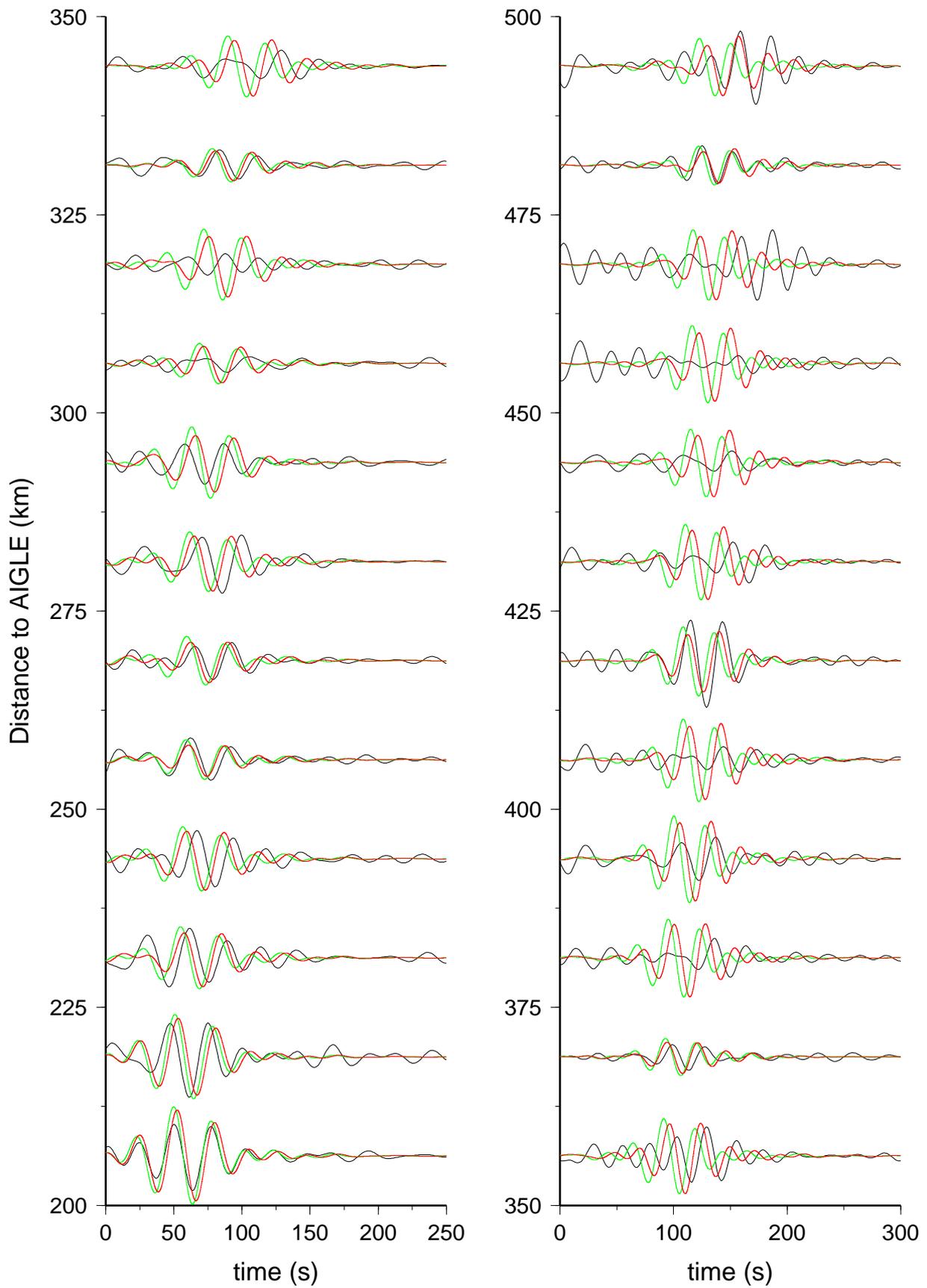


FIG. 5.23 – Comparaison des résultats de la simulation éléments spectraux dans PREM (en vert) et dans CUB (en rouge) avec les données (en noir). Les périodes des signaux présentés sont comprises entre 20 et 40 s.



En attendant une analyse plus approfondie des résultats, l'important dans un premier temps est de remarquer que, comme nous l'espérons, le modèle 3D ajuste mieux les données que ne le fait PREM. Cela est plus évident entre 10 et 20 s qu'entre 20 et 40 s. En effet, pour la première bande de fréquence, il n'est pas rare que certains signaux soient très bien reproduits par la simulation dans le modèle CUB, ce qui n'est jamais le cas pour PREM. Pour la deuxième bande de fréquence, les signaux provenant de CUB sont certes souvent mieux que ceux issus de PREM, mais aucune donnée n'est vraiment bien modélisée. De manière générale, l'ajustement se dégrade quand la distance à AIGLE augmente, ce qui peut s'expliquer par le fait que nous avons utilisé des stations proches de AIGLE pour la renormalisation spectrale de l'étape 1. Cependant, il faudrait mener une analyse des résultats azimut par azimut pour voir si la dégradation en question n'est pas plutôt due à certaines régions pour lesquelles le modèle de vitesse ne serait pas bon.

### 5.3 Conclusion

En appliquant le processus présenté dans le quatrième chapitre, nous avons réussi à simuler la forme d'onde de corrélations de bruit sismique réel par la méthode des éléments spectraux. Pour réaliser cette simulation, un certain nombre d'hypothèses a été formulé. Nous avons notamment supposé, afin d'extraire des données les amplitudes spectrales induites par le flux de bruit tout en éliminant les effets 3D de la structure, que la station centrale AIGLE était suffisamment éloignée des sources de bruit et que les effets 3D étaient locaux. Si la première hypothèse est difficile à vérifier (la structure étant précisément ce que l'on cherche), nul doute que la deuxième hypothèse pourrait être validée ou au contraire rejetée par une plus grande connaissance des mécanismes et de la localisation des sources de bruit. Cette connaissance permettrait également de mieux choisir la largeur  $H$  de la gaussienne utilisée pour le lissage azimutal des amplitudes spectrales.

A bien des égards, les résultats de cette première modélisation de données de bruit peuvent être qualifiés de préliminaires. En effet, les conditions dans lesquelles nous les avons obtenus sont loin d'être optimales, et quelques changements permettraient de les améliorer grandement. Il faudrait en particulier employer un jeu de données le plus homogène possible en temps, c'est-à-dire considérer des corrélations formées avec les mêmes jours de bruit afin d'éviter que la variation temporelle de la position des sources de bruit ne crée une anisotropie artificielle. De plus, il serait bon d'utiliser des modèles de Terre mieux adaptés aux longueurs d'onde mises en jeu dans le problème. CUB pourrait servir de modèle moyen dans les étapes 1 et 2 du processus, et un modèle régional plus fin que les modèles globaux que nous avons employés jusqu'ici devrait être utilisé dans les éléments spectraux pour garantir un ajustement correct des synthétiques avec les données.

# Conclusion et perspectives

Dans ce travail de thèse, nous avons tenté de rapprocher deux avancées majeures de ces dix dernières années en sismologie. Notre but a été, en effet, de simuler la forme d'onde des corrélations de bruit sismique en utilisant la méthode des éléments spectraux (SEM).

La SEM est un outil numérique très puissant qui permet de modéliser la propagation des ondes sismiques dans des modèles de Terre réalistes. Dans le présent manuscrit, nous avons présenté un programme qui utilise efficacement cette méthode pour calculer des sismogrammes synthétiques à l'échelle régionale. Le programme en question a été validé puis employé pour simuler la propagation des ondes émises par deux séismes différents, l'un ayant eu lieu en Roumanie et l'autre en Autriche. Les traces obtenues dans un modèle 3D de l'Europe montrent un bel accord avec les données, mais d'importantes différences apparaissent parfois et révèlent que de gros progrès sont encore à faire, à la fois dans la résolution des modèles de Terre et dans les techniques numériques. Dans la SEM, la principale limitation vient du difficile maillage et de l'énorme coût de calcul que requièrent les fines et nombreuses interfaces présentes dans la croûte. A l'avenir, espérons que les techniques d'homogénéisation récemment introduites en sismologie (Capdeville & Marigo, 2007a,b) se développeront pour permettre de passer outre ces limitations.

Notre programme éléments spectraux a été utilisé pour simuler les formes d'onde obtenues à partir de corrélations de bruit sismique. Avant de mettre en œuvre cette simulation, il nous a été nécessaire d'étudier un peu plus en détails les caractéristiques de telles formes d'onde. Grâce à une approche numérique, nous avons pu répondre à un certain nombre de questions concernant l'amplitude des corrélations. Nous avons en particulier regardé le comportement de cette amplitude dans un milieu atténuant et observé ses variations dans le cas d'une distribution non uniforme des sources de bruit. Des corrélations construites à partir d'un bruit blanchi ou binarisé ont également été étudiées. Après cela, nous avons élaboré une méthode pour créer une source qui, placée en une station et se propageant grâce à la SEM dans un milieu donné, permet de retrouver les corrélations de bruit effectuées entre cette station dite centrale et les autres stations d'un réseau. Cette source n'est pas ponctuelle et contient les caractéristiques spectrales du flux de bruit qui traverse la station centrale dans tous les azimuts et que l'on retrouve dans les corrélations. C'est essentiellement la théorie du renversement temporel (Draeger & Fink, 1999; Derode *et al.*, 2003) qui permet la construction d'une telle source.

Une première application de notre méthode a été tentée sur des données réelles. Pour extraire des corrélations les caractéristiques spectrales du flux de bruit, il nous a fallu émettre quelques hypothèses qu'une meilleure connaissance des sources de bruit permettrait de mieux contraindre. Depuis quelques années, de nombreux chercheurs élargissent considérablement cette connaissance en étudiant les mécanismes et la localisation de ces sources (par exemple

Nawa *et al.*, 1998; Rhie & Romanowicz, 2004; Friedrich *et al.*, 1998; Stehly *et al.*, 2006; Nishida & Fukao, 2007; Kedar *et al.*, 2007) mais beaucoup de questions cruciales subsistent. Par ailleurs, notre application pourrait donner de meilleurs résultats si un jeu de données plus homogène en temps était utilisé et si les modèles de Terre étaient mieux adaptés aux longueurs d'onde du problème (5 - 40 s). Enfin, il serait sûrement très profitable de considérer les autres composantes du tenseur de Green. Nous n'avons en effet employé que des signaux verticaux dans cette étude, et nul doute que la connaissance des composantes horizontales améliorerait la renormalisation spectrale qui intervient dans notre méthode.

*In fine*, c'est bien entendu l'amélioration des modèles tomographiques qui est visée par la modélisation originale que nous proposons ici. Une grande partie de la recherche sismologique essaie de tirer des sismogrammes le plus d'informations possibles, et l'inversion de formes d'onde complètes est activement à l'étude dans nombre de laboratoires. Dans ce travail, nous avons montré que les formes d'onde des corrélations de bruit qui sont récemment apparues et qui constituent des données extrêmement intéressantes pouvaient désormais rentrer dans le cadre de ces études. Bien que quelques points restent à éclaircir, il semble envisageable qu'à long terme s'établissent, comme pour les séismes, des catalogues de sources virtuelles correspondant aux différentes stations sismologiques qui couvrent le globe. Ces sources seraient définies pour différentes périodes de temps (mois, années, décennies, *etc...*) et pourraient s'utiliser, comme nous l'avons fait, pour résoudre des problèmes directs totalement 3D.

# Bibliographie

- Aki, K. (1969). Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves. *J. Geophys. Res.* 74, 615–618.
- Aki, K. and B. Chouet (1975). Origin of the coda waves : Source, attenuation and scattering effects. *J. Geophys. Res.* 80, 3322–3342.
- Aki, K. and P. Richards (1980). *Quantitative Seismology : Theory and Methods*. Freeman, San Francisco.
- Arfken, G. (1985). *Sturm-Liouville theory - Orthogonal functions, ch. 9 in Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed.* Orlando, FL : Academic Press.
- Bensen, G. D., M. H. Ritzwoller, M. P. Barmin, A. L. Levshin, F. Lin, M. P. Moschetti, N. M. Shapiro, and Y. Yang (2007). Processing seismic ambient noise data to obtain reliable broad-band surface wave dispersion measurements. *Geophys. J. Int.* 169, 1239–1260, doi :10.1111/j.1365–246X.2007.03374.x.
- Brenguier, F., N. M. Shapiro, M. Campillo, V. Ferrazzini, Z. Duputel, O. Coutant, and A. Nercessian (2008). Toward forecasting volcanic eruptions using seismic noise. *Nature*, doi :10.1038/ngeo104.
- Brenguier, F., N. M. Shapiro, M. Campillo, A. Nercessian, and V. Ferrazzini (2007). 3D surface wave tomography of the Piton de la Fournaise volcano using seismic noise correlation. *Geophys. Res. Lett.* 34, L02305, doi :10.1029/2006GL028586.
- Burridge, R. and L. Knopoff (1964). Body force equivalents for seismic dislocations. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 54, 1875–1888.
- Bérenger, J.-P. (1994). A Perfectly Matched Layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.* 127, 185–200.
- Campillo, M. and A. Paul (2003). Long-range correlations in the diffuse seismic coda. *Science* 299, 547–549.
- Canuto, C., M. Hussaini, A. Quarteroni, and T. Zang (1987). *Spectral Method in Fluid Dynamics*. Springer Verlag, Berlin.
- Capdeville, Y. (2000). *Méthode couplée éléments spectraux – solution modale pour la propagation d’ondes dans la Terre à l’échelle globale*. Ph. D. thesis, Université Paris 7.

- Capdeville, Y., E. Chaljub, J. P. Vilotte, and J. P. Montagner (2003). Coupling the spectral element method with a modal solution for elastic wave propagation in global earth models. *Geophys. J. Int.* 152, 34–66.
- Capdeville, Y., Y. Gung, and B. Romanowicz (2005). Towards global earth tomography using the spectral element method : a technique based on source stacking. *Geophys. J. Int.* 162, 541–554.
- Capdeville, Y. and J. J. Marigo (2007a). Second order homogenization of the elastic wave equation for non-periodic layered media. *Geophys. J. Int.* 170, 823–838.
- Capdeville, Y. and J. J. Marigo (2007b). Shallow layer correction for spectral element like methods. *Geophys. J. Int.* in press.
- Chaljub, E. (2000). *Modélisation numérique de la propagation d'ondes sismiques à l'échelle du globe*. Ph. D. thesis, Université Paris 7.
- Chaljub, E., Y. Capdeville, and J. Vilotte (2003). Solving elastodynamics in a solid heterogeneous 3-Sphere : a spectral element approximation on geometrically non-conforming grids. *J. Comp. Physics* 183, 457–491.
- Chaljub, E., D. Komatitsch, J.-P. Vilotte, Y. Capdeville, B. Valette, and G. Festa (2007). Spectral element analysis in seismology. Dans R.-S. Wu & V. Maupin (Eds.), *Advances in Wave Propagation in Heterogeneous Media*, Volume 48 de *Advances in Geophysics*, pp. 365–419. Elsevier - Academic Press.
- Cho, K., R. B. Herrmann, C. J. Ammon, and K. Lee (2007). Imaging the upper crust of the korean peninsula by surface-wave tomography. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 67, 198–207.
- Clayton, R. W. and R. Comer (1983). A tomographic analysis of mantle heterogeneities from body wave travel times (abstract). *Eos Trans. AGU* 62, 776.
- Colin de Verdière, Y. (2006a). Mathematical models for passive imaging, I : general background.
- Colin de Verdière, Y. (2006b). Mathematical models for passive imaging, II : effective hamiltonians associated to surface waves.
- Collino, F. and C. Tsogka (2001). Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics* 66(1), 294–307.
- Cupillard, P. and Y. Capdeville (2008). Effects of 1-bit normalization and whitening on waveforms obtained by correlation of a diffuse anisotropic wavefield generated with synthetic seismic noise sources in an attenuating spherically symmetric earth. *Geophys. J. Int.* submitted.
- Dahlen, F., S.-H. Hung, and G. Nolet (2000). Frechet kernels for finite-frequency traveltimes – I. theory. *Geophys. J. Int.* 141, 157–174.
- Dahlen, F. A. and J. Tromp (1998). *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press. NJ.

- Dedayle, E., B. Kennett, and K. Priestley (2005). Global azimuthal seismic anisotropy and the unique plate-motion deformation of Australia. *Nature* 433, 509–512.
- Delavaud, E. (2007). *Simulation numérique de la propagation d'ondes en milieu géologique complexe : application à l'évaluation de la réponse sismique du bassin de Caracas (Vénézuéla)*. Ph. D. thesis, Université Paris 7.
- Derode, A., E. Larose, M. Tanter, J. de Rosny, A. Tourin, M. Campillo, and M. Fink (2003). Recovering the Green's function from field-field correlations in an open scattering medium (L). *J. Acoust. Soc. Am.* 113, 2973–2976.
- Deville, M. O., P. Fisher, and E. Mund (2002). *High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow*. Cambridge Monographs on Applied and Computational mathematics.
- Dhatt, G. and G. Touzot (1984). *The Finite Element Method Displayed*. J. Wiley and sons, New York.
- Draeger, C. and M. Fink (1999). One-channel time-reversal in chaotic cavities : Theoretical limits. *J. Acoust. Soc. Am.* 105, 611–617.
- Duvall, T. L., S. M. Jefferies, J. Harvey, and M. A. Pomerantz (1993). Time-distance helioseismology. *Nature* 362, 430–432.
- Dziewonski, A. M. and D. L. Anderson (1981). Preliminary reference Earth model. *Phys. Earth Planet. Inter.* 25, 297–356.
- Ekström, G., J. Tromp, and E. W. F. Larson (1997). Measurements and global models of surface waves. *J. Geophys. Res.* 102, 8137–8157.
- Faccioli, E., F. Maggio, R. Paolucci, and A. Quarteroni (1997). 2D and 3D elastic wave propagation by a pseudospectral domain decomposition method. *J. Seismology* 1, 237–251.
- Festa, G. and J. P. Vilotte (2005). The Newmark scheme as velocity-stress time-staggering : an efficient PML for spectral element simulations of elastodynamics. *Geophys. J. Int.* 161(3), 789–812.
- Friedrich, A., F. Krüger, and K. Klinge (1998). Ocean-generated microseismic noise located with the Gräfenberg array. *J. Seismol.* 2, 47–64.
- Gottlieb, D. and S. Orzag (1977). *Numerical Analysis of Spectral Methods : Theory and Applications*. SIAM-CBMS, Philadelphia.
- Gouédard, P., L. Stehly, F. Brenguier, M. Campillo, Y. C. de Verdière, E. Larose, L. Margerin, P. Roux, F. J. Sánchez-Sesma, N. M. Shapiro, and R. L. Weaver (2008). Cross-correlation of random fields : mathematical approach and applications. *Geophys. Prosp.* in press.
- Grand, S. P. (1994). Mantle shear structure beneath the Americas and surrounding oceans. *J. Geophys. Res.* 99, 11591–11621.
- Hennino, R., N. Tégourès, N. M. Shapiro, L. Margerin, M. Campillo, B. van Tiggelen, and R. Weaver (2001). Observation of equipartition of seismic waves. *Phys. Rev. Lett.* 85(15), 3447–3450.

- Hughes, T. J. R. (1987). *The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*. Englewood Cliffs, NJ ; Prentice–Hall International.
- Kedar, S., M. Longuet-Higgins, F. Webb, N. Graham, R. Clayton, and C. Jones (2007). The origin of deep oceanic microseisms in the North Atlantic Ocean. *Proc. R. Soc. A*, doi :10.1098/rspa.20070277.
- Komatitsch, D. (1997). *Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l'équation de l'élastodynamique 2D et 3D en milieu hétérogène*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.
- Komatitsch, D., Q. Liu, J. Tromp, P. Süß, C. Stidham, and J. H. Shaw (2004). Simulations of ground motion in the Los Angeles basin based upon the spectral-element method. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 94(1), 187–206.
- Komatitsch, D., J. Ritsema, and J. Tromp (2002). The spectral-element method, Beowulf computing, and global seismology. *Science* 298, 1737–1742.
- Komatitsch, D. and J. Tromp (1999). Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophys. J. Int.* 139, 806–822.
- Komatitsch, D. and J. Tromp (2002a). Spectral-element simulations of global seismic wave propagation, part I : Validation. *Geophys. J. Int.* 149, 390–412.
- Komatitsch, D. and J. Tromp (2002b). Spectral-element simulations of global seismic wave propagation, part II : 3-D models, oceans, rotation, and gravity. *Geophys. J. Int.* 150, 303–318.
- Komatitsch, D. and J. Tromp (2003). A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation. *Geophys. J. Int.* 154(1), 303–318.
- Komatitsch, D. and J. P. Vilotte (1998). The spectral element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2d and 3d geological structures. *Bull. Seism. Soc. Am.* 88, 368–392.
- Larmat, C., J. Montagner, M. Fink, Y. Capdeville, A. Tourin, and E. Clévéde (2006). Time-reversal imaging of seismic sources and application to the great Sumatra earthquake. *Geophys. Res. Lett.* 33, L19312, doi :10.1029/2006GL026336.
- Larose, E., A. Derode, M. Campillo, and M. Fink (2004). Imaging from one-bit correlations of wide-band diffuse wavefields. *J. Appl. Phys.* 95(12), 8393–8399.
- Larose, E., P. Roux, and M. Campillo (2007). Reconstruction of Rayleigh-Lamb dispersion spectrum based on noise obtained from an air-jet forcing. *J. Acoust. Soc. Am.* 122(6), pp 3437.
- Li, X. D. and B. Romanowicz (1995). Comparison of global waveform inversions with and without considering cross-branch modal coupling. *Geophys. J. Int.* 121, 695–709.
- Li, X. D. and B. Romanowicz (1996). Global mantle shear velocity model developed using nonlinear asymptotic coupling theory. *J. Geophys. Res.* 101, 22 245–22 271.

- Lin, F., M. H. Ritzwoller, J. Townend, M. Savage, and S. Bannister (2007). Ambient noise Rayleigh wave tomography of New Zealand. *Geophys. J. Int.* 170, 649–666, doi :10.1111/j.1365–246X.2007.03414.x.
- Liu, H. P., D. L. Anderson, and H. Kanamori (1976). Velocity dispersion due to anelasticity : implications for seismology and mantle convection. *Geophys. J. R. astr. Soc.* 47, 41–58.
- Lobkis, O. I. and R. L. Weaver (2001). On the emergence of the Green’s function in the correlation of a diffuse field. *J. Acoust. Soc. Am.* 110, 3011–3017.
- Lognonné, P. and B. Romanowicz (1990). Modelling of coupled normal modes of the Earth : the spectral method. *Geophys. J. Int.* 102, 365–395.
- Longuet-Higgins, M. S. (1950). A theory on the origin of microseisms. *Philo. Trans. R. Soc. Lond. A.* 243, 1–35.
- Maday, Y. and A. Patera (1989). Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations. Dans A. Noor & J. Oden (Eds.), *State of the Art Survey in Computational Mechanics*, pp. 71–143. New-York : ASME.
- Marone, F., S. van der Lee, and D. Giardini (2004). Three-dimensional upper-mantle S-velocity model for the Eurasia-Africa plate boundary region. *Geophys. J. Int.* 158(1), 109–130.
- Montagner, J. P. and T. Tanimoto (1991). Global upper mantle tomography of seismic velocities and anisotropies. *J. Geophys. Res.* 96, 20337–20351.
- Montelli, R., G. Nolet, F. Dahlen, G. Masters, E. Engdahl, and S. Hung (2004). Finite-frequency tomography reveals a variety of mantle plumes. *Science* 303, 338–343.
- Nataf, H. C., I. Nakanishi, and D. L. Anderson (1986). Measurement of mantle wave velocities and inversion for lateral heterogeneity and anisotropy, III. Inversion. *J. Geophys. Res.* 91, 7261–7307.
- Nawa, K., N. Suda, Y. Fukao, T. Sato, Y. Aoyama, and K. shibuya (1998). Incessant excitation of the Earth’s free oscillations. *Earth. Planet. Space* 50, 3–8.
- Nishida, K. and Y. Fukao (2007). Source distribution of Earth’s background free oscillations. *J. Geophys. Res.* 112, B06306, doi :10.1029/2006JB004720.
- Patera, A. T. (1984). A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.* 54, 468–488.
- Priolo, E., J. M. Carcione, and G. Seriani (1994). Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques. *J. Acoust. Soc. Am.* 95 :2, 681–693.
- Rhie, J. and B. Romanowicz (2004). Excitation of Earth’s incessant free oscillations by Atmosphere-Ocean-Sea-floor coupling. *Nature* 431, 552–556.
- Ritzwoller, J., H. vanHeijst, and J. H. Woodhouse (1999). Complex shear wave velocity structure imaged beneath Africa and Iceland. *Science* 286, 1925–1928.
- Ritzwoller, M., N. Shapiro, M. Barmin, and A. Levshin (2002). Global surface wave diffraction tomography. *J. Geophys. Res.* 107(B12), 2335, 2002.

- Romanowicz, B. (1990). The upper mantle degree two : constraints and inferences on attenuation tomography from global mantle wave measurements. *J. Geophys. Res.* 95, 11051–11071.
- Ronchi, C., R. Iacono, and P. S. Paolucci (1996). The ‘Cubed Sphere’ : a new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry. *J. Comput. Phys.* 124, 93–114.
- Roux, P. and W. A. Kuperman (2004). Extracting coherent wavefronts from acoustic ambient noise in the ocean. *J. Acoust. Soc. Am.* 116(4), 1995–2003, doi :10.1121/1.1797754.
- Roux, P., K. G. Sabra, P. Gerstoft, W. A. Kuperman, and M. C. Fehler (2005). P-waves from cross-correlation of seismic noise. *Geophys. Res. Lett.* 32, L19303, doi :10.1029/2005GL023803.
- Roux, P., K. G. Sabra, and W. A. Kuperman (2005). Ambient noise cross-correlation in free space : Theoretical approach. *J. Acoust. Soc. Am.* 117(1), 79–84, doi :10.1121/1.1830673.
- Sabra, K. G., P. Roux, and W. A. Kuperman (2005). Arrival-time structure of the time-averaged ambient noise cross-correlation function in an oceanic waveguide. *J. Acoust. Soc. Am.* 117(1), 164–174, doi :10.1121/1.1835507.
- Sánchez-Sesma, F. J. and M. Campillo (2006). Retrieval of the Green’s function from cross-correlation : The canonical elastic problem. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 96, 1182–1191.
- Sánchez-Sesma, F. J., J. Pérez-Ruiz, M. Campillo, and F. Lúzon (2006). Elastodynamic 2D Green function retrieval from cross-correlation : Canonical inclusion problem. *Geophys. Res. Lett.* 33, L13305, doi :10.1029/2006GL026454.
- Sánchez-Sesma, F. J., J. Pérez-Ruiz, F. Lúzon, and M. C. .and. A. Rodríguez-Castellanos (2007). Diffuse fields in dynamic elasticity. *Wave Motion*. in press.
- Seriani, G. (1998). 3D large-scale wave propagation modeling by a spectral element method on a Cray T3E multiprocessor. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 164(1), 235–247.
- Seriani, G. and E. Priolo (1994). Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. *Finite Elements in Analysis and Design* 16, 337–348.
- Shapiro, N. M. and M. Campillo (2004). Emergence of broadband rayleigh waves from correlations of the ambient seismic noise. *Geophys. Res. Lett.* 31, L07614, doi :10.1029/2004GL019491.
- Shapiro, N. M., M. Campillo, L. Stehly, and M. H. Ritzwoller (2005). High-resolution surface wave tomography from ambient seismic noise. *Science* 307, 1615–1618.
- Shapiro, N. M. and M. H. Ritzwoller (2002). Monte-Carlo inversion for a global shear velocity model of the crust and upper mantle. *Geophys. J. Int.* 151, 88–105.
- Snieder, R. (2004). Extracting the Green’s function from the correlation of coda waves : A derivation based on stationary phase. *Phys. Rev. E* 69, 046610.
- Stehly, L., M. Campillo, and N. Shapiro (2006). A study of the seismic noise from its long-range correlation properties. *J. Geophys. Res.* 111, B10306, doi :10.1029/2005JB004237.

- Stehly, L., M. Campillo, and N. Shapiro (2007). Traveltime measurements from noise correlation : stability and detection of instrumental time-shifts. *Geophys. J. Int.* 171, 223–230, doi :10.1111/j.1365–246X.2007.03492.x.
- Stehly, L., B. Fry, M. Campillo, N. Shapiro, J. Guilbert, L. Boschi, and D. Giardini (2008). Tomography of the alpine region from observations of seismic ambient noise. *Geophys. J. Int.*. submitted.
- Tarantola, A. (1984). Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics* 49, 1259–1266.
- Tarantola, A. and B. Valette (1982). Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Rev. Geophys.* 20, 219–232.
- Teixeira, F. L. and W. C. Chew (1999). Differential forms, metrics and the reflectionless absorption of electromagnetic waves. *J. Electromagnet. Wave* 13(4), 665–686.
- Trampert, J. and J. H. Woodhouse (1995). Global phase velocity maps of Love and Rayleigh waves between 40 and 150 seconds. *Geophys. J. Int.* 122, 675–690.
- Tromp, J., C. Tape, and Q. Liu (2005). Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels. *Geophys. J. Int.* 160, 195–216.
- van der Hilst, R., S. Widiyantoro, and E. Engdahl (1997). Evidence for deep mantle circulation from global tomography. *Nature* 386, 578–584.
- van Tiggelen, B. A. (2003). Green function retrieval and time-reversal in a disordered world. *Phys. Rev. Lett.* 91(24), 243904.
- Wapenaar, K. (2004). Retrieving the elastodynamic Green's function of an arbitrary inhomogeneous medium by cross-correlation. *Phys. Rev. Lett.* 93, 254301.
- Wapenaar, K. (2006). Retrieving the elastodynamic Green's function of an arbitrary inhomogeneous medium by cross-correlation. *J. Acoust. Soc. Am.* 120(1), EL7–EL13, doi :10.1121/1.2208153.
- Weaver, R. L. and O. I. Lobkis (2001). Ultrasonics without a source : Thermal fluctuation correlation at MHz frequencies. *Phys. Rev. Lett.* 87, 134301.
- Weaver, R. L. and O. I. Lobkis (2003). Elastic wave thermal fluctuations, ultrasonic waveforms by correlation of thermal phonons. *J. Acoust. Soc. Am.* 113, 2611–2621, doi :10.1121/1.1564017.
- Weaver, R. L. and O. I. Lobkis (2005a). Fluctuations in diffuse field-field correlations and the emergence of the green's function in open systems. *J. Acoust. Soc. Am.* 117, 3432–3439, doi :10.1121/1.1898683.
- Weaver, R. L. and O. I. Lobkis (2005b). The mean and the variance of diffuse field correlations in finite bodies. *J. Acoust. Soc. Am.* 118, 3447–3456, doi :10.1121/1.2109307.
- Woodhouse, J. H. and A. M. Dziewonski (1984). Mapping the upper mantle : Three-dimensional modeling of earth structure by inversion of seismic waveforms. *J. Geophys. Res.* 89, 5953–5986.

- Woodhouse, J. H. and T. P. Girnius (1982). Surface waves and free oscillations in a regionalized earth model. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 78, 641–660.
- Yang, Y., M. H. Ritzwoller, A. L. Levshin, and N. M. Shapiro (2007). Ambient noise rayleigh wave tomography across Europe. *Geophys. J. Int.* 168, 259–274.
- Yao, H., R. D. van der Hilst, and M. V. de Hoop (2006). Surface-wave array tomography in SE Tibet from ambient seismic noise and two-station analysis - I. Phase velocity maps. *Geophys. J. Int.* 166, 732–744, doi :10.1111/j.1365–246X.2006.03028.x.
- Zhao, L., T. H. Jordan, and C. H. Chapman (2000). Three–dimensional Fréchet differential kernels for seismic delay times. *Geophys. J. Int.* 141, 558–576.