



HAL
open science

Études Didactiques de l'Utilisation de l'Histoire des Mathématiques en classe et en formation (EDUHM)

Thomas de Vittori

► **To cite this version:**

Thomas de Vittori. Études Didactiques de l'Utilisation de l'Histoire des Mathématiques en classe et en formation (EDUHM). Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université d'Artois, 2022. tel-03790136

HAL Id: tel-03790136

<https://hal.science/tel-03790136>

Submitted on 28 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à diriger des recherches

*Études Didactiques de l'Utilisation de l'Histoire des Mathématiques
en classe et en formation (EDUHM)*

Thomas DE VITTORI

Note de synthèse

Soutenue le 27 septembre 2022 devant le jury composé de :

Thomas BARRIER, professeur, Université Libre de Bruxelles, examinateur.
Viviane DURAND-GUERRIER, professeure émérite, Université de Montpellier, rapporteuse.
Corinne HAHN, professeure émérite, ESCP Business School, examinatrice.
Etienne MATHERON, professeur, Université d'Artois, directeur.
Marc MOYON, maître de conférences HDR, Université de Limoges, examinateur.
Cécile OUVRIER-BUFFET, professeure, Université de Paris-Est Créteil, rapporteuse.
Rossana TAZZIOLI, professeure, Université de Lille, examinatrice.
Dominique TOURNÈS, professeur, Université de la Réunion, rapporteur.

Études Didactiques de l'Utilisation de l'Histoire des Mathématiques en classe et en formation (EDUHM)

INTRODUCTION	4
PREMIÈRE PARTIE : L'ARTICULATION ENTRE ÉPISTÉMOLOGIE, HISTOIRE ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES	11
CHAPITRE 1 : PERSPECTIVES ÉPISTÉMOLOGIQUES	12
1.1 Quelle histoire dans le H de EDUHM ?	12
1.2 L'exemple du concept philosophico-mathématique de <i>lieu</i>	14
La science des figures	15
Un espace pour les géomètres	15
La science de l'espace	17
Conclusion sur l'espace et la géométrie	19
1.3 Quelles mathématiques dans le M de EDUHM ?	22
La question de l'ontologie	22
La question de l'épistémologie	24
1.4 Perspectives	27
CHAPITRE 2 : ÉTAT DES LIEUX ET POSITIONNEMENT DIDACTIQUE	29
2.1 La situation en France et le rôle des IREM	29
2.2 Sur la formation des enseignants	34
Des enseignants en formation aux élèves en classe	36
Le double champ et les interactions mathématiques-histoire	38
2.3 Épistémologie et didactique : une autre articulation	41
Autre orientation, autres lieux pour la recherche et la formation	43
La didactique comme moteur	45
2.4 Analyses didactiques : le D de EDUHM	46
La typologie SaMaH	46
Le modèle $\kappa\zeta$ de Balacheff et les relations épistémologiques passé-présent	49
2.5 Dans le contexte international	52
2.6 Perspectives	55

DEUXIÈME PARTIE : MÉTHODES QUANTITATIVES ET QUESTIONS DIDACTIQUES	58
CHAPITRE 3 : SUR LES ÉTUDES QUANTITATIVES	59
3.1 Sur les résultats en didactique des mathématiques : le cas HPM	59
Résultats et robustesse en didactique	59
La très faible part des études empiriques dans le champ HPM	61
3.2 Une approche exploratoire par analyse factorielle : l'imaginaire en CM2	63
3.3 Sur la taille des échantillons en analyse factorielle	65
3.4 Stabilité d'un résultat par rééchantillonnage	67
CHAPITRE 4 : UN EXEMPLE D'APPROCHE PAR MODÉLISATION	70
4.1 Contexte : les numérations anciennes dans les manuels de 6 ^e	70
4.2 Principaux enjeux didactiques sur la numération et le calcul posé	71
4.3 Histoire des mathématiques et hypothèses de recherche	72
Une numération chinoise ancienne	73
Hypothèses de recherche	75
4.4 Analyse didactique de l'activité : enjeux d'apprentissage	75
4.5 Données et analyses statistiques	77
Évaluation des hypothèses (\mathcal{H}_1) et (\mathcal{H}_2)	78
Évaluation de l'hypothèse (\mathcal{H}_3)	85
4.6 Discussion	87
4.7 Sur la taille des échantillons en analyse de Rasch	88
4.8 Perspectives	89
CONCLUSION	91
RÉFÉRENCES	94
ANNEXE	105
LISTE DES DOCUMENTS ANNEXÉS À LA NOTE DE SYNTHÈSE	110

Introduction

Comme les sociologues des sciences l'ont bien montré, l'activité scientifique d'un chercheur n'est jamais complètement déconnectée de sa trajectoire professionnelle individuelle, des personnes et communautés rencontrées, de sa propre subjectivité et des évolutions des institutions dans lesquelles il évolue. Toutes ces dimensions sont particulièrement présentes dans mon cas et cette note de synthèse en vue de la présentation de l'habilitation à diriger des recherches intègre ces aspects tant ils peuvent, me semble-t-il, éclairer les axes de recherche que j'ai pu développer dans une articulation entre l'histoire des mathématiques et la didactique des mathématiques. Ainsi, avant d'entrer dans le détail de ma production scientifique, son inscription dans des axes de recherche structurés et les projets qui les accompagnent, je vais consacrer cette introduction à l'exposé de ce parcours qui m'a mené à ce que je suis aujourd'hui. Je commencerai donc par un rapide rappel de mon cursus afin d'y souligner les moments clés et les bifurcations, pour aller ensuite vers les choix intellectuels qui ont orienté et orientent encore mon activité scientifique.

Originaire de Franche-Comté, je commencerai la présentation de mon parcours scolaire et universitaire par mes années au lycée Condorcet de Belfort. J'ai passé cinq années dans cet établissement, d'abord de la seconde à la terminale C (dont l'équivalent actuel est la série S avec spécialité mathématiques) puis en classes préparatoires Maths Sup et Maths Spé P (dont l'équivalent actuel est CPGE PCSI). Incontestablement, les sciences, en particulier physiques et mathématiques, m'intéressaient et j'envisageais d'en faire mon métier. Au départ plus porté sur la physique et la chimie, ma rencontre avec les mathématiques du supérieur va créer un premier changement d'itinéraire. Résolument abstraites et exigeantes, les mathématiques que je découvre en classe préparatoire interpellent ma sensibilité tant je trouve une certaine beauté à ce nouveau jeu avec des concepts. En entrant en classes préparatoires, mon projet professionnel oscillait encore entre l'enseignement des sciences physiques et le métier d'ingénieur. Finalement, ce sera les mathématiques avec le métier d'enseignant comme perspective possible. J'entrai ainsi en licence de mathématiques pures à Besançon où m'attendait la découverte de l'université, ses amphithéâtres, ses examens, et ses enseignants-chercheurs. Mon année de licence de mathématiques confirma pleinement mon goût pour cette discipline. Toujours intéressé par l'enseignement, après ma licence, je m'inscrivis à l'IUFM de Besançon (désormais INSPE de Franche-Comté) afin d'y préparer le CAPES de mathématiques. Contre toute attente, face à ce début de parcours somme toute assez classique pour quiconque voudrait devenir professeur de mathématiques dans le secondaire, cette année à l'IUFM constitua la première grande rupture dans mon parcours intellectuel. Alors que tout aurait dû me pousser à préparer uniquement les écrits et les oraux du CAPES, c'est à ce moment que je découvre, un peu par hasard, l'univers de l'histoire des mathématiques. Inscrit depuis longtemps à la bibliothèque municipale de Belfort, j'emprunte petit à petit tous les ouvrages du rayon histoire et philosophie des sciences. Comme dans tout espace ouvert à une large audience, les livres qui y sont proposés sont de natures très diverses et surtout de niveaux très variables. Se côtoient ainsi des ouvrages de vulgarisation scientifique, des numéros hors-séries de revues grand public et des textes beaucoup plus universitaires. Pour qualifier ce rayonnement de la bibliothèque, j'ai évoqué l'expression philosophie des sciences car c'est bien là qu'a résidé, pour moi, le déclencheur d'un intérêt nouveau mais irrésistible pour l'épistémologie des mathématiques. Je ne me souviens plus exactement du

contenu des étagères de ce lieu et de tous les livres que j'ai pu y trouver, mais je sais exactement lequel a eu l'effet le plus marquant. Il s'agit de *Philosophie et philosophie spontanée des savants* de Louis Althusser (1974). Les connaisseurs¹ d'Althusser savent à quel point cet ouvrage est particulier. Il s'agit en fait d'un cours, polémique, donné entre 1967 et 1968 à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm à Paris. En rupture avec les usages d'enseignement de la philosophie de son époque, Althusser veut proposer un cours spécifiquement construit pour les non-philosophes et plus précisément pour les scientifiques. Ce texte constitue l'introduction d'une série de cours proposés par Pierre Macherey, Etienne Balibar, François Regnaut, Michel Fécheux, Michel Fichant et Alain Badiou, dont voici les intitulés tels qu'ils se présentaient dans l'annonce initiale :

- 1/ La philosophie et les sciences (Louis Althusser)
- 2/ L'objet de la science (Macherey)
- 3/ Pratique sociale et histoire de sciences (Pécheux)
- 4/ Épistémologie et histoire des sciences (Fichant)
- 5/ Y a-t-il des précurseurs dans les sciences ? (Regnaut)
- 6/ La méthode expérimentale (Balibar)
- 7/ Qu'est-ce qu'un modèle ? (Badiou)

Dès le départ, ces exposés oraux devaient être suivis d'une publication dans le cadre d'une série d'ouvrages qui, malheureusement, n'aboutira que partiellement du fait, entre-autre, des événements sociaux de mai 1968. Finalement seuls trois ouvrages paraîtront : *Sur l'histoire des sciences* co-signé de Fichant et Pécheux, *Le concept de modèle* de Badiou, et bien sûr le texte de la séance introductive renommé en *Philosophie et philosophie spontanée des savants* d'Althusser. Je ne détaille pas davantage l'histoire de ce texte car à l'époque où j'ai lu ce livre, j'étais bien loin d'en connaître les subtilités. De même, jeune étudiant en mathématiques, je n'avais pas connaissance des positions politiques d'Althusser ; marxiste convaincu qui a pu se servir aussi de ses cours et de ses écrits comme vitrine d'une pensée alternative qui trouvait une forte audience en 1968 et les quelques années qui suivirent. Ce qui m'intéresse dans cette rapide présentation du projet de ce cours introductif de philosophie pour scientifiques c'est de souligner à quel point je pouvais me trouver, malgré des décennies d'écart, parfaitement en phase avec le public visé par Althusser. Alors que commençaient à naître en moi des questionnements sur les mathématiques et leur histoire, ce texte tombait à point nommé pour exacerber mon goût pour l'épistémologie. Mais finalement, qu'y propose Althusser ? L'ouvrage s'organise en deux grandes parties : la première est purement méthodologique, elle expose ce qu'est ou devrait être la philosophie ; la seconde est une mise en pratique sur des exemples. Pour définir la philosophie, Althusser organise son propos autour de 25 « thèses ». Ces thèses sont des assertions qu'Althusser qualifie de dogmatiques qui visent à cerner ce que font les philosophes. Il serait trop long de les passer toutes en revue, mais je peux par exemple citer la Thèse 3 qui dit que « La philosophie n'a pas pour objet les objets réels, ou un objet réel, au sens où une science a un objet réel », la Thèse 4 qui précise que « La philosophie n'a pas d'objet, au sens où une science a un objet » ou encore la Thèse 7 qui affirme que « Les Thèses sont reliées entre elles sous la forme d'un système. » Il convient de noter qu'au fil de son exposé, Althusser prend régulièrement un peu de recul pour préciser en quoi ce qu'il dit a été adapté pour l'objectif didactique indispensable à un tel projet de cours. Au-delà du contenu philosophique présenté, cette vigilance méthodologique avait, elle aussi, un fort écho

¹ Cette partie s'appuie sur le texte de Pierre Macherey « Althusser et le concept de philosophie spontanée des savants » disponible en ligne <https://philolarge.hypotheses.org/files/2017/09/21-05-2008.pdf>

en moi. Le rapport aux sciences est toujours présent et Althusser consacre un long développement à questionner l'idéologie. Il écrit ainsi dans la Thèse 20 que « La philosophie a pour fonction majeure de tracer une ligne de démarcation entre l'idéologique des idéologies d'une part, et le scientifique des sciences d'autre part » ; idée qui mènera à conclure le premier cours par la Thèse 22 qui énonce que « Toutes les lignes de démarcation que trace la philosophie se ramènent à des modalités d'une ligne fondamentale : entre le scientifique et l'idéologique. » Progressivement, Althusser détaille les liens entre la philosophie et les sciences, puis entre les sciences elles-mêmes, y compris les disciplines littéraires². La première évocation de l'adjectif « spontané » (à comprendre ici comme ce qui pré-existe sans en avoir pleinement conscience) qui intervient aussi dans le concept central et titre de l'ouvrage, apparaît lorsque le philosophe tire de ses réflexions la Thèse 21 où est annoncé que « L'idéologie scientifique (ou des scientifiques) fait corps avec la pratique scientifique : c'est l'idéologie spontanée de la pratique scientifique. » Cette formulation préfigure la conclusion donnée dans la Thèse 25 qui définit la P.S.S. :

Thèse 25. Dans leur pratique scientifique, les spécialistes des différentes disciplines reconnaissent « spontanément » l'existence de la philosophie, et le rapport privilégié de la philosophie aux sciences. Cette reconnaissance est généralement inconsciente : elle peut devenir, en certaines circonstances, partiellement consciente. Mais elle reste alors enveloppée dans les formes propres de la reconnaissance inconsciente : ces formes constituent la « philosophie spontanée des scientifiques », ou « des savants » (P. S. S.). (Althusser, 1974, p. 67)

Dans le troisième cours, Althusser s'étend longuement sur la P.S.S. dans un chapitre intitulé tout simplement « Il existe une philosophie spontanée des savants (P.S.S.) ». Il exemplifie ensuite son système sur le cas de la biologie moderne au travers des travaux de Jacques Monod³. *In fine*, l'objectif est de fournir les outils permettant à cette P.S.S., mélange de questionnements et de postures philosophiques intuitives des scientifiques (du fait de leur pratique de leur science), de devenir non-spontanée, consciente, voire active y compris sur le plan politique. Althusser dirait tout simplement, plus « juste ». On notera que dans ses écrits ultérieurs, il critiquera assez ouvertement ce projet de théorisation de la philosophie. Sans en rejeter complètement les énoncés, Althusser sera ainsi plus nuancé et insistera volontiers sur la dimension conjoncturelle et un peu datée des propositions faites dans le texte *Philosophie et philosophie spontanée des savants*.

Que retenir de cette rapide présentation de l'ouvrage d'Althusser et de son impact sur mes réflexions ? En côtoyant la notion de philosophie spontanée des savants, je découvrais la possibilité de questionner une science, non pas seulement en la pratiquant à l'interne, en résolvant des problèmes par des calculs ou des expériences, mais de manière distanciée⁴, en tentant de cerner ses concepts et méthodes. Cette posture réflexive ne faisait pas partie de mon parcours antérieur et je trouvai en elle un moyen de concilier plusieurs de mes centres d'intérêt dont un goût certain pour les concepts abstraits et pour l'histoire des idées. Il était donc possible de questionner les concepts mathématiques en plus de simplement les manipuler. Ne manquait que la dimension didactique, mais ceci n'était, je l'ignorais à

² Il s'agit ici du terme employé par Althusser et qui comprend en fait les disciplines littéraires en tant que tel mais aussi les sciences humaines en général.

³ Althusser va en fait commenter la leçon inaugurale fait par Jacques Monod au Collège de France. Ce cours est l'un des moments les plus polémiques du programme d'Althusser.

⁴ Althusser rejetterait sans doute cette formulation car, selon lui, rien ne peut « sortir » de la philosophie, fût-elle une philosophie des sciences.

l'époque, que temporaire. Il me restait à trouver comment poursuivre ces réflexions dans un parcours universitaire balisé. Une réponse existait dans le DEA d'Épistémologie et d'Histoire des Sciences de l'Université Paris 7 – Denis Diderot (équivalent master 2 recherche dans la nomenclature actuelle). N'ayant qu'une licence, je quittai donc l'IUFM et mon projet d'enseignement pour m'engager dans une maîtrise de mathématiques pures (équivalent master 1 recherche), toujours à Besançon. En plus des mathématiques fondamentales, ce parcours comportait par ailleurs une petite unité d'épistémologie et d'histoire des mathématiques⁵, ce qui me convenait parfaitement. Une fois cette maîtrise obtenue, je partis pour Paris et les tours de l'immense campus de Jussieu.

Bien qu'en pleine continuité de mon nouveau projet professionnel, mon entrée en DEA constituait une double rupture. La première rupture est évidemment thématique. En effet, en m'inscrivant dans cette formation, je quittais les mathématiques pour découvrir les sciences humaines. La deuxième rupture, quant à elle, réside dans ce passage du deuxième cycle au troisième cycle universitaire. Pour bien le comprendre, il faut rappeler que cet épisode se situe avant la réforme LMD et le DEA se présentait donc, à l'époque, comme la première année et porte d'entrée dans le troisième cycle universitaire. Par ces deux aspects, je considère encore aujourd'hui mon année en DEA d'Épistémologie et d'Histoire des sciences comme la plus profitable et agréable de toute ma scolarité. Dans ce parcours, j'y trouvai des cours d'histoire de sciences (pas uniquement des mathématiques), de la sociologie des sciences, de la méthodologie de la recherche, de l'épistémologie de l'histoire, de la philosophie et de l'épistémologie des sciences. Quelques unités étaient à options dont en particulier le domaine scientifique de prédilection. Je choisis les mathématiques ce qui m'amena, entre autres, à participer au séminaire sur l'histoire des mathématiques arabes médiévales. Ce séminaire était porté par le CHSPAM⁶, unité CNRS située alors à Villejuif. C'est là que j'ai fait la rencontre du professeur Roshdi Rashed qui, après l'obtention de mon DEA, accepta de suivre mon travail de thèse. Je reviendrai sur le contenu scientifique de mon travail de thèse dans la suite de cette note, mais j'en donne dès maintenant quelques éléments contextuels. Durant mon année de DEA, mon intérêt pour la dimension épistémologique de l'histoire des sciences ne faiblit pas, bien au contraire. Ce n'est donc pas un hasard si ma thèse intitulée *La notion d'espace dans la géométrie de l'Antiquité à l'Âge Classique* porte sur l'exploration d'un concept (le lieu) à la jonction entre la philosophie et les mathématiques. Ce n'est pas un hasard non plus si cette thèse fut encadrée par Roshdi Rashed⁷ qui ne manquait pas de rappeler que l'histoire des mathématiques sans philosophie est aveugle, et que la philosophie des mathématiques sans histoire est vide⁸. Il convient ici de souligner que travailler avec Roshdi Rashed n'est pas neutre sur le plan du positionnement épistémologique des recherches en histoire des sciences. Au début des années 2000, lorsque j'ai commencé ma thèse, s'estompaient tout juste les débats entre *internalistes* d'une part, tenants d'une histoire qui se focalise principalement sur les découvertes, les publications des théories et les débats argumentés, et *externalistes* d'autre part qui défendent que les facteurs

⁵ Cet enseignement était assuré par Jean Merker, membre actif de l'IREM de Franche-Comté.

⁶ Centre d'Histoire des Sciences et Philosophies Arabes et Médiévales. Cette équipe fait désormais partie du laboratoire SPHERE de l'Université de Paris.

⁷ Administrativement, le directeur de ma thèse fut Régis Morelon. En effet, Roshdi Rashed partant en retraite l'année même de mon entrée en doctorat, il ne pouvait plus en assurer officiellement la direction.

⁸ Cette citation est d'Imre Lakatos (1976) qui écrit dans l'introduction de son célèbre *Proofs and Refutations* que « the history of mathematics, lacking the guidance of philosophy, has become *blind*, while the philosophy of mathematics, turning its back on the most intriguing phenomena in the history of mathematics, has become *empty*. »

extrascientifiques (institutionnels, politiques, idéologiques, religieux) jouent un rôle décisif de la recherche scientifique⁹. Ces débats sont désormais dépassés, mais les travaux de Roshdi Rashed s'inscrivent très certainement dans le premier courant, au point que l'un de mes professeurs de méthodologie générale en DEA le qualifiait (avec un profond respect teinté d'une pointe d'humour) comme le dernier des internalistes. Cette posture intellectuelle qui était déjà un peu la mienne, mais qui se trouva renforcée par cette rencontre, résonne encore actuellement dans mon travail sur l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement, point que je détaillerai un peu plus loin. Mais avant d'entrer dans ces considérations épistémologiques dans mes recherches, je dois terminer la présentation de mon parcours par une dernière étape, fondamentale, qui est celle de mon recrutement à l'IUFM et de mon retour vers la dimension enseignement.

En octobre 2005, à la veille de la soutenance de ma thèse¹⁰ et après avoir été reçu au CAPES externe de mathématiques, je suis recruté comme ATER en mathématiques à l'IUFM de Bretagne, sur le site de Brest. Là, pendant trois ans, je retrouve l'enseignement à deux échelles avec, d'un côté le niveau individuel en devenant enseignant-chercheur, et de l'autre le niveau plus institutionnel en me plongeant dans la formation des enseignants du premier et du second degré. D'une certaine manière, j'embrasse donc d'emblée tous les niveaux de l'enseignement *de la maternelle à l'université*. L'équipe de formateurs de mathématiques brestoise comprend plusieurs collègues professeurs certifiés ou agrégés, mais je suis le seul universitaire. Cette situation aura l'avantage de créer une répartition assez naturelle des interventions de chacun en m'offrant d'abord principalement la charge des enseignements de nature réflexive un peu distancés par rapport à la pratique au quotidien d'une classe (compréhension des programmes, connaissance de l'institution, approfondissement de certaines notions, ...), le tout dans une très grande confiance et liberté. Sur la dimension universitaire de la formation, tout était un peu à construire. Ce n'est pas lieu ici de détailler tous les enseignements que j'ai pu assurer au cours de ces années, mais il convient de souligner quand même la mise en place de séances d'épistémologie et d'histoire des mathématiques. Plutôt destinées aux futurs enseignants du second degré, ces formations dans le droit fil de mon parcours s'inscrivaient dans une dynamique d'introduction de l'histoire des sciences (toutes disciplines) portée en particulier à Brest par Sylvain Laubé. Maître de conférences en physique depuis plusieurs années, Sylvain Laubé me prit rapidement sous son aile en me faisant entrer dans une communauté, naissante à l'échelle de toute la France, d'historiens des sciences, en poste en IUFM, et soucieux d'inscrire l'histoire et l'épistémologie dans les parcours de formation des enseignants (le groupe ReForEHST¹¹). C'est à ce moment que débuta ma réelle conversion thématique. Issu de l'histoire des mathématiques mais au contact au quotidien avec des problématiques d'enseignement, je commençai à interroger la place de l'histoire des mathématiques dans les salles de classe. Au-

⁹ Pour un état des lieux assez précis de cette question, on pourra se référer au chapitre *Internalisme contre externalisme* de Cédric Grimoult (2003) dans son ouvrage *Histoire de l'histoire des sciences : historiographie de l'évolutionnisme dans le monde francophone*, ou l'avant-propos du plus récent *Méthode et histoire. Quelle histoire font les historiens des sciences et des techniques ?* édité par Anne-Lise Rey-Courtel (2013) où Bernard Joly explique par exemple rapidement que « L'opposition entre internalisme et externalisme semble alors dépassée, ou plutôt inopérante, tant il est vrai qu'un texte scientifique ne se comprend que dans le rapport qu'entretient sa logique interne avec les conditions qui rendent possible et sensée son élaboration. »

¹⁰ Thèse soutenue le 30 novembre 2005.

¹¹ Recherche et Formation en Épistémologie et Histoire des Sciences et des Techniques. Ce groupe n'était pas structuré autrement que sous la forme d'un collectif informel de personnes intéressées par la place de l'histoire des sciences dans la formation.

delà des enjeux de formation initiale ou continue, c'est bien les apprentissages des élèves qui m'intéressaient. Or, questionner et mener des actions de recherche à propos de ce que font les élèves lors de séances de mathématiques, ce n'est rien d'autre que de la didactique des mathématiques. Ainsi, je glissai progressivement de l'histoire des mathématiques vers la didactique dans laquelle je pouvais facilement réintégrer mes connaissances épistémologiques et créer des expérimentations avec des supports ancrés dans des pratiques mathématiques plus ou moins anciennes. En 2008, je suis recruté comme maître de conférences à l'IUFM de Douai où je poursuis mes réflexions et enseignements, principalement auprès des futurs enseignants du premier degré. Je l'évoquais au début de cette introduction, la carrière d'un enseignant-chercheur n'est jamais complètement déconnectée des changements institutionnels et ce fut particulièrement vrai pour les IUFM, devenus ESPE, puis INSPE en à peine 10 ans. Ces évolutions ont eu lieu aux deux échelles nationales et locales. Sur le plan national, la principale réforme a eu lieu en 2010 lors de la transformation des IUFM dans le cadre de ce qu'on a appelé la « masterisation ». Structurellement, cette évolution consistait aussi dans la fin de IUFM comme établissements indépendants et leur intégration dans les universités régionales. L'une des principales conséquences a été la refonte des anciens parcours des étudiants (une année de préparation au concours et une année de formation comme fonctionnaire stagiaire) dans des diplômes de masters soumis aux règles universitaires standard. Ce changement profond, car la formation des enseignants intégrait désormais une diplomation, s'accompagna d'opportunités très intéressantes pour la place de l'histoire des mathématiques. En effet, et j'y reviendrai plus loin dans cette note, c'est là qu'ont pu apparaître les unités d'épistémologie et d'histoire des sciences en lien avec de nouvelles exigences dans les référentiels de compétences. Ces derniers donnaient les grandes lignes des contenus d'une formation des enseignants à visée universitaire. La deuxième échelle d'évolution institutionnelle, pleinement liée à la première, concerne la situation particulière de l'IUFM-ESPE-INSPE de l'académie de Lille. Je ne m'attarderai pas trop longuement sur cette histoire aux multiples rebondissements, mais il convient de s'y plonger un peu pour comprendre l'une de ses conséquences sur mes travaux. Contrairement à la plupart des IUFM de France qui n'ont vécu qu'une seule grande révolution en intégrant une bonne fois pour toutes l'une des universités de leur académie, l'IUFM de Lille a été particulièrement malmenée. Objet de cristallisation de conflits de territoire entre les différentes universités régionales, l'IUFM est d'abord intégrée en 2010 au sein de l'Université d'Artois. Cette situation n'a duré qu'un temps et pour diverses raisons cette université décide de se séparer rapidement de cette composante considérée comme complexe et couteuse. Les tensions inter-universitaires étant toujours fortes, il est décidé que l'IUFM sera rattaché à une COMUE¹², plus ou moins créée ex-nihilo pour l'occasion, en 2013. Là, l'IUFM Nord-Pas de Calais devient ESPE Lille-Nord de France et constitue l'unique composante de cette entité méta-universitaire qu'est la COMUE Lille-Nord de France. Initialement figure de proue d'une volonté nationale de structuration du monde de l'université autour de grands établissements, le statut dérogatoire des COMUEs est finalement abandonné par le ministère en 2018-2019, ce qui laisse une nouvelle fois l'ESPE orpheline. Cette fois, ce sera l'Université de Lille qui acceptera d'intégrer cette composante dans le climat mouvementé d'une nouvelle réforme nationale de la formation des maîtres initiée à la même période. En 2019, l'ESPE devient finalement INSPE de l'académie de Lille – Hauts de France, composante de l'Université de Lille. On s'en doute, il y aurait beaucoup à dire sur cette mouvance institutionnelle faite

¹² COMunauté d'Universités et d'Établissements.

d'intégrations et de désintégrations successives. Pourtant, ces transformations ont pu créer, par un heureux concours de circonstances, une situation très favorable au développement de mes recherches. En effet, pour le volet recherche de mon activité, j'ai été rattaché au Laboratoire de Mathématiques de Lens (LML) de l'Université d'Artois. Avant moi, avait été recrutés et rattachés à ce laboratoire un historien des mathématiques (Frédéric Brechenmacher) et une didacticienne (Anne-Cécile Mathé). Au fil des années, la configuration très particulière née de la conjonction d'une demande institutionnelle d'enseignants-chercheurs en didactique et en histoire des mathématiques pour les INSPE et d'un laboratoire qui ne comportait initialement aucune thématique dans ces deux domaines, se sont succédés des recrutements très ouverts avec une alternance de didactien·ne·s Christine Mangiante (la même année que moi), Thomas Barrier et Marianne Moulin, et d'historiens avec Guillaume Jouve, Thomas Morel et Thomas Préveraud. Transcendant les remous institutionnels liés aux multiples changements de statut de l'INSPE, se trouvaient donc progressivement rassemblés au sein d'un même laboratoire des chercheurs en didactique et en histoire des mathématiques¹³, sans contrainte thématique particulière et avec l'appui extrêmement bienveillant des directeurs successifs du LML. Il était donc devenu possible de faire interagir, en respectant les envies de chacun·e, ces deux domaines avec comme dénominateur commun une sensibilité des acteurs pour la formation des enseignants. C'est ici que s'est structuré l'axe principal de ma recherche qui donne aussi le titre à cette note de synthèse, à savoir les *Études Didactiques de l'Utilisation de l'Histoire des Mathématiques en classe et en formation* (noté dans toute la suite par son acronyme EDUHM). Je rappellerai et détaillerai dans les différentes parties scientifiques de cette note les réalisations qui ont pu naître de cette dynamique entre didactique et histoire ; dynamique qui n'est pas si fréquente dans le paysage de la recherche française.

Le thème étant maintenant posé, je vais donc m'attacher, au travers de cette note de synthèse, à expliquer à la lumière de mes travaux les enjeux et problématiques de recherche que recouvrent l'acronyme EDUHM. Le texte qui va suivre se compose de deux grandes parties comprenant chacune deux chapitres. La première partie porte sur l'articulation entre l'épistémologie, en particulier l'épistémologie historique, et la didactique dans mes travaux. Dans le premier chapitre, je reviendrai tout d'abord sur l'expression « histoire des mathématiques » en cherchant à qualifier épistémologiquement chacun de ces deux termes. Ensuite, dans le deuxième chapitre, je développerai la place de l'histoire des mathématiques dans un contexte d'enseignement (surtout scolaire) et comment j'ai pu chercher un questionnement didactique adapté. La deuxième grande partie de cette note de synthèse est consacrée à des questions de méthode et plus particulièrement à l'usage des analyses statistiques dans le questionnement didactique. Dans cette partie, en lien avec mes expérimentations les plus récentes, le troisième chapitre présentera une étude mettant en œuvre une analyse factorielle et le quatrième chapitre s'appuiera, entre autres, sur une modélisation de type Rasch. Dans les deux cas, les analyses viendront également nourrir un questionnement plus général sur la taille des échantillons en didactique. À la fin de chaque chapitre, j'exposerai les perspectives de recherches dans lesquelles j'inscris mes travaux à venir, éléments qui seront aussi synthétisés en conclusion.

¹³ On notera que cette situation n'est plus vraie depuis 2018. En effet, les autres recrutements MCF qui ont eu lieu depuis cette date ont été réalisés avec des rattachements à d'autres laboratoires. Au fil des années, la constitution de l'axe Didactique-Histoire du LML a pu fluctuer au gré des recrutements, mutations et détachements.

PREMIÈRE PARTIE : l'articulation entre épistémologie, histoire et
didactique des mathématiques

Chapitre 1 : Perspectives épistémologiques

Ce premier chapitre est dédié à la place de l'histoire des mathématiques dans mes recherches et les réflexions et choix épistémologiques qui l'accompagnent. Dans une première partie, je vais ainsi revenir sur l'histoire des mathématiques elle-même. En particulier, je montrerai comment ma pratique historique, les sources, les communautés rencontrées, les méthodes, etc. ont pu donner une orientation précise à mes travaux dans ce domaine et dans le questionnement ultérieur sur la place de l'histoire des mathématiques en classe. Les mathématiques étant présentes dans mes recherches à la fois par leur passé (leur histoire) et par leur présent (*via* leur enseignement), dans une deuxième partie, je présenterai quelques éléments philosophiques relatifs à cette discipline. Je distinguerai alors deux thèmes, qui traversent par ailleurs toute l'histoire de la philosophie, avec d'un côté l'ontologie et la nature des objets mathématiques, et de l'autre l'épistémologie et l'accès aux connaissances mathématiques. Enfin, en lien tant sur le fond par le questionnement épistémologique que dans la forme par le respect de la méthode historique, dans une troisième partie, j'ouvrirai vers l'histoire de l'enseignement dans laquelle s'inscrit une partie de mes travaux et projets de recherche.

1.1 Quelle histoire dans le H de EDUHM ?

Même si très rapidement après ma thèse, par l'intermédiaire des IREM en particulier, mes recherches et les dimensions éducatives se sont rapprochées, mes travaux s'inscrivent dans le cadre d'une histoire conceptuelle des mathématiques assumée. Ceci procède d'une définition de l'histoire des mathématiques que j'ai pu rencontrer dans les travaux de Roshdi Rashed et que j'ai fini par faire mienne. Ce positionnement se trouve clairement développé dans l'introduction de son ouvrage *D'al-Khwarizmi à Descartes : Études sur l'histoire des mathématiques classiques* publié en 2011 et dont il existe aussi une version revue et modifiée en anglais (Rashed, 2015) sur laquelle je vais m'appuyer préférentiellement. Dans ce texte, Rashed revient sur l'histoire de l'histoire des sciences et retrace quelques-unes de ses grandes évolutions. Il est intéressant de noter que, pour lui, l'histoire des sciences n'est pas (encore) une discipline. Ce qu'il veut exprimer alors c'est que l'histoire des sciences s'est construite progressivement par accumulation continue de domaines et de techniques assez disparates. Il en va ainsi de l'entrée des dimensions sociales comme des approches lexicographiques par exemple. Ce qui distingue, à ce stade, l'histoire des sciences d'une véritable discipline (Rashed, 2015, pp.5-6), c'est l'absence d'un principe d'exclusion qui viendrait borner définitivement les champs de recherches. Rashed qualifie donc cette histoire des sciences plutôt de « domaine d'activité » aux contours mouvants et aux dimensions s'étendant au gré des ajouts de nouvelles approches. Rappelons qu'il n'y a pas là de rejet de la pertinence ou de l'intérêt d'une quelconque méthode de recherche, juste un constat de la construction du domaine. L'histoire des sciences doit pourtant présenter une certaine unité et Rashed (2015) la trouve dans une réflexion autour de la notion de tradition. Plus précisément, il pointe l'importance des sources objectives pour mettre en relation des résultats scientifiques du passé. La tradition, qui demeure nécessairement une (re)construction faite par les historiens, consiste alors en la mise en relation de différents éléments (un théorème, une expérience physique, la création d'une revue, etc.) dans une filiation qui vise à éclairer notre connaissance des faits passés. Rashed (2015) parle dans ce cas d'une tradition « objectale » (c'est-à-dire constituée de traces concrètes). Cette recension des choses du passé est très importante mais elle ne constitue

que la première étape du travail d'historien des sciences. La seconde phase, et sans doute la plus importante, nécessite d'entrer dans les contenus. Il s'agit alors, par une lecture fine des concepts utilisés par les auteurs, de mettre en relation les différents faits. L'approche est ici profondément épistémologique et elle cherche à rappeler l'importance du questionnement sur l'objet même des sciences (par exemple en mathématiques, les équations algébriques). Selon l'ampleur du domaine considéré, se construisent alors le plus souvent plusieurs traditions conceptuelles dans lesquelles s'inscrivent différents auteurs au cours du temps. On ne saurait être plus clair que Rashed lui-même lorsqu'il écrit que :

These two terms – 'objectal' tradition (to which textual tradition belongs) and conceptual tradition – seem to translate concretely the question of the place of the history of science between social history and epistemology¹⁴.

Plus que deux facettes d'une même thématique de recherche, la tradition objectale et la tradition conceptuelle sont toutes deux consubstantielles du travail d'historien des sciences. L'absence de prédominance de l'une sur l'autre permet, comme le rappelle Rashed, de se prémunir de dérives qui ne feraient de l'histoire des sciences qu'une philosophie des sciences (dans le cas de la tradition conceptuelle seule) ou qui la verraient se limiter à une histoire d'un seul domaine culturel (dans le cas de la tradition objectale seule). Posée de cette manière, cette définition de l'histoire des sciences soulève aussi la question de la distinction entre « science » et « proto-science » (Rashed, 2015, p.10). Pour rester dans le cadre de mes travaux sur l'histoire des mathématiques et son utilisation pédagogique, je n'entrerai pas plus avant dans cette recherche d'une ligne de démarcation entre ce qui est scientifique et ce qui ne l'est pas encore. Je résumerai simplement le positionnement exprimé par Roshdi Rashed par cet extrait dans lequel il pose des éléments de réflexion quant au rôle des sources en histoire :

In science, thanks to a certain epistemological closure that characterises it, the notion of conceptual tradition is liberated to a much greater degree than in the pre-science of the corresponding 'objectal' tradition. The role of exogenous elements not only becomes minimal, but above all it is controlled at the time of the constitution of theoretical models and the demonstration of their validity¹⁵.

Il est important de noter que cette définition ne concerne pas les mathématiques que Rashed a exclu dès le départ de la réflexion pour une raison épistémologique. Pour lui, il n'existe rien de proto-mathématique car au travers des traces retrouvées dans le passé, les mathématiques restent une et indivisibles. Il y a là un point qui mérite réflexion car ce n'est rien de moins que la définition des mathématiques qui est à l'œuvre. Mais avant de passer à l'explicitation du champ des mathématiques de manière un peu générale et surtout dans son contexte scolaire, je m'arrête encore un instant sur les notions de traditions objectales et conceptuelles. En effet, la mise en évidence des rôles conjoints des sources (matérielles, textuelles, ...) historiques et d'un regard épistémologique a une proximité avec l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans un contexte scolaire ou de formation des enseignants. Je détaillerai ces aspects dans le deuxième chapitre, mais on peut noter dès à présent que, dans les classes, l'usage de sources premières, surtout textuelles mais aussi parfois pratiques (matériel de numération ou de comptage, matériel d'arpentage, ...), constitue l'une des principales entrées didactiques. La source historique va alors devoir s'articuler avec des

¹⁴ Rashed (2015, p.9)

¹⁵ *Ibid*, p.15

contenus mathématiques scolaires, ce qui, comme nous le verrons plus loin, oblige une lecture conceptuelle. Cette lecture conceptuelle ne saurait venir de l'enseignant seul. Au contraire, elle trouve appui dans les travaux des historiens des sciences qui fournissent cet éclairage qu'on utilise ensuite, pour tout ou partie, dans l'enseignement des mathématiques. Je ne peux m'empêcher de citer ici la conclusion de Rashed dans laquelle il propose finalement une définition de l'historien des sciences qui me paraît pertinente pour mes recherches :

The historian of science then reveals himself to be what he has always tried to be: neither a 'science critic', in the sense of an art critic; nor a historian, in the sense in which we understand a specialist in social history; nor a philosopher, like the philosophers of science; but simply a phenomenologist of conceptual structures, of their genesis and of their affiliations, in the midst of conceptual traditions that are always in transformation¹⁶.

Cette définition s'inscrit incontestablement dans une ligne de pensée qui va de Bachelard aux travaux de Canguilhem¹⁷, et dont Rashed¹⁸ ne renierait pas la filiation. Rashed appelle aussi de ses vœux la constitution de l'histoire des sciences comme « discipline ». Pour lui, cette constitution nécessite de borner le champ, en particulier en excluant les approches sociologiques qu'il considère comme relevant d'une autre discipline. Il écrit ainsi :

Also today, we must construct a new discipline, as necessary as it is legitimate, simultaneously with the history of science, but independently from it: that of social research on the sciences. Such independence is the guarantee that both the history of science and social research on the sciences may be formed as true disciplines, which deal with the cultural phenomenon of science¹⁹.

La question de la définition de l'histoire des mathématiques comme discipline n'est pas étrangère à la thématique de son utilisation en classe et en formation, mais elle dépasse assez largement le cadre de cette note de synthèse. Dans toute la suite, je m'inscrirai plutôt dans la présentation qui est proposée par la section 72 du CNU qui fait de l'épistémologie et l'histoire des sciences et des techniques un champ de recherche pluridisciplinaire « par définition » :

Pluridisciplinaires par définition, les travaux des chercheurs-ses de la section 72 développent des approches, des méthodes et des concepts issus des sciences humaines et sociales (SHS) et de la philosophie afin d'étudier les fondements et les dynamiques cognitives, pratiques et sociales des sciences, des techniques, de la médecine et des savoirs depuis l'Antiquité jusqu'à nos jours²⁰.

1.2 L'exemple du concept philosophico-mathématique de *lieu*

Pour illustrer le positionnement épistémologique relatif à l'histoire des mathématiques qui vient d'être présenté, dans ce qui suit, je vais rapidement résumer mes travaux de thèse. Ces derniers ont, par la suite, été publiés dans un ouvrage intitulé *Les notions d'espace en géométrie. De l'Antiquité à l'Âge Classique* (De Vittori, 2009a). La recherche, sous la direction

¹⁶ *Ibid*, pp.16-17

¹⁷ Voir par exemple Macherey (2009)

¹⁸ Pour un aperçu de la vie et l'œuvre de Roshdi Rashed, on pourra consulter le récent ouvrage de Hossein Masoumi-Hamedani, *Roshdi Rashed - Initiation à sa pensée et son œuvre*, Centre culturel du livre Édition, 2020. Consulté en ligne le 2 décembre 2021, <https://www.imarabe.org/fr/file/366940/download?token=V4ChWGrY>

¹⁹ Rashed, *ibid*, p.17.

²⁰ Page de présentation de la section 72 du CNU <https://conseil-national-des-universites.fr/cnu/#/entite/entiteName/CNU/idChild/34/idNode/4471-4518>

Régis Morelon, est suivie par Roshdi Rashed. Elle vise à retracer, au travers des sources, les réflexions mathématico-philosophiques qui ont conduit à la notion d'espace en géométrie. De fait, l'étude des espaces constitue ce qu'on entend généralement par géométrie. Penser l'espace, penser les objets géométriques ou encore penser les méthodes géométriques sont les éléments fondamentaux de la constitution de cette discipline. Plus qu'un concept, l'espace peut être vu comme le révélateur d'un ensemble de réflexions sur les mathématiques et leur objet et à travers l'émergence de la notion d'espace géométrique, c'est en fait toute l'histoire de la géométrie qui s'offre à l'historien. Dans ce qui suit, je vais présenter quelques moments forts des vingt siècles de production mathématique situés entre l'Antiquité et le 17^e siècle au cours desquels se met progressivement en place une notion d'espace propre à la géométrie.

La science des figures

Dès l'Antiquité, sont relatés les premiers questionnements sur les figures de la géométrie. La figure, en tant que telle, y est généralement définie comme une étendue dont les dimensions sont finies, ou encore, comme on peut le lire dans les *Éléments* d'Euclide (325 – 265 av. J.-C.)²¹, ce qui est compris par certaines limites. Proclus (411 – 485), dans son *Commentaire au premier livre des Éléments*²², explique que cette idée de limite renvoie à un circuit délimitant qui détermine une certaine aire ou un certain volume. La ligne, qui enveloppe et intercepte des choses environnantes, diffère ainsi du point qui est uniquement une extrémité, ce qui permet de définir ces objets premiers la géométrie (lignes et points). Dans les *Données*²³, Euclide propose alors trois attributs pour les figures géométriques : la grandeur, la forme et la position. La géométrie d'Euclide est centrée sur les figures, et l'existence de l'espace n'est pas même évoquée. La définition tripartite de la figure dans les *Données* fournit alors une clé d'interprétation car en affirmant qu'une figure est définie par sa grandeur, sa forme et sa position, le géomètre impose trois caractères à un espace intuitivement conçu. Par la grandeur et son invariabilité, l'espace est fondamentalement immuable. Les objets de cette géométrie ne changent ni de volume ni de surface, pas plus qu'ils ne changent de forme. Avec la forme justement, le géomètre définit des familles d'objets et, en même temps, il multiplie les figures en tant qu'individualité. Une figure ne pouvant changer de forme, elle est donc une. À cet espace immuable et unique, la notion de position impose l'immobilité, ce qui illustre une géométrie largement héritière de la conception aristotélicienne d'espace comme multiplicité de lieux.

Un espace pour les géomètres

À la fin de la période hellénistique, le continu, les dimensions et les autres notions topologiques élémentaires sont conçus avec un fort appel aux concepts sensibles. Dans ce contexte, le géomètre décide de s'appuyer sur la philosophie et lui laisse le soin de définir son objet. Au début du Moyen-Âge, les questions qui commencent à se poser sur la nature des figures, des courbes, ou sur l'existence d'intersections font naître un nouvel élan dans la recherche scientifique²⁴. Le corpus géométrique hellénistique constitue alors les fondements

²¹ Euclide. *Éléments*. Traduction et édition par Bernard Vitrac, 4 tomes, Puf, 1990-2001.

²² Proclus de Lycie. *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, traduits pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, Bruges : Desclée de Brouwer, 1948.

²³ *Les Œuvres d'Euclide*. Blanchard, Paris, 1993.

²⁴ Voir Rashed, R., & Morelon, R. (Éds.). (1997). *Histoire des sciences arabes*.

d'une réflexion sur la géométrie et son objet en général qui ne pouvait laisser intacte une notion telle que l'espace. Comme nous l'enseigne Rashed (2002), « à partir du 9^e siècle, les mathématiciens ont, bien plus qu'auparavant, procédé par transformations géométriques. » Ces transformations sont à la fois un lien entre les figures et une nouvelle méthode géométrique digne d'intérêt pour elle-même. Ce changement dans la définition de ce que doit être la géométrie constitue un élément important dans l'élaboration de la notion d'espace car lorsque la figure, objet central de la géométrie grecque, se met à se déplacer ou à se transformer, c'est toute la géométrie d'Euclide qui doit être retravaillée.

Dans *L'Analyse et la Synthèse*, Ibn al-Haytham (965 – 1040) expose sa propre théorie des mathématiques. Celle-ci repose sur un certain nombre de prémisses qu'il nomme les « connus » par lesquels il va prolonger ce qui avait été entrepris par Euclide dans les *Données*. Dans son sens le plus théorique le connu est ce qui ne change pas²⁵ et ce non-changement constitue l'essence de chaque connu. Dans un second ouvrage intitulé tout simplement *Les Connus*, Ibn al-Haytham retravaille son concept qu'il introduit à partir de la notion de science²⁶. Il obtient alors deux types de connus, le connu en acte que nous pourrions qualifier de connaissances acquises, et le connu en puissance qui, en simplifiant, est de l'ordre de ce qui reste à découvrir. Ibn al-Haytham classe ensuite les différents types de connus en distinguant ceux qui concernent la quantité de ceux qui ne la concernent pas. Il limite son traité au premier type, qui inclut les mathématiques mais aussi des notions comme le poids, le temps et les lettres. Contrairement aux *Éléments* d'Euclide, Ibn al-Haytham n'ouvre pas son exposé par le point. Le premier objet géométrique est la ligne qui est suivie de la surface et du solide. Chacune de ces notions est précisée par des connus portant sur son essence, son extrémité, sa figure, sa grandeur, sa position, son rapport et sa composition. Le caractère systématique des *Connus* met ainsi en évidence la différence entre la nature des entités géométriques et leurs éventuelles propriétés. Plus précisément, le traitement des dimensions par Ibn al-Haytham est abstrait et dans *L'Analyse et la Synthèse*, il insiste sur la distinction entre les grandeurs naturelles, qui sont dans les corps sensibles, et les grandeurs imaginaires, que sont les dimensions géométriques abstraites (droite, surface, solide)²⁷. La théorie de l'abstraction à l'œuvre s'inspire de celle des philosophes grecs, mais s'y ajoute l'affirmation de l'existence des grandeurs abstraites dans l'imagination. Dans un troisième traité *Sur le Lieu*, Ibn al-Haytham construit alors sa propre théorie du lieu. Il ne s'agit pas de contester l'existence du lieu qui renvoie à l'idée consistant à affirmer que toute chose se trouve nécessairement quelque part ; le véritable problème est de définir le lieu d'un corps dans toute son individualité²⁸. À cette fin, Ibn al-Haytham remanie jusqu'à les contredire, la théorie du lieu-enveloppe d'Aristote (384 – 322 av. J.-C.) et celle du vide de Philopon (490 – 568). Dans une première étape de l'argumentation, l'interprétation du vide selon Ibn al-Haytham nécessite deux étapes bien distinctes avec d'une part un processus d'abstraction qui a pour objectif de séparer le concept de toute attache avec le monde sensible²⁹ et d'autre part l'égalisation des distances imaginées à celles imaginées dans le corps³⁰. Le lieu d'un corps procède alors d'un corps dont on détermine les distances et d'un ensemble de distances imaginées formant une figure imaginée. C'est la superposition de ces deux ensembles de

²⁵ Rashed (2002, p.248)

²⁶ Rashed (2002, p.446)

²⁷ *Ibid*, p.250

²⁸ *Ibid*, p.668

²⁹ *Ibid*, p.674

³⁰ *Ibid*, p.674

distances qui détermine le lieu. L'originalité des travaux d'Ibn al-Haytham réside dans l'affirmation de l'existence des ensembles de distances en dehors de toute matérialité. Ces distances, et par-là les objets mathématiques, ont un plan d'existence dans l'imagination. Comme le fait remarquer Rashed (2002), « dans une telle conception, il est clair que l'espace euclidien, vide universel, sert de substrat aux distances invariables entre tous les points, même si cela n'est pas énoncé *expressis verbis* ». Par le terme imagination, Ibn al-Haytham définit, à sa manière, un espace mathématique dans lequel évoluent des objets eux aussi mathématiques. Cette distanciation par rapport aux notions sensibles de l'espace fournit une grande liberté au géomètre et rend désormais possible le déplacement, l'agrandissement ou la contraction des figures géométriques. Cette première étude et définition de l'espace dans un ouvrage de géométrie accorde aussi une place prépondérante aux relations entre les figures et c'est ainsi toute la conception de ce que doit être cette discipline qui se trouve infléchie. Avec Ibn al-Haytham, nous passons ainsi d'une géométrie des figures, celle d'Euclide, à une géométrie des relations entre les figures.

La science de l'espace

Héritiers des interrogations sur l'espace des peintres, des philosophes et des physiciens de la Renaissance, les mathématiciens du 17^e siècle proposent une géométrie qui repose d'emblée sur l'idée d'espace. Pour Descartes (1596 – 1650), il y a une séparation entre l'espace de la physique et l'espace géométrique³¹. Il lie le lieu et l'espace (Alquié, 1956) en rendant ce dernier entièrement déterminable par les relations géométriques. Comme chez Ibn al-Haytham, l'espace de la géométrie est désontologisé³². L'objet de la géométrie est maintenant clair, ainsi que Descartes le dit : « nous nous occupons donc ici d'un objet étendu, sans considérer absolument rien d'autre en lui que son étendue même³³. » Finalement, Descartes proposera de réduire l'étude de l'étendue à celle des trois aspects que sont : la dimension, l'unité et la figure dont nous pouvons voir une illustration exemplaire, dans la deuxième partie de la *Géométrie*, lors de l'étude des courbes algébriques.

Vers le milieu du 17^e siècle, Pascal (1623 – 1662) rédige un petit traité de géométrie élémentaire partiellement conservé dans des notes de Leibniz (1646 – 1726). Selon Itard³⁴, c'est lors de son séjour à Paris que Leibniz a été mis en contact avec ce document. Dans son manuscrit, il fait de nombreux ajouts et commentaires que nous omettrons pour nous concentrer uniquement sur ce qu'il reste du texte original de Pascal. Ce texte, intitulé *L'introduction à la géométrie*, comprend de courtes affirmations que Pascal appelle les principes. Inspiré par ses prédécesseurs et par ses propres recherches en sciences physiques, dès le premier principe, Pascal écrit que « l'objet de la pure Géométrie est l'espace, dont elle considère la triple étendue en trois sens divers qu'on appelle dimensions, lesquelles on distingue par les noms de longueur largeur et profondeur³⁵. » Comme le temps ou le mouvement, l'espace est un principe perçu par le cœur qui ne nécessite pas de démonstration. Il le note dans les *Pensées*, « le cœur sent qu'il y a trois dimensions dans l'espace et que les nombres sont infinis et la raison démontre ensuite qu'il n'y a point deux

³¹ Voir Vuillemin (1960), *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, p.94

³² Descartes (2003), pp.110-111

³³ *Ibid*, p.118

³⁴ *L'introduction à la géométrie de Pascal*, est publiée dans Itard (1984), *Essais d'histoire des mathématiques*, p.280-296

³⁵ *Ibid*, p.281

nombres carrés dont l'un soit le double de l'autre. Les principes se sentent, les propositions se concluent³⁶. » Un peu comme chez Descartes qui fait de l'objet des géomètres « un espace indéfiniment étendu en longueur, largeur et hauteur ou profondeur, divisible en diverses parties, qui pouvaient avoir diverses figures et grandeurs et être mues ou transposées en toutes sortes³⁷ », la géométrie comme science de l'espace apparaissait dans le traité antérieur de Pascal intitulé *De l'esprit géométrique*³⁸ mais cette idée devient explicitement géométrique dans *L'introduction à la géométrie*. Pour Pascal, l'espace est de dimension trois et on n'en considère que l'étendue, ce qui peut encore s'exprimer en disant qu'il s'agit d'un espace abstrait.

En 1675, Roberval (1602 – 1665) s'annonce prêt à publier ses *Éléments de géométrie* et ainsi donner sa propre vision de cette discipline tant dans ses objets que dans ses méthodes. Ce traité de huit livres constitue une tentative de réécriture des *Éléments* d'Euclide dont l'intérêt réside dans son approche axiomatique et ainsi dans la lisibilité des notions employées. Contrairement au texte de Pascal, la notion d'espace n'entre pas explicitement dans les axiomes et postulats, mais des concepts abstraits, comme celui de permanence³⁹, font leur apparition. L'espace continu dont les figures seraient des parties n'étant pas préexistant, Roberval le reconstruit en posant comme permanent ce dont les parties coexistent⁴⁰. D'une distinction temporelle, Roberval déduit alors l'existence d'une séparation spatiale des objets. Dans cet espace construit à partir de l'unique idée de permanence, l'étendue⁴¹ consiste en l'ensemble des éloignements existant entre les endroits d'un continu, c'est-à-dire l'ensemble des distances entre les points d'un objet géométrique. Chez Roberval, la nature abstraite des objets géométriques est assurée par un postulat qui se trouve dans le premier livre où il précise qu'il « y a des solides qui sont considérés comme matériels ; on les appelle communément des corps. D'autres solides sont considérés sans matière quand ce ne serait que par une abstraction mentale de l'esprit qui, séparant mentalement la matière, ne considère que l'étendue ou l'espace et ceux-ci sont appelés simplement des solides ou des solides mathématiques⁴². » Dans cette géométrie, le mathématicien peut toujours, par l'esprit⁴³, concevoir un solide englobant un autre plus petit, et ce indéfiniment. L'espace géométrique de Roberval est donc un emboîtement de solides dans lequel l'utilisation de solides chaque fois terminés permet d'assurer l'existence de tous les sous-objets de l'espace comme les surfaces, les lignes ou les points. Annonçant certaines idées qui réapparaîtront chez Leibniz, la définition de l'espace de la géométrie comme une succession de solides finis emboîtés permet de fonder l'existence de tous les objets de la géométrie à partir de l'existence intuitive du solide fini. Ce solide primitif est conçu dans une extension tridimensionnelle, implicitement admise, où le lieu est vu comme un ensemble de distances entre les points.

Comme la plupart des savants de son époque, Leibniz est au fait des écrits de ses contemporains et c'est à la fois contre les thèses de certains (Descartes en particulier) et dans la continuité de celles d'autres (Roberval, ou encore Pascal) qu'il conçoit sa propre réforme de la géométrie. Selon Leibniz, malgré les beaux résultats obtenus par la géométrie analytique,

³⁶ Pascal (1963), *Œuvres*, Tome II, p.573

³⁷ Descartes (1987), *Discours de la méthode*, p.132-133

³⁸ Pascal (1963), p.161

³⁹ Roberval (1996). *Éléments de géométrie*. Vrin, p.93

⁴⁰ *Idem*

⁴¹ *ibid*, p.93-94

⁴² *ibid*, p.97

⁴³ *ibid*, p.99

il reste à montrer comment les fondements de la géométrie, c'est-à-dire les *Éléments* d'Euclide, peuvent se ramener à de tels calculs⁴⁴. Cherchant un langage permettant de rendre compte de la situation des divers objets géométriques d'un problème, il réordonne les différentes notions de la géométrie et introduit l'espace comme objet théorique. Dans un texte daté d'août 1679, Leibniz place pour la première fois l'espace en première position et indique que le point en est l'élément le plus simple. Il pose les quatre axiomes suivants⁴⁵ : « (1) L'Espace est l'*extensum* considéré en lui-même de manière absolue, en d'autres termes l'*extensum* pur et complet. (2) A, B, C, un Point. (3) Le Point est ce qu'il y a de plus simple dans l'espace. (4) Tous les points sont dans un même espace. » L'espace géométrique de Leibniz est défini à partir de l'*extensum*⁴⁶ pur et absolu. Cette notion première de la géométrie, débarrassée de toutes attaches sensibles, n'a d'autre propriété que celle d'être infinie et de contenir l'extension⁴⁷. Le deuxième objet dans l'ordre de la construction théorique, le point est, quant à lui, la marque de la position, ou de la situation⁴⁸. Cette situation n'étant pas déterminée directement par rapport à l'espace car chaque point peut être congru à n'importe quel autre et donc il ne saurait y avoir de figures⁴⁹. Pour pouvoir concevoir les figures géométriques, Leibniz formalise la notion d'existence simultanée de plusieurs points⁵⁰. La distance est alors définie à partir de l'idée de trajectoire non comme ce qui est tracé par le mouvement d'un objet mais comme le lieu continu successif de celui-ci. En procédant de cette manière, non seulement Leibniz élimine la notion de temps dans le mouvement, principe général du mouvement géométrique, mais il ne conserve en fait que l'ordre et la continuité. L'idée de faire ensuite de cet objet un continuum permet d'inscrire la trajectoire au même rang que l'espace tout entier. L'espace étant également un *continuum*, Leibniz fait de la trajectoire un sous-espace de l'espace de la géométrie. Pour montrer en quoi un objet existe spatialement, Leibniz renvoie alors à la notion de congruence qui permet de concevoir tant l'objet lui-même que ceux qui lui sont congrus⁵¹. L'espace est alors un *extensum* universel dont les parties, ou les figures, sont définies par un ensemble de relations entre des points fixes et des points variables. Les points fixes font de la figure ce qu'elle est, c'est-à-dire qu'ils assurent la détermination. Les points variables, quant à eux, permettent de décrire le lieu et de faire de celui-ci une partie d'espace universel.

Conclusion sur l'espace et la géométrie

L'une des notions qui a guidé notre approche est celle de lieu. D'abord limite du corps enveloppant chez Euclide, puis ensemble des segments reliant les points de la surface d'un solide pour Ibn al-Haytham, le lieu devient avec Leibniz l'ensemble des courbes fixes existant entre les points de l'objet géométrique considéré. Tous ces travaux rendent compte d'une mathématisation de la notion de lieu qui quitte progressivement le domaine du sensible pour venir rejoindre celui des objets purement mathématiques. Les différents pas accomplis ont

⁴⁴ « On ne voit pas encore dans l'Analyse Géométrique une discipline achevée. Même si, en effet, la méthode de Viète et de Descartes permettait d'y faire presque tout par calcul, en faisant la supposition des *Éléments*, ce sont eux qui, pour la plupart, n'y ont pas encore été réduits. », Leibniz (1995), *La caractéristique géométrique*, p.51

⁴⁵ *Ibid*, p.95

⁴⁶ *Ibid*, p.151

⁴⁷ Belaval (1993), *Leibniz, initiation à sa philosophie*, p.225

⁴⁸ Leibniz (1995), p.153

⁴⁹ *idem*

⁵⁰ *Idem*

⁵¹ Leibniz (1995), p.241

transformé une notion intuitive en un objet théorique valide qui a conduit les géomètres à une réflexion sur l'espace tout entier. Déjà présente chez Ibn al-Haytham, l'idée d'un espace propre aux objets géométriques ne cesse de se développer et l'espace acquiert finalement la première place des principes d'une géométrie définie comme la science de ce même objet. Cette définition, fruit d'une longue histoire, reste encore communément admise par les mathématiciens du 21^e siècle.

Ces premiers travaux de recherche m'ont permis d'entrer en profondeur dans l'histoire d'un concept dont j'ai pu prolonger par la suite l'exploration. Ma fréquentation des auteurs arabes médiévaux m'a donné, en particulier, l'occasion d'étudier la place de certains instruments de tracé géométrique (De Vittori, 2011a) comme le compas parfait qu'on retrouve dans la seconde moitié du 9^e siècle au travers des traités de savants arabes comme al-Sijzi (945 – 1020) ou al-Quhi (940 – 1000). Dans son traité, al-Sijzi montre l'importance du tracé continu des courbes et précise ainsi le rôle des instruments dans le processus de recherche mathématique. Parallèlement à ce parcours chez les auteurs arabes, le questionnement sur la place de l'espace et surtout des figures (au sens ici de tracé concret sur la feuille) dans la géométrie a trouvé un écho dans les réflexions de collègues linguistes. La forme d'un texte scientifique en géométrie est particulière et la place qu'y jouent les figures mérite de s'y intéresser (De Vittori, 2011b, 2013). Cette question est précisément celle que pose Leibniz lorsqu'il écrit, dans les premières lignes de ses travaux sur la *caractéristique géométrique* que « les méthodes géométriques auxquelles je songe sont au nombre de deux ; la première consiste à exprimer complètement une figure en n'utilisant que des caractères, sans l'aide d'explications verbales et sans y adjoindre de figure ; la seconde consiste à le faire en n'utilisant que des mots, sans l'aide d'aucun autre caractère et sans l'aide d'aucune figure » (Leibniz, 1993). Dans les deux cas, la figure tracée est exclue pour privilégier soit un système symbolique (méthode des caractères), soit la langue naturelle (méthode verbale). Pour Leibniz, les deux méthodes se valent et chacune a sa propre utilité et ses propres faiblesses. La principale distinction entre les deux réside dans leur rapport à l'objet mathématique. La première méthode est nettement plus détachée et elle autorise à traiter une question sans être au fait de la nature des objets que l'on manipule. Face à l'abstraction de cette approche, la méthode verbale assure quant à elle la présence constante de la signification des objets manipulés. Cependant, l'utilisation de termes parfois empruntés à la langue courante peut prêter à confusion. Leibniz relève cette difficulté qu'il oppose à l'utilisation des symboles de la première méthode. Pour Leibniz, le plus dommageable dans la méthode verbale est la perte de clarté dans les connexions logiques entre les différentes étapes de la résolution d'un problème. Face à ce constat, il écrit que seule une langue philosophique, à la fois rigoureuse dans ses objets et dans ses liaisons, pourrait satisfaire pleinement le savant. Reste que, en dépit de ses imperfections, seul le langage permet de décrire complètement un problème. L'utilisation de figures, si elle permet de fixer dans l'esprit certaines données, ne saurait suffire à établir entièrement un énoncé car, comme le souligne Leibniz, non seulement la figure ne représente pas tout, mais en plus elle doit rester lisible à celui qui l'étudie. Leibniz (1993) constate qu'on « ne voit pas encore dans l'analyse géométrique une discipline achevée. Même si, en effet, la méthode de Viète et de Descartes permettait d'y faire presque tout par calcul, en faisant la supposition des *Éléments*, ce sont eux qui, pour la plupart, n'y ont pas encore été réduits. » Il souligne ainsi que, malgré les beaux résultats obtenus par l'approche analytique, il reste à montrer comment les fondements de la géométrie, c'est-à-dire les *Éléments* d'Euclide, peuvent se ramener à de tels calculs. Leibniz doute que cela soit possible et il propose d'inventer un nouveau langage permettant de rendre compte de la situation des

divers objets géométriques d'un problème. Il cherche dès lors une discipline qui se situe en amont des *Éléments* d'Euclide et dont ils peuvent être déduits. Cette nouvelle théorie que Leibniz nomme la *Caractéristique Géométrique*, ou méthode des caractères, annonce les développements de l'*analysis situs* et de la topologie.

De Platon à Pascal, jusqu'aux réflexions du 20^e siècle de Ferdinand Gonseth ou de Gilles Gaston Granger (1999), le lieu et l'espace constituent des thématiques récurrentes en philosophie. L'ouvrage *Espace et lieu dans la pensée occidentale* (Paquot & Younès, 2012) en offre un très bon panorama au travers d'une dizaine de monographies de philosophes majeurs. Comme on peut le lire dans cet ouvrage collectif « à une même époque, ces termes [lieu et espace] seront chargés de sens contradictoires et/ou complémentaires, selon qu'on les étudie avec les lunettes de l'astronome, du géographe ou de l'ethnologue ; quant à la philosophie occidentale, elle les questionne inlassablement. » Ajoutons que, quels que soient les penseurs, quand elles ne constituent pas le cœur du propos, les mathématiques ne sont jamais bien loin des questionnements sur l'espace. Comme le rappelle Gonseth dès l'introduction du volume VI de son ouvrage *La géométrie et le problème de l'espace* (1955), l'espace constitue l'une des intuitions premières de l'homme. Cette intuition première de la tridimensionnalité et d'un espace dans lequel on peut se déplacer librement ne fait aucun doute tant qu'elle reste attachée à la seule perception humaine individuelle. Pour Gonseth, les problèmes naissent d'un double mouvement issu d'une part des constructions mathématiques abstraites de cette notion et du développement de l'instrumentation dans les sciences physiques. Dès lors, l'espace si intuitif cesse de l'être pour devoir se confronter, par exemple en mathématiques, à la multiplicité des dimensions, aux axiomatiques alternatives des géométries non-euclidiennes, etc., et dans les sciences physiques à l'infiniment grand ou petit, à la courbure de l'espace, etc. Dans mes travaux sur l'histoire de la notion d'espace en géométrie, la période choisie, de l'Antiquité à l'Âge Classique accentue certainement ces apports physico-mathématiques à la réflexion par la spécificité de ses savants s'intéressant le plus souvent aussi bien au fonctionnement du monde et de la société, qu'aux sciences et aux mathématiques. Mais c'est bien progressivement que l'idée, désormais communément acceptée, de la géométrie comme science de l'espace se met en place : « Nonetheless, the definition of geometry as the science of space, however standard, is properly speaking *modern*. » (De Risi, 2015). La construction de cette modernité constitue toujours le fil conducteur de plusieurs ouvrages de synthèse récents comme *Mathematizing Space. The Objects of Geometry from Antiquity to the Early Modern Age* (De Risi, 2015) ou *Boundaries, Extents and Circulations. Space and Spatiality in Early Modern Natural Philosophy* (Vermeer & Regier, 2016) auxquels on pourra se référer pour des analyses nourries des recherches historiques et philosophiques les plus actuelles. On remarque dans ces travaux la place particulière que joue Leibniz qui, comme nous avons pu le voir dans la présentation de mes analyses de ses écrits sur la caractéristique géométrique, a toujours accordé une place de choix aux mathématiques. Les liens entre ses réflexions philosophiques sur l'espace et les développements purement mathématiques dans le cadre de l'*analysis situs* (la recherche d'un symbolisme pour la géométrie équivalent à celui de l'algèbre) sont désormais bien établis (De Risi, 2007 ; Rabouin, 2018).

Quelles que soient les époques, la notion d'espace se trouve toujours à la croisée de plusieurs domaines dont les mathématiques et la physique bien sûr (voir par exemple Bioesmat-Martagon, 2016) mais aussi la géographie, les arts, etc. Dans un contexte scolaire, cette ouverture constitue une richesse incontestable dont les travaux des IREM se sont tôt faits les témoins (IREM, 1993) et qui illustrent bien, comme je le développerai plus

spécifiquement dans le chapitre 2, la potentialité de l'histoire des mathématiques pour les apprentissages.

1.3 Quelles mathématiques dans le M de EDUHM ?

Dans les paragraphes⁵² qui vont suivre, je propose d'interroger la définition des mathématiques qui se trouve à l'œuvre dans l'approche que j'ai pu élaborer au fil des années. Dans le deuxième chapitre de cette note de synthèse, en lien avec mes travaux de didactique, je reviendrai plus précisément sur la place des mathématiques et de son histoire dans un contexte purement scolaire. Même si je ferai quelques ponts vers ces aspects, je vais donc, pour le moment, tenter de préciser quelques positions philosophiques sur les mathématiques et comment elles ont pu nourrir mes recherches. Il faut préciser dès à présent que ce que j'appelle (les) mathématiques renvoie à une définition assez consensuelle de ce champ comme un ensemble d'assertions constituées en un système déductivement clos. Ce champ n'est alors mathématique que parce qu'il est qualifié comme tel par une certaine communauté (en l'occurrence, celles des mathématiciens).

La question de l'ontologie

Le questionnement de nature philosophique sur les mathématiques peut prendre diverses formes selon ce qu'il souhaite interroger. Sans entrer dans tous les courants possibles, je m'attarderai ici uniquement sur les deux questions qui ont une résonance forte avec l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques. La première est de type ontologique et elle peut se résumer à grands traits par l'interrogation : De quoi parlent les mathématiques ? Notons qu'il y a derrière cette simple formulation d'ores et déjà un présupposé fort qui consiste dans l'acceptation que les mathématiques parlent de quelque chose. Il est tout à fait possible de refuser cette première prémisse et de s'inscrire alors dans la lignée d'une posture philosophique dite nominaliste qui comporte de nombreuses variantes dont certaines, comme nous le verrons plus loin, peuvent être pertinentes pour penser les mathématiques scolaires. Néanmoins, l'une des principales difficultés liées au refus de l'idée que les mathématiques parlent de quelque chose est que si elles ne parlent de rien, qu'est-ce qui leur donne cette intelligibilité que tout un chacun peut leur reconnaître ? Pour ne prendre qu'un exemple élémentaire, on peut bien reconnaître que l'assertion « $3 + 4 = 7$ » ne parle de rien, mais dans ce cas, pourquoi lui accordons-nous plus de valeur qu'à l'assertion « $3 + 4 = 8$ » ? La question de l'ontologie des mathématiques n'est donc pas si simple et trouver un système philosophique qui permette de l'éclairer efficacement requière une longue maturation. À l'opposé de la philosophie nominaliste qui vient d'être rapidement résumée, se trouve le platonisme qui trouve son origine dans la pensée de Platon⁵³ même si elle ne saurait s'y conformer ou s'y réduire exactement. Le platonisme consiste à affirmer que les assertions mathématiques parlent d'un domaine d'objets abstraits et que ces objets abstraits existent. Le rôle des mathématiques est alors de décrire ces objets abstraits. Le principal intérêt du platonisme réside dans sa simplicité et sa

⁵² L'écriture et la structuration de cette partie doit beaucoup à la lecture du livre *Introduction à la philosophie des mathématiques* (Panza & Sereni, 2013) qu'on ne peut que recommander à toute personne intéressée à la philosophie des mathématiques.

⁵³ On notera que les philosophes ne s'accordent pas sur la lecture qui doit être faite des écrits de Platon sur le sujet. Lire par exemple le chapitre I de Panza & Sereni (2013).

capacité à rendre compte immédiatement de notre sentiment que les mathématiques présentent des vérités incontournables (Panza&Sereni, 2013, p.37). Soit par goût personnel, soit par nécessité liée au champ de recherche, l'acceptation d'une ontologie de type platoniste est très courante tant chez les mathématiciens que dans la société en général. Au-delà de sa capacité à nous rassurer dans notre souhait de vérités universelles, le platonisme permet d'introduire assez facilement l'idée qu'il existe des concepts mathématiques. Même si on accorde aux mathématiques de traiter d'objets abstraits, la prise en compte de concepts ajoute une structuration à cet univers qui pourrait, finalement, n'être fait que d'entités, certes abstraites, mais toutes uniques sans aucuns liens entre elles. Pour penser l'idée de concept, la lecture de Gottlob Frege (1848-1925) offre des propositions pertinentes. À la fois mathématicien et philosophe, Frege s'est penché sur la définition de ce domaine si particulier que sont les mathématiques. Pour Frege, faire abstraction de certaines propriétés est une première étape vers la notion de concept : « Considérons un chat blanc et un chat noir. Si je néglige les qualités par lesquelles ils se distinguent, il me reste le concept de chat⁵⁴. » S'intéressant avant tout aux nombres et à l'arithmétique, à travers l'exemple des chats, Frege pointe aussi l'idée que le nombre deux est un concept unique qui ne dépend pas des objets physiques dont il aurait pu être abstrait (ou dont il représente la classe d'équivalence relative à un certain trait, ici la quantité). Mais pour que tout concept soit vraiment général et efficient, Frege ajoute une condition quant à sa constitution. Il précise qu'un concept est sortal si et seulement s'il est possible d'établir une distinction entre les objets qui en relèvent. Dans le cas des mathématiques, cela revient alors à identifier, pour tout domaine d'objets donnés, un concept sortal approprié. Bien qu'un peu technique sur le plan philosophique, cette construction rend compte de certaines conceptions assez largement partagées qui voient dans les mathématiques des concepts comme celui de nombre entier ou de triangle pour ne prendre que deux exemples élémentaires. Sous ces concepts se trouvent bien une multitude d'objets (1, 2, 302, ... triangle rectangle, triangle équilatéral, ...) qui peuvent être distingués. Les mathématiques ont donc des objets dont elles peuvent parler. Il reste que l'existence ou non de ces objets est problématique. De nombreux philosophes ont retravaillé cette question et ce jusqu'à la période contemporaine. Une des réponses les plus récemment développées par Quine, Putnam, et bien d'autres, en faveur du platonisme réside dans ce qui est appelé l'argument d'indispensabilité⁵⁵. Contrairement aux autres ontologies, l'argument d'indispensabilité ne cherche pas à clarifier la notion d'objet mathématique. Pour le résumer à grands traits, l'argument d'indispensabilité part du principe qu'il y a des théories scientifiques, qui traitent d'objets réels (les sciences de la nature par exemple), qui utilisent des contenus mathématiques comme les nombres, les ensembles, les variables, les fonctions, etc. Comme ces théories existent et qu'elles sont acceptées comme vraies, les mathématiques sur lesquelles elles reposent doivent exister elles aussi. Ici, les mathématiques sont indispensables car on ne voit pas comment on pourrait reformuler entièrement ces champs sans elles tout en conservant la même intelligibilité. Les mathématiques sont ainsi liées aux objets du monde réel et sauf à considérer que la réalité n'existe pas, leur existence en découle. Ces arguments, bien qu'appuyés par de sérieuses recherches en logique, sont encore largement disputés et seul l'avenir saura dire si cette réponse philosophique l'emportera.

Même s'il possède quelques limites et ne saurait correspondre à toutes les sensibilités, en particulier dans le fait que l'acceptation de l'existence des objets mathématiques est parfois difficile à distinguer d'une foi, le platonisme dans ses formes moins radicales apporte

⁵⁴ Frege (1970), p.163

⁵⁵ Voir Panza & Sereni (2013), chapitre 7

incontestablement une réponse ontologique pertinente et intelligible. En faisant des mathématiques le domaine d'étude de concepts par définition abstraits qui organisent le regard sur des objets eux aussi abstraits, il donne à cette discipline un cadre de pensée facilement appropriable, y compris à l'école, collège ou lycée. On pourra remarquer sur ce point que dans les programmes scolaires, en particulier ceux du secondaire, les mathématiques à enseigner (et donc à apprendre) sont présentées *via* des concepts. Les instructions officielles utilisent parfois peu le terme concept qui n'apparaît par exemple que deux fois dans le programme de seconde⁵⁶. Dans ce texte institutionnel, c'est plutôt le terme notion qui rend compte de ce dont traitent les mathématiques. Ainsi peut-on lire par exemple que les élèves doivent s'approprier « des notions mathématiques », comme la « notion [...] de nombre », la « notion d'intervalle », la « notion d'ensemble de points », la « notion de vecteur », la « notion de fonction », la « notion de loi de probabilité », etc. En tout, dans ce simple texte pour la classe de seconde, le mot notion revient quatorze fois. Dans presque tous les cas, on peut le considérer comme équivalent à l'idée de concept telle qu'on la trouve chez les philosophes. Ensuite, sauf lors de l'évocation de méthodes un peu générales, les items du programme renvoient toujours à des concepts mathématiques qui trouvent le plus souvent leur origine dans une histoire longue parcourant des périodes dans lesquelles le platonisme est dominant. Dans d'autres documents institutionnels plus généraux comme le rapport *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* de 2018, c'est bien le terme concept qui est mis en avant. Sans doute plus marqué par la pratique mathématique de ses auteurs Cédric Villani et Charles Torossian, ce texte donne à voir les mathématiques comme le lieu d'étude de concepts. On peut lire par exemple que tout citoyen doit être apte à manier les « concepts mathématiques » ou encore qu'à tout âge le plaisir de faire des mathématiques passe par « une bonne compréhension des concepts. » Les mathématiques scolaires sont structurées autour de concepts/notions identifiés et indentifiables. De ce fait, la nature abstraite des mathématiques n'est jamais vraiment mise en doute.

La posture philosophique platoniste donne de la consistance à cette manière de définir les mathématiques et d'en rendre compte dans les apprentissages. Mais s'il semble apporter une réponse ontologique satisfaisante, le platonisme accentue la difficulté de la question de l'accès aux connaissances mathématiques. Si les objets mathématiques sont bien abstraits et qu'il y a des vérités à leur sujet, comme y accède-t-on ? Cette réflexion, par ailleurs indépendante du fait qu'on accorde ou non une existence propre aux objets abstraits, est par définition épistémologique. Ceci m'amène à la deuxième partie de ce positionnement philosophique des travaux dans EDUHM.

La question de l'épistémologie

Dans sa forme la plus stricte, le platonisme place les vérités mathématiques hors du monde des hommes, dans un domaine divin inaccessible directement mais dont on perçoit des ombres. En fait, quelle que soit la posture philosophique, sauf à considérer les mathématiques comme accessibles uniquement par l'acte méditatif, il y a une part d'action humaine dans la recherche de résultats mathématiques. Pour mieux cerner le côté pratique des mathématiques, un rapide détour par les contradicteurs du platonisme peut s'avérer éclairant. En simplifiant très fortement, on peut distinguer trois courants dits nominalistes qui ont en commun de refuser l'existence des objets abstraits des mathématiques. Le premier

⁵⁶ BO spécial n° 1 du 22 janvier 2019

courant est un nominalisme plus ou moins radical dans lequel on va accepter que les assertions mathématiques existent, voire sont des vérités, mais dont on soutiendra qu'elles ne portent sur rien. C'est dans ce courant que s'inscrivent les logicistes, comme Rudolf Carnap par exemple, pour qui les mathématiques sont uniquement des règles formelles. Dans ce cas, l'accès aux mathématiques n'est que le produit d'un jeu sur des écritures formelles. Le deuxième courant non platoniste est dit fictionnaliste. Contrairement au nominalisme, il ne nie pas l'existence d'objets abstraits. Par contre, cette existence n'est pas conçue comme réelle, elle relève simplement de la fiction comme pour des personnages ou des faits d'un roman. Ainsi, dans une pensée fictionnaliste des mathématiques, on peut bien imaginer des carrés ou des triangles, et même démontrer des résultats sur ces objets, ils n'en demeureront pas moins fictifs. Comme dans une histoire de roman, ils peuvent donner à voir une véritable construction cohérente, sans contradiction. Si un personnage de roman meurt dans le premier chapitre, il ne peut revenir dans le second. De même, on peut dire que si x est positif, il ne pourra pas être égal à -3 . Tout ceci peut se faire sans présumer de l'existence réelle ou non de tels objets. Les mathématiques ne sont alors qu'une fiction de l'esprit. Contrairement au fictionnalisme la troisième dernière position anti-platoniste, l'empirisme, va au contraire s'ancrer très profondément dans le réel. Pour un empiriste, non seulement les objets abstraits n'existent pas, mais les vérités mathématiques parlent en fait du monde réel. Par exemple, $2 + 3 = 5$ n'est pas un résultat abstrait mais un résultat empirique sur des objets concrets. Les mathématiques deviennent alors chez des auteurs comme Stuart Mill une généralisation de faits empiriquement valides. Ces positions, nominalistes, fictionnalistes, empiristes, peuvent paraître extrêmes mais, en fait, elles ne le sont pas plus que le platonisme. Surtout, elles permettent de mettre le doigt sur une distinction possible entre le fait d'accepter que les mathématiques portent sur un domaine d'objets et le fait qu'elles portent sur des objets abstraits (Panza & Serini, 2013). Parmi les résultats philosophiques les plus récents, la position de Charles Parsons (1933 –) offre une grille de lecture des mathématiques qui est riche de sens pour les contenus et méthodes scolaires. Dans le cadre de cette séparation en deux du questionnement ontologique précédent avec d'un côté la prise en compte d'objets pour les mathématiques et de l'autre l'acceptation que ces derniers soient purement abstraits, Parsons est moins radical car il accepte la première mais il suggère que l'accès aux résultats mathématiques passe aussi par des objets (quasi) concrets⁵⁷. Pour Parsons (2008, p.34), en plus des objets abstraits habituels, pleinement indépendants de tout objet concret, il convient de considérer des objets quasi concrets qui vont de pair avec une représentation concrète. Pour de telles objets quasi concrets, ce sont leurs différentes représentations qui nous permettent alors de les distinguer les uns des autres. Parsons traite à part la question des nombres et de l'arithmétique mais il nous accorderait certainement que les objets géométriques sont quasi concrets et sont des objets mathématiques (perçus par l'intuition). Comme le souligne Panza et Sereni (2008, p.372) « ce que Parsons avance revient à dire que les mathématiques structuralistes ne sont possibles que dans la mesure où elles coexistent avec des mathématiques non structuralistes. » Dès lors, l'intuition prend une place importante dans l'accès aux connaissances des vérités mathématiques. En effet, par cette intuition des propriétés de certains quasi objets, nous percevons aussi certaines vérités mathématiques. Par exemple, dans le cas des figures géométriques, nous pouvons percevoir l'égalité des angles à la base d'un triangle isocèle et être parfaitement convaincus de la vérité mathématique de ce résultat. Il conviendra ensuite de mettre en œuvre une démonstration

⁵⁷ Panza & Serni (2013), chapitre 6.4

dans le cadre d'un système formel (mathématiques structuralistes) mais il n'en demeurera pas moins que notre intuition sur l'objet quasi concret (ici la figure géométrique) aura permis d'initier l'accès à une vérité mathématique, donc à une connaissance.

L'enseignement des mathématiques, surtout scolaires, n'est pas étrangère à la posture empiriste dès lors qu'il s'agit de l'acquisition des connaissances. Si comme nous l'avons vu plus haut, les mathématiques scolaires s'organisent autour de concepts (ou notions) abstraits acceptés de manière assez consensuelle dans ce qu'on pourrait qualifier de platonisme spontané pour paraphraser Althusser, l'accès aux vérités mathématiques y est suggéré avant tout de partir de situations très concrètes. Ainsi peut-on lire dans l'introduction de presque tous les documents officiels que les situations d'apprentissage doivent être « le plus souvent, issues de la vie de classe, de la vie courante⁵⁸ » ou encore qu'il convient d'encourager « le triptyque manipuler, verbaliser, abstraire à travers des problèmes [et de] donner à la modélisation un rôle essentiel pour permettre à l'élève de s'engager, d'essayer, de se forger des représentations mentales qui lui permettront d'avancer dans la résolution de problèmes⁵⁹. » C'est donc par le concret, ou le quasi concret comme le suggère Parsons, que les élèves se forgent leurs premières intuitions sur lesquelles se construisent ensuite les raisonnements. Il est par ailleurs intéressant de remarquer que l'organisation elle-même des apprentissages met en avant le rôle clé des vérités perçues par l'intuition. Ceci transparaît dans l'expression « résultats admis » dont les enseignants comme les élèves savent qu'ils constituent un artifice presque inévitable des curriculums. Certains documents ministériels n'hésitent d'ailleurs pas à l'affirmer explicitement comme dans cet extrait du programme du cycle 4 où il est écrit que « les enseignants ont la liberté de choisir ceux des résultats qu'ils souhaitent démontrer ou faire démontrer, en fonction du niveau et des besoins de leurs élèves. Enfin, il vaut mieux déclarer admise une propriété non démontrée dans le cours (qui pourra d'ailleurs l'être ultérieurement), plutôt que de la présenter comme une règle. Une propriété admise gagne à être explicitée, commentée, illustrée⁶⁰. » Admettre un résultat, c'est accorder un statut de vérité à certaines intuitions de l'élève et cela fait sans doute partie du processus d'apprentissage. Néanmoins, ceci ne doit pas masquer les difficultés auxquelles sont confrontés tous ceux qui doivent apprendre des mathématiques. Comme le rappelle le document d'accompagnement sur le chapitre grandeurs et mesures pour le collège, « le traitement de situations concrètes pourrait faire penser que l'enseignement des grandeurs et des mesures est aisé mais les résultats des évaluations réalisées par la DEPP montrent qu'il en n'est rien. Ces difficultés ne sont en général pas de l'ordre de l'erreur de formule ou d'unité mais bien d'une difficulté de compréhension du concept initial⁶¹. » On retrouve ici la thématique du passage de nos intuitions aux concepts mathématiques qui a nourri l'histoire de la philosophie dont nous avons entre-aperçu quelques développements dans ce chapitre dédié au positionnement de mon axe de recherche EDUHM. *In fine*, c'est ce cadre scolaire qui mêle concepts abstraits et approches empiriques qui constitue l'ancrage épistémologique de mes travaux en didactique des mathématiques détaillés dans le prochain chapitre. Mais avant d'entrer dans cet axe à proprement parlé didactique de mes recherches, je terminerai ce premier chapitre par l'évocation d'une thématique que j'ai pu être amené à développer dans

⁵⁸ Programmes du cycle 3, BO n°31 du 30 juillet 2020.

⁵⁹ Document d'accompagnement cycle 4, *La résolution de problèmes mathématiques* au collège (2021), Eduscol.

⁶⁰ BO n° 31 du 30 juillet 2020.

⁶¹ Document d'accompagnement cycle 4, *Grandeurs et mesures*, Eduscol, 2016.

la lignée de ma formation en histoire des sciences, à savoir les questions liées à l'histoire de l'enseignement et la valorisation du patrimoine éducatif.

1.4 Perspectives

Les réflexions historiques et épistémologiques sur les mathématiques permettent de mieux comprendre l'évolution de cette discipline et par là même de mieux la situer dans l'enseignement. Dès l'Antiquité tardive, la classification que l'on trouve bien explicitée chez Boèce⁶² par exemple, entre d'un côté le *trivium* (grammaire, rhétorique, dialectique) et de l'autre le *quadrivium* (arithmétique, géométrie, musique, astronomie) assure aux mathématiques une place fondamentale dans la formation de l'esprit. Dans le contexte français, les politiques éducatives sont souvent l'objet de débats passionnés où les contenus mathématiques qui doivent être enseignés cristallisent des positionnements parfois extrêmes entre tenants d'une vision utilitariste et défenseurs d'une gymnastique essentielle à l'esprit. Dans ce domaine, la formation des enseignants peut être considérée comme l'un des témoins de ces changements, parfois profonds. La lecture des textes institutionnels (d'Enfert, 2003, 2015) et des travaux des historiens de l'éducation (Condette, 2007 ; Prost, 2014) montrent à quel point les disciplines scolaires, sont au cœur des réflexions sur le système de formation des enseignants. Pour les mathématiques, plusieurs réformes ont fortement marqué le paysage éducatif français. Sans revenir jusqu'aux lois Ferry, les deux plus importantes sont sans doute la réforme du lycée de 1902 (Gispert, 2010) et celle des mathématiques dites modernes des années 1970 (d'Enfert & Gispert, 2011). La première assoie les mathématiques (et les sciences) au même rang que les humanités dans la formation des élèves et la seconde visent à ancrer les contenus au plus près de la recherche universitaire de son temps. Toute réforme laisse des traces tangibles qui constituent des sources exploitables par les historiens. Les IUFM transformés successivement en ESPE puis en INSPE recèlent souvent de nombreux documents relatifs à la formation et aux contenus enseignés. La préservation et la valorisation de ses ressources a mené dans de nombreuses régions de France à des actions de recherche⁶³ relevant parfois du sauvetage. L'INSPE de Lille, par sa taille et son ancienneté (en particulier par son site de Douai), est tout à fait représentative de ces différents mouvements. Ainsi, dans la lignée de mes travaux d'histoire des mathématiques, j'ai pu mener plusieurs expérimentations de formation intégrant recherche et valorisation du patrimoine éducatif (De Vittori, 2013). Ces premières actions ont permis de mettre au jour de nombreuses ressources issues de la période des mathématiques modernes. Les fonds sont constitués d'ouvrages, de matériels pédagogiques mais aussi de supports vidéo. Ces derniers se présentaient sous la forme de neuf bobines (voir titres et extraits⁶⁴) 16mm, en couleur et sonores qui ont pu être numérisées au travers d'un premier projet financé par l'INSPE en 2016. Ce premier fond a été le déclencheur d'un programme de plus grande ampleur, le projet

⁶² Boèce (1995), *Institution arithmétique*, I, 1, 7

⁶³ On pourra citer ici, par exemple, le programme de structuration *via* une liste de diffusion inter-INSPE de Marc Moyon sur la question des manuels scolaires (patrimoine.manuels@unilim.fr) et la valorisation du fond du SCD de Limoges.

⁶⁴ Les titres des neuf films retrouvés à l'INSPE de Douai sont : « Plus que... moins que... », « Exercices de logiques à propos de cartes », « Triangle de Pascal », « Nombres triangulaires », « Arbre factoriel », « Égalité d'objets », « Approche du groupe de Klein – I », « Approche du groupe de Klein – II », et « Réunion – intersection ». Dans le cadre de cette note de synthèse, on pourra consulter un court extrait de chacun de ses films ici : <https://youtu.be/4FMcaQtTE3k> . Pour un accès complet aux ressources, contacter la Cinémathèque de l'Enseignement Public.

EHDU-Films-Mid20⁶⁵ (2018-...) que je porte principalement avec Jean-François Grevet. Associant l'expertise à la fois d'historiens, de didacticiens et de mathématiciens, ce projet consiste en la volonté de mener une étude et d'assurer la valorisation d'un corpus de ces films anciens de 4 à 30 minutes édités par la Société du Film de Recherche Scientifique (SFRS) entre 1969 et 1972. Parce qu'ils donnent à voir des supports de cours et surtout des classes en activité, ils constituent un témoignage de grande valeur tant pour leur contenu que par leur place dans l'histoire des institutions et de la formation. Le programme EHDU-Films-mid20, toujours en cours, vise à étudier ces films qui constituaient des supports de formation très largement diffusés en France. En effet, le travail conjoint avec Frédéric Roland, conservateur de la Cinémathèque de l'Enseignement Public (Univ. Sorbonne Nouvelle), a permis l'identification d'une centaine de films du même type et la numérisation d'une partie de ce corpus. À l'image des travaux réalisés sur les manuels (d'Enfert, Moyon & Valente, 2017), l'analyse de ces ressources et leur inscription dans l'histoire de l'enseignement fera l'objet d'un ouvrage collectif qui combine les points de vue historiques, épistémologiques et didactiques (De Vittori, d'Enfert, Grevet, Morel, & Roland, à paraître 2022). Comme je viens de le souligner, le corpus de films de mathématiques de la période des mathématiques modernes est très vaste, ce qui constitue une ressource qui fera l'objet d'autres recherches que je compte porter. Notons qu'au-delà de leur intérêt scientifique et de leur valorisation aisée dans le cadre de formation de futurs enseignants, il ne faut pas sous-estimer l'urgence de ces travaux. En effet, les bobines 16mm de ce type sont fragiles et leur contenu sera sans doute bientôt inaccessible tant pour des raisons mécaniques (films collés, vétusté du matériel de diffusion, ...) que pour des raisons chimiques (décalage des couleurs vers le rouge du fait de la détérioration des composés chimiques des films, moisissures, ...). Comme souvent désormais en histoire des sciences, la numérisation des sources constitue une voie de préservation pertinente. Les projets que j'ai pu porter sur cette thématique intégraient déjà cette dimension, et je compte continuer à la mettre en avant.

⁶⁵ Études historiques et didactiques des usages des films et vidéos en classe et en formation dans la deuxième moitié du 20e siècle, programme inter-universitaire A2U (Univ. Artois, ULCO, UPHF), porté par T. De Vittori, J.-F. Grevet, R. d'Enfert, F. Roland et T. Morel.

Chapitre 2 : État des lieux et positionnement didactique

Dans ce deuxième chapitre, je vais m'intéresser à l'inscription de mes travaux de recherche au sein de la didactique des mathématiques. La question de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe et en formation trouvant ses racines dans plusieurs décennies de réflexion au sein de diverses communautés, dans un premier temps, je dresserai un panorama de la situation en France avec en particulier les apports des IREM et de leurs acteurs. Ce contexte étant posé, avant d'entrer dans l'étude des pratiques de classe, je présenterai quelques éléments sur la formation des enseignants dans laquelle s'inscrivent certains de mes travaux. Ensuite, j'entrerai dans le cœur de la composante didactique d'EDUHM en présentant les recherches que j'ai pu mener autour de l'analyse des tâches avec d'une part l'élaboration d'une première typologie issue d'une étude des pratiques (approche *bottom-up*) et d'autre part l'utilisation d'un modèle théorique didactique pour l'analyse fine (démarche *top-down*). Enfin, après avoir rappelé l'état du questionnement à l'échelle internationale, je présenterai plusieurs perspectives de recherche relatives à cet axe didactique.

2.1 La situation en France et le rôle des IREM

L'utilisation de l'histoire des mathématiques comme moyen d'éclairer l'évolution des objets et méthodes de cette discipline est une thématique très ancienne. En effet, les mathématiciens ont toujours accordé une place de choix à l'histoire des mathématiques et, jusqu'au milieu du 20^e siècle, les références aux illustres prédécesseurs constituaient un élément normal d'un traité ou autre écrit scientifique. Au-delà de la construction nécessaire des résultats, il s'agissait d'inscrire les travaux dans des traditions de recherche portée par des illustres mathématiciens qui ont précédé. L'activité de recension historique est même parfois prise très au sérieux comme par exemple dans le célèbre *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* de Michel Chasles (1875) dans lequel il écrit dès l'introduction :

Nous nous proposons, dans cet *Aperçu*, de présenter une analyse rapide des principales découvertes qui ont porté la Géométrie pure au degré d'extension où est parvenue de nos jours, et particulièrement de celles qui ont préparé les méthodes récentes.

En cherchant à identifier dans le passé les grands moments de la constitution d'une notion, d'une méthode ou d'un domaine, le mathématicien adresse ainsi une sorte de discussion à trois avec le lecteur (à qui est adressé, ou non, le texte), l'auteur du texte, et les savants du passé. Ce triptyque peut s'inscrire dans une caractérisation dialogique du récit historique (Barbin, 2014) dont nous verrons, plus loin dans cette note, qu'elle peut fournir une grille de lecture de l'utilisation de sources historiques en classe et en formation. Les lissages liés au structuralisme à la suite des travaux du groupe Bourbaki ont sans doute fait un peu disparaître cette dimension historique des articles mathématiques de nos jours. Néanmoins, le groupe Bourbaki était lui-même très attaché à l'histoire, du moins une certaine forme d'histoire centrée sur les filiations conceptuelles. Voici ce qu'en reprend en particulier Jean Itard (1965)

dans la recension de leur *Éléments d'histoire des mathématiques* (Bourbaki, 1960) faite dans la *Revue d'Histoire des Sciences* :

[Bourbaki] nous présente lui-même ses *Éléments d'histoire* en ces termes :

« Cet ouvrage rassemble, sans modification substantielle, la plupart des Notes historiques parues jusqu'ici dans mes *Éléments de mathématique*. On en a seulement rendu la lecture indépendante des chapitres des *Éléments* auxquels ces Notes font suite ; elles sont donc en principe accessibles à tout lecteur pourvu d'une solide culture mathématique classique.

[...]

Enfin, le lecteur ne trouvera pratiquement dans ces Notes aucun renseignement biographique ou anecdotique sur les mathématiciens dont il est question ; on a cherché surtout, pour chaque théorie, à faire apparaître aussi clairement que possible quelles en ont été les idées directrices, et comment ces idées se sont développées et ont réagi les unes sur les autres. »

L'histoire que présente Bourbaki est conceptuelle, elle vise à informer le lecteur sur les liens qui peuvent exister entre diverses découvertes mathématiques avec un ancrage dans les mathématiques elles-mêmes. L'objet de Chasles dans son *Aperçu* n'était pas différent sur ce point. Ainsi conçue, l'histoire des mathématiques fait partie des mathématiques car elle ne fait qu'éclairer la construction des concepts et des méthodes.

C'est de ces racines profondes que va émerger à partir du milieu du 20^e siècle les premières réflexions sur l'utilisation de l'histoire des mathématiques à des fins pédagogiques. Le phénomène est donc assez récent car, pour la France, il apparaît au grand jour et se structure dans le cadre des premiers travaux et publications des IREM. Les IREM sont créés progressivement à partir de 1969 et dès les premières années, des groupes d'enseignants et d'enseignants-chercheurs explorent le rôle que peut jouer une approche des mathématiques scolaires par l'histoire. Comme le rappelle Barbin dans l'avant-propos du Bulletin Inter-IREM *Épistémologie* de 1988 intitulé *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques* (IREM, 1988) :

Depuis une douzaine d'année, la plupart des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (I.R.E.M.) ont constitué des équipes de recherche et de formation consacrées à l'épistémologie et à l'histoire des mathématiques.

Barbin évoque ensuite de nombreux stages, colloques et publications qui visent « à donner aux enseignants de mathématiques les moyens d'introduire une perspective historique dans leur enseignement. » Comme elle le souligne ensuite « C'était déjà le thème du premier colloque sur l'histoire des mathématiques organisé par l'I.R.E.M. de Caen en 1977. » Dès le départ, se construit une certaine spécificité de la réflexion sur l'histoire des mathématiques en classe menée par dans les IREM. Ce qui constitue la signature de cette communauté réside dans son lien très fort avec l'histoire des mathématiques savante. La présence d'historiens des sciences professionnels dès les premiers travaux a certainement joué un rôle clé dans la construction d'une identité particulière de cette recherche sur l'enseignement des mathématiques menée au travers du réseau des groupes s'intéressant à l'histoire des différents IREM de France. Cette identité est l'un des éléments présentés par Chorlay (2016) lors du congrès HPM 2016. Face à l'auditoire international, Chorlay souligne que le travail des IREM sur cette question, tout comme la production d'ouvrages ou de ressources qui lui est associée, se caractérise par huit aspects que je reprends ici⁶⁶ :

⁶⁶ Notre traduction et résumé ; le texte original en anglais est parfois plus détaillé pour certains items.

1. Le point de départ est la reconnaissance d'une source historique spécifique qui fasse écho à un besoin pédagogique.
2. Les connaissances de base du concepteur sont généralement historiques, et le savoir-faire provient de l'expérience de l'enseignement. Les résultats ou les concepts issus de la didactique des mathématiques sont rarement mentionnés.
3. La conception d'un tel plan de cours ne nécessite pas une connaissance approfondie de l'histoire des mathématiques.
4. Les ressources sont explicites en ce qui concerne les connaissances mathématiques, historiques et épistémologiques, et les effets pédagogiques recherchés. Les tâches confiées aux élèves sont explicitées *a priori*. En règle générale, il est très peu question de l'activité réelle des élèves et des effets pédagogiques observables.
5. L'éventail des tâches est large et présente des caractéristiques assez spécifiques⁶⁷.
6. Les ressources portent plutôt sur des activités autonomes, qui ne nécessitent pas la mise en œuvre d'une séquence entièrement dédiée pour être abordées.
7. L'accent mis sur des tâches assez exigeantes, voire difficiles.
8. Les ressources sont, avant tout, à destination d'enseignants et de formateurs d'enseignants.

Dans cette caractérisation, je soulignerai deux aspects qui vont intéresser plus particulièrement ma réflexion. Le premier est l'ancrage dans une forme de nécessité pédagogique et le deuxième est la mise à l'écart d'une réflexion à proprement parler didactique (points 2 et 4).

Pour le premier aspect, la lecture des instructions officielles, dont les programmes scolaires et les référentiels pour la formation des enseignants, offre une bonne vue sur l'émergence d'un besoin d'accompagnement d'une pratique pédagogique de plus en plus prescrite. En effet, au-delà d'un goût pour l'histoire de certains professeurs passionnés, l'approche historique apparaît régulièrement de manière explicite dans les instructions officielles. Ainsi, la première évocation semble dater de 1986 dans les *Objectifs généraux des programmes C – D – E* où on peut lire :

Il convient de mettre en valeur le contenu culturel des mathématiques ; en particulier l'introduction d'une perspective historique peut permettre aux élèves de mieux saisir le sens et la portée des notions et des problèmes étudiés, et de mieux comprendre les ressorts du développement scientifique⁶⁸.

Si on rapproche cette citation des propos de Barbin évoqués précédemment, on constate l'entrée dans les documents institutionnels d'une approche des mathématiques par l'histoire certainement déjà présente au sein d'une certaine communauté enseignante depuis plus d'une dizaine d'années. Fruits de ce mouvement d'introduction d'une perspective historique, les programmes actuels de mathématiques du lycée en série générale comprennent tous un paragraphe entier, par grand domaine (algèbre, analyse, géométrie, probabilité, ...), présentant des temps forts de l'histoire des notions abordées ainsi que quelques auteurs majeurs. Concernant la mise en œuvre en classe, on peut lire dans le préambule commun en seconde, première et terminale, publié en 2019 :

⁶⁷ On notera qu'ici Chorlay détaille assez longuement certaines de ces tâches en mettant en évidence deux grandes familles : la lecture de textes d'une part et des tâches meta-cognitives d'autre part. On se référera à l'article pour plus de détails.

⁶⁸ Extrait cité dans *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques* (IREM 1988, p.9)

Il peut être judicieux d'éclairer le cours par des éléments de contextualisation d'ordre historique, épistémologique ou culturel. L'histoire peut aussi être envisagée comme une source féconde de problèmes clarifiant le sens de certaines notions. Les items Histoire des mathématiques identifient quelques possibilités en ce sens. Pour les étayer, le professeur peut s'appuyer sur l'étude de documents historiques⁶⁹.

Il est intéressant de remarquer que les deux extraits, de 1986 et de 2019, pointent, à plus de trente ans d'écart, les mêmes intérêts potentiels d'un enseignement des mathématiques éclairé par l'histoire. Dans les deux cas, on retrouve trois dimensions communes : la dimension culturelle (c'est-à-dire les mathématiques comme produit de l'activité humaine), la dimension épistémologique (c'est-à-dire ce qui fonde les connaissances mathématiques), et enfin la dimension didactique (c'est-à-dire l'histoire comme moyen pour mieux apprendre). Si les deux premières dimensions, culturelles et épistémologiques, sont, comme nous l'avons vu dans notre premier chapitre, constitutives de la définition même de l'histoire des mathématiques, la troisième dimension est spécifique à un rôle particulier qu'on veut faire jouer aux éléments d'histoire importés dans le contexte scolaire. Vue au travers des programmes du lycée dans les extraits qui viennent d'être cités, cette triple visée de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement se retrouve aussi dans les plus petites classes avec, pour le cycle 3 (dont fait partie désormais aussi la classe de sixième) :

La mise en perspective historique de certaines connaissances (numération de position, apparition des nombres décimaux, du système métrique, etc.) contribue à enrichir la culture scientifique des élèves⁷⁰.

Pour les classes de cinquièmes, quatrièmes et troisièmes, les actuels programmes ne font plus mention de la perspective historique, mais elle était présente dans ceux de 2008 où l'on pouvait lire dans l'introduction commune pour l'ensemble des disciplines scientifiques :

La perspective historique donne une vision cohérente des sciences et des techniques et de leur développement conjoint. Elle permet de présenter les connaissances scientifiques comme une construction humaine progressive et non comme un ensemble de vérités révélées⁷¹.

Comme pour les actuels programmes du cycle 3 et du lycée général, les instructions officielles de 2008 pour le collège présentaient ainsi à la fois les deux dimensions culturelles et épistémologiques précédemment soulignées auxquelles venait s'adjoindre la dimension didactique *via* le paragraphe intitulé « L'importance des mises en cohérence » dans lequel on pouvait lire que « Certains problèmes peuvent prendre appui sur des éléments empruntés à l'histoire des mathématiques. »

⁶⁹ BO spécial n° 1 du 22 janvier 2019 et BO spécial n° 8 du 25 juillet 2019. Ce paragraphe est ensuite décliné avec des références précises dans chacun des grands chapitres comme par exemple pour le chapitre « Nombres et Calculs » de la classe de seconde : « Histoire des mathématiques. La notion apparemment familière de nombre ne va pas de soi. Deux exemples : la crise provoquée par la découverte des irrationnels chez les mathématiciens grecs, la différence entre « nombres réels » et « nombres de la calculatrice ». Il s'agit également de souligner le gain en efficacité et en généralité qu'apporte le calcul littéral, en expliquant qu'une grande partie des mathématiques n'a pu se développer qu'au fur et à mesure de l'élaboration, au cours des siècles, de symbolismes efficaces. Il est possible d'étudier des textes anciens d'auteurs tels que Diophante, Euclide, Al-Khwarizmi, Fibonacci, Viète, Fermat, Descartes et mettre en évidence leurs aspects algorithmiques. »

⁷⁰ BO n° 31 du 30 juillet 2020

⁷¹ Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008

Ce bref parcours des documents de cadrage ministériels vise à montrer la stabilité de la présence de la thématique de l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement depuis les années quatre-vingts. Face à une telle injonction, se pose la question de sa mise en œuvre effective dans les classes. En effet, comme le soulignait déjà Jean-Pierre Friedelmeyer (IREM, 1988) en commentant les programmes du lycée de 1986 « Malheureusement, si ces programmes sont très explicites et détaillés sur ce qu'il faut faire et ce qu'il ne faut pas faire relativement au contenu mathématique à enseigner et aux travaux à effectuer, ils sont totalement muets en ce qui concerne la façon d'introduire cette perspective historique. » Ceci interroge. Comme nous venons de le voir, sur le plan des instructions officielles, la situation n'a pas vraiment changé depuis plus de trente ans. Une des raisons est sans doute liée à la nature même de ce type de documents. En effet, dans les programmes et plus encore dans les documents d'accompagnement produits par l'État, le Ministère ne peut se référer qu'à des résultats didactiques stabilisés. Mais ces derniers existent-ils dans le cas de la perspective historique dans l'enseignement des mathématiques ? La réponse à cette question m'amène à commenter le deuxième aspect que j'ai souhaité souligner dans la caractérisation des productions des IREM faites par Chorlay, à savoir le pas de côté par rapport à la didactique des mathématiques. Cette réponse constituera aussi un point important du positionnement de mon travail de recherche.

Je l'ai déjà évoqué plusieurs fois, le rôle moteur des IREM dans l'émergence et la structuration d'une réflexion sur l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe et en formation est incontestable⁷². Pourtant, si la production de ressources a été à la fois extrêmement importante en quantité et de très grande qualité (en particulier scientifique dans le domaine historique), elle reste marquée par la constitution de la communauté qui l'a générée. Les groupes IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques voient avant tout se rencontrer des historiens des mathématiques et des mathématiciens professionnels, impliqués ou non dans la formation, et des enseignants de terrain. Il s'agit là, bien entendu, d'une richesse de liens entre un certain volet de la recherche universitaire et les pratiques de classe. Toutefois, contrairement à certains chapitres mathématiques précis (la géométrie, la numération, etc.) ou d'autres approches pédagogiques (le numérique, les problèmes ouverts, etc.) qui ont vu l'implication forte de didacticiens, la recherche menée dans les IREM sur l'histoire des mathématiques n'a pas développé cette dimension. Quelques publications assez récentes marquent toutefois une légère inflexion dans ce positionnement. Ainsi l'ouvrage *Let history into the mathematics classroom* (Barbin et al., 2018) est assez représentatif d'un courant qui voit tout de même l'entrée progressive d'une réflexion didactique dans les ressources produites par l'IREM sur l'histoire des mathématiques en classe. Ce livre est en fait une traduction en anglais de textes édités par Évelyne Barbin comprenant d'une part *De grands défis mathématiques d'Euclide à Condorcet* (Barbin, 2010) et d'autre part *Les mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs* (Barbin, 2012a). Au fil des pages de cette version anglaise, sont présentées dix idées d'activités pour la classe accompagnées de sources originales et de commentaires historiques. Dédiée, comme l'indique son titre, à des activités testées en classe, la publication propose quelques analyses qualitatives des effets sur les élèves au travers d'éléments objectivés. On trouvera ainsi quelques productions et réactions d'élèves commentées dans les chapitres 3 et 7, et quelques procédures décrites et commentées dans les chapitres 6 et 8 par exemple. L'ouvrage collectif *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire en Cycle 3* (Moyon & Tournès,

⁷² Pour une présentation de la mise en place de la commission inter-Irem épistémologie et histoire des mathématiques, on pourra lire l'exposé fait par Barbin (2012) au congrès EMF2012.

2018) propose un travail plus systématique avec des productions d'élèves commentées pour chacun des chapitres. Encore plus proche du quotidien de la classe, on notera que certaines activités de *Passerelles* ont par ailleurs fait l'objet de présentations en 2017 dans le cadre du plan de formation en mathématiques à destination des professeurs des écoles (Moyon et al., 2018). Pour ces publications, à l'exception notable des activités autour de la géométrie dans *Passerelles*, les bibliographies des différents chapitres ne font mention d'aucune référence dans le domaine de la didactique des mathématiques⁷³. Il demeure donc une forme de paradoxe dans une Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (pour reprendre les trois lettres R, E, et M de l'acronyme IREM) qui ne vienne pas nourrir et se nourrir d'un domaine universitaire censé lui correspondre qu'est la didactique des mathématiques. C'est précisément la prise en compte de ce paradoxe qui m'a mené à développer un questionnaire explicitement Didactique sur l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe et dans la formation des enseignants (le D, de EDUHM). Avant d'entrer dans la présentation de mon travail sur cette thématique, l'évocation de la dimension formation me permet d'y rappeler dès maintenant l'importance de la place des IREM. Les volets tant formation initiale que formation continue autour de l'épistémologie et l'histoire des mathématiques ont été particulièrement investis par les IREM. Cette attention portée au développement des compétences professionnelles des enseignants fait partie évidemment de l'essence de ces instituts mais c'est aussi l'une des caractéristiques, plus ou moins conscientisée, rappelées par Chorlay (2016). Ce choix d'aller vers les pratiques en privilégiant cette voie explique sans doute aussi l'absence d'une recherche didactique dédiée ; recherche qui pourrait, elle aussi, constituer une voie comme c'est le cas sur d'autres sujets. Même si elle m'intéresse au premier chef de par mon statut d'enseignant-chercheur en INSPE, la formation des enseignants en épistémologie et histoire des sciences ce n'est pas l'axe central de mes recherches. Mais comme on ne peut penser un contenu enseigné sans prendre en compte celui qui enseigne, une partie de mes premières recherches a intégré cette thématique, constituant ainsi les prémisses d'une ouverture didactique du questionnaire.

2.2 Sur la formation des enseignants

Toute réflexion sur l'enseignement des mathématiques questionne la formation disciplinaire des futurs professeurs. Il s'agit bien entendu de s'assurer que les enseignants maîtrisent techniquement les contenus qu'ils auront à transmettre, mais la réflexion gagne en profondeur dès lors qu'on y intègre une dimension épistémologique. En effet, au-delà des résultats et méthodes mathématiques, la maîtrise de cette discipline en vue de son enseignement nécessite aussi un recul plus important et une prise de conscience de ce que sont les connaissances mathématiques. Dans la continuité des liens entre épistémologie et histoire évoqués dans le premier chapitre, l'histoire des mathématiques a été rapidement vue comme un bon moyen pour amener chez les (futurs) enseignants ce recul épistémologique.

⁷³ Dans le cas de *Passerelles*, une forme de méthodologie didactique est utilisée avec des références avant tout implicites. Ainsi dans la présentation qui est faite du projet au colloque Mathématiques en cycle 3 (IREM, Poitiers) en 2017, Moyon, Chorlay et Plantevin (2018) expliquent que « au regard des effets potentiels en termes de motivation des élèves, de dévolution des problèmes et d'appropriation des connaissances [...] nous allons encore plus loin dans les analyses didactiques des expérimentations (a priori et a posteriori). » On peut voir ainsi dans ce passage apparaître le concept de dévolution issu de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) et l'approche méthodologique de la recherche en didactique par analyses *a priori* / *a posteriori* qu'Artigue (1988) développe dans sa présentation de l'ingénierie didactique et dont Dorier (2014) rappelle qu'elle est constitutive de la théorie de Brousseau.

La France a connu de nombreuses réformes de la formation des enseignants et ces dernières ont permis la stabilisation progressive de la prise en compte d'une compétence en épistémologie des mathématiques. Sans reprendre les multiples décrets qui ont fait passer les IUFM aux ESPE puis aux INSPE, on peut noter que des avancées ont eu lieu très tôt suite à des actions fortes comme la publication du rapport Kahane⁷⁴ en 2000. Pour la thématique de la formation des enseignants, tout le travail préfigurait la création des master MEEF (les auteurs du rapport parlent alors de Maîtrise d'Enseignement). Dans ce contexte, on trouve dès le départ soulignée l'importance de l'épistémologie et de l'histoire. On peut lire ainsi pour les professeurs des écoles par exemple :

3. Les compétences visées pour un enseignant [du premier degré]

Recensons les compétences qu'il serait souhaitable de développer chez le futur professeur des écoles concernant plus particulièrement les mathématiques :

- posséder une maîtrise raisonnable des savoirs mathématiques de l'école élémentaire permettant d'avoir un certain recul par rapport aux programmes,
- connaître des éléments d'épistémologie des mathématiques : réflexion sur la pratique mathématique, sur le rapport au vrai et au faux, sur l'histoire des mathématiques [...]⁷⁵.

Comme on peut le voir, les travaux de la Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques mettent l'accent sur l'histoire et l'épistémologie dans la formation des enseignants, y compris du premier degré. Cette demande se trouve encore accentuée lorsqu'est présentée la structure du futur diplôme destiné aux enseignants du second degré.

Parmi les autres options que pourrait comporter une telle maîtrise d'enseignement, il pourrait y avoir, à côté de modules d'analyse et d'algèbre classiques, des modules de géométrie, de probabilités, de statistiques, d'informatique et aussi des modules plus dirigés vers l'enseignement (modules faisant appel à d'autres disciplines, module d'histoire des sciences, module d'utilisation de logiciels de calcul formel et de géométrie, module de didactique)⁷⁶.

L'histoire des mathématiques apparaît donc comme un élément incontournable de la formation de tous ceux qui auront à enseigner cette discipline. De la maîtrise des connaissances des élèves à celles des professeurs, la réflexion peut s'étendre jusqu'au aux formateurs. Là aussi, la commission Kahane insiste sur l'intérêt d'un bagage historico-épistémologique :

Et aussi côté formateurs :

Une formation assurant notamment aux formateurs les connaissances en mathématiques, en épistémologie et histoire des mathématiques, en didactique, qu'il semble raisonnable d'attendre d'eux aujourd'hui [...]⁷⁷.

Très structurants pour la réforme qui était à l'œuvre à l'époque, les travaux de cette Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques au début des années 2000

⁷⁴ À partir de 1999, une Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) est créée par le ministère. Elle est pilotée par le mathématicien Jean-Pierre Kahane (1926-2017) et intègre les plus importantes associations professionnelles comme l'AMPEP, la SMF, la SMAI, etc. On trouvera les rapports et des informations intéressantes sur l'histoire des travaux de cette commission sur le site de la CFEM :

<http://www.cfem.asso.fr/ressources/rapports-enseignement-mathematiques/commission-kahane>

⁷⁵ Rapport Kahane, chapitre « La formation des maîtres en mathématiques », p.10

⁷⁶ Rapport Kahane, chapitre « La formation des maîtres en mathématiques », p.53

⁷⁷ Rapport Kahane, chapitre « La formation des maîtres en mathématiques », p.96

ont gardé un écho très fort dans les réformes suivantes. Fruits d'un collectif à la fois représentatif des acteurs de l'enseignement, de la formation, et de la recherche, les propositions ont gardé ainsi une forme de légitimité assez stable dans le temps. Ceci a abouti à la présence de certains items liés à cette thématique dans les référentiels de compétences des enseignants dès 2013.

P 1. Maîtriser les savoirs disciplinaires et leur didactique

- Connaître de manière approfondie sa discipline ou ses domaines d'enseignement. En situer les repères fondamentaux, les enjeux épistémologiques et les problèmes didactiques⁷⁸.

On peut alors remarquer l'absence de hiérarchie entre des savoirs disciplinaires, le recul épistémologique et les connaissances didactiques. Dans tous les textes de cadrage officiels, ces trois dimensions sont finalement constitutives d'une même compétence. Au-delà de la dimension professionnelle, il y a là aussi l'expression des liens qui existent entre l'épistémologie et la didactique ; liens qui ont été bien explicités en particulier par Michèle Artigue dans le cas de la didactique des mathématiques en général ou par Jean-Luc Dorier pour ce qui concerne plus spécifiquement l'histoire des mathématiques et l'enseignement. Je reviendrai sur ce point un peu plus loin dans ce chapitre. Pour terminer ce panorama sur la place de l'épistémologie et l'histoire des mathématiques dans la formation, j'évoquerai les derniers documents produits par le ministère à ce sujet. Parfaitement en phase avec les référentiels précédents, on peut lire dans le préambule commun pour tous les enseignants (premier et second degré) du texte intitulé *Former aux métiers du professorat et de l'éducation au 21e siècle*⁷⁹

Expert dans les contenus enseignés et dans la méthodologie de leur transmission comme celle de la construction des savoirs par les élèves, le professeur s'est approprié l'épistémologie, les contenus, concepts et démarches de sa (ses) discipline(s) ou spécialité(s).

L'histoire des mathématiques n'apparaît plus explicitement, mais on retrouve l'importance du recul sur la manière dont fonctionnent et se sont construites les mathématiques. Ce point est explicité une deuxième fois dans le détail du cadrage des maquettes de master MEEF pour le second degré où les futurs professeurs seront formés en particulier aux « Savoirs et didactique dans le(s) champ(s) disciplinaire(s) de référence, éléments d'épistémologie. »

Des enseignants en formation aux élèves en classe

Comme j'ai pu le rappeler déjà à plusieurs reprises, l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques est une thématique relativement ancienne. En lien avec l'histoire des IREM et de sa commission Épistémologie et histoire des mathématiques, dans le panorama qu'en dresse Barbin (2012b), la question de la formation des enseignants constitue l'un des éléments structurants. Pour Barbin, en plus d'une visée immédiate qui permet d'éclairer les élèves sur l'intérêt des mathématiques et leur rôle dans les sciences, l'histoire des mathématiques permet de confronter les enseignants à une réflexion de nature

⁷⁸ Référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation, BO n° 30 du 25 juillet 2013

⁷⁹ *Former aux métiers du professorat et de l'éducation au 21e siècle*, 2019, https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/Mediatheque/38/7/CADRE_GENERAL-Annexe_referentiel_formation_-_MEEF_post_CT_du_28032019_1152387.pdf (consulté le 09/12/2021)

épistémologique. L'idée étant que, en ayant lui-même été confronté à devoir repenser ses objets, l'enseignant est plus à même de comprendre certaines difficultés de ses élèves. Il ne s'agit pourtant pas pour Barbin de construire un enseignement d'histoire des mathématiques autonome qui pourrait être contre-productif. Barbin (2012b, p.553) définit ainsi ce qu'elle entend par « cours d'histoire » en lien avec les travaux des IREM en expliquant que :

Il s'agit d'intégrer l'histoire dans l'enseignement, de dater l'invention d'un concept, d'expliquer la portée historique d'un concept, de faire lire des textes anciens, mais aussi de résoudre des problèmes historiques. L'objectif n'est pas de créer une discipline ou un moment scolaire complètement détaché de la pratique des mathématiques.

Ce cours d'histoire est calibré pour des enseignants et s'organise autour d'un questionnement de nature épistémologique. Pour Barbin toujours, l'approche des mathématiques en classe par leur histoire sera d'autant plus efficace qu'elle s'appuiera sur des connaissances solides. Elle appelle donc de ses vœux la généralisation de ce type de cours dans la formation initiale des enseignants. Parmi les nombreux apports possibles de l'histoire, notons que Barbin en souligne en particulier trois : l'histoire comme dépaysement, l'histoire comme support d'ouverture culturelle et l'histoire comme outils de réflexion épistémologique. Comme nous le verrons dans le paragraphe 2.3 de cette note, ces thématiques sont parfaitement en phase avec l'état de la recherche internationale dans le domaine.

L'histoire des mathématiques peut s'avérer bénéfique pour les enseignants et dès les premières réflexions et recherches, l'éclairage épistémologique a été mis en avant. Par exemple, Tournès (1993) relèvera très tôt dans le cadre de la formation initiale des enseignants l'impact positif sur ces derniers.

Ainsi, grâce à l'histoire, ces professeurs stagiaires réalisent que les mathématiques sont une science vivante, dont les concepts se sont forgés sur de longues périodes. Ils peuvent replacer les mathématiques dans l'évolution générale des idées et humaniser leur discipline.

Dans la même ligne que ces premiers travaux, une partie de mes recherches a pu porter sur cette place de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants. À partir de l'étude d'expériences avec des professeurs stagiaires (De Vittori & Loeuille, 2009b), j'ai analysé en particulier deux séances de formation à l'épistémologie et à l'histoire des sciences. Destinées à un groupe mélangeant futurs enseignants de mathématiques et futurs enseignants de sciences physiques, les séances analysées ont permis de (re)mettre en évidence plusieurs moments d'activation de la réflexion épistémologique. J'appelle modalités la forme prises par ces moments qu'on peut résumer par les cinq adjectifs : technique, philosophique, linguistique, pratique, et enfin dramatique. Concrètement, ces modalités correspondent à des types de tâches différentes.

Les 5 modalités d'entrée dans la réflexion épistémologique

1. **TECHNIQUE** : L'expression technique est à prendre dans ce contexte comme synonyme de purement mathématique. La tâche demandée consiste en la réalisation d'un calcul ou d'une démonstration qui aide à comprendre une notion. Par exemple, la réalisation la démonstration géométrique de Galilée pour évaluer la distance Terre-comète permet d'entrer dans l'argumentation sur la nature de l'univers⁸⁰.

⁸⁰ Dans *l'Essayeur*, Galilée (1980) s'oppose à Ticho Brahé sur la nature des comètes. Pour Galilée, elles se situent entre la Terre et la Lune. À partir d'une démonstration géométrique, il va donc contredire Ticho Brahé qui

2. PHILOSOPHIQUE : Il s'agit ici de tâches qui obligent à la prise en compte de réflexions de philosophe sur certains concepts. Dans le cas de la séance analysée, il s'agit du concept de vide. On peut très bien décliner cette modalité avec des concepts mathématiques dès lors qu'on fournit en amont des éclairages philosophiques comme par exemple sur l'idée de nombre ou de figure géométrique. C'est une modalité très directe qui nécessite des apports en amonts.
3. LINGUISTIQUE : Cette situation est en fait très fréquente car elle consiste en la mise en contact avec des textes difficiles sur le plan de la langue. Dans ce cas, les difficultés de lecture et de compréhension obligent un travail sur la langue qui permet d'introduire la nécessité de placer les mots, et donc les notions, dans leur contexte historico-scientifique. Par certains aspects, cette modalité peut être rapprochée de la notion de dépaysement qu'on trouve dans les réflexions de Barbin (2012) ou Guillemette (2015).
4. PRATIQUE : Cette modalité intervient lors de l'utilisation d'outils ou d'instruments anciens dont l'usage est inconnu des élèves ou étudiants. Dans ce cas, la découverte du mode d'emploi constitue une première phase d'appropriation qui permet ensuite un travail sur différents aspects historiques ou épistémologiques comme la définition des grandeurs ou la place des instruments en science.
5. DRAMATIQUE : Cette dernière modalité intervient lors de l'introduction de jeux de rôle, ou lors de la mise en œuvre de mini pièces de théâtre faisant intervenir des savants. La dimension théâtrale va fournir l'occasion d'une étude, souvent approfondie, des conceptions des différents personnages et donc de les replacer dans leur contexte. Les controverses sont idéales pour ce type d'approche.

Produite dans le cadre d'études qualitatives de pratiques de formation, cette typologie s'adapte aussi aisément à l'analyse *a priori* de séances en classe (De Vittori & Loeuille, 2009b). Ceci permet au besoin d'articuler formation épistémologique des enseignants et formation à l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe. À l'exception peut-être de la modalité philosophique qui nécessite des apports spécifiques dont la pertinence en classe doit être soigneusement contrôlée, les objectifs de formation généralement sont suffisamment communs entre professeurs et élèves pour justifier des stratégies par homologie⁸¹ (Kuzniak, 1994). Mais dans ce cas, même avec une situation idéale d'une formation efficace des enseignants à l'épistémologie des mathématiques, le transfert dans les pratiques de classe ordinaires soulève de nouvelles questions, en particulier quant à l'articulation de cette réflexion historico-épistémologique et les contenus d'apprentissages.

Le double champ et les interactions mathématiques-histoire

Lors de la fréquentation d'éléments historiques en formation, la simple présence conjointe d'une notion mathématique et de son histoire crée une situation particulière dans laquelle les deux domaines, mathématiques et histoire des mathématiques, forment un « double champ » (De Vittori, 2012). La prise en compte de ce double champ permet immédiatement de poser

soutient le contraire (Galilée, pp.137-142). C'est aussi dans ce passage qu'on trouve la célèbre citation de Galilée où il écrit dès 1623 que « La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers, mais on ne peut le comprendre si l'on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à connaître les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans les moyens desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot. »

⁸¹ Kuzniak distingue trois grands types de stratégies de formation, par monstration, par homologie, et par transposition. La stratégie par homologie repose sur l'idée que ce que vit l'enseignant formé doit être conforme à ce que vit un élève en classe.

la question des relations entre les mathématiques et leur histoire dans un contexte où la visée est le recul épistémologique. Dans De Vittori (2012), j'ai proposé des éléments de réflexion à partir de l'analyse de séances de classe dont une large part peut s'appliquer à la question de la formation des enseignants. C'est ce que je vais développer maintenant. De la maternelle à l'université, les mathématiques sont un objet d'enseignement et elles constituent une discipline aux contenus bien identifiables. L'histoire des mathématiques, comme domaine universitaire, est un peu dans la même situation sauf qu'elle n'est pas une discipline scolaire. Si elle l'était, les relations entre, premièrement, les mathématiques - en tant qu'objet d'enseignement - et, deuxièmement, l'histoire des mathématiques - en tant qu'objet d'enseignement - pourraient être conçues de manière parfaitement parallèle. Ce n'est pas le cas. Cette différence dans l'étendue du positionnement disciplinaire qui est problématique lorsqu'on étudie des situations de classe mêlant mathématiques et histoire, ne l'est pas nécessairement en formation des enseignants. De niveau master, les professeurs ou futurs-professeurs peuvent fréquenter directement des éléments d'histoire des mathématiques. Le choix par le formateur de contenus pertinents dans les deux domaines permet leur interaction au niveau du développement des compétences professionnelles des enseignants en formation (Figure 1).

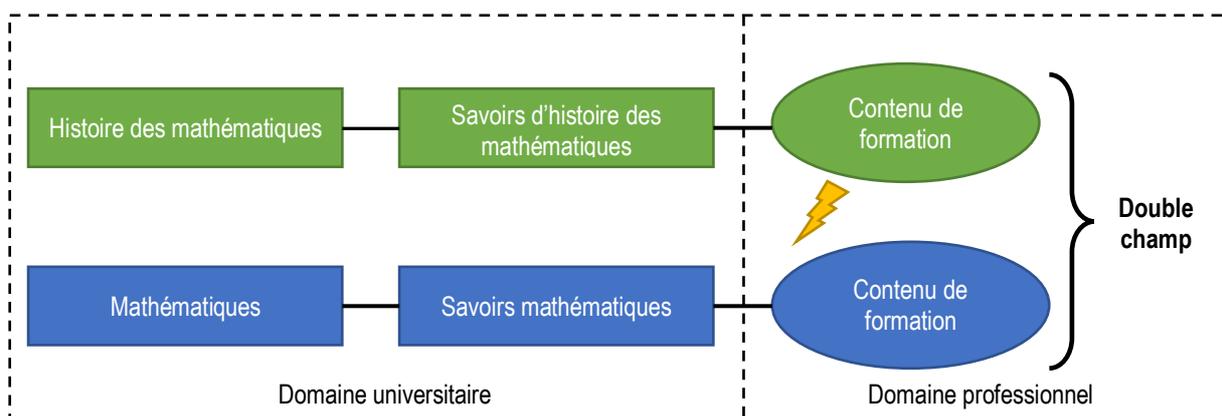


Figure 1 : Schéma de l'articulation entre mathématiques et histoire
(De Vittori, 2012, adapté à la question de la formation des enseignants)

Sur cette articulation entre les contenus historiques et les contenus mathématiques, Jankvist (2010) propose une dichotomie qui a été largement reprise par la communauté internationale des historiens des mathématiques impliqués dans la formation des enseignants. Il distingue ainsi l'histoire comme outil (tool) de l'histoire comme objectif (goal). Jankvist & Kjeldsen (2011) expliquent alors que « le mot objectif doit être compris dans le sens où il est considéré comme objectif de montrer aux étudiants quelque chose sur le développement historique des mathématiques » et que la notion d'outil apparaît lorsque « l'histoire est utilisée comme un moyen de soutien, ou une aide, dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques » (notre traduction). En fait, dans les deux cas, histoire comme objectif et histoire comme outil, ce sont une nouvelle fois des enjeux épistémologiques qui président. Toutefois, cette séparation masque un peu les interactions possibles entre les différents champs à l'œuvre. En particulier, le couple objectif-outil oriente l'analyse sur le seul contenu historique et néglige un peu la présence finalement constante des mathématiques. Ce n'est pas développé par Jankvist or cet aspect me paraît crucial dans le contexte d'une formation d'enseignants de

mathématiques. Lorsqu'on reprend les cinq modalités présentées plus haut, on constate aisément que l'histoire en tant qu'outil et l'histoire en tant qu'objectif peuvent apparaître comme deux éléments d'une séance unique. Même en se restreignant à une seule modalité, par la présence du double champ, les mathématiques interagissent elles aussi. Si on reste sur l'exemple de Galilée, lors de la réécriture de la démonstration géométrique (modalité technique), les mathématiques sont un outil qui permet d'atteindre un objectif d'apprentissage historique, à savoir la question de la nature des comètes (objets infra- ou supra-lunaires ?). Ensuite, cette connaissance historique relative à la cosmologie devient un outil pour atteindre l'objectif mathématique d'une meilleure compréhension du rôle des mathématiques dans les sciences expérimentales et sur, par exemple la question de la modélisation (recul épistémologique). Il y a là une circulation (Figure 2).

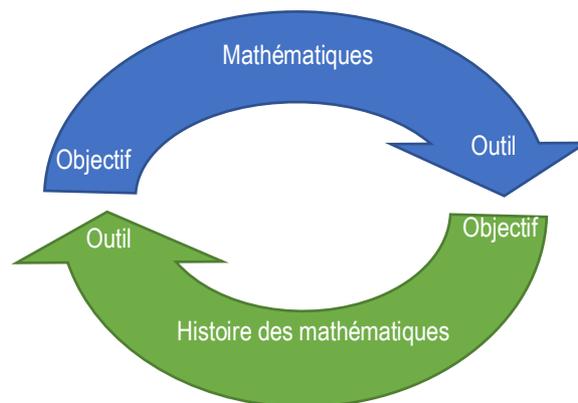


Figure 2 : Le couple objectif-outils dans une circulation mathématiques et histoire
(De Vittori, 2012, adapté à la question de la formation des enseignants)

L'histoire des mathématiques et les mathématiques ont été séparées par le processus de la recherche académique. Cette relation dynamique qui vient d'être présentée met en évidence le fait que la formation des enseignants est un lieu où ces liens entre l'histoire et les mathématiques sont reconstruits.

Des modules d'histoire des mathématiques sont présents désormais dans presque toutes les maquettes de formation des enseignants ainsi que dans de nombreux parcours de licence. La perspective d'une formation épistémologique est donc plus que jamais d'actualité. C'est un champ de recherche actif. Ainsi, par exemple, Pallarès, Hausberger, et Roy (2021), ont pu montrer par l'analyse didactique d'un temps de formation initiale auprès de futurs enseignants du secondaire que ce type de modules permet « une augmentation à court terme des habiletés réflexives des étudiants en lien avec une meilleure compréhension des obstacles à l'enseignement de la notion de variable. » De même, Lemes (2019) tire une conclusion similaire dans sa thèse qui porte sur les compétences professionnelles des enseignants et où elle explique que « en introduisant le cadre théorique des Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement – proposé par Ball –, nous affirmons que les conceptions sur la nature des mathématiques se manifestent dans un de ses sous-domaines. Lorsque ce sous-domaine est activé par l'effet de l'histoire des mathématiques, une influence se produit dans le reste des sous-domaines, [...] les conceptions imprègnent les décisions et pratiques de l'enseignant. Il est ainsi possible d'identifier les compétences liées à l'histoire des mathématiques qui sont activées par l'enseignant. » De manière général, par le travail sur des notions mathématiques de niveaux universitaires, la formation des enseignants se rapproche de la formation des

étudiants de licence ou de master de mathématiques. Pour des notions comme le continu (Durand-Guerrier & Vergnac, 2018), l'infini (Boulais et al., 2019) ou la preuve (Durand-Guerrier & Tanguay, 2018), la transition lycée-supérieur (Gueudet, 2008 ; Dieudonné et al., 2011) constitue un moment fort des apprentissages mathématiques où l'éclairage et le recul épistémologiques semblent montrer aussi toute leur pertinence. Je n'évoque ici que quelques travaux et objet de la didactique du supérieur. Ils s'intègrent dans une thématique très vivante au sein d'une communauté dont on peut suivre les développements par exemple au travers du GDR-CNRS DEMIPS⁸².

Un dernier aspect lié à la formation des enseignants concerne les ressources désormais à leur disposition pour intégrer une perspective historique et la présence de cette thématique y compris dans les documents institutionnels⁸³. Dès la création des IREM, des publications à destination des enseignants et formateurs sont apparus. Au fil des années, ce mouvement s'est accentué et ce sont désormais plusieurs ouvrages, fichiers, sites internet, etc. qui sont disponibles. Bien plus, afin de se conformer aux incitations présentes dans les programmes (surtout du lycée), tous les manuels scolaires intègrent de nombreuses activités ou exercices à support historiques mais aussi des encarts biographiques, des frises historiques, des pages documentaires, etc. Ceci pose alors la question de l'appropriation de ces ressources par les enseignants. Il y aurait sans doute ici un travail spécifique à initier⁸⁴ à l'appui de travaux didactiques récents comme, par exemple, ceux développés dans le cadre de l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche, 2009 ; Gueudet et al., 2012, 2013 ; Trouche et al., 2020).

Que ce soit sur la formation des enseignants, l'enseignement des mathématiques dans le supérieur, ou encore l'utilisation des ressources, ces questionnements sont de nature didactique et ils me fournissent une transition idéale vers l'explicitation du positionnement didactique de mes travaux et des apports de mes recherches dans ce champ.

2.3 Épistémologie et didactique : une autre articulation

En lien direct avec ce qui vient d'être développé dans le cadre de la formation des enseignants, la place de l'histoire des mathématiques dans les classes est le prolongement naturel de cette réflexion épistémologique sur les contenus. Souvent souhaitée au travers des programmes et documents d'accompagnement comme cela a été rappelé en ouverture de ce chapitre, l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe constitue une réalité scolaire qui peut dès lors être étudiée en tant que telle. Par définition, la didactique des mathématiques « étudie les processus de transmission et d'acquisition des différents contenus de cette science, particulièrement en situation scolaire ou universitaire. Elle se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage⁸⁵. » Même si dans le cas de l'histoire des mathématiques en classe, le double champ (co-présence des deux disciplines histoire et mathématiques) perturbe un peu, comme

⁸² <https://demips.math.cnrs.fr>

⁸³ Le dernier document d'accompagnement cycle 4 sur *La résolution de problèmes mathématiques au collège* (2021), par exemple, ouvre chaque chapitre par un éclairage historique : <https://eduscol.education.fr/document/13132/download>

⁸⁴ Cet axe de recherche a été évoqué également dans le cadre de séminaires par Christine Mangiante et Antonietta Demuro.

⁸⁵ Régine Douady, article « Mathématiques (didactique des) », *Encyclopædia Universalis* [en ligne], consulté le 6 décembre 2021.

nous l'avons vu, la définition de l'objet d'apprentissage, le contexte scolaire impose la présence d'une visée didactique à toute activité, exercice, problème, etc. que propose l'enseignant. Il y a bien un apprentissage mathématique souhaité.

La question de l'articulation entre une réflexion épistémologique et des analyses didactiques n'est pas neuve. En effet, on trouve un positionnement assez clair quant au rôle de l'épistémologie dans la didactique dès la fin des années 1980 – débuts des années 1990. Michèle Artigue, dans un texte fondateur intitulé tout simplement « Épistémologie et didactique » (Artigue, 1990) suggère plusieurs niveaux d'intrication entre ces deux domaines. En premier lieu, l'épistémologie joue son rôle philosophique, à savoir, cerner les savoirs des mathématiques. Pour Artigue, « l'analyse épistémologique aide la didactique à se dépendre de l'illusion de la transparence des objets qu'elle manipule au niveau des savoirs et aide le didacticien à se dégager des représentations erronées que tend à induire sa pratique d'enseignant. » Les situations de classe, conformes aux programmes officiels, voient la mise en œuvre de notions (de concepts) qui, du fait d'une pratique intensive lors de leur formation initiale, sont souvent complètement naturalisés par les enseignants. Ces notions ne sont donc plus questionnées, ce qui peut déjà être critiquable chez un enseignant mais qui, dans le cas d'un didacticien, s'avère générateur de nombreux biais. En cela, la première remarque d'Artigue appelle à cette vigilance épistémologique qui permet de questionner les savoirs enseignés. L'épistémologie, qui est ici une histoire épistémologique, apporte ainsi les contextes d'élaboration des connaissances mathématiques, les resitue dans leur temps, et permet donc de mieux cerner les enjeux d'apprentissages. Il s'agit là d'un premier niveau, somme toute assez utilitaire, d'interaction entre la didactique et l'épistémologie qui doit être complété par des liens plus profonds sur de la construction théorique. Sur cet aspect, Artigue (1990) part de deux exemples, la notion d'obstacle épistémologique et la notion de conception, et montre que la didactique des mathématiques, dans sa définition, intègre une dimension épistémologique. Elle conclut alors en expliquant que « l'analyse didactique aide donc le didacticien à contrôler les relations au savoir des objets qu'il manipule » et que cette analyse « permet aussi de regarder d'un point extérieur le système d'enseignement qu'il étudie. » La didactique des mathématiques, encore naissante dans les années 1990, trouve ainsi dans l'épistémologie et l'histoire des sciences, à la fois un ancrage et une méthode qui ne cesseront de s'affiner au cours des décennies suivantes. Dorier (2000)⁸⁶ ne dit rien de moins lorsqu'il écrit que « le parti pris fondamental de la didactique consiste à ne regarder la relation maître-élève(s) que dans ce qu'elle a de spécifique au savoir en jeu (et enjeu de connaissance) dans la situation, si bien que toute analyse didactique doit englober un aspect de nature épistémologique. » Les premiers travaux de Dorier sur l'enseignement de l'algèbre linéaire articulent ainsi pleinement recherche didactique et éclairage épistémologico-historique.

L'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe exacerbe encore plus ces liens entre situation d'apprentissage et réflexion sur les concepts. De plus, comme nous l'avons vu précédemment (figure 2), les situations d'apprentissage comportant des éléments historiques créent généralement une circulation entre les mathématiques et l'histoire qui sont tour à tour outil et objectif, ce qui finit de brouiller les pistes. En 1993, Barbin (1997)⁸⁷ est encore assez critique quant aux relations entre les deux champs, ou plus exactement, entre les chercheurs de ces deux champs. Elle écrit ainsi qu'il lui « semble que les épistémologues historiens lisent plus les didacticiens, que les didacticiens ne lisent les épistémologues historiens, voire les

⁸⁶ Bien que publié seulement en 2000, le texte est issu de son habilitation à diriger des recherches de 1997.

⁸⁷ L'article de 1997 reprend les actes de l'université d'automne de 1993 organisée par Rosmorduc sur la thématique de la création d'un DEA de didactique pluridisciplinaire.

historiens tout court. » Le propos est sans doute inutilement provocateur car, même si la dimension épistémologico-historique était effectivement encore peu présente dans les travaux de didactique de l'époque, la dynamique était lancée et c'est ainsi que, par la suite, la très grande majorité des thèses de didactique de mathématiques intégreront un chapitre, souvent conséquent, sur l'histoire du concept enseigné. C'est évidemment particulièrement vrai pour les thèses qui portent explicitement sur l'usage d'éléments historiques en classe comme dans le cas du boulier chez Poisard (2005) ou pour les mathématiques babyloniennes chez de Varent (2018a, 2018b). Toutefois, les propos de Barbin rappellent les choix qui ont présidé dans les productions des IREM. Comme elle l'écrit, « les travaux épistémologiques menés dans les IREM, même s'ils ne s'inscrivent pas dans le cadre de la science didactique, ont été entrepris dans le but de mieux comprendre, ou tout au moins de mieux poser, certains problèmes posés par l'enseignement des mathématiques. » (Barbin, 1997). Mais une autre voie est possible.

Autre orientation, autres lieux pour la recherche et la formation

Avec d'un côté une partie de la communauté des historiens des mathématiques qui ne veut s'inscrire dans une recherche à proprement didactique et de l'autre une partie de la communauté des didacticiens qui se positionne surtout en consommatrice d'épistémologie historique, il reste tout un champ inexploré dans lequel épistémologie et didactique joueraient à jeu égal pour questionner les apprentissages. Développé parallèlement aux travaux des IREM, ce champ de recherche s'assume comme didactique sur des objets d'enseignements historiquement situés.

La structuration de cet axe, bien plus marqué sur le plan didactique, apparaît autour des années 2000 dans quelques lieux en France et dans quelques pays étrangers francophones dont en particulier la Tunisie. Portée par plusieurs équipes, une formation universitaire visant à articuler de manière effective les trois pôles histoire des sciences, épistémologie et didactique s'est alors rapidement développée. On peut citer en particulier le master « Histoire, philosophie, didactique des sciences » (HPDS) de l'Université Claude Bernard – Lyon 1 en co-habilitation avec les universités de Lyon, de Montpellier et l'ENS de Lyon qui, jusqu'en 2015, a proposé un parcours qui intégrait effectivement ces trois dimensions. Suite à la refonte de la nomenclature des intitulés de diplôme par le ministère⁸⁸, ce master a ensuite dû être renommé en master de « Didactique des Sciences ». Le nom a changé ainsi que la structuration des parcours pour les étudiants, mais l'état d'esprit est en partie resté avec la présence de plusieurs unités d'épistémologie et d'histoire des sciences. L'exemple de ce master et de sa refonte me permet de pointer ici le rôle de l'université de Montpellier et des laboratoires LIRDEF et IMAG dont les membres ont pu être moteurs dans la structuration de cette thématique de recherche. Les acteurs ont ainsi su s'organiser en collectifs et ont réussi à structurer la recherche dans ce domaine. L'IMAG est désormais présent dans le GDR « Philosophie des mathématiques » (PhilMath, GDR 3719) qui soutient le sous-réseau « Philosophie, Histoire et Didactique des Mathématiques en Méditerranée » (PhilMathMed) où se réunissent des chercheurs des Universités d'Aix-Marseille, Côte d'Azur, Montpellier, et Toulouse Midi-Pyrénées, autour de la didactique, l'histoire et la philosophie des mathématiques. Au-delà d'événements réguliers comme les « Rencontres PhilMathMed », cette ouverture vers le bassin méditerranéen est présente depuis plusieurs décennies au

⁸⁸ Arrêté du 4 février 2014

travers des collaborations avec des chercheurs en histoire des mathématiques comme Mohamed Mahdi Abdeljaouad (ISEFC, Tunisie), Marouane Ben Miled (ENIT, Tunis) et bien d'autres dans le cadre du master de didactiques des disciplines. Une grande partie des chercheurs impliqués dans ces réseaux sont membres du GDR « Didactique et Épistémologie des Mathématiques, liens avec l'Informatique et la Physique, dans le Supérieur » (DEMIPS, GDR 2076) qui, comme son nom l'indique, interroge les contenus mathématiques enseignés à l'université avec le double regard épistémologique et didactique. Cette extension des recherches vers les pratiques universitaires est en lien également avec des recherches sur l'articulation entre les pratiques des chercheurs en mathématiques et en sciences et les enseignements (voir El Hage & Ouvrier-Bufferet, 2018, par exemple). Cet axe de recherche articule alors épistémologie contemporaine et questions didactiques.

Pour bien comprendre la différence entre cette approche des relations en histoire, épistémologie et didactique, et les travaux développés au sein de la commission inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques », on peut se reporter à l'ouvrage *Didactique, épistémologie et histoire des sciences – Penser l'enseignement* (Viennot, 2008) qui offre une synthèse de plusieurs travaux représentatifs du champ de recherche et de l'articulation qui y est proposée. Comme le rappelle Laurence Viennot dès l'introduction, cet ouvrage rend compte des travaux menés dans l'école doctorale « Savoirs scientifiques - Épistémologie, histoire des sciences et didactique », lorsqu'elle était dirigée par Dominique Lecourt (i.e. de 2003 à 2008), où « l'option fondatrice est que les analyses conduites dans ces champs de recherche devaient pouvoir se fertiliser mutuellement, ou du moins qu'il fallait donner sa chance à cette éventualité. » La volonté est ici double. D'une part, il s'agit, comme dans le cas des IREM, d'apporter un éclairage épistémologique et historique sur les notions enseignées, mais aussi, d'autre part, d'appuyer les réflexions par une forme de retour de la didactique, cette dernière se nourrissant de l'analyse de pratiques réelles. Le questionnement didactique vient alors enrichir la réflexion épistémologique. On a donc deux entrées (historique et didactique) qui viennent s'articuler dans la compréhension des concepts et méthodes mathématiques. L'ajout du pôle didactique constitue une différence majeure par rapport aux travaux des IREM qui, au moins jusqu'à certaines productions très récentes, n'abordaient pas cette dimension et laissaient de côté l'analyse d'une mise en œuvre effective en classe ou en formation. Ce deuxième ancrage, didactique, est précisément ce que pointent Bächtold et al. (2018) dans leur ouvrage *Épistémologie & Didactique* qui, lui aussi, présentent de nombreux résultats de recherche récents. Comme pour l'école doctorale qui vient d'être évoquée, ces travaux s'inscrivent dans deux axes, avec pour le premier, ceux qui mettent « au cœur de leurs questionnements la construction des connaissances scientifiques elles-mêmes et leur transposition pour la classe », et pour le second ceux qui « s'intéressent prioritairement au mode d'enseignement des sciences. » (Bächtold et al., 2018). Les choix évoqués au travers des deux axes relèvent autant du positionnement de la recherche que d'une méthode d'analyse didactique. En particulier, au travers d'un deuxième axe de recherche explicitement didactique, comme les auteurs le précisent ensuite, « les études épistémologiques convoquées à cet égard sont celles qui portent sur les différentes méthodes scientifiques et plus généralement sur les processus de constitution et de validation des connaissances scientifiques. » Par essence, le mode d'enseignement des mathématiques et les réflexions qui y sont associées relèvent de la didactique. Dans cette nouvelle approche, l'épistémologie devient un levier de l'intervention didactique.

Pour ne prendre que quelques exemples de l'articulation entre histoire, épistémologie et didactique dans la ligne de recherche qui vient d'être rappelée, j'évoquerai rapidement les conclusions de trois des études présentées en détails dans l'ouvrage *Épistémologie & Didactique*.

La première est celle de Julie Jovignot (2018) sur le concept d'idéal⁸⁹ en algèbre. Après une analyse à la fois historique (*via* en particulier les travaux de Kummer) et une lecture didactique à partir de la caractérisation de la fonction des concepts selon la grille dite FUGS (qui pointe la dimension Formalisatrice, Unificatrice, Généralisatrice, et Simplificatrice, de certains concepts) développée par Robinet (1984), Robert (1987), puis Dorier (1990), Jovignot montre l'intérêt d'envisager le concept d'idéal dans une dialectique outil-objet (Douady, 1983). L'auteure conclut alors en expliquant que « la détection [épistémologique] de la nature de ce concept oriente l'étude de sa transposition au sein des manuels, étude qui nous renvoie à une étude d'épistémologie contemporaine. De ce fait, nous faisons le choix dans nos travaux de recherche à venir de ne pas séparer l'analyse épistémologique de l'analyse didactique car ces deux analyses s'enrichissent mutuellement. » Comme on peut le lire, Jovignot puise autant dans la recherche historique que dans la recherche didactique pour éclairer les apprentissages autour d'une notion d'algèbre spécifique.

La deuxième étude que je voudrais évoquer est celle de Durand-Guerrier et Vergnac (2018) sur le continu. Comme pour l'analyse du concept d'idéal évoquée précédemment, l'analyse historique vient s'articuler avec l'analyse didactique. Sur cette notion de continuité, les auteures mettent en évidence un double mouvement entre intuition et formalisation. Cette distinction entre deux manières de comprendre le continu est ensuite mise en œuvre pour l'analyse de la manière d'apprendre/d'enseigner le continu au travers de ce qui peut être fait dans les manuels de lycée. À la lumière de ces ressources et de l'analyse de pratiques d'enseignement, Durand-Guerrier et Vergnac expliquent alors que « pour les élèves de lycée en France, l'ensemble des nombres réels est une extension de l'ensemble des nombres décimaux, par adjonction de quelques nombres particuliers dont la nature n'est pas clairement définie tels π , $\sqrt{2}$, e ... ». L'approche suggérée dans les programmes et les manuels repose alors sur l'intuition géométrique (non sans lien avec la construction de Dedekind) qui consiste à mettre en bijection l'ensemble des nombres réels et la droite numérique. Les auteures notent alors que les enseignants interrogés dans le cadre de l'étude ont du mal à adopter une position didactique claire vis-à-vis des nombres réels, ce qui peut être générateur de difficultés d'apprentissage chez les élèves.

Au travers de ces deux premiers exemples, on peut voir s'exprimer ce choix d'une articulation forte entre analyses historiques et analyses didactiques, toutes deux étant constitutives de l'analyse épistémologique. Déjà abordée dans les premiers exemples, la question des pratiques de classe est encore plus présente dans le troisième et dernier exemple dont je vais rappeler rapidement les conclusions. L'étude en question est celle de Valérie Munier, Aurélie Chesnais et Karine Molvinger (Munier et al., 2018) qui porte sur la notion de mesure à la fois en mathématiques et en physique, principalement à l'entrée du collège. Après la présentation d'éléments d'épistémologie et des liens avec la mesure en géométrie pour les mathématiques, les auteures mettent en évidence des continuités et ruptures dans la

⁸⁹ Pour $(A, +, \bullet)$ un anneau, un sous-ensemble I de A est dit être muni d'une structure d'idéal à droite (resp. à gauche, resp. bilatère) de A si et seulement si : $[(I, +)$ est un sous-groupe de A .] et [Pour tout $a \in A$, pour tout $x \in I$, $x \bullet a \in I$ (resp. $a \bullet x \in I$, resp. $x \bullet a \in I$ et $a \bullet x \in I$).]

construction et la validation des connaissances. Les implications didactiques, en particulier sur les difficultés des élèves à tous les niveaux de la scolarité de l'école à l'université, sont ainsi détaillées (par exemple, sur la compréhension de la dispersion des résultats de mesures ou sur l'incertitude d'une mesure). L'articulation avec les pratiques de classe est alors explorée et questionnée dans des productions d'élèves recueillies lors de tests, ainsi que sur des analyses de manuels scolaires et de séances de classes. La conclusion à laquelle arrivent les auteures est que « la prise en charge des questions épistémologiques liées à la mesure est très limitée dans les manuels scolaires » ce qui est assez contre-intuitif si on met ce résultat en regard de l'importance de la notion de modèle en physique et du changement de géométrie à l'entrée au collège. À l'image des deux autres études, le questionnement est bien didactique et s'assume comme tel. L'histoire et l'épistémologie y forment alors des éléments clés pour la réflexion sur les pratiques de classe et les enjeux d'apprentissage.

Pour Bächtold et al. (2018, p.11), les études qui articulent ainsi histoire, épistémologie et didactique constituent un domaine privilégié « visant à comprendre les processus d'apprentissage et d'enseignement des connaissances scientifiques en classe ordinaire ou visant à élaborer des activités d'enseignement innovantes. » Les travaux que je mène dans le cadre d'EDUHM (Barrier et al., 2012) participent pleinement à cette orientation de la recherche. En particulier, comme on pourra le voir plus loin dans ce chapitre, mes travaux s'ancrent avant tout dans des pratiques de classe ordinaires, dans le sens où les objectifs d'apprentissage sont conformes aux demandes des programmes et où la mise en œuvre peut s'inscrire sans modification majeure dans un quotidien de classe.

2.4 Analyses didactiques : le D de EDUHM

Comme le rappelle l'acronyme EDUHM, dans mes travaux, je développe des études explicitement didactiques sur l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe. Je vais donc présenter certains de mes travaux et expliciter les perspectives de recherche qu'ils amènent. Ce qui va suivre se trouve exposé en détail dans les articles De Vittori (2015) et De Vittori (2016), le deuxième étant avant tout une réécriture en anglais à destination de la communauté internationale. À l'appui de tout ce qui a pu être mis en place ou rappelé dans les paragraphes précédents, il convient maintenant pour moi d'entrer dans l'analyse des situations de classe où l'enseignement des mathématiques intègre explicitement une dimension historique.

La typologie SaMaH

Du fait de la présence des deux champs disciplinaires dans un même temps (séquence entière, activité d'approche ou simple exercice d'application), la mise en place d'une séance à dimension historique renvoie à deux types de connaissances qui doivent s'harmoniser pour permettre la création d'un objectif d'apprentissage scolairement valide. Le processus qui conduit à la mise en place d'un double contenu cohérent peut être schématisé d'une manière assez semblable que l'on parte d'un champ ou de l'autre. Tant pour les mathématiques que pour l'histoire, la recherche d'une activité adaptée à la classe trouve sa source dans le domaine lui-même et ses divers sous-domaines ou méthodes. Par une lecture épistémologique conjointe, une mise en relation des deux champs peut naître tout en respectant les instructions officielles et les limites liées aux documents-sources accessibles. Au terme du processus, le résultat est la mise en évidence d'un double contenu ciblé

(De Vittori, 2015) qui constitue un premier point de convergence entre les mathématiques et leur histoire dans lequel chaque champ apparaît avec sa spécificité et son intérêt pour les élèves.

Les contenus étant précisés, du fait de leur présence conjointe, chacun des deux champs génère ses propres types d'activités et certaines tâches diffèrent en profondeur. Dans le domaine des mathématiques, une partie des tâches qui sont proposées aux élèves ne diffèrent pas de celles d'une séance ordinaire et leur étude est directement liée à la didactique de mathématiques. Ces éléments a-historiques (aH) sont constitutifs à part entière d'une séance intégrant l'histoire. La part quantitative de ce type de tâches mathématiques est évidemment variable, mais elles ne peuvent être ignorées car elles contribuent à l'ancrage scolaire de la séance. Parallèlement à la dimension mathématique, la présence de l'histoire fournit aux élèves des tâches d'un autre type. Les éléments d'histoire, lorsqu'ils sont évoqués, sont à situer dans un contexte précis et une réalité objective. Pour cela, sont généralement donnés des repères temporels et culturels mais aussi certains aspects propres à la méthode historique comme la manière dont une source a été transmise ou mise au jour. Dans la classe, ce travail de nature historique peut apparaître sous diverses formes comme demander aux élèves de lire un texte, d'écouter une histoire, de regarder un film, d'effectuer une recherche documentaire, de débattre, de critiquer une source, etc. La part d'intervention de l'enseignant y est plus ou moins grande mais toutes ces tâches ont en commun de renvoyer principalement à la construction ou l'acquisition de connaissances dans le domaine de l'histoire (ici histoire comme objectif) sans qu'un travail mathématique ne soit indispensable. Par elles, la dimension historique de la séance est rendue explicite. Je qualifie ces tâches d'a-mathématiques (aM) non parce qu'elles ne contiendraient pas de mathématiques, mais en ce qu'elles trouvent leur justification dans les connaissances produites par les historiens.

La mise en évidence, somme toute triviale à première vue, de ces deux premiers aspects mono-disciplinaires (tâches aH et aM) d'une séance de mathématiques comportant des éléments d'histoire permet de rendre compte de la coexistence des deux champs, mais elle n'informe pas encore sur leurs interactions. Une des spécificités des travaux dans le cadre du programme EDUHM est justement d'aller plus loin que cette juxtaposition disciplinaire pour cerner les lieux dans lesquels mathématiques et histoire interagissent. L'analyse des différentes tâches proposés aux élèves sur un corpus de plusieurs séances a permis de mettre en évidence l'existence d'un troisième type de tâches, spécifique (S) à ce genre d'activités. Ce type de tâche n'est ni purement mathématique, ni purement historique mais il contribue à tisser des liens vers l'un et l'autre des deux domaines. Bien plus, ce sont les deux domaines qui justifient la possibilité de l'existence même de ces tâches S. La justification dont je parle ici est de nature didactique. En effet, pour n'en donner qu'un exemple, l'utilisation d'un instrument ancien (d'une simple corde à des objets plus techniques comme le carré géométrique ou le bâton de Gerbert par exemple) ne trouve son sens dans une situation de classe que parce qu'elle articule une origine épistémologico-historique réelle et la mise en œuvre de notions mathématiques pertinentes pour les élèves (entre-autre par leur conformité aux programmes). En l'absence de l'un ou l'autre des domaines d'appui, la tâche elle-même ne saurait exister en classe tant relativement aux objectifs d'apprentissage que dans son acceptation comme légitime par les élèves. Ceci m'amène à exploiter rapidement la typologie SaMaH (acronyme formé par les trois types de tâches S, aM et aH) pour distinguer la situation scolaire d'autres lieux où peut apparaître l'histoire des mathématiques. Je m'appuierai pour cela sur le diagramme synthétique (Figure 3) ci-dessous qui reprend les trois types de tâches (repris de De Vittori, 2015).

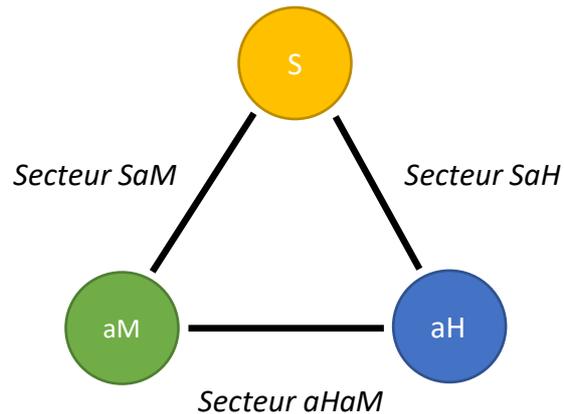


Figure 3 : Typologie SaMaH et domaines associés

Dans les expérimentations et pratiques ordinaires qui ont pu être étudiées dans EDUHM, les trois types de tâches sont présentes dans des proportions variables mais elles visent le plus souvent à former un tout. Dans le cas contraire, on peut interroger le triptyque S, aM, aH lorsqu'un des éléments manque. On peut distinguer alors trois secteurs SaM, SaH, et aMaH qui permettent de pointer, en creux, les enjeux de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe, tout du moins, telle qu'elle a été présentée jusqu'ici. Comme j'ai pu le développer dans De Vittori (2015), on peut analyser successivement chacun de ces trois secteurs. Je propose ici un tableau synthétique.

Secteur	Pôle manquant	Caractérisation possible
SaM	aH	L'activité est déconnectée des objectifs mathématiques scolaires.
SaH	aM	L'activité est décontextualisée et les apports historiques sont absents.
aMaH	S	Les activités de ce type présentent des éléments à dimension historique simplement juxtaposés à un exercice de mathématiques.

Dans les trois cas qui sont rappelés dans le tableau, les tâches S soit n'existent pas, soit sont fortement affaiblies par l'absence de l'un des domaines qui lui donne sa signification. Les tâches S visant à articuler spécifiquement mathématiques scolaires et apports historico-épistémologiques, elles requièrent, par définition, l'existence de ces deux autres pôles. On pourra remarquer néanmoins que, sous réserve de quelques adaptations, le secteur SaM caractérise des activités déconnectées des enjeux de l'école mais dont la pertinence pourrait se justifier dans un contexte de vulgarisation scientifique (Fête de la Science, Journées du patrimoine, ...) comme le développe Rougetet (2019).

Le triptyque SaMaH constitue un premier niveau de lecture d'une activité de classe à support historique. Dans le cadre d'EDUHM, les tâches S sont spécifiques dans le sens où elles n'existent que par cette mise en contact de deux domaines distincts dans une visée de recul épistémologique. Il s'agit là d'un choix qui s'inscrit dans la démarche qui a été présentée dans le début de cette note de synthèse. D'autres approches sont bien entendu possibles. Par exemple, Chorlay (2016) les considère, au contraire, comme non-spécifiques et il rapproche ces tâches de compétences transversales ou métacognitives. Chorlay les appellent d'ailleurs des tâches M (M-tasks) car, selon lui, « les élèves doivent faire quelque chose en référence à,

ou à propos d'un élément de mathématiques ; quelque chose qui ne se limite pas à agir sur ou dans les mathématiques concernées (notre traduction). » Toutefois, un peu plus loin, il précise que « l'utilisation d'un document historique comme matériau brut d'enseignement, d'une part, et le fait de confier des tâches M aux élèves, d'autre part, présentent un lien particulier (notre traduction). » Or c'est bien ce lien particulier qui constitue le cœur de la recherche EDUHM dont je vais présenter maintenant l'un des principaux développements par l'application d'un modèle éprouvé en didactique des mathématiques, le modèle cK ζ de Nicolas Balacheff. Je reviendrai sur l'intérêt d'une approche taxonomique telle qu'initiée dans SaMaH lors de la présentation des perspectives de recherche à la fin de ce chapitre.

Le modèle cK ζ de Balacheff et les relations épistémologiques passé-présent

Ce paragraphe reprend des travaux qui ont fait l'objet d'une publication dans la revue internationale *Educational Studies in Mathematics* (De Vittori, 2018) et reprend, pour partie, une présentation qui en a été faite dans le cadre du colloque *Espace Mathématique Francophone* qui s'est déroulé à Gennevilliers en 2018.

Par l'appel à l'histoire dans une séance, ce domaine amène avec lui une épistémologie des mathématiques différente : celle de la période passée considérée. L'usage de l'histoire des mathématiques dans le contexte scolaire justifie alors l'extraction d'une partie épistémologique de cette histoire non dans le cadre d'une pratique historienne, mais afin d'élaborer une nouvelle entrée didactique. La lecture d'une source historique est toujours en soi un choix. En effet, comme le rappelle Alain Herreman (2000) dans sa recension de l'ouvrage de Catherine Goldstein *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, « [l'autrice] considère que ces choix, ainsi que la signification attribuée aux textes, leur identité et les réseaux de relation dans lesquels ils sont inscrits sont indissociables : le sens, ou les lectures que les historiens font des textes sont pour elle inséparables des histoires qu'ils proposent, comme les lectures qu'en font les mathématiciens sont inséparables des développements qu'ils en proposent (reprise, généralisation, nouvelles preuves, autres théories, etc.) » Lors de l'utilisation d'un document ancien en classe, on en propose une autre lecture. Cette lecture est didactique dans le sens où il s'agit bien de produire une situation d'enseignement à partir du contenu mathématique du texte. L'objectif est alors une modification locale (à l'échelle de l'activité, voire de la tâche) de l'épistémologie des mathématiques à laquelle seront confrontés les élèves. Il y a là, comme le pointe Barbin (2011), une forme de dialogue entre le passé et le présent. Pour plusieurs auteurs, cette conception dialogique de l'histoire des mathématiques trouve par ailleurs son appui dans la pensée du théoricien de la littérature Mikhail Bakhtin (Barbin, 2014). Guillemette (2019), résume ainsi cette forme de dialogisme en expliquant que, pour Bakhtin, « chaque énoncé d'un discours est nécessairement une réponse à un autre énoncé dans une sphère de communication verbale donnée. Ce concept de sphère de communication de la parole est important car il détermine la condition même du dialogue dans lequel la parole s'inscrit intrinsèquement. (notre traduction). » Guillemette rapproche alors cette idée de dialogue et la thématique du dépaysement épistémologique qu'il a lui-même développé dès ses travaux de thèse (Guillemette, 2015, 2017). Dans le domaine de l'histoire des sciences, il est désormais acquis que, ainsi que le souligne Rabouin dans une récente conférence⁹⁰, la lecture d'un texte doit prendre en compte le contexte de sa réception et en particulier, cela inclut notre propre

⁹⁰ Journées *Circulation : Mathématiques, histoire, enseignement*, Université de Nantes (26-27 mai 2016) <https://mediaserver.univ-nantes.fr/permalink/v1261a0a28addunyalpw/> (vers 12min, consulté le 25/01/2022)

réception. Ces réflexions s'appliquent naturellement en classe où les élèves sont amenés à s'approprier des mathématiques anciennes dans toute leur complexité et ce en particulier au travers de conceptions qui peuvent différer très largement de celles rencontrées dans le contexte scolaire contemporain. C'est justement sur une analyse au niveau des conceptions que portent mes travaux dans le cadre du modèle cK Σ de Balacheff.

Le cadre théorique dans lequel le didacticien Nicolas Balacheff travaille est la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau (1998) avec pour projet le rapprochement de l'intelligence artificielle et de la didactique des mathématiques afin d'améliorer la conception des environnements d'apprentissage informatisés (Balacheff, 2013). L'intérêt d'un tel modèle pour notre étude sur l'histoire dans l'enseignement des mathématiques réside dans le fait que la réflexion de Balacheff se situe à un niveau épistémologique. Cherchant à étendre les apports de Vergnaud (1990) sur les champs conceptuels, l'idée principale de Balacheff est un nouveau travail sur les conceptions qu'il définit comme un « état d'équilibre dynamique d'une boucle action / rétroaction du système » (Balacheff & Margolinas, 2005). Les actions sont ce que l'apprenant fait (ou peut faire) et les rétroactions soulignent la manière dont tout ce avec quoi l'apprenant est en contact (contenus matériels mais aussi les relations avec les autres étudiants) lui donne une information en retour. Dans ce contexte, la conception doit être comprise comme une connaissance locale d'un apprenant dans une situation spécifique. Balacheff la définit comme un équilibre dynamique car elle est construite sur des boucles d'actions et de rétroactions qui pourraient, à chaque moment, déstabiliser les connaissances de l'élève. Jusqu'ici, tout ce qui vient d'être présenté est déjà, d'une certaine manière, dans la TSD de Brousseau. Ce qui est nouveau chez Balacheff apparaît lorsqu'il fait de la conception une notion opérationnelle (pour l'apprentissage par ordinateur par exemple). Voici la caractérisation qu'il propose :

Une « conception » est caractérisée par un quadruplet (P, R, L, Σ) composé de :

P : un ensemble de problèmes

R : un ensemble d'opérateurs

L : un système de représentation

Σ : une structure de contrôle. (Balacheff & Margolinas, 2005)

P, l'ensemble des problèmes, est directement inspiré par le contexte épistémologique de la TSD. Selon Brousseau, et donc pour Balacheff, une connaissance mathématique est élaborée comme une réponse à un problème ou une catégorie de problèmes, une partie du travail du mathématicien résidant dans l'identification des problèmes qui peuvent être résolus de la même manière, c'est-à-dire avec les mêmes outils conceptuels. Ainsi, l'ensemble de problèmes est ce qui donne à une conception son sens et son utilité. R, l'ensemble des opérateurs, vise à rendre compte de toutes les techniques qui permettent la transformation du problème. En effet, lors de la résolution d'un problème, il convient généralement de modifier la situation initiale, étape par étape, pour la rendre finalement compatible avec un théorème connu ou une procédure de calcul. Dans l'analyse d'une conception, l'ensemble des opérateurs contient donc toutes les procédures mathématiques disponibles pour l'apprenant. Le troisième item du quadruplet, le système de représentation L, est peut-être le plus simple des quatre car il fait référence à la façon dont un problème est présenté. Le dernier point est Σ , la structure de contrôle. Comme l'explique Balacheff (2013), c'est quelque chose qu'il introduit afin de rendre visible ce qui est en jeu lorsque l'élève identifie à quel point il est proche de la solution. En d'autres termes, chaque fois que quelqu'un résout un problème mathématique, consciemment ou non, il utilise des éléments qui l'aident à contrôler ce qui

est fait. Le modèle ainsi présenté est appelé $ck\varnothing$ par son concepteur et chacune des trois lettres est soigneusement définie. Le nom $ck\varnothing$ vient des trois piliers du modèle : conception (conception en anglais), savoir (Knowledge en anglais), concept (concept en anglais). Le savoir K désigne une conception qui est identifiée et formalisée par une institution (Balacheff, 2013). Quant à \varnothing , le concept, c'est l'ensemble de toutes les conceptions ayant un même objet, ce qui n'est pas sans rappeler les éléments philosophiques qui ont été présentés dans le premier chapitre de cette note. Il est important de noter que ce processus est avant tout ascendant car l'entrée principale reste la conception au niveau des élèves. $ck\varnothing$ est un modèle qui fonctionne *in fine* à un niveau épistémique et c'est en cela qu'il peut convenir à une analyse de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques, tout particulièrement lorsque la visée est le recul épistémologique. L'analyse détaillée de plusieurs activités de classe (De Vittori, 2018) permet de positionner chacun des domaines dans le modèle. Je reprends ci-dessous (Figure 4) l'exemple d'une activité réalisée en classe de sixième dans laquelle les élèves ont retravaillé l'écriture des grands nombres (classe des millions) au travers de l'utilisation de quipus incas (système de nœuds sur des cordelettes).

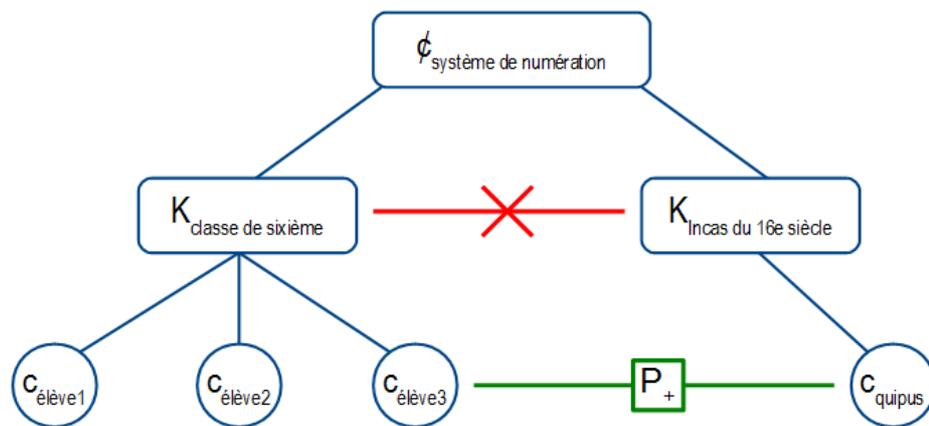


Figure 4 : Application du modèle $ck\varnothing$ à une activité historique en classe

Les élèves de sixième ne peuvent pas vivre ce que les anciens Incas vivaient car pour ce faire, ces élèves du 21^e siècle devraient complètement oublier ce qu'ils ont appris depuis leur naissance. Dans le modèle de Balacheff, le niveau K des connaissances doit être pris dans un sens contextuel, c'est-à-dire les connaissances d'une communauté donnée et ce dans un temps donné. Pour notre sujet, cette limitation structurelle signifie que les connaissances mathématiques utilisées dans une classe de sixième ne peuvent être directement enrichies par celles des Incas, ce qui est symbolisé par la croix rouge dans le diagramme. Le bon niveau consiste dans une analyse des conceptions. De nos jours, dans toute classe, sur n'importe quel sujet mathématique, de nombreuses conceptions ($C_{\text{élève1}}$, $C_{\text{élève2}}$, etc.) peuvent être mises en jeu par les élèves. La principale spécificité de l'utilisation de l'histoire est l'addition d'un nouveau quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel apparaît une distance plus ou moins grande avec les conceptions contemporaines. Dans le modèle $ck\varnothing$, problèmes et conceptions sont profondément liés. Comme cela a été rappelé au début de ce paragraphe, le travail de Balacheff prend appui sur la TSD de Brousseau dans laquelle la connaissance mathématique est une réponse à certains problèmes. Pour Balacheff (2013), les relations entre les problèmes et les conceptions sont multiples ; un problème pouvant activer, renforcer, déstabiliser ou simplement se rapporter à une ou plusieurs conceptions. Ces possibilités sont typiquement celles qui sont utilisées dans les séances alliant mathématiques et histoire. Les conceptions

empruntées au passé sont mises en contact avec les élèves par l'introduction d'un nouveau problème P_+ (Figure 4) comprenant des tâches nouvelles (comme faire des nœuds sur des cordes ou lire un texte ancien). P_+ crée un pont entre les conceptions contemporaines des élèves et celles issues du passé. Notons que pour qu'elles prennent sens pour les élèves, les conceptions dans lesquelles P_+ se situe doivent renvoyer à un même ensemble de problèmes, ce qui est souvent assuré par l'existence du concept au niveau \mathcal{g} . Ainsi, dans l'exemple précédent, le problème P_+ fait partie de deux types de conceptions avec d'un côté celle induite par la source historique ($P_+, R_{hist}, L_{hist}, \Sigma_{hist}$) et de l'autre son sens scolaire contemporain ($P_+, R_{cont}, L_{cont}, \Sigma_{cont}$). De fait, une nouvelle conception (c_{quipus} dans notre exemple, Figure 4) rejoint l'ensemble des conceptions utilisables par l'élève et permet ainsi un enrichissement des connaissances associées ($K_{classe\ de\ sixième}$ dans notre exemple).

Quelle que soient les raisons et les modalités choisies par un enseignant pour introduire l'histoire des mathématiques en classe, ce qui est appris par les élèves reste toujours son souci premier. Les études sur des pratiques réelles à l'aide de modèles comme $cK\mathcal{g}$ créent un zoom sur une forme de spécificité difficilement définissable mais communément reconnue intuitivement par les enseignants et autres praticiens. Cette zone grise est exactement celle sur laquelle la recherche doit se concentrer. Ainsi, dans une activité mêlant mathématiques et histoire, on peut se demander où apparaît chaque domaine (la question « où ») et quelles connaissances sont réellement impliquées (la question « quoi »). « Où » est ici autant une question spatio-temporelle (Où l'histoire apparaît-elle dans l'activité ? Au début ? À la fin ? Entre les deux ?) qu'une question conceptuelle (Au cours du processus d'apprentissage, où l'histoire est-elle mise en jeu ?). Un tel questionnement peut être considéré comme la version micro de la catégorisation « hows and whys » de Jankvist (2009). Le « quoi » est sans doute la question la plus importante car elle est centrée sur l'acquisition de connaissances mathématiques par les élèves. C'est donc une question didactique et c'est précisément celle que je développe dans mes recherches. Ces dernières s'inscrivent par ailleurs pleinement dans les réflexions à l'échelle internationale que je vais présenter succinctement maintenant.

2.5 Dans le contexte international

La question de l'enseignement des mathématiques, en général, est aussi ancienne à l'échelle internationale qu'en France. De nos jours, la grande majorité des acteurs dans ce champ se retrouve dans l'International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) et ses diverses actions. ICMI est créée dès 1908 et dans ce collectif, la thématique de l'histoire apparaît très tôt au travers du sous-groupe History and Pedagogy of Mathematics (HPM)⁹¹. Voici ce qu'on peut lire sur la page de présentation du groupe sur internet⁹² :

By combining the history of mathematics with the teaching and learning of mathematics, HPM is the link between the past and the future of mathematics. Therefore, the group aims at stressing the conception of mathematics as a living science, a science with a long history, a vivid present and an as yet unforeseen future. Among members of the group are researchers in mathematics education, mathematicians, historians of mathematics, teachers of mathematics and curriculum developers.

⁹¹ L'intitulé complet est *International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics*.

⁹² <http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/about%20HPM.htm> (consulté le 26/01/2022)

Cette définition du groupe HPM présente trois composantes qu'il est important de souligner pour bien comprendre l'activité scientifique qui en découle. La première réside dans le lien entre le passé des sources historiques et le présent de l'enseignement des mathématiques. C'est évidemment consubstantiel à la thématique choisie mais on peut noter que cela prône aussi une certaine forme de continuité, ou tout du moins une résonance, entre les mathématiques du passé et celles du présent. Comme dans le cas des IREM en France, cette posture trouve sa réalisation dans le deuxième aspect de la définition d'HPM dans laquelle l'accent est mis sur des enjeux épistémologiques. En effet, par l'histoire dans l'enseignement, il s'agit bien de réfléchir sur la nature des mathématiques, ses objets, ses méthodes, etc. Le parallèle avec les IREM n'est pas anodin car dans leur article retraçant l'histoire d'HPM, John Fauvel et Florence Fasanelli situent la naissance du groupe vers 1972 (Fauvel & Fasanelli, 2006). Ils citent également en introduction des premières publications dans le monde anglo-saxon dès 1969. Cette période 1969-1972 correspond, comme en France, à la naissance du courant des mathématiques modernes (new maths) avec toutes les conséquences sur l'enseignement qui ont pu en découler. La structuration du groupe HPM est concomitante avec la mise en place de la commission inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques. Les acteurs français de l'époque, dont en particulier Evelyne Barbin⁹³, joueront alors un rôle moteur sur cette nouvelle scène internationale. Ajoutons qu'encore actuellement⁹⁴, la France est très présente au sein d'HPM où elle contribue activement à la vie scientifique de ce collectif. La troisième et dernière composante de la définition d'HPM est son ouverture à plusieurs types de spécialistes. En lien avec l'histoire, les mathématiques et l'éducation, HPM voit se rencontrer à la fois des chercheurs de ces trois domaines ou d'autres connexes, mais aussi des enseignants et futurs enseignants, des formateurs d'enseignants, des cadres de l'éducation, etc. Il s'agit là d'une particularité qui n'est pas sans conséquence sur ce qu'on doit inclure sous l'appellation d'activité scientifique du groupe, point sur lequel je reviendrai dans le troisième chapitre de cette note. Quoi qu'il en soit, tous ces acteurs se retrouvent lors d'événements réguliers comme les ICME Satellite Meetings of HPM (tous les quatre ans depuis 1984 à l'occasion de International Congress on Mathematical Education), l'European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education (tous les trois ans depuis 1993), la publication de l'HPM Newsletter (trois fois par an), et des présences dans d'autres congrès comme à ERME (European Society for Research in Mathematics Education) par exemple. Au niveau mondial, les publications sont donc très nombreuses et pour mieux les appréhender des synthèses sont régulièrement réalisées par la communauté. Publiées sous forme d'ouvrages collectifs volumineux, ces synthèses offrent un panorama assez complet de l'état du domaine à un instant donné. Pour n'en prendre que deux situées sur la longue période où se sont développés ces travaux, on pourra citer *History in mathematics education: The ICMI study* (Fauvel & van Maanen, 2000) et le récent *Mathematics, Education and History: Towards a Harmonious Partnership* (Clark et al., 2018). Le premier ouvrage a eu impact fort car on y trouve explicitées de nombreuses questions fondatrices quant à l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement. Ainsi, dans cette étude ICMI de 2000, Tzanakis et ses collaborateurs distinguent trois types d'approches A, B, and C.

⁹³ Evelyne Barbin a été présidente d'HPM sur la période 2008-2012 ; l'actuelle présidente pour le mandat 2020-2024 est Snezana Lawrence (UK).

⁹⁴ Pour le mandat actuel 2020-2024, le comité exécutif d'HPM comprend cinq membres : Evelyne Barbin (France), Ewa Łakoma (Poland), Frédéric Métin (France), Luis Puig (Spain), Michael N. Fried (Israel).

- A. En donnant des informations historiques directes (apprentissage visé : histoire)
- B. En mettant en œuvre une démarche pédagogique (explicite ou implicite) inspirée par l'histoire (apprentissage visé : mathématiques)
- C. Se concentrer sur les mathématiques en tant que discipline et sur le contexte culturel et social dans lequel elles se sont développées (apprentissage visé : culture)

Dans l'approche A, l'apprentissage visé est clairement historique, dans la B, ce sont plutôt les mathématiques qui constituent l'objectif, et enfin dans la C, c'est l'ouverture culturelle qui au cœur de l'activité. Comme on peut le voir, ce découpage préfigure les premières classifications didactiques (history as a goal, history as a tool) que Jankvist (2009) réécrira par la suite. Pour suivre tous les développements qui ont lieu dans la communauté HPM, cette dernière s'est dotée d'un site internet dans lequel on peut trouver une recension⁹⁵, régulièrement actualisée, des articles et questionnements produits. Ce document est parfois publié sous la forme d'un chapitre introductif d'ouvrage de synthèse ou dans un article indépendant comme Clark et al. (2019) sur lequel ce qui suit va s'appuyer. À la lumière de quelques décennies de recherche dans le domaine, Clark et al. (2019) résume la problématique au travers de quatre grandes questions :

- Which history is suitable, pertinent, and relevant to mathematics education?
- Which role can the history of mathematics play in mathematics education and with which objective?
- In which way(s) history can serve in educational practice by following which approach(es)?
- How can all this be evaluated and assessed and to what extent and in what sense does it contribute to the teaching and learning of mathematics?

D'une certaine manière, ces grandes thématiques peuvent se résumer en : quoi ? pourquoi ? comment ? et alors ? En ce sens, le questionnement HPM ne diffère pas d'autres champs de l'enseignement des mathématiques ou même de l'enseignement en toute généralité. Il pourrait alors sembler naturel d'y voir apparaître la didactique des mathématiques mais ce n'est pas le cas. Comme dans la commission épistémologie et histoire des IREM, HPM se positionne plutôt hors de la didactique ce qui a un impact sur l'orientation de la production scientifique qui privilégie l'identification de ressources (quoi) et les réflexions prospectives (pourquoi et comment). La question de l'évaluation de la pertinence de l'approche historique (et alors) constitue alors la principale zone d'ombre qu'il convient de souligner. Ceci ne signifie pas qu'il n'y a pas de regard critique de la part de cette communauté. En effet, on notera que chacune des quatre questions offre un côté positif, qui donne des arguments pour l'introduction d'une perspective historique, mais aussi un côté négatif, qui met au jour des difficultés ou limites. Pour n'en donner que quelques exemples rappelés dans Clark et al. (2019), on peut citer des contre-arguments et objections de nature épistémologique comme « Ce ne sont pas des mathématiques ! Le sujet doit être enseigné d'abord et ensuite son histoire », « Les progrès en mathématiques ont permis de résoudre des problèmes difficiles facilement, alors pourquoi prendre la peine de regarder en arrière ? », mais aussi des contre-arguments et objections de nature didactique comme le manque de temps en classe, le manque de formation, le manque de culture des élèves, etc. Les grandes quatre questions sont structurantes mais n'ont pas toutes les mêmes enjeux selon qu'on soit auteur d'une ressource/réflexion ou utilisateur (en classe en particulier). Ce point nous ramène directement

⁹⁵ <http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/HPMinME-TopicalStudy-18-2-16-NewsletterVersion.pdf>

à la question de la place de la didactique dans ce type d'études. En particulier, les conclusions pointées par HPM en 2019 sont ainsi :

- 1) The crucial role pre- and in-service teachers' education has as a necessary prerequisite for the HPM perspective to be realized in practice at all.
- 2) The equally crucial significance of designing, producing, making available and disseminating diverse didactical source material [...]
- 3) The need of systematically and carefully designed and applied empirical research in order to examine in detail and evaluate convincingly the effectiveness of the HPM perspective [...]
- 4) The importance of acquiring a deeper understanding of theoretical ideas put forward in the HPM domain [...]

Je ne reviendrai pas sur les items 1 et 2 qui ne font que reprendre des éléments qui ont déjà été développés précédemment, par contre, les points 3 et 4 apportent des questions nouvelles. Je commencerai par la quatrième au travers de laquelle la communauté appelle de ses vœux des cadres théoriques pertinents pour l'analyse de l'utilisation de l'histoire des mathématiques. Les travaux que j'ai proposés autour de l'utilisation du modèle de Balacheff s'inscrivent pleinement dans cette demande. Le troisième item est sans doute le plus crucial pour décrire où se situe EDUHM dans le paysage international. Plus qu'une simple requête, l'appel à des recherches empiriques qui sauraient évaluer de manière convaincante l'efficacité de l'approche historique est une forme d'aveu d'échec (temporaire). En effet, en dépit de plus de cinquante ans de recherche, aucun résultat n'a permis d'asseoir avec certitude le bienfondé pour les apprentissages des élèves de l'introduction de l'histoire des mathématiques en classe. La posture d'HPM en marge des didactiques explique, en partie, ce manque. Mes travaux dans le cadre d'EDUHM offrent explicitement cet ancrage dans la didactique tant sur le plan théorique que dans la volonté d'étudier les effets réels sur les apprentissages en classe dans des contextes ordinaires. Ceci m'amène aux perspectives de recherche que je vais présenter maintenant et qui vont clore ce chapitre.

2.6 Perspectives

Comme nous venons de le voir au cours de ce deuxième chapitre, la recherche à la fois de cadres théoriques pertinents pour l'analyse didactique d'un enseignement nourri d'histoire des mathématiques et la mise en évidence de résultats empiriques solides restent au cœur des préoccupations de la communauté représentée, entre autres, au travers de HPM et des IREM. On pourra remarquer que dans les deux cas, l'objectif repose finalement sur un double mouvement vertical descendant et ascendant qui vise, d'une part, une meilleure intégration des résultats théoriques de la didactique des mathématiques, voire des didactiques en général, et d'autre part, la production d'expérimentations en classe ou en formation qui fourniront des données empiriques sur les apprentissages des élèves. C'est dans ce double mouvement que vont se poursuivre mes recherches. En particulier, l'un des principaux enjeux de mes travaux antérieurs a été la caractérisation des tâches proposées aux élèves, ces tâches que j'ai qualifiées de spécifiques au sein d'activités qui induisent une rencontre d'autres conceptions historiquement et épistémologiquement situées. Initiée dans la typologie SaMaH et la lecture de séances avec CKZ, l'approche se veut taxinomique. En cela, mes recherches s'inscrivent dans un mouvement, initié dans les années 1950, d'analyses de la complexité cognitive de tâches. Le plus souvent inspirées par celle de Bloom (Bloom et al., 1956 ; Bloom, 1994, Anderson et al., 2001), plusieurs taxonomies ont ainsi déjà fait la preuve de leur

pertinence en permettant, en particulier l'élaboration d'études à grande échelles sur des tâches calibrées comme PISA ou TIMSS. Pour les apprentissages en mathématiques, la taxonomie de Bloom (révisée) comprend six niveaux hiérarchiques de complexité croissante (Se remémorer, Comprendre, Appliquer, Analyser, Évaluer, et Créer) là où celle de PISA⁹⁶ (Formuler, Employer, Interpréter) ou de TIMSS (Connaître, Appliquer, Reasonner)⁹⁷ n'en considèrent que trois. Ces dernières typologies sont moins détaillées, mais cela les rend plus faciles à utiliser dans des contextes d'enseignement parfois très différents à travers le monde. Inversement, la classification de Gras & Bodin (2017), élaborée à partir des premiers travaux de Gras (1979), détaille de manière très précise chaque tâche scolaire en mathématiques en cinq catégories (Connaissance et reconnaissance, Compréhension, Application, Créativité, Jugement) qui se décomposent chacune en deux à six sous-catégories⁹⁸. Ces différents niveaux de détails peuvent permettre d'envisager une analyse fine des tâches mathématiques impliquant de l'histoire. Il y a là un axe de recherche encore très peu exploré. Seul l'article très récent de Agterberg et al. (2021) propose une exploitation d'une taxonomie de complexité cognitive à des activités à supports historiques. Toutefois, l'étude est positionnée avant tout comme un outil pour la formation des enseignants et repose uniquement sur une catégorisation *a priori* des tâches dont la pertinence n'est jamais vérifiée. Les travaux de Gras et Bodin ont, pour leur part, une visée d'opérationnalisation au niveau des acquis des élèves. L'objectif de leur taxonomie n'est pas seulement l'analyse didactique d'exercices, mais la construction de tâches calibrées à l'appui de résultats quantitatifs. Sur la question de l'évaluation, Bodin (2015) précise justement ce lien entre la didactique des mathématiques et les études taxonomiques :

Par analyse didactique d'une question d'évaluation nous entendons :

- L'analyse de la tâche.
- Le repérage de la tâche dans une hiérarchie des niveaux cognitifs telle que celle de Régis Gras.
- La place que le type de tâche correspondant occupe dans l'édifice mathématique.
- L'insertion probable ou possible de ce type de tâche dans un processus d'apprentissage.
- L'assurance que cette tâche particulière optimise l'information qui sera recueillie sur le niveau de maîtrise de ce type de tâche.
- Les précautions concernant l'utilisation de cette tâche en situation d'évaluation, de façon à ne pas perturber le processus didactique et, de préférence à l'améliorer (évaluation formative).

Dans le prolongement de la typologie SaMaH exposée précédemment, mes recherches à venir dans EDUHM s'inscrivent dans le questionnement proposé par Bodin ci-dessus car il s'agit bien, en particulier, d'interroger l'intégration de l'histoire des mathématiques dans contexte ordinaire. Cette intégration doit permettre la création de tâches pleinement pertinentes pour les apprentissages tant au niveau des connaissances mobilisés que de leur inscription par les

⁹⁶ Les niveaux de complexité dans PISA permettent de regrouper un ensemble de compétences (7 ou 8 selon les années). On a alors : Groupe 1 – Reproduction (reproduction, définitions et calculs) ; Groupe 2 – Connexions (connexions et intégration pour la résolution de problèmes) ; Groupe 3 – Réflexion (mathématisation, pensée mathématique, généralisation et insight). Voir le rapport du CNETSCO intitulé *Comparaison PISA – TIMSS* (Bodin, de Hosson, Décamp, Grapin & Vrignaud) <http://www.cnesco.fr/fr/comparaison-pisa-timss/> (vol.1, chap. 2.B).

⁹⁷ Voir le rapport du CNETSCO intitulé *Comparaison PISA – TIMSS* (vol.1, chap. 3.B).

⁹⁸ Par exemple, A Connaissance et reconnaissance A2 du vocabulaire, B Compréhension B4 des procédures, C Application C2 dans des situations familières moyennement complexes, etc. Voir un exemple ici : <https://antoinebodin.files.wordpress.com/2017/07/illustration-usage-taxonomie.pdf>

enseignants dans une progression. Pertinence qui devra être appuyée empiriquement. Ajoutons que les travaux de Gras et Bodin accordent une place centrale aux données quantitatives pour lesquelles ils ont même proposé de nouveaux outils comme l'analyse statistique implicative (Bodin & Gras, 2017). Assez peu présente dans la tradition française de didactique des mathématiques, mes travaux intègrent, et visent à développer, cette dimension quantitative à laquelle je vais consacrer la deuxième grande partie de cette note de synthèse.

DEUXIÈME PARTIE : méthodes quantitatives et questions didactiques

Chapitre 3 : Sur les études quantitatives

Dans ce troisième chapitre et le suivant, je vais m'intéresser à des questions de méthodes et plus particulièrement aux approches quantitatives. Après un rappel sur la place du quantitatif dans la didactique des mathématiques, je présenterai successivement deux études dans lesquelles je mets en œuvre des analyses statistiques sur des pratiques de classe intégrant l'histoire des mathématiques. Ces deux exemples me donneront l'occasion de questionner la taille des échantillons dans le cas spécifique de la didactique. Plus précisément, il s'agira de montrer comment une étude quantitative peut rester pertinente sur des échantillons dont la taille est de l'ordre de celle du nombre d'élèves d'une classe. Cette contrainte sur le nombre d'élèves impliqués dans une expérimentation est très courante en didactique de mathématiques et elle l'est d'autant plus sur la thématique de l'utilisation de l'histoire en classe où n'existe pas de pratique de masse. Les deux études que je vais exposer dans ces derniers chapitres mettent en jeu différentes approches statistiques (analyse factorielle, modèle de Rasch, ...) sur des effectifs qui interrogent ces dimensions de validité et de robustesse. La première ($n = 29$) est une reprise de travaux déjà publiés dont les données me serviront d'appui pour illustrer l'approche par rééchantillonnage. La deuxième étude ($n = 108$), développée dans le chapitre 4, présente une expérimentation dans laquelle j'utilise, entre-autres, un modèle logistique à un paramètre (1PL) pour étudier la pertinence des tâches dans une activité et l'impact sur les apprentissages des élèves. Dans les deux cas, le but est d'objectiver par des indicateurs autres que ceux de l'analyse qualitative certaines des potentialités de l'histoire des mathématiques en classe rappelées plusieurs fois au cours de cette note de synthèse. Enfin, je terminerai par des perspectives de recherches relatives à ces approches quantitatives.

3.1 Sur les résultats en didactique des mathématiques : le cas HPM

Résultats et robustesse en didactique

Comme dans toute science, fût-elle humaine, comme c'est le cas pour la didactique, se pose la question de la définition et la portée des résultats. Sans revenir sur les enjeux didactiques détaillés dans le chapitre précédent, on peut noter la question du transfert de la recherche vers les pratiques d'enseignement est consubstantielle de la définition de la didactique des mathématiques. Douady écrit par exemple⁹⁹ :

La didactique a-t-elle pour le moment des répercussions sur l'enseignement ? La réalisation de processus didactiques conçus à des fins expérimentales implique de vrais élèves, un vrai enseignant, réunis dans une vraie classe. La déontologie laisse une faible marge de manœuvre à l'expérience. Les élèves doivent avoir appris au moins autant que s'il n'y avait pas eu d'intervention extérieure. Ces propositions fabriquées peuvent se révéler fructueuses pour les élèves à leur évaluation. Sont-elles pour autant transposables au système d'enseignement, dans toute sa généralité et toute sa réalité ? Pas de façon évidente, en tout cas.

⁹⁹ Régine Douady, article « Mathématiques (didactique des) », *Encyclopædia Universalis* [en ligne], consulté le 6 décembre 2021. <http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/mathematiques-didactique-des/>

Dans cette partie de sa définition de la didactique des mathématiques, Douady souligne que, à l'image de la plupart des sciences humaines, l'expérience de laboratoire n'existe pas vraiment. En effet, pour étudier des apprentissages scolaires, il convient de se situer dans le système scolaire. Or, comme le rappelle Douady, il n'y a, dans un tel contexte, que peu de place pour expérimenter pour des raisons déontologiques évidentes. L'entrée méthodologique en didactique a donc été très rapidement centrée sur des analyses qualitatives qui peuvent être réalisées dans des situations ordinaires ou dans des expérimentations qui perturbent peu la vie de classe. Toutefois, la faisabilité des recherches didactiques étant ainsi assurée, la question de la portée des résultats reste entière. En 1996, Samuel Joshua fait une proposition de réponse qui, encore de nos jours, est généralement considérée comme satisfaisante. Dans son article intitulé très directement « Qu'est-ce qu'un résultat en didactique des mathématiques ? », Joshua (1996) propose de définir un résultat comme « un bloc qui comprend des analyses de données empiriques saisies dans un cadre théorique explicatif, et c'est ce bloc, et lui seul, qui est doté éventuellement d'une certaine stabilité dans des contextes semblables. » Cette définition peut également être déclinée sous forme de critères et Joshua (1996) suggère alors trois critères :

Critère n° 1 : un résultat en didactique est un bloc composé d'un cadre théorique explicite et de données empiriques ;

Critère n° 2 : à l'intérieur de ce bloc, il est nécessaire que le résultat résiste, qu'il soit stable [...] qu'il résiste aux faits dans des contextes semblables ;

Critère n° 3 : mais pour qu'il soit vraiment considéré comme un résultat, il faut qu'il puisse aussi se dégager notablement du cadre où il a été produit.

Le premier critère est une simple réécriture de la définition. Il est avant tout méthodologique. Son rôle est d'assurer la présence d'un cadre théorique qui va permettre d'interpréter les faits observés en classe. On trouve également cet aspect dans le cas de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe au travers de la demande, adressée par la communauté HPM, de cadres théoriques pertinents. Les critères 2 et 3 posent la question de la généralité. En effet, pour pouvoir avancer qu'on a bien un résultat, il faut pouvoir dépasser d'une part les biais individuels (i.e. avoir le même résultat avec d'autres élèves dans une situation similaire) et d'autre part les biais de contexte (i.e. avoir le même résultat sur d'autres expérimentations). La validation de ces deux derniers critères, assez immédiate pour des études quantitatives, est particulièrement problématique pour les approches qualitatives. Dans ce contexte, quantitatif et qualitatif sont même parfois opposés. Ainsi, par exemple, Artigue (1988) explique que le « paradigme [des études quantitatives] n'est pas celui de l'ingénierie didactique qui se situe, à l'opposé, dans le registre des études de cas et dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse *a priori* et analyse *a posteriori*. » Une très large part des recherches en didactique des mathématiques dans la tradition dite française (Blum et al., 2019) s'inscrit dans cette approche. Avant de revenir à la thématique plus spécifique de l'utilisation de l'histoire des mathématiques, il convient de pointer la présence, depuis une dizaine d'année, d'un questionnement sur la solidité des résultats en didactique (solid findings) à l'échelle européenne. Initiée en 2009 par le comité sur l'éducation de l'European Mathematics Society¹⁰⁰, un travail de mise en évidence de résultats considérés comme stables par la communauté a été entrepris. Publiés entre 2011 et 2016 sous forme d'articles courts destiné à une diffusion large et rapide dans la newsletter de

¹⁰⁰ <https://euro-math-soc.eu/education>

la société, treize textes ont proposé plusieurs résultats stables de didactique des mathématiques. Tous respectent un cadrage, présenté dans le premier article. Ce cadre décline quatre éléments permettant de définir ces solides findings¹⁰¹ :

- result from trustworthy, disciplined inquiry, thus being sound and convincing in shedding light on the question(s) they set out to answer.
- are generally recognised as important contributions that have significantly influenced and/or may significantly influence the research field.
- can be applied to circumstances and/or domains beyond those involved in this particular research.
- can be summarised in a brief and comprehensible way to an interested but critical audience of non-specialists (especially mathematicians and mathematics teachers).

Cette classification est très proche de celle proposée par Joshua. On y retrouve les trois entrées : fiabilité, pertinence au sein de la communauté de recherche, et stabilité. La principale différence, comme a pu le souligner Gueudet¹⁰² consiste dans la présence d'un quatrième critère de communicabilité lié aux missions de l'European Mathematics Society. Ce mouvement de recherche de résultats éprouvés est commun à d'autres disciplines¹⁰³ où sont utilisées plus fréquemment des études quantitatives.

La très faible part des études empiriques dans le champ HPM

Ces réflexions sur la nature des résultats en didactique me donnent l'occasion de revenir sur la production scientifique dans le champ HPM. Une manière de se donner un aperçu de ce qui est proposé au sein de la communauté des personnes intéressées à l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe et en formation consiste à regarder les contenus des actes du principal congrès international, l'HPM ICMI satellite qui a lieu tous les quatre ans. Cette lecture n'a évidemment pas la valeur d'une méta-analyse, mais, comme nous allons le voir, elle permet de cerner quelques grandes tendances. Je m'intéresserai à la période 2000-2016 où ont donc eu lieu cinq congrès. La première chose à rappeler ici concerne la typologie des contributions à ces événements. Comme cela a été souligné dans le chapitre 2 de cette note, la communauté HPM est constituée à la fois de chercheurs et de praticiens. Ceci a un impact fort sur ce qui est considéré comme une contribution valide pour HPM. Dans les faits, on trouve donc pêle-mêle, des réflexions générales sur le domaine, des articles sur des sources historiques, des études d'expérimentations, des propositions d'activités, etc. Les critères de scientificité habituellement utilisés dans la recherche ne s'appliquent pas vraiment pour la communauté HPM prise au sens large.

Le rapide pointage international des types de résultats didactiques que je propose dans ce qui suit considérera donc comme contribution tout article accepté comme tel dans les actes publiés ; c'est-à-dire finalement toutes les entrées, y compris les parties introductives qui contiennent très souvent des réflexions générales assez riches. Sur l'ensemble des actes du

¹⁰¹ <https://euro-math-soc.eu/reports>

¹⁰² Ces travaux ont été présentés par Ghislaine Gueudet dans le cadre du séminaire de l'ARDM les 21-22 janvier 2022 dont la thématique filée pour 2021-2022 porte sur les résultats solides. Ghislaine Gueudet est par ailleurs l'une des membres de la commission qui a élaboré les rapports de l'European Mathematics Society.

¹⁰³ Pour la didactique des sciences, voir en particulier : le « Dossier : pratiques fondées sur la preuve, preuves fondées sur la pratique ? », *Éducation et didactique*, 11-2 (2017) et l'article Hosson, C. de, & Orange, C. (Eds.) (2020). Les résultats des recherches en didactique des sciences et des technologies : Quelle validité ? Et à quelles conditions ? *RDST*, 20.

congrès HPM, on peut dénombrer 399 contributions. Parmi celles-ci, 123 portent¹⁰⁴ sur des activités testées dont 75 en classe avec des élèves et 37 en formation, le plus souvent d'enseignants. On peut d'ores et déjà noter que la production de résultats sur des données empiriques est assez faible. La grande majorité des contributions lors de ces événements présentent des ressources historiques accompagnées parfois d'une réflexion sur l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement. En cela, l'activité du groupe HPM est très semblable au contexte français et, en particulier, aux productions des IREM (priorité donnée aux sources et à la formation). Sur le plan des méthodes, sur les 123 études empiriques, 48 sont de type qualitatives, 13 quantitatives, 8 mixte qualitatives-quantitatives, 54 ne donnent aucune information. Ces données peuvent être complétées par le relevé des effectifs concernées par chaque expérimentation. Toujours sur l'ensemble des 123 contributions, 88 ne précisent pas le nombre d'élèves (ou d'étudiants) contre 35 pour lesquelles cette information est fournie. À de très rares exception près, les études empiriques sont faites à petite échelle (moins de 50 participants). Cette particularité est confirmée par la lecture des 88 articles qui n'explicitent pas l'effectif. En effet, pour ces derniers, il s'agit presque toujours d'une forme de contribution qui consiste en un compte-rendu subjectif d'une expérience de classe ou de formation. Cette expérience est alors relatée comme ayant portée sur « une classe », « un groupe », etc. dont on peut déduire qu'il s'agit d'une vingtaine ou une trentaine d'individus au maximum. Reste les 35 contributions qui présentent une analyse quantitative sur un effectif précisé. Pour la plupart, les données recueillies sont relatives à des questionnaires souvent courts et portant généralement sur la perception de la nature des mathématiques par les élèves (visée culturelle et épistémologique). Les outils statistiques mobilisés sont presque toujours des moyennes rarement accompagnées de contrôles (test de Student, ANOVA, etc.). Une dizaine d'études présentent un pré-test et un post-test.

En appliquant la définition (le bloc cadre théorie – données empiriques) de Joshua aux productions dans la communauté HPM, on ne peut que constater qu'elle met en évidence l'inexistence de résultats didactiques. Constituées majoritairement de réflexions *a priori* sur des potentialités de l'histoire des mathématiques, il est très difficile d'extraire de ces contributions des certitudes quant à la plus-value de cette approche. C'est très certainement ce qui explique la demande insistante d'études empiriques dans ce champ. Comme nous l'avons vu, des contributions relatives à des expérimentations *in situ* existent. Cependant, elles ne présentent généralement aucun cadre théorique, voire aucune analyse de données du tout dans le cas des comptes-rendus subjectifs. Elles entraînent par ailleurs de nombreux biais comme la production de cadre *ad hoc* et/ou d'activités *one shot*. Dans les deux cas, même si l'étude peut par ailleurs être très pertinente et riche, la transférabilité des conclusions est quasiment impossible. Dans ce contexte, les approches quantitatives peuvent donner à voir des stabilités qui échappent à une étude de cas. C'est ce que j'ai commencé à entreprendre dans EDUHM et dont je vais présenter maintenant deux exemples. Ces deux exemples vont me permettre de proposer plusieurs réflexions quant aux méthodes qui peuvent trouver leur place dans des études didactiques.

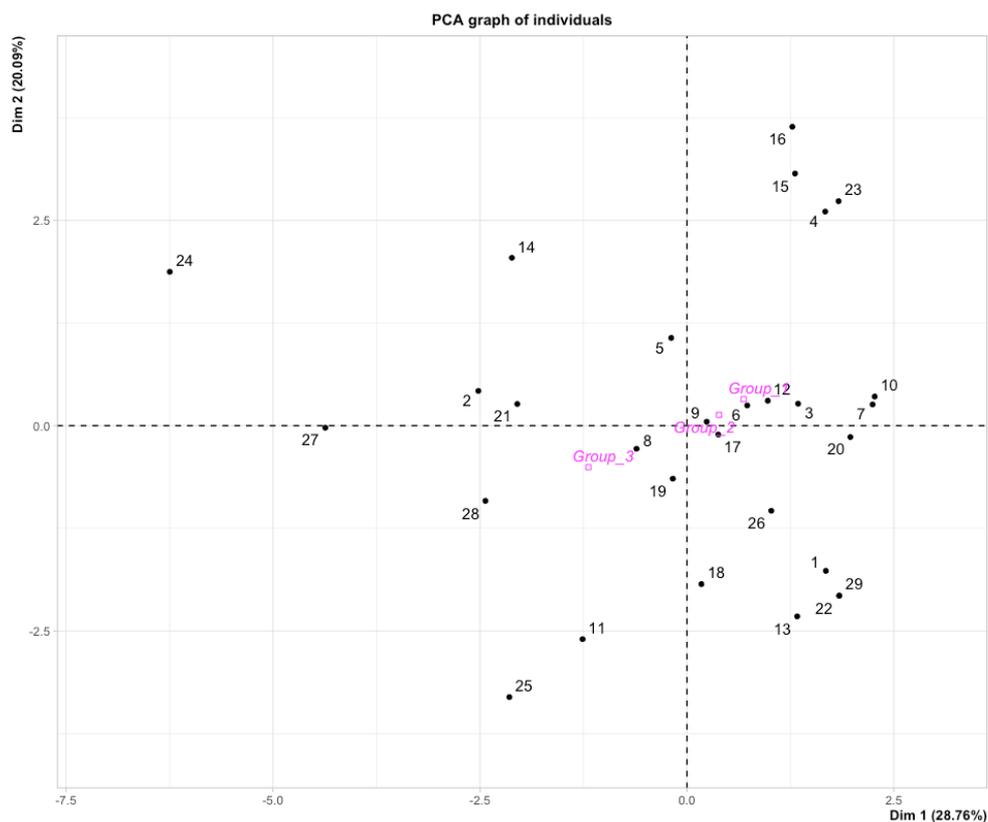
¹⁰⁴ 3 contributions présentent à la fois des contenus pour les élèves et pour la formation, 8 ne précisent pas le niveau concerné.

3.2 Une approche exploratoire par analyse factorielle : l'imaginaire en CM2

Dans cette partie, je vais présenter une activité réalisée avec des élèves de CM2 à partir de la numération babylonienne. Ce qui va suivre reprend des analyses qui ont été publiées en français dans De Vittori & Visentin (2021) et en anglais, avec des résultats statistiques retravaillés, dans De Vittori (2021). La taille de l'effectif dans cette expérimentation étant faible (29 élèves), il me permettra de proposer une réflexion sur la pertinence de certains outils statistiques (ici l'analyse factorielle) sur des petits échantillons de la taille d'une classe et l'intérêt d'une approche par rééchantillonnage (bootstrapping) pour vérifier la robustesse d'un résultat didactique.

Je ne vais pas reprendre en détails les activités proposées en classe car elles font l'objet d'une description complète dans De Vittori & Visentin. Mon propos étant ici avant tout méthodologique, je me bornerai à en rappeler les objectifs de recherche et les résultats. Une des questions que pose l'utilisation de supports historiques, en particulier avec la visée de dépaysement qui a été rappelée au chapitre 2, est de savoir si ce qui fait fonctionner l'activité en classe est majoritairement dû à l'histoire des mathématiques véritable (le passé de l'humanité) ou simplement le côté exotique de certains documents. Dans De Vittori & Visentin (2021), la réflexion s'appuie sur la définition de la notion d'imagination (ou imaginaire) par des psychologues comme Piaget et surtout Vygotsky, et sur la place de cette faculté chez les élèves. Ainsi, afin d'étudier le rôle de l'histoire dans un apprentissage autour de la numération en base 60 (notre système de mesure des durées hérité des Babyloniens), l'activité à destination d'élèves de CM2 a été déclinée en trois versions différentes. Les deux premières comprennent de l'histoire (version 1 et version 2) et la troisième, de contrôle, est sans support historique (version 3). Dans les trois cas, le scénario s'organise autour de trois temps successifs : une activité spécifique à chaque scénario permettant de manipuler la base 60, une série d'exercices décontextualisés commune aux trois versions, et enfin un questionnaire. Les données comprennent au final les résultats des élèves aux différents exercices proposés complétés par un questionnaire à choix multiple construit autour de deux grandes thématiques, la première sur le ressenti des élèves à propos de la difficulté des différents exercices et la deuxième sur le contenu historique de l'activité et sur leur fréquentation de l'Histoire et des mondes imaginaires. Sur ce jeu de données, après vérification de la présence de suffisamment de corrélation inter-items¹⁰⁵, une analyse en composante principale a été réalisée afin de pouvoir projeter les résultats de chaque individu sur un plan. L'objectif est d'utiliser ce plan de projection pour situer les scénarios les uns par rapport aux autres. En particulier, il s'agissait de voir si la nature de l'histoire (réelle ou fictive) avait un impact sur le vécu des élèves. L'analyse statistique montre que ce n'est pas le cas (Graphique 1).

¹⁰⁵ Sur ce point les deux articles De Vittori & Visentin (2021) et De Vittori (2021) diffèrent. Dans le premier, l'indice KMO est faible alors qu'une meilleure sélection des items dans le second permet d'obtenir un indice convenable. Dans les deux cas, les résultats finaux sont les mêmes.



Graphique 1. Projection des individus et des barycentres des scénarios dans le plan factoriel

Bien plus, on constate une proximité très forte des scénarios 1 et 2 dans le premier quart de plan. La conclusion de l'article est donc que la présence d'un récit (d'une histoire) semble plus importante que la nature même de ce récit (histoire savante ou fictive) car les deux premiers scénarios sont indistincts pour les élèves. Le poids de l'imaginaire semble donc être un élément moteur sur lequel s'appuierait, entre autres, une approche des mathématiques par leur histoire.

De nombreuses conclusions pourraient être tirées mais quel crédit accorder à une telle étude portant sur 29 élèves ? 25-30 élèves, c'est à peu près la taille habituelle d'une classe dans notre système scolaire. Sachant la difficulté à implémenter une expérimentation dans plusieurs classes simultanément, une approche quantitative a-t-elle un sens aux échelles à laquelle travaille généralement la didactique ? C'est cette question de l'échantillon-classe et sa réalité statistique que je vais explorer maintenant. Sur ces aspects, je rejoins et reprends une réflexion qui a eu sa place dès les premières recherches en didactique des mathématiques à l'aube des années 1980. À cet époque, Brousseau (2015) avait engagé une réflexion, accompagnée d'actions de formation à destination des enseignants et des chercheurs, sur la place des statistiques dans le questionnement didactique. Plusieurs supports (Brousseau, 1993) de synthèse sur la plupart des outils statistiques usuels (dont les analyses factorielles) ont été produits et commentés ensuite par Brousseau lui-même. Il écrit ainsi dans sa version révisée en 2015 qu'il s'agissait, entre-autre, de pouvoir « observer des événements didactiques et à se poser des questions auxquelles on pouvait tenter de répondre par des procédés statistiques appropriés aux effectifs de deux classes d'un même niveau. » L'enjeu des études statistiques sur de petits échantillons était donc au cœur du projet didactique, en particulier dans une approche comparative (entre deux classes). S'il ne s'agit en aucun cas de céder à l'illusion d'une « méthode qui répondrait directement à une démarche purement

théorique et qui établirait, d'un coup, la validité empirique », Brousseau (2015) insiste sur l'intérêt de concevoir les outils statistiques comme partie intégrante du métier pour les chercheurs en didactique, « un réflexe professionnel, un moyen d'orienter et de perfectionner leurs questions et leurs concepts. »

3.3 Sur la taille des échantillons en analyse factorielle

La question de la taille des échantillons est cruciale dans tous les domaines où les statistiques sont utilisées. En effet, de nombreux biais peuvent apparaître dans le cas d'effectifs insuffisants pour l'analyse visée. Généralement, les ouvrages de statistiques consacrent un chapitre entier à l'exposé des enjeux liés au choix des échantillons. Je ne peux tout évoquer car chaque méthode, test, etc. génère ses propres limitations. Je vais donc m'intéresser dans un premier temps à ce que la littérature suggère uniquement pour les analyses factorielles.

Dans leur ouvrage *A first course in factor analysis*, Comrey & Lee (1992) font une première étude et proposent plusieurs niveaux de fiabilité en fonction des effectifs :

Samples of size 50 give very inadequate reliability of correlation coefficients, whereas samples of size 1000 are more than adequate for most factor analytic purposes. The adequacy of sample size might be evaluated very roughly on the following scale: 50 – very poor; 100 – poor; 200 – fair, 300 – good; 500 – very good, and 1,000 or more – excellent. As a rule of thumb, a minimum of 10 observations per variable is necessary to avoid computational difficulties. (Comrey & Lee, 1992, p.216-217)

Pour ces auteurs, en dessous de 50, voire 100 participants, la fiabilité d'une analyse factorielle est faible. Ils ajoutent par ailleurs (Comrey & Lee, 1992, p.217) que dans le cas d'un travail avec d'autres corrélations (tétrachorique par exemple), il faut en général doubler la taille minimale de l'échantillon. Notons que Comrey & Lee¹⁰⁶ ne disent pas que de telles études ne sont pas réalisables, mais qu'il faut être extrêmement prudent dans ses conclusions si on mène une analyse factorielle sur des jeux de données trop petits. On pourra sur ce point consulter avec profit la longue liste que dressent ces deux auteurs des erreurs communes lors d'analyses factorielles (Comrey & Lee, p.226-228). Une étude sur des petits échantillons n'est donc pas exclue, mais comment en contrôler la validité ? Une réponse donnée par les statisticiens consiste dans une vérification de la constitution des axes factoriels. MacCallum et al. (1999) ont fait une analyse systématique de l'importance des communautés (communalities)¹⁰⁷ et de la taille de l'échantillon. Ils concluent alors :

Our theoretical framework and results show clearly that common rules of thumb regarding sample size in factor analysis are not valid or useful. [...] Most importantly, level of communality plays a critical role. [...]

When communalities are consistently high (probably all greater than .6) [...] Good recovery of population factors can be achieved with samples that would traditionally be considered too small for factor analytic studies, even when N is well below 100.

¹⁰⁶ "In those cases where the investigators have no alternative but to carry out a factor analysis with samples that are too small, they must be especially conservative in their interpretation of the results." Comrey & Lee, 1992, p.217)

¹⁰⁷ Une analyse factorielle fournit, entre autres, deux types d'informations, les communautés (communalities) et les poids (loadings). Le poids est le coefficient de corrélation entre la variable et le facteur. La communauté est simplement de la somme des carrés des poids factoriels pour cet élément.

Ainsi, si les axes de l'analyse factorielle permettent de clairement séparer les variables, la taille de l'échantillon peut être très faible, bien inférieure à 100. Dans la suite de leur article, ils détaillent les cas un peu réciproques où l'effectif est grand mais où les facteurs sont moins clairement définis, ce qui peut intéresser d'autres études. Pour rester sur l'échantillon-classe dont je cherche à mesurer la pertinence, on peut ajouter que Thompson (2004) arrive aux mêmes conclusions que les auteurs précédents. Il va même plus loin en expliquant que si les facteurs sont définis par quatre variables ou plus avec des poids > 0.60 , la taille de l'échantillon n'est pas importante, 60 individus étant potentiellement suffisant. C'est exactement la même conclusion que présente de Winter et al. (2009) dans un article entièrement dédié à l'analyse factorielle exploratoire (EFA, Exploratory Factor Analysis) sur des petits échantillons. Ils écrivent ainsi dès le résumé de l'article :

Simulations were carried out to estimate the minimum required N for different levels of loadings (λ), number of factors (f), and number of variables (p) [...] Results showed that when data are well conditioned (i.e., high λ , low f, high p), EFA can yield reliable results for N well below 50, even in the presence of small distortions.

À la lecture de ces travaux en mathématiques pures ou d'autres du même type (Costello & Osborne, 2005), on peut conclure que, sous réserve d'un contrôle strict de certains indicateurs, l'échantillon-classe qui comprend 25-30 élèves peut avoir une réalité statistique dans le cadre d'études didactiques exploratoires. C'était bien le cas dans l'analyse en composante principale qui a été menée pour étudier l'impact des histoires en classe avec les élèves de CM2 présentée en ouverture de ce chapitre. En effet, pour cette dernière, on peut vérifier (Tableau 2.) que les résultats sur les axes sont plutôt bien en phase avec les préconisations des auteurs précédemment cités, à savoir, peu de facteurs dominants (ici 3 axes, dénombrés par une analyse parallèle), déterminés par des contributions fortes¹⁰⁸ (ici souvent > 0.7) de suffisamment de variables (ici environ 5 et plus sur les deux premiers axes). Les communautés sont aussi généralement élevées (> 0.6).

	PC1	PC2	PC3	comm
Ex1	0.910			0.836
Ex2	0.827			0.695
Ex3	0.861			0.795
DiffEx1	-0.743			0.612
DiffEx3	-0.646			0.560
Docs	0.302	0.409	0.702	0.751
Movies		0.712		0.532
Adventure		0.917		0.843
Strategy		0.758	0.358	0.722
Action	-0.332	0.810		0.788
Books-Comics	0.454		0.532	0.548
Magazines			0.899	0.843

Tableau 2. Analyse en composantes principales des données de l'activité CM2 (De Vittori, 2021). Dans les colonnes PC1, PC2 et PC3, ce sont les poids et dans la colonne comm les communautés.

La vérification des conditions de validité d'une analyse sur un petit échantillon permet de se prémunir de certaines surinterprétations des données. Si un trait statistique est fortement marqué, on peut alors lui accorder une certaine valeur interprétative, au moins à l'échelle de

¹⁰⁸ On considère en général une valeur seuil de 0.3 en dessous de laquelle les variables ne sont pas significatives.

l'échantillon. Il reste néanmoins que l'analyse de données dépend, par nature, de la forme de celles-ci. Je veux dire par là qu'il n'est pas à exclure que l'analyse statistique ait pu porter sur un cas très particulier. Dans les cas simples, la notion d'intervalle de confiance permet de limiter les risques d'erreurs interprétatives. Par exemple, lors de la comparaison de deux moyennes par un test t de Student, la plupart des logiciels fournissent un intervalle de confiance de ladite moyenne. Pour des analyses exploratoires comme celle menée sur la classe de CM2, la détermination d'un intervalle de confiance de la conclusion [le vécu des élèves dans les scénarios 1 et 2 sont proches l'un de l'autre] n'est pas immédiate. Pourtant, elle est possible en particulier grâce à la mise à disposition de tout un chacun d'une puissance de calculs suffisante (un simple ordinateur de bureau) permettant d'utiliser une approche par rééchantillonnage (bootstrapping).

3.4 Stabilité d'un résultat par rééchantillonnage

La méthode par rééchantillonnage repose sur un traitement informatisé des données afin d'estimer la pertinence d'un résultat statistique. Très bien décrit dans l'ouvrage *An Introduction to the Bootstrap* (Efron & Tibshirani, 1993) le processus est en fait très simple.

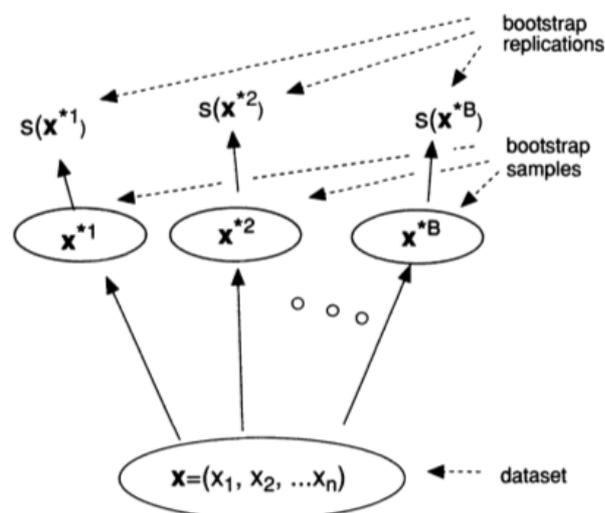


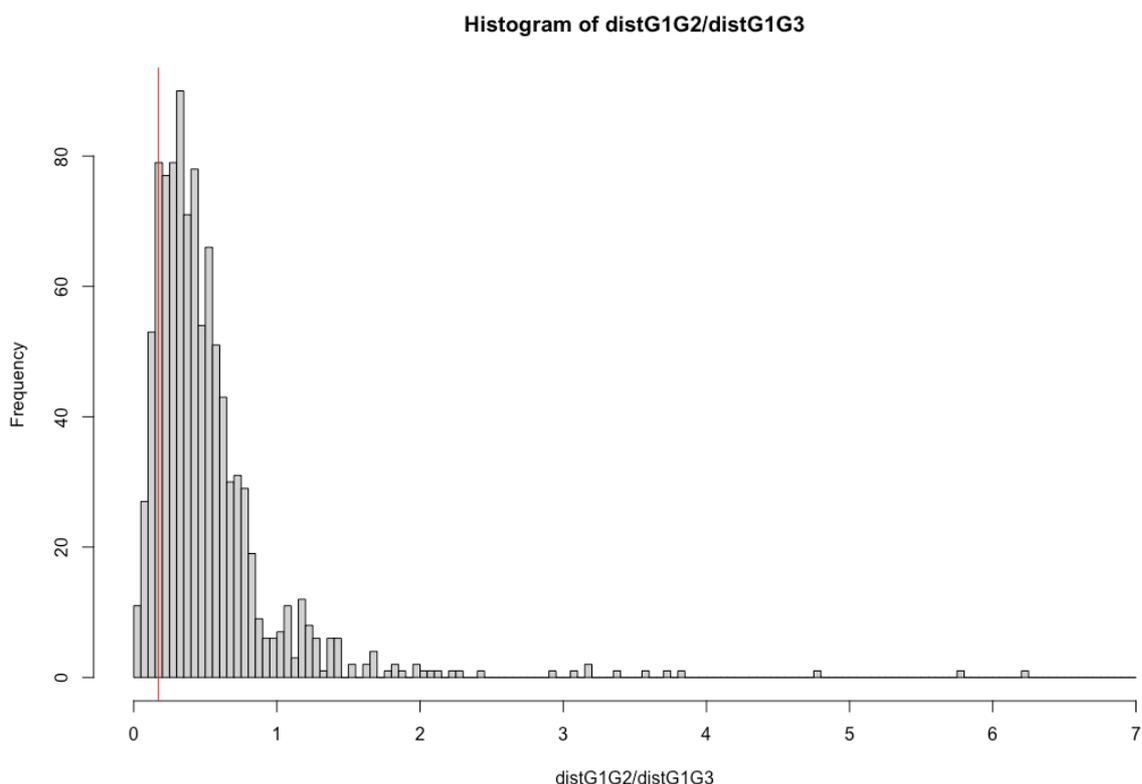
Figure 5. Principe de la méthode par rééchantillonnage (bootstrap).

Figure tirée de Efron & Tibshirani (1993, p.13)

À partir d'un échantillon initial (dataset) x comprenant n données x_i (par exemple, chaque x_i peut représenter les valeurs mesurées pour un élève à un test ou un questionnaire), on construit par un tirage aléatoire avec remise B nouveaux échantillons de même taille que l'échantillon initial (bootstrap samples) x^*_j . Sur chacun de ces B échantillons, on effectue le calcul statistique (bootstrap replications) $s(x^*_j)$ dont on veut vérifier la pertinence. On obtient ainsi B valeurs ou ensemble de valeurs pour la statistique testée. On peut dès lors construire des indicateurs de validité ordinaire comme l'écart type ou l'intervalle de confiance sur ces itérations. Pour que la méthode fonctionne, il faut beaucoup d'itérations. Selon la nature du problème étudié, B compris entre 50 et 200 permet d'obtenir généralement un bon écart type (Efron & Tibshirani, 1993, p.15), mais il faut parfois pousser jusqu'à 500 ou 1000 si on travaille sur une situation complexe ou sur des données dichotomiques (résultats à un test par exemple). Sauf à devoir traiter de très gros volumes de données, la puissance de calcul de tout ordinateur personnel est, de nos jours, parfaitement suffisante pour générer des centaines

voire quelques milliers d'itérations. À titre d'exemple, je vais maintenant appliquer cette approche par rééchantillonnage sur le résultat qui semblait se dessiner dans l'expérimentation des trois scénarios avec les CM2.

Une manière d'interpréter mathématiquement la proximité des scénarios 1 et 2 telle que le suggère l'analyse en composante principale peut consister à étudier la stabilité par rééchantillonnage du rapport r entre [la distance entre le groupe 1 et le groupe 2] et [la distance entre le groupe 1 et le groupe 3]. En effet, « être proche » n'a pas de sens dans l'absolu. Dans le contexte de l'expérimentation, cette expression est liée à une intuition visuelle relative à la distance des barycentres des deux premiers scénarios entre eux par rapport au troisième, ce dernier pouvant être considéré comme le représentant d'une activité autre (sans histoire, présumée quelconque). Sur les données expérimentales initiales, on a un rapport r de 0.172 (rapport inverse proche de 6). C'est-à-dire que les scénarios 1 et 2 sont environ 6 fois plus proches l'un de l'autre qu'ils ne le sont du scénario 3. Pour cet exemple, qui a, je le rappelle, avant tout une visée méthodologique, je ne prendrai pas en compte tous les autres rapports de distance possibles. L'approche serait la même et je présenterai donc uniquement les calculs sur le rapport r précédemment défini. En effectuant un rééchantillonnage sur 1000 cas, et en représentant les valeurs obtenues par un histogramme (pas de 0.05), on obtient le graphique suivant (Graphique 3)¹⁰⁹.



Graphique 3. Valeurs de r pour un rééchantillonnage ($N = 1000$),
en rouge la valeur expérimentale ($r = 0.172$)

Sur la simulation, on constate que le rapport r se concentre autour d'un pic dont la valeur est environ 0.3. Plusieurs méthodes existent pour déterminer un intervalle de confiance lors d'un rééchantillonnage et j'utiliserai ici celle des percentiles ajustés BCa (bias corrected and

¹⁰⁹ Le rééchantillonnage étant une méthode liée à un tirage aléatoire, on obtient à chaque fois des graphiques légèrement différents. Celui donné ici est représentatif de l'allure générale.

accelerated) qui donne l'intervalle [0.0157 ; 0.3339]. On constate alors que d'une part, la valeur initiale 0.172 se trouve bien dans l'intervalle de confiance et que d'autre part r est inférieur 0.34 (donc < 1) avec une confiance de 95%. Le rééchantillonnage confirme ainsi la stabilité de l'analyse en composantes principales. En effet, la valeur de r dans son intervalle de confiance sur ce jeu de données indique que les vécus par les élèves des scénarios 1 et 2 sont bien plus proches l'un de l'autre qu'ils ne le sont du vécu du scénario 3, dans un facteur d'environ 3. Notre valeur expérimentale initiale proche de 6 était peut-être surestimée mais elle reste cohérente avec les jeux de données par rééchantillonnage.

Il ne s'agit évidemment pas de revenir sur le fait que l'étude initiale était exploratoire et non confirmatoire. L'analyse par rééchantillonnage permet surtout de vérifier que les calculs réalisés sont stables sur des données suffisamment semblables. La méthode, d'une certaine manière, simule d'autres classes avec les mêmes élèves, ce qui peut accentuer certains biais si l'échantillon de départ n'est pas représentatif de suffisamment de généralité. Pour un résultat général, on ne peut échapper à un passage à des échantillons de taille plus grande. Ceci n'exclut toutefois pas l'intérêt du rééchantillonnage pour des analyses didactiques sur un échantillon-classe. Par exemple, on pourra remarquer que, dans l'expérimentation avec les CM2, si nos conclusions avaient porté sur une proximité des groupes 1 et 3 (donc un rapport de distance supérieur à 1), il y aurait eu un fort soupçon d'être tombé sur une situation très particulière du type de celles se présentant de manière très marginale dans la partie droite du graphique.

Le travail statistique sur petits effectifs de la taille d'un échantillon-classe est, me semble-t-il, pertinent si on prend soin de bien choisir ses outils et les contrôles de validité associés. Ces méthodes permettent potentiellement d'étayer quantitativement des conclusions didactiques. Parce qu'elles reposent dès lors sur des données quantitatives, les conclusions deviennent vérifiables à la fois en tant que telles (sous réserve de mise à disposition des données dans le cadre d'une science ouverte) et dans le cas d'implémentations dans d'autres classes (sous réserve d'une explicitation claire du protocole, y compris statistique). J'ajouterai qu'en plus de la validité statistique d'un résultat didactique, cette réflexion touche aussi du doigt la question de la réplication des expérimentations en classe. Il s'agit là d'une problématique de recherche naissante dont on pourra suivre les évolutions au travers de publications dédiées comme la très récente revue *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education* (Brill). Il y a là un éventuel changement d'échelle qui m'amène à quitter les études exploratoires pour aller vers des approches apportant des résultats intrinsèquement robustes par un travail sur des échantillons plus larges et par l'appui sur des modèles statistiques. Pour illustrer ces méthodes et leur intérêt didactique, dans le dernier paragraphe de cette note de synthèse, je vais maintenant présenter une étude inédite (De Vittori, soumis) portant sur une activité en cycle 3 à partir d'un système de numération chinois ancien.

Chapitre 4 : Un exemple d'approche par modélisation

Dans ce chapitre, je vais présenter une expérimentation qui a été réalisée à l'automne 2021 auprès de 108 élèves de sixième et dans laquelle l'histoire de la numération chinoise est utilisée. L'objectif didactique de cette étude est d'évaluer la pertinence de l'approche par des systèmes de numération anciens, très courante dans les manuels scolaires. À l'appui d'une analyse statistique, il s'agira de valider trois hypothèses qui font écho aux questionnements exprimés par la recherche internationale dont nous avons largement rendu compte dans les chapitres précédents. Je cherche ainsi à montrer d'une part que l'histoire des mathématiques permet de créer des tâches pertinentes de difficulté variable (hypothèse 1) et que ces tâches s'articulent autour de compétences mathématiques précises (hypothèse 2), et d'autre part qu'une plus-value possible de l'histoire de mathématiques est de permettre aux élèves en difficulté de valoriser leurs compétences et de fournir aux élèves les plus en réussite de nouveaux défis (hypothèse 3). Ce qui suit est une présentation en français d'un article actuellement soumis (De Vittori, soumis). La conception de l'expérimentation a été faite conjointement avec Marie-Pierre Visentin (maîtresse-formatrice en CM2) et Gaëlle Louaked (professeure de mathématiques en collège). L'implémentation a eu lieu dans l'établissement de Gaëlle Louaked, dans quatre classes de sixièmes, dont la sienne. Il convient ici de souligner l'importance du travail avec les enseignants *de terrain* qui, outre de permettre aux didacticiens d'accéder aux classes et aux élèves, contribuent à l'élaboration de questionnements pertinents sur les apprentissages mathématiques. Pour tout ce qui concerne cette expérimentation, j'emploierai donc de préférence le « nous » pour décrire les actions menées.

4.1 Contexte : les numérations anciennes dans les manuels de 6^e

En écho avec des pratiques de classe dont les IREM se font, depuis quelques décennies, les relais (Hocquenghem et al., 1982 ; Moyon & Tournès, 2018) et en réponse à une demande institutionnelle¹¹⁰ d'introduction d'éléments d'histoire des mathématiques en classe, les numérations anciennes sont devenues une forme de standard du cycle 3. En effet, cette entrée historique se retrouve désormais dans la plupart des manuels de sixième comme le montre une recension récente effectuée sur 22 manuels de sixième publiés entre 2005 et 2021. Dans ces ouvrages, sans compter les pages ou encarts documentaires, nous avons dénombré pas moins de 33 exercices portant sur différents systèmes de numération anciens dont la numération hiéroglyphique égyptienne (10), la numération romaine (9), la numération cunéiforme babylonienne (7), les numérations chinoises et sino-japonaises (5), la numération maya (1) et la numération grecque (1). Dans la plupart des cas, les exercices sont joliment illustrés et mettent en avant l'ère civilisationnelle concernée. Seuls 8 manuels ne présentent aucune évocation des numérations anciennes. Mais au-delà de l'apport culturel qu'elle peut représenter, cette présence de nombreux systèmes de numération anciens dans des exercices scolaires est avant tout liée à l'enseignement des mathématiques. En effet, ces anciens systèmes de représentation des nombres peuvent être associés, d'une part, à des objectifs d'apprentissages propres à notre système de numération et aux difficultés qu'il présente aux

¹¹⁰ « La mise en perspective historique de certaines connaissances (numération de position, apparition des nombres décimaux, du système métrique, etc.) contribue à enrichir la culture scientifique des élèves. » Programme du cycle 3, n°31 du 30 juillet 2020.

élèves et, d'autre part, au rôle qu'on fait jouer à l'histoire dans l'enseignement des mathématiques. Pour le premier aspect, les enjeux didactiques sont désormais bien identifiés comme on peut le lire dans des synthèses internationales telles que l'étude *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades* de l'ICMI¹¹¹ (Bartolini Bussi & Sun, 2018) ou le rapport sur *Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire* du CNESCO¹¹² (Chesné & Fischer, 2015). Ces synthèses relèvent en particulier, l'importance de la construction des premières quantités (par collections équipotentes) et de la règle d'échange (un pour dix pour les groupements dans les systèmes positionnels), mais aussi le rôle des mots (différence de construction entre la numération orale et la numération écrite), du contexte culturel (présence d'une pratique sociale ou non), etc. Pour le deuxième aspect, là aussi il existe désormais une certaine forme de consensus sur la place de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques (Fauvel & Van Maanen, 2000 ; Clark et al., 2018). Parmi les interactions possibles entre l'approche historique et la classe, on peut rappeler un rôle possible de remplacement (d'une autre activité), de dépaysement pour les élèves, d'éclairage culturel, mais aussi des distinctions comme l'histoire vue comme outil ou comme objectif d'apprentissage en soi, ou encore le choix d'apports historiques directs ou d'une construction de séance seulement inspirée par l'histoire, etc.

4.2 Principaux enjeux didactiques sur la numération et le calcul posé

Comme le rappellent Bartolini Bussi et Sun (2018) dès l'introduction de l'étude internationale ICMI évoquée ci-dessus, les nombres entiers et les premiers éléments d'arithmétique constituent le fondement de l'apprentissage des mathématiques¹¹³. Enseignés dès l'école maternelle, les nombres entiers sont progressivement maîtrisés à l'école primaire pour pouvoir servir de socle aux notions et méthodes qui seront vues dans le secondaire et après. Pourtant, en dépit de cette importance reconnue à ces premiers apprentissages et du temps qui peut y être consacré en classe, il n'en demeure pas moins que la maîtrise de notre système de numération n'est pas aisée pour les élèves. Comme on peut le lire dans le rapport du CNESCO (Chesné & Fischer, 2015), « les grands nombres entiers, c'est-à-dire ceux auxquels les élèves ne peuvent plus associer une collection d'objets, constituent une difficulté pour une proportion importante d'élèves en fin d'école primaire » ; difficulté associée généralement à « [...] une conceptualisation insuffisante des nombres décimaux, voire des nombres entiers. » Il y a donc là des enjeux didactiques que la recherche n'a pas manqué d'explorer. En particulier, Houdement et Tempier (2019) expliquent que la compréhension des nombres en unités, dizaines, centaines, etc. a été très tôt vue comme un levier d'apprentissage et comme un révélateur de la maîtrise des élèves. Qu'elles soient appelées multi-unités (Fuson, 1990), unités de nombre (Houdement & Chambris, 2013) ou unités de numération (Chambris, 2008, 2018 ; Houdement & Tempier, 2015), ces décompositions du nombre existent dans la désignation orale mais n'apparaissent pas explicitement à l'écrit, ce qui crée un décalage que certains élèves peinent à gérer. Cette difficulté est alors persistante tout au long de la scolarité, accentuant l'échec des élèves concernés tant sur les tâches de numérations (Tempier, 2013, 2016a, 2016b ; Chambris et al., 2017) que sur les calculs ou la résolution de

¹¹¹ International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), www.mathunion.org/icmi

¹¹² Centre National d'Études des Systèmes Scolaires (CNESCO), www.cnesco.fr

¹¹³ "WNA and related concepts form the basis of mathematics content covered in later grades. WNA in primary school lays the foundation for secondary school. It is one of the goals of education for all and a part of the UN Global Education First Initiative (UNESCO)." Bussy & Sun, 2018, p.5

problème (Chesné & Fischer, 2015). Il s'agit là évidemment de la clé principale de notre système de numération où le passage d'un rang à l'autre se fait par groupement de 10 représentants d'une unité de numération (par exemple dizaine) en 1 seul représentant de l'unité de numération supérieure (par exemple centaine). Ce fonctionnement en base 10 est aussi le point d'appui des algorithmes de calcul posé dans lesquels on retrouve la nécessaire maîtrise des différents rangs par les élèves mais auxquels s'ajoutent des compétences liées au déroulement de la technique elle-même. Là aussi, Houdement et Tempier (2019) rappellent que la concordance entre une mauvaise connaissance des nombres et l'échec à des tâches calculatoires a été très vite identifiée par de nombreuses recherches (Barr, 1978). Les auteurs évoquent, en particulier, les différences de performance lors du passage d'une opération à deux chiffres à une opération à trois chiffres (Thomas, 2004). C'est aussi dans les calculs que réapparaît la faible maîtrise des grands nombres (Bednarz & Janvier, 1992 ; Baturu, 2000) où le rôle des classes (unités, milliers, millions), dans lesquelles se répètent les mêmes rangs (unités, dizaines, centaines), est structurant (Tempier, 2013). En France, comme le soulignent les instructions officielles¹¹⁴ pour l'école primaire, les algorithmes d'addition et de soustraction reposent entièrement sur une bonne compréhension de notre système de numération. Ce point a amené le Cnesco, à l'issue de la conférence de consensus *Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire*¹¹⁵ de 2015, à proposer une recommandation intitulée très directement « Associer l'apprentissage des techniques opératoires à la compréhension des nombres » dans laquelle le jury précise que « l'enseignement des procédures utilisées pour effectuer des opérations par écrit (comme les retenues dans une addition) doit fournir des occasions pour les élèves de développer leur compréhension des nombres. » Numération et calculs posés sont donc liés et c'est l'une des dimensions que notre étude se propose d'explorer au travers de l'utilisation de supports historiques. Mais avant d'entrer dans les détails de cette expérimentation, à l'image du panorama des résultats didactiques que nous venons de faire, il convient de nous attarder sur quelques questions liées à l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe.

4.3 Histoire des mathématiques et hypothèses de recherche

L'intérêt pour les études didactiques du regard historique sur l'évolution des systèmes de numération est communément reconnu (Bartolini Bussi & Sun, 2018, p.96). En effet, la connaissance des développements (systèmes par simple pointage, systèmes additifs, système multiplicatifs-additifs, et systèmes décimales positionnels) qui ont précédé notre système contemporain permet de mettre en évidence à la fois ses caractéristiques spécifiques mais aussi les obstacles épistémologiques (Bachelard, 1938 ; Brousseau, 1997, 1998) qu'il peut présenter aux élèves. Il n'est donc pas surprenant, comme nous l'avons souligné en introduction, de voir les systèmes de numération anciens très présents dans l'approche des mathématiques par leur histoire. L'objectif est alors de nature épistémologique en changeant ce qui est (censé être) familier, en quelque chose de non familier, et en remettant ainsi en question la perception conventionnelle des connaissances mathématiques de l'élève (Clark et al., 2019). Dans l'expérimentation décrite dans cet article, nous allons utiliser un système de

¹¹⁴ « Pour l'addition, la compréhension de l'algorithme relève *stricto sensu* de la compréhension de la numération. », *Enseignement du calcul : un enjeu majeur pour la maîtrise des principaux éléments de mathématiques à l'école primaire*, Bulletin Officiel spécial n°3 du 5 avril 2018.

¹¹⁵ Cnesco, Recommandation du jury, 26 novembre 2015, <http://www.cnesco.fr/fr/numeration/>

numération chinois ancien (écriture de nombres avec des bâtonnets) qui est assez bien documenté et dont nous allons donner un rapide aperçu maintenant.

Une numération chinoise ancienne

En Chine, l'écriture des nombres à l'aide de bâtonnets apparaît sans doute autour du 2^e siècle avant J.-C. comme on le lire au travers du *Suàn shù shū* [*Livre sur les calculs effectués avec des bâtonnets*] (Anicotte, 2019) qui date de cette période. Ce système de numération est attesté (Eberhard-Bréard, 2008) aussi à la période Wang Mang (9-23 après J.-C.) et il perdurera au moins jusqu'au début du 18^e siècle. Il s'agit d'un système décimal positionnel dans lequel les différents rangs se présentent dans une alternance de représentation horizontale et verticale. Comme le précise Anicotte (2019, p.69) dans son édition, « dans le texte du *Livre sur les calculs*, les nombres étaient écrits avec les mots de la langue courante. Et quand il fallait effectuer un calcul, les nombres étaient représentés avec des bâtonnets sur une surface plane. Les calculs s'effectuaient en manipulant ces bâtonnets appelés suànchóu. » On représente les chiffres des unités, des centaines, et de toutes les puissances de 10 paires en disposant des bâtonnets verticalement de la façon suivante :

Un	Deux	Trois	Quatre	Cinq	Six	Sept	Huit	Neuf
					┐	┑	┒	┓

Pour les chiffres des dizaines, des milliers, et de toutes les puissances de 10 impaires, les bâtonnets sont disposés horizontalement :

Un	Deux	Trois	Quatre	Cinq	Six	Sept	Huit	Neuf
—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	≡	≡

Par exemple, | ⊥ ┑ représente le nombre 167 et | ┑ représente le nombre 107. Dans la Chine ancienne, le système de numération ne comprend pas de zéro (Anicotte, 2019, p.50), mais une place vide pouvait être laissée pour éviter les confusions. Le zéro apparaît sous la forme d'un petit cercle dans les versions beaucoup plus tardives comme on peut le voir dans le triangle arithmétique (Figure 1) publié en 1303 par Zhu Shijie (1260-1320).

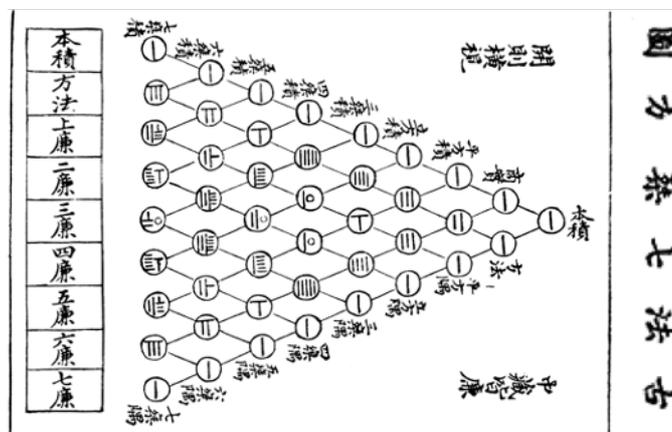


Figure 1. Triangle dit de Pascal extrait du traité *Siyuan yujian* publié en 1303 par Zhu Shijie (1260-1320) – Image : wikipedia

Les nombres négatifs sont représentés par des baguettes noires au lieu de rouges. Dans les écrits après le 11^e siècle, ces nombres négatifs apparaîtront marqués d'une barre oblique. Ce système de représentation des nombres sera très utilisé entre le 13^e et le 18^e siècle pour la résolution d'équations algébriques (Takenouchi, 2006) comme on peut le voir, par exemple (Figure 2), dans les écrits de Takebe Katahiro (1664-1739).



Figure 2. Équation $-a^4 + (-4a^3)x + (b^2 - 4a^2)x^2 + 2ax^3$ issue du *Hatsubi Sanpo Endan Genkai* de Takebe Katahiro, version annotée de traité de Seki Takakazu (1640?-1708) *Hatsubi Sanpo* de 1687, dont Takebe Katahiro reprend le système de notation – Image : Takenouchi (2006).

Dans l'expérimentation que nous avons réalisée auprès des élèves, c'est avant tout l'aspect décimal du système et la distinction scripturale entre les rangs de numération pairs et impairs qui sont utilisés. Nous y accentuons, de plus, volontairement l'ambiguïté liée à l'absence d'une marque explicite du zéro. Dans la présentation didactisée du système que nous avons faite aux élèves, nous ne suggérons pas d'introduire une espace entre les chiffres lors d'unités de numération manquantes. Sur la fiche d'activité et dans les exercices, les chiffres sont donc simplement accolés ; charge aux élèves de veiller à la disposition verticale ou horizontale des symboles. Les valeurs numériques sont toutefois choisies avec un seul rang manquant pour rendre cette déduction possible. On trouvera également une présentation de la numération chinoise à l'aide de bâtonnets et de ses enjeux épistémologiques dans Bartolini Bussi et Sun (2018).

Concernant la place de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques, il est désormais acquis (Fauvel & van Maanen, 2000 ; Fasanelli & Fauvel, 2006, ; Schrubing, 2006, 2011 ; Furinghetti & Radford, 2008 ; Clark & al. 2016 ; Barbin et al., 2020) qu'elle représente une approche intéressante par l'enrichissement culturel et le recul épistémologique qu'elle permet. Pourtant, si la pertinence sur la manière dont des élèves perçoivent et vivent les mathématiques est bien documentée (Marshall, 2000 ; Bütüner, 2015 ; Bråting & Pejlar, 2015 ; Jankvist, 2012, 2015 ; Lim & Chapman, 2015), plusieurs interrogations restent vives quant à une évaluation de l'impact réel sur les apprentissages. En particulier, dans leur synthèse internationale, Clark et al. (2018, p.7) se demandent d'une part, comment on peut poser des questions à ce sujet dans un test ou un examen, et d'autre part, s'il existe des preuves empiriques que les élèves apprennent mieux lorsque l'histoire des mathématiques est utilisée en classe.

Hypothèses de recherche

À partir de l'exemple de l'utilisation de la numération chinoise en classe de sixième, dans cet article nous nous proposons précisément de tenter d'apporter une contribution en réponse à ces deux grandes questions. Nous allons structurer notre étude à partir des trois hypothèses de recherche suivantes.

Hypothèses de recherche (\mathcal{H}_1), (\mathcal{H}_2), (\mathcal{H}_3)

Pour être efficace dans un contexte scolaire ordinaire, il faut (\mathcal{H}_1) que l'histoire des mathématiques permette de créer des tâches de difficulté variable et (\mathcal{H}_2) que ces tâches permettent d'évaluer/travailler une compétence mathématique précise. Une plus-value possible de l'histoire de mathématiques est alors (\mathcal{H}_3) de permettre d'impliquer/de raccrocher les élèves en difficulté et de fournir aux élèves les plus en réussite de nouveaux challenges.

À la lumière d'une analyse didactique, ces hypothèses seront ainsi testées au travers d'une étude quantitative portant sur plus d'une centaine d'élèves.

4.4 Analyse didactique de l'activité : enjeux d'apprentissage

L'activité, que l'on trouvera *in extenso* en annexe (avec en vert les réponses attendues), est composée de trois parties distinctes dont nous détaillerons plus loin les principales variables didactiques (Brousseau, 1998) et les choix effectués. La première partie, appelée « Exercices (1) » est constituée d'exercices de mathématiques ordinaires ; elle servira d'appui pour évaluer la manière dont l'histoire des mathématiques s'articule avec des objectifs d'apprentissages usuels. La deuxième partie, intitulée « Un système de numération chinois du 2^{ème} siècle après J.-C. » est l'activité historique en elle-même. Elle comporte une présentation du système de numération chinois et des exemples. Enfin, la troisième partie, dite « Exercices (2) » est une évaluation de la compréhension des élèves du système de numération chinois vu lors de l'activité. La fiche d'exercices 1 a été réalisée lors d'une séance en amont de l'activité. L'activité sur la numération a été mise en œuvre lors d'une séance collective d'une heure. Pour finir, la fiche d'exercices 2 a été réalisée sur un temps d'environ 25 minutes lors de la séance suivante. Afin de permettre une analyse par la théorie de la réponse aux items (TRI), toutes les tâches ont été décomposées et les réponses dichotomisées par la règle stricte attribuant 1 pour une réussite totale et 0 sinon. Au niveau du codage, les items de la première fiche sur des tâches mathématiques ordinaires seront dénommés M1a, M1b, M2a, M2b, etc. (préfixe M) en fonction de l'organisation en sous-questions dans les exercices. De même, les items à dimension historique de la deuxième fiche d'exercices seront codés H1a, H1b, H2a, H2b, etc. (préfixe H). La partie activité a été réalisée en commun, en dialogue avec l'enseignant. Les deux fiches d'exercices ont par contre été réalisées individuellement par chaque élève. Nous allons maintenant détailler le contenu de ces supports en précisant les enjeux didactiques pour les différents items.

La fiche « Exercices (1) » comprend six questions pour un total de 21 items. La première question est une dictée de nombres. Elle vise à évaluer la maîtrise de notre système de numération actuel par les élèves. Conformément aux enjeux d'apprentissages rappelés dans la partie précédente, les nombres sont choisis de manière à mettre en évidence des

éventuelles lacunes. En jouant sur les deux variables didactiques taille des nombres et présence de zéros, on aura ainsi six items avec des zéros à certains rangs (2 305, 10 100, 30 095) et des grands nombres (215 230, 6 800 000, 45 900 030). Ensuite, les questions 2 et 3 portent sur des opérations posées pour lesquelles nous choisissons de travailler sur les décimaux afin d'être conformes aux objectifs d'apprentissage de la classe de sixième. En activant ainsi cette nouvelle variable sur la nature des nombres, dans la question 2, trois additions de nombres décimaux sont demandées. L'intérêt des nombres décimaux est de vérifier une fois encore la bonne compréhension des différents rangs dans notre système décimal. Les nombres choisis entraînent une complexité croissante avec d'abord deux nombres décimaux ($3,29 + 1,05$) dont la partie décimale est de même longueur, puis ($66,7 + 2,42$) où les parties décimales sont de longueurs différentes, jusqu'à ($786 + 8,6$) où l'ajout d'un entier et d'un décimal masque la présence de la virgule. La question 3 est construite sur le même modèle mais avec cette fois les soustractions ($66,4 - 21,3$); ($24,1 - 0,25$) et ($2043 - 22,2$). L'objectif sera ici de permettre aux analyses de vérifier la présence de liens entre numération et calcul posé. La quatrième question présente des divisions de nombres entiers par 10, 100 ou 1000. Ces divisions portent principalement sur la compréhension de la représentation des nombres décimaux. Quatre items de difficulté croissante sont proposés avec ($3500:10$); ($230:100$); ($451:100$) et ($75659:1000$). Ces calculs sont à réaliser directement en ligne. Les deux dernières questions, 5 et 6, jouent sur une nouvelle variable en interrogeant la représentation de fractions et d'entiers sur un axe gradué. La question 5 ne comprend qu'un item dans lequel les élèves doivent déterminer la fraction d'une partie colorée d'une fleur ($\frac{2}{5}$). La question 6, dernière de la fiche, présente deux types d'axes sur lesquels les élèves doivent, pour le premier, placer 25 et 58 (axe simple, gradué en unité, les dizaines explicitées), et pour le deuxième, placer $\frac{3}{5}$ et $\frac{12}{5}$ (axe gradué en cinquièmes, les unités explicitées). Pour ces questions 4, 5 et 6, c'est avant tout le mode de représentation des nombres qui est testé.

La partie activité de découverte se présente sous la forme de deux pages avec sur la première le contexte historique et l'explication du fonctionnement du système de numération chinois. Les deux jeux de chiffres, ceux pour les rangs pairs et ceux pour les rangs impairs, sont donnés. Deux exemples, en plus de ceux éventuellement proposés par le professeur lors de la mise en œuvre en classe, sont écrits en bas de la feuille. Il s'agit des deux nombres 167 et 107 pour lesquels apparaît la difficulté liée à l'absence du chiffre zéro. Cette difficulté est donc explicitée dès le départ, en plus de l'alternance de symboles entre les rangs de numération qui constitue la principale spécificité du système de numération chinois choisi. Parmi tous les systèmes anciens possibles, c'est justement pour cette capacité à rendre explicites les différents rangs (tant par la position que par le signe) que ce système a été choisi. Sur la deuxième page, à l'image de ce qu'on trouve systématiquement dans les manuels scolaires lors de l'utilisation d'un système de numération ancien, les élèves doivent passer d'une écriture à l'autre (De Vittori, 2018) sur plusieurs exemples. Dans un premier temps, il s'agit du passage de l'écriture décimale contemporaine au système chinois ancien sur des nombres de plus en plus grands (12 ; 33 ; 46 ; 332 ; 467 ; et 5678). Le codage inverse est ensuite proposé pour les nombres $\equiv |$ [51]; $\perp |$ [81] et $||| \equiv \top$ [457]. Ce passage du système chinois vers notre système de numération est l'occasion de revenir sur l'absence de zéro avec les deux nombres \equiv [40] et $||| \top$ [409]. Pour éviter toute ambiguïté, il était clairement indiqué dans l'énoncé que ces deux nombres étaient inférieurs à 1000. La dernière partie de l'activité porte sur la lecture d'une source originale du 7^e siècle dans laquelle apparaissent, écrits dans le

système chinois, les nombres 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72 et 81 que les élèves doivent identifier et pour lesquels ils doivent reconnaître les résultats de la table de multiplication par 9. Nous rappelons que toute l'activité de découverte a été menée en classe entière ; les élèves pouvant échanger entre eux et avec le professeur.

À la suite de l'activité, une évaluation est donnée aux élèves. Cette fiche « Exercices (2) » reprend les tâches vues lors de la découverte du système de numération chinois. Dans toute la fiche, les intervalles dans lesquels se situent les nombres sont toujours précisés et, durant toute l'évaluation, les élèves ont à leur disposition un tableau donnant la correspondance entre les symboles des deux systèmes. L'évaluation se présente sous la forme d'une suite de cinq questions, chacune comprenant deux à quatre items, soit 13 items en tout. Dans la question 1, les élèves doivent écrire en chinois les nombres 73, 221 et 6789 et réciproquement dans la question 2, ils doivent réécrire dans notre système les nombres $\equiv \parallel$ [42], \equiv [50], $\equiv \top$ [346], et $\equiv \top$ [306]. Les nombres sont de taille croissante et font apparaître volontairement des zéros. Ces deux premiers exercices portent donc sur l'application directe de ce qui a été fait. Les exercices 3, 4 et 5, par contre, présentent un nouveau défi pour les élèves. En effet, ces trois exercices portent sur les notions de successeur et de prédécesseur d'un nombre entier. En lien avec les notions d'addition et de soustraction, l'objectif est ici de voir si l'utilisation d'un autre système décimal permet lui aussi un travail sur la règle d'échange fondamentale un pour dix. Dans la question 3, les élèves doivent écrire, avec le système chinois, le successeur de $= \equiv \equiv \equiv$ [23] puis celui de $= \equiv \equiv \equiv$ [29]. La situation est du même type dans les exercices 4 et 5 avec cette fois les prédécesseurs de $= \equiv \equiv$ [23] et de \equiv [80], puis de $\perp \top \equiv \equiv \equiv$ [6789] et de $\perp \top \equiv$ [6780]. Comme on peut le voir, dans toute la partie en lien avec le système chinois de notre expérimentation, la variable didactique taille des nombres reste limitée à quatre chiffres. Ceci permet de mettre en jeu une bonne alternance des différents rangs et des différents symboles, de pointer l'absence de zéro, le tout sans ajouter une difficulté liée à la maîtrise des grands nombres. On notera que cette dernière peut être abordée par d'autres systèmes anciens comme les hiéroglyphes égyptiens par exemple, ce qui constitue une approche très courante dans les manuels de cycle 3 que nous avons pu consulter.

4.5 Données et analyses statistiques

L'ensemble de l'expérimentation a été proposé à quatre classes de sixième avec chacune un enseignant différent. En tout, 108 élèves (63 filles [58%] ; 45 garçons [42%]) ont vécu l'expérimentation. On notera cependant que, principalement du fait de la pandémie, quelques élèves ont pu être absents à l'une ou l'autre des parties de l'expérimentation. Il convient de préciser aussi que les questions 3, 4 et 5 (prédécesseurs et successeurs) de l'évaluation ont pu poser des difficultés de compréhension de la consigne par de rares élèves ; ces derniers écrivant les nombres dans notre système au lieu de l'écrire dans le système chinois. Dans les deux cas, les items ont été considérés comme non traités, c'est-à-dire comme des données manquantes. En tout, sur 3672 observations, on a ainsi 196 données manquantes, soit environ 5% ce qui reste faible et compatible avec une analyse statistique. 86 élèves ont effectué l'intégralité des exercices et activités.

Dans toute la suite, les données ont été traitées dans l'environnement *R* (R Core Team, 2020), avec le paquet *psych* (Revelle, 2021) pour la vérification de la cohérence des données et les analyses factorielles, le paquet *ltm* (Rizopoulos, 2006) pour les modélisations de Rasch, 1PL et 2PL, le paquet *ShinyItemsAnalysis* (Martinková & Drabinová, 2018) uniquement pour le

tracé de la représentation personnes-items (dite Wright map), et le paquet *effsize* (Torchiano, 2020) pour le calcul de la taille d'effet d de Cohen. Le paquet *ltm*, reconnu pour ses performances (Béland et al., 2013 ; Kim & Paek, 2017), a été choisi en raison de ses algorithmes spécifiquement dédiés aux items dichotomiques et à son ajustement de modèles en fonction des données manquantes qui prend en compte la partie observée de l'échantillon selon le présupposé MAR - Missing At Random (Hancock et al., 2019, p.153).

Évaluation des hypothèses (\mathcal{H}_1) et (\mathcal{H}_2)

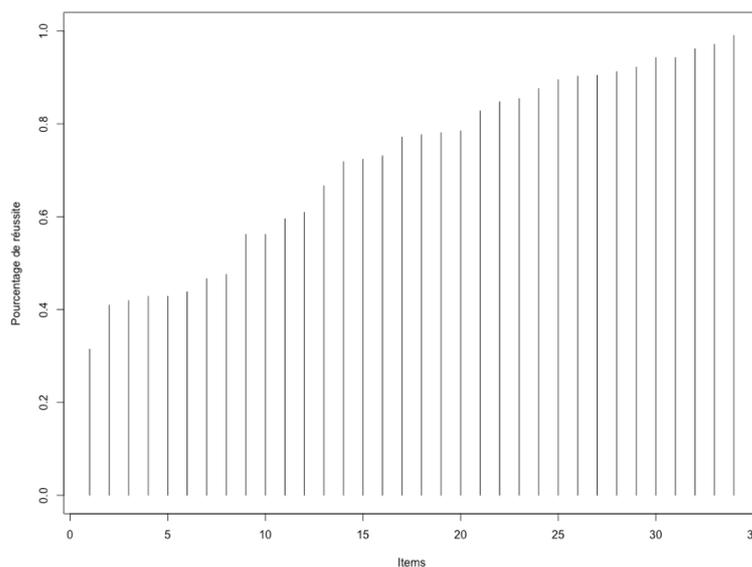
Pour les 34 items, la moyenne finale est de 24.98 (écart-type 6.56) ce qui signifie que l'expérimentation a été globalement bien réussie par les élèves. Ce résultat est conforme à l'objectif qui était de créer une activité de classe qui s'intègre dans une pratique ordinaire et pas un test à visée certificative. Le tableau 1 donne les taux de réussite item par item.

Tableau 1. Taux de réussite m par item, et écart-type sd

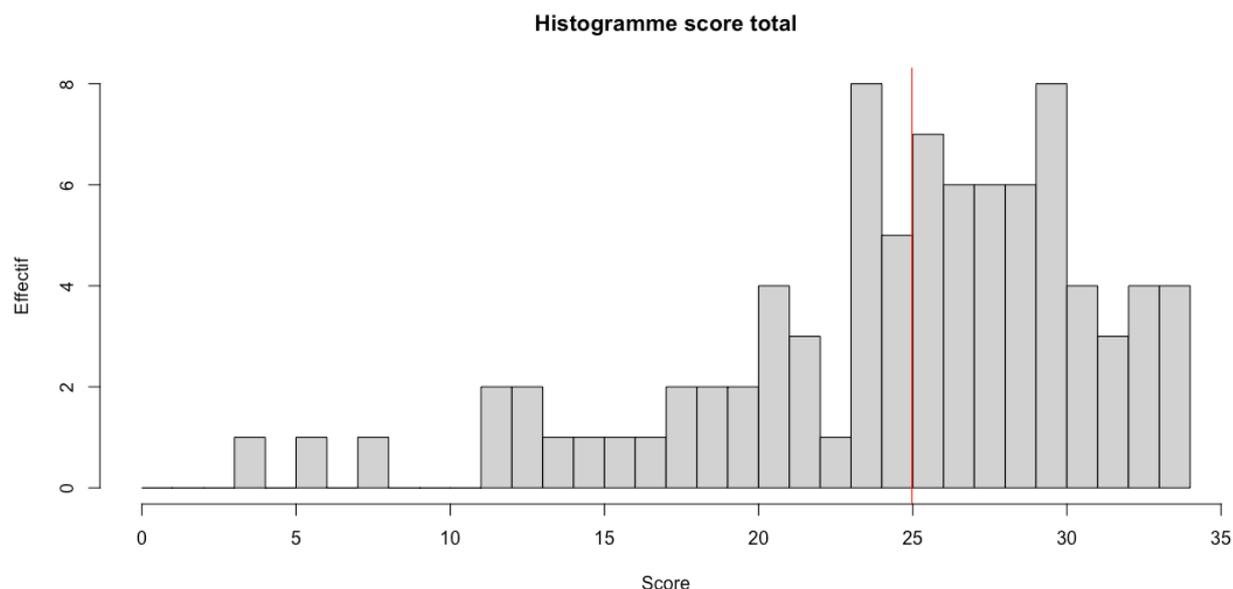
Item	M1a	M1b	M1c	M1d	M1e	M1f	M2a	M2b	M2c	M3a	M3b	M3c
m	0.971	0.962	0.876	0.943	0.771	0.781	0.905	0.848	0.667	0.895	0.609	0.562
sd	0.167	0.192	0.331	0.233	0.422	0.415	0.295	0.361	0.474	0.308	0.490	0.498
Item	M4a	M4b	M4c	M4d	M5a	M6a	M6b	M6c	M6d	H1a	H1b	H1c
m	0.562	0.428	0.409	0.429	0.724	0.990	0.943	0.854	0.438	0.922	0.913	0.854
sd	0.498	0.497	0.494	0.497	0.449	0.097	0.233	0.501	0.498	0.269	0.284	0.354
Item	H2a	H2b	H2c	H2d	H3a	H3b	H4a	H4b	H5a	H5b		
m	0.903	0.718	0.777	0.476	0.785	0.731	0.828	0.419	0.595	0.315		
sd	0.297	0.452	0.418	0.502	0.413	0.446	0.379	0.496	0.493	0.467		

Ces taux montrent un bon étalement (Graphique 1) et les scores individuels (Graphique 2) confirment une activité pour laquelle les élèves ont été globalement en réussite.

Graphique 1. Taux de réussite par items



Graphique 2. Scores des élèves ; moyenne en rouge



Les données ne présentent pas de différence entre les filles et les garçons car le test t de Student ($t = 0.061832$; $df = 78.767$; $p\text{-value} = 0.9509$) donne une $p\text{-value}$ très supérieure à 0.05, donc non significative. Les items ont été filtrés à partir des coefficients de corrélation point-bisériel item inclus et item exclu. La littérature (Bodner, 1980 ; DiBattista & Kurzawa, 2011 ; Slepkov et al., 2021) suggère une valeur seuil de 0.2 mais pour des raisons de consistance des modélisations qui vont suivre, un seuil légèrement plus élevé de 0.25 a été choisi (Tableau 2). Avec cette valeur, les items M1a, M3a, M6a et H2a ont été retirés. Puis après vérification sur l'ensemble des items restants, H2c dont la valeur était proche de la limite a été également retiré.

Tableau 2. Coefficients de corrélation point-bisériel des items ; item inclus (PBis) et item exclu (ExPBis)

Item	M1a	M1b	M1c	M1d	M1e	M1f	M2a	M2b	M2c	M3a	M3b	M3c
PBis	0.143	0.389	0.455	0.356	0.476	0.612	0.434	0.491	0.644	0.238	0.515	0.541
ExPBis	0.186	0.423	0.359	0.404	0.515	0.629	0.468	0.494	0.640	0.288	0.393	0.497

Item	M4a	M4b	M4c	M4d	M5a	M6a	M6b	M6c	M6d	H1a	H1b	H1c
PBis	0.631	0.617	0.646	0.620	0.564	0.216	0.432	0.409	0.434	0.340	0.433	0.367
ExPBis	0.516	0.508	0.554	0.563	0.472	0.267	0.500	0.306	0.310	0.360	0.448	0.338

Item	H2a	H2b	H2c	H2d	H3a	H3b	H4a	H4b	H5a	H5b
PBis	0.136	0.352	0.256	0.501	0.472	0.545	0.566	0.388	0.494	0.455
ExPBis	0.098	0.293	0.325	0.481	0.497	0.598	0.611	0.451	0.545	0.493

Pour l'ensemble des 29 items restants, la consistance est bonne et la présence de suffisamment de corrélation inter-items assurée par un α de Cronbach (1951) à 0.91, un indice KMO (Kaiser, 1974 ; Kaiser & Rice, 1974) à 0.74. Afin de tester notre hypothèse (\mathcal{H}_2), une analyse factorielle a été réalisée. L'analyse parallèle suggérant deux facteurs, ces derniers ont été extraits avec une rotation *oblimin* qui fournissait la meilleure séparation des variables (Tableau 3).

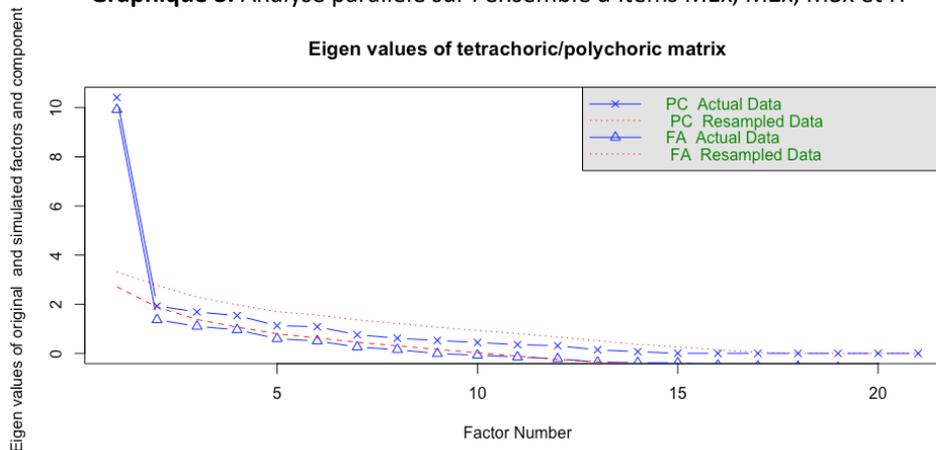
Tableau 3. Extraction de deux facteurs par analyse factoriel avec rotation oblimin

Item	MR1	MR2	Item	MR1	MR2	Item	MR1	MR2
M1b	0.687		M4a	(0.151)	0.762	H1c	0.624	
M1c	0.484	(0.164)	M4b		0.854	H2b	0.493	
M1d	0.784	(-0.165)	M4c		0.960	H2d	0.584	(0.182)
M1e	0.868	(-0.195)	M4d		0.898	H3a	0.596	
M1f	0.890		M5a	(0.293)	0.466	H3b	0.835	
M2a	0.621		M6b	0.577	(0.241)	H4a	0.714	(0.158)
M2b	0.676		M6c		0.618	H4b	0.372	(0.240)
M2c	0.644	(0.289)	M6d		0.657	H5a	0.713	
M3b	0.497	(0.145)	H1a	0.721	(-0.134)	H5b	0.541	(0.218)
M3c	0.597	(0.156)	H1b	0.693				

Le premier axe concentre 33.3% de la variance et le second 15.8%, soit 49.0% en tout. Avec une valeur seuil pour les contributions de 0.3 (Cliff & Pennell, 1967), on constate que, à l'exception de l'item M6b, les items des question 4, 5, et 6 de la fiche d'exercices de mathématiques ordinaires ne se regroupent pas avec les items de la fiche portant sur la numération chinoise. On peut donc supposer que la compétence visée n'est pas la même. L'analyse didactique ayant montré que les items M1x, M2x, M3x reposent sur l'articulation entre la maîtrise de la numération décimale et le calcul posé d'additions et de soustractions, on peut en conclure que les items H1x, H2x, H3x, H4x et H5x portent sur la même compétence. Ce qui valide notre hypothèse (\mathcal{H}_2), en particulier pour ce qui concerne la maîtrise de la règle fondamentale de notre système de numération (échange un pour dix).

Les items M4x, M5x et M6x comportaient une dimension liée à la représentation des nombres qui, alors qu'on aurait pu s'attendre à ce qu'elle soit elle-aussi activée par l'utilisation des nouveaux symboles de la numération chinoise, ne semble pas fonctionner avec l'évaluation la partie historique. Pour la suite des analyses, nous conserverons donc uniquement les items M1x, M2x, M3x et l'ensemble des items H, soit 21 items. Pour ce nouvel ensemble, on peut vérifier la stabilité de cohérence des données. Avec $\alpha = 0.89$ et $KMO = 0.74$, c'est bien le cas. L'analyse parallèle (Graphique 3) suggère 1 seule composante principale et 1 seul facteur. L'unidimensionnalité (Gorsuch, 1983 ; Slocum, 2005) est par ailleurs confirmée par le rapport entre la première valeur propre et la deuxième supérieure à 4 (ici $10.59 / 1.92 = 5.51$). Une modélisation avec un modèle Rasch et logistique à un paramètre 1PL est donc envisageable.

Graphique 3. Analyse parallèle sur l'ensemble d'items M1x, M2x, M3x et H



Pour choisir le modèle le plus adapté, une comparaison par ANOVA entre un modèle de Rasch avec le paramètre de discrimination à 1 et un modèle 1PL avec discrimination libre a été réalisée (Tableau 4). Le modèle logistique à un paramètre est alors meilleur de manière significative (p -value < 0.001). À titre de vérification (Tableau 5), ce modèle 1PL a été comparé à un modèle 2PL mais ce dernier n'offre pas d'amélioration significative (p -value = 0.1).

Tableau 4. Comparaison entre modèle de Rasch et modèle 1PL

Modèle	AIC	BIC	log.Lik	LRT	df	p.value
Rasch	1745.37	1801.69	-851.68			
1PL	1702.80	1761.81	-829.40	44.56	1	< 0.001

Tableau 5. Comparaison entre modèle 1PL et 2PL

Modèle	AIC	BIC	log.Lik	LRT	df	p.value
1PL	1702.80	1761.81	-829.40			
2PL	1714.37	1827.02	-815.19	28.43	20	0.1

L'adéquation du modèle 1PL a été finalement vérifiée par bootstrap (Rizopoulos, 2006, p.7) grâce à la fonction dédiée dans le paquet *ltm*. On obtient pour ce modèle une p -value de 0.42 (supérieur à 0.05) qui indique une bonne adéquation globale du modèle, cette dernière est vérifiée item par item avec un test où les $\text{Pr}(> \chi^2)$ sont toutes très supérieures à 0.05 (Tableau 6).

Tableau 6. Adéquation des items au modèle 1PL

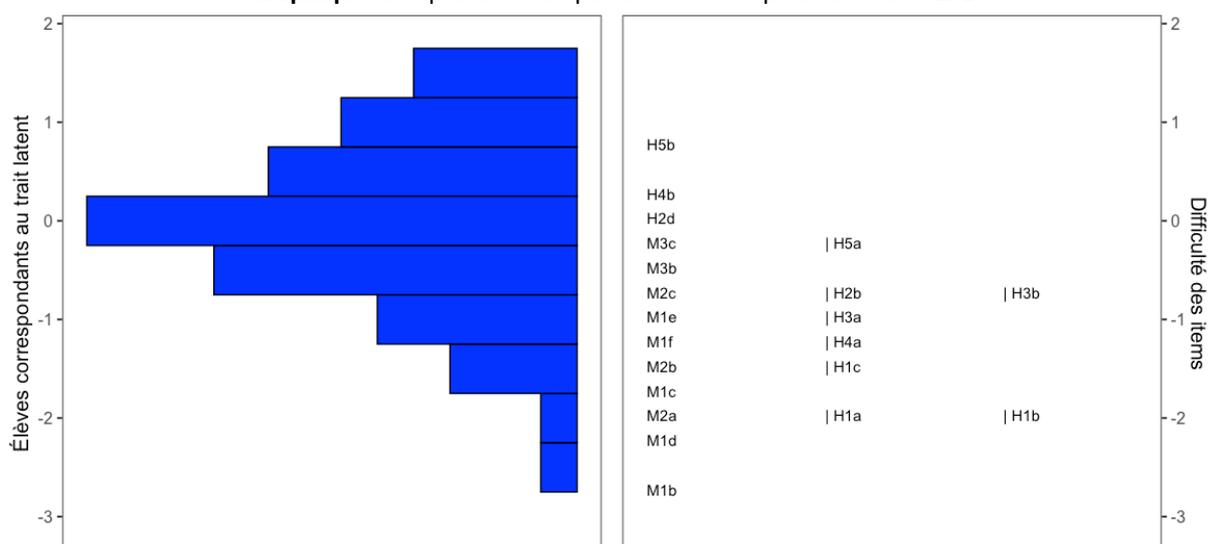
Item	χ^2	$\text{Pr}(> \chi^2)$	Item	χ^2	$\text{Pr}(> \chi^2)$
M1c	5.3481	0.7198	H1a	3.6713	0.8855
M1d	3.6742	0.8853	H1b	1.5500	0.9918
M1e	6.6327	0.5767	H1c	1.7693	0.9873
M1f	6.4349	0.6167	H2b	1.8893	0.9842
M2a	1.1281	0.5986	H2d	4.7130	0.7878
M2b	9.1686	0.9973	H3a	0.0290	1
M2c	10.9755	0.3283	H3b	0.7244	0.9995
M3b	1.0883	0.9976	H4a	0.9688	0.9984
M3c	7.3342	0.501	H4b	0.0713	1
			H5a	0.0650	1
			H5b	0.1465	1

Le coefficient de discrimination calculé pour le modèle 1PL est de 1.812199, et les niveaux de difficulté des items sont donnés dans le tableau 7. Ces difficultés s'étendent de -2.6 à 0.7, avec une valeur négative pour la quasi-totalité des items, ce qui signifie que les tâches étaient globalement faciles pour les élèves. Ce point rejoint les taux de réussite qui étaient globalement élevés, ce qui est une fois encore conforme à la volonté d'une activité d'apprentissage et non d'une évaluation certificative. L'ensemble de ces données se retrouve aussi dans la représentation personnes-items (Graphique 4). Sur cette représentation, on constate que les items H se mêlent bien aux items M. On peut donc affirmer que l'histoire des mathématiques permet un travail au moins équivalent au travail ordinaire, ce qui valide notre hypothèse (\mathcal{H}_1).

Tableau 7. Difficultés des items

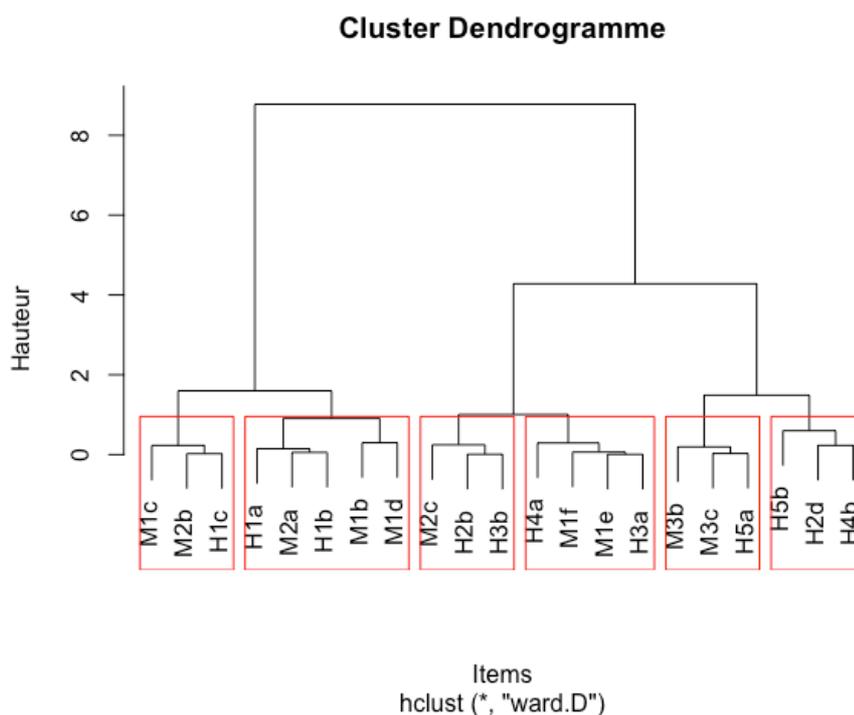
Item	Difficulté	Item	Difficulté
M1b	-2.599	H1a	-2.048
M1c	-1.669	H1b	-1.951
M1d	-2.302	H1c	-1.502
M1e	-1.071	H2b	-0.813
M1f	-1.117	H2d	0.069
M2a	-1.895	H3a	-1.065
M2b	-1.479	H3b	-0.821
M2c	-0.631	H4a	-1.290
M3b	-0,420	H4b	0.299
M3c	-0,253	H5a	-0.283
		H5b	0.691

Graphique 4. Représentation personnes-items pour le modèle 1PL



Afin d'identifier plus précisément les groupements d'items, une classification hiérarchique ascendante avec la distance euclidienne a été réalisée à partir des niveaux de difficultés des items (Graphique 5). On peut observer sur le dendrogramme l'apparition de trois groupes principaux chacun décomposé en deux sous-groupes, soit six ensembles d'items. Ces six sous-groupes peuvent être mis en relation avec une analyse didactique des différentes tâches en lien avec l'apprentissage du système de numération et la maîtrise du calcul posé (Tableau 8).

Graphique 5. Classification hiérarchique ascendante sur les difficultés des items



Pour étudier les différents groupements d'items et leurs conséquences sur les apprentissages, chaque item a été affecté d'un codage en fonction de ses principaux enjeux didactiques. On distinguera ainsi cinq symboles : (=), (p), (1), (+) et (-). Les signes (=) et (p) renvoient à des connaissances relatives à l'écriture des nombres. Par le signe (=), on caractérise les items pour lesquels l'écriture des différents chiffres peut se faire de manière simple, dans le sens où il y a un seul chiffre (différent de zéro) à chaque rang ou des blocs de trois chiffres pour chaque classe (unités, milliers, millions). Dans les deux cas, le nombre peut s'écrire en accolant les différents chiffres ou groupes de chiffres. *A contrario*, le signe (p) signale des items pour lesquels les règles syntaxiques de la numération doivent être pleinement maîtrisées. Ces items présentent en particulier des rangs *vides* qui sont donc soit marqués d'un zéro (système usuel) soit d'une absence de chiffre (système chinois). Les deux codages (=) et (p) rendent ainsi compte de la dimension positionnelle des systèmes de numération utilisés dans l'expérimentation. Les trois autres signes (1), (+), et (-) concernent, quant à eux, le rôle des groupements par 10 dans l'écriture des nombres. Le signe (1) vise simplement à signaler les items où est ajoutée ou soustraite une unité, sans utilisation de la règle d'échange 1 pour 10. Lorsque la règle d'échange est mise œuvre, on distinguera alors deux situations. La première, marquée par (+), renvoie aux items dans lesquels la base 10 est utilisée dans le sens du groupement de 10 unités d'un certain rang en 1 unité du rang supérieur. Réciproquement, lorsque l'item nécessite de re-décomposer 1 unité d'un rang en 10 unités du rang inférieur, ils sont marqués du signe (-). Groupement et décomposition constituent les deux principaux aspects de la mise en œuvre de la dimension décimale commune aux deux systèmes de numération utilisés. L'ensemble du codage des items va permettre de mettre en évidence le regroupement de certains items sur des objets d'apprentissage communs (tableau 8) ainsi que plusieurs ruptures dans le continuum des niveaux de difficulté mesurés par la modélisation.

Tableau 8. Groupements d'items et analyse didactique

Gps	Items M	Items H	Difficultés	Enjeux didactiques
1.1	(=) M1b (=) M1d (=) (+) M2a	(=) H1a (=) H1b	-2.6 à -1.9	Écriture des chiffres des différents rangs dans un cas simple (H1a, H1b) avec la possibilité d'accoler simplement les valeurs des classes unités et milliers (M1b, M1d) Additions dans un cas simple avec le même nombre de chiffres et de décimales, et nécessité de la règle d'échange un pour dix (M2a)
1.2	(p) M1c (p) (+) M2b	(=) H1c	-1.7 à -1.5	Écriture des chiffres des différents rangs dans un cas simple (H1c) et dans un cas complexe avec impossibilité d'accoler les valeurs des classes (M1c) Additions dans un cas complexe avec même nombre de chiffres mais parties décimales de longueurs différentes, et nécessité de la règle d'échange un pour dix (M2b)
2.1	(p) M1e (p) M1f	(1) H3a (1) H4a	-1.3 à -1.1	Écriture des chiffres des différents rangs des grands nombres dans un cas simple (M1e) et dans un cas complexe avec impossibilité d'accoler simplement les valeurs des classes (M1f) Addition et soustraction d'une unité dans un cas simple (H3a, H4a)
2.2	(p) (+) M2c	(p) H2b (+) H3b	-0.8 à -0.6	Écriture des chiffres des différents rangs dans un cas complexe avec impossibilité d'accoler simplement les valeurs (H2b) Additions dans un cas complexe avec nombre de chiffres différents, parties décimales de longueurs différentes, et nécessité de la règle d'échange un pour dix (M2c) Addition d'une unité dans un cas nécessitant la règle d'échange un pour dix (H3b)
3.1	(p) (-) M3b (p) (-) M3c	(1) H5a	-0.4 à -0.2	Soustraction dans un cas complexe avec parties décimales de longueurs différentes (M3b, M3c) Soustraction d'une unité dans un cas simple mais sur un grand nombre (H5a)
3.2		(p) H2d (p) (-) H4b (p) (-) H5b	0.1 à 0.7	Écriture des chiffres des différents rangs dans un cas complexe avec impossibilité d'accoler simplement les valeurs (H2d) Addition et soustraction d'une unité dans un cas complexe nécessitant la règle d'échange un pour dix (H4b, H5b)

Légende :

(=) : numération simple (1 rang = 1 symbole ou 1 classe = 1 nombre à 3 chiffres)

(p) : compréhension fine du système de position (zéros, alignement décimaux)

(1) : ajout ou suppression d'une unité sans règle d'échange

(+) : règle d'échange 10 donne 1 (regroupement)

(-) : règle d'échange 1 donne 1 (re-décomposition)

Sur la maîtrise du système positionnel, les items marqués du signe (=) se concentrent dans le sous-groupe 1.1 alors que les items identifiés par le signe (p) vont, au contraire, se concentrer sur les autres groupes 2 et 3. La ligne de rupture apparaît dans le sous-groupe 1.2 où les deux types d'items (=) et (p) coexistent. L'expérimentation ne permet pas la mise en évidence d'une séparation parfaitement nette sur cette hiérarchie entre des items nécessitant une mise en œuvre simple des différents rangs et ceux avec une utilisation plus complexe du système positionnel. On peut toutefois noter la prédominance de deux blocs avec d'un côté le groupe 1 (voire le sous-groupe 1.1) et de l'autre les groupes 2 et 3 (voire 1.2, 2, et 3). Dans tous les cas, les items relèvent à la fois de la partie mathématique ordinaire et de la partie à dimension historique.

La rupture entre les apprentissages mis en œuvre dans le groupe 1 et ceux des groupes 2 et 3 est aussi valable pour l'ajout ou le retrait d'une unité à des nombres écrits en chinois. Les items codés (1) se situent en effet dans les deux groupes 2 et 3, de difficulté plus élevée que celle du groupe 1. On peut remarquer également que cette séparation coïncide avec une rupture dans le sens de la traduction entre les deux systèmes de numération pour les items historiques. Les items portant sur le passage de l'écriture usuelle à l'écriture chinoise apparaissent dans le groupe 1 alors que ceux mobilisant le sens contraire se positionnent dans les groupes 2 et 3. On peut supposer que l'ajout ou le retrait d'une unité dans les items marqués (1) requière d'abord une conversion du système chinois vers le système usuel, mais cet aspect n'a pas été étudié spécifiquement.

Sur la maîtrise de la règle d'échange, la situation est plus nette. Comme on peut le voir dans le tableau 8, les items marqués du signe (-) se concentrent dans le groupe 3. Ces items sont aussi les plus difficiles pour les élèves (difficulté de -0.4 à 0.7), tant pour la partie mathématique que pour la partie historique. L'application de la règle d'échange dans le sens d'une dé-composition crée donc un nouveau palier de difficulté comparativement au sens du re-groupement décimal. Ceci est vrai tant dans son expression dans les calculs posés que lors de la manipulation du système de numération chinois impliquant les notions de prédécesseur et de successeur d'un nombre.

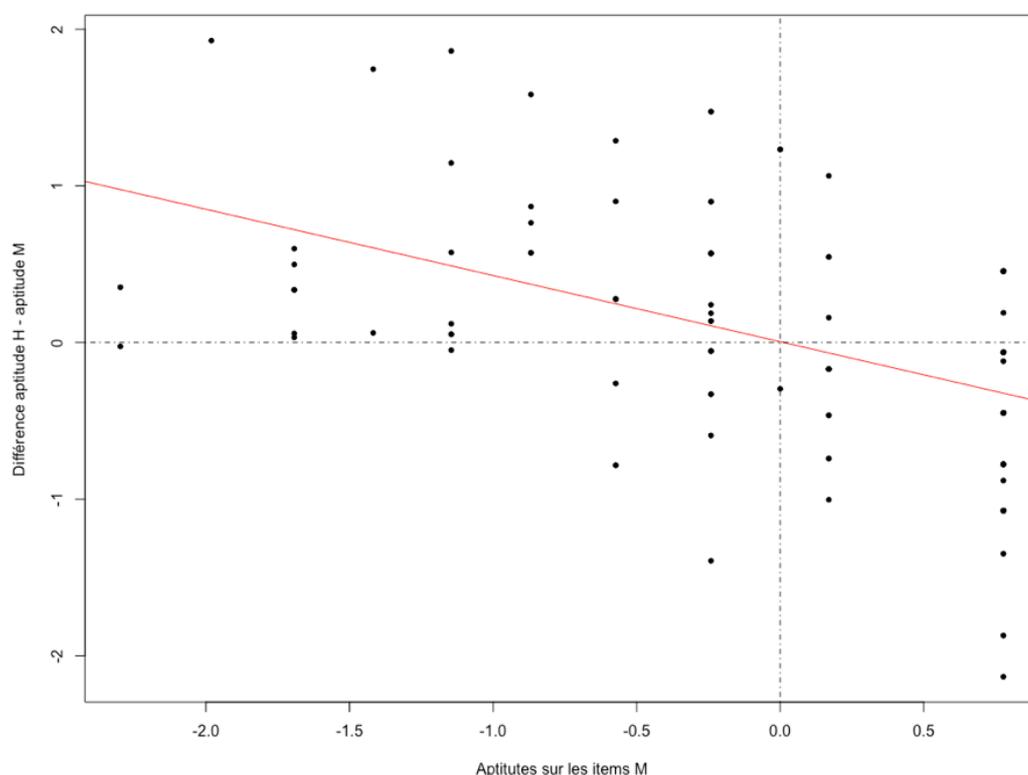
La mise en correspondance des groupements d'items et des objectifs d'apprentissage permet de confirmer l'adéquation de l'histoire des mathématiques à des objectifs didactiques précis, en l'occurrence la maîtrise des dimensions décimales et positionnelles. Notre hypothèse (\mathcal{H}_2) est donc validée.

Évaluation de l'hypothèse (\mathcal{H}_3)

Afin d'étudier la plus-value pour les élèves de l'histoire des mathématiques dans cette expérimentation, nous avons séparé les items M et les items H et nous avons effectué une nouvelle modélisation 1PL sur chacun de ces sous-ensembles. On notera que la consistance des données est bien toujours correcte avec une valeur du alpha de Cronbach de 0.83 pour les items M et de 0.82 pour les items H. Dans les deux cas, l'analyse parallèle suggère un seul facteur et une seule composante. L'analyse d'adéquation des modèles par bootstrap confirme leur pertinence avec une p-value de 0.54 pour l'ensemble M et une p-value de 0.36 pour l'ensemble H. Pour des raisons de cohérence, pour ces modèles nous avons conservé le coefficient de discrimination issu du modèle 1PL initial (env. 1.812). *In fine*, tant pour les items M que pour les items H, le coefficient de corrélation entre les difficultés des items calculées sur l'ensemble total et sur le sous-ensemble pris seul est de 0.999. Les niveaux d'aptitude (ability) des élèves par chacun des deux sous modèles offrent une assez bonne corrélation

(0.59). Un test de Student ne montre pas d'écart significatif entre les deux moyennes ($t = 0.55298$, $df = 107$, $p\text{-value} = 0.5814$) ce qui signifie qu'il n'y a pas de plus-value globale pour l'ensemble des élèves. Toutefois, on peut chercher à voir s'il n'existe pas une plus-value différenciée en fonction des niveaux d'aptitude des élèves, ce qui est une manière d'exprimer notre hypothèse (\mathcal{H}_3). Pour cela, nous avons représenté dans un même graphique, pour chaque élève i , l'écart ($fsH_i - fsM_i$) entre l'aptitude mesurée sur les items M (fsM_i) et celle mesurée sur les items H (fsH_i) en fonction de l'aptitude mesurée sur les items M (Graphique 6). Nous avons ensuite déterminé la droite de régression linéaire (ordonnée à l'origine 0.004, coefficient directeur -0.423) pour cet ensemble de points.

Graphique 6. Plus-value de la partie histoire sur la partie mathématique ordinaire ; en rouge la droite de régression linéaire



Comme on peut le voir sur le graphique, pour les élèves dont l'aptitude qu'ils ont pu démontrer sur les items M est faible (axe des abscisses, $x < 0$), l'écart avec la mesure sur la partie avec les items H est positif (droite de régression au-dessus de l'axe des abscisses). Ceci signifie que, pour ces élèves, la partie historique leur a permis d'exprimer une meilleure compétence, ce que nous interprétons aussi comme une meilleure mise en réussite. À l'inverse, ceux dont l'aptitude était forte sur les items M (axe des abscisse, $x > 0$) ont un écart négatif (droite de régression au-dessus de l'axe des abscisses), ce que nous interprétons comme la proposition de nouveaux défis à ces élèves en forte réussite. En effet, il convient ici de rappeler que, comme le montrent les taux de réussite bruts et la modélisation 1PL globale, l'ensemble des exercices a été très bien réussi par les élèves. En moyenne, les élèves faibles ont obtenu +0.4 logit sur les items basés sur l'histoire (test t significatif avec $t = 4.2162$, $df = 50$, $p\text{-value} = 0.000104$), et les élèves les plus réussite -0.3 logit (test t significatif avec $t = -3.8018$, $df = 53$, $p\text{-value} = 0.0003729$). Ces résultats sont confirmés par les indices d de Cohen

(1988), qui indiquent dans les deux cas un effet¹¹⁶ significatif de taille moyenne ($d = 0.53$ pour les élèves faibles et $d = -0.64$ pour les élèves en forte réussite). Nous en concluons que notre hypothèse (H_3) est validée.

4.6 Discussion

Les analyses statistiques de l'activité confirment que les différentes tâches proposées dans le cadre de la partie sur la numération ancienne portent sur des objectifs mathématiques similaires que certains items de la première partie. Parmi ceux-ci, l'apprentissage lié à l'utilisation de la règle d'échange un pour dix, commune aux deux systèmes de numération est clairement mise en avant. Cette règle fondamentale de la numération décimale est aussi ce qui fait fonctionner les algorithmes d'addition et de soustraction, en particulier lors de la présence de retenues. Si un effet de dépaysement (Guillemette, 2017) est sans doute produit par la présence de symboles et de sources anciennes, les apprentissages reposent avant tout sur ce qu'il y a de commun dans les deux systèmes de numération, chinois ancien et usuel contemporain. Ce point rend explicite l'intérêt d'une analyse didactique approfondie afin de bien définir un double objectif ciblé (De Vittori, 2015) pour une activité à support historique. Comme nous avons pu le voir dans les analyses, les tâches ainsi produites peuvent alors être de difficulté variable. Le moteur de ces niveaux de difficulté trouve sa source à la fois dans une variation des valeurs numériques choisies (présence ou non de zéro, présence ou non de retenue dans les opérations, grands nombres) mais aussi dans la dimension historique (nouveaux symboles, nouvelles règles d'écriture des nombres). On pourra remarquer qu'alors que l'écriture d'un nombre à moins de quatre chiffres ne pose aucun problème aux élèves dans notre système usuel, l'écriture même de petits nombres peut s'avérer difficile dans le système chinois ancien. Par exemple, l'écriture dans le système habituel de 10100 (item M1b) a une difficulté modélisée de -2.599 alors que l'écriture dans le système chinois de 6789 (item H1c) est de -1.502 (environ 1 logit de différence). L'écart est encore plus prononcé lorsqu'il s'agit de passer, dans l'autre sens, du système chinois à notre système où la difficulté modélisée pour écrire le nombre 306 (item H2d) est de 0.069 (2 logits de différence par rapport à l'item M1b). Il y a donc un glissement du niveau de complexité cognitive introduit par le contenu historique, déjà supposé par Agterberg et al. (2021), mais que notre étude permet d'objectiver. La plus-value de l'histoire pour les élèves initialement faibles sur les items de mathématiques ordinaires suggère alors que ce glissement est néanmoins profitable pour tous les élèves. On peut faire l'hypothèse que l'histoire des mathématiques crée une situation suffisamment nouvelle pour, d'une certaine manière, réinitialiser les compétences des élèves. Dans cette situation inédite, les élèves n'ont pas encore vécu et donc pas de présupposés (bons ou mauvais) quant à leurs compétences. Notre étude rejoint en cela celle de Lim et Chapman (2015) qui avaient montré un effet positif de l'histoire des mathématiques sur la confiance en soi des élèves. Les auteurs avaient toutefois souligné que cet effet se produit surtout à court terme et qu'il tend à disparaître après quelques mois. Ce point nous amène à préciser les limites de notre étude car la première chose à noter, en lien avec ce qui vient d'être dit, est que même si elle est représentative de ce qu'on peut trouver dans les manuels scolaires, l'activité de notre expérimentation demeure unique. De ce fait, elle profite sans

¹¹⁶ Sawilowsky (2009) a affiné un peu la classification de Cohen (qui dans Cohen (1988) ne décrit que trois tailles, *small*, *medium*, et *large*) en distinguant des effets d (.01) = très petits, d (.2) = petits, d (.5) = moyens, d (.8) = grands, d (1.2) = très grands, et d (2.0) = énormes.

doute d'un effet de nouveauté que nous n'avons pas mesuré. Il resterait sans doute à vérifier ces résultats sur d'autres activités du même type à la fois selon le même protocole, mais aussi de manière longitudinale sur la durée avec la mise en œuvre de plusieurs activités sur un même groupe d'élèves. La deuxième limite de notre expérimentation concerne la représentativité de notre échantillon. En effet, bien qu'impliquant plus d'une centaine d'élèves, l'expérimentation a eu lieu dans le même établissement. Les professeurs étaient à chaque fois différents et l'établissement est considéré comme ordinaire, mais des biais pourraient être dus aux profils des élèves testés. Nous n'avons pas vraiment de raison de penser que ce biais ait pu avoir un impact sur nos résultats, mais une étude complémentaire à plus grande échelle sur un échantillon représentatif calibré serait sans doute souhaitable. Mais cela reste très difficile à mettre en œuvre.

Dans toutes nos analyses, nous sommes restés au niveau du modèle statistique. L'intérêt de cette méthode est de dégager des conclusions qui soient le plus possibles indépendantes d'une mise en œuvre particulière. Les niveaux de difficultés des différentes tâches et les objectifs d'apprentissage sont alors assurés par la modélisation et non par des valeurs empiriques particulières ou des analyses subjectives. On peut donc penser que l'activité proposée, et sans doute d'autres construites sur le même modèle, produiront les mêmes effets sur les élèves, quel que soit le contexte.

4.7 Sur la taille des échantillons en analyse de Rasch

Dans ce paragraphe, je vais simplement prolonger ma réflexion sur l'échantillon-classe et la pertinence d'analyses statistiques à cette échelle. Comme pour les analyses factorielles, les modélisations de type Rasch peuvent s'avérer adaptées pour des échantillons de taille bien plus modeste que la centaine d'élèves impliqués dans l'expérimentation qui vient d'être présentée. Dans une synthèse des résultats sur la stabilité des mesures en fonction du nombre d'items et du nombre de personnes, Linacre (1994) suggère ainsi que, dans le cas d'items dichotomiques, un effectif minimal d'environ 30 participants permet d'obtenir des résultats compatibles avec la majorité des usages, dont les études exploratoires. Dans le cas d'items polytomiques, un effectif minimal d'environ 50 est considéré comme suffisant. On constate donc que, toujours sous réserve de bien contrôler les données, l'échantillon-classe peut se prêter à des analyses avec le modèle de Rasch ou ses dérivés. L'intérêt de la modélisation est alors d'obtenir, par essence, des résultats qui ont une portée plus générale que les statistiques brutes sur un individu ou un item. On peut remarquer à ce sujet que l'analyse de Rasch est symétrique, dans le sens où elle ne fait pas la différence entre les items et les personnes, ce qui signifie qu'une expérimentation avec 30 items sur 30 personnes donnera de bonnes mesures à la fois sur les difficultés des items et sur les compétences individuelles (Azizan et al., 2020). Des expérimentations sur un échantillon-classe vérifient aisément ces conditions, ce qui peut s'avérer pertinent pour de nombreuses études didactiques. Pour des modèles plus exigeants comme 1PL, la taille de l'échantillon minimal est généralement plus grande (environ 200). Néanmoins, comme le souligne Downing (2003), ce grand nombre d'individus requis est beaucoup plus critique pour l'estimation des caractéristiques de l'item que pour l'estimation des aptitudes des individus. Si c'est précisément l'estimation de l'aptitude de l'élève qui est visée, des tailles d'échantillon de l'ordre de 50 peuvent être suffisantes pour une estimation assez précise, même avec un modèle 1PL.

4.8 Perspectives

Les approches quantitatives ont incontestablement de nombreux atouts qui n'ont que peu été mis en avant dans les études sur l'histoire des mathématiques en classe. Au-delà du constat subjectif de Clark et al. (2018) sur le besoin d'études empiriques donnant des preuves objectives des bienfaits potentiels de cette approche, quelques recensions plus précises des études liées à des pratiques effectives d'ores et déjà disponibles ont été réalisées par Jankvist (2007) et Bütüner (2015). Dans son pointage de 2007, réalisé à partir des actes des congrès HPM2004 et ESU4, Jankvist constate une très faible proportion d'articles qui proposent une véritable étude empirique (7 articles sur 78). Bien plus, après une lecture attentive dont Jankvist rend compte aussi dans son article, sa conclusion rejoint malheureusement celle de Gulikers et Blom (1991, p.223) qui, dès 1991, s'alarmaient en relevant que « la plupart des publications sont anecdotiques et racontent l'histoire d'un enseignant spécifique, alors qu'il n'est pas clair si les expériences (généralement positives) peuvent être transférées à d'autres enseignants, classes et types d'écoles, et comment (notre traduction). » À partir des années 2010, les choses s'améliorent un peu dans le domaine des études empiriques (voir par exemple Lemondis, 2016), mais comme nous avons pu le voir dans les données relevées dans le paragraphe 3.1, les approches quantitatives restent extrêmement marginales. Dans une méta-analyse effectuée sur la littérature disponible en 2015, Bütüner (2015) réussit toutefois à regrouper 6 études (seulement) pour un total de 364 individus impliqués sur plusieurs niveaux scolaires. Sur ce corpus, Bütüner reconstruit une mesure d'effet d de Cohen. La conclusion à laquelle il parvient n'est alors qu'un effet de taille 0.095 en faveur des groupes ayant fréquenté l'histoire des mathématiques, ce qui, selon les classifications est considéré comme faible voire négligeable. Il est donc clair que, si la plus-value de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe et en formation existe comme le pressentent les différents acteurs, la recherche doit encore affiner ses résultats pour en donner des preuves objectives. Dans le chapitre 3 et surtout le chapitre 4 de cette note, j'ai cherché à montrer comment, par un questionnement précis et par l'utilisation d'outils mathématiques adaptés, l'approche quantitative peut venir éclairer cette thématique. Mes premiers travaux sont ainsi en phase avec une part de la recherche internationale qui utilise des méthodes semblables comme par exemple Lim & Chapman (2015) qui ont étudié les effets psychologiques (comme l'anxiété et la motivation) et sur les résultats scolaires (tests) de l'histoire des mathématiques sur deux groupes d'environ 50 élèves dont un groupe test. Les auteurs ont ainsi pu montrer plusieurs temporalités avec des effets stables à l'échelle d'une année (sur les compétences scolaires en particulier et sur la manière dont les participants conçoivent les mathématiques) et des effets plus fugaces à l'échelle de quelques semaines (sur les dimensions affectives comme la motivation). Très récemment, Henderson (2020) dans sa thèse, a pu montrer des effets de taille moyenne (d de Cohen) dans des expérimentations ($n = 107$; groupe contrôle 67, groupe test 40) selon un dispositif qu'il décrit par l'acronyme IDEAS¹¹⁷ dans lequel l'histoire des mathématiques joue un rôle clé. Pour les trois questions de recherche abordées par Henderson, l'impact de l'approche IDEAS sur la compréhension de la nature des mathématiques, l'attitude des élèves face à cette discipline et les résultats scolaires, les écarts entre le groupe test et le groupe expérimental sont toujours significatifs avec des tailles d'effet de Cohen allant de 0.33 à 0.66.

¹¹⁷ « I (Introduce the concept through a hands-on activity); D (Discover the historical, cultural, and human context through biography); E (Examine the primary sources through inquiry); A (Actualize the learning through written reflection); and S (Synthesize the understanding through practice and application). » Henderson (2020, p.141).

Comme dans le cas de l'étude présentée dans le chapitre 4, les recherches que je compte développer par la suite s'inscrivent dans le courant méthodologique qui vient d'être décrit et visent à la fois l'échelle de l'échantillon-classe (ou de quelques classes), mais aussi, si possible, une plus grande échelle sur des effectifs compatibles avec des conclusions statistiques de portée prédictive. Cette approche reste profondément ancrée dans une étude des contenus disciplinaires spécifiques confirmant en cela une adhésion au rôle premier de la didactique des mathématiques qui a toujours été de comprendre les apprentissages des élèves et de chercher des moyens pour les améliorer.

Conclusion

Tout au long de cette note de synthèse, j'ai présenté ce qui constitue les fondations mais aussi la structure d'une thématique de recherche qui articule épistémologie, histoire et didactique des mathématiques. Cette thématique qui a été développée dans les quatre chapitres précédents, se compose *in fine* de deux grands axes, l'un plus théorique, à l'image de ce que j'ai pu détailler dans certains paragraphes (1.3 sur les aspects philosophiques, 2.3 et 2.4 sur l'articulation épistémologie-didactique, 3.3, 3.4 et 4.7 sur la taille des échantillons par exemple), l'autre plus expérimental (3.2 sur l'imaginaire en CM2, 4.1 à 4.5 sur la numération en 6^e pour les exemples les plus récents). Ces deux axes structureront les futurs développements de mes recherches en particulier sur les quelques sujets qui ont pu être détaillées au cours des réflexions précédentes mais que je vais reprendre succinctement ici.

En lien avec l'état du questionnement à l'échelle internationale, EDUHM vise à approfondir la recherche et le développement de cadres d'analyse pour l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe et en formation. Mes premières recherches à partir du modèle $ck\zeta$ ouvrent des perspectives prometteuses qu'il conviendra de prolonger. En particulier, ce cadre, mais aussi sans doute d'autres qui restent à identifier et/ou créer, fournit des outils pour une analyse fine des tâches et des interactions entre l'histoire des mathématiques (conceptions héritées du passées) et l'enseignement des mathématiques (conceptions scolaires actuelles). Ceci permet de mieux comprendre les éventuelles spécificités d'une situation de classe ou de formation qui implique l'utilisation d'un matériau historique. La typologie, SaMaH que j'ai évoquée dans le chapitre 2, constitue une première étape vers l'étude systématique de taxonomies qui sont le prolongement naturel de cette réflexion sur ce que fait, sur le plan cognitif, l'élève (ou l'étudiant). L'articulation entre, d'une part un cadre théorique ou un modèle général pour l'approche historique, et d'autre part la caractérisation des apprentissages effectifs, est un domaine d'étude dont je compte poursuivre le développement. Toujours sur le plan théorique, ces futures analyses questionnent aussi la place des expérimentations et des analyses de pratiques. Comme j'ai pu l'évoquer dans les chapitres 3 et 4, les études empiriques obligent une réflexion sur les outils d'analyse (cadre théorique, taxonomie, approche qualitative / quantitative, ...) mais aussi sur le groupe d'élèves ou d'étudiants sur lequel porte l'étude. La classe, le groupe-classe, le groupe-TD, etc. sont des entités dont les caractéristiques sont complexes au point qu'il est difficile de définir ce qu'elles sont exactement. Dans la lignée des questionnements sur l'échantillon-classe qui ont pu être ébauchés dans la deuxième partie de cette note, une partie des recherches dans EDUHM porteront sur l'étude statistique des petits effectifs afin de tenter d'en affiner la compréhension dans le cas particulier de groupes d'élèves ou d'étudiants (qui diffèrent, sans doute, de groupes-tests en médecine par exemple). Il s'agit là d'une partie de la recherche qui, tout en restant théorique, s'ancre dans des réalités de terrain. Ce terrain, c'est-à-dire les classes ou les groupes d'étudiants, est le deuxième domaine de développement d'EDUHM sur lequel je viens maintenant.

EDUHM est un programme de recherche qui est né des pratiques de classe, en particulier au travers de l'analyse des pratiques ordinaires. Comme cela a été rappelé dans cette note, l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe et en formation a une place de plus en plus forte dans les différents curricula de l'école primaire à l'université. Cette extension des pratiques exacerbe les deux principales questions qui ont pu guider les premiers développements de mes recherches. La première est le « comment ? » (intégrer efficacement l'histoire des mathématiques). Dans ce domaine, l'analyse des pratiques ordinaires constitue

un espace très riche dont la recherche doit permettre d'extraire des processus généraux, des principes, qui expliquent les apprentissages. À l'heure actuelle, il y a encore très peu de résultats clairs sur la manière d'insérer l'histoire des mathématiques dans l'enseignement, la charge étant pleinement laissée à l'enseignant. S'il ne s'agit pas, bien sûr, de trouver une recette miracle et universelle, la recherche didactique a pour rôle de donner des outils conceptuels pour concevoir des séquences ou des séances pertinentes pour les apprentissages scolaires ordinaires. Dans le cadre d'EDUHM, le travail avec les enseignants sur le terrain et les expérimentations avec les élèves visent explicitement à nourrir cette partie empirique de la recherche, en particulier par la constitution de corpus de séances tant sur le papier qu'en vidéo (voir le site www.eduhm.fr¹¹⁸ qui comprend déjà de nombreuses vidéos et séances). La constitution de ressources est un élément important d'EDUHM qui amène à la deuxième question liée aux pratiques, le « et alors ? » (c'est-à-dire les résultats sur les apprentissages). Comme cela a été rappelé dans le paragraphe précédent, les méthodes d'analyse peuvent être qualitatives ou/et quantitatives, mais quel que soit ce choix, il s'agit bien à terme de vérifier si les élèves ou les étudiants ont appris quelque chose. Je ne reviens pas ici sur tous les apports possibles de l'histoire des mathématiques qui ne se limitent pas aux seules performances scolaires, mais je souligne que mes recherches dans le cadre du programme EDUHM intègrent pleinement la question de l'impact réel sur les apprentissages. Cette dimension impose alors d'aller dans les classes, de proposer éventuellement des expérimentations, et de se doter d'indicateurs pertinents. La détermination de ces derniers est l'un des axes forts de mes futures études qui seront d'autant plus riches qu'elles porteront sur des effectifs conséquents. Une part de l'axe de développement empirique d'EDUHM consiste explicitement dans le développement d'études de terrain à différentes échelles, de l'échantillon-classe à des échantillons-représentatifs du système scolaire.

Je noterai pour terminer que les deux axes (théorique et empirique) internes au programme de recherche EDUHM se nourrissent des premiers travaux qui ont été détaillés dans cette note de synthèse mais sont aussi amenés à s'ouvrir vers d'autres outils, méthodes, questionnements. Pour n'en citer que deux exemples, j'évoquerai juste la psychologie et les nouvelles technologies. Au cours de mes premières études, le rôle de l'imaginaire, de la créativité, du récit, semble offrir des pistes de compréhension des potentialités de l'histoire des mathématiques en classe qui méritent d'être davantage explorées. Une recherche qui articulerait ces dimensions psychologiques et les apprentissages mathématiques de manière systématique serait sans doute riche d'enseignement. Concernant les nouvelles technologies, j'évoquerai plus particulièrement l'émergence dans l'éducation des outils liés à l'intelligence artificielle. En effet, au-delà du questionnement général sur la pertinence de cette approche, ces nouvelles applications offrent un développement rapide et facile à grande échelle (plateformes en ligne) et, dans certains cas (comme l'apprentissage par renforcement par exemple), un accès à des données qui peuvent permettre de construire des nouveaux indicateurs et des analyses statistiques de haut niveau. Ce ne sont là que quelques perspectives qui me permettent juste de rappeler qu'EDUHM n'est pas un programme fermé, centré sur un cadre théorique ou une méthode exclusive, c'est un espace de questionnement qui, même s'il est focalisé, par nature, sur un objet spécifique qu'est l'utilisation de l'histoire des mathématiques, demeure ouvert sur l'ensemble de l'enseignement et la formation en mathématiques.

¹¹⁸ Pour des raisons de droit à l'image, des identifiants sont nécessaires. Nom d'utilisateur *region-npdc* et la même chose comme mot de passe.

Références

- Agterberg, D. A., Oostdam, R. J. & Janssen, F. J. J. M. (2021). From speck to story: relating history of mathematics to the cognitive demand level of tasks. *Educational Studies in Mathematics*.
- Alquié, F. (1956). *Descartes, l'homme et l'œuvre*. Hatier.
- Anderson, L., Krathwohl, D., Airasian, P., Cruikshank, K., Mayer, R., Pintrich, P., Raths, J. & Wittrock, M. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing — A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. Addison Wesley Longman.
- Anicotte, R. (2019). *Le livre sur les calculs effectués avec des bâtonnets : Un manuscrit du -IIe siècle excavé à Zhangjiashan*. Presses de l'Inalco.
- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 9(3).
- Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. 10(2.3).
- Artigue, M. & Douady, R. (1985). La didactique des mathématiques en France. *Revue Française de Pédagogie*, 76.
- Althusser, L. (1974). *Philosophie et philosophie spontanée des savants*. Maspero – Paris.
- Azizan, N. H., Mahmud, Z., & Rambli, A. (2020). Rasch Rating Scale Item Estimates using Maximum Likelihood Approach: Effects of Sample Size on the Accuracy and Bias of the Estimates. *International Journal of Advanced Science and Technology*, 29(4s):2526-2531.
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Vrin.
- Bächtold, M., Durand-Guerrier, V., & Munier, V. (2018). *Épistémologie & Didactique. Synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales*. PUFC.
- Balacheff N., Margolinas C. (2005). κ Modèle des connaissances pour le calcul de situation didactiques. In Mercier A. & Margolinas C. (eds.) *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp.1-32). Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage.
- Balacheff, N. (2013). κ , a model to reason on learners' conceptions. In M. V. Martinez, A. Castro (Eds.). *PME-NA 2013 - Psychology of Mathematics Education*, North American Chapter, Nov 2013, Chicago, IL, United States. pp.2-15.
- Barbin, E. (1997). Sur les relations entre épistémologie, histoire et didactique. *Repères IREM*, 27.
- Barbin, E. (Dir.) (2010). *De grands défis mathématiques d'Euclide à Condorcet*. Vuibert.
- Barbin, E. (2011). Dialogism in mathematical writing: historical, philosophical and pedagogical issues. In V. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *MAA notes*, 78.
- Barbin, E. (Dir.) (2012a). *Les mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs*. Vuibert.
- Barbin, E. (2012b). L'histoire des mathématiques dans la formation : une perspective historique (1975-2010). In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012*, pp. 546–554.

- Barbin, E. (2014). Une approche bakhtinienne des textes d'histoire des sciences, in *Méthode et histoire. Quelle histoire font les historiens des sciences et des techniques ?* Dir. A.-L. Rey, Classiques Garnier.
- Barbin, E., Guichard, J.-P., Moyon, M., Guyot, P., Morice-Singh, C., Métin, F., Bühler, M., Tournès, D., Chorlay, R. & Hamon, G. (Eds.) (2018). *Let history into the mathematics classroom*. Springer.
- Barbin, E., Guillemette, D., & Tzanakis, C. (2020). History of mathematics and education. In S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of mathematics education*. Springer.
- Barr, D. C. (1978). A comparison of three methods of introducing two-digit numeration. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9(1):33-43.
- Barrier, T., Mathé, A.-C. & De Vittori, T. (2012). Des séances ordinaires comportant une dimension historique : quels enseignements ? *Petit x*, 90, 5-34.
- Bartolini Bussi, M. G. B., & Sun, X. H. (Eds) (2018). *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades. The 23rd ICMI Study*. Springer.
- Baturo, A. (2000). Construction of a numeration model: A theoretical analysis. In J. Bana & A. Chapman (Eds.), In *Proceedings 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 95–103).
- Bednarz, N., & Janvier, B. (1982). The understanding of numeration in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 13(1):33-57.
- Béland, S., Magis, D., & Raïche, G. (2013). Estimation des paramètres d'item et de sujet à partir du modèle de Rasch : une étude comparative des logiciels BILOG-MG, ICL et R. *Mesure et évaluation en éducation*, 36(1):83-110.
- Belaval, Y. (1993). *Leibniz, initiation à sa philosophie*. Vrin.
- Bioesmat-Martagon, L. (Ed.) (2016). *Éléments d'une biographie de l'Espace géométrique*. Presses Universitaires de Nancy.
- Bloom, B. S. (1994). Reflections on the development and use of the taxonomy. In Rehage, Kenneth J., Anderson, Lorin W., Sosniak & Lauren A. (eds.). *Bloom's taxonomy: A forty-year retrospective. Yearbook of the National Society for the Study of Education. Vol. 93*. Chicago: National Society for the Study of Education.
- Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H. & Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals*. Vol. Handbook I: Cognitive domain. New York: David McKay Company.
- Blum, W., Artigue, M., Mariotti, M. A., Sträßer, R. & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2019). *European Traditions in Didactics of Mathematics*. Springer
- Boèce. (1995). *Institution arithmétique*. Texte établi et traduit par Jean-Yves Guillaumin, Les Belles Lettres.
- Bodin, A. (2015). Didactique des mathématiques et évaluation : petite histoire de 40 ans de chemins parallèles. À terme, l'évaluation est-elle soluble dans la didactique ? In A.-C. Mathé & E. Mounier (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. ARDM.

- Bodin, A. & Gras, R. (2017). L'ASI analyseur et révélateur de la complexité cognitive taxonomique. In J-C. Régnier, R. Gras, R. Couturier, A. Bodin (Eds), *Actes du IXème colloque de l'Analyse Statistique Implicative*. Université Bourgogne Franche-Comté.
- Bodner, G. M. (1980). Statistical analysis of multiple-choice exams. *Journal of Chemical Education*, 57(3):188–190.
- Boulais, P., Brouzet, R., Durand-Guerrier, V. & Majaj, M. (2019). Enseignement et apprentissage de l'infini : aspects philosophiques, épistémologiques et didactiques. In M. Abboud (Ed.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes du colloque Espaces Mathématiques Francophones (EMF 2018)*.
- Bourbaki, N. (1960). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Hermann.
- Bråting, K. & Pejlare J. (2015). On the relations between historical epistemology and students' conceptual developments in mathematics. *Educational studies in mathematics*, 89(2):251-265.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (1993). *Fiches de Statistiques non paramétriques pour la Didactique*. LADIST, Université Bordeaux 1, en ligne guy-brousseau.com. Consulté le 23/03/2022.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics* (Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield). Springer.
- Brousseau, G. (2015). *Les origines de la recherche « fondamentale » en didactique de la statistique*. En ligne guy-brousseau.com. Consulté le 23/03/2022.
- Bütüner, S. Ö. (2015). Impact of Using History of Mathematics on Students Mathematics Attitude: A Meta-Analysis Study. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 3(4):337- 349.
- Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Université Paris Diderot, Thesis.
- Chambris, C. (2018) The influence of theoretical mathematical foundations on teaching and learning: a case study of whole numbers in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, Springer, 97 (2):185-207.
- Chambris, C., Tempier, F., & Allard, C. (2017). Un regard sur les nombres à la transition école-collège. *Repères IREM*, 108:63-91.
- Chasles, M. (1875). *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne ; suivi d'un Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie*. Gauthier-Villars.
- Chesné J.-F., & Fischer J.-P. (2015). Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire. Rapport pour la conférence de consensus Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. CNESCO.
- Chorlay, R. (2016). Historical sources in the classroom and their educational effects. In L. Radford, F. Furighetti, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting*

of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics (pp. 5-23). Montpellier, France: IREM de Montpellier.

Clark, C., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., Tzanakis, C. & Wang, X. (2016). History of mathematics in mathematics education: Recent developments. In L. Radford, F. Furinghetti, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting – HPM 2016* (pp. 135-179). IREM de Montpellier.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S. & Tzanakis, C. (Eds). (2018). *Mathematics, Education and History: Towards a Harmonious Partnership*. Springer.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., & Tzanakis, C. (2019) publié dans History of mathematics in mathematics education – An overview. *Mathematica Didactica*, 42(1).

Cliff, N., & Pennell, R. (1967). The influence of communality, factor strength, and loadings on the sampling characteristics of factor loadings. *Psychometrika*, 32(3):309-326.

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences. Second edition*. Lawrence Erlbaum Associates.

Comrey, A. L., & Lee, H. B. (1992). *A first course in factor analysis (2nd ed.)*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Condette, J.-F. (2007). *Histoire de la formation des enseignants en France (xix^e-xx^e siècles)*. L'Harmattan.

Costello, A. B. & Osborne, J. (2005). Best practices in exploratory factor analysis: four recommendations for getting the most from your analysis. *Practical Assessment, Research, and Evaluation*, 10.

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, 16.

d'Enfert, R. (2003) *L'enseignement mathématique à l'école primaire, de la Révolution à nos jours. Textes officiels. Tome 1 : 1791-1914*, INRP.

d'Enfert, R. (2015). *L'enseignement mathématique à l'école primaire, de la Révolution à nos jours. Textes officiels. Tome 2 : 1915-2000*, Presses universitaires de Limoges.

d'Enfert, R. & Gispert, H. (2011). Une réforme à l'épreuve des réalités : le cas des mathématiques modernes au tournant des années 1970. *Histoire de l'Éducation*, 131.

d'Enfert, R., Moyon, M. & Valente, W. R. (eds). (2017). *Les mathématiques à l'école élémentaire (1880-1970) : études France-Brésil*. Presses Universitaires de Limoges.

De Risi, V. (2007). *Geometry and Monadology: Leibniz's Analysis Situs and Philosophy of Space*. Birkhäuser.

De Risi, V. (2015). *Mathematizing Space. The Objects of Geometry from Antiquity to the Early Modern Age*. Springer.

Descartes, R. (1987). *Discours de la méthode, plus la dioptrique, les météores et la géométrie*. Fayard.

Descartes, R. (2003). *Règles pour la direction de l'esprit*. Vrin.

De Vittori, T. (2009a). *Les notions d'espaces en géométrie. De l'Antiquité à l'Âge Classique*. L'Harmattan.

De Vittori, T., & Loeuille, H. (2009b). Former des enseignants à l'histoire des sciences : analyse et enjeux d'une pratique en mathématiques. *Petit x*, 80.

De Vittori, T. (2011a). The perfect compass: conics, movement and mathematics around the 10th century. In E. Barbin, M. Kronfellner & C. Tzanakis (Eds.), *History and epistemology in mathematics education. Proceedings of the 6th European Summer University* (pp.539-548). Vienna: Verlag Holzhausen GmbH / Holzhausen Publishing Ltd.

De Vittori, T. (2011b). La caractéristique géométrique de G. W. Leibniz : présentation et perspectives. In E. Barbin & P. Lombard, *La figure et la lettre. Actes du XVIIe colloque inter-IREM Histoire et épistémologie des mathématiques* (pp. 299-310). Presses Universitaires de Nancy, France : Nancy.

De Vittori, T. (2012). History in mathematics teaching: Current problems and new proposals. *Almagest*, 3(1).

De Vittori, T. (2013). De la géométrie sans figure, est-ce possible ? L'exemple de la Caractéristique Géométrique de G.W.Leibniz. In D.Banks (Ed.) *L'image dans le texte scientifique* (pp.119-132), L'Harmattan.

De Vittori, T. (2015). Les tâches des élèves dans une activité mathématique à dimension historique. *Petit x*, 97.

De Vittori, T. (2016). Analysis of pupils tasks in the use of history in mathematics teaching. In L. Radford, F. Furinghetti & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM 2016, 18-22 July 2016)*.

De Vittori, T. (2018). Analyzing the use of history in mathematics education: Issues and challenges around Balacheff's *ckz* model. *Educational Studies in Mathematics*, 99(2).

De Vittori, T. (2021). On the role of imagination in the use of history in mathematics education. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3).

De Vittori, T. & Visentin, M.-P. (2021). Supports historiques et enseignement des mathématiques : sur le rôle de l'imagination. *Grand N*, 108.

De Vittori, T., d'Enfert, R., Grevet, J.-F., Morel, T. & Roland, F. (Eds.). (à paraître 2022) *Histoire de bobines. L'audiovisuel pédagogique dans la deuxième moitié du XXe siècle*. Presses universitaires du Septentrion.

DiBattista, D., & Kurzawa, L. (2011). Examination of the quality of multiple-choice items on classroom tests. *Canadian Journal for the Scholarship of Teaching and Learning*, 2(2).

Dieudonné, M., Droniou, J., Durand-Guerrier, V., Ray, B. & Théret, D. (2011). Bilan de praticiens sur la transition Lycée-Université. Exemple de l'algèbre linéaire. *Repères IREM*, 85.

Dorier J. (1990). Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire. *Cahier de DIDIREM*, 7.

Dorier, J.-L. (2000). Recherches en didactique et en histoire des mathématiques sur l'algèbre linéaire - Perspective théorique sur leurs interactions, *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, 12.

Dorier, J.-L. (2014). Aperçu de l'histoire de la didactique des mathématiques francophone. *Perspectivas da Educação Matemática*, 7(15).

- Douady R. (1983). Rapport enseignement apprentissage : dialectique outil-objet, jeux de cadre. Cahier de didactique des mathématiques, 3.
- Downing, S. M. (2003). Item response theory: applications of modern test theory for assessments in medical education. *Medical Education*, 37, 739-745.
- Durand-Guerrier V., Tanguay D. (2018). Working on proofs as contributing to conceptualization – The case of R Completeness. In Stylianides A.J., Harel G. (eds) *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving. An international perspective. ICME-13 Monographs*. Springer.
- Durand-Guerrier, V. & Vergnac, M. (2018). Le continu entre intuition et formalisation Regards croisés épistémologiques et didactiques. In Bächtold, M., Durand-Guerrier, V., & Munier, V. (Eds.), *Épistémologie & didactique : Synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales*. Presses universitaires de Franche-Comté.
- Eberhard-Bréard, A. (2008). Mathematics in China. In: Selin H. (eds) *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures*. Springer.
- Efron, B., & Tibshirani, R.J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall.
- El Hage, S., & Ouvrier-Buffet, C. (2018). Les démarches de chercheurs en physique et en mathématiques. Enjeux didactiques d'une nouvelle approche épistémologique. *Recherches en Éducation*, 34.
- Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds). (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. New ICMI Study Series, vol.6, Dordrecht: Kluwer.
- Fauvel, J. & Fasanelli, F. (2006). History of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics: the first twenty five years, 1976-2000. *Proceedings of HPM 2004 & ESU 4: ICME 10 Satellite Meeting of the HPM Group & Fourth European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*, edited by Furinghetti, F., Kaisjer, S., & Tzanakis, C. University of Crete, Greece, 2006, pp.x-xxviii.
- Frege, G. (1970). *Les fondements de l'arithmétique*. Trad. C. Imbert. Seuil.
- Furinghetti, F., & Radford, L. (2008). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In L. English (Ed.) & M. Bartolini Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman, d. Tirosh (Assoc. Eds), *Handbook of international research in mathematics education*, second edition, (pp.630-659). Routledge.
- Fuson, K. C. (1990). Conceptual structures for multiunit numbers: Implications for learning and teaching multidigit addition, subtraction, and place value. *Cognition and Instruction*, 7(4):343-403.
- Galilée. (1980). *L'essayeur de Galilée*. Trad. Christiane Chauviré, Presses Universitaires de Franche-Comté.
- Gispert, H. (2010). La réforme de 1902 et la réforme des mathématiques modernes (1967-1973), deux réformes dans leur contexte mathématiques, sociaux et épistémologiques. in *Associazione Subalpina Mathesis Conferenze e seminari 2009-2010*, F. Ferrara, L. Giacardi, M. Mosca (dir.), Turin, Kim Williams, 2010.
- Gonseth, F. (1955). *La géométrie et le problème de l'espace. Chapitre VI : Le problème de l'espace*. Éditions du Griffon.

- Gorsuch, R. L. (1983). *Factor analysis*. Hillsdale, N.J.: L. Erlbaum Associates.
- Granger, G. G. (1999). *La pensée de l'espace*. Odile Jacob.
- Gras, R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques*. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1.
- Grimoult, C. (2003). *Histoire de l'histoire des sciences : historiographie de l'évolutionnisme dans le monde francophone*. Librairie Droz.
- Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67 (3).
- Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71(3).
- Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (Eds.). (2012). *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development*. New York: Springer.
- Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (2013). Collective work with resources: An essential dimension for teacher documentation. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 45(7).
- Guillemette, D. (2015). *L'histoire des mathématiques et la formation des enseignants du secondaire : sur l'expérience du dépaysement épistémologique des étudiants*. Thèse de doctorat. UQAM, Montréal, Québec.
- Guillemette, D. (2017). History of mathematics in secondary school teachers' training: towards a nonviolent mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1):349-365.
- Guillemette, D. (2019). Being in research and doing research on history and mathematics education in a Bakhtinian dialogical perspective. In E. Barbin, U.T. Jankvist & T.H. Kjeldsen (Eds.), *Proceedings of European Summer University - ESU 8*.
- Gulikers, I. & Blom, K. (1991). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of the history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47 (2), 223-258.
- Hancock, G. R., Stapleton, L. M., & Mueller, R. O. (Éds.). (2019). *The reviewer's guide to quantitative methods in the social sciences* (Second Edition). Routledge, Taylor & Francis Group.
- Henderson, D. K. (2020). *On the shoulders of giants: Helping students understand mathematics through its history*, PhD Thesis, University of Atlanta.
- Herreman, A. (2000). Le sens d'un texte mathématique. *Revue d'histoire des sciences*, 53(2).
- Hocquenghem, M.-L., Missenard, C., Missenard, D., Monnet, F., Serfati, A.-M., & Tardary, G. (1982). *Histoire des mathématiques pour les collègues*. IREM de Paris 7.
- Houdement, C., & Chambris, C. (2013). Why and how to introduce numbers units in 1st and 2nd grades. In B. Ubuz, Ç. Haser, M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education* (pp. 313–322). Antalya, Turkey.

- Houdement, C., & Tempier, F. (2019). Understanding place value with numeration units. *ZDM Mathematics Education*, 51(1):25-37.
- I.R.E.M. (1988). *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*. Bulletin Inter-IREM Épistémologie.
- I.R.E.M. (1993). *La Figure et l'Espace. Actes du 8ème colloque Inter-Irem Épistémologie et Histoire des Sciences - Lyon 1991*. IREM de Lyon.
- Itard, J. (1965). Bourbaki (Nicolas). Éléments d'histoire des mathématiques. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 18(1).
- Itard, J. (1984). *Essais d'histoire des mathématiques*. Albert Blanchard.
- Jankvist, U. T. (2007). Empirical research in the field of using history in mathematics education. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 12(3), 83-105.
- Jankvist, U.T. (2010). An empirical study of using history as a 'goal'. *Educational Studies in Mathematics*, 74(1).
- Jankvist, U. T. (2012). A first attempt to identify and classify empirical studies on 'History in Mathematics Education'. In B. Sriraman (Ed.), *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education* (pp. 295-332). The Montana Mathematics Enthusiast Monographs 12. Information Age Publishing.
- Jankvist, U.T. (2015). Changing students' images of "mathematics as a discipline". *The journal of mathematical behavior*, 38:41-56.
- Jankvist, U.T. & Kjeldsen, T.H. (2011). New avenues for history in mathematics education: Mathematical competencies and anchoring. *Science & Education*, 20.
- Johsua, S. (1996). Qu'est-ce qu'un « résultat » en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(2).
- Jovignot, J. (2018). L'analyse épistémologique du concept d'idéal et son apport à l'étude didactique. In Manuel Bächtold, Viviane Durand-Guerrier, & Valérie Munier (Eds.), *Épistémologie & Didactique*, 2018, PUFC.
- Kaiser, H. F. (1974). An index of factorial simplicity. *Psychometrika*, 39.
- Kaiser, H. F. & Rice, J. (1974). Little Jiffy, Mark IV. *Educational and Psychological Measurement*, 34(1).
- Kim T., & Paek I. (2017). A comparison of item parameter and standard error recovery across different R packages for popular unidimensional IRT models. In: van der Ark L.A., Wiberg M., Culpepper S.A., Douglas J.A., Wang W.C. (Eds) *Quantitative Psychology: The 81st Annual Meeting of the Psychometric Society, Asheville, North Carolina, 2016*. Springer.
- Kuzniak, A. (1994). Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Actes du XXIème Colloque de la COPIRELEM – Chantilly 1994*.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.
- Leibniz, G. W. (1995). *La caractéristique géométrique*. Vrin.
- Lemes, A. J. (2019). *L'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants : éléments pour la construction d'une compétence historique*. Thèse de doctorat. Université de Lille.

- Lemondis, C. (2016). The use of history of mathematics in mathematics education, *MENON @online Journal of Educational Research*, 2nd thematic issue, May, 2016.
- Linacre, J. M. (1994) Sample Size and Item Calibration Stability. *Rasch Measurement Transactions*, 7(4):328.
- MacCallum, R. C., Widaman, K. F., Zhang, S., & Hong, S. (1999). Sample size in factor analysis. *Psychological Methods*, 4(1), 84–99.
- Macherey, P. (2009). La philosophie de la science de Georges Canguilhem. Épistémologie et histoire des sciences, in De Canguilhem à Foucault, la force des normes, La fabrique éditions.
- Marshall, G.L. (2000). *Using history of mathematics to improve secondary students' attitudes towards mathematics*. Illinois State University, Bloomington–Normal, Illinois. Thesis.
- Martinková, P., & Drabinová, A. (2018). ShinyItemAnalysis for teaching psychometrics and to enforce routine analysis of educational tests. *The R Journal*, 10(2):503-515.
- Moyon, M. & Tournès, D. (Eds) (2018). *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire en Cycle 3*. ARPEME.
- Moyon, M., Chorlay, R. & Plantevin, F. (2018) Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3. In F. Vandebrouck & B. Lebot *Mathématiques au Cycle 3 Actes du Colloque du Plan National de Formation* (pp.87-110), IREM de Poitiers.
- Munier, V., Chesnais, A., & Molvinger, K. (2018). La mesure en mathématiques et en physique : enjeux épistémologiques et didactiques. In Manuel Bächtold, Viviane Durand-Guerrier, & Valérie Munier (Eds.), *Épistémologie & Didactique*, 2018, PUFC.
- Pallarès, G., Hausberger, T. & Roy, A. (2021). Comment promouvoir la réflexion épistémologique dans la formation des enseignants de mathématiques ? Une approche mixte didactique et philosophique. *Éducation & Didactique*, 15.
- Panza, M. & Sereni, A. (2013). *Introduction à la philosophie des mathématiques*. Champs essais.
- Paquot, T. & Younès, C. (eds) (2012). *Espace et lieu dans la pensée occidentale. De Platon à Nietzsche*. Paris, La Découverte.
- Parsons, C. (2008). *Mathematical thought and its objects*. Cambridge University Press.
- Pascal, B. (1963). *Œuvres*. Seuil.
- Poisard, C. (2005). *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques : le cas des instruments à calculer*. Thèse de l'Université de Provence.
- Prost, A. (dir) (2014). *La formation des maîtres de 1940 à 2010*. Presses Universitaires de Rennes.
- R Core Team (2020). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Rabouin, D. (2018). *G.W. Leibniz. Mathesis Universalis. Écrits sur la mathématique universelle*. Vrin.
- Rashed, R. (1993). *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle. Vol. I : Fondateurs et commentateurs : Banū Musā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd*. Londres : al-Furqan Islamic Heritage Foundation.

- Rashed, R. (1996). *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle. Vol. II : Ibn al-Haytham*. Londres : al-Furqan Islamic Heritage Foundation.
- Rashed, R. (2000). *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle, vol. III : Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique*. Londres : al-Furqan Islamic Heritage Foundation.
- Rashed, R. (2002). *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle, vol. IV : Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*. Londres : al-Furqan Islamic Heritage Foundation.
- Rashed, R. (2006). *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle. Vol. V : Ibn al-Haytham : Géométrie sphérique et astronomie*. London : al-Furqan Islamic Heritage Foundation
- Rashed, R. (2011). *D'al-Khwarizmi à Descartes : Études sur l'histoire des mathématiques classiques*. Hermann.
- Rashed, R. (2015). *Classical mathematics from Al-Khwarizmi to Descartes*. Translation M. H. Shank. Routledge.
- Rashed, R. & Morelon, R. (Éds.). (1997). *Histoire des sciences arabes*. 3 vol., Seuil.
- Revelle, W. (2021) *psych: Procedures for personality and psychological research*, Northwestern University, Evanston, Illinois, USA, Version = 2.1.6.
- Rey-Courtel, A.-L. (Éd.). (2013). *Méthode et histoire : Quelle histoire font les historiens des sciences et des techniques ?* Classiques Garnier.
- Rizopoulos, D. (2006). Irm: An R package for latent variable modelling and item response theory analyses. *Journal of Statistical Software*, 17(5):1-25.
- de Roberval, G. P. (1996). *Éléments de géométrie*. Vrin.
- Robert A. (1987). De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire. *Cahier de didactique des mathématiques*, 47.
- Robinet J. (1984). *Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.
- Sawilowsky, S. S. (2009). New Effect Size Rules of Thumb. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 8(2).
- Schubring, G. (2006). Ontogeny and phylogeny. Categories for cognitive development. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of HPM 2004 & EUS 4* (pp. x-xxviii). Iraklion: University of Crete.
- Schubring, G. (2011). Conception for relating the evolution of mathematics concepts to mathematics learning – epistemology, history, and semiotics interactive. *Educational studies in mathematics*, 77(1):79-104.
- Slepkov, A. D., Van Bussel, M. L., Fitze, K. M., & Burr, W. S. (2021). A Baseline for Multiple-Choice Testing in the University Classroom. *SAGE Open*.
- Slocum, S. L. (2005). *Assessing unidimensionality of psychological scales: using individual and integrative criteria from factor analysis*. University of British Columbia, Thesis.

- Takenouchi, O. (2006). The mathematical works of Takebe Katahiro. In: F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds), Proceedings HPM 2004 - ESU 4 (Uppsala), Rev. edition.
- Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Université Paris Diderot, Thesis.
- Tempier, F. (2016a). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N*, 98 :67-90.
- Tempier, F. (2016b). New perspectives for didactical engineering. An example for the development of a resource for teaching decimal number system. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(2-3):261-276.
- Thomas, N. (2004). The development of structure in the number system. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 305–312). Bergen University College Press.
- Thompson, B. (2004). Exploratory and confirmatory factor analysis: Understanding concepts and applications. *American Psychological Association*.
- Tournès, D. (1993). Place de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants du secondaire. *Expressions*, 3.
- Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (2020). Documentational approach to didactics. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd edition, pp. 237-247). Springer.
- de Varent, C. (2018a). *Pluralité des concepts liés aux unités de mesure - Liens entre histoire des sciences et didactique, le cas de l'aire du carré dans une sélection de textes anciens*. Thèse de l'Université Sorbonne Paris Cité.
- de Varent, C. (2018b). Experimentation on the Effects of Mathematical Diversity. In Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., & Tzanakis, C. (Eds.), *Mathematics, education and history: towards a harmonious partnership* (pp.255-281), Springer International Publishing.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques*, 10(2.3).
- Vermeer, K. & Regier, J. (eds) (2016) *Boundaries, Extents and Circulations. Space and Spatiality in Early Modern Natural Philosophy*. Springer.
- Viennot, L. (Ed.) (2008). *Didactique, épistémologie et histoire des sciences – Penser l'enseignement*. PUF.
- Vuillemin, J. (1960). *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*. PUF.
- de Winter, J. C., Dodou, D., & Wieringa, P. A. (2009). Exploratory Factor Analysis with small wample wizes. *Multivariate behavioral research*, 44(2), 147–181.

Annexe

Exercices (1)

Question 1

Dictée de nombres

2 305	10 100	30 095
215 230	6 800 000	45 900 030

Question 2

Pose et effectue les additions suivantes

$3,29 + 1,05$	$66,7 + 2,42$
$786 + 8,6$	

Question 3

Pose et effectue les soustractions suivantes

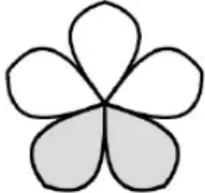
$65,4 - 21,3$	$24,1 - 0,25$
$2043 - 22,2$	

Question 4

$3500 : 10 =$	$230 : 100 =$
$451 : 100 =$	$75\,659 : 1\,000 =$

Question 5

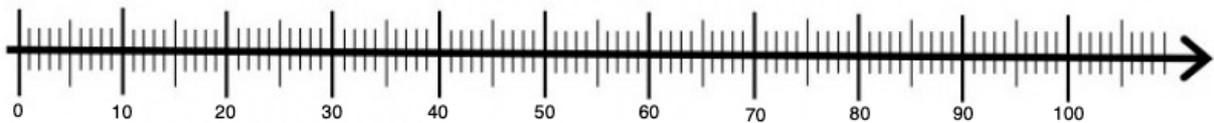
Observe le dessin puis complète la phrase par une fraction



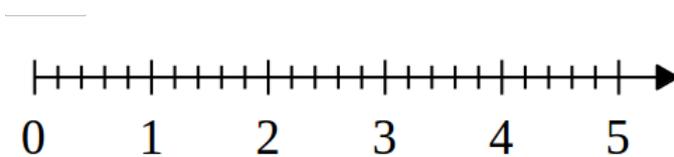
La zone coloriée représente de l'aire de la fleur.

Question 6

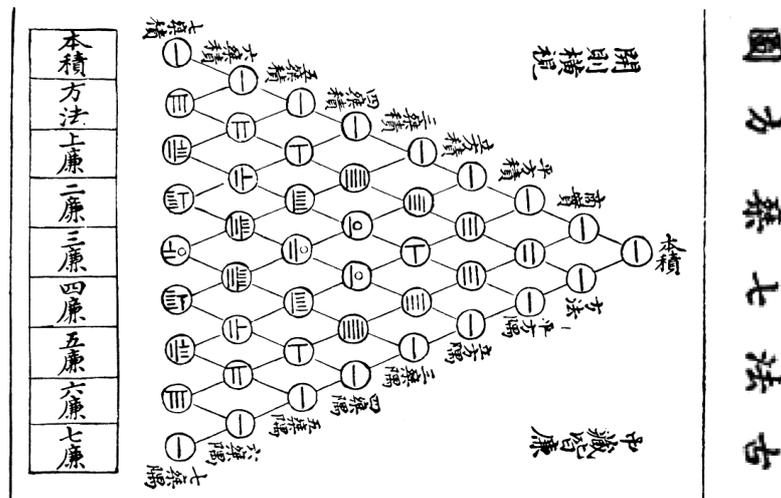
Sur l'axe gradué ci-dessous, place le point A d'abscisse 25 et le point B d'abscisse 58.



Sur l'axe gradué ci-dessous, place le point C d'abscisse $\frac{3}{5}$ et le point D d'abscisse $\frac{12}{5}$.



Un système de numération chinois du 2^{ème} siècle après J.-C.



Triangle dit de Pascal publié en 1303 par Zhu Shijie (1260-1320) – Image : wikipedia

Dans les petits cercles du manuscrit ci-dessus, des nombres sont écrits avec un système de numération qui date du 2^{ème} siècle après J.-C. Bien plus tard, le mathématicien français Blaise Pascal (1623-1662) a lui aussi trouvé ce résultat. On a donné le nom à cette représentation en triangle en son hommage. Cet enchainement de nombres écrits sous cette forme est très utile aux mathématiciens pour faire certains calculs.

1. Système de numération chinois

Au 2^{ème} siècle après J.-C., les Chinois écrivaient les nombres avec un système dont voici le fonctionnement.

Le **système est décimal**.

On représente les chiffres des **unités** et des **centaines** en disposant des baguettes de la façon suivante :

Un	Deux	Trois	Quatre	Cinq	Six	Sept	Huit	Neuf
					┐	┑	┒	┓

Pour faciliter la lecture, les baguettes représentant les chiffres des **dizaines** et des **milliers** sont disposées autrement :

Un	Deux	Trois	Quatre	Cinq	Six	Sept	Huit	Neuf
—	=	≡	≡	≡	┌	┐	≡	≡

Par exemple, | ┌┑ représente le nombre 167 et | ┑┑ représente le nombre 107.

2. Premiers exemples

À partir des règles rappelées ci-dessus, écris en chinois du 2^{ème} siècle les nombres suivants :

12 : —	332 : ≡
33 : ≡	467 : ⊥ ⊤
46 : ≡ ⊤	5678 : ≡ ⊤ ⊥

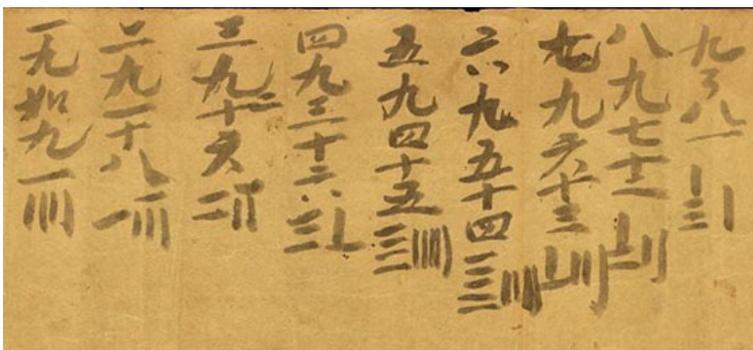
3. Lire un manuscrit chinois ancien

Écris les nombres suivants avec le système français en sachant que tous les nombres sont inférieurs à 1 000 :

≡ : 51	≡ : 81	≡ ⊤ : 457
----------	----------	-----------

≡ : 40	Pour ce nombre, que remarques-tu ? Il n'y a pas de zéro pour les unités
: 409	Pour ce nombre, que remarques-tu ? Il n'y a pas de zéro pour les dizaines

Le manuscrit ci-dessous est un texte mathématique du 7^{ème} siècle. La dernière ligne donne une suite de nombres. Écris cette liste de nombres avec le système français.



Source : British Museum (Or.8210) International Dunhuang Project (idp.bnf.fr)

Les nombres sont :	9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81
Reconnais-tu cette suite de nombres ?	C'est la table de multiplication par 9

Exercices (2)

Question 1

Écris les nombres suivants avec le système chinois :

73 : ㄩ Ⅲ	221 : Ⅱ = Ⅰ	6789 : ㄩ ㄗ ㄩ Ⅲ
----------	-------------	----------------

Question 2

Écris les nombres suivants avec le système français en sachant que tous les nombres sont inférieurs à 1 000 :

≡ Ⅱ : 42	≡ : 50
Ⅲ ≡ ㄗ : 346	Ⅲ ㄗ : 306

Question 3

Écris avec le système chinois le nombre qui vient juste après chacun des nombres suivants (tous les nombres sont compris entre 10 et 99) :

= Ⅲ	= Ⅳ
= Ⅳ	= ≡

Question 4

Écris avec le système chinois le nombre qui vient juste avant chacun des nombres suivants (tous les nombres sont compris entre 10 et 99) :

= Ⅱ	= Ⅲ
ㄩ Ⅲ	ㄩ

Question 5

Écris avec le système chinois le nombre qui vient juste avant chacun des nombres suivants (tous les nombres sont compris entre 1000 et 9999) :

ㄩ ㄗ ㄩ Ⅲ	ㄩ ㄗ ㄩ Ⅳ
ㄩ ㄗ ㄩ Ⅳ	ㄩ ㄗ ㄩ

Liste des documents annexés à la note de synthèse

Classification :

[BOOK] : ouvrage publié

[ACL] : article dans une revue internationale à comité de lecture

[AnCL] : article dans une revue nationale à comité de lecture

[ACT] : chapitre dans des actes de congrès nationaux ou internationaux

[CHAP] : chapitre d'ouvrage

[Soum] : article soumis

Chapitre 1

Document 1 [BOOK] : De Vittori, T. (2009a). *Les notions d'espace en géométrie. De l'Antiquité à l'Âge Classique*. Collection Acteurs de la Science, L'Harmattan, 160 pages.

Document 2 [ACT] : De Vittori, T. (2011a). The perfect compass: conics, movement and mathematics around the 10th century. In E. Barbin, M. Kronfellner & C. Tzanakis (Eds.), *History and epistemology in mathematics education. Proceedings of the 6th European Summer University* (pp.539-548). Vienna: Verlag Holzhausen GmbH / Holzhausen Publishing Ltd.

Document 3 [ACT] De Vittori, T. (2011b). La caractéristique géométrique de G. W. Leibniz : présentation et perspectives. In E. Barbin & P. Lombard, *La figure et la lettre. Actes du XVIIe colloque inter-IREM Histoire et épistémologie des mathématiques* (pp. 299-310). Presses Universitaires de Nancy, France : Nancy.

Document 4 [CHAP] : De Vittori, T. (2013). De la géométrie sans figure, est-ce possible ? L'exemple de la Caractéristique Géométrique de G.W.Leibniz. In D.Banks (Ed.) *L'image dans le texte scientifique* (pp.119-132), L'Harmattan.

Chapitre 2

Document 5 [AnCL] : De Vittori, T., & Loeuille, H. (2009b). Former des enseignants à l'histoire des sciences : Analyse et enjeux d'une pratique en mathématiques. *Petit x*, 80, 5-22.

Document 6 [ACL] : De Vittori, T. (2012). History in mathematics teaching: Current problems and new proposals. *Almagest*, 3(1).

Document 7 [AnCL] : Barrier, T., Mathé, A.-C. & De Vittori, T. (2012). Des séances ordinaires comportant une dimension historique : quels enseignements ? *Petit x*, 90, 5-34.

Document 8 [AnCL] : De Vittori, T. (2015). Les tâches des élèves dans une activité mathématique à dimension historique. *Petit x*, 97.

Document 9 [ACL] : De Vittori, T. (2018). Analyzing the use of history in mathematics education: Issues and challenges around Balacheff's $\text{ck}\bar{\alpha}$ model. *Educational Studies in Mathematics*, 99(2).

Chapitre 3

Document 10 [ACL] : De Vittori, T. (2021). On the role of imagination in the use of history in mathematics education. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3).

Chapitre 4

Document 11 [Soum] : De Vittori, T. Relevance of a history-based activity for mathematics learning. *Discover Education*.