



**HAL**  
open science

# Quelques problèmes liés au calcul d'écoulements de fluides parfaits dans les tuyères

François Dubois

► **To cite this version:**

François Dubois. Quelques problèmes liés au calcul d'écoulements de fluides parfaits dans les tuyères. Analyse numérique [math.NA]. Université Pierre & Marie Curie, 1988. Français. NNT: . tel-03776988

**HAL Id: tel-03776988**

**<https://hal.science/tel-03776988>**

Submitted on 14 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **THESE**

présentée à  
l'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6**  
spécialité **Mathématiques Appliquées**

par **François DUBOIS**

Sujet de la Thèse :

**QUELQUES PROBLEMES LIES AU CALCUL  
D'ECOULEMENTS DE FLUIDES PARFAITS  
DANS LES TUYERES.**

Soutenue le 5 janvier 1988 devant le jury composé de

|     |              |             |
|-----|--------------|-------------|
| MM. | P.A. RAVIART | Président   |
|     | A.Y. LEROUX  |             |
|     | O. PIRONNEAU | Rapporteurs |
|     | B. MERCIER   |             |
|     | P. MORICE    |             |
|     | J.C. NEDELEC | Examineurs  |

ā mes parents

ā Lybie

ā Cyril, ...

Je tiens tout d'abord à remercier Jean Claude NEDELEC, Directeur du Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique de m'avoir accueilli dans son Centre, accordé sa confiance dès le début de mon travail et d'avoir toujours été disponible pour de longues conversations, scientifiques ou non. Ses intuitions scientifiques ont été tout au long de ce travail le point de départ de mes propres interrogations. J'ai également apprécié ses qualités d'animateur et son sens de la diplomatie.

Le Professeur Pierre Arnaud RAVIART m'a dès mon arrivée proposé de participer aux différents groupes de travail qu'il a animés à l'Université Paris 6 et à l'Ecole Polytechnique. J'ai pu à cette occasion apprécier son enthousiasme communicatif pour les nouveaux thèmes de recherche. Je le remercie pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Les Professeurs Alain Yves LEROUX et Olivier PIRONNEAU ont eu la lourde tâche de rapporter sur ce mémoire. Je les en remercie vivement. Je n'oublie pas non plus Messieurs Bertrand MERCIER et Philippe MORICE qui ont eu la gentillesse d'être membres du jury.

Mon travail de recherche est pour une bonne partie le fruit de longues collaborations avec Jean Marc DUPUY, Philippe LE FLOCH et Sylvie MAS-GALLIC. Je suis heureux à cette occasion de leur témoigner toute mon amitié.

La mise en oeuvre des méthodes numériques demande une mise à niveau quasi-permanente, qui m'a toujours été facilitée par l'accueil cordial et compétent des services d'Assistance du Centre d'Informatique de l'Ecole Polytechnique, du CIRCE (Centre de Calcul du CNRS) et du Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche. La Bibliothèque Centrale de l'X est par ailleurs un véritable puits de science, mis en valeur par toutes les personnes qui nous y accueillent.

Impliqué rapidement dans les enseignements de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, j'ai profité de la grande expérience en ce domaine de Jean GIROIRE et Marc LENOIR. Merci pour toutes leurs bonnes idées ! Je suis aussi très reconnaissant envers Alain BAMBERGER pour ses grandes qualités de pédagogue auxquelles je dois ma motivation actuelle pour l'Analyse Numérique.

J'exprime toute ma gratitude envers l'Administration des Ponts et Chaussées pour la confiance qui m'a été accordée en me permettant de travailler quatre années au CMAP. A cette occasion je remercie tout particulièrement Messieurs BOSQUI, HIRSCH et SANCHE ainsi que Madame NEIDHART, sans oublier les Professeurs Nicolas BOULEAU et Jean SALENÇON qui ont soutenu mon orientation vers les Mathématiques Appliquées.

La dactylographie de cette Thèse est entièrement l'oeuvre de Madame Véronique BOLEAT. J'ai apprécié sa grande efficacité et la qualité de son travail. Je remercie également le personnel de l'imprimerie de l'Ecole Polytechnique d'avoir pris en charge la reproduction de cette Thèse.

C'est avec grand plaisir que j'associe à ces remerciements Geo BOLEAT qui administre le Centre avec compétence et gentillesse. Ces qualités sont également l'apanage de ma fidèle cothurne Geneviève RAUGEL et plus généralement de l'ensemble des collègues du CMAP ; j'ai été tout particulièrement sensible à l'humanisme et la bonne humeur qui règnent dans ce laboratoire.

Enfin, le dynamisme du Centre est assuré par un constant renouvellement de ses chercheurs. Je profite de mon départ pour souhaiter à Anne, Benoît, Eliane, Frédérique, Miguel et Sylvie qui commencent actuellement leur thèse, beaucoup de satisfaction dans la recherche.



## Table des Matières

|  | page |
|--|------|
| Introduction   | 1    |
| Chapitre 1      Quelques aspects de la modélisation.   | 7    |
| I      Fluides parfaits compressibles.   | 9    |
| II     Tuyères monodimensionnelles.  | 32   |
| Chapitre 2      Discrete Vector Potential Representation of a Divergence<br>Free Vector Field in Three Dimensional Domains:<br>Numerical Analysis of a Model Problem.        | 49   |
| I      Introduction.   | 51   |
| II     The Continuous Problem.   | 56   |
| III    Vectorial Curved Finite Elements in $\mathbb{R}^3$ .  | 71   |
| IV    Approximation of the Homogeneous Problem.  | 87   |
| V     The Dirichlet Boundary Condition.  | 102  |
| Chapitre 3      Représentation de champs de vecteurs solénoïdaux de $\mathbb{R}^3$<br>par un potentiel vecteur discret: Résolution numérique<br>d' un problème non-linéaire. | 119  |
| I      Généralités.  | 121  |
| II     Description du maillage.  | 124  |
| III    Calcul des matrices élémentaires.   | 129  |
| IV    Résolution du système linéaire.  | 136  |
| V     Tests numériques. Conclusion.  | 142  |
| Chapitre 4      Résolution numérique de l' équation du potentiel transsonique<br>à l'aide d' une méthode d' éléments finis mixtes et d' un<br>algorithme de point fixe.      | 147  |
| I      Description de la méthode numérique.  | 151  |
| II     Tests numériques sur un profil NACA 0012.   | 166  |
| III    Application à un problème d' aérodynamique interne.   | 185  |
| IV    Conclusion.  | 207  |

|            |  |     |
|------------|--|-----|
| Chapitre 5 | Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems<br>of Conservation Laws ( en collaboration avec P. Le Floch ).                                  | 213 |
| 0          | Introduction.  | 215 |
| I          | Approach by the Method of Viscosity.   | 218 |
| II         | Approach by the Riemann Problem.   | 233 |
| III        | Conjecture, Study of an Example.   | 253 |
| Chapitre 6 | Boundary Conditions and the Osher Scheme for the Euler<br>Equations of Gas Dynamics.   | 257 |
| I          | Multivalued Solution of the Riemann Problem.   | 262 |
| II         | The Osher Scheme as a Splitting Scheme.  | 271 |
| III        | Numerical Boundary Conditions for the Euler Equations.   | 283 |
| IV         | Numerical Experiments with the Explicit First Order Osher Scheme.  | 293 |
| V          | Linearized Implicit Version of the Scheme.   | 307 |
| Chapitre 7 | Eléments finis mixtes, schéma d' Engquist-Osher et algorithme<br>de Newton pour la résolution numérique de l' équation du<br>potentiel transsonique. | 321 |
| I          | Description de la méthode numérique.   | 324 |
| II         | Tests numériques sur l' aile NACA 0012.  | 349 |
| III        | Etude du canal du GAMM.  | 366 |
| IV         | Vers une nouvelle méthode.   | 377 |
| V          | Conclusion.  | 384 |
|            | Bibliographie.   | 393 |

## INTRODUCTION

Cette thèse a pour thème le calcul numérique, par la méthode des éléments finis, des écoulements de fluides parfaits dans des tuyères au moyen d'un potentiel vecteur. Ce problème d'énoncé physique assez simple est en fait mathématiquement quasi-inaccessible ; les équations sont fortement non-linéaires et autorisent des solutions discontinues, les ondes de choc par exemple. De plus, la théorie mathématique des systèmes hyperboliques non-linéaires, qui correspond à ces problèmes, ne permet de traiter rigoureusement que quelques cas particuliers pour une géométrie monodimensionnelle. Le développement de nouvelles méthodes numériques s'appuie donc sur les méthodes existantes pour lesquelles nous disposons de résultats d'approximation précis dans le cas linéaire, sur l'analyse mathématique de problèmes modèles qui traitent une physique de plus en plus complexe, et sur les expériences numériques qui permettent une validation empirique sur des cas tests classiques.

Nous commençons donc, au Chapitre 1, par rappeler quelques points de modélisation qui nous semblent importants. Nous présentons les modèles de fluides parfaits utilisés dans la suite du travail ainsi que leur domaine physique de validité. Nous détaillons également le modèle monodimensionnel des tuyères, non-linéaire, qui permet au prix de calculs très simples de dégager la nature des phénomènes physiques dominants dans l'écoulement.

Les chapitres suivants sont rangés par ordre croissant de complexité non-linéaire, due essentiellement à une prise en compte croissante

des conditions aux limites. Nos cas de calcul traitent des géométries de dimensions un, deux ou trois. Nous prenons pour point de départ le modèle linéaire du fluide irrotationnel et incompressible. Nous le rappelons brièvement. La tuyère est représentée par un ouvert borné  $\Omega$  assez régulier plongé dans  $\mathbb{R}^2$  et le fluide est décrit par le seul champ de vitesse  $\vec{u}$ . Nous nous donnons aussi le flux normal sur la frontière  $\partial\Omega$  du domaine. Le problème à résoudre s'écrit sous forme du système d'équations :

$$(1) \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \Omega$$

$$(2) \quad \operatorname{rot} \vec{u} = 0 \quad \Omega$$

$$(3) \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = g \quad \partial\Omega$$

La loi de conservation (1) nous permet d'introduire la fonction courant  $\psi$  pour représenter le champ de vitesse :

$$(4) \quad \vec{u} = \operatorname{rot} \psi$$

et cette fonction courant est alors simplement solution de l'équation de Laplace

$$(5) \quad -\Delta\psi = 0 \quad \Omega$$

Par ailleurs, en intégrant la relation (3) le long de la frontière  $\partial\Omega$ , on construit facilement à partir du flux  $g$  une condition limite de Dirichlet  $\bar{\psi}$  pour la fonction courant :

$$(6) \quad \psi = \bar{\psi} \quad \partial\Omega$$

La fonction courant est solution du problème (5)(6), très classique, pour lequel les méthodes d'éléments finis conformes et mixtes ont montré leur pertinence.

Au Chapitre 2, nous étudions un problème de type (1)-(3) dans un domaine  $\Omega$  tridimensionnel. Dans ce cas, la fonction courant introduite à la relation (4) est un potentiel vecteur. Nous le discrétisons à l'aide de l'élément fini tétraédrique vectoriel de degré 1 introduit par NEDELEC [5]. Bien que linéaire, le problème à résoudre comporte plusieurs difficultés. La condition de jauge à ajouter à la relation (4), afin d'assurer l'unicité du potentiel vecteur, donne naissance à une jauge discrète reliée au choix d'un arbre parmi les arêtes du maillage ; la condition limite (3) conduit à des difficultés de même nature. Afin de coupler correctement les représentations (3) et (4) sur la frontière, nous avons développé un élément fini courbe qui généralise le tétraèdre de NEDELEC. Nous proposons une formulation mixte vitesse-potential vecteur du problème et nous donnons une estimation d'erreur optimale pour le champ de vitesse.

Au Chapitre 3, nous présentons la mise en oeuvre numérique de la méthode précédente pour un problème non-linéaire elliptique (programme de calcul tridimensionnel PSI3D, que nous avons développé sur le Cray 1S du CCVR). Nous enrichissons le modèle fluide par l'introduction de la densité  $\rho$ . Le problème à résoudre est un modèle transsonique potentiel qui satisfait aux équations :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \rho \vec{u} = \text{rot } \psi & \Omega \\ \text{rot } \vec{u} = 0 & \Omega \\ \rho = f(|\vec{u}|) & \Omega \end{array} \right.$$

$$(8) \quad \rho \vec{u} \cdot \vec{n} = g \quad \partial\Omega$$

Nous reformulons le système non-linéaire (7) sous forme variationnelle mixte et nous mettons en oeuvre un algorithme de point fixe. Le maillage utilisé est semi-déductif et des prismes ont servi de support géométrique à l'élément fini vectoriel permettant de discrétiser le potentiel vecteur.

Au Chapitre 4, nous abordons l'étude d'*écoulements transsoniques* dans des tuyères, en nous restreignant au cas de deux dimensions d'espace. Nous utilisons la méthode proposée par AMARA [1]: un décentrage de la densité  $\rho$  couplé à un algorithme de point fixe. Nous avons ainsi résolu numériquement le système (7)(8) de façon satisfaisante (à cette occasion, nous avons développé le logiciel PFX03 sur les ordinateurs Cray 1S et Cray 2 du CCVR). Mais cette étude montre aussi que les conditions aux limites physiques du problème sont en général mal représentées par la condition limite (8).

Au Chapitre 5 nous étudions, en collaboration avec Ph. Le Floch, le problème abstrait des *conditions aux limites pour les systèmes hyperboliques* de lois de conservation. Deux formulations sont proposées. La première, fondée sur la méthode de viscosité, conduit à une inégalité d'entropie à la limite qui généralise un travail antérieur de BARDOS-LEROUX NEDELEC [2]. La seconde résulte d'une analyse en terme de problème de Riemann et conduit à des problèmes à la limite mathématiquement bien posés. Nous montrons aussi que pour les systèmes hyperboliques linéaires stricts et les lois de conservation scalaires non-convexes, ces deux formulations sont équivalentes.

Au Chapitre 6, nous étudions le traitement numérique des *conditions aux limites physiquement intéressantes* pour les équations d'Euler de la mécanique des fluides parfaits. Cette étude repose sur une interprétation simple du schéma numérique d'OSHER [6] en terme d'ondes de détente multivaluées. Notre démarche généralise la seconde formulation du chapitre précédent et permet d'introduire (sans la formaliser outre mesure) la notion de problème de Riemann partiel, déjà présente chez GODUNOV [4] dans plusieurs cas particuliers. Des expériences numériques monodimensionnelles effectuées au CIRCE après développement du programme EUL08 illustrent et motivent notre travail.

Au dernier chapitre, nous reprenons l'étude des tuyères transsoniques bidimensionnelles commencée au Chapitre 4. Nous avons résolu numériquement le modèle transsonique potentiel (7) grâce à *deux nouveautés* par rapport au Chapitre 4 : un décentrage de l'impulsion à l'aide du schéma d'ENGQUIST-OSHER [3], qui conduit à substituer à l'algorithme de point fixe un algorithme de quasi-Newton, et d'autre part une prise en compte des conditions aux limites inspirée de l'analyse proposée au Chapitre 6. Le schéma obtenu est relativement complexe et assez coûteux à mettre en oeuvre, mais grâce à cette méthode nous avons mené à bien, à l'aide de nos codes EON28 et DD05 sur l'ordinateur Cray 2 du CCVR, toute une série de calculs d'écoulements transsoniques classiques et moins classiques pour des problèmes d'aérodynamique externe et interne.

## REFERENCES

- [1] AMARA M., *Analyse de Méthodes d'Eléments Finis pour des Ecoulements Transsoniques*, Thèse d'Etat, Université Paris 6, 1983.
- [2] BARDOS C., LEROUX A.Y., NEDELEC J.C., *First order Quasilinear Equations with Boundary Conditions*, Comm. P.D.E., vol 4, n° 9, pp 1017-1034, 1979.
- [3] ENGQUIST B., OSHER S., *One Sided Difference Approximations for Nonlinear Conservation Laws*, Math. of Comp., vol 36, pp 321-352, 1981.
- [4] GODUNOV S.K. et coll., *Résolution Numérique des Problèmes Multidimensionnels de la Dynamique des Gaz*, Editions Mir, Moscou, 1976, 1979.
- [5] NEDELEC J.C., *Mixed Finite Elements in  $\mathbb{R}^3$* , Numer Math, vol 35, pp 315-341, 1980.
- [6] OSHER S., *Numerical Solution of Singular Perturbation Problems and Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, in Math Studies n° 47 (Axelsson-Frank-Van der Sluis eds), North Holland, Amsterdam, pp 179-205, 1981.



# Chapitre 1

## Quelques aspects de la modélisation

## I - FLUIDES PARFAITS COMPRESSIBLES

Les propriétés de transport sans diffusion des fluides parfaits permettent souvent des simplifications notables dans l'étude des équations d'Euler. Aussi les modèles approchés abondent, et nous avons utilisé plusieurs d'entre eux dans les chapitres suivants. Dans un premier paragraphe nous rappelons les principaux théorèmes de la mécanique des fluides parfaits. Nous présentons ensuite les modèles les plus courants. Dans un troisième temps, nous faisons le lien entre les modèles précédents et la notion d'entropie mathématique de la théorie des systèmes hyperboliques non-linéaires. Enfin, des modèles spécifiquement monodimensionnels sont présentés au quatrième paragraphe.

### 1 - RAPPEL DES PRINCIPAUX THEOREMES DE LA MECANIQUE DES FLUIDES PARFAITS

Dans ce paragraphe, nous rappelons les hypothèses physiques et mathématiques qui sous-tendent le modèle le plus complet de fluide parfait compressible (équations d'Euler). Nous présentons ensuite les résultats classiques concernant ce modèle, qui motivent la construction de modèles simplifiés (paragraphe suivant).

#### a) Notions fondamentales

Les équations d'Euler de la mécanique des fluides parfaits expriment les lois fondamentales de conservation de la physique, l'hypothèse d'équilibre thermodynamique et des hypothèses phénoménologiques sur le comportement du fluide.

L'équilibre thermodynamique permet de définir une équation d'état qui relie les grandeurs thermodynamiques locales, densité, pression, température  $(\rho, p, T)$ , par une équation d'état. Mais l'hypothèse d'équilibre exprime d'abord qu'il existe une fonction concave  $f$  (l'énergie libre spécifique) du couple température-volume spécifique  $(T, \frac{1}{\rho})$  :

$$(1.1) \quad df = -s dT - p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad .$$

Par transformation de Legendre, l'énergie interne spécifique  $e$  est une fonction convexe du couple  $(s, \frac{1}{\rho})$  entropie spécifique-volume spécifique :

$$(1.2) \quad e = e\left(s, \frac{1}{\rho}\right) \quad ; \quad de = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Nous renvoyons à LANDAU-LIFCHITZ [19] pour une présentation très générale de toutes ces notions. Dans le cas d'un gaz parfait polytropique (l'hypothèse toujours réalisée dans les chapitres qui suivent), nous avons en particulier

$$(1.3) \quad e = \frac{R}{\gamma-1} \left( \exp \frac{s}{c_v} \right) \rho^{\gamma-1}$$

où la constante des gaz parfaits  $R$ , la chaleur spécifique à volume constant  $c_v$  et le rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$  sont des constantes strictement positives (et  $\gamma > 1$ ). Par identification des dérivées partielles de  $e(s, \frac{1}{\rho})$ , nous retrouvons la loi de Joule-Gay Lussac ainsi que l'équation d'état :

$$(1.4) \quad p = \rho R T$$

des gaz parfaits.

Le comportement d'un fluide parfait satisfait à des hypothèses très simples : viscosité nulle, pas de transport de chaleur et absence d'apport volumique de chaleur. Nous supposons aussi (pour simplifier) qu'aucun champ de force extérieur n'est imposé. Dans ces conditions, aucun terme de dissipation n'est présent dans les bilans de masse, d'impulsion, d'énergie, et ces lois de conservation s'expriment par des équations aux dérivées partielles du premier ordre, dues initialement à Euler :

$$(1.5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

$$(1.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

$$(1.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \operatorname{div}(\rho \vec{u} E + p \vec{u}) = 0$$

où  $\vec{u}$  représente le champ de vitesse, et  $E$  l'énergie totale, donnée par

$$(1.8) \quad E = e + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 .$$

Pour l'établissement des équations (1.5)-(1.7), nous renvoyons à GERMAIN [9] ou SERRIN [30]. Le système (1.5)-(1.7) comporte cinq équations (si  $x$  appartient à  $\mathbf{R}^3$ ) et six inconnues scalaires  $(e, \rho, p, \vec{u})$ . Si on lui adjoint (1.2), nous disposons d'autant d'équations que d'inconnues. Toutefois, des changements brutaux de l'équilibre thermodynamique ne sont pas incompatibles avec le modèle, et on doit rajouter aux équations (1.5)-(1.7) l'inéquation d'entropie :

$$(1.9) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho s) + \operatorname{div}(\rho \vec{u} s) \geq 0$$

qui exprime le second principe de la thermodynamique.

Un cas particulier très important dans la pratique est celui d'une évolution *barotrope*. Cette hypothèse exprime qu'une relation supplémentaire entre les grandeurs thermodynamiques est imposée a priori ; l'évolution du fluide peut ainsi être par exemple toujours thermalisée par le milieu extérieur, et l'on parle alors d'évolution isotherme ( $T = \text{cste}$ ), ou bien l'évolution du fluide est assimilable à une évolution adiabatique réversible, et l'on parle d'écoulement isentropique ( $s = \text{cste}$ ). Dans ce dernier cas, l'inéquation (1.9) est une égalité. Du point de vue algébrique, une évolution barotrope entraîne une simplification importante de la thermodynamique, et la pression est une fonction de la seule densité

$$(1.10) \quad p = P(\rho) \quad .$$

#### b) Evolution barotrope régulière

Dans ce cas particulier, on peut transformer l'équation (1.6) et la simplifier grâce à la conservation de la masse. Après un peu d'algèbre, et l'introduction du tourbillon  $\vec{\omega}$  et de l'enthalpie spécifique  $h$  :

$$(1.11) \quad \vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$$

$$(1.12) \quad dh(\rho) = \frac{1}{\rho} dP(\rho)$$

il vient :

$$(1.13) \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u} + \nabla \left( \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + h \right) = 0 \quad .$$

Nous en déduisons deux résultats relatifs à l'énergie et au tourbillon. Supposons d'abord l'évolution stationnaire ( $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ ) et introduisons l'enthalpie totale  $H$  :

$$(1.14) \quad H = \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + h \quad .$$

Lorsqu'on dérive  $H$  le long d'une ligne de courant, on a :

$$\frac{dH}{dt} = \vec{u} \cdot \nabla H = 0$$

en vertu de (1.13). Nous avons montré le

THEOREME 1.1 (Bernoulli)

*Dans un écoulement stationnaire de fluide parfait en évolution barotrope, l'enthalpie totale  $H$  est constante sur toute ligne de courant.*

Nous supposons à nouveau l'évolution a priori instationnaire. Le rotationnel de l'équation (1.13) est appelé équation de la rotation :

$$(1.15) \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{u}) = 0$$

et on a le

THEOREME 1.2 (Kelvin)

*Pour un fluide parfait en évolution barotrope, le flux du tourbillon à travers une surface qu'on suit dans son mouvement est constant au cours du temps.*

Mais le résultat le plus spectaculaire concerne le transport du vecteur  $\frac{\vec{\omega}}{\rho}$ . Développons l'équation (1.15). On obtient facilement

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + (\operatorname{div} \vec{u})\omega_i + (\vec{u} \cdot \nabla)\omega_i - \omega_j \partial_j u_i = 0$$

Compte tenu de (1.5) et de l'identité

$$(1.16) \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$$

il vient

$$\frac{d\omega_i}{dt} - \frac{\omega_i}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \omega_j (\partial_j u_i)$$

soit après division par  $\rho$  :

$$(1.17) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = (\vec{\nabla} \vec{u}) \cdot \left( \frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) .$$

Cette dernière relation s'énonce sous la forme suivante :

### THEOREME 1.3

*Dans un écoulement de fluide parfait en évolution barotrope, le vecteur  $\frac{\vec{\omega}}{\rho}$  est transporté par le mouvement.*

Nous retiendrons le cas particulier important du mouvement irrotationnel :

### THEOREME 1.4 (Lagrange)

*Si à un instant particulier l'écoulement d'un fluide parfait est irrotationnel dans un volume  $\mathcal{V}$ , alors il reste irrotationnel aux instants ultérieurs lorsqu'on suit  $\mathcal{V}$  dans son mouvement, tant que l'évolution reste barotrope.*

### c) Evolution discontinue

Les pertes de barotropie d'un écoulement de fluide parfait sont avant tout dues aux discontinuités possibles de l'écoulement. Les relations de saut de Rankine-Hugoniot expriment la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie à travers une surface  $\Sigma$ . Comme les équations d'Euler (1.5)-(1.7) sont invariantes par transformation de Galilée (voir par exemple LANDAU-LIFCHITZ [20]), nous pouvons supposer immobiles le point d'étude  $P$  et le plan tangent à  $\Sigma$  en ce point. Notons  $\vec{n}$  la normale associée. Si le flux de masse

$$(1.18) \quad q = \rho \vec{u} \cdot \vec{n}$$

est nul au point  $P$ , alors  $\Sigma$  est une discontinuité de contact, et on établit facilement que le tourbillon est alors une *mesure* puisque la vitesse tangentielle est discontinue sur  $\Sigma$ . Si le flux (1.18) est non-nul, on le suppose positif en orientant convenablement  $\vec{n}$ , et les relations de Rankine-Hugoniot prennent dans ce cas la forme simple suivante :

$$(1.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\rho \vec{u} \cdot \vec{n}] = 0 \\ [\rho (\vec{u} \cdot \vec{n})^2 + p] = 0 \\ [\vec{u} \times \vec{n}] = 0 \\ [H] = 0 \end{array} \right.$$

$$(1.20) \quad [s] > 0 \quad .$$

où  $[\varphi]$  désigne la discontinuité  $\varphi_2 - \varphi_1$  du champ  $\varphi$  à travers  $\Sigma$  (Figure 1.1). On en déduit les relations suivantes

$$(1.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\rho] > 0 \\ [\vec{u} \cdot \vec{n}] < 0 \\ [p] > 0 \end{array} \right.$$



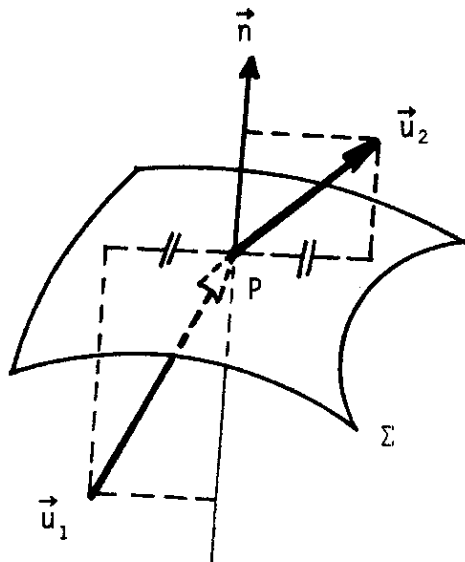


Figure 1.1 Onde de choc stationnaire

toutes équivalentes à (1.20), qui expriment qu'un choc physiquement admissible est toujours une *compression*.

A travers une onde de choc, le saut d'entropie (1.20) entraîne une perte de barotropie de l'écoulement ; en particulier les hypothèses du Théorème 1.4 ne sont plus satisfaites. Nous pouvons toutefois décrire le saut du tourbillon à travers une onde de choc  $\Sigma$ .

THEOREME 1.5 (HADAMARD [17])

Soit  $\Sigma$  la surface d'une onde de choc stationnaire. Le tourbillon  $\vec{\omega}$  est une fonction au voisinage de  $\Sigma$ , discontinue à la traversée de  $\Sigma$  et l'on a :

$$(1.22) \quad [\vec{\omega}] = \text{rot}_{\Gamma} [\vec{u} \cdot \vec{n}]$$

où  $\text{rot}_{\Gamma}$  est le rotationnel surfacique sur  $\Sigma$ .

DEMONSTRATION DU THEOREME 1.5

La distribution  $\vec{\omega}$  est une fonction puisque la composante tangentielle de la vitesse est continue à la traversée de  $\Sigma$ . Le vecteur normal

$\vec{n}$  peut être prolongé à un voisinage de  $\Sigma$  dans  $\mathbb{R}^3$  (NEDELEC [26], voir aussi le Chapitre 2), et le prolongement obtenu  $\vec{N}$  vérifie

$$(1.23) \quad \text{rot } \vec{N} = 0$$

On décompose alors le champ de vitesse  $\vec{u}$  en une composante régulière  $\vec{v}$

$$(1.24) \quad \vec{v} = \vec{u} - \varphi \vec{N}, \quad \varphi = \vec{u} \cdot \vec{N}$$

et une composante  $\varphi \vec{N}$ , discontinue sur  $\Sigma$ . Le tourbillon du vecteur  $\vec{v}$  est continu à travers  $\Sigma$  donc nous avons

$$[\vec{\omega}] = [\text{rot}(\varphi \vec{N})].$$

Mais  $\text{rot}(\varphi \vec{N}) = \nabla \varphi \times \vec{n}$  compte tenu de (1.23). En se plaçant en un point de la surface  $\Sigma$ , on a :

$$\text{rot}(\varphi \vec{N})|_{\Sigma} = \text{rot}_{\Gamma}(\vec{u} \cdot \vec{n})$$

puisque  $\varphi \equiv \vec{u} \cdot \vec{n}$  sur  $\Sigma$ . Nous en déduisons le résultat annoncé par simple différence entre les deux faces de la discontinuité. ■

En aval du choc, l'écoulement n'est donc plus barotrope ni irrotationnel, et les relations (1.12)-(1.13) sont en défaut. L'enthalpie spécifique  $h$  est maintenant définie par

$$(1.25) \quad h = e + \frac{p}{\rho}, \quad dh = T ds + \frac{1}{\rho} dp$$

et l'équation (1.13) doit être remplacée par

$$(1.26) \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u} + \nabla h - T \nabla s = 0$$

compte tenu de l'expression de  $\frac{1}{\rho} \nabla p$  issue de (1.25), avec l'enthalpie

totale  $H$  toujours calculée à l'aide de la relation (1.14). L'équation (1.26) est connue sous le nom de Théorème de CROCCO [5]. En particulier, pour un écoulement bidimensionnel stationnaire d'enthalpie totale constante, (1.26) permet un calcul explicite du tourbillon en fonction du gradient d'entropie :

$$(1.27) \quad \omega = \frac{T}{|\vec{u}|^2} \vec{u} \times \nabla s$$

et AMARA [1] avait utilisé cette remarque pour résoudre numériquement les équations d'Euler stationnaires.

## 2 - PRESENTATION DES PRINCIPAUX MODELES

Les équations d'Euler complètes (1.5)-(1.7) présentées au premier paragraphe constituent le modèle fondamental pour toutes les études qui suivent. Nous les avons d'ailleurs utilisées sous cette forme aux Chapitres 6 et 7 de ce travail. Mais le nombre important d'équations et d'inconnues a motivé le développement de modèles simplifiés, valables dans de vastes régions de l'écoulement réel.

### a) Equations de Saint Venant

Ce sont les équations d'Euler d'un fluide en évolution barotrope, qui décrivent en particulier l'évolution isentropique d'un gaz parfait, ou bien des écoulements en eau peu profonde (shallow water) étudiés par Saint Venant. Les inconnues  $(\rho, \vec{u})$  vérifient le système de lois de conservation

$$(1.28) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} P(\rho) & = 0 \end{cases}$$

avec une fonction  $P(\rho)$  définie dans la pratique par

$$(1.29) \quad P(\rho) = \text{cste} \cdot \rho^\gamma$$

pour des valeurs de  $\gamma$  égales à 1, 1.4, 2 qui correspondent respectivement à une loi isotherme, isentropique et aux équations "shallow water". Ce modèle a été utilisé aux Chapitres 5 et 7.

#### b) H-système

Les écoulements étudiés en aérodynamique externe et interne sont le plus souvent uniformes "à l'infini amont", et l'on en cherche une solution stationnaire. Dans ces conditions, l'enthalpie totale, constante sur chaque ligne de courant si l'évolution est barotrope (Théorème 1.1) est une constante dans toute la zone d'évolution isentropique du fluide puisque l'entropie et l'enthalpie totale sont supposées fixées en amont, indépendamment de la ligne de courant. De plus, les relations de Rankine-Hugoniot à travers un choc stationnaire (1.19) montrent que l'enthalpie totale  $H$  est continue à travers les chocs. S'il est possible de décrire le champ de vitesses en termes de lignes de courant, l'enthalpie totale est donc constante dans tout le domaine. Pour un gaz parfait polytropique, on a :

$$(1.30) \quad H = \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$$

et cette dernière relation permet de calculer la pression comme fonction du seul couple densité-impulsion :

$$(1.31) \quad p(\rho, \rho \vec{u}) = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left( \rho H - \frac{|\rho \vec{u}|^2}{2\rho} \right) .$$

Il suffit donc de prendre en compte les lois de conservation de la masse et de l'impulsion pour fermer le modèle fluide :

$$(1.32) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} p(\rho, \rho \vec{u}) & = 0 \end{cases}$$

Ce système, proposé entre autres par VIVIAND-VEUILLOT [32] a les mêmes solutions stationnaires que les équations d'Euler si les conditions aux limites amont sont isentropiques et isenthalpiques, comme nous venons de le voir. Et RIZZI-ERICKSSON [28] vont même jusqu'à identifier le H-système et les équations d'Euler complètes. Nous préférons suivre la démarche originale de VIVIAND-VEUILLOT [32] et considérer le système (1.32) comme un système pseudo-stationnaire particulier pour l'approximation des solutions stationnaires des équations d'Euler.

### c) Equation du potentiel transsonique

Nous envisageons maintenant l'étude d'écoulements stationnaires, isentropiques, isenthalpiques et irrotationnels à l'infini amont. Grâce au Théorème 1.4, cet écoulement reste irrotationnel tant que l'évolution est barotrope. Mais grâce au Théorème de Crocco, on peut relier le tourbillon créé par le choc au gradient d'entropie. Si le choc reste de force

modérée (ie un nombre de Mach amont inférieur à 1.4 dans les applications) alors le saut d'entropie, qui varie comme le cube du saut de pression, reste faible et on le néglige ainsi que son gradient. Le tourbillon est donc lui aussi négligé (ce qui est licite dans le cas bidimensionnel, cf (1.27)). Nous pouvons donc imposer une représentation du champ de vitesse du type :

$$(1.33) \quad \vec{u} = \nabla\phi$$

et lorsque le domaine n'est pas simplement connexe, on ajoute à (1.33) une fonction spéciale prenant en compte les circulations non-tourbillonnantes du champ de vitesse (voir Chapitre 2). Le comportement reste par ailleurs isenthalpique et isentropique, donc la conservation (1.30) de l'enthalpie totale  $H$  s'écrit :

$$\frac{|\vec{u}|^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} S_0 \rho^{\gamma-1} = \frac{u_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma-1}$$

où  $S_0$ ,  $u_0$ ,  $c_0$  sont respectivement l'entropie (adimensionnalisée), la vitesse et la célérité du son d'un état de référence. Le choix le plus courant

$$(1.34) \quad u_0 = 1 \quad , \quad S_0 = \frac{1}{\gamma}$$

conduit à une expression explicite de la densité comme fonction du module de la vitesse :

$$(1.35) \quad \rho = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 (1 - |\vec{u}|^2) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

où  $M_0 = u_0/c_0$ . On ferme le problème grâce à l'équation de conservation de la masse :

$$(1.36) \quad \operatorname{div} \left[ \rho (|\nabla \phi|^2) \nabla \phi \right] = 0$$

Le système (1.35)(1.36) caractérise l'équation du potentiel transsonique (Transonic Full Potential Equation, en anglais). Il a été proposé très tôt (voir par exemple COURANT-FRIEDRICHS [4]). Sur un plan théorique, le *changement de type* des équations (elliptique en zone subsonique, hyperbolique dans les régions supersoniques dans le cas bidimensionnel) qui caractérise un comportement transsonique, est couplé à la *non-linéarité* du problème, très générale en mécanique des fluides. L'étude théorique et numérique de ce modèle a conduit à de nombreux travaux durant les dernières années passées (cf. COLE-COOK [3] et les références incluses), liés le plus souvent à une reformulation dans le plan de l'hodographe (voir par exemple COURANT-FRIEDRICHS [4] ou LANDAU-LIFCHITZ [20]). Nous reviendrons aux Chapitres 3, 4 et 7 de ce travail à l'équation du potentiel.

#### d) Petites perturbations transsoniques

Afin de simplifier encore davantage le modèle précédent, des lois de similarité pour les écoulements transsoniques ont été proposées par VON KARMAN [33]. Pour l'étude d'un profil d'épaisseur relative  $\delta$  placé le long de l'axe  $Ox$ , on peut développer le champ de vitesse  $\vec{q} = (q_x, q_y)$  sous la forme :

$$(1.37) \quad \begin{cases} q_x = u_0 (1 + \delta^{2/3} u + \dots) \\ q_y = u_0 \delta v + \dots \end{cases}$$

En changeant d'échelle selon  $Oy$  suivant la loi :

$$(1.38) \quad \tilde{y} = \delta^{1/3} y$$

on obtient en identifiant les termes dominants dans les équations du modèle précédent les équations

$$(1.39) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( Ku - \frac{\gamma+1}{2} u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} = 0 \end{cases}$$

avec  $K = (1 - M_\infty^2) / \delta^{2/3}$ ,

qui caractérisent le modèle dit des petites perturbations transsoniques.

Notons  $\phi$  le potentiel associé à la seconde équation de (1.39), et  $y$  au lieu de  $\tilde{y}$ ; on obtient

$$(1.40) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( K - \frac{\gamma+1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0$$

qui est l'équation des petites perturbations (Transonic Small Disturbance, en anglais). Elle est aussi de type variable suivant la valeur de  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  par rapport à  $\frac{K}{\gamma+1}$ , la non-linéarité est *monodimensionnelle* (le long de  $Ox$ ) et cette simplicité en a fait un excellent test des premiers schémas qui capturent le choc (MURMAN-COLE [24], ENGQUIST-OSHER [8]).

### 3 - LIEN AVEC LES SYSTEMES HYPERBOLIQUES NON-LINEAIRES

#### a) Rappel sur les hyperboliques non-linéaires

L'étude mathématique des lois de conservation, entreprise dans les années 50 par GERMAIN-BADER [11], LAX [27] et GODUNOV [14] connaît ces dernières années des développements importants. Pour un exposé de l'état de l'art, que nous supposons pour l'essentiel connu du lecteur,



nous renvoyons à SMOLLER [31] ou GODLEWSKI-RAVIART [13] (des rappels rapides sont aussi donnés au Chapitre 5). La notion clef, à notre avis, de cette théorie, est celle d'*entropie mathématique* introduite par LAX [22]. Le système hyperbolique non-linéaire des lois de conservation

$$(1.41) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(U) = 0 \quad , \quad U \in \mathbb{R}^n, f_j(U) \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^d$$

admet une entropie  $\eta(U)$  si l'on peut trouver des flux d'entropie associés  $\varphi_j(U)$  ( $j = 1, \dots, d$ ) de sorte que

$$(1.42) \quad \begin{cases} \mathbb{R}^d \ni U \rightarrow \eta(U) \in \mathbb{R} \text{ est convexe} \\ d\varphi_j(U) = d\eta(U) \cdot df_j(U) ; j = 1, \dots, d \end{cases} .$$

Pour un système du type (1.41) le plus général, une telle entropie n'existe pas. Mais la plupart des systèmes considérés précédemment admettent une (et parfois plusieurs) entropies.

#### b) Entropies pour différents modèles de fluide parfait

• Equations d'Euler. Ces équations (1.5)-(1.7) admettent une entropie mathématique qui correspond à l'entropie physique comme nous l'a communiqué J.C. NEDELEC. Plus précisément, on a (voir GODUNOV [16] par exemple) :

$$(1.43) \quad \eta = -\rho s \quad , \quad \varphi_j = -\rho u_j s$$

Pour vérifier que les propriétés (1.42) sont satisfaites, il suffit d'établir que  $\eta$  est une fonction convexe des variables conservatives  $U$ ,

$${}^t U = (\rho, q_j \equiv \rho u_j, \varepsilon \equiv \rho E)$$

puisque la seconde condition de (1.42) résulte facilement de (1.9).

La définition de  $\eta(U)$  nécessite un peu d'attention ; supposant connues les seules variables conservatives  $(\rho, q_j, \varepsilon)$ , on pose

$$u_j = \frac{q_j}{\rho} \quad , \quad e = \frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{1}{2} \sum_j u_j^2 \quad .$$

La thermostatique nous fournit une fonction  $s\left(e, \frac{1}{\rho}\right)$  telle que

$$ds = \frac{1}{T} \left( de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \right)$$

et on pose

$$(1.44) \quad \eta(U) = -\rho s\left(\frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{q_j}{\rho}\right)^2, \frac{1}{\rho}\right) \quad .$$

PROPOSITION 1.1

*La convexité de l'entropie mathématique  $\eta$  définie en (1.44) est équivalente à la convexité de l'énergie interne  $e\left(s, \frac{1}{\rho}\right)$  de la relation (1.2).*

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.1 (simplifiée depuis par RAVIART [13]).

• Notons  $\tau \equiv \frac{1}{\rho}$  le volume spécifique. L'énergie interne  $e(s, \tau)$  est une fonction convexe du couple  $(s, \tau)$  (voir LANDAU-LIFCHITZ [19] ou GERMAIN [9]) et l'on a :

$$(1.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 e}{\partial s^2} \equiv \frac{\partial T}{\partial s} > 0 \\ \frac{\partial^2 e}{\partial s^2} \frac{\partial^2 e}{\partial \tau^2} - \left( \frac{\partial^2 e}{\partial \tau \partial s} \right)^2 \equiv - \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)^2 > 0 \quad . \end{array} \right.$$

On note également

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad , \quad \gamma = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \tau} \quad , \quad \psi = \frac{1}{T} \left( \frac{u^2}{2} - h \right)$$

- On se place dans le cas d'une seule dimension d'espace ( $d=1$ ) pour étudier l'entropie  $\eta(U)$ . On dérive (1.44) :

$$d\eta = \left\{ -s + \frac{1}{T} \left( \frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{q^2}{\rho^2} + \frac{p}{\rho} \right) \right\} d\rho + \frac{q}{\rho T} dq - \frac{1}{T} d\varepsilon$$

deux fois :

$$d^2\eta = \frac{1}{\rho T} \begin{pmatrix} \alpha\psi^2 + 2\beta\psi + \gamma + u^2 & -u \left( \frac{\alpha\psi + \beta}{T} + 1 \right) & \frac{1}{T} (\alpha\psi + \beta) \\ -u \left( \frac{\alpha\psi + \beta}{T} + 1 \right) & 1 + \alpha \frac{u^2}{T^2} & -\alpha \frac{u}{T^2} \\ \frac{1}{T} (\alpha\psi + \beta) & -\alpha \frac{u}{T^2} & \frac{\alpha}{T^2} \end{pmatrix}$$

Montrons que  $d^2\eta$  est une matrice symétrique définie positive. Pour cela, nous montrons que les sous-matrices carrées "en bas à droite" de  $d^2\eta$  ont un déterminant strictement positif, i.e. :

$$(1.46) \quad \det (d^2\eta_{kl})_{\substack{i \leq k \leq 3 \\ i \leq l \leq 3}} > 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad .$$

Or  $d^2\eta_{33} = \frac{\alpha}{T^2}$ , et le déterminant  $2 \times 2$  correspondant à la valeur  $i=2$  dans (1.46) vaut aussi  $\frac{\alpha}{T^2}$ , qui est strictement positif vu (1.45).

Par ailleurs, on a :

$$\det (d^2\eta) = \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\rho^3 T^5}$$

qui est strictement positif compte tenu de la seconde inégalité de convexité de  $e(s, \tau)$ . L'équivalence proposée est donc établie. ■

#### REMARQUE 1.1

La proposition précédente devait être connue de LAX [22] et déjà de GODUNOV qui utilise dans son article [15] la fonction convexe duale de  $\eta(U)$ . Par contre, dans un travail plus récent, HARTEN [18] n'envisage que le cas du gaz polytropique, ce qui rend le résultat moins facile à voir. Les approches physique (paragraphe 1) et mathématique (paragraphe 3) du problème de la dissipation dans les fluides parfaits peuvent donc complètement s'identifier, ce qui nous semble tout à fait remarquable. Mais la démonstration de la Proposition 1.1 qui précède reste lourde, et aucune explication "évidente a posteriori" ne nous est connue.

- Equations de Saint Venant. S'imposer l'entropie physique contraint de relaxer la loi de conservation de l'énergie. Les variables conservatives  $U = {}^t(\rho, q_j)$  définissent  $p$  grâce à (1.10), puis l'enthalpie  $h$  par (1.12) et enfin l'énergie interne  $e$  selon

$$(1.47) \quad e(\rho) = h - \frac{1}{\rho} P(\rho) \quad ; \quad de = -p d\left(\frac{1}{\rho}\right) .$$

L'entropie mathématique est maintenant l'énergie (!), soit plus précisément :

$$(1.48) \quad \begin{cases} \eta(U) = \rho e + \frac{1}{2\rho} \sum_j q_j^2 \\ \varphi_j(U) = q_j \left( h + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 \right) . \end{cases}$$

La convexité de  $\eta(U)$  correspond maintenant à la simple condition

$$(1.49) \quad c^2(\rho) \equiv \frac{dP(\rho)}{d\rho} > 0 \quad .$$

- H-système. Ce système résulte du Théorème de Bernoulli, des relations de Rankine-Hugoniot et d'hypothèses d'uniformité à l'infini amont (cf. paragraphe 2.b). La loi de pression (1.31) mélange la variable thermodynamique  $\rho$  et la vitesse  $\vec{u}$ , ce qui n'est jamais le cas pour les équations d'Euler ou de Saint Venant. De plus, le système (1.32) ne respecte pas l'invariance de Galilée des équations de la mécanique classique. En collaboration avec Ph. Le Floch, nous n'avons pas trouvé d'entropie mathématique simple pour ce H-système. Par ailleurs, l'expression des ondes de détente et de choc est compliquée (VIVIAND-VEUILLOT [32]), alors qu'elle est simple pour les équations d'Euler (cf. Chapitre 6) ou de Saint Venant (Chapitres 5 et 7).

- Equation du potentiel transsonique. A priori ce système (1.35)-(1.36) n'entre pas dans le cadre classique (1.41) des systèmes hyperboliques non-linéaires. Pourtant, dans le cas de deux dimensions d'espace, VIVIAND-VEUILLOT [32] ont réussi à l'écrire comme équation stationnaire d'un problème d'évolution. L'idée consiste à écrire le champ de vitesse inconnu  $\vec{u}$  sous la forme

$$(1.50) \quad \vec{u} = V(\rho)(\cos \theta, \sin \theta)$$

où le module  $V(\rho)$  est calculé en inversant (1.35). L'équation de l'impulsion (1.13) relative à une évolution barotrope est ensuite projetée sur la direction normale au champ de vitesse. On obtient :

$$(1.51) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{rot } \vec{u} = 0$$

puisque l'enthalpie totale reste constante. Les variables conservatives  $U$

$$(1.52) \quad {}^t U = (\rho, \theta)$$

permettent de définir un système hyperbolique non-linéaire :

$$(1.53) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho V(\rho) \cos \theta \\ V(\rho) \sin \theta \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho V(\rho) \sin \theta \\ -V(\rho) \cos \theta \end{pmatrix} = 0$$

et le champ de vitesse (1.50) solution stationnaire de (1.53) vérifie les équations du modèle transsonique potentiel. De plus, une entropie mathématique existe pour le système (1.53) (MORICE-VIVIAND [23]). Nous y reviendrons au Chapitre 7.

#### 4 - MODELES MONODIMENSIONNELS

Tous les modèles présentés au paragraphe 2 peuvent être définis dans le cas d'une seule dimension spatiale. Mais la particularité de cette géométrie conduit à des modèles encore plus simples (du point de vue de la mécanique des fluides).

##### a) Equation de Burgers

La version non visqueuse de l'équation proposée par Burgers :

$$(1.54) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad , \quad u(x,t) \in \mathbb{R}$$

est le prototype d'équation hyperbolique non-linéaire pour la démonstration de théorèmes abstraits et l'étude numérique et mathématique des schémas.

A un changement de fonction inconnue près, c'est une version instationnaire de l'équation des petites perturbations transsoniques ou même de l'équation du potentiel. Nous utiliserons cette remarque aux Chapitres 4 et 7.

b) Le p-système

C'est une version lagrangienne des équations de Saint Venant (1.28) monodimensionnelles. Les variables de Lagrange  $(\xi, \theta)$  à utiliser ne sont pas les plus habituelles, et nous nous sommes fortement inspiré de BARDOS [2] dans la présentation qui suit. On considère l'équation différentielle

$$(1.55) \quad \frac{\partial X}{\partial \theta}(\xi, \theta) = u(X(\xi, \theta), \theta)$$

et la condition initiale

$$(1.56) \quad \frac{\partial X}{\partial \xi}(\xi, 0) = \frac{1}{\rho(X(\xi, 0), 0)} \quad , \quad X(\xi_0, 0) = \xi_0$$

obtenues à partir d'un champ  $(\rho(x, t), u(x, t))$  solution des équations de Saint Venant. Notons que cette construction impose à  $\rho$  d'être non-nul, ce qui exclut tout vide dans la condition initiale. L'application

$$(\xi, \theta) \mapsto (x, t) = (X(\xi, \theta), \theta)$$

définit les coordonnées eulériennes  $(x, t)$  en fonction des coordonnées lagrangiennes  $(\xi, \theta)$  ; elle est biunivoque sous l'hypothèse

$$(1.57) \quad 0 < \rho_* \leq \rho(x, 0) \leq \rho^* < \infty \quad , \quad \forall X \in \mathbb{R}$$

et le jacobien  $J(\xi, \theta)$  est donné par

$$(1.58) \quad J(\xi, \theta) = \frac{\partial X}{\partial \xi}(\xi, \theta) = \frac{1}{\rho(X(\xi, \theta), \theta)} \quad v(\xi, \theta)$$

puisque la dérivée  $\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho(X(\xi, \theta), \theta) \cdot J(\xi, \theta))$  est identiquement nulle et que  $\rho \cdot J$  vaut identiquement 1 pour  $\theta = 0$ . Nous introduisons les inconnues du p-système

$$(1.59) \quad \begin{cases} \tau(\xi, \theta) = \frac{1}{\rho(x, t)} \\ v(\xi, \theta) = u(x, t) \end{cases} .$$

On a facilement

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{v}{\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

et le couple volume spécifique-vitesse  $(\tau, v)$  vérifie le p-système

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \end{cases}$$

équivalent à (1.28), qu'on écrit habituellement en remplaçant les lettres grecques  $(\theta, \xi, \tau, v)$  par  $(t, x, v, u)$  respectivement. On obtient :

$$(1.60) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p(v)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

où  $p(v) = \frac{cste}{v^\gamma}$  dans les applications.

Le p-système (1.60) est un système strictement hyperbolique qui admet une entropie mathématique

$$(1.61) \quad \eta(v, u) = \frac{u^2}{2} - P(v) \quad \text{où} \quad \frac{dP}{dv} = p(v)$$

associée au flux d'entropie

$$q(v, u) = u p(v) \quad .$$

Nous retrouverons le p-système au Chapitre 5.



## II - TUYERES MONODIMENSIONNELLES

Dans cette partie, nous étudions le modèle le plus courant des tuyères quasi-monodimensionnelles. Nous explicitons au premier paragraphe le terme source à ajouter aux équations d'Euler. Nous rappelons ensuite le théorème de Hugoniot et ses conséquences. L'étude générale du blocage est abordée dans la troisième partie ; nous y adoptons une présentation non classique. Quelques remarques concluent ce chapitre.

### 1 - RAPPEL DU MODELE QUASI-MONODIMENSIONNEL

L'étude des écoulements de fluide parfait dans des domaines de forme quelconque reste un problème ouvert sur le plan mathématique, et les ingénieurs (comme de Laval) ont proposé depuis longtemps des modèles réalistes simplifiés de tuyères. Le modèle quasi-monodimensionnel, très simple, donne un grand nombre d'informations qualitatives sur la réalité multidimensionnelle.

L'écoulement est confiné dans un tuyau de section  $A(x)$  lentement variable, de sorte que tous les champs sont supposés constants en espace le long de chaque plan  $x = \text{cste}$  et on approche le vecteur vitesse par sa composante  $u(x)$  sur l'axe  $Ox$  (voir Figure 2.1). Le bilan de masse s'obtient facilement :

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u A) = 0$$

mais le bilan de quantité de mouvement exige plus de soin. Partant de la relation vectorielle

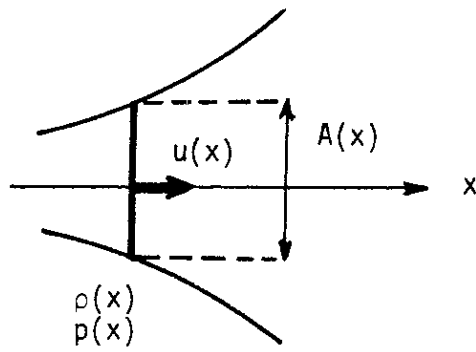


Figure 2.1 Tuyère monodimensionnelle

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \text{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\nabla p$$

la moyenne du premier membre dans le volume compris entre  $x$  et  $x+dx$  vaut :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 A) \right] dx$$

et pour le terme de pression, les termes de l'intégrale de surface

$\iint p d\vec{\sigma}$  qui correspondent au double trait sur la Figure 2.2 s'éliminent (à l'ordre d'approximation considéré) ; la moyenne de  $-\nabla p$  vaut finalement

$$-A(x) \frac{\partial p}{\partial x} dx .$$

L'équation quasi-monodimensionnelle de transfert d'impulsion prend donc la forme :

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u A) + \frac{\partial}{\partial x} [(\rho u^2 + p)A] - p \frac{dA}{dx} = 0$$

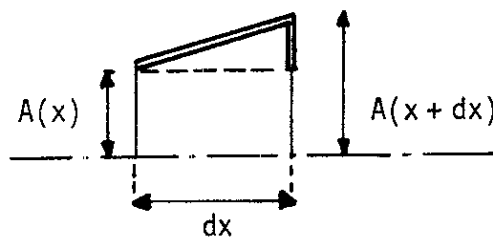


Figure 2.2 Bilan d'impulsion

La conservation de l'énergie (grandeur scalaire) s'obtient comme la conservation de la masse, et l'on a :

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho E A) + \frac{\partial}{\partial X} [(\rho u E + p u) A] = 0 \quad .$$

Le système instationnaire (2.1)-(2.3) est discrétisé au Chapitre 6.

## 2 - THEOREME DE HUGONIOT ET CONSEQUENCES

### a) Théorème de Hugoniot

Nous nous intéressons à un écoulement stationnaire (allant de gauche à droite) dans une tuyère. Les équations (2.1)-(2.3) et les théorèmes généraux du I.1 nous montrent qu'hors des chocs (ie toutes les fonctions inconnues sont régulières), on a :

$$(2.4) \quad \rho u A = \text{cste}$$

$$(2.5) \quad H \equiv \frac{u^2}{2} + h = \text{cste}$$

$$(2.6) \quad s = \text{cste}$$

Pour un écoulement régulier, l'équation (2.6) exprime l'isentropie, donc la barotropie. Compte tenu de (2.5) (théorème de Bernoulli) et de la définition de la vitesse du son  $c$  :

$$(2.7) \quad c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} (\rho, s)$$

on en déduit :

$$(2.8) \quad \frac{d(\rho u)}{\rho u} = \frac{du}{u} + \frac{dh}{c^2} = (1 - M^2) \frac{du}{u}$$

avec  $M = u/c$  (nombre de Mach). Par ailleurs, la relation (2.4) impose à la quantité de mouvement  $\rho u$  de varier en sens contraire de la section  $A$ . Lorsque  $A$  décroît (tuyère convergente),  $\rho u$  croît et ceci est possible pour un fluide en régime subsonique ( $M < 1$ ) si  $u$  croît ou en régime supersonique si  $u$  décroît. Lorsque  $A(x)$  croît (tuyère divergente),  $\rho u$  décroît, donc la vitesse diminue si le fluide est subsonique et augmente s'il est supersonique. Tous ces résultats constituent le théorème de Hugoniot. On en déduit que le passage d'un écoulement subsonique à un écoulement supersonique n'est possible qu'en un minimum  $A^*$  de la section (col de la tuyère).

#### b) Conséquences du théorème

Dans la suite, nous n'envisagerons que le cas d'une tuyère convergente-divergente, dite de De Laval. Nous nous donnons également l'état thermodynamique en entrée, par exemple le couple pression-température :

$$(2.9) \quad (p_0, T_0) \quad . \quad (\text{entrée})$$

Il s'agit par convention d'un état *générateur* de vitesse nulle. Ceci exprime en fait que l'état effectivement considéré à l'entrée de la tuyère est obtenu à partir de celui-ci par une détente isentropique qui conserve l'enthalpie totale. Précisons tout ceci dans le cas du gaz polytropique : l'enthalpie  $h_0$  et l'entropie  $S_0$  sont d'abord évalués

$$(2.10) \quad h_0 = C_p T_0 \quad S_0 \equiv \exp \frac{S_0}{C_v} = (RT_0)^\gamma p_0^{1-\gamma} \quad .$$

L'état d'entrée possède ainsi une vitesse  $u$ , une densité  $\rho$ , une entropie  $s = s_0$  et une enthalpie totale  $h_0$  telles que :

$$(2.11) \quad \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} S_0 \rho^{\gamma-1} = h_0 \quad .$$

Notons que dans la pratique, l'état d'entrée a le plus souvent une vitesse très faible puisque la section d'entrée est très grande devant celle du col. Les conditions (2.9) représentent alors l'état thermodynamique du fluide juste après la combustion. Nous avons la

PROPOSITION 2.1

Dans une tuyère convergente-divergente de section  $A^*$  au col, si l'on se donne les conditions génératrices (2.9) en entrée, le débit est alors majoré par une valeur critique  $Q^*$ :

$$(2.12) \quad Q^* = \sqrt{\gamma} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{P_0}{\sqrt{R T_0}} A^*$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.1

• Supposons d'abord l'évolution régulière. Compte tenu de (2.5)-(2.6), tous les états possibles pour le fluide vérifient la relation (2.11). On peut alors étudier la variation de l'impulsion  $\rho u$  en fonction de la densité (Figure 2.3). Le débit maximal est donc obtenu pour l'écoulement sonique au col, et la valeur (2.12) résulte alors d'un calcul élémentaire.

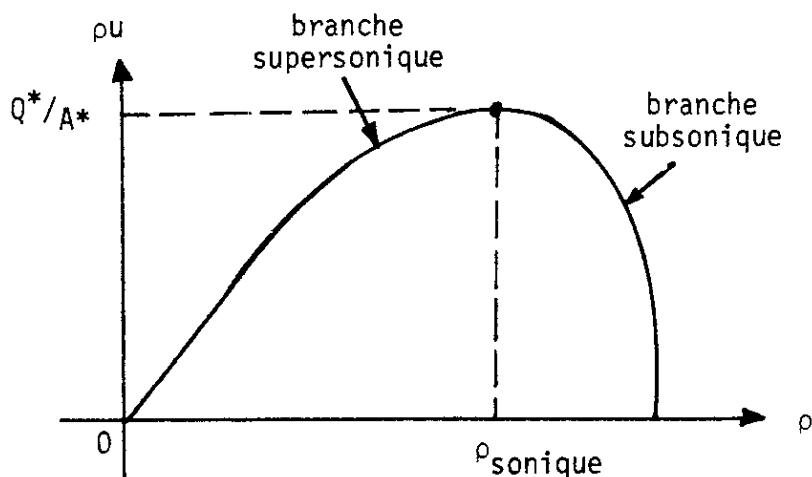


Figure 2.3 Relation quantité de mouvement-densité pour un gaz polytropique d'enthalpie

- Si un ou plusieurs chocs sont présents, l'entropie devient nécessairement supérieure à  $s_0$ , et le débit est alors inférieur ou égal à  $Q^*$ . D'où le résultat. ■

### REMARQUE 2.1

Les écoulements subsoniques dans le convergent et soniques au col permettent à la fois d'optimiser le débit qui traverse la tuyère et aussi d'accélérer au mieux le fluide, puisqu'ils peuvent donner naissance à des écoulements supersoniques dans le divergent. On dit que la tuyère est alors amorcée, ou bloquée.

## 3 - BLOCAGE DES TUYERES MONODIMENSIONNELLES

Nous étudions toujours l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait polytropique dans une tuyère de Laval. Les conditions d'entrée (2.9) sont supposées fixées (entrée subsonique). Nous supposons de plus la pression imposée à la sortie :

$$(2.13) \quad p = P \quad (\text{sortie}) \quad .$$

Les écoulements qui résultent de ces conditions aux limites sont très différents selon les valeurs de la contre-pression ; nous en détaillons les principales caractéristiques. La présentation choisie reprend celle de l'article [7] de EMBID-GOODMAN-MAJDA. Nous notons  $A_e$  et  $A_s$  les sections à l'entrée et à la sortie.

La relation (2.13), jointe à (2.5) et

$$(2.14) \quad h = \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho}$$

permet de calculer l'impulsion de sortie en fonction de la densité à la sortie du canal :

$$(2.15) \quad \rho u = \sqrt{2 h_0 \rho^2 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} P \rho}$$

et cette courbe  $\mathcal{P}$  est représentée sur la Figure 2.4. Nous avons aussi porté la courbe  $\mathcal{H}S_0$  de la Figure 2.3, l'équation :

$$(2.16) \quad \rho u = \sqrt{2 h_0 \rho^2 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} S_0 \rho^{\gamma+1}}$$

qui caractérise les états d'entropie et d'enthalpie totale imposés.

#### a) Condition nécessaire

Cherchons d'abord l'état de sortie (point  $\Sigma$  sur la Figure 2.4). Il est nécessaire que les courbes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{H}S_0$  se coupent, i.e. :

$$(2.17) \quad P \leq p_0$$

sinon aucun écoulement de vitesse positive n'est possible.

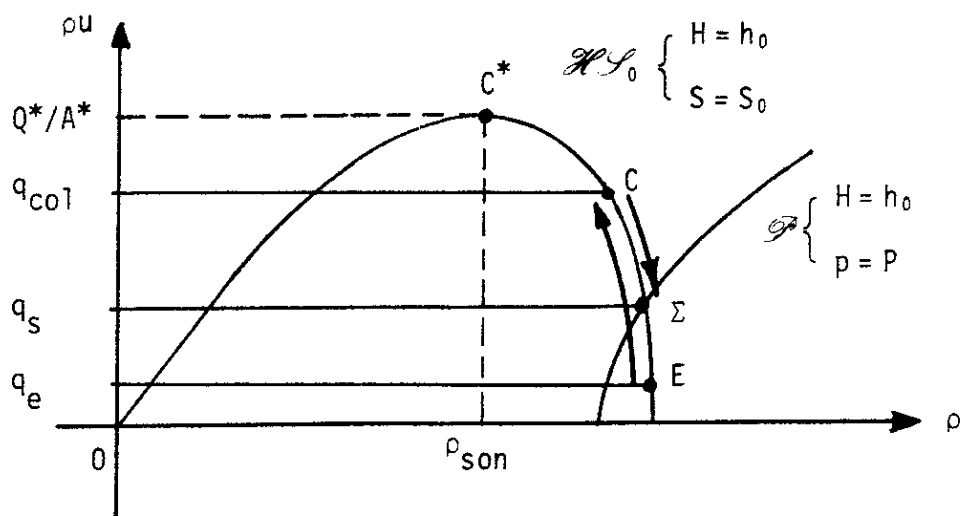


Figure 2.4 Ecoulement partout subsonique

### b) Écoulement partout subsonique

Lorsque la condition (2.17) est satisfaite, le point  $\Sigma$  est facile à calculer, ce qui fixe le flux de masse  $q_s$  en sortie, donc le débit  $Q = q_s A_s$ . Dans ces conditions, les points E et C de fonctionnement en entrée et au col sont fixés, puisqu'on reste sur la courbe  $\mathcal{H} \mathcal{S}_0$  (Figure 2.4) ; le fluide accélère jusqu'au col C pour ensuite ralentir dans le divergent (rappelons que pour chaque point A de la Figure 2.4, la pente de la corde OA issue de l'origine est égale à la vitesse de l'état A).

### c) Blocage

Le comportement décrit au paragraphe précédent se poursuit tant que l'état physique C du col peut être construit ie tant que  $q_s A_s \leq Q^*$  soit

$$(2.18) \quad P_1 \leq P \leq p_0$$

pour une pression  $P_1$  facile à évaluer numériquement. Pour la valeur  $P = P_1$ , l'écoulement est subsonique partout sauf au col (sonique) et le débit maximum (2.12) est alors atteint.

### d) Choc dans le divergent

- La construction de l'état de sortie (point  $\Sigma$  sur la Figure 2.4) exposée plus haut n'est plus valable si un choc est présent dans le canal. Nous rappelons que les relations de Rankine-Hugoniot associées à (2.1)(2.3) prennent la forme (pour un écoulement stationnaire) :



$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\rho u] = 0 \\ [\rho u^2 + p] = 0 \\ [H] = 0 \\ [S] \geq 0 \end{array} \right.$$

puisque la section  $A(x)$  du canal varie de façon régulière. Nous en déduisons que le débit et l'enthalpie totale restent constants dans tout le canal, qu'il y ait un choc stationnaire ou non. Si nous fixons un point  $(\rho, \rho u)$  de la courbe  $\mathcal{H}S_0$  correspondant à un état supersonique, on construit facilement, compte tenu de (2.19), l'état aval  $(\rho_1, q_1)$  issu de l'état précédent par un choc stationnaire :

$$(2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{\rho u^2}{h_0} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left( \rho - \frac{\gamma S_0}{(\gamma-1)h_0} \rho^\gamma \right) \\ q_1 = \rho u = \sqrt{2 h_0 \rho^2 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} S_0 \rho^{\gamma+1}} \end{array} \right.$$

Lorsque  $\rho$  varie entre 0 et la valeur sonique

$$(2.21) \quad \rho_s = \left( \frac{2(\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{h_0}{S_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$(\rho_1, q_1)$  parcourt la "courbe de choc"  $\mathcal{C}$  (cf. Figure 2.5).

- Supposons maintenant la pression  $P$  de sortie inférieure à  $P_1$  (cf. (2.18)). Il n'est plus possible de construire de solution barotrope des équations (2.1)-(2.3). Si un choc est présent dans la tuyère, il transforme un état supersonique en un état subsonique. Compte tenu du théorème de Hugoniot, le col est donc nécessairement sonique. Par suite, le débit maximal  $Q^*$  est atteint, le convergent reste lui subsonique (et en évolution barotrope) et le choc est situé dans le divergent. La conservation de la masse (2.1) nous impose la valeur de l'im-

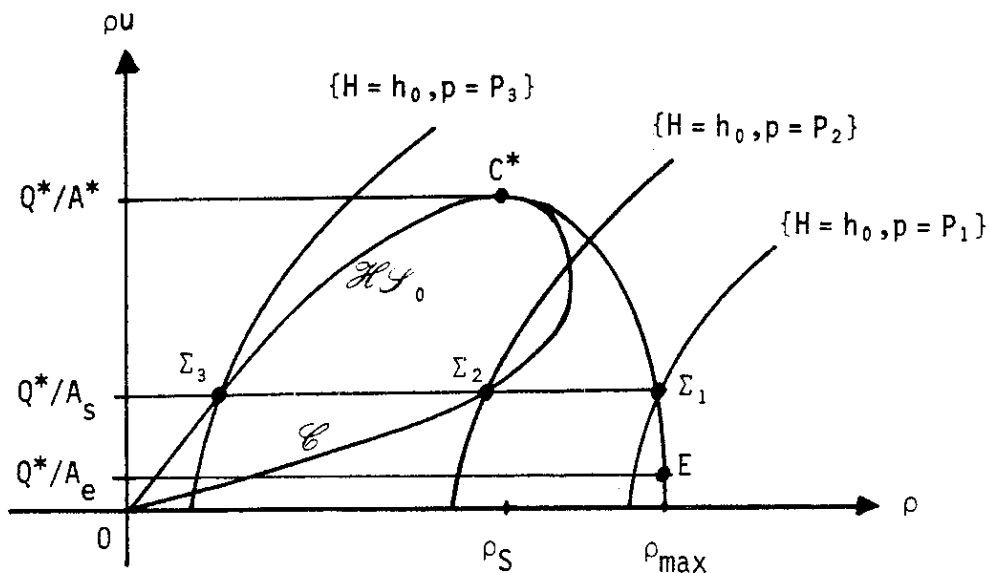


Figure 2.5 Pressions critiques

pulsion en entrée et en sortie ; en particulier l'état d'entrée (E sur la Figure 2.5) est imposé. Pour l'état de sortie, deux points particuliers  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  sont mis en évidence. Ils correspondent à deux valeurs particulières  $P_2$  et  $P_3$  :

$$(2.22) \quad P_3 < P_2 < P_1$$

de la pression de sortie. L'évolution  $E \rightarrow C^* \rightarrow \Sigma_3$  (pour  $p = P_3$ ) le long de la courbe  $\mathcal{H}S_0$  correspond à un écoulement barotrope avec sortie supersonique, alors que l'évolution  $E \rightarrow C^* \rightarrow \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_2$  (pour  $p = P_2$ ) est un cas limite où le choc est situé juste à la sortie de la tuyère.

- Considérons maintenant des valeurs de pression en sortie telles que

$$(2.23) \quad P_2 < P < P_1 .$$

Le point  $\Sigma$  (Figure 2.6) représentatif de la sortie est donné par la condition (2.13) et le débit total  $Q^*$ . Puisqu'en aval du choc l'écoulement (subsonique) reste isentropique, l'état aval du choc est situé

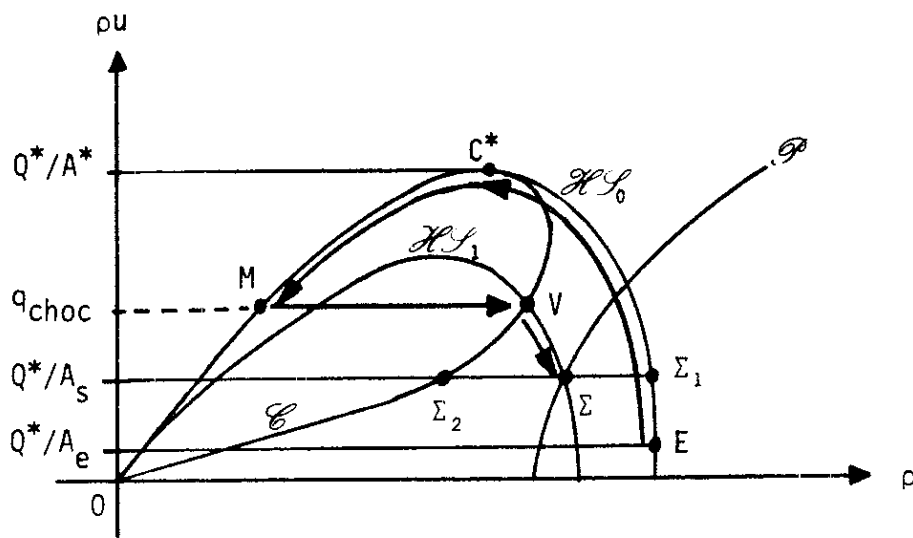


Figure 2.6 Ecoulement bloqué avec choc dans le divergent

sur l'unique courbe  $\mathcal{H}_1$  d'équations

$$(2.24) \quad H = h_0 \quad , \quad S = S_1$$

passant par le point  $\Sigma$ . Notons que cette condition fixe l'entropie en sortie  $S_1$ , i.e. la valeur de la contre-pression  $P$  fixe la force du choc. La position du choc s'obtient ensuite facilement : l'état aval est nécessairement situé à l'intersection  $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_1$  (Figure 2.6). L'état amont  $M$  a même quantité de mouvement  $q_{\text{choc}}$  et est situé sur  $\mathcal{H}_0$ . Dans le plan de phase  $(\rho, \rho u)$ , l'écoulement est donc fonction uniquement de  $p_0, T_0, P$  et des sections  $A_e, A^*, A_s$ . Dans le convergent, le point représentatif de l'état du fluide parcourt la courbe  $E \rightarrow C^*$  et dans le divergent, le régime supersonique  $C^* \rightarrow M$  est suivi du choc  $M \rightarrow V$  puis d'une évolution isentropique  $V \rightarrow \Sigma$ . La position physique du choc s'obtient en résolvant par rapport à l'abscisse  $x$  (dans le divergent) l'équation

$$(2.25) \quad A(x) = \frac{Q^*}{q_{\text{choc}}} \quad .$$

Ce type d'écoulement caractérise une tuyère bloquée, puisque l'amorçage ayant eu lieu (vitesse sonique au col), la contre-pression (2.23) trop forte empêche la tuyère de détendre complètement le gaz dans le divergent.

### e) Synthèse

Pour une tuyère de Laval avec entrée subsonique donnée par un état générateur (2.9), nous avons mis en évidence quatre valeurs caractéristiques de la contre-pression de sortie :

$$(2.26) \quad P_3 < P_2 < P_1 < p_0 \quad .$$

Pour  $P = p_0$ , le fluide est au repos, un écoulement subsonique régulier est obtenu pour  $P_1 \leq P < p_0$ , qui devient sonique au col pour  $P = P_1$ . L'écoulement bloqué avec choc dans le divergent est obtenu pour  $P_2 \leq P < P_1$ , et pour  $P < P_2$ ,  $P \neq P_3$  le modèle précédent n'a pas de solution. En fait une étude plus complète du jet en sortie de tuyère montre que pour  $P_3 < P < P_2$  la tuyère est surdétendue et des ondes de choc sont présentes dans le jet, alors que pour  $P < P_3$ , la tuyère est sousdétendue et le fluide continue à se détendre dans le jet. Le régime  $P = P_3$  est le plus intéressant pour l'ingénieur : la tuyère accélère le gaz jusqu'à un écoulement supersonique adapté à la pression de sortie, et la poussée fournie est alors maximale (voir par exemple SEDOV [29]). La loi débit-pression de sortie est résumée Figure 2.7 et la synthèse précédente est illustrée Figure 2.8, empruntée à GERMAIN [10].

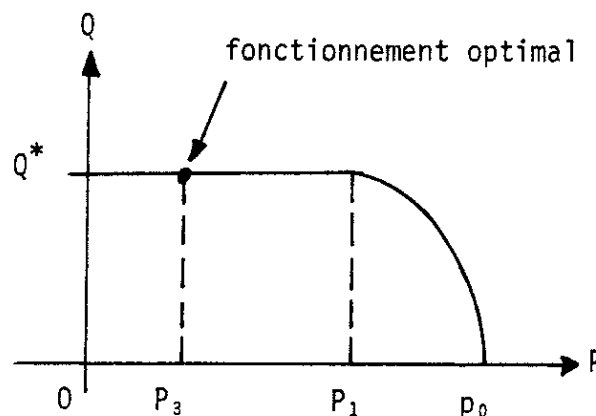


Figure 2.7 Loi débit-pression de sortie pour une tuyère de Laval

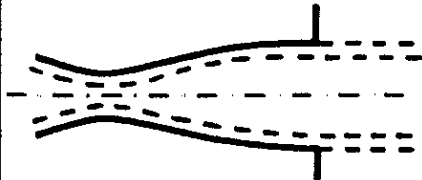
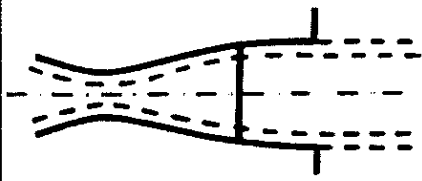
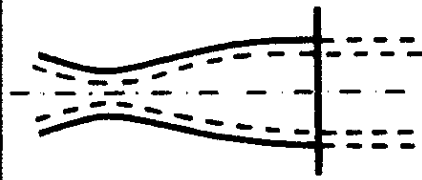
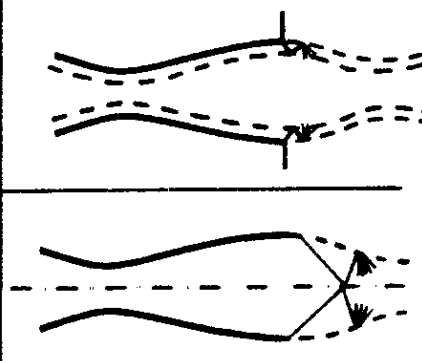
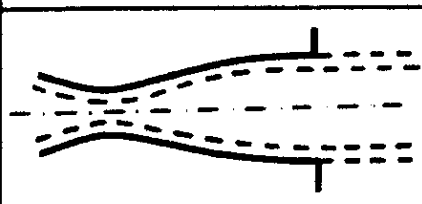
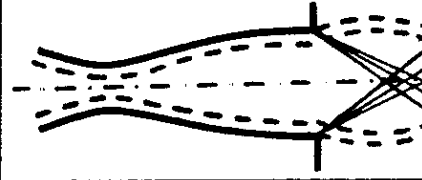
| Valeur de $P$         | Schéma d'écoulement  | Commentaires   |
|-----------------------|--|--|
| $P_1 \leq P \leq p_0$ |    | Écoulement<br>subsonique   |
| $P_2 < P < P_1$       |    | Supersonique $x_c < x < x_s$<br>Subsonique $x_s < x$<br>onde de choc $x_s$ |
| $P = P_2$             |    | onde de choc<br>dans la section terminale                                  |
| $P_3 < P < P_2$       |   | Système d'ondes<br>de choc à la sortie<br>du divergent                     |
| $P = P_2$             |  | Pression $p_e$ « adaptée »<br>Jet uniforme                                 |
| $P < P_3$             |  | Système d'ondes<br>de détente  |

Figure 2.8 Configurations d'écoulements dans une tuyère de Laval (d'après GERMAIN [10])

#### 4 - REMARQUES FINALES

L'étude du blocage des tuyères exposé au paragraphe 3 pour les équations d'Euler s'étend sans difficulté au modèle de Saint Venant (voir EMBID-GOODMAN-MAJDA [7]). Par contre le modèle potentiel (I-2-c) est *mal adapté* à l'étude quasi-monodimensionnelle des tuyères. En effet, les conditions d'entrée (2.9) imposent à l'écoulement (isenthalpique *et* isentropique) de suivre la loi (2.11) donc, dans le plan de phase, imposent au point représentatif du fluide de *rester* sur la courbe  $\mathcal{H}S_0$  (Figure 2.3), même lors d'un choc. Lorsque la tuyère est amorcée, la pression de sortie revient donc *toujours* à la valeur  $p = P_1$ , et pour spécifier davantage l'écoulement dans le divergent, il faut ajouter une condition sur la différence de potentiel :

$$(2.27) \quad \phi_{\text{sortie}} - \phi_{\text{entrée}} = \Delta\phi$$

comme le proposent DECONNINCK-HIRSCH [6] ou  $\overset{v}{\text{NECAS}}$  [25]. Nous pensons que la condition limite (2.27) est peu physique, et les conséquences de cette remarque sont abordées au Chapitres 4 et 7 pour des écoulements bidimensionnels.

Enfin nous n'avons pas du tout abordé le problème des fluides entrant dans le convergent à vitesse supersonique ni les évolutions purement instationnaires dans les tuyères quasi-monodimensionnelles. Nous renvoyons à [7] déjà cité et surtout à l'étude monumentale de GLAZ-LIU (voir [12] et les références citées). Sachons seulement que si le débit est supérieur au débit critique, une onde de choc instationnaire remonte le fluide à contre-courant et lui impose un passage sonique du col. Suivant l'analogie avec le trafic autoroutier (voir par exemple WHITHAM [34]), cette onde de choc nous est bien familière, lors des "bouchons" de la circulation.

## REFERENCES DU CHAPITRE I

- [1] AMARA M., *Analyse de Méthodes d'Eléments Finis pour des Ecoulements Transsoniques*, Thèse d'Etat, Université Paris 6, 1983.
- [2] BARDOS C., *Introduction aux Problèmes Hyperboliques Non Linéaires*, Rapport Interne n° 40, Université Paris Nord, 1983.
- [3] COLE J.D., COOK L.P., *Transonic Aerodynamics*, North Holland series in applied mathematics and mechanics, Amsterdam, 1986.
- [4] COURANT R., FRIEDRICHS K.O., *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, New-York, 1948.
- [5] CROCCO L., *Eine neue Strömfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation*, Z. Angew. Math. Mech. vol 17, pp 1-7, 1937.
- [6] DECONINCK H., HIRSCH C., *Boundary Conditions for the Potential Equation in Transonic Internal Flow Calculation*, ASME Paper 83-GT-135, 1983.
- [7] EMBID P., GOODMAN J., MAJDA A., *Multiple Steady States for 1-D Transonic Flow*, SIAM J. Sci. Stat. Comput. vol 5, n° 1, pp 21-41, 1984.
- [8] ENGQUIST B., OSHER S., *Stable and Entropy Satisfying Approximations for Transonic Flow Calculations*, Math of Comp, vol 34, n° 149, pp 45-75, 1980.
- [9] GERMAIN P., *Cours de Mécanique des Milieux Continus, Théorie Générale*, Masson, Paris, 1973.
- [10] GERMAIN P., *Mécanique*, tome 2, Ecole Polytechnique, Ellipses, Paris, 1986.
- [11] GERMAIN P., BADER R., *Unicité des écoulements avec choc dans la mécanique de Burgers*, ONERA, 1953.
- [12] GLAZ H.M., LIU T.P., *The Asymptotic Analysis of Wave Interactions and Numerical Calculations of Transonic Nozzle Flow*, Advances in Appl. Math., vol 5, pp 111-146, 1984.
- [13] GODLEWSKI E., RAVIART P.A., *An Introduction to the Theory and Numerical Analysis of Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, à paraître.

- [14] GODUNOV S.K., *Finite Difference Method for Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics*, Math. Sbornik, vol 47, n° 3, pp 271-290, 1959.
- [15] GODUNOV S.K., *An Interesting Class of Quasilinear Systems*, Dok. Akad. Nauk. SSSR, vol 139, pp 521-523, 1961 et Sov. Math., vol 2, pp 947-949, 1961.
- [16] GODUNOV S.K. et al., *Résolution Numérique des Problèmes Multidimensionnels de la Dynamique des Gaz*, Editions Mir, Moscou, 1976, 1979.
- [17] HADAMARD J., *Leçons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique* (pp 362-369), Hermann, Paris, 1903.
- [18] HARTEN A., *On the Symmetric Form of Systems of Conservation Laws with Entropy*, J. of Comp. Phys., vol 49, pp 151-164, 1983.
- [19] LANDAU L., LIFCHITZ E., *Physique Statistique*, Editions Mir, Moscou, 1950, 1967.
- [20] LANDAU L., LIFCHITZ E., *Mécanique des Fluides*, Editions Mir, Moscou, 1953, 1971.
- [21] LAX P.D., *Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and their Numerical Computation*, Comm. Pure Appl. Math., vol 7, pp 159-193, 1954.
- [22] LAX P.D., *Shock Waves and Entropy*, in : *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, Zarantonello (ed), pp 603-634, Academic Press, New York, 1971.
- [23] MORICE P., VIVIAND H., *Equations de Conservation et Condition d'Irréversibilité pour les Ecoulements Transsoniques Potentiels*, C.R. Acad. Sc. Paris, t 291, série B, pp 235-238, 1980.
- [24] MURMAN E., COLE J., *Calculation of Plane Steady Transonic Flows*, AIAA J., vol 9, n° 1, pp 114-121, 1971.
- [25] NEČAS J., *Ecoulements de Fluides : Compacité par Entropie*, Masson, Paris, à paraître.
- [26] NEDELEC J.C., *Curved Finite Element Methods for the Solution of Singular Integral Equations on Surfaces in  $\mathbb{R}^3$* , Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. vol 8, pp 61-80, 1976.
- [27] OLEINIK O., *On Discontinuous Solutions of Nonlinear Differential Equations*, Usp. Math. Nauk. (NS), vol 12, pp 3-73, 1957 et Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol 26, pp 95-172, 1957.



- [28] RIZZI A., ERIKSSON L.E., *Computation of Flow Around Wings Based on the Euler Equations*, J. of Fluid Mech., vol 148, pp 45-71, 1984.
- [29] SEDOV L., *Mécanique des Milieux Continus*, tome 2, Editions Mir, Moscou, 1973-1975.
- [30] SERRIN J., *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, in *Handbuch der Physik*, vol 8/1, Truesdell (ed), pp 125-263, Springer Verlag, Berlin, 1959.
- [31] SMOLLER J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [32] VIVIAND H., VEUILLOT J.P., *Méthodes Pseudostationnaires pour le Calcul d'Écoulements Transsoniques*, publication ONERA n° 1978-4, 1978.
- [33] VON KARMAN T., *The Similarity Law of Transonic Flow*, J. of Math. and Physics, vol 26, n° 3, pp 182-190, 1947.
- [34] WHITHAM G.B., *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley, New York, 1974.

## Chapitre 2

Discrete Vector Potential Representation of a  
Divergence Free Vector Field in Three Dimensional  
Domains : Numerical Analysis of a Model Problem .

( soumis au SIAM Journal of Numerical Analysis )

**DISCRETE VECTOR POTENTIAL  
REPRESENTATION OF A DIVERGENCE  
FREE VECTOR FIELD IN THREE DIMENSIONAL  
DOMAINS : NUMERICAL ANALYSIS OF  
A MODEL PROBLEM**

**Francois DUBOIS**

**N° 163**

**Juin 1987**

DISCRETE VECTOR POTENTIAL REPRESENTATION OF A  
DIVERGENCE FREE VECTOR FIELD IN THREE DIMENSIONAL  
DOMAINS : NUMERICAL ANALYSIS OF A MODEL PROBLEM

François DUBOIS\*

june 1987

ABSTRACT

For the representation of a divergence free vector field defined on a bounded simply connected domain of  $\mathbf{R}^3$  by its curl and its normal component on the boundary, a mixed formulation involving also a vector potential is proposed. The vector fields are discretized with help of curved finite elements which are conforming in  $H(\text{div})$  or  $H(\text{curl})$ . A discrete gauge condition is proposed to assure the uniqueness of the stream function. Optimal error estimates are derived.

\* Ecole Polytechnique - Centre de Mathématiques Appliquées  
91128 Palaiseau - France

# I - INTRODUCTION

When we study numerical fluid dynamics an important task is the discretization of vector fields  $\vec{u}$  which are divergence free (or solenoidal)

$$(1.1) \quad \text{div } \vec{u} = 0$$

with  $\vec{u}$  defined on a domain  $\Omega$  of  $\mathbb{R}^3$ . The major field of application is incompressible hydrodynamics (TEMAM [43]); replacing  $\vec{u}$  by the mass flux, the equation (1.1) is also important in stationary compressible aerodynamics (COURANT-FRIEDRICHS [14]). A conforming discretization which respects the condition (1.1) is difficult with the finite element method (HECHT [28], GUSTAFSON-HARTMAN [27]). On the other hand a natural idea to satisfy exactly (1.1) is to represent  $\vec{u}$  in terms of a vector potential  $\vec{\psi}$  :

$$(1.2) \quad \vec{u} = \text{curl } \vec{\psi}$$

but the uniqueness of  $\vec{\psi}$  is never assumed and a gauge condition has to be added. A classical way is to prescribe the Coulomb gauge (e.g. JACKSON [29]) :

$$(1.3) \quad \text{div } \vec{\psi} = 0 .$$

Moreover, different choices of the boundary conditions for  $\vec{\psi}$  are possible. The studies of BERNARDI [8] and BENDALI-DOMINGUEZ-GALLIC [5] have given existence and uniqueness results. Practically the stream function is just a tool for the representation of the field  $\vec{u}$  and must be computed easily if we give some constraints on this field. In this paper, we choose to fix the vorticity  $\vec{\omega}$  and the mass-inflow  $g$  over all the boundary

$$(1.4) \quad \text{curl } \vec{u} = \vec{\omega} \quad \text{in } \Omega$$

$$(1.5) \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

With these assumptions we restrict ourselves to a simple problem. More sophisticated models, by example, are the Stokes and Navier-Stokes equations in  $(\vec{\psi}, \vec{\omega})$  formulation (GIRAULT-RAVIART [25]), and the potential isentropic equations of transonic flow (COURANT-FRIEDRICHS [14]). However, even in the linear case of the Stokes problem the numerical analysis of the threedimensional case is difficult (NEDELEC [37]).

In part II, after recalling classical results on vector fields, we split the linear problem in an homogeneous problem in  $\Omega$  ( $g=0$ ) and a problem on the boundary of  $\Omega$  ( $g \neq 0$ ). Then a concrete construction method of  $\vec{\psi}$  from the only data  $(\vec{\omega}, g)$  is presented. In the discretized problem, the compatibility between these two subproblems requires that the discrete field  $\vec{\psi}_h$  must have a tangential component on each point of the boundary. Thus in part III we develop curved finite elements conforming in the spaces  $H(\text{div})$  and  $H(\text{curl})$  which coincide in the straight case with the vectorial finite elements of degree 1 introduced by NEDELEC [36]. Then we derive optimal interpolation errors. Part IV treats the approximation of the homogeneous problem. The major difficulty is the definition of a "good" linear space which assumes that the discrete potential is unique. Therefore, we adapt the discrete gauge communicated by ROUX [41] to the case of arbitrary simple connected domains in  $\mathbb{R}^3$ . Then we formulate the discrete problem and obtain the error estimation between the velocity field and its approximation. By linearity part V treats only the approximation of an harmonic vector field ( $\vec{\omega}=0$ ). The boundary finite elements of NEDELEC [33] and BENDALI [2,4], are adapted to  $H(\text{curl})$ , and a discrete gauge is added to assume the uniqueness of the tangential component of the discrete stream function. Then the error estimation is established.

## HYPOTHESIS AND NOTATIONS

We define  $\Omega$  as a connected bounded domain of  $\mathbb{R}^3$  with boundary  $\partial\Omega \equiv \Gamma$ , and  $\Gamma_j (j=0,1,\dots,N_\Gamma)$  as the connected components of  $\Gamma$ . We assume that  $\Gamma_0$  is the boundary of the unbounded component of  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ . Classically (e.g. NEDELEC [34]) the structure of regular ( $\mathcal{C}^\infty$ ) manifold with boundary ensures the existence of  $p$  open sets  $\Omega_i$  of  $\mathbb{R}^3$  covering  $\Gamma$ , and of  $p$  compatible local charts  $\varphi_i$

$$(1.6) \quad \varphi_i : \Omega \longrightarrow ]-1,1[)^3$$

$$(1.7) \quad \varphi_i|_{\Omega_i \cap \Omega_j} = \varphi_j|_{\Omega_i \cap \Omega_j} \quad \forall i,j = 1,\dots,p$$

with  $\varphi_i$  and  $\varphi_i^{-1}$  of  $\mathcal{C}^\infty$  class verifying :

$$(1.8) \quad \varphi_i(\Gamma \cap \Omega_i) = ]-1,1[)^2 \times \{0\}$$

$$(1.9) \quad \varphi_i(\Omega \cap \Omega_i) = ]-1,1[)^2 \times ]0,1[$$

( $\Omega$  is locally on one side of its boundary). We finish this geometrical description by introducing the normal projector on the boundary (NEDELEC [33]) :

PROPOSITION 1.1 : *There exists  $\delta > 0$  and a neighborhood  $U_\delta$  of  $\Gamma : U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^3, \text{dist}(x,\Gamma) \leq \delta\}$  such that each point  $x$  of  $U_\delta$  admits a unique projection  $P_\Gamma x$  on  $\Gamma$  :*

$$\forall x \in U_\delta, \exists ! y = P_\Gamma x \in \Gamma, \vec{xy} \text{ normal to } \Gamma.$$

We make now one hypothesis on the algebraical topology of  $\Omega$ , then we introduce some notations relative to boundary operators. The domain  $\Omega$  is

supposed to have  $N_H$  holes (if  $N_H=0$ ,  $\Omega$  is simply connected) and it is possible to find  $N_H$  regular surfaces  $\Sigma_k$  such that  $(\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{N_H} \Sigma_k)$  is a simply connected domain of  $\mathbb{R}^3$  (FOIAS-TEMAM [21]). The following operators on the manifold  $\Gamma$  are defined in CHOQUET-BRUHAT [12] by example :

- Surfacic gradient  $\nabla_\Gamma w$  and surfacic curl,  $\text{curl}_\Gamma w$ , of a scalar function on  $\Gamma$  :  $\text{curl}_\Gamma w = \nabla_\Gamma w \times \vec{n}$  with  $\vec{n}$  the external normal to  $\Gamma$ ,
- Surfacic curl,  $\text{curl}_\Gamma \vec{\xi}$ , and surfacic divergence  $\text{div}_\Gamma \vec{\xi}$  of a tangent vectorial function defined on  $\Gamma$ . We have :  $\text{div}_\Gamma \vec{\xi} = \text{curl}_\Gamma \vec{n} \times \vec{\xi}$ . Finally the Laplace-Beltrami operator  $\Delta_\Gamma$  satisfies :

$$-\Delta_\Gamma w = \text{curl}_\Gamma(\text{curl}_\Gamma w) = -\text{div}_\Gamma(\nabla_\Gamma w) .$$

By duality these operators are also defined for scalar ( $T$ ) or vectorial ( $\vec{U}$ ) distributions on  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned} \langle \nabla_\Gamma T, \vec{\xi} \rangle_\Gamma &= - \langle T, \text{div}_\Gamma \vec{\xi} \rangle_\Gamma \\ \langle \text{curl}_\Gamma T, \vec{\xi} \rangle_\Gamma &= \langle T, \text{curl}_\Gamma \vec{\xi} \rangle_\Gamma \\ \langle \text{curl}_\Gamma \vec{U}, w \rangle_\Gamma &= \langle \vec{U}, \text{curl}_\Gamma w \rangle_\Gamma \\ \langle \text{div}_\Gamma \vec{U}, w \rangle_\Gamma &= - \langle \vec{U}, \nabla_\Gamma w \rangle_\Gamma \end{aligned}$$

In these notations, the duality product  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$  of two vectors is the scalar product thanks to the metric  $g_{ij}$  on the manifold (e.g. CHOQUET-BRUHAT [12]) :

$$\langle \vec{U}, \vec{\xi} \rangle_\Gamma = \sum_{i,j} \langle U_i, g_{ij} \xi_j \rangle_\Gamma$$

- More generally the scalar product between two vectors  $\vec{\varphi}, \vec{\psi}$  defined in  $\Omega$ , or two tangent vectors on  $\Gamma$ , is denoted by  $\vec{\varphi} \cdot \vec{\psi}$  [or  $(\vec{\varphi}, \vec{\psi})$  when  $\cdot$  is used for the image  $A \cdot \vec{u}$  of a vector  $\vec{u}$  by a mapping  $A$ ], the tangential



component on  $\Gamma$  of a vector  $\vec{\varphi}$  is :  $\Pi\vec{\varphi} = \vec{n} \times (\vec{\varphi} \times \vec{n}) = (\vec{n} \times \vec{\varphi}) \times \vec{n}$  and we have a Green formula for regular vector fields :

$$(1.10) \quad \int_{\Omega} \vec{\varphi} \cdot \text{curl} \vec{\psi} \, dx = \int_{\Omega} \text{curl} \vec{\varphi} \cdot \vec{\psi} \, dx + \int_{\partial\Omega} (\vec{\varphi} \times \vec{n}) \cdot \vec{\psi} \, d\gamma$$

Moreover  $\text{Span} \langle u_1, \dots, u_n \rangle$  is the linear space of all the linear combinations of the vectors  $u_1, \dots, u_n$  and  ${}^tA$  is the transpose of a matrix  $A$ .

## II - THE CONTINUOUS PROBLEM

We first recall the definitions of some classical Sobolev spaces. Then the major results concerning the decomposition of vector fields reviewed in BENDALI-DOMINGUEZ-GALLIC [5] and also established by FRIEDRICHS [22], FOIAS-TEMAM [21] and GEORGESCU [23] are given. We also propose a mixed formulation in the variables  $(\vec{u}, \vec{\psi})$  to compute both the velocity field  $\vec{u}$  and the potential  $\vec{\psi}$  in the particular case of homogeneous constraints on  $\vec{u}$  :

$$(2.1) \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \Omega$$

$$(2.2) \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

In the non-homogeneous case, i.e. if

$$(2.3) \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

we first consider a boundary problem for which we give a mixed formulation. Then the lifting Theorem of J.L. Lions (LIONS-MAGENES [31]) allows a theoretical approach to compute the vector potential  $\vec{\psi}$  with

$$(2.4) \quad \vec{u} = \operatorname{curl} \vec{\psi}$$

if  $\vec{u}$  satisfies both (2.1) and (2.3).

### 1) SOME HILBERT SPACES

The Sobolev spaces  $L^2(\Omega)$ ,  $H^1(\Omega)$ ,  $H^2(\Omega)$  are Hilbert spaces with their natural norms  $\| \cdot \|_{0,\Omega}$ ,  $\| \cdot \|_{1,\Omega}$ , and  $\| \cdot \|_{2,\Omega}$  respectively (e.g. ADAMS [1]). We set also :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ w \in H^1(\Omega) , w|_{\Gamma} = 0 \right\}$$
$$L_0^2(\Omega) = \left\{ w \in L^2(\Omega) , \int_{\Omega} w \, dx = 0 \right\}$$

Following DUVAUT-LIONS [19], we define

$$H(\text{div}, \Omega) = \left\{ \vec{v} \in (L^2(\Omega))^3, \text{div } \vec{v} \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$H(\text{curl}, \Omega) = \left\{ \vec{\varphi} \in (L^2(\Omega))^3, \text{curl } \vec{\varphi} \in (L^2(\Omega))^3 \right\}$$

and the associated norms  $\| \cdot \|_{H(\text{div})}$  and  $\| \cdot \|_{H(\text{curl})}$ . We also consider vector fields which are normal on the boundary :

$$H^0(\text{curl}, \Omega) = \left\{ \vec{\varphi} \in H(\text{curl}, \Omega), \vec{\varphi} \times \vec{n}|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

The classical spaces  $H^s(\Gamma)$  ( $s$  real) of scalar functions (and distributions) defined on the  $\Omega$ -boundary are equipped with their natural norms  $\| \cdot \|_{s, \Gamma}$ . The duality product between  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  and  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  is denoted by  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ , and  $TH^s(\Gamma)$  are tangent vector fields on  $\Gamma$  (e.g. [3]) :

$$TH^s(\Gamma) = \left\{ \vec{\eta} \in (H^s(\Gamma))^3, \vec{\eta} \cdot \vec{n} \equiv 0 \right\} .$$

Consider now some particular spaces useful in this paper :

DEFINITION 2.1

$$W^2(\Omega) = \left\{ \vec{\varphi} \in (H^1(\Omega))^3, \text{curl } \vec{\varphi} \in (H^1(\Omega))^3 \right\}$$

$$M(\Gamma) = \left\{ g \text{ distribution on } \Gamma, \langle g, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0, \forall i = 0, \dots, N_{\Gamma} \right\} .$$

The notations introduced above for the norms of scalar fields will also be used for the norms of the corresponding vector fields when there is no ambiguity.

PROPOSITION 2.1 : *The norm*

$$\| \vec{\varphi} \|_{W^2(\Omega)} = \left( \| \vec{\varphi} \|_{1, \Omega}^2 + \| \text{curl } \vec{\varphi} \|_{1, \Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

*defines on  $W^2(\Omega)$  a structure of Hilbert space.*

## 2) DECOMPOSITION OF VECTOR FIELDS

In this paragraph, we recall general results on vector fields defined on a regular bounded domain  $\Omega$  of  $\mathbb{R}^3$ . We refer to BENDALI-DOMINGUEZ-GALLIC [5] and included references for the results.

DEFINITION 2.2 *The two sets*

$$X_T(\Omega) = \left\{ \vec{v} \in (L^2(\Omega))^3, \operatorname{div} \vec{v} \in L^2(\Omega), \operatorname{curl} \vec{v} \in (L^2(\Omega))^3, \vec{v} \cdot \vec{n} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\}$$

$$X_N(\Omega) = \left\{ \vec{v} \in (L^2(\Omega))^3, \operatorname{div} \vec{v} \in L^2(\Omega), \operatorname{curl} \vec{v} \in (L^2(\Omega))^3, \vec{v} \times \vec{n} \in TH^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\}$$

are Hilbert spaces equipped with their natural norms  $\| \cdot \|_T$  and  $\| \cdot \|_N$  respectively.

THEOREM 2.1 *The spaces  $X_T(\Omega)$  and  $X_N(\Omega)$  are equal to  $(H^1(\Omega))^3$  algebraically and topologically.*

We introduce tangential and normal harmonic vector fields, related to topological invariants of  $\Omega$ .

DEFINITION 2.3

$$H_T(\Omega) = \left\{ \vec{v} \in (L^2(\Omega))^3, \operatorname{div} \vec{v} = 0, \operatorname{curl} \vec{v} = 0, \vec{v} \cdot \vec{n}|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

$$H_N(\Omega) = \left\{ \vec{v} \in (L^2(\Omega))^3, \operatorname{div} \vec{v} = 0, \operatorname{curl} \vec{v} = 0, \vec{v} \times \vec{n}|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

THEOREM 2.2 *We have  $\dim H_T(\Omega) = N_H$ ,  $\dim H_N(\Omega) = N_{\Gamma}$ . There exists a unique basis  $(\vec{\theta}_i^T)_{1 \leq i \leq N_H}$  of  $H_T(\Omega)$  (resp.  $(\vec{\theta}_j^N)_{1 \leq j \leq N_{\Gamma}}$  of  $H_N(\Omega)$ ) such that :*

$$\int_{\Sigma_i} \vec{\theta}_k^T \cdot \vec{n} \, d\gamma = \delta_{ik} \quad \forall i, k = 1, \dots, N_H$$

$$\text{(respectively } \int_{\Gamma_j} \vec{\theta}_l^N \cdot \vec{n} \, d\gamma = \delta_{jl} \quad \forall j, l = 1, \dots, N_{\Gamma} \text{)}.$$

PROPOSITION 2.2 The orthogonal projectors  $P_T$  and  $P_N$ ,  $P_T : X_T(\Omega) \rightarrow H_T(\Omega)$  and  $P_N : X_N(\Omega) \rightarrow H_N(\Omega)$  with respect to the associated scalar products admit the following expressions :

$$(2.5) \quad P_T \vec{v} = \sum_{i=1}^{N_H} \left( \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \tilde{\theta}_i^T dx \right) \tilde{\theta}_i^T$$

$$(2.6) \quad P_N \vec{v} = \sum_{j=1}^{N_{\Gamma}} \left( \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \tilde{\theta}_j^N dx \right) \tilde{\theta}_j^N$$

for some basis  $\tilde{\theta}_i^T$  of  $H_T(\Omega)$  (resp.  $\tilde{\theta}_j^N$  of  $H_N(\Omega)$ ). Thus the expressions (2.5)-(2.6) define  $P_T$  and  $P_N$  as orthogonal projectors from  $(L^2(\Omega))^3$  onto  $H_T(\Omega)$  and  $H_N(\Omega)$  respectively.

PROOF OF PROPOSITION 2.2

The auxiliary basis  $\tilde{\theta}_i^T$  and  $\tilde{\theta}_j^N$  are constructed explicitly by FOIAS-TEMAM [21], DOMINGUEZ [16], and BENDALI-GALLIC [6] as gradients of some harmonic functions defined on  $(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N_H} \Sigma_i)$  and on  $\Omega$  respectively. The end of the proof is clear. ■

PROPOSITION 2.3 Let  $\vec{v}$  be a solenoidal vector field ( $\text{div } \vec{v} = 0$ ) in  $(H^1(\Omega))^3$ . We have :

$$(2.7) \quad P_N \vec{v} = \sum_{j=1}^{N_{\Gamma}} \left( \int_{\Gamma_j} \vec{v} \cdot \vec{n} d\gamma \right) \tilde{\theta}_j^N$$

$$(2.8) \quad P_T \vec{v} = \sum_{i=1}^{N_H} \left( \int_{\Sigma_i} \vec{v} \cdot \vec{n} d\gamma \right) \tilde{\theta}_i^T \quad \text{if } \vec{v} \cdot \vec{n}|_{\Gamma} = 0 .$$

PROOF OF PROPOSITION 2.3

We only prove (2.7) since the proof of (2.8) is similar. Following BENDALI-GALLIC [6], let  $\psi_j$  be the solution of

$$\begin{cases} \Delta \psi_j = 0 & \Omega \\ \psi_j = 0 & \Gamma_0 \\ \psi_j = \delta_{ij} & \Gamma_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, N_\Gamma$$

We set  $\tilde{\theta}_j^N = \nabla \psi_j$  and we integrate by parts. We have :

$$\int_{\Omega} \vec{v} \cdot \tilde{\theta}_j^N \, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} \, \psi_j \, d\gamma$$

if  $\text{div } \vec{v} = 0$ . Thus (2.7) holds. ■

THEOREM 2.3 *The mappings*

$$\begin{aligned} X_T(\Omega) \ni \vec{v} \mapsto |\vec{v}|_T &= \left( \|\text{curl } \vec{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div } \vec{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbb{P}_T \vec{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\vec{v} \cdot \vec{n}\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ X_N(\Omega) \ni \vec{v} \mapsto |\vec{v}|_N &= \left( \|\text{curl } \vec{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div } \vec{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbb{P}_N \vec{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\vec{v} \times \vec{n}\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

are norms on  $X_T(\Omega)$  and  $X_N(\Omega)$  which are equivalent to the  $H^1(\Omega)$  norm.

DEFINITION and PROPOSITION 2.4 *We set*

$$W^1(\Omega) = \left\{ \vec{\varphi} \in (H^1(\Omega))^3, \text{div } \vec{\varphi} = 0, \vec{v} \times \vec{n}|_{\Gamma} = 0, \int_{\Gamma_j} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, d\gamma = 0, \forall j = 1, \dots, N_\Gamma \right\}$$

Then the mapping  $W^1(\Omega) \ni \vec{\varphi} \mapsto \|\text{curl } \vec{\varphi}\|_{0,\Omega} \in \mathbb{R}$  is a norm on  $W^1(\Omega)$  which is equivalent to the  $H^1$  norm.

PROOF Direct consequence of Proposition 2.3 and Theorem 2.3. ■

THEOREM 2.4 (Decomposition of vector fields). For  $\vec{u}$  given in  $(L^2(\Omega))^3$ , we have the following decompositions :

(i)

$$(2.9) \quad \vec{u} = \nabla w + \text{curl } \vec{\varphi} + \sum_{i=1}^{N_H} \left( \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \tilde{\theta}_i^T \, dx \right) \vec{\theta}_i^T$$

with unique  $(w, \vec{\phi})$  verifying

$$(2.10) \quad \begin{cases} w \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \\ \vec{\phi} \in W^1(\Omega) \end{cases}$$

(ii)

$$(2.11) \quad \vec{u} = \nabla p + \text{curl } \vec{\psi} + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} \left( \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{\theta}_j^N \, dx \right) \vec{\theta}_j^N$$

with unique  $(p, \vec{\psi})$  verifying

$$(2.12) \quad \begin{cases} p \in H_0^1(\Omega) \\ \vec{\psi} \in (H^1(\Omega))^3, \text{div } \vec{\psi} = 0, \vec{\psi} \cdot \vec{n}|_{\Gamma} = 0, P_{\Gamma} \vec{\psi} = 0 \end{cases}$$

Moreover if  $\vec{u}$  belongs to  $(H^m(\Omega))^3$  ( $m \geq 0$ ) then  $w, p, \vec{\phi}, \vec{\psi}$  belong to  $H^{m+1}(\Omega)$ .

This result was used by EL DABAGHI-PIRONNEAU in their numerical work [20].

### 3) MIXED FORMULATION OF THE HOMOGENEOUS PROBLEM

If a vector field  $\vec{u}$  admits a representation of the type  $\vec{u} = \text{curl } \vec{\phi}$ , we have clearly :

$$(2.13) \quad \text{div } \vec{u} = 0$$

but we also have constraints on the normal component.

LEMMA 2.1 Let  $\vec{\phi}$  be in the space  $W^1(\Omega)$ . We have in the space  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  :  
 $\text{curl } \vec{\phi} \cdot \vec{n} = \text{div}_{\Gamma} \vec{\phi} \times \vec{n} = \text{curl}_{\Gamma} \Pi \vec{\phi}$ .

#### PROOF OF LEMMA 2.1

Consider a regular function  $w$  on  $\Gamma$  and a lifting of  $w$  on  $\bar{\Omega}$  also denoted by  $w$ . We have

$$\begin{aligned} \langle \text{curl } \vec{\phi} \cdot \vec{n}, w \rangle_{\Gamma} &= \int_{\Omega} \text{div}(w \text{curl } \vec{\phi}) \, dx = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \text{curl } \vec{\phi} \, dx \\ &= -\langle \nabla w, \vec{\phi} \times \vec{n} \rangle_{\Gamma} = \langle \text{div}_{\Gamma} \vec{\phi} \times \vec{n}, w \rangle_{\Gamma} \end{aligned}$$

by definition of the operator  $\text{div}_{\Gamma}$ . Moreover for an arbitrary tangent vector field  $\vec{\xi}$  on  $\Gamma$ , we have  $\text{curl}_{\Gamma}(\vec{n} \times \vec{\xi}) = \text{div}_{\Gamma} \vec{\xi}$  (e.g. CHOQUET-BRUHAT [12]).

PROPOSITION 2.5 (FOIAS-TEMAM [21]) *Let  $\vec{u} \in (L^2(\Omega))^3$  and  $\vec{\psi} \in H(\text{curl}, \Omega)$  satisfying  $\vec{u} = \text{curl } \vec{\psi}$ . Then we have :*

$$(2.14) \quad P_N \vec{u} = 0 .$$

If  $\vec{u} \in (H^1(\Omega))^3$  and  $\vec{\psi} \in W^2(\Omega)$ , this condition can be written :

$$\int_{\Gamma_i} \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\gamma = 0 \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, N_{\Gamma}.$$

PROOF OF PROPOSITION 2.5

From Proposition 2.2 (equation (2.6)) we have :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \tilde{\theta}_j^N \, dx &= \int_{\Omega} \text{curl } \vec{\psi} \cdot \tilde{\theta}_j^N \, dx \\ &= \int_{\Omega} \vec{\psi} \cdot \text{curl } \tilde{\theta}_j^N \, dx - \int_{\partial\Omega} \vec{\psi} \cdot (\vec{n} \times \tilde{\theta}_j^N) \, d\gamma \end{aligned}$$

because  $\tilde{\theta}_j^N \in H_N(\Omega)$ . Then  $P_N \vec{u} = 0$ . The end of the proof is a consequence of Proposition 2.3. Directly we have from (2.12) and Lemma 2.1  $\vec{u} \cdot \vec{n} = \text{div}_{\Gamma}(\vec{\psi} \times \vec{n})$  on  $\partial\Omega$  and we integrate this function on the component  $\Gamma_i$ .

We suppose now that the hypothesis (2.13).(2.14) are true and we give in the following of part II a way to construct a vector potential  $\vec{\psi}$ . We begin with the simple case  $\vec{u} \cdot \vec{n} \equiv 0$  on  $\Gamma$ .



THEOREME 2.5 *The mixed problem*

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \in (L^2(\Omega))^3, \quad \vec{\psi} \in W^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} \text{curl} \vec{\psi} \cdot \vec{v} \, dx = 0 \quad \forall \vec{v} \in (L^2(\Omega))^3 \\ \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \text{curl} \vec{\varphi} \, dx = \int_{\Omega} \vec{\omega} \cdot \vec{\varphi} \, dx \quad \forall \vec{\varphi} \in W^1(\Omega) \end{array} \right.$$

admits, for  $\vec{\omega}$  given in  $(H^1(\Omega)')^3$ , a unique solution which satisfies  $\text{div} \vec{u} = 0$ . Moreover if  $\vec{\omega} \in (L^2(\Omega))^3$  such that (2.13). (2.14) is satisfied,  $\vec{u}$  belongs to  $(H^1(\Omega))^3$  and we have

$$(2.16) \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Gamma$$

$$(2.17) \quad \text{curl} \vec{u} = \vec{\omega} \quad \Omega$$

$$(2.18) \quad \|\vec{u}\|_{1,\Omega} \leq C \|\vec{\omega}\|_{0,\Omega}$$

for some constant  $C$ .

PROOF OF THEOREM 2.5

- The existence and uniqueness are consequences of the Brezzi conditions (BREZZI [10]) which are satisfied because on one hand

$$(L^2(\Omega))^6 \ni (\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx \in \mathbb{R} \quad \text{is coercive}$$

-and on the other hand

$$\sup_{\vec{v} \in (L^2(\Omega))^3} \frac{\int_{\Omega} \text{curl} \vec{\varphi} \cdot \vec{v} \, dx}{\|\vec{v}\|_{0,\Omega}} \geq \|\text{curl} \vec{\varphi}\|_{0,\Omega} \geq C \|\vec{\varphi}\|_{1,\Omega}$$

(we choose  $\vec{v} = -\text{curl} \vec{\varphi}$  to obtain the first inequality and we refer to Proposition 2.4 for the second). The first equation implies  $\vec{u} = \text{curl} \vec{\psi}$  and therefore  $\text{div} \vec{u} = 0$ .

- If  $\vec{\omega}$  belongs to  $(L^2(\Omega))^3$  and verifies both  $\text{div } \vec{\omega} = 0$  and  $P_N \vec{\omega} = 0$ , The Theorem 2.4 (ii) shows that we can write :

$$(2.19) \quad \vec{\omega} = \nabla p + \text{curl } \vec{J}$$

The scalar  $p$  belonging to  $H_0^1(\Omega)$ , we have  $p=0$ . Besides we have also  $\vec{J} \in (H^1(\Omega))^3$ ,  $\text{div } \vec{J} = 0$ ,  $\vec{J} \cdot \vec{n}|_{\Gamma} = 0$ . Demonstrate now that  $\vec{u} - \vec{J}$  belongs to  $H_T(\Omega)$ , i.e. that the pair  $(w, \vec{\varphi})$  of the decomposition of  $\vec{u} - \vec{J}$ , by means of Theorem 2.4 (i), is equal to zero. We have

$$\int_{\Omega} (\vec{u} - \vec{J}) \cdot \nabla w \, dx = \int_{\partial\Omega} (\vec{u} - \vec{J}) \cdot \vec{n} w \, d\gamma = \int_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \vec{n} w \, d\gamma = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\vec{u} - \vec{J}) \cdot \text{curl } \vec{\varphi} \, dx &= \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \text{curl } \vec{\varphi} \, dx - \int_{\Omega} \text{curl } \vec{J} \cdot \vec{\varphi} \, dx \quad \text{because } \vec{\varphi} \times \vec{n} = 0 \\ &= 0 \quad \text{thanks to (2.15) and (2.19).} \end{aligned}$$

Thus  $\vec{u} \in (H^1(\Omega))^3$  and (2.16).(2.17) are clear. We choose  $\vec{\varphi} = \vec{\psi}$  in the second equation of (2.15). From Proposition 2.4, we deduce  $\|u\|_{0,\Omega}^2 \leq \| \vec{\omega} \|_{0,\Omega} \| \vec{\varphi} \|_{0,\Omega} \leq C \| \vec{\omega} \|_{0,\Omega} \| \text{curl } \vec{\varphi} \|_{0,\Omega}$  which corresponds to (2.18). ■

#### 4) MIXED FORMULATION OF THE BOUNDARY PROBLEM

We suppose in this paragraph that the boundary  $\Gamma$  is connected (if it is not, we just have to replace the functional spaces by their  $(N_{\Gamma} + 1)$  copies for the different connected components of  $\Gamma$ ). We recall first general results on scalar and tangent vector fields on  $\Gamma$ .

THEOREM 2.6 Let  $s$  be a real number,  $g$  an element of  $H^s(\Gamma) \cap M(\Gamma)$ .

The problem  $-\Delta_{\Gamma} \theta = g$  admits a unique solution  $\theta \in H^{s+2}(\Gamma) \cap M(\Gamma)$  verifying

$$\|\theta\|_{s+2,\Gamma} \leq C(s) \|g\|_{s,\Gamma} \quad \text{for some constant } C(s) \text{ independant of } g.$$

PROOF See, e.g. DE RHAM [15] or TREVES [44]. ■

DEFINITION 2.5 We denote by  $Y(\Gamma)$  the space of tangent vector fields  $\vec{\theta}$  on  $\Gamma$  with  $\text{curl}_\Gamma \vec{\theta} = \text{div}_\Gamma \vec{\theta} = 0$ . We define  $W^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  by

$$W^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left\{ \vec{n} \in TH^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{div}_\Gamma \vec{n} = 0, \int_\Gamma \vec{n} \cdot \vec{\theta} \, d\gamma = 0, \forall \vec{\theta} \in Y(\Gamma) \right\} .$$

THEOREM 2.7 (GEORGESCU [22], TREVES [44]) The space  $Y(\Gamma)$  is finite-dimensional and there exists some integer  $r$  such that  $\dim Y(\Gamma) = 2r$ . ( $\Gamma$  is diffeomorphic to the torus with  $r$  handles). Moreover for  $s$  a given real number, the mapping

$$(H^{s+1}(\Gamma) \cap M(\Gamma))^2 \times Y(\Gamma) \ni (p, w, \vec{\theta}) \mapsto \vec{n} = \nabla_\Gamma p + \text{curl}_\Gamma w + \vec{\theta} \in TH^s(\Gamma)$$

defines an algebraical and topological isomorphism.

Those important results allow to derive a Poincaré-type inequality in the space  $W^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

PROPOSITION 2.6 The mapping  $W^{\frac{1}{2}} \ni \vec{n} \mapsto \|\text{curl}_\Gamma \vec{n}\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma} \in \mathbb{R}$  is a norm on  $W^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  which is equivalent with the norm induced by  $TH^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  :

$$\exists C > 0, \forall \vec{n} \in W^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \|\vec{n}\|_{\frac{1}{2}, \Gamma} \leq C \|\text{curl}_\Gamma \vec{n}\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma} .$$

PROOF OF PROPOSITION 2.6

The field  $\vec{n} \in TH^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  admits a decomposition given in Theorem 2.7 with  $p, w$  in  $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \cap M(\Gamma)$  and  $\vec{\theta} \in Y(\Gamma)$ . We have clearly :  $\Delta_\Gamma p = \text{div}_\Gamma \vec{n} = 0$  then  $p=0$  thanks to Theorem 2.6. Moreover, when we integrate  $\vec{n}$  against  $\vec{\theta}$ , we have  $\int_\Gamma \vec{n} \cdot \vec{\theta} \, d\gamma = \int_\Gamma \vec{\theta} \cdot \vec{\theta} \, d\gamma = 0$  so  $\vec{\theta} = 0$ . Then

$$\|\vec{n}\|_{\frac{1}{2},\Gamma} = \|\vec{\text{curl}}_{\Gamma} w\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \leq \|w\|_{\frac{3}{2},\Gamma} \leq C \|\vec{\text{curl}}_{\Gamma} n\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}$$

thanks to (2.20), Theorem 2.6, and  $\text{curl}_{\Gamma} \vec{n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , with

$$(2.20) \quad -\Delta_{\Gamma} w = \text{curl}_{\Gamma} \vec{n}$$

Suppose now that the mass flux  $g$  across the boundary is given in  $M(\Gamma)$ . We have seen (Proposition 2.5) that the component  $\vec{\xi}$  of the vector potential satisfies :

$$(2.21) \quad \text{curl}_{\Gamma} \vec{\xi} = g$$

If we choose  $\vec{\xi}$  in  $W^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , we add the continuous gauge condition

$$(2.22) \quad \text{div}_{\Gamma} \vec{\xi} = 0$$

and  $\vec{\xi}$  can therefore be rewritten as

$$(2.23) \quad \vec{\xi} = \vec{\text{curl}}_{\Gamma} \theta$$

We propose now a mixed formulation of the problem (2.21)-(2.23).

PROPOSITION 2.7 *Let  $g$  be in  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \cap M(\Gamma)$ . The mixed problem*

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\xi} \in W^{\frac{1}{2}}(\Gamma) , \theta \in L^2(\Gamma) \cap M(\Gamma) \\ \int_{\Gamma} \vec{\xi} \cdot \vec{n} \, d\gamma - \int_{\Gamma} \theta \, \text{curl}_{\Gamma} \vec{n} \, d\gamma = 0 \quad \forall \vec{n} \in W^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \int_{\Gamma} \text{curl}_{\Gamma} \vec{\xi} w \, d\gamma = \langle g, w \rangle_{\Gamma} \quad \forall w \in L^2(\Gamma) \cap M(\Gamma) \end{array} \right.$$

admits a unique solution  $(\vec{\xi}, \theta) \in W^{\frac{1}{2}} \times (L^2 \cap M)$  satisfying (2.21), (2.23),  $\theta \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ , and

$$(2.25) \quad \|\vec{\xi}\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \leq C \|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}$$

Moreover if  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , we have  $\theta \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma)$  and  $\vec{\xi} \in TH^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ .

PROOF OF PROPOSITION 2.7

- Following RAVIART-THOMAS [40], we clearly see that the pair  $(\theta, \vec{\text{curl}}_{\Gamma} \theta)$  with  $\theta \in M(\Gamma)$  solution of  $-\Delta_{\Gamma} \theta = g$ , is solution of (2.24) because  $\langle w, \text{curl}_{\Gamma} \vec{n} \rangle_{\Gamma} = \langle \vec{\text{curl}}_{\Gamma} w, \vec{n} \rangle_{\Gamma}$  for  $w \in H^{\frac{1}{2}}$  and  $\vec{n} \in TH^{\frac{1}{2}}$ . The uniqueness is established by linearity : if  $g=0$ , the second equation shows that  $\text{curl}_{\Gamma} \vec{\xi} = 0$ , then  $\vec{\xi} = 0$  (Proposition 2.6). Furthermore, let  $\rho$ , in  $H^2(\Gamma) \cap M(\Gamma)$ , be the solution of  $-\Delta_{\Gamma} \rho = \theta$ . If we set  $\vec{n} = \vec{\text{curl}}_{\Gamma} \rho$ , then  $\vec{n} \in W^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . If we use this function in the first equation of (2.24), we find  $\int_{\Gamma} \vec{\theta}^2 d\gamma = 0$ . The estimation (2.25) is then a simple consequence of Proposition 2.6.
- The relation (2.21) holds in the sense of distributions because both  $\text{curl}_{\Gamma} \vec{\xi}$  and  $g$  are equal if they are applied to functions of  $L^2(\Omega) \cap M(\Gamma)$  or to constant functions. Moreover  $L^2(\Omega)$  is dense in  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  (e.g. LIONS-MAGENES [31]) so  $\text{curl}_{\Gamma} \vec{\xi}$  and  $g$  are equal in  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .
- If  $g$  belongs to  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , the regularity of  $\theta$  is clear. ■

5) A GLOBAL RESULT

We consider a velocity field in  $(H^1(\Omega))^3$  satisfying

$$(2.26) \quad \text{div } \vec{u} = 0 \quad \Omega$$

$$(2.27) \quad \int_{\Gamma_j} \vec{u} \cdot \vec{n} d\gamma = 0 \quad \text{on } \Gamma_j, \quad j=0,1,\dots,N_{\Gamma}$$

and we suppose that both  $\vec{\omega}$  and  $g$  verify

$$(2.28) \quad \vec{\text{curl}} \vec{u} = \vec{\omega} \quad \Omega$$

$$(2.29) \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = g \quad \Gamma$$

We propose in Proposition 2.8 a way to "compute" without ambiguity a vector potential  $\vec{\psi}$  of  $\vec{u}$

$$(2.30) \quad \vec{u} = \text{curl } \vec{\psi} \quad \Omega$$

We recall first a lifting Theorem of J.L. Lions :

THEOREM 2.8 (e.g. LIONS-MAGENES [31]) *The trace mapping  $\gamma_0$ , defined by  $\gamma_0 \varphi = \left( \varphi|_{\Gamma}, \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma} \right)$  if  $\varphi$  is regular can be extended from  $H^2(\Omega)$  onto  $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  and admits a continuous inverse  $\mathcal{R}$ , lifting from  $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  to  $H^2(\Omega) : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \ni q \mapsto \mathcal{R}q \in H^2(\Omega)$*

$$\gamma_0(\mathcal{R}q) = q \quad \forall q \in H^{\frac{3}{2}} \times H^{\frac{1}{2}}$$

$$\exists C > 0, \|\mathcal{R}q\|_{2,\Omega} \leq C \|q\|_{H^{\frac{3}{2}} \times H^{\frac{1}{2}}}, \quad \forall q \in H^{\frac{3}{2}} \times H^{\frac{1}{2}}.$$

PROPOSITION 2.8 *Let  $\vec{u}$  be given in  $(H^1(\Omega))^3$  by (2.26).(2.29). There exists a continuous vector potential  $\vec{\psi}$  which satisfies (2.30) and defines a continuous mapping  $(H^1(\Omega))^3 \rightarrow W^2(\Omega)$  computable without any use of the harmonic functions belonging to the spaces  $H_T(\Omega)$  and  $H_N(\Omega)$ .*

PROOF OF PROPOSITION 2.8

- Consider first the boundary equation (2.29). From Proposition 2.7 there exists some  $\vec{\xi} \in TH^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$  verifying (2.21). Each component  $\xi_i$  of  $\vec{\xi}$  belongs to  $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$  and, by Theorem 2.8 the vector field  $\vec{\zeta}$  defined on  $\Omega$  by its components  $\zeta_i, \zeta_i = \mathcal{R}(\xi_i, 0)$  satisfies  $\text{curl}_{\Gamma} \vec{\zeta} = g$  and

$$\|\vec{\zeta}\|_{2,\Omega} \leq C \|\vec{\xi}\|_{\frac{3}{2},\Gamma} \leq C \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma}$$

- Secondly, the mixed problem

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{z} \in (L^2(\Omega))^3, \quad \vec{\chi} \in W^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \vec{z} \cdot \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} \text{curl} \vec{\chi} \cdot \vec{v} \, dx \quad \forall \vec{v} \in (L^2(\Omega))^3 \\ \int_{\Omega} \vec{z} \cdot \text{curl} \vec{\varphi} \, dx = \int_{\Omega} (\vec{\omega} - \text{curl} \text{curl} \vec{\zeta}) \cdot \vec{\varphi} \, dx \quad \forall \vec{\varphi} \in W^1(\Omega) \end{array} \right.$$

admits (thanks to Theorem 2.5) a solution  $(\vec{z}, \vec{\chi})$  satisfying  $\vec{z} = \text{curl} \vec{\chi}$ ,  $\text{curl} \vec{z} = \vec{\omega} - \text{curl}(\text{curl} \vec{\zeta})$  in  $\Omega$ ,  $\vec{z} \cdot \vec{n} = 0$  on  $\Gamma$ , and  $\|\vec{\chi}\|_{W^2} \leq C(\|\vec{\omega}\|_{0,\Omega} + \|\vec{\zeta}\|_{2,\Omega})$  thanks to (2.18) and Proposition 2.4. By uniqueness of  $\vec{z}$ , we have  $\vec{z} = \vec{u} - \text{curl} \vec{\zeta}$  in  $\Omega$ , so  $\vec{\psi} = \vec{\chi} + \vec{\zeta}$  solves the problem. ■

We end this part with a general result on harmonic vector fields.

PROPOSITION 2.9 Let  $g$  be in  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \cap M(\Gamma)$ . The problem

$$(2.31) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{div} \vec{u} = 0 & \Omega \\ \text{curl} \vec{u} = 0 & \Omega \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = g & \Gamma \\ P_N \vec{u} = 0 \end{array} \right.$$

has a unique solution  $\vec{u} \in H(\text{div}, \Omega)$  which satisfies

$$(2.32) \quad \|\vec{u}\|_{0,\Omega} \leq C \|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}$$

for some constant  $C$  independent of  $g$ .

PROOF OF PROPOSITION 2.9

• Following TEMAM [43], the auxiliary problem

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \phi = 0 & \Omega \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = g & \Gamma \end{array} \right.$$

defines  $\phi \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$  and the continuity of  $g \mapsto \phi : \|\nabla\phi\|_{0,\Omega} \leq C \|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}$  is classical. If we take

$$\vec{u} = \nabla\phi + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} \alpha_j \vec{\theta}_j^N$$

the existence of  $\vec{u}$  verifying (2.31).(2.32) is established.

- Uniqueness is a direct consequence of Theorem 2.2. ■



### III - VECTORIAL CURVED FINITE ELEMENTS IN $\mathbb{R}^3$

We have seen in the study of the continuous problem that the representation of a divergence free vector field  $\vec{u}$  by means of a vector potential  $\vec{\psi}$  leads to the internal and boundary equations  $\text{curl } \vec{\psi} = \vec{u}$  in  $\Omega$  and  $\text{curl}_\Gamma \Pi \vec{\psi} = \vec{u} \cdot \vec{n}$  on  $\Gamma$ . To discretize the field  $\vec{\psi}$ , we choose finite elements conforming in the space  $H(\text{curl}, \Omega)$  such that the boundary  $\Gamma$  is exactly covered by the triangulation faces. We introduce here two different curved finite elements of degree 1 which are conforming in the spaces  $H(\text{div}, \Omega)$  and  $H(\text{curl}, \Omega)$  and are a natural generalization of NEDELEC's tetrahedrons [36]. Then we show that for  $\vec{v}$  in  $H(\text{div}, \Omega)$  (resp.  $\vec{\phi}$  in  $W^2(\Omega)$ ) the interpolation error in the associated discrete space  $V_h(\Omega)$  (resp.  $W_h(\Omega)$ ) is of optimal order. We construct in the following a triangulation  $\mathcal{T}_h$  covering exactly the domain  $\Omega$ . We denote by  $\mathcal{T}_h|_{\partial\Omega}$  the subset of  $\mathcal{T}_h$  formed by elements  $K$  such that the intersection  $K \cap \partial\Omega$  is not void.

#### 1) DEFINITION OF CURVILINEAR TETRAHEDRONS

DEFINITION 3.1 Let  $\hat{K}$  be the "unity tetrahedron" :

$$\hat{K} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_i \geq 0, i=1,2,3, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \right\}$$

A curvilinear tetrahedron is defined by the range of  $\hat{K}$  by a regular (class  $\mathcal{C}^2$ ) on to one function  $F$  :

$$(3.1) \quad \hat{K} \ni \hat{x} \mapsto x = F(\hat{x}) \in K .$$

Practically, either  $K$  is an internal element of the triangulation and  $F$  is assumed to be a linear mapping (this hypothesis will be implicit in the following of the paper), or  $K$  has at least one point on the boundary.

In the latter, four cases can occur :

- (i)  $K \cap \partial\Omega$  is an edge of the tetrahedron
- (ii)  $K \cap \partial\Omega$  is a face of the tetrahedron
- (iii)  $K \cap \partial\Omega$  is reduced to one point
- (iv)  $K \cap \partial\Omega$  contains at least two faces of  $K$ .

In the case (iii),  $F$  is also chosen linear, and the case (iv) can be eliminated by a refinement of the mesh. We focus now on (i) and (ii) (figure 3.1).

HYPOTHESIS 3.1 We assume that the triangulation  $\mathcal{T}_h$  is sufficiently refined (i.e.  $h$  sufficiently small) to be sure that the orthogonal projection  $P_\Gamma$  is well defined on  $\mathcal{T}_h|_{\partial\Omega}$  (Proposition 1.1).

DEFINITION 3.2

- (i) Assume that exactly two vertices  $A_1, A_2$  of  $K$  belong to the set  $\Gamma \cap \Omega_i$  defined in (1.6)-(1.8). The curved edge  $\widehat{A_1 A_2}$  is defined as  $P_\Gamma([A_1 A_2])$  where  $[A_1 A_2]$  is the straight line between these two points.
- (ii) If  $\partial\Omega$  contains three vertices  $A_1, A_2, A_3$  of  $K$ , the curved face  $\widehat{A_1 A_2 A_3}$  is exactly  $P_\Gamma([A_1 A_2 A_3])$  where  $[A_1 A_2 A_3]$  is the corresponding plane face.

We can now describe the choice that we are making for the curved elements  $K$  of  $\mathcal{T}_h|_{\partial\Omega}$ .

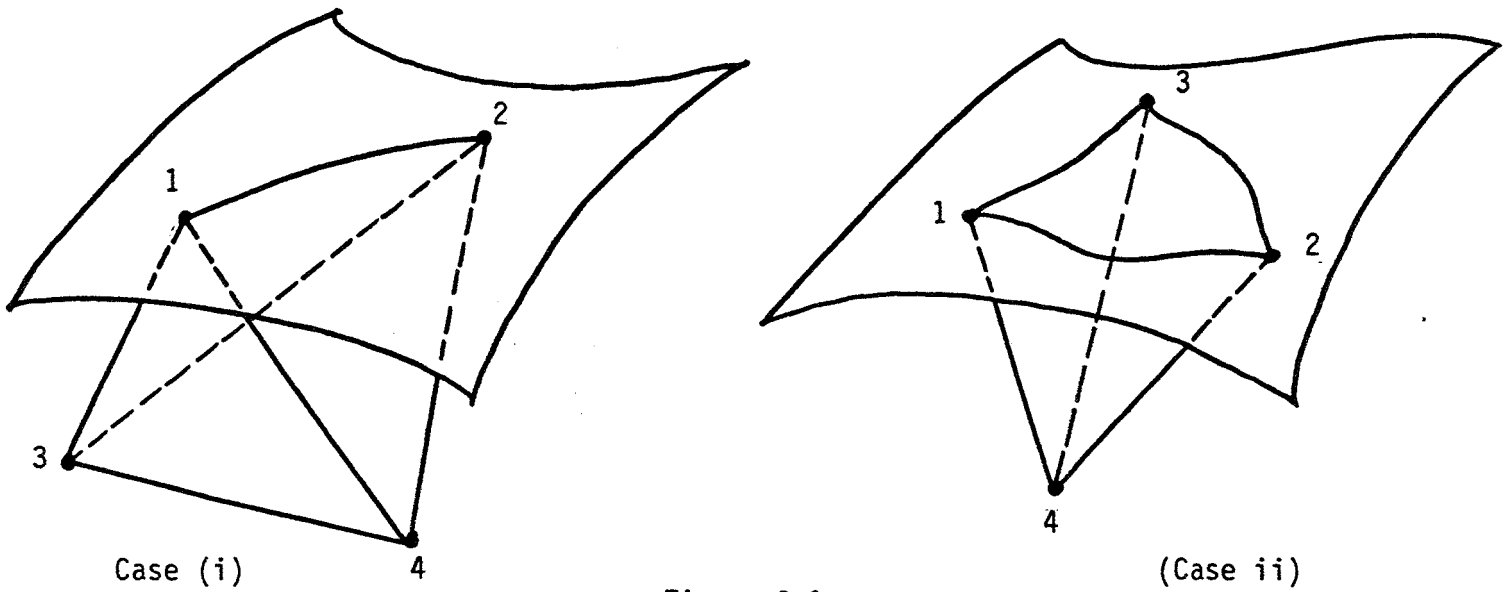


Figure 3.1

Intersection of a curvilinear tetrahedron with the boundary

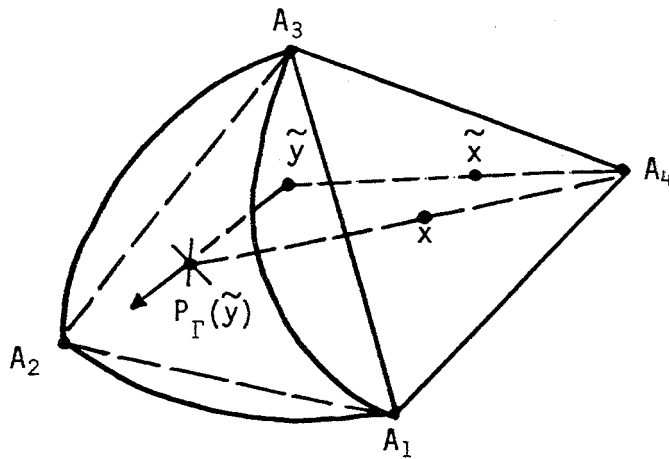


Figure 3.2

Transformation of a straight tetrahedron into a curvilinear one

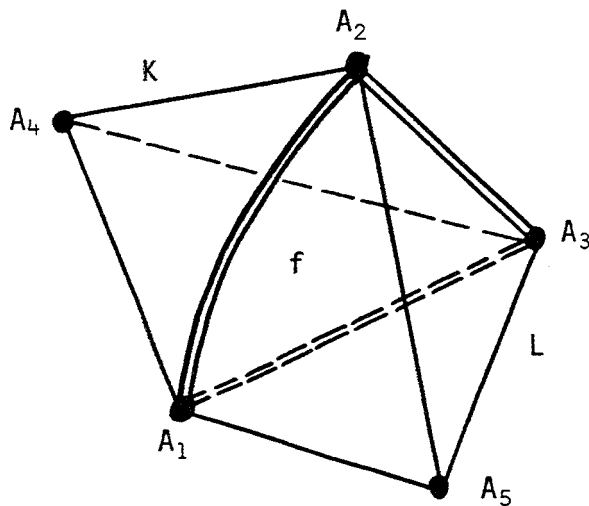


Figure 3.3

Curvilinear face (f) common to two curvilinear tetrahedrons (K,L)

DEFINITION 3.3 If  $\hat{x}$  is a point of the unity tetrahedron  $\hat{K}$ , we denote by  $\lambda_j (j=1, \dots, 4)$  its barycentric coordinates.

(i) If  $K$  contains a curved edge  $\widehat{A_1 A_2}$ , we set

$$(3.2) \quad F(\hat{x}) = (1 - \lambda_3 - \lambda_4) P_{\Gamma} \left( \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4$$

(ii) If a curved face  $\widehat{A_1 A_2 A_3}$  is included in  $\partial\Omega$ , we set

$$(3.3) \quad F(\hat{x}) = (1 - \lambda_4) P_{\Gamma} \left( \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right) + \lambda_4 A_4$$

(see figure 3.2).

This type of definition was first proposed by ZLAMAL [45,46], studied by SCOTT [42], and generalized by LENOIR [30]. Geometrically we first write a current point  $\tilde{x}$  of the straight tetrahedron  $[A_1 A_2 A_3 A_4]$  as a barycentre of one point  $y$  on the edge  $[A_1 A_2]$  (case (i),  $p=2$ ) or on the face  $[A_1 A_2 A_3]$  (case (ii),  $p=3$ ) and of the other vertices of  $K$ :

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = 1 - \sum_{j=1}^p \lambda_j \\ \tilde{y} = \sum_{j=1}^p \frac{\lambda_j}{\mu} A_j \\ \tilde{x} = \mu \tilde{y} + \sum_{j=p+1}^4 \lambda_j A_j \end{array} \right.$$

Then we project  $\tilde{y}$  on  $\partial\Omega$  without changing the barycentric coordinates relative to the set  $\{y, A_{p+1}, \dots, A_4\}$ :

$$(3.5) \quad x = \mu P_{\Gamma}(\tilde{y}) + \sum_{j=p+1}^4 \lambda_j A_j$$

This formula represents both (3.2) and (3.3).

PROPOSITION 3.1 *The edges and faces of the triangulation  $\mathcal{T}_h$  are defined intrinsically without any explicit reference to the element which contain them.*

PROOF OF PROPOSITION 3.1

To fix the ideas, suppose that the curvilinear elements  $K$  and  $L$  have corresponding straight tetrahedrons  $\tilde{K}$  and  $\tilde{L}$  which have one common face  $\tilde{f} = [A_1A_2A_3]$  (figure 3.3). Then  $A_1, A_2, A_3$  cannot be simultaneously on the boundary  $\partial\Omega$  and, by example,  $A_1$  and  $A_2$  are on the boundary and  $A_3$  is an internal point. If  $\tilde{y}$  belongs to  $[A_1A_2]$ , its image  $y$  on  $\widehat{A_1A_2}$  is exactly  $P_T(\tilde{y})$  (thanks to (3.4).(3.5)) and does not depend on  $K$  or  $L$ . And for  $\tilde{x}$  on  $\tilde{f}$  we have

$$\tilde{x} = \mu \tilde{y} + \lambda_3 A_3 + 0.A_4 + 0.A_5 .$$

and it is clear that the corresponding  $x$  by (3.5) does not depend on the choice of the referring finite element. ■

2) INTERPOLATION SPACES

We adapt in this paragraph the spaces proposed by NEDELEC [36] to discretize Sobolev spaces  $H(\text{div}, \Omega)$  and  $H(\text{curl}, \Omega)$ .

DEFINITION 3.4 *We set*

$$D_1 = \left\{ \vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \exists \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3, \beta \in \mathbb{R}, \vec{v}(\vec{x}) = \vec{\alpha} + \beta \vec{x} \right\}$$

$$R_1 = \left\{ \vec{\varphi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \exists \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^3, \vec{\varphi}(\vec{x}) = \vec{\alpha} + \vec{\beta} \times \vec{x} \right\}$$

*and, if  $K$  is a curvilinear tetrahedron (Definition 3.3), the corresponding degrees of freedom are :*

$$\Sigma_f(K) = \left\{ \sigma_f(\vec{v}) \equiv \int_f \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\gamma, \text{ f face of K} \right\}$$

$$\Sigma_a(K) = \left\{ \sigma_a(\vec{\varphi}) \equiv \int_a \vec{\varphi} \cdot d\vec{s}, \text{ a edge of K} \right\} .$$

DEFINITION 3.5 Let  $K$  be a curvilinear tetrahedron (cf. Definition 3.3).

We denote by  $dF(\hat{x})$  the tangent linear mapping of  $F$  at the point  $\hat{x}$ , and  $J(\hat{x})$  its jacobian. The generalizations of  $D_1$  and  $R_1$  are :

$$(3.6) \quad D_1(K) = \left\{ \vec{v} : K \rightarrow \mathbb{R}^3, \exists \hat{v} \in D_1, \forall \hat{x} \in \hat{K}, \right. \\ \left. \vec{v}(F(\hat{x})) = \frac{1}{J(\hat{x})} dF(\hat{x}) \cdot \hat{v}(\hat{x}) \right\}$$

$$(3.7) \quad R_1(K) = \left\{ \vec{\varphi} : K \rightarrow \mathbb{R}^3, \exists \hat{\varphi} \in R_1, \forall \hat{x} \in \hat{K}, \right. \\ \left. \vec{\varphi}(F(\hat{x})) = {}^t dF(\hat{x})^{-1} \cdot \hat{\varphi}(\hat{x}) \right\}$$

and we will also use

$$P_1(K) = \left\{ w : K \rightarrow \mathbb{R}, \exists \hat{w} \in P_1, \forall \hat{x} \in \hat{K}, w(F(\hat{x})) = \hat{w}(\hat{x}) \right\}$$

PROPOSITION 3.2 If  $F$  is chosen thanks to Definition 3.3, the elements  $(K, \Sigma_f(K), D_1(K))$  and  $(K, \Sigma_a(K), R_1(K))$  are unisolvent and conforming in the spaces  $H(\text{curl}, K)$  and  $H(\text{div}, K)$  respectively.

PROOF OF PROPOSITION 3.2

The proof is due to NEDELEC (Theorems 1 and 3 of [36]) when  $F$  is linear (i.e.  $D_1(K) \equiv D_1$  and  $R_1(K) \equiv R_1$ ). In the general case the unisolvent property is a direct consequence of the formulas

$$(3.8) \quad \int_f \vec{v}(x) \cdot \vec{n} \, d\gamma = \int_{\hat{f}} \hat{v}(\hat{x}) \cdot \hat{n} \, d\hat{\gamma}(\hat{x})$$

$$(3.9) \quad \int_a \vec{\varphi}(x) \cdot d\vec{s}(x) = \int_{\hat{a}} \hat{\varphi}(\hat{x}) \cdot d\hat{s}(\hat{x})$$

obtained by the change of variable  $x = F(\hat{x})$  and by (3.6).(3.7), and of the previous unisolvent property. The finite element  $(K, \Sigma_f(K), D_1(K))$  is conforming in  $H(\text{div}, K)$  if, and only if, for each face  $f$  of  $K$  and each  $\vec{v} \in D_1(K)$ ,  $\sigma_f(\vec{v}) = 0$  implies  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  on  $f$ . Thanks to (3.8) and the straight case,  $\hat{v} \cdot \hat{n} = 0$  on  $\hat{f}$  and  $\hat{v}$  is a tangent field on  $\hat{f}$  which is transformed by  $dF$  in a tangent vector field on  $f$ , then  $(dF(\hat{x}) \cdot \hat{v}, n) = 0$  on  $f$ .

The finite element  $(K, \Sigma_a(K), R_1(K))$  is conforming in  $H(\text{curl}, K)$  if, and only if, for each face  $f$  and each  $\vec{\varphi} \in R_1(K)$ ,  $\sigma_a(\vec{\varphi}) = 0$  (for each edge  $a$  of the boundary of  $f$ ) implies  $\vec{n} \times \vec{\varphi} = 0$  on  $f$ . As in the previous case,  $\hat{n} \times \hat{\varphi} = 0$  on  $\hat{f}$ . Let  $\hat{\tau}$  be tangent vector field on  $\hat{f}$ , then (3.7) gives  $(\vec{\varphi}(x), dF \cdot \hat{\tau}(\hat{x})) = (\hat{\varphi}(\hat{x}), \hat{\tau})$  which is null because  $\hat{\varphi} \times \hat{n} = 0$ . Hence  $\vec{\varphi} \times \vec{n} = 0$  and the property is proved. ■

### 3) INTERPOLATION AND ERROR ESTIMATES

We define now interpolation spaces on the domain  $\Omega$  thanks to the triangulation  $\mathcal{T}_h$ . We assume that  $\mathcal{T}_h$  is regular, i.e.

HYPOTHESIS 3.2 *There exists a fixed constant  $C$  such that, for each  $h > 0$  and each element  $K$  of  $\mathcal{T}_h$ , we have the following inequalities between the diameter  $h(K)$  of  $K$ , the radius  $\rho(K)$  of the largest inscribed sphere in  $K$ , and  $h$  :*

$$h(K) \leq h \leq C h(K) \quad , \quad h(K) \leq C \rho(K) \quad .$$

DEFINITION 3.6

$$V_h(\Omega) = \left\{ \vec{v} \in H(\text{div}, \Omega) , \forall K \in \mathcal{T}_h , \vec{v}|_K \in D_1(K) \right\}$$

$$V_h^0(\Omega) = \left\{ \vec{v} \in V_h(\Omega) , \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\}$$

$$W_h(\Omega) = \left\{ \vec{\varphi} \in H(\text{curl}, \Omega) , \forall K \in \mathcal{T}_h , \vec{\varphi}|_K \in R_1(K) \right\}$$

$$W_h^0(\Omega) = \left\{ \vec{\varphi} \in W_h(\Omega) , \vec{\varphi} \times \vec{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\}$$

The corresponding degrees of freedom are

$$\Sigma_f(\Omega) = \left\{ \sigma_f(\vec{v}) = \int_f \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\gamma , f \text{ face of } \mathcal{T}_h \right\}$$

$$\Sigma_a(\Omega) = \left\{ \sigma_a(\vec{\varphi}) = \int_a \vec{\varphi} \cdot d\vec{s} , a \text{ edge of } \mathcal{T}_h \right\} .$$

We recall also the definition of scalar valued functions on curved finite elements :

DEFINITION 3.7

$$H_h^1(\Omega) = \left\{ w \in H^1(\Omega) , \forall K \in \mathcal{T}_h , w|_K \in P_1(K) \right\}$$

$$H_{0h}^1(\Omega) = H_h^1(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) .$$

THEOREM 3.1 We assume that  $\mathcal{T}_h$  satisfies hypothesis 3.1-3.2. For  $\vec{v}$  in  $(H^1(\Omega))^3$  there is one and only one interpolation vector  $\Pi_h^D \vec{v}$  in  $V_h(\Omega)$  defined by

$$(3.10) \quad \sigma_f(\Pi_h^D \vec{v}) = \sigma_f(\vec{v}) \quad \forall f \text{ face of } \mathcal{T}_h$$

and we have

$$(3.11) \quad \|\vec{v} - \Pi_h^D \vec{v}\|_{0,\Omega} \leq C h \|\vec{v}\|_{1,\Omega}$$

for some constant C.



THEOREM 3.2 Under the same hypothesis on  $\mathcal{T}_h$ , for  $\vec{\varphi}$  in  $W^2(\Omega)$  there is a unique interpolation vector  $\Pi_h^R \vec{\varphi}$  in  $W_h(\Omega)$  satisfying

$$(3.12) \quad \sigma_a(\Pi_h^R \vec{\varphi}) = \sigma_a(\vec{\varphi}) \quad \forall a \text{ edge of } \mathcal{T}_h$$

We have also

$$(3.13) \quad \|\vec{\varphi} - \Pi_h^R \vec{\varphi}\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \leq C h \|\vec{\varphi}\|_{W^2(\Omega)}$$

The proof of these theorems needs a precise analysis of the way we approach the boundary. We follow NEDELEC [34]. We recall (cf. Part I) that the local charts  $\varphi_i : \Omega_i \rightarrow ]-1, 1[^3$  ( $i=1, \dots, p$ ) have a restriction to  $\partial\Omega \cap \Omega_i$  which satisfies

$$\varphi_i(\partial\Omega \cap \Omega_i) = ]-1, 1[^2 \times (0)$$

Moreover it is possible to find polygonal subsets  $D_i$  of  $]-1, 1[^2 \times (0)$  which are compatible with the triangulation  $\mathcal{T}_h$ : the parts  $\tilde{\Gamma}_i = \varphi_i^{-1}(D_i)$  of the boundary are recovered exactly by curvilinear triangles of  $\mathcal{T}_h$  lying on  $\partial\Omega$  and  $\bigcup_{i=1}^p \tilde{\Gamma}_i = \Gamma$ . The inverse function of  $\varphi_i|_{D_i}$  is denoted by  $\phi_i$ :

$$D_i \ni \xi \mapsto \phi_i(\xi) \in \tilde{\Gamma}_i$$

which is an exact parameterization of  $\tilde{\Gamma}_i$ .

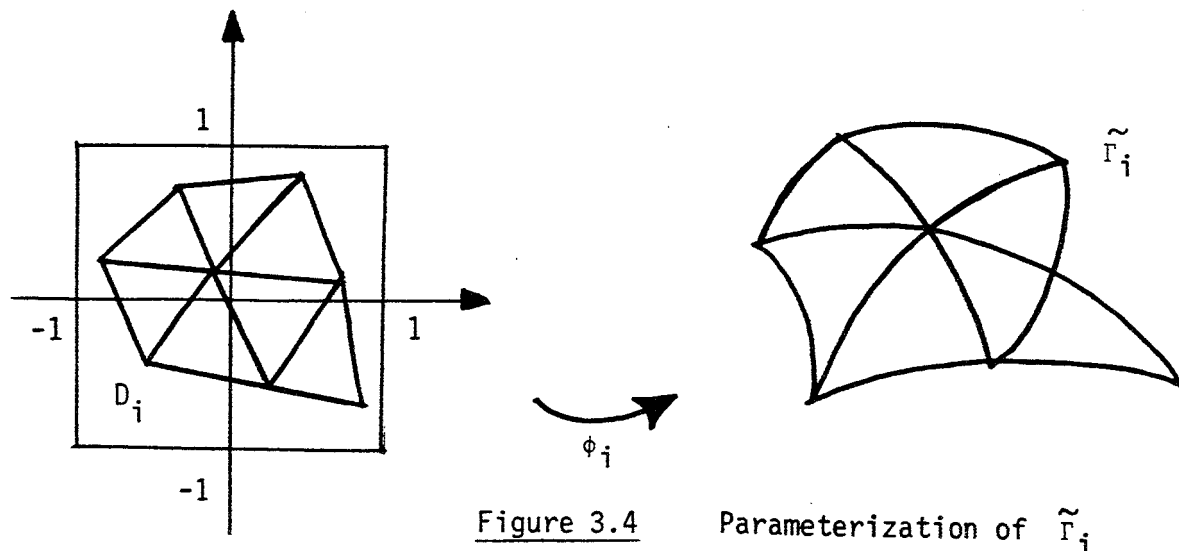


Figure 3.4

Parameterization of  $\tilde{\Gamma}_i$

The points of  $\mathcal{F}_h$  lying on  $\tilde{\Gamma}_i$  and the corresponding boundary mesh triangles define naturally a plane triangulation  $\mathcal{T}_{ih}$  of the domain  $D_i$  (Figure 3.4). Then, using classical  $P_1$  triangular elements (e.g. CIARLET [13]), we call  $\phi_{ih}$  the interpolate of  $\phi_i$  relative to the mesh  $\mathcal{T}_{ih}$ .

$$D_i \ni \xi \mapsto \phi_{ih}(\xi) \in \tilde{\Gamma}_{ih}$$

The piece of approximated boundary  $\tilde{\Gamma}_{ih}$  is exactly the union of the straight triangles that  $\mathcal{F}_h$  defines on  $\tilde{\Gamma}_i$ . We have the following property :

LEMMA 3.1 Let  $A_1, A_2, A_3$  be three vertices of  $\mathcal{T}_{ih}$  lying on a piece  $\tilde{\Gamma}_i$  of the boundary, and  $\tilde{y} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i A_i$  a point of the straight triangle  $[A_1 A_2 A_3]$ . We can define a unique point  $\xi(\tilde{y})$  in  $D_i$  such that

$$(3.14) \quad \phi_{ih}(\xi(\tilde{y})) \equiv \tilde{y} .$$

PROOF

$$\xi(\tilde{y}) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \phi_i(A_i) .$$

We specify now the relations between the exact surface  $\tilde{\Gamma}_i$ , the approximate  $\tilde{\Gamma}_{ih}$ , and the normal projection  $P_\Gamma$  on the boundary  $\partial\Omega$ .

PROPOSITION 3.3 (NEDELEC [33]) Under hypothesis 3.1 and 3.2, we have

$$(3.15) \quad \sup_{\xi \in D_i} |D^\alpha \phi_i(\xi) - D^\alpha \phi_{ih}(\xi)| \leq C h^{2-\alpha} \sup_{\xi \in D_i} |D^2 \phi_i(\xi)| \quad \alpha = 0, 1 .$$

$$(3.16) \quad \begin{aligned} & \sup_{k \in \mathcal{F}_{ih}} \sup_{\xi \in k} |D^\alpha (P_\Gamma \circ \phi_{ih})(\xi) - D^\alpha \phi_{ih}(\xi)| \leq \\ & \leq C h^{2-\alpha} \sup_{i=1, \dots, p} \sup_{\xi \in D_i} |D^2 \phi_i(\xi)| \quad , \quad \alpha = 0, 1, 2 . \end{aligned}$$

LEMMA 3.2 Let  $K$  be a curvilinear tetrahedron of  $\mathcal{F}_h$ , and  $\tilde{K}$  be the associated straight tetrahedron. The map  $F$  (Definition 3.3) is the composite

$$(3.17) \quad F = \tilde{F}_0(\hat{x} \mapsto B\hat{x} + b)$$

with  $\hat{K} \ni \hat{x} \mapsto \tilde{x} = B\hat{x} + b \in \tilde{K}$  and  $\tilde{K} \ni \tilde{x} \mapsto x = \tilde{F}(\tilde{x}) \in K$ . Under the hypothesis 3.1 and 3.2, we have :

$$(3.18) \quad \sup_{\tilde{x} \in \tilde{K}} |dF_{ij}(x) - \delta_{ij}| \leq Ch \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$$(3.19) \quad \sup_{\tilde{x} \in \tilde{K}} \left| \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k} d\tilde{F}_{ij}(\tilde{x}) \right| \leq C \quad ; \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

for some constant  $C$  independant of  $K$  and  $h$  ;  $\delta_{ij}$  is the Kroneker matrix.

PROOF OF LEMMA 3.2

Thanks to (3.4).(3.5) and (3.14) we have :

$$(3.20) \quad \tilde{F}(\tilde{x}) = \tilde{x} + \mu(\tilde{x})(P_\Gamma \circ \phi_{ih} - \phi_{ih})(\xi(\tilde{x}))$$

with  $\mu(\tilde{x})$  defined in (3.4).

• We first prove (3.18). By derivation of (3.20), we have to control both

$$(3.21) \quad \frac{\partial \mu(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_j} (P_\Gamma \circ \phi_{ih} - \phi_{ih})(\xi(\tilde{x}))$$

and

$$(3.22) \quad \mu(\tilde{x}) \frac{\partial}{\partial \xi_k} (P_\Gamma \circ \phi_{ih} - \phi_{ih}) \frac{\partial \xi_k}{\partial \tilde{x}_j}$$

On one hand, it is classical that  $\left| \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{x}_j} \right| \leq \frac{1}{2\rho}$  with  $\rho$  radius of the inscribed sphere in  $\tilde{K}$ . Then thanks to Hypothesis 3.2, we have

$$(3.23) \quad \left| \frac{\partial \mu}{\partial \tilde{x}_j} \right| \leq \frac{C}{h}$$

Moreover (3.16) with  $\alpha=0$  and the hypothesis 3.2 prove that the expression (3.21) is bounded by  $Ch$ . On the other hand, let  $A_0$  be the gravity center of the simplex  $[A_1 \dots A_p]$ ; then from (3.14) we have

$$\phi_{ih}(\xi(\tilde{x})) = \sum_{j=1}^p A_0 \vec{A}_j \frac{\lambda_j}{\mu(\tilde{x})}$$

$\frac{\lambda_j}{\mu(\tilde{x})}$  is a particular barycentric coordinate in  $[A_1 \dots A_p]$ . Then (3.23) is valid with  $\mu$  replaced by  $\frac{\lambda_j}{\mu}$ . Moreover the gradient of  $\phi_{ih}$  is bounded from below by some constant  $\gamma$ , because  $\phi_i$  is a  $\mathcal{C}^1$ -diffeomorphism and the error  $(\phi_{ih} - \phi_i)$  tends to zero in  $\mathcal{C}^1$ -norm thanks to (3.15). We deduce

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{x}_j} \right| \leq \frac{1}{\gamma} p h \frac{C}{h} \leq C$$

This inequality joined with (3.16) (case  $\alpha=1$ ) shows that (3.22) is also bounded by some  $Ch$ . So (3.18) holds.

- The proof of (3.19) is similar. ■

### PROOF OF THEOREM 3.1

Since (3.11) is additive, it is sufficient to prove it locally in one element  $K$ . Let  $\vec{v} \in (H^1(K))^3$  and  $\Pi \vec{v}$  its interpolate in  $V_h(\Omega)$ :  $\sigma_f(\vec{v}) = \sigma_f(\Pi \vec{v})$  for  $f$  face of  $K$ . Thanks to (3.6) we define  $\hat{v} \in (H^1(\hat{K}))^3$  and  $\hat{\Pi} v \in D_1$ . If we denote by  $\hat{\Pi}$  the interpolation operator conforming in  $H(\text{div}, \hat{K})$ , we have  $\hat{\Pi} v = \hat{\hat{\Pi}} v$  because those two functions of  $D_1$  have the same degrees of freedom (cf. Proposition 3.2). We compute then easily by changing variables:  $K \ni x \mapsto \hat{x} \in \hat{K}$ :

$$\int_K |\vec{v} - \Pi \vec{v}|^2 dx \leq \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \left| \frac{1}{J(\hat{x})} \|dF(\hat{x})\|_2^2 \right| \cdot \int_{\hat{K}} |\hat{v} - \hat{\Pi} v|^2 d\hat{x}$$

(The norm  $\|dF(\hat{x})\|_2$  of the operator  $dF(\hat{x})$  is related to the  $l^2$  norm in  $\mathbb{R}^3$ ). The factorization (3.17) of  $F$  and the estimates (3.18) on  $\tilde{dF}(\tilde{x})$  show that there exists some constant  $C$  independent of  $K$  and  $h$  such that

$$(3.24) \quad \int_K |\vec{v} - \Pi\vec{v}|^2 dx \leq \frac{C}{|\det B|} \|B\|^2 \int_K |\hat{v} - \hat{\Pi}\hat{v}|^2 d\hat{x}$$

Thus from the Bramble-Hilbert lemma [9] and from the inclusion  $(P_0(K))^3 \subset D_1(\hat{K})$  it follows :

$$(3.25) \quad \int_{\hat{K}} |\hat{v} - \hat{\Pi}\hat{v}|^2 d\hat{x} \leq C |\hat{v}|_{1,K}^2$$

with  $|\hat{v}|_{1,K}^2 = \int_K \sup_{|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1} (\hat{n}, d\hat{v}(\hat{x}) \cdot \hat{\xi})^2 d\hat{x}$ .

We have, after resolution and derivation of (3.6) :

$$(3.26) \quad \begin{aligned} (\hat{n}, d\hat{v}(\hat{x}) \cdot \hat{\xi}) &= J(\hat{x}) ({}^t dF^{-1}(x) \cdot \hat{n}, dv(x) \cdot dF(\hat{x}) \cdot \hat{\xi}) + \\ &+ \sum_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} (J(\hat{x}) dF_{ik}^{-1}(\hat{x})) v_k(x) \hat{\xi}_j \hat{n}_i \end{aligned}$$

The square of the first term, thanks to (3.18) has after integration, the following upper bound :

$$(3.27) \quad C |\det B| \|B^{-1}\|_2^2 \|B\|_2^2 |\vec{v}|_{1,K}^2$$

and the second term of (3.26) can be rewritten as :

$$(3.28) \quad (\det B) \sum_{i,j,k,l,m} B_{il}^{-1} B_{mj} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_m} (\det d\tilde{F}(\tilde{x}) d\tilde{F}_{lk}^{-1}) v_k(x) \hat{\xi}_j \hat{n}_i$$

The expression  $(\det d\tilde{F}(\tilde{x}) d\tilde{F}_{lk}^{-1})$  is exactly the cofactor of the element  $(l,k)$  of the matrix  $d\tilde{F}(\tilde{x})$  thus is polynomial of degree 2 in the variables  $d\tilde{F}_{\alpha\beta}(\tilde{x})$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ). When we derive it relatively to  $\tilde{x}_m$ , the derivatives

$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_m} \tilde{dF}_{\alpha\beta}(\tilde{x})$  are bounded thanks to (3.19) and the factors  $\tilde{dF}_{\alpha\beta}(\tilde{x})$  are also uniformly bounded (cf. (3.18)). So the integral on  $\hat{K}$  of the square of (3.28) is bounded by

$$(3.29) \quad C |\det B| \int_{\hat{K}} |t_{B^{-1}}^{\wedge} \eta|^2 |B \hat{\xi}|^2 |\vec{v}(x)|^2 \det B \, d\hat{x} \\ \leq C |\det B| \|B^{-1}\|_2 \|B\|_2^2 \|\vec{v}\|_{0,K}^2$$

Now from (3.25)-(3.27) and (3.29) we get

$$\int_{\hat{K}} |\hat{v} - \hat{\Pi} \hat{v}|^2 \, d\hat{x} \leq C |\det B| \|B\|_2^2 \|B^{-1}\|_2^2 \|\vec{v}\|_{1,K}^2$$

This last inequality combined with (3.24) and with the classical relations between the norms of  $B$ ,  $B^{-1}$  and the real parameters  $h(\tilde{K})$ ,  $\rho(\tilde{K})$  (e.g. CIARLET [13]) gives  $\int_K |\vec{v} - \Pi \vec{v}|^2 \, dx \leq C h^2 \|\vec{v}\|_{1,K}^2$ . ■

To establish Theorem 3.2 we need two lemmas, one algebraical and one analytical.

LEMMA 3.3 (NEDELEC [36], Lemma 7). *If  $\vec{\varphi} \in (P_1)^3$  satisfies  $\sigma_a(\vec{\varphi}) = 0$  for each edge  $a$  of  $\hat{K}$ , then  $\text{curl } \vec{\varphi} = 0$ .*

LEMMA 3.4 *If  $\Omega$  is connected, the norm*

$$[\vec{\varphi}] = \left\{ \left( \int_{\Omega} \vec{\varphi} \, dx \right)^2 + \left( \int_{\Omega} \nabla \vec{\varphi} \, dx \right)^2 + \int_{\Omega} \sum_j |\partial_j (\text{curl } \vec{\varphi})|^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

*is equivalent to the usual norm on  $W^2(\Omega)$  :*

$$\|\vec{\varphi}\|_{W^2(\Omega)} = \left( \|\vec{\varphi}\|_{1,\Omega}^2 + \|\text{curl } \vec{\varphi}\|_{1,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

PROOF Elementary consequence of the compactness of the inclusion  $H^1 \hookrightarrow L^2$ . ■

PROOF OF THEOREM 3.2

• The existence of the interpolate function  $\Pi_h^R \vec{\varphi}$  is not straightforward if  $\vec{\varphi}$  belongs to  $W^2(\Omega)$ . We verify that the integral  $\sigma_a(\vec{\varphi}) = \int_a \vec{\varphi} \cdot \vec{\tau} \, ds$  can be defined : the edge  $a$  is included in a face  $f$  of the triangulation  $\mathcal{T}_h$  (whose normal is denoted by  $\vec{n}$ ). Then the tangential component  $\Pi \vec{\varphi}$  on  $f$  belongs to  $TH^{\frac{1}{2}}(f)$  (because  $\vec{\varphi} \in (H^1(\Omega))^3$ ), so

$$(3.30) \quad \Pi \vec{\varphi} \in (L^2(f))^3$$

The same argument shows that  $\text{curl} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \in L^2(f)$  but we have (Lemma 2.1)  $\text{curl}_T \Pi \vec{\varphi} = \text{curl} \vec{\varphi} \cdot \vec{n}$  and  $\text{div}_T \Pi \vec{\varphi} = \text{curl}(\vec{n} \times \vec{\varphi}) \cdot \vec{n}$ . Then, thanks to Theorem 2.7, we have :

$$(3.31) \quad \nabla_T(\Pi \vec{\varphi}) \in (L^2(f))^4$$

The inclusions (3.30) and (3.31) are equivalent to  $\Pi \vec{\varphi} \in (H^1(f))^2$  which leads to  $\vec{\varphi} \cdot \vec{\tau} \in H^{\frac{1}{2}}(a)$ . This argument does not depend on the choice of the face  $f$ , because it is true in the case of regular vector fields.

• We estimate now  $\|\vec{\varphi} - \Pi_h^R \vec{\varphi}\|_{H(\text{curl}, \Omega)}$ . The inequality

$$\|\vec{\varphi} - \Pi_h^R \vec{\varphi}\|_{0, \Omega} \leq C h \|\vec{\varphi}\|_{1, \Omega}$$

can be derived from the proof of Theorem 3.1. The inequality

$$(3.32) \quad \|\text{curl}(\vec{\varphi} - \Pi \vec{\varphi})\|_{0, K} \leq C h \|\vec{\varphi}\|_{W^2(K)}$$

(with  $\Pi \equiv \Pi_h^R$ ) is just necessary to end the proof. We denote by  $\hat{\varphi}$  the element of  $H(\text{curl}, \hat{K})$  associated to  $\vec{\varphi}$  thanks to (3.14), and  $\hat{\Pi} \varphi = \hat{\Pi} \varphi$

its interpolate in  $R_1$ . We also have from (3.14) the equality :

$$(3.33) \quad \partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i = \sum_{k,1} dF_{ki}^{-1} \left( \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{x}_k} - \frac{\partial \hat{\varphi}_k}{\partial \hat{x}_1} \right) dF_{1j}^{-1}$$

from which we deduce (with help of (3.17).(3.18)) :

$$(3.34) \quad \int_K |\vec{\text{curl}}(\vec{\varphi} - \Pi\vec{\varphi})|^2 dx \leq C \|B^{-1}\|_2^4 |\det B| \int_{\hat{K}} |\vec{\text{curl}}(\hat{\varphi} - \hat{\Pi}\hat{\varphi})|^2 d\hat{x}$$

Given  $\hat{x}$  in  $(L^2(\hat{K}))^3$ , the linear form

$$(3.35) \quad W^2(\hat{K}) \ni \hat{\varphi} \mapsto \int_{\hat{K}} \vec{\text{curl}}(\hat{\varphi} - \hat{\Pi}\hat{\varphi}) \cdot \hat{x} d\hat{x} \in \mathbb{R}$$

is continuous and equal to zero when  $\hat{\varphi} \in (P_1)^3$  thanks to Lemma 3.3.

So (3.35) is continuous on the quotient space  $W^2(K)/(P_1)^3$ . Moreover, Lemma 3.4 implies that the semi-norm  $|\vec{\text{curl}} \hat{\varphi}|_{1,K}$  is norm equivalent to the quotient-norm on  $W^2/(P_1)^3$ . Thus we have :

$$\left| \int_{\hat{K}} \vec{\text{curl}}(\hat{\varphi} - \hat{\Pi}\hat{\varphi}) \cdot \hat{x} d\hat{x} \right| \leq C \|\hat{x}\|_{0,\hat{K}} |\vec{\text{curl}} \hat{\varphi}|_{1,\hat{K}}$$

which gives by duality

$$(3.36) \quad \int_{\hat{K}} |\vec{\text{curl}}(\hat{\varphi} - \hat{\Pi}\hat{\varphi})|^2 d\hat{x} \leq C |\vec{\text{curl}} \hat{\varphi}|_{1,\hat{K}}^2$$

The end of the proof is then similar to the end of the one in Theorem 3.1.

We have clearly :

$$(3.37) \quad \int_K \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \hat{\varphi}_k}{\partial \hat{x}_1} - \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{x}_k} \right) \right|^2 dx \leq C \frac{\|B\|_2^6}{|\det B|} \int_K |\nabla(\vec{\text{curl}} \vec{\varphi})|^2 dx$$

and (3.32) is a direct consequence of (3.34), (3.36) and (3.37). ■

We end this part with a useful property :

PROPOSITION 3.4 Let  $\vec{v} \in H(\text{div}, \Omega)$  and  $\Pi_h^D \vec{v}$  its interpolate in  $V_h(\Omega)$ .

We have  $\int_K \text{div} \vec{v} dx = \int_K \text{div} \Pi_h^D \vec{v} dx$  for each element  $K$  of  $\mathcal{T}_h$ .



#### IV - APPROXIMATION OF THE HOMOGENEOUS PROBLEM

We study in this part the approximation of a divergence-free vector field  $\vec{u}$  defined on a simply connected domain  $\Omega$  which satisfies an homogeneous condition for its normal component on the boundary. More precisely,  $\vec{u}$  is solution of

$$(4.1) \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \Omega$$

$$(4.2) \quad \operatorname{curl} \vec{u} = \vec{\omega} \quad \Omega$$

$$(4.3) \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Gamma$$

and we search an approximation  $\vec{u}_h$  of  $\vec{u}$  of the form :

$$(4.4) \quad \vec{u}_h = \operatorname{curl} \vec{\psi}_h$$

with  $\vec{u}_h$  (resp.  $\vec{\psi}_h$ ) lying in  $V_h(\Omega)$  (resp.  $W_h(\Omega)$ ) [Definition 3.6]. In fact the uniqueness of the potential  $\vec{\psi}_h$  will be assumed only if we add some discrete constraints on the space  $W_h(\Omega)$ . First the equation (4.3) is automatically satisfied if we choose  $\vec{\psi}_h \in W_h^0(\Omega)$ . Secondly, a gauge condition is necessary ; remind that in the continuous problem, we imposed the Coulomb gauge (cf. Theorem 2.5) :  $\operatorname{div} \vec{\psi} = 0$ . In [37], J.C. Nedelec proposed to take the weak form

$$(4.5) \quad \vec{\psi}_h \in \left\{ \vec{\psi} \in W_h^0(\Omega), \int_{\Omega} \vec{\psi} \cdot \vec{\nabla} \theta_h \, dx = 0, \forall \theta_h \in H_{0h}^1(\Omega) \right\} .$$

The Definition (4.5) gives good theoretical results but an explicit basis of the corresponding linear space is not natural. In the following a linear space for the choice of  $\vec{\psi}_h$  is proposed : we treat the gauge condition in an entirely algebraical way and obtain the axial gauge (GLIMM [26]).

Then the representation (4.4) leads to a mixed discrete formulation of the problem (4.1)-(4.3) ; moreover we obtain a velocity field  $\vec{u}_h$  satisfying

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C h \|\vec{\omega}\|_{0,\Omega} .$$

This estimation is optimal because  $\vec{\psi}_h$  is polynomial of degree 1 (out of the part  $\mathcal{T}_h|_{\partial\Omega}$  near the boundary) so, following (4.4),  $\vec{u}_h$  is constant in each finite element.

### 1) DEFINITION OF THE DISCRETE GAUGE

We suppose that  $\Omega$  is simply connected, i.e.  $N_H = 0$  (figure 4.1). We assume both that the mesh  $\mathcal{T}_h$  satisfies the hypothesis 3.1 and 3.2 and :

HYPOTHESIS 4.1 The mesh  $\mathcal{T}_h$  is sufficiently refined in order that  $\mathcal{T}_h|_{\partial\Omega}$  admits the partition

$$\mathcal{T}_h|_{\partial\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_\Gamma} \mathcal{T}_h|_{\Gamma_i} , \quad \mathcal{T}_h|_{\Gamma_i} \cap \mathcal{T}_h|_{\Gamma_j} = \emptyset \quad \text{with } \mathcal{T}_h|_{\Gamma_i}$$

formed by the elements  $K$  of  $\mathcal{T}_h|_{\partial\Omega}$  such that  $K \cap \Gamma_i$  is not void.

DEFINITION 4.1 If  $\mathcal{T}_h$  satisfies Hypothesis 4.1, we denote by  $N_e$  (resp.  $N_f, N_a, N_s$ ) the number of elements (resp. faces, edges, vertices) of  $\mathcal{T}_h$ . The part  $\mathcal{T}_h|_{\Gamma_i}$  of  $\mathcal{T}_h$  admits, for  $i=0,1,\dots,N_\Gamma$ ,  $n_{fi}$  (resp.  $n_{ai}, n_{si}$ ) faces (resp. edges, vertices) lying on the component  $\Gamma_i$  of  $\Gamma$ . Finally, we note  $N_f^* = N_f - \sum_{i=0}^{N_\Gamma} n_{fi}$ ,  $N_a^* = N_a - \sum_{i=0}^{N_\Gamma} n_{ai}$ ,  $N_s^* = N_s - \sum_{i=0}^{N_\Gamma} n_{si}$ .

We have the Euler-Poincaré relations on the manifolds  $\Omega$  and  $\Gamma_i$ .

THEOREM 4.1 (Euler-Poincaré)

$$(4.6) \quad \chi(\Omega) \equiv N_s - N_a + N_f - N_e = N_\Gamma + 1$$

$$(4.7) \quad \chi(\Gamma_i) \equiv n_{s_i} - n_{a_i} + n_{f_i} = 2 \quad i = 0, 1, \dots, N_\Gamma \quad .$$

PROOF OF THEOREM 4.1

The domain  $\Omega$  is simply connected then for each component of its boundary (4.7) holds (e.g. MASSEY [32]). Moreover each  $\Gamma_i$  is the boundary of some domain whose Euler characteristic is equal to 1. So we have by additivity of the Euler-Poincaré characteristics :

$$\chi(\Omega) + \left( \sum_{i=1}^{N_\Gamma} 1 \right) - \sum_{i=1}^{N_\Gamma} \chi(\Gamma_i) = 1. \quad \blacksquare$$

To construct the discrete space of the vector potential, we need some details on the graph defined in the set of vertices of  $\mathcal{T}_h$  by the edges of the mesh. For general purpose on graph theory, we refer to BERGE [7].

DEFINITION 4.2 Let  $P_h(\Omega)$  (resp.  $P_h(\Gamma_i)$ ,  $P_h(\Gamma)$ ,  $P_h(\overset{\circ}{\Omega})$ ) be the set of all the vertices of the triangulation  $\mathcal{T}_h$  (resp. lying on  $\Gamma_i$ , lying on  $\Gamma$ , internal to the domain) and  $A_h(\Omega)$  (resp.  $A_h(\Gamma_i)$ ,  $A_h(\Gamma)$ ,  $A_h(\overset{\circ}{\Omega})$ ) the graph defined on  $P_h(\Omega)$  (resp.  $P_h(\Gamma_i)$ ,  $P_h(\Gamma)$ ,  $P_h(\overset{\circ}{\Omega})$ ) by the binary relation

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall p, q \text{ vertices of } \mathcal{T}_h \text{ in } \bar{\Omega} \text{ (resp. } \Gamma_i, \Gamma, \overset{\circ}{\Omega}) \\ (p, q) \in A_h(\Omega) \text{ (resp. } A_h(\Gamma_i), A_h(\Gamma), A_h(\overset{\circ}{\Omega})) \text{ if } f \\ [p, q] \text{ is an edge of } \mathcal{T}_h \end{array} \right.$$

We identify in the following the sets  $A_h$  and the corresponding edges of the triangulation  $\mathcal{T}_h$ .

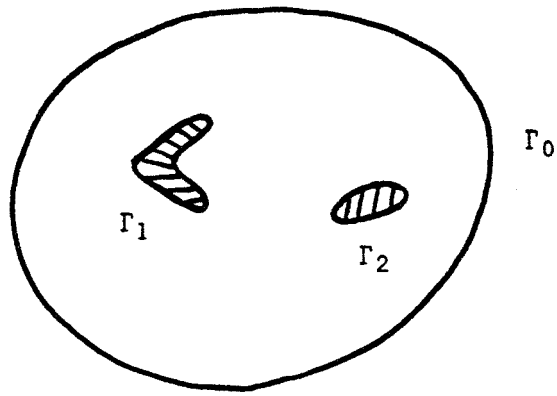


Figure 4.1  $N_{\Gamma} = 2$ ,  $N_H = 0$

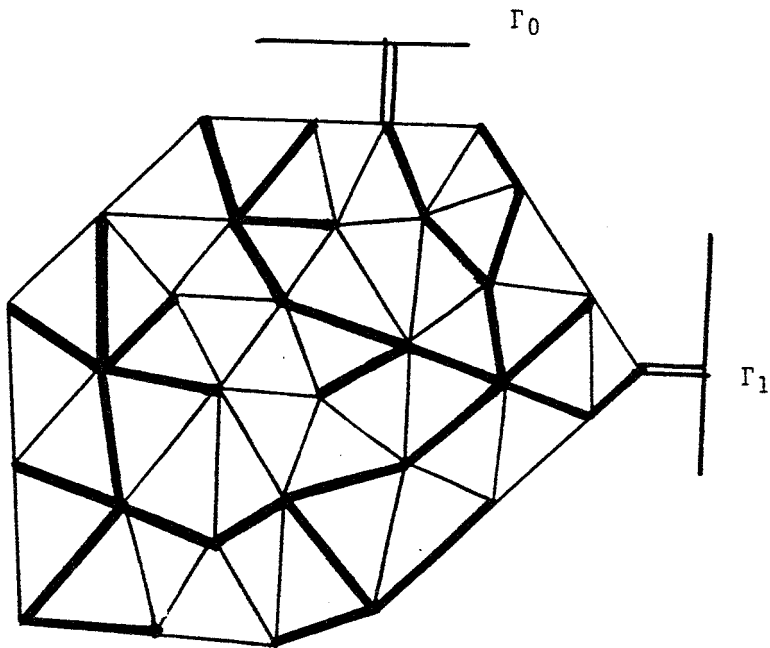


Figure 4.2 Symbolic representation of the graph  $A_h(\overset{\circ}{\Omega})$ , the tree  $T_h(\overset{\circ}{\Omega})$  (thick lines) and the isolated edges of  $T(\Gamma)$  (double lines)

DEFINITION 4.3 The natural basis of the space  $W_h(\Omega)$  is denoted by  $\vec{\phi}_a$ ,  $a \in A_h(\Omega)$ , it satisfies  $\sigma_a(\vec{\phi}_b) = \delta_{a,b}$  for  $a, b \in A_h(\Omega)$  and  $\sigma_a$  introduced in Definition 3.6.

PROPOSITION 4.1 We have

$$W_h^0(\Omega) = \text{span} \langle \vec{\phi}_a, a \in (A_h(\Omega) \setminus A_h(\Gamma)) \rangle$$

$$\dim W_h^0(\Omega) = N_a^* \quad , \quad \text{Card}(P_h(\overset{\circ}{\Omega})) = N_s^* .$$

DEFINITION 4.4 Let us fix a maximal tree  $T_h(\overset{\circ}{\Omega})$  in the graph  $A_h(\overset{\circ}{\Omega})$  ( $T_h(\overset{\circ}{\Omega})$  is connected without cycle, admits  $(N_s^* - 1)$  edges, if we cut out an edge of  $T_h(\overset{\circ}{\Omega})$  it is no more connected, if we add an edge of  $A_h(\overset{\circ}{\Omega}) \setminus T_h(\overset{\circ}{\Omega})$  to  $T_h(\overset{\circ}{\Omega})$  we obtain a unique cycle). Let us also fix  $(N_\Gamma + 1)$  edges  $T(\Gamma)$  of  $A_h(\Gamma)$  connecting  $P_h(\overset{\circ}{\Omega})$  to each  $P_h(\Gamma_i)$  for  $i = 0, \dots, N_\Gamma$  (cf. figure 4.2). We set  $T_h(\Omega) = T_h(\overset{\circ}{\Omega}) \cup T(\Gamma)$ .

PROPOSITION 4.2 Let  $\alpha$  be an edge of  $\mathcal{E}_h$  which does not belong to  $A_h(\Gamma) \cup T_h(\Omega)$ . The union  $A_h(\Gamma) \cup T_h(\Omega) \cup \{\alpha\}$  contains a unique cycle, which is the boundary of a surface of  $\mathcal{E}_h$ .

PROOF OF PROPOSITION 4.2

Two cases are possible. First  $\alpha \in A_h(\overset{\circ}{\Omega})$ , then the cycle exists because  $T_h(\overset{\circ}{\Omega})$  is a maximal tree in  $A_h(\overset{\circ}{\Omega})$ . Secondly  $\alpha \in A_h(\Omega) \setminus A_h(\overset{\circ}{\Omega})$  i.e.  $\alpha$  connects a point of  $P_h(\Gamma_i)$  to a point  $p$  of  $P_h(\overset{\circ}{\Omega})$  : we denote by  $q$  the point of  $P_h(\overset{\circ}{\Omega})$  connected to  $P_h(\Gamma_i)$  thanks to  $a_i \in T(\Gamma)$  and consider the path  $\gamma$  included in  $T_h(\overset{\circ}{\Omega})$  joining  $p$  to  $q$ . Then  $\{\alpha\} \cup \gamma \cup \{a_i\}$  connects two vertices of  $\Gamma_i$  and is easily extended by edges of  $A_h(\Gamma_i)$  to define a cycle as proposed. ■

We define now the discretization  $K_h(\Omega)$  of  $H^0(\text{curl}, \Omega)$  satisfying the discrete axial gauge :

DEFINITION 4.5 We set

$$\begin{aligned} K_h(\Omega) &= \left\{ \vec{\varphi} \in W_h^0(\Omega), \sigma_b(\vec{\varphi}) = 0 \text{ if } b \in T_h(\Omega) \right\} \\ &= \text{span} \langle \vec{\varphi}_a, a \in A_h(\Omega) \setminus (A_h(\Gamma) \cup T_h(\Omega)) \rangle . \end{aligned}$$

DEFINITION 4.6

$$\begin{aligned} U_h(\Omega) &= \left\{ \vec{v} \in V_h(\Omega), \text{div } \vec{v} = 0 \right\} \\ U_h^0(\Omega) &= \left\{ \vec{v} \in U_h(\Omega), \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ on } \Gamma \right\} . \end{aligned}$$

We prove now that  $K_h(\Omega)$  allows an exact representation of discrete vector fields in  $U_h^0(\Omega) \subset H(\text{div}, \Omega)$ .

THEOREM 4.2 The mapping  $\text{curl}$  is one to one from  $K_h(\Omega)$  onto  $U_h^0(\Omega)$  :

$$(4.8) \quad \forall \vec{v}_h \in U_h^0(\Omega), \exists ! \vec{\varphi}_h \in K_h(\Omega), \text{curl } \vec{\varphi}_h = \vec{v}_h .$$

LEMMA 4.1  $\text{curl } W_h(\Omega) \subset V_h(\Omega)$  .

PROOF OF LEMMA 4.1

Let  $\vec{\varphi}$  be in  $W_h(\Omega)$ , then clearly  $\text{curl } \vec{\varphi} \in H(\text{div}, \Omega)$  and it is enough to prove that in each element  $K$  of  $\mathcal{T}_h$ ,  $\text{curl } \vec{\varphi}$  belongs to  $D_1(K)$ . There exists some  $\hat{\varphi} \in R_1(\hat{K})$  (cf. (3.14)) satisfying  $\varphi(x) = {}^t dF^{-1}(\hat{x}) \cdot \hat{\varphi}(\hat{x})$ . We denote by  $\varepsilon_{ijk}$  the totally antisymmetric tensor (e.g. GERMAIN-MULLER [24]). Then, thanks to (3.33),

$$(4.9) \quad (\text{curl } \vec{\varphi})_i = \frac{1}{2} \sum_{jklmn} \varepsilon_{ijk} dF_{lj}^{-1} \varepsilon_{lmn} (\text{curl } \vec{\varphi})_n dF_{mk}^{-1}$$

The sum

$$(4.10) \quad \frac{1}{2} \sum_{jklm} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} dF_{lj}^{-1} dF_{mk}^{-1}$$

is equal to  $\frac{1}{\det(dF)} dF_{in}(\hat{x})$  because the following identity holds (GERMAIN-MULLER [24]) :

$$\sum_{l,m,n} \varepsilon_{lmn} dF_{lj}^{-1} dF_{mk}^{-1} dF_{n\alpha}^{-1} = \varepsilon_{jk\alpha} \det(dF^{-1})$$

Then, replacing (4.10) in (4.9) we get

$$(4.11) \quad (\text{curl } \vec{\varphi})_i = \sum_n \frac{1}{\det(dF(\hat{x}))} dF_{in}(\hat{x}) (\text{curl } \vec{\varphi})_n$$

The vector  $\text{curl } \vec{\varphi}$  is constant in  $\hat{K}$ , then it belongs to  $D_1(\hat{K})$ . Moreover the identity (4.11) shows that  $\text{curl } \vec{\varphi}$  is in  $D_1(K)$ , thanks to (3.6). ■

LEMMA 4.2 We have the following characterization of  $U_h^0(\Omega)$  :

$$(4.12) \quad U_h^0(\Omega) = \left\{ \vec{v} \in H(\text{div}, \Omega), \vec{v} \cdot \vec{n}|_{\Gamma} = 0, \exists \hat{v} \in (P_0)^3, (3.13) \text{ holds} \right\}$$

$$(4.13) \quad \dim U_h^0(\Omega) = N_f^* - N_e + 1.$$

#### PROOF OF LEMMA 4.2

• Let  $\vec{v}$  be a vector valued function of  $U_h^0(\Omega)$ . In the element  $K$  of  $\mathcal{T}_h$  (3.6) allows us to define  $\hat{v} \in D_1$ . From (3.8) we deduce easily  $\int_K \text{div } \vec{v} dx = \int_{\hat{K}} \text{div } \hat{v} d\hat{x}$ . Because  $\text{div } \vec{v} = 0$  and  $\text{div } \hat{v}$  is constant in  $\hat{K}$ ,  $\hat{v}$  is constant on  $\hat{K}$ , and the characterization (4.12) holds.

• Inversely, if  $\vec{v}$  and  $\hat{v}$  satisfy (3.6) we have the identity

$$\text{div } \vec{v}(F(\hat{x})) = \frac{1}{J} \text{div } \hat{v}(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in \hat{K}, J = \det dF(\hat{x})$$

which can be directly derived : by taking the divergence of (3.6), we get

$$(4.14) \quad \operatorname{div} \vec{v} = \sum_j \hat{v}_j \sum_{i,k} dF_{ki}^{-1} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_k} \left( \frac{1}{J} dF_{ij} \right) + \frac{1}{J} \operatorname{div} \hat{v}$$

The sum over  $i,k$  in (4.14) is null because we have the classical identity on determinants :

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} (J(\hat{x})) = \sum_{i,k} J dF_{ki}^{-1} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} (dF_{ik})$$

Then  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  in  $\overset{\circ}{K}$ . Moreover  $\vec{v} \cdot \vec{n}$  is continuous along the faces of the mesh, and  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ .

- The space  $U_h^0(\Omega)$  is defined by  $N_f^*$  degrees of freedom and  $N_e$  relations thanks to (4.12). But the family of linear forms

$$V_h^0(\Omega) \ni \vec{v} \mapsto \langle \chi_K, \vec{v} \rangle = \int_K \operatorname{div} \vec{v} \, dx \in \mathbb{R}, \quad K \text{ element of } \mathcal{T}_h$$

generates a linear space of dimension  $(N_e - 1)$  because we have the relation

$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div} \vec{v} \, dx = 0$ , for each  $\vec{v} \in V_h^0(\Omega)$ , and if we fix an element  $K_0$ , let us suppose that the following linear sum is null :

$$(4.15) \quad \sum_{K \neq K_0} \alpha_K \chi_K = 0$$

Fix  $K_1 \neq K_0$ ,  $\theta$  regular function verifying

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{supp} \theta \subset \bar{K}_0 \cup \bar{K}_1 \\ \theta > 0 \text{ in } \overset{\circ}{K}_0 ; \theta < 0 \text{ in } \overset{\circ}{K}_1 \\ \int_{\Omega} \theta \, dx = 0 \end{array} \right.$$

We denote by  $\varphi$  a solution of the problem



$$\begin{cases} \Delta\varphi = \theta & \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \Gamma \end{cases}$$

and we set :  $\vec{v} = \Pi_h^D(\nabla\varphi)$ . The vector  $\vec{v}$  belongs to  $V_h^0(\Omega)$  and thanks to Proposition 3.4 the integral  $\int_K \operatorname{div} \vec{v} \, dx$  is null for  $K$  different of  $K_0$  and  $K_1$ , and is positive for  $K=K_1$ . Then testing (4.15) on  $\vec{v}$ , we get  $\alpha_{K_1} = 0$ . So (4.13) holds. ■

#### PROOF OF THEOREM 4.2

- From Lemma 4.1, curl is well defined  $W_h(\Omega) \rightarrow U_h(\Omega)$ . Moreover if  $\vec{\varphi}$  belongs to  $W_h^0(\Omega)$ , we have on the boundary of  $\Omega$  :  $\vec{\operatorname{curl}} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \equiv \operatorname{div}_\Gamma \vec{\varphi} \times \vec{n} = 0$ , then  $\vec{\operatorname{curl}} \vec{\varphi}$  belongs to  $U_h^0(\Omega)$ .
- The mapping  $\operatorname{curl} : K_h(\Omega) \rightarrow U_h^0(\Omega)$  is injective. Let  $\vec{\varphi}$  be a vector lying in  $K_h(\Omega)$  satisfying  $\vec{\operatorname{curl}} \vec{\varphi} = 0$ , and  $\alpha$  be an edge of  $A_h(\Omega) \setminus (A_h(\Gamma) \cup T_h(\Omega))$ . Following Proposition 4.2, there exists some discrete surface  $\Sigma_\alpha$  from the triangulation  $\mathcal{T}_h$  with a boundary  $\gamma_\alpha$  composed only by edges of  $\{\alpha\} \cup A_h(\Gamma) \cup T_h(\Omega)$ . When we integrate  $\vec{\operatorname{curl}} \vec{\varphi}$  on  $\Sigma_\alpha$ , we find  $\int_{\gamma_\alpha} \vec{\varphi} \cdot d\vec{s} = \sigma_\alpha(\vec{\varphi})$ , which is null because  $\vec{\operatorname{curl}} \vec{\varphi} = 0$ .
- The linear spaces  $K_h(\Omega)$  and  $U_h^0(\Omega)$  have the same dimension. On one hand, we have clearly  $\dim K_h(\Omega) = N_a - \sum_{i=1}^{N_\Gamma} n_{ai} - (N_s^* - 1) - (N_\Gamma + 1)$ , and on the other hand, thanks to Lemma 4.2 :  $\dim U_h^0(\Omega) = N_f^* - N_e + 1$ . Moreover Theorem 4.1 shows that  $N_s^* - N_a^* + N_f^* - N_e = -(N_\Gamma + 1)$ . So (4.8) holds. ■

PROPOSITION 4.3 Suppose that  $\mathcal{T}_h$  satisfies Hypothesis 3.1, 3.2, 4.1. Then for  $\vec{\varphi} \in (W^2(\Omega) \cap W^1(\Omega))$ , there exists  $\varphi_h \in K_h(\Omega)$  such that

$$\|\vec{\text{curl}} \vec{\varphi} - \vec{\text{curl}} \vec{\varphi}_h\|_{0,\Omega} \leq C h \|\vec{\varphi}\|_{W^2(\Omega)}$$

for some  $C$  independent of  $h$ .

PROOF OF PROPOSITION 4.3

From Theorem 3.2, the  $H(\text{curl})$  interpolate  $\Pi_h^R \vec{\varphi}$  in  $W_h(\Omega)$  satisfies

$$\|\vec{\varphi} - \Pi_h^R \vec{\varphi}\|_{H(\text{curl},\Omega)} \leq C h \|\vec{\varphi}\|_{W^2(\Omega)}$$

Moreover  $\Pi_h^R \vec{\varphi} \in W_h^0(\Omega)$  since  $\vec{\varphi} \times \vec{n} = 0$  on  $\partial\Omega$ . So  $\vec{\text{curl}}(\Pi_h^R \vec{\varphi})$  belongs to  $U_h^0(\Omega)$  and verifies

$$\|\vec{\text{curl}} \vec{\varphi} - \vec{\text{curl}} \Pi_h^R \vec{\varphi}\|_{0,\Omega} \leq C h \|\vec{\varphi}\|_{W^2(\Omega)}$$

Theorem 4.2 gives  $\vec{\varphi}_h$  in  $K_h(\Omega)$  satisfying

$$\vec{\text{curl}} \vec{\varphi}_h(x) = \vec{\text{curl}} \Pi_h^R \vec{\varphi}(x) \quad \forall x \in \Omega$$

and the Proposition is established. ■

2) MIXED APPROXIMATION AND ERROR ESTIMATE

We are now allowed to formulate a mixed discrete approximation of the continuous problem (4.1)-(4.3) in terms of a pair  $(\vec{u}_h, \vec{\psi}_h)$  in  $U_h^0(\Omega) \times K_h(\Omega)$ .

PROPOSITION 4.4 Let  $\vec{f}$  and  $\vec{g}$  be two functions in  $(L^2(\Omega))^3$ . The problem

$$(4.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Find } (\vec{u}_h, \vec{\psi}_h) \in U_h^0(\Omega) \times K_h(\Omega) \\ \int_{\Omega} \vec{u}_h \cdot \vec{v}_h \, dx - \int_{\Omega} \vec{\text{curl}} \vec{\psi}_h \cdot \vec{v}_h \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v}_h \, dx \quad \forall \vec{v}_h \in U_h^0(\Omega) \\ \int_{\Omega} \vec{u}_h \cdot \vec{\text{curl}} \vec{\varphi}_h \, dx = \int_{\Omega} \vec{g} \cdot \vec{\text{curl}} \vec{\varphi}_h \, dx \quad \forall \vec{\varphi}_h \in K_h(\Omega) \end{array} \right.$$

admits a unique solution. Moreover we have

$$(4.17) \quad \|\vec{u}_h\|_{0,\Omega} + \|\text{c\bar{u}r1 } \vec{\psi}_h\|_{0,\Omega} \leq \|\vec{f}\|_{0,\Omega} + 2 \|\vec{g}\|_{0,\Omega} .$$

PROOF OF PROPOSITION 4.4

• To prove that (4.16) admits a unique solution we just have to consider the inf-sup property (BREZZI [10]) :

$$(4.18) \quad \exists c_h > 0, \forall \vec{\varphi}_h \in K_h(\Omega), \sup_{\vec{v}_h \in U_h^0(\Omega)} - \frac{\int_{\Omega} \text{c\bar{u}r1 } \vec{\varphi}_h \cdot \vec{v}_h \, dx}{\|\vec{v}_h\|_{U_h^0(\Omega)}} \geq c_h \|\vec{\varphi}_h\|_{K_h(\Omega)}$$

From Theorem 4.2, we can define a norm on  $K_h(\Omega)$  by  $\|\vec{\varphi}\|_{K_h(\Omega)} = \|\text{c\bar{u}r1 } \vec{\varphi}\|_{0,\Omega}$  and we choose in  $U_h^0(\Omega)$  the norm  $L^2$ . Then, given  $\vec{\varphi}_h$  in  $K_h$ , let us set  $\vec{v}_h = -\text{c\bar{u}r1 } \vec{\varphi}_h$ . We get

$$\sup_{\vec{v}_h \in U_h^0(\Omega)} - \frac{\int_{\Omega} \text{c\bar{u}r1 } \vec{\varphi}_h \cdot \vec{v}_h \, dx}{\|\vec{v}_h\|_{0,\Omega}} \geq - \frac{\int_{\Omega} \text{c\bar{u}r1 } \vec{\varphi}_h \cdot \vec{v}_h \, dx}{\|\vec{v}_h\|_{0,\Omega}} = \|\text{c\bar{u}r1 } \vec{\varphi}_h\|_{0,\Omega}$$

that demonstrates (4.18).

• We establish now the stability (4.17). Recall that we denote by  $(\vec{u}_h, \vec{\psi}_h)$  the solution of (4.16). In the second equation of (4.16) take  $\vec{\varphi}_h$  verifying  $\text{c\bar{u}r1 } \vec{\varphi}_h = \vec{u}_h$ . We clearly deduce

$$(4.19) \quad \|\vec{u}_h\|_{0,\Omega} \leq \|\vec{g}\|_{0,\Omega}$$

Make now the choice  $\vec{v}_h = \text{c\bar{u}r1 } \vec{\psi}_h$  in the first equation, we get

$$\|\text{c\bar{u}r1 } \vec{\psi}_h\|_{0,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \vec{u}_h \cdot \text{c\bar{u}r1 } \vec{\psi}_h \, dx - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \text{c\bar{u}r1 } \vec{\psi}_h \, dx$$

$$(4.20) \quad \|\text{c\bar{u}r1 } \vec{\psi}_h\|_{0,\Omega} \leq \|\vec{u}_h\|_{0,\Omega} + \|\vec{f}\|_{0,\Omega}$$

Thus (4.17) is obtained by adding (4.19) and (4.20). ■

REMARK 4.1 The mixed problem (4.16) has always one and only one solution for each choice of the (small) parameter  $h$ . The stability property (4.17) gives a good control of both  $\vec{u}_h$  and  $\text{curl } \vec{\psi}_h$  which have a real physical meaning, but we have no control independent of  $h$  on the  $L^2$  norm of the vector potential  $\vec{\psi}_h$  and this is natural : for each value of  $h$ , the Definition 4.5 of  $K_h(\Omega)$  holds in itself the choice of an arbitrary tree  $T_h(\hat{\Omega})$  and arbitrary edges of  $T_h(\Gamma)$ . Therefore it is hopeless to improve the  $L^2$  estimation with that kind of discrete gauge. Nevertheless, we recall that algebraically the linear system defined by (4.16) has a unique solution ; the numerical tests we have achieved (DUBOIS [18]) show that for a given mesh the change of  $T_h(\Omega)$  have had little impact on the difficulty to solve the linear system.

We establish now the main result of this part. Let  $\vec{\omega}$  be a given vorticity function on  $\hat{\Omega}$  :

$$\vec{\omega} \in (L^2(\Omega))^3, \quad \text{div } \vec{\omega} = 0, \quad P_N \vec{\omega} = 0$$

Consider the velocity field  $\vec{u} \in (H^1(\Omega))^3$  satisfying (4.1)-(4.3) (cf. Theorem 2.5). Consider also the  $L^2$  projection  $\vec{\omega}_h$  of  $\vec{\omega}$  over  $U_h^0(\Omega)$  :

$$(4.21) \quad \vec{\omega}_h \in U_h^0(\Omega), \quad \|\vec{\omega}_h\|_{0,\Omega} \leq \|\vec{\omega}\|_{0,\Omega}$$

$$(4.22) \quad \int_{\Omega} (\vec{\omega} - \vec{\omega}_h) \cdot \vec{v}_h \, dx = 0 \quad \forall \vec{v}_h \in U_h^0(\Omega)$$

and the following discrete problem :

$$(4.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_h \in U_h^0(\Omega), \quad \vec{\psi}_h \in K_h(\Omega) \\ \int_{\Omega} \vec{u}_h \cdot \vec{v}_h \, dx - \int_{\Omega} \text{curl } \vec{\psi}_h \cdot \vec{v}_h \, dx = 0 \quad \forall \vec{v}_h \in U_h^0(\Omega) \\ \int_{\Omega} \vec{u}_h \cdot \text{curl } \vec{\phi}_h \, dx = \int_{\Omega} \vec{\omega}_h \cdot \vec{\phi}_h \, dx \quad \forall \vec{\phi}_h \in K_h(\Omega) \end{array} \right.$$

We have :

THEOREM 4.3 Let  $\vec{\omega}, \vec{\omega}_h, \vec{u}, \vec{u}_h$  be given as above. If  $\mathcal{T}_h$  satisfies the Hypothesis 3.1, 3.2, 4.1, there exists some constant  $C$  (independent of  $h$ ) such that

$$(4.24) \quad \|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C h \|\vec{\omega}\|_{0,\Omega} .$$

REMARK 4.2

The practical computation of  $\vec{\omega}_h$  is not easy (it requires the inversion of the mass-matrix defined by the degrees of freedom in  $U_h^0$ ) and we note that  $\vec{\omega}_h$  is not the  $H(\text{div})$  interpolate of  $\vec{\omega}$ . However, the estimation (4.24) is of optimal order as we noticed in the introduction.

PROOF OF THEOREM 4.3

We divide the proof in two parts.

- First, we consider the continuous solution  $\vec{q}_h$  of

$$(4.25) \quad \begin{cases} \text{div } \vec{q}_h = 0 & \Omega \\ \text{curl } \vec{q}_h = \vec{\omega}_h & \Omega \\ \vec{q}_h \cdot \vec{n} = 0 & \Gamma \end{cases}$$

Let  $\vec{\varphi} \in W^1(\Omega)$ . Its interpolate  $\Pi_h^D \vec{\varphi}$  belongs to  $U_h^0(\Omega)$  thanks to Proposition 3.4, thus we have

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\vec{u} - \vec{q}_h) \cdot \text{curl } \vec{\varphi} \, dx &= \int_{\Omega} (\vec{\omega} - \vec{\omega}_h) \cdot \vec{\varphi} \, dx \\ &= \int_{\Omega} (\vec{\omega} - \vec{\omega}_h) \cdot (\vec{\varphi} - \Pi_h^D \vec{\varphi}) \, dx \quad (\text{thanks to (4.22)}) \\ &\leq \|\vec{\omega} - \vec{\omega}_h\|_{0,\Omega} \cdot C h \|\vec{\varphi}\|_{1,\Omega} \quad (\text{cf. Th. 3.1}) \\ &\leq 2 C h \|\vec{\omega}\|_{0,\Omega} \|\vec{\varphi}\|_{1,\Omega} \quad (\text{cf. (4.21)}) \\ \int_{\Omega} (\vec{u} - \vec{q}_h) \cdot \text{curl } \vec{\varphi} \, dx &\leq C h \|\vec{\omega}\|_{0,\Omega} \|\text{curl } \vec{\varphi}\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

thanks to Proposition 2.4. We choose now  $\vec{\varphi}$  as the vector-potential of  $(\vec{u} - \vec{q}_h)$  thanks to Theorem 2.5 ; we get :

$$(4.26) \quad \|\vec{u} - \vec{q}_h\|_{0,\Omega} < C h \|\vec{\omega}\|_{0,\Omega}$$

• Secondly, the field  $\vec{q}_h$  introduced above in (4.25) admits a continuous potential  $\vec{\chi}_h$  (thanks to Theorem 2.5) satisfying :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \vec{q}_h \cdot \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} \text{curl} \vec{\chi}_h \cdot \vec{v} \, dx = 0 & \forall \vec{v} \in (L^2(\Omega))^3 \\ \int_{\Omega} \vec{q}_h \cdot \text{curl} \vec{\varphi} \, dx = \int_{\Omega} \vec{\omega}_h \cdot \vec{\varphi} \, dx & \forall \vec{\varphi} \in W^1(\Omega) \end{cases}$$

Let us fix for a time  $(\tilde{u}_h, \tilde{\psi}_h) \in U_h^0 \times K_h$ . Because  $U_h^0(\Omega) \subset (L^2(\Omega))^3$ , we have :

$$(4.27) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} (\vec{u}_h - \tilde{u}_h) \cdot \vec{v}_h \, dx - \int_{\Omega} \text{curl}(\vec{\psi}_h - \tilde{\psi}_h) \cdot \vec{v}_h \, dx = \\ & = \int_{\Omega} (\vec{q}_h - \tilde{u}_h) \cdot \vec{v}_h \, dx - \int_{\Omega} \text{curl}(\vec{\chi}_h - \tilde{\psi}_h) \cdot \vec{v}_h \, dx \quad , \quad \forall \vec{v}_h \in U_h^0(\Omega) \end{aligned}$$

Since  $K_h(\Omega)$  is not included in  $W^1(\Omega)$ , we must proceed otherwise with the second equation. We multiply the second line of (4.25) by  $\vec{\varphi}_h \in K_h(\Omega)$ , we integrate by parts (cf. (1.21)) and the boundary term vanishes because  $\vec{\varphi}_h \times \vec{n} = 0$ . Thus we have

$$(4.28) \quad \int_{\Omega} \vec{q}_h \cdot \text{curl} \vec{\varphi}_h \, dx = \int_{\Omega} \vec{\omega}_h \cdot \vec{\varphi}_h \, dx$$

We subtract (4.28) from the second equation of (4.23), and we obtain :

$$(4.29) \quad \int_{\Omega} (\vec{u}_h - \tilde{u}_h) \cdot \text{curl} \vec{\varphi}_h \, dx = \int_{\Omega} (\vec{q}_h - \tilde{u}_h) \cdot \text{curl} \vec{\varphi}_h \, dx \quad , \quad \forall \vec{\varphi}_h \in K_h(\Omega)$$

Then the pair  $(\vec{u}_h - \tilde{u}_h, \vec{\psi}_h - \tilde{\psi}_h)$  is solution (thanks to (4.27) and (4.29)) of a mixed discrete problem (4.16) ; the Proposition 4.4 gives stability :

$$\|\vec{u}_h - \tilde{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C \left( \|\vec{q}_h - \tilde{u}_h\|_{0,\Omega} + \|\text{curl}(\vec{x}_h - \tilde{\psi}_h)\|_{0,\Omega} \right)$$

Then using the triangle inequality we get

$$\|\vec{u}_h - \vec{q}_h\|_{0,\Omega} \leq C \inf_{\tilde{u}_h \in U_h^0, \tilde{\psi}_h \in K_h} \left\{ \|\vec{q}_h - \tilde{u}_h\|_{0,\Omega} + \|\text{curl}(\vec{x}_h - \tilde{\psi}_h)\|_{0,\Omega} \right\}$$

Take now for  $\tilde{u}_h$  (resp.  $\tilde{\psi}_h$ ) the interpolate in  $U_h^0(\Omega)$  (resp.  $K_h(\Omega)$ ) defined thanks to Theorem 3.1 (resp. Proposition 4.3) of  $\vec{q}_h$  (resp.  $\vec{x}_h$ ). We deduce

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_h - \vec{q}_h\|_{0,\Omega} &\leq C h \left( \|\vec{q}_h\|_{1,\Omega} + \|\vec{x}_h\|_{W^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C h \|\vec{\omega}_h\|_{0,\Omega} \quad (\text{cf. Theorem 2.5}) \end{aligned}$$

$$(4.30) \quad \|\vec{u}_h - \vec{q}_h\|_{0,\Omega} \leq C h \|\vec{\omega}\|_{0,\Omega} \quad (\text{cf. (4.21)}) .$$

The conclusion of the Theorem is consequence of both (4.26) and (4.30). ■

## V - THE DIRICHLET BOUNDARY CONDITION

We focus in this last paragraph on the approximation of an harmonic vector field  $\vec{u}$  with given mass inflow and outflow on the boundary :

$$(5.1) \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \Omega$$

$$(5.2) \quad \operatorname{curl} \vec{u} = 0 \quad \Omega$$

$$(5.3) \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = g \quad \Gamma$$

We suppose that

$$(5.4) \quad \int_{\Gamma_i} g \, d\gamma = 0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, N_\Gamma$$

to be sure that  $\vec{u}$  admits a representation in terms of a vector potential  $\vec{\psi}$  (cf. Proposition 2.5) :  $\vec{u} = \operatorname{curl} \vec{\psi}$ . Moreover a boundary equation is satisfied by the tangential component  $\Pi \vec{\psi}$  on  $\partial\Omega$  :

$$(5.5) \quad \operatorname{curl}_\Gamma \Pi \vec{\psi} = g \quad \text{on } \Gamma$$

We first study an approximation of (5.5) : we recall the results of BENDALI [2,4] and NEDELEC [35] for constructing vectorial finite elements on the boundary, and we propose a discrete gauge condition to insure the uniqueness of the tangential component in a discrete version of (5.5). Secondly, we use a discrete lifting to replace ourselves in the homogeneous case studied in part IV.

The boundary  $\Gamma$  admits  $(N_\Gamma + 1)$  simple connected components  $\Gamma_i$ , and the equation (5.5) is thus decoupled in  $(N_\Gamma + 1)$  different boundary equations. Therefore in paragraphs 1 and 2 we look at a connected manifold  $\Gamma_i$ , and in the paragraph 3, we study the boundary  $\Gamma$  of  $\Omega$ .



## 1) FINITE ELEMENTS ON THE BOUNDARY

We have developed in the part III curved finite elements in order to insure that the approached domain  $\Omega_h$  is exactly  $\Omega$ . Moreover, the boundary  $\partial\Omega$  is exactly covered by curved faces of the triangulation  $\mathcal{T}_h$ . We will denote by  $\mathcal{T}_h(\Gamma)$  the mesh defined on  $\Gamma$  by  $\mathcal{T}_h$  (i.e. the points  $P_h(\Gamma)$ , the edges  $A_h(\Gamma)$  and the curvilinear triangles which are the faces of  $\Gamma$ ). We can suppose that each triangle  $k$  of  $\mathcal{T}_h(\Gamma)$  is the range of  $\hat{k} = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, 0) \in \mathbb{R}^3, \hat{x}_1 \geq 0, \hat{x}_2 \geq 0, \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \leq 1\}$  by the mapping  $F$  defined in (3.1). Moreover as  $\hat{k}$  is a face of  $\hat{K}$  (Definition 3.1), the triangle  $k$  is a face of some curved tetrahedron  $K$  of  $\mathcal{T}_h$ , and we denote by  $F_k$  the restriction of  $F$  to  $\hat{k}$ . The straight tetrahedron  $\tilde{K}$  defined by the vertices of  $K$ , and parameterized by  $\hat{K} \ni \hat{x} \mapsto (B\hat{x} + b) \in \tilde{K}$  defines a plane triangle  $\tilde{k}$  whose union recover an approximated surface  $\Gamma_h$  of  $\Gamma$ . On Figure 5.1, we show that  $k$  is parameterized by  $\tilde{k}$  thanks to the normal projection  $P_\Gamma$  on the surface  $\tilde{k} \ni \tilde{x} \mapsto x = P_\Gamma(\tilde{x}) \in k$  as it was first proposed by NEDELEC [33].

Moreover let  $(\hat{e}_i)_{i=1,2,3}$  be the canonical basis of  $\mathbb{R}^3$ . The total gaussian curvature  $G(x)$  and the normal  $n(x)$  of  $\Gamma$  at the point  $x = F(\hat{x})$  of  $k$  admit the expressions :

$$G(x) = |dF(\hat{x}) \cdot \hat{e}_1 \times dF(\hat{x}) \cdot \hat{e}_2|^2$$

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{G(x)}} \left( dF(\hat{x}) \cdot \hat{e}_1 \times dF(\hat{x}) \cdot \hat{e}_2 \right)$$

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{G(x)}} \left( dF_k(\hat{x}) \cdot \hat{e}_1 \times dF_k(\hat{x}) \cdot \hat{e}_2 \right)$$

DEFINITION 5.1 (NEDELEC [35])

$$R_1^i = \left\{ \hat{n} : \hat{k} \rightarrow \mathbb{R}^2, \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \hat{n}_1(\hat{x}) = \alpha + \gamma \hat{x}_2, \hat{n}_2(\hat{x}) = \beta - \gamma \hat{x}_1 \right\} .$$

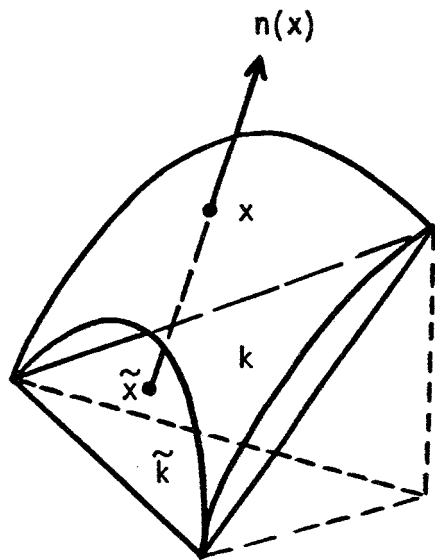


Figure 5.1

Curvilinear triangle on the boundary

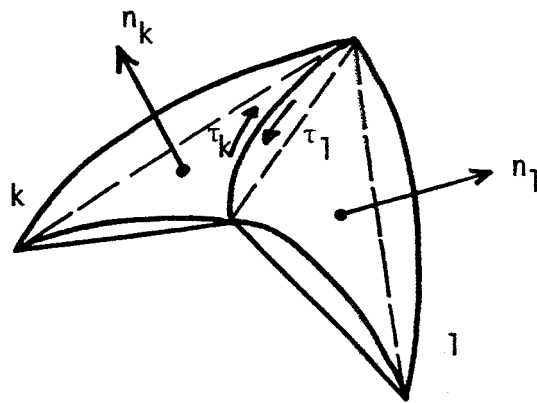


Figure 5.2

Adjacent triangles on the boundary

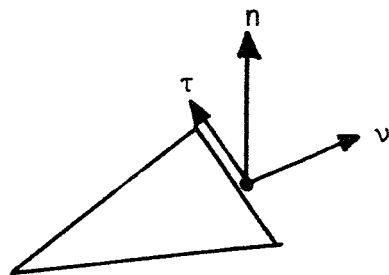


Figure 5.3

DEFINITION 5.2 Local spaces for the approximation of tangent vectors on  $\Gamma$ .

$$R_1'(k) = \left\{ \eta : k \rightarrow \mathbb{R}^3, \exists \hat{\eta} \in R_1' / \forall \hat{x} \in \hat{k} \right. \\ \left. \eta(F(\hat{x})) = \frac{1}{\sqrt{G(F(\hat{x}))}} dF(\hat{x}) \cdot \hat{\eta} \right\} .$$

The global finite element spaces for the interpolation of densities (which belong to  $M(\Gamma)$ ) and currents (lying in  $TH^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ) are given now :

DEFINITION 5.3

$$M_h(\Gamma) = \left\{ w \in L^2(\Gamma), \forall k \in \mathcal{T}_h(\Gamma), \exists \hat{w} \in \mathbb{R}, \forall \hat{x} \in \hat{k}, \right. \\ \left. w(F(\hat{x})) = \frac{\hat{w}}{\sqrt{G(\hat{x})}}, \int_{\Gamma} w \, d\gamma = 0 \right\}$$

For  $k, l$  two triangles of  $\mathcal{T}_h(\Gamma)$  intersecting themselves in an edge  $a$ , we denote by  $\vec{\tau}_k$  and  $\vec{\tau}_l$  the two tangent vectors which are compatible with the orientation defined on  $k$  and  $l$  by the external normal to  $\Gamma$  (figure 5.2). We set

$$X_h(\Gamma) = \left\{ \vec{n} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3, \forall k \in \mathcal{T}_h(\Gamma), \vec{n}|_k \in R_1'(k), \right. \\ \forall a = k \cap l \text{ edge of } \mathcal{T}_h(\Gamma), \\ \left. \int_a (\vec{n} \cdot \vec{\tau}_k + \vec{n} \cdot \vec{\tau}_l) \, ds = 0 \right\} .$$

(5.6)

The degrees of freedom in  $M_h(\Gamma)$  and  $X_h(\Gamma)$  are respectively :  $\sigma_k(w) = \int_k w(x) \, d\gamma(x)$ ,  $k$  element of  $\mathcal{T}_h(\Gamma)$  and  $\Sigma_a = \left\{ \sigma_a(\vec{n}) = \int_a \vec{n} \cdot \vec{ds}, \right.$  a edge of  $\mathcal{T}_h(\Gamma)$   $\left. \right\}$ . We define now interpolation operators in  $M_h(\Gamma)$  and  $X_h(\Gamma)$ .

THEOREM 5.1 (NEDELEC [33]) *There exists an operator  $P_h^S : L^2(\Gamma) \cap M(\Gamma) \rightarrow M_h(\Gamma)$  defined by  $\int_k P_h^S w \, d\gamma = \int_k w \, d\gamma$ ,  $\forall k \in \mathcal{T}_h(\Gamma)$  and if  $\mathcal{T}_h$  is regular (Hypothesis 3.1, 3.2) we have*

$$(5.7) \quad \|w - P_h^S w\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq C h \|w\|_{\frac{1}{2}, \Gamma}, \quad w \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

for some constant  $C$ .

THEOREM 5.2 (BENDALI [4]) *Let  $s$  be real,  $s > \frac{1}{2}$ . There exists an interpolation operator  $P_h^C : TH^s(\Gamma) \rightarrow X_h(\Gamma)$  defined by  $\int_a P_h^C \vec{n} \cdot \vec{d}s = \int_a \vec{n} \cdot \vec{d}s$ ,  $a$  edge on  $\mathcal{T}_h$ , we have :*

$$\|\vec{n} - P_h^C \vec{n}\|_{0, \Gamma} \leq C h^s \|\vec{n}\|_{s, \Gamma}, \quad \frac{1}{2} < s \leq 1, \quad \vec{n} \in TH^s.$$

PROPOSITION 5.1 *We have the following relations between  $X_h(\Gamma)$ ,  $M_h(\Gamma)$  and the curl operator on  $\Gamma$  :*

$$(5.8) \quad \text{curl } X_h(\Gamma) \subset M_h(\Gamma)$$

$$(5.9) \quad P_h^S (\text{curl}_\Gamma \vec{n}) = \text{curl}_\Gamma (P_h^C \vec{n}), \quad \forall \vec{n} \in TH^s(\Gamma), \quad s > \frac{1}{2}.$$

PROOF OF PROPOSITION 5.1

• The inclusion  $\text{curl}_\Gamma X_h \subset L^2(\Gamma)$  is a direct consequence of the continuity of the tangential component  $\vec{n} \cdot \vec{\tau}_a$  of the functions  $\vec{n} \in X_h(\Gamma)$  on the edges  $a$  of  $\mathcal{T}_h(\Gamma)$  thanks to (5.6). Moreover the integral of  $\text{curl}_\Gamma \vec{n}$  on  $\Gamma$  is always null and  $\text{curl}_\Gamma X_h \subset M_h(\Gamma)$ . In each triangle  $k$  of  $\mathcal{T}_h(\Gamma)$  we have the general identity :

$$\text{curl}_\Gamma \left\{ \frac{1}{\sqrt{G}} \, dF \cdot \hat{n} \right\} = \frac{1}{\sqrt{G}} (\text{curl}_{\mathbb{R}^2} \hat{n})$$

Thus if  $\vec{n}$  belongs to  $R_1'(k)$ ,  $\hat{n}$  lies in  $R_1'$  and  $\text{curl}_{\mathbb{R}^2} \hat{n}$  is a constant function, which implies (5.8).

- The proof of (5.9) is standard : integrate  $P_h^S(\text{curl}_\Gamma \vec{n})$  on  $k$  :

$$\begin{aligned} \int_k P_h^S(\text{curl}_\Gamma \vec{n}) \, d\gamma &= \int_k \text{curl}_\Gamma \vec{n} \, d\gamma = \int_k \text{div}_\Gamma(\vec{n} \times \vec{n}) \, d\gamma \\ &= \int_{\partial K} \vec{n} \times \vec{n} \cdot \vec{\nu} \, ds \quad (\text{cf. figure 5.3}) \\ &= \int_{\partial K} \vec{n} \cdot \vec{ds} = \int_{\partial K} P_h^C \vec{n} \cdot \vec{ds} = \int_k \text{curl}_\Gamma(P_h^C \vec{n}) \, d\gamma \end{aligned}$$

Thus the two functions of the equality (5.9) have the same degrees of freedom in  $M_h(\Gamma)$ . Then they are equal. ■

## 2) APPROXIMATION OF THE BOUNDARY PROBLEM

We first define a discrete subspace of  $X_h(\Gamma)$  in which the  $\text{curl}_\Gamma$  operator is one to one onto  $M_h(\Gamma)$ .

DEFINITION 5.4 We define  $\vec{n}_a$  as the natural basis of  $X_h(\Gamma)$ , parameterized by the graph  $A_h(\Gamma)$  of the edges of  $\mathcal{E}_h(\Gamma)$  :  $\sigma_a(\vec{n}_b) = \delta_{a,b}$  for  $a, b$  edges of  $\mathcal{E}_h(\Gamma)$ .

DEFINITION 5.5 Let us consider a given tree  $T_h(\Gamma)$  in the graph  $A_h(\Gamma)$ .

We set

$$Y_h(\Gamma) = \text{span} \langle \vec{n}_a, a \in A_h(\Gamma) \setminus T_h(\Gamma) \rangle .$$

THEOREM 5.3 The operator  $\text{curl}_\Gamma$  is one to one from  $Y_h(\Gamma)$  onto  $M_h(\Gamma)$  :

$$\forall w_h \in M_h(\Gamma), \exists ! \vec{n}_h \in Y_h(\Gamma), \text{curl}_\Gamma \vec{n}_h = w_h .$$

### PROOF OF THEOREM 5.3

- First the spaces  $Y_h(\Gamma)$  and  $M_h(\Gamma)$  have dimensions  $n_a - (n_s - 1)$  and  $n_f - 1$  respectively ; those numbers are equal thanks to Theorem 4.1 on Euler characteristic.
- Secondly  $\text{curl}_\Gamma$  is injective on  $Y_h(\Gamma)$ . The proof given for the Theorem 4.2 is the same. Let  $\alpha$  be an edge of  $A_h(\Gamma) \setminus T_h(\Gamma)$  ; the cycle  $\gamma_\alpha$  generated by  $\alpha$  and  $T_h(\Gamma)$  is the boundary of some discrete surface  $\Sigma_\alpha$  over which we integrate the null scalar  $\text{curl}_\Gamma \vec{n}$  ( $\vec{n} \in Y_h(\Gamma)$ ). We find
 
$$\int_{\Sigma_\alpha} \text{curl}_\Gamma \vec{n} d\gamma = \sigma_\alpha(\vec{n}) = 0.$$
 This statement is true for each edge  $\alpha$  of  $A_h(\Gamma)$ , then  $\vec{n} = 0$ .

Let now  $g$  be a given scalar function of  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \cap M(\Gamma)$  and  $\vec{\xi}$  the (unique) solution lying in  $W^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  of the continuous problem (cf. Proposition 2.7)

$$(5.10) \quad \text{curl}_\Gamma \vec{\xi} = g \quad , \quad \text{div}_\Gamma \vec{\xi} = 0$$

whose mixed variational formulation is (see (2.24))

$$(5.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\xi} \in W^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad , \quad \theta \in L^2(\Gamma) \cap M(\Gamma) \\ \int_\Gamma \vec{\xi} \cdot \vec{n} d\gamma - \int_\Gamma \theta \text{curl}_\Gamma \vec{n} d\gamma = 0 \\ \int_\Gamma \text{curl}_\Gamma \vec{\xi} w d\gamma = \int_\Gamma g w d\gamma \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall \vec{n} \in W^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \forall w \in L^2(\Gamma) \cap M(\Gamma) \end{array}$$

We denote also by  $g_h$  the interpolate of  $g$  in  $M_h(\Gamma)$ . We have, thanks to Theorem 5.1 :

$$(5.12) \quad \|g - g_h\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq C h \|g\|_{\frac{1}{2}, \Gamma}$$

DEFINITION 5.5 We will denote in the following by  $\vec{\xi}_h$  the unique vector valued function of  $Y_h(\Gamma)$  such that

$$(5.13) \quad \text{curl}_\Gamma \vec{\xi}_h = g_h$$

Thanks to (5.10) and (5.12) we have

$$(5.14) \quad \|\text{curl}_\Gamma \vec{\xi} - \text{curl}_\Gamma \vec{\xi}_h\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq C h \|g\|_{\frac{1}{2}, \Gamma} .$$

REMARK 5.1

The discrete gauge on the boundary gives a solution  $\vec{\xi}_h$  of (5.13) which is very easy to compute ; there indeed exists a numerotation of the edges (related to the tree  $T_h(\Gamma)$ ) such that (5.13) is reduced to a triangular system. The idea of decoupling the discrete gauge in the domain (part IV) and on the boundary was first proposed by ROUX [41] in a particular case.

3) LIFTING OF THE BOUNDARY PROBLEM

We turn now to three dimensional problems. The letter  $\Gamma$  represents the boundary  $\partial\Omega$  of the domain. The spaces  $X_h(\Gamma_i)$  and  $Y_h(\Gamma_i)$  introduced previously can be viewed as subspaces of  $W_h(\Omega)$  (cf. Definition 3.4) :

DEFINITION 5.6 Let  $\vec{\phi}_a$ ,  $a \in A_h(\Omega)$ , be the basis of  $W_h(\Omega)$  introduced in Definition 4.3, and let  $T_h(\Gamma_i)$  be given trees on the subgraphs  $A_h(\Gamma_i)$ .

We set

$$X_h(\Omega) = \text{span} \langle \vec{\phi}_a, a \in A_h(\Gamma_i), i=0, \dots, N_\Gamma \rangle$$

$$Y_h(\Omega) = \text{span} \langle \vec{\phi}_a, a \in A_h(\Gamma_i) \setminus T_h(\Gamma_i), i=0, \dots, N_\Gamma \rangle .$$

PROPOSITION 5.2 If  $\vec{\varphi}$  belongs to  $X_h(\Omega)$  (resp.  $Y_h(\Omega)$ ), its tangential component  $\Pi\vec{\varphi}$  belongs to  $X_h(\Gamma_i)$  (resp.  $Y_h(\Gamma_i)$ ) for some  $i$ .

PROOF OF PROPOSITION 5.2

This is a consequence of the  $H(\text{curl}, \Omega)$  unisolvence of  $(K, \Sigma_a, R_1(K))$  proved in Proposition 3.2 : the tangential components of  $\vec{\varphi}$  on the face  $k$  is only function of the degrees of freedom  $\sigma_a(\vec{\varphi})$  for the edges  $a$  of  $\partial k$ . Moreover we see easily that the spaces  $R_1^i(k)$  are exactly the sets of the tangential components on  $k$  of the functions of  $R_1(K)$ . The statement is thus established. ■

PROPOSITION 5.3 Suppose that  $\mathcal{E}_h$  satisfies the Hypothesis 3.1, 3.2, 4.1.

Let us give now  $g$  in  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \cap M(\Gamma)$  verifying  $\int_{\Gamma_i} g \, d\gamma = 0$  for  $i = 0, 1, \dots, N_\Gamma$ . We consider the solution  $\vec{\xi}$  of (5.11), the interpolate  $g_h$  of  $g$  in  $M_h(\Gamma) \equiv \bigoplus_{i=0}^{N_\Gamma} M_h(\Gamma_i)$ . There exists  $\vec{\zeta}_h \in Y_h(\Omega)$  satisfying

$$(5.15) \quad \text{curl}_\Gamma \Pi\vec{\zeta}_h = g_h$$

$$(5.16) \quad \|\text{curl}_\Gamma \vec{\xi} - \text{curl}_\Gamma \Pi\vec{\zeta}_h\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq C h \|g\|_{\frac{1}{2}, \Gamma}$$

for some constant  $C$ .

PROOF Direct consequence of (5.14) and of Proposition 5.2. ■

PROPOSITION 5.4 Let  $g, g_h, \vec{\zeta}_h$  be defined as above, and  $\vec{u}$  be the solution of (5.1)-(5.3). The vector  $\Pi_h^D \vec{u} - \text{curl}_\Gamma \vec{\zeta}_h$  belongs to  $U_h^0(\Omega)$ , and we set

$$(5.17) \quad \tilde{u}_h = \Pi_h^D \vec{u} - \text{curl}_\Gamma \vec{\zeta}_h .$$



PROOF OF PROPOSITION 5.4

The scalar function  $\operatorname{div} \Pi_h^D \vec{u}$  is equal to zero thanks to Proposition 3.4. Moreover, thanks to Lemma 4.1,  $\operatorname{curl} \vec{z}_h$  belongs to  $U_h(\Omega)$ . We deduce that  $\tilde{u}_h$  belongs also to  $U_h(\Omega)$ . Then we just have to prove that the normal component  $(\Pi_h^D \vec{u} - \operatorname{curl} \vec{z}_h) \cdot \vec{n}$  is null on  $\Gamma$ , i.e. that its integral on each face is null, thanks to Lemma 4.2. But we have

$$\begin{aligned}
 \int_k \Pi_h^D \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\gamma &= \int_k \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\gamma && \text{(cf. (3.10))} \\
 &= \int_k g \, d\gamma && \text{(cf. (5.3))} \\
 &= \int_k g_h \, d\gamma && \text{(cf. (5.7))} \\
 &= \int_k \operatorname{curl}_\Gamma \Pi z_h \, d\gamma && \text{(cf. (5.15))} \\
 &= \int_k \operatorname{curl} \vec{z}_h \cdot \vec{n} \, d\gamma && \text{(cf. Lemma 2.1) .}
 \end{aligned}$$

■

THEOREM 5.4 Let  $g, \vec{u}, g_h, \vec{z}_h, \tilde{u}_h$  be defined in Proposition 5.4. Consider  $u_h$ , represented as  $\vec{u}_h = \operatorname{curl} \vec{z}_h + \vec{v}_h$  with  $\vec{v}_h$  solution of the discrete mixed problem

$$(5.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_h \in U_h^0(\Omega), \vec{\psi}_h \in K_h(\Omega) \\ \int_\Omega \vec{v}_h \cdot \vec{w}_h \, dx - \int_\Omega \operatorname{curl} \vec{\psi}_h \cdot \vec{w}_h \, dx = 0 \quad \forall \vec{w}_h \in U_h^0 \\ \int_\Omega \vec{v}_h \cdot \operatorname{curl} \vec{\phi}_h \, dx = - \int_\Omega \operatorname{curl} \vec{z}_h \cdot \operatorname{curl} \vec{\phi}_h \, dx \quad \forall \vec{\phi}_h \in K_h \end{array} \right.$$

Then, if  $\mathcal{T}_h$  satisfies the Hypothesis 3.1, 3.2, 4.1, we have :

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma} .$$

PROOF OF THEOREM 5.4

- We consider first the solution  $\vec{v}$  of the continuous problem

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 & \Omega \\ \operatorname{curl} \vec{v} = -\operatorname{curl} \vec{\zeta}_h & \Omega \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 & \Gamma \end{cases}$$

or

$$(5.19) \quad \begin{cases} \vec{v} \in (L^2(\Omega))^3, \vec{\psi} \in W^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{w} \, dx - \int_{\Omega} \operatorname{curl} \vec{\psi} \cdot \vec{w} \, dx = 0 & \forall \vec{w} \in (L^2(\Omega))^3 \\ \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \operatorname{curl} \vec{\varphi} \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{curl} \vec{\zeta}_h \cdot \operatorname{curl} \vec{\varphi} \, dx & \forall \vec{\varphi} \in K_h(\Omega) \end{cases}$$

The field  $\vec{u} - (\vec{v} + \operatorname{curl} \vec{\zeta}_h)$  is harmonic (its divergence and curl are null) and its normal component on  $\Gamma$  is exactly  $(g - g_h)$ . Thanks to Proposition 2.9 and (5.12) we have

$$(5.20) \quad \|\vec{u} - (\vec{v} + \operatorname{curl} \vec{\zeta}_h)\|_{0,\Omega} \leq C h \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma} .$$

- We just have to establish a similar inequality for the vector  $\vec{u}_h - \vec{v} - \operatorname{curl} \vec{\zeta}_h = \vec{v}_h - \vec{v}$ . Let  $\vec{\varphi}_h$  be in  $K_h(\Omega)$ . Then  $\operatorname{curl} \vec{\varphi}_h \in (L^2(\Omega))^3$  and Theorem 2.4 (i) gives

$$(5.21) \quad \operatorname{curl} \vec{\varphi}_h = \nabla p + \operatorname{curl} \vec{\varphi}$$

with  $p \in H^1 \cap L_0^2$ ,  $\vec{\varphi} \in W^1$ . Because  $\Pi \vec{\varphi}_h = 0$  if  $\vec{\varphi}_h \in K_h(\Omega)$  we have  $\operatorname{div}_{\Gamma} \vec{\varphi}_h \times \vec{n} = 0$  and finally  $p = 0$ . We insert the function  $\vec{\varphi}$  defined in (5.21) as a test function in the second equation of (5.19). We get

$$\int_{\Omega} \vec{v} \cdot \operatorname{curl} \vec{\varphi}_h \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{curl} \vec{\zeta}_h \cdot \operatorname{curl} \vec{\varphi}_h \, dx, \quad \forall \vec{\varphi}_h \in K_h(\Omega)$$

and by difference with (5.18) we deduce thanks to Theorem 4.2

$$(5.22) \quad \int_{\Omega} (\vec{v} - \vec{v}_h) \cdot \vec{w}_h \, dx = 0 \quad \forall \vec{w}_h \in U_h^0(\Omega)$$

But we have

$$(5.23) \quad \vec{v} - \vec{w}_h = (\vec{v} + \text{rot } \zeta_h - \vec{u}) + (\vec{u} - (\text{rot } \zeta_h + \vec{w}_h))$$

We chose  $\vec{w}_h = \tilde{u}_h$  of (5.17). Thanks to (5.22) and (5.23)

$$\begin{aligned} \|\vec{v} - \vec{v}_h\|_{0,\Omega} &\leq \|\vec{v} - \tilde{u}_h\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|\vec{u} - (\vec{v} + \text{curl } \zeta_h)\|_{0,\Omega} + \|\vec{u} - \Pi_h^D \vec{u}\|_{0,\Omega} \\ &\leq C h \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + C h \|\vec{u}\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

then

$$(5.24) \quad \|\vec{v} - \vec{v}_h\|_{0,\Omega} \leq C h \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma}$$

thanks to Theorem 2.4 (i). The inequalities (5.20) and (5.24) prove the Theorem. ■

## CONCLUSION

In this paper, we have studied the discretization of a solenoidal vector field through the curl of a vector potential. We have recalled that two gauge conditions are classically prescribed for this potential, which are both written with divergence operators. We have seen in parts IV and V that these conditions have a discrete analogy in terms of trees in the graph defined by the edges of the mesh. The error estimates obtained only concern the solenoidal field because the arbitrary choice induced by the discrete gauges does not insure a priori simple  $L^2$  stability for the potential.

A direct application of this work is the numerical study of compressible flow and incompressible Navier-Stokes equations developed in Ecole Polytechnique (DUBOIS-DUPUY [17,18], ROUX [41]). This study of the numerical error order could be followed in two different fields : first to treat approximations of arbitrary order with help of the  $H(\text{curl})$  conforming elements proposed by NEDELEC [36] and more recently by BREZZI-DOUGLAS-MARINI [11] and NEDELEC [38]. On the other hand, to study more realistic physical problems of fluid dynamics like the Stokes problem in  $\mathbb{R}^3$  in  $(\vec{\psi}, \vec{\omega})$  formulation (GIRAULT-RAVIART [25], NEDELEC [37]). Finally the discrete gauge could be generalized to non simply connected domains of  $\mathbb{R}^3$ .

## REFERENCES

- [1] ADAMS R.A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] BENDALI A., *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques*, Thèse d'Etat, Paris 6 univ, Paris, 1984.
- [3] BENDALI A., *Numerical Analysis of the Exterior Boundary Value Problem for the time Harmonic Maxwell Equations by a Boundary Finite Element Method. Part 1 The Continuous Problem*, Math of Comp 43, n° 167, pp 29-46, 1984.
- [4] BENDALI A., *Part 2 The Discrete Problem*, Math of Comp 43, n° 167, pp 47-68, 1984.
- [5] BENDALI A., DOMINGUEZ J.M., GALLIC S., *A Variational Approach for the Vector Potential Formulation of the Stokes and Navier-Stokes Problems in Three Dimensional Domains*, J. of Math Anal and Appl vol. 107, n° 2, pp537-560, 1985.
- [6] BENDALI A., GALLIC S., *Formulation du système de Stokes en potentiel vecteur*, Internal Report n° 79, Centre de Math. Appl. de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1982.
- [7] BERGE C., Graphes et Hypergraphes, Dunod, Paris, 1970 (english translation North Holland, 1973).
- [8] BERNARDI C., *Méthodes d'Elements Finis Mixtes pour les Equations de Navier Stokes*, Thèse de 3ème cycle, Paris 6 univ, Paris, 1979.
- [9] BRAMBLE J.H., HILBERT S.R., *Bounds for a Class of Linear Functionals with Applications to Hermite Interpolation*, Numer. Math. 16, pp 362-369, 1971.
- [10] BREZZI F., *On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers*, Rairo R2, pp 129-151, 1974.
- [11] BREZZI F., DOUGLAS J., MARINI L.D., *Two Families of Mixed Finite Elements for Second Order Elliptic Problems*, Numer. Math. 47, pp 217-235, 1985.
- [12] CHOQUET-BRUHAT Y., Géométrie Différentielle et Systèmes Extérieurs, Dunod, Paris, 1968.
- [13] CIARLET P.G., The finite Element Method for Elliptic Problems, North Holland, Amsterdam, 1978.

- [14] COURANT R., FRIEDRICHS K.O., Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience, New York, 1948.
- [15] DE RHAM G., Variétés Différentiables, Hermann, Paris, 1955.
- [16] DOMINGUEZ J.M., Thèse de 3ème cycle, Paris 6 University, Paris, 1982.
- [17] DUBOIS F., DUPUY J.M., *A Three Dimensional Vector Potential Formulation for Solving Transonic Flows with Mixed Finite Elements in 6° International Symposium : Finite Element Methods in Flow Problems*, Antibes, France, 1986.
- [18] DUBOIS F., Thèse de l'Université de Paris 6, to appear.
- [19] DUVAUT G., LIONS J.L., Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.
- [20] EL DABAGHI F., PIRONNEAU O., *Stream Vectors in Three Dimensional Aerodynamics*, Numer. Math. 48, pp 561-589, 1986.
- [21] FOIAS C., TEMAM R., *Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationnaires et les phénomènes successifs de bifurcation*, Ann Scuola Norm Sup Pisa, S IV, vol. V, n° 1, pp 29-63, 1978.
- [22] FRIEDRICHS K.O., *Differential Forms on Riemannian Manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. 8, pp 551-590, 1955.
- [23] GEORGESCU V., *Some Boundary Value Problems for Differential Forms on Compact Riemannian Manifolds*, Ann di Math Pura et Appl., série 4, 122, pp 159-198, 1979.
- [24] GERMAIN P., MULLER P., Introduction à la mécanique des milieux continus, Masson, Paris, 1980.
- [25] GIRAULT V., RAVIART P.A., Finite Element Methods for Navier Stokes Equations. Theory and Applications, Springer Verlag, Berlin, 1986.
- [26] GLIMM J., Personal communication, 1986.
- [27] GUSTAFSON K., HARTMAN R., *Divergence Free Bases for Finite Element Schemes in Hydrodynamics*, SIAM J. Numer. Anal., vol 20 n° 4, pp 697-721, 1983.
- [28] HECHT F., *Construction d'une base de fonctions  $P_1$  non conforme à divergence nulle dans  $\mathbb{R}^3$* , RAIRO Analyse Numérique vol. 15, pp 315-341, 1980.
- [29] JACKSON J.D., Classical Electrodynamics, John Wiley & sons, New York, 1962.

- [30] LENOIR M., *Optimal Isoparametric Finite Elements and Error Estimates for Domains Involving Curved Boundaries*, SIAM J. Numer. Anal., vol 23 n° 3, pp 562-580, 1986.
- [31] LIONS J.L., MAGENES E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol 1, Dunod, Paris, 1968.
- [32] MASSEY W.S., *Algebraic Topology : an Introduction*, Harcourt, Brace & World, Inc, New York, 1967.
- [33] NEDELEC J.C., *Curved Finite Element Methods for the Solution of Singular Integral Equations on Surfaces in  $\mathbb{R}^3$* , Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engineering 8, pp 61-80, 1976.
- [34] NEDELEC J.C., *Approximation des équations intégrales en mécanique et en physique*, Cours CEA-EDF-INRIA, Paris, 1977.
- [35] NEDELEC J.C., *Computation of Eddy Currents on a Surface in  $\mathbb{R}^3$  by Finite Element Methods*, SIAM J. Numer. Anal., vol 15, pp 580-594, 1978.
- [36] NEDELEC J.C., *Mixed Finite Elements in  $\mathbb{R}^3$* , Numer. Math. 35, pp 315-341, 1980.
- [37] NEDELEC J.C., *Eléments finis mixtes incompressibles pour l'équation de Stokes dans  $\mathbb{R}^3$* , Numer. Math. 39, pp 97-112, 1982.
- [38] NEDELEC J.C., *A New Family of Mixed Finite Elements in  $\mathbb{R}^3$* , Internal Report n° 132, Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1985.
- [39] NEDELEC J.C., *A New Family of Mixed Finite Elements in  $\mathbb{R}^3$* , Numer. Math. 50, pp 57-81, 1986.
- [40] RAVIART P.A., THOMAS J.M., *A Mixed Finite Element Method for Second Order Elliptic Problems*, in Lect. Notes in Math. n° 606, Springer Verlag, Berlin, 1977.
- [41] ROUX F.X.; Lecture at Paris 6 University, Paris, march 1984.
- [42] SCOTT R., *Interpolated Boundary Conditions in the Finite Element Method*, SIAM J Numer Anal, vol 12, n° 3, pp 404-427, 1975.
- [43] TEMAM R., *Navier Stokes Equations*, North Holland, Amsterdam, 1977.
- [44] TREVES F., *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, vol 2, Plenum Press, New York, 1980.
- [45] ZLAMAL M., *Curved Elements in the Finite Element Method I*, SIAM J, Numer. Anal, vol 10, n° 1, pp 229-240, 1973.
- [46] ZLAMAL M., *Curved Elements in the Finite Element Method II*, SIAM J, Numer. Anal, vol 11, n° 2, pp 347-362, 1974.

## Chapitre 3

Représentation de champs de vecteurs solénoïdaux  
de  $\mathbb{R}^3$  par un potentiel vecteur discret :  
Résolution numérique d' un problème non-linéaire .



## I - GENERALITES

Nous nous proposons dans ce chapitre de décrire avec précision la mise en oeuvre numérique de l'élément fini prismique conforme dans  $H(\text{rot})$  introduit par NEDELEC [19,20], pour l'étude d'un écoulement compressible dans une tuyère. Ce travail a été présenté dans [5] en commun avec J.M. Dupuy, qui s'intéressait au problème extérieur (aile NACA 12) à l'aide de l'élément fini tétraédrique de degré 1 (voir aussi DUPUY [8]).

Un fluide parfait compressible stationnaire en évolution isentropique et isenthalpique est complètement décrit par son champ de vitesses  $\vec{u}$  et la densité  $\rho$  qui vérifient (cf. Chapitre 1) :

$$(1.1) \quad \text{div } \rho \vec{u} = 0 \quad \Omega$$

$$(1.2) \quad \text{rot } \vec{u} = 0 \quad \Omega$$

$$(1.3) \quad \rho^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 (1 - |\vec{u}|^2) \quad \Omega$$

pour un nombre de Mach de référence  $M_0$ , et un rapport de chaleurs spécifiques  $\gamma$  ( $\gamma=1,4$  dans les calculs). Nous avons choisi des conditions aux limites du type flux de masse imposé sur la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ .

$$(1.4) \quad \rho \vec{u} \cdot \vec{n} = g \quad \text{sur } \Gamma$$

On décompose la frontière  $\Gamma$  en trois sous ensembles disjoints  $\Gamma_0, \Gamma_e, \Gamma_s$  où le flux  $g$  est respectivement nul, négatif, positif (figure 1) :

$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_{\text{entrée}} \cup \Gamma_{\text{sortie}}$ . Nous avons pris comme valeur numérique :

$$(1.5) \quad g \equiv -1 \quad \text{sur } \Gamma_e, \quad g \equiv 1 \quad \text{sur } \Gamma_s.$$

Si l'écoulement à l'entrée et à la sortie est normal à la frontière, le nombre de Mach peut alors valoir exactement  $M_0$ , mais pas obligatoirement ; lorsque  $M_0 < 1$  pour fixer les idées, (1.4) et (1.5) autorisent l'existence d'écoulements supersoniques (cf.  $\check{N}E\check{C}A\check{S}$  [18] par exemple).

Le flux de masse est représenté par un potentiel vecteur  $\vec{\psi} : \rho \vec{u} = \text{rot} \vec{\psi}$  qui est discrétisé dans un espace vectoriel de la forme  $Y_h(\Omega) \oplus K_h(\Omega)$ , définis au Chapitre 2 (Définitions 5.6 et 4.5 respectivement).

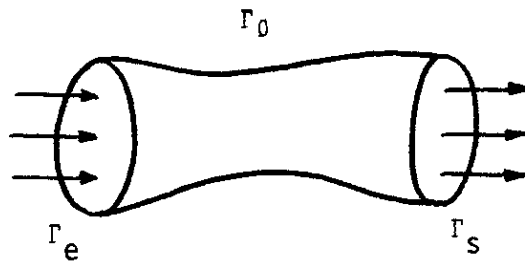


Figure 1

La densité  $\rho$  est choisie constante dans chaque élément fini. Nous avons mis en oeuvre un algorithme de point fixe, qui converge toujours si la solution est partout subsonique (GELDER [10], CIAVALDINI [3]).

ALGORITHME

(i) Initialisation

- Calcul de l'unique vecteur  $\bar{\psi} \in Y_h(\Omega)$  tel que

$$(1.6) \quad \text{rot}_{\Gamma} \Pi \bar{\psi} = g \quad \text{sur } \Gamma.$$

Le problème (1.6) est aussi appelé "problème de Laplace-Beltrami" dans la suite.

- $\rho^{(0)} \equiv 1$  .

(ii) Itération ;  $\rho^{(n)}$  est supposé connu.

- Résolution du problème discret

$$(1.7) \quad \begin{cases} \vec{\psi}^{(n+1)} \in K_h(\Omega) \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^{(n)}} \text{rot } \vec{\psi}^{(n+1)} \cdot \text{rot } \vec{\varphi} \, dx = - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^{(n)}} \text{rot } \vec{\psi} \cdot \text{rot } \vec{\varphi} \, dx, \forall \vec{\varphi} \in K_h \end{cases}$$

- Calcul d'une moyenne du champ de vitesse dans chaque élément fini  $K$  :

$$|\vec{u}_K^{(n+1)}|^2 = \frac{\int_K |\text{rot}(\vec{\psi}^{(n+1)} + \vec{\psi})|^2 \, dx}{\int_K \rho^{(n)} \, dx}$$

- Calcul de la densité  $\rho^{(n+1)}$  dans l'élément  $K$  grâce au Théorème de Bernoulli :

$$\rho_K^{(n+1)} = \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 (1 - |\vec{u}_K^{(n+1)}|^2) \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

(iii) Test de l'erreur  $\varepsilon_{n+1} \equiv \left\| \frac{\rho^{(n+1)} - \rho^{(n)}}{\rho^{(n)}} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$

- $\varepsilon_{n+1} \geq \varepsilon$  : retour en (ii)
- $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon$  : fin de calcul.

## II - DESCRIPTION DU MAILLAGE

### 1) GENERATION DES SOMMETS

Nous nous sommes bornés à un test simple qui consiste à recalculer à l'aide d'un code tridimensionnel un cas de calcul purement bidimensionnel. Nous avons choisi le "canal du GAMM" proposé par RIZZI et VIVIAND [22] : un profil circulaire d'épaisseur relative 0,42 est placé dans une veine de hauteur OA égale à 2,073 fois la longueur du profil. Le maillage est formé de quadrangles, comporte 72 points le long de Oz et 21 le long de OA. De plus, tous ses sommets sont alignés le long de parallèles à la droite OC (figure 2). Nous donnons à ce canal une épaisseur Y dans la direction Oy et nous maillons la section d'entrée  $\Gamma_e \equiv OADE$  du plan xOy à l'aide de triangles. Puis nous engendrons une famille de points dans chaque plan parallèle à la face d'entrée, associé à une ligne  $z = cste$  du maillage bidimensionnel initial, par une affinité selon Ox de la face  $\Gamma_e$ . De cette façon, nous avons construit un maillage tridimensionnel de l'intérieur de OABCDEFG par des prismes (figure 3). Comme nous avons choisi un maillage de la face  $\Gamma_e$  régulier (bien que triangulaire), on retrouve dans chaque plan  $y = cste$  une trace du maillage quadrangulaire proposé au GAMM Workshop [22]. Le choix des triangles pour le maillage de OADE, donc des prismes pour le maillage tridimensionnel, a été motivé par la possibilité de mailler facilement des figures de révolution autour de Oz, en remplaçant le rectangle OADE par un cercle de centre O, qu'on peut alors mailler par une triangulation non structurée.

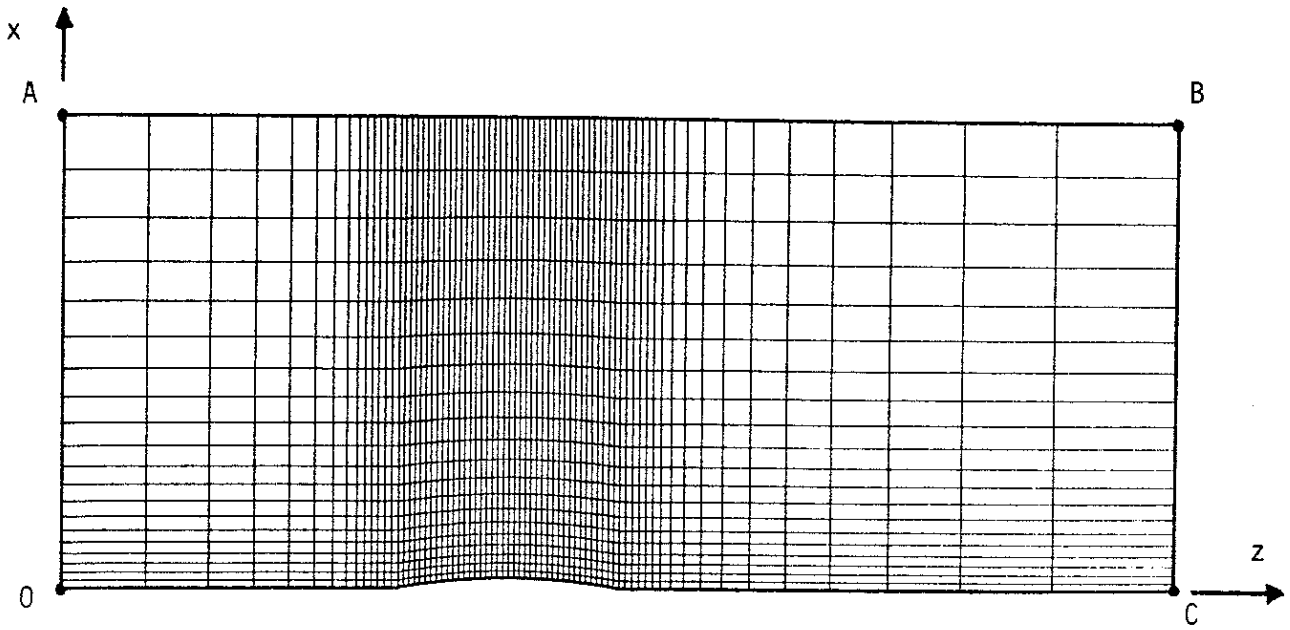


Figure 2 Maillage du canal du GAMM

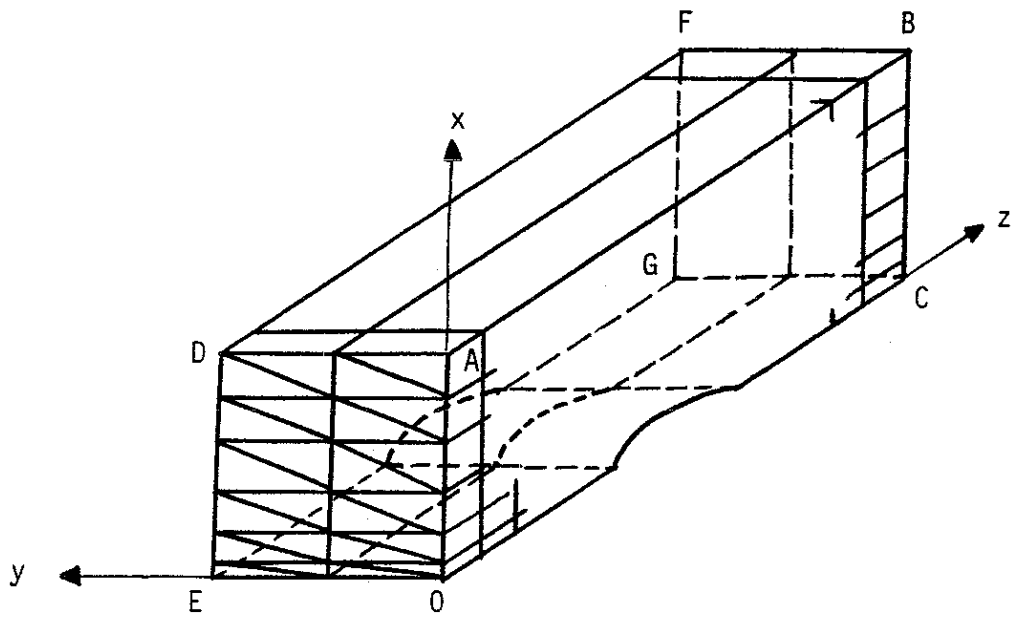


Figure 3

Sur un plan purement informatique, l'aspect déductif de la structure selon Oz permet de ne stocker en mémoire que les informations de topologie du maillage triangulaire ; ses arêtes permettent de repérer l'ensemble des arêtes des plans  $z = \text{cste}$ , et ses sommets sont associés aux arêtes (presque) parallèles à l'axe Oz. Pour la génération des degrés de liberté, nous avons mis en oeuvre le logiciel MEFISTO [21] (développé à l'Université Paris 6) et plus précisément l'interpolation TRIA MT 10. De cette façon, seuls des fichiers de petite taille sont consacrés au stockage de la topologie semi-déductive du maillage tridimensionnel.

## 2) MISE EN OEUVRE DE LA CONDITION DE JAUGE

Comme nous l'avons mis en évidence au Chapitre 2, les espaces d'approximation  $Y_h(\Omega)$  et  $K_h(\Omega)$ , du potentiel vecteur sont liés au choix d'un arbre surfacique  $T_h(\Gamma)$  et d'un "arbre" intérieur  $T_h(\Omega)$  parmi les arêtes du maillage. Nous rappelons que pour une arête  $a$  appartenant à  $T_h(\Gamma)$  ou à  $T_h(\Omega)$ , le degré de liberté associé  $\sigma_a$ ,

$$(2.1) \quad \sigma_a(\vec{\psi}) = \int_a \vec{\psi} \cdot d\vec{l}$$

est nul a priori.

La construction de l'arbre  $T_h(\Gamma)$  sur la frontière est intimement reliée à la condition limite (1.4), comme l'a remarqué F.X. ROUX [23]: la fonction  $g$  est identiquement nulle sur toute la partie  $\Gamma_0$  de la frontière, donc on choisit de faire passer  $T_h(\Gamma)$  par un contour fermé  $\gamma$  (à l'exception d'une arête) qui s'appuie sur le bord de  $\Gamma_0$  et enveloppe toute cette surface à l'exception d'une bande permettant d'aller de  $\Gamma_e$  à  $\Gamma_s$  (cf. figure 4

Dans ces conditions, tous les degrés de liberté relatifs à des arêtes intérieures à  $\gamma$  sont a priori nuls puisque  $\gamma$  est le bord d'une surface  $\Sigma_\gamma$  où  $g$  est nulle. Nous posons  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \Sigma_\gamma$  et il suffit de construire  $T_h(\Gamma)$  parmi l'ensemble des arêtes du maillage situées sur la portion  $\tilde{\Gamma}$  de la frontière. De façon pratique, on retire toutes les arêtes de  $\Gamma_0$  sauf une famille reliant  $\Gamma_e$  à  $\Gamma_s$  (arêtes en double trait sur la figure 4). Nous remarquons que pour chacune de ces arêtes, les degrés de liberté sont égaux (au signe près) au débit total traversant la tuyère (il suffit d'intégrer  $\vec{\psi}$  le long du chemin OADE qui limite la face d'entrée par exemple). Ensuite on retire un arbre maximal dans l'ensemble des arêtes internes au maillage de la face OADE, et on enlève enfin une dernière arête liant cet arbre à  $\Gamma_0$ . On procède de même pour la face de sortie  $\Gamma_s$  (arêtes en trait fort sur la figure 4).

Les arêtes engendrant  $Y_h(\Omega)$  une fois repérées, le problème de Laplace-Beltrami est facile à résoudre. Il y a autant d'équations que d'éléments de surface  $k$  sur  $\tilde{\Gamma}$  :

$$(2.2) \quad \sum_{a \subset \partial k} \sigma_a(\bar{\psi}) = \int_k g \, d\gamma \quad \forall k \in \tilde{\Gamma}$$

et (2.2) se résout par substitution de proche en proche (cf. figure 4).

Pour construire l'espace  $K_h(\Omega)$ , on retire à l'ensemble des arêtes qui ne sont pas sur la frontière un arbre interne  $T_h(\overset{\circ}{\Omega})$  qu'on relie à  $\Gamma_0$  par une arête  $T_h(\Gamma)$  (cf. Chapitre 2, Définitions 4.4 et 4.5). On enlève donc, pour chaque face située dans un plan du maillage  $z = \text{cste}$ , un arbre parmi les arêtes qui ne touchent pas  $\Gamma_0$ , puis on joint ces plans entre eux par des arêtes parallèles à  $Oz$ , et l'ensemble  $T_h(\overset{\circ}{\Omega})$  ainsi obtenu est relié à  $\Gamma_0$  (cf. figure 5).

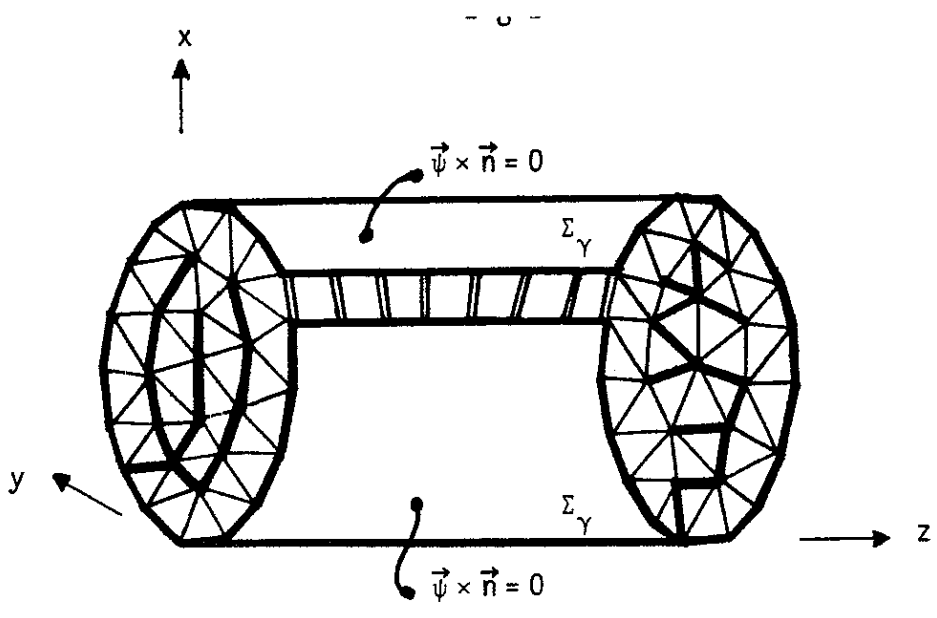


Figure 4 : Arbre surfacique sur  $\tilde{\Gamma}$

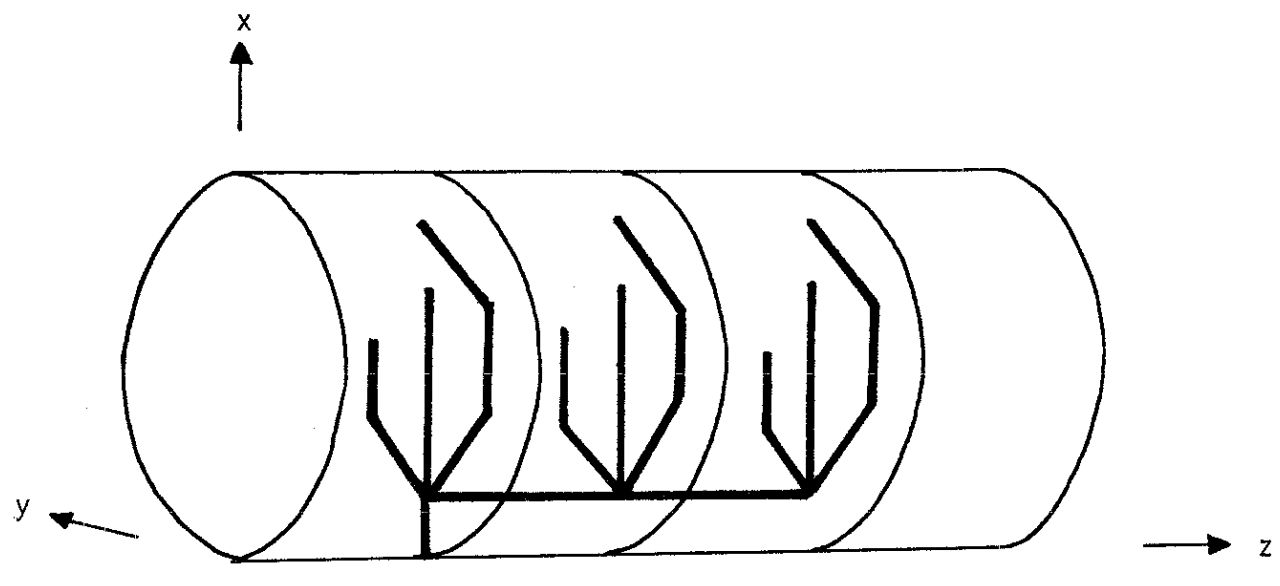


Figure 5 : Arbre interne



### III - CALCUL DES MATRICES ELEMENTAIRES

#### 1) PRISME DROIT

Nous étudions le système linéaire (1.7) posé dans l'espace  $K_h(\Omega)$ . Une base de cet espace est formée par les arêtes du maillage qui n'appartiennent ni à la frontière, ni à  $T_h(\Omega)$ . Nous rappelons d'abord le calcul des fonctions de base dans l'élément de référence  $\hat{K}$  puis nous proposons un calcul numérique de l'élément de matrice

$$(3.1) \quad a_{ij} = \int_K \text{rot } \vec{\varphi}_i \cdot \text{rot } \vec{\varphi}_j \, dx$$

où  $K$  désigne un prisme quelconque de  $\mathbf{R}^3$  et  $\vec{\varphi}_i$  la fonction de base associée à la  $i^{\text{e}}$  arête de  $K$ .

L'élément fini  $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$  que nous avons utilisé est décrit dans NEDELEC [20] :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \hat{K} &= \{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}), 0 \leq \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \leq 1, \hat{x} + \hat{y} \leq 1\} \\ \hat{\Sigma} &= \left\{ \sigma_a(\vec{\varphi}) \equiv \int_a \vec{\varphi} \cdot d\vec{l}, a \text{ arête de } \hat{K}, \text{ orientée selon la figure 6} \right\} \\ \hat{P} &= \left\{ \vec{\varphi} : \hat{K} \rightarrow \mathbf{R}^3, \exists \xi \in (P_1(z))^2, \exists \eta \in P_1(z), \exists \zeta \in P_1(x, y) / \right. \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad \left. \vec{\varphi}(\vec{x}) = \xi + \eta \vec{k} \times \vec{x} + \zeta \vec{k} \right\}$$

où  $\vec{k}$  désigne un vecteur unitaire selon Oz. On peut réécrire (3.3) sous la forme :

$$\vec{\varphi}(x, y, z) = \underbrace{\begin{pmatrix} a + cz \\ b + dz \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{\xi}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -(e + fz)y \\ (e + fz)x \\ 0 \end{pmatrix}}_{\eta \vec{k} \times \vec{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha + \beta x + \gamma y \end{pmatrix}}_{\zeta \vec{k}}$$

Nous déterminons d'abord la base  $\hat{\varphi}_i$  de  $\hat{P}$  adaptée à l'élément fini  $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$  étudié, i.e. telle que

$$(3.4) \quad \sigma_{a_i}(\hat{\varphi}_j) = \delta_{ij} \quad ; \quad i, j = 1, \dots, 9$$

puis nous calculons  $a_{ij}$ . Pour exprimer les vecteurs  $\vec{r} \otimes \hat{\varphi}_i$ , nous utilisons la base  $(\hat{p}_j)$  de l'espace  $\hat{P}$  liée naturellement à l'écriture

(3.3) :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \hat{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \hat{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \hat{p}_3 = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \hat{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \hat{p}_5 = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} & \hat{p}_6 = \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ 0 \end{pmatrix} & \\ \hat{p}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \hat{p}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} & \hat{p}_9 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} & \end{array} \right.$$

et  $M_{ij}$  la matrice de changement de base :

$$\hat{p}_j = \sum_{k=1}^9 M_{kj} \hat{\varphi}_k \quad , \quad \hat{\varphi}_i = \sum_{l=1}^9 (M^{-1})_{li} \hat{p}_l$$

donc (3.4) se réécrit :  $M_{ij} = \int_{a_i} \hat{p}_j \cdot \vec{d}\vec{l}$  et il vient clairement :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, le calcul de  $\vec{rot} \hat{p}_j$  est élémentaire. On pose  $(\vec{rot} \hat{p}_j)_\alpha = R_{j\alpha}$  ( $j=1,-,9; \alpha=1,2,3$ ). La matrice  $R_{j\alpha}$  dépend du point  $(x,y,z) \in \hat{K}$  et vaut :

$${}^tR = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -y & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, le rotationnel des fonctions de base  $\hat{\varphi}_i$  est calculé par  $(\vec{rot} \hat{\varphi}_i)_\alpha = P_{i\alpha}$  avec  $P = {}^tM^{-1} \cdot R$  :

$${}^tP = \begin{pmatrix} x & x & x-1 & -x & -x & 1-x & -1 & 0 & 1 \\ y-1 & y & y & 1-y & -y & -y & 1 & -1 & 0 \\ 2-2z & 2-2z & 2-2z & 2z & 2z & 2z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'évaluation numérique de  $a_{ij}$  grâce à la relation (3.1) se réduit alors à une simple intégration de polynômes sur  $\hat{K}$ .

## 2) PRISME QUELCONQUE

Dans le cas où l'élément  $K$  est un prisme de sommets  $A_1, -, A_6$ , on le suppose image de  $\hat{K}$  par une application  $F$  biaffine (ZIENKIEWICZ [26] et figure 7) ;

$$(3.5) \quad \hat{K} \ni (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \mapsto F(\hat{x}) = \left[ (1 - \hat{x} - \hat{y})A_1 + \hat{x} A_2 + \hat{y} A_3 \right] (1 - \hat{z}) + \left[ (1 - \hat{x} - \hat{y})A_4 + \hat{x} A_5 + \hat{y} A_6 \right] \hat{z}$$

Les degrés de liberté  $\Sigma$  sur  $K$  sont définis par des intégrales sur chaque arête (relations (3.2)), et les fonctions d'interpolation sont de la forme

$$(3.6) \quad \vec{\varphi}(x) = {}^t dF(\hat{x})^{-1} \cdot \hat{\varphi}(\hat{x}), \hat{\varphi} \in \hat{P}, x = F(\hat{x}) .$$

(cf. Chapitre 2, Définition 3.5).

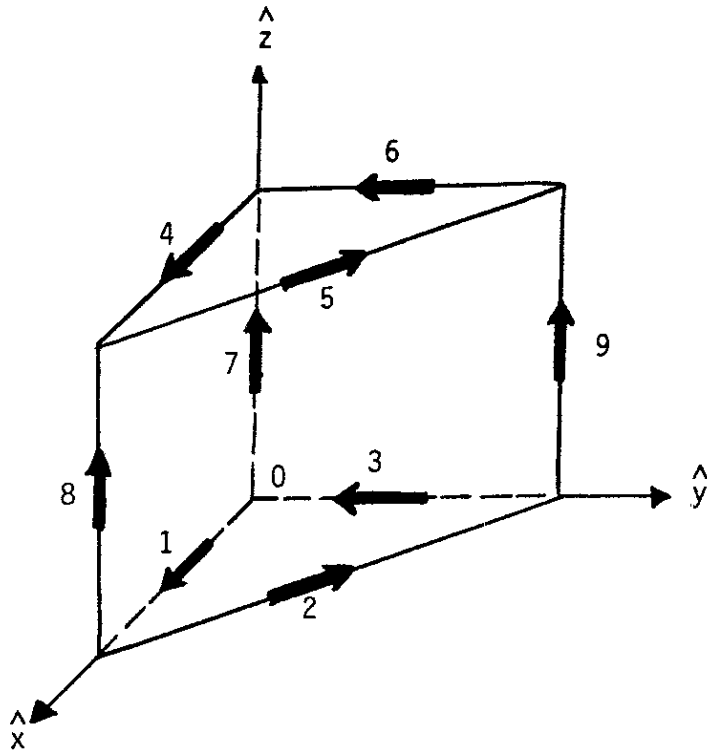


Figure 6 : prisme de référence  $\hat{K}$

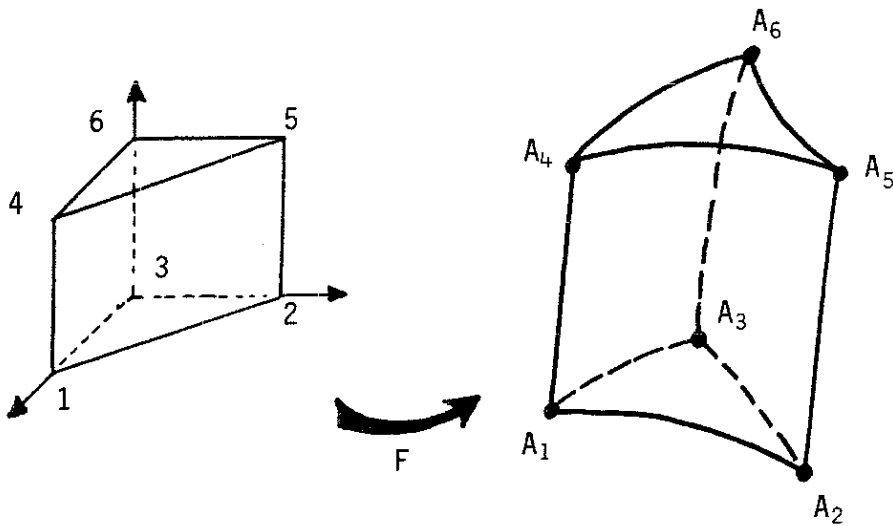


Figure 7 : Prisme curviligne

On note  $\vec{\varphi}^i \equiv \vec{\varphi}_i$  l'image par (3.6) des fonctions de base  $\hat{\varphi}_i$  définies par (3.4). Pour une fonction vectorielle  $\vec{\varphi}$  quelconque, on pose :

$$(3.7) \quad \nabla \times \vec{\varphi}_{jk} = \sum_k \varepsilon_{ijk} (\text{rot } \vec{\varphi})_k$$

avec  $\varepsilon_{ijk}$  complètement antisymétrique (voir GERMAIN-MULLER [11] par exemple). On a alors aisément :

$$(3.8) \quad a_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{k,l=1}^3 \int_K \left\{ (\nabla \times \vec{\varphi}^i)_{kl} (\nabla \times \vec{\varphi}^j)_{kl} - (\nabla \times \vec{\varphi}^i)_{kl} (\nabla \times \vec{\varphi}^j)_{lk} \right\} dx$$

Les deux termes de (3.8) sont égaux par antisymétrie de (3.7). Comme nous avons (Chapitre 2, Relation (3.33)) :

$$(\nabla \times \vec{\varphi})_{kl} = \sum_{m,n} dF_{mk}^{-1} (\nabla \times \hat{\varphi})_{mn} dF_{nl}^{-1} ,$$

nous en déduisons

$$\sum_{k,l} \nabla \times \vec{\varphi}_{kl}^i \cdot \nabla \times \vec{\varphi}_{lk}^j = \sum_{klmnpq} dF_{mk}^{-1} \cdot \nabla \times \hat{\varphi}_{mn}^i \cdot dF_{nl}^{-1} \cdot dF_{pl}^{-1} \cdot \nabla \times \hat{\varphi}_{pq}^j \cdot dF_{qk}^{-1}$$

soit, après un changement de variable (3.5) dans l'intégration sur  $K$  :

$$(3.9) \quad a_{ij} = -\frac{1}{2} \int_{\hat{K}} \text{tr} \left\{ D^2G \cdot (\nabla \times \hat{\varphi}_i) \cdot D^2G \cdot (\nabla \times \hat{\varphi}_j) \right\} J(\hat{x}) d\hat{x}$$

avec  $D^2G = dF^{-1} \cdot {}^t dF^{-1}$  et  $J(\hat{x}) = \det(dF(\hat{x}))$ . Il suffit de poser :

$$Q^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour réécrire (3.9) sous la forme :

$$a_{ij} = -\frac{1}{2} \int_{\hat{K}} \sum_{\alpha, \beta} P_{i\alpha} \text{tr} \left\{ D^2G \cdot Q^\alpha \cdot D^2G \cdot Q^\beta \right\} P_{j\beta} J(\hat{x}) d\hat{x} .$$

Cette dernière intégrale a été évaluée à l'aide d'une formule de quadrature comprenant 30 points dans l'élément de référence  $\hat{K}$  : 5 points sur  $[0,1]$  (formules de Gauss, de degré 9, voir STROUD [25] par exemple), par 6 points dans le triangle unité ; nous rappelons les formules de Hammer de degré 4 utilisées dans ce dernier cas (cf. DHATT-TOUZO [4] par exemple et la figure 8) :

$$\iint_{\{0 \leq \hat{x} \leq 1, 0 \leq \hat{y} \leq 1, \hat{x} + \hat{y} \leq 1\}} f(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} \approx \sum_{j=1}^6 w_j f(\hat{x}_j, \hat{y}_j)$$

avec  $w_j, \hat{x}_j, \hat{y}_j$  donnés par :

|                         | $\hat{x}_j$    | $\hat{y}_j$    | $\hat{w}_j$         |
|-------------------------|----------------|----------------|---------------------|
| $a = 0,445948490915965$ | a<br>1-2a<br>a | a<br>a<br>1-2a | } 0,111690794839005 |
| $b = 0,091576213509771$ | b<br>1-2b<br>b | b<br>b<br>1-2b | } 0,054975871827661 |

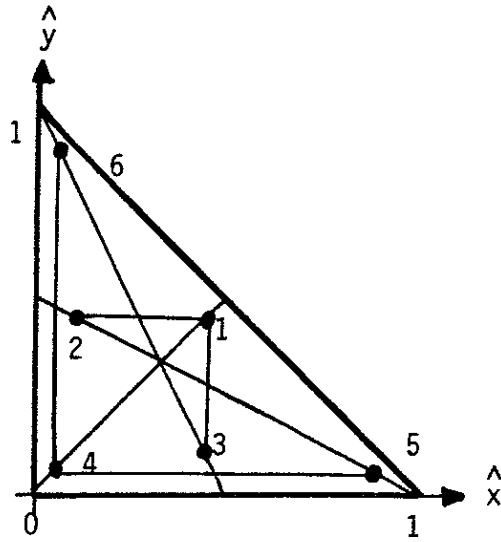


Figure 8

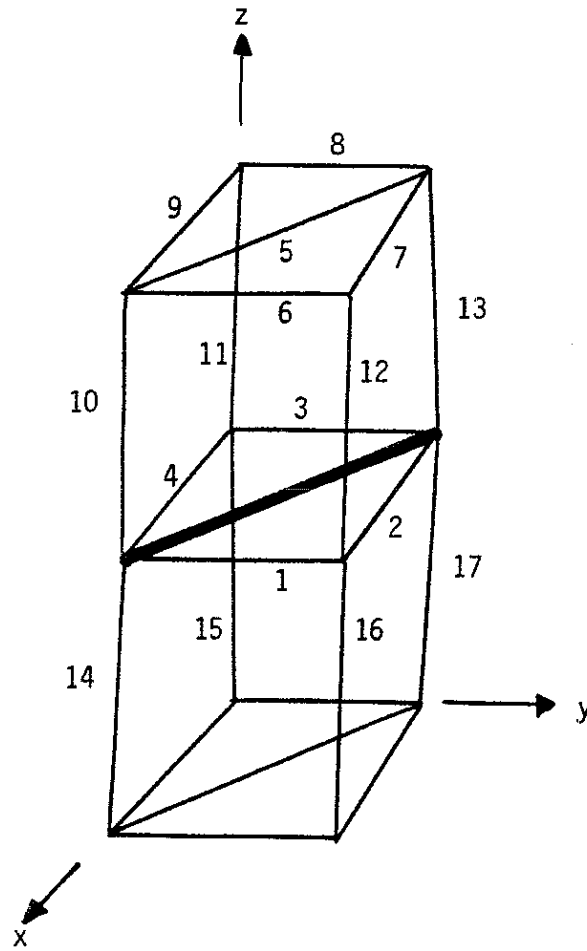


Figure 9

## IV - RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE

### 1) STOCKAGE DE LA MATRICE

La matrice  $A$  du système linéaire (1.7) est symétrique et définie positive puisque par construction l'application rotationnel est injective dans l'espace  $K_h(\Omega)$ . Pour le stockage de la matrice, d'ordre  $N \times N$ , on repère, pour chaque fonction de base (globale) de  $K_h(\Omega)$  associée à l'arête numéro  $i$ , l'ensemble des arêtes de numéro  $j > i$  voisines de l'arête  $i$ , c'est-à-dire telles que  $a_{ij} \neq 0$  a priori. On construit de cette façon un pointeur  $NVOIS(.,.)$  à double entrée, qui associe au couple  $(i,k)$  le numéro d'arête de la  $k^{\text{ème}}$  voisine de l'arête  $i$ . Ce tableau est de dimension  $N \times 17$  puisqu'avec la numérotation utilisée, une arête donnée a au plus 17 voisins (cf. figure 9).

L'assemblage de la matrice  $A$  doit être effectué avec attention, puisque c'est l'orientation globale des arêtes qui importe, alors que le calcul élémentaire du paragraphe 3 fait intervenir les orientations particulières de l'élément de référence.

On stocke ensuite l'élément  $a_{ij}$  pour  $j$   $k^{\text{ème}}$  voisin de l'arête  $i$  dans un tableau réel  $N \times 18$  (compte tenu des éléments diagonaux). De cette façon, un produit du type  $y = A.x$  peut s'écrire :

$$\begin{array}{l} \text{Initialisation ; boucle sur } i : 1 \rightarrow N \\ \quad \left[ \begin{array}{l} y(i) = A(i,18) * x(i) \end{array} \right. \\ \text{boucle sur les voisins ; } k : 1 \rightarrow 17 \\ \quad \left[ \begin{array}{l} \text{boucle sur les arêtes } i : 1 \rightarrow N \\ \quad \left[ \begin{array}{l} (4.1) \quad y(i) \leftarrow y(i) + A(i,k) * x(NVOIS(i,k)) \end{array} \right. \\ \quad \text{boucle sur les arêtes } i : 1 \rightarrow N \\ \quad \left[ \begin{array}{l} (4.2) \quad y(NVOIS(i,k)) \leftarrow y(NVOIS(i,k)) + A(i,k) * x(i) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$



La boucle (4.1) se calcule de façon vectorielle grâce au sous programme GATHER (cf. CCVR [2]) et la boucle (4.2) peut se vectoriser grâce au SCATTER lorsque l'application  $i \mapsto \text{NVOIS}(i,k)$  est injective (DUPUY [7]). Nous avons vectorisé la première boucle (4.1), et gagné ainsi un facteur 3 en temps calcul sur l'ensemble du programme.

## 2) ALGORITHME DU GRADIENT CONJUGUE

La résolution du système linéaire  $Ax=b$  est effectuée grâce à la méthode du gradient conjugué préconditionné (HESTENES-STIEFEL [13], EVANS [9], AXELSSON [1]) décrit aussi dans GOLUB-MEURANT [12] et LASCAUX-THEODOR [16]. Nous la rappelons brièvement : on se donne une matrice  $S$  de préconditionnement telle que la résolution du système linéaire  $S.x=b$  soit faible.

### ALGORITHME

(i) *Initialisation*

$$x^0 \in \mathbb{R}^N, g^0 = Ax^0 - b, w^0 = S^{-1} g^0, v^0 = w^0, z^0 = Ax^0.$$

(ii) *Itération :  $x^n, g^n, w^n, v^n, w^n$  sont connus*

$$(4.3) \quad z^{n+1} = A.w^n$$

$$\rho_{n+1} = - \frac{(g^n, w^n)}{(z^{n+1}, w^n)}$$

$$x^{n+1} = x^n + \rho_{n+1} w^n$$

$$g^{n+1} = A.x^{n+1} - b = g^n + \rho_{n+1} z^{n+1}$$

$$(4.4) \quad v^{n+1} = S^{-1} g^{n+1}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{(v^{n+1}, g^{n+1})}{(w^n, g^n)}$$

$$w^{n+1} = S^{-1} g^{n+1} + \gamma_{n+1} w^n = v^{n+1} + \gamma_{n+1} w^n$$

(iii) Test de fin : on compare  $\|g^{n+1}\|_2 / \|g\|_2$  à  $\varepsilon > 0$  donné d'avance.

Nous observons qu'avec cette écriture de l'algorithme, un seul produit du type matrice par vecteur est nécessaire (équation (4.3)) ainsi qu'une seule résolution du système de préconditionnement (4.4). Nous avons successivement envisagé trois préconditionneurs classiques, classés par difficulté croissante de mise en oeuvre :

$$(4.5) \quad S = \text{diag}(A)$$

$$(4.6) \quad S = \text{préconditionneur SSOR}$$

$$(4.7) \quad S = \text{décomposée incomplète de Cholesky}$$

qui ont été testés dans un cas linéaire, pour une simple boîte cubique au lieu du GAMM channel, avec un test d'arrêt à  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Tout d'abord, il est indispensable de faire les calculs avec un processeur 64 bits.

Le préconditionneur diagonal engendre en général de nombreuses itérations du gradient conjugué, mais la résolution de (4.4) pour ce choix (4.5) est très économique car naturellement vectorielle. Son emploi s'est avéré assez satisfaisant. Le choix (4.6), plus précisément

$$S = \frac{1}{2-\omega} \left( L + \frac{\Delta}{\omega} \right) \left( \frac{\Delta}{\omega} \right)^{-1} \left( \frac{\Delta}{\omega} + {}^tL \right)$$

avec  $A = L + \Delta + {}^tL$ ,  $L$  triangulaire inférieure à diagonale nulle et  $\omega = 1.5$ , est une variante de la méthode de STONE [24] et DUPONT-KENDALL-RACHFORD [6]

qui conduit à un nombre d'itérations plus faible (trois fois moins typiquement) mais moins économique qu'avec le choix diagonal, à cause des descentes-remontées pour résoudre (4.4). Les tests effectués nous ont montré qu'en temps machine, elle est plus économique d'environ 5 % par rapport au choix (4.5).

La décomposition incomplète de Cholesky (4.7) (MEIJERINK-VAN DER VORST [17], KERSHAW [15]) a été décevante, puisqu'au cours de la décomposition, nous avons parfois obtenu des pivots négatifs. Ceci n'est en fait pas étonnant, car rien n'assure que  $A$  soit une  $M$ -matrice, condition suffisante de construction de l'algorithme ([17]). Par ailleurs, même lorsqu'aucun pivot négatif n'apparaît, le temps CPU reste comparable à celui obtenu pour le préconditionneur SSOR, qui a finalement été retenu pour les calculs non-linéaires.

### 3) INFLUENCE DE L'ARBRE INTERNE

La dépendance a priori du système linéaire à résoudre avec le choix de l'arbre interne  $T_h(\Omega)$  nous a conduit à étudier son influence pour le même cas test que précédemment (problème linéaire, boîte cubique), avec un préconditionnement SSOR. Le faible nombre de degrés de liberté pour ce test ( $N = 249$ ) nous a permis de calculer facilement toutes les valeurs propres de la matrice  $A$ . Nous avons porté figure 10 la forme de l'arbre utilisé (cf. aussi figure 5), le conditionnement  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$  de  $A$ , ainsi que le nombre d'itérations du gradient conjugué nécessaires pour atteindre un résidu  $\epsilon = 10^{-4}$ . Aucune conclusion simple ne se dégage : un choix d'arbre par arêtes verticales (tests n°s 2 à 7) donne les meilleurs comme les

pires conditionnements, et le simple changement d'une seule arête (tests 3,4,5) peut changer de façon sensible le conditionnement comme le nombre d'itérations ; un choix d'arbre qui privilégie les arêtes horizontales (tests 1,8,9) a donné les meilleures performances, malgré la forte variation du conditionnement. Comme nous n'avons pas étudié de façon plus précise la variation du spectre de  $A$  avec l'arbre  $T_h(\Omega)$  (JENNINGS [14]), nous avons conservé notre choix initial (test 1 en figure 5), en renforçant la précision lors des calculs non linéaires ( $\epsilon = 10^{-6}$  à  $10^{-8}$ ).

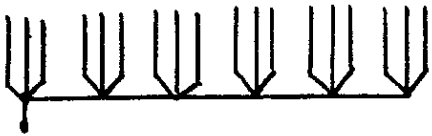
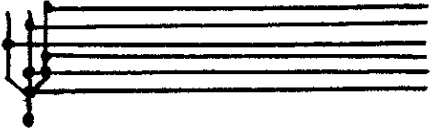

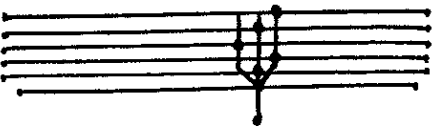

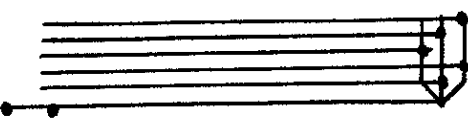
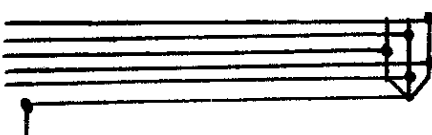
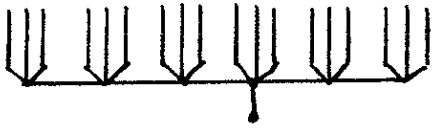
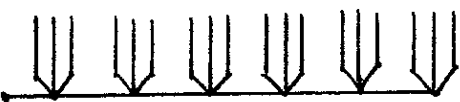
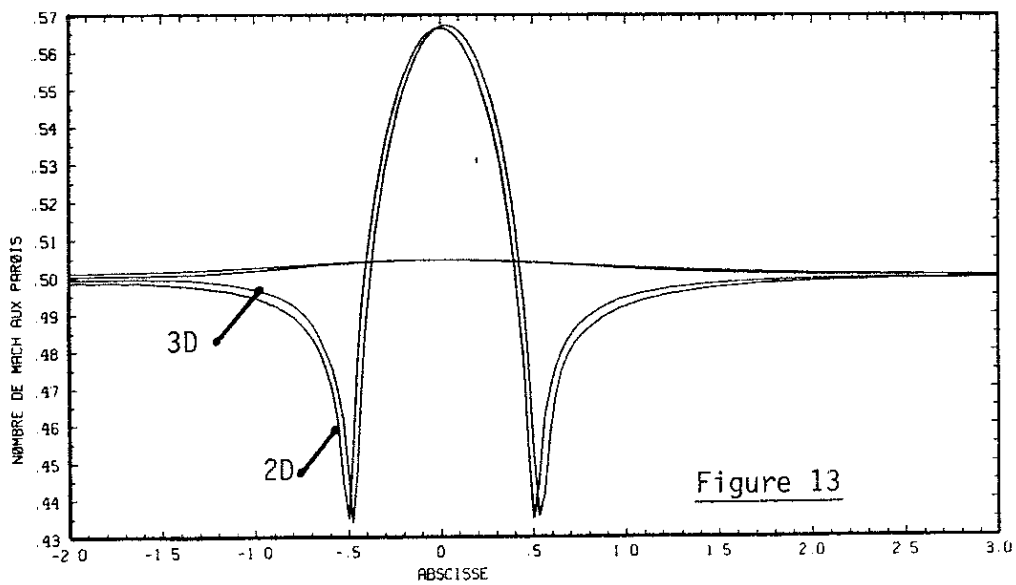
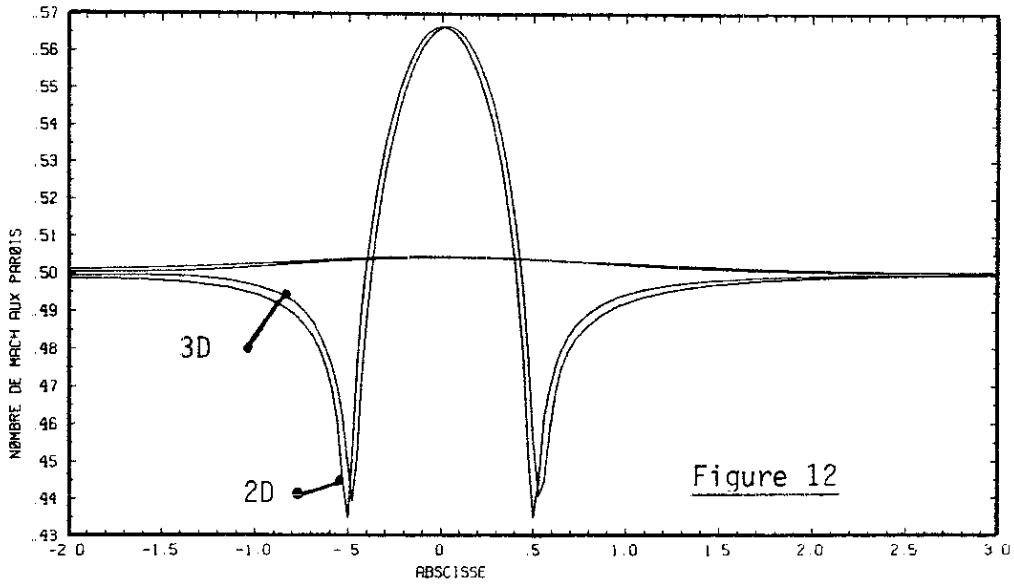
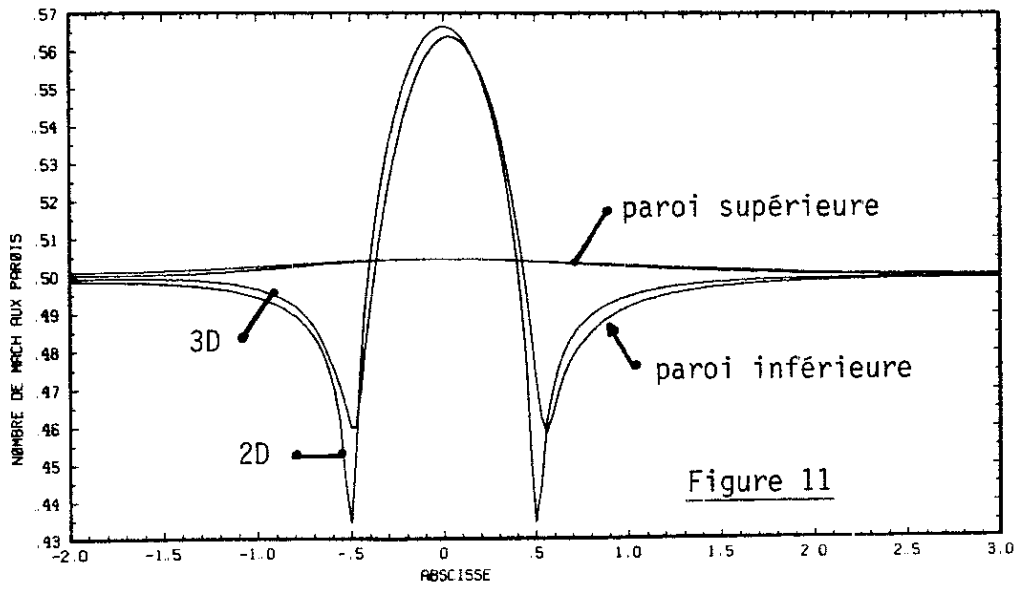
|   | $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ | nombre d'itération:<br>( $\epsilon = 10^{-4}$ ) |
|---|---|---|
|    | 14150                                   | 40  |
|    | 6811                                    | 74  |
|    | 16096                                   | 70  |
|    | 4062                                    | 59  |
|  | 22169                                   | 71  |
|  | 34045                                   | 84  |
|  | 28763                                   | 86  |
|  | 6545                                    | 44  |
|  | 18360                                   | 42  |

Figure 10 : Test des arbres internes

## V - TESTS NUMERIQUES, CONCLUSION

Nous avons testé la méthodologie décrite dans les paragraphes précédents pour le GAMM channel, à un nombre de Mach amont  $M_0 = 0,50$ . Le maillage de la face transversale OADE (figure 3) comporte trois couches de points, soit 80 triangles au total. L'ensemble des arêtes internes utiles pour le système linéaire s'élève à  $N = 6879$ . La convergence de l'algorithme de point fixe pour la résolution de la non linéarité est toujours rapide (moins de 10 itérations typiquement) et demande 5 mn CPU environ sur le Cray 1S du CCVR. Nous avons comparé ce cas test faussement tridimensionnel à un code bidimensionnel existant (cf. Chapitre 4). Dans un premier cas de calcul, nous avons choisi l'épaisseur  $Y = OE$  égale à 1. Les résultats relatifs à la face OABC sont portés figure 11, où l'on a tracé les valeurs du nombre de Mach sur les lignes OC et AB respectivement. Puis nous avons resserré le canal en choisissant  $Y = 0,05$  afin de diminuer les effets tridimensionnels parasites du cas précédent. Une amélioration importante dans la qualité des résultats est à noter (figure 12). Enfin, toutes choses égales par ailleurs, nous avons changé la direction des arêtes diagonales dans le maillage de la face d'entrée (figure 3) ; les résultats (figure 13) sont comparables avec ceux du cas précédent, mais le biais introduit par le choix du maillage triangulaire est encore visible.

Nous avons présenté un test numérique de l'élément conforme dans  $H(\text{rot})$  à base prismique de J.C. Nédélec [20] pour un problème faiblement non-linéaire de fluide parfait compressible dans un canal. La mise en oeuvre



Nombre de Mach sur les parois du canal. Comparaison des calculs bidimensionnel (2D) et tridimensionnels (3D) pour trois maillages différents de la face d'entrée.

de la jauge axiale discrète n'a pas engendré de conditionnement trop grand pour le système linéaire à résoudre, et la méthode du gradient préconditionné par SSOR s'est avérée performante. La faible mémoire du Cray 1S nous a conduit à utiliser un maillage tridimensionnel semi-déductif, donc à écrire un code très spécialisé. Par contre, le logiciel très général développé parallèlement à notre travail par J.M. Dupuy devrait permettre de nouveaux tests de validation (sur Cray 2) de la méthode dans des géométries complètement tridimensionnelles.

. Juin 1987 .



## REFERENCES

- [1] AXELSSON O., *Solution of Linear Systems of Equations : Iterative Methods*, Lect Notes in Math n° 572, Copenhagen 1976. Springer Verlag, Berlin 1977.
- [2] CCVR : Cours de Vectorisation. Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche, Palaiseau, 1985.
- [3] CIAVALDINI J.F. Thèse d'Etat, Rennes, 1980.
- [4] DHATT G., TOUZO G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, Paris, 1984.
- [5] DUBOIS F., DUPUY J.M., *A Three Dimensional Vector Potential Formulation for Solving Transonic Flows with Mixed Finite Elements*, 6° International Symposium : Finite Element Methods in Flow Problems, Inria, Antibes, 1986.
- [6] DUPONT T., KENDALL R., RACHFORD H., *An Approximate Factorization Procedure for Solving Self-Adjoint Elliptic Difference Equations*, SIAM J. Numer Anal, vol 5, n° 3, pp 559-573, 1968.
- [7] DUPUY J.M., *Ecoulements Transsoniques Potentiels Tridimensionnels*, Contrat DRET n° 81/228, Annexe 2, avril 1985.
- [8] DUPUY J.M., *Résolution Numérique des Equations d'Ecoulements Compressibles Transsoniques Tridimensionnels Stationnaires*, Contrat DRET n° 83/434, Rapport de synthèse finale, juillet 1986.
- [9] EVANS D.J., *The Use of Pre-conditioning in Iterative Methods for Solving Linear Equations with Symmetric Definite Matrices*, J Inst Maths Applics 4, pp 295-314, 1967.
- [10] GELDER D., *Solution of the Compressible Flow Equations*, Int J. for Num Meths in Eng, vol 3, pp 35-43, 1971.
- [11] GERMAIN P., MULLER P., *Introduction à la Mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1980.
- [12] GOLUB G.H., MEURANT G., *Résolution Numérique des grands Systèmes Linéaires*, Eyrolles, Paris, 1984.
- [13] HESTENES M., STIEFEL E., *Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems*, J. of Research Nat Bur of Standards, vol 49, n° 6, pp 409-436, 1952.

- [14] JENNINGS A., *Influence of the Eigenvalue Spectrum on the Convergence Rate of the Conjugate Gradient Method*, J Inst Maths Applics, vol 20, pp 61-72, 1977.
- [15] KERSHAW D.S., *The Incomplete Cholesky-Conjugate Gradient Method for the Iterative Solution of Systems of Linear Equations*, J of Comp Phys, vol 26, pp 43-65, 1978.
- [16] LASCAUX P., THEODOR R., *Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur*, Masson, Paris, 1986.
- [17] MEIJERINK J.A., VAN DER VORST H.A., *An Iterative Solution Method for Linear Systems of Which the Coefficient Matrix is a Symmetric M-Matrix*, Math of Comp, vol 31, n° 137, pp 148-162, 1977.
- [18] NECAS J., *Compacité par entropie et écoulements de fluides*, Masson, Paris, à paraître.
- [19] NEDELEC J.C., *Mixed Finite Elements in  $\mathbb{R}^3$* , Numer Math 35, pp 315-341, 1980.
- [20] NEDELEC J.C., *Elements Finis*, Cours photocopié, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1982.
- [21] PERRONNET A., *Mefisto maillage, Manuel d'utilisation*, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris 6, 1983.
- [22] RIZZI A., VIVIAND H., (Eds) *Numerical Methods for the Computation of Inviscid Transonic Flows with Shock Waves*, Notes on Numer Fluid Mechanics, vol 3, Vieweg, Braunschweig, 1981.
- [23] ROUX F.X., Séminaire, Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris 6, mars 1984.
- [24] STONE H.L., *Iterative Solution of Implicit Approximations of Multi-dimensional Partial Differential Equations*, SIAM J. Numer Anal, vol 5, n° 3, pp 530-558, 1968.
- [25] STROUD A.H., *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, 1971.
- [26] ZIENKIEWICZ O.C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, Mc Graw-Hill, London, 1971.

## Chapitre 4

Résolution numérique de l' équation du potentiel  
transsonique à l' aide d'une méthode d' éléments finis  
mixtes et d' un algorithme de point fixe .

L'étude qui suit est la continuation directe d'une partie du travail entrepris par AMARA [1] (voir aussi AMARA-JOLY-THOMAS [2]). Elle est fondée sur une formulation mixte en vitesse-fonction courant du modèle transsonique des grandes perturbations (Full Potential Equation). L'utilisation d'une fonction courant pour l'étude numérique des écoulements transsoniques est fort ancienne, puisque dès 1944, EMMONS l'utilisait ([18],[19]), associée à une méthode de relaxation (voir l'article de SOUTH dans le livre édité par HABASHI [25]). Pourtant, l'impossibilité de formuler le problème complet par rapport à la seule fonction courant, (implicite dans la méthode de l'hodographe, voir COURANT-FRIEDRICHS [10]) limitait classiquement cette méthode aux écoulements partout subsoniques (voir par exemple SELLS [44], MORICE [37], ou CIAVALDINI [9]). Les algorithmes proposés par HAFEZ-LOVELL [26] et la méthode mixte d'AMARA [1] ont permis de réviser ce point de vue (voir aussi MORICE-CAMBIER-VEUILLOT [38]).

Nous rappelons dans une première partie la discrétisation par éléments finis mixtes du problème ; nous détaillons notamment différents calculs de la densité décentrée. Dans la seconde partie, nous avons testé ces différentes propositions dans le cas d'un problème d'aérodynamique externe (aile NACA 0012 non-portante) déjà étudié par AMARA [1]. Nous sélectionnons ainsi un algorithme de calcul qui s'avère stable par raffinement du maillage. Au cours de la troisième partie, nous appliquons la méthode à un problème d'aérodynamique interne (canal du GAMM, proposé par RIZZI-VIVIAND [43]) pour lequel des résultats partiels ont été présentés ([13]). La difficulté essentielle est l'inadéquation partielle

des conditions aux limites numériques imposées par notre algorithme aux conditions aux limites physiques du problème. Toutefois, une série de tests nous a permis de calculer différents régimes caractéristiques d'une tuyère amorcée.

## I - DESCRIPTION DE LA METHODE NUMERIQUE

Nous rappelons dans ce paragraphe la méthode de résolution de l'équation du potentiel transsonique (FPE) proposée initialement par AMARA [1]. A partir d'une formulation mixte par rapport à la vitesse et à la fonction courant, la non-linéarité du problème est traitée par l'introduction d'une densité décentrée. Nous détaillons quatre façons de faire ce calcul, toujours explicite, donc facile à implémenter et rapide lors de l'exécution du code numérique. Enfin, nous présentons l'algorithme global de résolution, de type point fixe, où chaque étape nécessite la résolution d'un système linéaire symétrique défini positif ayant pour inconnue la seule fonction courant.

### 1 - FORMULATION MIXTE

Dans toute la suite du chapitre, le domaine d'étude  $\Omega$ , ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , est supposé maillé par des quadrangles, et on désigne par  $\mathcal{T}_h$  le maillage obtenu. L'adaptation au cas des triangles est facile. La densité  $\rho$  et la vitesse  $\vec{u}$  sont interpolées par des fonctions constantes dans chaque quadrangle  $K$  (élément fini  $Q_0$ ), alors que la fonction courant  $\psi$  est supposée bi-affine dans chaque élément et continue aux interfaces (interpolation  $Q_1$ ). Les degrés de liberté des variables densité et vitesse sont donc liés aux éléments alors que ceux de la fonction courant sont attachés aux sommets du maillage  $\mathcal{T}_h$ .

Par ailleurs, la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$  est décomposée sous la forme :

$$(1.1) \quad \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \quad .$$

La portion  $\Gamma_D$  correspond à une donnée à la limite de type Dirichlet pour la fonction courant, alors que  $\Gamma_N$  suppose la vitesse tangentielle donnée sur le bord, comme on le verra plus loin. On remarque que dans l'étude faite au chapitre 3, on avait choisi  $\Gamma_D \equiv \Gamma$ .

L'espace des fonctions continues sur  $\bar{\Omega}$ , nulles sur  $\Gamma_D$ , biaffines dans chaque élément  $K$ , est noté  $Q_1^h$ , et celui des fonctions (discontinues) constantes par élément est noté  $Q_0^h$ . L'espace des conditions aux limites de Dirichlet associées à  $\Gamma_D$  est appelé  $\bar{Q}_1^D$ ; un élément de  $\bar{Q}_1^D$  est une fonction continue biaffine dans chaque élément, nulle sur les sommets de  $\mathcal{T}_h$  qui n'appartiennent pas à  $\Gamma_D$ , et est donc défini par ses valeurs aux sommets de  $\Gamma_D$ . L'espace analogue pour  $\Gamma_N$  est appelé  $\bar{Q}_0^N$ ; ses éléments sont définis par des scalaires le long des différentes arêtes de  $\Gamma_N$ . On renvoie à ZIENKIEWICZ [50] et CIARLET [8] pour les détails concernant la méthode des éléments finis.

Les équations aux dérivées partielles concernent la conservation de la masse et l'irrotationnalité de l'écoulement. La loi de conservation de la masse

$$(1.2) \quad \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

peut se réécrire grâce à une fonction courant  $\psi$  (cf. GIRAULT-RAVIART [24] par exemple) :

$$(1.3) \quad \rho \vec{u} - \text{rot} \psi = 0$$

avec  $\text{rot} \psi$  égal à la projection sur  $\mathbb{R}^2$  du vecteur  $\text{rot}_{\mathbb{R}^3}(\psi \vec{k})$ , c'est-à-dire  $\text{rot} \psi \equiv \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$ . L'équation (1.3) est intégrée sur  $\Omega$ , après multiplication par un vecteur arbitraire  $\vec{v}$  de  $Q_0^h \times Q_0^h$  :

$$(1.4) \quad \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} \text{rot} \psi \cdot \vec{v} \, dx = 0 \quad , \quad \forall \vec{v} \in Q_0^h \times Q_0^h .$$

Par ailleurs, la nullité du tourbillon :

$$(1.5) \quad \text{rot} \vec{u} = 0$$

(où  $\text{rot} \vec{u}$  est ici la composante sur  $\vec{k}$  du rotationnel du champ  $\vec{u}$  dans  $\mathbb{R}^3$ , i.e.  $\text{rot} \vec{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$ ) est multipliée par  $\varphi \in Q_1^h$  et intégrée sur  $\Omega$ . Après intégration par parties, on obtient :

$$(1.6) \quad \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \text{rot} \varphi \, dx + \int_{\partial \Omega} \varphi \vec{u} \cdot \vec{\tau} \, d\gamma = 0 \quad , \quad \forall \varphi \in Q_1^h .$$

Dans cette dernière relation,  $\vec{\tau}$  est un vecteur unitaire tangent à  $\Gamma$ , issu de la normale extérieure  $\vec{n}$  par un angle de  $+\frac{\pi}{2}$  (cf. figure 1.1). On remarque que si  $\varphi$  est une fonction de base de  $Q_1^h$  correspondant à un sommet intérieur, l'équation (1.6) revient à annuler la circulation de  $\vec{u}$  le long du chemin  $\gamma$  dessiné sur la figure 1.2.

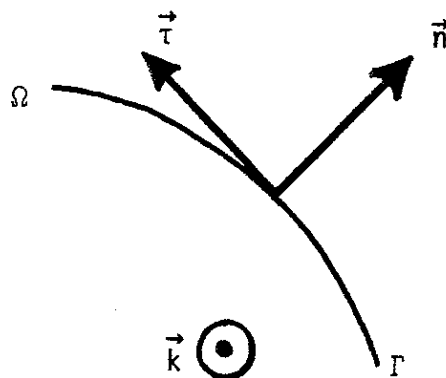


Figure 1.1 : Vecteurs unitaires



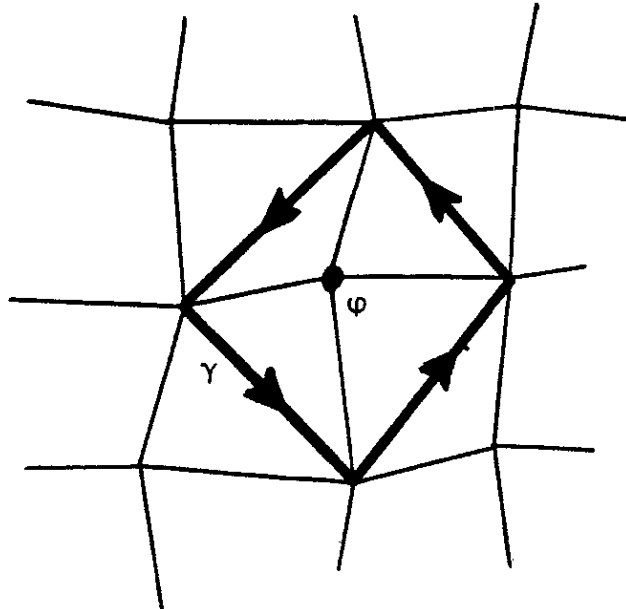


Figure 1.2 : Chemin d'intégration pour le calcul du tourbillon.

PROPOSITION 1.1

Pour  $\bar{\psi}$  donné dans  $\bar{Q}_1^D$ ,  $g$  donné dans  $\bar{Q}_0^N$ , et  $\rho$  dans  $L^\infty(\bar{\Omega})$  telle que

$$(1.7) \quad \exists \rho^* > 0 \quad , \quad \rho \geq \rho^* \quad \text{p.p. (x)}$$

le problème

$$(1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \in Q_0^h \times Q_0^h \quad , \quad \psi - \bar{\psi} \in Q_1^h \\ \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} r \vec{\text{rot}} \psi \cdot \vec{v} \, dx = 0 \\ \int_{\Omega} \vec{u} \cdot r \vec{\text{rot}} \varphi \, dx = - \int_{\Gamma} \varphi \, g \, d\gamma \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall \vec{v} \in Q_0^h \times Q_0^h \\ \forall \varphi \in Q_1^h \end{array}$$

a une solution unique.

La preuve, détaillée au chapitre 3 de la Thèse d'Amara [1], consiste à vérifier la condition inf-sup. Le système linéaire défini par (1.8) est en fait beaucoup plus simple à résoudre que ceux issus des formulations mixtes les plus générales, puisque la matrice  $A(\rho)$  définie par  $(Q_0^h \times Q_0^h)^2 \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto (A(\rho)\vec{u}, \vec{v}) \equiv \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx$  est diagonale. Si nous notons par  $B$  la matrice de l'opposé du rotationnel entre les espaces  $Q_1^h$  et  $Q_0^h \times Q_0^h$  :

$$Q_1^h \ni \varphi, \quad Q_0^h \times Q_0^h \ni \vec{v} \mapsto (B\varphi, \vec{v}) \equiv - \int_{\Omega} r \operatorname{rot} \varphi \cdot \vec{v} \, dx$$

et par  $G$  la matrice de la forme linéaire définie sur  $Q_1^h$  par  $g$  :

$$Q_1^h \ni \varphi \mapsto G\varphi = \int_{\Gamma} g\varphi \, d\gamma$$

nous pouvons alors réécrire (1.8) sous la forme :

$$(1.9) \quad \begin{cases} \vec{u} \in Q_0^h \times Q_0^h, & \psi - \bar{\psi} \in Q_1^h \\ A(\rho)\vec{u} + B\psi = 0 \\ - {}^t_B \vec{u} = -G \end{cases}$$

Le système (1.9) se résout alors très simplement : on pose  $\tilde{\psi} = \psi - \bar{\psi}$  et on exprime  $\vec{u}$  grâce à la première équation :

$$\vec{u} = -A(\rho)^{-1} (B\tilde{\psi} + B\bar{\psi}) .$$

On reporte cette expression dans la seconde équation afin d'obtenir une équation qui ne porte que sur l'inconnue  $\tilde{\psi}$  :

$$(1.10) \quad {}^t_B A(\rho)^{-1} B \tilde{\psi} = - {}^t_B A(\rho)^{-1} B \bar{\psi} - G$$

La matrice du système linéaire (1.10) est symétrique définie positive comme la matrice  $A(\rho)$  (propriété toujours physiquement vérifiée s'il n'y a pas cavitation, comme l'exprime l'hypothèse (1.7)).

Les données de ce système linéaire sont un champ de densité  $\rho$ , une condition de Dirichlet  $\bar{\psi}$  sur  $\Gamma_D$  pour la fonction courant, et une vitesse tangentielle  $\vec{u} \cdot \vec{\tau} \equiv g$  sur  $\Gamma_N$ , partie de la frontière complémentaire de  $\Gamma_D$ .

## 2 - DENSITE DECENTREE

Aux équations aux dérivées partielles (1.2) et (1.5) il convient d'ajouter, pour fermer le modèle transsonique utilisé, les hypothèses d'isentropie de l'écoulement et de conservation de l'enthalpie totale. Pour un gaz parfait de chaleurs spécifiques constantes de rapport  $\gamma$  et de vitesse et densité adimensionnalisées de façon à valoir 1 pour un nombre de Mach de référence  $M_0$ , on en déduit :

$$(1.11) \quad \rho^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 (1 - |\vec{u}|^2)$$

En reportant cette expression de la densité en fonction de la vitesse dans (1.2), on vérifie facilement que le type du problème change avec la nature de l'écoulement : elliptique en région subsonique ( $M < 1$ ), hyperbolique en région supersonique ( $M > 1$ ), où le nombre de Mach local  $M$  est calculé grâce à la relation

$$(1.12) \quad M^2 = M_0^2 \frac{|\vec{u}|^2}{\rho^{\gamma-1}} .$$

Les difficultés liées à ce changement de type, sur une interface a priori inconnue le long de laquelle se développe une ligne sonique et une onde de choc, sont classiques et ont fait l'objet de

nombreuses recherches tant théoriques (MORAWETZ [35],[36], FEISTAUER-NEČAS [22] par exemple) qu'appliquées (voir entre autres BAUER-GARABEDIAN-KORN [3]). Les méthodes numériques dont la mise en oeuvre informatique est la plus simple reposent sur la notion de capture de choc (MURMAN-COLE [39]), où la solution discrète fournie par le schéma numérique simule le mieux possible la discontinuité due à l'onde de choc, en l'étalant sur quelques mailles. Nous citons aussi MURMAN [40], JAMESON [30], ENGQUIST-OSHER [20],[21] qui ont proposé des schémas aux différences finies permettant de traiter la difficulté due au changement de type et à la condition d'entropie. Avec une approximation par éléments finis, l'adaptation du "rotated scheme" de JAMESON [30] la plus féconde est le concept de "densité décentrée", proposée indépendamment par EBERLE [17] et HAFEZ-SOUTH-MURMAN [27], et utilisée ensuite par HOLST [29], DECONINCK-HIRSCH [12], AMARA-JOLY-THOMAS [2], BREDIF [5], DUPUY [14] : à partir d'un champ de vitesse  $\vec{u}$ , on calcule d'abord une densité  $\rho$  grâce à (1.11) et on la décentre grâce à l'adjonction d'une viscosité artificielle :

$$(1.13) \quad \bar{\rho} = \rho - \alpha \Delta s \frac{\partial \rho}{\partial s}$$

où  $\Delta s$  est un élément de longueur lié au maillage,  $\alpha$  un coefficient toujours compris entre 0 et 1 et nul en zone subsonique, et  $\frac{\partial \rho}{\partial s}$  une évaluation du gradient le long de la ligne de courant.

Nous décrivons maintenant une première discrétisation de la relation (1.13) qui définit la densité décentrée retenue pour nos calculs numériques, et qui est due pour l'essentiel à AMARA [1].

On suppose donc connu un champ de vitesses  $\vec{u}_K \in Q_0^h \times Q_0^h$  et une fonction courant  $\psi \in Q_1^h \oplus \bar{Q}_1^D$ . Pour chaque élément fini  $K$ , nous déterminons un élément amont  $KA$  parmi les quatre voisins de  $K$  (i.e. les quatre quadrangles ayant une arête commune avec  $K$ ) : c'est celui pour lequel le flux de masse entrant dans  $K$  est le plus important ; nous notons que le calcul de ce flux de masse est simple si on utilise la fonction courant (il se réduit alors à la différence entre les valeurs aux deux sommets de l'arête commune). Une fois ce choix effectué, le terme ajouté à  $\rho$  dans (1.13) est calculé grâce à un schéma décentré, et nous avons :

#### Décentrage n° 1

$$(1.14) \quad \bar{\rho}_K = \rho_K - \alpha_{KA,K}(\rho_K - \rho_{KA})$$

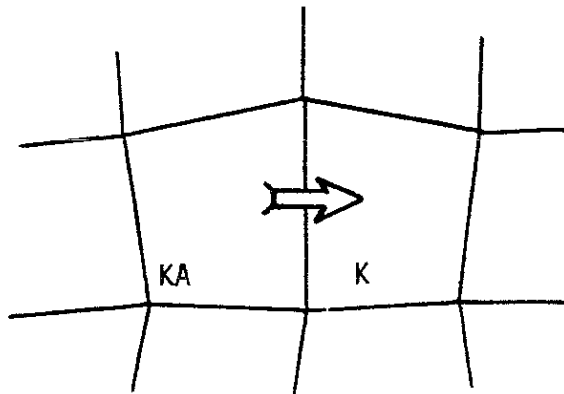


Figure 1.3 : Élément amont

Dans la formule (1.14),  $\rho_K$  est la densité calculée dans l'élément  $K$  grâce au champ  $\vec{u}_K$  et à la relation (1.11). Le coefficient de décentrage  $\alpha_{KA,K}$  est fonction des nombres de Mach  $M_{KA}$  et  $M_K$  calculés

dans les éléments KA et K (relation (1.12)) grâce au procédé suivant : on calcule d'abord une moyenne  $m_{KA,K}$  entre ces deux nombres de Mach

$$(1.15) \quad m_{KA,K}^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } M_{KA} < 1 \text{ et } M_K < 1 \text{ (zone subsonique)} \\ \frac{1}{2} (M_K^2 + 1) & \text{si } M_{KA} < 1 \text{ et } M_K > 1 \text{ (ligne sonique)} \\ \frac{1}{2} (M_{KA}^2 + M_K^2) & \text{si } M_{KA} > 1 \text{ (zone supersonique ou choc)} \end{cases}$$

qui permet de définir facilement  $\alpha_{KA,K}$  par

$$(1.16) \quad \alpha_{KA,K} = \begin{cases} \frac{1 - 1/m_{KA,K}^2}{1 - 1/\omega} & \text{si } m_{KA,K}^2 \leq \omega \\ 1 & \text{si } m_{KA,K}^2 > \omega \end{cases}$$

Pour cette dernière relation, on a choisi  $\omega = 2.5$  (on décentre donc complètement le schéma (1.14) pour des nombres de Mach supérieurs à 1.58).

Dans les paragraphes qui suivent, nous proposons d'autres façons de calculer une densité décentrée, qui ont toutes été mises en oeuvre, et testées dans la partie II.

### 3 - DECENTRAGE DE LA DENSITE A L'AIDE DU FLUX DE MASSE

L'analyse qui suit est l'adaptation à notre contexte éléments finis de l'article d'OSHER-HAFEZ-WHITLOW [41] proposé pour une méthode aux différences finies. Fixons un élément fini K et son élément amont KA comme précédemment, et supposons le champ de vitesses normal à l'interface a entre KA et K (figure 1.4).

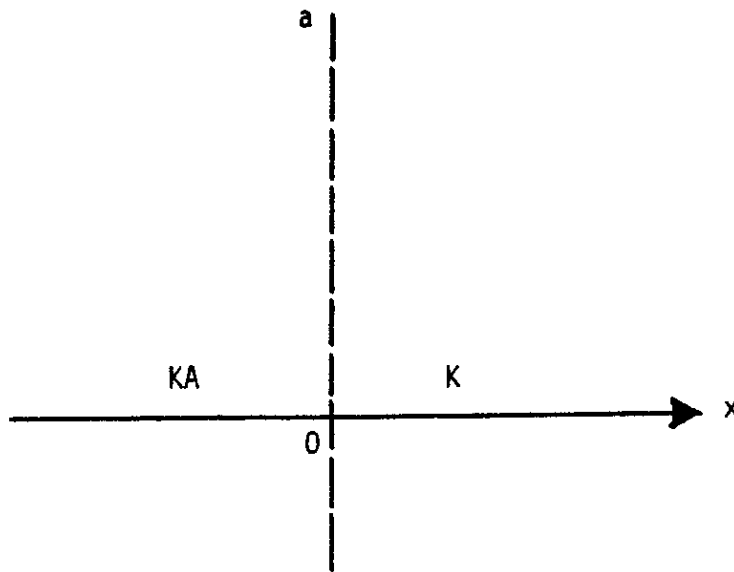


Figure 1.4

Essayons alors de calculer approximativement quel écoulement traverse cette interface : on peut se restreindre à une étude selon la normale  $Ox$  à l'interface, et la conservation de la masse s'écrit alors :

$$(1.17) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} q(\rho) = 0$$

avec une non-linéarité concave  $q(\rho)$  donnée par

$$(1.18) \quad q(\rho) = \rho |\vec{u}|$$

et  $|\vec{u}|$  défini comme fonction de  $\rho$  grâce à la relation (1.11). Dans cette approximation, la densité au voisinage de l'interface  $a$  est solution au cours du temps d'un problème de Riemann pour une équation hyperbolique non-linéaire, puisque les "conditions initiales" sont

$$(1.19) \quad \rho(x) = \begin{cases} \rho_{KA} & \text{si } x < 0 \\ \rho_K & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Un tel problème est classique (voir LAX [33] ou SMOLLER [46] par exemple) : la solution est constante au cours du temps le long de l'interface  $a$ , et il en est de même pour le flux numérique calculé par les schémas numériques conservatifs. En particulier, le schéma d'ENGQUIST-OSHER ([20,21]) donne une valeur approchée du flux  $q$ , solution du problème (1.17)(1.18) le long de  $a$ .

$$(1.20) \quad q(a) = \phi(\rho_{KA}, \rho_K)$$

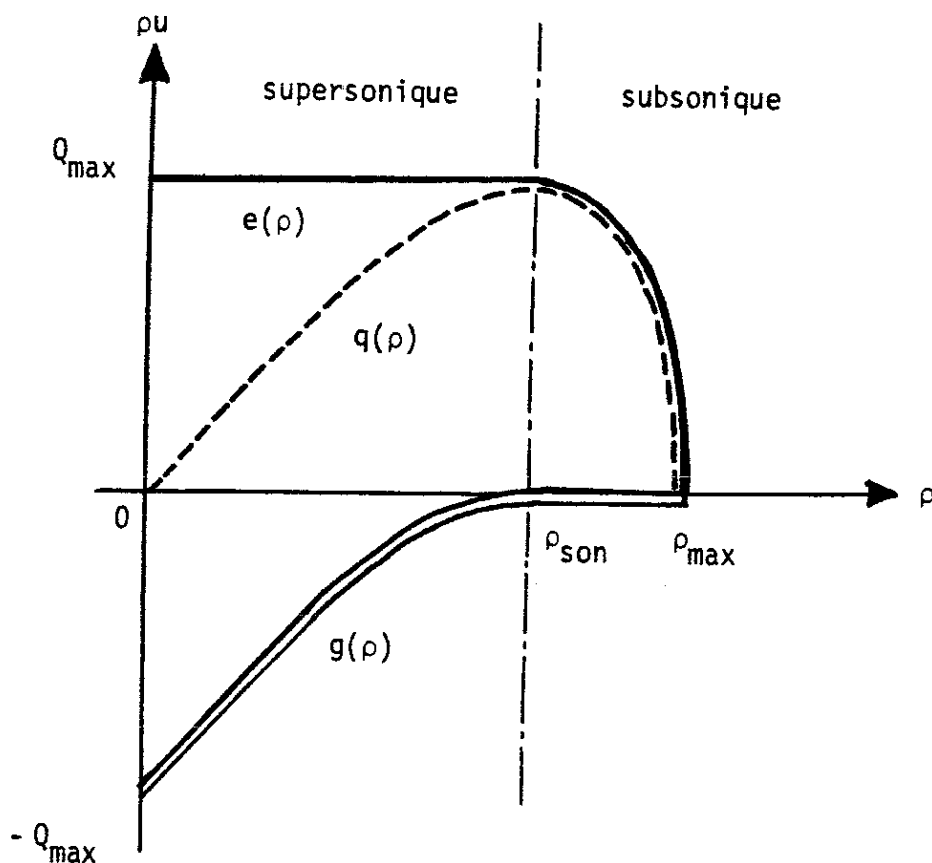


Figure 1.5 : Décomposition d'Engquist-Osher de la non-linéarité  $q(\rho)$  [pointillés] en composantes subsonique  $e(\rho)$  [trait simple] et supersonique  $g(\rho)$  [double trait].



De plus la fonction  $\phi$  est dérivable par rapport au couple  $(\rho_{KA}, \rho_K)$ . On la construit en isolant la partie subsonique  $e(\rho)$  de la partie supersonique  $g(\rho)$  de la fonction (1.18) : soient  $\rho_{son}$  la densité du point sonique  $\left(\frac{dq}{d\rho}(\rho_{son}) = 0\right)$  et  $Q_{max} = q(\rho_{son})$ . On pose :

$$(1.21) \quad e(\rho) = \begin{cases} q(\rho) & \rho > \rho_{son} \\ Q_{max} & \rho \leq \rho_{son} \end{cases}$$

$$(1.22) \quad g(\rho) = q(\rho) - e(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho > \rho_{son} \\ q(\rho) - Q_{max} & \rho \leq \rho_{son} \end{cases}$$

$$(1.23) \quad \phi(\rho_{KA}, \rho_K) = g(\rho_{KA}) + e(\rho_K)$$

Le schéma (1.20)-(1.23) permet donc un calcul approché du flux de masse qui passe de KA à K et on peut en déduire une densité décentrée en divisant le flux de masse ainsi calculé par le module de la vitesse :

### Décentrage n° 2

$$(1.24) \quad \bar{\rho}_K = \frac{\phi(\rho_{KA}, \rho_K)}{|\vec{u}_K|}$$

Notons pour terminer que ce décentrage a été obtenu en supposant l'écoulement normal entre les éléments KA et K, ce qui n'est numériquement vrai que de façon approximative, ou bien exige un maillage qui "suive" a priori l'écoulement.

#### 4 - DECENTRAGES PAR FRONTS

Nous revenons dans ce paragraphe à la relation empirique (1.14) qui relie la densité à la densité décentrée :

$$\bar{\rho}_K = \rho_K - \alpha_{KA,K}(\rho_K - \rho_{KA})$$

Amara a proposé [1] d'utiliser aussi la relation

##### Décentrage n° 3

$$(1.25) \quad \bar{\rho}_K = \rho_K - \alpha_{KA,K}(\rho_K - \bar{\rho}_{KA})$$

qui mélange, dans le calcul de la viscosité artificielle  $\Delta s \frac{\partial \rho}{\partial s}$  de la relation (1.13), les densités exactes et décentrées ! La relation (1.25) définit  $\bar{\rho}$  de façon totalement implicite a priori à partir du champ  $\rho$  (le calcul des coefficients  $\alpha$  reste inchangé par rapport au décentrage n° 1), mais si on suit une ligne de courant (ne se refermant pas !), le calcul de la densité décentrée  $\bar{\rho}$  s'effectue facilement de proche en proche, et (1.25) définit un schéma bidiagonal.

Nous avons adapté cette idée au calcul de la densité décentrée qui utilise le schéma d'Engquist-Osher (décentrage n° 2) : le flux de masse est évalué en utilisant la densité exacte de l'élément courant et la densité décentrée de l'élément amont. Nous obtenons ainsi le

##### Décentrage n° 4

$$(1.26) \quad \bar{\rho}_K = \frac{\phi(\bar{\rho}_{KA}, \rho_K)}{|\vec{u}_K|}$$

## 5 - ALGORITHME DE POINT FIXE

Nous présentons enfin l'algorithme global de résolution de l'équation du potentiel transsonique que nous avons utilisé.

### ALGORITHME

- Conditions aux limites

$$(1.27) \quad \begin{cases} \psi = \bar{\psi} & \text{sur } \Gamma_D \\ \vec{u} \cdot \vec{\tau} = g & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

- Initialisation  $\bar{\rho}^0$  donné.
- Itération ;  $\bar{\rho}^n$  est supposé connu.

★ Résolution d'un problème linéaire de type (1.9)

$$\begin{cases} \vec{u}^{n+1} \in Q_0^h \times Q_0^h, & \psi^{n+1} - \bar{\psi} \in Q_1^h \\ A(\bar{\rho}^n) \vec{u}^{n+1} + B\psi^{n+1} = 0 \\ t_B \vec{u}^{n+1} = G \end{cases}$$

★ Calcul de la densité grâce à la relation (1.11) :

$$\rho_K^{n+1} = \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 (1 - |\vec{u}_K^{n+1}|^2) \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

★ Décentrage de la densité au moyen de l'une des quatre méthodes proposées (relations (1.14), (1.24), (1.25) et (1.26) respectivement).

★ Calcul du résidu, i.e. de l'erreur relative

$$(1.28) \quad \epsilon_{n+1} = \left\| \frac{\bar{\rho}^{n+1} - \bar{\rho}^n}{\bar{\rho}^n} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$$

et test de fin par comparaison de  $\epsilon_{n+1}$  à  $\epsilon > 0$  donné.

### REMARQUE 1.1

L'algorithme qui précède est fondé sur une formulation mixte  $(\vec{u}, \psi)$  du problème linéaire (1.9), et ceci est essentiel. En effet, on ne peut formuler un problème linéaire par rapport à la seule fonction courant  $\psi$ , car alors le calcul de la densité est ambigu, puisque l'équation d'inconnue  $\rho$

$$q(\rho) = |\vec{r} \text{ôt } \psi|$$

a toujours deux solutions (ou pas du tout !), l'une subsonique et l'autre supersonique (cf. figure 1.6).

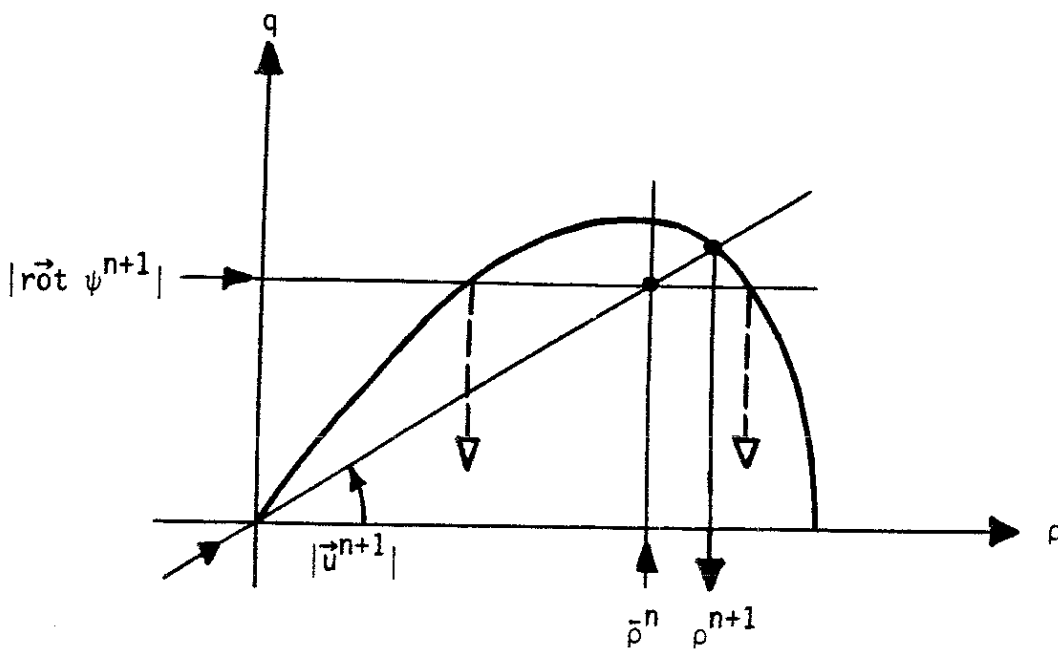


Figure 1.6 : Calcul de la nouvelle densité  $\rho^{n+1}$  grâce à la densité  $\bar{\rho}^n$  de l'itération précédente et à la fonction courant  $\psi^{n+1}$ .

A l'aide de la formulation mixte (1.9) au contraire, le calcul de la vitesse  $\vec{u}^{n+1}$  précède celui de la densité comme on l'a illustré figure 1.6.

## II - TESTS NUMERIQUES SUR UN PROFIL NACA 0012

### 1 - GENERALITES

Nous avons testé et validé notre code de calcul sur une aile d'avion initialement dessinée par les ingénieurs du National Advisory Committee for Aeronautics (aile NACA 0012) sur laquelle de nombreuses expériences de toutes natures ont été effectuées. Nous nous sommes restreints au cas simple d'une incidence nulle, pour lequel des écoulements non portants sont possibles puisque le profil est symétrique (mais ce ne sont pas les seuls, des ruptures de symétrie peuvent se produire, comme le montrent STEINHOFF-JAMESON [47] et BRISTEAU et al [6]). On se contente donc d'étudier l'écoulement autour du demi-profil (figure 2.1).

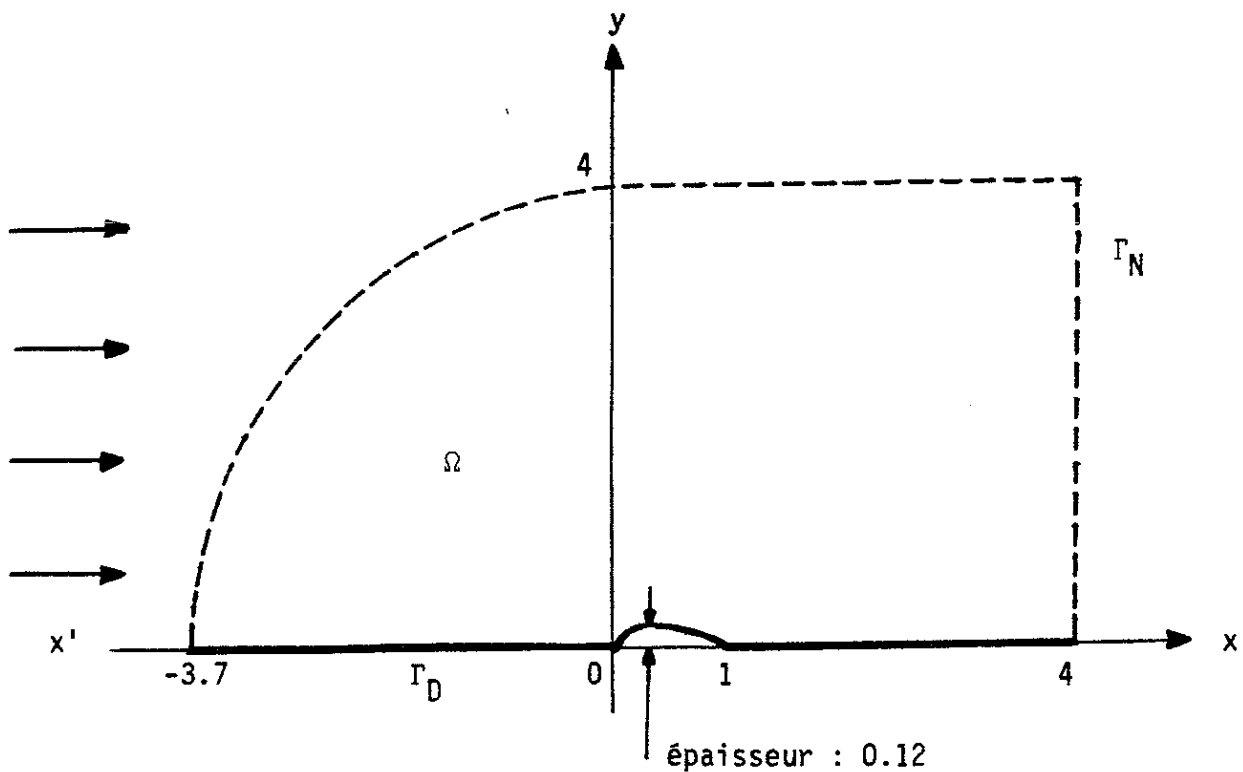


Figure 2.1 : Demi-profil NACA 0012

Par symétrie du problème, la droite  $x'Ox$  passant par le bord d'attaque et le bord de fuite contient deux demi-droites qui sont des lignes de courant sur lesquelles on impose à la fonction courant d'être nulle (ce qui fixe la jauge). Cette ligne (incluant le demi-profil) constitue la position  $\Gamma_D$  de la frontière.

$$(2.1) \quad \bar{\psi} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D .$$

La portion  $\Gamma_N$  qui ferme le domaine de calcul  $\Omega$  est une frontière artificielle, sur laquelle on se donne la composante tangentielle de la vitesse :

$$(2.2) \quad g = \vec{u}_\infty \cdot \vec{\tau} \quad \text{sur } \Gamma_N$$

avec  $\vec{u}_\infty$  parallèle à  $Ox$  par hypothèse, et de module déterminé par le nombre de Mach à l'infini  $M_\infty$ . ( $|\vec{u}_\infty| = 1$  si on choisit  $M_0 = M_\infty$ ). Cette condition à la limite (2.2) est très simple et doit être affinée dans le cas d'une aile portante, en tenant compte du comportement asymptotique de l'écoulement aux grandes distances, comme l'ont montré théoriquement LUDFORD [34], SHIFFMAN [45], FINN-GILBARG [23] et CIAVALDINI [9].

## 2 - MAILLAGES

Concevoir un maillage régulier autour d'un profil peut faire appel à des techniques analytiques et géométriques fort élaborées (transformation conforme, polygones de Delaunay-Voronoi, etc...) afin que la variation des mailles soit la plus régulière possible.

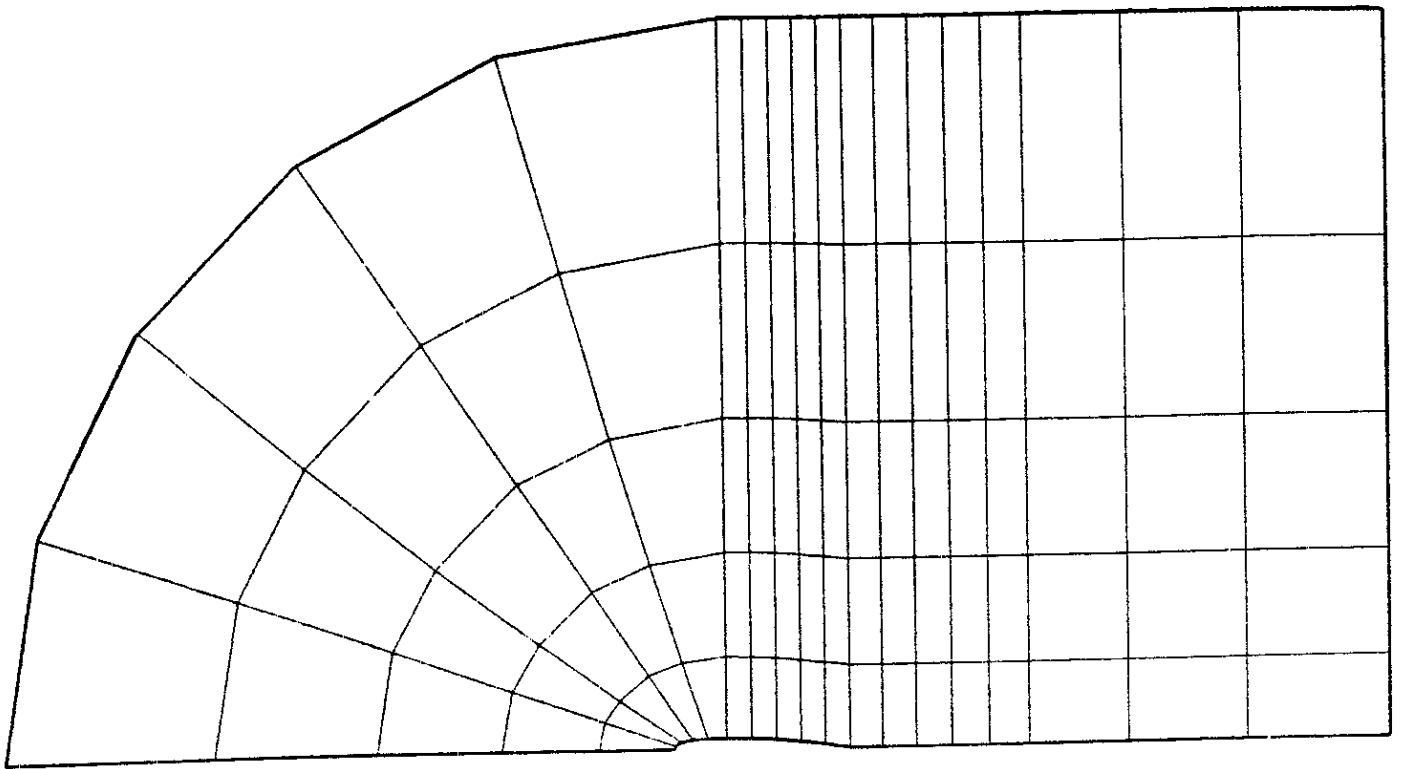


Figure 2.2 : Maillage grossier N11 autour du profil NACA 0012 (11 points sur le profil)

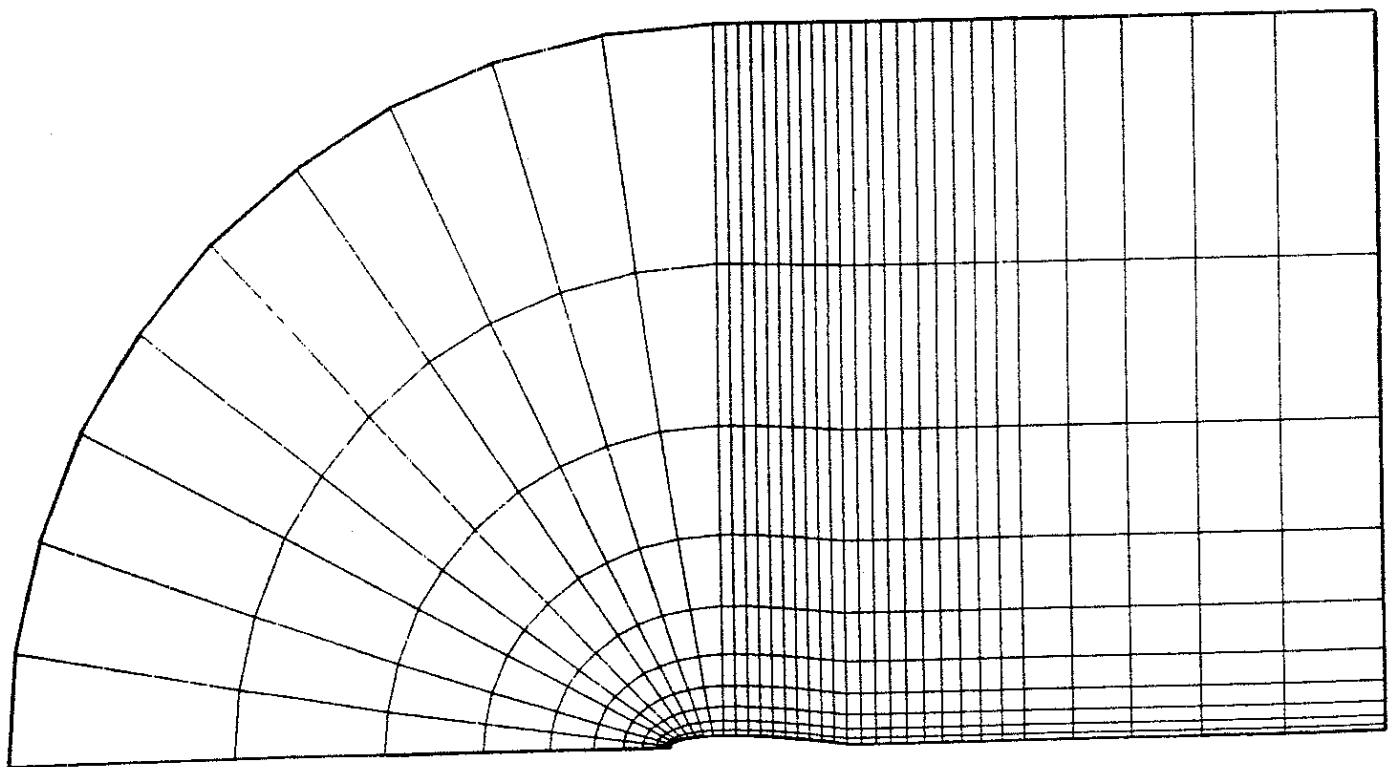


Figure 2.3 : Maillage N21 autour du profil NACA 0012

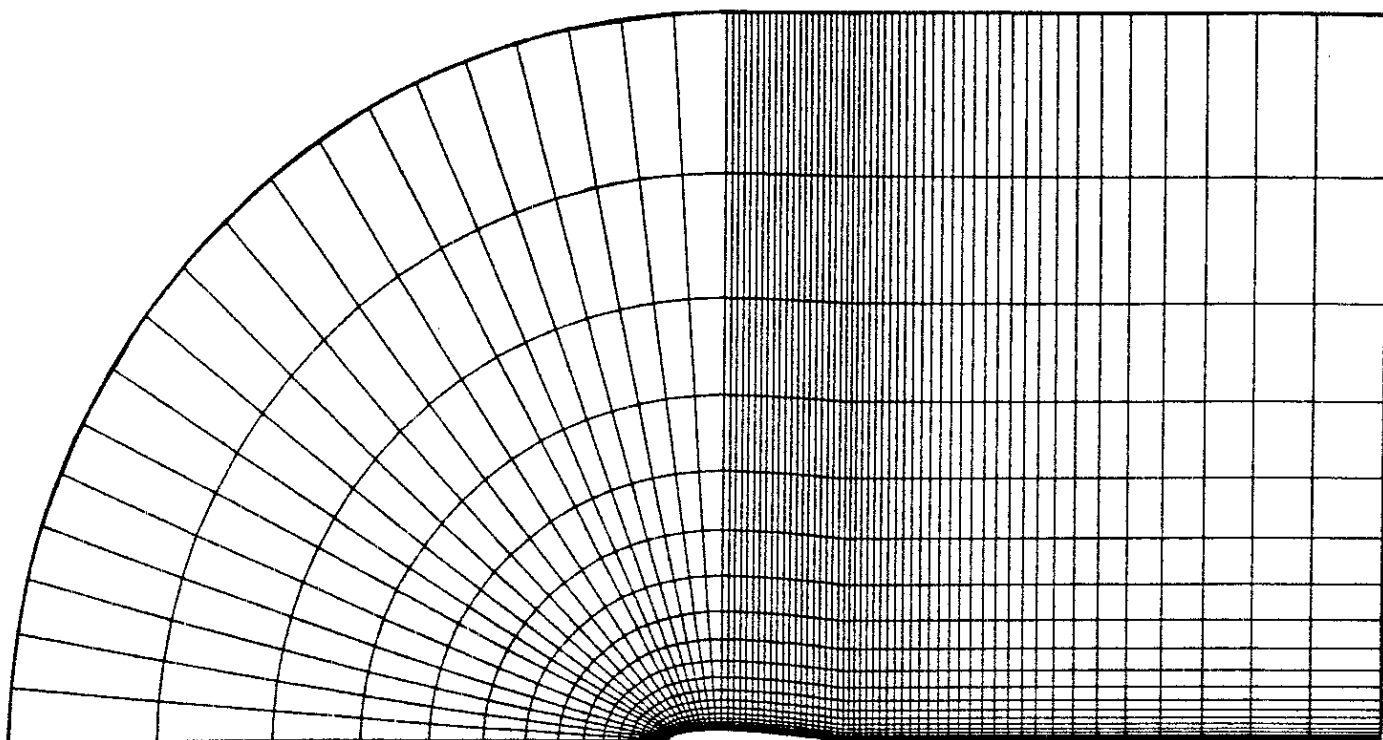


Figure 2.4 : Maillage N41 autour du profil NACA 0012

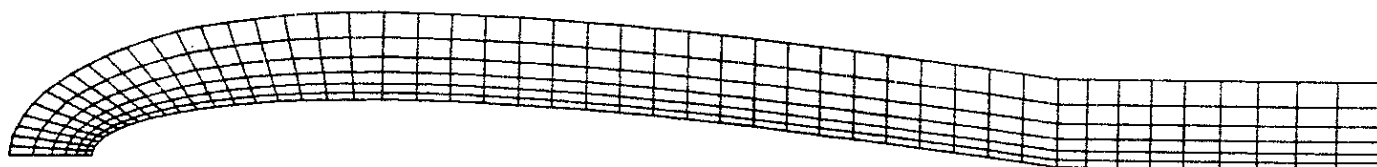


Figure 2.5 : Détail des 41 points sur le profil du maillage N41



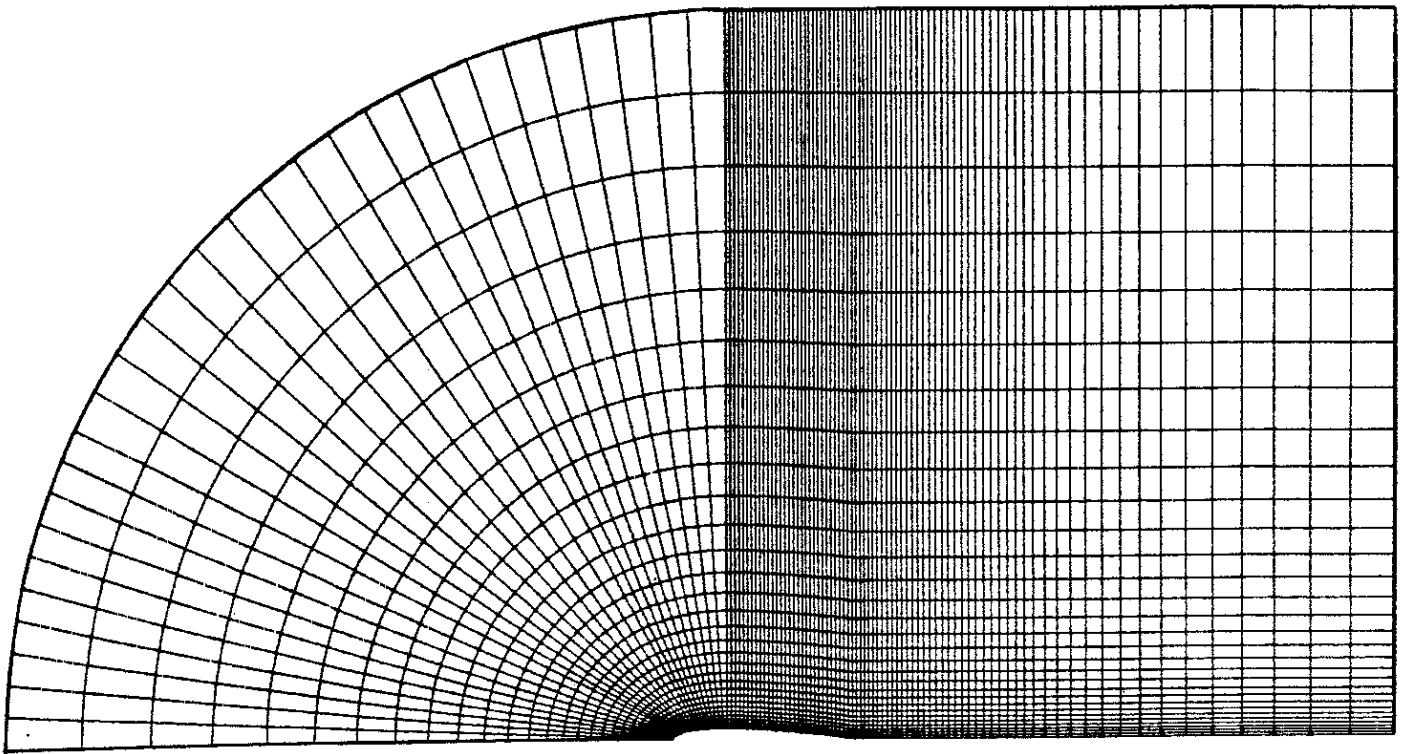


Figure 2.6 : Maillage N61 autour du profil NACA 0012

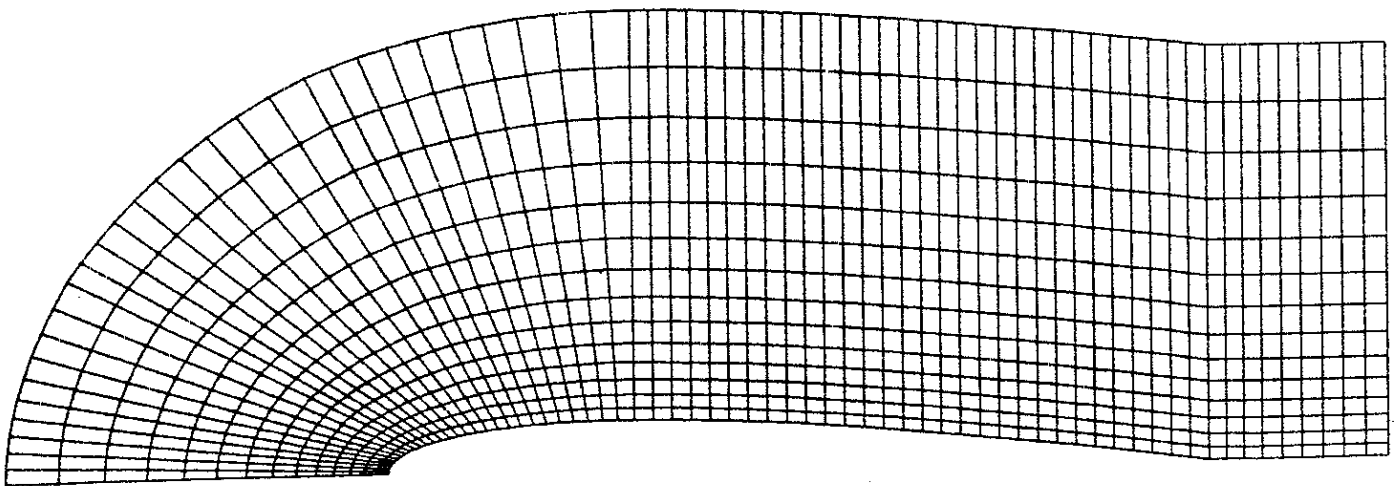


Figure 2.7 : Détail des mailles du maillage N61 près du profil.

Nous avons simplement utilisé le mailleur MEFISTO développé par A. PERRONNET [42] à l'Université Paris VI, très souple d'emploi et qui permet en peu de temps de générer un maillage cohérent. Comme contrainte essentielle, nous avons voulu garder des mailles régulières le long du profil. Quatre maillages de plus en plus raffinés ont été utilisés (figures 2.2 à 2.7) et comparés dans le tableau ci-dessous :

| Maillage du NACA 0012 | Nombre de points sur le profil | Nombre d'éléments      | Nombre de sommets      |
|-----------------------|--------------------------------|------------------------|------------------------|
| N11                   | 11                             | $18 \times 5 = 90$     | $19 \times 6 = 114$    |
| N21                   | 21                             | $35 \times 10 = 350$   | $36 \times 11 = 396$   |
| N41                   | 41                             | $70 \times 20 = 1400$  | $71 \times 21 = 1491$  |
| N61                   | 61                             | $105 \times 30 = 3150$ | $106 \times 31 = 3286$ |

### 3 - COMPARAISON DES PERFORMANCES DES DIFFERENTS DECENTRAGES

Les cas tests qui suivent sont classiques depuis le workshop du GAMM organisé par RIZZI-VIVIAND [43]. Nous présentons d'une part des cartes d'isovaleurs du nombre de Mach, et d'autre part des courbes de coefficient de pression  $-C_p$  le long du profil. Celui-ci est défini par :

$$(2.3) \quad -C_p = \frac{p_\infty - p}{\frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2}$$

avec une expression de la pression donnée par :

$$(2.4) \quad p = \frac{1}{\gamma M_0^2} \rho^\gamma .$$

Pour calculer le champ de densité le long du profil, nous utilisons un champ interpolé aux sommets du maillage à partir du champ calculé dans les éléments, par une simple moyenne (cf. figure 2.8) :

$$(2.5) \quad \tilde{\rho}_I = \frac{\sum_j \rho_j \cdot \text{vol}(K_j)}{\sum_j \text{vol} K_j}$$

où la somme sur  $j$  est étendue aux éléments  $K_j$  possédant le noeud  $I$  comme sommet.

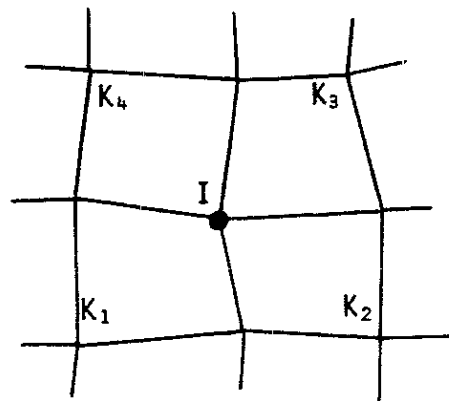


Figure 2.8 : Interpolation éléments → sommets

a) Calcul à  $M_\infty = 0.72$

-----

Pour ce cas test, l'écoulement obtenu est entièrement subsonique (bien que le nombre de Mach maximal sur le profil soit très proche de 1). Aucun des décentrages n'est efficace (i.e.  $\bar{\rho} \equiv \rho$ ), et

un tel cas de calcul permet de tester la plupart des sous-programmes nécessaires à l'algorithme de point fixe (dont une variante a déjà été utilisée au chapitre 3). Quelques résultats significatifs sont rassemblés sur les figures 2.9 à 2.11. Une carte du nombre de Mach (figure 2.9) montre la classique décélération au bord d'attaque (le bout de l'aile étant en toute rigueur un point de vitesse nulle) suivie d'une détente dans la zone où l'épaisseur du profil augmente ( $0 \leq x \leq 0,3$ ) puis d'une décélération jusqu'au bord de fuite. Les courbes de convergence (figure 2.10) montrent qu'à partir du maillage N21, la vitesse de convergence de l'algorithme dépend peu du choix du maillage ; les différences en temps de calcul sont alors essentiellement dues à la taille intrinsèque des systèmes linéaires à résoudre (où le nombre des inconnues est de l'ordre du nombre de sommets, soit 114, 396, 1491, 3286 pour nos quatre maillages). Les courbes de coefficient de pression sur le profil (figure 2.11) illustrent enfin clairement la convergence des résultats au fur et à mesure qu'on raffine le maillage.

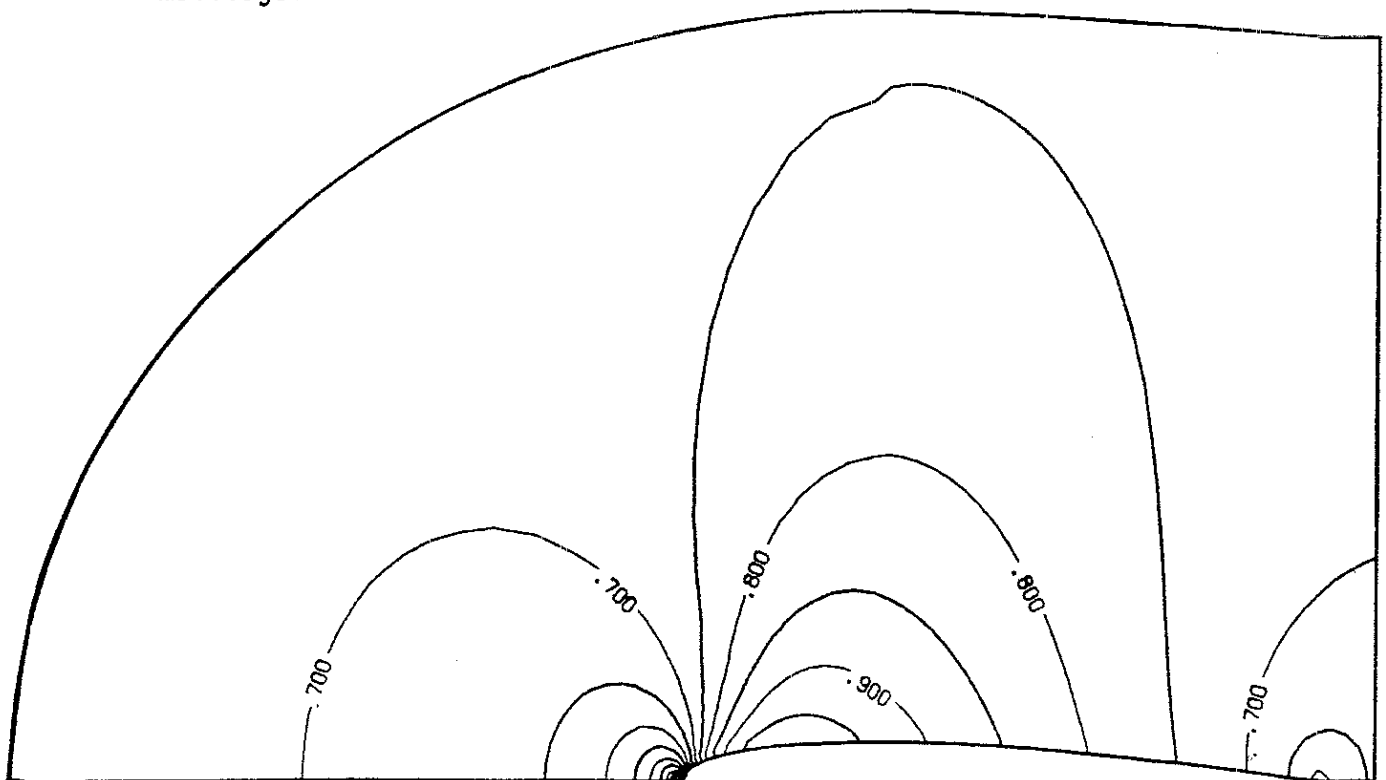


Figure 2.9 : NACA 0012,  $M_\infty = 0.72$ . Isovaleurs du nombre de Mach (maillage N61)

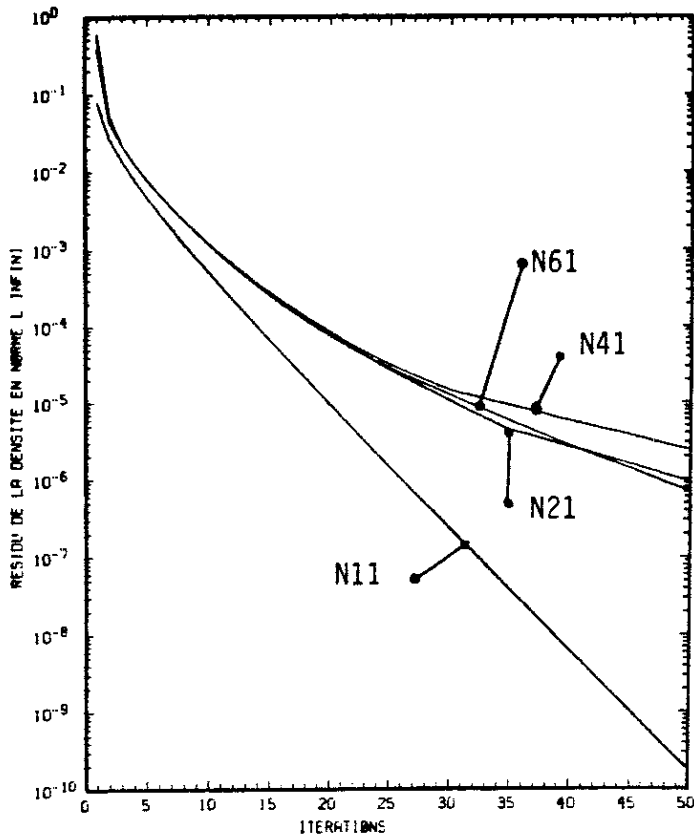


Figure 2.10 : NACA 0012,  $M_\infty = 0.72$   
 Courbes de convergence

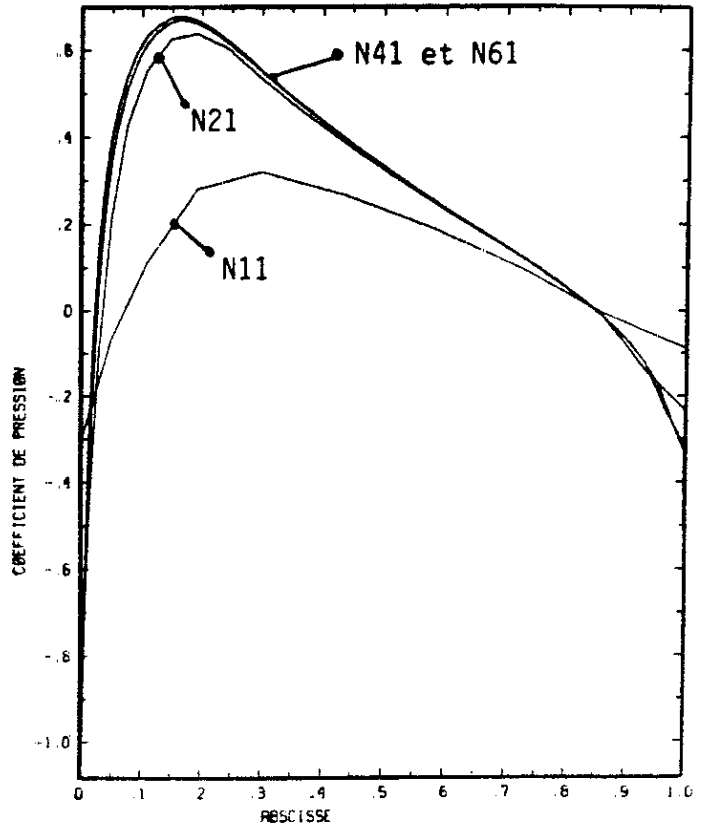


Figure 2.11 : NACA 0012,  $M_\infty = 0.72$   
 Courbes de  $C_p$  sur le profil

b) Calcul à  $M_\infty = 0.80$   
 -----

L'écoulement obtenu lors de ce test présente une poche super-sonique et un choc au milieu du profil. Si tous les décentrages permettent le calcul d'une solution dans le cas des maillages les plus grossiers (N11 et N21), nous avons constaté que les décentrages 1, 2 et 4 font diverger l'algorithme de point fixe pour le maillage N41. Nous résumons les comportements obtenus dans le tableau ci-dessous :

| Maillage<br>du NACA 0012 | $M_\infty = 0.80$ . Choix du décentrage |          |          |          |
|--------------------------|---|----------|----------|----------|
|                          | 1                                       | 2        | 3        | 4        |
| N11                      | converge                                | converge | converge | converge |
| N21                      | converge                                | converge | converge | converge |
| N41                      | diverge                                 | diverge  | converge | diverge  |
| N61                      | /                                       | /        | converge | /        |

Ce test qualifie pour la suite le seul décentrage n° 3 (d'Amara, par fronts) parmi les quatre proposés. En effet, la divergence de l'algorithme (par la donnée de vitesses trop élevées lors du calcul de la densité par la relation (1.11)) empêche toute autre utilisation des décentrages n° 1, 2, 4. Notons toutefois que l'on teste ici l'ensemble de l'algorithme de point fixe I.5 et qu'en particulier la stabilité des divers décentrages est liée de façon intime au choix de l'algorithme pour résoudre le problème non-linéaire. Le choix d'un point fixe est effectivement très frustré et plusieurs auteurs (WONG-HAFEZ [49] par exemple) l'ont limité au cadre subsonique, où son emploi est classique (voir le chapitre 3). On peut penser que le caractère implicite du schéma (1.25) donne la raison essentielle de la stabilité lors du raffinement du maillage, mais une analyse complète du phénomène paraît actuellement hors de portée.

c) Calcul à  $M_\infty = 0.85$   
-----

C'est un cas de calcul avec un choc assez fort, l'écoulement est supersonique sur plus des deux tiers du profil. Nous avons effectué ce test avec le décentrage par fronts d'Amara (n° 3) uniquement. Les résultats sur les maillages N11 à N41 sont satisfaisants, alors qu'avec le maillage N61, la méthode n'a pas convergé après 200 itérations non linéaires (soit 260s CPU sur Cray 2) sans toutefois diverger. Pour assurer la convergence d'un tel calcul présentant un choc fort, sur des maillages fins, on peut envisager de coupler l'algorithme du I-5° avec la méthode multigrille, comme d'autres auteurs l'ont déjà effectué (BRANDT [4], DECONINCK-HIRSCH [12], BREDIF [5] entre autres).

4 - ANALYSE DES RESULTATS

a) Calcul à  $M_\infty = 0.80$   
-----

Dans ce paragraphe, nous étudions les résultats présentés sur les figures 2.12 à 2.14. Les courbes d'iso-mach (figure 2.12) montrent bien le caractère "shock capturing" du schéma, puisque le choc est étalé sur deux éléments finis environ. De plus, la convergence est de plus en plus lente au fur et à mesure que le nombre de points du maillage augmente (figure 2.13). Nous concentrons maintenant notre analyse sur les courbes de la figure 2.14 qui représentent le coefficient de pression sur le profil pour les trois maillages les plus fins. Les figures suivantes 2.15 et 2.16 reprennent ce même coefficient  $C_p$ , et sont tirées de RIZZI-VIVIAND [43] et AMARA [1]. L'ensemble de ces courbes a le même

aspect qualitatif, et en particulier le choc est situé au demi-profil pour tous les auteurs. Comme le schéma capture le choc, la vérification des relations de Rankine-Hugoniot n'est pas simple ; de plus, il est matériellement difficile de superposer rigoureusement des courbes issues de références différentes. Nous avons reporté figure 2.17 le coefficient de pression pris en quatre points qui caractérisent la structure du choc (valeur extrême de  $C_p$ , valeur du  $C_p$  directement en amont du choc, directement en aval du choc, minimum relatif qui suit le choc) et comparé nos valeurs avec celles d'Amara et de Jameson et al (figure 2.15). Pour le maillage N61 le  $C_p$  minimum est correct, et le  $C_p$  au maximum de l'overshoot est un peu fort. Par contre, la relation de saut est correctement vérifiée (comparer les  $C_p$  en pied de choc aux  $C_p$  théoriques obtenus pour un choc droit de  $C_p$  amont égal à -0.78 ou -0.84). Rappelons l'extrême sensibilité de tous ces résultats au choix de l'opérateur d'interpolation pour passer des valeurs des champs au centre des mailles à une valeur le long du profil, comme J.M. DUPUY l'avait illustré dans [15] ; le choix que nous avons fait (relation (2.5)) a tendance à adoucir les résultats, alors qu'Amara calculait les champs sur le profil par une extrapolation. Aussi les comparaisons quantitatives tirées de la figure 2.17 doivent-elles rester prudentes.

b) Calcul à  $M_\infty = 0.85$   
 -----

La figure 2.18 donne l'allure de la répartition du nombre de Mach sur l'ensemble du domaine de calcul, et un détail (faisant apparaître le maillage N41) est repris figure 2.19. Les courbes de convergence (figure 2.20) montrent bien les deux comportements présents lors



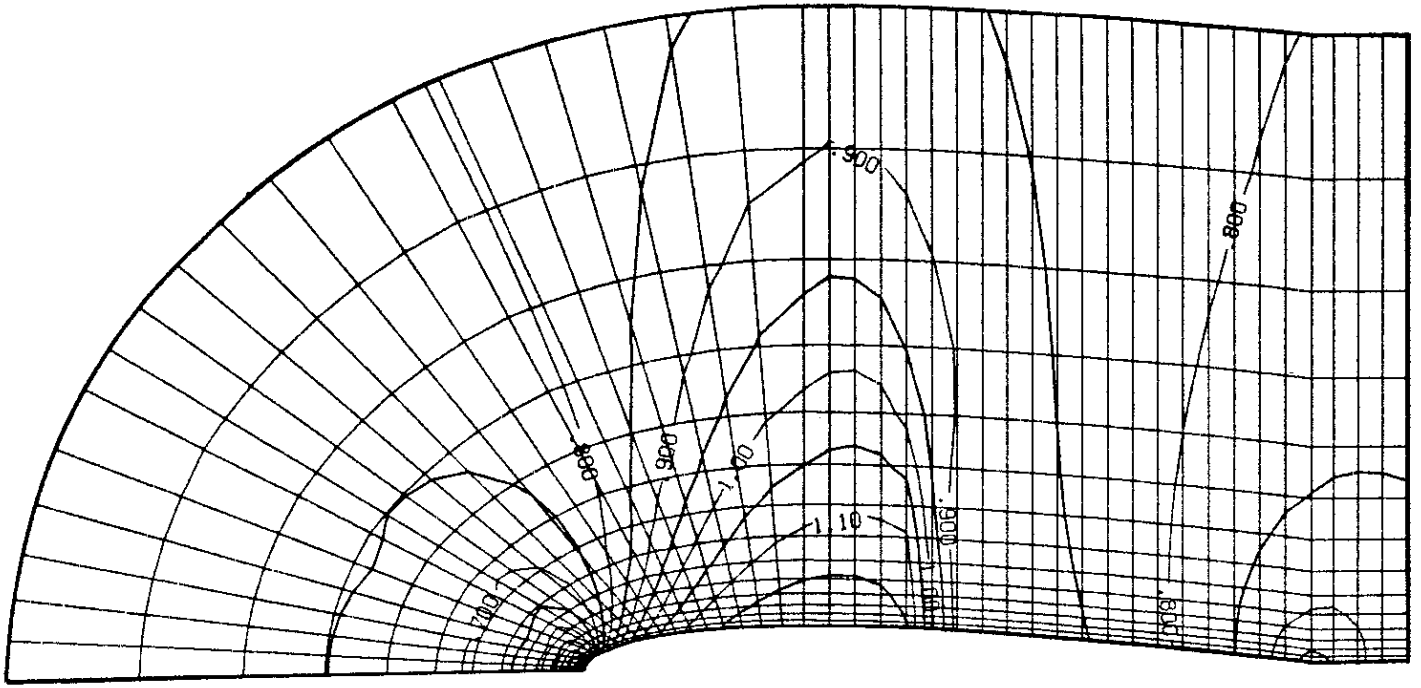


Figure 2.12 : NACA 0012,  $M_\infty = 0.80$ . Isovaleurs du nombre de Mach (maillage N41)

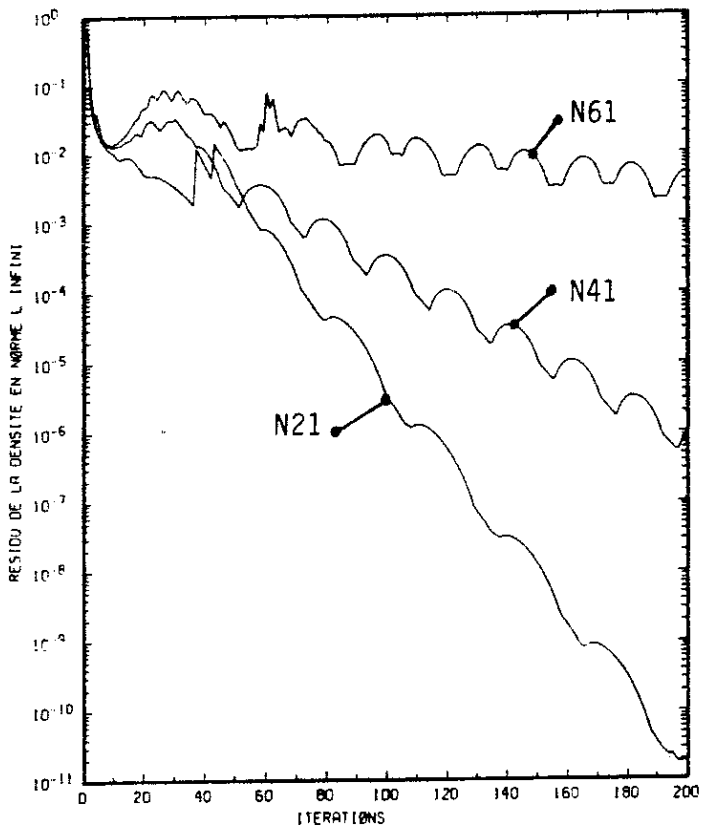


Figure 2.13 : NACA 0012,  $M_\infty = 0.80$   
Courbes de convergence

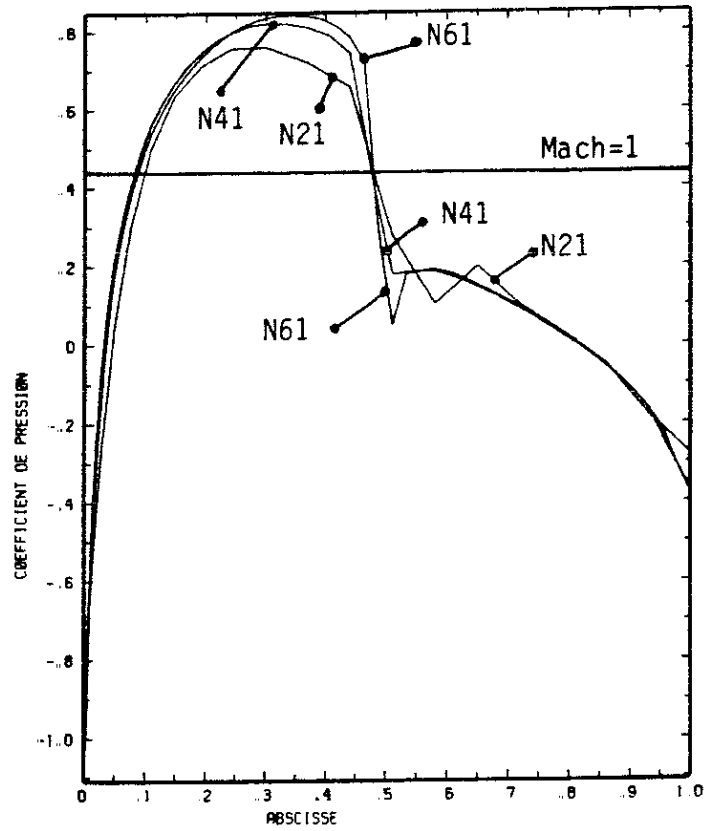


Figure 2.14 : NACA 0012,  $M_\infty = 0.80$   
Courbes de  $C_p$  sur le profil

des calculs transsoniques : une période chaotique (100 itérations de point fixe pour le maillage N41) où la zone supersonique se développe et où le choc se stabilise, suivie d'oscillations de grande amplitude au cours desquelles le résidu décroît. La position du choc que nous observons sur la courbe des  $C_p$  (figure 2.21) est conforme à celle des autres auteurs (figures 2.22 et 2.23) et se situe à  $0.75 \pm 0.05$ . Le profil du choc est plus régulier que dans le cas précédent ( $M_\infty = 0.80$ ), et nos résultats, très voisins de ceux obtenus par Amara, s'insèrent sans problème dans la fourchette des auteurs du GAMM workshop de 1979 [43]. Les relations de saut sont correctes elles aussi, puisque le  $C_p$  aval observé (0.22) est intermédiaire entre les coefficients de pression avals théoriques (0.20;0.25) calculés à partir des valeurs du  $C_p$  en amont du choc (cf. figure 2.24).

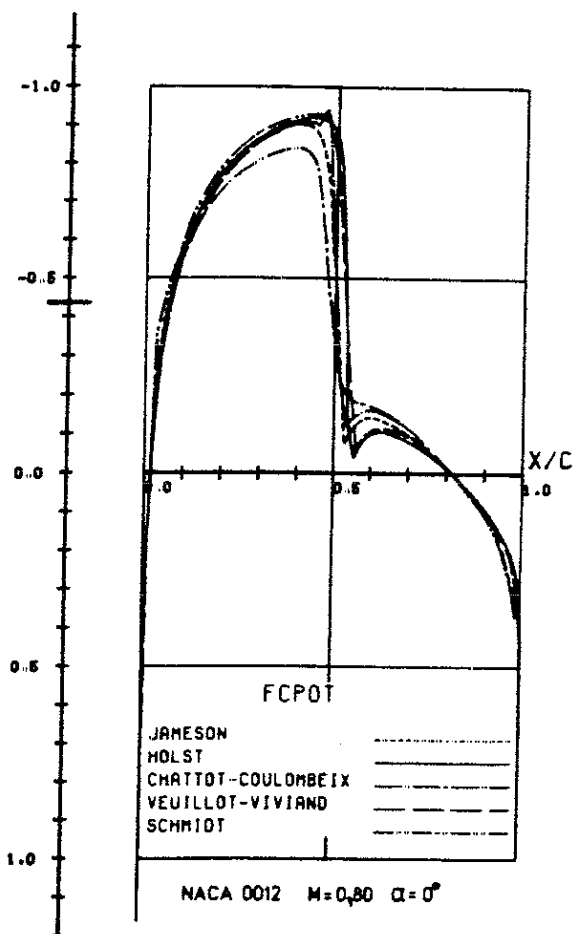


Figure 2.15 : Courbes de  $C_p$  sur le profil, référence [43]

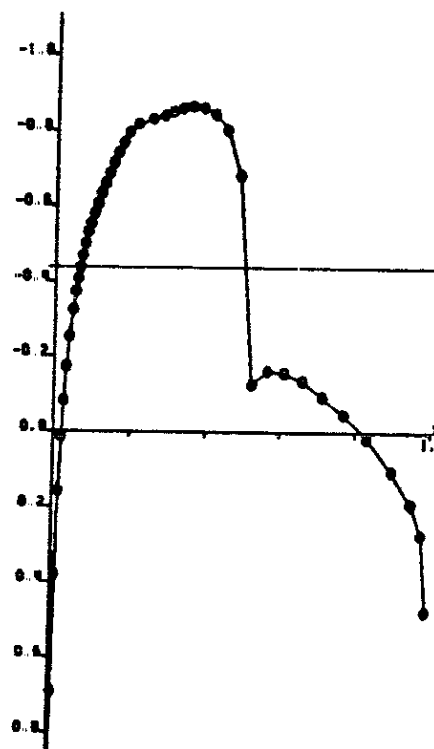
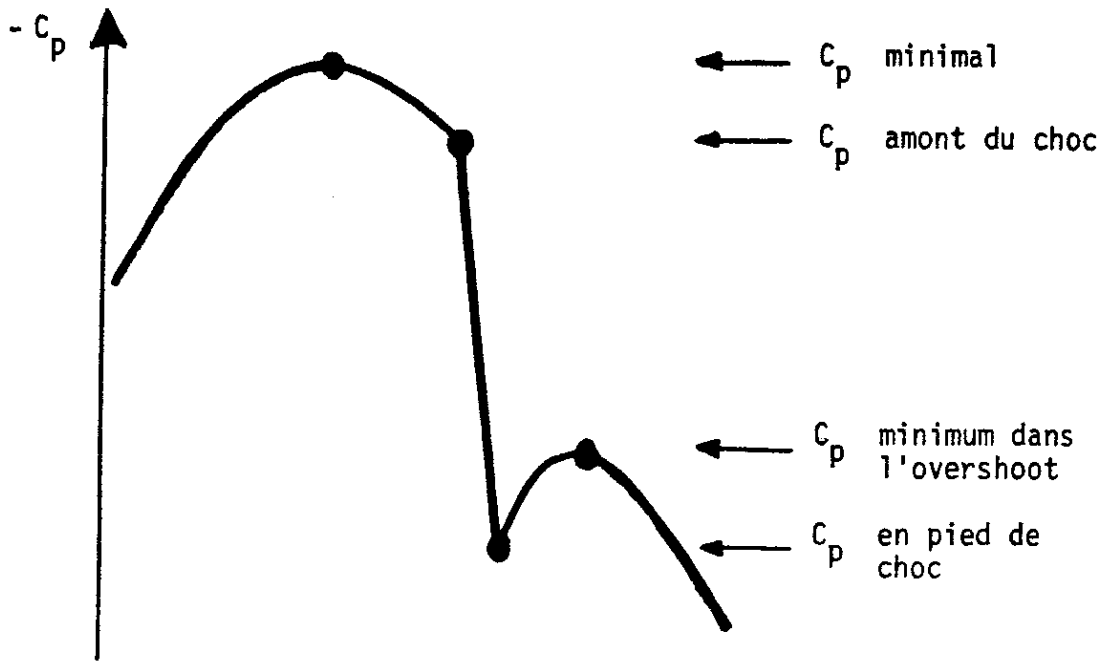


Figure 2.16 : NACA 0012,  $M_\infty = 0,80$   
Courbes de  $C_p$  obtenues par AMARA [1]

## 5 - CONCLUSION

Nous avons testé la méthode de calcul présentée dans la première partie dans le cas d'un écoulement autour d'un profil NACA 0012 (aérodynamique externe). Seul le décentrage par fronts n° 3 (relation (1.25)) proposé par Amara a permis de mener à bien des calculs transsoniques sur une famille de maillages de plus en plus fins. Les résultats obtenus alors à  $M_\infty = 0.80$  et  $0.85$  sont conformes qualitativement et quantitativement aux résultats publiés antérieurement ([43],[1]). Ce décentrage par fronts a été ensuite seul utilisé pour l'étude du problème intérieur.



|                       | $C_p$ minimal | $C_p$ associé au $C_p$ minimal par Rankine-Hugoniot | $C_p$ amont du choc | $C_p$ associé au $C_p$ amont par Rankine-Hugoniot | $C_p$ en pied de choc | $C_p$ minimum dans l'overshoot |
|-----------------------|---------------|---|---------------------|---|-----------------------|--------------------------------|
| maillage N41          | -.82          | -.053   | -.74                | -.13  | -.18                  | -.19                           |
| maillage N61          | -.84          | -.034   | -.78                | -.092   | -.05                  | -.19                           |
| Amara [1, maillage 3] | -.86          | -.014   | -.68                | -.19  | -.12                  | -.16                           |
| [43]                  | maxi          | -.84  | /                   | /   | -.13                  | -.16                           |
|                       | mini          | -.93  | +.054               | /   | /                     | -.10                           |

Figure 2.17 : NACA 0012,  $M_\infty = 0.80$

Structure du choc numérique

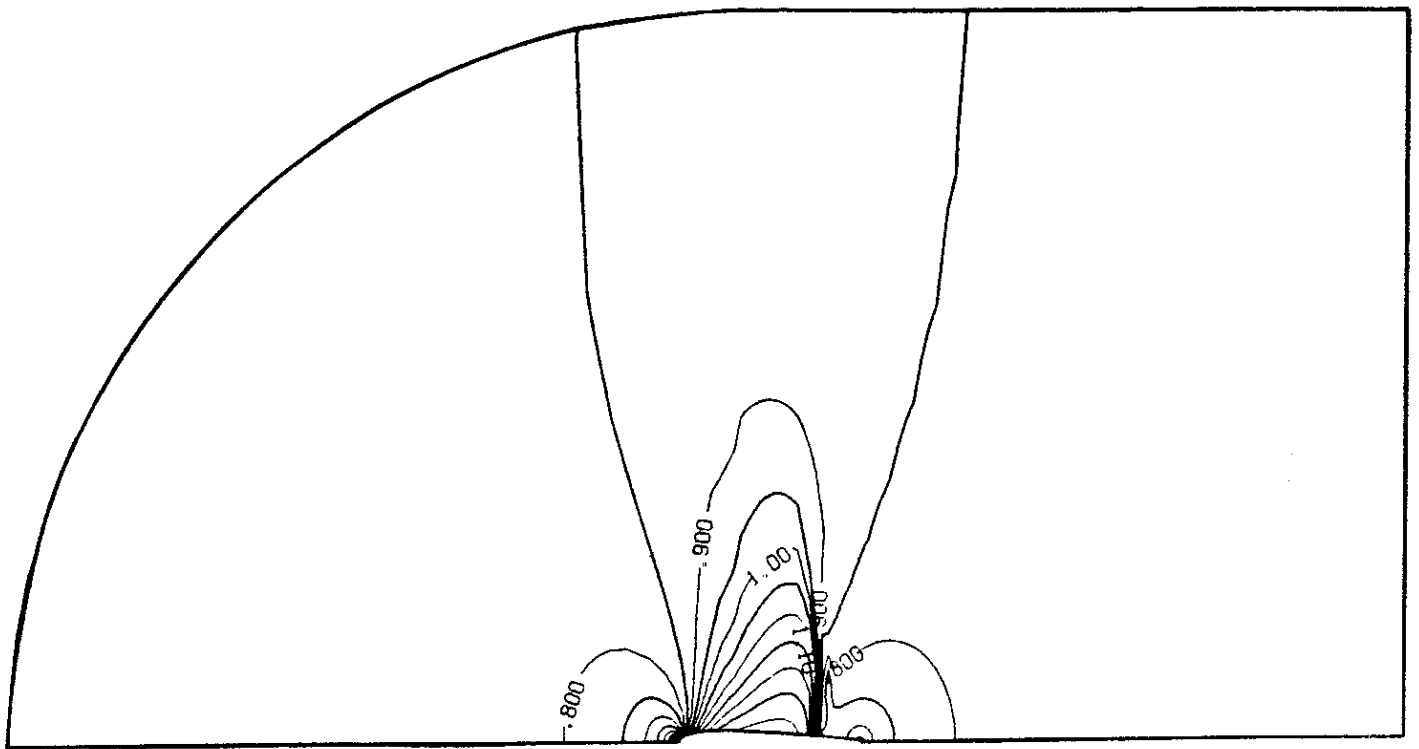


Figure 2.18 : NACA 0012,  $M_\infty = 0.85$ , maillage N41.  
Isovaleurs du nombre de Mach. Vue globale.

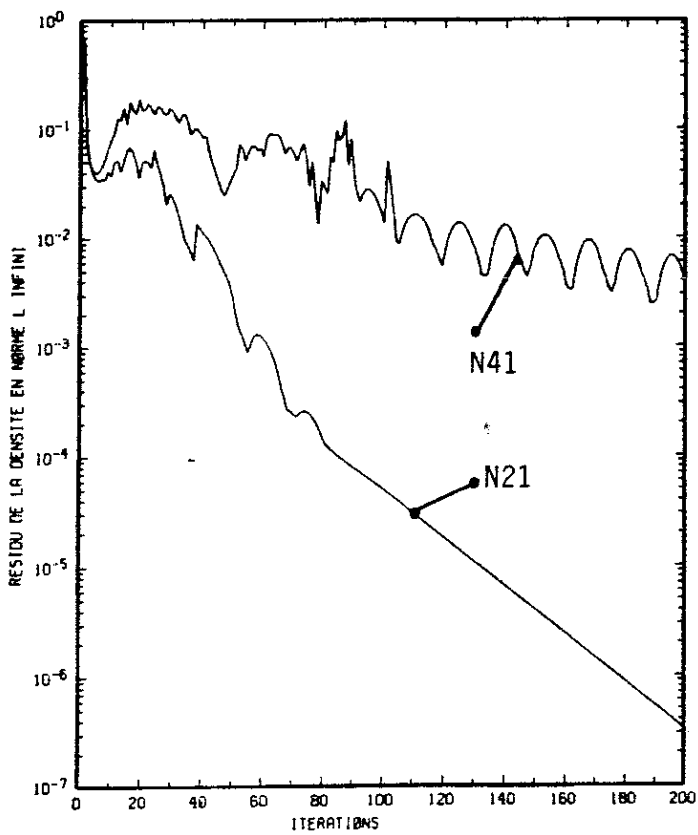


Figure 2.20 : NACA 0012,  $M_\infty = 0.85$   
Courbes de convergence

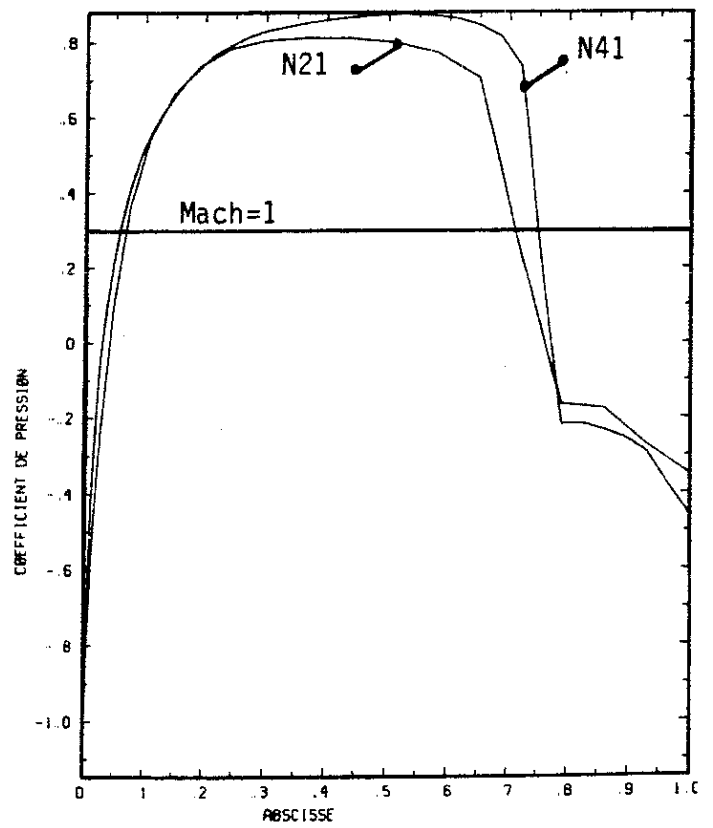


Figure 2.21 : NACA 0012,  $M_\infty = 0.85$   
Courbes de  $C_p$  sur le profil

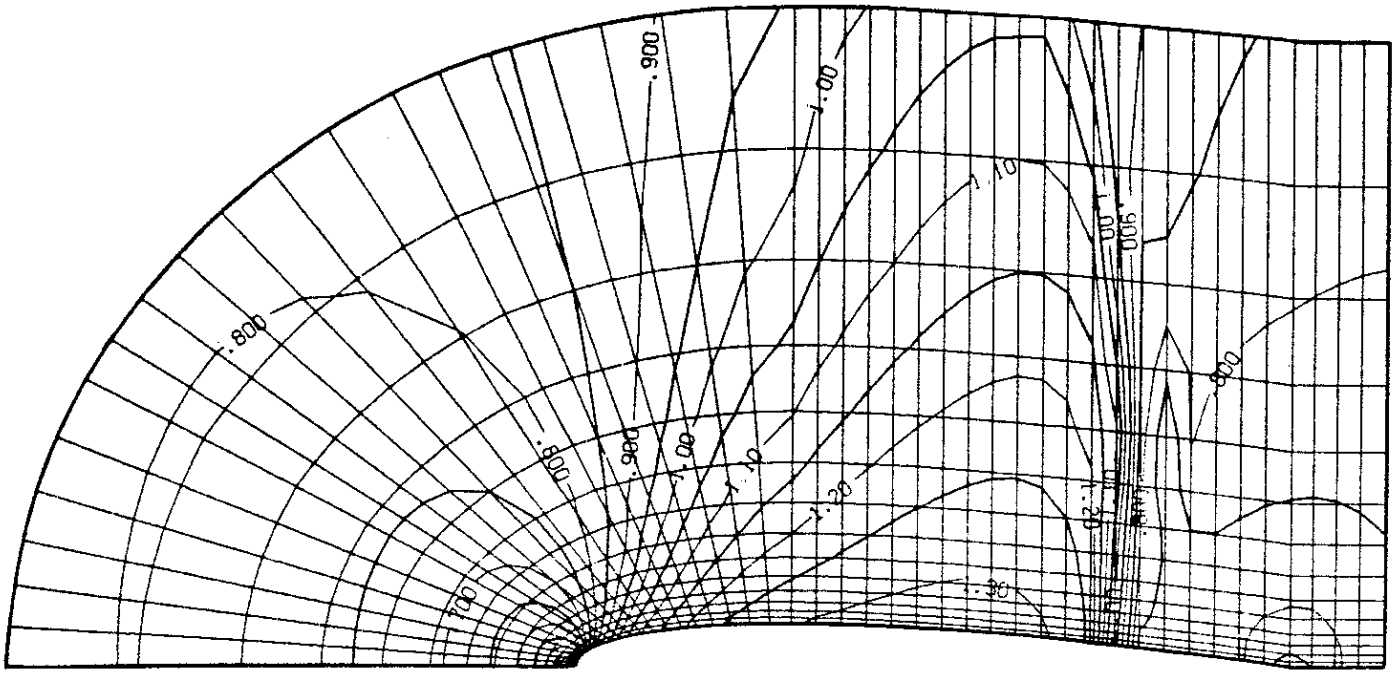


Figure 2.19 : NACA 0012,  $M_\infty = 0.85$ , maillage N41.  
Isovaleurs du nombre de Mach. Détail.

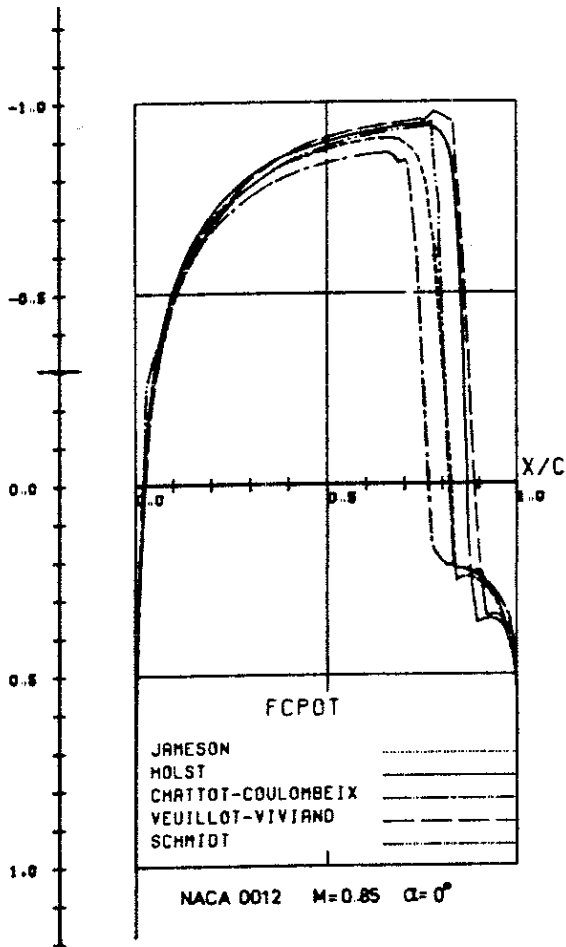


Figure 2.22 : Courbes de  $C_p$   
sur le profil, référence [43]

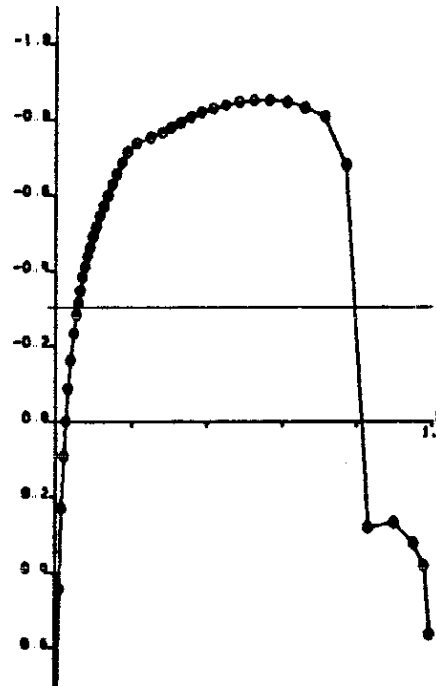
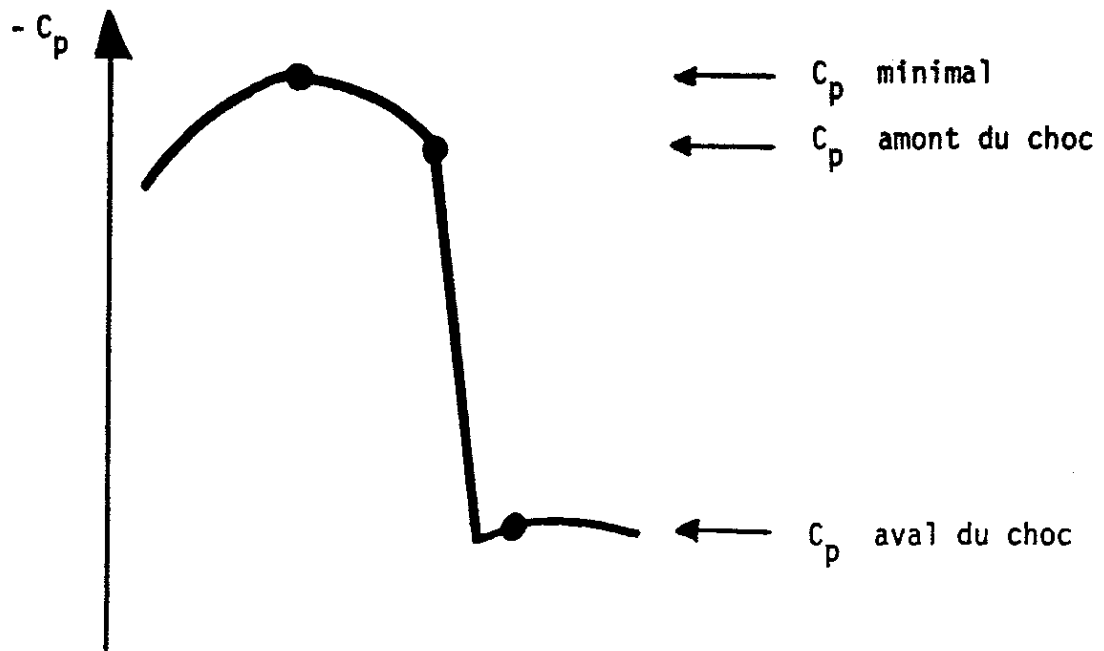


Figure 2.23 : NACA 0012,  $M_\infty = 0.85$ .  
Courbes de  $C_p$  obtenues par AMARA [1]



|                          | $C_p$ minimal | $C_p$ associé au $C_p$ minimal par Rankine-Hugoniot | $C_p$ amont du choc | $C_p$ associé au $C_p$ amont par Rankine-Hugoniot | $C_p$ aval du choc | Position du choc |
|--------------------------|---------------|---|---------------------|---|--------------------|------------------|
| Maillage N41             | -0.87         | .25   | -0.81               | .20   | .22                | {.70<br>.80      |
| Amara<br>[1, maillage 3] | -0.85         | .24   | -0.68               | .072  | .28                | .80              |
| [43] {                   | maxi          | .24   | /                   | /   | .36                | .88              |
|                          | mini          | -.95  | .34                 | /   | /                  | .20              |

Figure 2.24 : NACA 0012,  $M_\infty = 0.85$   
 Structure du choc numérique

### III - APPLICATION A UN PROBLEME D'AERODYNAMIQUE INTERNE

#### 1 - POSITION DU PROBLEME

Nous nous proposons d'appliquer la méthode décrite dans la partie I à un problème intérieur, et plus précisément à un écoulement transsonique dans une tuyère convergente-divergente. Tous les calculs ont été effectués sur le canal du GAMM de RIZZI-VIVIAND [43] décrit au chapitre 3, et proposé initialement par LAVAL [32].

#### a) Rappels monodimensionnels (cf. chapitre 1)

Dans une approximation quasi monodimensionnelle, la conservation du débit total le long de l'abscisse  $x$  s'écrit simplement :

$$(3.1) \quad \rho(x) u(x) A(x) \equiv D$$

où  $A(x)$  désigne l'aire de la tuyère à l'abscisse  $x$ . On en déduit de façon évidente la variation du flux de masse

$$(3.2) \quad q(x) = \rho(x) u(x)$$

le long du canal. Si de plus l'évolution est d'enthalpie totale constante et d'entropie imposée, la densité et le flux de masse sont reliés par

$$(3.3) \quad q = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho^2 - \frac{2}{\gamma-1} \rho^{\gamma+1}}$$

obtenue en fixant dans (1.11) le nombre de Mach de référence  $M_0$  à 1 de sorte que tous les champs sont des grandeurs adimensionnelles qui satisfont



$$(3.4) \quad \rho = u = 1 \quad \text{si} \quad q = 1 \quad (\text{état sonique})$$

comme l'illustre la figure 3.1.

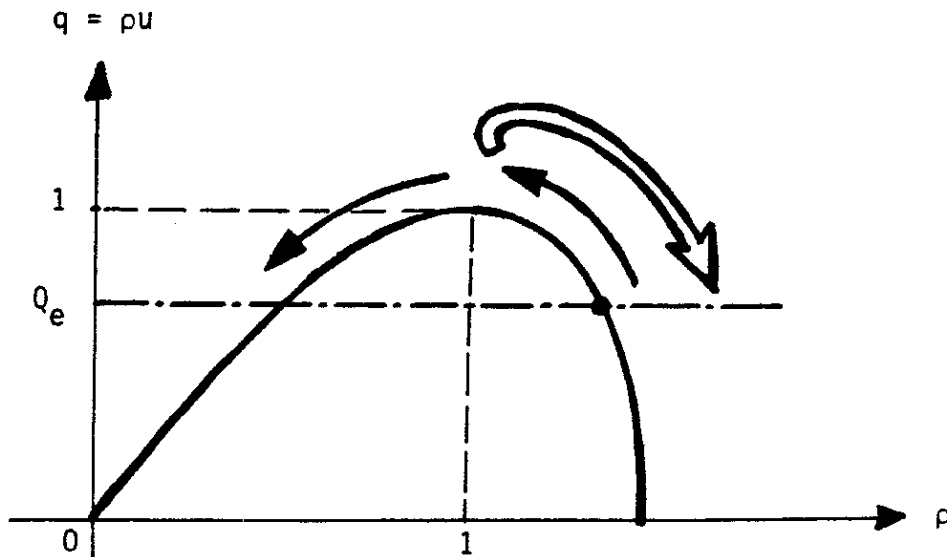


Figure 3.1 : Loi densité-flux de masse pour un écoulement isentropique isenthalpique

On a alors très simplement l'alternative suivante (cf. théorème de Hugoniot) :

- ou le flux de masse au col est strictement inférieur à 1 et l'écoulement est partout subsonique ( $\rho > 1$ ) ou partout supersonique ( $\rho < 1$ ).
- ou le flux de masse au col vaut exactement 1 et le débit est fixé (figure 3.2)

$$(3.5) \quad D = A_c$$

ainsi que le flux de masse à l'entrée de la tuyère

$$(3.6) \quad Q_e = \frac{A_c}{A_e}$$

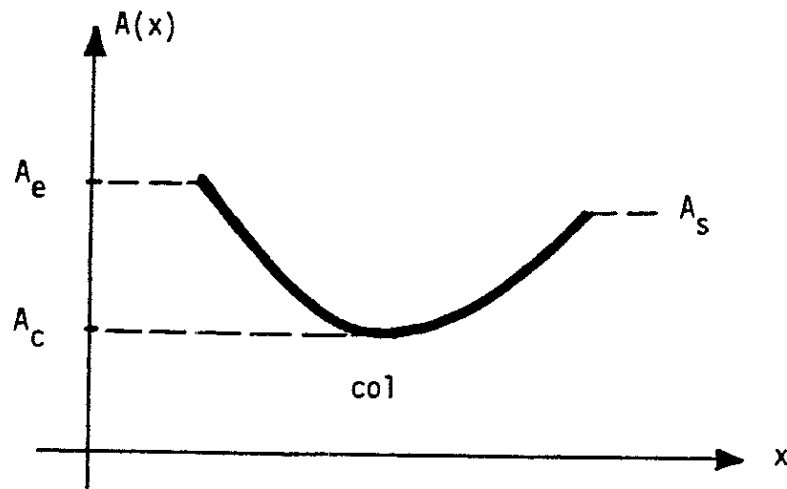


Figure 3.2 : Tuyère convergente-divergente

donc l'état physique d'entrée  $\rho_e$ , par résolution de l'équation (3.3) par rapport à  $\rho$ , avec comme donnée  $q = Q_e$ . Parmi les quatre régimes qui sont alors a priori possibles, deux sont physiquement intéressants, et sont obtenus en supposant l'écoulement subsonique à l'entrée. Le nombre de Mach est alors complètement défini, et vaut par exemple

$$(3.7) \quad M_e = 0.8499$$

pour le canal du GAMM (puisque  $A_0 = 2.073$  et  $A_c = 2.031$ ). Si l'écoulement est supersonique dans le divergent, on explore dans le plan de phase  $(\rho, q)$  la courbe de la figure 3.1 selon la flèche en trait simple, et le nombre de Mach en sortie est encore fixé par la géométrie ( $M_s = 1.1637$  pour le canal du GAMM), alors que si le fluide demeure subsonique dans le divergent (évolution représentée par la flèche en double trait sur la figure 3.1) la pression croît à nouveau après le col.

Pour le canal du GAMM, le rapport  $\Pi$  de la pression (statique) à la pression de vitesse nulle (pression génératrice) vaut dans ce dernier cas

$$(3.8) \quad \Pi = 0.623512$$

selon cette analyse.

Nous retiendrons de ces rappels élémentaires que lorsque le débit est maximal (on dit que la tuyère est bloquée, ou amorcée), l'écoulement sonique au col peut déboucher sur un écoulement subsonique ou un écoulement supersonique dans le divergent suivant la valeur de la pression en sortie.

#### b) Coefficient de débit

-----

Le problème bidimensionnel est bien entendu beaucoup plus complexe. La conservation de la masse (1.2) n'entraîne plus la simple relation algébrique (3.1), et dans la formule (3.3),  $q$  désigne seulement le module du flux de masse. Toutefois on peut majorer de façon simple le débit total.

#### PROPOSITION 3.1

*Les grandeurs physiques étant adimensionnalisées de sorte que la relation (3.4) soit satisfaite, le débit total maximal  $D_{\max}$  passant dans la tuyère est inférieur à la section du col :*

$$(3.9) \quad D_{\max} \leq A_c$$

### DEMONSTRATION

D'après (1.2), le débit n'est pas fonction de la surface le long de laquelle on intègre le champ  $\rho\vec{u}$  ; si on choisit la surface plane  $\Sigma$  définie par le col, on a  $D = \int_{\Sigma} \rho\vec{u} \cdot \vec{n} d\gamma$  et grâce à Cauchy-Schwarz et à (3.3), il vient :

$$|\rho\vec{u} \cdot \vec{n}| \leq q(\rho) \leq 1$$

$$\text{d'où } D \leq \int_{\Sigma} d\gamma \equiv A_c \quad \blacksquare$$

DEFINITION 3.1 (voir aussi CARRIERE [7])

Le coefficient de débit  $C_D$  est le rapport du débit maximal passant dans la tuyère à la section du col (avec l'adimensionnalisation choisie).

$$(3.10) \quad C_D = \frac{D_{\max}}{A_c} \quad .$$

Rappelons que ce coefficient est a priori inconnu et qu'en particulier le débit maximum est inconnu. Des méthodes de calcul approché de  $C_D$  ont été développées, pour lesquelles nous renvoyons à HALL [28], KLIEGEL-LEVINE [31], CUFFEL-BACK-MASSIER [11], DUTTON-ADDY [16].

#### c) Conditions aux limites

-----

Les conditions aux limites que l'on peut se donner pour l'étude d'une tuyère sont connues de façon semi-empirique. Suivant VIVIAND-VEUILLOT [48] par exemple, on peut prendre (figure 3.3) :

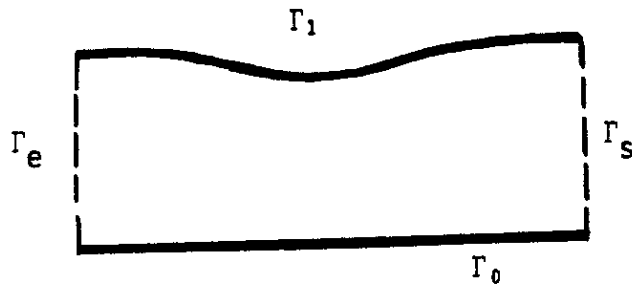


Figure 3.3 : Conditions aux limites

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_e \quad : \text{ direction de l'écoulement imposée} \\ \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 : \text{ condition de glissement} \\ \text{sur } \Gamma_s \quad : \text{ pression imposée (sortie subsonique), ou} \\ \quad \quad \quad \text{pas de condition (sortie supersonique).} \end{array} \right.$$

Ces conditions physiquement réalistes doivent être rapprochées des conditions (1.27) de notre algorithme de calcul :

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \bar{\psi} \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \vec{u} \cdot \vec{\tau} = g \quad \text{sur } \Gamma_N \end{array} \right.$$

Si l'on choisit  $\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ , alors la condition (3.12) entraîne (3.11) sur cette portion de la frontière, mais la réciproque est fautive : une donnée de Dirichlet pour la fonction courant exige la connaissance du débit total  $D$  qui passe dans la tuyère :

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \bar{\psi} = D \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right.$$

Si on suppose l'écoulement normal à la face d'entrée (ce qui est raisonnable pour le canal du GAMM puisque la section est uniforme dans un voisinage de l'entrée comme de la sortie), alors les conditions (3.11) et (3.12) dégénèrent sur  $\Gamma_e \subset \Gamma_N$  :

$$(3.14) \quad g = 0 \quad \text{sur } \Gamma_e$$

Par contre, la condition sur la surface de sortie est de nature beaucoup plus complexe (non-linéaire) et s'avère difficile à réaliser exactement comme le signalent VIVIAND et VEUILLOT dans leur mémoire [48]. Mais elle est physiquement essentielle, et on attend que la donnée de la pression de sortie perturbe un écoulement bloqué sur toute une partie du divergent, comme le propose la théorie monodimensionnelle. Pour nos calculs, nous avons simplement choisi

$$(3.15) \quad g = 0 \quad \text{sur } \Gamma_s$$

ce qui est physiquement correct dans ce cas comme nous l'avons rappelé plus haut. Les conditions (3.13) à (3.15) définissent toute une famille de problèmes, paramétrée par le débit total  $D$  (alors que le paramètre naturel était le nombre de Mach  $M_\infty$  pour le problème extérieur).

#### d) Maillages

-----

Nous avons utilisé deux maillages pour nos calculs numériques, d'une part celui proposé pour le GAMM workshop ( $72 \times 21$  points) qu'on notera G41 car il comporte 41 points sur le profil (cf. figure 2 du chapitre 3), et d'autre part un maillage plus grossier (noté G21) de  $35 \times 11$  points, présenté figure 3.4.

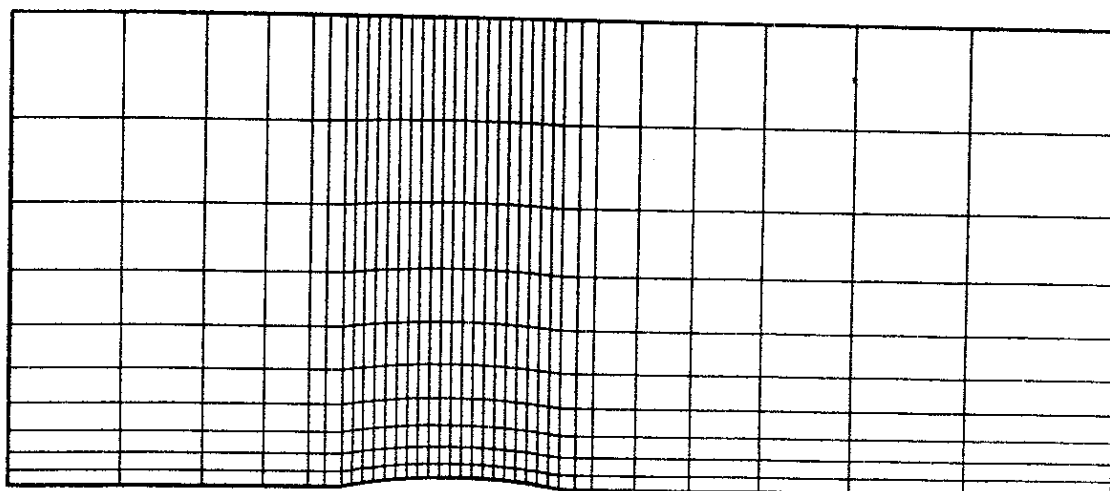


Figure 3.4 : Maillage G21 du canal du GAMM

## 2 - EXPERIENCES NUMERIQUES A L'AIDE DU MAILLAGE GROSSIER

Nous avons effectué une série d'expériences à l'aide du maillage G21, en faisant varier uniquement le débit total  $D$  (cf. équation (3.13)) entre deux tests. Tous les calculs présentés dans ce paragraphe ont convergé de façon tout à fait satisfaisante ; en effet, l'erreur relative pour les densités (relation (1.28)) a décru jusqu'à des valeurs arbitrairement petites ( $\epsilon = 10^{-4}$  ou moins, typiquement). Au fur et à mesure que le débit  $D$  augmente, la région du canal où l'écoulement est supersonique se développe ; de taille modérée au début ( $D = 2.$ ) puis de plus en plus importante ( $D = 2.01$  à  $D = 2.0293$ ). A partir d'une valeur critique (nous avons observé  $D = 2.0294$ ), le bulbe supersonique traverse tout le canal et, en particulier, le choc est présent sur toute une section de l'écoulement. Au delà ( $D$  supérieur à  $2.0295$ ), le choc disparaît de la solution convergée et laisse la place à un écoulement supersonique dans toute la section du canal qui suit le divergent.

Nous présentons sur les figures 3.5 à 3.7 les résultats détaillés (champ d'isovaleurs du nombre de Mach, courbes de Mach sur les parois inférieure et supérieure, courbes de convergence du résidu (1.28)) pour des valeurs du débit total où différents régimes caractéristiques ont été observés ( $D = 2.025$  ;  $D = 2.02945$  ;  $D = 2.0295$ ). Le tableau 3.8 regroupe l'ensemble des calculs effectués, et appelle plusieurs commentaires. Tout d'abord, aucun débit maximal  $D_{\max}$  n'est mis en évidence, puisque pour chacune des valeurs de  $D$ , le code a convergé. De plus, des valeurs de  $D$  supérieures à la valeur critique  $A_C$  (cf. Proposition 3.1) ont même été observées ! La raison est simple : le décentrage (1.25) introduit

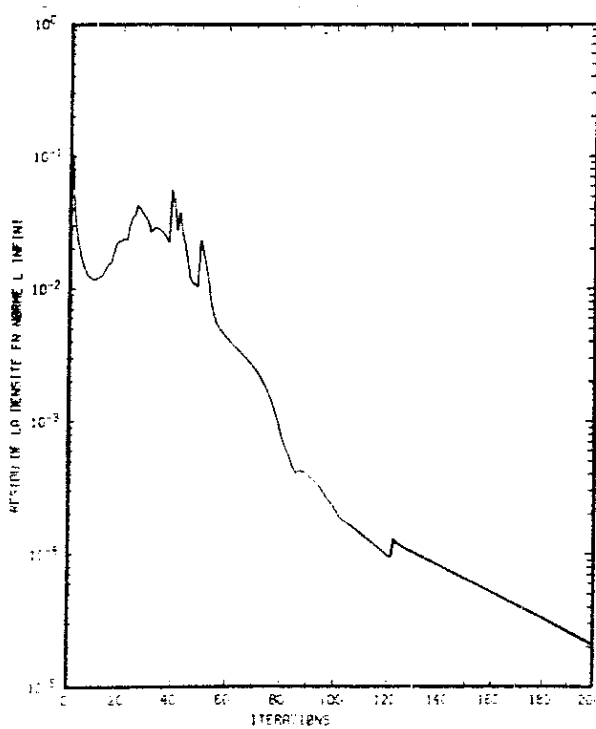
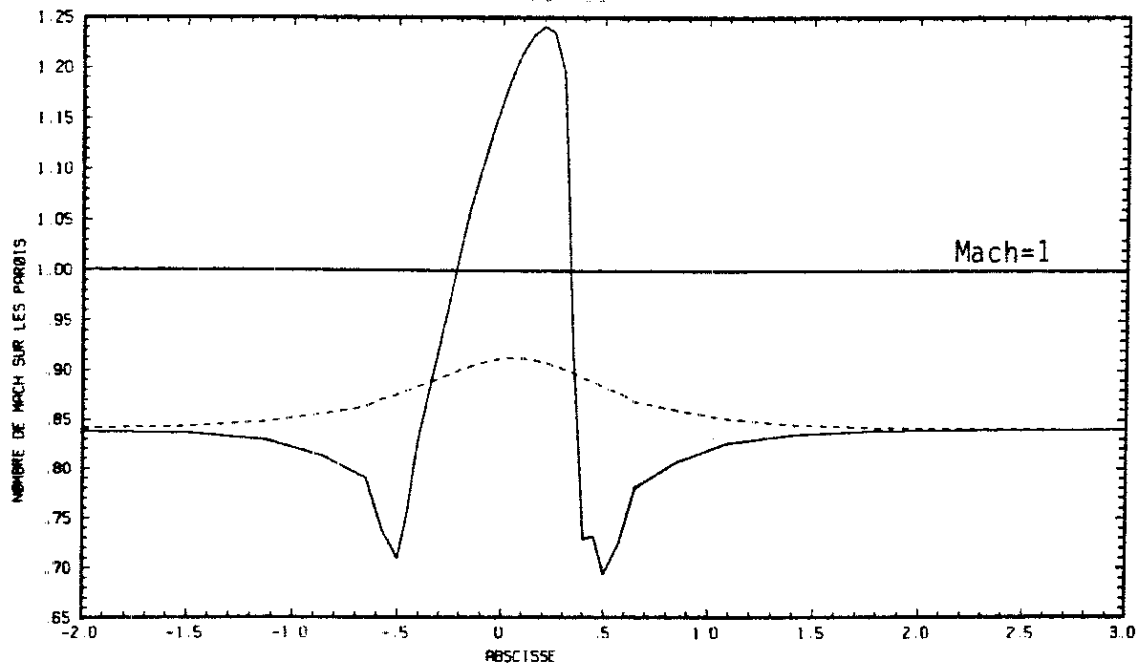
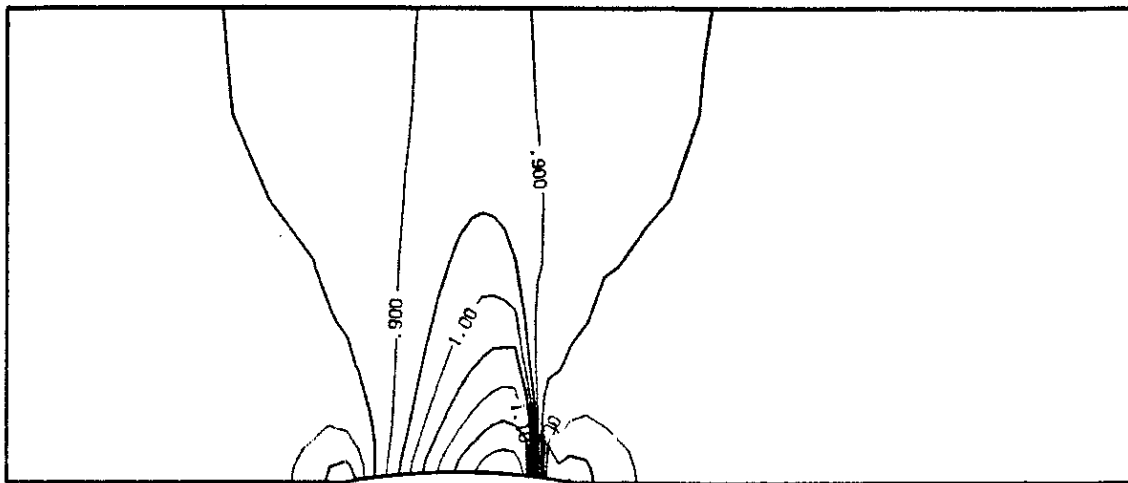


Figure 3.5

Canal du GAMM (G21)

Débit = 2.025

- Isovaleurs du nombre de Mach (en haut)
- Nombre de Mach sur les parois (au milieu)
- Courbe de convergence (ci-contre)



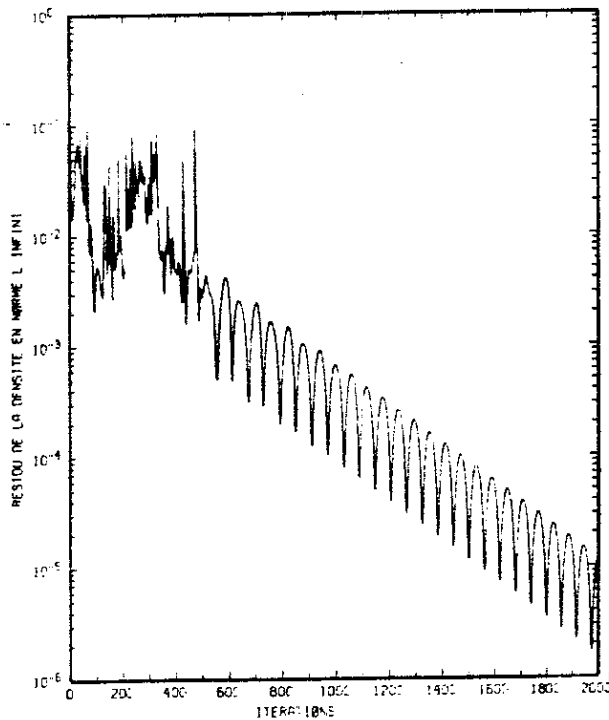
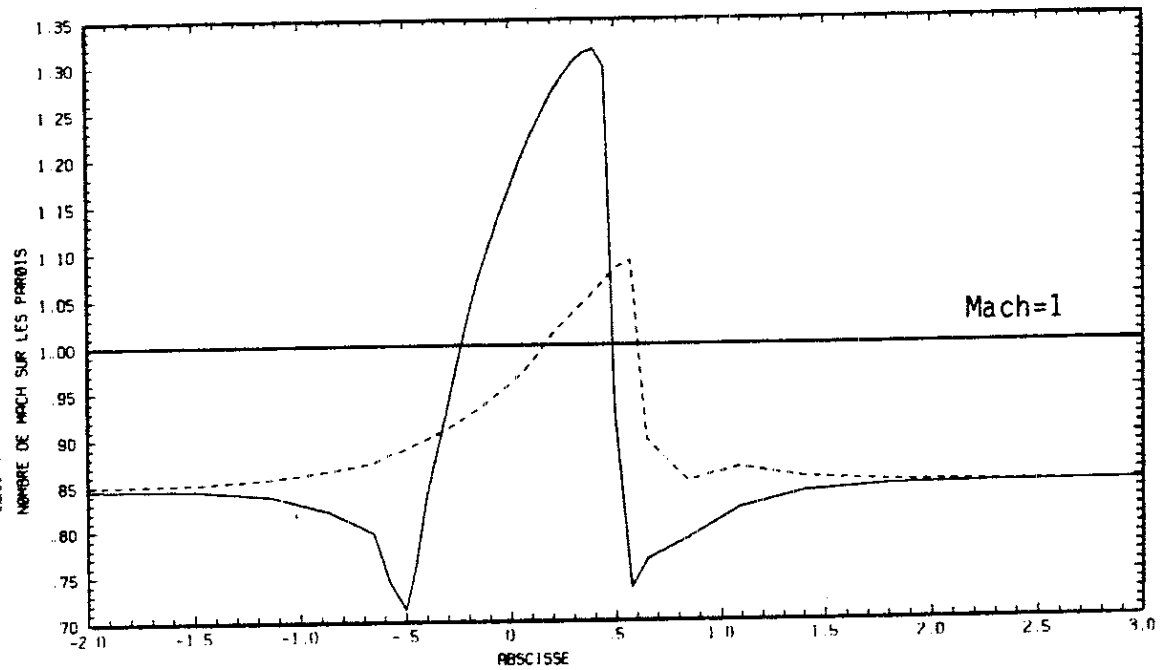
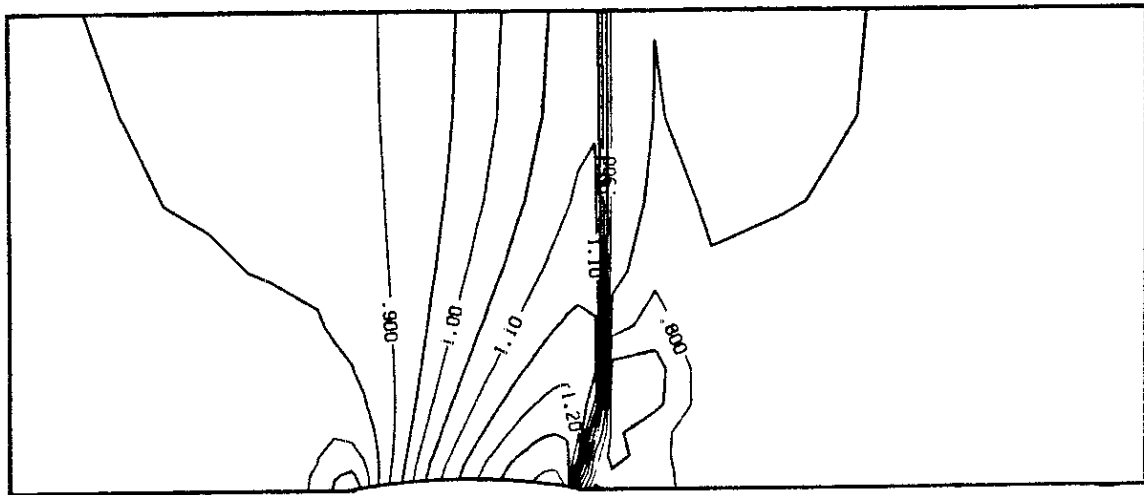
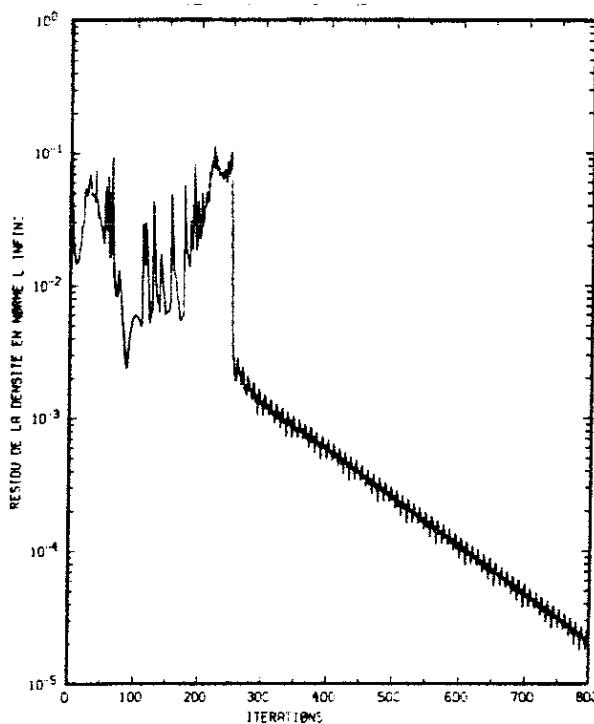
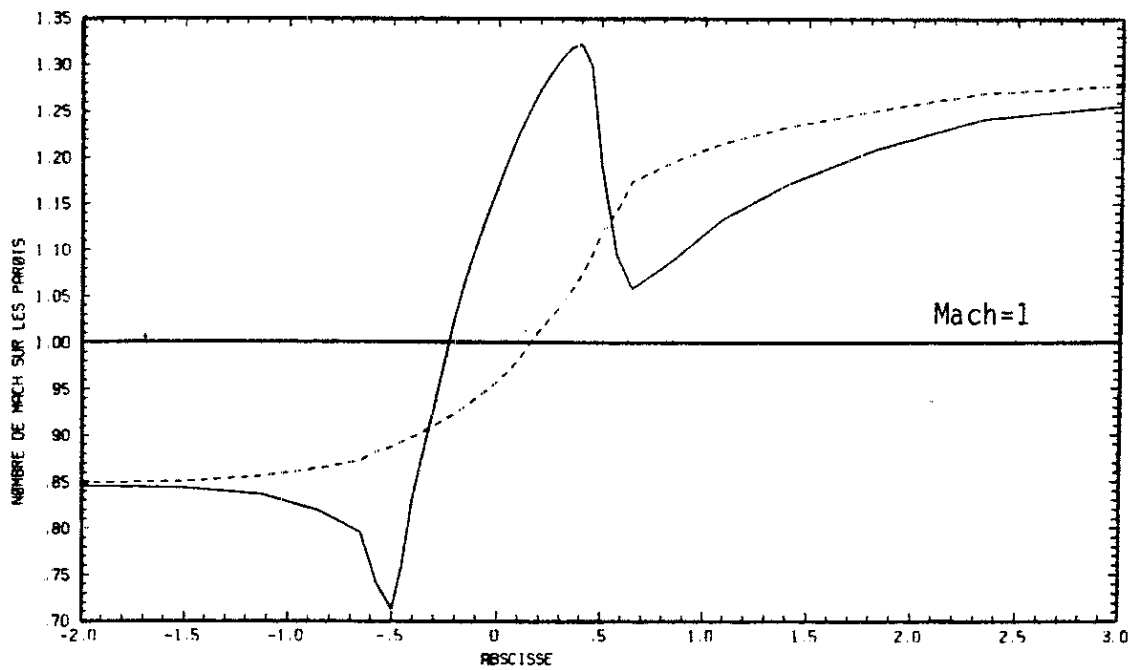
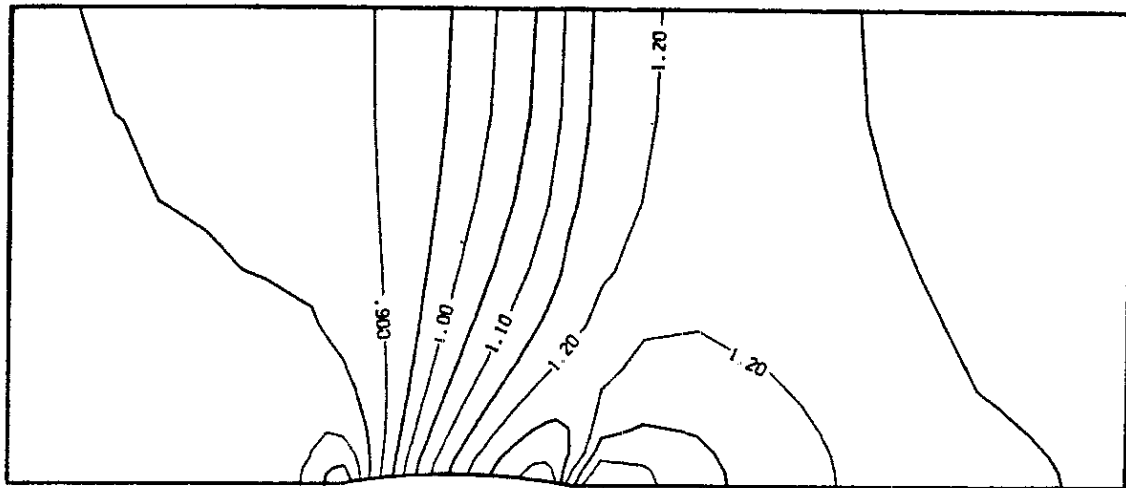


Figure 3.6

Canal du GAMM (G21)

Débit = 2.02945

- Isovaleurs du nombre de Mach (en haut)
- Nombre de Mach sur les parois (au milieu)
- Courbe de convergence (ci-contre)



**Figure 3.7**

Canal du GAMM (G21)

Débit = 2.0295

- Isovaleurs du nombre de Mach (en haut)
- Nombre de Mach sur les parois (au milieu)
- Courbe de convergence (ci-contre)

| Débit   | Minimum  | Maximum | Remarques  |
|---------|--|---------|--|
|         | $\text{de } \Pi = \frac{\text{pression statique}}{\text{pression génératrice}}$ à la sortie du canal |         |  |
| 2,00000 | 0,6531   | 0,6533  | choc très faible   |
| 2,01000 | 0,6445   | 0,6446  | } la ligne sonique (M = 1<br>ne traverse pas le<br>canal |
| 2,02000 | 0,6350   | 0,6351  |  |
| 2,02500 | 0,6299   | 0,6300  |  |
| 2,02700 | 0,6278   | 0,6279  |  |
| 2,02900 | 0,6256   | 0,6258  |  |
| 2,02930 | 0,6253   | 0,6254  | } la ligne sonique et le<br>choc traversent le canal     |
| 2,02940 | 0,6252   | 0,6254  |  |
| 2,02945 | 0,6251   | 0,6252  | } sortie supersonique                                    |
| 2,02950 | 0,3718   | 0,3829  |  |
| 2,02960 | 0,3294   | 0,3469  |  |
| 2,02970 | 0,3235   | 0,3421  |  |
| 2,03000 | 0,3166   | 0,3347  |  |
| 2,03100 | 0,3083   | 0,3255  |  |
| 2,03200 | 0,3044   | 0,3255  |  |

Figure 3.8 : Tuyère du GAMM. Maillage comportant 21 points sur le profil. Résultats numériques.

| Débit  | Minimum   |   | Maximum | Remarques                                 |
|--------|---|---|---------|---|
|        | de $\Pi = \frac{\text{pression statique}}{\text{pression génératrice}}$<br>à la sortie du canal |   |         |   |
| 2,0100 | 0,6444  |   | 0,6446  | la ligne sonique ne traverse pas le canal |
| 2,0200 | 0,6350  |   | 0,6351  |   |
| 2,0250 | Calcul non convergé   | } | }       | oscillations régulières du résidu         |
| 2,0260 |   |   |         |   |
| 2,0270 |   |   |         |   |
| 2,0273 |   |   |         |   |
| 2,0274 | 0,2972  |   | 0,3252  | sortie supersonique                       |
| 2,0277 | 0,2888  |   | 0,3253  |   |
| 2,0278 | Calcul non convergé. Le résidu se stabilise autour de   | } | }       | respectivement                            |
| 2,0280 |   |   |         |   |
| 2,0300 |   |   |         |   |

Figure 3.9 : Tuyère du GAMM. Maillage comportant 41 points sur le profil. Résultats numériques.

une erreur dans la loi (1.11) qui traduit le théorème de Bernoulli et l'isentropie de l'écoulement, donc la relation (3.3) n'est vérifiée que de façon approchée. Ainsi, le nombre de Mach de sortie  $M_s = 1.16$  prévu par l'étude monodimensionnelle pour les écoulements à sortie supersonique est largement dépassé (pour  $D = 2.031$  par exemple, on a observé une pression  $\Pi$  de l'ordre de 0.3, qui correspond à un nombre de Mach de 1.43). Les résultats du tableau 3.8 sont donc quantitativement inexacts, puisque liés à l'utilisation du maillage grossier G21. Mais ces mêmes résultats sont qualitativement très corrects puisqu'une transition précisée apparaît entre les écoulements à sortie subsonique et ceux à sortie supersonique ; dans ce dernier cas, toute la zone supersonique est capturée par le code (malgré une initialisation toujours choisie à  $M_{init} \equiv 0.85$ ), ceci sans créer d'instabilité numérique particulière.

### 3 - EXPERIENCES NUMERIQUES A L'AIDE DU MAILLAGE FIN

#### a) Présentation des résultats

Comme au paragraphe 2, nous avons effectué plusieurs expériences en faisant seulement varier le débit total  $D$  de la condition de Dirichlet (3.13). Les résultats (tableau 3.9 pour un aperçu global) font apparaître quatre régions où le comportement du code numérique diffère notablement. Dans une première phase (jusqu'à  $D = 2.02$ ) le canal devient transsonique et le bulbe supersonique est de taille modérée ; sur la figure 3.10, nous avons comparé les écoulements calculés

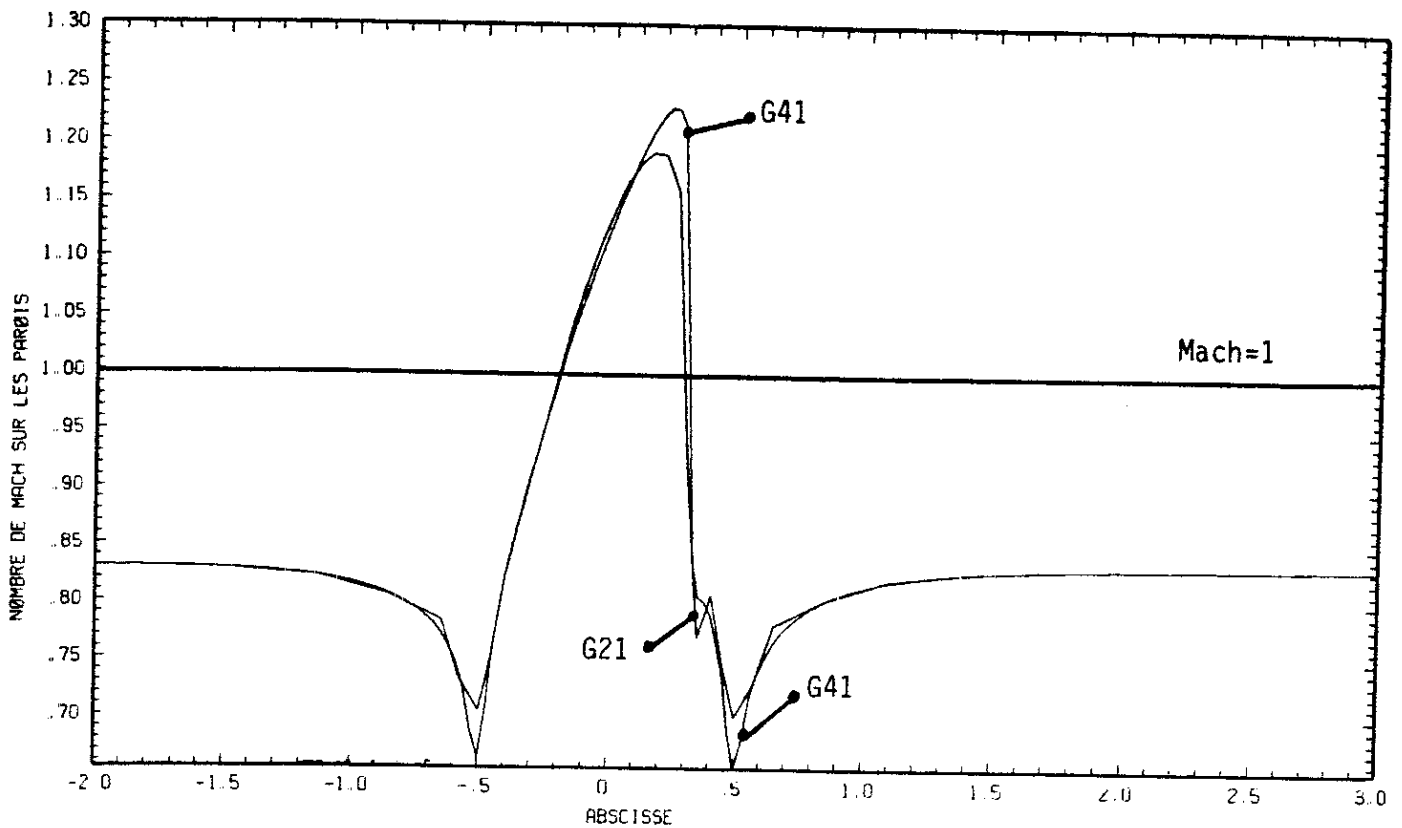


Figure 3.10 : Canal du GAMM, Débit = 2.02.

Comparaison des courbes de Mach sur la paroi inférieure de la tuyère pour les maillages G21 et G41.

grâce aux maillages G21 et G41 pour un débit  $D = 2.02$ . Dans un deuxième temps ( $D = 2.025$  à  $D = 2.073$ ), le code ne converge pas (sans toutefois diverger) : le résidu défini par (1.28) oscille, d'abord avec une période bien définie (de 40 à 50 itérations pour les débits  $D = 2.025$  et  $D = 2.026$ ), puis de façon assez chaotique ( $D = 2.027$ ) et enfin avec une période extrêmement longue ( $D = 2.0273$ ). La figure 3.11 illustre ce comportement. Rappelons que les 1000 itérations effectuées représentent un coût-calcul non négligeable puisqu'à chaque itération, nous avons à résoudre un système linéaire (symétri-

que, défini-positif) d'ordre 1512. Une étude plus détaillée de cet exemple montre que l'écoulement calculé par le code "oscille" entre deux régimes, l'un avec une sortie supersonique (après 200 et 700 itérations typiquement) et l'autre avec un choc fort barrant tout le canal et une sortie supersonique (après 500 et 1000 itérations) ; ces deux écoulements sont présentés figures 3.12 et 3.13. Un troisième ensemble de valeurs du débit apparaît ensuite ( $D = 2.0274$  à  $D = 2.0277$ ) avec convergence vers une solution supersonique en sortie (voir les figures 3.14 et 3.15).

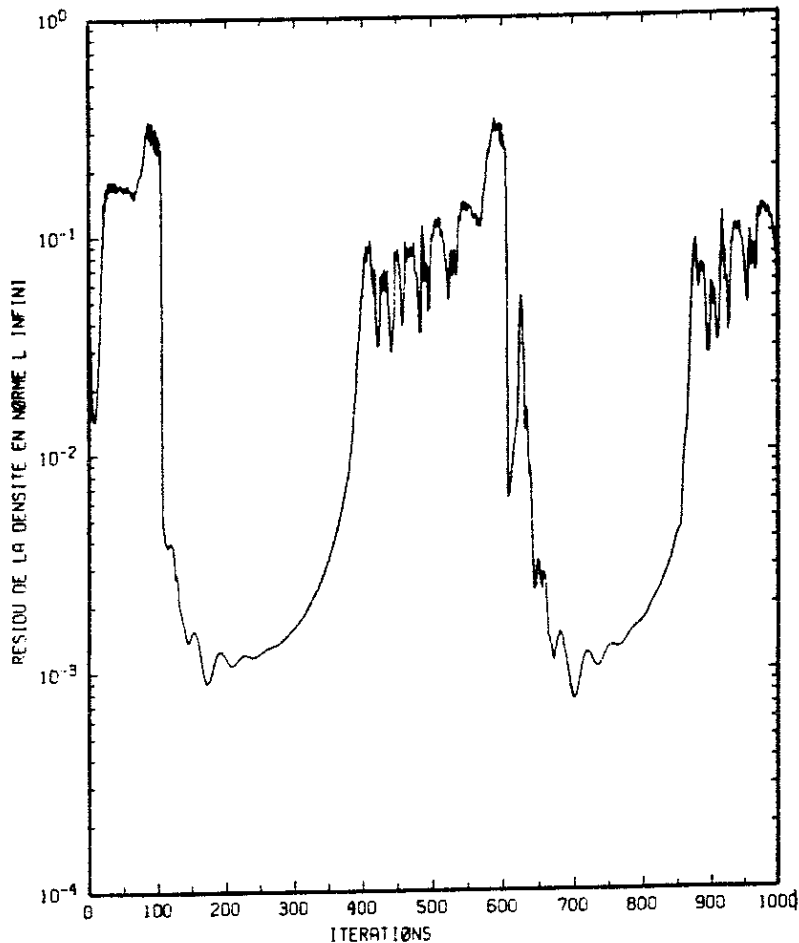


Figure 3.11 : Canal du GAMM (G41), Débit = 2.0273.  
Variation du résidu.

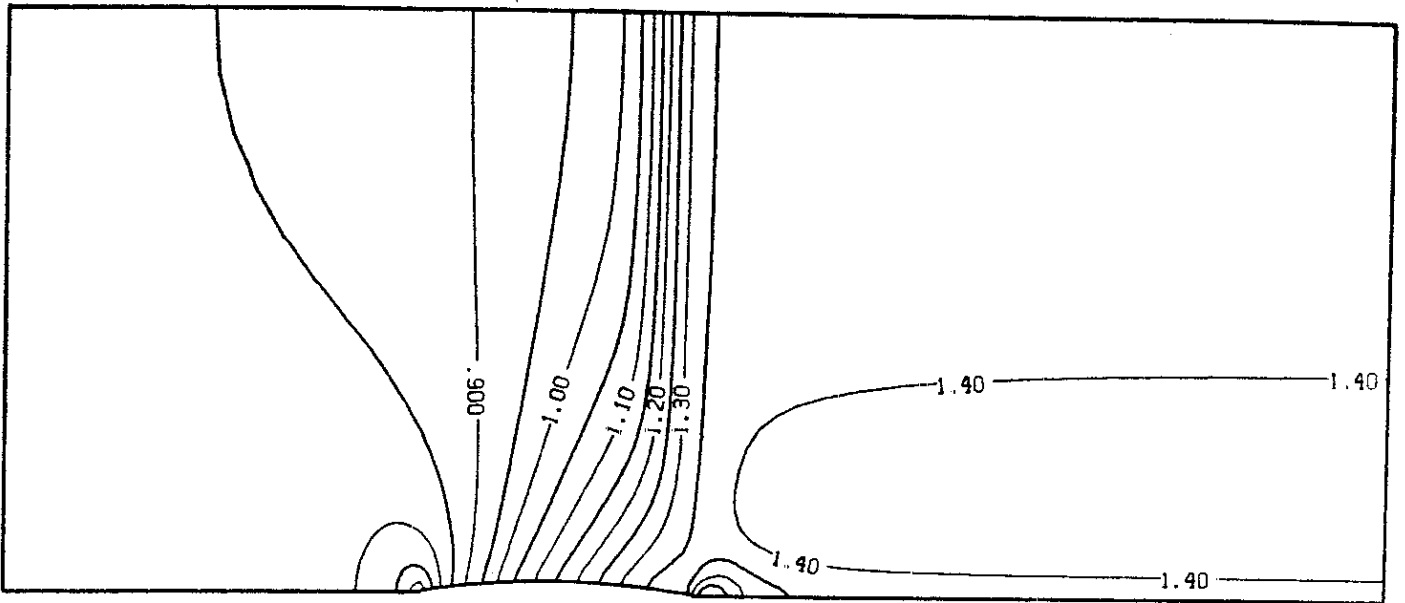


Figure 3.12 : Canal du GAMM (G41), Débit = 2.0273.  
Allure des isovaleurs du nombre de Mach  
après 200 itérations non-linéaires.

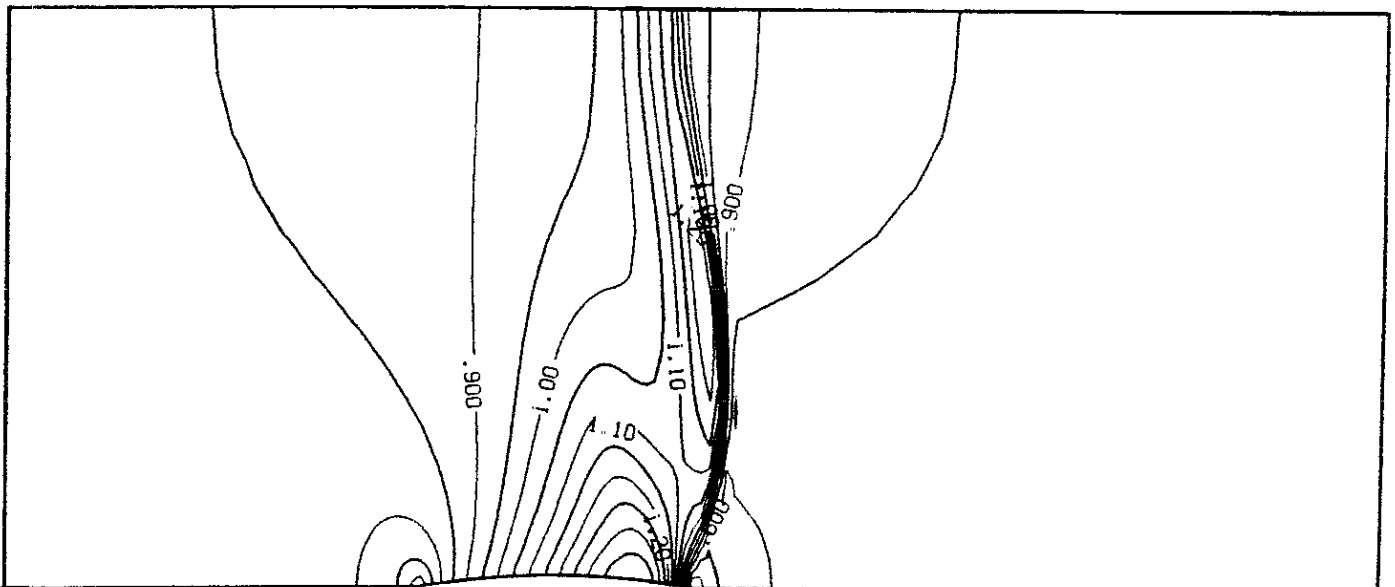


Figure 3.13 : Canal du GAMM (G41), Débit = 2.0273.  
Allure des isovaleurs du nombre de Mach  
après 1000 itérations non-linéaires.



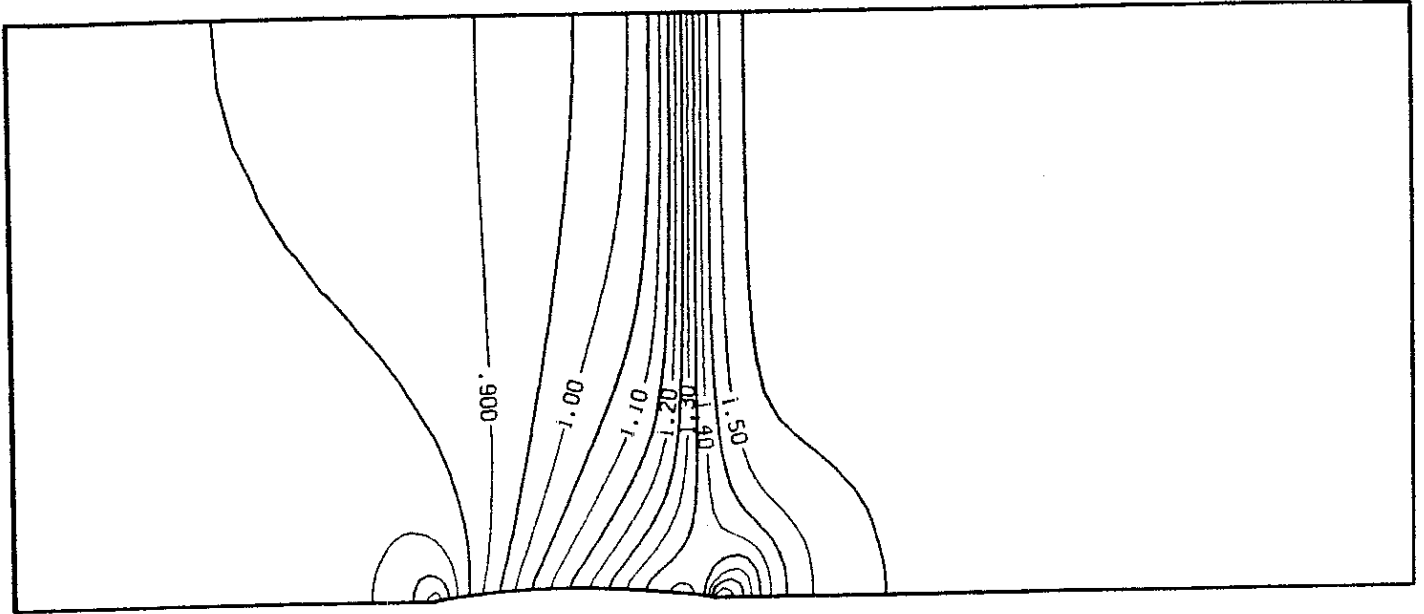


Figure 3.14 : Canal du GAMM (G41), Débit = 2.0274.  
Isovaleurs du nombre de Mach.

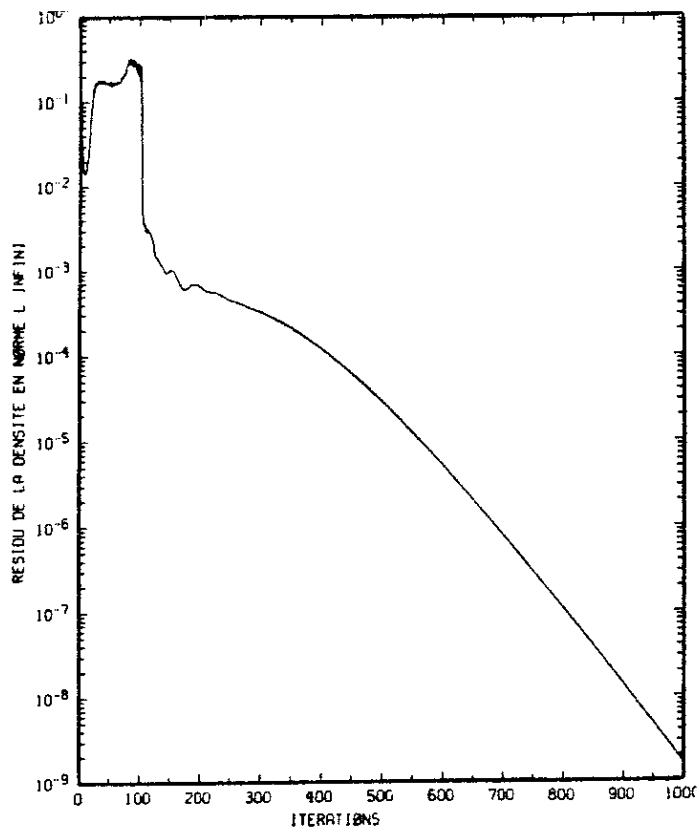


Figure 3.15 : Canal du GAMM (G41), Débit = 2.0274.  
Courbe de convergence.

Enfin, pour des débits supérieurs à 2.0278, le code ne converge plus, bien que l'écoulement observé soit comparable à celui de la figure 3.14, et le résidu oscille autour d'une valeur de plus en plus grande au fur et à mesure que  $D$  croît (figure 3.16).

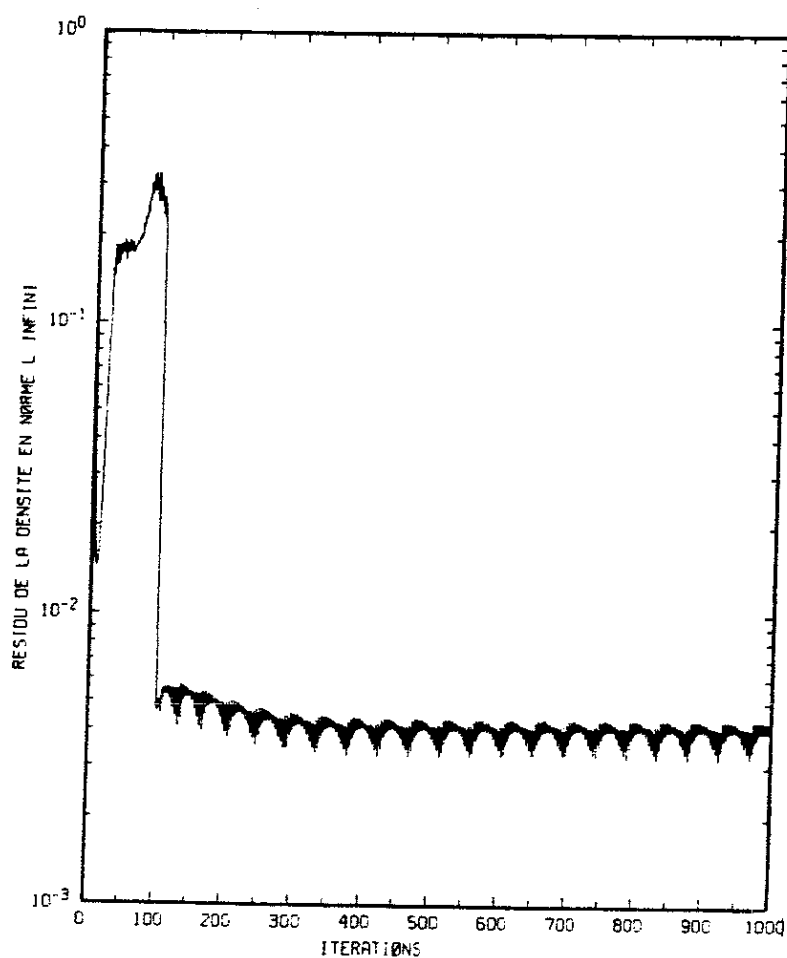


Figure 3.16 : Canal du GAMM, Débit = 2.0278.  
Variation du résidu (1.28).

b) Discussion et comparaison des calculs effectués sur les maillages  
-----  
G21 et G41  
-----

Les résultats dus au maillage le plus fin, présentés au paragraphe précédent, paraissent moins encourageants que ceux obtenus avec le maillage plus grossier. En effet, le code n'a pas convergé (après au plus 1000 itérations de l'algorithme de point fixe) dans deux plages de valeurs du débit  $D$ .

Pour  $D$  assez grand ( $D \geq 2.0278$ ), nous pensons que le blocage du canal est atteint, c'est-à-dire qu'une valeur maximale numérique du débit est atteinte (valeur au delà de laquelle le système discret d'équations à résoudre n'a plus de solution). Cette valeur (2.0278) est compatible avec la valeur maximale théorique (cf. Proposition 3.1), puisque l'inéquation (3.9) est satisfaite. Avec le maillage G21, cette valeur limite a aussi été observée, mais pour une valeur  $D = 2.07$  qui contredit le critère (3.9). Le raffinement du maillage a donc permis une approximation physiquement plus réaliste du coefficient de débit.

L'intervalle de débit  $[2.025, 2.0273]$  où le code ne converge pas pour le maillage G41 est plus délicat à interpréter. Il est clair que l'algorithme de point fixe est de moins en moins efficace au fur et à mesure que le maillage est raffiné, comme on l'a vu pour l'aile NACA 0012 aux figures 2.13 et 2.20, et lors du calcul à  $M_\infty = 0.85$  sur le maillage le plus fin (où l'algorithme du I.5 n'a pas convergé). Pour les régimes transsoniques complexes de la tuyère du GAMM comme pour les chocs forts autour d'un profil NACA, raffiner le maillage ne permet plus à l'algorithme de point fixe d'être contractant, bien qu'il ne diverge pas.

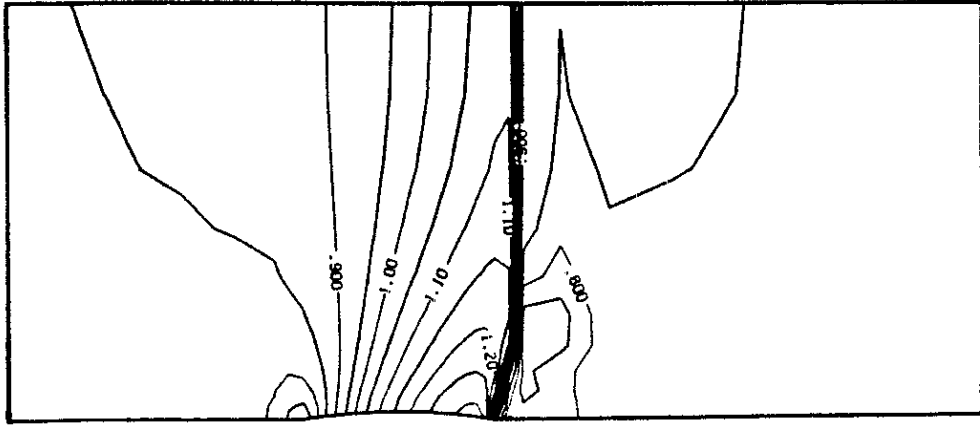


Figure 3.6 : Maillage G21, Débit = 2.02945.  
Isovaleurs du nombre de Mach.

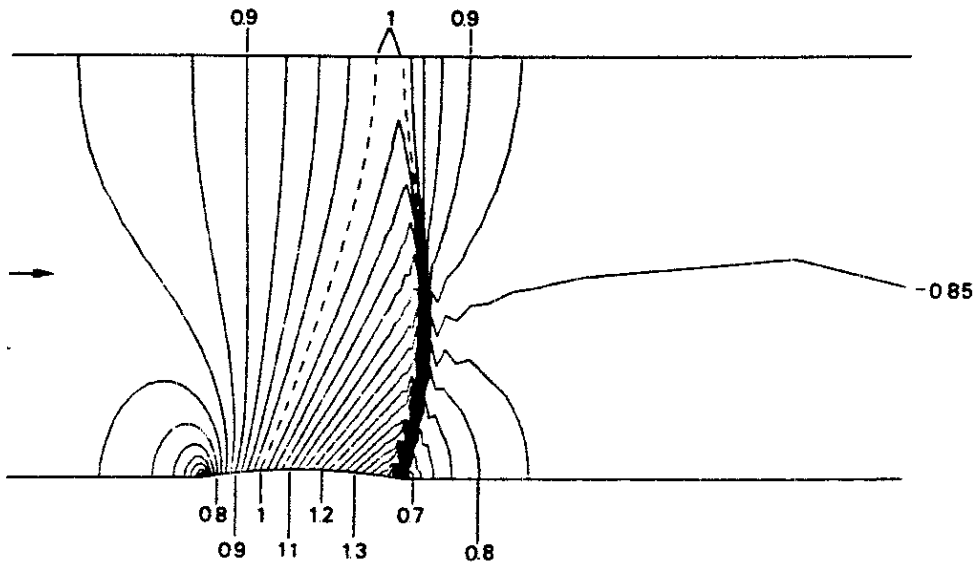


Figure 3.17 - Iso-Mach lines for channel flow. Potential solution (ref 43)

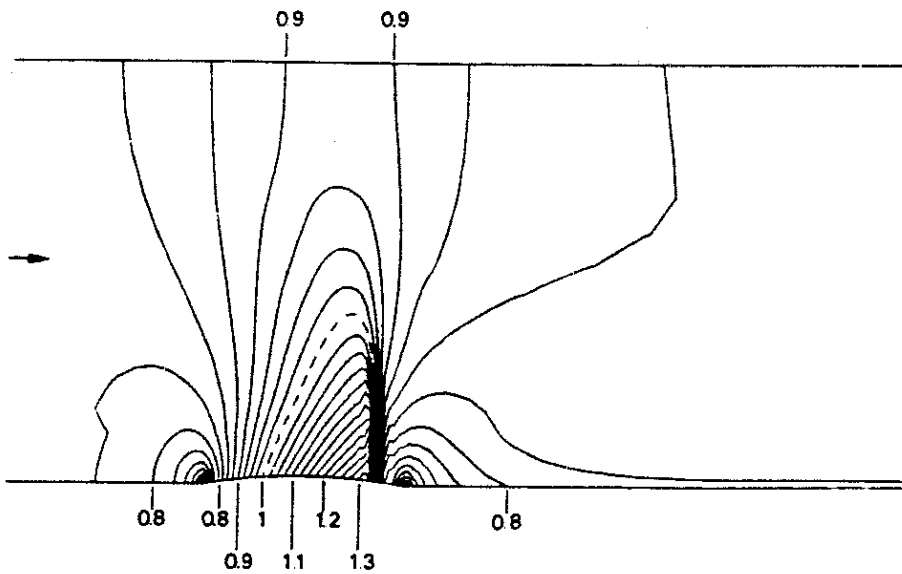


Figure 3.18 - Iso-Mach lines for channel flow. Euler solution. (ref 43)

Mais le calcul sur le maillage G41 pour un débit  $D = 2.0273$  laisse aussi supposer que le système discret d'équations a plusieurs solutions (figures 3.12 et 3.13) comme la théorie monodimensionnelle le prévoit, et que ce sont les conditions aux limites numériques qu'il conviendrait de modifier afin de mieux prendre en compte les conditions aux limites physiques (3.11).

Enfin, la comparaison des résultats des deux maillages montre que les valeurs du débit où apparaît un écoulement avec une ligne sonique qui traverse tout le canal sont différentes [2.0294 pour G21 ; entre 2.025 et 2.073 pour G41] comme l'imprécision sur le débit maximal le laissait prévoir. Mais les résultats obtenus sur le maillage G21 pour un débit  $D = 2.02945$  (figure 3.6) sont très intéressants, et peuvent être comparés à ceux de VEUILLOT-VIVIAND présentés dans [43] sur ce même cas test avec une modélisation potentielle du fluide (figure 3.17) : dans les deux cas, l'équation du potentiel transsonique fournit un écoulement avec un choc qui barre tout le canal, alors qu'un code Euler ne fait apparaître qu'une zone supersonique modérée (figure 3.18, due aux mêmes auteurs).

#### IV - CONCLUSION

La méthode de résolution du modèle transsonique potentiel présentée dans ce chapitre est fondée sur une formulation mixte vitesse-fonction courant des équations aux dérivées partielles du problème et sur un traitement de la non-linéarité à l'aide d'un décentrage de la densité associé à un algorithme de point fixe.

Les tests effectués sur le problème extérieur (partie II) nous ont permis de sélectionner avec précision un décentrage qui stabilise l'algorithme, et de valider notre code, puisque les résultats sont comparables à ceux d'AMARA [1] avec une méthode analogue.

Pour l'étude du problème intérieur, la difficulté provient du choix des conditions aux limites, pour la fonction courant en particulier. Nous avons fixé le débit dans chacune de nos expériences numériques, afin d'étudier les performances de l'algorithme lorsqu'on fixe les conditions aux limites numériques. Les résultats (sur le canal du GAMM) font apparaître une forte dépendance vis à vis du maillage. Toutefois, les deux régimes qui caractérisent une tuyère amorcée (choc fort avec sortie subsonique ou écoulement régulier avec sortie supersonique) ont été observés.

Dans le cas de l'aérodynamique externe comme celui de l'aérodynamique interne, la convergence du code a été défailante pour certains cas tests sur les maillages les plus fins. L'algorithme de point fixe semble avoir atteint ses limites et une méthode de type

multigrille devrait s'avérer plus robuste. Pour l'étude des tuyères, le décentrage de la densité induit une erreur sur la conservation de l'enthalpie totale, et fournit des solutions supersoniques dans tout le divergent où le nombre de Mach paraît trop élevé par rapport à l'approximation monodimensionnelle.

Rappelons que la méthode proposée conduit à la résolution d'un système linéaire symétrique défini positif à chaque itération, pour lequel les méthodes de gradient conjugué préconditionné sont très efficaces (Chapitre 3), mais le couplage induit entre les coefficients de la matrice (équation (1.10)) et le traitement de la non-linéarité (équations (1.11) et (1.25)) est très complexe et n'est pas encore, à notre connaissance, analysé de façon satisfaisante. Aussi, nous proposons au Chapitre 7, d'utiliser un algorithme de Newton pour résoudre le problème transsonique en formulation mixte vitesse-fonction courant.

## REFERENCES DU CHAPITRE 4

- [1] AMARA M., *Analyse de Méthodes d'Eléments Finis pour des Ecoulements Transsoniques*, Thèse d'Etat, Université Paris 6, 1983.
- [2] AMARA M., JOLY P., THOMAS J.M., *A Mixed Finite Element Method for Solving Transonic Flow Equations*, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol 39, pp 1-18, 1983.
- [3] BAUER F., GARABEDIAN P., KORN D., JAMESON A., *Supercritical Wing Sections I, II, III*. *Lect. Notes Econ. Math. Syst.* n° 66, 108, 150, Springer Verlag, Berlin, 1972, 1975, 1977.
- [4] BRANDT A., *Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems*, *Math. of Comp.*, vol 31, n° 138, pp 333-390, 1977.
- [5] BREDIF M., *A Fast Finite Element Method for Transonic Potential Flow Calculations*, AIAA Paper 83-0507, 1983.
- [6] BRISTEAU M.O., PIRONNEAU O., GLOWINSKI R., PERIAUX J., PERRIER P., POIRIER G., *On the numerical Solution of Nonlinear Problems in Fluid Dynamics by Least Squares and Finite Element Methods (II). Application to Transonic Flow Simulations*, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol 51, pp 363-394, 1985.
- [7] CARRIERE P., *Aérodynamique interne des réacteurs*, Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, 1975-1980.
- [8] CIARLET P.G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [9] CIAVALDINI J.F., *Analyse Numérique des Ecoulements Compressibles autour d'un Profil placé en Atmosphère Infinie*, Thèse d'Etat, Université de Rennes 1, 1980.
- [10] COURANT R., FRIEDRICHS K.O., *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, New-York, 1948.
- [11] CUFFEL R., BACK L., MASSIER P., *Transonic Flowfield in a Supersonic Nozzle with Small Throat Radius of Curvature*, *AIAA J*, vol 7, pp 1364-1366, 1969.
- [12] DECONINCK H., HIRSCH C., *A Multigrid Method for the Transonic Full Potential Equation Discretized with Finite Elements on an Arbitrary Mesh*, *J of Comp. Phys.*, vol 48, pp 344-365, 1982.



- [13] DUBOIS F., *Calcul d'écoulements transsoniques dans des tuyères par une méthode d'éléments finis mixtes*, Actes du 18<sup>e</sup> Congrès National d'Analyse Numérique, Puy St Vincent, 1985.
- [14] DUPUY J.M., *Écoulements Transsoniques Potentiels Tridimensionnels*, Rapport du contrat DRET 81/228, Annexe 2, 1985.
- [15] DUPUY J.M., *Résolution Numérique des Equations d'Écoulements Compressibles Transsoniques Tridimensionnels Stationnaires*, Rapport du contrat DRET 83/434, 1986.
- [16] DUTTON J., ADDY A., *Transonic Flow in the Throat Region of Axisymmetric Nozzles*, AIAA J., vol 19, pp 801-804, 1981.
- [17] EBERLE A., *Eine Method Finiter Elemente Berechnung der Transsonicken Potential-Strömung um Profile*, Messerschmitt-Bölkow-Blohm 1352(0), 1977.
- [18] EMMONS H.W., *The Numerical Solution of Compressible Flow Problems*, NACA TN 932, 1944.
- [19] EMMONS H.W., *The Theoretical Flow of a Frictionless Adiabatic Perfect Gas Inside a Two-Dimensional Hyperbolic Nozzle*, NACA TN 1003, 1946.
- [20] ENGQUIST B., OSHER S., *Stable and Entropy Satisfying Approximations for Transonic Flow Calculations*, Math. of Comp., vol 34, n° 149, pp 45-75, 1980.
- [21] ENGQUIST B., OSHER S., *One-Sided Difference Approximations for Non-linear Conservation Laws*, Math. of Comp., vol 36, n° 154, pp 321-351, 1981.
- [22] FEISTAUER M., NEČAS J., *On the solvability of Transonic Potential Flow Calculations*, Z. für Analysis und ihre Anwendungen, vol 4, n° 4, pp 305-329, 1985.
- [23] FINN R., GILBARG D., *Asymptotic Behaviour and Uniqueness of Plane Subsonic Flows*, Comm. Pure Appl. Math. vol 10, pp 23-63, 1957.
- [24] GIRAULT V., RAVIART P.A., *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [25] HABASHI W.G. (editor), *Advances in Computational Transonics*, Pineridge Press, Swansea, UK, 1985.
- [26] HAFEZ M., LOVELL D., *Numerical Solution of Transonic Stream Function Equation*, AIAA J., vol 21, pp 327-335, 1983.
- [27] HAFEZ M., SOUTH J., MURMAN E., *Artificial Compressibility Methods for Numerical Solutions of Transonic Full Potential Equation*, AIAA J., vol 17, pp 838-844, 1979.

- [28] HALL I.M., *Transonic Flow in Two-Dimensional and Axially Symmetric Nozzles*, Quart J. of Mech. and Appl. Math., vol 15, pp 487-508, 1962.
- [29] HOLST T.L., *Implicit Algorithm for the Conservative Transonic Full Potential Equation Using an Arbitrary Mesh*, AIAA J., vol 17, pp 1038-1045, 1979.
- [30] JAMESON A., *Iterative Solution of Transonic Flows over Airfoils and Wings Including Flows at Mach 1*, Comm. Pure Appl. Math., vol 27, pp 283-309, 1974.
- [31] KLIEGEL J., LEVINE J., *Transonic Flow in Small Throat Radius of Curvature Nozzles*, AIAA J., vol 7, pp 1375-1378, 1969.
- [32] LAVAL P., *Méthodes instationnaires de calcul des effets d'interaction de paroi en écoulement bidimensionnel supercritique*, la Recherche Aérospatiale, n° 1973-5, pp 275-288, 1973.
- [33] LAX P.D., *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, SIAM Regional Conference Series in Appl. Math. n° 11, Philadelphia, 1973.
- [34] LUDFORD G.S.S., *The behaviour at infinity of the potential function of two-dimensional subsonic compressible flow*, Journal of Math. and Physics, vol 30, pp 117-130, 1951.
- [35] MORAWETZ C.S., *On the Non-Existence of Continuous Transonic Flows Past Profiles I, II, III*, Comm. Pure Appl. Math., vol 9, pp 45-68, 1956 ; vol 10, pp 107-131, 1957 ; vol 11, pp 129-144, 1958.
- [36] MORAWETZ C.S., *On a Weak Solution for Transonic Flow Problem*, Comm. Pure Appl. Math., vol 38, pp 797-818, 1985.
- [37] MORICE P., *Finite Element Approximation of a Variational Principle for Perfect Fluid Flows with Free Boundaries*, Proceedings of the 3° GAMM Conf. on Num. Meth. in Fluid Mechanics, Notes on Num. Fluid Mech., vol 2, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1979.
- [38] MORICE P., CAMBIER L., VEUILLOT J.P., *Numerical Computation of Transonic Flow past an Axisymmetric Nacelle*, TP ONERA 1984-91, 1984.
- [39] MURMAN E.M., COLE J.D., *Calculation of Plane Steady Transonic Flows*, AIAA J., vol 9, pp 114-121, 1971.
- [40] MURMAN E.M., *Analysis of Embedded Shock Waves Calculated by Relaxation Methods*, AIAA J., vol 12, pp 626-633, 1974.

- [41] OSHER S., HAFEZ M., WHITLOW W., *Entropy Condition Satisfying Approximations for the Full Potential Equation of Transonic Flow*, *Math. of Comp.*, vol 44, n° 169, pp 1-29, 1985.
- [42] PERRONNET A., *Méfisto Maillage Manuel d'Utilisation*, Lab. d'Analyse Numérique, Univ. Paris 6, 1983.
- [43] RIZZI A., VIVIAND H. (eds), *Numerical Methods for the Computation of Inviscid Transonic Flows with Shock Waves*, *Notes on Num. Fluid Mech*, vol 3, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1981.
- [44] SELLS C.C.L., *Plane Subcritical Flow Past a Lifting Aerofoil*, *Proc. Roy Soc. A*, vol 308, pp 377-401, 1968.
- [45] SHIFFMAN M., *On the Existence of Subsonic Flows of a Compressible Fluid*, *J. Rat Mech Anal*, vol 1, pp 605-652, 1952.
- [46] SMOLLER J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [47] STEINHOFF J., JAMESON A., *Multiple Solutions of the Transonic Potential Flow Equation*, *AIAA J.*, vol 20, pp 1521-1525, 1982.
- [48] VIVIAND H., VEUILLOT J.P., *Méthodes Pseudo-instationnaires pour le Calcul d'Écoulements Transsoniques*, Rapport ONERA 1978-4, 1978.
- [49] WONG Y., HAFEZ M., *Conjugate Gradient Methods Applied to Transonic Finite Difference and Finite Element Calculations*, *AIAA J.*, vol 20, pp 1526-1533, 1982.
- [50] ZIENKIEWICZ O.C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, Mc Graw Hill, Londres, 1971.

## Chapitre 5

### Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation Laws .

( en collaboration avec Philippe Le Floch ,  
à paraître dans le Journal of Differential Equations )

BOUNDARY CONDITIONS FOR NONLINEAR  
HYPERBOLIC SYSTEMS OF CONSERVATION LAWS

François DUBOIS et Philippe LE FLOCH

R.I. N° 155

Octobre 1986

BOUNDARY CONDITIONS FOR NONLINEAR HYPERBOLIC  
SYSTEMS OF CONSERVATION LAWS

François DUBOIS\* and Philippe LE FLOCH\*

October 1986

ABSTRACT

For nonlinear hyperbolic systems of conservation laws, the initial boundary value problem is studied. Two formulations of boundary conditions are proposed : an entropy boundary inequality is derived thanks to the viscosity method, a second formulation is based on the Riemann problem. These two formulations are equivalent for linear systems and scalar nonlinear equations. For nonlinear systems, the second formulation leads to well-posed problems. Nonlinear local structure is studied. The p-system and the isentropic Euler equations are detailed.

\* ECOLE POLYTECHNIQUE - Centre de Mathématiques Appliquées  
91128 PALAISEAU Cedex - France

## 0 - INTRODUCTION

We consider nonlinear hyperbolic systems of conservation laws in one space dimension

$$(0.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \quad , \quad u = u(x,t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \quad , \quad t > 0$$

with Cauchy data  $u_0$  for  $t=0$

$$(0.2) \quad u(x,0) = u_0(x) \quad .$$

The flux function  $f$  is regular on the set of the states  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  with values in  $\mathbb{R}^n$ .

The purely Cauchy problem with  $x \in \mathbb{R}$  is well-known: the system (0.1)-(0.2) does not admit (in the large) any classical solution, even if the data  $u_0$  is regular. Hence, it is necessary to consider weak solutions (in the sense of distributions). However in this class uniqueness is lost, and to select the physical meaningful solutions, an entropy condition has to be added. Two classical ways (at least) can be used to derive such a condition: the vanishing viscosity method or the Lax compatibility relations for wave velocities. (Lax [13]-[14]-[15] and Smoller [23]).

In this paper, we are interested with the initial-boundary value problem associated to (0.1)-(0.2). The unknown  $u$  is defined for  $x > 0$ ,  $t > 0$  and, at the boundary  $x=0$ , a data  $\bar{u}_0(t)$  is prescribed. With a strong Dirichlet boundary condition:

$$u(0,t) = \bar{u}_0(t) \quad , \quad t > 0$$

the associated problem is not well-posed: generally, there is neither existence nor uniqueness (refer to Leroux [18]). In fact, when the domain boundary is not characteristic, the initial-boundary value problem has been studied by different authors (Liu [19], Nishida-Smoller [20]) for particular systems of gas dynamics. Refer also to Goodman [7] for general nonlinear systems.

We propose and study in this paper two general approaches to formulate the boundary condition (at  $x=0$ ). In section 1, the vanishing viscosity method is applied and leads to a *boundary entropy inequality*, which generalizes the previous result of Bardos-Leroux-Nedelec [3] (see also Le Floch and Nedelec [16]-[17]). From this inequality, a first set  $\mathcal{E}(\bar{u}_0(t))$  of admissible values at the boundary is defined for each time  $t > 0$ . The first boundary condition is written

$$(B.1) \quad u(0,t) \in \mathcal{E}(\bar{u}_0(t)) \quad , \quad t > 0 \quad .$$

In section 2, the *Riemann problem* is used and leads to the definition of a second set of admissible values at the boundary, denoted by  $\mathcal{V}(\bar{u}_0(t))$  (paragraph 2.1). The second boundary condition is

$$(B.2) \quad u(0,t) \in \mathcal{V}(\bar{u}_0(t)) \quad , \quad t > 0 \quad .$$

This condition (B.2) is a natural way to take in account a boundary data when the Godunov scheme is numerically implemented (Godunov [6]).

Concerning strictly hyperbolic linear systems and (non necessarily convex) scalar conservation laws, we prove that the two sets  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{V}$  of admissible values are equal and lead to well-posed problems (paragraphs 1.2-1.3 and 2.2-2.3)

We make the conjecture that for general systems of conservation laws, these two sets are equal and therefore that the two formulations of boundary conditions are equivalent. The major difficulty is the description of the sets  $\mathcal{E}$  because it needs the knowledge of "entropy functions" for the system (0.1). (paragraph 1.4).

The second formulation allows an explicit description of the boundary condition. Therefore, the nonlinear local structure of the sets  $\mathcal{V}$  for a general system is described in paragraph 2.4. Then, the complete study of the p-system (paragraph 2.5) and the isentropic Euler equations of gas



dynamics (paragraph 2.6) are presented. In section 3, our conjecture is illustrated by a  $2 \times 2$  nonlinear system whose characteristic fields are both linearly degenerated.

### Notations

Excepted for the scalar case where we consider non convex equations, our hypotheses and notations are the following ones : the eigenvalues of the Jacobian matrix  $A(u) = Df(u)$  are real and distinct :

$$\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \dots < \lambda_n(u) \quad ,$$

and  $r_1(u), r_2(u), \dots, r_n(u)$  is a basis of corresponding eigenvectors. The  $i$ -characteristic fields are supposed either genuinely non linear ( $\nabla \lambda_i(u) \cdot r_i(u) \equiv 1$ ) or linearly degenerated ( $\nabla \lambda_i(u) \cdot r_i(u) \equiv 0$ ).

# 1 - APPROACH BY THE METHOD OF VISCOSITY

## 1.1 - FIRST FORMULATION OF THE BOUNDARY CONDITION

A classical method, which leads to an entropy condition for selecting the physical solution of the system (0.1) is the viscosity method. The perturbation of (0.1) by a viscosity term  $\varepsilon(D(u)u_x)_x$  (with  $\varepsilon > 0$ , and  $D(u)$  positive matrix) leads to a well-posed parabolic problem (refer to Ladyzenskaya Uralceva [12]) :

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} f(u^\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (D(u^\varepsilon) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}) \quad , \quad x > 0 \quad , \quad t > 0$$

$$(1.2) \quad u^\varepsilon(x,0) = u_0^\varepsilon(x) \quad , \quad x > 0$$

$$(1.3) \quad u^\varepsilon(0,t) = \bar{u}_0^\varepsilon(t) \quad , \quad t > 0$$

where  $u_0^\varepsilon$  and  $\bar{u}_0^\varepsilon$  are regular approximations of the data  $u_0$  and  $\bar{u}_0$ .

Classically, a D-pair of entropy-flux is defined as a pair  $(\eta, q)$  of functions  $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$\begin{aligned} q'(u) &= \eta'(u) A(u) \quad , \quad u \in \mathcal{U} \\ \eta''(u) D(u) &\geq 0 \quad , \quad u \in \mathcal{U} \quad (D\text{-convexity}). \end{aligned}$$

and if  $(u^\varepsilon)$  remains bounded in  $W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ , and converges in  $L_{loc}^1$  norm (as  $\varepsilon$  tends to zero) to a limit function  $u$  then this limit satisfies in the sense of distributions the entropy inequality in the domain  $\{(x,t) , x > 0 , t > 0\}$

$$(1.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta(u) + \frac{\partial}{\partial x} q(u) \leq 0$$

for any D-pair of entropy-flux (refer to Kruzkov [11], Lax [15], Smoller [23]). Such an entropy weak solution  $u$  satisfies a Rankine-Hugoniot inequality along any smooth curve of discontinuity  $x = \varphi(t)$  :

$$(1.5) \quad q(u_+) - q(u_-) - \varphi'(t)(\eta(u_+) - \eta(u_-)) \leq 0$$

with  $u_{\pm} = u(\varphi(t) \pm 0, t)$ .

The previous entropy inequality (1.4) is concerned only with the values of the limit function  $u(\cdot, \cdot)$  into the domain  $\{(x, t) / x > 0, t > 0\}$ . Now, we establish a supplementary condition : a *boundary entropy inequality* valid along the boundary. Making the same assumptions as previously on the sequence  $(u^\varepsilon)$ , we get :

THEOREM 1.1

For each time  $t > 0$ , the boundary value  $u(0+, t)$  of a limit-function  $u$  of the sequence  $u^\varepsilon$  is linked to the boundary limit-value  $\bar{u}_0(t)$  of the functions  $u^\varepsilon$  by the boundary entropy inequality :

$$(1.6) \quad q(u(0+, t)) - q(\bar{u}_0(t)) - \eta'(\bar{u}_0(t)) \cdot \{f(u(0+, t)) - f(\bar{u}_0(t))\} \leq 0$$

for any D-pair of entropy-flux  $(\eta, q)$ .

The inequality (1.6) was already derived in the scalar case with Kruzkov entropies by Bardos-Leroux-Nedelec [3]. Here, we just show that this inequality remains valid (at least formally) for a *system* of conservation laws with an arbitrary viscosity term. In the derivation of inequality (1.6) we establish a preliminary result (Lemma 1.1) which clearly underlines a phenomena of *boundary-layer* : the function  $u^\varepsilon$  remains bounded for  $\varepsilon \rightarrow 0$ , but its derivative  $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}$  is not necessarily bounded. This fact explains that discontinuities can appear for the limit function  $u$ . Refer also, for scalar equations, to Howes [9].

As Kruzkov [11] and Bardos-Leroux-Nedelec [3], let us introduce a family of functions  $\{\rho_\delta\}$  ( $\delta > 0$ ) such that

$$(1.7) \quad \begin{cases} \rho_\delta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+; [0,1]) & , \quad \rho_\delta(x) = 0 & , \quad \forall x > \delta \\ \rho_\delta(0) = 1 & \text{and} & |\rho'_\delta(\cdot)| \leq \frac{c}{\delta} \end{cases}$$

with a constant  $c > 0$  independent of  $\delta$ .

LEMMA 1.1

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \varepsilon \cdot D(\bar{u}_0(\cdot)) \cdot \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(0, \cdot) \right) = f(\bar{u}_0(\cdot)) - f(u(0+, t)) \quad ,$$

*in the sense of distributions.*

PROOF OF LEMMA 1.1

Consider  $G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n)$  with compact support in  $]0, \infty[$  and the following Green formula

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G(t) \cdot \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} \left( D(u^\varepsilon) \cdot \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) \cdot \rho_\delta(x) \cdot dx &= - \int_0^\infty G(t) \cdot D(\bar{u}_0) \cdot \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \cdot dx + \\ &- \int_0^\infty \int_0^\delta G(t) \cdot D(u^\varepsilon) \cdot \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \cdot \rho'_\delta(x) \cdot dx \quad . \end{aligned}$$

We take the limit in this formula first for  $\varepsilon \rightarrow 0$ , then for  $\delta \rightarrow 0$ . We deduce with the equation (1.1) :

$$\begin{aligned} A(\delta) &\equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty G(t) \cdot D(\bar{u}_0(t)) \cdot \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(0, t) \cdot dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_0^\infty \int_0^\delta G \cdot \left( u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x \right) \cdot \rho_\delta \cdot dx \cdot dt \end{aligned}$$

because we have for each  $\delta > 0$  :

$$\left| \varepsilon \int_0^\infty \int_0^\delta G \cdot D(u^\varepsilon) \cdot \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \cdot \rho'_\delta \cdot dx \cdot dt \right| \leq \varepsilon \cdot \text{cst} \cdot \|u^\varepsilon\|_{W_{loc}^{1,1}} \rightarrow 0 \quad .$$

Integrating by parts :

$$\begin{aligned} A(\delta) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ + \int_0^{\infty} \int_0^{\delta} G'(t) \cdot u^{\varepsilon} \cdot \rho_{\delta} \, dx \, dt + \int_0^{\infty} \int_0^{\delta} G(t) f(u^{\varepsilon}) \cdot \rho_{\delta}' \, dx \, dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} G(t) f(\bar{u}_0(t)) \cdot dt \right\} \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\delta} G'(t) u \rho_{\delta} \, dx \, dt + \int_0^{\infty} \int_0^{\delta} G(t) f(u) \cdot \rho_{\delta}' \, dx \, dt + \int_0^{\infty} G(t) f(\bar{u}_0(t)) \, dt . \end{aligned}$$

Then, when  $\delta$  tends to zero, using for  $t > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\delta} f(u(x,t)) \cdot \rho_{\delta}'(x) \cdot dx = -f(u(0,t)) ,$$

it results

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = \int_0^{\infty} G(t) \cdot \left\{ f(\bar{u}_0(t)) - f(u(0,t)) \right\} \cdot dt ,$$

which proves the lemma. ■

#### PROOF OF THEOREM 1.1

Now, multiplying the equation (1.1) by  $\eta'(u(x,t))\psi(t)\rho_{\delta}(x)$ , with an arbitrary function  $\psi \in \mathcal{C}^2(0, \infty; \mathbb{R})$  with compact support, we get

$$\begin{aligned} (1.8) \quad & \int_0^{\infty} \int_0^{\delta} \left\{ \eta(u^{\varepsilon})_t + q(u^{\varepsilon})_x \right\} \cdot \psi(t) \rho_{\delta}(x) \, dx \, dt + \\ & - \varepsilon \int_0^{\infty} \int_0^{\delta} \eta'(u^{\varepsilon}) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( D(u^{\varepsilon}) \cdot \frac{\partial}{\partial x} u^{\varepsilon} \right) \cdot \psi(t) \cdot \rho_{\delta}(x) \, dx \, dt = 0 \end{aligned}$$

The first term in (1.8) is

$$\begin{aligned} & - \int_0^{\infty} \int_0^{\delta} \eta(u^{\varepsilon}) \psi'(t) \rho_{\delta}(x) \, dx \, dt - \int_0^{\infty} \int_0^{\delta} q(u^{\varepsilon}) \cdot \psi(t) \cdot \rho_{\delta}'(x) \, dx \cdot dt + \\ & - \int_0^{\infty} q(\bar{u}_0(t)) \cdot \psi(t) \cdot dt \end{aligned}$$

which tends to

$$-\int_0^\infty \int_0^\delta \eta(u) \psi'(t) \rho_\delta(x) dx dt - \int_0^\infty \int_0^\delta q(u) \psi(t) \rho_\delta'(x) dx dt - \int_0^\infty q(\bar{u}_0) \psi dt \quad ,$$

when  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Then for  $\delta \rightarrow 0$ , it becomes

$$(1.9) \quad \int_0^\infty \left\{ -q(\bar{u}_0(t)) + q(u(0,t)) \right\} \psi(t) dt \quad .$$

The second term in (1.8) equals

$$(1.10) \quad -\varepsilon \int_0^\infty \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta'(u^\varepsilon) \cdot D(u^\varepsilon) \cdot \frac{\partial}{\partial x} u^\varepsilon \right) \psi(t) \cdot \rho_\delta(x) dx dt + \\ + \varepsilon \int_0^\infty \int_0^\delta \eta''(u^\varepsilon) \cdot \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \cdot D(u^\varepsilon) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \psi(t) \rho_\delta(x) dx dt \quad .$$

The first integral in (1.10) can be written as

$$+\varepsilon \int_0^\infty \int_0^\delta \eta'(u^\varepsilon) D(u^\varepsilon) \cdot \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \psi(t) \cdot \rho_\delta'(x) dx dt + \varepsilon \int_0^\infty \eta'(\bar{u}_0) \cdot D(\bar{u}_0) \cdot \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} (0,t) \psi(t) dt$$

which tends ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) to

$$(1.11) \quad + \int_0^\infty \eta'(\bar{u}_0(t)) \cdot \left\{ f(\bar{u}_0(t)) - f(u(0,t)) \right\} \cdot \psi(t) \cdot dt \quad ,$$

applying Lemma 1.1 and the inequality (valid for each  $\delta > 0$ )

$$\left| -\varepsilon \int_0^\infty \int_0^\delta \eta'(u^\varepsilon) D(u^\varepsilon) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \psi(t) \cdot \rho_\delta'(x) dx dt \right| \leq \varepsilon \cdot \text{cst} \cdot \|u^\varepsilon\|_{W_{loc}^{1,1}} \quad .$$

The terms (1.9) and (1.10) correspond exactly to the inequality (1.6). To conclude, note that the second integral in (1.10) is positive because of the D-convexity property of the entropy  $\eta$ . ■

#### REMARK 1.1

1) The inequality (1.6) is an algebraic one. For entropy-flux pair such that  $\eta'(\bar{u}_0(t)) = 0$  ( $t > 0$  fixed), it becomes

$$(1.12) \quad q(u(0+,t)) \leq q(\bar{u}_0(t))$$

which expresses the non-increasing of entropy-flux across the boundary. For the p-system and with the entropy associated with the energy, this inequality (1.12) was already derived by A. Benabdallah [4].

2) The inequality (1.12) is equivalent (formally) with the inequality (1.5) when the discontinuity curve in (1.5) is a vertical line ( $\varphi'(t) = 0$ ).

3) Note that the derivation of boundary inequality (1.6) does not need any hypothesis concerning the characteristic fields.

In the following, we are interested in specifying the *admissible states at the boundary*.

DEFINITION 1.1

For each state  $\bar{u}_0$  in  $\mathcal{U}$ , the set  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$  of the admissible values at the boundary is defined as all the states  $u$  in  $\mathcal{U}$  such that

$$(1.13) \quad q(u) - q(\bar{u}_0) - n'(\bar{u}_0) \cdot \{f(u) - f(\bar{u}_0)\} \leq 0$$

for each D-pair  $(n, q)$  of entropy-flux.

Moreover we propose to formulate the boundary condition for the problem (0.1)-(0.2) as follows

$$(B.1) \quad u(0+, t) \in \mathcal{E}(\bar{u}_0(t)) \quad , \quad t > 0$$

for an arbitrary boundary data  $\bar{u}_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ .

Note that  $\bar{u}_0(t)$  itself belongs to  $\mathcal{E}(\bar{u}_0(t))$ . But generally the set  $\mathcal{E}(\bar{u}_0(t))$  is not reduced to this point, and the condition (B.1) is an extensior of the usual Dirichlet boundary condition.

We hope that in general, this formulation (B.1) leads to a well-posed problem. For a linear system we recover the well-known formulation (§ 1.2). Concerning scalar conservation laws, Bardos-Leroux-Nedelec [3] proved that (0.1)-(0.2)-(B.1) admits one and only one entropy-solution. In paragraph 1.3, we give

a complete description of the sets  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$  for non convex scalar equations ; a lot of entropies are needed for this study. For a general system, the difficulty is to find suitable different entropies.

## 1.2 - STRICTLY HYPERBOLIC LINEAR SYSTEMS

The flux function is now given by  $f(u) = A.u$ , with a constant matrix  $A$  whose the eigenvalues are real and distinct. If we limit ourselves to a diffusion matrix  $D = I$ , the entropy-flux pairs (Lemma 1.2) are well-known for such systems, and we are able to specify the sets  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$ . Let  $p$  in  $\{1, \dots, n\}$  be the index of the greatest nonpositive eigenvalue of  $A$  :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \leq 0 < \lambda_{p+1} < \dots < \lambda_n .$$

### PROPOSITION 1.1

For  $\bar{u}_0$  in  $\mathbb{R}^n$ , the set  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$  is the affine space containing  $\bar{u}_0$  and generated by the  $p$  first eigenvectors of the matrix  $A$  :

$$\mathcal{E}(\bar{u}_0) = \left\{ \bar{u}_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot r_i \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p \right\} .$$

This statement is well-known : for a linear hyperbolic system, the values given at the boundary are the components on the basis of the eigenvectors corresponding to the *incoming characteristics* ; and this formulation of the boundary condition leads to a well-posed problem (Kreiss [10], Gustafsson-Kreiss-Sundström [8]).

Let us begin with the description of the entropy-flux pairs for a linear *strictly* hyperbolic system.



LEMMA 1.2

All the pairs of I-entropy-flux are given by

$$\eta(u) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\alpha_i(u))$$

$$q(u) = q_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(\alpha_i(u))$$

where  $u$  is decomposed as  $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i(u) r_i$  for  $n$  arbitrary convex functions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  and a constant  $q_0 \in \mathbb{R}^n$ .

PROOF OF LEMMA 1.2

It can be shown (Bardos [2]) that a convex function  $\eta$  is an entropy if and only if  $\forall u \in \mathbb{R}^n$ ,  $\eta''(u) \cdot A$  is a symmetric matrix. But taking  $P = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  and  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , we have

$$\Lambda = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Thus using  $\eta''(u) \cdot P \cdot \Lambda \cdot P^{-1} = {}^t(\eta''(u) \cdot P \cdot \Lambda \cdot P^{-1})$

and the symmetry of the matrix  $\eta''(u)$

$$\eta''(u) \cdot P \cdot \Lambda \cdot P^{-1} = {}^t P^{-1} \cdot \Lambda \cdot {}^t P \cdot \eta''(u)$$

we get the relation  $({}^t P \cdot \eta''(u) \cdot P) \cdot \Lambda = \Lambda ({}^t P \cdot \eta''(u) \cdot P)$ .

The matrix  ${}^t P \cdot \eta''(u) \cdot P$  commutes with the diagonal matrix  $\Lambda$  whose elements are all *distinct*. Therefore, it is also a diagonal matrix. The expressions of  $\eta$  and  $q$  are direct consequences of this fact. ■

PROOF OF PROPOSITION 1.1

First, we prove that if  $u = \bar{u}_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$  with at least one index  $i_0 > p$  such that  $\alpha_{i_0} \neq 0$ , then  $u$  does not belong to  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$ . Let us take the pair of entropy-flux :

$$\eta(\bar{u}_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot r_i) = (\beta_{i_0})^2$$

$$q(\bar{u}_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot r_i) = \lambda_{i_0} \cdot (\beta_{i_0})^2 .$$

we obtain

$$q(u) - q(\bar{u}_0) - \eta'(\bar{u}_0) \cdot \{f(u) - f(\bar{u}_0)\} = \lambda_{i_0} \cdot (\alpha_{i_0})^2 > 0 ,$$

which is not consistent with (1.13).

Secondly, let us consider a state  $u = \bar{u}_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot r_i$ . For any entropy-flux pair  $(\eta, q)$ , we get by the Lemma 1.2 :

$$\eta(\bar{u}_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot r_i) = \eta(\bar{u}_0) + \eta'(\bar{u}_0) \cdot \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot r_i + \sum_{i=1}^p \varphi_i(\alpha_i)$$

$$q(\bar{u}_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot r_i) = q(\bar{u}_0) + q'(\bar{u}_0) \cdot \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot r_i + \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i(\alpha_i) ,$$

with convex functions  $\varphi_i$  such that

$$\varphi_i(0) = \varphi_i'(0) = 0 \quad (\text{thus } \varphi_i \geq 0) .$$

It results :

$$q(u) - q(\bar{u}_0) - \eta'(\bar{u}_0) \cdot \{f(u) - f(\bar{u}_0)\} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i(\alpha_i) \leq 0 ,$$

which is exactly (1.13). ■

### 1.3 - STUDY OF NON CONVEX SCALAR CONSERVATION LAWS

For a scalar conservation law ( $n=1$ ), every convex function is an entropy. Hence we can entirely characterize the set  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$  for each state  $\bar{u}_0$  in  $\mathbb{R}$ . Note that the flux function  $f$  is not necessarily convex, that is the (unique) characteristic field is not globally genuinely nonlinear or linearly degenerated.

Using the Kruzkov entropies (refer to Kruzkov [11], and [18]-[25])

$$\eta(u) = |u - k|, \quad q(u) = \operatorname{sgn}(u - k)(f(u) - f(k)), \quad k \in \mathbb{R}$$

with  $\operatorname{sgn} v = 1$  if  $v > 0$ ,  $-1$  if  $v < 0$ , we notice that the boundary entropy inequalities (1.13) are equivalent to

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(u - k)(f(u) - f(k)) - \operatorname{sgn}(\bar{u}_0 - k)(f(\bar{u}_0) - f(k)) \\ - \operatorname{sgn}(\bar{u}_0 - k)(f(u) - f(\bar{u}_0)) \leq 0, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thus we get

$$\left( \operatorname{sgn}(u - k) - \operatorname{sgn}(\bar{u}_0 - k) \right) (f(u) - f(k)) \leq 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

This latter inequality holds trivially if  $k$  is not between  $u$  and  $\bar{u}_0$ .

Therefore we have proved the following property

PROPOSITION 1.2

*The set  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$  of admissible states  $u$  is characterized by the inequalities*

$$(1.14) \quad \frac{f(u) - f(k)}{u - k} \leq 0$$

*for every  $k$  between  $u$  and  $\bar{u}_0$ .*

Geometrically, this last condition means that the slope of any chord joining the point  $(u, f(u))$  to  $(k, f(k))$  is negative for every real  $k$  between  $u$  and  $\bar{u}_0$ . To explicit (1.14) we introduce a piecewise regular function  $g$  which depends on the state  $\bar{u}_0$ ,  $g : \left( \inf_{u \leq \bar{u}_0} f(u), \sup_{u \geq \bar{u}_0} f(u) \right) \rightarrow \mathbb{R}$  defined by :

$$(1.15) \quad g(v) = \begin{cases} \inf_h h(v) & , \quad \text{if } v \leq f(\bar{u}_0) \\ \sup_h h(v) & , \quad \text{if } v \geq f(\bar{u}_0) \end{cases}$$

where  $h$  are functions satisfying the following constraints

$$(1.16-a) \quad h : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(h(v)) \equiv v \quad , \quad \forall v \in f(\mathbb{R})$$

$$(1.16-b) \quad (v - f(\bar{u}_0)) (h(v) - \bar{u}_0) \leq 0 \quad , \quad \forall v \in f(\mathbb{R}) \quad .$$

In the plane  $\{u, f\}$ , if we look at the graph of the function  $f$  from the point  $(\bar{u}_0, f(\bar{u}_0))$  to the left (resp. the right) and above  $f(\bar{u}_0)$  (resp. below  $f(\bar{u}_0)$ ) and if we eliminate hidden lines, we obtain the graph of  $g^{-1}$  (see figure 1.1). Moreover we can verify that  $g$  is a non-increasing function.

PROPOSITION 1.3

Let  $\mathcal{D}$  be the set of discontinuity points of the function  $g$ . We get

$$\mathcal{E}(\bar{u}_0) = \text{Img } u \ f^{-1}(\mathcal{D}) \quad .$$

In the particular case where the flux function is strictly convex tending towards infinity at infinity, denote by  $u_*$  the state minimizing  $f$  and for  $\bar{u}_0 \neq u_*$  let  $\bar{u}_1$  be the solution  $u \neq \bar{u}_0$  of the equation  $f(u) = f(\bar{u}_0)$ . The previous result is more simple.

PROPOSITION 1.4 (convex case)

$$\mathcal{E}(\bar{u}_0) = \begin{cases} ]-\infty, \bar{u}_1] \cup \{\bar{u}_0\} & , \quad \text{if } \bar{u}_0 > u_* \\ ]-\infty, u_*] & , \quad \text{if } \bar{u}_0 \leq u_* \end{cases} \quad .$$

This result was already obtained by Le Floch-Nedelec in [16]-[17]. For the (interesting) case of an incoming value  $\bar{u}_0 > u_*$ , see figure 1.2.

PROOF OF PROPOSITIONS 1.3 AND 1.4

To fix the ideas, suppose that  $u < \bar{u}_0$ .

- a) If  $f(u) < f(\bar{u}_0)$  then on one hand (1.14) is not valid with  $k = \bar{u}_0$ , thus  $u \notin \mathcal{E}(\bar{u}_0)$ ; on the other hand the condition (1.16-b) is also wrong with  $v = f(u)$ , thus  $u \notin \text{Img}$  and clearly  $u \notin f^{-1}(\mathcal{D})$  (see (1.15)).

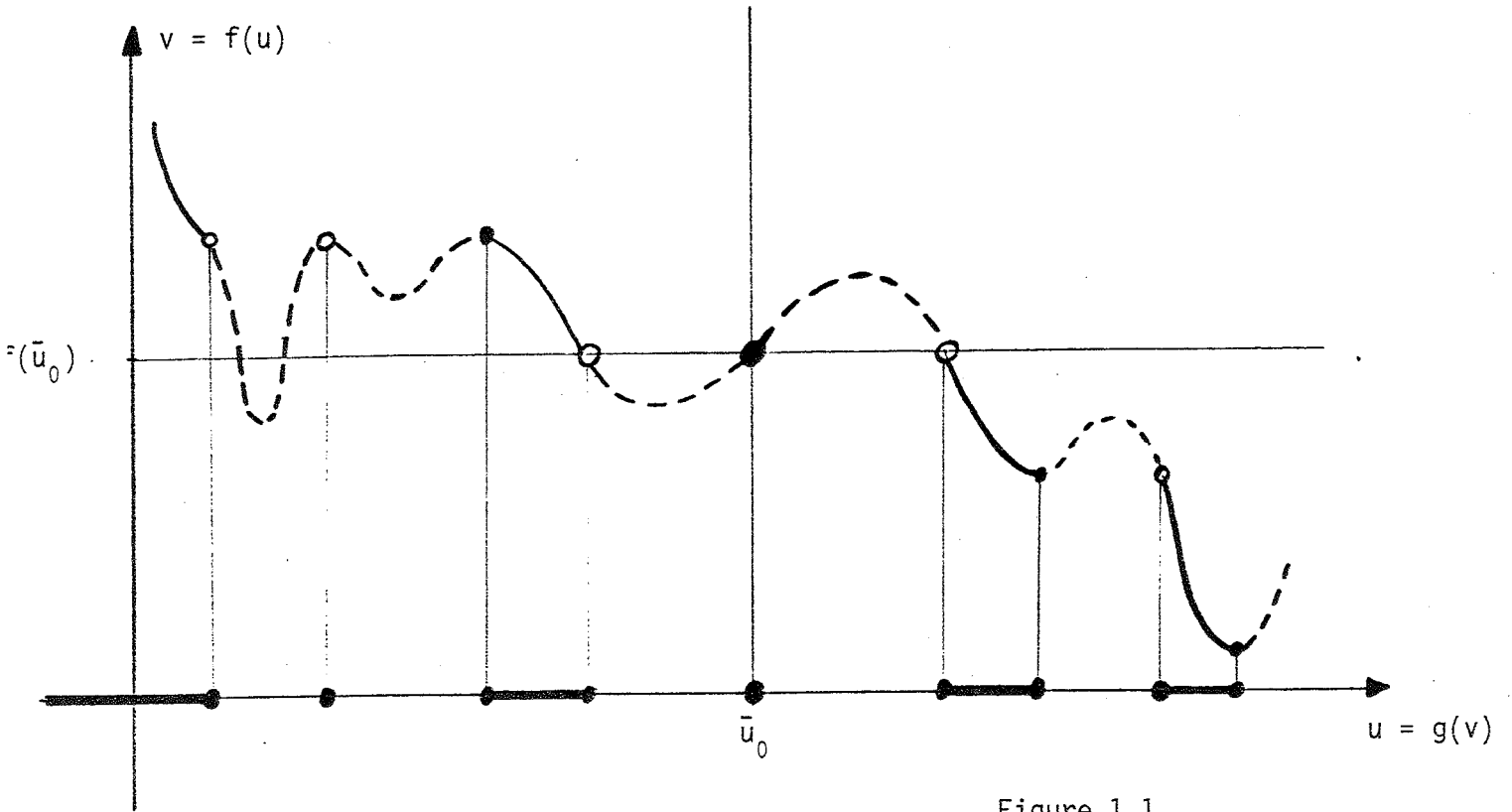


Figure 1.1

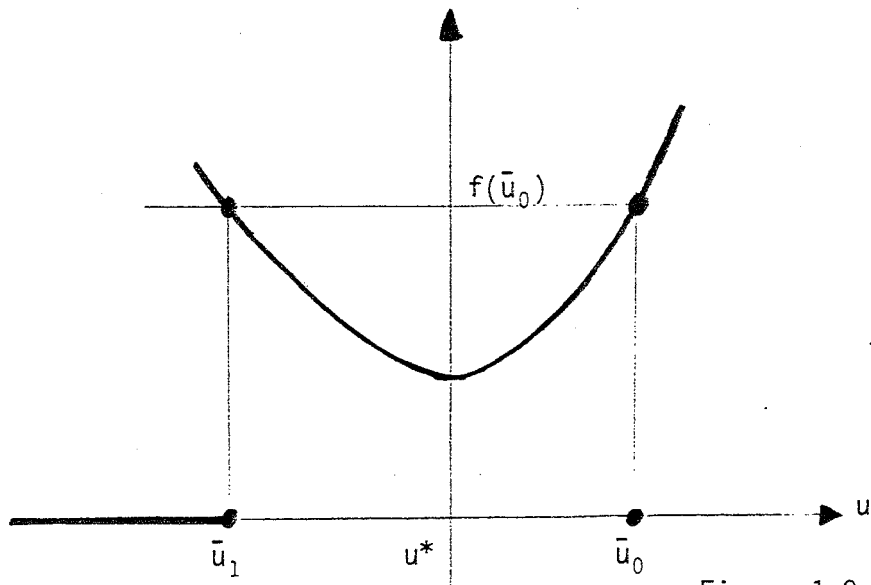


Figure 1.2

- b) If  $f(u) \geq f(\bar{u}_0)$ , we set  $I = \{u' \in ]u, \bar{u}_0], f(u') > f(u)\}$
- either  $\text{card } I = 0$  and on one hand (1.14) is clearly satisfied. Define  $J = \{u' \in ]u, \bar{u}_0], f(u') = f(u)\}$ . When  $\text{card } J = 0$ , we get necessarily  $g(f(u)) = u$  and thus  $u \in \text{Img}$ . When  $\text{card } J \geq 1$ ,  $f(u)$  is a point of discontinuity of  $g$  and  $u \in f^{-1}(\mathcal{D})$ .
  - or  $\text{card } I \geq 1$  and we have  $g(f(u)) = \sup I > u$ . So  $u \notin \text{Img} \cup f^{-1}(\mathcal{D})$ . But (1.14) is not satisfied with  $k$  into the interval limited by two values of the set  $I$  which contains at least two points because of the continuity of  $f$ .

Henceforth the assertion for a general flux function is proved. Concerning the convex case, it is sufficient to note that  $g : [f(\bar{u}_0), +\infty[ \rightarrow ]-\infty, \bar{u}_1]$  is continuous excepted eventually at  $f(\bar{u}_0)$ . Moreover  $f^{-1}(f(\bar{u}_0)) = \{\bar{u}_1, \bar{u}_0\}$ . ■

#### REMARK 1.2

When the function  $f$  is strictly convex it is sufficient to take in account only *one entropy*  $\eta(u) = |u - u_0|$  in the inequality (1.13) to recover the entire set  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$ . Moreover, every other Kruzkov-entropy is not sufficient.

#### 1.4 - LOCAL NONLINEAR STRUCTURE FOR GENERAL SYSTEMS

We now consider the local nonlinear structure of  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$  with  $\bar{u}_0 \in \mathcal{U}$ , assuming that the state  $\bar{u}_0$  has no null eigenvalues

$$(1.17) \quad \lambda_1(\bar{u}_0) < \dots < \lambda_p(\bar{u}_0) < 0 < \lambda_{p+1}(\bar{u}_0) < \dots < \lambda_n(\bar{u}_0) .$$

The proof of Lemma 1.2 in this case shows that for a pair of entropy-flux  $(\eta, q)$  the Hessian matrix of  $\eta$  at point  $\bar{u}_0$  admits the diagonal form :

$\text{diag}(\psi_1(\eta), \psi_2(\eta), \dots, \psi_n(\eta))$  in the basis of eigenvectors

$r_1(\bar{u}_0), r_2(\bar{u}_0), \dots, r_n(\bar{u}_0)$ , with  $n$  nonnegative reals  $\psi_1(\eta), \psi_2(\eta), \dots, \psi_n(\eta)$ .

For  $u$  in the neighbourhood of  $\bar{u}_0$

$$u - \bar{u}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot r_i(\bar{u}_0) \quad ,$$

the inequality (1.13) can be developed with the help of the variables

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  :

$$(1.18) \quad \sum_{i=1}^n \psi_i(\eta) \cdot \lambda_i(\bar{u}_0) \cdot \alpha_i^2 + R_3(\alpha, \eta) \leq 0 \quad ,$$

with a rest  $R_3(\alpha, \eta)$  depending on the choice of the entropy  $\eta$  and being at least of order 3 by respect to  $\alpha$ . Unfortunately, geometrical description of  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$  is not easily deductible from inequality (1.18). We hope that this set  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$  is locally a manifold in the neighbourhood of  $\bar{u}_0$ . Making the hypothesis that this manifold admits a tangent space and moreover that there exists a suitable entropy  $\eta$  such that

$$\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_p = 0 \quad , \quad \psi_{p+1} > 0, \dots, \psi_n > 0 \quad ,$$

the inequality (1.18) shows that the  $p$  first  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  are zero if  $u$  belongs now in this tangent space. Reverseely, a state  $u = \bar{u}_0 + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i \cdot r_i(\bar{u}_0)$  satisfies, for  $(\alpha_i)$  sufficiently small, the inequality (1.18) for any entropy  $\eta$ .

## 2 - APPROACH BY THE RIEMANN PROBLEM

### 2.1 - SECOND FORMULATION OF THE BOUNDARY CONDITION

A classical and well-understood problem associated with the system (0.1) is the Riemann problem corresponding to an initial data composed by two constant states (refer to Lax [13], [14] and [15]). Hence, in this section, we limit ourselves to a model problem, assuming the initial data  $u_0(\cdot)$  and the boundary data  $\bar{u}_0(\cdot)$  to be constant ; and in the followings, we will formulate the boundary condition thanks to the notion of Riemann problem.

We first recall well known results concerning a *Riemann problem*

$$R(u_L, u_R) : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} w + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = 0 & , w(x,t) \in \mathcal{U}, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ w(x,0) = \begin{cases} u_L & , x < 0 \\ u_R & , x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

with  $u_L$  and  $u_R$  in  $\mathcal{U}$ . Classically, we define particular solutions of system (0.1), which depend only on the variable  $\frac{x}{t} = \xi$ , they are called elementary waves : shock waves, rarefaction waves and contact discontinuities. In the space of states  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ , the waves issued from a given state  $u_*$  are denoted by  $\mathcal{S}_i(u_*)$ ,  $\mathcal{R}_i(u_*)$  and  $\mathcal{C}_i(u_*)$  respectively ; and the  $i$ -curves are denoted by  $\mathcal{W}_i(u_*)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . In neighborhood of the state  $u_*$ , the tangent direction of each curve  $\mathcal{W}_i(u_*)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , is given by the eigenvector  $r_i(u_*)$ . Moreover, the curves are globally in  $\mathcal{C}^2$  class. For details concerning the complete definition and the different properties of the  $i$ -curves, we refer to Smoller [23].

Assuming the vicinity of the states  $u_L$  and  $u_R$ , the Riemann problem  $R(u_L, u_R)$  admits one and only one entropy weak solution composed with  $(n+1)$  constant states separated by  $n$  elementary waves (Lax [14]) written as



$$w = w\left(\xi = \frac{x}{t}; u_L, u_R\right) .$$

In the followings, the set  $\mathcal{U}$  is chosen such that the Riemann problem is always well-posed in this sense.

From the notion of Riemann problem, we now introduce a second set of *admissible states at the boundary* :

DEFINITION 2.1

For each state  $\bar{u}_0$  in  $\mathcal{U}$ , the set  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  of admissible values is defined as

$$\mathcal{V}(\bar{u}_0) = \left\{ w(0+; \bar{u}_0, u_R) / u_R \in \mathcal{U} \right\} .$$

Hence, we propose a second formulation of the boundary condition for the problem (0.1)-(0.2) :

$$(B.2) \quad u(0+, t) \in \mathcal{V}(\bar{u}_0(t)) \quad , \quad t > 0 \quad ,$$

for a boundary data  $\bar{u}_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ . Note that, in particular,  $\bar{u}_0(t)$  belongs to  $\mathcal{V}(\bar{u}_0(t))$ . But generally,  $\mathcal{V}(\bar{u}_0(t))$  is not reduced to this point as we noticed for the set  $\mathcal{E}(\bar{u}_0(t))$  in section 1.

First, we prove that the problem (0.1)-(0.2)-(B.2), with constant data  $u_0$  and  $\bar{u}_0$  is well-posed.

THEOREM 2.1

Let  $\bar{u}_0$  and  $u_0$  be data in  $\mathcal{U}$ . The problem (0.1)-(0.2)-(B.2) admits one and only one solution in the class of functions which consist of constant states separated by at most  $n$  elementary waves. (The set  $\mathcal{U}$  is chosen such that any Riemann problem  $R(\dots)$  with data in  $\mathcal{U}$  is well-posed).

Let us begin by a preliminary result which shows that two solutions of Riemann problems can be mixed together.

LEMMA 2.1

Let  $\xi_* \in \mathbb{R}$ ,  $u_* \in \mathcal{U}$ . Let  $w_L(\xi)$  and  $w_R(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , be two solutions of Riemann problems such that

$$w_R(\xi_* + 0) = w_L(\xi_* + 0) = u_* .$$

Let  $w(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , be given by :

$$w(\xi) = \begin{cases} w_L(\xi) & , \quad \xi < \xi_* \\ w_R(\xi) & , \quad \xi > \xi_* . \end{cases}$$

Then,  $w(\cdot)$  is an entropy weak solution of one Riemann problem.

PROOF OF LEMMA 2.1

We give the proof for  $\xi_* = 0$ . Let  $i$  (resp.  $j$ ) be the index of the greatest nonpositive (resp. smallest nonnegative) wave of  $w_L$  (resp.  $w_R$ ). Let  $\bar{\sigma}_i$  (resp.  $\underline{\sigma}_j$ ) the greatest (resp. smallest) velocity of the  $i$ -wave (resp. the  $j$ -wave) for  $w_L$  (resp. for  $w_R$ ). Using Lax inequalities, we get :

$$(2.1) \quad \lambda_i(u_*) \leq \bar{\sigma}_i \leq 0 \leq \underline{\sigma}_j \leq \lambda_j(u_*) .$$

Hence, either  $\lambda_i(u_*) < \lambda_j(u_*)$  implying  $i < j$ , or  $\lambda_i(u_*) = \lambda_j(u_*) = 0$  implying  $i = j$  and that  $u_*$  is a state in a  $i$ -rarefaction wave. ■

PROOF OF THEOREM 2.1

First, we prove the existence. The solution is immediately constructed via a classical Riemann problem. Consider the restriction of the Riemann problem with the two data  $\bar{u}_0$  on the left and  $u_0$  on the right :

$$(2.2) \quad u(\xi) = w(\xi; \bar{u}_0, u_0) \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}^+ .$$

It satisfies clearly (0.1)-(0.2) and (B.2).

Secondly, concerning the uniqueness, note that a solution  $u(\cdot)$  of (0.1)-(0.2)-(B.2) necessarily satisfies on one hand

$$u(0+) \in \mathcal{V}(\bar{u}_0)$$

and on the other hand

$$u(0+) \in \mathcal{W}(u_0) ,$$

where the set  $\mathcal{W}(u_0)$  is defined by :

$$\mathcal{W}(u_0) = \left\{ w(0+ ; u_L, u_0) / u_L \in \mathcal{U} \right\} .$$

Recall that we consider only solutions consisting of at most  $(n+1)$  constant states separated by elementary waves.

We prove now that  $\mathcal{V}(\bar{u}_0) \cap \mathcal{W}(u_0)$  is reduced to *one point*. It is clear that there is at least one point ; and if  $u_1^*$  and  $u_2^*$  are in  $\mathcal{V}(\bar{u}_0) \cap \mathcal{W}(u_0)$  then there exist  $z_1$  and  $z_2$  solutions of the Riemann problem  $R(\bar{u}_0, u_0)$  constructed as follows :  $u_i^*$  belongs to  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  (resp.  $\mathcal{W}(u_0)$ ) thus there exists  $u_{R,i}$  (resp.  $u_{L,i}$ ), such that  $z_i = w(\frac{x}{t} ; \bar{u}_0, u_{R,i})$  if  $\frac{x}{t} < 0$ , and  $z_i = w(\frac{x}{t} ; u_{L,i}, u_0)$  if  $\frac{x}{t} > 0$ ,  $i=1,2$ .

According to the Lemma 2.1, we verify that those two functions  $z_1$  and  $z_2$  are effectively weak entropy solutions of the Riemann problem  $R(\bar{u}_0, u_0)$ . Hence, there are equal :  $z_1 = z_2$  and in particular  $u_1^* = u_2^*$ . Thus, we deduce that

$$u(0+) = w(0+ ; \bar{u}_0, u_0) \equiv u_* .$$

We prove now that the solution (2.2) of (0.1)-(0.2)-(B.2) is the *only way* to join  $u_*$  (at  $\xi = 0+$ ) to  $u_0$  (at  $\xi = +\infty$ ). Let  $z(\xi)$ ,  $\xi > 0$ , be an other entropy construction. We extend it for  $\xi < 0$  by the help of the Riemann problem  $R(\bar{u}_0, u_0)$  :

$$z(\xi) = w(\xi ; \bar{u}_0, u_0) , \quad \forall \xi < 0 .$$

Then, thanks to Lemma 2.1, it results that  $z = w$  as previously. ■

Now, we are going to obtain a complete description of the sets  $\mathcal{V}$  in two cases : linear strictly hyperbolic systems and non convex scalar conservation laws (paragraphs 2.2 and 2.3). Then, we analyze the local structure of  $\mathcal{V}$  for a general system of conservation laws (paragraph 2.4). Finally, the p-system and the isentropic Euler equations of gas dynamics are entirely studied (paragraphs 2.5 and 2.6).

## 2.2 - STUDY OF STRICTLY HYPERBOLIC LINEAR SYSTEMS

When the flux  $f$  is linear,  $f(u) = A.u$ , consider the index  $p$  such that

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq 0 < \lambda_{p+1} < \dots < \lambda_n .$$

And we have the following result.

### PROPOSITION 2.1

*For each state  $\bar{u}_0$  in  $\mathbb{R}^n$ , the set  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  is the affine manifold containing  $\bar{u}_0$  and generated by the  $p$  eigenvectors  $r_1, \dots, r_p$ . That is  $\mathcal{V}(\bar{u}_0) = \mathcal{E}(\bar{u}_0)$ .*

It is an immediate consequence of the resolution of a Riemann problem  $R(u_L, u_R)$  for a linear system. Taking

$$(2.3) \quad u_R - u_L = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot r_i ,$$

the solution  $w(\xi; u_L, u_R)$  is given by  $(0 \leq i \leq n)$

$$(2.4) \quad w(\xi) = u_L + \sum_{j=1}^i \alpha_j \cdot r_j \quad \text{for } \lambda_i < \xi < \lambda_{i+1} ,$$

with  $\lambda_0 = -\infty$  and  $\lambda_{n+1} = +\infty$ .

The set  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  is exactly equal to the set  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$  introduced in section 1. Hence, we recover the well-known formulation (Kreiss [10]).

### 2.3 - STUDY OF NON CONVEX SCALAR CONSERVATION LAWS

In this paragraph, we take  $n=1$  and an arbitrary (non convex)  $\mathcal{C}^1$ -class flux function  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Hence, the hypotheses are more general than the usual ones for a system : the (unique) field is not globally genuinely non-linear or linearly degenerated. But, following Leroux [18] and Ballou [1], the resolution of the Riemann problem is explicit. The solution  $w(\xi; u_L, u_R)$  of a Riemann problem  $R(u_L, u_R)$  is composed by the two constant states  $u_L$  and  $u_R$  separated by a succession of rarefaction waves and shock waves. These waves are obtained thanks to the convex (respectively concave) hull of the flux  $f$  on the interval  $[u_L, u_R]$  if  $u_L < u_R$  (resp.  $[u_R, u_L]$  if  $u_R < u_L$ ). For detail see [18].

In paragraph 1.3, we introduced a set  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$  for each  $\bar{u}_0 \in \mathbb{R}$ . Now, we prove that the two sets  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  and  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$  are equal.

#### PROPOSITION 2.2

$$\forall \bar{u}_0 \in \mathbb{R} \quad , \quad \mathcal{V}(\bar{u}_0) = \mathcal{E}(\bar{u}_0) \quad .$$

#### LEMMA 2.2

Let  $h : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Consider  $\tilde{h} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  its convex hull. Let  $u_*$  be the greatest point realizing the minimum of  $\tilde{h}$  :

$$u_* = \sup \left\{ u / \forall v, \tilde{h}(u) \leq \tilde{h}(v) \right\} \quad .$$

Then we have

$$\tilde{h}(u_*) = h(u_*) \quad .$$

Refer to classical textbook on convex functions, for example Rockafellar [21].

PROOF OF PROPOSITION 2.2

Recall that the set  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$  is described in paragraph 1.3 with the help of a function  $g$  defined from the state  $\bar{u}_0 \in \mathbb{R}$  (see (1.15)-(1.16)) :

$$\mathcal{E}(\bar{u}_0) = \text{Img } U f^{-1}(\mathcal{D}) .$$

First, let  $u_*$  be in  $\mathcal{E}(\bar{u}_0)$ . Then geometrically the Riemann problem  $R(\bar{u}_0; u_*)$  contains only waves with non positive velocities : (figure 1.1)

$$w(\xi; \bar{u}_0, u_*) = u_* \quad , \quad \forall \xi > 0 .$$

Thus,  $u_* = w(0+; \bar{u}_0, u_*)$ . So,  $u_*$  belongs to  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$ .

Secondly, let  $u_*$  be in  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  :  $u_* = w(0+; \bar{u}_0, u_R)$  with  $u_R > \bar{u}_0$  to fix the ideas. Using the explicit resolution of  $R(\bar{u}_0, u_R)$ , the state  $u_*$  is exactly the greatest point realizing the minimum value of the convex hull  $\tilde{f}$  of  $f$  on  $[\bar{u}_0, u_R]$ . For  $k$  in  $[\bar{u}_0, u_*]$ , we have clearly :

$$\tilde{f}(u_*) \leq \tilde{f}(k) \leq f(k) .$$

Moreover, by Lemma 2.2, we have  $f(u_*) = \tilde{f}(u_*)$ . Thus, we get  $f(u_*) \leq f(k)$ . So (1.14) holds, which is equivalent to :  $u_* \in \mathcal{E}(\bar{u}_0)$  (Proposition 1.2). ■

2.4 - LOCAL NONLINEAR STRUCTURE FOR A GENERAL SYSTEM

We turn back to the general situation of the paragraph 2.1. Recall that by hypothesis, the set of states  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  is chosen such that the Riemann problem with data in  $\mathcal{U}$  is well-posed. The following Theorem describes the local nonlinear structure of  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$ , when all the eigenvalues of the state  $\bar{u}_0 \in \mathcal{U}$  are not equal to zero or when the null eigenvalue corresponds to a genuinely nonlinear field.

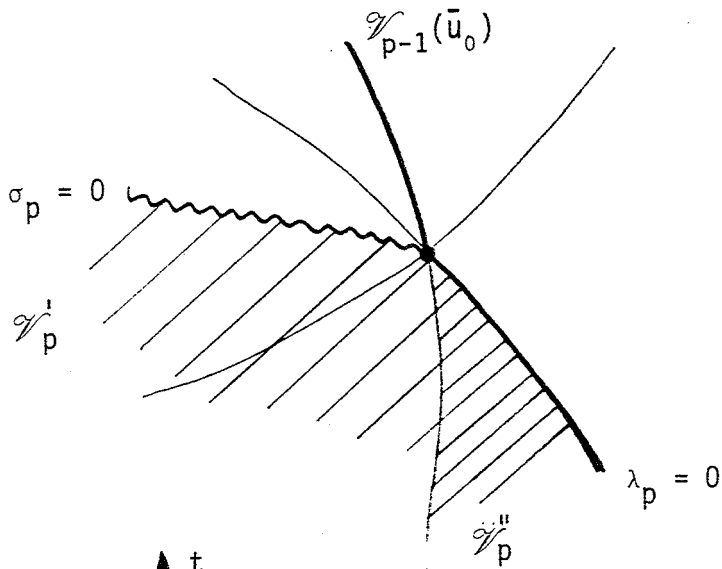


Figure 2.1

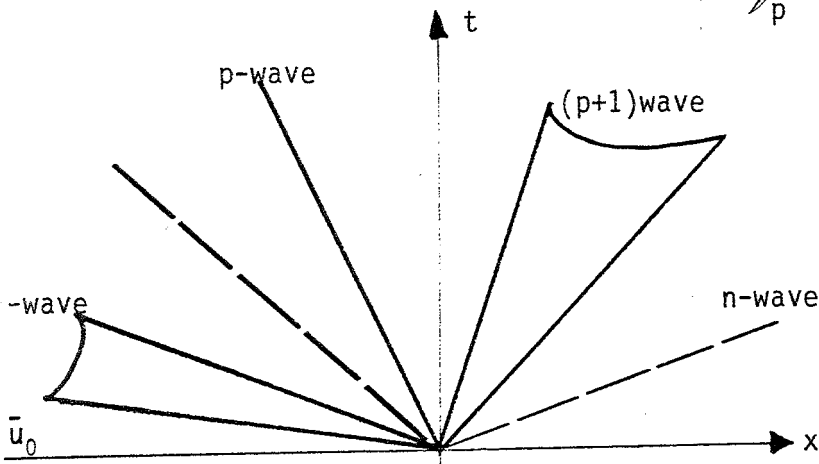


Figure 2.2

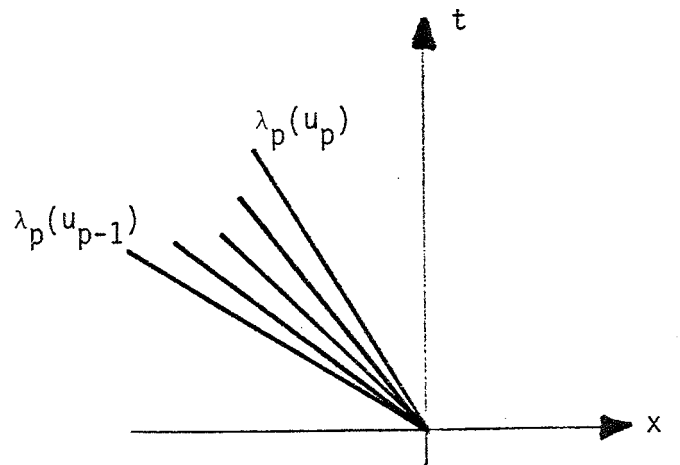


Figure 2.3

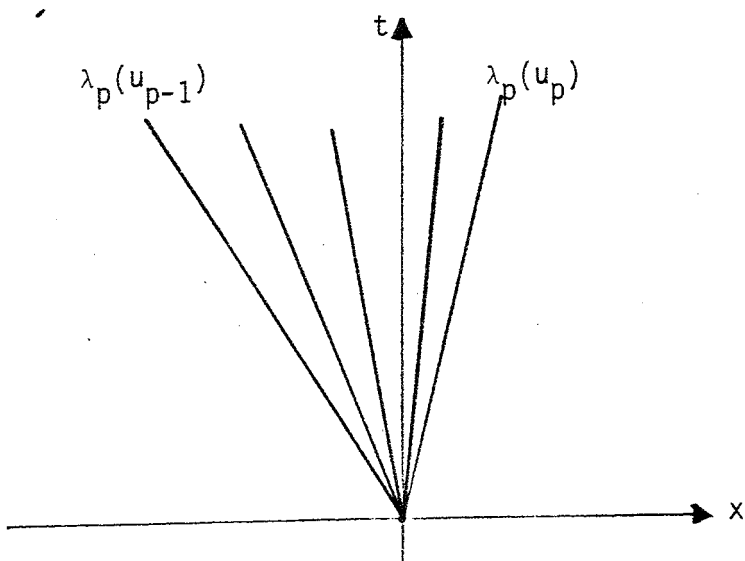


Figure 2.4

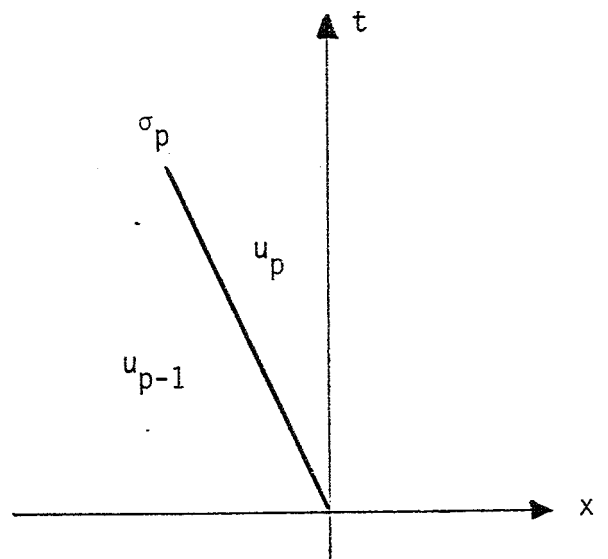


Figure 2.5

THEOREM 2.2

For any state  $\bar{u}_0$  in  $\mathcal{U}$ , let  $p$  be the index of the greatest non positive eigenvalue at the point  $\bar{u}_0$  :

$$(2.5) \quad \lambda_1(\bar{u}_0) < \dots < \lambda_p(\bar{u}_0) \leq 0 < \lambda_{p+1}(\bar{u}_0) < \dots < \lambda_n(\bar{u}_0) .$$

1) If  $\lambda_p(\bar{u}_0) < 0$ , then the set  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  is, locally in neighbourhood of  $\bar{u}_0$ , a manifold  $\mathcal{V}_p(\bar{u}_0)$  with dimension  $p$  whose tangent vector space is generated by the  $p$  first eigenvectors  $r_1(\bar{u}_0), r_2(\bar{u}_0), \dots, r_p(\bar{u}_0)$ .

2) If  $\lambda_p(\bar{u}_0) = 0$  and if the  $p$ -field is genuinely nonlinear, then the set  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  is locally around  $\bar{u}_0$  the union of  $\mathcal{V}'_p(\bar{u}_0)$  and  $\mathcal{V}''_p(\bar{u}_0)$  with dimension  $p$  and a manifold  $\mathcal{V}_{p-1}(\bar{u}_0)$  defined inductively as follows :

$$(2.6) \quad \begin{cases} \mathcal{V}'_1(\bar{u}_0) = \mathcal{W}'_1(\bar{u}_0) \\ \mathcal{V}'_k(\bar{u}_0) = \left\{ u / \exists u' \in \mathcal{V}'_{k-1}(\bar{u}_0) , u \in \mathcal{W}'_k(u') \right\} \end{cases}$$

for  $k=2, \dots, n$  ; and

$$(2.7-a) \quad \mathcal{V}''_p(\bar{u}_0) = \left\{ u / \exists u' \in \mathcal{V}'_{p-1}(\bar{u}_0) , u \in \mathcal{S}_p(u') \text{ and } \sigma_p(u', u) \leq 0 \right\}$$

$$(2.7-b) \quad \mathcal{V}''_p(\bar{u}_0) = \left\{ u / \exists u' \in \mathcal{V}'_{p-1}(\bar{u}_0) , u \in \mathcal{P}_p(u') \text{ and } \lambda_p(u) \leq 0 \right\} .$$

( $\sigma_p(u', u)$  is the speed of the  $p$ -shock between  $u'$  and  $u$ ). (see Figure 2.1).

PROOF OF THEOREM 2.2

1) When  $\lambda_p(\bar{u}_0) < 0$ , we restrict ourselves to a neighbourhood  $\mathcal{N}$  of the state  $\bar{u}_0$  such that

$$(2.8) \quad \lambda_1(u) < \dots < \lambda_p(u) < 0 < \lambda_{p+1}(u) < \dots < \lambda_n(u) .$$

The set  $\mathcal{N}$  can be parameterized by a neighbourhood  $\mathcal{N}_0$  of zero in  $\mathbb{R}^n$  :

$$\mathcal{N}_0 \ni \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \longmapsto u = \phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathcal{N}$$



with

$$\phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = W_n(\varepsilon_n; W_{n-1}(\varepsilon_{n-1}; \dots); W_1(\varepsilon_1; \bar{u}_0)) \dots$$

where  $\varepsilon_i \longmapsto W_i(\varepsilon_i; v)$  is a parameterization of the  $i$ -curve  $\mathcal{W}_i(v)$  issued from the state  $v$ . If the  $i$ -characteristic field is genuinely nonlinear, the part  $\varepsilon_i > 0$  (resp.  $\varepsilon_i < 0$ ) corresponds to the curve  $\mathcal{R}_i(v)$  (resp.  $\mathcal{L}_i(v)$ )

We have the following properties (Lax [15])

$$(2.9) \quad \begin{cases} \phi(0) = \bar{u}_0 \\ D\phi(0) = (r_1(\bar{u}_0), \dots, r_n(\bar{u}_0)) \end{cases} .$$

According to (2.8), all the velocities of the  $i$ -waves are negative for  $i \leq p$  and positive for  $i > p$ . Thus we get (see figure 2.2)

$$(2.10) \quad w(0+; \bar{u}_0, \phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)) = \phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, 0, \dots, 0) .$$

which implies that :

$$\mathcal{V}(\bar{u}_0) \cap \mathcal{N} = \mathcal{V}_p(\bar{u}_0) \cap \mathcal{N} .$$

The local structure of  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  results of (2.9).

2) When  $\lambda_p(\bar{u}_0) = 0$  and the  $p$ -field is genuinely nonlinear, the set  $\mathcal{V}(\bar{u}_0) \cap \mathcal{N}$  contains  $\mathcal{V}_{p-1}(\bar{u}_0) \cap \mathcal{N}$  as previously. Moreover, take  $u_{p-1} = \phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}, 0, -, 0)$ . The state  $w(0+; \bar{u}_0, \phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n))$  depends only on the relative location between the  $p$ -wave issued of  $u_{p-1}$  and the axis  $\xi = \frac{x}{t} = 0$ . We distinguish between two cases :

a) either the  $p$ -wave is a rarefaction, that is  $\varepsilon_p \geq 0$ .

Necessarily, the points of  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  which are not in  $\mathcal{V}_{p-1}(\bar{u}_0)$  are obtained for states  $u_{p-1}$  such that  $\lambda_p(\phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}, 0, \dots, 0)) \leq 0$ .

- Either  $u_p = \phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, 0, \dots, 0)$  satisfies  $\lambda_p(u_p) \leq 0$  (figure 2.3) ; then (2.10) holds and  $u_p$  describes a part of  $\mathcal{V}_p(\bar{u}_0)$ .
- Or  $u_p$  satisfies  $\lambda_p(u_p) > 0$  and  $w(0+; \bar{u}_0, \phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n))$  is a state where  $\lambda_p$  is equal to 0 (figure 2.4).

The tangent spaces limiting  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  in this case a) consist of the space generated by  $r_1(\bar{u}_0), \dots, r_{p-1}(\bar{u}_0)$  and the intersection between the space generated by  $r_1(\bar{u}_0), \dots, r_p(\bar{u}_0)$  and the hyperplan tangent to the manifold  $\{v / \lambda_p(v) = 0\}$ . Locally, the position of  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  is given by the two constraints :

$$(2.11) \quad \varepsilon_p \geq 0 \quad , \quad \lambda_p(\phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, 0, \dots, 0)) \leq 0 \quad .$$

b) on the p-wave is a shock wave, that is  $\varepsilon_p < 0$ .

The "new" states of  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  are obtained for a non positive velocity  $\sigma_p(u_{p-1}, u_p)$  of the p-shock. (see figure 2.5). The tangent spaces limiting  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  in this case b) are the same as previously excepted that the set  $\{v / \lambda_p(v) = 0\}$  becomes  $\{u_p = \phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, 0, \dots, 0) / \sigma_p(u_{p-1}, u_p) = 0\}$ . Thus,  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  satisfies the two constraints :

$$(2.12) \quad \varepsilon_p \leq 0 \quad , \quad \sigma_p(u_{p-1}, u_p) \leq 0 \quad .$$

We can determine the equations of limiting spaces.

On one hand, we get :

$$\lambda_p(\phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, 0, \dots, 0)) = \sum_{j=1}^{p-1} \nabla \lambda_p(\bar{u}_0) \cdot r_j(\bar{u}_0) \cdot \varepsilon_j + \varepsilon_p + 0(\varepsilon^2)$$

thanks to (2.9). And the equation is

$$(2.13) \quad \varepsilon_p + \sum_{j=1}^{p-1} \nabla \lambda_p(\bar{u}_0) \cdot r_j(\bar{u}_0) \cdot \varepsilon_j = 0$$

On the other hand, we get :

$$\begin{aligned}\sigma_p(u_{p-1}, u_p) &= \frac{1}{2} (\lambda_p(u_{p-1}) + \lambda_p(u_p)) + o(\varepsilon^2) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_p + \sum_{j=1}^{p-1} \nabla \lambda_p(\bar{u}_0) \cdot r_j(\bar{u}_0) \cdot \varepsilon_j + o(\varepsilon^2) .\end{aligned}$$

And the corresponding equation is

$$(2.14) \quad \frac{\varepsilon_p}{2} + \sum_{j=1}^{p-1} \nabla \lambda_p(\bar{u}_0) \cdot r_j(\bar{u}_0) \cdot \varepsilon_j = 0 \quad . \quad \blacksquare$$

#### REMARK 2.1

1) Note that (2.13) and (2.14) give the equations of tangent spaces of the limiting manifolds of  $\mathcal{V}'_p$  and  $\mathcal{V}''_p$  : they generally differ.

2) The case :  $\lambda_p(\bar{u}_0) = 0$  and the p-field linearly degenerated, is more complicated.

#### 2.5 - STUDY OF THE p-SYSTEM

Let us now consider the example of the p-system of gas dynamics ( $v$  : specific volume,  $u$  : velocity) :

$$(2.15) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} -u \\ p(v) \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad v > 0 \quad , \quad u \in \mathbb{R}$$

with a pression  $p$  satisfying  $p > 0$ ,  $p' < 0$  and  $p'' > 0$ . The eigenvalues are  $\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{-p'(v)}$ . Because those eigenvalues keep always their own sign :

$$(2.16) \quad \lambda_1(v, u) < 0 < \lambda_2(v, u) \quad , \quad \forall (v, u) \quad ,$$

a 1-wave (respectively a 2-wave) has always a negative (resp. positive) speed(s)

We get immediately :

PROPOSITION 2.3

$$\forall (\bar{v}_0, \bar{u}_0) \quad , \quad \mathcal{V}(\bar{v}_0, \bar{u}_0) = \mathcal{W}_1(\bar{v}_0, \bar{u}_0) \quad .$$

In this example, the set  $\mathcal{V}(\bar{v}_0, \bar{u}_0)$  is globally a manifold of dimension one.

2.6 - ISENTROPIC EULER SYSTEM OF GAS DYNAMICS

The modelling of the isentropic evolution of a polytropic perfect gas leads to the Euler 2x2-system. The unknowns are the density  $\rho(x,t) > 0$  and the momentum  $q(x,t)$  :

$$(2.17-a) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} q = 0$$

$$(2.17-b) \quad \frac{\partial}{\partial t} q + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{\rho} + p(\rho) \right) = 0 \quad .$$

The pressure  $p(\rho)$  is given by the equation of state :

$$(2.18) \quad p(\rho) = k \cdot \rho^\gamma \quad , \quad k > 0 \quad , \quad 1 \leq \gamma < 3 \quad .$$

Taking

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ q \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad F(U) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{\rho} + p(\rho) \end{pmatrix} \quad ,$$

we get

$$A(U) \equiv DF(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + c^2 & 2u \end{pmatrix} \quad ,$$

where  $u = \frac{q}{\rho}$  is the velocity and  $c = \sqrt{p'(\rho)}$  is the sound velocity. The eigenvalues of the matrix  $A(U)$  are

$$\lambda_1(U) = u - c < \lambda_2(U) = u + c \quad .$$

Two corresponding eigenvectors are

$$r_1(U) = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \end{pmatrix}, \quad r_2(U) = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \end{pmatrix}.$$

The two characteristic fields are both genuinely nonlinear.

The rarefaction curves containing  $\bar{U}_0 = {}^t(\bar{\rho}_0, \bar{q}_0)$  (whose corresponding speed and sound velocity are denoted by  $\bar{u}_0$  and  $\bar{c}_0$ ) admit the following equations :

$$(2.19.a) \quad \mathcal{R}_1(\bar{U}_0) : q = \rho \left( \bar{u}_0 + \frac{2}{\gamma-1} \bar{c}_0 - \frac{2}{\gamma-1} c(\rho) \right), \quad \rho < \bar{\rho}_0$$

$$(2.19.b) \quad \mathcal{R}_2(\bar{U}_0) : q = \rho \left( \bar{u}_0 - \frac{2\bar{c}_0}{\gamma-1} + \frac{2}{\gamma-1} c(\rho) \right), \quad \rho > \bar{\rho}_0.$$

The shock curves are computed thanks to the Rankine-Hugoniot relations :

$$(2.20.a) \quad \mathcal{S}_1(\bar{U}_0) : q = \rho \left( \bar{u}_0 - \sqrt{(p(\rho) - p(\bar{\rho}_0)) \left( \frac{1}{\bar{\rho}_0} - \frac{1}{\rho} \right)} \right), \quad \rho > \bar{\rho}_0$$

$$(2.20.b) \quad \mathcal{S}_2(\bar{U}_0) : q = \rho \left( \bar{u}_0 - \sqrt{(p(\rho) - p(\bar{\rho}_0)) \left( \frac{1}{\bar{\rho}_0} - \frac{1}{\rho} \right)} \right), \quad \rho < \bar{\rho}_0.$$

Those curves are represented on figure 2.6. We have also drawn the curves  $\{\lambda_1(\rho, q) = 0\}, \{\lambda_2(\rho, q) = 0\}$  which limit three open disjoint sets :

$$(2.21.a) \quad \mathcal{A} : 0 < \lambda_1(\rho, q) < \lambda_2(\rho, q)$$

$$(2.21.b) \quad \mathcal{B} : \lambda_1(\rho, q) < 0 < \lambda_2(\rho, q)$$

$$(2.21.c) \quad \mathcal{C} : \lambda_1(\rho, q) < \lambda_2(\rho, q) < 0.$$

We compute now the sets  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$ . Since several cases can occur (figures 2.7.a/2.7.d) the details of the construction of figure 2.7.b are given now.

• Computation of the set  $\mathcal{V}(\bar{U}_0)$ .

If we consider  $\bar{U}_0$  in  $\mathcal{B}$ , let  $U$  be in  $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$ . Then the Riemann problem  $R(\bar{U}_0, U)$  has all his waves in the part  $\xi \leq 0$  of the  $(x, t)$  plane. We distinguish between two cases, by respect of the number of waves in this Riemann problem.

$$1) \quad \underline{U \in \mathcal{W}_1(\bar{U}_0) \cup \mathcal{W}_2(\bar{U}_0) \equiv \mathcal{S}_1(\bar{U}_0) \cup \mathcal{R}_1(\bar{U}_0) \cup \mathcal{S}_2(\bar{U}_0) \cup \mathcal{R}_2(\bar{U}_0)}$$

- All the values in  $\mathcal{S}_1(\bar{U}_0)$  are admissible because the speed  $\sigma_1(\bar{U}_0, U)$  of the 1-shock is always negative.
- The admissible part of  $\mathcal{R}_1(\bar{U}_0)$  is exactly  $\mathcal{R}_1(\bar{U}_0) \cap \text{adh } (\mathcal{B})$  because if  $U \in \mathcal{R}_1(\bar{U}_0) \cap \mathcal{A}$ ,  $\lambda_1(U) > 0$ , and  $U$  is not the stationary value  $w(0+; \bar{u}_0, u)$  of the corresponding Riemann problem.
- When  $U$  belongs to  $\mathcal{S}_2(\bar{U}_0)$ , the shock speed  $\sigma_2(\bar{U}_0, U)$  must be negative ; we obtain a branch of  $\mathcal{S}_2(\bar{U}_0)$  which is not in the vicinity of  $\bar{U}_0$ .
- No value in  $\mathcal{R}_2(\bar{U}_0)$  is admissible because if  $U \in \mathcal{R}_2(\bar{U}_0)$ ,  $\lambda_2(U) > \lambda_2(\bar{U}_0) > 0$  (cf. figure 2.8)

$$2) \quad \underline{\text{The Riemann problem } R(\bar{U}_0, U) \text{ contains an intermediate state } U^*}.$$

Necessarily,  $U^*$  belongs to a 1-wave in the set described in the case 1. (The 1-wave must have only negative velocities). We distinguish essentially between two cases :

$$(i) \quad U^* \in \mathcal{W}_1(\bar{U}_0) \cap \mathcal{E}.$$

A 2-shock-wave issued from  $U^*$  has always a speed  $\sigma_2(U^*, U)$  negative ; hence each  $U$  in  $\mathcal{S}_2(U^*)$  is admissible. Furthermore a 2-rarefaction issued from  $U^*$  has only negative velocities if and only if  $U$  remains in  $\text{adh } \mathcal{E}$ . Those two cases are displayed on figure 2.9.

$$(ii) \quad U^* \in \mathcal{W}_1(\bar{U}_0) \cap \text{adh } \mathcal{B}.$$

The speed  $\sigma_2(U^*, U)$  of a 2-shock issued from  $U^*$  is negative if and only if the momentum  $q^*$  of  $U^*$  is negative and  $q$  (momentum of  $U$ ) greater

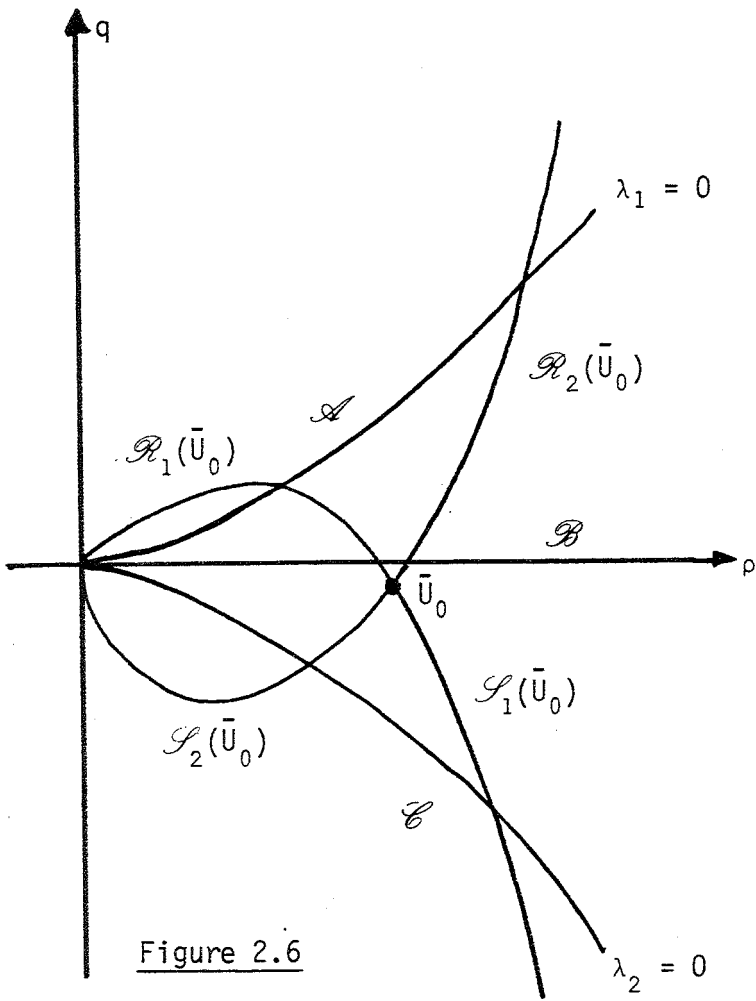


Figure 2.6

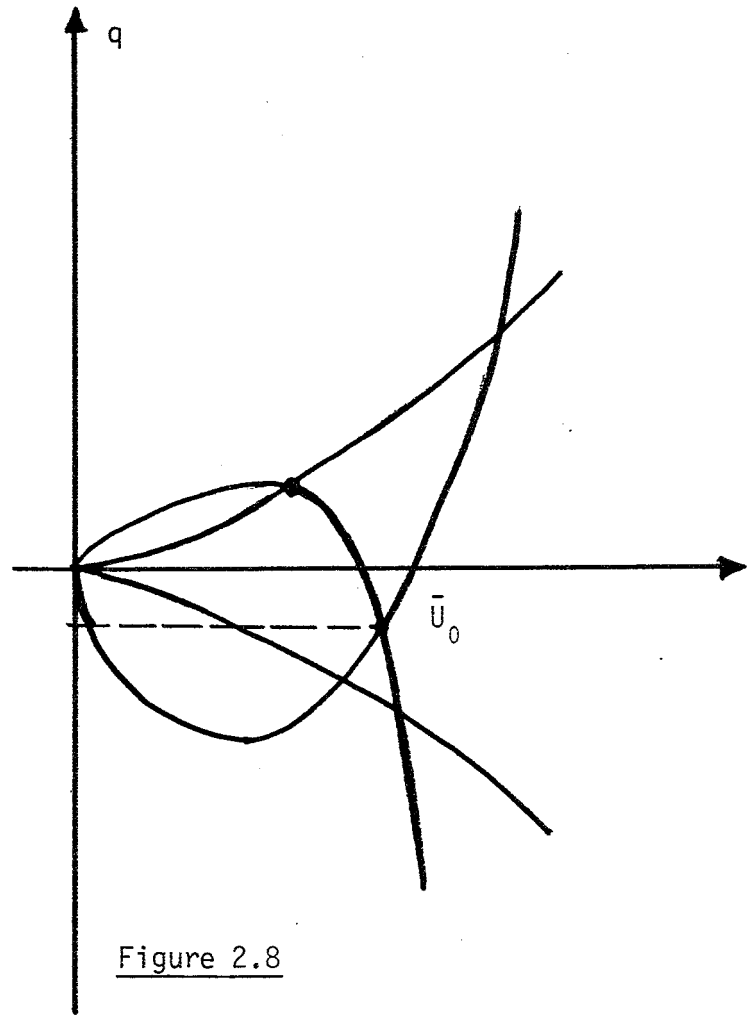


Figure 2.8

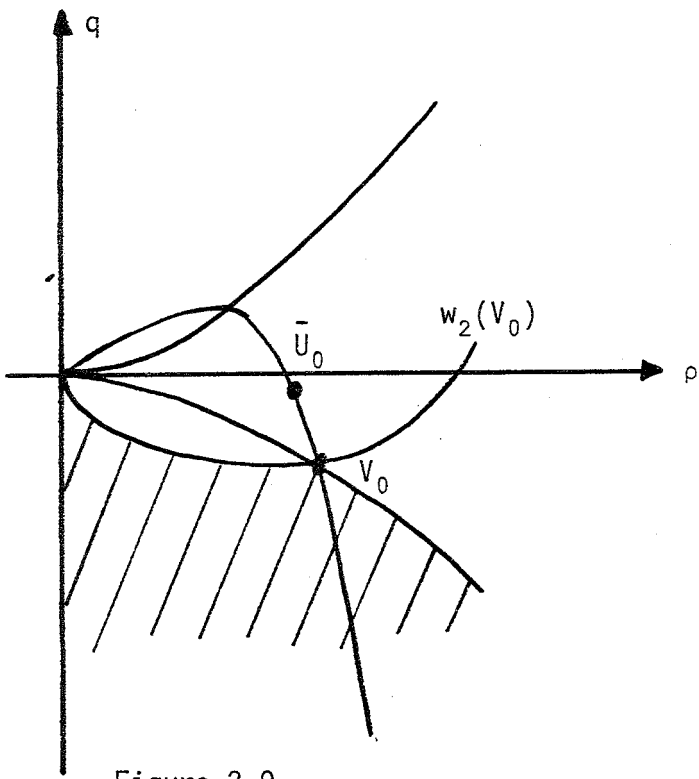


Figure 2.9

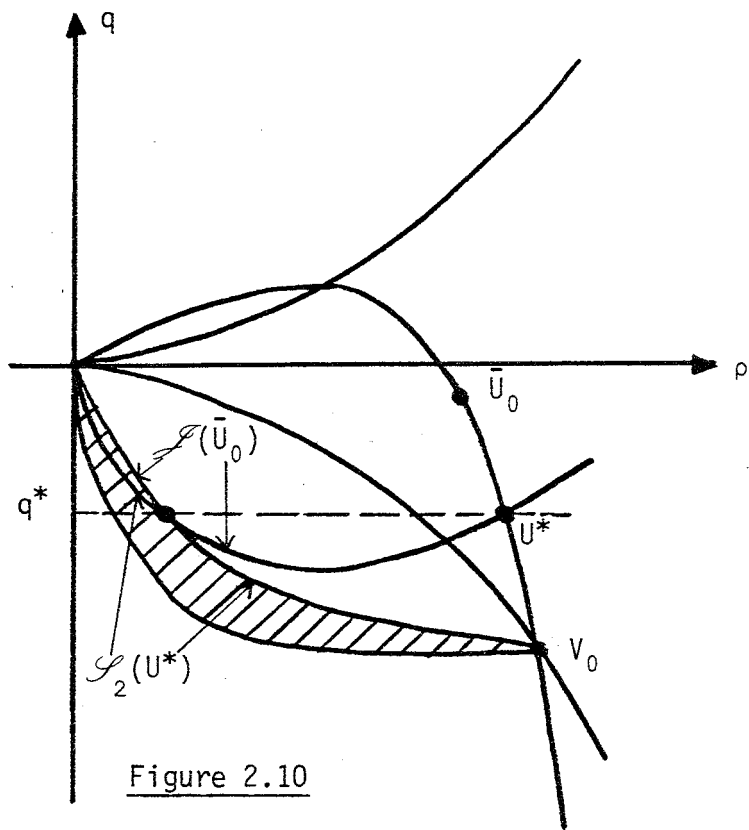


Figure 2.10

than  $q^*$ . This leads to the shaded set on the figure 2.10, limited on one hand by the curve  $\mathcal{S}_2(V_0)$  ( $V_0 = \mathcal{W}_1(\bar{U}_0) \cap \{\lambda_2 = 0\}$ ) and on the other hand by a curve  $\mathcal{S}(\bar{U}_0)$  which consists of all the states  $U^{**}$  issued from the states  $U^*$  (on  $\mathcal{W}_1(\bar{U}_0) \cap \{-c^* \leq u^* \leq 0\}$ ) by a 2-shock wave with zero velocity. The curve  $\mathcal{S}(\bar{u}_0)$  is parameterized by  $\rho^*$  with the following implicit equations :

$$(2.22) \quad \begin{cases} q^{**} = \rho^* u^* \\ \sqrt{(p(\rho^{**}) - p(\rho^*)) / (\frac{1}{\rho^*} - \frac{1}{\rho^{**}})} = -\rho^* u^* \end{cases}$$

with

$$(2.23) \quad u^* = \begin{cases} \bar{u}_0 - \sqrt{(p(\rho^*) - p(\bar{\rho}_0)) / (\frac{1}{\bar{\rho}_0} - \frac{1}{\rho^*})} & \text{if } \rho^* > \bar{\rho}_0 \\ \bar{u}_0 + \frac{2\bar{c}_0}{\gamma-1} - \frac{2c(\rho^*)}{\gamma-1} & \text{if } \rho^* \leq \bar{\rho}_0 \end{cases}$$

and  $-c(\rho^*) \leq u^* \leq 0$ .

The 2-rarefaction  $\mathcal{R}_2(U^*)$  is not admissible as in the case 1. ■

The figures 2.7.a.c.d are obtained by similar computations. Make now a qualitative description of those figures

- figure 2.7.a.  $\bar{U}_0 \in \mathcal{A}$  ( $\bar{u}_0 > \bar{c}_0$  : supersonic inlet).

We remark that  $\mathcal{V}(\bar{U}_0) \cap \mathcal{A} = \{\bar{U}_0\}$ , which is compatible with theorem 2.2.

Note that  $\mathcal{V}(\bar{U}_0) \cap \mathcal{B}$  is a curve and that  $\mathcal{V}(\bar{U}_0) \cap \mathcal{C}$  is locally of dimension 2.

- figure 2.7.b.  $\bar{U}_0 \in \mathcal{B}$  ( $-\bar{c}_0 \leq \bar{u}_0 \leq \bar{c}_0$  : subsonic inlet or outlet).

$\mathcal{V}(\bar{U}_0) \cap \mathcal{A}$  is void, and we have seen previously that  $\mathcal{V}(\bar{U}_0) \cap \mathcal{B}$  is a branch of the curve  $\mathcal{W}_1(\bar{U}_0)$ .

- figure 2.7.c.d.  $\bar{U}_0 \in \mathcal{C}$  ( $\bar{u}_0 < -\bar{c}_0$  : supersonic outlet).

$\mathcal{V}(\bar{U}_0) \cap \mathcal{A}$  is void and two subcases can occur :



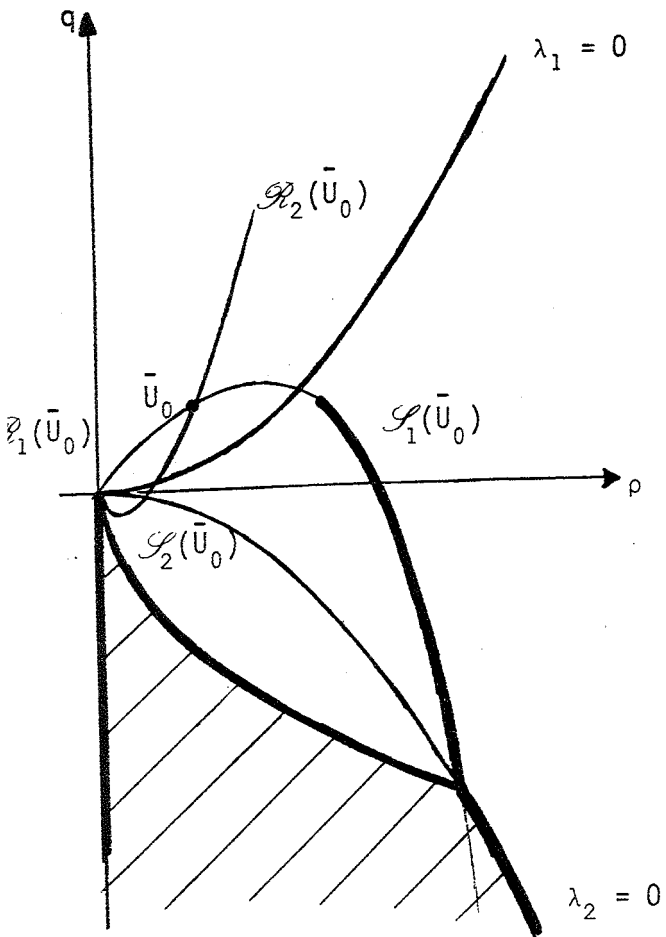


Figure 2.7.a

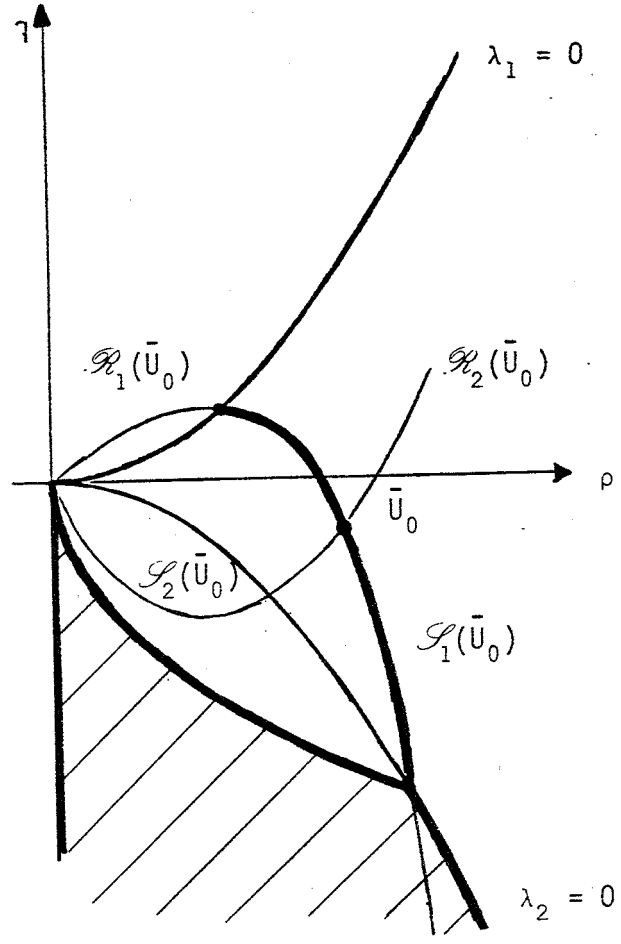


Figure 2.7.b

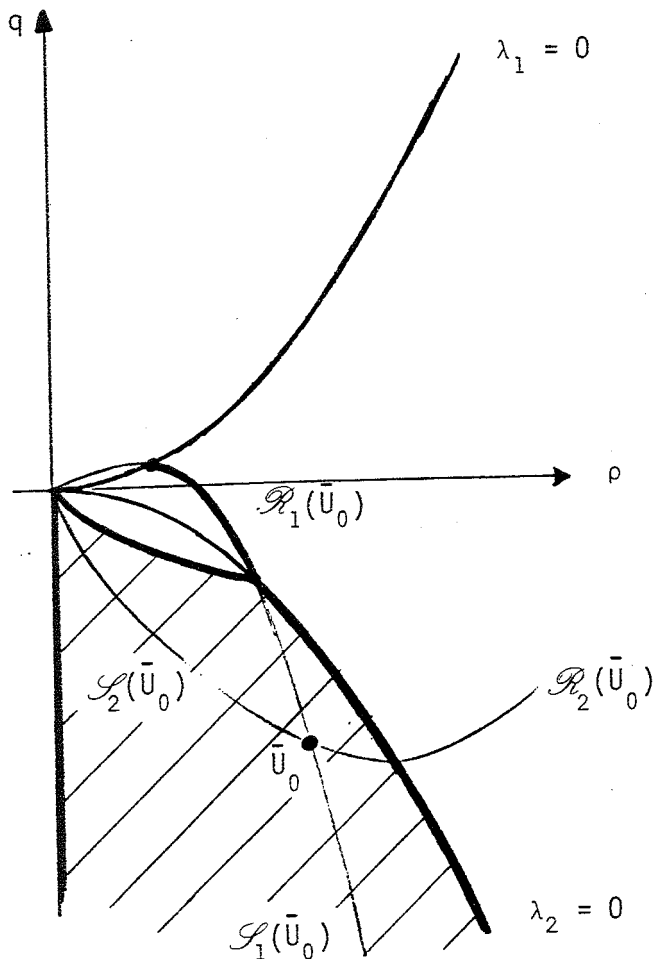


Figure 2.7.c

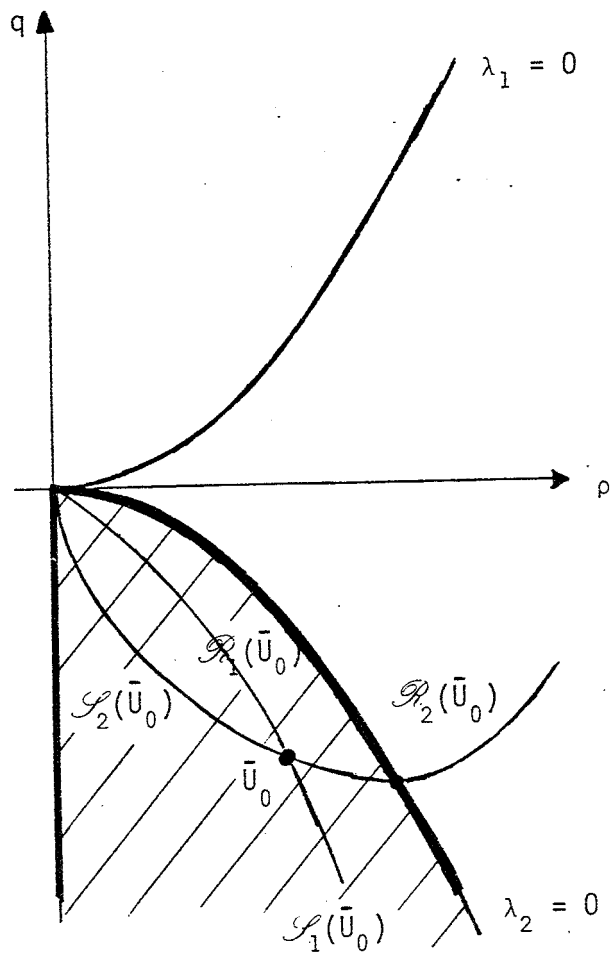


Figure 2.7.d

- figure 2.7.c.  $-\frac{2}{\gamma-1} \bar{c}_0 < \bar{u}_0 < -\bar{c}_0$   
 $\mathcal{V}(\bar{u}_0) \cap \mathcal{B}$  is a curve and  $\mathcal{V}(\bar{u}_0) \cap \mathcal{C}$  is as shown previously.
- figure 2.7.d.  $\bar{u}_0 < -\frac{2}{\gamma-1} \bar{c}_0$   
 $\mathcal{V}(\bar{u}_0)$  is exactly the adherence of  $\mathcal{C}$ .

The interest of all this study lies in the very strong nonlinear behaviour of the boundary condition. Compare with previous works of Veillot-Viviand [24] for example.

### 3 - CONJECTURE, STUDY OF AN EXAMPLE

In this paper, we have proposed two approaches for the formulation of the boundary condition for nonlinear systems of conservation laws. These two formulations are equivalent and lead to well-posed initial-boundary value problems for linear strictly hyperbolic systems and (non convex) scalar conservation laws. Concerning general nonlinear systems, the boundary entropy inequality (first formulation) is difficult to use by lack of entropy-flux pairs. But, with Riemann problems (second formulation) lot of physical interesting examples can be treated explicitly.

We conjecture that the two approaches lead to the same boundary condition, that is  $\mathcal{V} = \mathcal{E}$ .

To finish, verify this conjecture for a nonlinear  $2 \times 2$  system whose characteristic fields are both linearly degenerated (considered by Serre [22]) :

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v(v+1)}{u} \right) = 0 \end{cases} .$$

This system is strictly hyperbolic in the domain  $\{(u,v) / u > 0\}$ . The eigenvalues are  $\lambda_1(u,v) = \frac{v}{u} < \frac{v+1}{u} = \lambda_2(u,v)$ .

We know [22] all the entropy-flux pairs

$$(3.2) \quad \begin{cases} n(u,v) = u \cdot \left( a\left(\frac{v}{u}\right) + b\left(\frac{v+1}{u}\right) \right) \\ q(u,v) = (v+1) \cdot a\left(\frac{v}{u}\right) + v \cdot b\left(\frac{v+1}{u}\right) \end{cases}$$

where  $a$  and  $b$  are convex functions. For a state  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$  fixed, the boundary entropy inequality (1.13) can be written :

$$(3.3) \quad (v+1).a\left(\frac{v}{u}\right) + v.b\left(\frac{v+1}{u}\right) \leq 0 \quad ,$$

with  $a'\left(\frac{\bar{v}_0}{\bar{u}_0}\right) = b'\left(\frac{\bar{v}_0+1}{\bar{u}_0}\right) = 0$  (without restriction).

From (3.3), we deduce easily the set  $\mathcal{E}(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ .

PROPOSITION 3.1

Let  $\mathcal{A} = \{(u, v) / v \leq -1, u > 0\}$ .

• if  $\bar{v}_0 \leq 0$  ,

$$\mathcal{E}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = \mathcal{A} \cup \{(\lambda \cdot \bar{u}_0, \lambda \cdot \bar{v}_0) / \lambda > 0\}$$

• if  $\bar{v}_0 > 0$

$$\mathcal{E}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = \mathcal{A} \cup \{(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\} \quad .$$

Now, following [22], we must reduce the domain of study for the unknowns, say  $\mathcal{U}_{\alpha, \beta}$  with  $\alpha < \beta$

$$\mathcal{U}_{\alpha, \beta} = \{(u, v) / u > 0, \lambda_1(u, v) \leq \alpha < \beta \leq \lambda_2(u, v)\} \quad ,$$

to be able to solve the Riemann problem with data in  $\mathcal{U}_{\alpha, \beta}$ . A straightforward computation leads to the equivalence of the two boundary conditions :

PROPOSITION 3.2

For the system (3.1) with unknown in  $\mathcal{U}_{\alpha, \beta}$ , we get

$$\mathcal{V}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = \mathcal{E}(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \cap \mathcal{U}_{\alpha, \beta} \quad .$$

ACKNOWLEDGMENTS

We thank J.C. NEDELEC for encouraging us to study this problem.

REFERENCES

- [1] BALLOU D., *Solutions to nonlinear hyperbolic Cauchy problems without convexity conditions*, Trans AMS 152, pp 441-460, 1970.
- [2] BARDOS C., *Introduction aux problèmes hyperboliques non linéaires*, rapport interne n° 40, Univers. Paris-Nord, 1982.
- [3] BARDOS C., LEROUX A.Y., NEDELEC J.C., *First order quasilinear equations with boundary conditions*, Comm. P.D.E. 4 (9), pp 1017-1034, 1979.
- [4] BENABDALLAH A., *The "p-system" on an interval*, CRAS, t 303, série 1, n° 4, pp 123-126, Paris, 1986.
- [5] DUBOIS F., LE FLOCH P., *Boundary condition for systems of hyperbolic conservation laws*, CRAS, série 1, Paris, 1986.
- [6] GODUNOV S.K., *Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics*, Math. Sb 47 (3), p 271, 1959.
- [7] GOODMAN J., *Initial boundary value problems for hyperbolic systems of conservation laws*, Ph D Thesis, California Univ., 1982.
- [8] GUSTAFSSON B., KREISS H.O., SUNDSTRÖM A., *Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems II*, Math. Comp. 26, pp 649-686, 1972.
- [9] HOWES F.A., *Multidimensional Initial-boundary Value Problems with Strong Linearities*, Arch. Rat. Mech. and Anal. 91, vol. 2, pp 153-168, 1986.
- [10] KREISS H.O., *Initial boundary value problems for hyperbolic systems*, Comm. Pure Appl. Math. 23, pp 277-298, 1970.
- [11] KRUKOV S.N., *First order quasi-linear systems in several independent variables*, Math. USSR Sb 10, n° 2, pp 217-243, 1970.
- [12] LADYZENSKAYA O.A., URALCEVA N.N., *Boundary problems for linear and quasilinear parabolic equations*, AMS Translations 2, vol. 47, pp 217-299, 1965.
- [13] LAX P.D., *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation*, Com PAM 7, pp 159-193, 1954.

- [14] LAX P.D., *Hyperbolic systems of Conservation Laws II*, Com. Pure. Appl. Math. 10, pp 537-566, 1957.
- [15] LAX P.D., *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, SIAM, Philadelphia, 1973.
- [16] LE FLOCH P., *Boundary conditions for scalar nonlinear conservation laws*, to be published in Math. Meth. in Appl. Sciences, vol 10.
- [17] LE FLOCH P., NEDELEC J.C., *Weighted Scalar Conservation Laws*, CRAS, t 301, série 1, n° 17, pp 1301-1304, Paris, 1985 and Internal Report n° 144 (Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique), submitted to Trans. AMS.
- [18] LEROUX A.Y., *Approximation de quelques problèmes hyperboliques non-linéaires*, Thèse d'Etat, Rennes, 1979.
- [19] LIU T.P., *Initial-Boundary Value Problems for Gas Dynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal. 64, pp 137-168, 1977.
- [20] NISHIDA T., SMOLLER J., *Mixed Problems for Nonlinear Conservation Laws*, J. Diff. Equations 23, 2 pp 244-269, 1977.
- [21] ROCKAFELLAR T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1972.
- [22] SERRE D., *Oscillating data in one nonlinear hyperbolic system*, CRAS, t 302, série 1, n° 3, pp 115-118, Paris, 1986.
- [23] SMOLLER J., *Shock waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer Verlag New-York, 1983.
- [24] VIVIAND H., VEUILLOT J.P., *Méthodes pseudostationnaires pour le calcul d'écoulements transsoniques*, publication ONERA 1978-4, 1978.
- [25] VOLPERT A.I., *The space BV and quasilinear equations*, Math. Sb. 73 (115) pp 255-302, 1967.

## Chapitre 6

### Boundary Conditions and the Osher Scheme for the Euler Equations of Gas Dynamics .

( soumis au Journal of Computational Physics )

BOUNDARY CONDITIONS AND THE OSHER SCHEME  
FOR THE EULER EQUATIONS OF GAS DYNAMICS

François DUBOIS\*

*September 1987*

\* Ecole Polytechnique  
Centre de Mathématiques Appliquées  
91128 PALAISEAU Cedex - France



ABSTRACT

We propose a generalized definition of the multivalued solution of the Riemann problem for hyperbolic conservation laws. It allows a simple presentation of the Osher numerical scheme and a natural treatment of physically relevant boundary conditions for the Euler equations of inviscid compressible fluids. A linearized implicit scheme is derived. Numerical results on shock tube and quasimonodimensional nozzles are presented, showing the attractive convergence properties of the schemes in strong non-linear situations and the adequate coupling of initial and boundary conditions realized by our formulation.

## INTRODUCTION

For the numerical resolution of first order systems of conservation laws, the importance of solving the Riemann problem was first recognized by GODUNOV [18]. In recent years, Godunov-type numerical schemes and upstream schemes have been expanded (e.g. HARTEN-LAX-VAN LEER [26]). In particular OSHER [34] proposed a regular ( $C^1$  class) numerical flux which extends to systems the ENGQUIST-OSHER [15,16] scheme. On the other hand the boundary conditions for conservation laws have been analyzed thanks to the resolution of Riemann problems by DUBOIS-LE FLOCH [10,11].

In this paper we solve the Riemann problem with the use of multivalued rarefaction waves (Section I) and we apply this resolution to construct Godunov-type numerical fluxes that take into account internal interfaces as well as boundary faces. We derive in Section II a compact presentation of the Osher scheme and, in Section III, the treatment of physically relevant boundary conditions for the Euler equations of gas dynamics. Monodimensional test cases involving a first order explicit version of the scheme are presented in Section IV. Section V describes some results for a linearized implicit version of the scheme.

# I - MULTIVALUED SOLUTION OF THE RIEMANN PROBLEM

## 1 - BACKGROUND

We consider an hyperbolic system of conservation laws in one space dimension :

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

with  $u(x,t)$  belonging to a phase space  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  and a regular flux function  $f$  ( $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) whose jacobian  $A(u) \equiv df(u)$  admits  $n$  real eigenvalues  $\lambda_k(u)$  :

$$(1.2) \quad \lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \dots < \lambda_n(u) \quad , \quad u \in \mathcal{U} .$$

The corresponding eigenvectors are denoted by  $r_1(u), r_2(u), \dots, r_n(u)$ . We define a k-curve in the phase space  $\mathcal{U}$  as a solution of the ordinary differential equation

$$(1.3) \quad \frac{du}{ds} = r_k(u(s)) \quad , \quad s \in \mathbb{R}$$

and we assume that  $\mathcal{U}$  is an open set small enough to ensure, for each choice of the initial data

$$(1.4) \quad u(s_0) = v \quad , \quad v \in \mathcal{U} \quad , \quad s_0 \in \mathbb{R}$$

that there is a unique solution  $W_k(s; s_0, v)$  to the Cauchy problem (1.3) (1.4). We denote by  $\mathcal{W}_k(u_0)$  the  $k$ -curve containing  $u_0$ . We assume that each  $k$ -field is either genuinely non-linear or linearly degenerated. In the former case, the eigenvectors follow

$$(1.5) \quad d\lambda_k(u) \cdot r_k(u) \equiv 1$$

whereas in the latter case, they satisfy

$$(1.6) \quad d\lambda_k(u) \cdot r_k(u) \equiv 0 \quad .$$

For more details, see LAX [29] or SMOLLER [41].

## 2 - SIMPLE WAVES

Given a state  $u_0$  in  $\mathcal{U}$ , the  $k$ -curves allow us to build simple waves that classically correspond to rarefactions. Shock waves and contact discontinuities are other selfsimilar (weak) solutions of the conservation law (1.1). In what follows, we will consider a different family of waves : rarefactions, compression waves, and contact discontinuities.

### (i) Rarefaction waves

The rarefaction waves are obtained when we look for self-similar solutions of (1.1), that is

$$(1.7) \quad u(x,t) = v(\xi) \quad , \quad \xi = \frac{x}{t}$$

Then  $v(\xi)$  is either a constant state or an eigenvector of  $A(v(\xi))$  ; thus in the following let  $k$  be an integer corresponding to a genuinely nonlinear field and we have clearly :

$$(1.8) \quad \frac{dv(\xi)}{d\xi} = r_k(v(\xi)) \quad .$$

Given the value of  $v$  in a particular  $\xi$ -direction :

$$(1.9) \quad v(\xi_0) = u_0$$

we have from (1.8) :

$$(1.10) \quad v(\xi) = W_k(\xi; \xi_0, u_0) .$$

Moreover we also have a constraint on the eigenvalue  $\lambda_k$  :

$$(1.11) \quad \lambda_k(v(\xi)) \equiv \xi .$$

REMARK 1.1

The condition (1.5) implies that  $\lambda_k$  is increasing along the curve  $\mathcal{W}_k$  orientated by the vector  $r_k$ . Therefore, the mapping  $\xi \mapsto \lambda_k(v(\xi))$  is always non-decreasing along a k-rarefaction wave.

As is well-known, a k-rarefaction is a weak solution of (1.1) satisfying (1.7) and we have (Figure 1.1) :

$$(1.12) \quad \begin{cases} v(\xi) = u_0 & \xi \leq \xi_0 \\ v(\xi) = W_k(\xi; \xi_0, u_0) & \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1 \\ v(\xi) = u_1 & \xi \geq \xi_1 \end{cases}$$

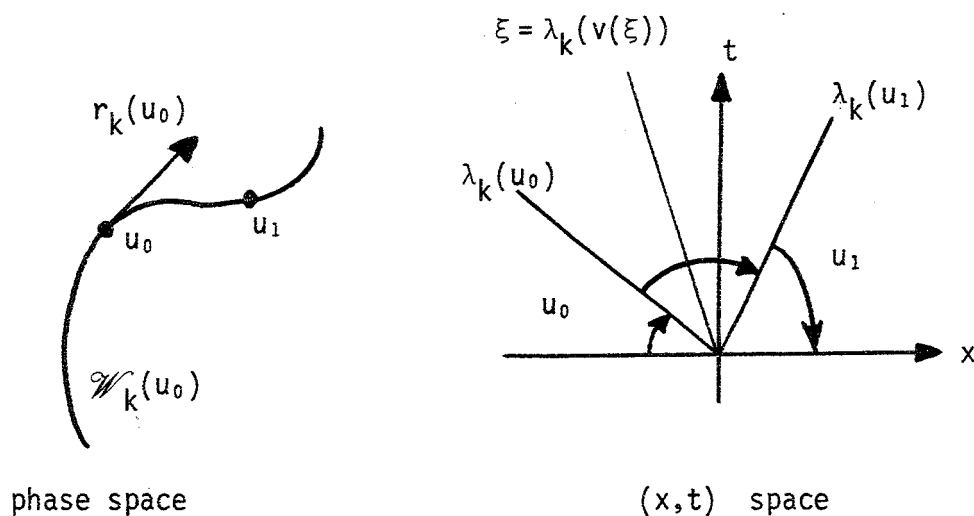


Figure 1.1 k-rarefaction wave

(ii) Compression wave or multivalued rarefaction

We claim that Remark 1.1 naturally introduces the necessity of waves other than rarefactions : the classical shock waves. Given  $u_0$  in  $\mathcal{U}$ , each  $k$ -shock wave allows the exploration of a curve in the phase space starting at  $u_0$  with the same two first derivatives as  $\mathcal{W}_k(u_0)$  (e.g. LAX [29]). In this section we give a way to explore the  $k$ -curve along the direction opposite to  $r_k$ .

DEFINITION 1.1

We assume that the  $k^0$  field is genuinely non-linear. Given states  $u_0$  and  $u_1$  on the  $k$ -curve  $\mathcal{W}_k(u_0)$  satisfying

$$(1.13) \quad \lambda_k(u_1) = \xi_1 < \xi_0 = \lambda_k(u_0)$$

a  $k$ -compression wave is a continuous function

$$(1.14) \quad \mathbb{R} \ni \theta \mapsto (\xi(\theta), w(\theta)) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U}$$

verifying

$$(1.15) \quad \begin{cases} \frac{d\xi(\theta)}{d\theta} = 1 & \theta < \theta_1, \theta > \theta_1' \\ \frac{d\xi(\theta)}{d\theta} = -1 & \theta_1 < \theta < \theta_1' \end{cases}$$

$$(1.16) \quad \begin{cases} w(\theta) = u_0 & \theta \leq \theta_1 \\ w(\theta) = \mathcal{W}_k(\theta; \theta_1, u_0) & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_1' \\ w(\theta) = u_1 & \theta \geq \theta_1' \end{cases}$$

for some ad hoc real parameters  $\theta_1, \theta_1'$  (Figure 1.2).

We set

$$(1.17) \quad \text{wm}(\xi) = \left\{ w(\theta) / \xi(\theta) = \xi \right\} .$$

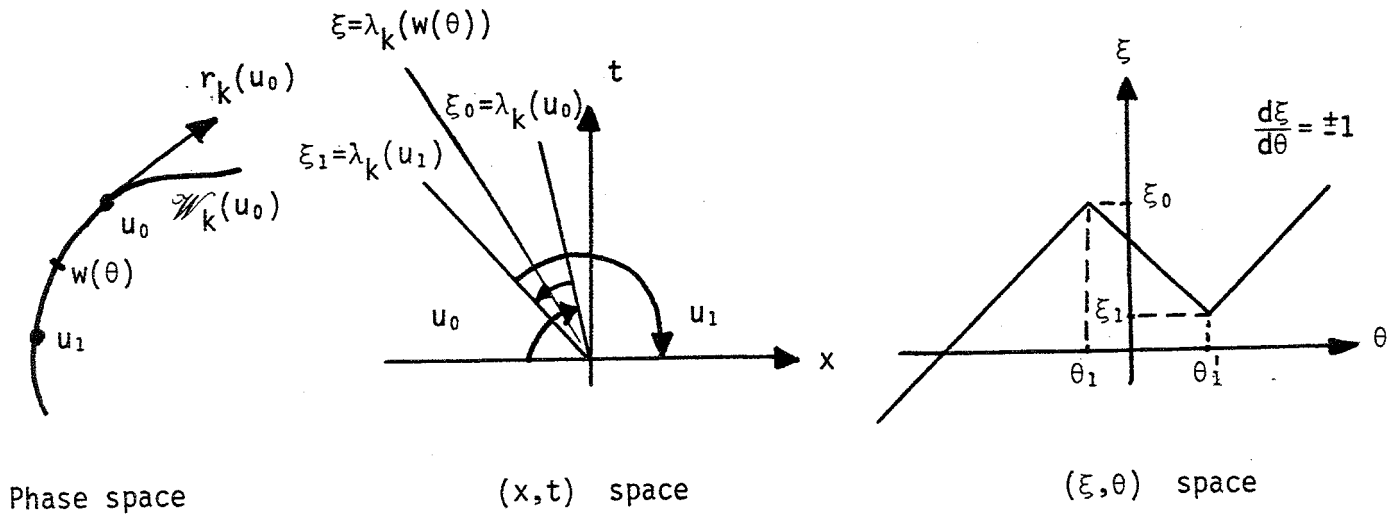


Figure 1.2  $k$ -compression wave (multivalued rarefaction)

REMARK 1.2

We will also speak of a multivalued rarefaction : on the one hand, Definition 1.1 only needs the curve  $\mathcal{W}_k(u_0)$ , which is classically called the  $k$ -rarefaction curve and, on the other hand, the set  $wm(\xi)$  is a subset of  $\mathcal{U}$  which contains one or three elements. WHITHAM first proposed in [49] such multivalued solutions of conservation laws, as well as their averaging in a shock fitting procedure following the old idea of Maxwell in the context of phase transitions in a Van der Waals gas (e.g. HUANG [28]). The transport-collapse method proposed in [4] by BRENIER is a shock capturing way to average multivalued solutions of scalar conservation laws, which can be extended to systems [5].

(iii) Contact discontinuity

We now assume that the  $k^0$  field is linearly degenerated. We define the  $k$ -contact as a multivalued wave in the following sense :

DEFINITION 1.2

We suppose that the  $k^0$  field is linearly degenerated. Given  $u_0$  in  $\mathcal{U}$  and  $u_1$  on the  $k$ -curve issued from  $u_0$ , a  $k$ -contact discontinuity is a continuous function

$$(1.18) \quad \mathbb{R} \ni \theta \mapsto (\xi(\theta), w(\theta)) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U}$$

such that

$$(1.19) \quad \begin{cases} \frac{d\xi(\theta)}{d\theta} = 1 & \theta < \theta_1, \theta > \theta_1' \\ \frac{d\xi(\theta)}{d\theta} = 0 & \theta_1 < \theta < \theta_1' \end{cases}$$

$$(1.20) \quad \begin{cases} w(\theta) = u_0 & \theta \leq \theta_1 \\ w(\theta) = W_k(\theta; \theta_1, u_0) & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_1' \\ w(\theta) = u_1 & \theta \geq \theta_1' \end{cases}$$

for ad hoc parameters  $\theta_1, \theta_1'$ . The set  $wm(\xi)$  is also defined by (1.17).

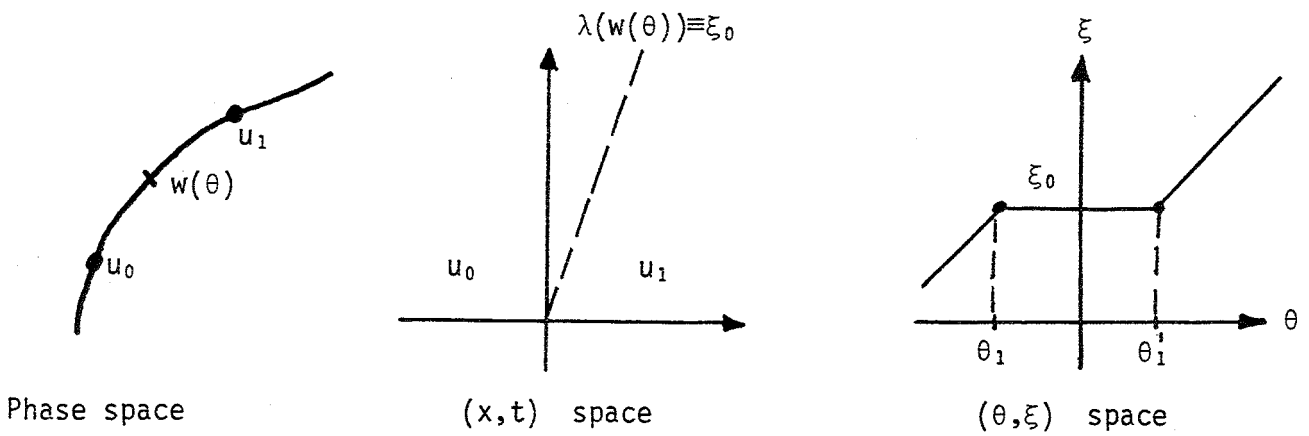


Figure 1.3  $k$ -contact discontinuity



REMARK 1.3

The contact discontinuity is then seen as a multivalued wave of constant eigenvalue in the  $(x,t)$  space between the states  $u_0$  and  $u_1$  (Figure 1.3) and the multivalued function  $wm(\xi)$  contains a compact interval for  $\xi = \lambda_k(u_0)$ . Moreover, the above Definitions 1.1 and 1.2 can obviously be extended to the case (i) of rarefaction waves by taking  $\xi(\theta) \equiv \theta$ .

In the following, we will speak of  $k$ -multivalued waves or  $k$ -waves when considering one of the three waves defined in the above section.

3 - THE RIEMANN PROBLEM

We now focus on the Riemann problem, the basic Cauchy problem in the theory of hyperbolic conservation laws :

$$R(u_L, u_R) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0 \quad , \quad w(x,t) \in \mathcal{U}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ w(x,0) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_R & x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

depending on  $u_L, u_R$  in  $\mathcal{U}$ . With the assumptions on the  $\mathcal{W}_k$  curves reviewed in Section 1, the Riemann problem can be solved by (at most)  $n$  waves separated by  $(n-1)$  constant states in the following sense :

PROPOSITION AND DEFINITION 1.1

1) Let  $u_L, u_R$  be given in  $\mathcal{U}$  such that  $|u_L - u_R|$  is sufficiently small. There exists a unique family of states  $u_L \equiv u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n \equiv u_R$  satisfying

$$(1.21) \quad u_{k+1} \in \mathscr{W}_{k+1}(u_k) \quad ; \quad k=0,1,\dots,n-1 \quad .$$

2) The multivalued solution of  $R(u_L, u_R)$  is then a continuous function  $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto (\xi(\theta), w(\theta)) \in \mathbb{R} \times \mathscr{U}$  obtained by joining together the constant states  $u_j$  ( $j=0, \dots, n$ ) by  $k$ -waves between the states  $u_k$  and  $u_{k+1}$ , precisely by :

$$(1.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \leq \theta'_1 \leq \dots \leq \theta_j \leq \theta'_j \leq \theta_{j+1} \leq \dots \leq \theta_n \leq \theta'_n \\ \xi(\theta_j) = \lambda_j(u_{j-1}) \quad j=1, \dots, n \\ \xi(\theta'_j) = \lambda_j(u_j) \quad j=1, \dots, n \\ \frac{d\xi(\theta)}{d\theta} \in \{0, 1, -1\} \end{array} \right.$$

$$(1.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} w(\theta) = u_L \quad \theta \leq \theta_1 \\ w(\theta) = W_j(\theta; \theta_j, u_{j-1}) \quad \theta_j \leq \theta \leq \theta'_j \quad , \quad j=1, \dots, n \\ w(\theta) = u_j \quad \theta'_j \leq \theta \leq \theta_{j+1} \quad , \quad j=1, \dots, n-1 \\ w(\theta) = u_R \quad \theta \geq \theta'_n \quad . \end{array} \right.$$

When  $\theta$  varies between  $\theta_j$  and  $\theta'_j$ , the branch of solution is a  $k$  wave running from  $u_{j-1}$  to  $u_j$  and  $\xi(\theta)$  is the corresponding eigenvalue which varies from  $\lambda_j(u_{j-1})$  to  $\lambda_j(u_j)$ . The constant state  $u_j$  is described by the parameters  $\theta$  between  $\theta'_j$  and  $\theta_{j+1}$  and the function  $\xi(\theta)$  varies from  $\lambda_j(u_j)$  to  $\lambda_{j+1}(u_j)$  (then  $\frac{d\xi}{d\theta} = 1$ ).

#### REMARK 1.4

The idea of solving the Riemann problem in terms of (eventually) multivalued functions was proposed by VAN LEER [45] for the Burgers' equation. The above definitions rigorously precise what a multivalued wave is in the case of systems.

PROOF OF PROPOSITION 1.1

It is similar to the classical proof of existence (LAX [29]) for the usual Riemann problem ; we mention it briefly. We consider the mapping  $\phi$  defined inductively on a neighbourhood of 0 in  $\mathbb{R}^n$  as follows :

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \varepsilon \mapsto \phi(\varepsilon) = W_n(\varepsilon_n; 0, W_{n-1}(\varepsilon_{n-1}; 0, \dots), W_1(\varepsilon_1; 0, u_L) \dots)$$

We obtain easily :

$$\phi(0) = u_L \quad , \quad d\phi(0) = (r_1(u_L), \dots, r_n(u_L))$$

Then the implicit function theorem ensures that a (sub) neighbourhood of 0 is diffeomorphic onto a neighbourhood of  $u_L$ . If we set

$$u_k = \phi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, 0, \dots, 0)$$

then the family  $u_k (k=0, \dots, n)$  solves (1.21).

Moreover, for  $k$ -genuinely non-linear waves, we have

$$(1.24) \quad \varepsilon_k = \lambda_k(u_k) - \lambda_k(u_{k-1}) \quad \blacksquare$$

REMARK 1.5

An other path which links  $u_L$  to  $u_R$  begins with the  $n^0$  wave and goes backwards, as proposed by OSHER-SOLOMON [35]. The relations

(1.21) are replaced by

$$(1.25) \quad u_{k+1} \in \mathcal{W}_{n-k}(u_k) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad .$$

The construction proposed in (1.22).(1.23) can be extended in a straightforward way.

## II - THE OSHER SCHEME AS A SPLITTING SCHEME

### 1 - GODUNOV-TYPE NUMERICAL SCHEMES

We briefly recall the classical notions on Godunov-type schemes. All details can be found in the review of HARTEN-LAX-VAN LEER [26]. In a finite volume presentation of 3-point schemes, time step  $\Delta t$  and mesh size  $\Delta x$  are given, and the conservative variables  $u(x,t)$  are approximated by constant states  $u_j^n$  in each control volume

$$V_j^n = \left] \left( j - \frac{1}{2} \right) \Delta x, \left( j + \frac{1}{2} \right) \Delta x \right[ \times \left[ n\Delta t, (n+1)\Delta t \right[$$

of the  $(x,t)$  space ( $j$  integer,  $n$  non negative integer).

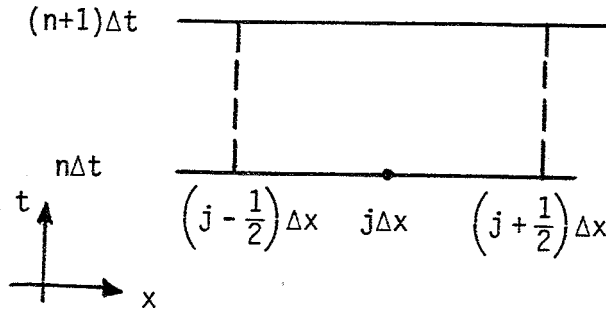


Figure 2.1 Control volume  $V_j^n$  in the  $(x,t)$  space

The evolution of  $\{u_j\}$  is described by :

$$(2.1) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$$

and the  $f_{j+\frac{1}{2}}^n$  are computed with help of the numerical flux function  $\phi$  :

$$(2.2) \quad f_{j+\frac{1}{2}}^n = \phi \left( u_j^n, u_{j+1}^n \right) \quad , \quad j \text{ integer .}$$

The main idea of the Godunov-type schemes is to consider the initial-value problem formed of the partial differential equation (1.1) and the initial-condition

$$(2.3) \quad u(x,0) = u_j^n, \quad \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta x < x < \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta x$$

Then the integration of (1.1) on the cell  $V_j^n$  implies that the value of the function  $\phi(u,v)$  is exactly the flux of the solution of the Riemann problem  $R(u,v)$  along the axis  $t=0$ . In the fundamental example due to GODUNOV [18],  $R(u,v)$  is solved exactly, but approached solvers have been developed and studied by ROE [39], HARTEN-LAX [25], VILA [47], DUKOWICZ [12], BRENIER-OSHER [6] among others. Another way to compute the numerical flux is to split algebraically the physical flux between waves of positive speeds coming from the left state  $u$  and negative speeds issued from  $v$  (STEGER-WARMING [43], VAN LEER [44]). First we find  $f^+$  and  $f^-$  satisfying

$$(2.4) \quad f(u) \equiv f^+(u) + f^-(u), \quad df^+ \geq 0, \quad df^- \leq 0$$

then the numerical flux satisfies :

$$(2.5) \quad \phi(u,v) = f^+(u) + f^-(v) .$$

## 2 - NUMERICAL FLUX OF A MULTIVALUED RIEMANN PROBLEM

According to the ideas recalled previously, the multivalued solution of a Riemann problem (Section I) leads to a numerical scheme if its flux can be defined.

PROPOSITION AND DEFINITION 2.1

We take the notations of Proposition 1.1. The following expression

$$(2.6) \quad g(\xi; u_L, u_R) = \sum_{\theta \in \text{wm}(\xi)} \{f(w(\theta)) - \xi w(\theta)\} \frac{d\xi}{d\theta}(\theta)$$

is defined without ambiguity as a continuous function of the real variable  $\xi$ . We set

$$(2.7) \quad \phi(u_L, u_R) = g(0; u_L, u_R) \quad .$$

We can develop the formula (2.7). Let  $u_1, \dots, u_n$  be the intermediate constant states linking  $u_0 \equiv u_L$  to  $u_n \equiv u_R$  by the k-waves (1.21) and  $u'_k$  be the "sonic states" associated to each k-wave :

$$(2.8) \quad u'_k \in \mathcal{W}_k(u_{k-1}) \quad , \quad \lambda_k(u'_k) = 0 \quad , \quad k=1, \dots, n \quad .$$

Consider the  $\varepsilon_k$  ( $k=0, \dots, n$ ) and  $\varepsilon'_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) defined by :

$$(2.9) \quad \varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda_k(u_k) \leq 0 < \lambda_{k+1}(u_k) \\ 0 & \text{elsewhere} \quad . \end{cases}$$

$$(2.10) \quad \varepsilon'_k = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda_k(u_{k-1}) \leq 0 < \lambda_k(u_k) \\ -1 & \text{if } \lambda_k(u_k) \leq 0 < \lambda_k(u_{k-1}) \\ 0 & \text{elsewhere} \quad . \end{cases}$$

with the convention  $\lambda_0 \equiv -\infty$ ,  $\lambda_{n+1} \equiv +\infty$ . We clearly have

$$(2.11) \quad \phi(u_L, u_R) = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k f(u_k) + \sum_{k=1}^n \varepsilon'_k f(u'_k) \quad .$$

A classic rarefaction is considered to have a positive sign and a backward compression a negative sign, as suggested by Figure 2.2. The contact discontinuity does not give any problem for the evaluation (2.6).(2.7) when located at  $\xi = 0$ , because the physical flux is constant along this wave.

PROOF OF PROPOSITION 2.1

Figure 2.2 recalls the construction of the multivalued solution of  $R(u_0, u_n)$ . The arrows follow the continuous function  $\xi(\theta)$  whose derivatives are 0 or  $\pm 1$ . We distinguish between two cases :

(i)  $w_m(\xi)$  is finite

Thus the only problem comes from the points of discontinuity of  $\xi(\theta)$ . In that case we set

$$(2.12) \quad \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\xi}{d\theta} (\theta^+) + \frac{d\xi}{d\theta} (\theta^-) \right)$$

(ii)  $w_m(\xi)$  is infinite

Then  $w_m(\xi)$  contains a branch of rarefaction wave along which  $f(w) - \xi w$  is constant and thus ensures the continuity of  $g$  towards  $\xi$ . ■

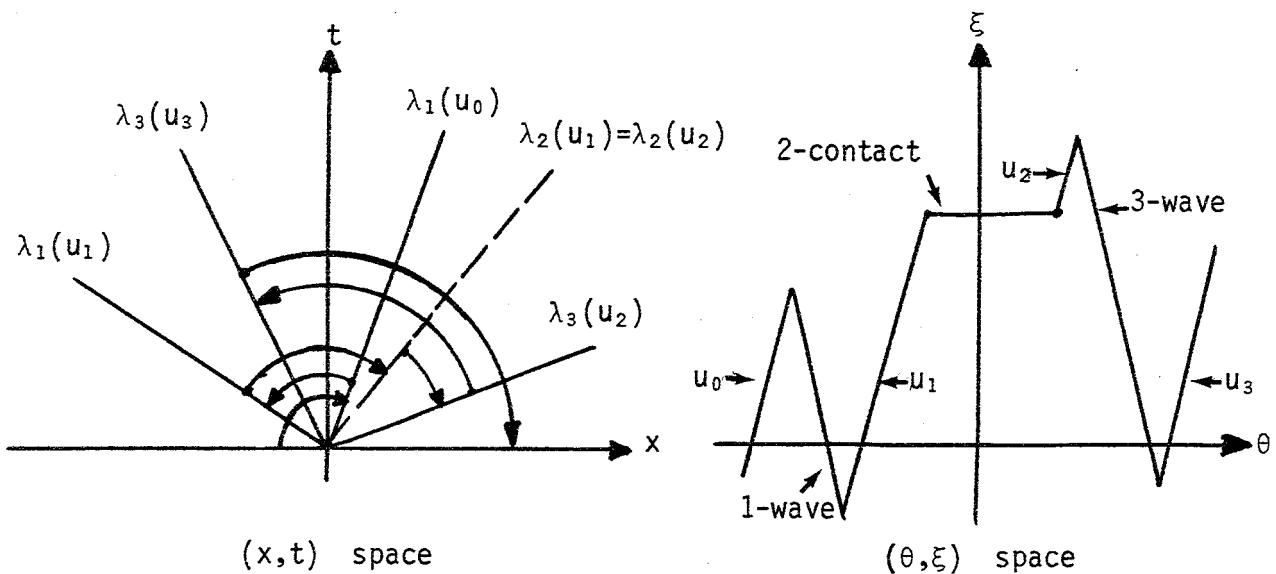


Figure 2.2 Typical wave pattern of a multivalued Riemann problem (Euler equations)

THEOREM 2.1

*The numerical flux defined by (2.6)(2.7) is exactly the RAI-CHAKRAVARTHY [37] version of the Osher upwind scheme [34].*

REMARK 2.1

A particular version of (2.6)(2.7) was given by VAN LEER [45] in his interpretation of the Engquist-Osher scheme (see also Remark 1.4). Afterwards, the interpretation of the Osher scheme for systems of conservation laws in terms of multivalued solutions of the Riemann problem was pointed out by OSHER himself in [36]: "[the scheme] can be interpreted as solving the incoming Riemann problem in phase space, using only rarefactions, compression, or contact waves, then averaging the resulting multivalued solution as in Godunov's method". The notions established above state precisely this assertion.

REMARK 2.2

In the original version of the Osher scheme, OSHER-SOLOMON [35] proved that the limit solutions satisfy an entropy condition. This scheme corresponds to an unnatural ordering of the waves (see Remark 1.5). However, the natural ordering was used in the numerical experiments of RAI-CHAKRAVARTHY [37]. In the following we only consider this last version of the scheme.

PROOF OF THEOREM 2.1

The numerical flux of the Osher scheme is defined by the union

$$(2.13) \quad \Gamma = \bigcup_{k=1}^n \Gamma_k$$



of  $k$ -curves, each  $\Gamma_k$  linking  $u_{k-1}$  to  $u_k$  as a branch of  $\mathcal{W}_k(u_{k-1})$ , and by the formula

$$(2.14) \quad \phi(u, v) = \frac{1}{2} \left\{ f(u) + f(v) - \int_{\Gamma} |df(w)| \cdot dw \right\}$$

The definition of the matrices  $A^{\pm}(u)$  and  $|A(u)|$  is classical: the hypothesis of strict hyperbolicity allows the diagonalization of  $A(u) \equiv df(u)$ :

$$(2.15) \quad A(u) \equiv T(u) \cdot \Lambda(u) \cdot T^{-1}(u)$$

with a diagonal matrix  $\Lambda(u)$  of eigenvalues. Given an integer  $k$ , the decomposition

$$(2.16) \quad \lambda_k(u) = \lambda_k^+(u) - \lambda_k^-(u) \quad , \quad \lambda_k^{\pm}(u) \geq 0$$

allows us to define  $\Lambda^{\pm}(u)$  as  $\text{Diag}(\lambda_1^{\pm}(u), \dots, \lambda_n^{\pm}(u))$  and  $|\Lambda(u)|$  as  $\text{Diag}(\lambda_1^+(u) + \lambda_1^-(u), \dots, \lambda_n^+(u) + \lambda_n^-(u))$ . Then  $A^{\pm}(u)$  and  $|A(u)|$  correspond to the  $\Lambda$ 's as in formula (2.15). We now write (2.14) as

$$(2.17) \quad \phi(u, v) = f(v) - \int_{\Gamma} A^+(w) \cdot dw \quad .$$

and we prove the theorem in two steps:

- First, we suppose that all the fields are genuinely nonlinear and that each sonic state  $u'_k$  defined by (2.8) is in the portion  $\Gamma_k$  of the  $k$ -curve. Consider the portion  $\Gamma'_k$  of  $\Gamma_k$  linking  $u'_k$  to  $u'_{k+1}$  ( $k=1, \dots, n-1$ ) and  $\Gamma'_0$  (resp  $\Gamma'_n$ ) linking  $u_0 \equiv u$  (resp  $u'_n$ ) to  $u'_1$  (resp  $u_n \equiv v$ ). We clearly have

$$(2.18) \quad \phi(u, v) = f(v) - \sum_{k=0}^n \int_{\Gamma'_k} A^+(w) \cdot dw$$

The computation of each term of this sum is straightforward. Setting  $\chi(s)$  for the Heaviside function ( $\chi(s) \equiv 1$  if  $s > 0$ ,  $0$  if  $s \leq 0$ ), we have :

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \phi(u, v) = & f(v) - \chi(\lambda_1(u_0))(f(u'_1) - f(u_0)) + \\ & - \sum_{k=1}^{n-1} \chi(\lambda_k(u_k))(f(u_k) - f(u'_k)) + \chi(\lambda_{k+1}(u_k))(f(u'_{k+1}) - f(u_k)) \\ & - \chi(\lambda_n(u_n))(f(u_n) - f(u'_n)) \end{aligned}$$

Reordering the terms in (2.19) we get :

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \phi(u, v) = & \sum_{k=0}^n \left[ \chi(\lambda_{k+1}(u_k)) - \chi(\lambda_k(u_k)) \right] f(u_k) \\ & + \sum_{k=1}^n \left[ \chi(\lambda_k(u_k)) - \chi(\lambda_k(u_{k-1})) \right] f(u'_k) \end{aligned}$$

which is exactly (2.11).

• Let us consider now the general case. The sonic states  $u'_k$  may either not exist or be in infinite number (if a  $k$ -contact has a null velocity). In the latter case, we simply choose a particular state as we have just proposed. If  $u'_k$  does not exist on the  $k$ -curve  $\mathscr{W}_k(u_{k-1})$ , we consider an open portion  $\tilde{\Gamma}_k$  of  $\mathscr{W}_k(u_{k-1})$  containing each compact branch  $\Gamma_k$  defined in (2.13). Then, we introduce an extension  $\tilde{\lambda}_k$  of  $\lambda_k|_{\Gamma_k}$  different from  $\lambda_k|_{\tilde{\Gamma}_k}$  and such that  $\tilde{\lambda}_k(u'_k) = 0$  for some point  $u'_k$  of  $\tilde{\Gamma}_k \setminus \Gamma_k$  (see Figure 2.3 for the special case of a  $k$ -contact discontinuity). We then introduce the portions of curve  $\Gamma'_k$  exactly as above, and we have

$$(2.21) \quad \sum_{k=0}^n \int_{\Gamma'_k} \tilde{A}^+(w).dw = \int_{\Gamma} A^+(w).dw$$

because the contribution of  $\tilde{A}^+(w)$  on the portion outside  $\Gamma$  vanishes when we sum the first term of (2.21) (see Figure 2.4). Therefore the computation (2.18)(2.20) in the first step of the proof remains unchanged.

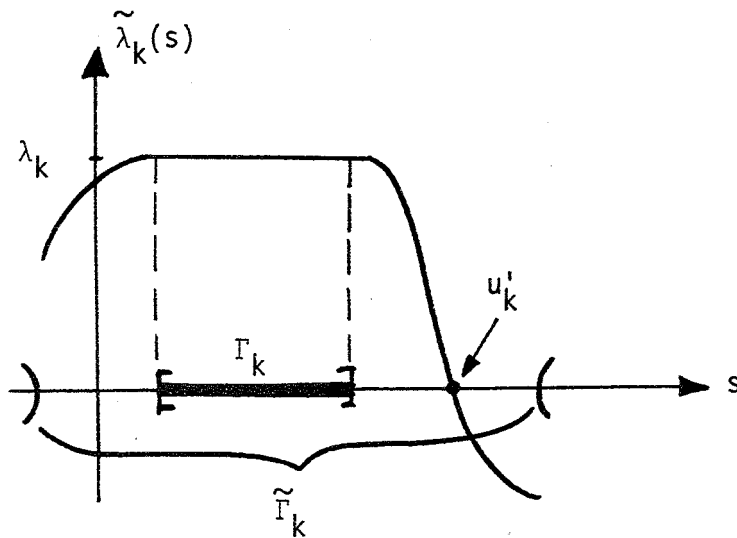


Figure 2.3 Extension  $\tilde{\Gamma}_k$  of the curve  $\Gamma_k$

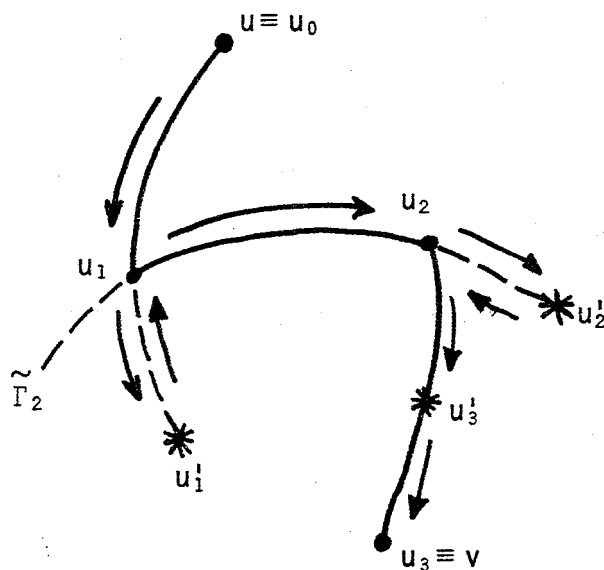


Figure 2.4 Modification of the Osher path of integration

### 3 - APPLICATION TO THE EULER EQUATIONS OF GAS-DYNAMICS

The Osher scheme can therefore be viewed as a splitting of the numerical flux in terms of some physical fluxes for states involved in the resolution of the multivalued Riemann problem  $R(u_L, u_R)$ . We detail in this section formulae (2.9)-(2.11) in the particular case of non-isentropic perfect fluids.

From the conservative variables of density, momentum and total energy

$$(2.22) \quad t_U = (\rho, q, \epsilon) \equiv (\rho, \rho u, \rho E)$$

we compute the pressure  $p$  and sound velocity  $c$  using

$$(2.23) \quad E = \frac{u^2}{2} + e, \quad p = (\gamma - 1)\rho e, \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

where  $u$ ,  $e$ ,  $\gamma$  are respectively the speed, the internal energy and the constant ratio between heat capacities. The physical flux  $F$ :

$$(2.24) \quad t_F = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u E + pu)$$

is then clearly seen as a function of  $U$  if we suppose  $\rho > 0$ ,  $\epsilon > 0$ . Moreover the physical entropy will be considered as a variable  $\sigma$  defined by

$$(2.25) \quad p = \sigma^{2\gamma} \rho^\gamma$$

The eigenvalues of  $dF(U)$  and the associated Riemann invariants (defined e.g. in SMOLLER [41]) are given by :

|                      | 1                                 | 2      | 3                                 |
|----------------------|-----------------------------------|--------|-----------------------------------|
| eigenvalue $\lambda$ | $u - c$                           | $u$    | $u + c$                           |
| Riemann invariants   | $\sigma, u + \frac{2c}{\gamma-1}$ | $u, p$ | $\sigma, u - \frac{2c}{\gamma-1}$ |

We now consider the nonstandard nonconservative variables  $W$  :

$$(2.26) \quad {}^t W = (c, u, \sigma)$$

naturally related to the  $k$ -curves  $\mathcal{W}_k$ . In terms of these variables, the physical flux can be evaluated thanks to

$$(2.27) \quad \rho = \gamma^{-\frac{1}{\gamma-1}} c^{\frac{2}{\gamma-1}} \sigma^{-\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

$$(2.28) \quad p = \gamma^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} c^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \sigma^{-\frac{2\gamma}{\gamma-1}} .$$

The intermediate states  $U_1, U_2$  (separated by the 2-contact) defined by the relations :

$$(2.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 + \frac{2c_1}{\gamma-1} = u_L + \frac{2c_L}{\gamma-1} \\ \sigma_1 = \sigma_L \\ u_1 = u_2 \\ p_1 = p_2 \\ u_2 - \frac{2c_2}{\gamma-1} = u_R - \frac{2c_R}{\gamma-1} \\ \sigma_2 = \sigma_R \end{array} \right.$$

are given explicitly as :

$$(2.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{1 + \sigma_R/\sigma_L} \left( c_L + \frac{\gamma-1}{2} u_L + c_R - \frac{\gamma-1}{2} u_R \right) \\ u_1 = u_2 = \frac{1}{1 + \sigma_L/\sigma_R} \left( \frac{2}{\gamma-1} c_L + u_L \right) + \frac{1}{1 + \sigma_R/\sigma_L} \left( -\frac{2}{\gamma-1} c_R + u_R \right) \\ c_2 = \frac{1}{1 + \sigma_L/\sigma_R} \left( c_L + \frac{\gamma-1}{2} u_L + c_R - \frac{\gamma-1}{2} u_R \right) . \end{array} \right.$$

Only two sonic points  $U_1'$  and  $U_3'$  are useful, and satisfy :

$$(2.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1' + \frac{2c_1'}{\gamma-1} = u_L + \frac{2c_L}{\gamma-1} \\ \sigma_1' = \sigma_L \\ u_1' - c_1' = 0 \end{array} \right.$$

$$(2.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_3' - \frac{2c_3'}{\gamma-1} = u_R - \frac{2c_R}{\gamma-1} \\ \sigma_3' = \sigma_R \\ u_3' + c_3' = 0 \end{array} \right.$$

Thus, the states  $U_1, U_2, U_1', U_3'$  needed for the computation of  $\phi(u_L, u_R)$  are easily evaluated in terms of the W-variables (formulae (2.29)-(2.32)). This can be done quickly on a vector-processor. Then the  $\varepsilon$ -coefficients of formulae (2.9)-(2.10) satisfy :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_L \equiv \varepsilon_0 = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < u_L - c_L \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \\ \varepsilon_1' = \begin{cases} 1 & \text{if } u_L - c_L \leq 0 < u_1 - c_1 \\ -1 & \text{if } u_1 - c_1 \leq 0 < u_L - c_L \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \\ \varepsilon_1 = \begin{cases} 1 & \text{if } u_1 - c_1 \leq 0 < u_1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \end{array} \right\}$$

$$(2.33) \quad \left. \begin{array}{l} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3' \\ \varepsilon_R \equiv \varepsilon_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{if } u_2 \leq 0 < u_2 + c_2 \\ 0 & \text{elsewhere} \\ 1 & \text{if } u_2 + c_2 \leq 0 < u_R + c_R \\ -1 & \text{if } u_R + c_R \leq 0 < u_2 + c_2 \\ 0 & \text{elsewhere} \\ 1 & \text{if } u_R + c_R \leq 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{array} \right.$$

and the evaluation (2.11) of the numerical flux becomes :

$$(2.34) \quad \phi(u_L, u_R) = \varepsilon_L f(u_L) + \varepsilon_1' f(u_1') + \varepsilon_1 f(u_1) + \\ + \varepsilon_2 f(u_2) + \varepsilon_3' f(u_3') + \varepsilon_R f(u_R) .$$

The relations (2.29)-(2.34) are the only ones necessary to cover all the cases involved in the Osher scheme. We think that this presentation unifies the one usually proposed (e.g. RAI-CHAKRAVARTHY [37]).

### III - NUMERICAL BOUNDARY CONDITIONS FOR THE EULER EQUATIONS

#### 1 - GENERALITIES

The numerical treatment of boundary conditions for the Euler equations of inviscid gas dynamics is a question of major importance in external as well as in internal aerodynamics but few rigorous mathematical results have been established. More precisely, the treatment commonly proposed in a majority of computing codes is based on a linearized analysis (characteristics theory, e.g. VIVIAND-VEUILLOT [48], CHAKRAVARTHY [8]). Rigorous results concerning the stability properties of this approach can be found in GUSTAFSSON-KREISS-SUNDSTRÖM [23], OLIGER-SUNDSTRÖM [33], GOLDBERG-TADMOR [20]. Locally nonlinear approaches of initial boundary value problems were also theoretically proposed by LIU [30], NISHIDA-SMOLLER [32], GOODMAN [21]. In [2], BARDOS-LEROUX-NEDELEC presented a non local approach of the problem in the case of scalar conservation laws. This work was extended to systems by DUBOIS-LE FLOCH [11] by the so-called boundary entropy inequality, also proposed by AUDOUNET [1] and MAZET et al [31] with variational arguments. Moreover, in [10], DUBOIS-LE FLOCH proposed a new approach based on the Riemann problem and proved that in linear and (not necessarily convex) scalar cases, this approach is equivalent to the boundary entropy inequality.

On the other hand, the finite volume method leads numerically to a formulation of boundary conditions in terms of a numerical flux at the boundary, as was early recognized by GODUNOV (e.g. Godunov et al [19]) and RIZZI [38]. In this section we derive a strong nonlinear



treatment of the boundary condition, i.e. the computation of boundary fluxes with the help of multivalued Riemann problems. We focus on some significant physical examples as proposed in [48,8]. In an external problem, an artificial boundary defines a "numerical infinity" and two numerical conditions are to be examined : the boundary condition at infinity and the sliding on the rigid boundary. In the case of internal problems such as nozzles, four cases must be considered according to inflow or outflow at the boundary and to the magnitude of velocity (subsonic, supersonic). In the following we analyse these cases from a physical point of view :

- 1) for supersonic inflow we assume that a state is entirely given ;
- 2) for subsonic inflow the fluid is given by its static thermodynamical properties, e.g. total enthalpy and entropy ;
- 3) for subsonic outflow static pressure is supposed to be given, and
- 4) for supersonic outflow no numerical datum is required.

For each of these physical boundary conditions we give a computation of the numerical flux  $\phi$  at the boundary for monodimensional problems. This analysis is valid along the normal of the boundary for multidimensional problems thanks to Galilée invariance of the Euler equations. A state computed at time  $n\Delta t$  in the cell number  $j$  located along the boundary is denoted by  $U_j^n \equiv V = {}^t(\rho, \rho u, \rho E)$  (Figure 3.1)

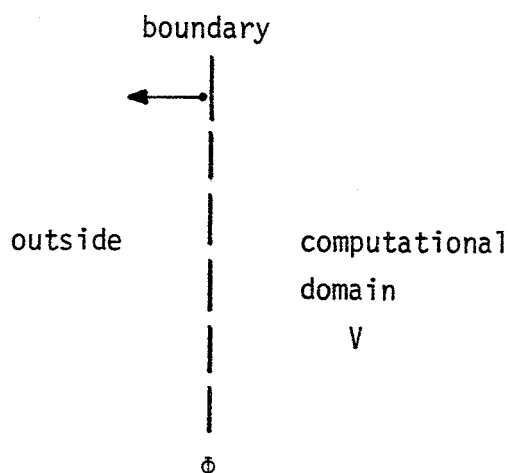


Figure 3.1 Notations

## 2 - SUPERSONIC INFLOW, BOUNDARY CONDITION AT INFINITY

In this case, a physical state is supposed to be given. Therefore, the analysis of DUBOIS-LE FLOCH [10] can be applied without modification. Suppose, for example, that the computational domain is on the right, and that the given state  $u_B$  is on the left. The boundary flux is then computed by

$$(3.1) \quad \phi = \phi(u_B, V)$$

where  $\phi(.,.)$  is the Osher flux derived in Section II.

## 3 - RIGID WALL BOUNDARY CONDITION

The physical boundary condition is

$$(3.2) \quad u = 0 \quad \text{on the wall}$$

(i.e. normal velocity null in the multidimensional case). Then the boundary flux takes the form :

$$(3.3) \quad \phi = t(0, p, 0)$$

which can be obtained, in terms of the Riemann problem, by the "mirror state"  $\tilde{V}$  of  $V$ , defined by

$$\tilde{\rho} = \rho \quad , \quad \tilde{\rho}u = -\rho u \quad , \quad \tilde{\rho}E = \rho E \quad .$$

Thus we have :

$$(3.4) \quad \phi = \phi(\tilde{V}, V) \quad .$$

4 - SUBSONIC OUTFLOW

We only consider the case of a given static pressure  $P$ . In the usual way, a state is computed on the boundary thanks to the condition  $p=P$  and following the two outgoing characteristics from the computational domain, eventually in a nonlinear way (e.g. CHAKRAVARTHY-OSHER [9]). However, we could set this problem in those terms : how to replace  $u_B$  in (3.1) ? We prefer to consider the condition on  $p$  as a two-dimensional manifold  $\mathcal{P}$  in the state space  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ . Then a "partial Riemann problem"  $R(V, \mathcal{P})$  (the boundary is now on the right of  $V \equiv V_L$ ) can be solved with only a 1-wave issued from  $V$  intersecting  $\mathcal{P}$  at  $U_1$  (Figure 3.2).

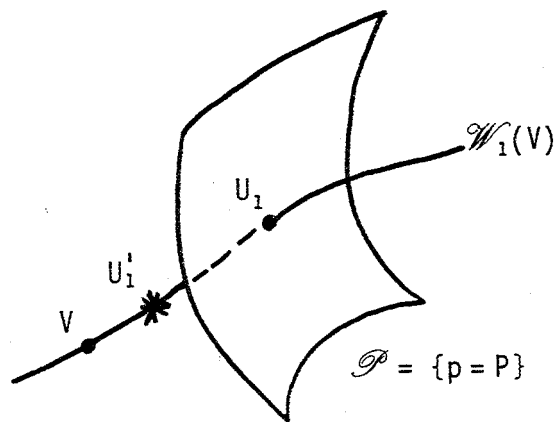


Figure 3.2 Given static pressure on the outflow (phase space)

The computation of this state is easy ; the equations of  $U_1$  are

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 + \frac{2}{\gamma-1} c_1 = u_L + \frac{2}{\gamma-1} c_L \\ \sigma_1 = \sigma_L \\ p_1 = P \end{array} \right.$$

Then we have :

$$(3.6) \quad \begin{cases} c_1 = \sqrt{\gamma} \sigma_L p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \\ u_1 = u_L + \frac{2}{\gamma-1} c_L - \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma} \sigma_L p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \\ \sigma_1 = \sigma_L \end{cases}$$

and the boundary flux is given by

$$(3.7) \quad \phi = \varepsilon_L f(V_L) + \varepsilon'_1 f(U'_1) + \varepsilon_1 f(U_1)$$

with the epsilons given by formulae

$$(3.8) \quad \begin{cases} \varepsilon_L = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < u_L - c_L \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \\ \varepsilon'_1 = \begin{cases} 1 & \text{if } u_L - c_L \leq 0 < u_1 - c_1 \\ -1 & \text{if } u_1 - c_1 \leq 0 < u_L - c_L \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \\ \varepsilon_1 = \begin{cases} 1 & \text{if } u_1 - c_1 \leq 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \end{cases}$$

### REMARK 3.1

This approach for initial-boundary Riemann problems is already to be found in GODUNOV [19], and VILA [46] proposed it in the particular case of Saint-Venant shallow water equations.

### 5 - SUBSONIC INFLOW

In this case, total enthalpy and physical entropy are given :

$$(3.9) \quad \frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} = H \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{\rho}} p^{\frac{1}{2\gamma}} = \Sigma \quad .$$

These conditions define a curve  $\mathcal{HS}$  in the phase space  $\mathcal{U}$  which is the left datum for a Riemann problem whose right datum is  $V$  (Figure 3.3). The resolution of this problem is given by a state  $U_1$  on  $\mathcal{HS}$  followed by  $U_2$  on  $\mathcal{W}_2(U_1)$  in such a way that  $V$  lies in  $\mathcal{W}_3(U_2)$ . Algebraically, we have :

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{u_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{\gamma-1} = H \\ \sigma_1 = \Sigma \\ u_1 = u_2 \\ p_1 = p_2 \\ u_2 - \frac{2}{\gamma-1} c_2 = u_R - \frac{2}{\gamma-1} c_R \equiv R_d \\ \sigma_2 = \sigma_R \end{array} \right.$$

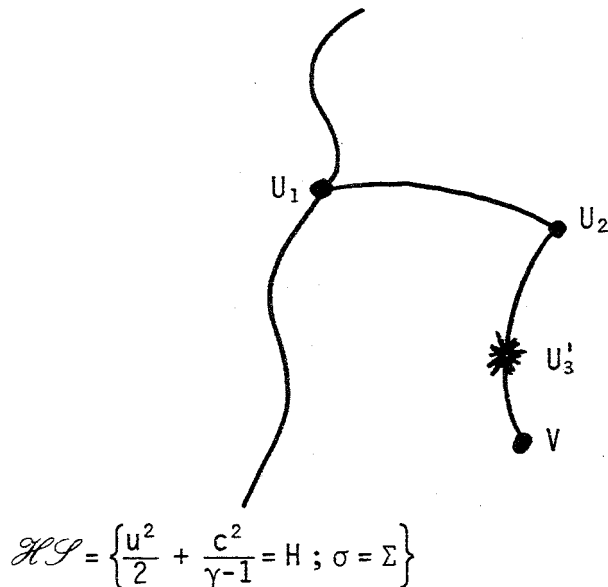


Figure 3.3 Given total enthalpy and physical entropy on the inflow (phase space)

Eliminating  $u_1, p_1, u_2, p_2, \sigma_2$  from (3.10), we get a polynomial equation of degree 2 for  $c_1$  :

$$(3.11) \quad \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} \left( \frac{\Sigma}{\sigma_R} \right)^2 \right\} c_1^2 - (\gamma-1) \left( \frac{\Sigma}{\sigma_R} \right)^2 R_d c_1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right)^2 \left( \frac{\Sigma}{\sigma_R} \right)^4 (R_d^2 - 2H) = 0$$

The equation (3.11) has real solutions under the condition

$$(3.12) \quad \left( u_R - \frac{2}{\gamma-1} c_R \right)^2 \leq 2 \left( 1 + \frac{2}{\gamma-1} \left( \frac{\sigma_R}{\Sigma} \right)^2 \right) H$$

which can be seen as a cavitation condition. We recall that we need such a condition to be able to solve the Riemann problem in terms of physically acceptable states (i.e.  $\rho > 0, p > 0$ ) :

$$(3.13) \quad u_R - \frac{2}{\gamma-1} c_R \leq u_L + \frac{2}{\gamma-1} c_L$$

If  $R_d^2 \leq 2H$ , (3.11) admits only one positive and physically acceptable solution. If

$$(3.14) \quad 2H < R_d^2 \leq 2H \left( 1 + \frac{2}{\gamma-1} \left( \frac{\sigma_R}{\Sigma} \right)^2 \right)$$

then the equation (3.11) has two positive solutions, and the state  $U_1$  is outgoing (!). In this case, a subsonic solution is the continuation of the unique physically acceptable solution obtained when  $R_d^2 \leq 2H$ .

We also have a new outgoing supersonic solution but this is thrown out.

Then under the hypothesis (3.12) the solution of (3.10) is given by

$$(3.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{\gamma-1}{2} \left( \frac{\Sigma}{\sigma_R} \right)^2 (u_1 - R_d) \\ u_1 = \frac{\frac{\gamma-1}{2} \left( \frac{\Sigma}{\sigma_R} \right)^2 R_d + \sqrt{2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \left( \frac{\Sigma}{\sigma_R} \right)^2 \right) H - \frac{\gamma-1}{2} \left( \frac{\Sigma}{\sigma_R} \right)^2 R_d^2}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \left( \frac{\Sigma}{\sigma_R} \right)^2} \\ \sigma_1 = \Sigma \end{array} \right.$$

$$(3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_2 = \frac{\sigma_d}{\Sigma} c_1 \\ u_2 = u_1 \\ \sigma_2 = \sigma_R \end{array} \right.$$

Those relations replace the computation of  $U_1$  and  $U_2$  by (2.29)(2.30) in the usual case. The formulae (2.32) defining  $U_3^1$  are unchanged, and no 1-wave exists for the resolution of the problem  $R(\mathcal{H}, V)$ . We finally have :

$$(3.17) \quad \phi = \varepsilon_1 f(U_1) + \varepsilon_2 f(U_2) + \varepsilon_3^1 f(U_3^1) + \varepsilon_R f(V_R)$$

with

$$(3.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < u_1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \\ \varepsilon_2 = \begin{cases} 1 & \text{if } u_2 \leq 0 < u_2 + c_2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \\ \varepsilon_3^1 = \begin{cases} 1 & \text{if } u_2 + c_2 \leq 0 < u_R + c_R \\ -1 & \text{if } u_R + c_R \leq 0 < u_2 + c_2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \\ \varepsilon_R = \begin{cases} 1 & \text{if } u_R + c_R \leq 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \end{array} \right.$$

6 - SUPERSONIC OUTFLOW

No numerical data are related to this last case. Considering that the initial state  $V$  is on the left of the boundary, we must imagine that a state to the right of this boundary forces all the waves to go outside. If  $V$  is a supersonic outgoing state (i.e.  $u_L - c_L > 0$ ) this condition is automatically realized. In the other case, a right state with high positive speed will produce a 1-wave which will contribute to the flux of the boundary Riemann problem (Figure 3.4).

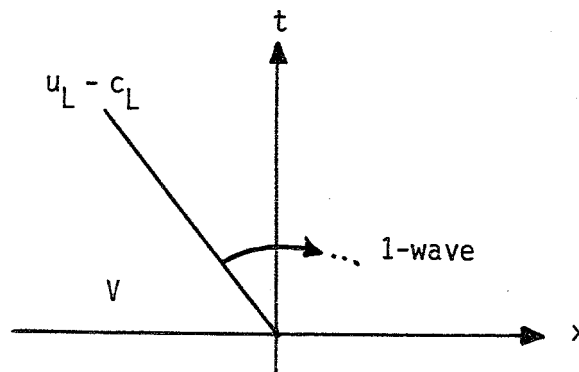


Figure 3.4 Supersonic outflow

Because we have very little information about the right state, we only consider for the Riemann problem this 1-rarefaction wave. Then, the flux is given by

$$(3.19) \quad \phi = \varepsilon_L f(V_L) + \varepsilon_1 f(U_1')$$

with  $U_1'$  computed thanks to (2.31) and with the epsilons verifying



$$(3.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_L = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < u_L - c_L \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \\ \varepsilon_1' = \begin{cases} 1 & \text{if } u_L - c_L \leq 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \end{array} \right.$$

## 7 - CONCLUSION

All the numerical boundary conditions developed in Sections 2 to 6 are treated with a strong nonlinear procedure taking into account the physical data outside the domain and the physical state of the computational domain lying near the boundary. In particular, an "inflow" boundary is not incompatible with an "outgoing flux" (i.e.  $\phi_1 \equiv \rho u$  negative) for very particular states of the evolution as we will see in the next section.

#### IV - NUMERICAL EXPERIMENTS WITH THE EXPLICIT FIRST ORDER OSHER SCHEME

In this section we demonstrate the capability of our boundary conditions for several classical monodimensional test cases : shock tube and nozzles. We have implemented a first order method (in space and time) but we choose non-standard initial conditions. We first describe the treatment of the source term for quasi-monodimensional nozzles, then we review the SOD shock tube [42] and test problems on the Laval nozzle presented by GRIFFIN-ANDERSON [22] and the diverging nozzle of SHUBIN-STEPHENS-GLAZ [40].

##### 1 - NUMERICAL SCHEME INCLUDING SOURCE TERMS

The quasi-monodimensional evolution of a perfect fluid in a nozzle of section  $y = A(x)$  is given by :

$$(4.1) \quad (AU)_t + (AF(U))_x - A_x H(U) = 0$$

with conservative variables  $U$  and physical flux  $F(U)$  given in (2.22)-(2.24) and a source term  $H$  such that

$$(4.2) \quad {}^t_H = (0, p, 0) \dots$$

We discretize the interval  $[0,1]$  by  $N$  cells (i.e.  $\Delta x = \frac{1}{N}$ ). We denote the mean value of  $U$  (resp.  $A, H$ ) on the  $j^{\circ}$  cell

$]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$ , with

$$(4.3) \quad x_{j-\frac{1}{2}} \equiv (j-1)\Delta x \quad , \quad j = 1, \dots, N$$

by  $U_j$  (resp.  $A_j, H_j$ ), and the value of  $F$  (resp.  $A$ ) at the point  $x_{j+\frac{1}{2}}$  between cells  $j$  and  $(j+1)$  by  $F_{j+\frac{1}{2}}$  (resp.  $A_{j+\frac{1}{2}}$ ). Integrating the equation (4.1) in space over each cell, we get the semi-discrete version of the scheme :

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_j \frac{dU_j}{dt} + \frac{1}{\Delta x} \left[ A_{j+\frac{1}{2}} F_{j+\frac{1}{2}} - A_{j-\frac{1}{2}} F_{j-\frac{1}{2}} \right] + \\ - \frac{1}{\Delta x} \left( A_{j+\frac{1}{2}} - A_{j-\frac{1}{2}} \right) H_j = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N \end{array} \right.$$

The flux  $F_{j+\frac{1}{2}}$  is computed thanks to the Osher numerical flux  $\phi(U_j, U_{j+1})$  (formula (2.34)) on each internal interface ( $j=1, \dots, N-1$ ) and thanks to the study done in Section III (formulae (3.1), (3.4), (3.7), (3.17), (3.19)) at the boundary ( $j=0$  or  $N$ ). The source term  $H_j$  is finally given by :

$$(4.5) \quad H_j = H(U_j) \quad .$$

The explicit numerical scheme is obtained when approaching the system (4.4) of ordinary differential equations by a forward Euler scheme in time. The local time step  $\Delta t^n$  was chosen to satisfy a Courant-Friedrichs-Lewy condition :

$$(4.6) \quad \frac{\Delta t^n a^n}{\Delta x} = 0.9$$

with  $a^n$  equal to the absolute value of the greatest velocity wave involved in the resolution of the  $(N+1)$  Riemann problems at the interfaces.

2 - STUDY OF THE SOD SHOCK TUBE

In his classical review [42], SOD compared several numerical schemes for the particular initial conditions :

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \rho_L = 1 & u_L = 0 & p_L = 1 \\ \rho_R = 0.125 & u_R = 0 & p_R = 0.1 \end{array} \right.$$

and plotted results obtained with  $N = 100$  cells at time  $T = 0.142$  (the 3-shock wave is located at  $x = 0.75$ ). We consider there the steady-state associated to this evolution problem, obtained on the complete  $[0,1]$  interval for time  $\geq 7.112$  and equal to the first intermediate state in the resolution of the Riemann problem (Figure 4.1). During this evolution the 1-rarefaction (resp. 2-contact and 3-shock) is going outside the computational domain to the left ( $x = 0$ ) (resp. the right,  $x = 1$ ). At the boundaries, we take the condition of "state at infinity" (section III-2) naturally associated with that problem.

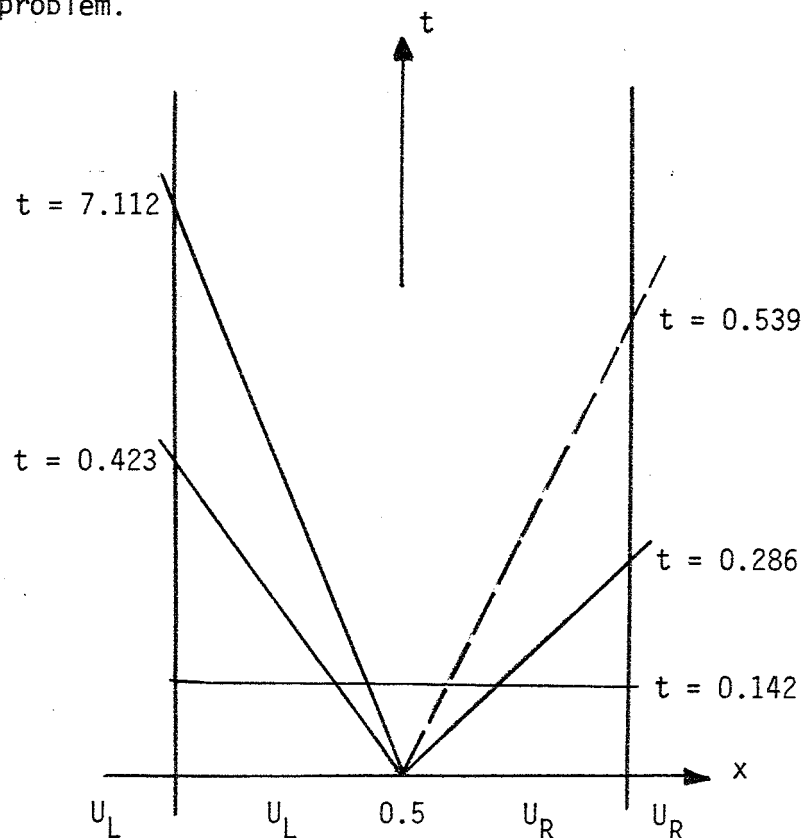


Figure 4.1 The Sod shock tube for time tending to infinity.

The Figure 4.2 (resp. 4.3) shows the computed evolution of velocity (resp. density) in the first (resp. last) cell of the tube after a run of 2500 (resp. 200) time steps. The dotted line is the exact solution. We insist on the fact that the time evolution of velocity and density are plotted on Figures 4.2-4.3 which is rather unusual [42]. The interest of these figures lies on the non-reflecting evolution of waves across the boundary rather than on the (poor) accuracy of the results (due to the use of a first-order scheme).

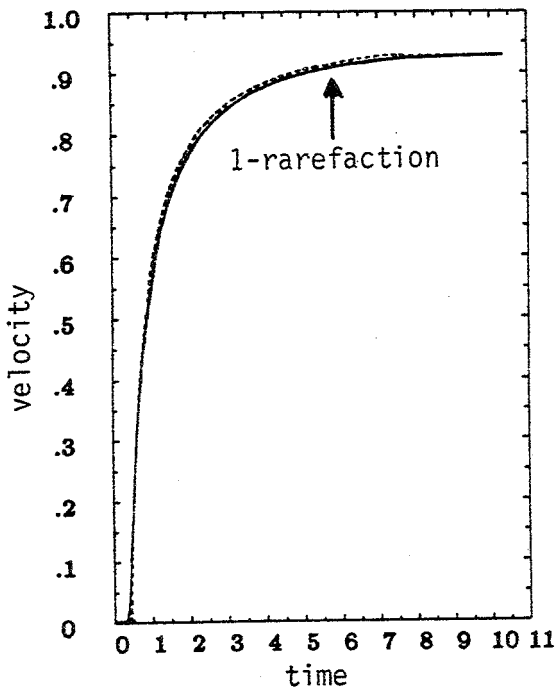


Figure 4.2 Evolution of velocity at  $x=0$  (dotted line : exact solution). Sod shock tube,  $N=100$

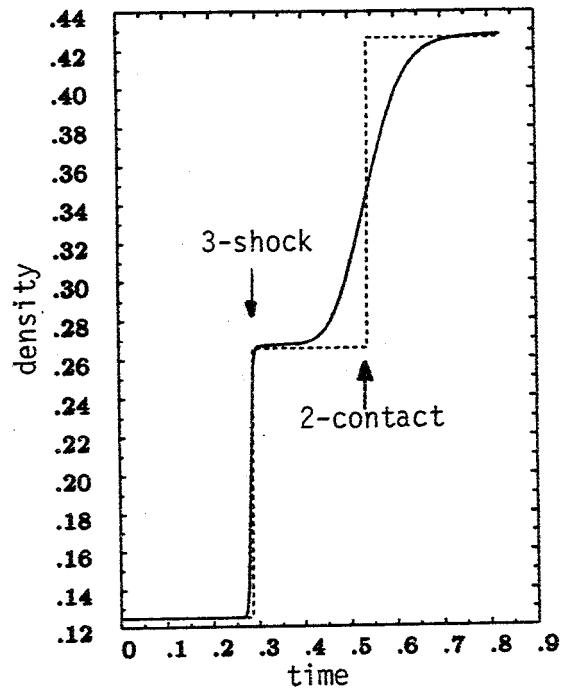


Figure 4.3 Evolution of density at  $x=1$  (dotted line : exact solution). Sod shock tube,  $N=100$

### 3 - STUDY OF A LAVAL NOZZLE

A family of converging-diverging nozzles was introduced by GRIFFIN-ANDERSON [22] and used for testing numerical methods by other authors (e.g. YEE-BEAM-WARMING [50], CASIER-DECONINCK-HIRSCH [7]).

We have chosen the section  $A(x)$  defined by (Figure 4.4) :

$$(4.8) \quad A(x) = \begin{cases} 1 + 1.5(1-2x)^2 & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1 + 0.5(1-2x)^2 & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

and two test cases associated with the following boundary conditions :

Test 1 : subsonic inflow and outflow (with a shock wave)

Test 2 : subsonic inflow and supersonic outflow.

In both cases the input data are given as in section III-5, i.e.

$$(4.9) \quad H = 3 \quad , \quad \Sigma = 1 \quad (x = 0)$$

and for test case 1, the out (static) pressure is :

$$(4.10) \quad P = 0.4 \quad .$$

We now focus on the initial condition for such computations. For tests similar to test 1, a majority of authors (e.g. YEE-BEAM-WARMING [50], CASIER-DECONINCK-HIRSCH [7]) take a linear interpolation between the exact boundary values. The situation is identical for test 2 [7]. We have performed computations with success in these two cases using that type of initial conditions although they are not natural (in test 1 for example the exact knowledge of the right boundary value is nearly equivalent to the entire exact solution). Following CHAKRAVARTHY [8] we think that a natural initial condition for both tests is the stagnation state (with null velocity) associated with (4.9), along the whole channel, i.e.

$$(4.11) \quad \rho_i \equiv 0.680 \quad , \quad u_i \equiv 0 \quad , \quad p_i \equiv 0.583$$

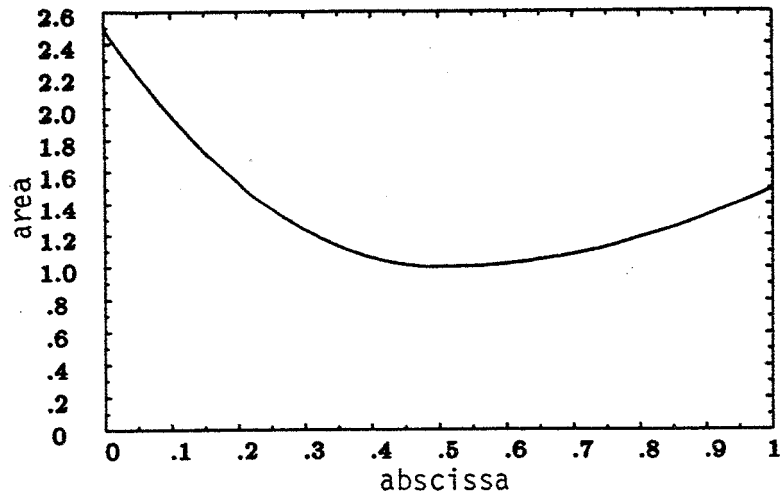


Figure 4.4 Area variation of the Laval nozzle [22]

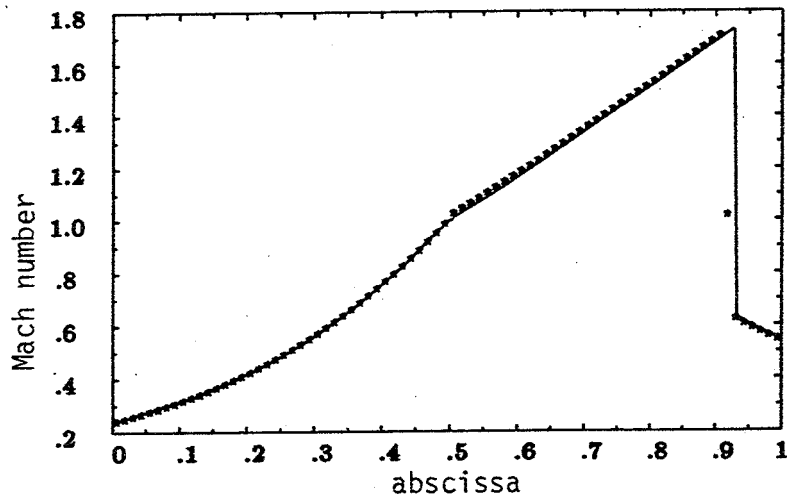


Figure 4.5 Mach number at convergence, test 1 (subsonic inflow and outflow), stars : computed, line : exact. Laval nozzle,  $N = 80$ .

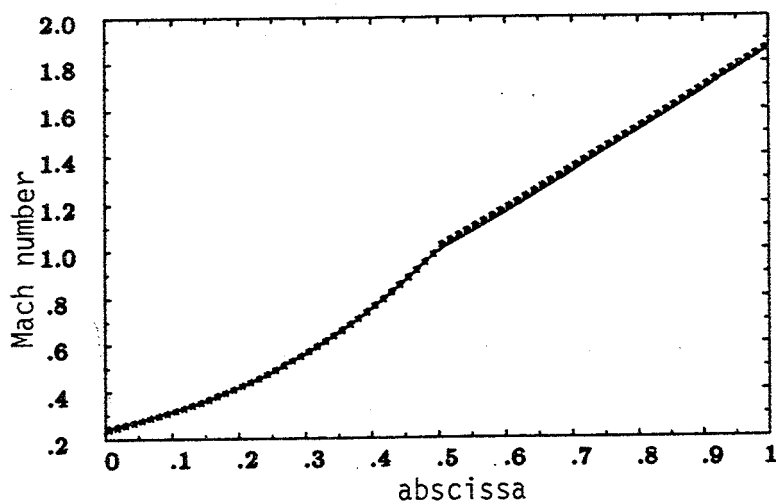


Figure 4.6 Mach number at convergence, test 2 (subsonic inflow and supersonic outflow), stars : computed, line : exact. Laval nozzle,  $N = 80$

We have taken (4.11) as the initial condition for both test-cases, refining the mesh ( $N=20,40,80$ ). The machine accuracy (32 bits computer) was obtained after 1600 time steps for test 1 and 1000 for test 2 (with  $N=80$ ). Figures 4.5 and 4.6 show the converged distributions of Mach number. The residual of momentum for test 1 is displayed on Figure 4.7.

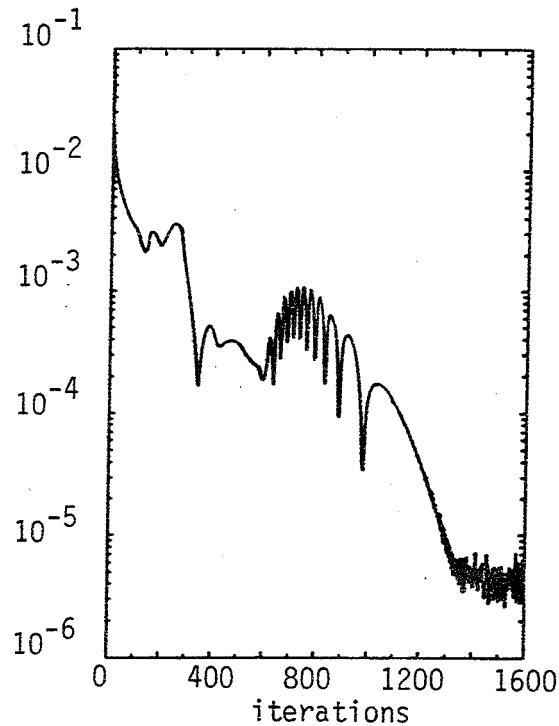


Figure 4.7 Residual of momentum, test 1. Laval nozzle,  $N=80$ .

Typical evolution of velocity for both test cases are presented on Figures 4.8 and 4.9 and similar curves have been obtained for density and pressure.



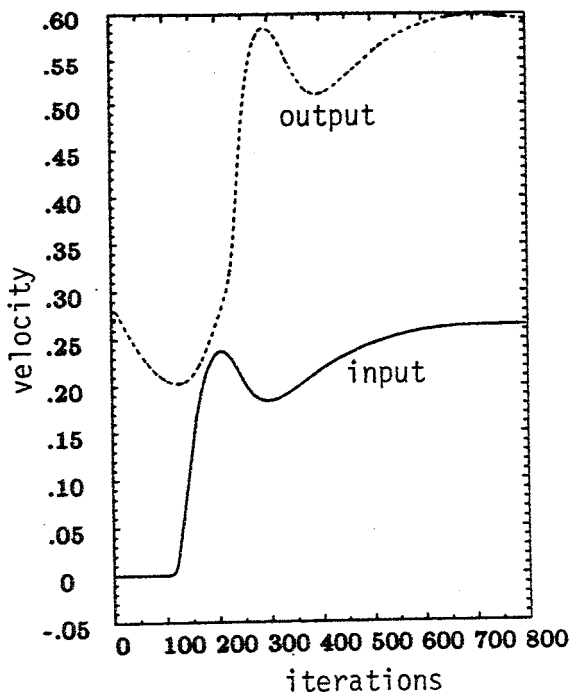


Figure 4.8

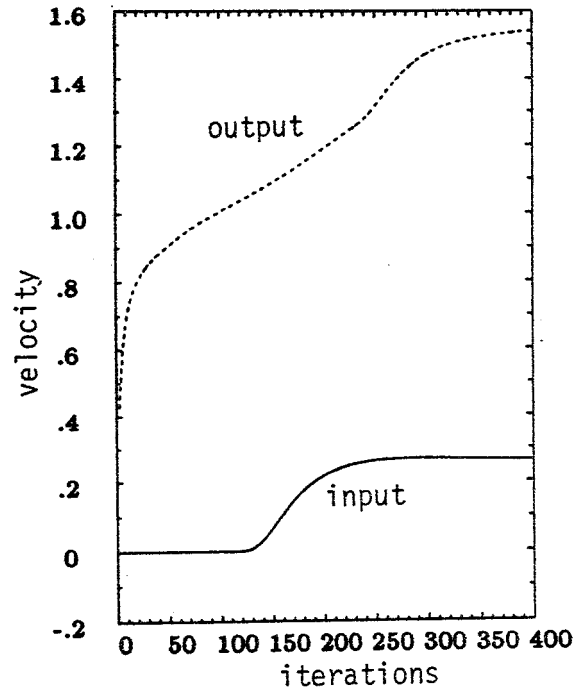


Figure 4.9

Evolution of velocity at  $x=0$  (straight line) and at  $x=1$  (dotted line), for test 1 (subsonic inflow and outflow, Figure 4.8) and test 2 (subsonic inflow and supersonic outflow, Figure 4.9). Laval nozzle,  $N=80$ .

#### 4 - TEST CASES INVOLVING A DIVERGING NOZZLE

The diverging channel proposed by SHUBIN-STEPHENS-GLAZ [40] has a section  $A(x)$  displayed on Figure 4.10 and satisfying

$$(4.12) \quad A(x) = 1.398 + 0.347 \tanh(8x-4) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad .$$

The left boundary condition is a supersonic inflow :

$$(4.13) \quad \rho_L = 0.502 \quad , \quad u_L = 1.299 \quad , \quad p_L = 0.381 \quad .$$

As in the above section, test 1 is concerned with a subsonic outflow of pressure  $P$  :

$$(4.14) \quad P = 0.707$$

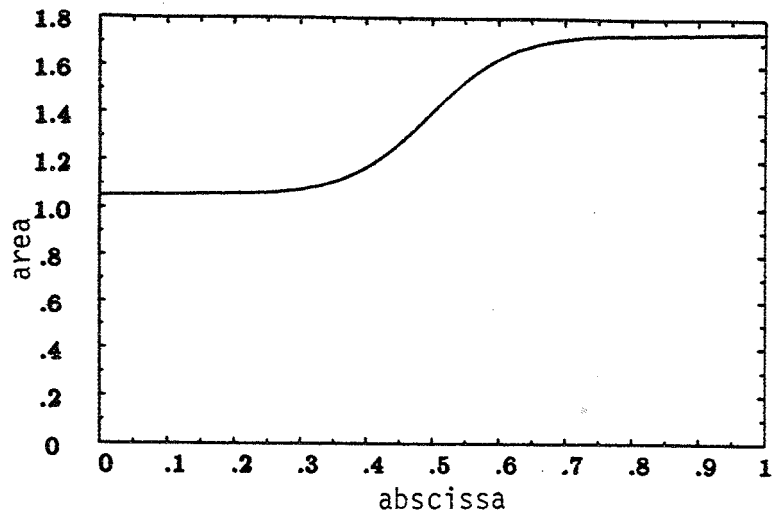


Figure 4.10 Area variation of the diverging nozzle [40].

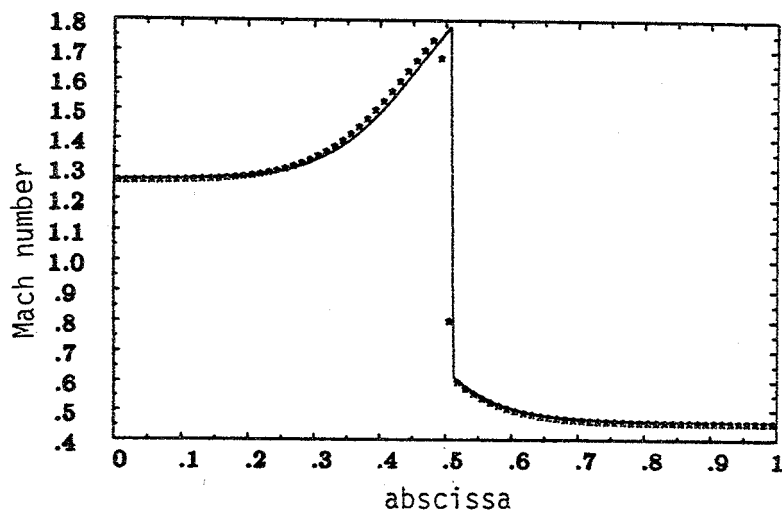


Figure 4.11 Mach number at convergence (stars : computed, line : exact).  
Test 1 (supersonic inflow, subsonic outflow). Diverging nozzle,  $N = 80$ .

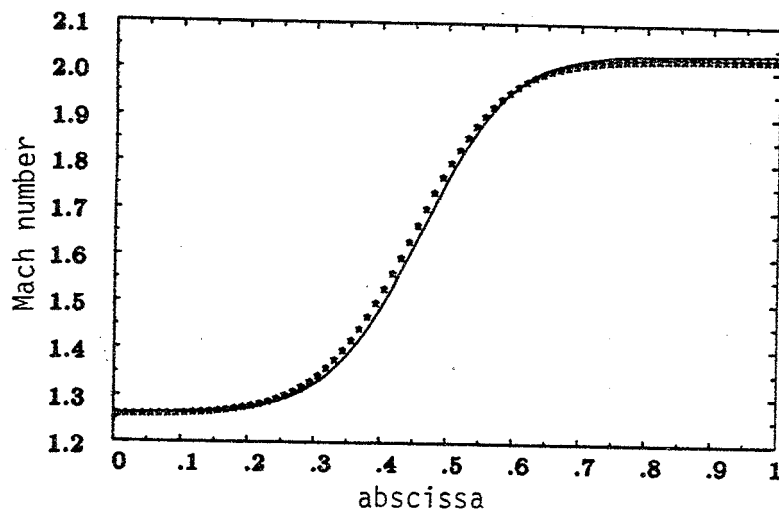


Figure 4.12 Mach number at convergence (stars : computed, line : exact).  
Test 2 (supersonic inflow and outflow). Diverging nozzle,  $N = 80$ .

inducing a shock wave located at  $x=0.5$ . Test 2 is related to a supersonic outflow. We have chosen, as above, stagnation initial conditions associated with (4.13), i.e.

$$(4.15) \quad \rho_i \equiv 1 \quad , \quad u_i \equiv 0 \quad , \quad p_i \equiv 1$$

and three meshes of  $N=20,40,80$  cells. On the most refined mesh, machine accuracy was obtained after 1600 iterations. The converged isomach curves are plotted on Figures 4.11 and 4.12. The evolution of velocity for both test cases is given on Figures 4.13 and 4.14. No particular problem of convergence was given by these initial-boundary value problems with our treatment of the boundary conditions.

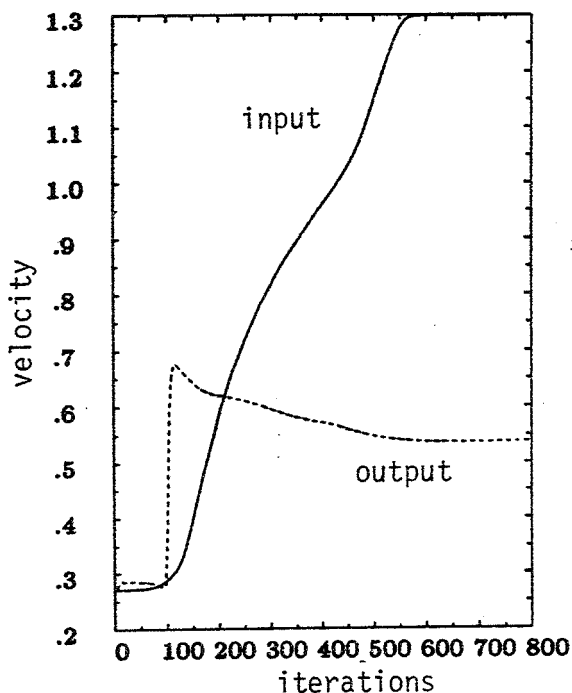


Figure 4.13

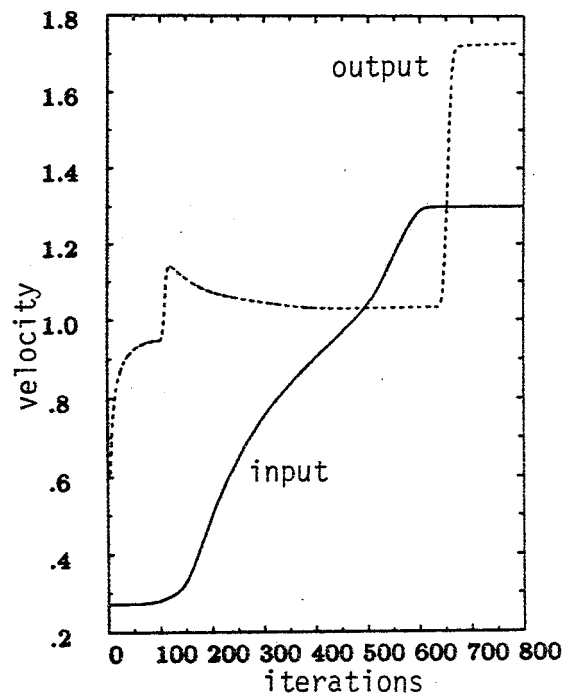


Figure 4.14

Evolution of velocity at  $x=0$  (straight line) and at  $x=1$  (dotted line). Test 1 (supersonic inflow and subsonic outflow, Figure 4.13) and Test 2 (supersonic inflow and outflow, Figure 4.14). Diverging nozzle,  $N=80$ .

To demonstrate the robustness of our method we have computed test case 2 (supersonic flow) on a  $N = 20$  mesh points with the same static initial condition (4.15) but changing the treatment of boundary conditions. In a first experiment (test 2.a) we have taken the numerical flux at supersonic inflow following the classical treatment : the numerical flux is given by the (left) boundary data rather than by the Riemann problem (3.1), i.e. :

$$(4.16) \quad \phi(x=0) = f(U_L) \quad .$$

On the right, we kept the treatment given by formula (3.19). In a second investigation (test 2.b), we have kept the treatment (3.1) on the inflow and changed the outflow, replacing (3.19) by the usual linearized condition for supersonic outflow :

$$(4.17) \quad \phi(x=1) = f(U_N) \quad .$$

Results are very interesting and surprising. In test 2.a, the right supersonic solution is obtained, after a very long transient evolution of 2400 time steps, that we can compare with the treatment using both (3.1) and (3.19), where numerical convergence arises after 400 time steps (Figure 4.15). With the second choice of boundary conditions (test 2.b), the convergence is very quick (200 iterations) but we obtain a subsonic (!) solution without any simple relation with data (4.13) and stable under mesh refinement. The exact and computed Mach numbers are compared on Figure 4.16. Moreover, with the same pair of boundary conditions (3.1)-(4.17) the initial conditions (4.11) give another subsonic solution. These unrealistic results are a consequence of the "bad" choice (4.15) of initial conditions. Results become correct once more when we start the computation with a supersonic state e.g. (4.13).

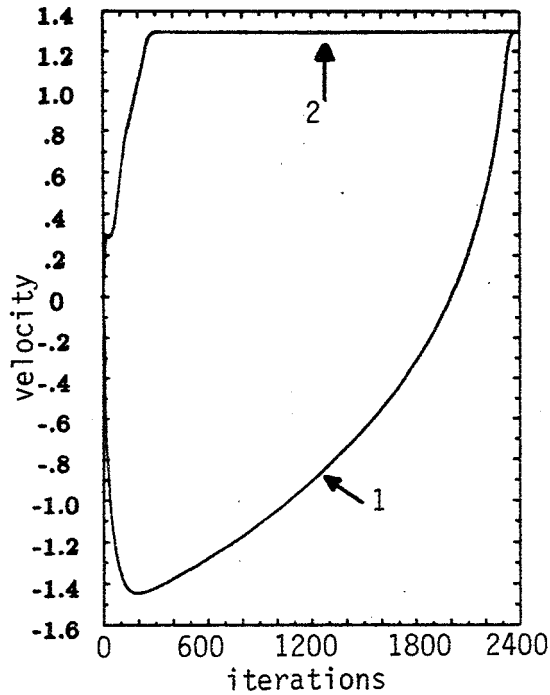


Figure 4.15 Evolution of velocity at  $x=0$  with classical boundary condition (4.16) [curve 1], and new boundary condition (3.1) on inflow (test 2.a). Diverging nozzle,  $N=20$ .

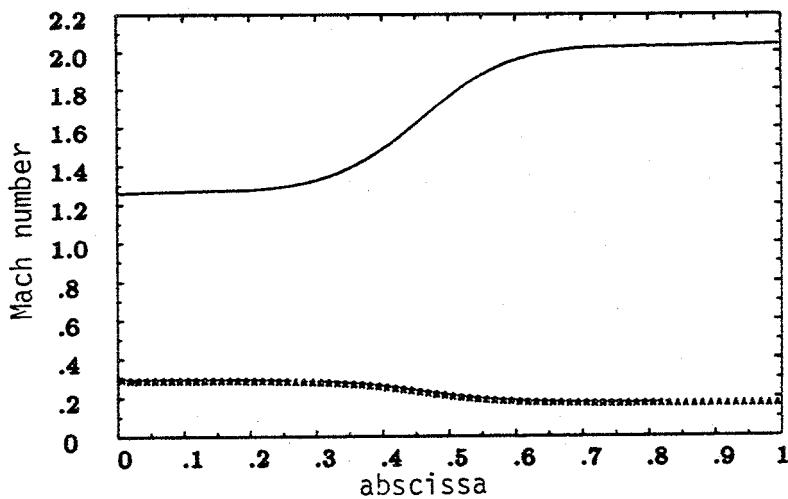


Figure 4.16 Converged Mach number (stars) and exact solution (straight line) for test 2.b (inflow boundary condition (3.1), classical outflow (4.17)). Diverging nozzle,  $N=80$ .

Nevertheless, we have tried to compute the same test 2 with the treatment (3.1)(3.19) of supersonic in/out flow, but with an inappropriate initial condition, reversing the speed  $u_L$  :

$$(4.18) \quad \rho_i \equiv 0.502 \quad , \quad u_i \equiv -1.299 \quad , \quad p_i \equiv 0.381$$

To our surprise, the correct converged state (Figure 4.12) is obtained after a relatively quick evolution (1600 iterations). Velocity and pressure are plotted on Figures 4.17 and 4.18.

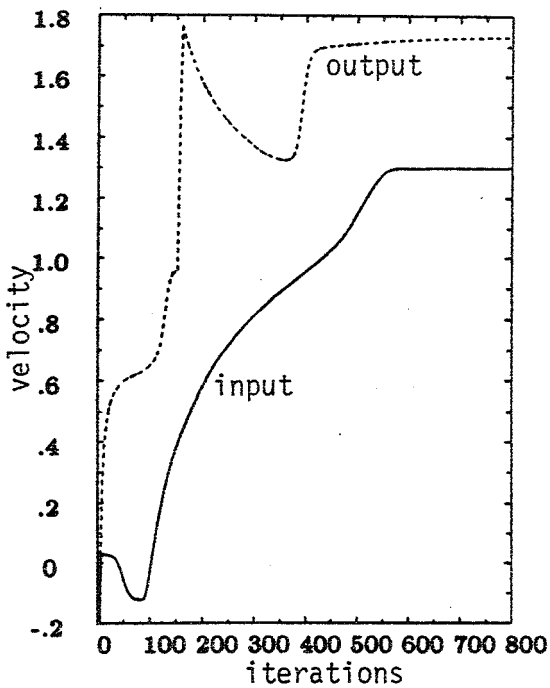


Figure 4.17

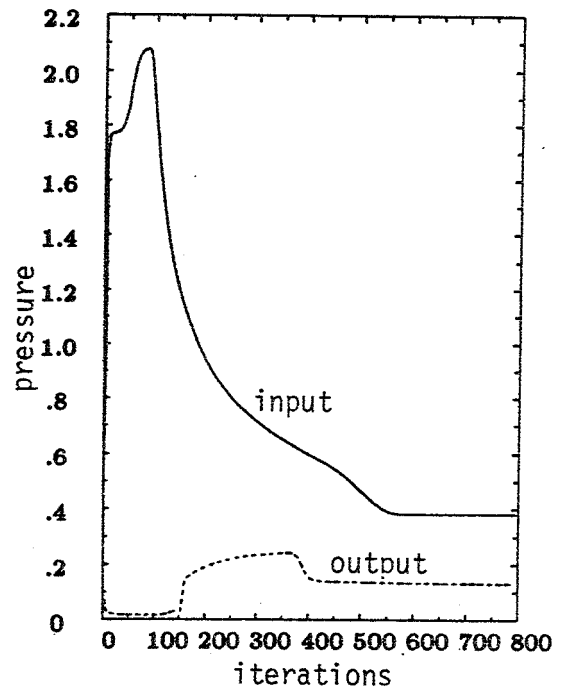


Figure 4.18

Evolution of velocity and static pressure at  $x=0$  (straight line) and at  $x=1$  (dotted line). Test 2 (supersonic flow), initialization by (4.18). Diverging nozzle,  $N=80$ .

## 5 - CONCLUSION

We have proved that the numerical boundary conditions proposed in Section III are robust. The transient evolution converges quickly to the desired steady-state even when initial conditions are a priori far from it. The exact nonlinear interaction between transient waves and stationary waves in a 1D nozzle is analysed by GLAZ-LIU [17] and the behaviour in the vicinity of the steady-state is studied in ENGQUIST-GUSTAFSSON [13] and including references.

## V - LINEARIZED IMPLICIT VERSION OF THE SCHEME

We first study the derivability of the flux functions associated with the internal scheme (the Osher scheme in Section II) and the boundaries (Section III). Then explicit formulae allowing an exact computation of the above gradients are given. Empirically CFL numbers related to the test cases of Section IV show the advantage of using a simple linearized implicit scheme.

### 1 - DERIVABILITY OF THE OSHER SCHEME

The general expression of the Osher flux function given in (2.11) is not a priori clearly derivable due to the step functions  $\epsilon$  defined in (2.9)-(2.10). This is also the case for the boundary conditions (3.1), (3.4), (3.7), (3.17), (3.19) related to the Euler equations. We now prove that it is easy to derive (2.11). The results are similar for each particular boundary condition.

#### PROPOSITION 5.1

*Under the hypotheses reviewed in Section I (fields either genuinely nonlinear or linearly degenerated, existence of  $k$ -curves  $\mathcal{W}_k$ ), the Osher flux function (2.11) associated with the resolution of the multivalued Riemann problem  $R(u,v)$  is continuously derivable relatively to the pair  $(u,v)$  and we have :*



$$(5.1) \quad d\phi(u,v) = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k f'(u_k) \cdot \left( \frac{\partial u_k}{\partial u} du + \frac{\partial u_k}{\partial v} dv \right) + \\ + \sum_{k=1}^n \varepsilon'_k f'(u'_k) \cdot \left( \frac{\partial u'_k}{\partial u} du + \frac{\partial u'_k}{\partial v} dv \right) .$$

### PROOF OF PROPOSITION 5.1

The derivability of  $u_k(u,v)$  and  $u'_k(u,v)$  is classical because they are solutions of a differential equation and  $u,v$  are the associated initial conditions. We simply focus on the discontinuous functions  $\varepsilon, \varepsilon'$  involved in the computation of  $\phi$ . In the proof of Theorem 2.1,  $\phi(u,v)$  is given by the formula (2.17), i.e.

$$(5.2) \quad \phi(u,v) = f(v) - \sum_{k=1}^n \chi(\lambda_k(u_k))(f(u_k) - f(u'_k)) + \\ - \sum_{k=0}^{n-1} \chi(\lambda_{k+1}(u_k))(f(u'_{k+1}) - f(u_k)) .$$

where  $\chi$  is the Heaviside function. Deriving (5.2) in the sense of distributions, the first part obtained by deriving only the  $f$ -terms clearly gives (5.1). The second part is a sum of  $f$ , times the derivatives of Heaviside functions. But if  $\lambda_k(u_k)$  (resp.  $\lambda_{k+1}(u_k)$ ) is null, then  $u'_k = u_k$  (resp.  $u'_{k+1} = u_k$ ) and the coefficient of the Dirac function vanishes. Thus (5.1) is established in the case of all genuinely nonlinear fields. We then conclude the proof with the same arguments as in Theorem 2.1. ■

## 2 - COMPUTATION OF THE FLUX GRADIENTS

We now specify the formulae associated with the interior scheme and the boundary scheme for the particular case of the Euler equations.

The variables  $W$  (2.26) are naturally associated with the computation of intermediate states  $U_1', U_1, U_2, U_3'$  that we denote by  $\tilde{U}$ . Then the derivative of  $F(\tilde{U})$  with respect to  $(U_L, U_R)$  is given by the chain rule :

$$(5.3) \quad dF(\tilde{U}) = \sum_{J=L,R} \frac{\partial F}{\partial W}(\tilde{U}) \cdot \frac{\partial W}{\partial W_J}(\tilde{W}) \cdot \frac{\partial W_J}{\partial U_J}(U_J) dU_J$$

with  $W_J = W(U_J)$  and  $\tilde{W} = W(\tilde{U})$ . From (2.24)-(2.28), we deduce

$$(5.4) \quad F(W) = \begin{pmatrix} \rho u & = \alpha \frac{2}{c^{\gamma-1}} \frac{-2\gamma}{\sigma^{\gamma-1}} u \\ \rho u^2 + p & = \alpha \frac{2}{c^{\gamma-1}} \frac{-2\gamma}{\sigma^{\gamma-1}} u^2 + \beta \frac{2\gamma}{c^{\gamma-1}} \frac{-2\gamma}{\sigma^{\gamma-1}} \\ \rho u E + pu & = \frac{\alpha}{2} \frac{2}{c^{\gamma-1}} \frac{-2\gamma}{\sigma^{\gamma-1}} u^3 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \beta \frac{2\gamma}{c^{\gamma-1}} \frac{-2\gamma}{\sigma^{\gamma-1}} u \end{pmatrix}$$

with  $\alpha = \gamma^{-1/\gamma-1}$  and  $\beta = \alpha^\gamma$ ,

$$(5.5) \quad \frac{\partial F}{\partial W} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\gamma-1} \frac{\rho u}{c} & ; & \rho & ; & -\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho u}{\sigma} \\ \frac{2}{\gamma-1} \frac{\rho u^2}{c} + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{c} & ; & 2\rho u & ; & -\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho u^2}{\sigma} - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\sigma} \\ \frac{\rho u^3}{(\gamma-1)c} + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho u}{c} & ; & \frac{3}{2} \rho u^2 + \frac{\gamma p}{\gamma-1} & ; & -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho u^3}{\sigma} - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho u}{\sigma} \end{pmatrix}$$

and similarly :

$$(5.6) \quad \frac{\partial W}{\partial U} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{c}{\rho} + \frac{\gamma-1}{4} \frac{cu^2}{p} & -\frac{\gamma-1}{2} \frac{cu}{p} & \frac{\gamma-1}{2} \frac{c}{p} \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{\sigma}{2\rho} + \frac{\gamma-1}{4\gamma} \frac{\sigma u^2}{p} & -\frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{\sigma u}{p} & \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{\sigma}{p} \end{pmatrix}$$

We only have to specify the computation of factors  $\frac{\partial W}{\partial W_J}(\tilde{W})$  in (5.3), for  $\tilde{U} = U_1', U_2, U_3, U_3'$  and  $J = L, R$  to be able to compute (5.1). This is a consequence of elementary algebraic derivations of (2.29)-(2.32) and we get :

$$(5.7) \quad \frac{\partial W_1'}{\partial W_L} (U_1') = \begin{pmatrix} \frac{2}{\gamma+1} & \frac{\gamma-1}{\gamma+1} & 0 \\ \frac{2}{\gamma+1} & \frac{\gamma-1}{\gamma+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial W}{\partial W_R} (U_1') = 0$$

$$(5.8) \quad \frac{\partial W_1}{\partial W_L} (U_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\sigma_R/\sigma_L} & \frac{\gamma-1}{2(1+\sigma_R/\sigma_L)} & \frac{c_1}{\sigma_L(1+\sigma_L/\sigma_R)} \\ \frac{2}{(\gamma-1)(1+\sigma_L/\sigma_R)} & \frac{1}{1+\sigma_L/\sigma_R} & \frac{-2c_1}{(\gamma-1)\sigma_L(1+\sigma_L/\sigma_R)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(5.9) \quad \frac{\partial W_1}{\partial W_R} (U_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\sigma_R/\sigma_L} & \frac{-(\gamma-1)}{2(1+\sigma_R/\sigma_L)} & \frac{-c_1}{\sigma_L+\sigma_R} \\ \frac{-2}{(\gamma-1)(1+\sigma_R/\sigma_L)} & \frac{1}{1+\sigma_R/\sigma_L} & \frac{2c_1}{(\gamma-1)(\sigma_L+\sigma_R)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(5.10) \quad \frac{\partial W_2}{\partial W_L} (U_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\sigma_L/\sigma_R} & \frac{\gamma-1}{2(1+\sigma_L/\sigma_R)} & \frac{-c_2}{\sigma_L+\sigma_R} \\ \frac{2}{(\gamma-1)(1+\sigma_L/\sigma_R)} & \frac{1}{1+\sigma_L/\sigma_R} & \frac{-2c_2}{(\gamma-1)(\sigma_L+\sigma_R)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(5.11) \quad \frac{\partial W_2}{\partial W_R} (U_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\sigma_L/\sigma_R} & \frac{-(\gamma-1)}{2(1+\sigma_L/\sigma_R)} & \frac{c_2}{\sigma_R(1+\sigma_R/\sigma_L)} \\ \frac{-2}{(\gamma-1)(1+\sigma_R/\sigma_L)} & \frac{1}{1+\sigma_R/\sigma_L} & \frac{2c_2}{(\gamma-1)\sigma_R(1+\sigma_R/\sigma_L)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(5.12) \quad \frac{\partial W_3'}{\partial W_L'} (U_3') = 0, \quad \frac{\partial W_3'}{\partial W_R'} (U_3') = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\gamma+1} & \frac{\gamma-1}{\gamma+1} & 0 \\ \frac{2}{\gamma+1} & -\frac{(\gamma-1)}{\gamma+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• We now consider the derivation of the boundary flux functions described in Section III. In the particular cases of a given state at infinity, wall reflection and supersonic inflow, a formula similar to (5.1) is easily obtained by the previous considerations. In the particular case (3.7) of subsonic outflow (resp. (3.17), subsonic inflow) the intermediate state  $U_1$  (and  $U_2$  for the outflow) are computed thanks to formulae (3.6) (resp. (3.15)-(3.16)). We now give the new formulae for the  $\partial W/\partial W'$ 's.

\* Subsonic outflow ( $P$  is given)

The state  $U_1$  is computed thanks to (3.6). Then we have :

$$(5.13) \quad \frac{\partial W_1^P}{\partial W_L} (U_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c_1}{\sigma_L} \\ \frac{2}{\gamma-1} & 1 & -\frac{2}{\gamma-1} \frac{c_1}{\sigma_L} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\* Subsonic inflow ( $H$  and  $\Sigma$  are given)

The intermediate states  $U_1$  and  $U_2$  are given in (3.15) and (3.16). Setting

$$(5.14) \quad \delta = \sqrt{2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \left( \frac{\Sigma}{\sigma_R} \right)^2 \right) H - \frac{\gamma-1}{2} \left( \frac{\Sigma}{\sigma_R} \right)^2 \left( u_R - \frac{2}{\gamma-1} c_R \right)^2}$$

we have

$$(5.15) \quad \frac{\partial W_1^{HS}}{\partial W_R} (U_1) = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma}{\sigma_R} \frac{u_1}{\delta} & -\frac{\gamma-1}{2} \frac{\Sigma}{\sigma_R} \frac{u_1}{\delta} & -\frac{c_1}{\sigma_R} \frac{u_1}{\delta} \\ -\frac{2}{\gamma-1} \frac{\Sigma}{\sigma_R} \frac{c_1}{\delta} & \frac{\Sigma}{\sigma_R} \frac{c_1}{\delta} & \frac{2}{\gamma-1} \frac{c_1^2}{\delta \sigma_R} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(5.16) \quad \frac{\partial W_2^{HS}}{\partial W_R} (U_2) = \begin{pmatrix} \frac{u_2}{\delta} & -\frac{\gamma-1}{2} \frac{u_2}{\delta} & \frac{c_2}{\sigma_R} \left(1 - \frac{u_2}{\delta}\right) \\ -\frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{\Sigma}{\sigma_R}\right)^2 \frac{c_2}{\delta} & \left(\frac{\Sigma}{\sigma_R}\right)^2 \frac{c_2}{\delta} & \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{\Sigma}{\sigma_R}\right)^2 \frac{c_2^2}{\delta \sigma_R} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

The formulae given above allow an exact derivation of both the numerical Osher flux (internal interfaces) and the boundary fluxes. As noticed by RAI-CHAKRAVARTHY [37], these computations are expensive but we do not consider them as a "tedious procedure" with our presentation. All the  $3 \times 3$  matrices computations have been implemented in a vectorizable computer program.

### 3 - NUMERICAL TESTS OF THE LINEARIZED IMPLICIT SCHEME

From the previous study, an implicit version of the numerical scheme used in Section IV can be derived, as proposed by RAI-CHAKRAVARTHY [37]. Starting from the system of ODE (4.4), i.e.

$$(5.17) \quad \frac{dU_j}{dt} + G_j(\{U\}) = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N$$

with

$$(5.18) \quad \left\{ \begin{aligned} G_j(\{U\}) &= \frac{A_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x A_j} \left[ \phi(U_j, U_{j+1}) - H(U_j) \right] + \\ &- \frac{A_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x A_j} \left[ \phi(U_{j-1}, U_j) - H(U_j) \right] \end{aligned} \right. , \quad j = 2, \dots, N-1$$

The backward Euler scheme

$$(5.19) \quad \frac{1}{\Delta t} (U_j^{n+1} - U_j^n) + G_j(\{U^{n+1}\}) = 0$$

is linearized around  $\{U^n\}$ . Then we obtain the linearized implicit scheme :

$$(5.20) \quad \frac{1}{\Delta t} (U_j^{n+1} - U_j^n) + \frac{\partial G_j}{\partial U} \cdot (U^{n+1} - U^n) = -G_j(\{U^n\})$$

The matrix  $\frac{\partial G_j}{\partial U}$  is entirely known from the computation of  $d\phi_{j+\frac{1}{2}}$  and  $dH_j$ . The term  $d\phi_{j+\frac{1}{2}}$  has been treated in previous section. Thanks to (4.2), the gradient of pressure

$$(5.21) \quad dp = (\gamma-1) \left( \frac{u^2}{2}, -u, 1 \right) dU$$

completely defines  $dH_j$ .

We have tested the scheme (5.20) on two problems considered in Section IV : The Sod shock tube and the diverging nozzle for both tests 1 and 2. We used mesh refinements, a variation of the initial conditions and for each test case, the computations have been carried out down to machine accuracy. Accurate results are summarized in Table 5.1. In each case, we have determined experimentally a maximal CFL number (see condition (4.6)). The Sod shock tube is a transient problem, containing moving nonlinear waves. The CFL = 7 observed in this case is worse than in

other computations converging to a steady state. Nevertheless our CFL numbers can be compared to the results previously given by RAI-CHAKRAVARTHY [37] with the same basic scheme but with an other treatment of the boundary conditions [8].

| Test case   | Maximal CFL number (experimental) |
|---|-----------------------------------|
| • Sod shock tube [42], $N = 20, 40, 100$  | 7                                 |
| • Diverging nozzle [40], $N = 20, 40, 80$<br>with supersonic inflow (boundary condition (3.1))                            |                                   |
| 1) subsonic outflow (4.14)  |                                   |
| * Initial condition : stagnation (4.15)   | 10                                |
| * Initial condition : state (4.13)  | 20                                |
| 2) supersonic outflow   |                                   |
| * Initial condition : stagnation (4.15)   | 10                                |
| * Initial condition : linear interpolation of variables $(\rho, u, p)$ between the limiting states of the exact solution. | 50                                |

Table 5.1 Numerical tests of the linearized implicit scheme

## CONCLUSION

In this paper we have extended a proposal of VAN LEER [45] and OSHER [36]. We have also given a new presentation of the Osher scheme. This scheme can be viewed as a Godunov-type scheme involving a multivalued solution of a Riemann problem as well as a splitting scheme. The previous theoretical vision of the boundary conditions for the Euler equations proposed in [10] by DUBOIS-LE FLOCH has lead to a numerical treatment of the flux at the boundary. The latter is computed thanks to partial Riemann problems (depending on the given physical quantity) evaluated by multivalued solutions. The derivation of a linearized implicit scheme following this approach is straightforward. Numerical experiments have proved the robustness of both explicit and implicit schemes with respect to the dependance on initial condition and/or time step.

This work can be extended by both numerical and theoretical studies. On the one hand, second order two-dimensional and nonlinear implicit versions of the scheme are under development. On the other hand, our boundary conditions appear as non-reflecting. The link with the previous work of HEDSTRÖM [27] and other classical studies on absorbing conditions (e.g. [14,3,24] and including references) is still to be done.

## ACKNOWLEDGMENTS

I thank Yann Brenier for our helpfull discussions about this work.



## REFERENCES

- [1] AUDOUNET J., *Solutions discontinues paramétriques des systèmes de lois de conservation et des problèmes aux limites associés*, Seminar, Toulouse III univ., 1983-84.
- [2] BARDOS C., LEROUX A.Y., NEDELEC J.C., *First order Quasilinear Equations with Boundary Conditions*, Comm P.D.E. vol 4, n° 9, pp 1017-1034, 1979.
- [3] BAYLISS A., TURKEL E., *Outflow Boundary Conditions for Fluid Dynamics*, SIAM J., Sci. Stat. Comput. vol 3, n° 2, pp 250-259, 1982.
- [4] BRENIER Y., *Averaged Multivalued Solutions for Scalar Conservation Laws*, SIAM J. Numer Anal, vol 21, n° 6, pp 1013-1037, 1984.
- [5] BRENIER Y., *A Time Discretization for Conservation Laws*, in Numerical Methods for the Euler Equations of Fluid Dynamics (Angrand et al, Eds), SIAM, Philadelphia, pp 108-120, 1985.
- [6] BRENIER Y., OSHER S., *Approximate Riemann Solvers and Numerical Flux Functions*. SIAM J. Numer Anal, vol 23, n° 2, pp 259-273, 1986.
- [7] CASIER F., DECONINCK H., HIRSCH C., *A Class of Bidiagonal Schemes for Solving the Euler Equations*. AIAA J. vol 22, n° 11, pp 1556-1563, 1984.
- [8] CHAKRAVARTHY S., *Euler Equations - Implicit Schemes and Boundary Conditions*. AIAA J., vol 1, n° 5, pp 699-706, 1983.
- [9] CHAKRAVARTHY S., OSHER S., *Numerical Experiments with the Osher Upwind Scheme for the Euler Equations*. AIAA J., vol 21, n° 9, pp 1241-1248, 1983.
- [10] DUBOIS F., LE FLOCH P., *Condition à la limite pour un système de lois de conservation*. C.R. Acad. Sc. Paris, t 304, Serie 1, n° 3, pp 75-78, 1987.
- [11] DUBOIS F., LE FLOCH P., *Boundary Conditions for Nonlinear Systems of Conservation Laws*. J. of Diff. Equations, to appear.
- [12] DUKOWICZ J., *A General, Non-Iterative Riemann Solver for Godunov's Method*. J of Comp. Phys., vol 61, pp 119-137, 1985.

- [13] ENGQUIST B., GUSTAFSSON B., *Steady State Computations for Wave Propagation Problems*. Maths of Comp, vol 49, n° 179, pp 39-64, 1987.
- [14] ENGQUIST B., MAJDA A., *Numerical Radiation Boundary Conditions for Unsteady Transonic Flow*. J. of Comp. Phys, vol 40, pp 91-103, 1981.
- [15] ENGQUIST B., OSHER S., *Stable and Entropy Satisfying Approximations for Transonic Flow Calculations*. Math of Comp, vol 34, pp 45-75, 1980.
- [16] ENGQUIST B., OSHER S., *One-Sided Difference Approximations for Nonlinear Conservation Laws*, Math of Comp, vol 36, pp 321-352, 1981.
- [17] GLAZ H., LIU T.P., *The Asymptotic Analysis of Wave Interactions and Numerical Calculations of Transonic Nozzle Flow*. Advances in Appl. Maths, vol 5, pp 111-146, 1984.
- [18] GODUNOV S.K., *A Finite Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics*. Mat. Sb. vol 47, pp 271-290, 1959.
- [19] GODUNOV S.K. et coll, *Résolution Numérique des Problèmes Multidimensionnels de la Dynamique des Gaz*. Editions MIR, Moscou, 1979, 1976.
- [20] GOLDBERG M., TADMOR E., *Convenient Stability Criteria for Difference Approximations of Hyperbolic Initial-Boundary Value Problems II*. Math. of Comp., vol 48, n° 178, pp 503-520, 1987.
- [21] GOODMAN J., *Initial Boundary Value Problems for Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Ph D Thesis, California Univ, 1982.
- [22] GRIFFIN M., ANDERSON J.D., *On the Application of Boundary Conditions to Time Dependent Computations for Quasi One-Dimensional Fluid Flows*. Comp. & Fluids, vol 5, pp 127-137, 1977.
- [23] GUSTAFSSON B., KREISS H.O., SUNDSTRÖM A., *Stability Theory of Difference Approximations for Mixed Initial Boundary Value Problems*. Math of Comp, vol 26, pp 649-686, 1972.
- [24] HALPERN L., SCHATZMAN M., *Artificial Boundary Conditions for Incompressible Viscous Flows*, Internal Report n° 162, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques Appliquées, Palaiseau, 1987.
- [25] HARTEN A., LAX P.D., *A Random Choice Finite Difference Scheme for Hyperbolic Conservation Laws*. SIAM J. Numer Anal, vol 18, n° 2, pp 289-315, 1981.

- [26] HARTEN A., LAX P.D., VAN LEER B., *On Upstream Differencing and Godunov-type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*. SIAM Review, vol 25, n° 1, pp 35-61, 1983.
- [27] HEDSTRÖM G.W., *Nonreflecting Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems*. J of Comp. Phys, vol 30, pp 222-237, 1979.
- [28] HUANG K., *Statistical Mechanics*, J Wiley & Sons, New York, 1963.
- [29] LAX P.D., *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, CBMS Regional Conferences Series in Applied Maths, SIAM, Philadelphia, 1973.
- [30] LIU T.P., *Initial-Boundary Value Problems for Gas Dynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal, vol 64, pp 137-168, 1977.
- [31] MAZET P.A., BOURDEL F., GREBORIO R.M., BOREE J., *Applications de la méthode variationnelle d'entropie à la résolution des équations d'Euler*. Internal Report, CERT, Toulouse, 1987.
- [32] NISHIDA T., SMOLLER J., *Mixed Problems for Nonlinear Conservation Laws*, J. Diff. Equations, vol 23, n° 2, pp 244-269, 1977.
- [33] OLIGER J., SUNDSTRÖM A., *Theoretical and Practical Aspects of Some Initial Boundary Value Problems in Fluid Dynamics*. SIAM J Appl. Math, vol 35, n° 3, pp 419-446, 1978.
- [34] OSHER S., *Numerical Solution of Singular Perturbation Problems and Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, in Math Studies n° 47 (Axelsson-Frank-Van der Sluis Eds), North Holland, Amsterdam, pp 179-205, 1981.
- [35] OSHER S., SOLOMON F., *Upwind Difference Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Math of Comp, vol 38, n° 158, pp 339-374, 1982.
- [36] OSHER S., *Riemann Solvers, the Entropy Condition, and Difference Approximations*, SIAM J. Numer. Anal., vol 21, n° 2, pp 217-235, 1984.
- [37] RAI M., CHAKRAVARTHY S., *An Implicit Form for the Osher Upwind Scheme*, AIAA J., vol 24, n° 5, pp 735-743, 1986.
- [38] RIZZI A., *Computation of Rotational Transonic Flow*, in Numerical Methods for the Computation of Inviscid Transonic Flows with Shock Waves (Rizzi-Viviand Eds), Vieweg & Sohn, Braunschweig, pp 153-161, 1981.
- [39] ROE P.L., *Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes*, J. of Comp. Phys., vol 43, pp 357-372, 1981.

- [40] SHUBIN G., STEPHENS A., GLAZ H., *Steady Shock Tracking and Newton's Method Applied to One-Dimensional Duct Flow*, J. of Comp. Phys., vol 39, pp 364-374, 1981.
- [41] SMOLLER J., *Shock-Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [42] SOD G.A., *A survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws*, J. of Comp. Phys., vol 27, pp 1-31, 1978.
- [43] STEGER J., WARMING R., *Flux-vector Splitting of the Inviscid Gas Dynamics Equations with Applications to Finite-Difference Methods*, J. of Comp. Phys., vol 40, pp 263-293, 1981.
- [44] VAN LEER B., *Flux-vector Splitting for the Euler Equations*, in *Lecture Notes in Physics n° 170* (Krause Ed), Springer, Berlin, pp 507-512, 1982.
- [45] VAN LEER B., *On the Relation between the Upwind-Differencing Schemes of Godunov, Engquist-Osher and Ree*, SIAM J. Stat. Comput., vol 5, n° 1, pp 1-20, 1984.
- [46] VILA J.P., *Sur la théorie et l'approximation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires. Application aux équations de Saint-Venant et à la modélisation des avalanches de neige dense*, Thesis, Paris 6 Univ, 1986.
- [47] VILA J.P., *Simplified Godunov Schemes for  $2 \times 2$  Systems of Conservation Laws*, SIAM J. Numer. Anal., vol 23, n° 6, pp 1173-1192, 1986.
- [48] VIVIAND H., VEUILLOT J.P., *Méthodes Pseudo-instationnaires pour le Calcul d'Écoulements Transsoniques*, ONERA T.P. n° 1978-4, 1978.
- [49] WHITHAM G.B., *On the Propagation of Weak Shock Waves*, J. of Fluid Mech, vol 1, pp 290-318, 1956.
- [50] YEE H., BEAM R., WARMING R., *Boundary Approximations for Implicit Schemes for One-Dimensional Inviscid Equations of Gasdynamics*, AIAA J., vol 20, n° 9, pp 1203-1211, 1982.

## Chapitre 7

Eléments finis mixtes, schéma d'Engquist-Osher  
et algorithme de Newton pour la résolution numérique  
de l'équation du potentiel transsonique .

La formulation mixte vitesse-fonction courant pour le problème transsonique présentée au Chapitre 4 ne nous a pas permis de traiter de façon entièrement satisfaisante la non-linéarité du problème et les conditions aux limites adaptées aux tuyères. Dans ce chapitre, nous adaptons la formulation mixte d'Amara à l'aide de deux modifications. Tout d'abord, nous proposons (partie I) d'utiliser un décentrage de l'impulsion basé sur le schéma d'ENGQUIST-OSHER [5,6] au lieu d'un décentrage de la densité. Par ailleurs, notre étude du Chapitre 6 permet de prendre en compte de façon naturelle les conditions aux limites physiques du problème, grâce à un couplage entre la fonction courant et l'impulsion le long de la frontière. Des tests numériques sur un profil NACA 0012 non-portant (partie II) montrent le haut niveau de fiabilité fourni par la méthode. Le problème intérieur est traité dans la troisième partie. Des écoulements très variés ont été calculés numériquement. Toutefois, des difficultés de convergence dans certains cas transsoniques nous ont conduit à proposer dans la partie IV une prise en compte encore plus précise de la non-linéarité du problème. Nous présentons ensuite une formulation primale entièrement nouvelle de l'équation du potentiel transsonique.

## I - DESCRIPTION DE LA METHODE NUMERIQUE

### 1 - RAPPEL DE LA FORMULATION MIXTE

Nous commençons par rappeler brièvement la formulation mixte d'AMARA [1] décrite dans la première partie du Chapitre 4. Seules les notations importantes sont rappelées dans l'exposé qui suit. L'écoulement, supposé potentiel, est décrit par le champ de vitesse  $\vec{u}$  et la fonction courant  $\psi$ , discrétisés par des fonctions respectivement constante discontinue ( $\vec{u} \in Q_0^h$ ) et biaffine continue ( $\psi \in \bar{Q}_1^D \oplus Q_1^h$ ). Les conditions aux limites imposent de faire une partition de la frontière  $\Gamma \equiv \partial\Omega$  :

$$(1.1) \quad \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N .$$

Sur  $\Gamma_D$ , la valeur de la fonction courant est imposée, alors que sur  $\Gamma_N$ , on se donne la composante tangentielle de la vitesse :

$$(1.2) \quad \begin{cases} \psi = \bar{\psi} \text{ sur } \Gamma_D, & \bar{\psi} \in \bar{Q}_1^D \\ \vec{u} \cdot \vec{\tau} = g \text{ sur } \Gamma_N, & g \in \bar{Q}_0^N . \end{cases}$$

Le traitement de la non-linéarité fait appel à un décentrage de la densité : on écrit l'impulsion par unité de volume  $\vec{q}$  sous la forme :

$$(1.3) \quad \vec{q} = \bar{\rho}(\vec{u}, \psi) \vec{u}$$

où  $\bar{\rho}$  est la densité décentrée, constante dans chaque élément, déterminée par le choix d'un élément amont KA pour chaque élément fini K

du maillage, et par l'un des décentrages décrits aux relations (1.14) et (1.24) à (1.26) du Chapitre 4. Le problème non-linéaire discret fait appel à une formulation mixte  $(\vec{u}, \psi)$  des équations aux dérivées partielles du modèle (conservation de la masse et irrotationnalité). On peut l'écrire :

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \in Q_0^h \times Q_0^h \quad , \quad \psi - \bar{\psi} \in Q_1^h \\ \int_{\Omega} \bar{\rho}(\vec{u}, \psi) \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} \vec{r} \text{rot} \psi \cdot \vec{v} \, dx = 0 \quad \forall \vec{v} \in Q_0^h \times Q_0^h \\ - \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{r} \text{rot} \varphi \, dx = \int_{\partial\Omega} g \varphi \, d\gamma \quad \forall \varphi \in Q_1^h \end{array} \right.$$

L'algorithme de résolution est un algorithme de *point fixe* : partant d'un champ de vitesse  $\vec{u}^0$  et d'une densité décentrée  $\bar{\rho}^0$ , la fonction courant  $\psi^1$  est calculée grâce à la résolution d'un système linéaire symétrique défini positif, puis  $\vec{u}^1$  et  $\bar{\rho}^1$  sont issus d'un calcul explicite, et ainsi de suite.

Au Chapitre 4, nous avons montré la performance de cette méthode pour le calcul d'écoulements transsoniques, mais nous avons mis en évidence plusieurs limitations :

- l'algorithme de point fixe limite dans la pratique le choix de la fonction de décentrage  $\bar{\rho}$  puisque seul l'un des quatre proposés s'est avéré stable (cf. partie II du Chapitre 4) ;
- les conditions aux limites imposent une partition (1.1) de la frontière qui peut ne pas être adaptée à la physique du problème, comme nous l'avons remarqué lors de l'étude du problème intérieur (partie III du Chapitre 4).



## 2 - EQUATIONS DU PROBLEME DISCRETISE

Afin de pallier aux inconvénients que nous venons de rappeler, nous avons transformé la discrétisation du problème transsonique potentiel, tout en conservant la formulation mixte par rapport au couple  $(\vec{u}, \psi)$  et le traitement de la non-linéarité à l'aide d'un décentrage par élément amont. Tout d'abord, les conditions aux limites sont maintenant décrites par une partition de la frontière qui généralise la relation (1.1) :

$$(1.5) \quad \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$$

Les conditions aux limites sur  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  sont données comme précédemment, alors que pour chaque arête  $a$  de  $\Gamma_R$ , on impose la compatibilité entre le flux de masse calculé par différence entre les valeurs  $\psi_{i_{a_2}}$  et  $\psi_{i_{a_1}}$  de la fonction courant et ce même flux calculé par un argument plus physique. On a :

$$(1.6) \quad \psi_{i_{a_2}} - \psi_{i_{a_1}} - l_a \phi_a = 0$$

où  $l_a$  est la longueur de l'arête  $a$ . Nous remarquons que la relation (1.6) n'est autre que l'intégration de

$$(1.7) \quad \vec{q} - \text{rot} \psi = 0$$

le long de l'arête  $a$  (Figure 1.1). Précisons le cadre fonctionnel adapté à la relation (1.5) : la composante  $\Gamma_R$  contient  $NAFR$  arêtes et on impose à  $\Gamma_R$  de contenir exactement le même nombre  $NAFR$  de sommets du maillage  $\mathcal{F}_h$ . Ces sommets de  $\Gamma_R \cap \mathcal{F}_h$  engendrent un espace vectoriel discret  $\tilde{Q}_1^R$  (obtenu en bloquant à zéro les noeuds du

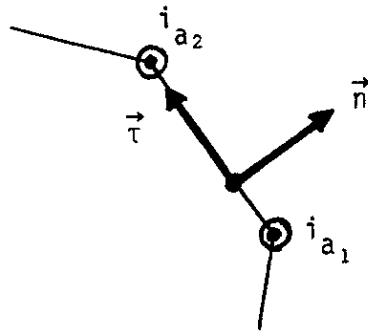


Figure 1.1 Arête  $a$  de la portion  $\Gamma_R$  de la frontière.

maillage qui n'appartiennent pas à  $\Gamma_R$ ). De même (et comme au Chapitre 4),  $\Gamma_D$  contient NBL sommets où la fonction courant est bloquée à la valeur imposée  $\bar{\psi}$ , où  $\bar{\psi}$  appartient à  $\bar{Q}_1^D$ . Enfin, les sommets restants du maillage engendrent un espace vectoriel  $Q_1^h$  de dimension NSI. La fonction courant est donc représentée sous la forme (cf. Figure 1.2) :

$$(1.8) \quad \psi = \psi_1 + \psi_2 + \bar{\psi} \in Q_1^h \oplus \tilde{Q}_1^R \oplus \bar{Q}_1^D .$$

Par ailleurs, le champ de vitesse est un vecteur constant dans chaque élément, ie

$$(1.9) \quad \vec{u} \in Q_0^h \times Q_0^h .$$

Supposons pour le moment donnée la prise en compte de la non-linéarité, d'une part grâce à un choix de l'impulsion spécifique  $\vec{q}$  :

$$(1.10) \quad Q_0^h \times Q_0^h \ni \vec{u} \mapsto \vec{q} = \vec{q}(\vec{u}) \in Q_0^h \times Q_0^h$$

en ce qui concerne le schéma intérieur, et d'autre part grâce à un flux de masse  $\phi$  :

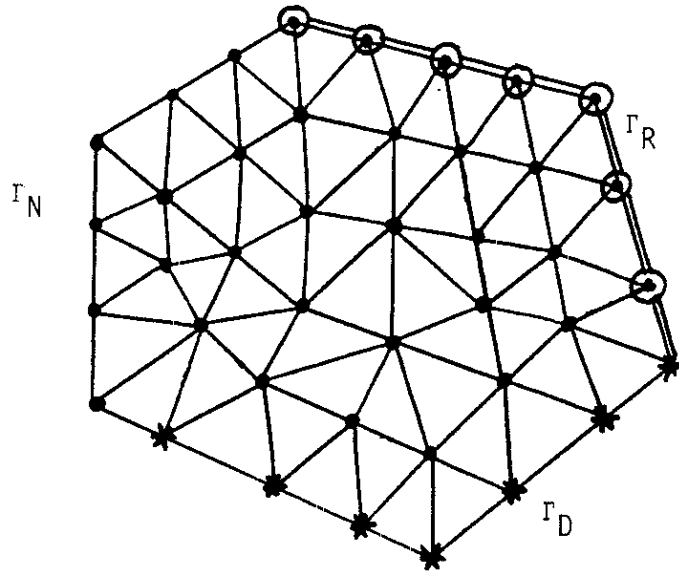


Figure 1.2 Illustration de la décomposition (1.8) des degrés de liberté liés aux sommets du maillage. Les sommets engendrant  $Q_1^h$  sont représentés par un point, les arêtes de  $\Gamma_R$  sont en double trait et les sommets qui définissent  $\tilde{Q}_1^R$  sont symbolisés par un cercle ; les noeuds bloqués de  $\bar{Q}_1^D$  sont notés avec une étoile.

$$(1.11) \quad \phi_a = \phi(\vec{u}, CL)$$

pour le traitement des conditions aux limites CL sur  $\Gamma_R$ . Les équations du problème s'écrivent alors simplement. On intègre (1.7) contre un vecteur  $\vec{v}$  arbitraire dans  $Q_0^h \times Q_0^h$  :

$$(1.12) \quad \int_{\Omega} \vec{q}(\vec{u}) \cdot \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} r \operatorname{rot} \psi \cdot \vec{v} \, dx = 0 \quad \forall \vec{v} \in Q_0^h \times Q_0^h$$

et pour la nullité du tourbillon, la fonction test  $\varphi$  appartient à  $Q_1^h$  seulement. Il vient après intégration par parties :

$$(1.13) \quad \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \text{rot } \varphi \, dx + \int_{\Gamma} g \varphi \, d\gamma = 0 \quad \forall \varphi \in Q_1^h .$$

Jointes à (1.6), les équations (1.12)(1.13) fournissent

2NE + NSI + NAFR relations

(où NE est le nombre d'éléments de  $\mathcal{T}_h$ ), soit exactement le nombre de degrés de liberté nécessaire à la description du couple  $(\vec{u}, \psi)$ .

Pour réécrire (1.12)-(1.13) de façon non variationnelle, nous introduisons l'opérateur non-linéaire  $\vec{Q}(\vec{u})$  défini par

$$(1.14) \quad \begin{cases} Q_0^h \times Q_0^h \ni \vec{u} \mapsto \vec{Q}(\vec{u}) \in Q_0^h \times Q_0^h \\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \vec{Q}(\vec{u})|_K = \int_K \vec{q}(\vec{u}) \, dx \end{cases} ,$$

la matrice B à 2NE lignes et NSI colonnes :

$$(1.15) \quad (B\varphi, \vec{v}) = - \int_{\Omega} \text{rot } \varphi \cdot \vec{v} \, dx, \quad \varphi \in Q_1^h, \quad \vec{v} \in Q_0^h \times Q_0^h$$

et enfin le vecteur colonne G d'ordre NSI :

$$(1.16) \quad Q_1^h \ni \varphi \mapsto G\varphi = \int_{\Gamma} g \varphi \, d\gamma .$$

Le problème transsonique est finalement écrit sous forme mixte au moyen du système d'équations non-linéaires :

$$(1.17) \quad \begin{cases} \vec{u} \in Q_0^h \times Q_0^h, \quad \psi - \bar{\psi} \in Q_1^h \oplus \tilde{Q}_1^R \\ \vec{Q}(\vec{u}) + B\psi = 0 \\ \mathbf{t}_B \vec{u} - G = 0 \\ \psi_{j_{a_2}} - \psi_{j_{a_1}} - \mathbf{1}_a \phi(\vec{u}, \text{CL}) = 0 \quad \forall a \in \Gamma_R \end{cases}$$

La première équation de (1.17) comporte 2NE équations scalaires, la seconde NSI, et la troisième NAFR. Comparé au système (1.9) du Chapitre 4, l'irrotationnalité est moins bien décrite (l'espace  $Q_1^h$  des fonctions tests est toujours inclus dans l'espace correspondant proposé au Chapitre 4) mais la conservation de la masse est renforcée le long des arêtes de  $\Gamma_R$ , alors qu'elle n'est écrite qu'en moyenne dans chaque élément dans la méthode précédente.

### 3 - SCHEMA NUMERIQUE INTERIEUR

Dans ce paragraphe, nous détaillons le calcul de l'impulsion  $\vec{q}(\vec{u})$  (relation (1.10)). Comme au Chapitre 4, un élément amont KA est associé à chaque élément K du maillage par un critère de flux de masse entrant maximal, et en toute rigueur, il faudrait écrire :

$$(1.18) \quad \vec{q} = \vec{q}(\vec{u}, \psi)$$

au lieu de (1.10), afin de rappeler que le choix de l'élément amont dépend directement de la fonction courant. Une fois KA déterminé, l'impulsion  $\vec{q}_K$  dans l'élément fini K n'est fonction que des vitesses  $\vec{u}_K$  et  $\vec{u}_{KA}$ , et non du champ total  $\{\vec{u}\}$  ; on note donc simplement :

$$(1.19) \quad \vec{q}_K = \vec{q}(\vec{u}_{KA}, \vec{u}_K) \quad , \quad K \text{ élément de } \mathcal{T}_h \quad .$$

Nous avons cherché une fonction  $\vec{q}$  *dérivable* et prenant en compte la non-linéarité de façon réaliste. Au Chapitre 4, paragraphe I.3, nous avons adapté l'analyse d'OSHER-HAFEZ-WHITLOW [25] pour construire

le décentrage N° 2 (relation (1.24)). Nous retenons intégralement cette démarche dans la version définitive de notre schéma ; nous la rappelons rapidement.

A l'interface entre KA et K, un problème de Riemann relatif à l'équation scalaire

$$(1.20) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho \left( 1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_0^2} (1-p^{\gamma-1}) \right)^{\frac{1}{2}} \right] = 0$$

modélise correctement l'évolution locale du fluide si l'écoulement est perpendiculaire à cette interface. Le schéma d'ENGQUIST-OSHER [5,6] est alors bien adapté au calcul numérique du flux de masse normal à l'interface : c'est la somme de la partie subsonique du flux  $e(|\vec{u}_K|)$  dans l'élément courant K et de la composante supersonique  $g(|\vec{u}_{KA}|)$  dans l'élément amont KA. Les expressions de  $e$  et  $g$  font intervenir la vitesse du son  $c$  évaluée grâce à l'hypothèse d'enthalpie totale constante selon :

$$(1.21) \quad c^2(|\vec{u}|) = \frac{1}{M_0^2} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 (1 - |\vec{u}|^2) \right)$$

et la densité  $\rho$ , calculée à partir de  $c$  grâce à la relation

$$(1.22) \quad \rho(|\vec{u}|) = \left\{ M_0^2 c^2(|\vec{u}|) \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

puisque le fluide reste partout isentropique dans le modèle utilisé.

On a alors

$$(1.23) \quad \begin{cases} e(|\vec{u}|) = \begin{cases} \rho(|\vec{u}|) |\vec{u}| & \text{si } |\vec{u}|^2 \leq c^2(|\vec{u}|) \\ Q_{\max} & \text{si } |\vec{u}|^2 \geq c^2(|\vec{u}|) \end{cases} \\ g(|\vec{u}|) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\vec{u}|^2 \leq c^2(|\vec{u}|) \\ \rho(|\vec{u}|) |\vec{u}| - Q_{\max} & \text{si } |\vec{u}|^2 \geq c^2(|\vec{u}|) \end{cases} \end{cases} .$$

Puisque l'écoulement est normal à l'interface, il est dirigé selon le vecteur  $\vec{u}_K$ , et on choisit finalement l'expression de l'impulsion :

$$(1.24) \quad \vec{q}(\vec{u}_{KA}, \vec{u}_K) = \left[ g(|\vec{u}_{KA}|) + e(|\vec{u}_K|) \right] \frac{\vec{u}_K}{|\vec{u}_K|} .$$

Dans le Chapitre 5 de sa Thèse [1], AMARA a proposé d'adapter à l'équation du potentiel transsonique le schéma d'Engquist-Osher qu'il utilisait déjà pour l'équation des petites perturbations transsoniques. Une relation du type (1.24) lui permet aussi de calculer l'impulsion, mais la différence avec notre algorithme porte sur  $|\vec{u}_{KA}|$  : AMARA propose d'utiliser une interpolation amont  $|\vec{u}_A|$  du module de la vitesse en suivant la ligne de courant passant par le centre de l'élément K (cf. Figure 3.3.7 de [1]), alors que nous nous contentons du module  $|\vec{u}_{KA}|$  dans l'élément amont.

Notons aussi que lors d'une première tentative (juillet 1986) pour construire la méthode numérique, nous avons choisi un *splitting vectoriel* du flux de masse, en remplaçant (1.24) par la décomposition :

$$(1.25) \quad \vec{q}(\vec{u}_{KA}, \vec{u}_K) = \vec{g}(\vec{u}_{KA}) + \vec{e}(\vec{u}_K) .$$

où les fonctions vectorielles  $\vec{g}$  et  $\vec{e}$  sont calculées à partir des fonctions scalaires  $g$  et  $e$  décrites plus haut :

$$(1.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{g}(\vec{u}_{KA}) = g(|\vec{u}_{KA}|) \frac{\vec{u}_{KA}}{|\vec{u}_{KA}|} \\ \vec{e}(\vec{u}_K) = e(|\vec{u}_K|) \frac{\vec{u}_K}{|\vec{u}_K|} . \end{array} \right.$$

#### 4 - CONDITIONS AUX LIMITES

##### a) Généralités

La décomposition (1.5) de la frontière et la formulation (1.17) du problème global font apparaître les conditions aux limites sous forme linéaire et sous forme non-linéaire. Les conditions aux limites de type linéaire sont liées d'une part à la condition de Dirichlet  $\bar{\psi}$  pour la fonction courant et d'autre part à la composante tangentielle  $g$  de la vitesse (cf. relations (1.2)). Les conditions non-linéaires sont nouvelles ; elles portent sur le flux de masse  $\phi_a$  le long des arêtes de  $\Gamma_R$  (relations (1.6)). Dans la suite de ce paragraphe, nous nous proposons de détailler le calcul de la fonction  $\phi(\vec{u}, CL)$  introduite à la relation (1.11).

Nous nous fixons une arête  $a$  appartenant à  $\Gamma_R$  ; nous notons  $\vec{u}$  le vecteur vitesse  $\vec{u}_K$  dans l'élément fini  $K$  qui contient cette arête (Figure 1.3).

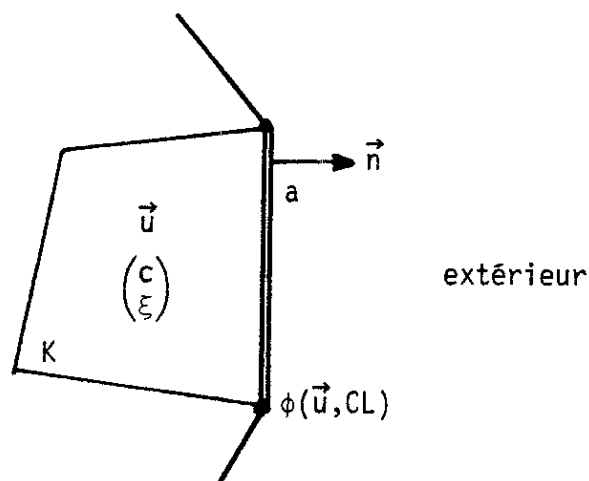


Figure 1.3 Notations



La fonction  $\phi(\vec{u}, CL)$  représente le flux de masse passant à travers  $a$ , issu de l'interaction du champ  $\vec{u}$  et de la condition à la limite "CL". De façon plus précise, les différentes conditions aux limites physiquement réalistes n'interviennent dans le problème couplé (1.6) que par l'intermédiaire du flux de masse  $\phi(.,.)$ . Au Chapitre 6, nous avons étudié un schéma "volumes finis" pour les équations d'Euler monodimensionnelles. La condition limite est décrite par un flux (vectoriel) résultat de l'interaction (grâce à un problème de Riemann partiel) du champ  $\vec{u}$  dans l'élément du bord du domaine et des variables imposées à la limite. Ces dernières peuvent être de différents types : état donné à l'infini, entrée subsonique (enthalpie totale et entropie imposées), paroi rigide, entrée subsonique (pression statique imposée) et sortie supersonique. Ces quatre cas demeurent identiques pour le modèle transsonique potentiel, mais l'étude du Chapitre 6 (équations d'Euler complètes) doit être adaptée.

La donnée d'un état à l'infini (ou d'une entrée supersonique) est exactement équivalente à la donnée d'un vecteur vitesse  $\vec{u}_\infty$  ; on notera  $\phi_\infty(\vec{u})$  le flux de masse correspondant. Une sortie subsonique revient ici encore à se donner la valeur  $P$  de la pression statique, d'où la notation  $\phi_p(\vec{u})$ . Une frontière de type sortie supersonique n'est liée à aucune donnée numérique et nous notons  $\phi_S(\vec{u})$  le flux correspondant. Pour l'entrée subsonique, notre traitement reviendra à imposer l'angle entre la vitesse et la normale au domaine, d'où le choix  $\phi_\theta(\vec{u})$ . Quant à la paroi rigide, le calcul de  $\phi_M(\vec{u})$  est immédiat.

Pour terminer ce paragraphe, nous introduisons des variables non-conservatives adaptées à une analyse le long de la normale. La donnée du vecteur vitesse  $\vec{u}$  permet le calcul de la vitesse du son  $c(\vec{u})$  et de la densité  $\rho(\vec{u})$  grâce aux relations (1.21)-(1.22). Par ailleurs, nous notons  $\xi$  la vitesse normale à l'interface :

$$(1.27) \quad \xi(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{n} \quad .$$

Nous décrivons l'interaction le long de l'arête  $a$  par l'intermédiaire du couple

$$(1.28) \quad W(\vec{u}) = t(c(\vec{u}), \xi(\vec{u})) \quad .$$

#### b) Etat imposé à l'infini

Considérons d'abord le cas où une vitesse à l'infini  $\vec{u}_\infty$  est imposée. Nous formons

$$W_\infty = t(c(\vec{u}_\infty), \xi(\vec{u}_\infty))$$

et il suffit de pouvoir exprimer  $\phi_\infty$  en fonction de  $W$  et  $W_\infty$  pour fermer le problème. Nous proposons de décrire cette interaction par un problème de Riemann relatif aux *équations d'Euler isentropiques* (ou de Saint-Venant, voir VILA [31] par exemple) puisque le modèle potentiel suppose l'isentropie de tout l'écoulement. Plus précisément, nous considérons le problème de Riemann (1.29)-(1.30) suivant :

$$(1.29) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \xi \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \xi \\ \rho \xi^2 + \frac{1}{\gamma M_0^2} \rho \gamma \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$(1.30) \quad (\rho, \xi)(x, 0) = \begin{cases} (\rho(\vec{u}), \xi(\vec{u})) & x < 0 \\ (\rho(\vec{u}_\infty), \xi(\vec{u}_\infty)) & x > 0 \end{cases}$$

Les équations de Saint-Venant (1.29) admettent deux champs vraiment non-linéaires de valeurs propres  $\xi_{\pm}c$  et d'invariants de Riemann associés  $\xi_{\pm} \frac{2c}{\gamma-1}$ , avec une vitesse du son  $c$  donnée par

$$(1.31) \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \frac{1}{M_0^2} \rho^{\gamma-1} .$$

La solution multivaluée du problème (1.29)-(1.30) (Chapitre 6) permet de calculer rapidement le flux numérique vectoriel d'OSHER [24]; le flux de masse  $\phi_\infty$  cherché en est simplement la première composante. Rappelons rapidement la construction de cette solution multivaluée (les variables conservatives  $U, {}^tU = (\rho, \rho\xi)$ , et non conservatives  $W, {}^tW = (c, \xi)$ , ne sont pas redéfinies lorsqu'il n'y a pas ambiguïté). La 1-courbe (de détente) issue de  $U_g \equiv {}^t(\rho_g, \rho_g \xi_g) = {}^t(\rho(\vec{u}), \rho(\vec{u})\xi(\vec{u}))$  coupe la 2-courbe issue de  $U_d \equiv {}^t(\rho_d, \rho_d \xi_d) = {}^t(\rho(\vec{u}_\infty), \rho(\vec{u}_\infty)\xi(\vec{u}_\infty))$  en  $U_2 = {}^t(\rho_2, \rho_2 \xi_2)$ . L'état sonique sur la 1-courbe (resp. la 3-courbe) issue de  $U_g$  (resp.  $U_d$ ) est noté  $U'_1$  (resp.  $U'_3$ ); il vérifie  $\xi'_1 - c'_1 = 0$  (resp.  $\xi'_3 + c'_3 = 0$ ). Il vient facilement :

$$(1.32) \quad c'_1 = \xi'_1 = \frac{2}{\gamma+1} c_g + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi_g$$

$$(1.33) \quad \begin{cases} c_2 = \frac{1}{2} c_g + \frac{\gamma-1}{4} \xi_g + \frac{1}{2} c_d - \frac{\gamma-1}{4} \xi_d \\ \xi_2 = \frac{1}{\gamma-1} c_g + \frac{1}{2} \xi_g - \frac{1}{\gamma-1} c_d + \frac{1}{2} \xi_d \end{cases}$$

$$(1.34) \quad c'_3 = -\xi'_3 = \frac{2}{\gamma+1} c_d - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi_d .$$

Le flux de masse  $\phi_\infty$  est la somme algébrique des flux de masse des états présents simultanément en  $x=0$ , comptés avec le signe moins s'ils appartiennent à une détente rétrograde. Rappelons que toutes ces notions ont été détaillées au Chapitre 6 (voir aussi la Figure 1.4). On a donc :

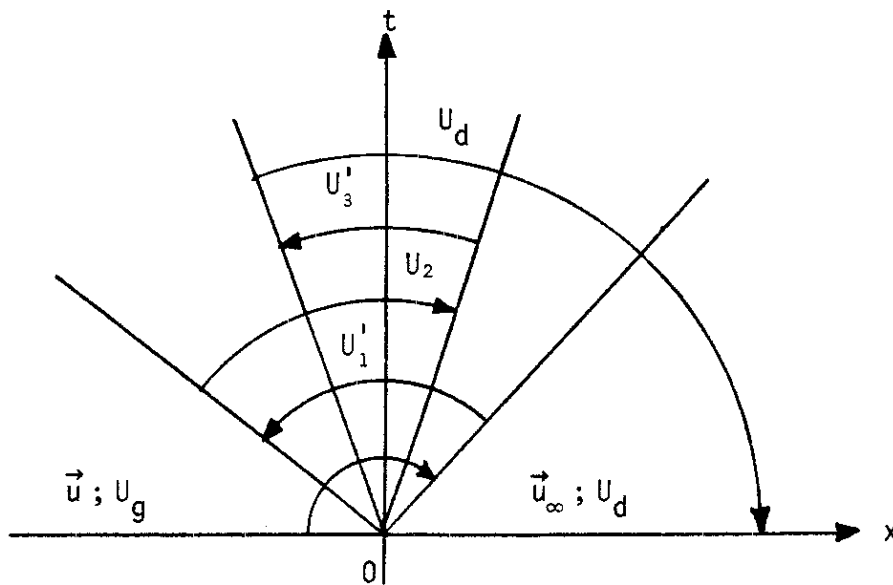


Figure 1.4 Solution multivaluée du problème de Riemann pour les équations de Saint Venant.

$$(1.35) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi_\infty(\vec{u}) = \phi(\vec{u}_g, \vec{u}_d) &= \varepsilon_g \rho_g \xi_g + \varepsilon_1' \rho_1' \xi_1' + \\ &+ \varepsilon_2 \rho_2 \xi_2 + \varepsilon_3' \rho_3' \xi_3' + \varepsilon_d \rho_d \xi_d \end{aligned} \right.$$

avec  $\vec{u}_g \equiv \vec{u}$ ,  $\vec{u}_d \equiv \vec{u}_\infty$ , et

$$(1.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_g = \begin{cases} 1 & \xi_g \geq c_g \\ 0 & \xi_g < c_g \end{cases} \\ \varepsilon_1' = \begin{cases} 1 & \xi_2 \geq c_2 \text{ et } \xi_g < c_g \\ -1 & \xi_2 < c_2 \text{ et } \xi_g \geq c_g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \varepsilon_2 = \begin{cases} 1 & -c_2 \leq \xi_2 < c_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \varepsilon_3' = \begin{cases} 1 & \xi_d \geq -c_d \text{ et } \xi_2 < -c_2 \\ -1 & \xi_d < -c_d \text{ et } \xi_2 \geq -c_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \varepsilon_d = \begin{cases} 1 & \xi_d < -c_d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Dans les paragraphes suivants, nous adaptons la prise en compte des conditions aux limites relatives aux équations d'Euler proposée dans la troisième partie du Chapitre 6 au cas des équations de Saint Venant.

### c) Sortie subsonique

Le calcul de  $\phi_p(\vec{u})$  fait appel à un problème de Riemann partiel. Plus précisément, on relie l'état de gauche  $U_g$  (qui représente la vitesse  $\vec{u}$  dans l'élément frontière :  ${}^tU_g = (\rho(\vec{u}), \rho(\vec{u})\xi(\vec{u}))$ ) à la variété d'équation  $p = P$ , grâce à une 1-onde de détente. L'état

intermédiaire  $U_2$  est donc obtenu comme intersection de la 1-courbe contenant  $U_g$  et de la variété  $\{p=P\}$ . On a donc :

$$(1.37) \quad \begin{cases} c_2 = \sqrt{\gamma} \left( \frac{1}{\gamma M_0^2} \right)^{\frac{1}{2\gamma}} p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \\ \xi_2 = \xi_g + \frac{2}{\gamma-1} (c_g - c_2) \end{cases}$$

Les états  $U_3'$  et  $U_d$  n'existent plus dans ce problème, et  $U_1'$  reste calculé grâce à (1.32). On en déduit l'expression de  $\phi_p$  :

$$(1.38) \quad \phi_p(\vec{u}) = \varepsilon_g \rho_g \xi_g + \varepsilon_1' \rho_1' \xi_1' + \varepsilon_2 \rho_2 \xi_2$$

avec  $\vec{u}_g \equiv \vec{u}$  et

$$(1.39) \quad \begin{cases} \varepsilon_g = \begin{cases} 1 & \xi_g \geq c_g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \varepsilon_1' = \begin{cases} 1 & \xi_2 \geq c_2 \text{ et } \xi_g < c_g \\ -1 & \xi_2 < c_2 \text{ et } \xi_g \geq c_g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \varepsilon_2 = \begin{cases} 1 & \xi_2 < c_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

#### d) Sortie supersonique

Ce type de condition est traité exactement comme au Chapitre 6.

Si  $\xi_g = \xi(\vec{u}) \geq c_g = c(\vec{u})$  alors  $\phi_S$  est calculé à l'aide du flux de

$\rho_g \xi_g$ . Mais dans le cas contraire ( $\xi_g < c_g$ ), pour forcer la sortie à devenir supersonique, on imagine qu'un état de grande vitesse est présent à l'extérieur du domaine de calcul. Il crée donc une 1-détente dans la solution du problème de Riemann correspondant, et l'état sonique  $U_1'$  est le seul à contribuer au calcul de  $\phi_S$  dans ce cas. On a donc finalement :

$$(1.40) \quad \phi_S(\vec{u}) = \varepsilon_g \rho_g \xi_g + \varepsilon_1' \rho_1' \xi_1'$$

avec  $\vec{u}_g = \vec{u}$  et

$$(1.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_g = \begin{cases} 1 & \xi_g \geq c_g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \varepsilon_1' = \begin{cases} 1 & \xi_g < c_g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

#### e) Entrée subsonique

Pour les équations d'Euler générales, on se donne l'enthalpie totale et l'entropie physique. Or ces deux paramètres sont supposés fixés dans le modèle potentiel scalaire. La conservation de l'entropie physique étant imposée par le choix des équations de Saint Venant pour résoudre le problème de Riemann à l'interface, nous avons retenu a priori une condition du type enthalpie totale imposée. Or cette dernière condition laisse indéterminée la direction de la vitesse, et n'en calcule que le module. Nous avons choisi très simplement de faire porter toute la vitesse sur sa composante normale  $\xi$  dans la recherche

de l'état intermédiaire  $U_2$ , ce qui revient à se donner un angle égal à  $\Pi$  entre cette vitesse et la normale à l'interface. La généralisation à un angle quelconque de  $] -\Pi, \Pi ]$  est facile. Comme dans le cas de la sortie subsonique, une 1-courbe de détente permet de relier l'état  $U_g$  à une variété, donnée ici par l'équation

$$(1.42) \quad \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{\gamma-1} c^2 = H$$

et la condition

$$(1.43) \quad \xi < 0$$

puisque la normale  $\vec{n}$  est supposée extérieure. L'état intermédiaire  $U_2$  est solution du système d'équations

$$(1.44) \quad \begin{cases} \xi_2 + \frac{2}{\gamma-1} c_2 = \xi_g + \frac{2}{\gamma-1} c_g \equiv R_g \\ \frac{1}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{\gamma-1} c_2^2 = H \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)M_0^2} \end{cases}$$

Lorsque

$$(1.45) \quad \frac{\gamma-1}{2} R_g^2 < 2H$$

alors le système (1.44) a une seule solution telle que  $\xi_2 < 0$  :

$$(1.46) \quad \begin{cases} \xi_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} R_g - \frac{2}{\gamma+1} \sqrt{(\gamma+1)H - R_g^2} \\ c_2 = \frac{\gamma-1}{2} (R_g - \xi_2) \end{cases}$$

et le flux de masse  $\phi_\theta(\vec{u})$  est donné par les équations (1.38)-(1.39).



f) Paroi rigide

Ce dernier cas est de loin le plus simple. La condition limite exprime que la matière ne traverse pas la paroi correspondante, donc nous avons :

$$(1.47) \quad \phi_M(\vec{u}) = 0$$

Comme cette dernière condition ne dépend pas du champ de vitesse  $\vec{u}$  présent dans la dernière maille, on a également

$$(1.48) \quad d\phi_M(\vec{u}) = 0 \quad .$$

5 - ALGORITHME DE NEWTON

a) Généralités

Nous étudions maintenant la résolution du système non-linéaire discret (1.17). La non-linéarité est représentée par les fonctions  $\vec{u} \mapsto \vec{Q}(\vec{u})$  et  $\vec{u} \mapsto \phi(\vec{u}, CL)$ . Or ces fonctions sont calculées grâce aux schémas d'Engquist-Osher et d'Osher respectivement. Elles sont donc *dérivables*. Réécrivons symboliquement le système (1.17) sous la forme :

$$(1.49) \quad \begin{cases} N = 2.NE + NSI + NAFR \\ \mathbb{R}^N \ni (\vec{u}, \psi) \equiv X \mapsto F(X) \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

$$(1.50) \quad F(X) = 0 \quad .$$

L'application  $F$  est dérivable, et un algorithme de type Newton est naturellement bien adapté à la résolution de (1.50). Si  $X = X^n$  est

donné, on calcule un incrément  $\delta X$  dans  $\mathbb{R}^N$  par la résolution du système linéaire

$$(1.51) \quad dF(X^n) \cdot \delta X + F(X^n) = 0 \quad .$$

Nous précisons d'abord comment s'effectue le calcul des nouveaux coefficients à prendre en compte pour la matrice  $dF(X)$  (ils sont dûs aux termes  $d\vec{Q}(\vec{u})$  et  $d\phi(\vec{u}, CL)$ ) puis nous nous intéressons à la structure de cette matrice.

b) Calcul de  $d\vec{Q}(\vec{u})$

Dans chaque élément fini  $K$ , on a, grâce aux relations (1.14) :

$$(1.52) \quad \vec{Q}(\vec{u}) = \text{vol}(K) \vec{q}(\vec{u}_{KA}, \vec{u}_K)$$

où  $\text{vol}(K)$  est la mesure de  $K$ . Il suffit donc de dériver la relation (1.24) pour évaluer la matrice  $d\vec{Q}(\vec{u})$ . Après quelques lignes de calcul, on trouve :

$$(1.53) \quad \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{u}_{KA}} = \frac{\rho_{KA} \chi(|\vec{u}_{KA}| - c_{KA})}{|\vec{u}_K| |\vec{u}_{KA}|} \left( 1 - \frac{|\vec{u}_{KA}|^2}{c_{KA}^2} \right) \begin{pmatrix} u_K \cdot u_{KA} & u_K \cdot v_{KA} \\ v_K \cdot v_{KA} & v_K \cdot v_{KA} \end{pmatrix}$$

$$(1.54) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{u}_K} &= \frac{\rho_K \chi(c_K - |\vec{u}_K|)}{|\vec{u}_K|^2} \left( 1 - \frac{|\vec{u}_K|^2}{c_K^2} \right) \begin{pmatrix} u_K^2 & u_K \cdot v_K \\ u_K \cdot v_K & v_K^2 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{g(|\vec{u}_{KA}|) + e(|\vec{u}_K|)}{|\vec{u}_K|^3} \begin{pmatrix} v_K^2 & -u_K \cdot v_K \\ -u_K \cdot v_K & u_K^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

où  $\vec{u}_K = (u_K, v_K)$ ,  $\vec{u}_{KA} = (u_{KA}, v_{KA})$ ,  $\rho_K = \rho(\vec{u}_K)$ ,  
 $c_K = c(\vec{u}_K)$ ,  $\rho_{KA} = \rho(\vec{u}_{KA})$ ,  $c_{KA} = c(\vec{u}_{KA})$  et  $\chi(s)$

est la fonction de Heaviside ( $\chi = 1$  si  $s \geq 0$ , 0 sinon). La matrice  $d\vec{Q}(\vec{u})$  est donc composée de blocs  $2 \times 2$  ; elle couple l'élément  $K$  à son élément amont  $KA$  par l'intermédiaire des lignes qui correspondent à l'élément  $K$ .

c) Calcul de  $d\phi(\vec{u}, CL)$

On vérifie facilement (cf. Chapitre 6) que chaque fonction  $\phi$  intervenant dans les conditions aux limites non-linéaires (ie  $\phi_\infty, \phi_P, \phi_S, \phi_\theta, \phi_M$ ) est obtenue en dérivant les seuls facteurs  $\rho$  et  $\xi$  dans chaque terme du type  $\varepsilon \rho \xi$ , puisque les contributions dues aux fonctions (discontinues)  $\varepsilon$  s'annulent deux à deux. Explicitons la méthode de calcul d'un terme type. La condition limite fait intervenir les variables non-conservatives  $W_g$  relatives à la vitesse  $\vec{u}_g \equiv \vec{u}$  et à la normale  $\vec{n}$  (relation (1.28)) ainsi qu'un état intermédiaire  $\tilde{U}$ ,  ${}^t\tilde{U} = (\tilde{\rho}, \tilde{\rho} \tilde{\xi})$ , calculé en utilisant les variables non-conservatives  $\tilde{W}$  ( ${}^t\tilde{W} = (\tilde{c}, \tilde{\xi})$ ). Cet état intermédiaire contribue au calcul du flux via le terme

$$(1.55) \quad \tilde{\phi} = \tilde{\varepsilon} \tilde{\rho} \tilde{\xi} .$$

On a donc :

$$(1.56) \quad d\tilde{\phi} = \tilde{\varepsilon} \frac{\partial(\tilde{\rho} \tilde{\xi})}{\partial \tilde{W}} \cdot \frac{\partial \tilde{W}}{\partial W_g} \cdot \frac{\partial W_g}{\partial \vec{u}_g} \cdot d\vec{u}_g$$

Dans cette dernière relation, seul le facteur  $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial W_g}$  change avec le choix de l'état intermédiaire  $\tilde{U}$ . On a toujours

$$(1.57) \quad \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{\xi}}{\partial \tilde{W}} = \left( \frac{2}{\gamma-1} \frac{\tilde{\rho} \tilde{\xi}}{\tilde{c}}, \tilde{\rho} \right)$$

$$(1.58) \quad \frac{\partial W_g}{\partial \vec{u}_g} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma-1}{2} \frac{u_g}{c_g} & -\frac{\gamma-1}{2} \frac{v_g}{c_g} \\ n_x & n_y \end{pmatrix}$$

avec  $\vec{n} = {}^t(n_x, n_y)$  et  $\vec{u} = {}^t(u_g, v_g)$ . Il suffit ensuite de dériver les relations (1.32) à (1.34), (1.37) et (1.46) par rapport à  $(c_g, \xi_g)$  pour achever le calcul de  $d\tilde{\phi}$ . Pour chaque cas envisagé au paragraphe 4, nous détaillons maintenant le calcul de la dérivée  $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial W_g}$ .

\* Etat donné à l'infini. La relation (1.35) peut se réécrire, avec des notations évidentes :

$$(1.59) \quad \phi_\infty(\vec{u}_g) = \phi_g + \phi_1' + \phi_2 + \phi_3' + \phi_d$$

D'après ce qui précède, nous obtenons :

$$(1.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\phi_g = \varepsilon_g \rho_g \left( n_x - u_g \frac{\xi_g}{c_g} \right) du_g + \varepsilon_g \rho_g \left( n_y - v_g \frac{\xi_g}{c_g} \right) dv_g \\ d\phi_1' = \varepsilon_1' \rho_1' \left( n_x - \frac{u_g}{c_g} \right) du_g + \varepsilon_1' \rho_1' \left( n_y - \frac{v_g}{c_g} \right) dv_g \\ d\phi_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_2 \rho_2 \left( 1 + \frac{\xi_2}{c_2} \right) \left( n_x - \frac{u_g}{c_g} \right) du_g + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \rho_2 \left( 1 + \frac{\xi_2}{c_2} \right) \left( n_y - \frac{v_g}{c_g} \right) dv_g \\ d\phi_3' = d\phi_d = 0 \end{array} \right.$$

\* Sortie subsonique. Nous réécrivons (1.38) sous la forme

$$(1.61) \quad \phi_P(\vec{u}_g) = \phi_g + \phi_1' + \phi_2^P .$$

Les termes  $\phi_g$  et  $\phi_1'$  sont identiques à ceux de la relation (1.59). Par contre,  $\phi_2^P$  est calculé grâce à la relation (1.37), et sa dérivée vaut :

$$(1.62) \quad d\phi_2^P = \varepsilon_2 \rho_2 \left( n_x - \frac{u_g}{c_g} \right) du_g + \varepsilon_2 \rho_2 \left( n_y - \frac{v_g}{c_g} \right) dv_g \quad .$$

\* Entrée subsonique. La relation qui donne  $\phi_\theta(\vec{u})$  est analogue à (1.61) :

$$(1.63) \quad \phi_\theta(\vec{u}_g) = \phi_g + \phi_1' + \phi_2^\theta$$

Le dernier terme  $\phi_2^\theta$ , calculé au moyen de l'état intermédiaire  $U_2$  obtenu à la relation (1.46), a une dérivée donnée par :

$$(1.64) \quad d\phi_2^\theta = \varepsilon_2 \rho_2 \left( 1 + \frac{\xi_2}{c_2} \right) \left( n_x - \frac{u_g}{c_g} \right) du_g + \varepsilon_2 \rho_2 \left( 1 + \frac{\xi_2}{c_2} \right) \left( n_y - \frac{v_g}{c_g} \right) dv_g \quad .$$

#### d) Structure de la matrice

Nous pouvons réécrire l'équation (1.51) qui définit l'algorithme de Newton par rapport à l'inconnue auxiliaire  $(\delta\vec{u}, \psi' = \psi + \delta\psi)$  sous la forme :

$$(1.65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{vol}(K) \left( \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{u}_K} \delta\vec{u}_K + \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{u}_{KA}} \delta\vec{u}_{KA} \right) + B\psi' = -\text{vol}(K)\vec{q}_K - B\bar{\psi} \\ \phantom{\text{vol}(K)} \phantom{\left( \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{u}_K} \delta\vec{u}_K + \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{u}_{KA}} \delta\vec{u}_{KA} \right)} + B\psi' = G - {}^t B \cdot \vec{u} \\ \psi'_{i_{a_2}} - \psi'_{i_{a_1}} - l_a \frac{\partial \phi}{\partial \vec{u}_g} \cdot \delta\vec{u}_g = - \left\{ \bar{\psi}_{i_{a_2}} - \bar{\psi}_{i_{a_1}} - l_a \phi(\vec{u}_g, CL) \right\} \end{array} \right.$$

Dans la dernière équation,  $\vec{u}_g$  désigne la vitesse dans l'élément qui contient l'arête  $a$  et  $\bar{\psi}_{i_{a_1}}$  (resp.  $\bar{\psi}_{i_{a_2}}$ ) n'est présent dans le second membre que si le sommet  $i_{a_1}$  (resp.  $i_{a_2}$ ) est bloqué (ie appartient à  $\Gamma_D$ ).

La matrice  $dF$  est *creuse*. Sa structure est représentée Figure 1.5. Nous l'avons rangée en mémoire en ne stockant que les éléments non-nuls (on se donne les tableaux LIGNE(m), COLONNE(m), VALEUR(m) décrivant le numéro de ligne, de colonne et la valeur numérique du  $m^{\text{ième}}$  élément non nul). Nous avons utilisé une factorisation *exacte* de Gauss (avec pivot) proposée par la bibliothèque NAG [22] (sous-programmes F01BRF et F04AXF).

Nous notons que la matrice  $dF(x)$  est de grande dimension, puisque son ordre est d'environ deux fois le nombre d'éléments plus le nombre de sommets, alors que la matrice du Chapitre 4 n'était que d'ordre égal au nombre de sommets.

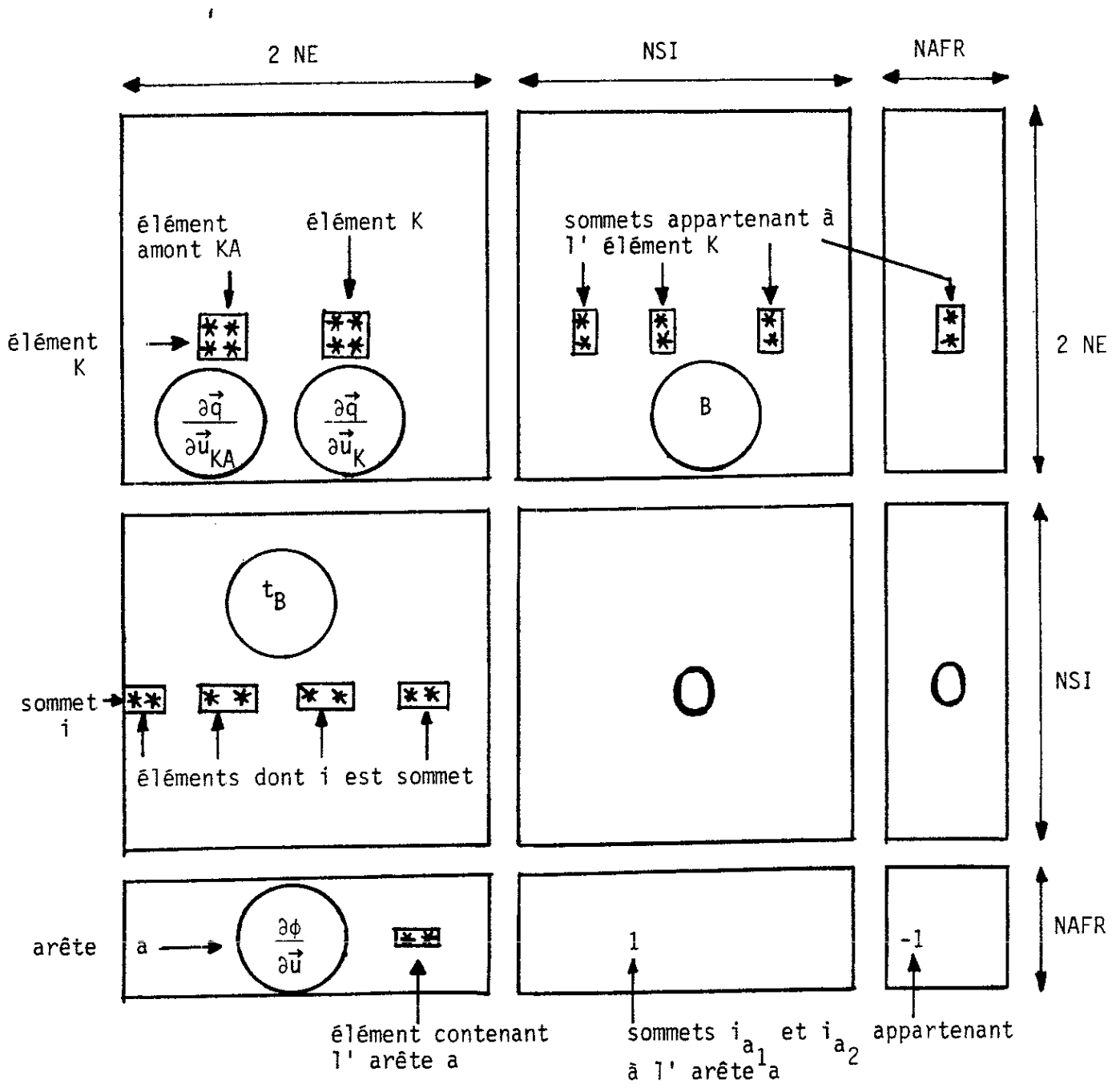


Figure 1.5 Structure de la matrice

## II - TESTS NUMERIQUES SUR L'AILE NACA 0012

### 1 - POSITION DU PROBLEME

Comme au Chapitre 4, nous commençons par valider notre code de calcul sur l'aile NACA 0012. Nous précisons d'abord les conditions aux limites envisagées, ainsi que le maillage utilisé. La partition (1.5) de la frontière  $\Gamma$  nous a permis de décomposer le domaine de calcul (identique à celui utilisé au Chapitre 4) en une composante  $\Gamma_D$  de Dirichlet où la fonction courant est nulle, et une frontière artificielle (en pointillés sur la Figure 2.1) sur laquelle on s'est donné les conditions aux limites soit grâce à un problème de Riemann  $\Gamma_R$  (1.29)-(1.30), soit grâce à une donnée de vitesse tangentielle (frontière de Neumann  $\Gamma_N$ ).

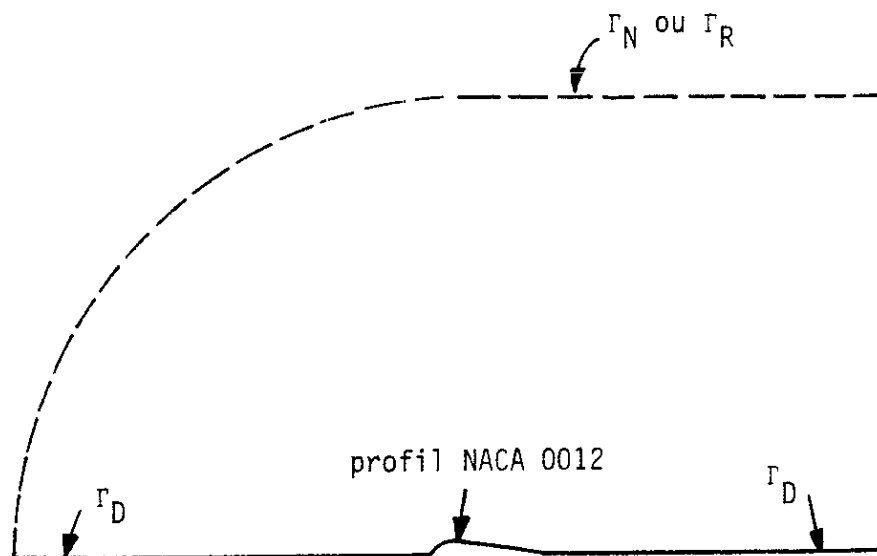


Figure 2.1 Conditions aux limites pour l'aile NACA 0012



Par ailleurs, nous avons conservé les maillages construits pour le Chapitre 4 autour du demi-profil NACA. Mais l'ordre des matrices à factoriser est maintenant d'environ 290, 1100, 4300, 9600 pour les maillages comportant respectivement 11, 21, 41, 61 points sur le demi-profil. Afin de concentrer notre effort sur le traitement des non-linéarités du problème, nous n'avons pas utilisé de méthode itérative de type gradient conjugué pour les systèmes non-symétriques (pour lesquelles nous renvoyons à JOLY [16] et aux références citées). Nous avons au contraire retenu une *factorisation exacte* de Gauss avec pivot décrite au paragraphe précédent. Par contre, le coût d'une telle procédure est très élevé. Ainsi les maillages N41 et N61 conduisent à des temps de calcul trop importants. Nous n'avons donc utilisé que les maillages N11 pour les tests et N21 pour l'exploitation du programme (Figure 2.2).

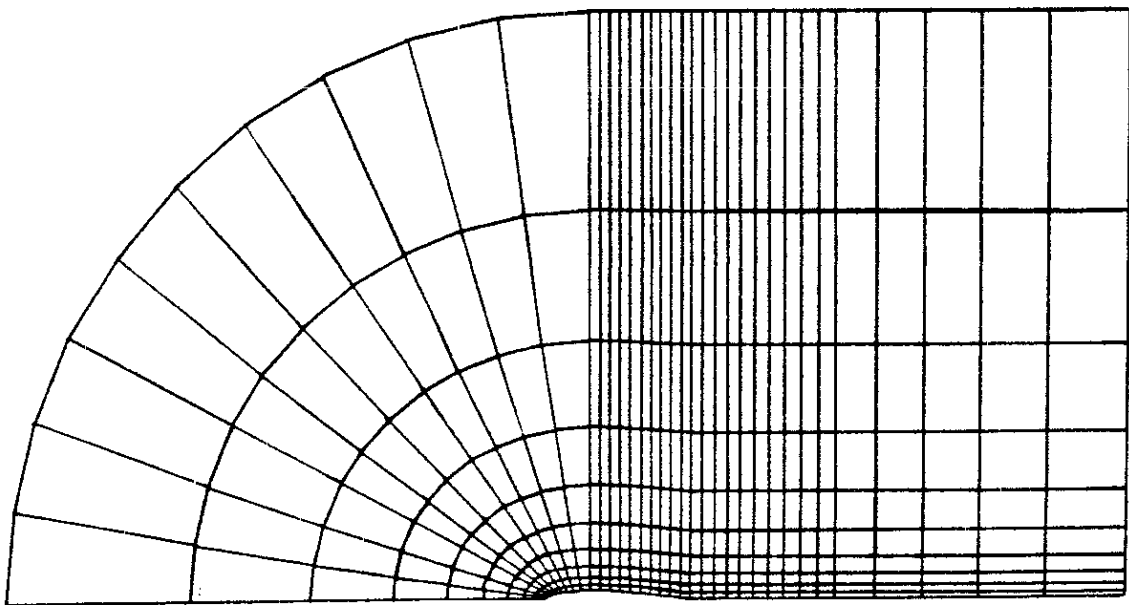


Figure 2.2 Maillage N21 autour du NACA 0012

Dans ce dernier cas, la factorisation L.U s'effectue typiquement en 10 à 20 secondes CPU sur le Cray 2 du CCVR.

L'algorithme de Newton présenté dans la première partie (relation (1.51)) n'a pas été mis en oeuvre aussi simplement. En fait, nous avons utilisé un algorithme de quasi-Newton ; l'inconnue globale  $X = (\vec{u}, \psi)$  est calculée par l'algorithme sous relaxé suivant :

$$(2.1) \quad X^{n+1} = X^n + \omega^n \delta X$$

avec  $\delta X$  solution de

$$(2.2) \quad dF(X^m) \cdot \delta X = -F(X^n)$$

Dans ces relations,  $\omega^n$  et  $dF(X^m)$  sont choisis comme suit : le coefficient  $\omega^n$  ( $\omega^n \in [0,1]$ ) est adapté de sorte que l'incrément final de vitesse  $\omega^n \cdot \delta \vec{u}$  ne dépasse pas 0.01 en norme  $L^\infty$  :

$$(2.3) \quad \omega^n \cdot \|\delta u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 0.01 \quad , \quad 0 \leq \omega^n \leq 1$$

et pour être complet, rappelons que le nombre de Mach de référence  $M_0$  a toujours été choisi égal à 1 :

$$(2.4) \quad c = 1 \iff |\vec{u}| = 1 \quad .$$

Par ailleurs, la matrice  $dF(X^m)$  est factorisée toutes les 10 itérations. L'entier  $m$  est donc choisi selon la relation :

$$(2.5) \quad m = 10 \cdot \text{Partie entière} \left( \frac{n}{10} \right) + 1$$

De cette façon, une courbe de convergence typique a l'allure indiquée Figure 2.3 : le résidu de la densité  $\|\rho^{n+1} - \rho^n\|_{L^\infty} / \|\rho^n\|_{L^\infty}$  stationne

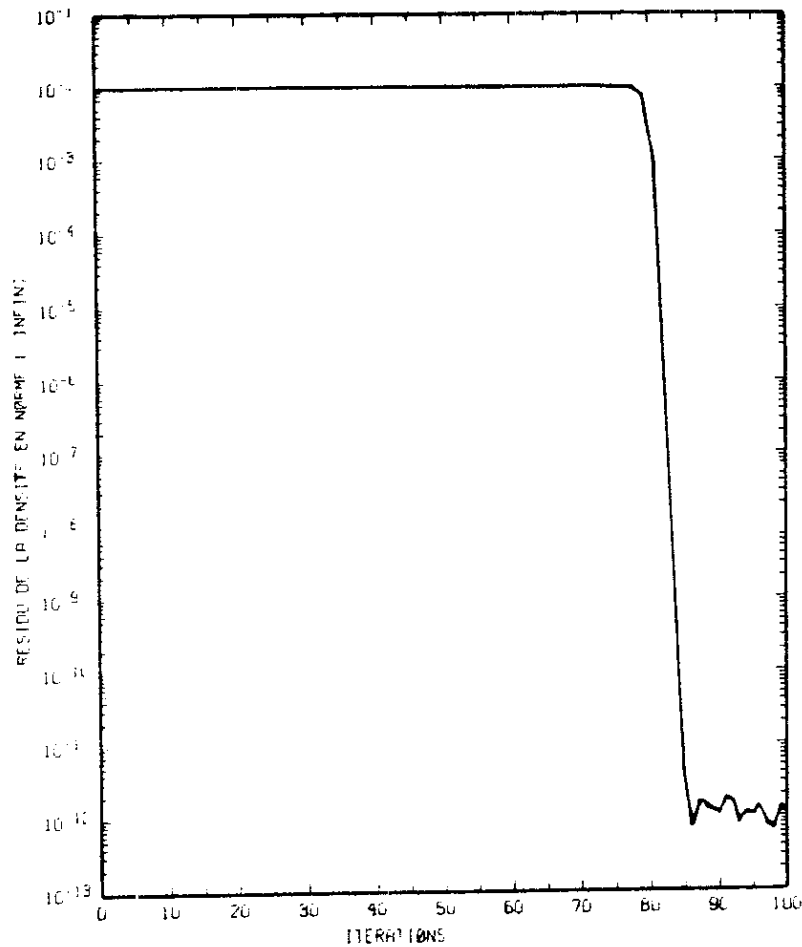


Figure 2.3 Résidu de la densité. Aile NACA 12,  
 $M_\infty = 0.90$ , itérations 250 à 350.

autour de  $10^{-2}$  à cause de notre contrainte (2.3), puis décroît très rapidement dès qu'on s'approche de la solution.

Pour les calculs à nombre de Mach à l'infini inférieur à 1, nous avons initialisé le calcul par l'écoulement uniforme correspondant. L'algorithme prend alors 200 à 400 itérations avant de converger jusqu'à la précision de la machine. Lorsque le nombre de Mach à l'infini est plus grand que 1, nous avons initialisé le calcul par le résultat de l'expérience précédente (de Mach directement inférieur).

Dans ce dernier cas, nous avons choisi une condition de type  $\Gamma_N$ , pour la frontière artificielle, alors que le problème de Riemann nous a permis d'effectuer les premiers cas tests à  $M_\infty = 0.8, 0.85, 0.90, 0.95$ .

## 2 - CALCULS A MACH INFINI EGAL A 0.80 ET 0.85

Ces deux valeurs du Mach à l'infini ont été déjà considérées au Chapitre 4. Les champs d'isomachs correspondants, représentés sur les Figures 2.4 et 2.5 sont très comparables aux résultats obtenus Chapitre 4 (Figures 2.12 et 2.18). Pourtant, l'étude des courbes de coefficient de pression sur le profil (Figures 2.6 et 2.7) montre qu'avec notre nouvelle méthode, la zone supersonique est plus étendue et le nombre de Mach maximal est plus élevé. Pour le cas  $M_\infty = 0.80$ , la comparaison avec les auteurs du GAMM workshop [28] (voir aussi la Figure 2.17 du Chapitre 4) est très satisfaisante, puisque l'overshoot présent dans nos résultats du Chapitre 4 a disparu, et que notre nouvelle valeur minimale du coefficient de pression ( $\approx -0.88$ ) se place mieux dans la fourchette  $(-0.84, -0.93)$  proposée par RIZZI-VIVIAND [28]. Pour l'écoulement à  $M_\infty = 0.85$ , la position du choc reste correcte ( $x_c \approx 0.7, 0.8$ ) et celui-ci est plus fort (Mach maximal  $\approx 1.35$ ). Ces deux cas tests classiques nous ont permis de valider le code de calcul et le schéma intérieur en particulier.

Le splitting vectoriel proposé aux relations (1.25)(1.26) avait donné des résultats corrects pour  $M_\infty = 0.80$ , mais un choc beaucoup trop fort (!) placé en bord de fuite du profil pour  $M_\infty = 0.85$  (Figures 2.8 et 2.9). Nous ne l'avons donc pas utilisé pour d'autres tests. Toutefois la convergence de ce dernier cas nous a confirmé le bien-fondé d'un algorithme de type Newton pour la résolution du problème.

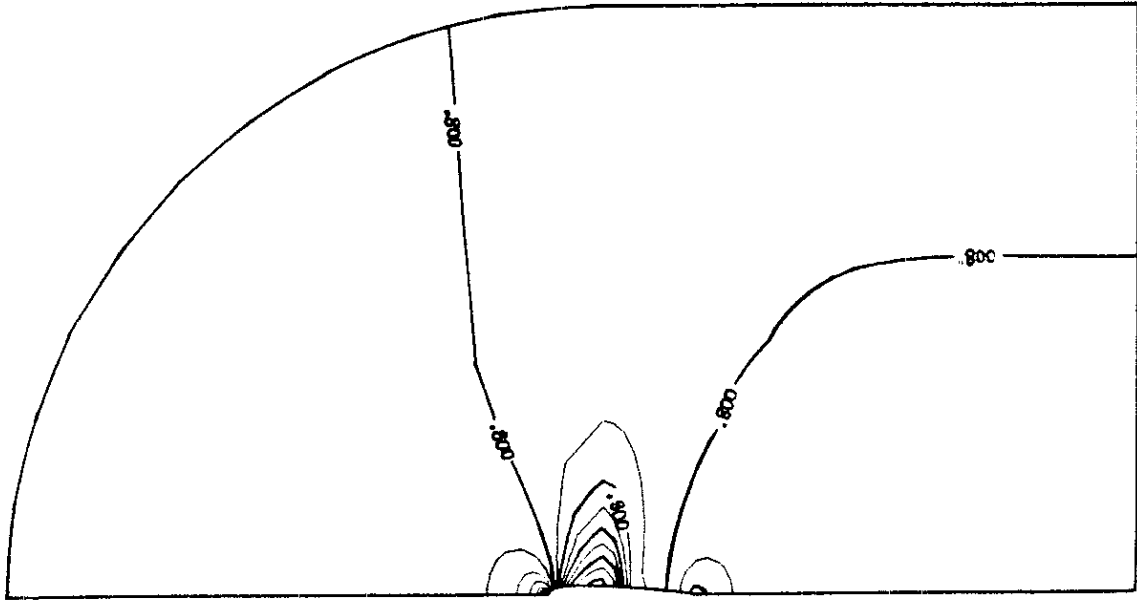


Figure 2.4 Isovaleurs du nombre de Mach.  
Aile NACA 0012,  $M_\infty = 0.80$ ,  $\alpha = 0^\circ$ .

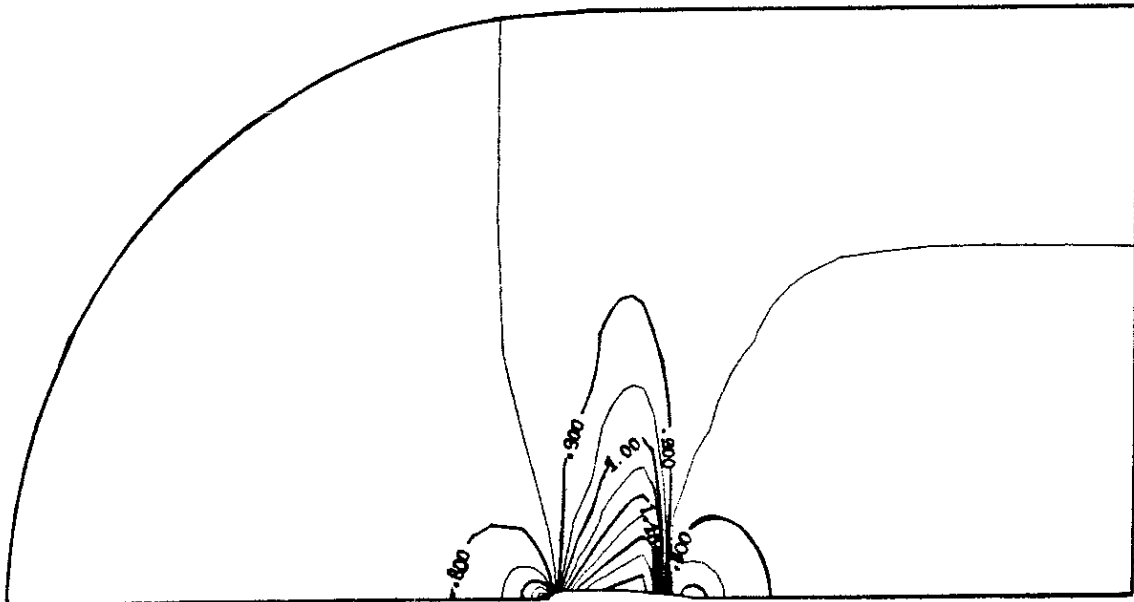


Figure 2.5 Isovaleurs du nombre de Mach.  
Aile NACA 0012,  $M_\infty = 0.85$ ,  $\alpha = 0^\circ$ .

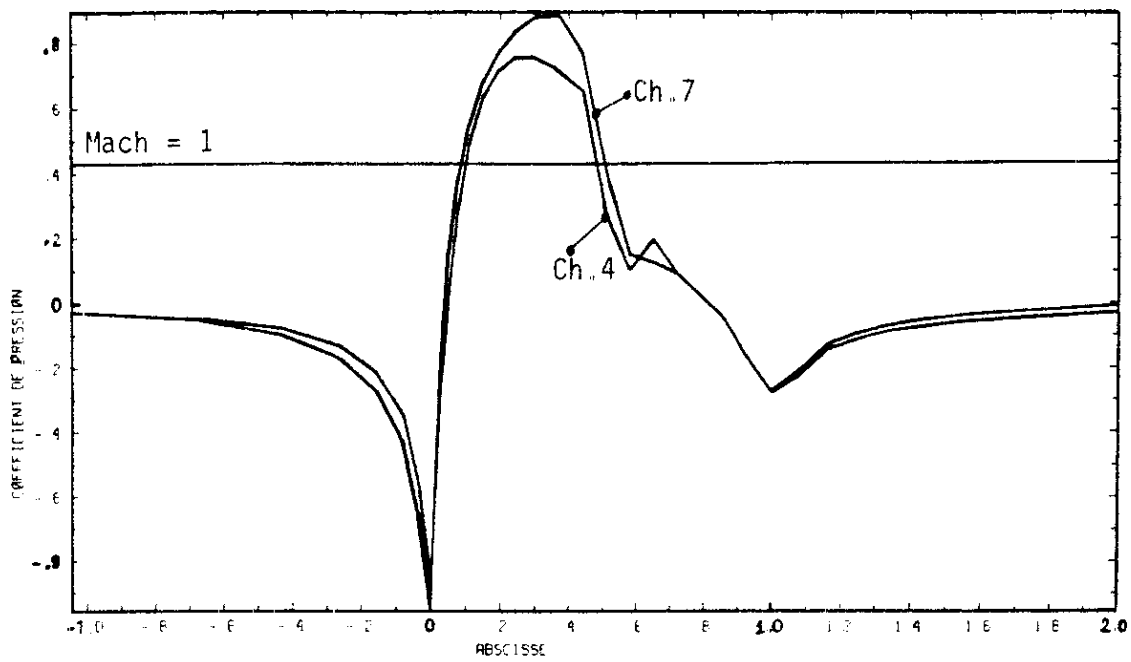


Figure 2.6 Courbes de  $C_p$  sur le profil NACA 0012,  $M_\infty = 0.80$ ,  $\alpha = 0^\circ$ . Comparaison des résultats obtenus avec les méthodes des Chapitres 4 et 7.

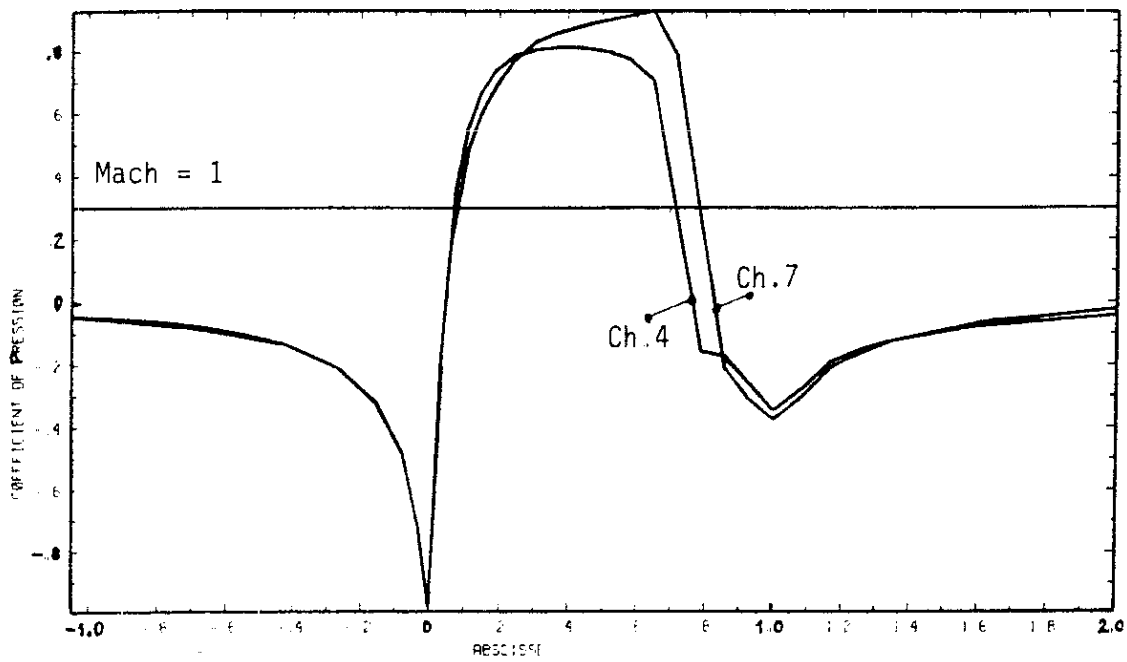


Figure 2.7 Courbes de  $C_p$  sur le profil NACA 0012,  $M_\infty = 0.85$ ,  $\alpha = 0^\circ$ . Comparaison des méthodes développées aux Chapitres 4 et 7.

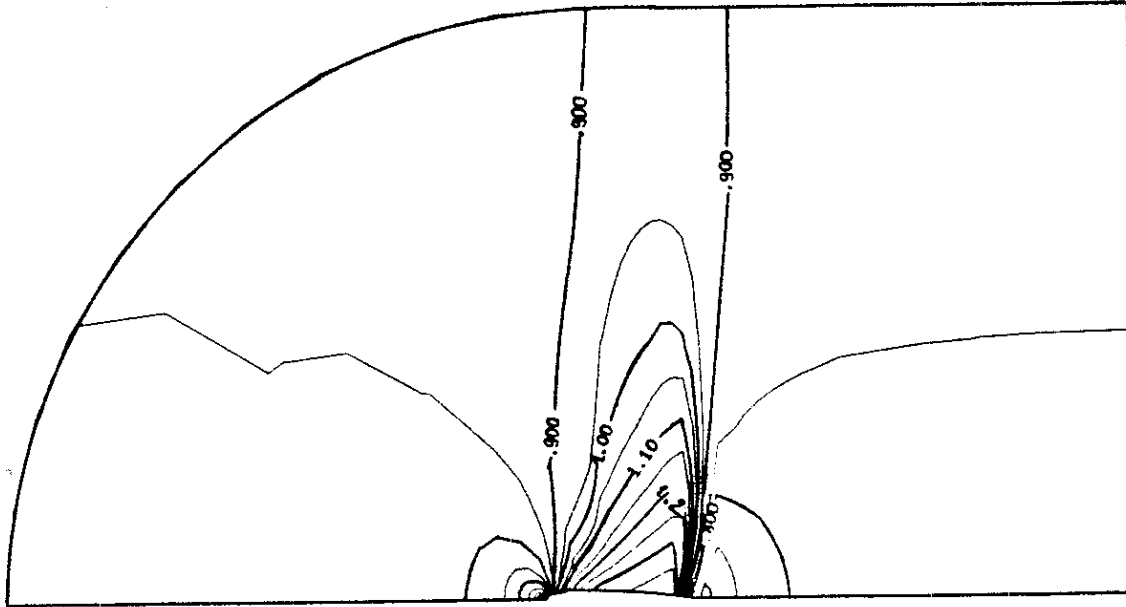


Figure 2.8 Courbes d'isomach. Aile NACA 0012,  $M_\infty = 0.85$ ,  $\alpha = 0^\circ$ . Splitting vectoriel (1.25)(1.26).

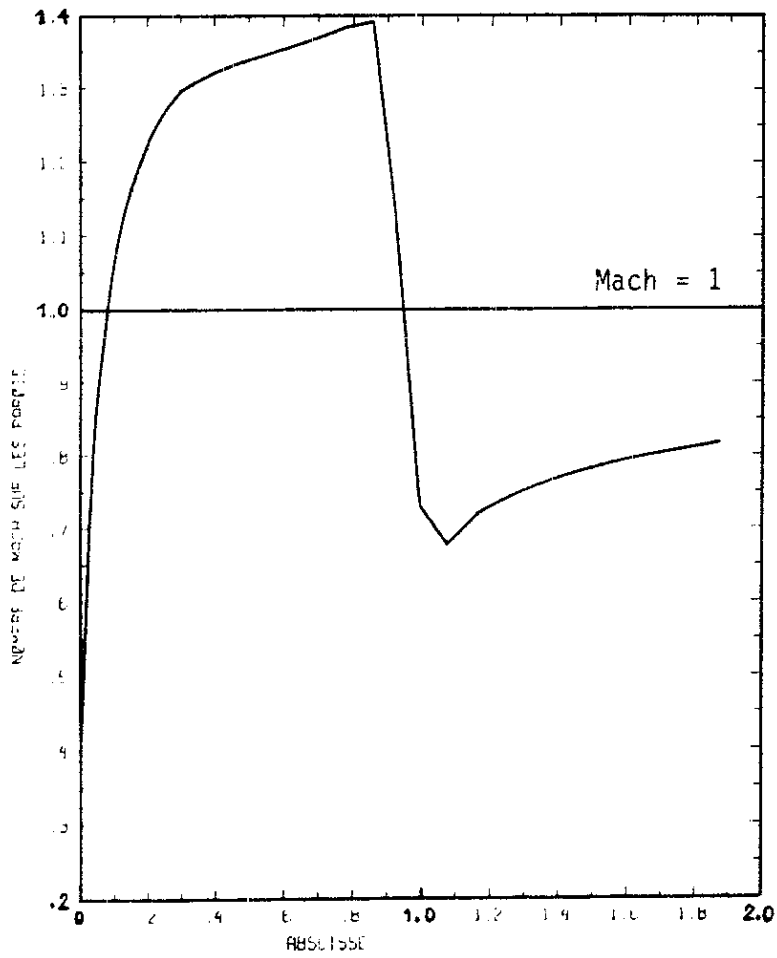


Figure 2.9 Courbe de  $C_p$  sur le profil NACA 0012,  $M_\infty = 0.85$ ,  $\alpha = 0^\circ$ , splitting vectoriel.

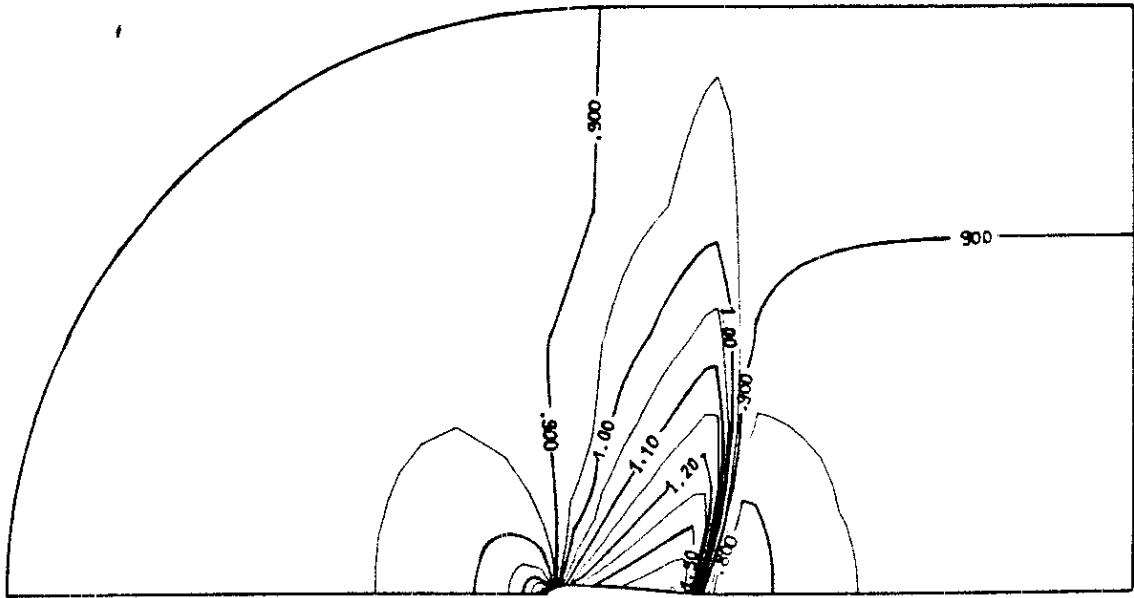


Figure 2.10 Isovaleurs du nombre de Mach. Demi-profil  
NACA 0012,  $M_\infty = 0.90$ .

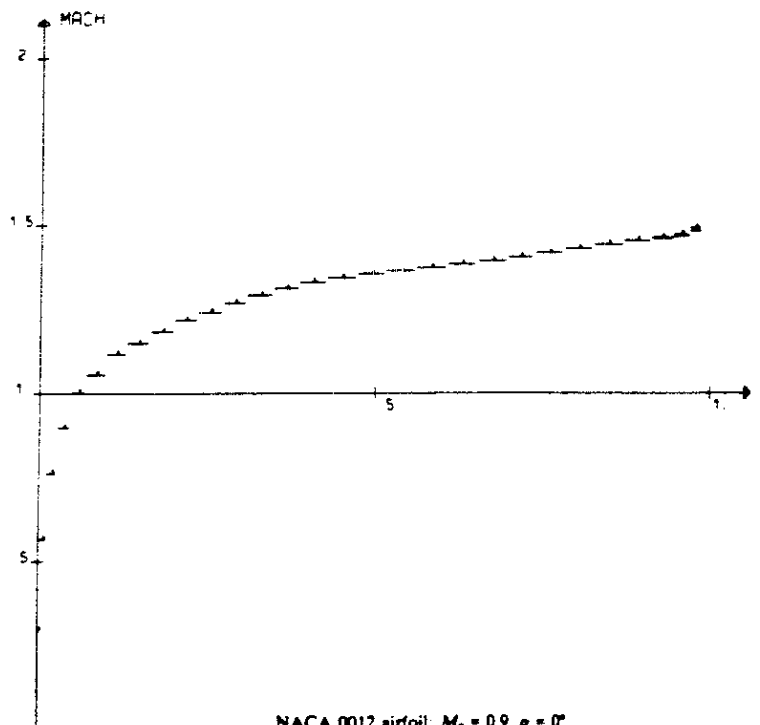
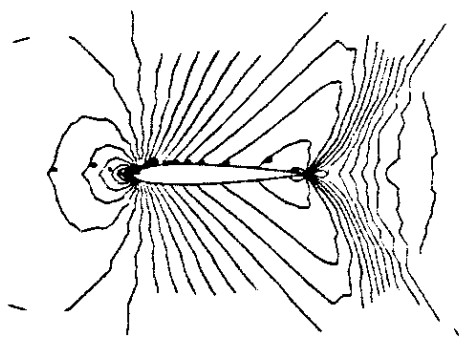


Figure 2.11 Résultats de BRISTEAU et al [3] pour ce même cas test.

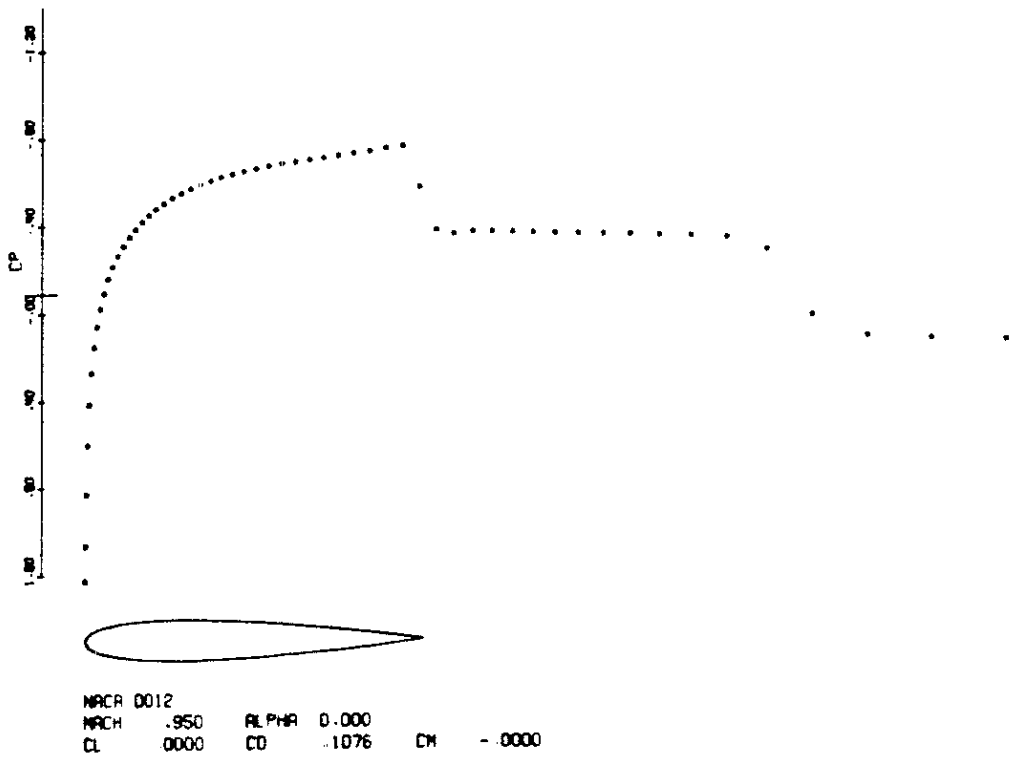


### 3 - TEST A $M_\infty = 0.90$ .

Ce cas test est beaucoup plus raide que les deux précédents. Il a nécessité 350 itérations non-linéaires au total (soit 35 factorisations de Gauss). Les cent dernières valeurs du résidu ont été portées Figure 2.3. Le choc, placé cette fois sur le bord de fuite du profil, est très développé (la zone supersonique a une extension au dessus de l'aile qui dépasse deux cordes). De plus, ce choc est clairement *oblique* (Figure 2.10), puisque les relations de Rankine-Hugoniot relatives à un choc droit, satisfaites dans les deux cas tests précédents, sont maintenant en défaut : le nombre de Mach en amont du choc (1.41) est suivi d'un état aval de nombre de Mach égal à 0.77 alors que la relation de Hugoniot relative à un choc droit nous prédit 0.67. Les comparaisons avec d'autres auteurs sont plus difficiles, et à notre connaissance, seuls BRISTEAU-PIRONNEAU-GLOWINSKI-PERIAUX-PERRIER-POIRIER [3] ont publié des résultats pour ce cas test ( $M_\infty = 0.90$ ,  $\alpha = 0^\circ$ , cf. Figure 2.11). Ces auteurs obtiennent comme nous un choc oblique en bord de fuite. Le nombre de Mach maximal qu'ils obtiennent (1.5) est un peu plus fort que le nôtre, mais leur maillage est plus raffiné. Pour conclure, nous pouvons considérer que nos résultats sont très comparables à ceux de BRISTEAU et al. Ce cas test montre à la fois la robustesse de notre formulation et la précision qu'offre la méthode numérique.

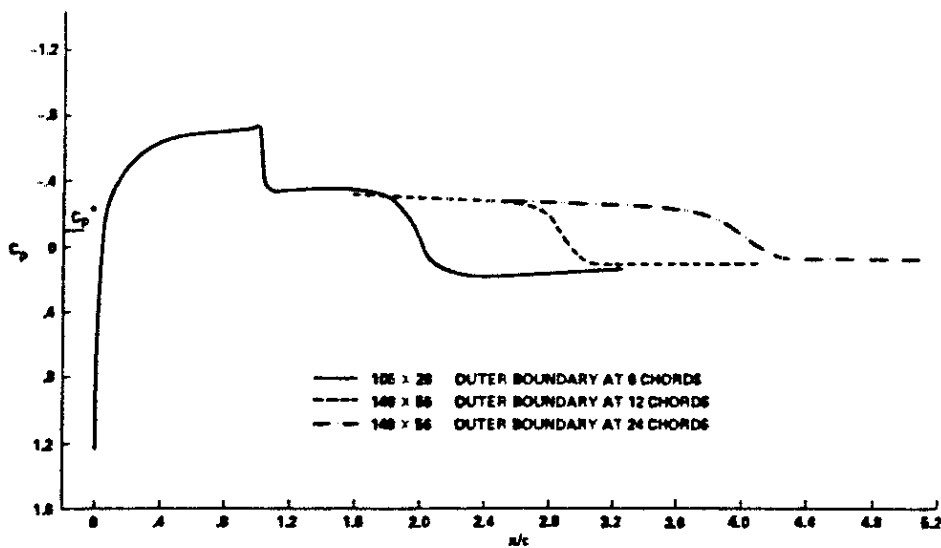
#### 4 - TEST A $M_\infty = 0.95$

Ce cas test, déjà proposé au GAMM workshop de 1979 [28], présente un choc oblique attaché au bord de fuite, suivi d'un choc droit (on parle alors d'un "fishtail shock", voir par exemple JAMESON [15]). Cette structure avait été observée lors du workshop par JAMESON et HOLST [28] et présentée ensuite par HABASHI-HAFEZ [9]. Nous reproduisons leurs résultats sur les Figures 2.12 à 2.15. Notre calcul (Figure 2.16) montre lui aussi la structure de choc en queue de poisson ; signalons que l'obtention de cette structure n'était pas attendue a priori puisque notre schéma par élément amont est fondé sur un alignement du maillage et des lignes de courant. La différence entre les résultats des figures 2.12 à 2.16 porte essentiellement sur l'emplacement du choc droit. D'après nos calculs (Figure 2.17), il se place à 1.5 fois le profil (par rapport au bord d'attaque, situé en  $x=0$ ), ce qui est comparable à HABASHI-HAFEZ [9] (1.7 fois le profil) alors que JAMESON et HOLST (Figures 2.12 et 2.13) trouvent ce second choc à 2 cordes du bord d'attaque, ou même plus. Comme le signale HOLST [28] (cf. Figure 2.13) la taille du domaine de calcul influe sur la position du choc droit, et la frontière aval que nous avons retenue est probablement mal adaptée à ce test. Toutefois, le changement de condition limite obtenu en remplaçant la frontière à l'infini  $\Gamma_R$  par une frontière de type  $\Gamma_N$  n'a pas modifié de façon essentielle la valeur du nombre de Mach après le profil (Figure 2.18).



C-type grid 128 x 32

Figure 2.12 Résultats de JAMESON et al [28], pour l'aile NACA 0012 à  $M_\infty = 0.95$ .



- Pressure coefficient distributions with x/c axis extended downstream of airfoil trailing edge (NACA 0012 airfoil,  $M_\infty = 0.95$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ).

Figure 2.13 Résultats de HOLST [28], pour l'aile NACA 0012,  $M_\infty = 0.95$ .

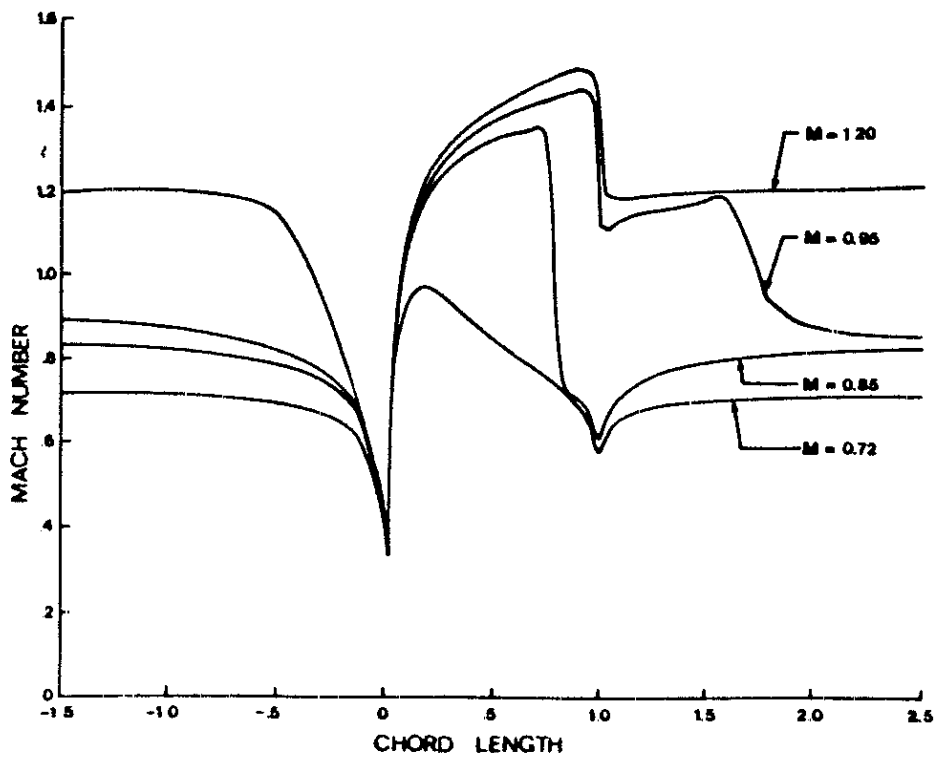
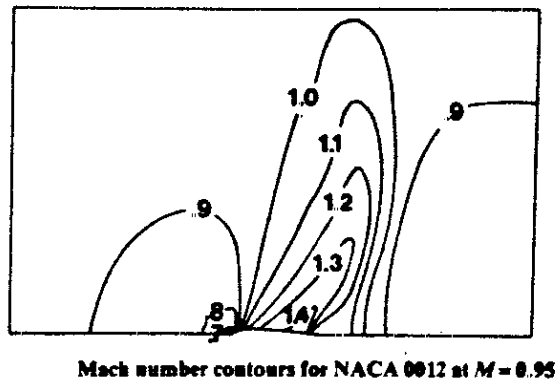


Figure 2.14 Résultats de HABASHI-HAFEZ [9] pour le NACA 0012 non portant.



Mach number contours for NACA 0012 at  $M = 0.95$ .

Figure 2.15 Résultats de HABASHI-HAFEZ [9].

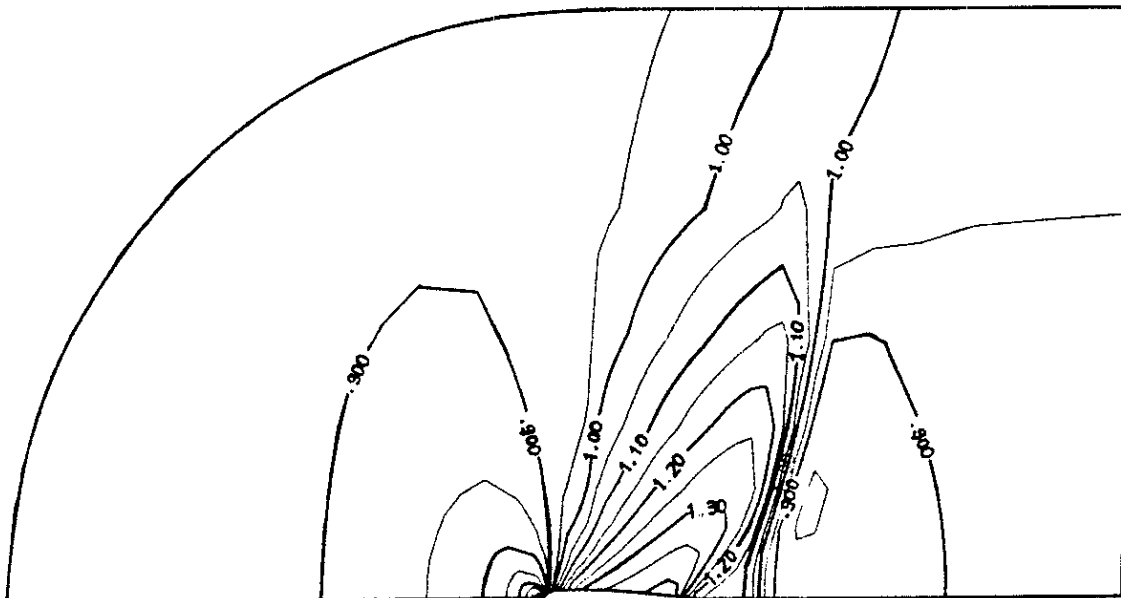


Figure 2.16 Isovaleurs du nombre de Mach. NACA 0012,  $M_\infty = 0.95$ .

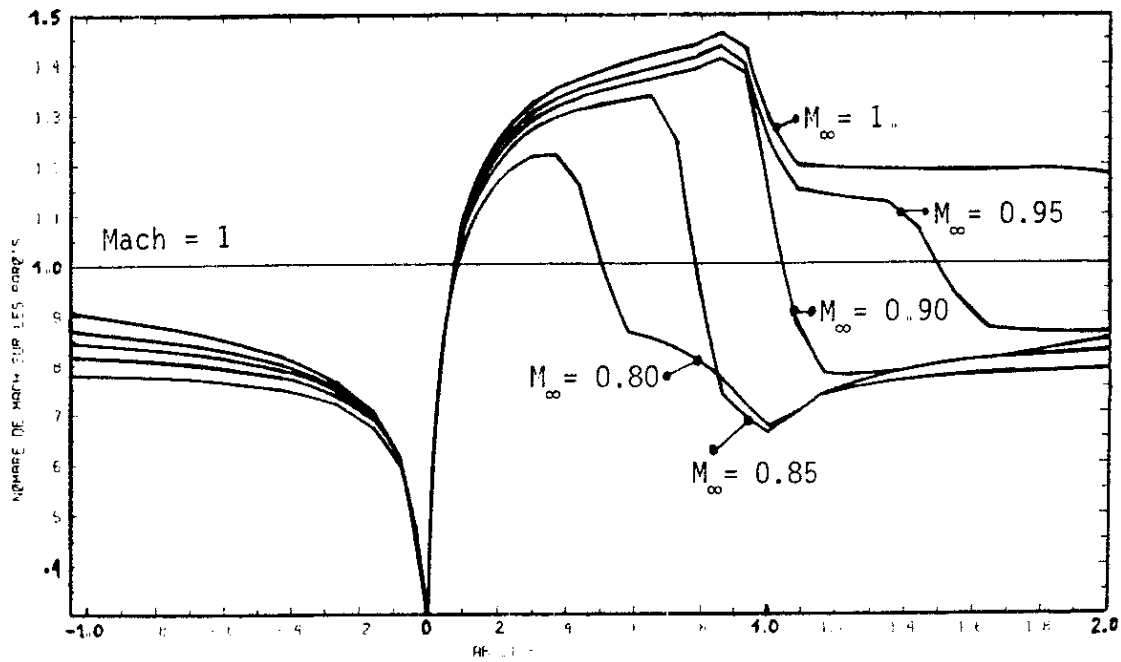


Figure 2.17 Nombre de Mach sur le bord  $\Gamma_D$  du domaine de calcul (NACA 0012 non portant).

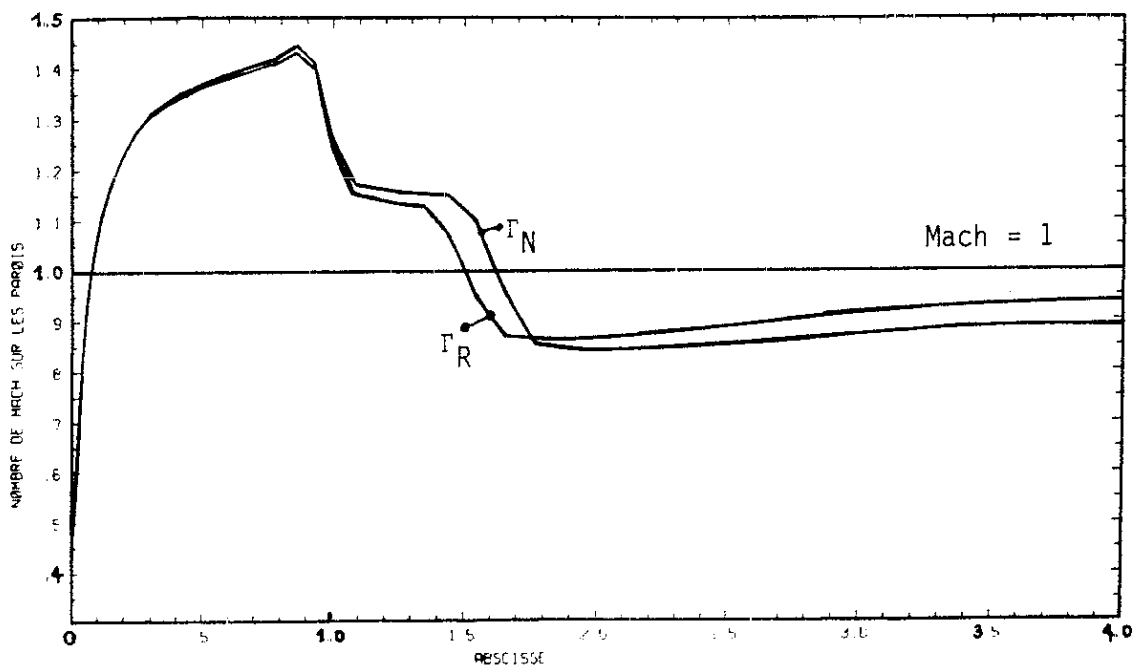


Figure 2.18 Nombre de Mach sur  $\Gamma_D$ , NACA 0012 à  $M_\infty = 0.95$ . Conditions aux limites " $\Gamma_N$ " et " $\Gamma_R$ " sur la frontière artificielle.

## 5 - NOMBRE DE MACH A L'INFINI SUPERIEUR OU EGAL A 1.

Le cas de calcul  $M_\infty = 1$  pose un problème d'initialisation : si l'on choisit comme condition initiale l'écoulement uniforme associé, la matrice obtenue est non-inversible (ce qui est assez naturel puisque les contributions locales  $d\vec{Q}(\vec{u})$  sont singulières dans ce cas). Nous avons donc opté pour une méthode de continuation par rapport au nombre de Mach à l'infini : nous calculons successivement les cas  $M_\infty = 1., 1.05, 1.1$  en choisissant comme condition initiale le résultat du calcul à  $M_\infty = 0.95, 1., 1.05$  respectivement. De plus, nous avons mis en oeuvre la condition limite à l'infini à l'aide d'une frontière de type  $\Gamma_N$  (condition (1.2)). Pour chaque cas, la convergence du calcul a été assez rapide (moins de 200 itérations typiquement). Pour le cas  $M_\infty = 1.20$ , nous avons initialisé le calcul par l'écoulement uniforme correspondant, et la convergence a été obtenue assez rapidement (200 itérations). Les champs d'isovaleurs du nombre de Mach sont représentés aux Figures 2.19 à 2.22. Au fur et à mesure que  $M_\infty$  croît, le choc en queue de poisson s'étend, le choc droit est situé de plus en plus loin du bord de fuite et disparaît du domaine de calcul pour  $M_\infty = 1.2$  (Figure 2.23). Par ailleurs, un choc détaché en amont du bord d'attaque apparaît ; il est bien visible sur nos simulations malgré un maillage assez grossier dans cette zone.

Les cas tests du profil NACA 0012 non portant avec un nombre de Mach à l'infini égal à 1., 1.05, 1.1 n'ont pas encore, à notre connaissance, donné lieu à publication. Par contre, HABASHI-HAFEZ [9] et OSHER-HAFEZ-WHITLOW [25] ont proposé des résultats pour le cas  $M_\infty = 1.2$  (Figures 2.14 et 2.24 respectivement). Nos résultats (Figure 2.23) sont très comparables à ceux proposés par ces auteurs, et valident complètement notre démarche.

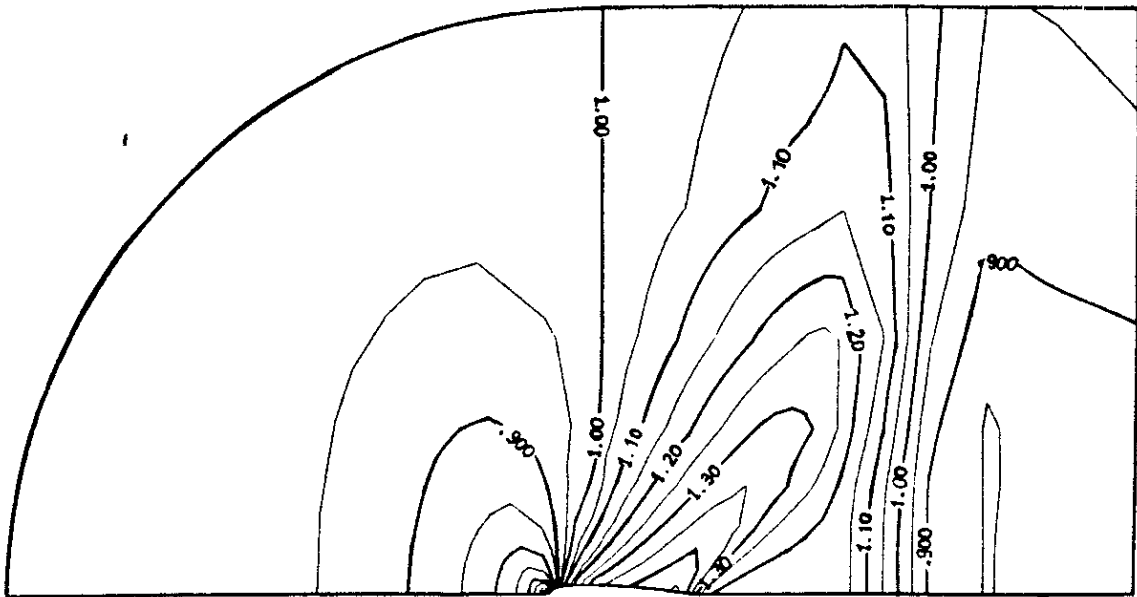


Figure 2.19 Courbes d'isomach. NACA 0012,  $M_\infty = 1$ ,  $\alpha = 0^\circ$ .

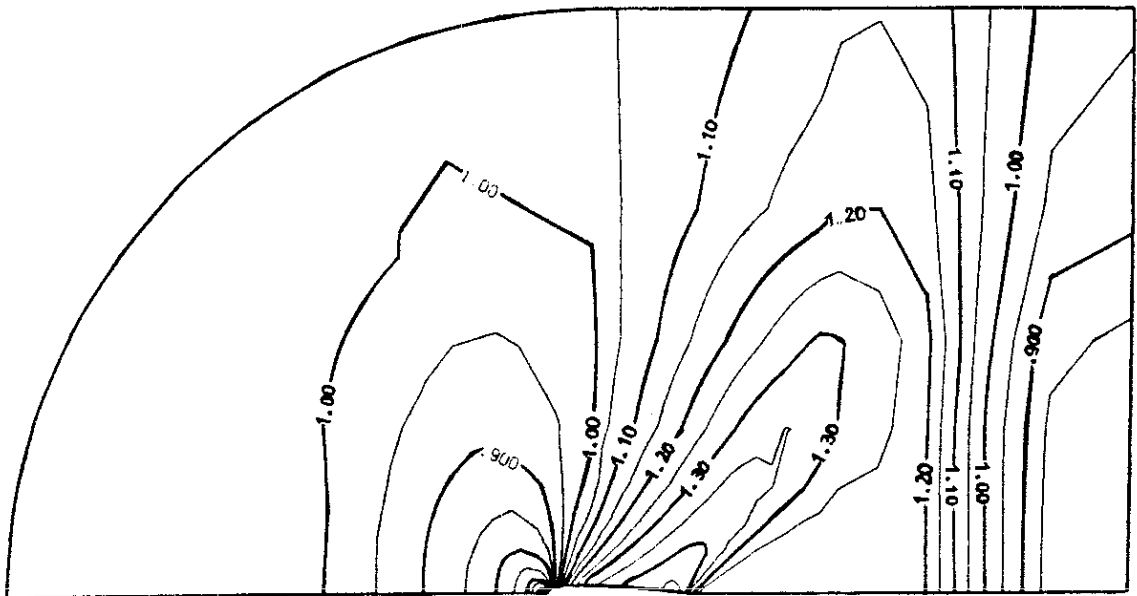


Figure 2.20 Courbes d'isomach. NACA 0012,  $M_\infty = 1.05$ ,  $\alpha = 0^\circ$ .

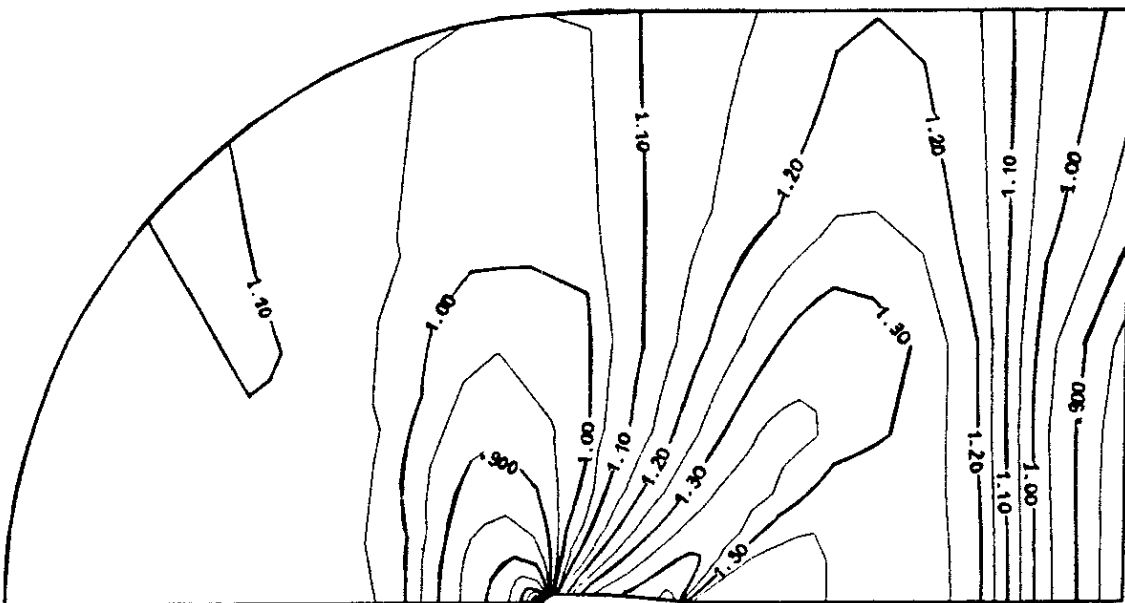


Figure 2.21 Courbes d'isomach. NACA 0012,  $M_\infty = 1.1$ ,  $\alpha = 0^\circ$ .

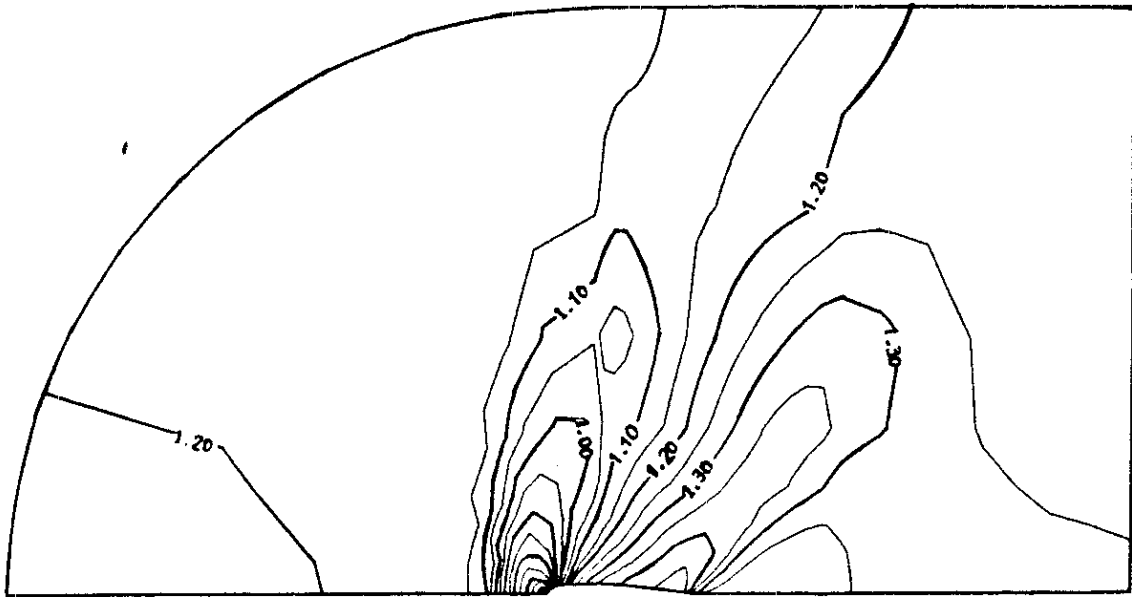


Figure 2.22 Courbes d'isomach, NACA 0012,  $M_\infty = 1.2$ ,  $\alpha = 0^\circ$ .

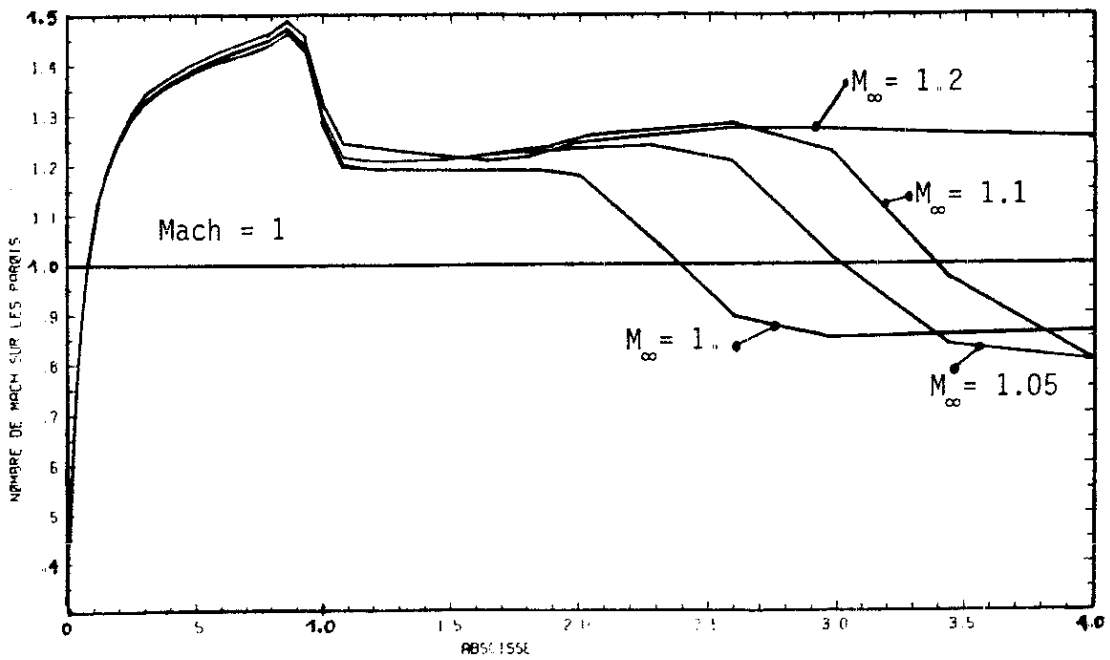


Figure 2.23 Courbes d'isomach sur le profil et au delà, aile NACA 0012 non portante.

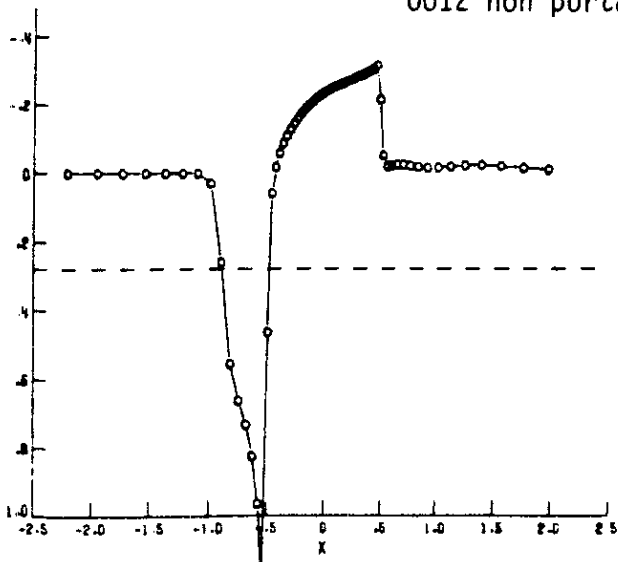


Figure 2.24 Résultats de OHER-HAFEZ-WHITLOW [25].



### III - ETUDE DU CANAL DU GAMM

Nous présentons trois cas tests représentatifs de régimes d'écoulements transsoniques et supersoniques dans un canal. Ils nous ont permis de valider chacune des conditions aux limites présentées au paragraphe I.4. Nous comparons nos résultats avec ceux obtenus au Chapitre 4. Tous nos calculs ont été menés sur le maillage G21 du canal du GAMM (35×11 points, 21 points sur le profil, voir Figure 3.1 et Chapitre 4, § III.2) avec l'algorithme de quasi-Newton précisé aux relations (2.1)-(2.3).

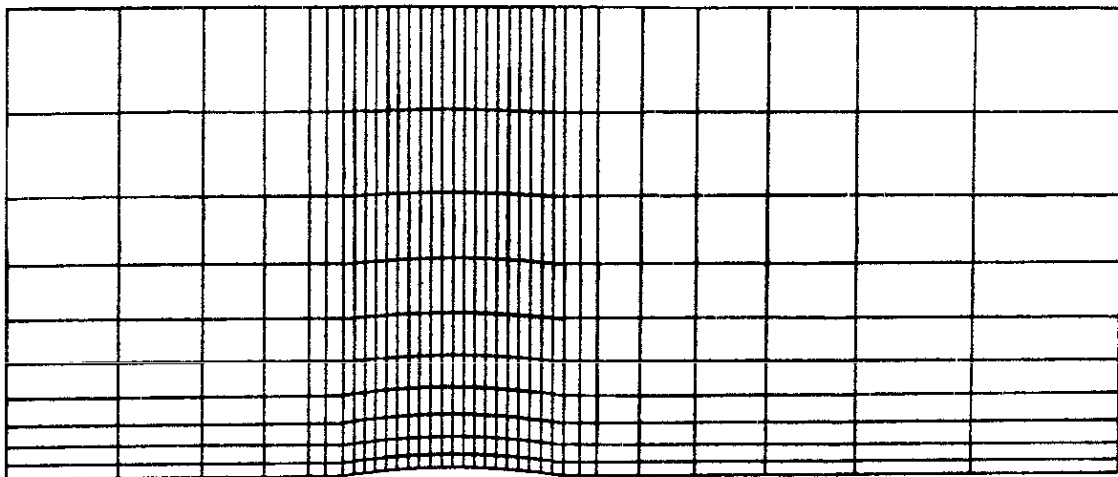


Figure 3.1 Maillage G21 du canal du GAMM.

#### 1 - ÉCOULEMENT SUPERSONIQUE, $M_\infty = 1.5$

Ce cas test est relativement simple, puisqu'on est loin du blocage du canal (cf. Chapitres 1 et 4). Toutefois ce type d'écoulement totalement supersonique est mal adapté à la plupart des algorithmes de résolution de l'équation du potentiel transsonique.

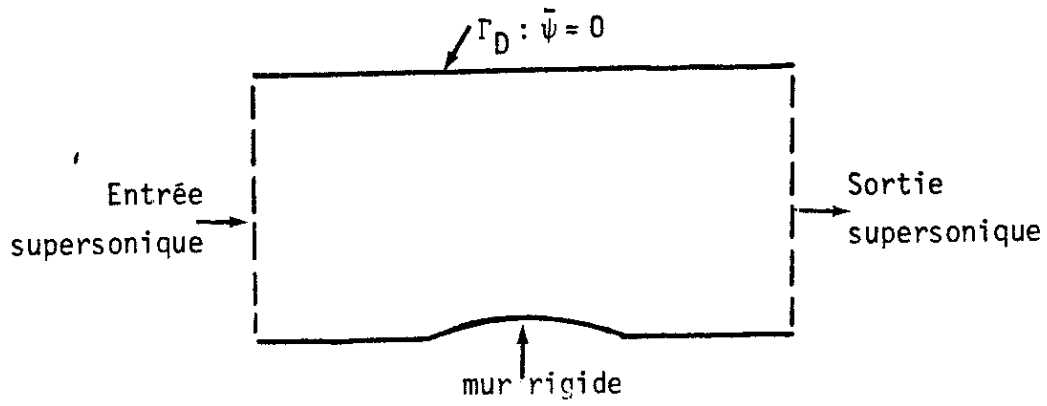


Figure 3.2 Conditions aux limites pour le Gamm channel lorsque  $M_\infty = 1.50$ .

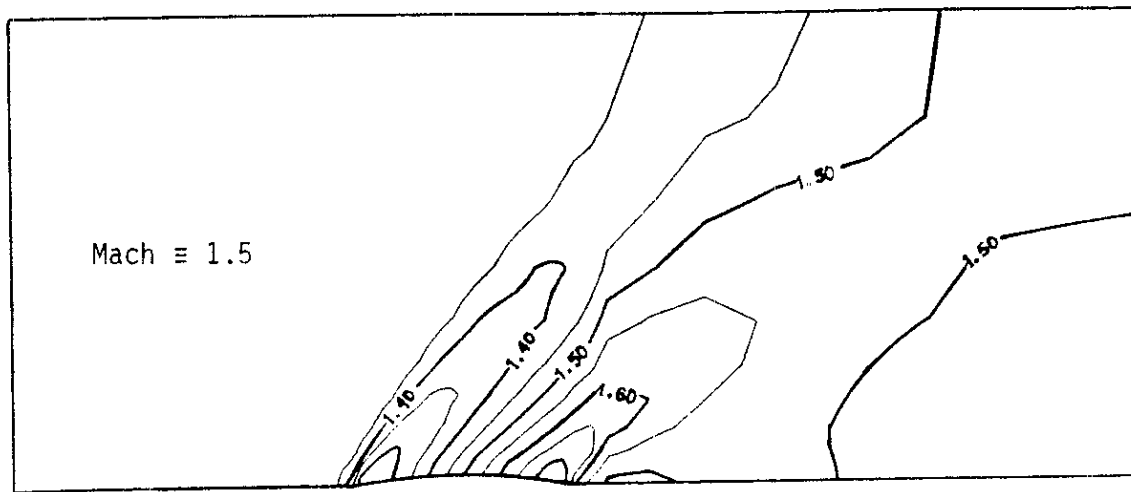


Figure 3.3 Isovaleurs du nombre de Mach. Canal du Gamm,  $M_\infty = 1.5$ .

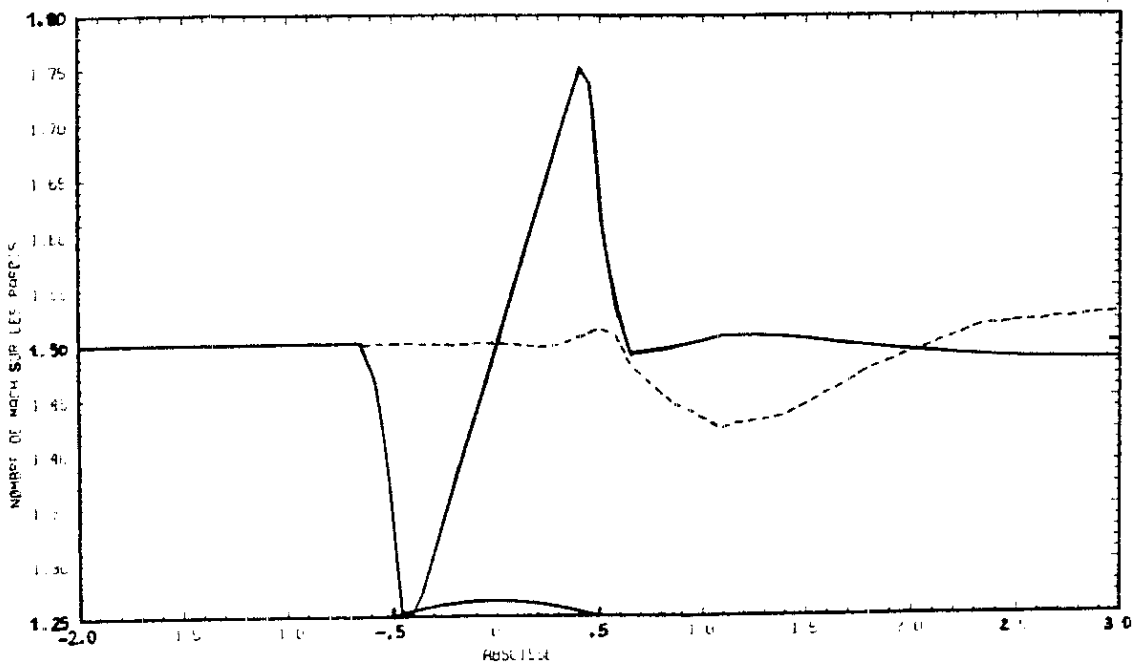


Figure 3.4 Nombre de Mach sur la paroi inférieure (trait fort) et supérieure (pointillés). Canal du Gamm,  $M_\infty = 1.5$ .

Les conditions aux limites sont rappelées sur la Figure 3.2 : condition de Dirichlet homogène sur  $\Gamma_D$  et conditions couplées sur le reste de la frontière ( $\Gamma_R$ ) : entrée supersonique (I.4.b), mur rigide (I.4.f) et sortie supersonique (I.4.d). L'écoulement initial choisi est l'écoulement uniforme associé à  $M_\infty = 1.5$ . La convergence est très rapide (25 itérations non-linéaires). Les résultats obtenus sont proposés aux Figures 3.3 et 3.4. La variation du nombre de Mach sur la paroi inférieure est légèrement plus faible que celle proposée par STOUFFLET dans [2], mais avec un maillage plus fin, et un code de résolution des équations d'Euler complètes.

## 2 - TRANSITION REGULIERE SUB-SUPERSONIQUE

C'est le régime intéressant pour les motoristes (la tuyère fournit alors le maximum de poussée, voir par exemple SEDOV [29]). Les conditions aux limites sont presque les mêmes que pour le cas précédent (Figure 3.2) ; l'entrée est simplement subsonique au lieu d'être supersonique. Les conditions initiales ont été adaptées au résultat à obtenir : nous avons choisi un écoulement uniforme dont le nombre de Mach croît linéairement de 0.85 (à l'entrée) à 1.16 (en sortie ; voir par exemple le paragraphe III.1.a du Chapitre 4), ceci afin de réduire le nombre d'itérations dans la méthode de Newton et surtout de s'assurer les meilleures chances de convergence ! Celle-ci a été obtenue en 45 itérations. Les figures 3.5 et 3.6 présentent le champ de nombre de Mach et sa variation sur les parois du canal. Le débit traversant le canal est maintenant un *résultat* du calcul (contrairement à la méthode utilisée au Chapitre 4) et nous avons obtenu :

$$(3.1) \quad D_{\text{sub-super}} = 2.02714 \quad .$$

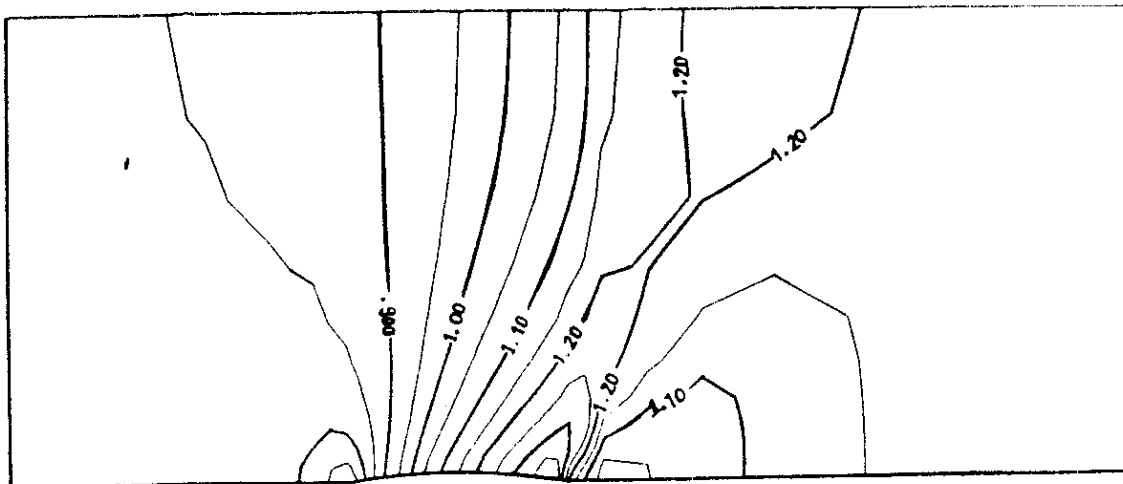


Figure 3.5 Transition sub-supersonique, canal du GAMM.

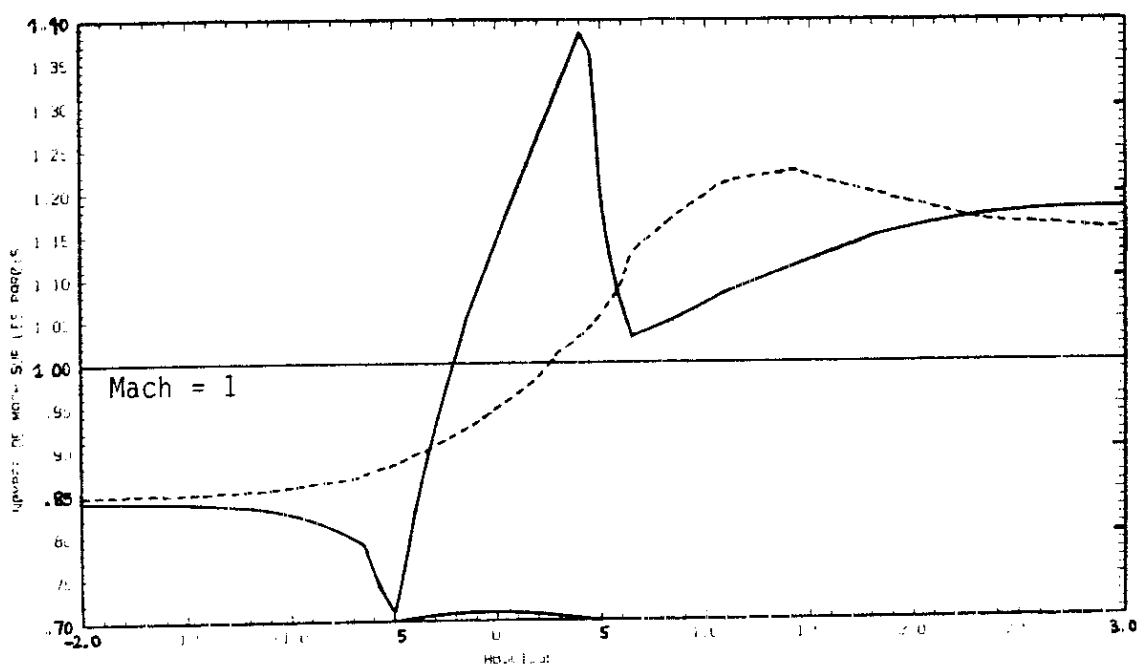


Figure 3.6 Nombre de Mach sur les parois inférieure (trait fort) et supérieure (pointillés) du canal du GAMM.

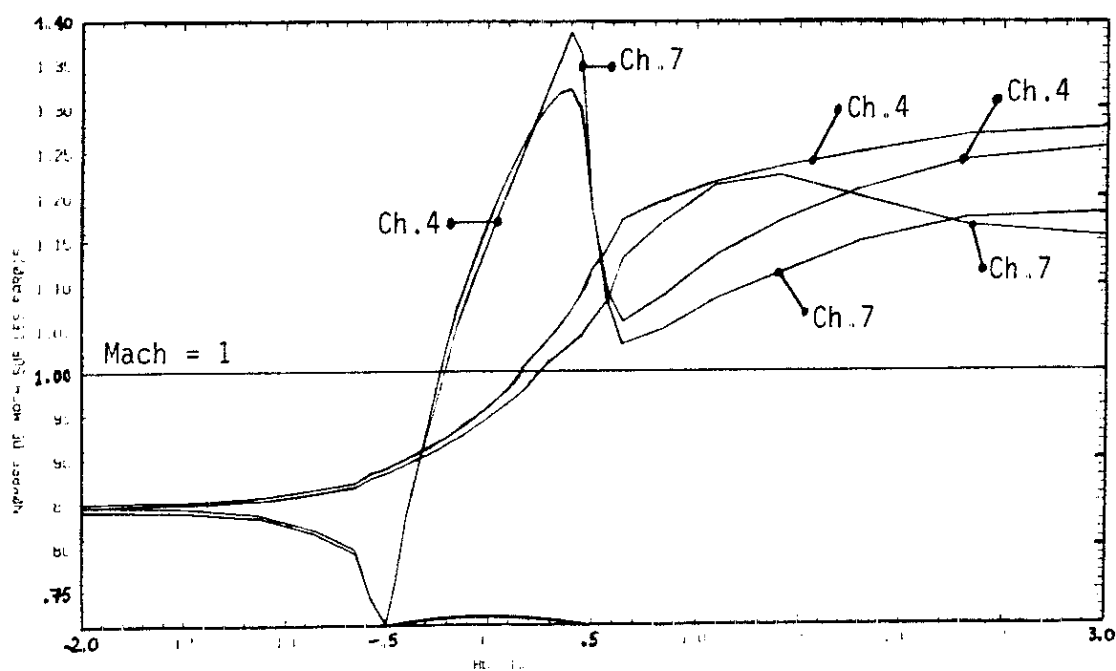


Figure 3.7 Comparaison avec les résultats du Chapitre 4 ( $D = 2.0295$ ).

Au Chapitre 4, des écoulements à sortie supersonique ont aussi été observés (cf. Figure 3.7 de ce chapitre). Ils correspondent pour le maillage G21 à des débits supérieurs ou égaux à 2.0295. Sur la Figure 3.7, nous comparons les courbes de variation du nombre de Mach de la Figure 3.6 à celles obtenues au Chapitre 4 pour un débit  $D$  imposé à 2.0295. La différence la plus importante est la valeur du nombre de Mach en sortie du canal : avec la méthode de décentrage de la densité, nous obtenions environ 1.37, alors que notre nouveau calcul donne 1.17, valeur très proche de la prédiction quasi-monodimensionnelle. Nous pensons que la présente méthode, fondée sur un décentrement de l'impulsion (1.24) (et non de la densité) permet une plus grande précision sur le calcul du champ de vitesse, donc de toutes les autres grandeurs physiques.

### 3 - CANAL TRANSSONIQUE

Nous envisageons a priori toute une famille d'écoulements, paramétrée par la valeur de la contre-pression  $\Pi$  (exprimée comme rapport de la pression statique à la pression génératrice d'entrée). Les conditions aux limites physiques considérées au Chapitre 4 (relation (3.11)) sont maintenant directement transcrites dans le programme de calcul (Figure 3.8) : angle nul à l'entrée subsonique (cf. I.4.e) et pression imposée en sortie subsonique (I.4.c). Nous avons toujours choisi une condition initiale d'écoulement uniforme, associée à un nombre de Mach de 0.85.

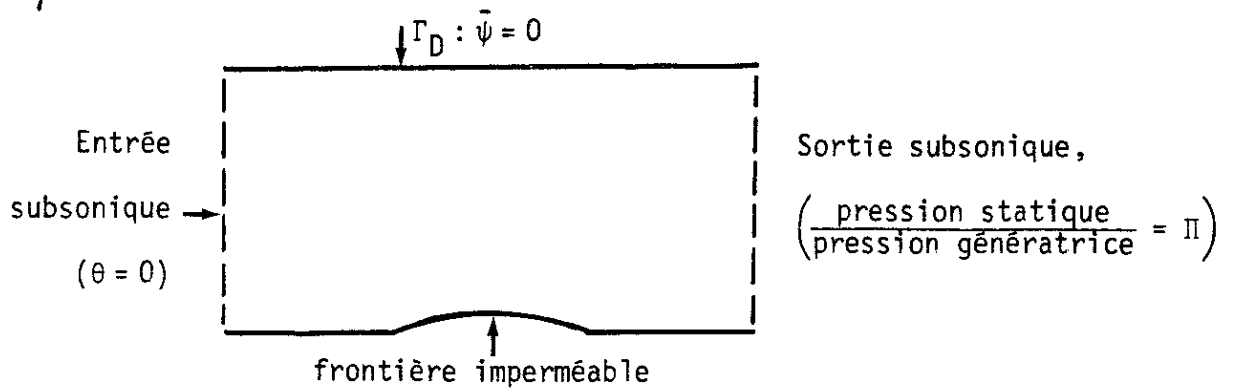


Figure 3.8 Conditions aux limites pour l'étude du GAMM channel en régime transsonique.

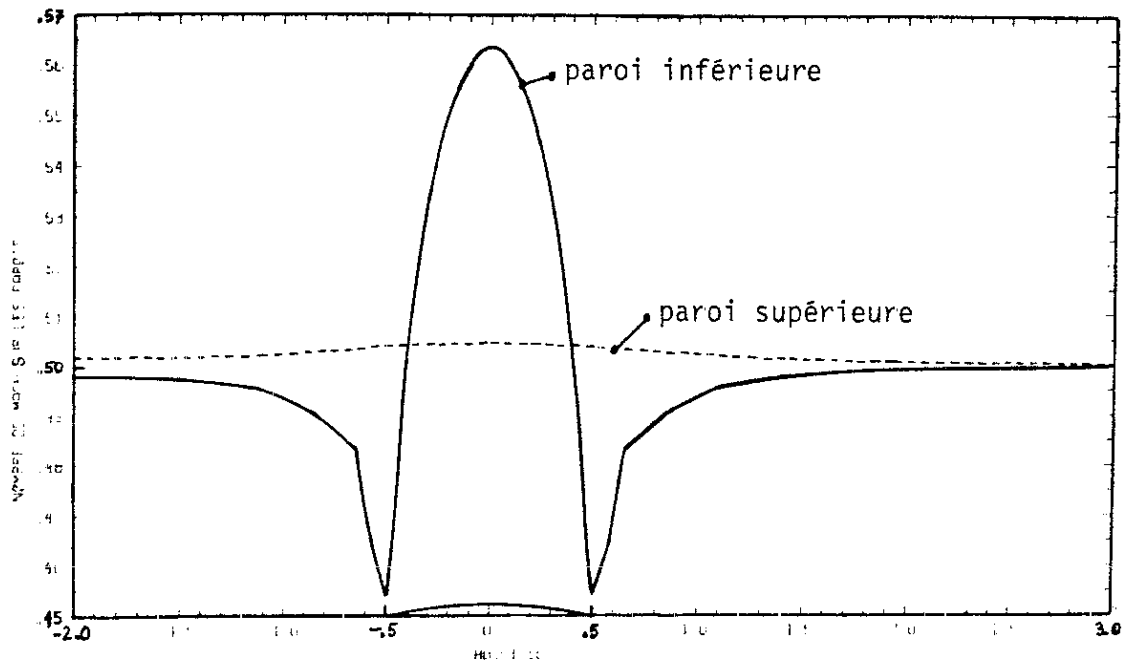


Figure 3.9 Nombre de Mach sur les parois,  $\Pi = 0.843$  ( $M_\infty = 0.50$ ).

Lorsque  $\Pi = 1.$ , la pression de sortie est génératrice, donc aucune énergie cinétique n'est disponible et le fluide est au repos. Lorsque  $\Pi$  diminue, un écoulement apparaît dans le canal, d'abord subsonique (pour  $\Pi = 0.843$  par exemple, un écoulement de nombre de Mach d'entrée et de sortie égal à 0.5 a été observé, cf. Figure 3.9),

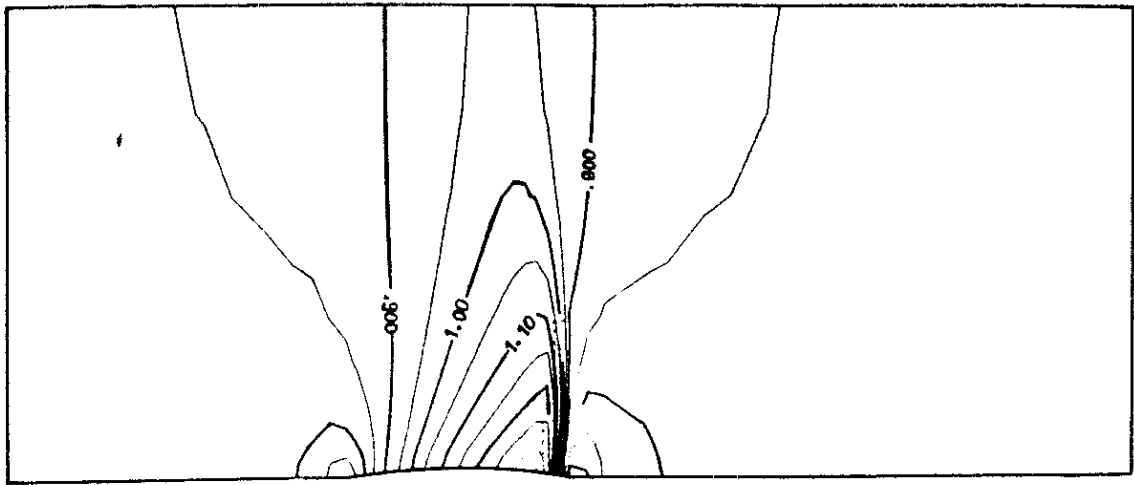


Figure 3.10 Isovaleurs du nombre de Mach. Sortie subsonique,  $\Pi = 0.628$ .

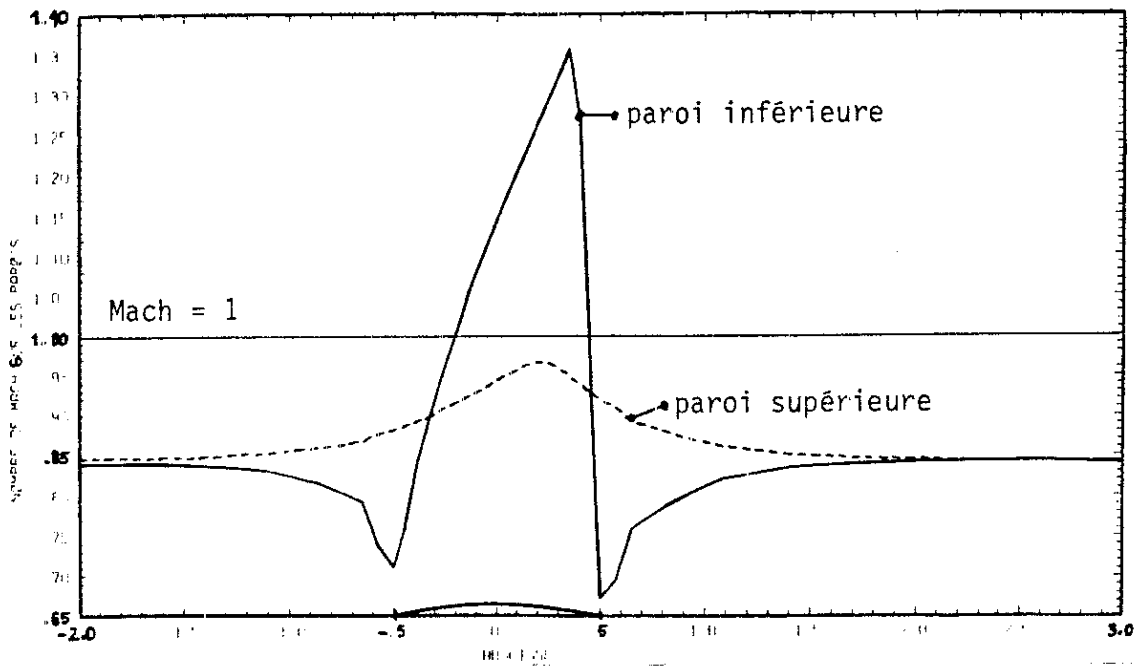


Figure 3.11 Nombre de Mach sur les parois. Canal du GAMM,  $\Pi = 0.628$ .

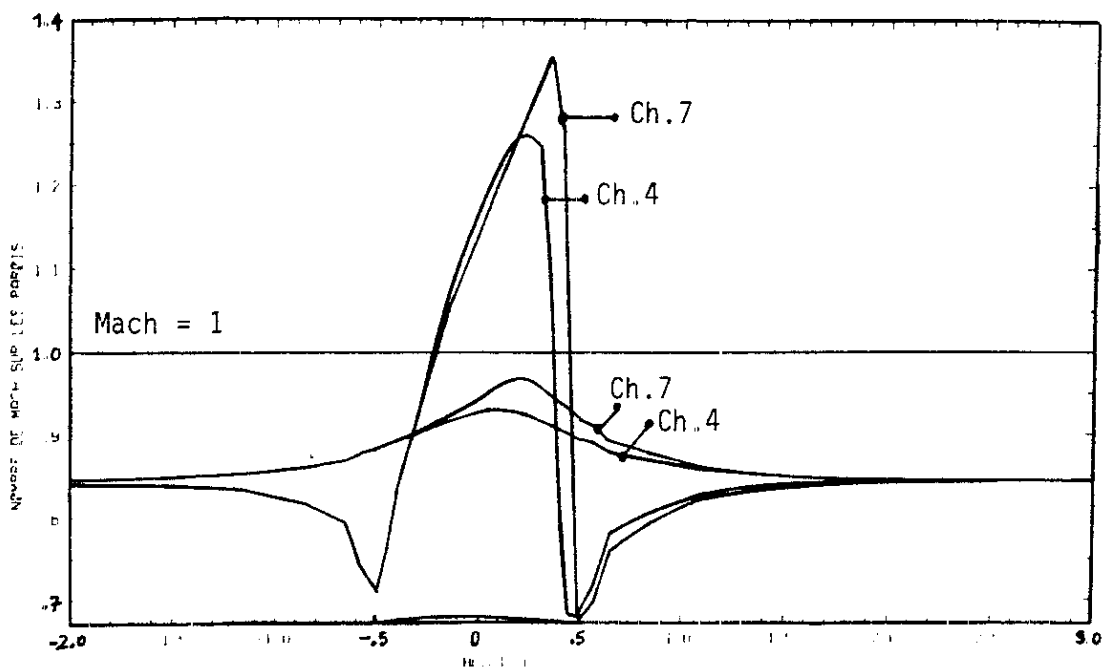


Figure 3.12 Comparaison avec les résultats du Chapitre 4 ( $D = 2.027$ ).

puis transsonique ; nous n'avons pas cherché à identifier la valeur de  $\Pi$  pour laquelle le bulbe supersonique apparaît. Pour  $\Pi = 0.628$  (ce qui correspond à  $M_\infty = 0.843$ ) la zone supersonique est très développée, mais la ligne sonique et le choc ne traversent pas le canal (Figures 3.10 et 3.11). Le débit calculé lors de ce nouveau test vaut également

$$(3.2) \quad D_{\Pi = 0.628} = 2.02714 \quad .$$

Nous pouvons comparer ce dernier écoulement au résultat calculé au Chapitre 4 avec un débit imposé à  $D = 2.027$ . Dans ce dernier cas, la pression de sortie, calculée, vaut  $\Pi = 0.6278 \pm 0.001$ , valeur très proche de celle imposée a priori avec notre nouvelle méthode. La comparaison des courbes de variation du nombre de Mach (Figure 3.12) confirme ces données numériques, ainsi que la différence de comportement entre les deux méthodes dans la zone supersonique, comme nous l'avions déjà vu pour l'aile NACA 0012 : la zone supersonique prédite par le Chapitre 4 est plus réduite.

Par contre, il nous a été impossible de diminuer de façon significative la pression  $\Pi$  de sortie au delà de  $\Pi = 0.628$ . Lors d'un essai à  $\Pi = 0.626$ , 450 itérations non-linéaires ont été effectuées, sans pour autant obtenir de convergence, alors que le cas  $\Pi = 0.628$  avait convergé en 190 itérations. Aucun écoulement où le choc barre complètement le canal (cf. Figure 3.6 du Chapitre 4) n'a donc été mené à bien ; en particulier, le test proposé au GAMM workshop [28],  $\Pi = 0.623512$ , n'a pas été traité.



#### 4 - DISCUSSION

Le problème posé lors du GAMM workshop de 1979 était, rappelons-le, le suivant [28]: "Calculer l'écoulement interne dans un canal à faces parallèles présentant une bosse circulaire de 4.2 % d'épaisseur sur le mur inférieur. Le rapport de la pression statique de sortie à la pression d'entrée totale est de 0.623512 (ce qui correspond à un écoulement isentropique à  $M=0.85$ ), et la distance entre les murs est égale à 2.073 fois la corde de la bosse circulaire". Lors du workshop, les auteurs ayant traité ce problème grâce à l'équation "Transonic Full Potential" ont été peu nombreux, et leurs résultats très peu concordants. Rappelons ici les contributions de JAMESON et al, DECONINCK-HIRSCH et VEUILLOT-VIVIAND. JAMESON ([28], page 19) considère que le problème est *mal posé* et présente une courbe de  $C_p$  sur les faces du canal (Figure 3.10) qui correspond à un nombre de Mach amont de 0.8435 (soit une contre-pression  $\Pi=0.627723$ ). Les résultats numériques de JAMESON et al correspondent donc à une valeur de  $\Pi$  très voisine de la nôtre (.628), et sont effectivement très semblables aux nôtres comme on le constate en comparant les Figures 3.13 et 3.14 (où les courbes de la Figure 3.11 ont été retranscrites en termes de coefficient de pression). Ce même calcul ne semble pas avoir posé de problème à DECONINCK-HIRSCH. Mais leur résultat (Figure 3.15) comporte une poche supersonique moins étendue que la nôtre (Figure 3.10), et les valeurs ponctuelles du nombre de Mach en entrée du canal sont plutôt de l'ordre de 0.83-0.84 que 0.85. Notons que JAMESON et DECONINCK-HIRSCH utilisent un décentrage de l'impulsion pour l'un et de la densité pour l'autre, qu'on peut comparer à notre traitement du présent Chapitre et du Chapitre 4 respectivement.

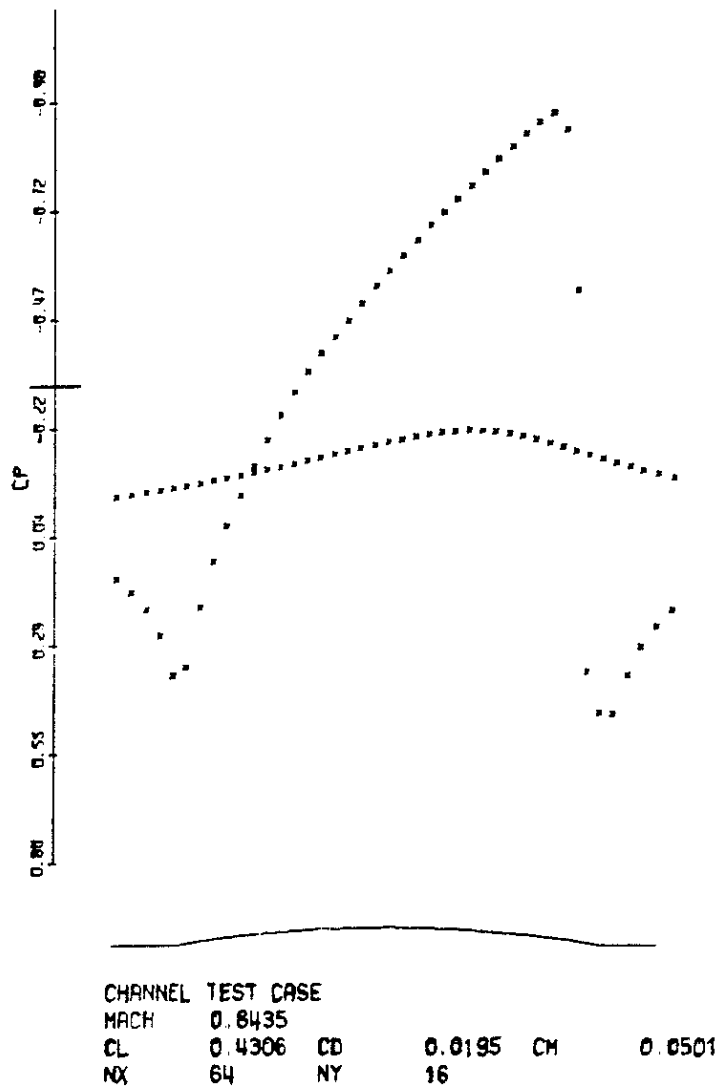


Figure 3.13 Coefficient de pression sur la paroi inférieure du canal du GAMM. Résultat de JAMESON [28].

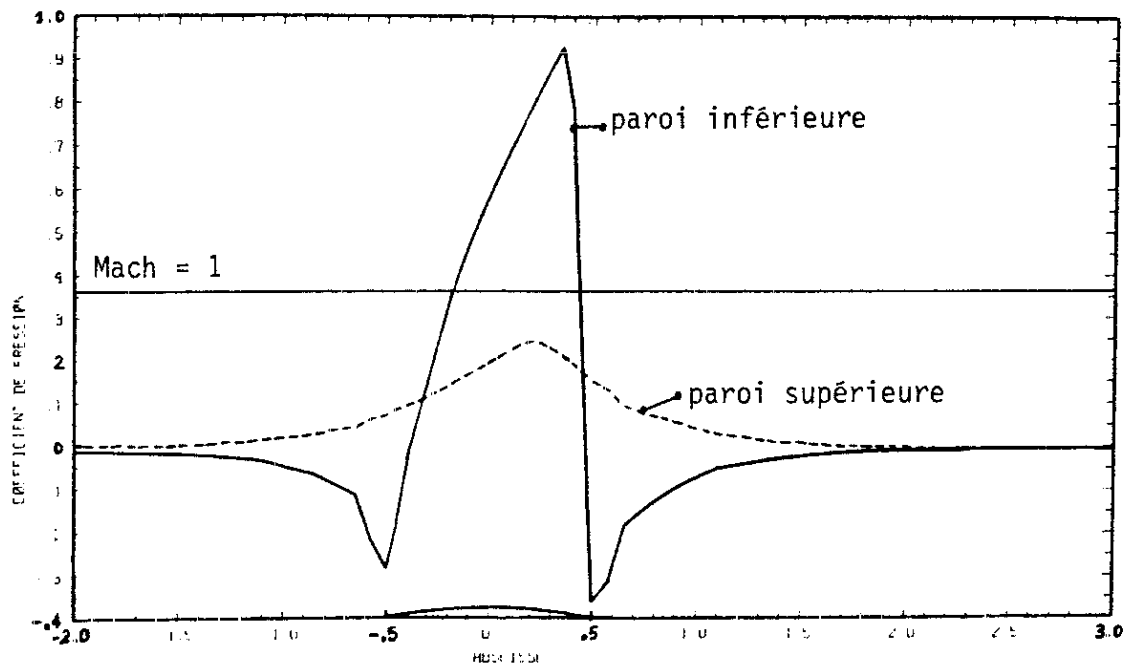
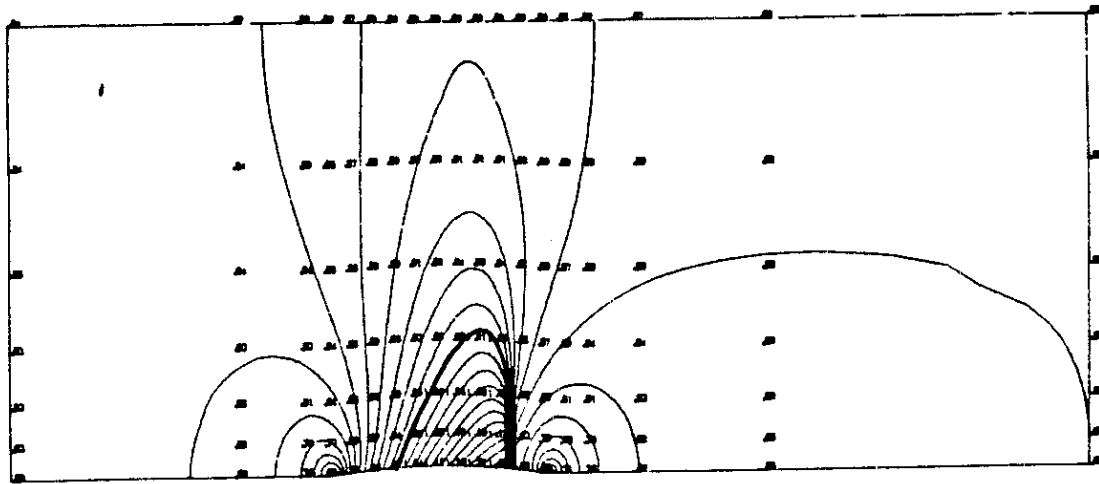


Figure 3.14 Coefficient de pression sur les parois du canal du GAMM. Sortie subsonique,  $\Pi = 0.628$  ( $M_\infty = 0.843$ ).



### CHANNEL FLOW PR. B

INLET ANGLE = 0.00 DEG    OUTLET ANGLE = 0.00 DEG    BILIN.ELEM. MSLOR METH.  
 INLET MACH NUMBER = .8500    OUTLET MACH NUMBER = .8500

Figure 3.15 Champ d'isomach pour le GAMM channel.  
 Résultats de DECONINCK-HIRSCH [28].

Pour le même cas test, VEUILLOT-VIVIAND utilisent une formulation pseudo-instationnaire du modèle potentiel (nous y reviendrons) et obtiennent un écoulement où le choc traverse tout le canal (cf. Figure 3.17 du Chapitre 4).

Au Chapitre 4, nous avons réussi à calculer ce type d'écoulement bloqué, mais sur le maillage le plus grossier seulement, alors qu'avec la méthode développée dans ce Chapitre, et bien qu'utilisant le même maillage, rien d'analogue n'a été observé. Comme notre traitement actuel de la non-linéarité est performant (méthode de Newton), nous pensons que le système discret associé aux conditions aux limites prévues par le workshop ( $\Pi = 0.623512$ ) n'a effectivement pas de solution. Par contre nous ne pouvons rien conclure concernant le problème continu, puisque la discrétisation de VEUILLOT-VIVIAND et la méthode de décentrage en densité penchent pour l'existence d'un tel écoulement. Si le problème continu est effectivement bien posé, nous devons remettre en cause le schéma développé dans ce chapitre, afin de discrétiser de façon encore plus précise le problème transsonique potentiel.

## IV - VERS UNE NOUVELLE METHODE

La méthode numérique exposée dans la partie I de ce chapitre est fondée sur une formulation mixte du problème transsonique (ce qui permet d'affaiblir l'équation sur le tourbillon) et surtout une analyse de la non-linéarité en termes d'une équation hyperbolique non-linéaire *scalaire*. Cette dernière approche est naturelle, et tous les schémas de résolution de l'équation des petites perturbations (TSD) comme des grandes perturbations (TFP) transsoniques proposent un décentrage simultané de tous les champs, éventuellement le long d'une ligne de courant pour la TFP (cf. MURMAN [21], JAMESON [15], HAFEZ-SOUTH-MURMAN [13], AMARA [1], OSHER-HAFEZ-WHITLOW [25] par exemple). Pourtant, une compréhension en profondeur de l'équation du potentiel transsonique, conduit de façon naturelle à de nouveaux schémas numériques. Dans le premier paragraphe, nous rappelons la contribution de VIVIAND-VEUILLOT [32], MORICE-VIVIAND [20] et OSHER-HAFEZ-WHITLOW [25] pour l'équation du potentiel dans le cas bidimensionnel. Cette analyse nous permet de proposer au second paragraphe une nouvelle formulation primale de l'équation du potentiel transsonique. Enfin, une modification du code de calcul existant est envisagée.

### 1 - SYSTEME INSTATIONNAIRE ASSOCIE A L'EQUATION DU POTENTIEL TRANSSONIQUE

Dans leur mémoire [32], VIVIAND-VEUILLOT proposent d'utiliser les variables  $(\rho, \theta)$  de densité-angle pour décrire le champ de vitesse  $\vec{u}$  solution de l'équation transsonique. Le module  $V(\rho)$  du champ de

vitesse est imposé par le théorème de Bernoulli :

$$(4.1) \quad V(\rho) = \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_0^2} (1 - \rho^{\gamma-1})}$$

et sa direction  $\vec{s}(\theta)$  est associée à l'angle  $\theta$  :

$$(4.2) \quad \vec{u} = V(\rho) \vec{s}(\theta) \quad , \quad \vec{s}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad .$$

La conservation de la masse et la nullité du tourbillon sont obtenus comme états stationnaires du système hyperbolique

$$(4.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{u} = 0 \end{cases}$$

qu'on peut réécrire sous forme classique

$$(4.4) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} + \frac{\partial g(U)}{\partial y} = 0$$

avec

$$(4.5) \quad \begin{cases} t_U = (\rho, \theta) \\ t_f(U) = (\rho V(\rho) \cos \theta, V(\rho) \sin \theta) \\ t_g(U) = (\rho V(\rho) \sin \theta, -V(\rho) \cos \theta) \end{cases}$$

Le système (4.4)(4.5) est un système hyperbolique non-linéaire, les valeurs propres associées à la direction  $\varphi$  du plan  $(x,y)$  valent

$$(4.6) \quad \lambda_{\pm} = V(\rho) \cos(\theta-\varphi) - \frac{c(\rho)}{2M(\rho)} \cos(\theta-\varphi) \pm c(\rho) \sqrt{\sin^2(\theta-\varphi) + \frac{\cos^2(\theta-\varphi)}{4M^2(\rho)}}$$

et il possède une entropie (MORICE-VIVIAND [20]), à savoir

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta(\rho, \theta) = \psi(\rho) + \frac{1}{2} \theta^2 \\ \text{où } \psi''(\rho) = \frac{1}{M_0^2} \frac{\rho^{\gamma-3}}{V(\rho)^2} = \frac{1}{\rho^2 M^2} \end{array} \right. .$$

de flux associé

$$(4.8) \quad \vec{J}(\rho, \theta) = \left( \frac{1}{\rho} + \psi'(\rho) \right) \rho \vec{u} - \theta V(\rho) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} .$$

Une idée naturelle consiste à utiliser une formulation volumes-finis et, selon la démarche de GODUNOV [8], la difficulté est reportée dans la résolution du problème de Riemann monodimensionnel associé à (4.4) :

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho V(\rho) \cos \theta \\ V(\rho) \sin \theta \end{pmatrix} = 0 \\ (\rho, \theta)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_g, \theta_g) & x < 0 \\ (\rho_d, \theta_d) & x > 0 \end{cases} . \end{array} \right.$$

Or le problème (4.9) est difficile à résoudre : les champs ne sont ni linéairement dégénérés, ni vraiment non-linéaires, et les ondes de détente n'ont pas non plus d'expression simple. Nous n'avons donc pas poursuivi plus avant cette démarche.

L'utilisation d'un schéma centré aux différences finies est possible aussi et VIVIAND-VEUILLOT [32] ont utilisé le schéma de MAC CORMACK [17] pour calculer l'évolution numérique du système (4.4) dans le canal du GAMM. Une autre idée (OSHER [26]) est d'utiliser les variables entropiques associées à  $\eta(\rho, \theta)$  et d'adapter les méthodes de streamline diffusion et de shock capturing operator (HUGHES-MALLET [14]) au système hyperbolique (4.4).

## 2 - UNE FORMULATION PRIMALE DE L'EQUATION DU POTENTIEL TRANSSONIQUE

Nous nous proposons de décrire une nouvelle formulation primale du problème transsonique potentiel, c'est-à-dire fondée sur une représentation du champ de vitesse du type

$$(4.10) \quad \vec{u} = \vec{\nabla} \phi$$

(plus une fonction spéciale si le domaine n'est pas simplement connexe, cf. Chapitre 2). Nous nous contentons de décrire la méthode dans un cas très simple, avec un choix de fonctions d'interpolation de plus bas degré.

Le domaine de calcul  $\Omega$  est supposé par exemple maillé par des triangles et on suppose le potentiel donné sur une partie  $\Gamma_0$  de la frontière  $\Gamma$ . Nous notons  $V_h$  le sous-espace des fonctions affines dans chaque élément, continues sur  $\bar{\Omega}$ , nulles sur  $\Gamma_0$ , et  $\bar{\phi}$  désigne un relèvement de la condition de Dirichlet sur  $\Gamma_0$ . On a donc :

$$(4.11) \quad \phi = \bar{\phi} + \varphi \quad , \quad \varphi \in V_h$$

et le champ de vitesse qui lui est associé selon (4.10) est constant dans chaque élément.

A l'interface  $a$  entre deux éléments, la résolution du problème de Riemann (4.9) permet, entre autres, le calcul du flux de masse  $Q_a$  sur cette interface. Comme nous avons vu que ce problème est hors de portée (sur le plan économique de toute façon), nous le remplaçons par un autre problème de Riemann, obtenu en changeant l'équation. Comme lors de l'analyse des conditions aux limites à l'infini,

nous utilisons les équations de Saint Venant (1.29)(1.30), et l'analyse menée en I.4.b est inchangée. Nous pouvons, grâce à notre interprétation (1.35) du schéma d'Osher, calculer sur chaque interface  $a$  intérieure au domaine un flux de masse  $Q_a(\{\vec{u}\})$  qui est une fonction dérivable du champ de vitesse (4.10). L'étude des conditions aux limites s'étend trivialement, et  $Q_a(\{\vec{u}\})$  peut donc être défini pour chaque arête du maillage, tant intérieure que frontalière.

Grâce à l'élément fini conforme dans  $H(\text{div})$  de RAVIART-THOMAS [27],  $Q_a(\{\vec{u}\})$  définit un *champ de vecteurs*  $\vec{q}(\vec{u})$  dans le discrétisé de l'espace  $H(\text{div})$  de RAVIART-THOMAS. Il ne reste plus qu'à exprimer de façon faible l'équation de conservation de la masse

$$(4.12) \quad \text{div } \vec{q} = 0$$

pour fermer le problème :

$$(4.13) \quad \begin{cases} \phi = \bar{\phi} + \varphi & , \quad \varphi \in V_h \\ \int_{\Omega} q(\vec{\nabla}\bar{\phi} + \vec{\nabla}\varphi) \cdot \vec{\nabla}\psi \, dx = \int_{\partial\Omega} \psi \vec{q}(\vec{\nabla}\bar{\phi} + \vec{\nabla}\varphi) \cdot \vec{n} \, d\gamma & \forall \psi \in V_h \end{cases}$$

Une méthode de Newton ou de quasi-Newton est bien adaptée à la résolution de (4.13) puisque  $\vec{q}(\cdot)$  est dérivable. Une factorisée approchée de la matrice du problème linéaire dérivé de (4.13) a donc toute chance d'être un excellent préconditionneur du problème transsonique potentiel. Notons que cette matrice couple un sommet  $P$  du maillage avec l'ensemble des sommets qui appartiennent aux éléments ayant une interface commune avec un élément contenant  $P$ .

De plus, la formulation (4.13) s'étend au cas tridimensionnel sans aucun changement de la fonction  $Q_a(\{\vec{u}\})$  ; il convient seulement de remplacer l'interpolé bidimensionnel par l'élément conforme  $H(\text{div})$  de NEDELEC [23].



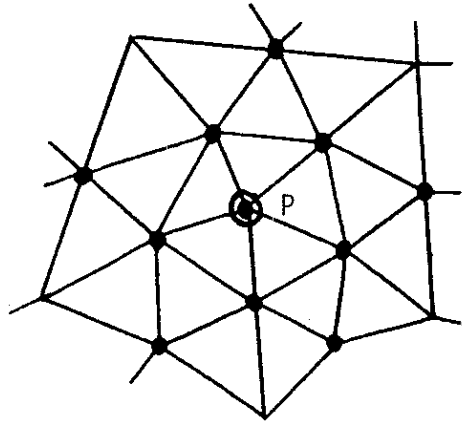


Figure 4.1 Ensemble des sommets couplés au noeud P, par le problème (4.13).

### 3 - UNE VARIANTE DE LA METHODE DE CE CHAPITRE

La méthode proposée au paragraphe précédent exige la réécriture complète d'un programme de calcul. Nous proposons ici une modification simple de la méthode présentée dans la première partie. La principale différence entre les deux méthodes est due à une analyse de l'interaction non-linéaire entre deux éléments voisins par l'intermédiaire d'un problème de Riemann, scalaire dans un cas et lié à un *système* de lois de conservation dans l'autre. En conservant une représentation du flux de masse dans chaque élément fini  $K$  par une formule de type (1.24), ie

$$(4.14) \quad \vec{q}_K(\vec{u}_{KA}, \vec{u}_K) = Q_a \frac{\vec{u}_K}{|\vec{u}_K|}$$

nous choisissons  $Q_a$  comme au paragraphe 2 (flux de masse du schéma d'Osher pour les équations de Saint Venant) au lieu de considérer une

équation scalaire (1.20). De cette façon, aucune hypothèse n'est plus nécessaire pour étudier l'interaction entre un élément  $K$  et son élément amont  $KA$ , et l'on suppose seulement l'alignement des vecteurs  $\vec{u}_K$  et  $\vec{q}_K$ . Cette amélioration du code existant nous permettra d'avoir rapidement une idée concrète des possibilités de la formulation primale exposée au second paragraphe.

## V - CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle formulation mixte vitesse-fonction courant de l'équation du potentiel transsonique. Le décentrage par rapport à la densité utilisé par AMARA [1] et étudié également au Chapitre 4 est remplacé par un décentrage de l'impulsion à l'aide du schéma d'Engquist-Osher. Les conditions aux limites physiquement intéressantes ont été prises en compte en adaptant aux équations de Saint Venant notre étude détaillée du schéma d'Osher pour les équations d'Euler complètes. Le problème non-linéaire obtenu qui comporte un grand nombre d'inconnues, a été résolu par des itérations de type quasi-Newton. Les tests numériques sur le profil NACA 0012 non portant nous ont permis de calculer numériquement toute une famille d'écoulements, de nombre de Mach amont inférieur ou supérieur ou égal à 1. Les tests que nous avons effectués sur le canal du GAMM [28] ne nous ont pas permis d'obtenir une solution approchée du modèle transsonique potentiel qui présente une ligne sonique et un choc barrant tout le canal. Nous avons donc proposé dans une quatrième partie deux extensions possibles de notre schéma qui prennent mieux en compte le système hyperbolique non-linéaire sous-jacent.

Nous voulons ici attirer l'attention sur le fait que de telles solutions bloquées ne sont pas naturellement associées au modèle transsonique potentiel. En effet, la forme de l'entropie mathématique

$$(5.1) \quad \eta = \psi(\rho) + \frac{1}{2} \theta^2 \quad \text{où} \quad \psi''(\rho) = \frac{1}{\rho^2 M^2(\rho)}$$

impose à l'écoulement entropique de "dissiper de l'angle" puisqu'à travers un choc, aucune grandeur thermodynamique ne peut être dissipée ; l'entropie physique, dissipée par les équations d'Euler complètes est ici supposée constante, et les équations d'Euler barotropes isentropiques dissipent l'énergie totale et créent du tourbillon.

Avec les équations d'Euler complètes, un problème intérieur avec choc qui barre tout le divergent est en fait beaucoup plus facile à calculer numériquement. Nous avons développé une version bidimensionnelle du code explicite utilisé au Chapitre 6. Les variables conservatives  $U$  des équations d'Euler bidimensionnelles

$$(5.2) \quad {}^tU = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)$$

sont approchées par des fonctions constantes  $U_K^n$  dans chaque élément fini  $K$ . Le flux numérique normal  $F_j^n$  à l'interface  $j$  entre deux éléments ou à la frontière du domaine  $\Omega$  est calculé à l'aide du schéma d'Osher (cf. Chapitre 6). Le schéma numérique s'écrit donc :

$$(5.3) \quad \frac{\text{vol}(K)}{\Delta t} (U_K^{n+1} - U_K^n) + \sum_{j \in K} F_j^n = 0$$

et le pas de temps  $\Delta t$  est choisi grâce à une condition uniforme de Courant-Friedrichs-Lewy. Nous avons étudié le canal du GAMM et initialisé tous les calculs par l'écoulement uniforme de nombre de Mach 0.85. Nous avons d'abord effectué un test avec entrée subsonique et sortie supersonique, où la solution continue des équations d'Euler coïncide théoriquement avec le modèle potentiel (cf. Chapitre 1). La carte du nombre de Mach (Figure 5.1) et une comparaison avec les résultats obtenus dans la troisième partie (Figure 5.2) révèlent les différences

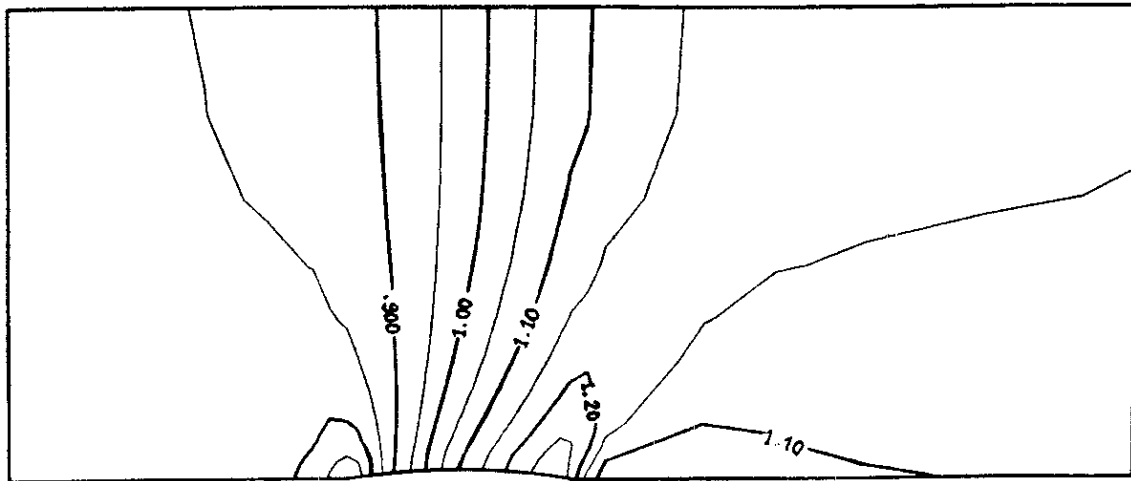


Figure 5.1 Isovaleurs du nombre de Mach. Canal du GAMM (G21) avec entrée subsonique et sortie supersonique. Equations d'Euler.

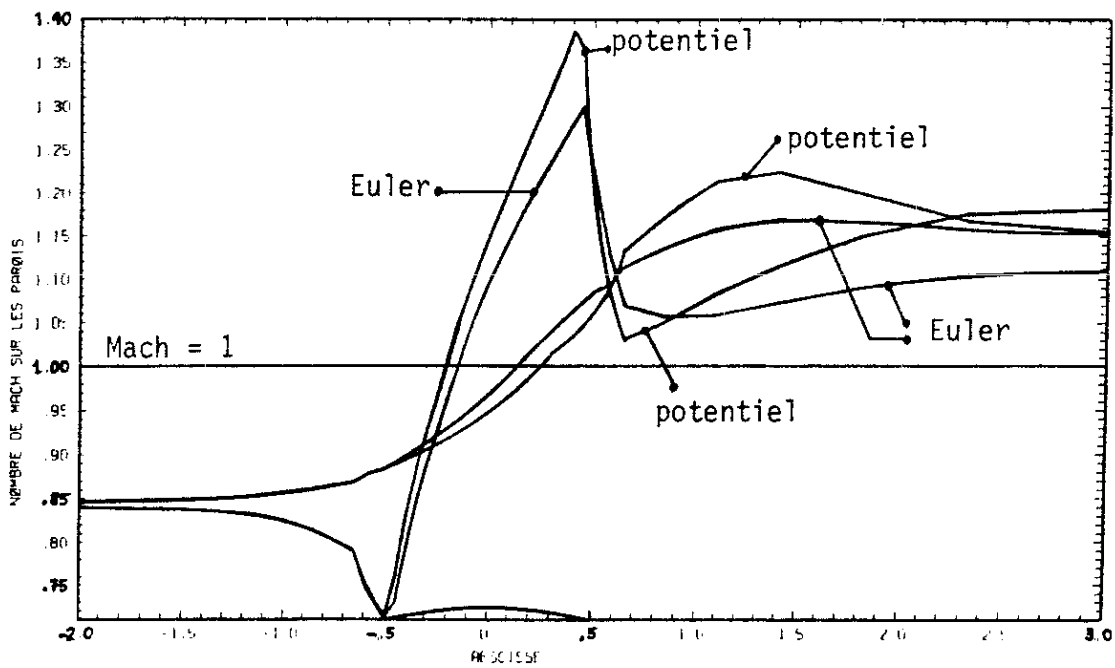


Figure 5.2 Nombre de Mach sur les parois pour le problème précédent. Comparaison du code potentiel de ce chapitre et du code Euler volumes finis.

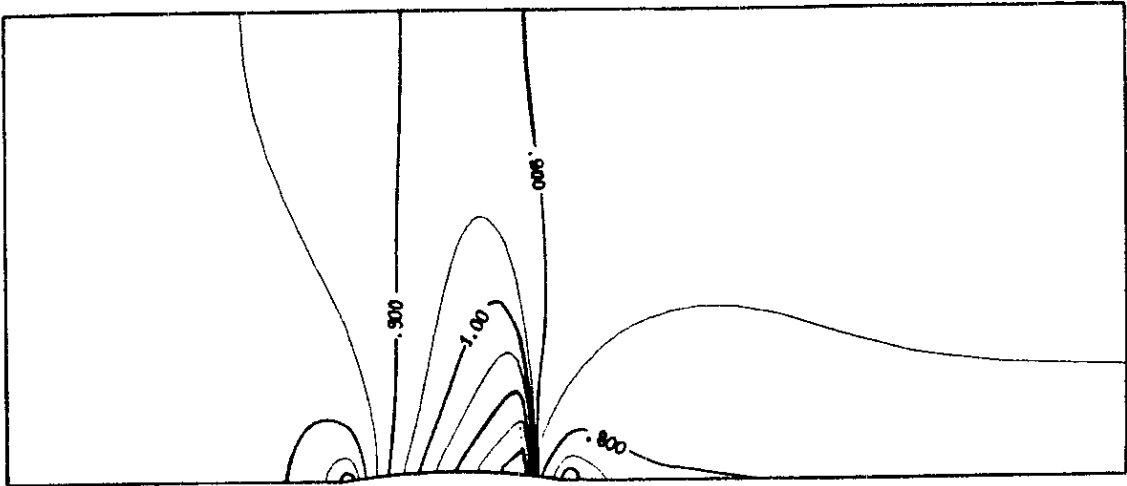


Figure 5.3 Isovaleurs du nombre de Mach. Canal du GAMM (G41)  
d'entrée subsonique et pression de sortie  $\Pi = 0.623512$ .  
Equations d'Euler.

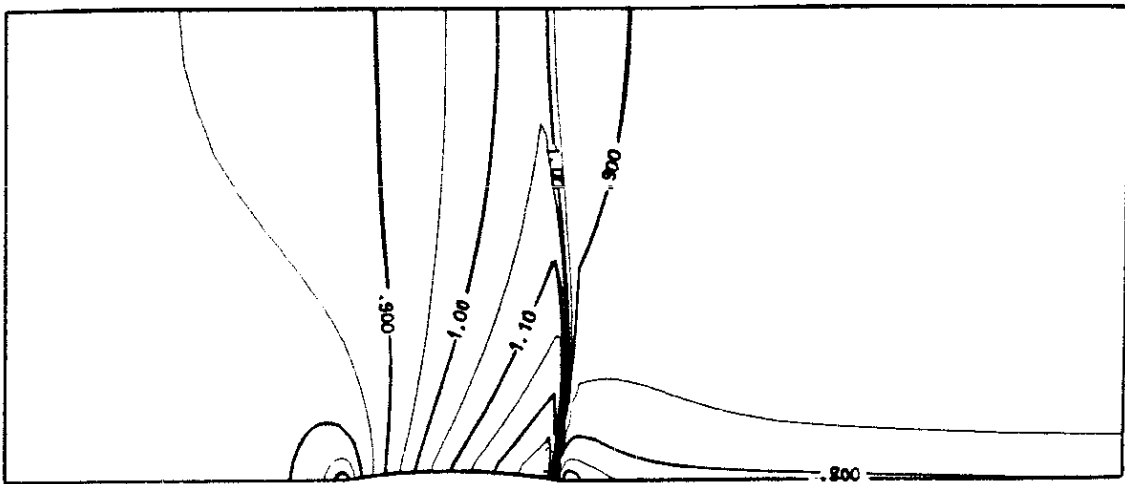


Figure 5.4 Isovaleurs du nombre de Mach. Canal du GAMM, pression  
de sortie  $\Pi = 0.61$ . Equations d'Euler.

purement numériques entre les méthodes ; signalons que ces deux calculs ont été effectués sur le même maillage grossier G21 (35×11 points). Le débit total calculé par le code Euler :

$$(5.4) \quad D_{\text{sub.super}} = 2.0266$$

reste toutefois très proche de la valeur (2.0271) obtenue en (3.1). Pour les deux tests qui suivent, nous avons imposé des conditions aux limites de type entrée et sortie subsoniques (avec pression imposée en sortie). Le premier test correspond à la valeur de la pression imposée au GAMM workshop :

$$(5.5) \quad \Pi = 0.623512 \quad .$$

Notre résultat (Figure 5.3) est très voisin de ceux publiés antérieurement (voir par exemple LERAT-SIDES et VEUILLOT-VIVIAND [28], STOUFFLET [2], ou MONTAGNE [18]). Le second test, non publié antérieurement à notre connaissance, consiste à choisir

$$(5.6) \quad \Pi = 0.61 \quad .$$

Dans ce cas, la ligne sonique est présente sur toute la largeur du canal et le choc qui suit bloque effectivement tout l'écoulement. Signalons aussi qu'un raffinement de maillage (les figures 5.3 et 5.4 sont résultats de calculs avec le maillage G41 proposé au workshop) n'affecte pas la convergence.

Ces deux derniers tests, joints à nos résultats antérieurs, montrent que l'équation du potentiel transsonique devient très mal adaptée à la prédiction d'écoulements internes. Aussi HABASHI-HAFEZ-KOTIUGA [10,11]

ont proposé d'enrichir le modèle transsonique usuel (irrotationnel isentropique isenthalpique) en incluant le saut d'entropie à la manière de HAFEZ-LOVELL [12], AMARA [1] et EL DABAGHI-PIRONNEAU [4], tout en conservant l'hypothèse d'irrotationnalité. Mais nous pensons que le fantastique développement ces dernières années des méthodes instationnaires pour les systèmes hyperboliques non-linéaires (voir par exemple VAN LEER [30], WOODWARD-COLELLA [33], YEE [34] et les diverses contributions du workshop INRIA 1983 [2]) doit permettre un calcul précis des écoulements intérieurs bloqués ou non, sans aucune procédure de "shock fitting" indispensable dans les méthodes proposées précédemment [12,1].

De plus, l'équation du potentiel transsonique conserve un intérêt théorique très grand : en bidimensionnel, un système hyperbolique non-linéaire non-banal lui est associé et des développements tant théoriques que numériques devraient prochainement voir le jour. En tridimensionnel, la théorie des systèmes hyperboliques non-linéaires ne s'applique probablement pas directement et la notion de solution entropique (satisfaisante théoriquement) pour le système couplé

$$(5.7) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\rho(|\vec{\nabla}\varphi|^2)\vec{\nabla}\varphi) = 0 \\ \rho(u^2) = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2(1-u^2)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \end{cases}$$

reste à préciser, malgré les avancées récentes de FEISTAUER-NEC<sup>Y</sup>AS [7] et MORAWETZ [19].



## REFERENCES DU CHAPITRE 7

---

- [1] AMARA M., *Analyse de Méthodes d'Eléments Finis pour des Ecoulements Transsoniques*, Thèse d'Etat, Université Paris 6, 1983.
- [2] ANGRAND F., DERVIEUX A., DESIDERI J.A., GLOWINSKI R. (eds), *Numerical Methods for the Euler Equations of Fluid Dynamics*, SIAM, Philadelphia, 1985.
- [3] BRISTEAU M.O., PIRONNEAU O., GLOWINSKI R., PERIAUX J., PERRIER P., POIRIER G., *On Numerical Solution of Nonlinear Problems in Fluid Dynamics by Least Squares and Finite Element Methods (II). Application to Transonic Flow Simulations*, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol 51, pp 363-394, 1985.
- [4] EL DABAGHI F., PIRONNEAU O., *Stream Vectors in Three Dimensional Aerodynamics*, *Numer. Math.*, vol 48, pp 561-589, 1986.
- [5] ENGQUIST B., OSHER S., *Stable and Entropy Satisfying Approximations for Transonic Flow Simulations*, *Math. of Comp.*, vol 34, n° 149, pp 45-75, 1980.
- [6] ENGQUIST B., OSHER S., *One-Sided Difference Approximations for Nonlinear Conservation Laws*, *Math. of Comp.*, vol 36, n° 154, pp 321-351, 1981.
- [7] FEISTAUER M., NEČAS J., *On the Solvability of Transonic Potential Flow Calculations*, *Z für Analysis und ihre Anwendungen*, vol 4, n° 4, pp 305-329, 1985.
- [8] GODUNOV S.K., *A Finite Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics*, *Math. Sb*, vol 47, pp 271-290, 1959.
- [9] HABASHI W., HAFEZ M., *Finite Element Solutions of Transonic Flow Problems*, *AIAA J.*, vol 20, n° 10, pp 1368-1376, 1982.
- [10] HABASHI W., HAFEZ M., KOTIUGA P., *Computation of Choked and Supersonic Turbomachinery Flows by a Modified Potential Method*, *AIAA J.*, vol 23, n° 2, pp 214-220, 1985.
- [11] HAFEZ M., HABASHI W., KOTIUGA P., *Conservative Calculations of Non-Isentropic Transonic Flows*, *Int J. for Num. Meth. in Fluids*, vol 5, pp 1047-1057, 1985.

- [12] HAFEZ M., LOVELL D., *Numerical Solution of Transonic Stream Function Equation*, AIAA J., vol 21, n° 3, pp 327-335, 1983.
- [13] HAFEZ M., SOUTH J., MURMAN E., *Artificial Compressibility Methods for Numerical Solutions of Transonic Full Potential Equation*, AIAA J., vol 17, n° 8, pp 838-844, 1979.
- [14] HUGHES T., MALLET M., *A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics, III, IV*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., vol 58, pp 305-328, pp 329-336, 1986.
- [15] JAMESON A., *Iterative Solution of Transonic Flows over Airfoils and Wings, Including Flows at Mach 1*, Comm. Pure Appl. Math., vol 27, pp 283-309, 1974.
- [16] JOLY P., *Présentation de Synthèse des Méthodes de Gradient Conjugué*, Math. Modelling and Numerical Analysis, vol 20, n° 4, pp 639-665, 1986.
- [17] MAC CORMACK R.W., *Numerical Solution of the Interaction of a Shock Wave with a Laminar Boundary Layer*, in *2nd International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Lect Notes in Physics, n° 8, Springer, Berlin, pp 151-163, 1971.
- [18] MONTAGNE J.L., *Etude de Schémas Numériques Décentrés en Dynamique des Gaz Bidimensionnelle*, La Recherche Aérospatiale, n° 1984-5, pp 323-338, 1984.
- [19] MORAWETZ C., *On a Weak Solution for a Transonic Flow Problem*, Comm. Pure Appl. Math., vol 38, pp 797-818, 1985.
- [20] MORICE P., VIVIAND H., *Equations de Conservation et Condition d'Irréversibilité pour les Ecoulements Transsoniques Potentiels*, C.R. Acad. Sc. Paris, série B, t 291, pp 235-238, 1980.
- [21] MURMAN E., *Analysis of Embedded Shock Waves Calculated by Relaxation Methods*, AIAA J., vol 12, n° 5, pp 626-633, 1974.
- [22] NAG, *Numerical Algorithms Group, NAG Fortran Library Manual*, Oxford, 1982.
- [23] NEDELEC J.C., *Mixed Finite Elements in  $\mathbb{R}^3$* , Numer Math, vol 35, pp 315-341, 1980.
- [24] OSHER S., *Numerical Solution of Singular Perturbation Problems and Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, in Math Studies n° 47 (Axelsson-Franck-Van der Sluis Eds), North Holland, Amsterdam, pp 179-205, 1981.

- [25] OSHER S., HAFEZ M., WHITLOW W., *Entropy Condition Satisfying Approximations for the Full Potential Equation of Transonic Flow*, Math of Comp, vol 44, n° 169, pp 1-29, 1985.
- [26] OSHER S., Communication personnelle, 1986.
- [27] RAVIART P.A., THOMAS J.M., *A Mixed Finite Element Method for 2nd Order Elliptic Problems*, in Proceedings, Rome 1975 (Dold-Eckmann Eds), Lecture Notes in Maths, vol 606, pp 292-315, 1977.
- [28] RIZZI A., VIVIAND H. (Eds), *Numerical Methods for the Computation of Inviscid Transonic Flows with Shock Waves*, Notes on Num. Fluid Mechanics, vol 3, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1981.
- [29] SEDOV L., *Mécanique des Milieux Continus*, tome 2, éditions MIR, Moscou, 1973, 1975.
- [30] VAN LEER B., *Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method*, J. of Comp Phys, vol 32, pp 101-136, 1979.
- [31] VILA J.P., *Sur la théorie et l'Approximation Numérique de Problèmes Hyperboliques Non Linéaires. Application aux Equations de Saint Venant et à la Modélisation des Avalanches de Neige Dense*, Thèse, Université Paris 6, 1986.
- [32] VIVIAND H., VEUILLOT J.P., *Méthodes Pseudo-Instationnaires pour le Calcul d'Écoulements Transsoniques*, ONERA T.P., n° 1978-4, 1978.
- [33] WOODWARD P., COLELLA P., *The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks*, J. of Comp Phys, vol 54, pp 115-173, 1984.
- [34] YEE H.C., *Construction of Explicit and Implicit Symmetric TVD Schemes and Their Applications*, J of Comp Phys, vol 68, pp 151-179, 1987.

## Bibliographie

( par ordre alphabétique d' auteur; les numéros de droite renvoient aux chapitres correspondants.)

- ADAMS R.A.  
1975 **Sobolev Spaces**, Academic Press, New York. (2)
- AMARA M.  
1983 **Analyse de Méthodes d' Eléments Finis pour des Ecoulements Transsoniques**, Thèse d' Etat, Université Paris 6. (0,1,4,7)
- AMARA M., JOLY P., THOMAS J.M.  
1983 **A Mixed Finite Element Method for Solving Transonic Flow Equations**, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol 39, pp 1-18. (4)
- ANGRAND F., DERVIEUX A., DESIDERI J.A., GLOWINSKI R. (eds)  
1985 **Numerical Methods for the Euler Equations of Fluid Dynamics**, SIAM, Philadelphia. (6,7)
- AUDOUNET J.  
1983 **Solutions Discontinues Paramétriques des Systèmes de Lois de Conservation et des Problèmes aux Limites Associés**, Séminaire, Université Toulouse 3, 1983-1984. (6)
- AXELSSON O.  
1977 **Solution of Nonlinear Systems of Equations: Iterative Methods**, in **Lect. Notes in Maths. n° 572**, Copenhagen 1976. Springer Verlag, Berlin. (3)
- BALLOU D.  
1970 **Solutions to Nonlinear Hyperbolic Cauchy Problems without Convexity Conditions**, *Trans. A.M.S.*, vol 152, pp 441-460. (5)
- BARDOS C.  
1983 **Introduction aux Problèmes Hyperboliques Non Linéaires**, Rapport interne n° 40, Université Paris Nord. (1,5)
- BARDOS C., LEROUX A.Y., NEDELEC J.C.  
1979 **First Order Quasilinear Equations with Boundary Conditions**, *Comm. Part. Diff. Eq.*, vol 4, n° 9, pp 1017-1034. (0,5,6)
- BAUER F., GARABEDIAN P., KORN D.  
1972 **Supercritical Wing Sections 1**, *Lect. Notes Econ. Math. Syst. n° 66*, Springer Verlag, Berlin. (4)
- 1975 **Supercritical Wing Sections 2**, *Lect. Notes Econ. Math. Syst. n° 108*, Springer Verlag, Berlin. (4)
- BAUER F., GARABEDIAN P., KORN D., JAMESON A.  
1977 **Supercritical Wing Sections 3**, *Lect. Notes Econ. Math. Syst. n° 150*, Springer Verlag, Berlin. (4)
- BAYLISS A., TURKEL E.  
1982 **Outflow Boundary Conditions for Fluid Dynamics**, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, vol 3, n° 2, pp 250-259. (6)

- BENABDALLAH A.  
1986 Le "p-système" sur un intervalle, C. R. Acad. Sc. Paris, t 303, série 1, n°4, pp 123-127. (5)
- BENDALI A.  
1984 Approximation par Eléments Finis de Surface de Problèmes de Diffraction des Ondes Electromagnétiques, Thèse d' Etat, Université Paris 6. (2)
- 1984 Numerical Analysis of the Exterior Boundary Value Problem for the Time Harmonic Maxwell Equations by a Finite Element Method. Part 1: The Continuous Problem, Math. of Comp., vol 43, n° 147, pp 29-46. (2)
- 1984 Numerical Analysis of the Exterior Boundary Value Problem for the Time Harmonic Maxwell Equations by a Finite Element Method. Part 2: The Discrete Problem, Math. of Comp., vol 43, n° 147, pp 47-68. (2)
- BENDALI A., DOMINGUEZ J. M., GALLIC S.  
1985 A Variational Approach for the Vector Potential Formulation of the Stokes and Navier-Stokes Problems in Three Dimensional Domains, J. Math. Anal. and Appl., vol107, n°2, pp 537-560. (2)
- BENDALI A., GALLIC S.  
1982 Formulation du Système de Stokes en Potentiel Vecteur, Rapport Interne n° 79, C.M.A.P. Ecole Polytechnique. (2)
- BERGE C.  
1970 **Graphes et Hypergraphes**, Dunod, Paris. (2)
- BERNARDI C.  
1979 Méthodes d' Eléments Finis Mixtes pour les Equations de Navier-Stokes, Thèse de 3° cycle, Univ. Paris 6. (2)
- BRAMBLE J.H., HILBERT S.R.  
1971 Bounds for a Class of Nonlinear Functionals with Applications to Hermite Interpolation, Numer. Math., vol 16, pp 362-369. (2)
- BRANDT A.  
1977 Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems, Math. of Comp., vol 31, n° 138, pp 333-390. (4)
- BREDIF M.  
1983 A Fast Finite Element Method for Transonic Potential Flow Calculations, AIAA Paper n° 83-0507. (4)
- BREZZI F.  
1974 On the Existence, Uniqueness and Approximations of Saddle Point Problems arising from Lagrangian Multipliers, RAIRO, vol 2, pp 217-235. (2)
- BRISTEAU M.O., PIRONNEAU O., GLOWINSKI R., PERIAUX J., PERRIER P., POIRIER G.  
1985 On Numerical Solution of Nonlinear Problems in Fluid Dynamics by Least Squares and Finite Element Method (II): Application to Transonic Flow Simulations, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol 51, pp 363-39. (4,7)

- BRENIER Y.  
1984 Averaged Multivalued Solutions for Scalar Conservations Laws, SIAM J. Numer. Anal., vol 21, n° 6, pp 1013-1037. (6)
- BRENIER Y., OSHER S.  
1986 Approximate Riemann Solvers and Numerical Flux Functions, SIAM J. Numer. Anal., vol 23, n° 2, pp 259-273. (6)
- CARRIERE P.  
1975 Aérodynamique Interne des Réacteurs, Cours de l' Ecole Nationale de l' Aéronautique et de l'Espace, Toulouse. (4)
- CASIER F., DECONINCK H., HIRSCH C.  
1984 A Class of Bidiagonal Schemes for Solving the Euler Equations, AIAA J., vol 22, n° 11, pp 1556-1563. (6)
- C.C.V.R.  
1980 Cours de Vectorisation, Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche, Ecole Polytechnique, Palaiseau. (3)
- CHAKRAVARTHY S.  
1983 Euler Equations-Implicit Schemes and Boundary Conditions, AIAA J., vol 21, n° 5, pp 699-706. (6)
- CHAKRAVARTHY S., OSHER S.  
1983 Numerical Experiments with the Osher Upwind Scheme for the Euler Equations, AIAA J., vol 21, n° 9, pp1241-1248. (6)
- CHOQUET-BRUHAT Y.  
1968 Géométrie Différentielle et Systèmes Extérieurs, Dunod, Paris. (2)
- CIARLET P.  
1978 **The Finite Element Method for Elliptic Problems**, North Holland, Amsterdam. (2,4)
- CIAVALDINI J.F.  
1980 Analyse Numérique des Ecoulements Compressibles autour d' un Profil placé en Atmosphère Infinie, Thèse d' Etat, Université de Rennes 1. (3,4)
- COLE J.D., COOK L.P.  
1986 **Transonic Aerodynamics**, North Holland Series in Appl. Maths. and Mechanics, Amsterdam. (1)
- COURANT R., FRIEDRICHS K.O.  
1948 **Supersonic Flow and Shock Waves**, Interscience, New York. (1,2,4)
- CROCCO L.  
1937 Eine neue Stömfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation, Z. Angew. Math. Mech., vol 17, pp 1-7. (1)
- CUFFEL R., BACK L., MASSIER P.  
1969 Transonic Flowfield in a Supersonic Nozzle with Small Throat Radius of Curvature, AIAA J., vol 7, pp 1364-1366. (4)

- DECONINCK H., HIRSCH C.  
 1982 A Multigrid Method for the Transonic Full Potential Equation Discretized with Finite Elements on an Arbitrary Mesh, J. Comp. Phys, vol 48, pp 344-365. (4)
- 1983 Boundary Conditions for the Potential Equation in Transonic Internal Flow Calculations, ASME Paper 83 GT-135. (1)
- DE RHAM G.  
 1955 **Variétés Différentiables**, Hermann, Paris (2)
- DHATT G., TOUZO G.  
 1984 **Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis**, Maloine, Paris (3)
- DOMINGUEZ J.M.  
 1982 Thèse de 3° cycle, Université Paris 6. (2)
- DUBOIS F.  
 1985 Calcul d' Ecoulements Transsoniques dans des Tuyères par une Méthode d' Eléments Finis Mixtes, Actes du 18° Congrès National d' Analyse Numérique, Puy St Vincent. (4)
- DUBOIS F., LE FLOCH P.  
 1987 Condition à la Limite pour un Système de Lois de Conservation, C. R. Acad. Sc. Paris, t304, Série 1, n° 3, pp 75-78. (5,6)
- DUBOIS F., DUPUY J.M.  
 1986 A Three Dimensional Vector Potential Formulation for Solving Transonic Flow with Mixed Finite Elements, in 6° International Symposium: Finite Elements Methods in Flow Problems, Antibes. (2,3)
- DUKOWICZ J.  
 1985 A General Non-Iterative Riemann Solver for Godunov's Method, J. Comp. Phys., vol 61, pp 119-137. (6)
- DUPONT T., KENDALL R., RACHFORD H.  
 1968 An Approximate Factorization Procedure for Solving Self-Adjoint Elliptic Difference Equations, SIAM J. Numer. Anal., vol 5, n° 3, pp 559-573. (3)
- DUPUY J.M.  
 1985 Ecoulements Transsoniques Potentiels Tridimensionnels, Rapport du Contrat DRET 81-228, Annexe 2. (3,4)
- 1986 Résolution Numérique des Equations d' Ecoulements Compressibles Transsoniques Tridimensionnels, Rapport de Synthèse finale du Contrat DRET 83-434. (3,4)
- DUTTON J., ADDY A.  
 1981 Transonic Flow in the Throat Region of Axisymmetric Nozzles, AIAA J., vol 19, pp 801-804. (4)
- DUVAUT G., LIONS J.L.  
 1972 **Les Inéquations en Mécanique et en Physique**, Dunod, Paris. (2)
- EBERLE A.  
 1977 Eine Method Finiter Elements Berechnung der Transsonicken Potential-Strömung um Profile, Messerschmitt-Bölkow-Blohm, 1352(0). (4)

- EL DABAGHI F., PIRONNEAU O.  
1986 Stream Vectors in Three Dimensional Aerodynamics, Numer. Math.,  
vol 48, pp 561-589. (2,7)
- EMBID P., GOODMAN J., MAJDA A.  
1984 Multiple Steady States for 1-D Transonic Flow, SIAM J. Sci. Stat.  
Comput., vol 45, n°1, pp 21-41. (1)
- EMMONS H.W.  
1944 The Numerical Solution of Compressible Flow Problems, NACA  
TN 932. (4)  
1946 The Theoretical Flow of a Frictionless Adiabatic Perfect Gas Inside a  
Two-Dimensional Hyperbolic Nozzle, NACA TN 1003. (4)
- ENGQUIST B., GUSTAFSSON B.  
1987 Steady-State Computations for Wave Propagation Problems, Math. of  
Comp., vol 49, n° 179, pp 39-64. (6)
- ENGQUIST B., MAJDA A.  
1981 Numerical Radiation Boundary Conditions for Unsteady Transonic  
Flow, J. Comp. Phys., vol 40, pp 91-103. (6)
- ENGQUIST B., OSHER S.  
1980 Stable and Entropy Satisfying Approximations for Transonic Flow  
Calculations, Math. of Comp., vol 34, n° 149, pp 45-75. (1,4,6,7)  
1981 One Sided Difference Approximations for Nonlinear Conservation  
Laws, Math. of Comp., vol 36, pp 321-352. (0,4,6,7)
- EVANS D.J.  
1967 The Use of Pre-conditioning in Iterative Methods for Solving Linear  
Equations with Symmetric Definite Matrices, J. Inst. Maths. Applics.,  
vol 4, pp 295-314. (3)
- FEISTAUER M., NECAS M.  
1985 On the Solvability of Transonic Potential Flow Calculations, Z. für Anal.  
und ihre Anwend., vol 4, n° 4, pp 305-329. (4,7)
- FINN R., GILBARG D.  
1957 Asymptotic Behaviour and Uniqueness of Plane Subsonic Flows,  
Comm. Pure Appl. Math., vol 10, pp 23-63. (4)
- FOIAS C., TEMAM R.  
1978 Remarques sur les Equations de Navier-Stokes Stationnaires et les  
Phénomènes Successifs de Bifurcation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,  
S 4, vol 5, n° 1, pp 29-63. (2)
- FRIEDRICHS K.O.  
1955 Differential Forms on Riemannian Manifolds, Comm. Pure Appl. Math.,  
vol 8, pp 551-590. (2)
- GELDER D.  
1971 Solution of the Compressible Flow Equations, Int J. Num. Meth. Eng,  
vol 3, pp 35-43. (3)
- GEORGESCU V.  
1979 Some Boundary Value Problems for Differential Forms on Compact  
Manifolds, Ann. di Math. Pura Appl., série 4, vol 122, pp 159-198. (2)



- GERMAIN P.  
1973 **Cours de Mécanique des Milieux Continus, Théorie Générale,** Masson, Paris. (1)
- 1986 **Mécanique, Tome 2,** Ecole Polytechnique, Ellipses, Paris. (1)
- GERMAIN P., BADER R.  
1953 **Unicité des Chocs dans la Mécanique de Burgers,** ONERA. (1)
- GERMAIN P., MULLER P.  
1980 **Introduction à la Mécanique des Milieux Continus,** Masson, Paris. (2,3)
- GIRAULT V., RAVIART P.A.  
1986 **Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Applications,** Springer Verlag, Berlin. (2,4)
- GLAZ H.M., LIU T.P.  
1984 **The Asymptotic Analysis of Wave Interactions and Numerical Calculations of Transonic Nozzle Flow,** Advances in Appl. Math., vol 5, pp 111-146 (1,6)
- GODLEWSKI E., RAVIART P.A.  
1988 **An Introduction to the Theory and Numerical Analysis of Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation Laws,** à paraître . (1)
- GODUNOV S.K.  
1959 **A Finite Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics,** Mat. Sbornik, vol 47, pp 271-290. (1,5,6,7)
- 1961 **An Interesting Class of Quasilinear Systems,** Dok. Akad. NauK. SSSR, vol 139; pp 521-523, et Soviet Math. , vol 2, pp 947-949. (1)
- GODUNOV S.K., ZABRODINE A., IVANOV M., KRAIKO A., PROKOPOV G.  
1976 **Résolution Numérique des Problèmes Multidimensionnels de la Dynamique des Gaz,** Editions Mir, Moscou, 1979. (0,1,6)
- GOLDBERG M., TADMOR E.  
1987 **Convenient Stability Criteria for Difference Approximations of Hyperbolic Initial-Boundary Value Problems II,** Math. of Comp., vol 48, n° 178, pp 503-520. (6)
- GOLUB G.H., MEURANT G.  
1984 **Résolution Numérique des grands Systèmes Linéaires,** Eyrolles, Paris. (3)
- GOODMAN J.  
1982 **Initial Boundary Value Problems for Hyperbolic Systems of Conservation Laws,** Ph.D. Thesis, Univ. de Californie. (5,6)
- GRIFFIN M., ANDERSON J.D.  
1977 **On the Application of Boundary Conditions to Time Dependent Computations for Quasi One-Dimensional Fluid Flow,** Computers & Fluids, vol 5, pp 127-137. (6)
- GUSTAFSON K., HARTMAN R.  
1983 **Divergence Free Bases for Finite Element Schemes in Hydrodynamics,** SIAM J. Numer Anal., vol 20, pp 697-721. (2)

- GUSTAFSSON B., KREISS H.O., SUNDSTRÖM A.  
1972 Stability Theory of Difference Approximations for Mixed Initial  
Boundary Value Problems II, Math. of Comp., vol 26, pp 649-686. (5,6)
- HABASHI W.G. (ed)  
1985 **Advances in Computational Transonics**, Pineridge Press, Swansea,  
U.K. (4)
- HABASHI W., HAFEZ M.  
1982 Finite Element Solutions of Transonic Flow Problems, AIAA J., vol 20,  
n° 10, pp 1368-1376. (7)
- HABASHI W., HAFEZ M., KOTIUGA P.  
1985 Computation of Choked and Supersonic Turbomachinery Flows by a  
Modified Potential Method, AIAA J., vol 23, n° 2, pp 214- 220. (7)
- HADAMARD J.  
1903 **Leçons sur la Propagation des Ondes et les Equations de  
l' Hydrodynamique**, Hermann, Paris. (1)
- HAFEZ M., HABASHI W., KOTIUGA P.  
1985 Conservative Calculations of Non-Isentropic Transonic Flows, Int. J.  
Num. Meth. in Fluids, vol 5, pp 1047-1057. (7)
- HAFEZ M., LOVELL D.  
1983 Numerical Solution of Transonic Stream Function Equation, AIAA J.,  
vol 21, n° 3, pp 327-335. (4,7)
- HAFEZ M., SOUTH J., MURMAN E.  
1979 Artificial Compressibility Methods for Numerical Solutions of Transonic  
Full Potential Equation, AIAA J., vol 17, n° 8, pp 838-844. (4,7)
- HALL I.M.  
1962 Transonic Flow in Two-Dimensional and Axially Symmetric Nozzles,  
Quart. J. of Mech. Appl. Math., vol 15, pp 487-508. (4)
- HALPERN L., SCHATZMAN M.  
1987 Artificial Boundary Conditions for Incompressible Viscous Flows,  
Rapport interne n° 162, CMAP, Ecole Polytechnique. (6)
- HARTEN A.  
1983 On the Symmetric Form of Systems of Conservation Laws with  
Entropy, J. Comp. Phys, vol 49, pp 151-164. (1)
- HARTEN A., LAX P.D.  
1981 A Random Choice Finite Difference Scheme for Hyperbolic  
Conservation Laws, SIAM J. Numer. Anal., vol 18, n° 2, pp 289-315. (6)
- HARTEN A., LAX P.D., VAN LEER B.  
1983 On Upstream Differencing and Godunov-type Schemes for Hyperbolic  
Conservation Laws, SIAM Review, vol 25, n° 1, pp 35-61. (6)
- HECHT F.  
1980 Construction d' une Base de Fonctions P1 Non Conforme à  
Divergence Nulle dans  $IR^3$ , RAIRO Anal. Num., vol 15, pp 315-341. (2)

- HEDSTRÖM G.W.  
1979 Nonreflecting Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems, J. Comp. Phys, vol 30, pp 222-237. (6)
- HESTENES M., STIEFEL E.  
1952 Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems, J. Res. Nat. Bur. of Standards, vol 49, n° 6, pp 409-436. (3)
- HOLST T.L.  
1979 Implicit Algorithm for the Conservative Transonic Full Potential Equation Using an Arbitrary Mesh, AIAA J., vol 17, pp 1038-1045. (4)
- HOWES F.A.  
1986 A Multidimensional Initial-Boundary Value Problem with Strong Nonlinearities, Arch. Rat. Mech. Anal. vol 91, n° 2, pp 153-168. (5)
- HUANG K.  
1963 **Statistical Mechanics**, J. Wiley & Sons, New York. (6)
- HUGHES T., MALLET M.  
1986 A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: III. The Generalized Streamline Operator for Multidimensional Advective-Diffusive Systems, Comp. Meth.in Appl. Mech. Eng., vol 58, pp 305-328. (7)
- 1986 A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: IV. A Discontinuity-Capturing Operator for Multidimensional Advective-Diffusive Systems, Comp. Meth.in Appl. Mech. Eng., vol 58, pp 329-336. (7)
- JACKSON J.D.  
1962 **Classical Electrodynamics**, John Wiley & Sons, New York. (2)
- JAMESON A.  
1974 Iterative Solution of Transonic Flows over Airfoils and Wings, Including Flows at Mach 1, Comm. Pure Appl. Math., vol 27, pp 283- 309. (4,7)
- JENNINGS A.  
1977 Influence of the Eigenvalue Spectrum on the Convergence Rate of the Conjugate Gradient Method, J. Inst. Maths. Applics., vol 20, pp 61-72. (3)
- JOLY P.  
1986 Présentation de Synthèse des Méthodes de Gradient Conjugué, Math. Modelling. Numer. Anal., vol 20, n°4, pp 639-665. (7)
- KERSHAW D.S.  
1978 The Incomplete Cholesky-Conjugate Gradient Method for the Iterative Solution of Systems of Linear Equations, J. Comp. Phys., vol 26, pp 43-65. (3)
- KLIEGEL J., LEVINE J.  
1969 Transonic Flow in Small Throat of Curvature Nozzles, AIAA J., vol 7, pp 1375-1378. (4)
- KREISS H.O.  
1970 Initial Boundary Value Problems for Hyperbolic Systems, Comm. Pure Appl. Math., vol 23, pp 277-298. (5)

- KRUZKOV S.N.  
1970 First Order Quasi-Linear Systems in Several Independent Variables, Math. USSR Sb, vol 10, n° 2, pp 217-243. (5)
- LADYZENSKAYA O.A., URALCEVA N.N.  
1965 Boundary Problems for Linear and Quasilinear Parabolic Equations, AMS Translations, vol 47, pp 217-299. (5)
- LANDAU L., LIFCHITZ E.  
1950 **Physique Statistique**, Editions Mir, Moscou, 1967. (1)  
1953 **Mécanique des Fluides**, Editions Mir, Moscou, 1971. (1)
- LASCAUX P., THEODOR R.  
1986 **Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l' Art de l' Ingénieur**, Masson, Paris. (3)
- LAVAL P.  
1973 Méthodes Instationnaires de Calcul des Effets d' Interaction de Paroi en Ecoulement Bidimensionnel Supercritique, La Recherche Aérospatiale, n° 1973-5, pp 275-288. (4)
- LAX P.D.  
1954 Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computation, C. Pure Appl. Math., vol 7, pp 159-193. (1,5)  
1957 Hyperbolic Systems of Conservation Laws II, Comm. Pure Appl. Math., vol 10, pp 537-566. (5)  
1971 Shock Waves and Entropy, in **Contributions to Nonlinear Functional Analysis** (Zarantonello ed.), Academic Press, pp 603-634. (1)  
1973 **Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves**, CBMS Regional Conf. Series in Applied Maths, SIAM, Philadelphia. (4,5,6)
- LE FLOCH P.  
1988 Boundary Conditions for Scalar Nonlinear Conservation Laws, Math. Meth. in Appl. Sciences, vol 10, à paraître. (5)
- LE FLOCH P., NEDELEC J.C.  
1985 Weighted Scalar Conservation Laws, Rapport interne n° 144, Centre de Maths. Appl., Ecole Polytechnique., à paraître Trans. AMS. (5)
- LENOIR M.  
1986 Optimal Isoparametric Finite Elements and Error Estimates for Domains Involving Curved Boundaries, SIAM J. Numer. Anal., vol 23, n° 3, pp 562-580. (2)
- LEROUX A.Y.  
1979 Approximation de Quelques Problèmes Hyperboliques Non-Linéaires, Thèse d' Etat, Université de Rennes. (5)
- LIONS J.L., MAGENES E.  
1968 **Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications**, vol 1, Dunod, Paris. (2)

- LIU T.P.  
1977 Initial-Boundary Value Problems for Gas Dynamics, Arch. Rat. Mech. Anal., vol 64, pp 137-168. (5,6)
- LUDFORD G.S.S.  
1951 The Behaviour at Infinity of the Potential Function of Two-Dimensional Subsonic Compressible Flow, J. Math. Phys., vol 30, pp 117-130. (4)
- MAC CORMACK R.W.  
1971 Numerical Solution of the Interaction of a Shock Wave with a Laminar Boundary Layer, in **Lecture Notes in Physics n° 8**, Springer, Berlin, pp 151-161. (7)
- MASSET W.S.  
1967 **Algebraic Topology: an Introduction**, Harcourt, Brace & World Inc, New York. (2)
- MAZET P.A., BOURDEL F., GREBORIO R.M., BOREE J.  
1987 Applications de la Méthode Variationnelle d' Entropie à la Résolution des Equations d'Euler, Rapport interne, CERT Toulouse. (6)
- MEIJERINK J.A., VAN DER VORST H.A.  
1977 An Iterative Solution Method for Linear Systems of Which the Coefficient Matrix is a Symmetric M-Matrix, Math. of Comp., vol 31, n° 137, pp 148-162. (3)
- MONTAGNE J.L.  
1984 Etude de Schémas Numériques Décentrés en Dynamique des Gaz Bidimensionnelle, La Recherche Aérospatiale, n° 1984-5, pp 323-338. (7)
- MORAWETZ C.S.  
1956 On the Non-Existence of Continuous Transonic Flows Past Profiles I, Comm. Pure Appl. Math., vol 9, pp 45-68. (4)  
1957 On the Non-Existence of Continuous Transonic Flows Past Profiles II, Comm. Pure Appl. Math., vol 10, pp 107-131 (1957). (4)  
1958 On the Non-Existence of Continuous Transonic Flows Past Profiles III, Comm. Pure Appl. Math., vol 11, pp 129-144 (1958). (4)  
1985 On a Weak Solution for a Transonic Flow Problem, Comm. Pure Appl. Math., vol 38, pp 797-818. (4,7)
- MORICE P.  
1979 Finite Element Approximations of a Variational Principle for Perfect Fluid Flows with Free Boundaries, in **Notes on Numer. Fluid Mechanics, vol 2**, Vieweg, Braunschweig. (4)
- MORICE P., CAMBIER L., VEUILLOT J.P.  
1984 Numerical Computation of Transonic Flow past an Axisymmetric Nacelle, TP ONERA 1984-91. (4)
- MORICE P., VIVIAND H.  
1980 Equations de Conservation et Condition d' Irréversibilité pour les Ecoulements Transsoniques Potentiels, C.R. Acad. Sc., Paris, Série B, t 291, pp 235-238. (1,7)

- MURMAN E.  
1974 Analysis of Embedded Shock Waves Calculated by Relaxation Methods, AIAA J., vol 12, n° 5, pp 626-633. (4,7)
- MURMAN E., COLE J.  
1971 Calculations of Plane Steady Transonic Flows, AIAA J., vol 9, pp 114-121. (1,4)
- NAG  
1982 Numerical Algorithm Group. NAG Fortran Library Manual, Oxford. (7)
- NECAS J.  
1988 **Ecoulements de Fluides: Compacité par Entropie**, Masson, Paris, à paraître. (1,3)
- NEDELEC J.C.  
1976 Curved Finite Element Methods for the Solution of Singular Integral Equations on Surfaces in  $IR^3$ , Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng., vol 8, pp 61-80. (1,2)
- 1977 Approximation des Equations Intégrales en Mécanique et en Physique, Cours CEA-EDF-INRIA, Paris. (2)
- 1978 Computation of Eddy Currents on a Surface in  $IR^3$  by Finite Element Methods, SIAM J. Numer. Anal., vol 15, pp 580-594. (2)
- 1980 Mixed Finite Elements in  $IR^3$ , Numerische Mathematik, vol 35, pp 315-341. (0,2,3,7)
- 1982 Eléments Finis Mixtes Incompressibles pour l' Equation de Stokes dans  $IR^3$ , Numer Math., vol 39, pp 97-112. (2)
- 1982 Eléments Finis, Cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris. (3)
- 1986 A New Family of Mixed Finite Elements in  $IR^3$ , Numer. Math., vol 50, pp 57-81. (2)
- NISHIDA T., SMOLLER J.  
1977 Mixed Problems for Nonlinear Conservation Laws, J. Diff. Equations, vol 23, n° 2, pp 244-269. (5,6)
- OLEINIK O.  
1957 On Discontinuous Solutions of Nonlinear Differential Equations, Usp. Math. Nauk.(NS), vol 12, pp 3-73, et AMS Transl., Sér. 2, vol 26, pp 95 - 172. (1)
- OLIGER J., SUNDSTRÖM A.  
1978 A Theoretical and Practical Aspects of Some Initial Boundary Value Problems in Fluid Dynamics, SIAM J. Appl. Math., vol 35, n° 3, pp 419-446. (6)
- OSHER S.  
1981 Numerical Solution of Singular Perturbation Problems and Hyperbolic Systems of Conservation Laws, in **Math. Studies n° 47** (Axelsson-Franck-Van der Sluis eds), North Holland, pp 179-205. (0,6,7)

- OSHER S.  
1984 Riemann Solvers, the Entropy Condition, and Difference Approximations, SIAM J. Numer. Anal., vol 21, n° 2, pp 217-235. (6)
- OSHER S., HAFEZ M., WHITLOW W.  
1985 Entropy Condition Satisfying Approximations for the Full Potential Equation of Transonic Flow, Math. of Comp., vol 44, pp 1-29. (4,7)
- OSHER S., SOLOMON F.  
1983 Upwind Difference Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Math. of Comp., vol 38, n° 158, pp 339-374. (6)
- PERRONNET A.  
1983 Mefisto Maillage, Manuel d' Utilisation. laboratoire d' Analyse Numérique, Université Paris 6. (3,4)
- RAI M., CHAKRAVARTHY S.  
1986 An Implicit Form for the Qsher Upwind Scheme, AIAA J., vol 24, n° 5, pp 735-743. (6)
- RAVIART P.A., THOMAS J.M.  
1977 A Mixed Finite Element Method for 2nd Order Elliptic Problems, in **Lect. Notes in Maths. n° 606** (Dold-Eckmann eds), Springer Verlag, Berlin, pp 292-315. (2,3,7)
- RIZZI A., ERICKSSON L.E.  
1984 Computation of Flow around Wings Based on the Euler Equations, J. of Fluid Mech., vol 148, pp 45-71. (1)
- RIZZI A., VIVIAND H. (eds)  
1981 **Numerical Methods for the Computation of Inviscid Transonic Flows with Shock Waves**, Notes on Num. Fluid Mechanics, vol 3, Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden. (3,4,6,7)
- ROCKAFELLAR T.  
1972 **Convex Analysis**, Princeton University Press. (5)
- ROE P.L.  
1981 Approximate Riemann Solvers, Parameters Vectors, and Difference Schemes, J. Comp. Phys, vol 43, pp 357-372. (6)
- ROUX F.X.  
1984 Séminaire, Laboratoire d' Analyse Numérique, Université Paris 6, mars 1984. (2,3)
- SCOTT L.R.  
1975 Interpolated Boundary Conditions in the Finite Element Method, SIAM J. Numer Anal, vol 12, n° 3, pp 404-427. (2)
- SEDOV L.  
1973 **Mécanique des Milieux Continus**, tome 2, Eds Mir, Moscou, 1975. (1,7)
- SELLS C.C.L.  
1968 Plane Subcritical Flow Past a Lifting Aerofoil, Proc. Roy. Soc, série A, vol 308, pp 377-401. (4)
- SERRE D.  
1986 Oscillating Data in one Nonlinear Hyperbolic System, C.R. Acad Sc. Paris, tome 302, Série 1, pp 115-118. (5)

- SERRIN J.  
1959 **Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics**, in **Handbuch der Physik vol 8-1**, (Truesdell ed), Springer Verlag, Berlin, pp 125-263. (1)
- SHIFFMAN M.  
1952 **On the Existence of Subsonic Flows of a Compressible Fluid**, J. Rat. Mech. Anal., vol 1, pp 605-652. (4)
- SHUBIN G., STEPHENS A., GLAZ H.  
1981 **Steady Shock Tracking and Newton's Method Applied to One-Dimensional Duct Flow**, J. Comp. Phys., vol 39, pp 364-374. (6)
- SMOLLER J.  
1983 **Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations**, Springer Verlag, Berlin. (1,4,5,6)
- SOD G.M.  
1978 **A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws**, J. Comp. Phys., vol 27, pp 1-31. (6)
- STEGER J., WARMING R.  
1981 **Flux-Vector Splitting of the Inviscid Gas Dynamics Equations with Applications to Finite-Difference Methods**, J. Comp. Phys, vol 40, pp 263-293. (6)
- STEINHOFF J., JAMESON A.  
1982 **Multiple Solutions of the Transonic Potential Flow Equations**, AIAA J., vol 20, pp 1521-1525. (4)
- STONE H.L.  
1968 **Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Differential Equations**, SIAM J. Numer. Anal., vol 5, n° 3, pp 530-558. (3)
- STROUD A.H.  
1971 **Approximate Calculation of Multiple Integrals**, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs. (3)
- TEMAM R.  
1977 **Navier-Stokes Equations**, North Holland, Amsterdam. (2)
- TREVES F.  
1980 **Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators**, vol 2, Plenum Press, New York. (2)
- VAN LEER B.  
1979 **Towards the Ultimate Conservative Scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method**, J. Comp. Phys., vol 32, pp 101-136. (7)
- 1982 **Flux-Vector Splitting for the Euler Equations**, in **Lecture Notes in Physics n° 170** ( Krause ed), Berlin, pp 507-512. (6)
- 1984 **On the Relation between the Upwind-Differencing Schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe**, SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol 5, n° 1, pp 1-20. (6)



- VILA J.P.  
 1986 Sur la Théorie et l' Approximation Numérique de Problèmes Hyperboliques Non Linéaires. Application aux Equations de Saint Venant et à la Modélisation des Avalanches de Neige Dense, Thèse, Université Paris 6. (6,7)
- 1986 Simplified Godunov Schemes For 2X2 Systems of Conservation Laws, SIAM J. Numer. Anal., vol 23, n° 6, pp 1173-1192. (6)
- VIVIAND H., VEUILLOT J.P.  
 1978 Méthodes Pseudo-instationnaires pour le Calcul d' Ecoulements Transsoniques, TP ONERA 1978-4. (1,4,5,6,7)
- VOLPERT A.I.  
 1967 The Space BV and Quasilinear Equations, Math. Sb., vol 73, n° 115, pp 255-302. (5)
- VON KARMAN T.  
 1947 The Similarity Law of Transonic Flow, J. Math. Phys., vol 26, n° 3, pp 182-190. (1)
- WHITHAM G.B.  
 1956 On the Propagation of Weak Shock Waves, J. Fluid Mech., vol 1, pp 290-318. (6)
- 1974 **Linear and Nonlinear Waves**, J. Wiley & Sons, New York. (1)
- WONG Y., HAFEZ M.  
 1982 Conjugate Gradient Methods Applied to Transonic Finite Difference and Finite Element Calculations, AIAA J., vol 20, pp 1526-1533. (4)
- WOODWARD P., COLLELA P.  
 1984 The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks, J. Comp. Phys, vol 54, pp 115-173. (7)
- YEE H.C.  
 1987 Construction of Explicit and Implicit Symmetric TVD Schemes and their Applications, J. Comp. Phys., vol 68, pp 51-179. (7)
- YEE H., BEAM R., WARMING R.  
 1982 Boundary Approximations for Implicit Schemes for One-Dimensional Inviscid Equations of Gasdynamics, AIAA J., vol 20, n° 9, pp 1203-1211. (6)
- ZIENKIEWICZ O.C.  
 1971 **The Finite Element Method in Engineering Science**, Mc Graw Hill, Londres. (3,4)
- ZLAMAL M.  
 1973 Curved Elements in the Finite Element Method I, SIAM J. Numer Anal., vol 10, n° 1, pp 229-240. (2)
- 1974 Curved Elements in the Finite Element Method II, SIAM J. Numer Anal., vol 11, n° 2, pp 347-362. (2)