HAL open science

Approche géométrique de la théorie de l'indice via les groupoïdes

Claire Debord

▶ **To cite this version:**

Claire Debord. Approche géométrique de la théorie de l'indice via les groupoïdes. Algèbres d'opérateurs [math.OA]. Université Blaise Pascal Clermont Ferrand 2, 2014. tel-03776329

HAL Id: tel-03776329

https://hal.science/tel-03776329

Submitted on 13 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : **407**

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL, Clermont-Ferrand
Laboratoire de Mathématiques, UMR CNRS-UBP 6620

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES EN MATHÉMATIQUES

présentée par

Claire Debord

APPROCHE GÉOMÉTRIQUE DE LA THÉORIE DE L'INDICE VIA LES GROUPOÏDES

Rapporteurs :

Saad Baaj	Université Blaise Pascal
Moulay Tahar Benameur	Université de Montpellier 2
Ralf Meyer	Université de Göttingen

Soutenue publiquement le 21 novembre 2014 devant le jury composé de :

Saad Baaj	Université Blaise Pascal
Michel Hilsum	Université Paris 7 Denis Diderot
Ralf Meyer	Université de Göttingen
Victor Nistor	Université Paul Verlaine de Metz
Jean Renault	Université d'Orléans
Georges Skandalis	Université Paris 7 Denis Diderot

Claire DEBORD

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL, Clermont-Ferrand
Laboratoire de Mathématiques, UMR CNRS-UBP 6620
Campus des Cézeaux - B.P. 80026
63171 Aubière cedex
France

Téléphone : +33 (0)4 73 40 70 88
Mél : debord@math.univ-bpclermont.fr
Page web : http ://math.univ-bpclermont.fr/∼debord/

À mes formidables filles Lucile et Nina, petites fées magiques qui me prêtent parfois la force d'un super héros ...

Remerciements

En premier lieu, je souhaite remercier Saad Baaj, Moulay Benameur et Ralf Meyer pour l'intérêt qu'ils ont montré à l'égard de ce travail en acceptant de consacrer une partie de leur temps précieux à la lecture de ce mémoire et à la rédaction des rapports. Je les remercie de cette faveur ainsi que de leurs remarques et commentaires éclairés. Je remercie également Julien Bichon d'être mon responsable tutélaire et de penser à moi chaque jour lorsque sonne 11h30.

Georges Skandalis a, dès mon doctorat joué un rôle prépondérant dans mon travail de mathématicienne. Il m'a beaucoup appris et continue de le faire avec talent et patience, son soutien et sa confiance sans failles m'ont souvent portée. J'ai l'immense chance de travailler avec lui depuis quelques années et surtout celle de l'avoir pour ami. Pour tout cela je lui manifeste à nouveau mon extrême reconnaissance.

C'est Jean-Marie Lescure qui m'a initié, avec un enthousiasme contagieux, au problème d'établir une théorie de l'indice des espaces singuliers. Ce sujet, nouveau et difficile pour moi, n'aurait jamais pu aboutir sans sa culture mathématique, sa facilité à poser les bonnes questions et sa détermination à leur trouver une réponse. Je le remercie de m'avoir mené sur ce chemin-là, de m'avoir fait confiance et d'avoir souvent cru pour deux.

C'est avec plaisir que je remercie mes autres collaborateurs Victor Nistor et Frédéric Rochon. Grâce à eux, j'ai pu découvrir et parcourir tout un monde de mathématiques qui m'était inconnu jusque-là.

Un clin d'oeil à André Legrand qui m'avait donné l'étude des quelques pages du livre d'Alain Connes concernant la construction du groupoïde tangent et de sa C^*-algèbre comme sujet de mémoire en maîtrise.

Merci à tous les membres du jury pour leur concours à cette journée du 21 novembre 2014. Je me sens honorée et confuse qu'ils soient tous réunis ce jour pour moi.

Ma délégation au CNRS à l'université Paris VII au premier semestre de l'année 2013 a été déterminante dans ma décision de postuler pour une habilitation à diriger des recherches. J'ai pu alors bénéficier de temps et d'excellentes conditions de travail auprès de l'équipe de géométrie non commutative. J'ai aussi bénéficié de l'accueil chaleureux de Stéphane et Sonia Vassout et de leurs enfants Matteo, Lucie et Clémence à qui j'adresse à nouveau mes remerciements les plus chaleureux pour les bons moments passés ensemble.

Enfin, merci encore à Jean-Marie, Lucile et Nina qui donnent à ces travaux mathématiques tout leur sens.

Avant propos

La théorie de l'indice est née dans les années 50 et a connu une première consécration dans les années 60 avec le théorème de l'indice de M.F. Atiyah et I.M. Singer [AS68]. Ce théorème, d'une grande profondeur mathématique, affirme qu'une grandeur purement analytique, l'indice d'un opérateur elliptique sur une variété compacte, s'exprime à l'aide de quantités topologiques associées à l'opérateur et à la variété. Ce théorème a de nombreuses implications en géométrie, en analyse ou encore en physique mathématique et a inspiré de multiples travaux. A. Connes a le premier révélé comment l'utilisation de groupoïdes pouvait être pertinente dans la généralisation et la compréhension du théorème de l'indice. Précisément, dans les années 70-80, il a introduit le calcul pseudo-différentiel longitudinal sur les feuilletages (réguliers) en utilisant le groupoïde d'holonomie du feuilletage comme une désingularisation de l'espace des feuilles [Co79]. Dans les années 90, il montre que l'indice analytique sur une variété compacte peut en fait être décrit sans faire intervenir d'opérateurs pseudo-différentiels, juste en utilisant un groupoïde de déformations appelé le *groupoïde tangent* [CoBook] et propose une nouvelle preuve du théorème de l'indice.

Les travaux présentés ici portent sur l'étude de situations géométriques singulières via des groupoïdes en géométrie non commutative et s'inscrivent dans le prolongement de ces idées. Plus particulièrement, je m'intéresse à la théorie de l'indice des espaces singuliers. Dans ce manuscrit, nous illustrons divers aspects de ce problème :

- ✿ Les groupoïdes pour désingulariser des espaces géométriques singuliers.
  Il s'agit d'associer à un espace singulier X un groupoïde dont la C^*-algèbre va remplacer l'algèbre des fonctions continues à support compact sur X qui est souvent trop pauvre. Pour cela, il faut construire un groupoïde suffisamment régulier pour permettre la construction d'une C^*-algèbre et d'un calcul pseudo-différentiel, sans pour autant qu'il soit porteur d'informations superflues qui fausseraient l'étude.
- ✿ Les groupoïdes de déformation pour obtenir des théorèmes d'indices et construire des invariants associés.
  Les groupoïdes de déformation sont des groupoïdes différentiables de la forme $G_1 \times \{0\} \cup G_2 \times]0,1] \rightrightarrows M \times [0,1]$ où G_1 et G_2 sont eux même des groupoïdes différentiables de base une variété M. Un tel groupoïde définit naturellement un élément de $KK(C^*(G_1), C^*(G_2))$ et un morphisme de la K-théorie de $C^*(G_1)$ vers celle de $C^*(G_2)$. Dans le cas du groupoïde tangent ce morphisme donne l'indice analytique et l'élément de KK-théorie correspondant donne la dualité de Poincaré en K-théorie.
- ✿ Les groupoïdes pour décrire le calcul pseudo-différentiel.
  A tout groupoïde différentiable correspond un calcul pseudo-différentiel et de nombreux calculs sont apparus comme provenant de groupoïdes naturels. L'approche par les groupoïdes permet de donner un éclairage géométrique à ces calculs et aux indices correspondants.

La synthèse qui suit donne un résumé des constructions et résultats que j'ai obtenus dans ces directions en mettant en avant les idées et laissant de côté les détails techniques. Pour les preuves des résultats mentionnés, ainsi que pour un historique plus complet du sujet, le lecteur est renvoyé aux articles correspondants. Le texte fait référence à deux bibliographies, l'une en fin de document est indexée par les initiales des auteurs et l'autre en début de document, indexée par des chiffres, fait référence aux travaux présentés. Ces articles sont disponibles à l'adresse http ://math.univ-bpclermont.fr/∼debord/ .

Abstract

Index theory was born in the fifties and found a first consecration with the famous Atiyah-Singer Index Theorem [AS68]. This deep result states that a purely analytic quantity, namely the analytical index of an elliptic operator on a compact manifold can be expressed thanks to topological data associated to the operator together with the manifold.This theorem has many applications in geometry, analysis or mathematical physic and has inspired very important works in these fields.

The idea of using smooth groupoids in order to handle pseudodifferential calculi and index theory was initiated by A. Connes. Precisely, in the eighties, A. Connes introduced the longitudinal pseudo differential calculus on a regular foliation using the holonomy groupoid in order to study the space of leaves [Co79]. In the nineties, he showed that the analytical index on a compact manifold can in fact be described with no use of pseudodifferential operators at all, and he used a deformation groupoid, namely the *tangent groupoid* to describe the analytic index and give a proof of the Atiyah-Singer Index Theorem [CoBook].

My research follows these ideas, they are devoted to the study of singular geometrical situations via groupoids in the framework of noncommutative geometry. More precisely, I am interested in index theory for singular spaces. In this manuscript, we will study several aspects of this problem :

- ✿ Groupoids for the study of geometrical singular spaces.
  The goal is to associate to a singular space X a groupoid whose C^*-algebra will replace the algebra of continuous function with compact support on X, which might be to small. To do so, one has to construct a groupoid regular enough in order to get a C^*-algebra and a pseudodifferential calculus but not to big to avoid undesirable information.
- ✿ Deformation groupoids applied to Index Theory and associated invariants.
  Deformation groupoids are those of the form $G_1 \times \{0\} \cup G_2 \times]0,1] \rightrightarrows M \times [0,1]$ where G_1 and G_2 are already smooth groupoids on a manifold M. Such a groupoid defines an element of $KK(C^*(G_1), C^*(G_2))$ and a morphism from the K-theory group of $C^*(G_1)$ to the one of $C^*(G_2)$. In the case of the tangent groupoid, this morphism is the analytic index and the corresponding KK-element gives Poincaré duality in K-theory.
- ✿ Groupoids to get pseudodifferential calculi.
  To any smooth groupoid is associated a pseudodifferential calculus and many calculi appeared as coming from natural groupoids. The groupoid approach gives a geometrical insight to these calculi as well as the corresponding indices.

The following report is a summary of my contribution in these directions. I have attempted to present mostly the ideas and I left out about technics. The proof of the results, as well as a more complete description of the history of the field can be found in the corresponding articles. Two bibliographies are included in this text, one is indexed by the authors initials and can be found at the end of the first part, the second, which is indexed by numbers, refers to the articles presented here and is at the beginning of this document. These articles can be found at the url : http ://math.univ-bpclermont.fr/∼debord/ .

Liste des publications présentées

[1] Claire Debord, Local integration of Lie algebroids. *Lie algebroids and related topics in differential geometry (Warsaw, 2000)*, Banach Center Publ. **54**, Polish Acad. Sci., Warsaw, (2001), 21–33.

[2] Claire Debord, Holonomy groupoids of singular foliations. J. Differential Geom. **58 - no. 3**, (2001), 467–500.

[3] Claire Debord et Jean-Marie Lescure, K-duality for pseudomanifolds with isolated singularities. J. Funct. Anal. **219 - no. 1**, (2005), 109–133.

[4] Claire Debord, Jean-Marie Lescure et Victor Nistor, Groupoids and an index theorem for conical pseudo-manifolds. J. Reine Angew. Math. **628**, (2009), 1–35.

[5] Claire Debord et Jean-Marie Lescure, K-duality for stratified pseudomanifolds. Geom. Topol. **13 - no. 1**, (2009), 49–86.

[6] Claire Debord et Jean-Marie Lescure, Index theory and groupoids. *Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2010), 86–158.

[7] Claire Debord, Jean-Marie Lescure et Frédéric Rochon, Pseudodifferential operators on manifolds with fibred corners. arXiv :1112.4575.

[8] Claire Debord, Longitudinal smoothness of the holonomy groupoid. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **351- no. 15-16**, (2013), 613–616.

[9] Claire Debord et Georges Skandalis, Adiabatic groupoid, crossed product by $\mathbb{R}_+^*$ and pseudodifferential calculus. Adv. Math. **257**, (2014), 66–91.

Table des matières

Remerciements **3**

Avant propos **4**

Abstract **5**

Liste des publications présentées **5**

I Synthèse **8**

Introduction **9**

1 Groupoïdes et désingularisations **12**
1.1 Groupoïdes d'holonomie 13
1.2 Espace tangent 19

2 Groupoïdes de déformation et théorèmes d'indice **26**
2.1 Dualité de Poincaré 27
2.2 Groupoïde de Thom 28
2.2.1 Cas d'une variété compacte 29
2.2.2 Cas d'une pseudo-variété compacte à singularités coniques 31

3 Groupoïdes et opérateurs pseudo-différentiels **33**
3.1 Le S-calcul 35
3.2 Le groupoïde adiabatique de jauge 36

II Résumé des travaux présentés **43**

Première partie

Synthèse

Introduction

Le théorème d'indice de M.F. Atiyah et I.M. Singer peut se représenter par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
K_0(M) \arrow[dr, "M\to pt"'] & K^0(T^*M) \arrow[l, "DP", "\sim"'] \arrow[r, "Thom", "\sim"'] \arrow[d, "Ind_a"] \arrow[dr, "Ind_t"] & K^0(T^*N) \arrow[r, "i_!"] & K^0(T^*\mathbb{R}^n) \arrow[dl, "\sim", "Bott"'] \\
& \mathbb{Z} \arrow[rr, leftrightarrow, "="'] & & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Ici M est une variété lisse compacte, sans bord, plongée dans $\mathbb{R}^n$, N désigne le fibré normal du plongement $i : M \to \mathbb{R}^n$ et DP désigne la dualité de Poincaré. Si V est une variété C^∞ compacte, $K_0(V)$ désigne le groupe de K-homologie, réceptacle naturel des (classes d') opérateurs elliptiques et $K^0(T^*V)$ le groupe de K-théorie réceptacle de leur symbole principal et la dualité de Poincaré n'est rien d'autre que l'application inverse de l'application symbole principal. L'application Ind_a est l'indice analytique et Ind_t l'indice topologique, le théorème stipule que ces deux indices sont égaux.

En utilisant les C^*-algèbres plutôt que les espaces, le diagramme précédent devient :

$$\begin{tikzcd}
K^0(C(M)) \arrow[dr, "M\to pt"'] & K_0(C^*(TM)) \arrow[l, "DP", "\sim"'] \arrow[r, "Thom", "\sim"'] \arrow[d, "Ind_a"] \arrow[dr, "Ind_t"] & K_0(C^*(TN)) \arrow[r] & K_0(C^*(T\mathbb{R}^n)) \arrow[dl, "\sim", "Bott"'] \\
& \mathbb{Z} \arrow[rr, leftrightarrow, "="'] & & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Ainsi, les ingrédients pour un théorème d'indice sont : de bonnes C^*-algèbres représentant un espace donné et son tangent, des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques, un indice analytique, un indice topologique et l'égalité entre les deux.

Il faut noter que l'approche par les groupoïdes permet de donner un éclairage géométrique à ce théorème et rend possible des prolongements à des espaces plus singuliers. Effectivement, dans les années 70-80, A. Connes a introduit le calcul pseudo-différentiel longitudinal pour un feuilletage (régulier) $(M, \mathcal{F})$ [Co79]. Il a pour cela considéré $Hol(M, \mathcal{F})$, le groupoïde d'holonomie du feuilletage, sa C^*-algèbre réduite[1] $C^*(M, \mathcal{F})$ et construit une extension $\Psi^*(M, \mathcal{F})$ de $C^*(M, \mathcal{F})$ qui donne une suite exacte :

$$0 \to C^*(M, \mathcal{F}) \longrightarrow \Psi^*(M, \mathcal{F}) \longrightarrow C(S^*\mathcal{F}) \to 0$$

La construction de A. Connes a pu ensuite être étendue dans de nombreuses situations (*cf.* [MP97, NWX99, LMN00, 7]). De plus, certains calculs pseudo-différentiels connus sont

1. La même constructions s'adapte sans difficulté à la C^*-algèbre maximale.

apparus comme étant associés à certains groupoïdes. Citons par exemple les travaux de B. Monthubert et V. Nistor, A. Weinstein et P. Xu qui permettent de retrouver le b-calcul intensivement étudié par R.B. Melrose (*cf.* [Mo99, Mo03, NWX99]) ou ceux de J-M. Lescure qui montrent que ce même calcul est le calcul naturel associé aux pseudo-variétés à singularités coniques [Les09].

Dans les années 90, A. Connes a montré que l'indice analytique sur une variété compacte M peut être défini sans même utiliser d'opérateurs (pseudo)-différentiels et résulte en fait d'un groupoïde de déformation : le groupoïde tangent [CoBook]. Qui plus est, ce groupoïde produit un élément de Dirac qui vit dans le groupe de K-homologie $KK(C(M)\otimes C_0(T^*M), \mathbb{C})$ et qui fournit la dualité de Poincaré entre les C^*-algèbres $C_0(T^*M)$ et $C(M)$ [CS84, Ka88].

Cette synthèse, propose un aperçu de ma contribution dans ces questions suivant trois directions.

✿ Désingularisation par les groupoïdes [1, 2, 3, 5, 7, 8].

L'objet de ma thèse a été d'étendre la notion de groupoïde d'holonomie aux feuilletages presque réguliers [1, 2]. Cette construction a été très largement généralisée par I. Androulidakis et G. Skandalis dans [AS09] où ils construisent un groupoïde d'holonomie pour tout feuilletage singulier. Ce dernier n'est généralement pas de Lie, néanmoins, je montre dans [8] qu'il est toujours longitudinalement lisse.

Depuis quelques années j'étudie les variétés singulières (pseudo-variétés stratifiées) en vue d'étendre la théorie de l'indice à ce cadre. Il y a deux objets géométriques à désingulariser ici : l'espace lui même et son espace tangent. Dans un travail en collaboration avec J-M. Lescure nous avons proposé un groupoïde, *l'espace* S*-tangent*, qui joue le rôle de l'espace tangent [3, 5]. D'autre part, à toute variété singulière est naturellement associée une variété à coins fibrés, autrement dit un feuilletage singulier sur une variété à coins. Dans un travail en commun avec J-M. Lescure et F. Rochon nous construisons un groupoïde de type *groupoïde d'holonomie* pour de tels espaces [7].

✿ Groupoïdes de déformations et invariants [3, 5, 4].

L'indice d'un opérateur ne dépend que de son symbole principal. De plus l'opération qui consiste à associer son symbole à un opérateur elliptique induit un isomorphisme entre la K-homologie de la variété considérée et la K-théorie de son tangent. Afin de valider notre construction d'espace tangent de pseudo-variétés singulières et de comprendre l'opération « symbole » au niveau de la K-théorie dans ce cadre, nous avons établi une dualité de Poincaré entre l'algèbre des fonctions continues sur la variété singulière et la C^*-algèbre de son espace S-tangent. Pour cela nous construisons un *groupoïde tangent* obtenu comme groupoïde de déformations de l'espace S-tangent sur le groupoïde des couples. La dualité provient d'un élément de KK-théorie naturellement associé à ce groupoïde de déformations [3, 5] .

Dans un travail en collaboration avec J-M. Lescure et V. Nistor, nous montrons comment construire l'indice topologique de M.F. Atiyah et I.M. Singer à l'aide d'un groupoïde de déformations : le *groupoïde de Thom* [4]. C'est encore à l'aide d'un groupoïde de déformations que l'on étend le théorème d'indice de M.F. Atiyah et I.M. Singer aux variétés à singularités coniques isolées.

✿ Groupoïdes et calcul pseudo-différentiel [7, 9].

Avec Jean-Marie Lescure et Frédéric Rochon, nous développons et étudions le calcul pseudo-différentiel associé à une pseudo-variété stratifiée à l'aide de groupoïdes convenables [7].
Dans une collaboration récente avec G. Skandalis nous montrons que le calcul pseudo-différentiel ordinaire sur un groupoïde peut s'interpréter comme une certaine convolution sur un groupoïde plus gros [9].

Mises en garde et notations

Lorsque G est un groupoïde de Lie, on notera généralement $C_r^*(G)$ sa C^*-algèbre réduite et $C_m^*(G)$ sa C^*-algèbre maximale et simplement $C^*(G)$ lorsque les énoncés s'appliquent indifféremment aux deux.
En fait, les différents groupoïdes associés aux pseudo-variétés stratifiées et aux variétés à coins fibrés sont tous moyennables, donc leur C^*-algèbre réduite coïncide avec leur C^*-algèbre maximale qui est de plus nucléaire. Dans le chapitre 3.2, toutes les constructions et résultats restent valables que l'on utilise la complétion réduite ou maximale - il faut juste faire des choix cohérents.

Chapitre 1

Groupoïdes et désingularisations

On souhaite comprendre une situation géométrique singulière comme issue de l'action naturelle d'un groupoïde sur l'espace de ses unités : deux points de l'espace des unités étant dans la même *orbite* si et seulement si ils sont la source et le but d'un même élément du groupoïde. En outre, le groupoïde cherché doit être suffisamment régulier pour que l'on puisse lui associer une C^*-algèbre et un calcul pseudo-différentiel et posséder le moins d'isotropie superflue possible pour être un bon modèle. Ici nous demanderons aux groupoïdes d'être idéalement de Lie ou au minimum de classe $C^{\infty,0}$.

Dans la suite, $G \overset{s}{\underset{r}{\rightrightarrows}} G^{(0)}$ désignera un groupoïde de source s, de but r et d'unités $G^{(0)}$.

Lorsque $x \in G^{(0)}$, on notera $G_x = s^{-1}(x)$, $G^x = r^{-1}(x)$ et $G_x^x = s^{-1}(x) \cap r^{-1}(x)$ qui est le *groupe d'isotropie* au dessus de x.

Le groupoïde sera dit *de Lie* ou *différentiable* lorsque $G^{(0)}$ est une variété séparée et lisse, G est une variété lisse éventuellement non séparée, la source et le but sont des submersions surjectives, l'inclusion des unités $G^{(0)} \to G$ un plongement et l'inversion un difféomorphisme.

Nous parlerons encore de groupoïde de Lie pour désigner la restriction du groupoïde de Lie G à une sous-variété à coins plongées X de $G^{(0)}$ *saturée*, c'est à dire telle que $r(s^{-1}(X)) = X$ et dont toutes les faces sont saturées.

Enfin, on parle de *groupoïde différentiable local* lorsque le produit est seulement défini sur un ouvert de l'ensemble des composables $G^{(2)} = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in G \times G \mid s(\gamma_1) = r(\gamma_2)\}$ contenant la diagonale de $G^{(0)} \times G^{(0)}$.

Une *section locale* d'une submersion lisse $p : M \to N$ entre deux variétés désignera une application $\sigma : U \to M$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un ouvert U de N et telle que $p \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$, l'application identité de U.

Rappelons que *l'algébroïde de Lie* du groupoïde de Lie G est le triplet $(\mathfrak{A}G, \sharp, [\ ,\ ]_{\mathfrak{A}G})$ où :

- $\mathfrak{A}G$ est la restriction à $G^{(0)}$ du noyau de la différentielle ds de la source s.
- Le morphisme $\sharp : \mathfrak{A}G \to TG^{(0)}$ est la restriction de la différentielle dr du but à $\mathfrak{A}G$.
- Lorsque $\gamma \in G$, posons $R_\gamma : G_{r(\gamma)} \to G_{s(\gamma)}$ la multiplication à droite par γ. Si $\mathcal{X} \in \Gamma_c(\mathfrak{A}G)$ est une section $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathfrak{A}G$ on lui associe un champ de vecteur sur G invariant à gauche $Z_\mathcal{X} : \gamma \in G \mapsto dR_\gamma(\mathcal{X}(r(\gamma))$. On définit alors $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_{\mathfrak{A}G} \in \Gamma(\mathfrak{A}G)$ en posant pour $x \in G^{(0)}$, $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_{\mathfrak{A}G}(x) := [Z_\mathcal{X}, Z_\mathcal{Y}](x)$.

Il faut noter que le fibré $\mathfrak{A}G$ est canoniquement isomorphe au fibré normal de l'inclusion des unités $G^{(0)} \to G$.

Il est parfois intéressant d'identifier l'algébroïde de Lie au $\mathcal{C}^\infty(G^{(0)})$-module projectif localement de type fini $\Gamma_c(\mathfrak{A}G)$ des sections $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathfrak{A}G$ à support compact. Précisément on dira (aussi) qu'un *algébroïde de lie* sur une variété M est un triplet $\mathfrak{T} = (\mathcal{T}, \rho, [\ ,\ ]_\mathcal{T})$ où $\mathcal{T}$ est un $\mathcal{C}^\infty(M)$-module projectif localement de type fini, $[\ ,\ ]_\mathcal{T}$ est un crochet de Lie sur $\mathcal{T}$ et $\rho : \mathcal{T} \to \mathfrak{X}_c(M)$ est un morphisme d'algèbre de Lie [1]. De plus, on demande que pour $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{T}$ et f dans $\mathcal{C}^\infty(M)$:

$$[\mathcal{X}, f\mathcal{Y}]_\mathcal{T} = f[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_\mathcal{T} + \rho(\mathcal{X})(f)\mathcal{Y}$$

Si tout groupoïde de Lie admet un algébroïde, il existe des algébroïdes de Lie qui ne sont pas *intégrables*, c'est-à-dire qui ne sont pas l'algébroïde de Lie d'un groupoïde de Lie. Un contre exemple à ce résultat avait été proposé par R. Almeida et P. Molino [AM85]. M'appuyant sur des travaux de J. Pradines et B. Bigonnet [BP85, Pra85, Pra84], j'avais obtenu dans ma thèse l'intégrabilité des algébroïdes de Lie *presque injectifs*, ceux pour lesquels l'ancre $\sharp$ est injective en restriction à un ouvert dense et proposé la construction du « plus petit » groupoïde intégrant ceux-ci(Cf. paragraphe 1.1). Peu de temps après, M. Crainic et R. L. Fernandes ont donné un critère complet d'intégrabilité des algébroïdes de Lie [CF03]. Même lorsque l'on sait qu'un algébroïde de Lie est intégrable, la construction explicite d'un groupoïde qui l'intègre est délicate - de plus les résultats de M. Crainic et R. L. Fernandes fournissent « *le plus gros* » groupoïde alors que l'on cherche souvent « *le plus petit* ». Enfin, récemment, I. Androulidakis et G. Skandalis ont proposé la construction pour tout algébroïde de Lie d'un groupoïde qui n'est pas nécessairement de Lie et qui coïncide avec celui que j'obtenais dans ma thèse dans le cas des algébroïdes de Lie presque injectifs [AS09].

1.1 Groupoïdes d'holonomie

Il s'agit ici de trouver un bon groupoïde pour représenter l'espace des feuilles d'un feuilletage $\mathcal{F}$ éventuellement singulier sur une variété M. Nous préciserons plus tard la définition de feuilletage singulier en considérant dans un premier temps qu'il s'agit d'une partition d'un type particulier de M en sous-variétés immergées.
L'idée naïve qui consiste à prendre le graphe de la relation d'équivalence induite par le feuilletage sur M ne marche pas : même dans le cas d'un feuilletage régulier, celui-ci n'est généralement pas différentiable. On souhaite donc, étant donné un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété M trouver le *plus petit* groupoïde de Lie $G \rightrightarrows M$ dont les orbites sont précisément les feuilles du feuilletage. Ici, *plus petit* signifie :

Définition 1 *Etant donné deux groupoïdes de Lie $G_i \rightrightarrows M$, $i = 1, 2$, définissant les mêmes orbites sur la variété M, on dira que G_1 et G_2 sont comparables et que G_1 est plus petit*

1. Dans toute la suite $\mathfrak{X}(M)$ désigne l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur M et $\mathfrak{X}_c(M) \subset \mathfrak{X}(M)$ ceux qui sont à support compact.

que G_2 lorsqu'il existe un morphisme de groupoïdes $f : G_2 \to G_1$ qui est une submersion surjective et vaut l'identité sur l'espace des unités M.

Il semble alors raisonnable de définir le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de la façon suivante :

Définition 2 (Première tentative) *Le groupoïde d'holonomie de $(M, \mathcal{F})$ est (à isomorphisme près) le plus petit groupoïde de Lie s-connexe dont les orbites sont les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}$.*

Cette définition est parfaite pour traiter le cas des feuilletages réguliers et coïncide alors avec la définition classique de groupoïde d'holonomie [Win83, Pra84, 2]. Malheureusement cette définition est inadaptée dans les cas singuliers, même les plus simples.

Pour s'en convaincre il suffit de considérer le feuilletage $\mathcal{F}_P^\bullet$ du plan $P = \mathbb{R}^2$ admettant deux feuilles : un point $p = \{0\}$ et son complémentaire $P \setminus p = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
On peut comprendre ce feuilletage comme provenant de l'action naturelle par rotations et homothéties de $S^1 \times \mathbb{R}_*^+$ sur $\mathbb{R}^2$. Notons H l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de la structure de groupe non abélien suivante :

$$(t_1, t_2) \cdot (t_3, t_4) = (t_1 + t_3, t_2 + t_4 e^{t_1}),\ (t_1, t_2)^{-1} = (-t_1, -t_2 e^{-t_1}) \text{ et } (0, 0) \text{ pour neutre .}$$

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times H & \to & \mathbb{C} \\ (z; t_1, t_2) & \mapsto & e^{t_1 + i t_2 |z|} \cdot z \end{array}$$

fournit une action de H sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ dont les orbites sont les feuilles de $\mathcal{F}_P^\bullet$. On peut aussi comprendre $\mathcal{F}_P^\bullet$ comme provenant de l'action d'un groupoïde intégrant l'algébroïde de Lie (presque injectif) engendré par les champs de vecteurs $f\frac{\partial}{\partial x}$ et $f\frac{\partial}{\partial y}$ pour un choix donné de fonction lisse et positive $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfaisant $f^{-1}(0) = \{0\}$.

Dans cette situation, plusieurs groupoïdes non comparables représentent le feuilletage et il n'y en a pas de plus petit.

A la lumière de cet exemple il apparaît qu'une bonne notion de feuilletage ne peut pas simplement résider dans la partition en feuilles induite sur la variété sous-jacente et que l'on ne peut pas se passer d'une information de type « dynamique ». Dans des travaux récents I. Androulidakis et G. Skandalis proposent une définition très pertinente pour les *feuilletages singuliers*.

Définition 3 ([AS09]) *Etant donné une variété M, un feuilletage sur M est un sous-module localement de type fini de $\mathfrak{X}_c(M)$ stable par crochet de Lie.*

Ils associent à de tels feuilletages des groupoïdes généralement très singuliers (en particulier la dimension des fibres des applications source et but peut varier) mais pour lesquels ils savent néanmoins construire une C^*-algèbre, un calcul pseudo-différentiel et un indice analytique [AS09, AS11, AS11b].

J'avais, durant ma thèse, étudié le cas des feuilletages de Stefan presque réguliers, c'est-à-dire réguliers en restriction à un ouvert dense. Ceci m'avait conduit à considérer d'une

part les feuilletages définis par des algébroïdes de Lie presque injectifs, ce qui correspond dans la définition de I. Androulidakis et G. Skandalis au cas où le module est projectif, localement de type fini et localement libre et d'autre part des groupoïdes de Lie admettant peu d'isotropie, les *quasi-graphoïdes* introduits par B. Bigonnet et J. Pradines. Plus précisément :

Définition 4 ([BP85, Pra85]) *Un groupoïde de Lie $G \rightrightarrows M$ est un quasi-graphoïde s'il satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1. *Si $\sigma : U \to G$, où U est un ouvert de M, est une section locale à la fois de la source et du but de G alors σ est la restriction à U de l'application unité.*
2. *Si N est une variété et $f, g : N \to G$ sont deux applications différentiables telles que*
   - *$s \circ f = s \circ g$ et $r \circ f = r \circ g$,*
   - *l'une de ces applications (et donc les deux) est une submersion surjective,*

   alors $f = g$.

On se convainc facilement que la structure de groupoïde d'un quasi-graphoïde est entièrement déterminée par sa structure de graphe (i.e. les applications source et but). Les groupoïdes d'holonomie de feuilletages réguliers sont des quasi-graphoïdes, car l'ensemble des points portés par une feuille ayant une holonomie non triviale est maigre. De plus l'algébroïde de Lie d'un quasi-graphoïde est toujours *presque injectif* au sens suivant :

Définition 5 *Un algébroïde $(\mathfrak{A} \to M, \sharp, [\ ,\ ]_{\mathfrak{A}})$ sur M, d'ancre $\sharp$ et de crochet $[\ ,\ ]_{\mathfrak{A}}$ est presque injectif s'il existe un ouvert dense M° de M en restriction duquel l'ancre $\sharp$ est injective.*

De façon équivalente, cela signifie que l'ancre $\sharp$ induit une inclusion du module $\Gamma(\mathfrak{A})$ des sections locales différentiables de $\mathfrak{A}$ vers le module $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs différentiables sur M. Rappelons que le cas des feuilletages réguliers est celui où $\sharp$ est injective.
Le résultat principal de ma thèse est le suivant :

Théorème 1 ([2]) *Tout algébroïde de Lie presque injectif $(\mathfrak{A} \to M, \sharp, [\ ,\ ])$ est intégrable et il existe un unique quasi-graphoïde $G \rightrightarrows M$ s-connexe dont l'algébroïde de Lie est $\mathfrak{A}$.*

Dans le cas des feuilletages réguliers, le quasi-graphoïde s-connexe obtenu est précisément le groupoïde d'holonomie.

La preuve de ce théorème est basée sur les remarques suivantes concernant l'holonomie d'un feuilletage régulier $(M, \mathcal{F})$.

Le cas régulier.

- Plutôt que de considérer les (germes de) difféomorphismes entre petites transversales au feuilletage portés par des chemins sur les feuilles, on peut considérer tous les (germes de) difféomorphismes entre petites transversales. Cela donne un groupoïde de Lie, $\mathcal{Q}(\mathcal{F}) \rightrightarrows M$ dont la composante s-connexe est exactement le groupoïde d'holonomie $\mathcal{H}(\mathcal{F})$.

✿ Etant donné deux feuilletages $(M_i, \mathcal{F}_i)$ définis par des submersions surjectives $\pi_i : M_i \to T_i$ (pour $i = 1, 2$), un difféomorphisme $h : T_1 \to T_2$ détermine une équivalence de Morita [2] entre les groupoïdes d'holonomie $\mathcal{H}(\mathcal{F}_1)$ et $\mathcal{H}(\mathcal{F}_2)$ au sens de [MRW87] :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(\mathcal{F}_2) \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & Z_h \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[dr, "p_1"] & \mathcal{H}(\mathcal{F}_1) \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\ M_2 & & M_1 \end{tikzcd}$$

où $Z_h = \{(x, y) \in M_2 \times M_1 \mid h(\pi_1(y)) = \pi_2(x)\}$.
Inversement, toute équivalence de Morita entre $\mathcal{H}(\mathcal{F}_1)$ et $\mathcal{H}(\mathcal{F}_2)$ est de ce type.
Cette simple remarque, permet d'obtenir une nouvelle définition d'isomorphismes entre espaces de feuilles qui garde un sens lorsque les feuilletages ne sont plus aussi simples mais sont néanmoins définis par des groupoïdes différentiables locaux.

Un feuilletage régulier étant localement trivial, on peut donc retrouver le groupoïde d'holonomie de la façon suivante :

✿ On se donne une trivialisation du feuilletage $(\pi_i : U_i \to T_i)_{i \in I}$, c'est-à dire que $M = \bigcup_{i \in I} U_i$, pour tout i l'application $\pi_i : U_i \to T_i$ est une submersion surjective d'un ouvert U_i de M sur une variété T_i et le feuilletage $\mathcal{F}$ restreint à U_i est précisément celui déterminé par π_i sur U_i. On définit alors le groupoïde différentiable local suivant :

$$\mathcal{H}_{loc}(\mathcal{F}) = \bigcup_{i \in I} U_i \underset{\pi_i}{\times} U_i \rightrightarrows M$$

✿ On considère ensuite le pseudogroupe des équivalences de Morita locales de $\mathcal{H}_{loc}(\mathcal{F})$ dans $\mathcal{H}_{loc}(\mathcal{F})$. Ici « local » signifie que ces équivalences de Morita s'effectuent entre des sous-groupoïdes locaux de $\mathcal{H}_{loc}(\mathcal{F})$.

✿ Une notion de germe d'équivalence de Morita local permet d'obtenir un groupoïde différentiable $\mathcal{Q}(\mathcal{F})$ et il n'y a plus qu'à considérer sa composante s-connexe pour retrouver $\mathcal{H}(\mathcal{F})$.

Le cas presque régulier. On peut procéder de façon équivalente pour associer un groupoïde d'holonomie à un algébroïde de Lie presque injectif $\mathfrak{A}$.

✿ La première étape consiste à produire une intégration locale de $\mathfrak{A}$ en un groupoïde différentiable local. Il s'agit de munir un voisinage de la section nulle de $\mathfrak{A}$ d'une structure de groupoïde local. Ce problème est grandement simplifié ici par la presque injectivité de $\mathfrak{A}$ qui permet d'établir des formules de type Baker-Campbel-Hausdorff dans ce cadre.
Précisément, on se donne $\mathcal{X} = \big(X_i\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de sections lisses locales de $\mathfrak{A}$ définies sur un ouvert U de M et pour $i \in [\![1, n]\!]$ on note $Y_i = \sharp(X_i)$ le champ de vecteurs correspondant. Pour $\xi = (\xi_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$, notons $Z_\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i Y_i$ et (lorsqu'il existe) Ψ_ξ^s le flot pris en s du champ de vecteurs Z_ξ.

2. C'est-à dire que Z_h est une variété lisse, p_1 et p_2 sont deux submersions surjectives, Z_h admet une action libre et propre de $\mathcal{H}(\mathcal{F}_1)$ à droite relativement à p_1 transitive sur les fibres de p_2 et une action libre et propre de $\mathcal{H}(\mathcal{F}_2)$ à gauche relativement à p_2 transitive sur les fibres de p_1 et que ces deux actions commutent.

Proposition 1 ([1]) *Il existe un ouvert W de $U \times \mathbb{R}^n$ contenant $U \times \{0\}$ et une unique structure de quasi-graphoïde local sur W admettant $s_{\mathcal{X}}$ pour source et $r_{\mathcal{X}}$ pour but où*

$$s_{\mathcal{X}} : (x, \xi) \mapsto x \quad et \quad r_{\mathcal{X}} : (x, t) \mapsto \Psi^1_\xi(x) \ .$$

On peut noter que $r_{\mathcal{X}} = Exp(Z_\xi(x))$. Un autre choix de base de sections lisses locales de $\mathfrak{A}$ définies sur l'ouvert U, $\mathcal{X}'$, donne lieu à un quasi-graphoïde local W' *localement canoniquement isomorphe* à W : quitte à restreindre W et W' autour de $U \times \{0\}$, il existe un unique isomorphisme $h : W \to W'$ qui satisfait $s_{\mathcal{X}'} \circ h = s_{\mathcal{X}}$ et $r_{\mathcal{X}'} \circ h = r_{\mathcal{X}}$.

Cette construction fournit alors un *atlas généralisé* du feuilletage $(M, \mathcal{F})$ constitué de groupoïdes locaux sur des ouverts de M, et même mieux, ces groupoïdes locaux se recollent pour former un quasi-graphoïde local $\mathcal{H}_{loc}(\mathcal{F}) \rightrightarrows M$.

✿ On considère alors le pseudogroupe des équivalences de Morita locales de $\mathcal{H}_{loc}(\mathcal{F})$, puis le groupoïde des germes $\mathcal{Q}(\mathcal{F})$, enfin la composante s-connexe de $\mathcal{Q}(\mathcal{F})$ est le groupoïde cherché.

Un ingrédient essentiel pour montrer la proposition précédente est le *period bounding lemma* qui affirme qu'un champ de vecteur sur une variété compacte qui admet des orbites périodiques admet une borne inférieure strictement positive pour la période de ses orbites périodiques [AR67]. Ce résultat permet d'obtenir qu'il n'existe pas de section locale à la fois à $s_{\mathcal{X}}$ et à $r_{\mathcal{X}}$ qui soit non triviale. Ainsi la structure de groupoïde local (si elle existe) est prescrite par la structure de graphe et ces graphes se recollent.

Application au cas général. Cette même idée a été essentielle pour montrer que les groupoïdes définis par I. Androulidakis et G. Skandalis sont systématiquement longitudinalement lisse. Précisons un peu le cadre et leur construction [AS09].

Dans la suite M est une variété lisse et $\mathcal{F}$ un feuilletage sur M, c'est-à-dire un sous-module de $\mathfrak{X}_c(M)$ localement finiment engendré et stable par crochet de Lie.

Une *bi-submersion* de $\mathcal{F}$ est un triplet (N, r_N, s_N) où N est une variété, $r_N, s_N : N \to M$ sont des submersions telles que :

$$r_N^{-1}(\mathcal{F}) = s_N^{-1}(\mathcal{F}) \ \text{ et } \ s_N^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{C}_c^\infty(N; \ker(ds_N)) + \mathcal{C}_c^\infty(N; \ker(dr_N)) \ .^{3}$$

L'*inverse* de (N, r_N, s_N) est (N, s_N, r_N) et si (T, r_T, s_T) est une autre bi-submersion pour $\mathcal{F}$, la *composition* est donnée par

$$(N, r_N, s_N) \circ (T, r_T, s_T) := (N \times_{s_N, r_T} T, r_N \circ p_N, s_T \circ p_T)$$

où p_N et p_T sont les projections naturelles du produit fibré $N \times_{r_N, r_T} T$ sur N et sur T.

Un *morphisme* de (N, r_N, s_N) vers (T, r_T, s_T) est une application lisse $h : N \to T$ telle que $s_T \circ h = s_N$ et $r_T \circ h = r_N$. Un morphisme sera dit *local* lorsqu'il est défini uniquement sur un ouvert de N.

Enfin, une bi-submersion peut être *restreinte* : si U est un ouvert de N, (U, r_U, s_U) est encore une bi-submersion, où r_U et s_U sont les restrictions de r_N et s_N à U.

3. Si $h : N \to M$ est une submersion $\mathcal{C}^\infty$, $h^{-1}(\mathcal{F})$ est l'espace vectoriel engendré par les champs de vecteurs fZ où $f \in \mathcal{C}_c^\infty(N)$ et $Z \in \mathfrak{X}(N)$ est projetable par dh et tel que $dh(Z) \in \mathcal{F}$.

Lorsque x est un point de M, la *fibre* de $\mathcal{F}$ en x est le quotient $\mathcal{F}_x := \mathcal{F}/I_x\mathcal{F}$, où $I_x = \{f \in \mathcal{C}_c^\infty(M) \mid f(x) = 0\}$. Soit $\mathcal{X} = (X_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{F}^n$ tel que $\mathcal{X}_x = ([X_i]_x)_{i\in[\![1,n]\!]}$ forme une base de $\mathcal{F}_x$. Comme dans la proposition 1, lorsque $\xi = (\xi_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$, on considère le champ de vecteurs $X_\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i X_i$ et Ψ_ξ^s désigne le flot pris en s du champ de vecteurs à support compact X_ξ. On considère les deux submersions de $M \times \mathbb{R}^n$ dans M :

$$(s_{\mathcal{X}}, r_{\mathcal{X}}) : M \times \mathbb{R}^n \to M \times M \ ; \ (x, \xi) \mapsto (x, \Psi_\xi^1(x)).$$

Proposition 2 (Cf. Proposition 2.10 et 3.11 de [AS09])

1. *Il existe un voisinage ouvert W de $(x, 0)$ dans $M \times \mathbb{R}^n$ tel que (W, r_W, s_W) soit une bi-submersion, où r_W et s_W sont les restrictions des applications $r_{\mathcal{X}}$ et $s_{\mathcal{X}}$ à W. Une telle bi-submersion est appelée une bi-submersion de chemin d'holonomie minimale en x.*
2. *Soit (N, r_N, s_N) une bi-submersion, γ dans N avec $s_N(\gamma) = r_N(\gamma) = x$ et supposons qu'il existe une section locale lisse σ à la fois de r_N et de s_N définie sur un voisinage de x dans M et telle que $\sigma(x) = \gamma$. Il existe alors un morphisme local de bi-submersion autour de γ de N vers W qui envoie γ sur $(x, 0)$. Un tel morphisme sera nécessairement une submersion en γ.*

Notons que la restriction autour de $(x, 0)$ d'une bi-submersion de chemin d'holonomie minimale en x est encore une bi-submersion de chemin d'holonomie minimale en x.

L'*atlas des chemins d'holonomie* est la famille $\mathcal{U} = (U_i, r_i, s_i)_{i\in I}$ de bi-submersions de $\mathcal{F}$ engendrée par les bi-submersions de chemin d'holonomie et stable par restrictions, compositions et inversions de bi-submersions.

Le *groupoïde d'holonomie* de $\mathcal{F}$ est le quotient $G(\mathcal{U}) = \sqcup_{i\in I} U_i/_\sim$ où $u \in U_i$ est équivalent à $v \in V_j$ si et seulement si il existe un morphisme local de U_i dans V_j qui envoie u sur v. lorsque (U, r_U, s_U) est un élément de $\mathcal{U}$ et $u \in U$, on notera $[U, r_U, s_U]_u$ son image dans $G(\mathcal{U})$.

Les morphismes structurels de $G(\mathcal{U})$ sont donnés par :

- La source $s\big([U, r_U, s_U]_u\big) = s_U(u)$ et le but $r\big([U, r_U, s_U]_u\big) = r_U(u)$.
- L'application unités $x \in M \mapsto [W, r_W, s_W]_{(x,0)}$ où W est une bi-submersion de chemin d'holonomie minimale en x.
- L'inverse $[U, r_U, s_U]_u^{-1} = [U, s_U, r_U]_u$.
- Le produit $[U, r_U, s_U]_u \cdot [V, r_V, s_V]_v = [(U, r_U, s_U) \circ (V, r_V, s_V)]_{(u,v)}$ lorsque $s_U(u) = r_V(v)$.

Le groupoïde d'holonomie est muni de la topologie quotient qui peut être assez singulière. En particulier, la dimension des fibres peut varier. On dit qu'il est *longitudinalement lisse* au dessus de $x \in M$ lorsque la topologie induite sur $G(\mathcal{U})_x = s^{-1}(x)$ fait de $G(\mathcal{U})_x$ une variété lisse.

J'ai montré dans [8] que le groupoïde d'holonomie $G(\mathcal{U})$ est toujours longitudinalement lisse, précisément, avec les notations précédentes, je montre un analogue du period bounding lemma :

Proposition 3 ([8]) *Si la famille $\mathcal{X}_x = ([X_i]_x)_{i\in[\![1,n]\!]}$ forme une base de $\mathcal{F}_x$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que si $(Id, h) : M \to M \times \mathbb{R}^n$ est une section locale lisse de $r_{\mathcal{X}}$ alors $\|h(x)\| \geq \eta$ où $h(x) = (x, 0)$.*

Cette proposition permet de montrer que, quitte à être restreinte autour de $(x, 0)$, une bi-submersion de chemin d'holonomie minimale en x, (W, r_W, s_W) vérifie toujours que l'application quotient $W_x := s_W^{-1}(x) \to G(\mathcal{U})$ est injective. On peut alors en déduire :

Proposition 4 ([8]) *Le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage singulier est toujours longitudinalement lisse.*

Ce résultat répond à une question laissée en suspens dans [AS09] et étudiée par I. Androulidakis et M. Zambon dans [AZ13]. Cela permet de simplifier les constructions faites dans [AS11, AS11b] et offre un nouvel éclairage sur les travaux de M. Crainic et R.L. Fernandes ainsi que ceux de K. Mackenzie sur l'obstruction à l'intégrabilité des algébroïdes de Lie transitifs.

1.2 Espace tangent

Les résultats présentés ici sont pour l'essentiel issus de travaux en collaboration avec J.-M. Lescure.
Nous étudions des pseudo-variétés du type Thom Matter [Whi65, Mat73, Ver84] (voir aussi [HW01] pour un panorama du sujet). Ces variétés singulières forment une large classe d'exemples d'objets possédant une riche structure géométrique et où certaines des propriétés des variétés différentiables subsistent. Par contre, elles ne sont pas pourvues d'espaces tangents au sens usuel, ni en général d'une théorie de l'indice au sens de M.F. Atiyah et I.M. Singer.
Il s'agit donc de trouver un groupoïde de Lie pour représenter l'espace tangent d'une pseudo-variété stratifiée compacte ${}^{\mathsf{S}}X$, on parlera alors *d'espace* S*-tangent*, l'objectif étant d'étendre la théorie de l'indice à ce cadre. En particulier, la C^*-algèbre réduite de ce groupoïde doit être Poincaré duale à $C({}^{\mathsf{S}}X)$ et le réceptacle naturel des classes de symbole d'opérateurs adaptés à cette situation. Il est apparu que plusieurs groupoïdes répondent à cette question, tous KK-équivalents entre eux.

Précisons tout d'abord la nature des variétés singulières que l'on considère, la définition suivante est empruntée à [Ver84] (voir aussi [BHS91]).
Soit ${}^{\mathsf{S}}X$ un espace topologique séparable, localement compacte et métrisable. Une *stratification* C^∞ sur ${}^{\mathsf{S}}X$ est une paire (S, N) telle que :

1. $\mathsf{S} = \{s_i\}$ est une partition localement finie de ${}^{\mathsf{S}}X$ en sous-ensembles localement fermés appelés les *strates*. Les strates sont des variétés C^∞ qui satisfont :

$$s_0 \cap \bar{s_1} \neq \emptyset \text{ si et seulement si } s_0 \subset \bar{s_1}.$$

   Dans ce cas on note $s_0 \leq s_1$ et $s_0 < s_1$ si de plus $s_0 \neq s_1$.
2. $N = \{{}^{\mathsf{S}}\mathcal{N}_s, \pi_s, \rho_s\}_{s \in \mathsf{S}}$ est l'ensembles des *données de contrôle*, c'est-à-dire :
   ${}^{\mathsf{S}}\mathcal{N}_s$ est un voisinage ouvert de s dans ${}^{\mathsf{S}}X$, $\pi_s :\ {}^{\mathsf{S}}\mathcal{N}_s \to s$ est une retraction continue et $\rho_s :\ {}^{\mathsf{S}}\mathcal{N}_s \to [0, +\infty[$ est une application continue telle que $s = \rho_s^{-1}(0)$. On demande aussi à l'application ρ_s d'être soit surjective soit identiquement nulle (lorsque $s = {}^{\mathsf{S}}\mathcal{N}_s$ est ouvert dans X) et que si ${}^{\mathsf{S}}\mathcal{N}_{s_0} \cap s_1 \neq \emptyset$, alors l'application

$$(\pi_{s_0}, \rho_{s_0}) :\ {}^{\mathsf{S}}\mathcal{N}_{s_0} \cap s_1 \to s_0 \times]0, +\infty[$$

est une submersion $\mathcal{C}^\infty$ et propre.

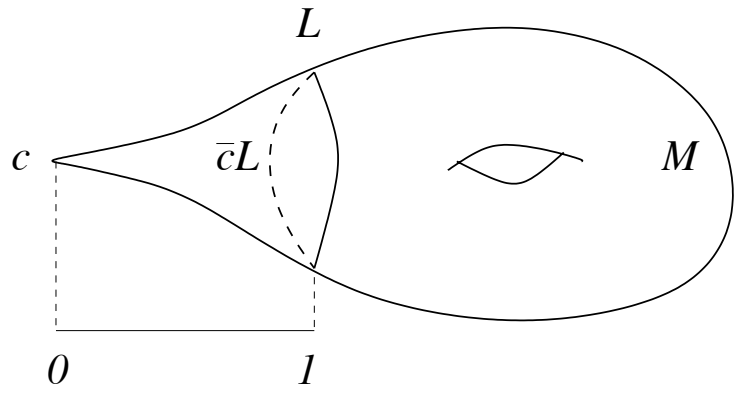
3. Pour toutes strates s, t telles que $s < t$, l'ensemble $\pi_t({}^{\mathsf{S}}\mathcal{N}_s \cap {}^{\mathsf{S}}\mathcal{N}_t)$ est inclus dans ${}^{\mathsf{S}}\mathcal{N}_s$ et les égalités
$$\pi_s \circ \pi_t = \pi_s \text{ et } \rho_s \circ \pi_t = \rho_s$$
sont satisfaites sur ${}^{\mathsf{S}}\mathcal{N}_s \cap {}^{\mathsf{S}}\mathcal{N}_t$.
4. Pour toutes strates s_0 et s_1 les assertions suivantes sont satisfaites,
$$s_0 \cap \bar{s_1} \neq \emptyset \text{ si et seulement si } {}^{\mathsf{S}}\mathcal{N}_{s_0} \cap s_1 \neq \emptyset;$$
$${}^{\mathsf{S}}\mathcal{N}_{s_0} \cap {}^{\mathsf{S}}\mathcal{N}_{s_1} \neq \emptyset \text{ si et seulement si } s_0 \subset \bar{s_1},\ s_0 = s_1 \text{ où } s_1 \subset \bar{s_0}.$$

Une stratification induit une filtration sur ${}^{\mathsf{S}}X$, en effet, notons ${}^{\mathsf{S}}X_j$ l'union des strates de dimension $\leq j$ alors :
$$\emptyset \subset^{\mathsf{S}} X_0 \subset \cdots \subset^{\mathsf{S}} X_n =^{\mathsf{S}} X.$$
On dira que n est la dimension de ${}^{\mathsf{S}}X$ et que $X^\circ :=^{\mathsf{S}} X \setminus {}^{\mathsf{S}}X_{n-1}$ est la partie régulière de ${}^{\mathsf{S}}X$. Les strates contenues dans X° sont dites *régulières* alors que celles contenues dans ${}^{\mathsf{S}}X \setminus X^\circ$ sont dites *singulières*. On notera S_{sing} (resp. S_{reg}) l'ensemble des strates singulières (resp. régulières).

On dispose d'une notion de *profondeur* qui mesure la complexité de la stratification. Considérant la relation d'ordre partielle sur S, la *profondeur* d'un élément s est le plus grand entier k tel qu'il existe une chaine totalement ordonnée $s_0,\ s_1, \cdots, s_{k-1}$ de longueur k telle que
$$s_0 < s_1 < \cdots < s_{k-1} < s_k := s$$
La *profondeur de la stratification* est alors la borne supérieure des profondeurs des éléments de S.

Définition 6 *Une pseudo-variété stratifiée est un triplet* $({}^{\mathsf{S}}X, \mathsf{S}, N)$ *où* ${}^{\mathsf{S}}X$ *est un espace localement compact, séparable et métrisable,* (S, N) *est une stratification* C^∞ *sur* ${}^{\mathsf{S}}X$ *et la partie régulière* X° *est un ouvert dense de* ${}^{\mathsf{S}}X$.

Le cas des singularités coniques. Pour comprendre l'idée sous-jacente à notre construction *d'espace* S*-tangent* il faut regarder la cas d'une variété à singularité conique. Supposons que M soit une variété à bord et notons L son bord. On note alors $\bar{c}L = L \times [0,1]/L \times \{0\}$ le *cône sur* L, c'est-à dire le quotient de $L \times [0,1]$ par la relation d'équivalence induite par $(x,0) \sim (y,0)$ pour tout $x,\ y \in L$. On obtient alors une pseudo-variété stratifiée X en recollant bord à bord M avec cL.



Notons c le point singulier, $X^\circ = X \setminus c$ et $O_X = L \times]0,1[\subset X^\circ$.
On voudrait recoller le tangent $Tc = c \times \{0\}$ au point c au tangent usuel de la variété X°. On a évidement un problème de dimension.
Rappelons que nous souhaitons définir un bon espace tangent au niveau de la K-théorie et que nous souhaitons trouver un groupoïde de Lie pour cela. Aussi, on peut travailler à équivalence de Morita de groupoïde près. Une définition alternative de l'équivalence de Morita de groupoïde utilise la notion de tiré en arrière d'un groupoïde par une submersion :

Définition 7 *Si $G \underset{r}{\overset{s}{\rightrightarrows}} G^{(0)}$ est un groupoïde de Lie et $f : N \to G^{(0)}$ une submersion surjective d'une variété N dans $G^{(0)}$, le tiré en arrière de G par f est le groupoïde de Lie*

$$^*f^*G := \{(x,\gamma,y) \in N \times G \times N \mid r(\gamma) = f(x),\ s(\gamma) = f(y)\} \rightrightarrows N$$

où les applications source et but sont respectivement

$$(x,\gamma,y) \mapsto y\ ,\ (x,\gamma,y) \mapsto x\ .$$

Le produit et l'inversion sont donnés par

$$(x,\gamma,y)(y,\eta,z) = (x,\gamma\eta,z) \text{ lorsque } s(\gamma) = r(\eta) \text{ et } (x,\gamma,y)^{-1} = (y,\gamma^{-1},x)\ .$$

On montre facilement que le groupoïde G est Morita équivalent à $^*f^*G$ [MRW87]. Mieux encore on peut montrer que l'équivalence de Morita est la relation d'équivalence engendrée par les $G \sim {}^*f^*G$.
Précisément deux groupoïdes de Lie $G \rightrightarrows M$ et $H \rightrightarrows N$ sont *Morita équivalents* si et seulement si il existe une variété Z munie de deux submersions surjectives $p : Z \to M$ et $q : Z \to N$ telles que les tirés en arrière $^*p^*G \rightrightarrows Z$ et $^*q^*H \rightrightarrows Z$ soient isomorphes.

Revenons au problème de trouver un espace tangent à X ou encore de recoller ensemble Tc avec TX°. Puisque Tc est trop petit, il suffit de le remplacer par un groupoïde plus gros qui lui est Morita équivalent. On définit alors

$$T^{\mathsf{S}}X = TX^\circ|_{X^\circ \setminus O_X} \sqcup {}^*\pi^*(Tc) = TX^\circ|_{X^\circ \setminus O_X} \sqcup O_X \times O_X \rightrightarrows X^\circ$$

Où $\pi : O_X \to c$ est la projection naturelle. Ici $^*\pi^*(Tc)$ est simplement le groupoïde des couples sur O_X puisque $Tc = c \times \{0\}$.

Dans le cas plus général d'une strate singulière s non réduite à un point, on applique la même idée qui consiste à tirer en arrière le tangent à s sur un petit collier par la projection naturelle afin de le recoller au tangent usuel.

Moyennant le choix d'une *fonction de recollement* $\tau : \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}$ positive, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et telle que $\tau^{-1}(0) = [1, +\infty[$, $T^{\mathsf{S}}X$ est muni d'une structure de groupoïde de Lie (qui dépend du choix de τ) compatible avec la structure usuelle sur $T^{\mathsf{S}}X|_{X^\circ \setminus L \times \{1\}}$.
Notons $\tilde{\tau} : X^\circ \to \mathbb{R}$ l'application naturelle induite par τ.

Définition-Proposition 1 ([3]) *Le groupoïde $T^{\mathsf{S}}X \rightrightarrows X^\circ$ admet une structure de groupoïde de Lie compatible avec la structure usuelle en dehors de $L \times \{1\}$ et dont l'algébroïde de Lie est le fibré TX° avec pour ancre $\sharp : (x, X) \mapsto (x, \tilde{\tau}(x)X)$.*
Un tel groupoïde est un espace S-tangent pour X.

Remarquons que l'espace des orbites $X^\circ/T^{\mathsf{S}}X$ de $T^{\mathsf{S}}X$ est un espace topologique non séparé qui admet les mêmes fonctions continues que X : moyennant une reparamétrisation du cône on a $C(X) = C(X^\circ/T^{\mathsf{S}}X)$.

Le cas des pseudo-variétés stratifiées générales. Nous avons appliqué la même idée dans le cas des pseudo-variétés stratifiées générales - pour respecter des contraintes de géométrie différentielle il est nécessaire d'être très vigilant dans la façon de tirer en arrière les tangents aux strates. La principale contrainte étant que la dimension des orbites d'un groupoïde de Lie est nécessairement semi-continue inférieurement.
Avec les notations de la définition 6 on considère une pseudo-variété compacte $({}^{\mathsf{S}}X, \mathsf{S})$ équipée de données de contrôle $(\mathcal{N}_s, \pi_s, \rho_s)_{s \in \mathsf{S}}$. Pour toute strate s, notons $O_s = \{x \in X^\circ \mid \rho_s < 1\}$ où X° désigne encore la partie régulière. On pose :

$$T^{\mathsf{S}}X = \bigsqcup_{s \in \mathsf{S}} {}^*\pi_s^*(Ts)|_{O_s \setminus \cup_{t<s} O_t} \rightrightarrows X^\circ \tag{1.2.1}$$

Rappelons que $t < s$ signifie que $\bar{t} \subset \bar{s}$ et $s \neq t$, et ${}^*\pi_s^*(Ts)$ désigne encore le tiré en arrière par π_s (au sens des groupoïdes) du tangent Ts à s. On montre alors :

Théorème 2 ([5]) *Le groupoïde $T^{\mathsf{S}}X$ possède une structure de groupoïde de Lie compatible avec celles de chaque strate. De plus $T^{\mathsf{S}}X$ est moyennable.*

Nous verrons au chapitre suivant que ce groupoïde répond au cahier des charges fixé, à savoir que sa C^*-algèbre est Poincaré duale à $C({}^{\mathsf{S}}X)$. Un tel groupoïde est appelé un *espace S-tangent pour ${}^{\mathsf{S}}X$*.

Construction alternative

Lors de travaux avec J.-M. Lescure et F. Rochon nous avons obtenu une construction alternative de l'espace S-tangent qui ne dépend plus du choix arbitraire d'une fonction de recollement. En contre partie, le groupoïde obtenu n'est plus de Lie, mais de classe $\mathcal{C}^{\infty,0}$.
Cette approche utilise la correspondance naturelle existante entre pseudo-variétés stratifiées et *variétés à coins fibrés*.
La définition ci-dessous est donnée dans [7], voir [ALMP12] pour une définition équivalente.

Définition 8 ([7]) *Soit X une variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte à coins et $H_1, \ldots, H_k$ ses hypersurfaces de bord. On suppose que chaque H_i est l'espace total d'une fibration $\pi_i : H_i \to S_i$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de base une variété à coins S_i. La collection des fibrations $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ est appelée structure fibrée itérée s'il existe un ordre partiel sur l'ensemble $\mathcal{H}(X)$ des hypersurfaces de bord tel que :*

1. *Pour tout sous-ensemble $I \subset \{1, \ldots, k\}$ qui est tel que $\bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$, l'ensemble $\{H_i \mid i \in I\}$ est totalement ordonné.*
2. *Si $H_i < H_j$, alors $H_i \cap H_j \neq \emptyset$, $\pi_i : H_i \cap H_j \to S_i$ reste une submersion surjective et $S_{ji} := \pi_j(H_i \cap H_j) \subset S_j$ est une des hypersurfaces de bord de S_j. De plus, il existe une submersion (surjective) $\pi_{ji} : S_{ji} \to S_i$ telle que sur $H_i \cap H_j$, on a l'égalité $\pi_{ji} \circ \pi_j = \pi_i$.*
3. *Les hypersurfaces de bord de S_j sont exactement les S_{ji} avec $H_i < H_j$. En particulier si H_i est minimale, alors S_i est une variété compacte sans bord.*

Une variété à coins fibrés est une variété à coins X munie d'une structure fibrée itérée π.

On dispose à nouveau d'une notion de *profondeur* qui mesure la complexité des structures fibrées itérées : la profondeur d'une hypersurface de bord $H \in \mathcal{H}(X)$ est le plus grand entier k tel qu'il existe un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{H}(X)$ de cardinal $k+1$ dont H est le plus grand élément. La profondeur de la variété à coins fibrés est la borne supérieure des profondeurs des éléments de $\mathcal{H}(X)$.

Rappelons qu'un *tube* pour une hypersurface H de X est un triplet $(\mathcal{N}_H, r_H, x_H)$ où

- $\mathcal{N}_H$ est un voisinage ouvert de H dans X ;
- $x_H \in \mathcal{C}^\infty(X)$ est une *fonction de définition* de H : x_H est positive sur $X \setminus H$, satisfait $x_H^{-1}(0) = H$ et dx_H ne s'annule pas sur H ;
- $r_H : \mathcal{N}_H \to H$ est une rétraction lisse ;

le tout tels que $(r_H, x_H) : \mathcal{N}_H \to H \times [0, \infty)$ est un difféomorphisme sur son image.

On montre dans [7] comment choisir un système de tubes pour les hypersurfaces de bord qui soit « compatible » avec la structure fibrée itérée. Précisément, on a :

Définition-Proposition 2 ([7]) *Il existe un système de tubes fibrés itérés sur X, c'est-à dire une famille de voisinage colliers (ou système de tubes) $(\mathcal{N}_i, r_i, x_i)$ pour H_i, $i = 1, \ldots, k$ qui satisfont pour tout $H_i < H_j$:*

$$r_j(\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j) \subset \mathcal{N}_i, \;\; x_i \circ r_j = x_i, \;\; \pi_i \circ r_i \circ r_j = \pi_i \circ r_i \text{ sur } \mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j,$$

et la restriction à H_j de la fonction x_i est constante sur les fibres de π_j.

Correspondance stratification/structure fibrées itérées. L'idée de cette correspondance est très simple, il faut néanmoins prendre quelques précautions pour en écrire les détails que j'omets ici et qui se trouvent dans [7] .

✿ Etant donnée une variété à coins fibrés X, d'hypersurfaces de bord fibrés $H_1, \ldots, H_k$ et de structure fibrée itérée $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$, on considère la relation d'équivalence sur X engendrée par :

$$x \sim y \text{ s'il existe } i \in [\![1, k]\!] \text{ tel que } x, y \in H_i \;\text{ et }\; \pi_i(x) = \pi_i(y).$$

On note ${}^{\mathsf{S}}X$ l'espace quotient de X pour cette relation d'équivalence et $q : X \to {}^{\mathsf{S}}X$ l'application quotient. Par construction, la restriction de q à $X \backslash \partial X$ est un homéomorphisme sur son image. Nous prouvons dans [7] que ${}^{\mathsf{S}}X$ possède une structure naturelle de pseudo-variété stratifiée dès qu'un système de tubes fibrés itérés sur X est fixé.

✿ Inversement si (X, S, N) est une pseudo-variété stratifiée, notons ${}^{\mathsf{FC}}X = \{x \in X \mid \forall s \in \mathsf{S}_{sing},\ \rho_s(x) \geq 1\}$. Pour toute strate singulière s, posons $H_s := \rho_s^{-1}(1)$ et notons encore π_s la restriction de π_s à H_s. On vérifie alors que ${}^{\mathsf{FC}}X$ possède une structure naturelle de variété à coins fibrés.

A quelques reparamétrisations et identifications près, les deux opérations ci-dessus sont mutuellement inverses.

Feuilletage associé au S-calcul. Soit donc X une variété à coins fibrés, correspondant à un espace stratifié compact ${}^{\mathsf{S}}X$ de profondeur k arbitraire. Les hypersurfaces de bord sont notées $H_i, i \in I$, leur fonction de définition x_i et leur fibration $\pi_i : H_i \to S_i$. On notera $\partial X = \bigcup_{i \in I} H_i$ et $X^\circ = X \setminus \partial X$ l'intérieur de X. On a évidemment un difféomorphisme entre X° et la partie régulière ${}^{\mathsf{S}}X^\circ$ de ${}^{\mathsf{S}}X$. On désigne par $\mathcal{V}(X)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur X et $\mathcal{V}_b(X)$ la sous algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents aux hypersurfaces de bord (b-champs de vecteurs).
L'algèbre de Lie des champs de vecteurs « naturelle » dans notre contexte est alors :

$$\mathcal{V}_{\mathsf{S}}(X) := \{\xi \in \mathcal{V}_b(X)\ ;\ \xi|_{H_i} \in \ker d\pi_i \text{ et } \xi x_i \in x_i^2 \mathcal{C}^\infty(X)\ \forall i\}. \tag{1.2.2}$$

On appellera ces champs de vecteurs les S-champs de vecteurs.

Les motivations pour considérer cet algèbre de Lie plutôt que tout autre dont les orbites seraient les fibres des fibrations π_i, provient de notre motivation initiale : puisque la dualité de Poincaré en K-théorie pour les variétés s'interprète en terme de calcul pseudo-différentiel, existe-t-il un calcul pseudo-différentiel adapté aux espaces stratifiés qui permette d'interpréter la dualité de Poincaré entre les espaces stratifiés et leur espace S-tangent ?
Une première réponse positive avait été donnée dans [Les09] dans le cas conique, où le b-calcul pseudo-différentiel des variétés à bord permet de conclure. Le cas général nous a amené à chercher un nouveau calcul généralisant celui de R. Mazzeo et R. Melrose [MM98] pour les variétés à bords fibrés (Cf. Chapitre 3.1).

On se convainc sans mal que $\mathcal{V}_{\mathsf{S}}(X)$ est un module projectif localement finiment engendré et localement libre. Autrement dit $\mathcal{V}_{\mathsf{S}}(X)$ est en fait l'espace des sections $\mathcal{C}^\infty$ d'un fibré $\mathcal{C}^\infty$ sur X que l'on note ${}^{\pi}TX$:

$$\forall p \in X, \quad {}^{\pi}T_pX = \mathcal{V}_{\mathsf{S}}(X)/I_p.\mathcal{V}_{\mathsf{S}}(X) \tag{1.2.3}$$

où I_p désigne encore l'idéal de $C^\infty(X)$ des fonctions s'annulant en p.
L'application canonique $(\iota_\pi)_p : {}^{\pi}T_pX = \mathcal{V}_{\mathsf{S}}(X)/I_p.\mathcal{V}_{\mathsf{S}}(X) \longrightarrow \mathcal{V}(X)/I_p.\mathcal{V}(X) = T_pX$ fournit un homomorphisme naturel de fibrés $\iota_\pi : {}^{\pi}TX \longrightarrow TX$ qui est un isomorphisme au dessus de X° et :

$$\mathcal{V}_{\mathsf{S}}(X) = \iota_\pi \mathcal{C}^\infty(X; {}^{\pi}TX). \tag{1.2.4}$$

On a alors :

Proposition 5 ([7]) *La paire* $\mathcal{A}_{\mathsf{S}}(X) = ({}^{\pi}TX, \iota_{\pi})$ *est un algébroïde de Lie presque injectif.*

Un tel algébroïde de Lie est intégrable d'après le chapitre 1.1 et on a :

Proposition 6 ([7]) *Soit* $\mathcal{G}_{\pi}(X)$ *l'union disjointe :*

$$\mathcal{G}_{\pi}(X) = (X^{\circ} \times X^{\circ}) \bigsqcup_{i=1}^{k} \mathcal{H}_i, \tag{1.2.5}$$

où $\mathcal{H}_i := (H_i \underset{\pi_i}{\times} ({}^{\pi}TS_i \times \mathbb{R}) \underset{\pi_i}{\times} H_i)|_{G_i}$ *et* $G_i = H_i \setminus (\cup_{j>i} H_j)$*. Il existe une structure de groupoïde de Lie sur* $\mathcal{G}_{\pi}$ *d'unités* X *pour laquelle l'algébroïde de Lie de* $\mathcal{G}_{\pi}$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathcal{A}_{\mathsf{S}}(X)$*.*

Groupoïde adiabatique et groupoïde S-tangent. On considère alors le groupoïde adiabatique de $\mathcal{G}_{\pi}(X)$ (Cf. Chapitre 3.2 pour une description complète de la construction du groupoïde adiabatique d'un groupoïde) :

$$\mathcal{G}_{\pi}^{ad}(X) := {}^{\pi}TX \times \{0\} \cup \mathcal{G}_{\pi}(X) \times]0,1[\rightrightarrows X \times [0,1[$$

Soit $\Xi = \{(x,t) \in X \times [0,1[\mid \prod_i x_i(x)t = 0\}$ autrement dit $(x,t) \in \Xi$ si et seulement si $t = 0$ ou $x \in \partial X$. On vérifie sans mal que le fermé Ξ est saturé pour $\mathcal{G}_{\pi}^{ad}(X)$. De plus on montre :

Proposition 7 ([7]) *La restriction de* $\mathcal{G}_{\pi}^{ad}(X)$ *à* Ξ *est un groupoïde de classe* $\mathcal{C}^{\infty,0}$ *qui est* KK*-équivalent à l'espace* S*-tangent* $T^{\mathsf{S}}X$ *de la pseudo-variété stratifiée* ${}^{\mathsf{S}}X$*.*

Ainsi on dira que $T_{\pi}^{\mathsf{S}}X := \mathcal{G}_{\pi}^{ad}(X)|_{\Xi}$ est aussi un espace S-tangent à la pseudo-variété stratifiée ${}^{\mathsf{S}}X$.

Chapitre 2

Groupoïdes de déformation et théorèmes d'indice

Les groupoïdes de déformations sont des groupoïdes différentiables de la forme

$$G = G_1 \times \{0\} \cup G_2 \times]0,1] \rightrightarrows M \times [0,1]$$

où G_1 et G_2 sont eux même des groupoïdes différentiables de base M.
Un tel groupoïde définit naturellement un élément de $E(C_m^*(G_1), C_m^*(G_2))$. Effectivement, en restreignant le groupoïde G à $[0,1[$, l'évaluation en 0 induit une suite exacte des C^*-algèbres maximales :

$$\begin{array}{l} 0 \to \quad C_m^*(G_2 \times]0,1[) \quad \longrightarrow C_m^*(G|_{[0,1[}) \xrightarrow{ev_0} C_m^*(G_1) \to 0 \\ \quad \simeq C_m^*(G_2) \otimes C_0(]0,1[) \end{array} \tag{2.0.1}$$

qui fournit un morphisme asymptotique de $C^*(G_1) \otimes C_0(\mathbb{R}) \to C_m^*(G_2) \otimes C_0(]0,1[)$ [CH90].
Dès que la C^*-algèbre $C_m^*(G_1)$ est nucléaire, les groupes $E(C_m^*(G_1), A)$ et $KK(C_m^*(G_1), A)$ sont isomorphes pour toute C^*-algèbre séparable A. En particulier, dans ce cas le foncteur $KK(C_m^*(G_1), .)$ associe à toute suite exacte courte de C^*-algèbres séparables une suite exacte à six-termes [CS86, BlBook]. Le groupoïde G fournit donc aussi dans ce cas un élément de $KK(C_m^*(G_1), C_m^*(G_2))$.
Autrement dit, on a toujours un morphisme de la K-théorie de $C_m^*(G_1)$ vers celle de $C_m^*(G_2)$ qui correspond dès que la C^*-algèbre $C_m^*(G_1)$ est nucléaire à un élément de $KK(C_m^*(G_1), C_m^*(G_2))$. On obtient une description alternative de cet élément en considérant à nouveau une suite exacte provenant de l'évaluation en 0 :

$$0 \to C_m^*(G_2) \otimes C_0(]0,1]) \longrightarrow C_m^*(G) \xrightarrow{ev_0} C_m^*(G_1) \to 0 \tag{2.0.2}$$

La C*-algèbre $C_m^*(G_2) \otimes C_0(]0,1])$ est contractile donc le morphisme

$$(ev_0)_* : K(C_m^*(G)) \to K(C_m^*(G_1))$$

induit par ev_0 en K-théorie est un isomorphisme, ou encore l'élément de KK-théorie correspondant $[ev_0] \in KK(C_m^*(G), C_m^*(G_1))$ est inversible (lorsque $C_m^*(G_1)$ est nucléaire).

Notons alors $ev_1 : C^*_m(G) \to C^*_m(G_1)$ l'évaluation en 1. On obtient donc un morphisme :

$$(ev_1)_* \circ (ev_0)_*^{-1} : K(C^*_m(G_1)) \to K(C^*_m(G_2))$$

qui n'est rien d'autre que le produit de Kasparov par l'élément

$$\partial := [ev_0]^{-1} \otimes [ev_1] \in KK(C^*_m(G_1), C^*_m(G_2)) \ .$$

Dans le cas du groupoïde tangent de A. Connes sur une variété compacte sans bord M :

$$G = TM \times \{0\} \cup M \times M \times]0,1] \rightrightarrows M \times [0,1]$$

le morphisme entre groupes de K-théorie associé est l'indice analytique $Ind_a = (ev_1)_* \circ (ev_0)_*^{-1} : K(C^*(TM)) \to K(\mathcal{K}(L^2(M)) \simeq \mathbb{Z}$ et l'élément de KK-théorie correspondant est l'ingrédient principal de la dualité de Poincaré [CS84, Ka88] et [CoBook], page 104.

2.1 Dualité de Poincaré

Afin de valider notre construction d'espace S-tangent de pseudo-variété singulière et de comprendre l'opération « symbole » au niveau de la K-théorie dans ce cadre, nous avons, avec J.-M. Lescure, établi une dualité de Poincaré entre l'algèbre des fonctions continues sur la variété singulière et la C^*-algèbre d'un espace S-tangent adéquat [1].

Reprenons les notations du paragraphe 1.2.
Dans la suite X est une pseudo-variété stratifiée, X° sa partie régulière et $T^{\mathsf{S}}X \rightrightarrows X^\circ$ son espace S-tangent défini par l'équation 1.2.1. Nous construisons un *groupoïde tangent* obtenu comme groupoïde de déformations de l'espace S-tangent sur le groupoïde des couples :

$$\mathcal{G}(X) := T^{\mathsf{S}}X \times \{0\} \cup X^\circ \times X^\circ \times]0,1] \rightrightarrows X^\circ \times [0,1]$$

que nous équipons d'une structure de groupoïde de Lie compatible avec la structure usuelle sur $T^{\mathsf{S}}X \times \{0\}$ et sur $X^\circ \times X^\circ \times]0,1]$ [3, 5]. Ce groupoïde est moyennable tout comme $T^{\mathsf{S}}X$ et on peut donc appliquer la construction précédente.

L'élément de KK-théorie naturellement associé à ce groupoïde de déformations induit une classe de K-homologie

$$\partial^{\mathsf{S}}_X \in KK(C^*(T^{\mathsf{S}}X), \mathbb{C}) \ .$$

Puisque l'algèbre des fonctions continues sur l'espace des orbites de $T^{\mathsf{S}}X$ est isomorphe à $C(X)$, la C^*-algèbre $C(X)$ s'envoie sur l'algèbre des multiplicateurs de $C^*(T^{\mathsf{S}}X)$.
Ceci nous permet d'introduire un homomorphisme $\Psi^{\mathsf{S}}_X : C^*(T^{\mathsf{S}}X) \otimes C(X) \to C^*(T^{\mathsf{S}}X)$.
On définit alors l'*élément Dirac* par :

$$D^{\mathsf{S}}_X = (\Psi^{\mathsf{S}}_X)^*(\partial^{\mathsf{S}}_X) \in KK(C^*(T^{\mathsf{S}}X) \otimes C(X), \mathbb{C})$$

Le résultat principal est alors :

1. Il existe plusieurs espaces S-tangents non isomorphes et KK-équivalents construits de façon semblable à celui présenté au paragraphe 1.2.

Théorème 3 ([3, 5]) *L'élément D_X^{S} induit une dualité de Poincaré entre les C^*-algèbres $C^*(T^{\mathsf{S}}X)$ et $C(X)$. En particulier, on obtient l'isomorphisme :*

$$\mathrm{DP}_X^{\mathsf{S}} : \cdot \underset{C^*(T^{\mathsf{S}}X)}{\otimes} D_X^{\mathsf{S}} : K_*(C^*(T^{\mathsf{S}}X)) \xrightarrow{\simeq} K^*(C(X))$$

Dans le cas des variétés à singularités coniques, traité dans [3], le théorème est prouvé en construisant explicitement une élément *dual-Dirac* λ_X^{S} puis nous vérifions, après calcul des produits de Kasparov correspondants, les égalités :

$$\lambda_X^{\mathsf{S}} \underset{C^*(T^{\mathsf{S}}X)}{\otimes} D_X^{\mathsf{S}} = 1 \in KK(C(X), C(X)) \text{ et } \lambda_X^{\mathsf{S}} \underset{C(X)}{\otimes} D_X^{\mathsf{S}} = 1 \in KK(C^*(T^{\mathsf{S}}X), C^*(T^{\mathsf{S}}X)).$$

Dans le cas d'une stratification générale la construction d'un élément dual-Dirac semble inextricable. Nous montrons alors dans [5] que l'élément Dirac induit bien une dualité de Poincaré grâce à un procédé géométrique dit de *déplissage* qui nous permet de faire une récurrence sur la profondeur de la stratification et à l'aide de l'étude minutieuse de diagrammes commutatifs.

L'application indice analytique pour l'espace singulier X peut maintenant être définie comme dans le cas des variétés C^∞ par :

$$\mathrm{Ind}_a^X = \cdot \otimes \partial_X^{\mathsf{S}} : K_0(C^*(T^{\mathsf{S}}X)) \longrightarrow \mathbb{Z} \tag{2.1.1}$$

et on a encore :

Proposition 8 ([4]) *Notons $p : X \to \{\cdot\}$ l'application constante. On a l'égalité :*

$$Ind_a^X = p_* \circ (\cdot \underset{C^*(T^{\mathsf{S}}X)}{\otimes} D_X^{\mathsf{S}})$$

autrement dit, l'indice analytique (2.1.1) est l'application Poincaré duale de « l'indice de Fredholm » canonique.

Nous verrons dans le paragraphe 3.1 qu'il existe un calcul pseudo-différentiel adapté aux espaces stratifiés qui permet d'interpréter la dualité de Poincaré entre les espaces stratifiés et leur espace S-tangent comme l'inverse d'une application « symbole principal ».

2.2 Groupoïde de Thom

En collaboration avec J-M. Lescure et V. Nistor, nous avons établi un analogue du théorème d'indice de M.F. Atiyah et I.M. Singer pour les pseudo-variétés à singularités coniques isolées [4]. Notre démarche a consisté à reprendre l'approche originelle de M.F. Atiyah et I.M.Singer en la reformulant à l'aide de groupoïdes puis à utiliser l'espace S-tangent.

2.2.1 Cas d'une variété compacte

Plaçons nous tout d'abord dans le cas d'une variété C^∞ compacte sans bord M que l'on suppose plongée dans un $\mathbb{R}^n$. Nous noterons $N \to M$ le fibré normal du plongement. Rappelons que le théorème de M.F. Atiyah et I.M. Singer peut s'exprimer à l'aide du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
K_0(M) \arrow[dr, "M\to pt"'] & K^0(T^*M) \arrow[l, "DP", "\sim"'] \arrow[r, "Thom", "\sim"'] \arrow[d, "Ind_a"] \arrow[dr, "Ind_t"] & K^0(T^*N) \arrow[r, "i_!"] & K^0(T^*\mathbb{R}^n) \arrow[dl, "\sim", "Bott"'] \\
& \mathbb{Z} \arrow[rr, leftrightarrow, "="'] & & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Il s'agit de reformuler les applications indices à l'aide de groupoïdes et toujours à l'aide de groupoïdes de montrer leur égalité. Nous verrons ensuite comment ces constructions se généralisent sans difficulté aux pseudo-variétés singulières.

✿ L'INDICE ANALYTIQUE [CoBook]. Il s'agit de la construction d'A. Connes de l'indice analytique à l'aide du *groupoïde tangent* déjà utilisée pour définir l'indice analytique des pseudo-variétés singulières (c.f. l'équation 2.1.1 et la proposition 8). Ce groupoïde se définit ensemblistement par

$$\mathcal{G}_M^t = TM \times \{0\} \sqcup M \times M \times]0,1] \rightrightarrows M \times [0,1] \ .$$

On le munit de la structure différentiable (c.f. la description du groupoïde adiabatique d'un groupoïde rappelée plus loin en 3.2).

Ce groupoïde (moyennable) determine donc un élément de KK-théorie :

$$\partial_M := [ev_0]^{-1} \otimes [ev_1] \in KK(C^*(TM), \mathcal{K}) \simeq K^0(C^*(TM))$$

qui induit le morphisme $\mathrm{Ind}_a^M : K^0(T^*M) \simeq KK(\mathbb{C}, C^*(TM)) \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Proposition 9 ([CoBook]) *Ce morphisme est l'indice analytique de M.F. Atiyah et I.M. Singer.*

✿ L'INDICE TOPOLOGIQUE. Rappelons la construction originelle de l'indice topologique. Nous avons un plongement $i : M \to \mathbb{R}^n$ et son fibré normal $p : N \to M$. Dans cette situation, l'isomorphisme de Thom :

$$Thom : K_0(C^*(TM)) \xrightarrow{\sim} K_0(C^*(TN))$$

est donné par une KK-équivalence [Ka80] :

$$T \in KK(C^*(TM), C^*(TN))$$

où T est appelé l'*élément de Thom*.

Le fibré N s'identifie à un voisinage ouvert de M dans $\mathbb{R}^n$ ce qui induit un morphisme d'excision :

$$j : C^*(TN) \to C^*(T\mathbb{R}^n).$$

Il faut aussi considérer l'isomorphisme $B : K_0(C^*(T\mathbb{R}^n)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ qui provient de l'isomorphisme de C^*-algèbres $C^*(T\mathbb{R}^n) \simeq C_0(\mathbb{R}^{2n})$ et de la périodicité de Bott.
L'*indice topologique* Ind_t est alors la composition :

$$K_0(C^*(TM)) \xrightarrow{Thom} K_0(C^*(TN)) \xrightarrow{j_*} K_0(C^*(T\mathbb{R}^n)) \xrightarrow{B} \mathbb{Z}$$

On définit dans [4] le *groupoïde de Thom* comme le groupoïde de déformation :

$$\mathcal{T}_N = TN \times \{0\} \sqcup {}^*p^*TM \times]0,1] \rightrightarrows N \times [0,1]$$

où comme précédemment ${}^*p^*TM = N \underset{M}{\times} TM \underset{M}{\times} N \rightrightarrows N$. Ce groupoïde est moyennable et $C^*(TN)$ est nucléaire. L'élément de KK-théorie correspondant, composé avec l'équivalence de Morita ${}^*p^*TM \sim TM$ fournit un élément :

$$\tau_N \in KK(C^*(TN), C^*(TM)) \ .$$

Proposition 10 ([4]) *L'élément τ_N est l'inverse de l'élément de Thom : $\tau_N = T^{-1}$.*

A noter que le fibré normal de l'inclusion $\cdot \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ du point dans $\mathbb{R}^n$ est simplement $\mathbb{R}^n \to \cdot$ qui induit :

$$\tau_{\mathbb{R}^n} \in KK(C^*(T\mathbb{R}^n), \mathbb{C}) \ .$$

L'isomorphisme correspondant $B = \cdot \otimes \tau_{\mathbb{R}^n} : K_0(C^*(T\mathbb{R}^n)) \to \mathbb{Z}$ est la périodicité de Bott.
Finalement $i_t = \tau_{\mathbb{R}^n} \circ j_* \circ \tau_N^{-1}$ est entièrement décrit à l'aide de groupoïdes de déformations.

✿ Egalité des indices. Pour montrer l'égalité des indices, on construit un nouveau groupoïde de déformation :

$$\mathcal{H} = \mathcal{G}_N^t \times \{0\} \sqcup {}^*(p \times Id)^*\mathcal{G}_M^t \times]0,1] \rightrightarrows N \times [0,1] \times [0,1]$$

que l'on munit d'une structure différentiable. Puisque les groupoïdes tangents $\mathcal{G}_N^t$ et $\mathcal{G}_M^t$ sont moyennables, $\mathcal{H}$ est encore moyennable.
Ce groupoïde satisfait :

$$\mathcal{H}|_{N\times\{0\}\times[0,1]} = \mathcal{T}_N \quad , \quad \mathcal{H}|_{N\times\{1\}\times[0,1]} = N \times N \times [0,1] \ ,$$
$$\mathcal{H}|_{N\times[0,1]\times\{0\}} = \mathcal{G}_N^t \quad \text{et} \quad \mathcal{H}|_{N\times[0,1]\times\{1\}} = {}^*(p \times Id)^*\mathcal{G}_M^t \underset{Morita}{\sim} \mathcal{G}_M^t \ .$$

Cela fournit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
C^*({}^*p^*TM) & C^*({}^*(p \times Id)^*\mathcal{G}_M^t) \arrow[l, "ev_0"'] \arrow[r, "ev_1"] & \mathcal{K} \\
C^*(\mathcal{T}_N) \arrow[u, "ev_1"] \arrow[d, "ev_0"'] & C^*(\mathcal{H}) \arrow[l, "ev_{(0,-)}"] \arrow[r, "ev_{(1,-)}"] \arrow[u, "ev_{(-,1)}"] \arrow[d, "ev_{(-,0)}"] & C([0,1]) \otimes \mathcal{K} \arrow[u, "ev_1"'] \arrow[d, "ev_0"] \\
C^*(TN) & C^*(\mathcal{G}_N^t) \arrow[l, "ev_0"] \arrow[r, "ev_1"'] & \mathcal{K}
\end{tikzcd}$$

Les indices analytique et topologique proviennent de produit de Kasparov par :

- des classes de morphismes d'inclusions et de restrictions entre groupoïdes,
- l'inverse de telles classes,
- des équivalences de Morita explicites.

Ceci permet d'obtenir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
K_0(C^*(TM)) \arrow[d, bend right, "Thom"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Ind}_a^M"] & K_0(C^*(\mathcal{G}_M^t)) \arrow[l] \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
K_0(C^*(TN)) \arrow[u, "\sim"] \arrow[d, "j_*"'] & K_0(C^*(\mathcal{G}_N^t)) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d, "j_*^t"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
K_0(C^*(T\mathbb{R}^n)) \arrow[rr, bend right, "\sim", "Bott"'] & K_0(C^*(\mathcal{G}_{\mathbb{R}^n})) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Ainsi on obtient :

$$\mathrm{Ind}_a^M = \mathrm{Ind}_t^M \ .$$

2.2.2 Cas d'une pseudo-variété compacte à singularités coniques

Reprenons les notations du chapitre 1.2.
Dans la suite X est une pseudo-variété conique, X° sa partie régulière et $T^{\mathsf{S}}X \rightrightarrows X^\circ$ son espace S-tangent. Nous avons vu dans la section 2.1 comment associer un groupoïde tangent pour X :

$$\mathcal{G}^t(X) := T^{\mathsf{S}}X \times \{0\} \cup X^\circ \times X^\circ \times]0,1] \rightrightarrows X^\circ \times [0,1] \ ,$$

ce dernier permettant de définir l'indice analytique comme dans le cas d'une variété C^∞ compacte :

$$\partial_X^{\mathsf{S}} = [ev_0^X]^{-1} \otimes [ev_1^X] \in KK(C^*(T^{\mathsf{S}}X), \mathbb{C}) \ \text{ et } \ \mathrm{Ind}_a^X = \cdot \otimes \partial_X^{\mathsf{S}} : K_0(C^*(T^{\mathsf{S}}X)) \longrightarrow \mathbb{Z} \ .$$

Pour construire l'indice topologique, on plonge la variété singulière X dans une variété singulière contractile $c\mathbb{R}^n$ (où $c\mathbb{R}^n$ est le cône sur $\mathbb{R}^n$) :

$$X \hookrightarrow c\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[/\mathbb{R}^n \times \{0\} \ .$$

Cela fournit un *fibré normal conique*.
Prenons le fibré normal $p : N^\circ \to X^\circ$ associé au plongement $X^\circ \hookrightarrow \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[$, puis considérons l'identification $N^\circ|_{O_0} \simeq N^\circ|_L \times]0,1[$. On pose :

$$^{\mathsf{S}}N = \bar{c}N^\circ|_L \cup N^\circ|_M$$

L'espace $^{\mathsf{S}}N$ est à nouveau une pseudo-variété à une singularité conique et on note $T^{\mathsf{S}}N$ son espace S-tangent. Comme précédemment, on définit le *groupoïde de Thom* par :

$$\mathcal{T}_{\mathsf{s}_N} = T^{\mathsf{S}}N \times \{0\} \sqcup {}^*p^*(T^{\mathsf{S}}X) \times]0,1] \ .$$

Théorème 4 ([4]) *Le groupoïde $\mathcal{T}_{\mathsf{S}_N}$ définit un élément $\partial_{\tau_{\mathsf{S}_N}} \in KK(C^*(T^{\mathsf{S}}N), C^*(T^{\mathsf{S}}X))$ appelé élément de Thom inverse qui est tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} K_0(C^*(T^{\mathsf{S}}N)) \arrow[r, "\cdot\otimes\tau_N"] \arrow[dr, "Ind_a^{\mathsf{S}_N}"'] & K_0(C^*(T^{\mathsf{S}}X)) \arrow[d, "Ind_a^X"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

De plus le morphisme $\cdot \otimes \tau_{\mathsf{S}_N}$ est un isomorphisme.

Définition 9 ([4]) *L'inverse de l'application $\cdot \otimes \tau_{\mathsf{S}_N}$ est l'isomorphisme de Thom de $T^{\mathsf{S}}N$ sur $T^{\mathsf{S}}X$.*

On vérifie que l'isomorphisme de Thom défini ci-dessus se restreint à l'homomorphisme de Thom usuel sur la partie régulière.

Le groupoïde $T^{\mathsf{S}}N$ s'identifie à un sous-groupoïde de $T^{\mathsf{S}}c\mathbb{R}^n$, cette inclusion induit au niveau des C^*-algèbres le morphisme :

$$j : C^*(T^{\mathsf{S}}N) \to C^*(T^{\mathsf{S}}c\mathbb{R}^n) \ .$$

On considère ensuite l'inclusion $c \hookrightarrow c\mathbb{R}^n$, où c est le point singulier. Il faut noter que $\mathcal{G}^t_{c\mathbb{R}^n} = \mathcal{T}_{c\mathbb{R}^n}$. Alors

$$\tau_{c\mathbb{R}^n} \in KK(C^*(T^{\mathsf{S}}c\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$$

ce qui donne un analogue de l'isomorphisme de Bott :

$$B = (\cdot \otimes \tau_{c\mathbb{R}^n}) : K_0(C^*(T^{\mathsf{S}}c\mathbb{R}^n)) \to \mathbb{Z} \ .$$

Définition 10 ([4]) *L'indice topologique pour la variété à singularité conique X est le morphisme*

$$Ind_t^X = B \circ j_* \circ \tau_N^{-1} : \ K_0(C^*(T^{\mathsf{S}}X)) \to \mathbb{Z} \ .$$

Théorème 5 ([4]) *Les indices analytique et topologique sont égaux :*

$$Ind_a^X = Ind_t^X \ .$$

Là encore, comme dans le cas régulier, la preuve se fait à l'aide d'un groupoïde de déformation judicieux.

Ce que l'on vient de faire dans le cas d'une singularité conique se généralise sans mal au cas de plusieurs singularités coniques isolées. Pour généraliser ce théorème d'indice au cas d'une pseudo-variété générale, il faut tout d'abord fournir un bon *modèle euclidien* pour les pseudo-variétés stratifiées. Précisément, si X est une pseudo-variété stratifiée, il faut plonger convenablement X dans un $\mathbb{R}^n$ muni d'une stratification appropriée et lui associer un *normal singulier* puis un groupoïde de Thom. Ce travail, qui nécessite une étude géométrique fine des structures de pseudo-variétés et variétés à coins fibrés est encore inachevé.

Chapitre 3

Groupoïdes et opérateurs pseudo-différentiels

Dans les années 70-80, A. Connes introduit le calcul pseudo-différentiel longitudinal sur les feuilletages (réguliers) en utilisant le groupoïde d'holonomie du feuilletage. Ce travail a été généralisé ensuite indépendamment par B. Monthubert et F. Pierrot et par V. Nistor, A. Weinstein et P. Xu [MP97, NWX99] pour donner le *calcul pseudo-différentiel associé à un groupoïde différentiable*, dont je rappelle brièvement les grandes lignes ici.

On se donne un groupoïde de Lie $G \rightrightarrows G^{(0)}$ sur une variété $G^{(0)}$ éventuellement à coins. On note $\mathfrak{A}G$ l'algébroïde de Lie de G et on choisit une application exponentielle $\theta : V' \to G$ qui commute au but, $V' \subset \mathfrak{A}G$ étant un voisinage ouvert de la section nulle (c.f. chapitre 3.2).
On a immédiatement :

- Une structure de $*$-algèbre de convolution sur $C_c^\infty(G)$ qui donne une C^*-algèbre après le choix d'une norme [Re80].
- L'algèbre des multiplicateurs $\mathcal{M}(C_c^\infty(G))$ de $C_c^\infty(G)$.
- Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathcal{S}^m(\mathfrak{A}^*G) \subset C^\infty(\mathfrak{A}^*G)$ des *symboles* d'ordre m : la fonction $\varphi \in C^\infty(\mathfrak{A}^*G)$ est dans $\mathcal{S}^m(\mathfrak{A}^*G)$ lorsque pour tout compact K de $G^{(0)}$ et tout multi-indices $\alpha,\ \beta$ dans $\mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{K,\alpha,\beta}$:

  $$\forall (x,\xi) \in \mathfrak{A}^*G|_K \ : \ \left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \varphi(x,\xi)\right| \leq C_{K,\alpha,\beta}(1+\|\xi\|)^{m-|\alpha|}$$

  On dira que φ est un *symbole polyhomogène* ou *classique* d'ordre m s'il existe une suite $(a_j)_{j\in[\![m,\infty]\!]}$, où $a_j \in C^\infty(\mathfrak{A}^*G \setminus G^{(0)})$ est homogène d'ordre j et

  $$\varphi \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{m-k}$$

  ce qui signifie que pour tout entier N la fonction $\varphi - \sum_{k=0}^{N} a_{m-k} \in \mathcal{S}^{m-N}(\mathfrak{A}^*G)$, cette appartenance prenant un sens loin de la section nulle.
- L'ensemble $\mathcal{P}_m(G) \subset \mathcal{M}(C_c^\infty(G))$ des *opérateurs pseudo-différentiels* d'ordre m sur G : $P \in \mathcal{P}_m(G)$ est un multiplicateur de la forme $P = P_0 + K$ où $K \in C_c^\infty(G)$ et

pour tout $f \in C_c^\infty(G)$ et $\gamma \in G$:

$$P_0 * f(\gamma) = \int_{\eta \in G^{r(\gamma)}} P_0(\eta) f(\eta^{-1}\gamma) \ \text{"}\mathsf{d}\eta\text{"} \tag{3.0.1}$$

où il existe un symbole polyhomogène $\varphi \in \mathcal{S}^m(\mathfrak{A}^*G)$ tel que P_0 est la limite dans $\mathcal{M}(C_c^\infty(G))$ de P_0^R lorsque $R \to \infty$ et :

$$P_0^R(\eta) = \int_{\substack{\xi \in \mathfrak{A}^* G_{r(\eta)} \\ \|\xi\| \leq R}} e^{i<\theta^{-1}(\eta),\xi>} \varphi(r(\eta), \xi) d\xi$$

On note en général

$$P_0(\eta) = \int_{\xi \in \mathfrak{A}^* G_{r(\eta)}} e^{i<\theta^{-1}(\eta),\xi>} \varphi(r(\eta), \xi) d\xi$$

cette intégrale étant à comprendre au sens des distributions. On notera $\mathcal{P}_*(G)$ l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels sur G.

Il faut à un moment ou un autre donner un sens à l'intégration le long des fibres du groupoïde (c.f. équation 3.0.1), ce qui se fait par le choix d'un système de Haar, ou plus canoniquement en utilisant des (demi) densités à la place des fonctions ; ces détails techniques seront passés sous silence ici.

On peut vérifier qu'un opérateur pseudo-différentiel P sur G détermine une famille $(P_x)_{x \in G^{(0)}}$ d'opérateurs pseudo-différentiels sur les fibres $G_x = s^{-1}(x)$ équivariante dans le sens suivant :

$$U_\gamma P_{s(\gamma)} = P_{r(\gamma)} U_\gamma \ .$$

Où $U_\gamma : C^\infty(G_{s(\gamma)}) \to C^\infty(G_{r(\gamma)})$; $U_\gamma f(\eta) = f(\eta\gamma)$. Pour s'en convaincre, il suffit de réécrire l'équation 3.0.1 de la façon suivante :

$$P_0 * f(\gamma) = \int_{\eta \in G_{s(\gamma)}} k(\gamma, \eta) f(\eta) \ \text{"}\mathsf{d}\eta\text{"} \ \text{ où } \ k(\gamma, \eta) = P_0(\gamma\eta^{-1}) \ . \tag{3.0.2}$$

Parmi les résultats notables, il faut savoir que lorsque $m \leq 0$, l'opérateur P s'étend en un multiplicateur de $C^*(G)$ qui est en fait un élément de $C^*(G)$ lorsque $m < 0$. On notera $\Psi^*(G)$ la fermeture de $\mathcal{P}_0(G)$ dans $\mathcal{M}(C^*(G))$.

L'application *symbole principal* $P \mapsto a_0$ est bien définie et s'étend en un morphisme

$$\sigma_0 : \Psi^*(G) \to C(S^*(\mathfrak{A}G))$$

On obtient alors la *suite exacte des opérateurs pseudo-différentiels* :

$$0 \to C^*(G) \longrightarrow \Psi_0^*(G) \longrightarrow C(S^*\mathfrak{A}G) \to 0 \tag{PDO}$$

3.1 Le S-calcul

Il s'agit dans ce travail, en collaboration avec J.-M. Lescure et F. Rochon [7], d'interpréter la dualité de Poincaré en K-théorie pour les pseudo-variétés stratifiées établie dans [5] en termes de symboles et d'opérateurs elliptiques comme cela avait été fait précédemment par J.-M. Lescure [Les09] pour les variétés à singularités coniques.

Nous avons déjà vu dans le chapitre 1.2 qu'un espace stratifié ${}^{\mathsf{S}}X$ peut être désingularisé en une variété à coins fibrés X, et cette désingularisation se fait sans perte d'information : la désingularisation induit une équivalence entre la catégorie des espaces stratifiés et celle des variétés à coins fibrés. Forts de cette remarque, notre démarche s'appuie sur les faits suivants :

- Définir un calcul pseudo-différentiel sur l'espace stratifié ${}^{\mathsf{S}}X$ ou sur sa désingularisation X en variété à coins fibrés revient au même : dans les deux cas, on obtient des opérateurs qui agissent sur $C^\infty(X^\circ)$ où X° est la partie lisse de ${}^{\mathsf{S}}X$ et l'intérieur de X. En outre la compactification de X° en X dicte des conditions aux bords naturelles pour un calcul sur ${}^{\mathsf{S}}X$.
- Les techniques *d'éclatement* (blow-up) de R. Melrose [Me93] peuvent être appliquées sur les variétés à coins fibrés, dès qu'un ordre est prescrit pour les faire successivement, et un tel ordre provient de façon naturelle de l'espace stratifié.

Rappelons que l'algèbre de Lie des champs de vecteurs et donc les opérateurs différentiels qui nous intéresse ici est :

$$\mathcal{V}_{\mathsf{S}}(X) := \{\xi \in \mathcal{V}_b(X)\ ;\ \xi|_{H_i} \in \ker d\pi_i \text{ et } \xi x_i \in x_i^2\mathcal{C}^\infty(X)\ \forall i\}, \tag{3.1.1}$$

où comme au chapitre 1.2, les hypersurfaces de bord sont notées $H_i, i \in I$, leur fonction de définition x_i et leur fibration $\pi_i : H_i \to S_i$. Cette algèbre de Lie correspond à l'algèbre des sections d'un algébroïde presque injectif $\mathcal{A}_{\mathsf{S}}(X) = ({}^\pi TX, \iota_\pi)$ que l'on a intégré en un groupoïde de Lie $\mathcal{G}_\pi(X)$ (Cf. équation 1.2.5).

Ce groupoïde nous fournit donc une algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels « compactement supportés » :

$$\Psi^*_{\mathsf{S},c}(X) := \mathcal{P}_*(\mathcal{G}_\pi(X))$$

Cette algèbre n'est pas stable pour l'inversion et doit donc être élargie. Pour ce faire on associe à X un « éclatement fibré » X^2_π de X^2 « à la Melrose ». Cet éclaté est lui même une variété à coins qui se contracte sur X^2. Le processus d'éclatement produit des hypersurfaces de bord particulières de X^2_π appelées *faces frontales* dont l'union est notée ff_π. Enfin X^2_π fournit une compactification de $\mathcal{G}_\pi(X)$.

On définit alors l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiel du S-calcul :

$$\Psi_{\mathsf{S}}(X) := \Psi^*_{\mathsf{S},c}(X) + \mathcal{C}^\infty_{ff_\pi}(X^2_\pi)$$

où $\mathcal{C}^\infty_{ff_\pi}(X^2_\pi)$ est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur X^2_π nulles à tous les ordres sur $\partial X^2_\pi \setminus ff_\pi$.

On définit ensuite :

- Des notions de symbole intérieur σ et de symbole sur chaque hypersurface de bord σ_i, ce qui nous permet d'obtenir une notion de *pleine ellipticité*.
- Des espaces de Sobolev $H^*_{\mathsf{S}}(X)$.

On obtient alors les propriétés classiques d'un calcul pseudo-différentiel :

Théorème 6 ([7]) *Avec les notations précédentes :*

- $\Psi^*_{\mathsf{S}}(X)$ *est une algèbre.*
- *Tout* $P \in \Psi^p_{\mathsf{S}}(X)$ *induit un opérateur borné*

$$P : x^l H^{m+p}_{\mathsf{S}}(X) \to x^l H^m_{\mathsf{S}}(X)$$

  pour tout $m,\ l \in \mathbb{R}$.
- *L'opérateur* $P \in \Psi^p_{\mathsf{S}}(X)$ *est pleinement elliptique si et seulement si :*

$$\forall m,\ l \in \mathbb{R} \quad P : x^l H^{m+p}_{\mathsf{S}}(X) \to x^l H^m_{\mathsf{S}}(X) \text{ est Fredholm}$$

Enfin, le S-calcul sur X donne un « bon » calcul pseudo-différentiel sur ${}^{\mathsf{S}}X$ du point de vue de la K-homologie :

Proposition 11 ([7]) *A tout* $P \in \Psi^0{}_{\mathsf{S}}(X)$ *pleinement elliptique correspond canoniquement un* $[P] \in KK(C({}^{\mathsf{S}}X), \mathbb{C})$ *et tous les éléments de* $KK(C({}^{\mathsf{S}}X), \mathbb{C})$ *ont un tel représentant.*

De plus une notion de symbole non commutatif elliptique sur $\Psi^0_{\mathsf{S}}(X)$ permet d'interpréter la dualité de Poincaré comme l'inverse de cette application symbole.

3.2 Le groupoïde adiabatique de jauge

Ce chapitre fait référence à des travaux récents en collaboration avec G. Skandalis [9]. Il s'agit ici d'obtenir une description géométrique de la suite exacte (PDO) des opérateurs pseudo-différentiels sur un groupoïde.

Etant donné le groupoïde de Lie $G \rightrightarrows G^{(0)}$, notons $\mathfrak{A}G$ son algébroïde de Lie.

On choisit une *application exponentielle* pour G.
Pour nous il s'agira d'un difféomorphisme $\theta : V' \to V$ où V' est un voisinage ouvert de la section nulle $G^{(0)}$ dans $\mathfrak{A}G$ et V un voisinage ouvert des unités $G^{(0)}$ dans G tel que :

- $\theta|_{G^{(0)}} = Id$ et $r \circ \theta = \pi$,
- Pour tout $x \in G^{(0)}$, la différentielle $d\theta(x, 0)$ induit l'application identité dans la direction normale de l'inclusion de $G^{(0)}$, c'est à dire que $d\theta(x, 0)$ passe au quotient $\mathfrak{A}G_x \simeq T_{(x,0)}\mathfrak{A}G/T_xG^{(0)} \to \mathfrak{A}G_x$ et donne alors l'identité.

On considère alors le *groupoïde adiabatique* de G [NWX99] :

$$G_{ad} = G \times \mathbb{R}^*_+ \cup \mathfrak{A}G \times \{0\} \rightrightarrows G^{(0)} \times \mathbb{R}_+$$

que l'on munit d'une structure différentiable en demandant que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & W' & \longrightarrow & G_{ad} \\ & (x, X, t) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} (\theta(x, tX), t) \text{ pour } t \neq 0 \\ (x, X, 0) \text{ pour } t = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

soit un difféomorphisme sur son image, où $W' = \{(x, X, t) \in \mathfrak{A}G \times \mathbb{R}_+ \mid (x, tX) \in V'\}$.

L'évaluation en 0 donne la suite exacte déjà considérée au chapitre 2 (voir 2.0.1) :

$$0 \to C^*(G_{ad}|_{\mathbb{R}_+^*}) \longrightarrow C^*(G_{ad}) \xrightarrow{ev_0} C^*(\mathfrak{A}G) \to 0$$

En remarquant que l'on a un isomorphisme naturel $C^*(G_{ad}|_{\mathbb{R}_+^*}) \simeq C^*(G) \otimes C_0(\mathbb{R}_+^*)$ et en considérant l'isomorphisme provenant de la transformée de Fourier $C^*(\mathfrak{A}G) \simeq C_0(\mathfrak{A}^*G)$, cette suite devient :

$$0 \to C^*(G) \otimes C_0(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow C^*(G_{ad}) \xrightarrow{ev_0} C_0(\mathfrak{A}^*G) \to 0 \tag{3.2.1}$$

On considère alors l'idéal $C_0(\mathfrak{A}^*G \setminus G^{(0)})$ de $C_0(\mathfrak{A}^*G)$ que l'on tire en arrière par l'évaluation en 0 pour obtenir l'idéal $J(G) := ev_0^{-1}(C_0(\mathfrak{A}^*G \setminus G^{(0)}))$ de $C^*(G_{ad})$.
On obtient donc la suite exacte :

$$0 \to C^*(G) \otimes C_0(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow J(G) \xrightarrow{ev_0} C_0(\mathfrak{A}^*G \setminus G^{(0)}) \to 0 \tag{3.2.2}$$

Le groupoïde adiabatique est par ailleurs muni d'une *action naturelle de* $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{array}{ccccl} G_{ad} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & G_{ad} & & \\ (\gamma, t, \lambda) & \mapsto & (\gamma, \lambda t) & & \text{pour } t \neq 0 \\ (x, X, 0, \lambda) & \mapsto & (x, \frac{1}{\lambda}X, 0) & & \text{pour } t = 0\ . \end{array}$$

On définit le *groupoïde adiabatique de jauge (gauge adiabatic groupoid)* comme étant le groupoïde de cette action : $G_{ga} = G_{ad} \rtimes \mathbb{R}_+^* \rightrightarrows G^{(0)} \times \mathbb{R}_+$.

Les suites exactes 3.2.1 et 3.2.2 sont évidemment équivariantes sous l'action de $\mathbb{R}_+^*$.
On obtient alors la suite exacte :

$$0 \to \big(C^*(G) \otimes C_0(\mathbb{R}_+^*)\big) \rtimes \mathbb{R}_+^* \to J(G) \rtimes \mathbb{R}_+^* \to C_0(\mathfrak{A}^*G \setminus G^{(0)}) \rtimes \mathbb{R}_+^* \to 0\ . \tag{3.2.3}$$

Puisque l'action de $\mathbb{R}_+^*$ sur $G \times \mathbb{R}_+^*$ ne s'effectue que sur la composante $\mathbb{R}_+^*$ sur laquelle elle est libre, propre et transitive, on a un isomorphisme naturel $\big(G \times \mathbb{R}_+^*\big) \rtimes \mathbb{R}_+^* \simeq G \times (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)$, où $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est ici le groupoïde des couples sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, on a un isomorphisme canonique $\big(C^*(G) \otimes C_0(\mathbb{R}_+^*)\big) \rtimes \mathbb{R}_+^* \simeq C^*(G) \otimes \mathcal{K}$.
De même $\mathfrak{A}^*G \setminus G^{(0)} \simeq S^*\mathfrak{A}G \times \mathbb{R}_+^*$ et l'action de $\mathbb{R}_+^*$ s'effectue sur $\mathbb{R}_+^*$ où elle est libre, propre et transitive, d'où l'isomorphisme $C_0(\mathfrak{A}^*G \setminus G^{(0)}) \rtimes \mathbb{R}_+^* \simeq C_0(S^*\mathfrak{A}G) \otimes \mathcal{K}$.
Finalement on obtient la *suite exacte du groupoïde adiabatique de Jauge* :

$$0 \to C^*(G) \otimes \mathcal{K} \to J(G) \rtimes \mathbb{R}_+^* \to C(S^*\mathfrak{A}G) \otimes \mathcal{K} \to 0\ . \tag{GAG}$$

Notre première motivation était de comprendre les liens entre les suites exactes (PDO) et (GAG). On peut se convaincre sans mal en utilisant des arguments issus de travaux de D. Voiculescu que lorsque $G = M \times M$ est le groupoïde des couples, ces deux suites exactes définissent le même élément de KK-théorie (provenant de l'indice analytique) et qu'elles sont Morita équivalentes [Vo76] (voir aussi le survey [Sk91]). Nous avons montré dans [9] qu'elles sont toujours Morita équivalentes et donné un bi-module explicite pour

décrire cette équivalence. Pour cela nous avons obtenu une nouvelle description de $\Psi^*(G)$ qui exploite le groupoïde adiabatique de jauge.

Voici un aperçu plus précis des résultats obtenus.
Notons $\mathcal{J}_0(G) = S(\mathbb{R}_+^*, C_c^\infty(G)) \subset C^\infty(G_{ad})$ l'idéal des *fonctions à décroissance rapide en* 0. C'est-à-dire qu'une fonction $f = (f_t)_{t\in\mathbb{R}_+^*}$ de $C^\infty(G_{ad})$ est dans $\mathcal{J}_0(G)$ si et seulement en posant $f_0 = 0$, la fonction $(f_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ appartient à $C_c^\infty(G \times \mathbb{R}_+)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'application $(\gamma, t) \mapsto t^{-k} f_t(\gamma)$ s'étend en une fonction C^∞ sur $G \times \mathbb{R}_+$.

L'*algèbre de Schwartz* $S_c(G_{ad})$ sur G_{ad} est donnée par :

$$S_c(G_{ad}) = \mathcal{J}_0(G) + \{g \in C^\infty(W) \mid g \circ \Theta \text{ est uniformément Schwartz le long de } \mathfrak{A}G\}$$

C'est-à-dire que pour tout $k,\ l \in \mathbb{N}^n,\ j,\ m \in \mathbb{N}$:

$$sup\Big((\|X\|^2 + t^2)^{\frac{m}{2}} \Big| \frac{\partial^{|k|+|l|+j}}{\partial x^k \partial X^l \partial t^j} g \circ \Theta(x, X, t)\Big|\Big) < +\infty$$

où $\Theta : W' \subset \mathfrak{A}G \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\simeq} W \subset G_{ad}$ a été utilisé plus haut pour définir la structure de variété lisse sur G_{ad}.

Définition-Proposition 3 ([9]) *Soit $f = (f_t)_{t\in\mathbb{R}_+} \in S_c(G_{ad})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout $g \in C_c^\infty(\mathfrak{A}G)$ l'application*

$$(x, t) \in G^{(0)} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \int_{\mathfrak{A}G_x} g(x, X)(\chi f_t) \circ \theta(x, X) dX$$

   s'annule ainsi que toute ses dérivées sur $G^{(0)} \times \{0\}$.

2. *L'application*

$$(x, \xi, t) \in \mathfrak{A}^*G \times \mathbb{R}_+ \mapsto \widehat{(\chi f_t)} \circ \theta(x, \xi)$$

   s'annule ainsi que toute ses dérivées sur $G^{(0)} \times \{0\}$.

3. *Pour tout $g \in C_c^\infty(G)$, $(f_t * g)_{t\in\mathbb{R}_+^*}$ determine un élément de $\mathcal{J}_0(G)$.*

4. *On a $f = h + g$ où $h \in \mathcal{J}_0(G)$ et $g \in C^\infty(W)$ satisfait :*
   Pour tout $k,\ l \in \mathbb{N}^n$, $j \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$:

$$sup\Big((\|\xi\|^2 + t^2)^{\frac{m}{2}} \Big| \frac{\partial^{|k|+|l|+j}}{\partial x^k \partial \xi^l \partial t^j} \widehat{g \circ \Theta}(x, \xi, t)\Big|\Big) < +\infty \ ,$$

où $\chi \in C_c^\infty(V)$ est une fonction cutt-off convenable qui vaut 1 au voisinage de $G^{(0)} \subset G$.
On définit l'idéal $\mathcal{J}(G) \subset S_c(G_{ad})$ des fonctions qui satisfont aux conditions équivalentes précédentes.

Remarquons que la condition 3 ci-dessus assure que la définition de $\mathcal{J}(G)$ ne dépend pas du choix de l'application exponentielle de G.
On a alors :

Théorème 7 ([9]) *Pour $f = (f_t)_{t\in\mathbb{R}_+} \in \mathcal{J}(G)$ et $m \in \mathbb{N}$ posons*

$$P = \int_0^{+\infty} t^m f_t \frac{dt}{t} \quad et \quad \sigma : (x,\xi) \in \mathfrak{A}^*G \mapsto \int_0^{+\infty} t^m \widehat{f}(x, t\xi, 0)\frac{dt}{t}$$

Alors P est un élément de $\mathcal{P}_{-m}(G)$ dont le symbole principal est σ. Autrement dit, il existe $P \in \mathcal{P}_{-m}(G)$ de symbole principal σ tel que si $g \in C_c^\infty(G)$:

$$P * g = \int_0^{+\infty} t^m f_t * g \frac{dt}{t} \quad et \quad g * P = \int_0^{+\infty} t^m g * f_t \frac{dt}{t}$$

Il faut noter que l'on montre aussi que tout $P \in \mathcal{P}_{-m}(G)$ est de cette forme, c'est-à-dire un $P_f = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^m f_t \frac{dt}{t}$ pour un certain $f = (f_t)_{t\in\mathbb{R}_+} \in \mathcal{J}(G)$.

Revenons au problème initial de comparer les suites exactes (GAG) et (PDO).
Précisons d'abord ce que l'on entend par *équivalence de Morita* entre deux suite exactes.

Définition 11 *On dira que les deux suites exactes de C^*-algèbres*

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0 \quad et \quad 0 \to J \to B \to B/J \to 0$$

sont Morita équivalentes s'il existe un B-module de Hilbert E tel que :

- *E est B-module de Hilbert plein, $EJ = IE$ est un J-module de Hilbert plein et $E/EJ = E \otimes_B B/J$ est un B/J-module de Hilbert plein .*
- *On a des isomorphismes $A \simeq \mathcal{K}(E)$, $I \simeq \mathcal{K}(EJ)$ et $A/I \simeq \mathcal{K}(E/EJ)$.*

Comme annoncé précédemment on a

Théorème 8 ([9]) *L'ensemble $\mathcal{J}(G)$ se complète en un $\Psi^*(G)$-module plein $\mathcal{E}$ avec les opérations suivantes :*

- *Lorsque $f = (f_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $g = (g_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont dans $\mathcal{J}(G) \subset \mathcal{E}$, on a le produit scalaire $\Psi^*(G)$-valué :*
$$< f|g >= \int_0^{\infty} f_t^* * g_t \frac{dt}{t}$$
- *Lorsque $f = (f_t)_{t\in\mathbb{R}_+} \in \mathcal{J}(G) \subset \mathcal{E}$ et $P \in \mathcal{P}_0(G) \subset \Psi^*(G)$, on définit $f * P \in \mathcal{J}(G)$ par $(f * P)_t = f_t * P$ lorsque $t \neq 0$ et $(\widehat{f * P})_0 = \widehat{f}_0 \sigma(P)$.*

De plus, le module $\mathcal{E}$ détermine une équivalence de Morita entre les suites exactes

$$0 \to C^*(G) \otimes \mathcal{K} \to J(G) \rtimes \mathbb{R}_+^* \to C(S^*\mathfrak{A}G) \otimes \mathcal{K} \to 0 \tag{GAG}$$

et

$$0 \to C^*(G) \longrightarrow \Psi_0^*(G) \longrightarrow C(S^*\mathfrak{A}G) \to 0 \ . \tag{PDO}$$

Ces résultats ont de multiples applications et développements. Tout d'abord nous montrons dans un travail en cours comment généraliser l'algèbre $J(G) \rtimes \mathbb{R}_+^*$ et obtenir l'algèbre des opérateurs de Green et même mieux apporter une description via des groupoïdes aux opérateurs de Boutet de Monvel [BdM71]. Enfin, nous étudions les liens entre les extensions pseudo-différentielles de S. Baaj et nos constructions [Ba88, Ba88b].

Bibliographie

[AR67] R. Abraham and J. Robbin, *Transversal mappings and flows*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.

[ALMP12] P. Albin, E. Leichtnam, R. Mazzeo et P. Piazza, The signature package on Witt spaces. Ann. Sci. éc. Norm. Supér. (4) **45 - no. 2**, (2012), 241–310.

[AM85] R. Almeida et P. Molino, Suites d'Atiyah et feuilletages transversalement complets. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **300 - no. 1**, (1985), 13–15.

[AS09] I. Androulidakis et G. Skandalis, The holonomy groupoid of a singular foliation. J. Reine Angew. Math. **626**, (2009), 1–37.

[AS11] I. Androulidakis et G. Skandalis, Pseudodifferential calculus on a singular foliation. J. Noncommut. Geom. **5 - no. 1**, (2011), 125–152.

[AS11b] I. Androulidakis et G. Skandalis, The analytic index of elliptic pseudodifferential operators on a singular foliation. J. K-Theory **8 - no. 3**, (2011), 363–385.

[AZ13] I. Androulidakis et M. Zambon, Smoothness of holonomy covers for singular foliations and essential isotropy. Math. Z. **275 - no. 3-4**, (2013), 921–951.

[AS68] M. Atiyah et I. Singer, The index of elliptic operators I, III, Ann. Math. **87**, (1968), 484–530, 546–604.

[Ba88] S. Baaj, Calcul pseudo-différentiel et produits croisés de C^*-algèbres. I. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **307 - no. 11**, (1988), 581–586.

[Ba88b] S. Baaj, Calcul pseudo-différentiel et produits croisés de C^*-algèbres. II. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **307 - no. 12**, (1988), 663–666

[BP85] B. Bigonnet, J. Pradines, Graphe d'un feuilletage singulier, C. R. Acad. Sci. Paris **300 - no. 13**, (1985), 439–442.

[BlBook] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras.* Second edition. Mathematical Sciences Research Institute Publications, **5**. Cambridge University Press, Cambridge, (1998).

[BdM71] L. Boutet-de-Monvel, Boundary problems for pseudo-differential operators. Acta Math. **126 - no. 1-2**, (1971), 11–51.

[BHS91] J.-P. Brasselet, G. Hector and M. Saralegi, Théorème de de Rham pour les variétés stratifiées. Ann. Global Anal. Geom. **9 - no. 3**, (1991), 211–243.

[Co79] A. Connes, Sur la théorie non commutative de l'intégration. *In* Algèbres d'opérateurs, Springer Lect. Notes in Math. **725**, (1979), 19–143.

[CoBook] A. Connes, *Non commutative geometry,* Academic Press, Inc. San Diego, CA (1994).

[CH90] A. Connes et N. Higson, Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **311- no. 2**, (1990), 101–106.

[CS84] A. Connes et G. Skandalis, The longitudinal index theorem for foliations. Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. **20**, (1984), 1139–1183.

[CF03] M. Crainic et R. L. Fernandes, Integrability of Lie brackets. Ann. of Math. (2) **157 - no. 2**, (2003), 575–620.

[CS86] J. Cuntz et G. Skandalis, Mapping cones and exact sequences in KK-theory. J. Operator Theory **15 - no. 1**, (1986), 163-180.

[HW01] B. Hughes and S. Weinberger, Surgery and stratified spaces. *Surveys on surgery theory, Vol. 2*, **149** of Ann. of Math. Stud., Princeton Univ. Press, Princeton, (2001), 319–352.

[Ka80] G.G. Kasparov, The operator K-functor and extensions of C^*-algebras, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. **44**, (1980), 571–636.

[Ka88] G.G. Kasparov, Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture. Invent. Math. **91**, (1988), 147–201.

[LMN00] R. Lauter, B. Monthubert and V. Nistor, Pseudodifferential analysis on groupoids. Documenta Mathematica (electronic) **5**, (2000), 625–655.

[Les09] J.-M. Lescure, Elliptic symbols, elliptic operators and Poincaré duality on conical pseudomanifolds. J. K-Theory **4 - no. 2**, (2009), 263–297.

[Mat73] J. Mather, Stratifications and mappings. *Dynamical systems* (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971), Academic Press , New York, (1973), 195–232.

[MM98] R. Mazzeo et R.B. Melrose, Pseudodifferential operators on manifolds with fibred boundaries. Asian J. Math. **2 - no. 4**, (1998), 833–866.

[Me93] R.B. Melrose, *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, Research Notes in Math. **4**, (1993).

[MP97] B. Monthubert and F. Pierrot, Indice analytique et Groupoïdes de Lie. C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **325 - no. 2**, (1997), 193–198.

[Mo99] B. Monthubert, Pseudodifferential calculus on manifolds with corners and groupoids. Proceedings of the AMS, **127 - no. 10**, (1999), 2871–2881.

[Mo03] B. Monthubert, Groupoids and pseudodifferential calculus on manifolds with corners. J. Funct. Anal. **199 - no. 1**, (2003), 243–286.

[MRW87] P. S. Mulhy, J. N. Renault and D. P. Williams, Equivalence and isomorphism for groupoid C^*-algebras. J. Operator Theory **17 - no. 1**, (1987), 3–22.

[NWX99] V. Nistor, A. Weinstein and P. Xu, Pseudodifferential operators on differential groupoids. Pacific J. Math. **189**, (1999), 117–152.

[Pra84] J. Pradines, Feuilletages : holonomie et graphes locaux, C. R. Acad. Sci. Paris (I) **298 - no. 13**, (1984), 297–300.

[Pra85] J. Pradines, How to define the differentiable graph of a singular foliation, C. Top. Geom. Diff. Cat. **XXVI(4)** (1985), 339–381.

[Re80] J.N. Renault, *A Groupoid Approach to C^*-Algebras*, Springer Lect. Notes in Math. **793**, (1980).

[Sk91] G. Skandalis, Kasparov's bivariant K-theory and applications. Exposition. Math. **9 - no. 3**, (1991), 193–250.

[Ver84] A. Verona, *Stratified mappings—structure and triangulability*, Springer Lect. Notes in Math. **1102**, (1984)

[Vo76] D. Voiculecu, A non-commutative Weyl-von Neumann theorem. Rev Roumaine Math. Pures Appl. **21 - no. 1**, (1976), 97–113.

[Win83] H. E. Winkelnkemper, The graph of a foliation, Ann. Glob. Anal. Geom. **1 - no. 3**, (1983), 51–75.

[Whi65] H. Whitney, Local properties of analytic varieties. *Differential and Combinatorial Topology* (A Symposium in Honorof Marston Morse), Princeton Univ. Press, Princeton, (1965), 205–244.

Deuxième partie

Résumé des travaux présentés

[1] Claire Debord, Local integration of Lie algebroids. *Lie algebroids and related topics in differential geometry (Warsaw, 2000)*, Banach Center Publ. **54**, Polish Acad. Sci., Warsaw, (2001), 21–33.

Cette article donne une description complète de l'intégration locale des algébroïdes de Lie presque injectifs. En particulier on établit une formule de type Baker-Campbel-Hausdorff dans ce cadre. Enfin, ces résultats sont illustrés par de nombreux exemples.

[2] Claire Debord, Holonomy groupoids of singular foliations. J. Differential Geom. **58 - no. 3**, (2001), 467–500.

Les feuilletages considérés sont des feuilletages de type Stefan pour lesquels l'union des feuilles de dimension maximale est un ouvert dense de la variété feuilletée. Trouver un groupoïde d'holonomie pour de tels feuilletages, c'est trouver un groupoïde différentiable d'unités la variété feuilletée, dont les orbites sont les feuilles du feuilletage et qui « n'a pas trop » d'isotropie (l'ensemble des unités ayant une isotropie non triviale est maigre). Cette question est intimement liée au problème de l'intégration des algébroïdes de Lie. J'obtiens que les algébroïdes de Lie dont l'ancre est injective en restriction à un ouvert dense sont intégrables. Ainsi, un feuilletage presque régulier admet un groupoïde d'holonomie si et seulement si il peut être défini par un algébroïde de Lie dont la dimension des fibres est égale à la dimension des feuilles régulières.

[3] Claire Debord et Jean-Marie Lescure, K-duality for pseudomanifolds with isolated singularities. J. Funct. Anal. **219 - no. 1**, (2005), 109–133.

Dans le cas d'une pseudo-variété à singularités coniques isolées, nous proposons un groupoïde différentiable, appelé *espace* S*-tangent*, qui coïncide avec le fibré tangent ordinaire sur la partie lisse. Nous obtenons une dualité de Poincaré en K-théorie entre l'algèbre des fonctions continues sur la variété singulière X et la C^*-algèbre de son espace S-tangent $T^{\mathsf{S}}X$. Cette généralisation de la dualité existant entre une variété différentiable et son espace tangent valide l'approche et le choix du groupoïde.

[4] Claire Debord, Jean-Marie Lescure et Victor Nistor, Groupoids and an index theorem for conical pseudo-manifolds. J. Reine Angew. Math. **628**, (2009), 1–35.

Nous établissons un analogue du théorème d'indice d'Atiyah-Singer pour les pseudo-variétés à singularités coniques isolées. Précisément, nous construisons des applications indice analytique et indice topologique définies sur la K-théorie de la C^*-algèbre de l'espace S-tangent de la pseudo-variété et à valeurs dans les entiers, puis nous démontrons leur égalité. Les applications que nous définissons sont très naturelles : si on applique leur construction au cas d'une variété C^∞ compacte avec la notion usuelle d'espace tangent, on retrouve exactement les applications indice analytique et indice topologique d'Atiyah-Singer.
L'indice analytique s'obtient à partir d'un « groupoïde tangent » à l'instar de l'approche d'A. Connes dans le cas des variétés. Comme dans le cas régulier ce groupoïde tangent résulte de la déformation de l'espace S-tangent en un groupoïde des couples.
Pour construire l'indice topologique, on plonge la variété singulière dans une variété singulière contractile, ce qui induit une inclusion entre leur espace S-tangent. A cette inclusion est associée un groupoïde de déformation qui permet de définir l'isomorphisme de Thom correspondant. Une excision permet alors d'obtenir l'indice topologique, s'inspirant de la

démarche d'Atiyah et Singer. Enfin, on obtient très simplement l'égalité entre les deux indices, par la construction d'un groupoïde de déformation judicieux.

[5] Claire Debord et Jean-Marie Lescure, K-duality for stratified pseudomanifolds. Geom. Topol. **13 - no. 1**, (2009), 49–86.

Les pseudo-variétés que nous étudions sont du type Thom-Matter. Ces variétés singulières forment une large classe d'exemples d'objets possédant une riche structure géométrique et où certaines des propriétés des variétés différentiables subsistent. Par contre, elles ne sont pas pourvues d'espaces tangents au sens usuel, ni d'une théorie de l'indice au sens d'Atiyah et Singer. Nous généralisons les résultats de [3] au cas des pseudo-variétés quelconques : on définit un groupoïde appelé espace S-tangent de la pseudo-variété et on montre que sa C^*-algèbre est Poincaré duale à l'algèbre des fonctions continues sur la pseudo-variété. Ce travail repose sur un procédé de récurrence sur la profondeur de la stratification et la stabilité algébrique des constructions faites.

[6] Claire Debord et Jean-Marie Lescure, Index theory and groupoids. *Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2010), 86–158.

Nous avons donné un cours avec J-M. Lescure intitulé *Index theory and Groupoids* lors de l'école d'été *Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory* qui s'est tenu à Villa de Leyva en Colombie du 2 au 20 Juillet 2007. Un article très complet issu de ce cours est publié dans les actes de cette école d'été.
Cet article contient trois parties. Dans le première, nous introduisons brièvement les groupoïdes et notions associées : homéomorphismes, équivalences de Morita, algébroïdes de Lie de groupoïdes de Lie, systèmes de Haar et C^*-algèbres associées. Nous donnons différents exemples de groupoïdes qui interviennent en théorie de l'indice. La seconde partie est centrée sur la K-théorie bivariante de Kasparov. Nous commençons par la description historique de la K-homologie de M.F. Atiyah, puis nous donnons les propriétés principales de la KK-théorie. Nous étudions ensuite les modules de Hilbert et leurs opérateurs en grands détails. Nous donnons la construction des groupes de KK-théorie et du produit de Kasparov. Enfin, nous présentons les notions de KK-équivalence et de dualité ainsi que la preuve de la périodicité de Bott. La dernière partie porte sur les théorèmes d'indice. Nous introduisons les opérateurs pseudo-différentiels (équivariants) sur les groupoïdes. Nous présentons enfin le théorème d'indice à l'aide de groupoïdes de déformations tout d'abord dans le cas classique des variétés compactes sans bord puis nous expliquons comment étendre ces résultats aux variétés à singularités coniques isolées reprenant ainsi les résultats de [4].

[7] Claire Debord, Jean-Marie Lescure et Frédéric Rochon, *Pseudodifferential operators on manifolds with fibred corners.* arXiv :1112.4575.

Nous développons et étudions le calcul pseudo-différentiel associé à une pseudo-variété stratifiée. La démarche consiste à utiliser la correspondance existante entre les pseudo-variétés stratifiées et les variétés à coins fibrés pour définir les opérateurs pseudo-différentiels comme des distributions conormales sur un espace éclaté convenable, prolongeant ainsi des idées initiées par Richard Melrose. Nous introduisons des applications symbole et définissons la notion de pleine ellipticité. Ce calcul nous permet en particulier d'interpréter la dualité de

Poincaré de [5] comme la dualité entre la K-homologie de la pseudo-variété et le groupe de K-théorie des opérateurs pleinement elliptiques.

[8] Claire Debord, Longitudinal smoothness of the holonomy groupoid. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **351- no. 15-16**, (2013), 613–616.

I. Androulidakis et G. Skandalis ont défini un groupoïde d'holonomie pour tout feuilletage singulier généralisant la construction proposée dans [2]. Ce groupoïde, dont la topologie est généralement assez singulière, est le point de départ d'un calcul pseudo-différentiel longitudinal ainsi que d'une théorie de l'indice pour de tels feuilletages. Ces travaux sont grandement simplifiés sous l'hypothèse de différentiabilité longitudinale du groupoïde d'holonomie. Dans cet article, on réinterprète le *period bounding lemma* pour montrer que le groupoïde d'holonomie construit par I. Androulidakis et G. Skandalis est toujours longitudinalement lisse. Ce résultat offre en outre un nouvel éclairage sur les travaux de M. Crainic et R.L. Fernandes ainsi que ceux de K. Mackenzie sur l'obstruction à l'intégrabilité des algébroïdes de Lie transitifs.

[9] Claire Debord et Georges Skandalis, Adiabatic groupoid, crossed product by $\mathbb{R}_+^*$ and pseudodifferential calculus. Adv. Math. **257**, (2014), 66–91.

L'objectif de ce travail est de comprendre le calcul pseudo-différentiel sur un groupoïde de Lie G comme la convolution sur un groupoïde convenable plus gros. On exprime les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre zéro sur G comme des intégrales de noyaux associés au groupoïde adiabatique G_{ad} de G. Nous utilisons ensuite ce résultat pour construire une équivalence de Morita explicite entre la C^*-algèbre des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 et un idéal de la C^*-algèbre du groupoïde G_{ga} obtenu comme produit croisé de G_{ad} par l'action naturelle de $\mathbb{R}_+^*$.