HAL open science

Feuilletages singuliers et groupoïdes d'holonomie

Claire Debord

▶ **To cite this version:**

Claire Debord. Feuilletages singuliers et groupoïdes d'holonomie. Géométrie différentielle [math.DG]. Université Paul Sabatier Toulouse III, 2000. Français. NNT : . tel-03776278

HAL Id: tel-03776278

https://hal.science/tel-03776278v1

Submitted on 13 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée devant

L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

en vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

Spécialité: Mathématiques Pures

par

Claire Debord

Feuilletages singuliers et groupoïdes d'holonomie.

Le mercredi 26 janvier 2000

Au vu des rapports établis par :

A. Haefliger	Professeur (Genève, Suisse)
A. Weinstein	Professeur (Berkeley, Etats-Unis)

Devant le jury composé de :

A. Haefliger	Professeur (Genève, Suisse)	Rapporteur
A. Legrand	Professeur (Toulouse III)	Directeur
G. Levitt	Professeur (Toulouse III)	
J. Pradines	Professeur (Toulouse III)	
J. Renault	Professeur (Orléans)	
G. Skandalis	Professeur (Paris VII)	

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que je consacre ces quelques lignes pour exprimer ma reconnaissance et ma gratitude aux personnes qui, de près ou de loin, ont rendu possible l'aboutissement de ce travail.

Cette thèse est issue d'une question posée par Gilbert Levitt, je garde un excellent souvenir de nos discussions et je le remercie de m'avoir initiée à la géométrie des feuilletages. Ce travail de thèse a été réalisé sous la direction d'André Legrand, il m'a apporté confiance et encouragements et je lui en suis très reconnaissante.

Georges Skandalis a une place primordiale dans l'achèvement de cette thèse. Ses suggestions, sa disponibilité, son exigence également, ont été un réel moteur dans l'avancement de mes recherches et je suis heureuse de lui rappeler toute ma gratitude, ainsi que toute mon admiration pour son talent et sa gentillesse.

Jean Pradines, dont les travaux furent une source d'inspiration importante, et Jean Renault ont toute ma reconnaissance pour leur sollicitude et les stimulantes discussions que nous avons eues.

Claire Anantharaman-Delaroche, Jean Renault et toute l'équipe d'algèbres d'opérateurs d'Orléans m'ont réservé un accueil exceptionnel et apporté un soutien substantiel. Bien que membre temporaire, j'ai d'emblée été parfaitement intégrée dans leur laboratoire, ce qui a été autant agréable que stimulant pour mon travail. Je leur en suis particulièrement reconnaissante. Je garde aussi un très bon souvenir de mon passage l'année précédente à Nantes et de l'accueil de Colette Anné, au sein de l'équipe de géométrie.

J'ai eu la chance durant ma première année de Deug de suivre le cours d'algèbre d'André Cerezo. Il a su aiguiser ma curiosité et m'a donner envie de faire des mathématiques. Je le remercie de m'avoir fait cadeau de cette passion.

Je tiens aussi à remercier pour leur aide, leurs encouragements et tout simplement leur gentillesse Vincent Guirardel, Claude Hayat-Legrand, Pierre-yves Le Gall, Bertrand Monthubert, François Pierrot, Laurent Stolovitch, Kroum Tzanev et Mesdames marie Brouard et Yveline Panabière.

Enfin, je remercie Alex, Anne, Benoit, Isa, Nanou, Paul, Pitou et Sandra qui ont toujours été là pour me soutenir durant ces années de thèse.

Jean-Marie, merci d'être à mes côtés.

Contents

Introduction **7**

1 Les feuilletages singuliers de Stefan **11**
1.1 Définitions et principales propriétés 11
1.2 Exemples 13
1.3 Le problème du groupoïde d'holonomie dans ce cadre 16

2 Généralités sur les groupoïdes différentiables **19**
2.1 Groupoïde différentiable 19
2.2 Groupoïde différentiable local 21
2.3 Algébroïde de Lie 22

3 Les quasi-graphoïdes **25**
3.1 Définition et exemples 25
3.2 Propriétés 26
3.2.1 Propriétés structurelles 26
3.2.2 Propriétés algébriques 28
3.3 Justification géométrique de ce choix 33
3.4 Atlas généralisé 36
3.4.1 Quasi-graphoïde local 36
3.4.2 Atlas 39

4 Intégration locale des algébroïdes de Lie de feuilletages singuliers **43**
4.1 Idée de la construction 44
4.2 Formule de Baker-Campbell-Hausdorff généralisée 46
4.3 Intégration locale des algébroïdes de Lie triviales 49
4.4 Intégration locale des morphismes 55
4.5 Fin de la démonstration du théorème 3 55
4.6 Exemples 56

5 Groupoïde des germes d'isomorphismes Morita locaux **63**
5.1 Equivalence de Morita 63
5.2 Idée de la construction 65
5.3 Pseudogroupe local d'isomorphismes Morita locaux 67
5.3.1 Définitions 67
5.3.2 Structure de Pseudogroupe local 69
5.4 Groupoïdes associés 71
5.4.1 Germes d'isomorphismes Morita locaux 71
5.4.2 Construction du groupoïde 73

6 Groupoïde d'holonomie de feuilletages presque réguliers **77**
6.1 Groupoïdes de feuilletages singuliers 77
6.2 Exemples 80
6.3 Remarques 85
6.3.1 Holonomie réduite de feuilletages singuliers 85
6.3.2 C^*-algèbre de feuilletages singuliers 86

A Orbites de champs de vecteurs **89**

B Intégration locale des algébroïdes de Lie de J. Pradines **91**

Bibliographie **95**

Introduction

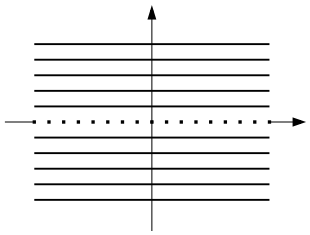
Le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage régulier a été introduit dans le contexte topologique par C. Ehresmann [Ehr61], puis dans le contexte différentiable sous deux descriptions différentes par J. Pradines [Pra84] et H.E. Winkelnkemper [Win83].
Il s'agit du plus petit groupoïde différentiable dont les orbites sont les feuilles du feuilletage [Phi87]. Ainsi tout feuilletage régulier est défini par l'action de son groupoïde d'holonomie sur sa base. Une telle approche a été le point de départ de nombreuses études sur les feuilletages réguliers. Le groupoïde d'holonomie a notamment été utilisé par A. Connes pour définir l'algèbre de Von Neumann ainsi que la C^*-algèbre d'un feuilletage [Co82] ; A. Haefliger l'a utilisé pour étudier la structure transverse [Hae84] ; il sert de support à l'élaboration du calcul pseudo-différentiel longitudinal de A. Connes et G. Skandalis [CS84] ainsi que de la classe fondamentale transverse [Co86].

Nous cherchons ici à étendre cette notion à certains feuilletages singuliers de type Stefan [Ste74, Sus73]. La question n'est pas vaine car les composantes connexes des orbites d'un groupoïde différentiable sont les feuilles d'un feuilletage de Stefan.
Rappelons que si M est une variété différentiable un *feuilletage de Stefan* sur M est une partition $\mathcal{F}$ de M par les sous-variétés intégrales connexes maximales d'une distribution différentiable intégrable. Autrement dit $\mathcal{F}$ est une partition de M par des sous-variétés connexes immergées (les *feuilles*) telle que si $(x, v) \in TM$ est un vecteur tangent en x à la feuille F_x de $\mathcal{F}$ passant par x alors il existe un champ de vecteurs local X sur M tel que:

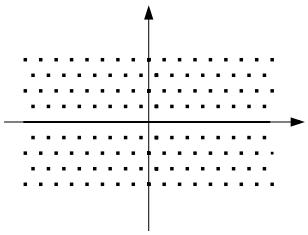
i) x est dans le domaine de X et $X(x) = (x, v)$,

ii) pour tout y dans le domaine de X, $X(y)$ est un vecteur tangent en y à la feuille F_y de $\mathcal{F}$ passant par y.

Contrairement à ce qui se passe dans le cas régulier, la dimension des feuilles peut varier.
Par exemple la partition de $\mathbb{R}^2$ donnée par les droites horizontales sur $\mathbb{R}^2 \setminus (R \times \{0\})$ et les points sur $R \times \{0\}$ est un feuilletage de Stefan. En revanche la partition de $\mathbb{R}^2$ donnée par les points sur $\mathbb{R}^2 \setminus (R \times \{0\})$ et la droite $R \times \{0\}$ n'est pas un feuilletage de Stefan.



Feuilletage de Stefan.



Feuilletage non de Stefan.

Notre étude portera sur les feuilletages de Stefan $(M, \mathcal{F})$ ayant la propriété supplémentaire que la réunion M_0 des feuilles de dimension maximale est un ouvert dense de M. Dans ce cas la restriction $\mathcal{F}_0$ du feuilletage $\mathcal{F}$ à M_0 est un feuilletage régulier appelé *le sous-feuilletage régulier maximal* de $(M, \mathcal{F})$. Nous nommerons de tels feuilletages des feuilletages *presque réguliers*.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage presque régulier sur une variété M de dimension n et $(M_0, \mathcal{F}_0)$ son sous-feuilletage régulier maximal. Notons k la dimension de $\mathcal{F}_0$.
La question étudiée dans cette thèse est la suivante.
Existe-t-il un groupoïde différentiable sur M de dimension $n+k$ qui définisse $\mathcal{F}$?
On verra que si un tel groupoïde existe alors il existe au moins un groupoïde différentiable H de base M qui définit $\mathcal{F}$ et dont la restriction à la partie régulière M_0 est isomorphe au groupoïde d'holonomie du sous-feuilletage régulier maximal $(M_0, \mathcal{F}_0)$.
Par analogie, on dira alors que H est *un groupoïde d'holonomie* de $(M, \mathcal{F})$.

Le travail présenté ici montre que les feuilletages presque réguliers n'admettent pas toujours de groupoïde d'holonomie. C'est par exemple le cas du feuilletage de $\mathbb{R}^3$ par les sphères concentriques. Par ailleurs, un feuilletage presque régulier peut admettre plusieurs groupoïdes d'holonomie. Se pose alors la question d'un "meilleur candidat". Là encore certains feuilletages presque réguliers admettent des groupoïdes d'holonomie mais pas de meilleur. C'est le cas du feuilletage du plan ayant pour feuilles $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

La question qui nous préoccupe ici est intimement liée à l'intégration des algébroïdes de Lie (voir [Pra68b, Alm80] et [CDW87] dans le cas symplectique).
Un algébroïde de Lie sur M est la donnée d'un fibré vectoriel $\mathcal{A}$ sur M, d'un morphisme de fibrés $p : \mathcal{A} \to TM$, appelé fléchage, et d'un crochet de Lie sur les sections de $\mathcal{A}G$ "compatible" via p au crochet usuel sur les champs de vecteurs. L'image $p(\mathcal{A})$ est alors une distribution différentiable intégrable sur M et elle définit un feuilletage de Stefan sur M. D'autre part, à tout groupoïde différentiable G de base M est associé un algébroïde de Lie sur M.
A la fin des années 60, J. Pradines a annoncé l'intégrabilité des algébroïdes de Lie, c'est-à-dire la possibilité d'associer à tout algébroïde de Lie $\mathcal{A}$ un groupoïde différentiable dont l'algébroïde de Lie est $\mathcal{A}$. En 1985, R. Almeida et P. Molino ont donné un contre-exemple à ce résultat [AM85]. Cependant, la thèse de R. Almeida

[Alm80], où sont développées les notes de J. Pradines, assure que l'intégration locale des algébroïdes de Lie reste vraie, c'est-à-dire que pour tout algébroïde de Lie il existe un groupoïde de Lie local qui l'intègre.

Le résultat principal de cette thèse est le

Théorème *Tout algébroïde de Lie dont le fléchage est injectif en restriction à un ouvert dense est intégrable.*

Corollaire *Un feuilletage presque régulier admet un groupoïde d'holonomie si et seulement si il peut être défini par un algébroïde de Lie dont la dimension est égale à la dimension du sous-feuilletage régulier maximal ou, de façon équivalente, dont le fléchage est injectif en restriction à un ouvert dense.*

Ce travail comporte deux étapes.
- *Passage de l'infinitésimal au local.*
Dans un premier temps nous donnons une nouvelle construction explicite de l'intégration locale de ce type d'algébroïde de Lie. Etant donné un algébroïde de Lie $\mathcal{A}$ sur une variété M dont le fléchage est presque injectif, on obtient une famille de groupoïdes différentiables locaux $\mathcal{U} = \{G_i \rightrightarrows O_i,\ i \in I\}$ tel que $\{O_i,\ i \in I\}$ est un recouvrement ouvert de la variété M et ayant de bonnes propriétés. Plus précisément, il existe un groupoïde différentiable $G_{\mathcal{U}} \rightrightarrows M$ de base M tel que chaque G_i est un sous-groupoïde local de $G_{\mathcal{U}}$. De plus $G_{\mathcal{U}}$ intègre $\mathcal{A}$ et est un quasi-graphoïde local (cf. Chapitre 3).
- *Passage du local au global.*
Il s'agit ensuite de construire un groupoïde différentiable à partir de ces solutions locales. Pour ce faire, ma démarche se base sur les équivalences de Morita. Plus précisément on considère l'ensemble de toutes les équivalences de Morita locales entre les éléments de $\mathcal{U}$. Cet ensemble peut être muni d'une structure semblable à une structure de pseudogroupe, il suffit ensuite de définir le groupoïde de ses germes.

J. Pradines a traité de nombreux problèmes liés à cette question. D'une part il est à l'origine de la théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables [Pra68b, Pra68a, Pra67], d'autre part, il a étudié le problème d'un groupoïde d'holonomie pour les feuilletages singuliers [Pra85]. Ces différents travaux, bien que très importants, sont peu utilisés car difficiles d'accès. Ils ont été pour moi une grande source d'inspiration.

La rédaction est articulée de la façon suivante :

- ⋆ Nous rappelons la définition des feuilletages de Stefan dans le chapitre 1. Nous donnons également un grand nombre d'exemples que l'on suit tout au long de ce travail.

- ⋆ Nous rappelons les définitions élémentaires liées aux groupoïdes différentiables dans le chapitre 2.

- ⋆ La façon dont nous avons posé le problème nous amène à rechercher des groupoïdes qui ne soient "pas trop gros" : les *quasi-graphoïdes*. Le chapitre 3 est consacré à leur étude. Nous verrons qu'ils sont très liés aux feuilletages presque réguliers.

- ⋆ Dans le chapitre 4, nous donnons une construction "à la main" de l'intégration locale des algébroïdes de Lie de fléchage presque injectif. Pour ce faire nous établissons un analogue de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff pour les algébroïdes de Lie.

- ⋆ Le problème global est étudié dans le chapitre 5. Nous étendons la notion d'équivalence de Morita au contexte local. Nous décrivons ensuite la structure de pseudogroupe, puis nous construisons le groupoïde des germes d'un tel pseudogroupe.

- ⋆ Les résultats des chapitres 3, 4 et 5 nous permettent alors d'énoncer le théorème principal. Nous illustrons ensuite ce résultat sur de nombreux exemples.

- ⋆ L'annexe A est un résultat technique dont nous avons besoin lors de l'intégration locale.

- ⋆ Nous décrivons l'intégration locale de J. Pradines dans l'annexe B.

Chapter 1

Les feuilletages singuliers de Stefan

Nous allons décrire ici les feuilletages étudiés dans la suite. Ces feuilletages, introduits indépendamment par P. Stefan [Ste74] et H. Sussmann [Sus73] s'obtiennent comme partitions d'une variété suivant les sous-variétés intégrales d'une famille de champs de vecteurs. Dans un tel feuilletage la dimension des feuilles peut donc varier.
Après un rappel des définitions et principaux résultats liés aux feuilletages de Stefan, nous donnons une série d'exemples. Nous expliquons ensuite les difficultés rencontrées pour associer un groupoïde différentiable à de tels feuilletages ainsi que la démarche adoptée dans la suite de ce travail.

1.1 Définitions et principales propriétés

Définition 1 *[Ste74] Une structure de préfeuilletage de classe $\mathcal{C}^q$ sur une variété M de classe $\mathcal{C}^q$ est la donnée d'une seconde structure de variété de classe $\mathcal{C}^q$ sur l'ensemble M, notée M', telle que l'identité $1_M : M' \to M$ soit une $\mathcal{C}^q$-immersion.*

Les composantes connexes de M' sont les *feuilles* du préfeuilletage (M, M').

Les cas extrêmes sont le *feuilletage grossier* M, c'est-à-dire M feuilleté par lui-même et le *feuilletage discret* $M^\bullet$, c'est-à-dire M feuilleté par ses points.

Un préfeuilletage (M, M') est un *feuilletage trivial* lorsqu'il est isomorphe au produit d'un feuilletage discret et d'un feuilletage grossier, plus précisément, lorsqu'il existe un difféomorphisme Φ de M sur un produit de deux variétés connexes $P \times T$ tel que $\Phi(M')$ soit la structure obtenue sur $P \times T$ en munissant T de la topologie discrète.

Un *feuilletage (régulier)* est simplement un préfeuilletage localement trivial.

Définition 2 *[Ste74] Soit M une $\mathcal{C}^q$-variété de dimension n. Un feuilletage de Stefan de classe $\mathcal{C}^q$ sur M, noté $(M, \mathcal{F})$, est un préfeuilletage de classe $\mathcal{C}^q$ de M tel qu'en tout point x_0 de M, il existe une $\mathcal{C}^q$-carte (U, φ) satisfaisant à :*
a) $\varphi(U) = P \times T$ où P est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^k$ et T un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^{n-k}$, k désignant la dimension de la feuille L_{x_0} passant par x_0;
b) $\varphi(x_0) = (0, 0)$;
c) si L est une feuille de $(M, \mathcal{F})$ qui rencontre U, alors $L \cap U = \varphi^{-1}(P \times N_L)$ où $N_L = \{t \in T \ ; \ \varphi^{-1}(0, t) \in L\}$.

Avec les notations précédentes, pour tout point x_0 de M, il existe une carte φ d'un voisinage U de x_0 à valeurs dans $P \times T$ transformant le feuilletage $\mathcal{F}_U$ induit sur U en le feuilletage produit $\mathcal{F}_P \times \mathcal{F}_T$ où $\mathcal{F}_P$ est le feuilletage grossier sur P et $\mathcal{F}_T$ est un feuilletage sur T nul à l'origine. Autrement dit un feuilletage de Stefan est localement le produit d'un feuilletage grossier par le feuilletage de Stefan induit sur une sous-variété "transverse" admettant une feuille (éventuellement singulière) réduite à un point.
D'autre part, la définition précédente implique que la fonction $x \mapsto d(x, L_x)$ où $d(x, L_x)$ est la dimension de la feuille L_x passant par x, est semi-continue inférieurement.

Nous nous intéresserons particulièrement dans la suite aux feuilletages de Stefan définis par des systèmes de champs de vecteurs. Nous allons rappeler ici la généralisation aux distributions de rang non constant du théorème de Frobenius due à P. Stefan [Ste74] et H.J. Sussmann [Sus73].

Soit $\mathcal{D}$ une famille de champs de vecteurs locaux différentiables sur une variété M. On suppose que la famille $\mathcal{D}$ est définie sur tout M, ce qui signifie que pour tout $x \in M$ il existe au moins un $X \in \mathcal{D}$ tel que x soit dans le domaine de X.
On notera $(t, x) \mapsto \varphi_X^t(x)$ le flot d'un élément X de $\mathcal{D}$ et $\Psi_{\mathcal{D}}$ le pseudogroupe des difféomorphismes locaux sur M engendré par les (φ_X^t) lorsque $X \in \mathcal{D}$.
Le pseudogroupe $\Psi_{\mathcal{D}}$ agit sur M et les orbites de cette action sont appelées les *classes d'accessibilité* de $\mathcal{D}$.
La famille de champs $\mathcal{D}$ induit deux distributions différentiables A et $\tilde{A}$ sur M. La distribution A admet pour fibre au-dessus d'un point $x \in M$ le sous-espace vectoriel A_x de T_xM engendré par $\{X(x) \ ; \ X \in \mathcal{D} \ et \ x \in \mathrm{dom}(X)\}$. La distribution $\tilde{A}$ admet pour fibre au-dessus d'un point $x \in M$ le sous espace vectoriel $\tilde{A}_x$ de T_xM engendré par $\{\varphi_*(Y)(x) \ ; \ \varphi \in \Psi_{\mathcal{D}} \ et \ Y \in \mathcal{D}\}$.
Avec les notations précédentes, on a le théorème suivant :

Théorème 1 *[Ste74, Sus73] La distribution différentiable $\tilde{A}$ est complètement intégrable. Elle définit le feuilletage de Stefan sur M dont les feuilles sont les classes d'accessibilité de $\mathcal{D}$.*

Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une distribution différentiable soit complètement intégrable.

Théorème 2 *[Ste74, Sus73] Soit A une distribution différentiable définie sur une variété M et $\mathcal{D}$ une famille de champs de vecteurs locaux différentiables qui engendre A. On considère comme précédemment $\Psi_{\mathcal{D}}$ et $\tilde{A}$.*
Les conditions suivantes sont équivalentes :
1- La distribution A est $\Psi_{\mathcal{D}}$-invariante, c'est à dire que pour tout élément φ de $\Psi_{\mathcal{D}}$ et tout x dans le domaine de φ on a l'égalité $T_x\varphi(A_x) = A_{\varphi(x)}$.
2- Les distributions A et $\tilde{A}$ sont égales.
3- La distribution A est complètement intégrable.
4- Pour tout point x de M, il existe k champs de vecteurs locaux $X^1, \cdots, X^k$ appartenant à $\mathcal{D}$, définis sur un voisinage de x, tel que $X^1(x), \cdots, X^k(x)$ engendrent A_x et qui satisfont à la condition suivante :
Pour tout $Z \in \mathcal{D}$ défini sur un voisinage de x, il existe $\varepsilon > 0$ et des fonctions différentiables $\Lambda^i_j :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$, $i, j = 1, \cdots, k$, telles que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et tout $i = 1, \cdots, k$,

$$[Z, X^i](\varphi^t_Z(x)) = \sum_{j=1}^{k} \Lambda^i_j(t) X^j(\varphi^t_Z(x)) \ .$$

On remarquera que les quatre conditions précédentes impliquent que $\mathcal{D}$ est stable par crochet de Lie. Contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une distribution de rang constant, la réciproque est fausse [Sus73].

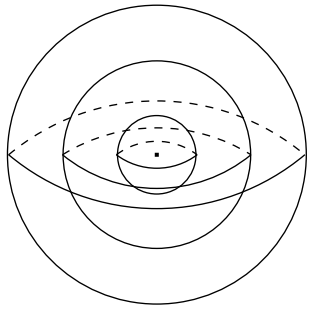
Nous nous intéresserons particulièrement dans la suite aux *feuilletages de Stefan définis par des algébroïdes de Lie.*
Soit M une variété différentiable. Rappelons [Mac87] qu'un *algébroïde de Lie* sur M est la donnée d'un fibré vectoriel $\mathcal{A} \to M$, d'un crochet $[\cdot, \cdot] : \Gamma(\mathcal{A}) \times \Gamma(\mathcal{A}) \to \Gamma(\mathcal{A})$ sur le module $\Gamma(\mathcal{A})$ des sections de $\mathcal{A}$ et d'un morphisme de fibré $p : \mathcal{A} \to TM$ de $\mathcal{A}$ vers le fibré tangent TM de M, appelé *fléchage*, tels que :
1- le crochet sur $\Gamma(\mathcal{A})$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire, antisymétrique et satisfait à l'identité de Jacobi,
2- $[X, fY] = f[X, Y] + p(X)(f)Y$ pour tout $X,\ Y \in \Gamma(\mathcal{A})$ et f différentiable sur M,
3- $p([X, Y]) = [p(X), p(Y)]$ pour tout $X,\ Y \in \Gamma(\mathcal{A})$.
On note A la distribution sur M, définie par $p(\mathcal{A})$. Le théorème ci-dessus garantit qu'elle est complètement intégrable. Le feuilletage de Stefan correspondant sur M est dit *défini par l'algébroïde de Lie $\mathcal{A}$.*

1.2 Exemples

1- Un feuilletage régulier est un feuilletage de Stefan.

2- Les orbites d'une action différentiable d'un groupe de Lie sur une variété sont les feuilles d'un feuilletage de Stefan.

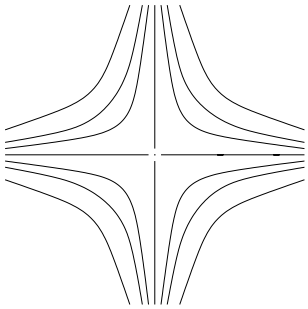
En particulier, les sphères concentriques dans $\mathbb{R}^3$ sont les feuilles d'un feuilletage de Stefan :



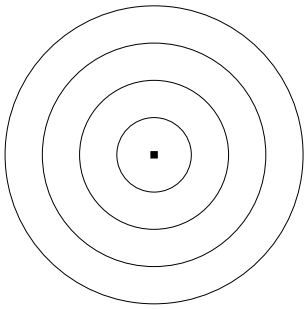
Action de SO_3 sur $\mathbb{R}^3$

3- Les sous-variétés intégrales d'une famille involutive et localement de type fini de champs de vecteurs définie sur une variété M sont les feuilles d'un feuilletage de Stefan [Sus73].
En particulier les orbites d'un champ de vecteurs X sur une variété M forment un feuilletage de Stefan.

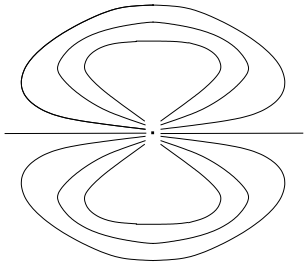
Par exemple lorsque M est le plan $\mathbb{R}^2$:



$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$



$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$

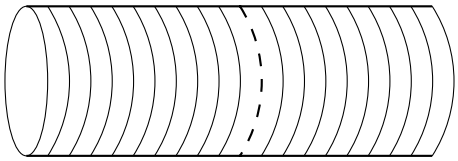


$X = (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$

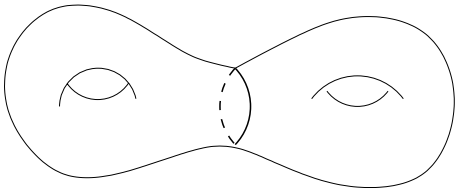
4- Les orbites d'un groupoïde différentiable α-connexe de base M sont les feuilles d'un feuilletage de Stefan [Ste74, Pra85].

5- Soit N une variété munie de deux feuilletages réguliers $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ où $\mathcal{F}_1$ est un sous feuilletage de $\mathcal{F}_2$ (c'est-à-dire que toute feuille de $\mathcal{F}_1$ est contenue dans une feuille de $\mathcal{F}_2$). Alors $M = N \times \mathbb{R}$ admet un feuilletage de Stefan, défini par $\mathcal{F}_1 \times \{0\}$ et $\mathcal{F}_2 \times \{t\}$ pour $t \neq 0$.

Par exemple, considérons sur S^1 le feuilletage $\mathcal{F}_1$ de S^1 par ses points et $\mathcal{F}_2$ de S^1 par lui même. On obtient alors un feuilletage singulier sur le cylindre :

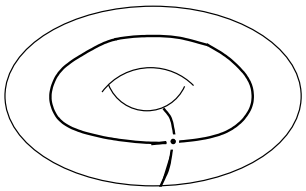


6- Soit M une variété de dimension n et N une sous-variété connexe de M de dimension $k < n$. On peut alors considérer le feuilletage sur M admettant pour feuilles N et les composantes connexes de $M \setminus N$.
- Localement ce type d'exemple se ramène à l'inclusion de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$.
- Un cas extrême est celui où N est réduit à un point de M.
- On portera dans la suite une attention particulière au cas où N est une sous variété de codimension 1.
On peut ainsi considérer les variétés à bord comme "restriction" d'un feuilletage de Stefan :

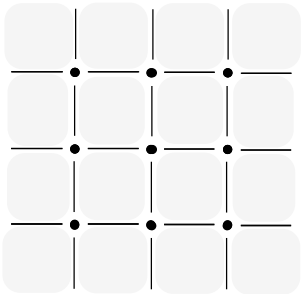


S^1 plongé dans le tore à deux trous

7- Dans le même ordre d'idée, citons les *équarrissages* introduits par B. Monthubert dans sa thèse pour étudier les variété à coins [Mon98]. Il s'agit, étant donné une variété M, de la donnée d'une famille finie $(V_i)_{i\in I}$ de sous-variétés de codimension 1 telles que pour tout $J \subset I$, la famille d'inclusion des V_j, $j \in J$ soit transverse. On considère alors sur M la topologie induite par la topologie de M sur $M \setminus \cup_{i\in I} V_i$ et par la topologie de V_i sur V_i pour tout $i \in I$. Les composantes connexes de M pour cette topologie sont les *faces* de l'équarrisage et peuvent se voir comme les feuilles d'un feuilletage de Stefan sur M.

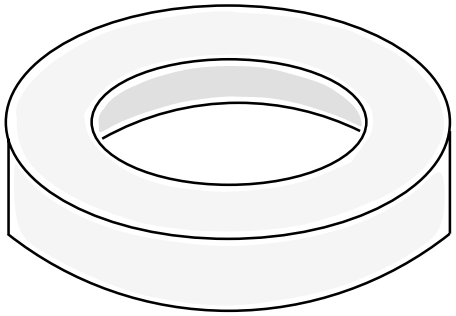


Les âmes du tore T^2

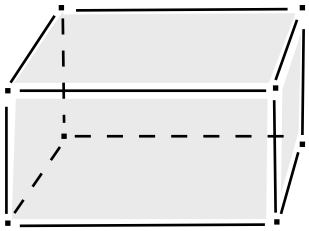


Un "quadrillage" du plan

8- De façon analogue, soit M une variété et $N \subset M$ une variété à coins telle que l'intérieur de N soit un ouvert de M. On peut considérer le feuilletage de Stefan dont les feuilles sont les composantes connexes de $M \setminus N$ et les faces de N.



Le tore à section carrée dans $\mathbb{R}^3$



Le cube dans $\mathbb{R}^3$

On peut élargir la notion de variétés à coins et admettre par exemple la pyramide à base carrée.

9- Si $(M, \mathcal{F})$ est un feuilletage riemannien sur une variété compacte connexe, alors la fermeture des feuilles forme un feuilletage de Stefan [Mol88].

1.3 Le problème du groupoïde d'holonomie dans ce cadre

Etant donné un feuilletage de Stefan $(M, \mathcal{F})$, on note M_0 la réunion des feuilles de $\mathcal{F}$ de dimension maximale munie de la topologie induite par M et $\mathcal{F}_0$ le feuilletage (régulier) restriction de $\mathcal{F}$ à M_0. Dans la suite notre étude portera sur les feuilletages de Stefan $(M, \mathcal{F})$ pour lesquels M_0 est un ouvert dense de M, on désignera par *feuilletages presque réguliers* de tels feuilletages. Dans ce cas, on appelle $(M_0, \mathcal{F}_0)$ le *sous-feuilletage régulier maximal* de $(M, \mathcal{F})$.

Avant d'expliquer la démarche adoptée pour associer un groupoïde différentiable à un feuilletage presque régulier, nous rappelons brièvement la situation des feuilletages réguliers.
Etant donné un feuilletage régulier, le graphe de la relation d'équivalence "être sur une même feuille" n'est généralement pas une variété. Aussi pour obtenir un groupoïde différentiable représentant cette relation on est amené à faire intervenir l'holonomie des feuilles. Ainsi, J. Phillips a mis en évidence que le "plus petit" groupoïde différentiable "raisonnable" que l'on puisse associer au feuilletage est le groupoïde d'holonomie [Phi87].
Rappelons la construction ainsi que les principales propriétés du groupoïde d'holonomie $Hol(M, F)$ lorsque F est un feuilletage régulier de dimension k sur une variété M de dimension n [Win83, Pra84, Hae84, Hec93].

L'ensemble $Hol(M,F)$ est constitué des classes d'holonomie de chemins tangents à F.
Plus précisément, un élément $(y,x,\bar{\gamma}) \in Hol(M,F)$ est la donnée d'un chemin γ sur une feuille de F allant de x à y et tel que $\bar{\gamma} = \bar{\delta}$ si et seulement si $\gamma^{-1}\delta$ est un lacet en x sans holonomie.

Les applications source α et but β sont données par $\alpha(y,x,\bar{\gamma}) = x$ et $\beta(y,x,\bar{\gamma}) = y$. Le produit provient de la composition usuelle de deux chemins "qui se suivent" :

$$(y,x,\bar{\gamma})(x,z,\bar{\delta}) = (y,z,\overline{\gamma\delta}) \ .$$

L'inverse est l'application qui consiste à "prendre un chemin en sens inverse" :

$$(y,x,\bar{\gamma})^{-1} = (x,y,\overline{\gamma^{-1}}) \ .$$

L'application unité est l'application qui à $x \in N$ fait correspondre $(x,x,\bar{c_x})$ où c_x est le chemin constant en x.

La trivialité locale du feuilletage (M,F) permet de munir $Hol(M,F)$ d'une structure de variété (éventuellement non séparée) de dimension $n+k$ qui en fait un groupoïde différentiable α-connexe ayant les propriétés suivantes :
1- Les orbites de $Hol(M,F)$ sont les feuilles de (M,F), c'est-à-dire que si L_x est la feuille de F passant par x alors $L_x = \beta(\alpha^{-1}(x)) = \alpha(\beta^{-1}(x))$.
2- Les groupes d'isotropie de $Hol(M,F)$ sont les groupes d'holonomie des feuilles correspondantes et les fibres de $Hol(M,F)$ sont les revêtements d'holonomie des feuilles. Autrement dit, $Hol(M,F)^x_x = \alpha^{-1}(x) \cap \beta^{-1}(x)$ est le groupe d'holonomie de la feuille L_x passant par x et $\beta : \alpha^{-1}(x) = Hol(M,F)_x \to L_x$ est son revêtement d'holonomie.

On voudrait associer à un feuilletage presque régulier $(M,\mathcal{F})$ un groupoïde différentiable $H(M,\mathcal{F})$ de base M qui soit une généralisation du groupoïde d'holonomie. Il semble raisonnable de demander que les orbites de $H(M,\mathcal{F})$ soient les feuilles de $(M,\mathcal{F})$ et que la restriction de $H(M,\mathcal{F})$ à la partie régulière, M_0 soit le groupoïde d'holonomie du sous-feuilletage régulier maximal $(M_0,\mathcal{F}_0)$.

La première difficulté vient du fait que dans ce cadre-là, la donnée des classes d'homotopie des chemins tangents au feuilletage ne peut pas suffire. Effectivement, supposons que $(M,\mathcal{F})$ admette une feuille singulière s réduite à un point et que $(M_0,\mathcal{F}_0)$ soit un feuilletage de dimension $k > 0$, alors si $H(M,\mathcal{F})$ existe, la α-fibre de $H(M,\mathcal{F})$ au-dessus de s est un groupe de Lie de dimension k, la seule donnée du chemin constant en s est insuffisante pour construire une telle variété. Il faut être en mesure de "coder" la chute de dimension des feuilles.

L'autre difficulté provient du fait que l'on a perdu la notion de trivialité locale. Le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage régulier est une désingularisation de l'espace des feuilles et dans ce cas-là, la trivialité locale du feuilletage se traduit par le fait

que la relation d'équivalence "être sur une même feuille" est localement régulière. En d'autres termes, même si l'espace des feuilles est (globalement) "singulier", il est obtenu à partir du recollement de variétés de même dimension. Ce phénomène est essentiel dans la construction usuelle du groupoïde d'holonomie.

J. Pradines dans [Pra85] et B. Bigonnet dans [BP85, Big86] caractérisent les groupoïdes différentiables adaptés aux feuilletages presque réguliers, il s'agit des *quasi-graphoïdes*. Ils développent l'étude algébrique et différentiable des cartes de tels groupoïdes (qu'ils nomment *convecteurs*). Etant donné une variété différentiable M, ils construisent le *convecteur universel* associé. Il s'agit d'un groupoïde différentiable G_M de base G_M^0 étalée sur M, ayant la propriété que tout quasi-graphoïde de base M est isomorphe à un sous-groupoïde ouvert de G_M. Alors, à toute section σ de l'étalement surjectif de G_M^0 sur M (nommée une *convection*), correspond, d'une part le groupoïde différentiable G_M^σ de base M, restriction de G_M à $\sigma(M)$, et d'autre part le feuilletage singulier que G_M^σ induit sur M. Ils définissent alors le groupoïde d'holonomie de la *convection* σ comme la composante α-connexe de G_M^σ.

Etant donné un feuilletage presque régulier $\mathcal{F}$ sur la variété M, il résulte de la construction précédente que si $\mathcal{F}$ admet un "groupoïde d'holonomie" il s'agit alors d'un sous-groupoïde de G_M. Cependant on ne dispose pas de critère sur $\mathcal{F}$ pour savoir si un tel groupoïde existe et, lorsque c'est le cas, on ne dispose d'aucune méthode pour associer à $\mathcal{F}$ une section de l'étalement de G_M^0 sur M. Cette construction, très formelle, s'applique difficilement à des exemples concrets et ne permet pas de donner un sens géométrique aux éléments des groupoïdes obtenus. Nous proposons ici, une nouvelle construction plus géométrique et nous étudions les critères d'existence d'un "groupoïde d'holonomie" associé à un feuilletage donné.

L'étude des travaux de J. Pradines et B. Bigonnet a été le point de départ de cette recherche et m'a conduite à adopter la démarche suivante.
Etant donné un feuilletage presque régulier $\mathcal{F}$ sur une variété M, le problème de la construction d'un groupoïde différentiable associé à $\mathcal{F}$ a deux aspects :
- *Le problème local* qui consiste à construire pour tout point de M un groupoïde différentiable (local) "associé" au feuilletage restreint à un voisinage de ce point. Dans le cas des feuilletages réguliers, cet aspect du problème est trivial : la relation d'équivalence "être sur une même feuille" est localement régulière donc il suffit de considérer au-dessus de chaque ouvert trivialisant le groupoïde différentiable de la relation d'équivalence restreinte.
- *Le problème global* qui consiste à construire un groupoïde différentiable sur M à partir de ces groupoïdes locaux. Déjà, pour les feuilletages réguliers, cet aspect du problème est plus obscur, notamment avec "l'apparition" de l'holonomie.

Chapter 2

Généralités sur les groupoïdes différentiables

Le but de ce chapitre est de fixer les notations et de rappeler les principales notions relatives aux groupoïdes différentiables (éventuellement locaux) qui interviendront dans la suite. Pour une présentation plus détaillée, consulter [CdSW99, Mac95, Wei87, CDW87, Mac87].

2.1 Groupoïde différentiable

Définition 3 *Soient G et $G^{(0)}$ deux variétés différentiables, G étant éventuellement non séparée. Une structure de groupoïde différentiable sur G de base $G^{(0)}$ est la donnée des morphismes structurels suivants :*

- *un plongement $u : G^{(0)} \to G$. On appelle u l'application unité et on identifie l'espace des unités $G^{(0)}$ avec son image dans G;*

- *deux submersions surjectives $\alpha,\ \beta : G \to G^{(0)}$, appelées source et but respectivement et telles que $\alpha(x) = \beta(x) = x$ lorsque $x \in G^{(0)}$;*

- *un difféomorphisme involutif*

$$\begin{array}{rccc} i: & G & \to & G \\ & \gamma & \mapsto & \gamma^{-1} \end{array}$$

  appelé inversion, tel que $\alpha \circ i = \beta$;

- *une application différentiable*

$$\begin{array}{rccc} p: & G^{(2)} & \to & G \\ & (\gamma_1, \gamma_2) & \mapsto & \gamma_1.\gamma_2 \end{array}$$

appelé produit, où $G^{(2)} = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in G \times G \ ; \ \alpha(\gamma_1) = \beta(\gamma_2)\}$ *est l'ensemble des couples composables.*

Le tout satisfaisant aux assertions suivantes.
- Le produit est associatif : si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *sont trois éléments de* G *tels que* (γ_1, γ_2) *et* (γ_2, γ_3) *sont dans* $G^{(2)}$ *on a l'égalité*

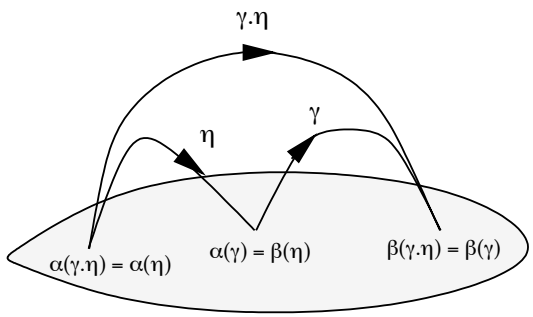
$$(\gamma_1.\gamma_2).\gamma_3 = \gamma_1.(\gamma_2.\gamma_3) \ .$$

- Pour tout (γ_1, γ_2) *dans* $G^{(2)}$ *on a*

$$\alpha(\gamma_1.\gamma_2) = \alpha(\gamma_2) \ \textit{et} \ \beta(\gamma_1.\gamma_2) = \beta(\gamma_1) \ .$$

- Pour tout γ *dans* G *on a*

$$\beta(\gamma).\gamma = \gamma.\alpha(\gamma) = \gamma \ \textit{et} \ \gamma.\gamma^{-1} = \beta(\gamma) \ .$$



Exemples
1- Tout groupe de Lie G est un groupoïde différentiable de base $G^{(0)} = \{1_G\}$.
2- Soit M une variété différentiable. Le *groupoïde des couples* sur M est le groupoïde différentiable $G = M \times M$ de base $G^{(0)} = M$, de source $\alpha(x, y) = y$ et de but $\beta(x, y) = x$. Alors l'inversion est donnée par $(x, y)^{-1} = (y, x)$ et le produit par $(x, y).(y, z) = (x, z)$.
Plus généralement, si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence régulière sur M, on munit de façon analogue le graphe $G_{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{R}$ d'une structure de groupoïde différentiable de base M.
3- Soit M une variété et H un groupe de Lie agissant différentiablement à gauche sur M. On définit sur $G = M \times H$ une structure de groupoïde différentiable de base $G^{(0)} = M$ de source $\alpha(x, h) = x$ et de but $\beta(x, h) = h.x$. L'inversion est donnée par $(x, h)^{-1} = (h.x, h^{-1})$ et le produit par $(h.x, g).(x, h) = (x, gh)$. Muni de cette structure, G est appelé *groupoïde produit croisé de l'action* et noté $G = M \rtimes H$.

Soit $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} G^{(0)}$, un groupoïde différentiable G de base $G^{(0)}$ de source α et de but β.
Si U est une partie de $G^{(0)}$, on note :

$$G_U = \alpha^{-1}(U) \ \ , G^U = \beta^{-1}(U) \ \text{ et } \ G_U^U = G_U \cap G^U \ .$$

Lorsque x appartient à $G^{(0)}$, G_x^x est un groupe de Lie (d'élément neutre le point x), appelé *groupe d'isotropie* de G en x.
L' *orbite* de G passant par x est par définition le sous-ensemble $L_x = \beta(G_x) = \alpha(G^x)$ de $G^{(0)}$.

On définit de façon naturelle la notion de sous-groupoïde différentiable. Parmi les sous-groupoïdes différentiables de G on distinguera ceux qui admettent $G^{(0)}$ comme espace des unités, ce sont les *sous-groupoïdes unifères* de G. L'ensemble de ces groupoïdes admet un "plus petit élément". Plus précisément, on définit la *composante α-connexe* du groupoïde G comme étant l'ensemble noté G^c, formé de la réunion de toutes les composantes connexes des points x de $G^{(0)}$ dans G_x. Il s'agit d'un sous-groupoïde différentiable de G qui est contenu dans tout sous-groupoïde unifère ouvert de G.

2.2 Groupoïde différentiable local

Comme dans le cas des groupes de Lie, il existe une notion de groupoïde différentiable local due à W. T. van Est [Est84] :

Définition 4 *Un groupoïde différentiable local est la donnée de :*

- *deux variétés différentiables R et $R^{(0)}$ ainsi qu'un plongement $u : R^{(0)} \to R$.*
  La variété R peut être non séparée.
  La variété $R^{(0)}$ est nommé l'ensemble des unités, ou la base, on l'identifiera à son image dans R;

- *un difféomorphisme involutif $i : R \to R$ appelé inversion et noté $i(r) = r^{-1}$;*

- *deux submersions surjectives α, $\beta : R \to R^{(0)}$ appelées respectivement source et but et telles que $\alpha(x) = \beta(x) = x$ et $\alpha(r^{-1}) = \beta(r)$ pour tout $x \in R^{(0)}$ et $r \in R$;*

- *un ouvert $\mathcal{D}^2R$ de $R^{(2)} := \{(r_1, r_2) \in R \times R \; ; \; \alpha(r_1) = \beta(r_2)\}$ appelé l'ensemble des composables et une application différentiable $p : \mathcal{D}^2R \to R$ appelée produit local et notée $p(r_1, r_2) = r_1.r_2$;*

devant vérifier les propriétés suivantes :
- si $r_1.r_2$ est défini, $\alpha(r_1.r_2) = \alpha(r_2)$ et $\beta(r_1.r_2) = \beta(r_1)$;
- pour tout $r \in R$, les produits $\beta(r).r$, $r.\alpha(r)$, $r.r^{-1}$ et $r^{-1}.r$ sont définis et égaux respectivement à r, r, $\beta(r)$, $\alpha(r)$;
- si $r_1.r_2$ est défini alors $r_2^{-1}.r_1^{-1}$ aussi et $(r_1.r_2)^{-1} = r_2^{-1}.r_1^{-1}$;
- si $r_1.r_2$, $r_2.r_3$ et $(r_1.r_2).r_3$ sont définis alors $r_1.(r_2.r_3)$ aussi et $(r_1.r_2).r_3 = r_1.(r_2.r_3)$.

Remarque La seule différence entre un groupoïde et un groupoïde local est que dans le second cas la condition $\alpha(r_1) = \beta(r_2)$ est nécessaire à l'existence du produit $r_1.r_2$ mais non suffisante. Le produit est défini dès que r_1 et r_2 sont "suffisamment proches" des unités.

Soit $R \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} R^{(0)}$ un groupoïde différentiable local et H une sous-variété de R. Notons $\mathcal{D}^2H = p^{-1}(H) \cup H \times H$, où p est le produit local de R. On dira que H est muni d'une structure de *sous-groupoïde différentiable local* de R lorsque $H^{(0)} = H \cap R^{(0)}$ est une sous-variété de $R^{(0)}$ et que les restrictions à H des applications qui définissent la structure de groupoïde différentiable local de R munissent H d'une structure de groupoïde différentiable local admettant $H^{(0)}$ pour base et $\mathcal{D}^2H$ pour ensemble des composables. Lorsque H est ouvert dans R, on parlera de *sous-groupoïde différentiable local ouvert.*

Par exemple, si $V^{(0)}$ est un ouvert de $R^{(0)}$. Alors tout ouvert V de R contenu dans $R^{V^{(0)}}_{V^{(0)}}$, stable par inversion et tel que $V \cap R^{(0)} = V^{(0)}$ hérite d'une structure de sous-groupoïde différentiable local ouvert de R de base $V^{(0)}$.

Ainsi pour tout ouvert W de R rencontrant l'ensemble des unités, il existe un sous-groupoïde différentiable local ouvert W_0 de R tel que $W_0 \subset W$ et $W \cap R^{(0)} = W_0^{(0)}$. Il suffit de prendre $W_0 := \{r \in W;\ r^{-1} \in W\} \cap R^{W \cap R^{(0)}}_{W \cap R^{(0)}}$.

2.3 Algébroïde de Lie

A tout groupoïde différentiable (éventuellement local) est associé un algébroïde de Lie. Nous en rappelons ici la construction.

Soit $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} G^{(0)}$ un groupoïde différentiable G de base $G^{(0)}$ de source α et de but β.

On note $T^\alpha G$ le fibré sur G des *champs α-verticaux*, il s'agit du noyau de la différentielle $T\alpha$ de α.

Pour tout élément γ de G, on note $R_\gamma : G_{\beta(\gamma)} \to G_{\alpha(\gamma)}$ la multiplication à droite par γ. Un champ de vecteur local Z sur G est dit *invariant à droite* lorsqu'il est α-vertical et qu'il vérifie $T_{\gamma_1}(R_{\gamma_2})(Z(\gamma_1)) = Z(\gamma_1.\gamma_2)$ lorsque le produit $\gamma_1.\gamma_2$ est défini et que γ_1 et $\gamma_1.\gamma_2$ sont dans le domaine de Z.

L'algébroïde de Lie associé à G se définit de la façon suivante :

- $\mathcal{A}G$ est le fibré vectoriel sur $G^{(0)}$ obtenu en restreignant le fibré $T^\alpha G$ à l'espace des unités $G^{(0)}$. Autrement dit la fibre $\mathcal{A}G_x$ de $\mathcal{A}G$ au-dessus d'un point x de $G^{(0)}$ est simplement $T^\alpha_x G$.
- Le fléchage, noté p, est la restriction de la différentielle $T\beta$ de β à $\mathcal{A}G$.
- Si Y est une section locale de $\mathcal{A}G$ définie sur un ouvert U de $G^{(0)}$ on définit Z_Y, le *champ de vecteurs invariant à droite correspondant* sur G^U, par

$$Z_Y(\gamma) = TR_\gamma(Y(\beta(\gamma)))\ ,\ \gamma \in G^U.$$

Le crochet est alors défini par :

$$\begin{array}{rccc} [\cdot,\cdot]: & \Gamma(\mathcal{A}G)\times\Gamma(\mathcal{A}G) & \to & \Gamma(\mathcal{A}G) \\ & (Y_1,Y_2) & \mapsto & [Z_{Y_1},Z_{Y_2}]_{G^{(0)}} \end{array}$$

où $[Z_{Y_1},Z_{Y_2}]_{G^{(0)}}$ désigne la restriction à $G^{(0)}$ du champ de vecteur α-vertical sur G obtenu en faisant le crochet (usuel) des champs de vecteurs invariants à droite Z_{Y_1} et Z_{Y_2} correspondant respectivement à Y_1 et Y_2.

Par exemple, lorsque G est un groupe de Lie, l'algébroïde de Lie associé est l'algèbre de Lie du groupe G.

Chapter 3

Les quasi-graphoïdes

Les quasi-graphoïdes sont les groupoïdes différentiables susceptibles d'intervenir dans l'étude des feuilletages presque réguliers. Ils ont été étudiés par B. Bigonnet dans sa thèse [Big86], on les rencontre également dans les travaux de J. Renault sous le nom de groupoïdes essentiellement principaux [Ren80]. Après un rappel de leur définition, on complète [Big86] par une étude de leurs propriétés qui aboutit à une justification géométrique de ce choix. Nous terminons ce chapitre par la définition des *atlas généralisés* qui est une notion équivalente à celle de quasi-graphoïde local.

3.1 Définition et exemples

La définition qui suit est motivée par le fait que nous cherchons des groupoïdes différentiables qui ne soient pas "trop gros", ou plus précisément qui n'aient pas d'isotropie superflue.

Définition-Proposition 1 *Soit* $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} G^{(0)}$ *un groupoïde différentiable de base* M *de source* α*, de but* β *et* $u : G^{(0)} \longrightarrow G$ *l'inclusion des unités. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
1- Si $\nu : U \longrightarrow G$ *est une section locale de* α *alors* $\beta \circ \nu = 1_U \;\Leftrightarrow\; \nu = u|_U$.
2- Si W *est un ouvert de* G *et* f *une application différentiable de* W *vers* G *telle que* $\alpha \circ f = \alpha$ *et* $\beta \circ f = \beta$ *sur* W*, alors* f *est l'inclusion de* W *dans* G.
3- Si N *est une variété et si* f *et* g *sont deux applications différentiables de* N *vers* G *telles que :*
i) $\alpha \circ f = \alpha \circ g$ *et* $\beta \circ f = \beta \circ g$,
ii) l'une des applications $\alpha \circ f$ *ou* $\beta \circ f$ *est une submersion,*
alors $f = g$.
On appelle quasi-graphoïde un groupoïde différentiable vérifiant l'une de ces propriétés.

Dans sa thèse [Big86], B. Bigonnet définit les quasi-graphoïdes par l'intermédiaire des assertions équivalentes 1- et 3-. Nous rajoutons ici l'assertion 2- qui sera très utile dans la suite.

Preuve Il reste à montrer que les assertions équivalentes 1- et 3- sont équivalentes à l'assertion 2-.

L'assertion 2- est un cas particulier de l'assertion 3-.

Montrons que l'assertion 2- implique l'assertion 1-.

Soit $\nu : U \longrightarrow G$ une section locale de α telle que $\beta \circ \nu = 1_U$. Alors pour tout $\gamma \in G_U$, le couple $(\gamma, \nu(\alpha(\gamma)))$ est un élément de $G^{(2)}$. On définit l'application différentiable

$$f : \begin{array}{ccc} G_U & \longrightarrow & G \\ \gamma & \mapsto & \gamma.\nu(\alpha(\gamma)) \end{array} .$$

Or G_U est un ouvert de G et f vérifie $\alpha \circ f = \alpha$ et $\beta \circ f = \beta$ donc si 2- est vrai, $f(\gamma) = \gamma$ pour tout γ dans G_U et par suite ν est la restriction à U de l'application unité. □

Exemples

1- Si G est un groupe de Lie non réduit à l'élément neutre, le groupoïde G correspondant n'est pas un quasi-graphoïde.

2- Si M est une variété, $M \times M \rightrightarrows M$, le groupoïde des couples sur M, est un quasi-graphoïde.

Il en est de même du graphe d'une relation d'équivalence régulière sur M.

3- Le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage régulier est un quasi-graphoïde.

4- Soit H un groupe de Lie agissant différentiablement à gauche sur une variété M. On suppose que l'action est *presque libre*, c'est-à-dire qu'il existe une partie dense et saturée M_0 de M sur laquelle l'action de H est libre. Alors le groupoïde de l'action $M \rtimes H \rightrightarrows M$ est un quasi-graphoïde.

5- Le groupoïde tangent d'une variété M défini par A. Connes [Co90], $M \times M \times]0,1[\cup TM \times \{0\} \rightrightarrows M \times [0,1[$ est un quasi-graphoïde.

6- Le groupoïde d'une variété à coins défini par B. Monthubert [Mon98] est un quasi-graphoïde.

3.2 Propriétés

Nous donnons ici des propriétés remarquables des quasi-graphoïdes qui nous seront utiles dans la suite.

3.2.1 Propriétés structurelles

Avant toute chose, il faut noter que la structure algébrique d'un quasi-graphoïde est entièrement déterminée par les applications source et but.

Plus précisément, soit $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ un quasi-graphoïde de base M, alors :

- l'inversion sur G est l'unique application différentiable $i : G \to G$ qui vérifie $\alpha \circ i = \beta$ et $\beta \circ i = \alpha$;
- le produit est l'unique application différentiable $p : G^{(2)} \to G$ qui vérifie $\alpha \circ p = \alpha \circ pr_2$ et $\beta \circ p = \beta_G \circ pr_1$.

Nous aurons besoin dans la suite d'étendre les morphismes.
Soient G et H deux groupoïdes différentiables sur une variété M de source et but α_G, β_G (resp. α_H, β_H). On suppose que l'on s'est donné un *morphisme local de graphe* d'un voisinage de M dans H vers G. C'est-à-dire que l'on a une application différentiable $\varphi : V \to G$ où V est un ouvert de H qui contient les unités M et telle que $\alpha_G \circ \varphi = \alpha_H$ et $\beta_G \circ \varphi = \beta_H$.

Proposition 1 *Si H est α-connexe et G est un quasi-graphoïde alors φ s'étend de façon unique en un morphisme de groupoïde différentiable $\tilde{\varphi} : H \to G$ au-dessus de l'identité.*

Preuve La Définition-Proposition 1 assure que si φ s'étend en un morphisme de graphe $\tilde{\varphi}$ de H vers G alors ce morphisme est unique. De plus $\tilde{\varphi}$ sera un morphisme de groupoïde différentiable au dessus de l'identité.
Effectivement, si u_H (resp. u_G) désigne l'application unité de H (resp. G), l'assertion 1- de la Définition-Proposition 1 assure que $\tilde{\varphi} \circ u_H = u_G$. D'autre part, considérons les applications différentiables suivantes :

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & H^{(2)} & \longrightarrow & G \\ & (\gamma_1, \gamma_2) & \mapsto & \tilde{\varphi}(\gamma_1).\tilde{\varphi}(\gamma_2) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \Psi' : & H^{(2)} & \longrightarrow & G \\ & (\gamma_1, \gamma_2) & \mapsto & \tilde{\varphi}(\gamma_1.\gamma_2) \end{array} .$$

On vérifie que $\alpha_G \circ \Psi = \alpha_G \circ \Psi'$, $\beta_G \circ \Psi = \beta_G \circ \Psi'$ et que ces deux applications sont des submersions. L'assertion 3- de la Définition-Proposition 1 s'applique et permet de conclure que pour tout $(\gamma_1, \gamma_2) \in H^{(2)}$ on a l'égalité $\tilde{\varphi}(\gamma_1).\tilde{\varphi}(\gamma_2) = \tilde{\varphi}(\gamma_1.\gamma_2)$.

Il suffit donc de montrer que l'on peut étendre φ.
L'idée consiste à décomposer "différentiablement" tout $\gamma \in H$ comme un produit $\gamma_1.\gamma_2...\gamma_3$ d'éléments de V et de définir ensuite $\tilde{\varphi}(\gamma) := \varphi(\gamma_1)...\varphi(\gamma_n)$.

Une section locale σ de α_H est dite *admissible* lorsque $\beta_H \circ \sigma$ est un difféomorphisme local de M. Lorsque σ_1 et σ_2 sont deux sections locales admissibles telles que $\beta_H(\sigma_2(\mathrm{dom}(\sigma_2))) \subset \mathrm{dom}(\sigma_1)$, on désigne par $\sigma_1.\sigma_2$ la section locale admissible qui à $x \in \mathrm{dom}(\sigma_2)$ fait correspondre le produit $\sigma_1(\beta_H(\sigma_2(x))).\sigma_2(x)$.

Soit $\gamma \in H$ de source $x \in M$ et de but $y \in M$. Puisque H est α-connexe, on peut trouver un voisinage ouvert O_x de x dans M et $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ des sections locales admissibles de α_H telles que pour tout $i = 1, \ldots, n$, l'image de σ_i est dans V, l'application $\sigma_1.\sigma_2 \ldots \sigma_n$ est définie sur O_x et $\sigma_1.\sigma_2 \ldots \sigma_n(x) = \gamma$.

D'autre part, il existe une carte autour de y dans H de la forme $f : O_y \times T \to H$ où O_y est un voisinage ouvert de y dans M et T est une sous-variété de H passant par y et transverse aux α_H-fibres. On peut supposer que l'image de f est dans V. Finalement, on récupère un difféomorphisme

$$\begin{array}{rccc} h: & O_x \times T & \longrightarrow & \mathrm{W} \\ & (z,t) & \mapsto & (f(\beta_H(\sigma_1 \dots \sigma_n(z)),t).\sigma_1 \dots \sigma_n(z) \end{array}$$

où W est un voisinage ouvert de γ dans H. On définit alors le morphisme de graphe :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi}_W: & W & \longrightarrow & \mathrm{G} \\ & h(z,t) & \mapsto & \varphi((f(\beta_H(\sigma_1 \dots \sigma_n(z)),t)).\varphi(\sigma_1) \dots \varphi(\sigma_n(z)) \ . \end{array}$$

On réitère ce procédé pour tout $\gamma \in H$. On obtient alors un recouvrement $\{W_i,\ i \in I\}$ de H et des morphismes de graphes $\tilde{\varphi}_{W_i} : W_i \to G$. Puisque G est un quasi-graphoïde, $\tilde{\varphi}_{W_i}$ et $\tilde{\varphi}_{W_j}$ coïncident sur $W_i \cap W_j$. On définit alors $\tilde{\varphi}$ comme étant l'unique morphisme de graphe de H vers G dont la restriction à W_i est égale à $\tilde{\varphi}_{W_i}$ pour tout $i \in I$. □

Avec les notations précédentes :

Corollaire 1 *Si G et H sont des quasi-graphoïdes α-connexes et si φ est un difféomorphisme local alors son prolongement $\tilde{\varphi}$ à H est un isomorphisme de groupoïde différentiable.*

Preuve Puisque $\varphi : V \to G$ est un difféomorphisme local, on peut trouver un recouvrement ouvert $\{V_i,\ i \in I\}$ de V tel que la restriction φ_i de φ à V_i soit un difféomorphisme sur son image pour tout $i \in I$. Notons $W_i = \varphi_i(V_i)$, $i \in I$.
L'ensemble $W = \cup_{i \in I} W_i$ est un voisinage ouvert des unités dans G. Puisque H est un quasi-graphoïde, φ_i^{-1} et φ_j^{-1} coïncident sur $W_i \cap W_j$ lorsque $i, j \in I$. On définit alors $\Psi : W \to H$ comme étant l'unique morphisme local de graphe dont la restriction à W_i est égale à φ_i^{-1} pour tout $i \in I$.
La proposition 1 garantit l'existence d'un prolongement $\tilde{\varphi}$ de φ et $\tilde{\Psi}$ de Ψ. De plus $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\Psi}$ est une application différentiable de G vers G qui vérifie les égalités $\alpha_G \circ \tilde{\varphi} \circ \tilde{\Psi} = \alpha_G$ et $\beta_G \circ \tilde{\varphi} \circ \tilde{\Psi} = \beta_G$. L'assertion 2- de la Définition-Proposition 1 permet de conclure que $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\Psi} = id_G$. De même, on montre que $\tilde{\Psi} \circ \tilde{\varphi} = id_H$. □

3.2.2 Propriétés algébriques

Stabilité par inclusion
On vérifie immédiatement que si G est un quasi-graphoïde de base M, tout groupoïde différentiable H qui est un sous-groupoïde de G, qui a pour base un ouvert de M et tel que l'inclusion de H dans G soit différentiable est encore un quasi-graphoïde. En particulier, si G est un quasi-graphoïde sa composante α-connexe l'est aussi.

Stabilité par produit fibré
Soient $G_i \underset{\beta_i}{\overset{\alpha_i}{\rightrightarrows}} M$, $i = 1, 2$, deux quasi-graphoïdes sur une variété M. On suppose que les applications différentiables $(\alpha_i, \beta_i) : G_i \to M \times M$, $i = 1, 2$, sont transverses. Alors le groupoïde différentiable produit fibré de G_1 et G_2 au-dessus de $M \times M$ est un quasi-graphoïde.
Ce résultat s'applique en particulier au groupoïde différentiable associé à un équarissage car un tel groupoïde s'obtient comme produit fibré d'une famille finie de quasi-graphoïdes [Mon98].

Stabilité par équivalence de Morita
La notion d'équivalence de Morita entre groupoïdes différentiables sera rappelée au chapitre 5.1.

On a la proposition suivante :

Proposition 2 *Soient $G_i \underset{\beta_i}{\overset{\alpha_i}{\rightrightarrows}} M_i$, $i = 1, 2$, deux groupoïdes différentiables Morita équivalents. Si G_1 est un quasi-graphoïde alors G_2 l'est aussi.*

Preuve Soit $(a, b) : Z \to M_2 \times M_1$ un graphe de l'équivalence de Morita de G_1 vers G_2. On considère $\nu : U \to G_2$ une section locale de α_2 telle que $\beta_2 \circ \nu = 1_U$. Montrons que ν est la restriction à U de l'inclusion des unités.
Soient $x_0 \in U$, $z_0 \in a^{-1}(x_0)$ et $V = b(a^{-1}(U)) \subset M_1$. On se donne une section locale $s : V \to a^{-1}(U)$ de b telle que $s(b(z_0)) = z_0$. On considère les applications différentiables suivantes :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{s} : & V & \longrightarrow & Z \times_a Z \\ & x & \mapsto & (s(x), s(x) *_2 \nu \circ a \circ s(x)) \ , \end{array}$$

où $z *_2 r$ désigne l'action à droite de $r \in G_2$ sur $z \in Z$, ainsi que

$$q : \ Z \times_a Z \ \to \ G_1 \ ,$$

qui à tout (z_1, z_2) associe l'unique $q(z_1, z_2) \in G_1$ tel que $q(z_1, z_2) *_1 z_1 = z_2$ où $\gamma *_1 z$ désigne l'action à gauche de $\gamma \in G_1$ sur $z \in Z$.
On obtient alors une application différentiable $\varphi := q \circ \tilde{s} : V \to G_1$ qui à tout $x \in V$ associe l'unique $\gamma \in G_1$ tel que $\gamma *_1 s(x) = s(x) *_2 \nu(a(s(x)))$.
Alors φ satisfait aux égalités $\alpha_1 \circ \varphi = \beta_1 \circ \varphi = 1_V$.
Si G_1 est un quasi-graphoïde, l'assertion 1- de la Définition-Proposition 1 assure que φ est la restriction à V de l'application unité. Alors $s(x) = s(x) *_2 \nu(a(s(x)))$ et par suite $\nu(a(s(x))) = a(s(x))$ pour tout $x \in V$. Donc en particulier $\nu(x_0) = x_0$.
On montre ainsi que ν est la restriction à V de l'inclusion des unités dans G_2 et par suite G_2 est également un quasi-graphoïde. $\square$

Stabilité par éclatement d'une immersion

Soient $G_i \underset{\beta_i}{\overset{\alpha_i}{\rightrightarrows}} M$, $i = 1, 2$, deux quasi-graphoïdes et $\varphi : G_1 \to G_2$ une immersion de groupoïde au-dessus de l'identité.
Notons $T^\alpha G_i := \mathrm{Ker}(T\alpha_i)$, le fibré des *champs de vecteurs α_i-verticaux* sur G_i. Soit $\mathcal{A}G_i$ l'algébroïde de Lie de G_i et $p_i : \mathcal{A}G_i \to TM$ son fléchage.
On note

$$\begin{array}{ccc} T^\alpha G_i & \xrightarrow{\omega_i} & \mathcal{A}G_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_i & \xrightarrow[\beta_i]{} & M \end{array}$$

le morphisme de fibré qui ramène à l'origine un vecteur α-vertical par translation à droite. Autrement dit, $\omega_i(\gamma, v) := TR_{\gamma^{-1}}(v) \in \mathcal{A}_{\beta_i(\gamma)}G_i$ lorsque $v \in T^\alpha_\gamma G_i$, où $TR_{\gamma^{-1}}$ désigne la différentielle en γ de $R_{\gamma^{-1}}$, la multiplication à droite par γ^{-1}.
Alors ω_i est un isomorphisme en restriction à chaque fibre et donc induit un isomorphisme de fibré de $T^\alpha G_i$ vers $(\beta_i)^*(\mathcal{A}G_i) = G_i \times_{\beta_i} \mathcal{A}G_i$. D'autre part, ω_i satisfait à l'égalité $T\beta_i = p_i \circ \omega_i$.

On a alors le diagramme commutatif suivant [Mac87]:

$$\begin{array}{ccc} T^\alpha G_1 & \xrightarrow{\varphi^\alpha_*} & T^\alpha G_2 \\ {\scriptstyle \omega_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega_2} \\ \mathcal{A}G_1 & \xrightarrow[\varphi^{\mathcal{A}}_*]{} & \mathcal{A}G_2 \end{array}$$

Dans ce diagramme φ^α_* (resp. $\varphi^{\mathcal{A}}_*$) désigne le morphisme injectif induit par la différentielle de φ entre les fibrés des champs α-verticaux correspondants (resp. les algébroïdes de Lie). On a l'égalité $p_2 \circ \varphi^{\mathcal{A}}_* = p_1$.

On demande que le noyau de p_2 soit égal à l'image par $\varphi^{\mathcal{A}}_*$ du noyau de p_1.

Sous ces conditions, on est en mesure de construire le *groupoïde normal de φ* de façon analogue à la construction donnée par M. Hilsum et G. Skandalis pour les groupoïdes d'holonomie de variétés feuilletées [HS87].
Pour ce faire il faut préalablement définir une action du groupoïde G_1 sur $N = \mathcal{A}G_2/\mathcal{A}G_1$, le fibré normal de l'inclusion de $\mathcal{A}G_1$ dans $\mathcal{A}G_2$. Si (x, v) est un élément de $\mathcal{A}_xG_2$, on notera $\overline{(x, v)}$ son image dans N_x.

Soit $\gamma \in G_1$ de source $x = \alpha_1(\gamma)$ et de but $y = \beta_1(\gamma)$. On se donne $\sigma_\gamma : O \to G_1$ une α_1-section admissible d'un voisinage de x dans M vers G_1 telle que $\sigma_1(x) = \gamma$.
Soit Ψ_γ la *translation locale à gauche* induite par $\varphi \circ \sigma_\gamma$ sur G_2 :

$$\Psi_\gamma(z) = \varphi(\sigma_\gamma(\beta_2(z))).z \quad \forall z \in G_2^{O_1} = \beta_2^{-1}(O_1)\ .$$

Notons que l'on a l'égalité $\beta_2 \circ \Psi_\gamma = \beta_2 \circ \varphi \circ \sigma_\gamma \circ \beta_2$.
Puisque l'on a supposé σ_γ admissible, Ψ_γ est un difféomorphisme sur son image d'inverse $z \mapsto (\varphi \circ \sigma_\gamma((\beta_1 \circ \sigma_\gamma)^{-1}(\beta_2(z))))^{-1}.z$.
Finalement, ω_2 étant un isomorphisme en restriction à chaque fibre, l'application suivante est un isomorphisme d'espace vectoriel :

$$\begin{array}{rccc} \tau_\gamma : & \mathcal{A}_x G_2 & \longrightarrow & \mathcal{A}_y G_2 \\ & (x,v) & \mapsto & \omega_2 \circ (\Psi_\gamma)_*(x,v) \end{array}$$

Avec les notations précédentes, on a

Lemme 1 *L'isomorphisme τ_γ induit un isomorphisme d'espace vectoriel*

$$\begin{array}{rccc} \overline{\tau_\gamma} : & N_x = \mathcal{A}_x G_2 / \mathcal{A}_x G_1 & \longrightarrow & N_y = \mathcal{A}_y G_2 / \mathcal{A}_y G_1 \\ & \overline{(x,v)} & \mapsto & \overline{\tau(x,v)} \end{array}$$

qui ne dépend que de γ.

Preuve La translation à gauche Ψ_γ respecte $\varphi(G_1)$, donc $(\Psi_\gamma)_* \circ \varphi_*^{\mathcal{A}}(x,v)$ est un élément de $\varphi_*^\alpha(T^{\alpha_1} G_1)$ lorsque $(x,v) \in \mathcal{A}_x G_1$. L'égalité $\omega_2 \circ \varphi_*^\alpha = \varphi_*^{\mathcal{A}} \circ \omega_1$ assure que si (x,v) est un élément de $\varphi_*^{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_x G_1)$ alors $\tau_\gamma(x,v)$ est un élément de $\varphi_*^{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_y G_1)$. Donc τ_γ passe au quotient.

Soit σ'_γ une autre α_1-section et τ'_γ l'isomorphisme de $\mathcal{A}_x G_2$ vers $\mathcal{A}_y G_1$ obtenu à partir de σ'_γ comme précédemment.
Soit $(x,v) \in \mathcal{A}_x G_2$. Puisque σ_γ et σ'_γ sont des α-sections qui envoient x sur γ, le vecteur $W = ((\sigma_\gamma)_*(T\beta_2(v)) - (\sigma'_\gamma)_*(T\beta_2(v)))$ est un élément de $T_\gamma^{\alpha_1} G_1$. Alors $\tilde{W} = \omega_2 \circ \varphi_*^\alpha(W)$ est un élément de $\varphi_*^{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_y G_1)$.
On vérifie immédiatement que $p_2(\tilde{W}) = T\beta_2 \circ \varphi_*^\alpha(W) = p_2(\tau_\gamma(x,v) - \tau'_\gamma(x,v))$.
Puisque $\mathrm{Ker}(p_2) = \varphi_*^{\mathcal{A}}(\mathrm{Ker}(p_1))$ on obtient que $\tau_\gamma(x,v) - \tau'_\gamma(x,v)$ est un élément de $\varphi_*^{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_y G_1)$.
Donc $\overline{\tau_\gamma}$ ne dépend pas du choix de la section σ_γ.
On vérifie aisément qu'il s'agit d'un isomorphisme d'espace vectoriel d'inverse $\overline{\tau_{\gamma^{-1}}}$.
□

Avec les notations précédentes, on déduit immédiatement le

Corollaire 2 *L'application*

$$\begin{array}{rcl} G_1 \times_{\alpha_1} \mathcal{A}G_2/\mathcal{A}G_1 & \to & \mathcal{A}G_2/\mathcal{A}G_1 = N \\ (\gamma; \overline{(x,v)}) & \mapsto & \gamma(\bar{v}) := \overline{\tau_\gamma(x,v)} \end{array}$$

est une action du groupoïde G_1 sur N.

Par suite, le produit fibré $G_1 \times_{\beta_1} N$ est muni d'une structure de groupoïde sur M de source $\alpha(\gamma, X) = \alpha_1(\gamma)$, de but $\beta(\gamma, X) = \beta_1(\gamma)$ et de produit

$$(\gamma_1, X).(\gamma_2, Y) = (\gamma_1.\gamma_2, X + \gamma_1(Y)) \ .$$

Le groupoïde normal de φ est donné par $G = G_1 \times_{\beta_1} N \times \{0\} \cup G_2 \times \mathbb{R}_* \rightrightarrows M \times \mathbb{R}$. Par une construction analogue à celle du groupoïde tangent, on munit G d'une structure de groupoïde différentiable [HS87].

Plus précisément, il faut tout d'abord remarquer que le fibré normal TG_2/TG_1 s'identifie à $T^\alpha G_2/T^\alpha G_1$, lui-même isomorphe à $(\beta_1)^*(\mathcal{A}G_2/\mathcal{A}G_1) = G_1 \times_{\beta_1} N$.

La topologie sur G est alors de la forme suivante.
On choisit la topologie usuelle sur $G_2 \times \mathbb{R}_*$.
D'autre part, supposons pour simplifier que G_2 est muni d'une métrique Riemannienne complète et notons $\Theta : G_1 \times_{\beta_1} N \to G_2$ l'application induite par l'application exponentielle. Soit $\tilde{\Theta} : (G_1 \times_{\beta_1} N) \times \mathbb{R} \to G$ définie par

$$\tilde{\Theta}(\gamma, X, \lambda) = \begin{cases} (\gamma, X, 0) \text{ si } \lambda = 0 \\ (\Theta(\gamma, \lambda X), \lambda) \text{ si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

On munit G de la topologie qui fait de $\tilde{\Theta}$ un difféomorphisme local. Autrement dit, notons π la projection de $G_1 \times_{\beta_1} N$ sur G_1. On se donne Ω et Ω' deux ouverts de $G_1 \times_{\beta_1} N$ tels que :
- Ω contient la restriction à $\pi(\Omega)$ de la section nulle,
- Θ est injective en restriction à Ω,
- $\pi(\Omega) = \pi(\Omega')$.

Soit ε un réel strictement positif.
On définit $W_{\Omega,\Omega',\varepsilon} = \{(\gamma, X, \lambda) \in \Omega' \times]-\varepsilon, \varepsilon[\ ; \ (\gamma, \lambda X) \in \Omega\}$.
L'ensemble des ouverts de $G_2 \times \mathbb{R}_*$ et des ensembles de la forme $\tilde{\Theta}(W_{\Omega,\Omega',\varepsilon})$ forme une base de la topologie de G.

Proposition 3 *Lorsque G_1 et G_2 sont des quasi-graphoïdes, il en est de même de G.*

Preuve Soit $O \times]-\lambda, \lambda[$ un ouvert de $M \times \mathbb{R}$ et $\nu : O \times]-\lambda, \lambda[\to G$ une application continue qui vérifie $\alpha \circ \nu = \beta \circ \nu = 1_{O \times]-\lambda,\lambda[}$.
Puisque G_1 et G_2 sont des quasi-graphoïdes il existe une section locale X du fibré N définie sur O telle que

$$\nu(x, \lambda) = \begin{cases} (x, X(x), 0) \text{ si } \lambda = 0 \text{ et } x \in O \\ (x, \lambda) \text{ si } \lambda \neq 0 \text{ et } x \in O \end{cases}$$

On conclut, en remarquant que la continuité de ν implique que X est la restriction à O de la section nulle. Finalement la seule section locale à la fois de α et de β est l'inclusion des unités et par suite G est un quasi-graphoïde. $\square$

3.3 Justification géométrique de ce choix

Nous étudions ici les propriétés géométriques des quasi-graphoïdes afin de mettre en évidence les liens qui les unissent aux feuilletages presque réguliers.
Dans la suite M désigne une variété différentiable.

Proposition 4 *Soit $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ un quasi-graphoïde de base M, $\mathcal{A}(G)$ son algébroïde de Lie et $p : \mathcal{A}(G) \to TM$ son fléchage. Alors p est injectif au-dessus d'un ouvert dense M_0 de M.*

Preuve Soit M_0 l'ensemble des points de M au-dessus desquels p est injective. La semi-continuité inférieure du rang implique que M_0 est un ouvert (éventuellement vide).
Soit U un ouvert de M. Par semi-continuité inférieure du rang, la valeur maximale du rang de p sur U est atteinte dans un ouvert non vide V de U. On considère alors le fibré $\mathrm{Ker}(p|_V)$ au dessus de V. Il s'agit de montrer que V est inclus dans M_0, autrement dit que $\mathrm{Ker}(p|_V) = V \times \{0\}$.
Soit X une section locale de $\mathcal{A}G$ définie sur V et à valeur dans $\mathrm{Ker}(p|_V)$.
D'après [Mac87] (prop. 4.1 p. 126), pour tout $x_0 \in V$, il existe un voisinage ouvert V_{x_0} de x_0 dans V, un réel $\varepsilon > 0$ et une (unique) famille $\{\mathrm{Exp}(tX)\ ;\ |t| < \varepsilon\}$ de sections locales de α définies sur V_{x_0}, tels que :
i) $\dfrac{d}{dt}\mathrm{Exp}(tX)|_0 = X$,
ii) $\{\beta \circ \mathrm{Exp}(tX) : V_{x_0} \to M\}$ est le groupe de transformations locales à un paramètre du champ de vecteur local $p(X)$ sur V_{x_0}.
L'égalité $p(X) = 0$ implique que $\beta \circ \mathrm{Exp}(tX) = 1_{V_{x_0}}$ pour tout t tel que $|t| < \varepsilon$. D'autre part, G est un quasi-graphoïde donc d'après l'assertion 1 de la Définition-Proposition 1, $\mathrm{Exp}(tX)$ est la restriction à V_{x_0} de l'inclusion des unités, pour tout t tel que $|t| < \varepsilon$, et par suite $X = 0$. □

Avec les notations précédentes on a le

Corollaire 3 *Les orbites de G sont les feuilles d'un feuilletage $\mathcal{F}$ presque régulier sur M qui est régulier en restriction à M_0.*

Preuve On sait déjà que les orbites d'un groupoïde différentiables sont les feuilles d'un feuilletage de Stefan.
De plus d'après la proposition 4, l'ensemble M_0 des points de M au-dessus desquels p est injective est un ouvert dense de M. Il suffit donc de vérifier que la restriction de $\mathcal{F}$ à M_0 est un feuilletage régulier.
Puisque p est injective au-dessus de M_0, l'image par p de la restriction de $\mathcal{A}G$ au-dessus de M_0 est une distribution involutive régulière sur M_0 (cf. prop. 2.2 p. 101

[Mac87]). D'autre part, pour tout $x \in M$, le sous-espace vectoriel de T_xM engendré par $p(\mathcal{A}G_x)$ est l'espace tangent en x à l'orbite de G passant par x [Mac87]. Donc la restriction de $\mathcal{F}$ à M_0 est un feuilletage régulier admettant $p(\mathcal{A}G|_{M_0})$ pour fibré tangent. $\square$

Notons G^c la composante α-connexe de G et $\mathcal{F}_0$ la restriction du feuilletage $\mathcal{F}$ à la partie régulière M_0.

Proposition 5 *La restriction de G^c à M_0 est isomorphe au groupoïde d'holonomie du feuilletage régulier $(M_0, \mathcal{F}_0)$.*

Preuve Notons k la dimension du feuilletage $\mathcal{F}_0$ et $T\mathcal{F}_0$ le fibré tangent au feuilletage $\mathcal{F}_0$. On désignera par $Hol(M_0, \mathcal{F}_0) \underset{\beta_0}{\overset{\alpha_0}{\rightrightarrows}} M_0$ le groupoïde d'holonomie du feuilletage régulier $(M_0, \mathcal{F}_0)$ et par $G_0^c \underset{\beta_{G0}}{\overset{\alpha_{G0}}{\rightrightarrows}} M_0$ la restriction de G^c à M_0.

Les groupoïdes $Hol(M_0, \mathcal{F}_0)$ et G_0^c sont deux quasi-graphoïdes α-connexes donc d'après le corollaire 1, il suffit de trouver un morphisme de graphe local d'un voisinage des unités dans $Hol(M_0, \mathcal{F}_0)$ vers G_0^c qui soit un difféomorphisme local.

Soit U un ouvert de M_0 tel que la restriction à U du fibré $T\mathcal{F}_0$ soit trivialisable. On peut alors trouver k champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_k$ définis sur U tels que :
i) $\{X_1, \ldots, X_k\}$ est une base locale de $T\mathcal{F}_0$ au dessus de U et
ii) $[X_i, X_j] = 0$ pour tout $i, j = 1, \ldots, k$.
Notons φ_i^t le groupe local à un paramètre associé au champ X_i, $i = 1, \ldots, k$. Soit $T_U \subset U$ une tranversale au feuilletage. Quitte à restreindre U, il existe un ouvert P de $\mathbb{R}^k$ contenant 0 tel que

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & T_U \times P & \to & U \\ & (x, t_1, \ldots, t_k) & \mapsto & \varphi_1^{t_1} \circ \ldots \circ \varphi_k^{t_k}(x) \end{array}$$

est un difféomorphisme. De plus, si $x \in T_U$, l'application $\varphi(x, .)$ est un difféomorphisme de P sur la plaque de U passant par x.

L'algébroïde de Lie de G_0^c est simplement la restriction à M_0 de l'algébroïde de Lie $\mathcal{A}G$ de G. Le fléchage p de l'algébroïde $\mathcal{A}G$ est injectif en restriction à M_0 de plus l'image par p de la restriction de $\mathcal{A}G$ à M_0 est $T\mathcal{F}_0$.

Pour $i = 1, \ldots k$, on peut donc relever le champ de vecteurs local tangent au feuilletage X_i en une section locale notée Y_i de $\mathcal{A}G$ définie sur U. On obtient alors une base $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$ de sections locales de $\mathcal{A}G|_U$, où $p(Y_i(x)) = X_i(x)$ pour tout $i = 1, \ldots, k$ et $x \in U$. Notons comme précédemment, $\mathrm{Exp}(tY_i)$ la famille paramétrée par $t \in \mathbb{R}$ de α_G-section locale associée à Y_i. D'après [Mac87](prop. 4.12 p. 136), il existe un ouvert P' de $\mathbb{R}^k$ contenant 0 tel que l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & U \times P' & \longrightarrow & G_0^c \\ & (x, t_1, \ldots, t_k) & \mapsto & Exp(t_1 Y_1) \ldots . Exp(t_k Y_k)(x) \end{array}$$

est un difféomorphisme sur son image qui vérifie :
i) $\Psi(.,0)$ est la restriction à U de l'inclusion des unités,
ii) $\alpha_{G0} \circ \Psi = pr_1$,
iii) $\beta_{G0} \circ \Psi = \varphi$ en restriction à $T_U \times (P \cap P')$.

Il existe alors un ouvert P'' de $\mathbb{R}^k$ contenant 0 et contenu dans $P \cap P'$ tel que l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & P'' \times P'' \times T_U & \to & G_0^c \\ & (\tau, \xi, x) & \mapsto & \Psi(\varphi(x,\xi), \tau) \end{array}$$

est un difféomorphisme sur son image qui satisfait à $\alpha_{G0} \circ f(\tau, \xi, x) = \varphi(x, \xi)$ et $\beta_{G0} \circ f(\tau, \xi, x) = \varphi(x, \tau + \xi)$. D'autre part $P'' \times P'' \times T_U$ s'identifie naturellement à un ouvert du groupoïde $Hol(M_0, \mathcal{F}_0)$ contenant $\varphi(T_U \times P'') \subset U$.

Par ce procédé, on obtient une famille $\{f_i : W_i \to G_0^c,\ i \in I\}$ où :
- W_i est un ouvert de $Hol(M_0, \mathcal{F}_0)$ pour tout $i \in I$,
- l'ensemble des unités M_0 de $Hol(M_0, \mathcal{F}_0)$ est contenu dans $W = \cup_{i \in I} W_i$,
- $f_i : W_i \to G_0^c$ est un difféomorphisme sur son image satisfaisant à $\alpha_{G0} \circ f_i = \alpha_0$ et $\beta_G \circ f_i = \beta_0$.

Comme G_0^c est un quasi-graphoïde, on déduit l'existence d'un morphisme local de graphe $f : W \to G$ qui est égal à f_i en restriction à W_i pour tout $i \in I$. □

Ainsi on a montré que le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage régulier (M, F) est l'unique quasi-graphoïde α-connexe de base M dont les orbites sont les feuilles de F.

Nous avons motivé la définition des quasi-graphoïdes par le fait que nous cherchons des groupoïdes différentiables qui n'aient pas d'isotropie superflue. En fait cette dernière propriété caractérise les quasi-graphoïdes.
Rappelons qu'un ouvert d'un espace topologique est dit *régulier* lorsqu'il est égal à l'intérieur de son adhérence et qu'un espace topologique est dit semi-régulier si tout point admet une base de voisinages réguliers.

Proposition 6 *Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde différentiable α-connexe semi-régulier et $u : M \to G$ son application unité. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
i) G est un quasi-graphoïde.
ii) L'ensemble $\mathcal{L} = \{x \in M\ ;\ G_x^x = \{u(x)\}\}$ des éléments de M ayant un groupe d'isotropie trivial est dense dans M.

Preuve Si G est un quasi-graphoïde α-connexe, on a déjà vu qu'il existe alors un ouvert dense M_0 de M et un feuilletage régulier $\mathcal{F}_0$ sur M_0 tel que la restriction de G à M_0 est le groupoïde d'holonomie de $(M_0, \mathcal{F}_0)$. D'autre part la réunion $\mathcal{L}_0$ des feuilles de $\mathcal{F}_0$ ayant une holonomie triviale est résiduelle dans M_0 (cf. [God91] p. 96). Donc en particulier $\mathcal{L}_0$ est dense dans M et par construction les groupes

d'isotropie de G au-dessus de $\mathcal{L}_0$ sont triviaux. Finalement $\mathcal{L}$ contient $\mathcal{L}_0$ qui est dense dans M_0, ouvert dense de M donc $\mathcal{L}$ est dense dans M.

Inversement, supposons que G est un groupoïde différentiable semi-régulier tel que $\mathcal{L} = \{x \in M \ ; \ G_x^x = \{i(x)\}\}$ est une partie dense de M. Notons α et β les applications source et but de G. Puisque l'application α est ouverte, $G_{\mathcal{L}} = \alpha^{-1}(\mathcal{L})$ est une partie dense de G.

Soit W un ouvert de G et $f : W \to G$ une application différentiable telle que $\alpha \circ f = \alpha$ et $\beta \circ f = \beta$. Lorsque γ est dans W le couple $(\gamma^{-1}, f(\gamma))$ est un élément de $G^{(2)}$ et $\alpha(\gamma^{-1}.f(\gamma)) = \beta(\gamma^{-1}.f(\gamma)) = \alpha(\gamma)$. Autrement dit, $\gamma^{-1}.f(\gamma)$ est un élément de $G_{\alpha(\gamma)}^{\alpha(\gamma)}$ pour tout γ dans W. Par hypothèse, si γ est dans $W \cap G_{\mathcal{L}}$ le groupe d'isotropie $G_{\alpha(\gamma)}^{\alpha(\gamma)}$ est trivial d'où $\gamma^{-1}.f(\gamma) = \alpha(\gamma)$ et par suite $f(\gamma) = \gamma$. Finalement la restriction de f à $W \cap G_{\mathcal{L}}$ est l'inclusion de $W \cap G_{\mathcal{L}}$ dans G.

Soit $\gamma \in W \setminus G_{\mathcal{L}}$. On se donne un voisinage ouvert séparé et régulier V_γ (resp. $V_{f(\gamma)}$) de γ (resp. $f(\gamma)$) tels que $V_\gamma \subset W$ et $f(V_\gamma) \subset V_{f(\gamma)}$.

Alors $V_\gamma \cap G_{\mathcal{L}} \subset V_\gamma \cap V_{f(\gamma)}$ d'où $\overset{\circ}{\overline{V_\gamma \ \cap \ G_{\mathcal{L}}}} \subset \overset{\circ}{\overline{V_\gamma \cap V_{f(\gamma)}}} = V_\gamma \cap V_{f(\gamma)}$.
Par densité de $G_{\mathcal{L}}$ dans G on a $\overline{V_\gamma \cap G_{\mathcal{L}}} = \overline{V_\gamma}$, et finalement $V_\gamma \subset V_\gamma \cap V_{f(\gamma)}$.
De plus $V_\gamma \cap V_{f(\gamma)}$ est séparé donc la continuité de f permet de conclure que la restriction de f à V_γ est l'inclusion de V_γ dans G.

On a montré que G satisfait à l'assertion 2- de la Définition-Proposition 1 donc G est un quasi-graphoïde. □

En particulier, cette dernière proposition assure que si $(M, \mathcal{F})$ est un feuilletage presque régulier et $(M_0, \mathcal{F}_0)$ est son sous-feuilletage régulier maximal alors tout groupoïde différentiable semi-régulier dont la restriction à M_0 est le groupoïde d'holonomie de $(M_0, \mathcal{F}_0)$ est un quasi-graphoïde.

3.4 Atlas généralisé

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, la première étape pour construire un "groupoïde d'holonomie" d'un feuilletage presque régulier consiste à trouver des solutions locales, c'est-à-dire une famille convenable de groupoïde locaux. Ceci nous amène à définir les notions de *quasi-graphoïde local* et d'*atlas généralisé*.

3.4.1 Quasi-graphoïde local

Un sous-groupoïde local d'un groupoïde différentiable G a des propriétés particulières lorsque G est un quasi-graphoïde. L'objet de ce paragraphe est de définir la notion de quasi-graphoïde local et d'étudier les propriétés spécifiques de ces objets.

Nous aurons besoin dans la suite des *morphismes de graphes* :

Soit $(b_i, a_i) : R_i \to B \times A$, $i = 1, 2$, où a_i et b_i sont deux submersions d'une variété R_i vers la variété A, respectivement B. Un *morphisme de graphes* de R_1 vers R_2 est une application différentiable $f : R_1 \to R_2$ telle que $a_2 \circ f = a_1$ et $b_2 \circ f = b_1$.

Etant donné un groupoïde différentiable local $R \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} R^{(0)}$, le *graphe sous-jacent* est simplement $(\beta, \alpha) : R \to R^{(0)} \times R^{(0)}$. On peut donc considérer des morphismes de graphes entre groupoïdes différentiables locaux de même base.

Définition 5 *On appelle quasi-graphoïde local, un groupoïde différentiable local $R \rightrightarrows R^{(0)}$ ayant la propriété que pour toute variété S munie de deux submersions a et b sur $R^{(0)}$, il existe au plus un morphisme de graphes de S vers R.*

Remarque Soit $R \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} R^{(0)}$ un groupoïde différentiable local. Lorsque R est un quasi-graphoïde local si D est un ouvert de $R^{(2)}$, il existe au plus une application différentiable $\tilde{p} : D \to R$ satisfaisant à $\alpha \circ p = \alpha \circ pr_2$ et $\beta \circ p = \beta \circ pr_1$. Ainsi il existe un ouvert $\mathcal{D}^2_{max}R$ de $R^{(2)}$ maximal (pour l'inclusion) qui est le domaine d'une application différentiable $\tilde{p}$ satisfaisant à $\alpha \circ \tilde{p} = \alpha \circ pr_2$ et $\beta \circ \tilde{p} = \beta \circ pr_1$. Lorsque R est un quasi-graphoïde local on supposera toujours que l'ensemble des composables de R est $\mathcal{D}^2_{max}R$. Ainsi, dans la pratique, il sera inutile de préciser quel est l'ensemble des composables d'un quasi-graphoïde local dès lors que l'on se sera assuré que l'on peut définir un produit local sur un voisinage de $\{(r, r^{-1})\ ,\ r \in R\}$ dans $R^{(2)}$.

Il est à noter que comme dans le cas des quasi-graphoïdes, la bonne notion de morphisme au-dessus de l'identité entre deux quasi-graphoïdes locaux de même base est la notion de morphisme de graphe. Précisons.
Soient $R_1 \rightrightarrows O$, $R_2 \rightrightarrows O$ deux quasi-graphoïdes locaux et $f : R_1 \to R_2$ un morphisme de graphe. Alors f vérifie :
i) $f(r^{-1}) = f(r)^{-1}$ pour tout $r \in R_1$,
ii) $f(r_1.r_2) = f(r_1).f(r_2)$ pour tout couple $(r_1, r_2) \in \mathcal{D}^2_{max}R_1$.

Si R est un quasi-graphoïde local on vérifie immédiatement que tout sous-groupoïde local H de R tel que $H^{(0)}$ est ouvert dans $R^{(0)}$ est un quasi-graphoïde local. Lorsque H est ouvert dans R on dira que H est un *sous-quasi-graphoïde local ouvert* de R.

On a dans le cadre des quasi-graphoïdes locaux un résultat analogue à la Définition-Proposition 1.

Proposition 7 *Soit $R \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} R^{(0)}$ un groupoïde différentiable local et x un point de $R^{(0)}$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
1- Il existe un voisinage ouvert W de x dans R tel que si $\nu : U \to R$ est une section locale de α dont l'image est dans W alors $\beta \circ \nu = 1_U$ si et seulement si ν est la

restriction à U de l'inclusion des unités.
2- Il existe un voisinage ouvert W' de x dans R tel que pour tout ouvert V de W', la seule application différentiable $f : V \to W'$ satisfaisant à $\alpha \circ f = \alpha$ et $\beta \circ f = \beta$ est l'inclusion de V dans W'.
3- Il existe un sous-groupoïde local ouvert H de R contenant x qui est un quasi-graphoïde local.

Pour montrer ce résultat, nous avons besoin du

Lemme 2 *Si $R \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} R^{(0)}$ est un groupoïde différentiable local, pour tout $r \in R$, il existe un voisinage ouvert V_r de r dans R tel que pour tout r_1, $r_2 \in V_r$, si $\alpha(r_1) = \alpha(r_2)$ alors le produit $r_1.r_2^{-1}$ est défini et si $\beta(r_1) = \beta(r_2)$ alors le produit $r_1^{-1}.r_2$ est défini. De plus si r est une unité on peut choisir V_r stable par inversion.*

Preuve Soit $r \in R$. Puisque $(r^{-1}, r) \in \mathcal{D}^2R$ (l'ensemble des composables) qui est un ouvert de $R^{(2)}$, il existe un voisinage ouvert U_r de r dans R tel que si l'on note $U_r^{-1} = \{r^{-1};\ r \in U_r\}$, on a $(U_r^{-1} \times U_r) \cap R^2 \subset \mathcal{D}^2R$.
De même, puisque $(r, r^{-1}) \in \mathcal{D}^2R$, il existe un voisinage ouvert W_r de r dans R tel que $W_r \times W_r^{-1} \cap R^2 \subset \mathcal{D}^2R$. Il suffit donc de prendre $V_r = U_r \cap W_r$. □

Preuve de la Proposition 7 On a évidemment 3- qui implique 2-.

Supposons que 2- est vérifié montrons qu'alors 1- l'est aussi.
D'après le lemme ci-dessus, on peut trouver un voisinage ouvert W de x dans R stable par inversion et tel que pour tout r_1, $r_2 \in W$, si $\alpha(r_1) = \beta(r_2)$ alors le produit $r_1.r_2$ est défini. Quitte à restreindre W autour de x, on peut supposer que l'image par l'application produit de $(R^{(2)} \cap W) \times W$ est dans W'. On adapte alors la preuve de la Définition-Proposition 1.
Si $\nu : U \to R$ est une section locale de α dont l'image est dans W et telle que $\beta \circ \nu = 1_U$, on définit l'application différentiable $f : W' \cap W \to W'$, $r \mapsto r.\nu(\alpha(r))$.
Puisque $\alpha \circ f = \alpha$ et $\beta \circ f = \beta$ on obtient que f est l'inclusion de $W' \cap W$ dans W' et finalement que ν est l'inclusion des unités.

Montons que l'assertion 1- implique l'assertion 3-.
Soit, comme précédemment, V_x un voisinage ouvert de x dans R stable par inversion et tel que pour tout r_1, $r_2 \in V_x$, si $\alpha(r_1) = \beta(r_2)$ alors le produit $r_1.r_2$ est défini.
Soit $V = W \cap V_x$, alors V est un voisinage ouvert de x dans R et quitte à restreindre V, on peut supposer que l'image de $(R^{(2)} \cap V) \times V$ par le produit local est dans W.
Soient S une variété munie de deux submersions a et b sur $\alpha(V) \cap \beta(V) \subset R^{(0)}$ et f_1, f_2 deux morphismes de graphes de S vers V.
Soit $\sigma : U \to S$ une section locale de a, on définit l'application

$$\begin{array}{rccc} \nu : & U & \longrightarrow & \mathrm{W} \\ & x & \mapsto & (f_1(\sigma(x)))^{-1}.f_2(\sigma(x)) \ . \end{array}$$

Alors ν est bien définie et vérifie $\alpha \circ \nu = \beta \circ \nu = 1_U$. Par conséquent ν est la restriction à U de l'inclusion des unités, autrement dit $f_1(\sigma(x))) = f_2(\sigma(x))$ pour tout $x \in U$ et finalement $f_1 = f_2$.
D'autre part d'après le paragraphe 2.2, il existe un sous-groupoïde local ouvert H de R tel que $H \subset V$ et $V \cap R^{(0)} = H^{(0)}$. Un tel H contient x et est un quasi-graphoïde local. $\square$

3.4.2 Atlas

Dans la suite M désignera une variété différentiable.
On peut penser à un *atlas généralisé* sur la variété M comme à un atlas "structuré", c'est-à-dire que les ouverts sont remplacés par des quasi-graphoïdes locaux qui se recollent correctement. Le choix des propriétés de ces groupoïdes locaux dépendra de la structure géométrique sur la variété M que l'on veut étudier.

On appelle *morceau de quasi-graphoïde* sur M un quasi-graphoïde local ayant pour base un ouvert de M.

Définition 6 *Un atlas généralisé sur M est un ensemble $\mathcal{U} = \{G_i \underset{\beta_i}{\overset{\alpha_i}{\rightrightarrows}} U_i,\ i \in I\}$ où:*

- *$\{U_i, i \in I\}$ est un recouvrement ouvert de M,*
- *$G_i \underset{\beta_i}{\overset{\alpha_i}{\rightrightarrows}} U_i$ est un morceau de quasi-graphoïde au dessus de U_i, pour tout $i \in I$.*

La condition de recollement suivante doit également être satisfaite :
pour tout $i,\ j \in I$, il existe un sous-morceau de quasi-graphoïde ouvert H_i^j (resp. H_j^i) de G_i (resp. G_j) contenant $U_i \cap U_j$ et un isomorphisme de graphes $\varphi_{ji} : H_i^j \longrightarrow H_j^i$.

Remarquons que puisque les G_i sont des quasi-graphoïdes locaux, les égalités suivantes sont satisfaites lorsque $i, j, k \in I$:
i) $\varphi_{ki} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ji}$ en restriction à $H_i^j \cap H_i^k \cap \varphi_{ji}^{-1}(H_j^k)$ et
ii) $\varphi_{ji}^{-1} = \varphi_{ij}$.

Etant donnés $\mathcal{U} = \{G_i \rightrightarrows U_i,\ i \in I\}$ et $\mathcal{V} = \{H_j \rightrightarrows V_j,\ j \in J\}$ deux atlas généralisés sur M, on dira que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux atlas généralisés *équivalents* si $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ est encore un atlas généralisé sur M.

Soit $\mathcal{U} = \{G_i \rightrightarrows U_i,\ i \in I\}$ un atlas généralisé sur M. Un sous-atlas de $\mathcal{U}$ est une famille $\{H_j \rightrightarrows V_j,\ j \in J\}$ de M telle que pour tout $j \in J$ il existe $i \in I$ tel que H_j est un sous-morceaux de quasi-graphoïde ouvert de G_i et $\cup_{j \in J} V_j = M$. Tout sous-atlas de $\mathcal{U}$ est un atlas généralisé sur M équivalent à $\mathcal{U}$.

En particulier si $G \rightrightarrows M$ est un quasi-graphoïde local et $\{V_i,\ i \in I\}$ une famille d'ouverts de G tel que $M \subset \bigcup_{i\in I} V_i$, il existe un sous-atlas (non unique) $\{H_i,\ i \in I\}$ de $\{G\}$ tel H_i est un ouvert de G et l'espace des unités de H_i est $V_i \cap M$, pour tout $i \in I$.
En fait tout atlas généralisé sur M est de cette forme. Plus précisément on a la

Proposition 8 *Soit $\mathcal{U} = \{G_i \rightrightarrows U_i,\ i \in I\}$ un atlas généralisé sur M. Il existe un quasi-graphoïde local G de base M tel que $\mathcal{U}$ soit un sous-atlas de $\{G\}$. Il s'ensuit que les atlas $\mathcal{U}$ et $\{G\}$ sont équivalents.*

Preuve On note $\{H_i^j\ ,\ i,j \in I\}$ la famille des morceaux de quasi-graphoïde sur M qui interviennent dans les recollements, c'est-à-dire que H_i^j est un sous-morceau de quasi-graphoïde ouvert de G_i contenant $U_i \cap U_j$ et l'on a un isomorphisme de graphes φ_{ji} de H_i^j dans H_j^i. On pose $H_i^i = G_i$ et $\varphi_{ii} = id$ lorsque $i \in I$.
On considère sur $\bigsqcup_{i\in I} G_i$ la relation d'équivalence suivante :

$$(\gamma_1, i) \sim (\gamma_2, j) \Leftrightarrow \begin{cases} (\gamma_1, i) \in H_j^i \text{ et } (\gamma_2, j) \in H_i^j \\ \varphi_{ij}(\gamma_1) = \gamma_2 \end{cases} .$$

On définit G comme la variété quotient de $\bigsqcup_{i\in I} G_i$ par cette relation.
On vérifie immédiatement qu'il existe sur G une unique structure de quasi-graphoïde local de base M tel que G_i est un sous-groupoïde local de G, pour tout $i \in I$. $\square$

Exemples
1- Feuilletage régulier Soit (M, F) un feuilletage régulier et $\{U_i = P_i \times T_i;\ i \in I\}$ un recouvrement de M par des cubes distingués, où pour tout $i \in I$, P_i est une plaque de F et T_i une transversale. Pour tout $i \in I$, on définit $G_i = P_i \times P_i \times T_i \rightrightarrows P_i \times T_i$, le groupoïde des couples sur P_i paramétré par T_i. En d'autre termes, G_i est le groupoïde sur $P_i \times T_i$ de la relation d'équivalence régulière "être sur la même plaque de U_i". Alors $\mathcal{U} = \{G_i \rightrightarrows U_i;\ i \in I\}$ est un atlas généralisé de M *associé* au feuilletage F. De plus $\mathcal{U}$ est équivalent à l'atlas constitué du seul élément $Hol(M, F)$, le groupoïde d'holonomie de (M, F).

2- Action locale d'un groupe de Lie Soit H un groupe de Lie agissant localement sur une variété M, c'est-à-dire que l'on a un ouvert D de $M \times H$ et une application différentiable $\varphi : D \to M$, notée $\varphi(x, h) = h.x$, tels que :
- pour tout $x \in M$, l'ensemble $\{h \in H;\ (x, h) \in D\}$ est un voisinage connexe de 1_H;
- pour tout $x \in M$, $1_H.x = x$;
- si $(x, h) \in D$, $(h.x, g) \in D$ et $(x, gh) \in D$ alors $(gh).x = g.(h.x)$.

On demande que l'action soit *presque libre*, ce qui signifie qu'il existe une partie dense de M sur laquelle l'action est libre.

Posons $G = \{(x, h) \in D\ ; (h.x, h^{-1}) \in D\}$. On définit $\alpha : G \to M\ , (x, h) \mapsto x$ et $\beta : G \to M\ , (x, h) \mapsto h.x$.

Alors $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ est un quasi-graphoïde local, le produit local étant donné, lorsque cela a un sens, par

$$(h.x, g).(x, h) = (x, gh) \ .$$

3- Sous-variété de codimension 1 Soit M une variété et N une sous-variété de M de codimension 1.
On peut trouver une famille $\{f_i : U_i \to \mathbb{R},\ i \in I\}$ telle que :
- $\{U_i,\ i \in I\}$ est une famille d'ouverts de M,
- N est contenu dans $\bigcup_{i \in I} U_i$ et
- pour tout $i \in I$, l'application $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ est une fonction de définition de $U_i \cap N$ (i.e. f_i est différentiable, $f_i^{-1}(0) = U_i \cap N$ et $df_i \neq 0$ sur $U_i \cap N$).
Alors l'application $\Psi : U_i \times U_i \times \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(z, y, \lambda) = \lambda f_i(z) - f_i(y)$ est régulière. On pose

$$G_i = \psi^{-1}(0) = \{(z, y, \lambda) \in U_i \times U_i \times \mathbb{R}_* \ ;\ \lambda f_i(z) = f_i(y)\} \underset{\beta_i}{\overset{\alpha_i}{\rightrightarrows}} U_i \ .$$

L'ensemble G_i est une sous-variété de $U_i \times U_i \times \mathbb{R}_*$. On définit $\alpha_i(z, y, \lambda) = y$, $\beta_i(z, y, \lambda) = z$, $(z, y, \lambda)^{-1} = (y, z, \lambda^{-1})$ et $(z, y, \mu).(y, t, \lambda) = (z, t, \lambda\mu)$. Ces applications munissent G_i d'une structure de quasi-graphoïde sur U_i.
Soit H l'ensemble des couples $(x, y) \in (M \setminus N) \times (M \setminus N)$ tels que x et y sont dans la même composante connexe de $M \setminus N$. On munit H de la structure de groupoïde différentiable induite par le groupoïde des couples sur $M \setminus N$.
On définit ainsi un atlas généralisé $\mathcal{U} = \{G_i,\ i \in I\} \cup \{H\}$ sur M *associé* à l'inclusion de N dans M.

Un quasi-graphoïde local et de façon équivalente un Atlas généralisés définit un feuilletage presque régulier sur sa base. Précisons.
Soit $\mathcal{U} = \{G_i \underset{\beta_i}{\overset{\alpha_i}{\rightrightarrows}} U_i,\ i \in I\}$ un atlas généralisé sur M.
Lorsque $i \in I$ et $x \in U_i$, notons $P_{i,x}$ la composante connexe de $\alpha_i(\beta_i^{-1}(x)) = \beta_i(\alpha_i^{-1}(x))$ dans M contenant x. On appelle *plaque* de $\mathcal{U}$ les sous-ensembles de M de la forme $P_{i,x}$ où $i \in I$ et $x \in U_i$. On obtient ainsi un recouvrement de M par les plaques de $\mathcal{U}$.
Un *chemin de plaques* est une suite $P_1, \ldots, P_k$ de plaques de $\mathcal{U}$ telle que $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ pour $i = 1, \ldots, k-1$.
On définit alors la relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}$ sur M par :

$$x \mathcal{R}_{\mathcal{U}} y \Leftrightarrow \text{il existe un chemin de plaques } P_1, \ldots, P_k \text{ tel que } x \in P_1 \text{ et } y \in P_k$$

On définit alors *l'orbite* de $\mathcal{U}$ passant par un élément x de M comme l'orbite de x pour la relation $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}$. Lorsque $(M, \mathcal{F})$ est un feuilletage presque régulier, on dira que $\mathcal{U}$ *définit* le feuilletage $\mathcal{F}$ lorsque les orbites de $\mathcal{U}$ sont les feuilles de $\mathcal{F}$.

Pour obtenir les atlas généralisés de feuilletages, nous rajouterons à la définition précédente des conditions de compatibilité au feuilletage. Plus précisément, soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage presque régulier et $(M_0, \mathcal{F}_0)$ son sous-feuilletage régulier maximal. On a alors la

Définition 7 *Un atlas généralisé de $(M, \mathcal{F})$ est la donnée d'un atlas généralisé $\mathcal{U} = \{G_i \underset{\beta_i}{\overset{\alpha_i}{\rightrightarrows}} U_i,\ i \in I\}$ sur M qui satisfait aux conditions de compatibilité au feuilletage suivantes :*
1- Condition de compatibilité relative aux orbites : $\mathcal{U}$ définit le feuilletage $\mathcal{F}$.
2- Pour tout $i \in I$ et $x \in U_i$, la restriction de β_i à $G_{i,x} = \alpha_i^{-1}(x)$ est une submersion en x sur L_x, la feuille de $\mathcal{F}$ passant par x.

Remarques - La condition 1- ci-dessus implique en particulier que le restriction de $\mathcal{U}$ à la partie régulière M_0 définit $\mathcal{F}_0$. Un raisonnement analogue à celui de la proposition 5 montre qu'alors $\mathcal{U}' := \mathcal{U} \cup \{Hol(M_0, \mathcal{F}_0)\}$ est encore un atlas généralisé sur M, où $Hol(M_0, \mathcal{F}_0)$ est le groupoïde d'holonomie du sous-feuilletage régulier maximal $(M_0, \mathcal{F}_0)$.
- Les exemples 1, 2, 3 précédents sont des atlas généralisés pour les feuilletages singuliers correspondants.

Chapter 4

Intégration locale des algébroïdes de Lie de feuilletages singuliers

Nous allons étudier ici le *problème local*. Etant donné un feuilletage presque régulier $(M, \mathcal{F})$, il s'agit de répondre aux questions suivantes :
- Sous quelles conditions peut-on associer à $(M, \mathcal{F})$ un atlas généralisé ?
- Comment construire explicitement un tel atlas lorsque cela est possible ?

D'après le chapitre précédent, si $(M, \mathcal{F})$ admet un atlas généralisé alors il existe un quasi-graphoïde local de base M dont les orbites sont les feuilles de $\mathcal{F}$. Autrement dit, $\mathcal{F}$ est défini par un algébroïde de Lie sur M dont le fléchage est injectif au-dessus d'un ouvert dense.
Par conséquent, une condition nécessaire à l'existence d'un atlas généralisé de $(M, \mathcal{F})$ est que $\mathcal{F}$ soit défini par un algébroïde de Lie dont le fléchage est injectif au-dessus d'un ouvert dense. Nous montrons ici que cette condition est également suffisante. Le résultat principal de ce chapitre porte sur l'existence et l'unicité de l'intégration locale de ce type d'algébroïde de Lie, plus précisément on a le

Théorème 3 *Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie sur M dont le fléchage est injectif au-dessus d'un ouvert dense. Il existe, à équivalence près, un unique quasi-graphoïde local $G_{\mathcal{A}}$ de base M qui intègre $\mathcal{A}$.*

L'équivalence de quasi-graphoïdes locaux dont il est question ici étant l'équivalence d'atlas généralisés correspondant.
Pour montrer ce théorème nous étudions l'intégration locale des algébroïdes de Lie dont le fléchage est injectif au-dessus d'un ouvert dense. Les travaux de J. Pradines [Pra67, Pra68a, Pra68b], que nous décrivons dans l'annexe B, garantissent la possibilité d'intégrer localement les algébroïdes de Lie. Cependant la réponse apportée est difficile à comprendre. Nous donnons ici une nouvelle description de cette construction, plus explicite et adaptée à notre cas.

Cette construction s'appuie sur une étude détaillée des liens qui unissent un groupoïde différentiable (local) et son algébroïde de Lie. L'application exponentielle identifie localement un voisinage de la section nulle de l'algébroïde de Lie d'un groupoïde différentiable (local) à un voisinage des unités du groupoïde en question. Via cette identification, la source correspond à la projection canonique de l'algébroïde de Lie et le but à une composition de flot de certains champs de vecteurs. Etant donné un algébroïde de Lie $\mathcal{A}$ sur M, nous allons munir un voisinage de la section nulle de $\mathcal{A}$ d'une structure de groupoïde différentiable local. L'étude préalable ne laisse pas de choix pour définir les applications source et but, il faudra ensuite s'assurer qu'il existe un produit local compatible avec ces dernières. Dans le cas où le fléchage est injectif au-dessus d'un ouvert dense, on vérifie que si l'on peut munir un voisinage de la section nulle de $\mathcal{A}$ d'une structure de groupoïde local intégrant $\mathcal{A}$ alors le groupoïde local obtenu est un quasi-graphoïde local.

4.1 Idée de la construction

L'intégration locale des algébroïdes de Lie repose d'une part sur l'application exponentielle et d'autre part sur les propriétés des champs invariants à droite de groupoïdes. Nous rappelons ici brièvement ces notions (dont on trouve une description détaillée dans [Mac87, CdSW99]), puis nous expliquons la démarche adoptée par la suite.

Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde différentiable de base M, de source α et de but β. On note $\mathcal{A}G$ son algébroïde de Lie, p son fléchage et k la dimension du fibré $\mathcal{A}G$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}G & \xrightarrow{p} & TM \\ \downarrow & & \\ M & & \end{array} .$$

Nous avons alors les propriétés remarquables suivantes.

1- Toute section locale de $\mathcal{A}G$ définie sur un ouvert O de M est la restriction à O d'un *champ de vecteurs invariant à droite* de G défini sur $\beta^{-1}(O)$.
Si Y est une section locale de $\mathcal{A}G$, *le champ de vecteurs local invariant à droite correspondant* est défini pour tout γ tel que $\beta(\gamma) \in \mathrm{dom}(Y)$ par :

$$Z_Y(\gamma) = TR_\gamma(Y(\beta(\gamma)))$$

où TR_γ désigne la différentielle de R_γ, la multiplication à droite par γ. On a alors l'égalité suivante :

$$T\beta(Z_Y(\gamma)) = p(Y(\beta(\gamma)))$$

où $T\beta$ désigne la différentielle de β.
Si h^t est le groupe local à un paramètre associé au champ Z_Y sur G, la restriction

à M de $\beta \circ h^t$ est le groupe local à un paramètre associé au champ $p(Y)$ sur M. De plus $\beta \circ h^t = \beta \circ h^t \circ \beta$ sur le domaine de h^t.

2- Soient Z un champ de vecteurs local de G et $h : W \subset G \times \mathbb{R} \to G$ son flot. Alors Z est invariant à droite si et seulement si les difféomorphismes locaux h^t sont des *translations locales à gauche* de G, c'est-à-dire qu'ils vérifient l'égalité $h^t(\gamma_1.\gamma_2) = h^t(\gamma_1).\gamma_2$ lorsque $(\gamma_1, \gamma_2) \in G^{(2)}$, $\gamma_1.\gamma_2 \in \mathrm{dom}(h^t)$ et $\gamma_1 \in \mathrm{dom}(h^t)$.

3- Soit $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ une base locale de sections de $\mathcal{A}G$ définies sur un ouvert O de M. Notons $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_k\}$ les champs de vecteurs invariants à droite correspondants et h_i^t le flot de Z_i, $i = 1, \ldots, k$. Ces flots ne sont généralement pas définis globalement. Cependant, pour tout $\gamma \in \beta^{-1}(O)$, on peut trouver un voisinage ouvert V_γ de γ dans G et un réel $\varepsilon > 0$ tel que V_γ soit inclus dans le domaine de h_i^t pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.
Il existe un ouvert V de $O \times \mathbb{R}^k$ contenant $O \times \{0\}$ tel que l'application suivante soit un difféomorphisme sur son image

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & V & \longrightarrow & G \\ & (y, t_1, \ldots, t_k) & \mapsto & h_1^{t_1} \circ \cdots \circ h_k^{t_k}(y) \ . \end{array}$$

L'application Ψ est appelée *la carte distinguée associée à* $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$.
En particulier, on remarque que $\beta \circ \Psi(y, t_1, \ldots, t_k) = \beta \circ h_1^{t_1} \circ \cdots \circ \beta \circ h_k^{t_k}(y)$.
Notons $\varphi_i^t = \beta \circ h_i^t$ le flot de $p(Y_i)$, $i = 1, \cdots, k$.
Ainsi, V hérite via Ψ d'une structure de groupoïde différentiable local de source $s : (y, t_1, \cdots, t_k) \mapsto y$ et de but $b : (y, t_1, \cdots, t_k) \mapsto \varphi_1^{t_1} \circ \cdots \varphi_k^{t_k}(y)$.
Le produit local est donné par

$$(z, s_1, \cdots, s_k).(y, t_1, \cdots, t_k) = \Psi^{-1}(h_1^{s_1} \circ \cdots \circ h_k^{s_k}(\Psi(y, t_1, \cdots, t_k)))$$

lorsque $z = \beta(h_1^{t_1} \circ \cdots \circ h_k^{t_k}(y))$ et $h_1^{s_1} \circ \cdots \circ h_k^{s_k} \circ h_1^{t_1} \circ \cdots \circ h_k^{t_k}(y)$ est dans l'image de Ψ.

Si l'on possède "suffisamment" de translations locales, on est en mesure de reconstruire la structure algébrique du groupoïde. En d'autres termes, la connaissance des champs invariants à droite du groupoïde G permet d'une part d'identifier un voisinage des unités de G à un voisinage de la section nulle de son algébroïde de Lie et d'autre part de récupérer la structure de groupoïde local sur ce voisinage. Donc on sait intégrer localement un algébroïde de Lie dès lors que l'on sait "retrouver" les champs invariants à droite.

Le problème est le suivant :
Soit $\mathcal{A} \to M$ un algébroïde de Lie sur une variété M de fléchage $p : \mathcal{A} \to TM$. On suppose que p est injectif au-dessus d'un ouvert dense. On identifie M avec son image dans $\mathcal{A}$ par la section nulle, on dira que M est *l'ensemble des unités* de $\mathcal{A}$.

Il s'agit de munir un voisinage de M dans $\mathcal{A}$ d'une structure de groupoïde différentiable local dont l'algébroïde de Lie est $\mathcal{A}$.

Nous supposons dans un premier temps que le fibré $\mathcal{A}$ est trivialisable de dimension k avec $0 < k \leq n$. On se donne une base $Y_1, ..., Y_k$ de sections de $\mathcal{A}$ et on considère les champs de vecteurs correspondants, $X_1 = p(Y_1), ..., X_k = p(Y_k)$ sur M. On définit alors l'application source comme étant la projection de $\mathcal{A}$ sur M et le but à l'aide des flots des champs X_i.
On établit une formule analogue à celle de Baker, Campbell, Hausdorff qui intervient dans l'intégration des algèbres de Lie. Cette formule va nous permettre de définir les "champs invariants à droite". On sera alors en mesure de définir la structure de groupoïde différentiable local cherchée sur un voisinage de la section nulle de $\mathcal{A}$. Ce travail sera grandement simplifié par le fait que lorsque le fléchage de $\mathcal{A}$ est injectif au-dessus d'un ouvert dense, on montre qu'il existe un voisinage Ω de la section nulle dans $\mathcal{A}$ tel que si ν est une section à la fois de la source et du but à valeur dans Ω, alors ν est la section nulle.

Ensuite nous définissons l'intégration locale des morphismes d'algébroïdes de Lie. Dans le cas général, la donnée d'une trivialisation locale du fibré $\mathcal{A}$ permet ainsi d'obtenir un atlas généralisé sur M indépendant, à équivalence près, du choix de la trivialisation.

4.2 Formule de Baker-Campbell-Hausdorff généralisée

Toutes les applications considérées seront de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Soit O une variété. On se donne k champs de vecteurs à supports compacts, $X_1, ..., X_k$ sur O tels que pour tout $i, j = 1, \ldots, k$, il existe k fonctions $f_l^{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(O)$, satisfaisant à

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=1}^{k} f_l^{i,j}.X_l \ .$$

Pour $i = 1 \ldots k$, on note $A_i \in M_{kk}(\mathcal{C}^\infty(O))$ la matrice définie par $(A_i)_{j,l} = f_l^{i,j}$.
D'autre part on note φ_i^t le flot de X_i, $i = 1, \ldots, k$.

Proposition 9 *Il existe un réel $\varepsilon > 0$ et pour tout $i = 1, \ldots, k$, une application $C_i : O \times]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M_k(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $C_i(., 0) = Id$ et qui vérifie :*

$$(\varphi_i^t)_*(v_1.X_1 + ... + v_k.X_k)(\varphi_i^{-t}(x)) = v.C_i(x,t) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix} (x)$$

pour tout $v = (v_1, ..., v_k) \in \mathbb{R}^k$ et $(x,t) \in O \times]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Preuve Commençons par la remarque suivante.
Pour $x \in O$ fixé, considérons le chemin $H_i(x,.) : \mathbb{R} \to (T_xO)^k$ défini par $H_i(x,t) = (\varphi_i^t)_*(X_1,\ldots,X_k)(\varphi_i^{-t}(x))$. D'après [Spi70] on a

$$\begin{aligned} H_i'(x,t) &= -(\varphi_i^t)_*([X_i,X_1],\ldots,[X_i,X_k])(\varphi_i^{-t}(x)) \\ &= -(\varphi_i^t)_* A_i(\varphi_i^{-t}(x)) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix} (\varphi_i^{-t}(x)) \ . \end{aligned}$$

Soit alors le champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{array}{rccl} Y_i : & O \times M_k(\mathbb{R}) & \longrightarrow & T(O) \times M_k(\mathbb{R}) \times M_k(\mathbb{R}) \quad \simeq T(O \times M_k(\mathbb{R})) \\ & (x,m) & \mapsto & (x, -X_i(x), m, -A_i(x).m) \end{array}$$

Notons T_i^t le flot de Y_i. Il existe un réel $\varepsilon_i > 0$ tel que l'application suivante soit définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$:

$$\begin{array}{rccc} C_i : & O \times]-\varepsilon_i, \varepsilon_i[& \longrightarrow & M_k(\mathbb{R}) \\ & (x,t) & \mapsto & pr_2 \circ T_i^t(x, Id) \end{array} \ .$$

Alors $C_i(.,0) = Id$ et on vérifie aisément que pour tout $x \in O$, le chemin dans $(T_xO)^k$ défini par $\tau_i(x,t) := C_i(x,t) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix} (x)$ vérifie la même équation différentielle que $H_i(x,t)$ et que $H_i(x,0) = \tau_i(x,0)$.
L'unicité des solutions d'une équation différentielle permet alors de conclure. □

Nous pouvons maintenant établir la "formule de Campbell, Baker, Hausdorff" qui va nous permettre d'intégrer localement les algébroïdes de Lie triviaux de fléchage presque injectif.
On dira d'un champ de vecteurs Y sur $O \times \mathbb{R}^k$ qu'il est pr_1-*vertical* lorsque $(pr_1)_*(Y) = 0$, où $pr_1 : O \times \mathbb{R}^k \to O$ est la projection sur O. *Le fibré des champs* pr_1-*verticaux* sur $O \times \mathbb{R}^k$ est $\mathrm{Ker}(pr_1)_*$, il s'agit d'un sous-fibré vectoriel de $T(O \times \mathbb{R}^k)$ de dimension k.

Proposition 10 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f : & O \times \mathbb{R}^k & \longrightarrow & O \\ & (x, t_1, \ldots, t_k) & \mapsto & \varphi_1^{t_1} \circ \ldots \circ \varphi_k^{t_k}(x) \end{array} \ .$$

Il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ tel que la restriction à $O \times]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[^k$ du fibré des champs pr_1-verticaux admet une base $\{Z_1, ..., Z_k\}$ de champs de vecteurs satisfaisant à

$$f_*(Z_i) = X_i \circ f$$

et

$$[Z_i, Z_j](x,\xi) = \sum_{l=1}^{k} f_l^{i,j}(f(x,\xi)).Z_l(x,\xi)$$

pour tout $i,j = 1,..,k$ *et* $(x,\xi) \in O\times]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[^k$.

Preuve Notons $\{\frac{\partial}{\partial t_i}\ ;\ i = 1\cdots k\}$ la base des champs pr_1-verticaux sur $O\times\mathbb{R}^k$. On identifiera $\frac{\partial}{\partial t_i}$ à e_i, le $i$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^k$.
On vérifie que pour tout $(x,\xi) = (x,\xi_1,\ldots,\xi_k) \in O\times]-\varepsilon,\varepsilon[^k$:

$$\begin{aligned} f_*(\frac{\partial}{\partial t_i})(x,\xi) &= (\varphi_1^{\xi_1})_* \circ \ldots \circ (\varphi_i^{\xi_i})_* X_i(\varphi_i^{-\xi_i} \circ \ldots \circ \varphi_1^{-\xi_1}(f(x,\xi))) \\ &= e_i B(x,\xi) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix} (f(x,\xi)) \ , \end{aligned}$$

où $B \in M_k(\mathcal{C}^\infty(O\times]-\varepsilon,\varepsilon[^k)$ est la matrice dont la $i$ème ligne est la $i$ème ligne de la matrice produit

$$C_i(\varphi_i^{\xi_i} \circ \varphi_{i+1}^{\xi_{i+1}} \circ \ldots \circ \varphi_k^{\xi_k}(x),\xi_i).C_{i-1}(\varphi_{i-1}^{\xi_{i-1}} \circ \ldots \circ \varphi_k^{\xi_k}(x),\xi_{i-1}) \ldots C_1(f(x,\xi),\xi_1) \ .$$

Comme $B(.,0) = Id$, quitte à prendre un ε plus petit, on peut supposer que $B(x,\xi)$ est inversible pour tout $(x,\xi) \in O\times]-\varepsilon,\varepsilon[^k$.
On définit alors $Z_i(x,\xi) = (x,0,\xi,e_iB^{-1}(x,\xi)) \in T_{(x,\xi)}(O\times\mathbb{R}^k) = T_xO \times T_\xi\mathbb{R}^k$. $\square$

Pour $i = 1,\cdots,k$, notons h_i^t le flot du champ Z_i. On a la proposition suivante.

Proposition 11 *Il existe un réel* $\eta > 0$ *tel que pour tout* $t \in]-\eta,\eta[$ *et tout* $i = 1,\ldots,k$, *l'application* $\mathcal{C}^\infty$, h_i^t *est définie sur* $O\times]-\eta,\eta[^k$ *et satisfait à :*

- $pr_1 \circ h_i^t = pr1$,
- *pour tout* $(x,\xi) \in O\times]-\eta,\eta[^k$, $f \circ h_i^t(x,\xi) = \varphi_i^t \circ f(x,\xi)$,
- *pour tout* $x \in M$ *et* $(t_1,\ldots,t_k) \in]-\eta,\eta[^k$ *tel que cela ait un sens,*

$$h_1^{t_1} \circ \ldots \circ h_k^{t_k}(x,0) = (x,t_1,\ldots,t_k) \ .$$

Preuve - $pr_1 \circ h_i^t = pr_1$ provient simplement du fait que le champ Z_i vérifie $(pr_1)_*(Z_i) = 0$.
- Soit (x,ξ) fixé dans le domaine de Z_i. On considère c le chemin dans O défini par

$c(t) = \varphi_i^{-t} \circ f \circ h_i^t(x,\xi)$. On a $c(0) = f(x,\xi)$. Puisque $f_*(Z_i) = X_i \circ f$, on obtient $c'(t) = 0$ pour tout t, d'où $f \circ h_i^t(x,\xi) = \varphi_i^t \circ f(x,\xi)$.
- Soit $\xi_t^i = (0,\ldots,0,t,t_{i+1},\ldots,t_k) \in]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[^k$. On vérifie que $B(x,\xi_t^i)$ est de la forme $\begin{pmatrix} Id_i & 0 \\ D_0(x,\xi_t^i) & D_1(x,\xi_t^i) \end{pmatrix}$, autrement dit $Z_i(x,\xi_t^i) = \frac{\partial}{\partial t_i}$.
Soit c le chemin dans $O\times]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[^k$ défini par $c(t) = h_i^{-t}(x,\xi_t^i)$ alors $c(0) = (x,\xi_0^i)$.
D'après la remarque ci-dessus, $c'(t) = (h_i^{-t})_*(x,\xi_t^i).\frac{\partial}{\partial t_i} - Z_i(h_i^{-t}(x,\xi_t^i)) = 0$.
D'où

$$(x,0,\ldots,0,t,t_{i+1},\ldots,t_k) = h_i^t(x,0,\ldots,0,t_{i+1},\ldots,t_k) \text{ pour tout } t.$$

Ce qui permet de conclure. □

Dans le cas où les champs $X_1,\cdots,X_k$ ne sont pas à supports compacts, on peut se ramener au cas précédent en se donnant une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur O à support compact et en considérant les champs à supports compacts $g.X_1,\cdots,g.X_k$.
On peut également obtenir les mêmes résultats en se restreignant dès le départ à un voisinage ouvert de $O\times\{0\}$ dans $O\times\mathbb{R}^k$ sur lequel l'application f est définie.

4.3 Intégration locale des algébroïdes de Lie triviales

Soit $\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{p} & TM \\ \alpha\downarrow & & \downarrow \\ M & = & M \end{array}$ un algébroïde de Lie de base M et de fléchage p, où M est une variété différentiable de dimension n. Supposons que le fibré $\mathcal{A}$ est trivialisable de dimension k avec $0 < k \leq n$.
Soient $\{Y_1,...,Y_k\}$ une base de sections de $\mathcal{A}$ et $X_1 = p(Y_1),...,X_k = p(Y_k)$ les champs de vecteurs sur M correspondants.
Notons $[\cdot,\cdot]$ le crochet de Lie sur les sections de $\mathcal{A}$. Puisque le fibré $\mathcal{A}$ est trivial pour tout i,j, on a k fonctions $f_l^{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telles que :

$$[Y_i,Y_j] = \sum_{l=1}^k f_l^{i,j}.Y_l \ ,$$

et par suite

$$[X_i,X_j] = p[Y_i,Y_j] = \sum_{l=1}^k f_l^{i,j}.X_l \ .$$

On est donc dans les conditions d'application des résultats du paragraphe précédent.
On désigne encore par $\alpha : M\times\mathbb{R}^k \to M$ la projection sur le premier facteur. Notons

φ_i^t le flot de X_i pour $i = 1, \ldots, k$. On peut trouver un ouvert $\mathcal{O}$ de $M \times \mathbb{R}^k$ contenant $M \times \{0\}$ tel que pour tout $(x, t_1, \cdots, t_k) \in \mathcal{O}$ le point x est dans le domaine de $\varphi_1^{t_1} \circ \cdots \circ \varphi_k^{t_k}$.
D'après la proposition 10, il existe un ouvert Ω de $M \times \mathbb{R}^k$ contenant la section nulle et contenu dans $\mathcal{O}$ tel que les conditions suivantes sont satisfaites.
On définit l'application différentiable suivante

$$\begin{array}{rccc} \beta : & \Omega & \longrightarrow & M \\ & (x, t_1, \ldots, t_k) & \mapsto & \varphi_1^{t_1} \circ \ldots \circ \varphi_k^{t_k}(x) \end{array} .$$

- Notons $T^\alpha\Omega = \mathrm{Ker}(T\alpha\,|_\Omega)$ le fibré des champs α-verticaux sur Ω. Ce fibré admet une base $\{Z_1, ..., Z_k\}$ de champs de vecteurs satisfaisant à

$$Z_i(x, 0) = Y_i(x) \ ,$$

$$[Z_i, Z_j](x, \xi) = \sum_{l=1}^{k} f_l^{i,j}(\beta(x, \xi)).Z_l(x, \xi) \text{ et}$$

$$T\beta(Z_i) = T\beta(Z_i \circ \beta) = p(Y_i \circ \beta) = X_i \circ \beta \ .$$

De plus, on note h_i^t le flot de Z_i, pour $i = 1, \ldots, k$. D'après la proposition 11, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $i = 1 \ldots k$ et tout $t \in]-\eta, \eta[$, l'application h_i^t est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et satisfait à

$$\alpha \circ h_i^t \ = \ \alpha \ . \tag{4.1}$$

- Pour tout $(x, \xi) \in \Omega \subset M \times \mathbb{R}^k$, on a

$$\beta \circ h_i^t(x, \xi) \ = \ \varphi_i^t \circ \beta(x, \xi) \ . \tag{4.2}$$

- Pour tout $x \in M$ et $(t_1, \ldots, t_k) \in]-\eta, \eta[^k$, on a

$$h_1^{t_1} \circ \ldots h_k^{t_k}(x, 0) = (x, t_1, \cdots, t_k) \ . \tag{4.3}$$

Soit

$$\begin{aligned} \Omega' = \{(x, t_1, \cdots, t_k) \in \Omega \ ; \ & (\beta(x, t_1, \cdots, t_k), 0) \in \mathrm{Im}(h_1^{t_1} \circ \ldots \circ h_k^{t_k}) \\ & \text{et } (h_1^{t_1} \circ \ldots \circ h_k^{t_k})^{-1}(\beta(x, t_1, \cdots, t_k), 0) \in \Omega\} \ . \end{aligned}$$

L'ensemble Ω' est un ouvert de Ω contenant la section nulle. On considère l'application différentiable

$$\begin{array}{rccc} i : & \Omega' & \longrightarrow & \Omega \\ & (x, t_1, \cdots, t_k) & \mapsto & h_k^{-t_k} \circ \ldots \circ h_1^{-t_1}(\beta(x, t_1, \cdots, t_k), 0). \end{array}$$

On vérifie immédiatement à l'aide des équations 4.2 et 4.3 que $\alpha \circ i = \beta$ et $\beta \circ i = \alpha$. De plus $i(x) = x$ pour tout $x \in M$.

On notera abusivement α, β et i les restrictions de α, β et i à tout ouvert de Ω contenant la section nulle.
On est maintenant en mesure de définir un groupoïde local intégrant $\mathcal{A}$.

Théorème 4 *On suppose que le fléchage p est injectif au-dessus d'un ouvert dense. Il existe un ouvert G de Ω contenant la section nulle tel que les applications suivantes munissent $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ d'une structure de groupoïde différentiable local de base M de source α et de but β.*

- *L'application unité est la section nulle.*
- *L'inversion est l'application i :*

$$(x, t_1, \cdots, t_k)^{-1} = h_k^{-t_k} \circ \ldots \circ h_1^{-t_1}(\beta(x, t_1, \cdots, t_k), 0) \ .$$

- *Le produit local est donné par*

$$(y, s_1, \cdots, s_k).(x, t_1, \cdots, t_k) = h_1^{s_1} \circ \cdots \circ h_k^{s_k}(x, t_1, \cdots, t_k)$$

et est défini sur

$\mathcal{D}^2 G = \{((y, s_1, \cdots, s_k), (x, t_1, \cdots, t_k)) \in G \times G \ ; \ y = \beta(x, t_1, \cdots, t_k) \ ,$
$(x, t_1, \cdots, t_k) \in dom(h_1^{s_1} \circ \cdots \circ h_k^{s_k})$ *et* $h_1^{s_1} \circ \cdots \circ h_k^{s_k}(x, t_1, \cdots, t_k) \in G\}$.

La fin de ce paragraphe sera consacrée à la démonstration de ce théorème. Les seuls points non triviaux à vérifier sont que l'inversion est un difféomorphisme involutif et que le produit est bien défini ou plus précisément associatif.
Pour ce faire, nous allons préalablement montrer qu'il existe un voisinage Ω_1 de la section nulle dans $\mathcal{A}$ tel que si ν est une section à la fois de la source et du but à valeur dans Ω_1 alors ν est la section nulle.

Nous avons besoin de quelques résultats préliminaires.

On considère la famille de champs de vecteurs α-verticaux

$$\begin{array}{rccc} Z_t : & \Omega & \to & T\Omega \\ & (x, \xi) & \mapsto & \Sigma_{i=1}^k t_i . Z_i(x, \xi) \end{array}$$

paramétrée par $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$. On note ψ_t^λ le flot correspondant à Z_t. On remarque alors que

$$\psi_t^\lambda = \psi_{\lambda t}^1.$$

D'autre part l'égalité $T\beta(Z_t) = T\beta(Z_t \circ \beta)$ implique que

$$\beta \circ \psi_t^\lambda = \beta \circ \psi_t^\lambda \circ \beta.$$

Par suite, la restriction aux unités de $\beta \circ \psi_t^\lambda$ est le flot du champ de vecteurs X_t sur M défini par

$$x \in M \mapsto T\beta(Z_t(x)) = \Sigma_{i=1}^k t_i.p(Y_i(x)) = \Sigma_{i=1}^k t_i.X_i(x) \in TM.$$

Lemme 3 *Il existe un ouvert Ω_0 de Ω contenant la section nulle M pour lequel l'application*

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & \Omega_0 & \to & \Omega \\ & (x,t) & \mapsto & \psi_t^1(x) \end{array}$$

est un difféomorphisme sur son image.

Preuve L'existence d'un ouvert de Ω contenant la section nulle sur lequel Θ est définie provient simplement de l'égalité $\psi_t^\lambda = \psi_{\lambda t}^1$.
On remarque tout d'abord que la restriction de Θ aux unités est l'identité.
D'autre part pour $i = 1, \cdots, k$, et $x \in M$, $T_{(x,0)}\Theta(\frac{\partial}{\partial t_i}) = Z_i(x)$. Finalement pour tout $x \in M$, la différentielle de Θ en x est un isomorphisme, ce qui conclut la démonstration. □

Proposition 12 *Il existe un voisinage ouvert Ω_1 de la section nulle M dans Ω_0 ayant la propriété suivante : si $\nu : O \to \Omega_1$ est une application différentiable d'un ouvert O de M dans Ω_1, qui vérifie $\alpha \circ \nu = \beta \circ \nu = 1_O$, alors ν est la restriction à O de la section nulle.*

Preuve Notons M_0 l'ouvert dense de M au-dessus duquel p est injectif.
Soient K un compacte de M contenu dans un ouvert de carte et $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
On note comme si dessus $X_t = T\beta(Z_t|_M)$ le champs de vecteurs sur M dont le flot est la restriction aux unités de $\beta \circ \psi_t^\lambda$.
D'après le corollaire 6 de l'annexe A, il existe un réel $\eta_{K,t} > 0$ tel que si l'orbite de X_t passant par $x \in K$ est périodique de période non nulle τ_x alors $\tau_x \geq \eta_{K,t}$.
Donc il existe un réel $0 < \varepsilon_{K,t} < 1$ tel que $K \times]-\varepsilon_{K,t}, \varepsilon_{K,t}[$ est contenu dans Ω_0 et pour tout $x \in K \cap M_0$ l'application

$$\begin{array}{rccc} \pi_{x,t} : &]-\varepsilon_{K,t}, \varepsilon_{K,t}[& \longrightarrow & M \\ & \lambda & \mapsto & \beta \circ \Theta(x, \lambda t) = \beta \circ \psi_t^\lambda(x) \end{array}$$

est injective. Lorsque $t = 0$, on pose $\pi_{x,0}(\lambda) = x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
On définit $A_K = \inf\limits_{\substack{t \in \mathbb{R}^n \\ \|t\|=1}} \{\varepsilon_{K,t}\}$, alors $0 < A_K < 1$.

Remarquons que pour tout $x \in K \cap M_0$, $t \in]-A_K, A_K[\setminus\{0\}$ et $\lambda \in [-1,1]$ on a l'égalité

$$\pi_{x,t}(\lambda) = \pi_{x,\frac{t}{\|t\|}}(\lambda\|t\|) \ .$$

Donc pour tout $x \in K \cap M_0$ et $t \in]-A_K, A_K[\setminus\{0\}$ l'application $\pi_{x,t}$ est injective en restriction à $[-1,1]$. En particulier $\pi_{x,t}(\lambda) = x$ si et seulement si $\lambda = 0$ où $t = 0$.

Soit $\{K_i,\ i \in I\}$ un recouvrement de M par des boules compactes. On itère le procédé précédent et on définit $W = \bigcup_{i\in I} K_i \times]-A_{K_i}, A_{K_i}[$ et $\tilde{\Omega}_0 = \overset{\circ}{W}$. Alors $\tilde{\Omega}_0$ est un ouvert de Ω_0 qui contient la section nulle. On pose $\Omega_1 = \Theta(\tilde{\Omega}_0) \cap \Omega_0$, c'est également un ouvert de Ω_0 qui contient la section nulle.

Soit $\nu : O \to \Omega_1$ une application différentiable d'un ouvert O de M vers Ω_1 vérifiant $\alpha \circ \nu = \beta \circ \nu = 1_O$. On définit $\tilde{\nu} := \Theta^{-1} \circ \nu : O \to \tilde{\Omega}_0$; $x \mapsto (x, t_x)$. Alors pour tout $x \in O$,

$$\beta \circ \nu(x) = \beta \circ \Theta(x, t_x) = \pi_{x,t_x}(1) = x \ .$$

Donc $t_x = 0$ lorsque $x \in O \cap M_0$. Par continuité, on déduit que $\tilde{\nu}$ est la restriction à O de la section nulle. Puisque Θ est un difféomorphisme qui envoie la section nulle sur la section nulle, ν est la restriction à O de la section nulle. □

Pour $\xi = (t_1, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k$, on note $h^\xi := h_1^{t_1} \circ \ldots \circ h_k^{t_k}$. Il s'agit d'un difféomorphisme local de Ω d'inverse $(h^\xi)^{-1} := h_k^{-t_k} \circ \ldots \circ h_1^{-t_1}$.

Soit Υ le pseudogroupe des difféomorphismes locaux sur Ω_1 engendré par la restriction à Ω_1 des h^ξ. Les équations 4.1 et 4.2 impliquent que tout $\varphi \in \Upsilon$ vérifie $\alpha \circ \varphi = \alpha$ et $\beta \circ \varphi = \beta \circ \varphi \circ \beta$. En particulier, $\beta \circ \varphi \circ \beta \circ \varphi^{-1} = \beta$.

Le corollaire suivant sera très utile dans la suite, il assure que les éléments de Υ sont des translations à gauche d'un groupoïde local.

Corollaire 4 *Pour tout $\varphi \in \Upsilon$ et $x \in M$ on a quand cela a un sens,*

$$\varphi \circ i \circ \varphi(\beta \circ \varphi^{-1}(x)) = x \ .$$

De plus si $\varphi(x) = x$ alors $\varphi(z) = z$ pour tout $z \in \beta^{-1}(x) \cap dom(\varphi)$.

Preuve Soit $\varphi \in \Upsilon$ et O un ouvert de M inclus dans le domaine de l'application $\nu := \varphi \circ i \circ \varphi \circ \beta \circ \varphi^{-1}$. Alors $\alpha \circ \nu(x) = \beta \circ \nu(x) = x$, pour tout $x \in O$. D'après la proposition 12, $\nu(x) = x$ pour tout $x \in O$.

On suppose que $\varphi(x) = x$. Soit $(y, \xi) = h^\xi(y) \in \Omega_1'$ tel que $\beta(y, \xi) = x$. Alors, d'après le résultat ci-dessus, on a les égalités

$$\begin{aligned} \varphi \circ h^\xi \circ i \circ \varphi \circ h^\xi(y) &= \beta \circ \varphi \circ h^\xi(y) = \beta \circ \varphi \circ \beta \circ h^\xi(y) = x \\ &= \varphi(x) = \varphi \circ h^\xi \circ i \circ h^\xi(y) \ . \end{aligned}$$

On en déduit que $\varphi(y, \xi) = (y, \xi)$. □

On est maintenant en mesure de montrer le théorème 4.
Preuve Posons $G = (\Omega' \cap \Omega_1) \cap i(\Omega' \cap \Omega_1)$. Il s'agit d'un ouvert de Ω contenant la section nulle.

Comme nous l'avons déjà signalé, les points non évidents sont l'involutivité de l'inversion et l'associativité du produit.

Montrons que la restriction de i à G est un difféomorphisme involutif. Soit $(x, \xi) = h^\xi(x) \in G$. En appliquant la première assertion du corollaire 4 à $(h^\xi)^{-1}$, on obtient que $(h^\xi)^{-1} \circ i \circ i \circ h^\xi(x) = x$ pour tout $x \in M$, d'où le résultat.

Le produit est associatif. En supposant que les produits suivants sont définis on a

$$(\beta(x, \xi_3), \xi_2).(x, \xi_3) = h^{\xi_2} \circ h^{\xi_3}(x) \ ,$$

$$(\beta(h^{\xi_2} \circ h^{\xi_3}(x)), \xi_1).(\beta(x, \xi_3), \xi_2) = h^{\xi_1} \circ h^{\xi_2}(\beta(x, \xi_3)) \ \text{ et}$$
$$((\beta(h^{\xi_2} \circ h^{\xi_3}(x)), \xi_1).(\beta(x, \xi_3), \xi_2)).(x, \xi_3) \ .$$

Fixons $\tau \in \mathbb{R}^k$ tel que $h^{\xi_1} \circ h^{\xi_2}(\beta(x, \xi_3)) = h^\tau(\beta(x, \xi_3))$. D'après le corollaire 4, $h^{\xi_1} \circ h^{\xi_2} = h^\tau$ sur $\beta^{-1}(\beta(x, \xi_3))$ d'où les égalités :

$$((\beta(h^{\xi_2} \circ h^{\xi_3}(x)), \xi_1).(\beta(x, \xi_3), \xi_2)).(x, \xi_3) = h^{\xi_1} \circ h^{\xi_2} \circ h^{\xi_3}(x)$$
$$= (\beta(h^{\xi_2} \circ h^{\xi_3}(x)), \xi_1).((\beta(x, \xi_3), \xi_2).(x, \xi_3)) \qquad \square$$

Pour terminer l'intégration locale des algébroïdes de Lie triviaux dont le fléchage est presque injectif, il reste à voir que G intègre $\mathcal{A}$. On a la proposition suivante :

Proposition 13 *L'algébroïde de Lie de $G \rightrightarrows M$ est $\mathcal{A}$.*

Preuve On vérifie immédiatement que $\mathcal{A}G = \mathrm{Ker}(T\alpha) \mid_M = \mathcal{A}$ et que la restriction de $T\beta$ à $\mathcal{A}G$ est l'application p. On conclut en remarquant que l'injectivité de p au-dessus d'un ouvert dense implique l'unicité d'un crochet $[\cdot, \cdot] : \Gamma\mathcal{A} \times \Gamma\mathcal{A} \to \Gamma\mathcal{A}$ qui vérifie $p([X, Y]) = [p(X), p(Y)]$ pour tout $X,\ Y \in \Gamma\mathcal{A}$. $\square$

Remarques **1-** Les h^ξ sont des translations à gauche de G et par suite il en va de même des éléments de Υ.
2- Les propositions 12 ci-dessus et 7 du chapitre 3 assurent que quitte à restreindre G autour des unités, G est un morceau de quasi-graphoïde. Ainsi le produit local est uniquement déterminé par les applications source et but. Donc dans la pratique, pour définir un groupoïde local intégrant $\mathcal{A}$ il suffit de se donner la source et le but. On peut donc reformuler le théorème 4 de la façon suivante :

Lorsque le fléchage est injectif au-dessus d'un ouvert dense, il existe un ouvert G de Ω contenant la section nulle tel que $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ est un quasi-graphoïde local. De plus G intègre $\mathcal{A}$.

4.4 Intégration locale des morphismes

Nous allons décrire ici l'intégration locale des morphismes d'algébroïdes de Lie.
On se donne $\mathcal{A}_i$ un algébroïde de Lie trivialisable sur M de fléchage p_i et $\{Y_1^i, \ldots, Y_k^i\}$ une base de sections de $\mathcal{A}_i$, où $i = 1, 2$. On suppose comme précédemment que p_i est injectif au dessus d'un ouvert dense. Notons $G_i \overset{\alpha_i}{\underset{\beta_i}{\rightrightarrows}} M$ le morceau de quasi-graphoïde associé à $\mathcal{A}_i$ comme précédemment. Soit $f : \mathcal{A}_1 \to A_2$ un morphisme d'algébroïde de Lie au-dessus de l'identité, en particulier $p_2 \circ f = p_1$.
Avec les notations précédentes on a la

Proposition 14 *Il existe un sous-morceau de quasi-graphoïde ouvert V_1 de G_1 et un morphisme $F : V_1 \to G_2$ qui intègre f.*

Preuve Soient $\{Z_1^i, \ldots, Z_k^i\}$ la base de champs α_i-verticaux associée à la base $\{Y_1^i, \ldots, Y_k^i\}$ de section de $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$.
Pour tout $i = 1, \ldots, k$, on note q_i le champ α_2-vertical sur $\mathcal{A}_2$ associé à $f(Y_i^1) = \Sigma_{l=1}^k a_l.Y_l^2$, c'est-à-dire $q_i(x, \xi) = \Sigma_{l=1}^k a_l(\beta_2(x, \xi))Z_l^2(x, \xi)$. En particulier $T\beta_2(q_i) = p_2(q_i \circ \beta_2) = p_2 \circ f(Y_i^1 \circ \beta_2) = p_1(Y_i^1 \circ \beta_2)$.
Pour $i = 1 \ldots k$, on note ϕ_i^t le flot de q_i et comme précédemment on note h_i^t le flot de Z_i^1. On peut trouver un sous-morceau de quasi-graphoïde ouvert V_1 de G_1 tel que l'application

$$\begin{array}{rccc} F : & V & \longrightarrow & G_2 \\ & (x, t_1, \ldots, t_k) = h_1^{t_1} \circ \ldots \circ h_k^{t_k}(x) & \mapsto & \phi_1^{t_1} \circ \ldots \circ \phi_k^{t_k}(x) \end{array}$$

est définie et différentiable. On vérifie immédiatement que $F(x) = x$, pour tout $x \in M$ et que $\alpha_2 \circ F = \alpha_1$.
D'autre part, pour tout $i = 1, \ldots, k$, le champ de vecteurs $X_i^1 := p_1(Y_i^1) = p_2 \circ f(Y_i^1)$ sur M admet pour flot $\beta_1 \circ h_i^t$ et $\beta_2 \circ \phi_i^t$. On en déduit l'égalité $\beta_1 \circ h_i^t = \beta_2 \circ \phi_i^t$.
De plus, comme précédemment, $\beta_2 \circ \phi_i^t = \beta_2 \circ \phi_i^t \circ \beta_2$ et par suite $\beta_2 \circ F = \beta_1$.
Finalement, F est un morphisme graphes, donc de morceaux de quasi-graphoïdes qui intègre f. □

Lorsque f est un isomorphisme, on vérifie aisément que F est un isomophisme de graphe sur son image.

4.5 Fin de la démonstration du théorème 3

Soit $\mathcal{A} \to M$ un algébroïde de Lie sur une variété M et $p : \mathcal{A} \to TM$ son fléchage. On suppose que p est injectif au dessus d'un ouvert dense. Notons $\mathcal{F}$, le feuilletage singulier induit par $\mathcal{A}$ sur M et $(M_0, \mathcal{F}_0)$ son sous-feuilletage régulier maximal.

On note α, la projection de $\mathcal{A}$ sur M. On se donne $\{\tau_i : \alpha^{-1}(O_i) \xrightarrow{\sim} O_i \times \mathbb{R}^k,\ i \in I\}$ une trivialisation locale du fibré $\mathcal{A}$ où $\{O_i,\ i \in I\}$ est un recouvrement ouvert de M.
Pour tout $i \in I$, on considère alors l'algébroïde de Lie triviale $\mathcal{A}_i = O_i \times \mathbb{R}^k$ sur O_i de fléchage $p_i := p \circ \tau_i^{-1}$ injectif au-dessus d'un ouvert dense de O_i.
On applique les résultats du paragraphe précédent à chaque élément de la trivialisation. On obtient ainsi une famille $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{G_i \underset{\beta_i}{\overset{\alpha_i}{\rightrightarrows}} O_i,\ i \in I\}$ de morceaux de quasi-graphoïdes.

Proposition 15 *La famille $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ est un atlas généralisé pour $(M, \mathcal{F})$. De plus $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ ne dépend pas à équivalence près du choix de la trivialisation locale.*

Preuve L'intégration des morphismes garantit que $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ est un atlas généralisé pour M qui ne dépend pas à équivalence près du choix de la trivialisation locale.
Il reste à vérifier que les conditions de compatibilité au feuilletage sont remplies. Notons $\Psi\mathcal{A}$ le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de M engendré par les flots des $p(Y)$ où Y est une section locale de $\mathcal{A}$. D'après P. Stefan [Ste74], la feuille F_x de $\mathcal{F}$ passant par $x \in M$ est l'ensemble $\{\varphi(x)\ ;\ \varphi \in \Psi\mathcal{A}\}$. On déduit alors que $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ définit $\mathcal{F}$ et que pour tout $i \in I$ et $x \in O_i$, la restriction de β_i à $G_{i,x}$ est une submersion en x sur F_x. □
Preuve du théorème 3 Soit $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{G_i \underset{\beta_i}{\overset{\alpha_i}{\rightrightarrows}} O_i,\ i \in I\}$ un atlas généralisé sur M construit à partir de l'intégration locale de $\mathcal{A}$, comme dans la proposition ci-dessus. La Proposition 8 assure qu'il existe un quasi-graphoïde local $G_\mathcal{A}$ de base M tel que $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ soit un sous-atlas de $\{G_\mathcal{A}\}$. Par construction $\{G_\mathcal{A}\}$ intègre $\mathcal{A}$.
Si H est un autre quasi-graphoïde local de base M intégrant $\mathcal{A}$ en utilisant l'application exponentielle de H (cf. 4.1), on construit, pour tout $i \in I$ un isomorphisme de graphe d'un voisinage V_i de O_i dans H vers G_i. Ainsi les atlas généralisés $\{H\}$, $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ et $\{G_\mathcal{A}\}$ sont équivalents. □

4.6 Exemples

1- Algébroïde de Lie de feuilletage régulier
Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie de dimension k et de fléchage p sur une variété de dimension n. On suppose que $0 < k \leq n$ et que p est injectif. L'image par p de $\mathcal{A}$ est donc un feuilletage régulier $\mathcal{F}$ sur M de dimension k.
Si O est un ouvert trivialisant pour $\mathcal{F}$, on peut trouver une base locale $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$ de section de $\mathcal{A}$ au-dessus de O telle que $[Y_i, Y_j] = 0$ pour tout i, j.
On a donc une action locale et libre de $\mathbb{R}^k$ sur O. Par intégration locale de $\mathcal{A}$ au-dessus de O, on obtient Ω le groupoïde local de cette action sur O. Alors Ω

est isomorphe (au voisinage des unités) au groupoïde de la relation d'équivalence régulière sur O induite par le feuilletage $\mathcal{F}$.

2- Algébroïde de Lie d'un quasi-graphoïde

Soit $\mathcal{A}G$ l'algébroïde de Lie d'un quasi-graphoïde G sur M de source α et de but β. Soient O un ouvert de M et $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$ une base locale de section de $\mathcal{A}G$ au-dessus de O. Notons $\Omega \underset{\beta_0}{\overset{\alpha_0}{\rightrightarrows}} O$ le morceau de quasi-graphoïde obtenu par intégration locale de $\mathcal{A}G$ au-dessus de O. La carte distinguée associée à $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$ est une application différentiable $f : \Omega \to G$ qui est un difféomorphisme sur son image et telle que $\alpha \circ f = \alpha_0$ et $\beta \circ f = \beta_0$. Par conséquent, puisque dans le cadre des quasi-graphoïdes, la structure de groupoïde (local) ne dépend que des applications source et but, f est un isomorphisme de groupoïde différentiable local sur son image.
Ainsi, par la méthode précédente, on obtient un atlas généralisé sur M équivalent à l'atlas constitué du seul élément G.

3- Algèbre de Lie de champs de vecteurs

Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Lie de dimension finie k de champs de vecteurs sur une variété M. On considère

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} = M \times \mathcal{H} & \xrightarrow{p} & TM \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \downarrow \\ M & = & M \end{array}$$

où $p : (x, X) \in M \times \mathcal{H} \mapsto X(x)$ est supposé injectif au-dessus d'un ouvert dense.

Le fibré $\mathcal{A}$ est naturellement muni d'une structure d'algébroïde de Lie trivial sur M de dimension k et de fléchage p. Puisque le crochet sur $\mathcal{A}$ est indépendant de la première variable, il en est de même des champs verticaux sur $\mathcal{A}$. Ainsi, l'intégration locale fait apparaître une structure de groupe de Lie local H sur un voisinage de 0 dans $\mathcal{H}$ qui intègre l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ ainsi qu'une action locale et presque libre de H sur M. Le groupoïde local que l'on obtient par intégration locale de $\mathcal{A}$ est alors simplement le groupoïde local de cette action. Signalons que P. Dazord a montré dans [Daz97] que les algébroïdes de Lie associées aux actions locales de groupe de Lie sont intégrables.

Par exemple considérons dans le plan $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, l'algèbre de Lie engendrée par les deux champs de vecteurs donnés en coordonnées polaires par : $X_1 = r\frac{\partial}{\partial r}$ et $X_2 = r\frac{\partial}{\partial \theta}$.
La méthode précédente fournit :
- une structure de graphe

$$\mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}^2 \ ,$$

où $\alpha(z, t_1, t_2) = z$ et $\beta(z, t_1, t_2) = e^{t_1 + it_2|z|}.z$;
- une structure de groupe de Lie H non commutatif sur $\mathbb{R}^2$, le groupe affine, admettant $(0, 0)$ pour élément neutre, $(t_1, t_2).(t_3, t_4) = (t_1 + t_3, t_2 + t_4 e^{t_1})$ pour produit et

$(t_1, t_2)^{-1} = (-t_1, -t_2 e^{-t_1})$ pour inversion;
- si $B_\lambda = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < \lambda\}$, alors $\mathbb{R}\times]-\frac{\pi}{\lambda}, \frac{\pi}{\lambda}[\subset H$ agit localement et librement sur $B_\lambda \setminus \{0\}$ par $(t_1, t_2).z := e^{t_1 + it_2|z|}.z$.
On récupère alors $\Omega_\lambda \subset B_\lambda \times \mathbb{R}\times]-\frac{\pi}{\lambda}, \frac{\pi}{\lambda}[\subset \mathbb{C} \times H$, le morceau de quasi-graphoïde sur B_λ associé à cette action.

Les exemples qui suivent sont liés au comportement de l'intégration locale relativement à des constructions particulières d'algébroïdes de Lie. Ils nous seront très utiles dans la suite.

4- Produit d'algébroïdes de Lie
Soient $\mathcal{A}_1$ (resp. $\mathcal{A}_2$) un algébroïde de Lie sur M (resp. N) de fléchages p_1 (resp. p_2). Alors $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ est naturellement muni d'une structure d'algébroïde de Lie sur $M \times N$ de fléchage (p_1, p_2). Si Ω_1 (resp. Ω_2) est le groupoïde local sur O_1 ouvert de M (resp. O_2 ouvert de N) obtenu par intégration locale de $\mathcal{A}_1$ au-dessus de O_1 (resp. $\mathcal{A}_2$ au-dessus de O_2) alors $\Omega_1 \times \Omega_2$ est le groupoïde local sur $O_1 \times O_2$ obtenu par intégration locale de $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ au-dessus de $O_1 \times O_2$.

5- Produit fibré d'algébroïdes de Lie
Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux algébroïdes de Lie sur M de fléchages respectifs p_1 et p_2, injectifs au-dessus d'un ouvert dense. On suppose en outre que le morphisme de fibrés sur M

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 & \longrightarrow & TM \\ X + Y & \mapsto & p_1(X) - p_2(Y) \end{array}$$

est de rang constant. Alors $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \oplus_{TM} \mathcal{A}_2$, le produit fibrés de $\mathcal{A}_1$ et A_2 au-dessus de TM est naturellement munit d'une structure d'algébroïde de Lie sur M.
Si $\Omega_1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} O$ (resp. $\Omega_2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightrightarrows}} O$) est le groupoïde local sur O ouvert de M obtenu par intégration locale de $\mathcal{A}_1$ au-dessus de O (resp. $\mathcal{A}_2$ au-dessus de O), alors l'hypothèse ci-dessus assure qu'il existe un voisinage ouvert $\tilde{\Omega}_1$ de O dans Ω_1 ainsi qu'un voisinage ouvert $\tilde{\Omega}_2$ de O dans Ω_2 tels que les applications $(\alpha_1, \beta_1) : \tilde{\Omega}_1 \to O \times O$ et $(\alpha_2, \beta_2) : \tilde{\Omega}_2 \to O \times O$ sont transverses. Le produit fibré $\tilde{\Omega}_1 \times_{O\times O} \tilde{\Omega}_2$ est un groupoïde local sur O isomorphe au groupoïde local obtenu par intégration locale de $\mathcal{A}$ au-dessus de O.

6- Action de $\mathbb{R}$ et algébroïde de Lie
6-1 Soient M une variété et $\mathcal{A} = TM$. On a déjà vu (cf. exemple 1) que si $\mathcal{A}$ est muni de la structure d'algébroïde de Lie sur M dont le fléchage est l'identité alors l'intégration locale de $\mathcal{A}$ sur O, un ouvert de M, donne le groupoïde des couples $O \times O$ sur O.

Supposons maintenant qu'il existe une variété N tel que $M = N \times \mathbb{R}$.
On pose encore $\mathcal{A}_1 = TM = TN \times T\mathbb{R}$ et on munit $\mathcal{A}_1$ de la structure d'algébroïde

de Lie sur M dont le fléchage est donné par

$$\begin{array}{rccc} p_1 : & \mathcal{A}_1 = TN \times T\mathbb{R} & \longrightarrow & T(N \times \mathbb{R}) = TN \times T\mathbb{R} \\ & ((x,v),(t,\lambda)) & \mapsto & ((x,v),(t,t\lambda)) \end{array} .$$

On vérifie alors que l'intégration locale de $\mathcal{A}_1$ sur $O \times \mathbb{R}$, ouvert de $M = N \times \mathbb{R}$, fournit le groupoïde $O \times O \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \rightrightarrows O \times \mathbb{R}$, produit du groupoïde des couples sur O et du groupoïde de l'action de $\mathbb{R}_*^+$ sur $\mathbb{R}$ par multiplication.

On verra au chapitre 6 comment cette construction, apparement triviale, intervient dans l'étude des sous-variétés de codimension 1.

6-2 L'algébroïde de Lie adiabatique Soit $\mathcal{A}$ un algébroïde de Lie sur M de dimension k, de fléchage p et de crochet $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{A}}$.
L'algébroïde de Lie adiabatique, $\mathcal{A}_{ad}$, associée à $\mathcal{A}$ [NWX97], est un algébroïde de Lie sur $M \times \mathbb{R}$ où $\mathcal{A}_{ad} := \mathcal{A} \times \mathbb{R}$ est le tiré en arrière de $\mathcal{A}$ au-dessus de $pr_1 : M \times \mathbb{R} \to M$, le fléchage étant donné par

$$\begin{array}{rccc} p_{ad} : & \mathcal{A}_{ad} = \mathcal{A} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & T(M \times \mathbb{R}) = TM \times T\mathbb{R} \\ & (v,t) & \mapsto & (tp(v),(t,0)) \end{array} .$$

Le crochet est donné par $[X,Y]_{\mathcal{A}_{ad}}(x,t) = (t[X,Y]_{\mathcal{A}}(x),t)$, où, si X est une section de $\mathcal{A}_{ad}$, on note encore X la section correspondante de $\mathcal{A}$.
On suppose que p est injectif au-dessus d'un ouvert dense, il en est donc de même de p_{ad}.

Remarquons tout d'abord que si N est une variété, N peut être considérée comme un algébroïde de Lie sur N de dimension 0, le fléchage étant la section nulle du fibré TN. On dira que c'est *l'algébroïde nul* associé à N. On vérifie immédiatement que le groupoïde qui intègre cet algébroïde est simplement le groupoïde trivial $N \rightrightarrows N$, admettant l'identité pour source et but.
L'application

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}_{ad}\,|_{M\times\mathbb{R}_*} = \mathcal{A} \times \mathbb{R}_* & \longrightarrow & \mathcal{A} \times \mathbb{R}_* \\ (v,t) & \mapsto & (tv,t) \end{array}$$

est un isomorphisme d'algébroïdes de Lie de la restriction de $\mathcal{A}_{ad}$ à $M \times \mathbb{R}_*$ à l'algébroïde de Lie produit de $\mathcal{A}$ et de l'algébroïde nulle de $\mathbb{R}_*$.
Soit O un ouvert de M et $\Omega \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} O$ le groupoïde local sur O obtenu par intégration locale de $\mathcal{A}$ sur O. Alors, d'après ce qui précède, le groupoïde local obtenu par intégration locale de $\mathcal{A}_{ad}$ sur $O \times \mathbb{R}_*$ est simplement le groupoïde local produit $\Omega \times \mathbb{R}_* \rightrightarrows O \times \mathbb{R}_*$.

Pour étudier ce qui se passe au voisinage de $O \times \{0\}$ on reprend les notations du théorème 4. La famille $B = \{Y_1, \ldots, Y_k\}$ est une base de sections de la restriction de

$\mathcal{A}$ à O, on note $\{Z_1, \ldots, Z_k\}$ la base de champs de vecteurs verticaux sur $\Omega \subset O \times \mathbb{R}^k$ correspondant et h_i^t le flot de Z_i. On note $\{\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_k\}$ la base de sections locale de $\mathcal{A}_{ad}$ sur $O \times \mathbb{R}$ induite par B. On obtient

$$\Omega_{ad} = \Omega \times]-1,1[\underset{\tilde{\beta}}{\overset{\tilde{\alpha}}{\rightrightarrows}} O \times]-1,1[\ ,$$

où $\tilde{\alpha}(x,\xi,\lambda) = (\alpha(x,\xi),\lambda) = (x,\lambda)$ et $\tilde{\beta}(x,\xi,\lambda) = (\beta(x,\lambda\xi),\lambda)$.
Pour tout $i = 1, \ldots, k$, on vérifie que le champ vertical sur Ω_{ad} correspondant à $\tilde{Y}_i$ est défini par $\tilde{Z}_i : (x,\xi,\lambda) \mapsto (Z_i(x,\lambda\xi),0) \in T_{x,\xi}\Omega \times T_\lambda\mathbb{R}$. Notons $\tilde{h}_i^t$ le flot de $\tilde{Z}_i$. On vérifie alors immédiatement que, pour $(x,\xi,\lambda) \in \Omega_{ad}$,

$$\tilde{h}_i^t(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} (\frac{1}{\lambda}h_i^{\lambda t}(x,\lambda\xi),\lambda) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ (x,\xi + te_i,0) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

où e_i désigne le $i$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^k$.

Finalement si on note $*_0$ et $(\cdot)_0^{-1}$ le produit et l'inverse dans Ω, le produit et l'inverse dans Ω_{ad} sont donnés, lorsque cela a un sens par

$$(\beta(x,\lambda\xi_2),\xi_1,\lambda).(x,\xi_2,\lambda) = \begin{cases} (\frac{1}{\lambda}(\beta(x,\lambda\xi_2),\lambda\xi_1) *_0 (x,\lambda\xi_2),\lambda) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ (x,\xi_1+\xi_2,0) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} ,$$

$$(x,\xi,\lambda)^{-1} = \begin{cases} (\frac{1}{\lambda}(x,\lambda\xi)_0^{-1},\lambda) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ (x,-\xi,0) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} .$$

6-3 Algébroïde de Lie adiabatique partiel Soient $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ deux algébroïdes de Lie sur M de fléchages respectifs p_1, p_2, de crochets $[\cdot,\cdot]_1$, $[\cdot,\cdot]_2$ et de dimension k et l. Soit $\mathcal{A}$ l'algébroïde $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ sur M de fléchage $p := p_1 + p_2$. On suppose que p, p_1 et p_2 sont injectifs au-dessus d'un ouvert dense.
L'algébroïde de Lie adiabatique partielle, $\mathcal{A}_{adp}$ associée à $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ est un algébroïde de Lie sur $M \times \mathbb{R}$ où $\mathcal{A}_{adp} := \mathcal{A} \times \mathbb{R} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \times \mathbb{R}$ est le tiré en arrière de $\mathcal{A}$ au-dessus de $pr_1 : M \times \mathbb{R} \to M$, le fléchage étant donné par

$$\begin{array}{rccc} p_{adp} : & \mathcal{A}_{adp} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & T(M \times \mathbb{R}) = TM \times T\mathbb{R} \\ & (v_1,v_2,t) & \mapsto & (p_1(v_1) + tp_2(v_2),(t,0)) = (p(v_1+tv_2),(t,0)) \end{array} .$$

Le crochet est donné par $[(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)]_{\mathcal{A}_{adp}}(x,t) = ([X_1,Y_1]_1(x), t[X_2,Y_2]_2(x),t)$.
Comme précédemment l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_{adp}\,|_{M\times\mathbb{R}_*} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \times \mathbb{R}_* & \longrightarrow & \mathcal{A} \times \mathbb{R}_* \\ (v_1,v_2,t) & \mapsto & (v_1,tv_2,t) \end{array}$$

est un isomorphisme d'algébroïdes de Lie de la restriction de $\mathcal{A}_{adp}$ à $M \times \mathbb{R}_*$ à l'algébroïde de Lie produit de $\mathcal{A}$ et de l'algébroïde nulle de $\mathbb{R}_*$.
Soit O un ouvert de M et $\Omega \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} O$ le groupoïde local sur O obtenu par intégration locale de $\mathcal{A}$ sur O. Alors le groupoïde local obtenu par intégration locale de $\mathcal{A}_{adp}$ sur $O \times \mathbb{R}_*$ est le groupoïde local produit $\Omega \times \mathbb{R}_* \rightrightarrows O \times \mathbb{R}_*$.
Si l'on note $\Omega_1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} O$ (resp. $\Omega_2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightrightarrows}} O$) les groupoïdes locaux obtenus par intégration locale de $\mathcal{A}_1$ (resp. $\mathcal{A}_2$) sur O, on vérifie que le groupoïde local obtenu par intégration local de $\mathcal{A}_{adp}$ au-dessus de $O \times]-1,1[$ est donné par

$$\Omega_{adp} \underset{\tilde{\beta}}{\overset{\tilde{\alpha}}{\rightrightarrows}} O$$

où $\Omega_{adp} = \{(x,\xi,\tau,\lambda) \in O \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \times]-1,1[\ ;\ (x,\lambda\tau) \in \Omega_2\ ,\ (\beta_2(x,\lambda\tau),\xi) \in \Omega_1\}$,

$$\tilde{\alpha}(x,\xi,\tau,\lambda) = (x,\lambda) \ et\ \tilde{\beta}(x,\xi,\tau,\lambda) = (\beta(x,\xi,\lambda\tau),\lambda) = (\beta_1(\beta_2(x,\lambda\tau),\xi),\lambda).$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $(x,\xi,\tau,\lambda) \in \Omega_{adp}$ on note $L_t.(x,\xi,\tau,\lambda) = (x,\xi,t\tau,\lambda)$, on vérifie que le produit et l'inversion sur Ω_{adp} sont donnés lorsque cela a un sens par
$(\beta_1(\beta_2(x,\lambda\tau_2),\xi_2),\xi_1,\tau_1,\lambda).(x,\xi_2,\tau_2,\lambda) =$

$$\begin{cases} (L_{\frac{1}{\lambda}}((\beta_1(\beta_2(x,\lambda\tau_2),\xi_2),\xi_1,\lambda\tau_1) * (x,\xi_2,\lambda\tau_2),\lambda) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ ((\beta_1(x,\xi_2),\xi_1) *_1 (x,\xi_2),\tau_1+\tau_2,0) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases},$$

$$(x,\xi,\tau,\lambda)^{-1} = \begin{cases} (L_{\frac{1}{\lambda}}(x,\xi,\lambda\tau)_0^{-1},\lambda) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ ((x,\xi)_1^{-1},-\tau,0) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases},$$

où $*$ (resp. $*_1$) désigne le produit et $(\cdot)_0^{-1}$ (resp. $(\cdot)_1^{-1}$) désigne l'inversion dans Ω (resp. Ω_1).
On remarquera que l'on est ici dans une situation semblable à celle rencontrée dans les éclatements d'immersion au chapitre 3, c'est-à-dire que l'on a une action locale de Ω_1 sur $\mathcal{A}_2$

$$(\gamma,v) = ((x,\xi),(\beta_1(x,\xi),\tau)) \mapsto \gamma.v := (x,\tau)$$

pour $(x,\xi,\tau) \in \Omega$. Alors la restriction de Ω_{adp} à $O \times \{0\}$ s'identifie au groupoïde local de l'action $\Omega_{adp}\ |_{O\times\{0\}} = \{(x,\xi,\tau) \in \Omega\} \subset \Omega_1 \times_{\alpha_1} \mathcal{A}_2$ avec pour produit $(\gamma_1,v).(\gamma_2,w) = (\gamma_1.\gamma_2,\gamma_2.v+w)$ et pour inverse $(\gamma,v)^{-1} = (\gamma^{-1},-\gamma^{-1}.v)$.

Chapter 5

Groupoïde des germes d'isomorphismes Morita locaux

Nous allons résoudre ici le *problème global*. Etant donné un *atlas généralisé* sur une variété M, c'est-à-dire la donnée d'un recouvrement ouvert $\{U_i, i \in I\}$ de M et d'une famille de morceaux de quasi-graphoïdes $\{G_i \rightrightarrows U_i, i \in I\}$ ayant de "bonnes propriétés" de recollement, ou de façon équivalente un quasi-graphoïde local de base M, il s'agit de construire le "plus petit" groupoïde différentiable contenant cette famille ou ce quasi-graphoïde local.
Cette construction fait intervenir la notion d'équivalence de Morita entre groupoïdes que nous rappelons dans le premier paragraphe. Puis nous illustrons l'idée de la construction du groupoïde associé à un atlas généralisé dans le cas des feuilletages réguliers. Nous donnons ensuite cette construction dans le cas général.

5.1 Equivalence de Morita

Les équivalences de Morita entre groupoïdes ont été introduites par Jean Renault [Ren82] et apparaissent dans de nombreux travaux, citons notamment [HS87, CS84, Hae84, Hec93, LG94, MP97]. Nous rappelons ici cette notion.

On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "p"'] & G \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] \\ & G^{(0)} \end{tikzcd}$$

où $p : Z \to G^{(0)}$ est une application différentiable entre variétés et $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} G^{(0)}$ un groupoïde différentiable.

Définition 8 *Une action différentiable à droite de G sur Z relativement à p est la donnée d'une application différentiable surjective*

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & Z \times_{p,\beta} G & \longrightarrow & Z \\ & (z,\gamma) & \mapsto & \Psi(z,\gamma) := z * \gamma \end{array}$$

où $Z \times_{p,\beta} G = \{(z,\gamma) \in Z \times G \ ; \ p(z) = \beta(\gamma)\}$ est le produit fibré de Z et G au-dessus de $G^{(0)}$, et qui vérifie les propriétés suivantes:
1- $p(z * \gamma) = \alpha(\gamma)$,
2- $(z * \gamma_1) * \gamma_2 = z * (\gamma_1 \cdot \gamma_2)$,
3- $z * p(z) = z$ pour tout $z \in Z$.

On dira que l'action de G sur Z est *libre* lorsque $z * \gamma = z$ si et seulement si $\gamma \in G^{(0)}$. On dira que l'action est *propre* si l'application $\Upsilon : Z \times_{p,\beta} G \to Z \times Z, \ (z,\gamma) \mapsto (z, z * \gamma)$ est propre.

On définit de façon analogue les actions locales à gauche.

Remarque Lorsque $G \rightrightarrows G^{(0)}$ agit librement (à gauche) sur Z relativement à p, les orbites de l'action sont les feuilles d'un feuilletage régulier $\mathcal{F}_G$ sur Z. Notons $Z \times_{G^{(0)}} \mathcal{A}G$ le produit fibré de Z et de l'algébroïde de Lie $\mathcal{A}G$ de G au-dessus de $G^{(0)}$. Il s'agit d'un sous-fibré du fibré tangent $T(G \times_{\alpha,p} Z) \simeq TG \times_{(\alpha)_* = (p)_*} TZ$. Si Ψ désigne l'action, on note $(\tilde{\Psi})_*$ la restriction de la différentielle $(\Psi)_*$ de Ψ à $Z \times_{G^{(0)}} \mathcal{A}G$; alors le tangent de $\mathcal{F}_G$ est $T\mathcal{F}_G = (\tilde{\Psi})_*(Z \times_{G^{(0)}} \mathcal{A}G)$.

Soient $G \rightrightarrows G^{(0)}$ et $H \rightrightarrows H^{(0)}$ deux groupoïdes différentiables. Un *isomorphisme généralisé*, f de H sur G est défini par son *graphe* :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & Z_f \arrow[dl, "b_f"'] \arrow[dr, "a_f"] & H \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ G^{(0)} & & H^{(0)} \end{tikzcd}$$

Il s'agit de la donnée d'une variété différentiable Z_f munie de deux submersions surjectives $a_f : Z_f \longrightarrow H^{(0)}$ et $b_f : Z_f \longrightarrow G^{(0)}$ ainsi que d'une action libre et propre à gauche de G sur Z_f et d'une action libre et propre à droite de H sur Z_f. Le tout satisfaisant aux propriétés suivantes :
1- Pour tout $\gamma \in G$, $z \in Z_f$ et $\eta \in H$ tels que $\gamma * z$ et $z * \eta$ soient définis on a les égalités :

$$a_f(\gamma * z) = a_f(z), \ b_f(z * \eta) = b_f(z) \text{ et}$$
$$(\gamma * z) * \eta = \gamma * (z * \eta).$$

2- L'action de G (resp. H) est transitive sur les fibres de a_f (resp. b_f).
Alors Z/G et Z/H ont un sens et a_f induit un difféomorphisme entre Z/G et $H^{(0)}$ et b_f induit un difféomorphisme entre Z/H et $G^{(0)}$.

Deux tels graphes $(b_f, a_f) : Z_f \to G^{(0)} \times H^{(0)}$ et $(b_g, a_g) : Z_g \to G^{(0)} \times H^{(0)}$ sont *équivalents* s'il existe un isomorphisme de graphes de Z_f vers Z_g qui entrelace les actions de G et de H.

Définition 9 *La classe d'équivalence d'un isomorphisme généralisé f de H sur G est appelée une équivalence de Morita.*

Exemples :
1- Soit $f : H \to G$ un isomorphisme (strict) de groupoïdes différentiables. Notons $Z_f = \{(f(\gamma), \gamma)\ ;\ \gamma \in H\}$. Alors f induit une équivalence de Morita entre H et G admettant pour graphe $(\beta_G \circ pr_1, \alpha_H \circ pr_2) : Z_f \to G^{(0)} \times H^{(0)}$.

2- Soient $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} G^{(0)}$ un groupoïde différentiable et T une sous-variété fermée de $G^{(0)}$ rencontrant toutes les orbites de G. Alors $(\beta, \alpha)|_{G_T} : G_T \to G^{(0)} \times T$ est le graphe d'une équivalence de Morita entre $G_T^T \rightrightarrows T$, la restriction de G à T et G.

3- Soient $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} G^{(0)}$ un groupoïde différentiable et $p : N \to G^{(0)}$ une submersion surjective entre variétés. On note

$$GN = \{(y, \gamma, y') \in N \times G \times N\ ;\ \alpha(\gamma) = p(y')\ et\ \beta(\gamma) = p(y)\}\ .$$

$GN \underset{pr_3}{\overset{pr_1}{\rightrightarrows}} N$ est naturellement muni d'une structure de groupoïde différentiable Morita équivalent à G.

5.2 Idée de la construction

Comme nous l'avons déjà remarqué dans le chapitre 1, lorsque $(M, \mathcal{F})$ est un feuilletage régulier, le *problème local* est trivial : si $U = P \times T$ est un ouvert distingué de M, on considère le groupoïde $G_U = P \times P \times T \rightrightarrows U$, graphe de la relation d'équivalence régulière sous-jacente.
Alors G_U est un sous-groupoïde ouvert du groupoïde d'holonomie du feuilletage $Hol(M, \mathcal{F})$.
Ainsi, si $\{U_i = P_i \times T_i;\ i \in I\}$ est un recouvrement de M par des cubes distingués et $\mathcal{U} = \{G_i = P_i \times P_i \times T_i \rightrightarrows U_i;\ i \in I\}$ l'atlas généralisé associé, alors $\{G_i,\ i \in I\}$ s'identifie à une famille d'ouverts de $Hol(M, \mathcal{F})$ et $\bigcup_{i \in I} G_i$ à un voisinage ouvert des unités M dans $Hol(M, \mathcal{F})$.

On peut se demander comment construire à partir de $\mathcal{U}$ le groupoïde d'holonomie $Hol(M, \mathcal{F})$ et quel sens donner alors à l'holonomie.

Avant de répondre à cette question, effectuons quelques rappels.
Soient c un chemin tangent à $\mathcal{F}$ allant de x à y et $U_x = P_x \times T_x$ (resp. $U_y = P_y \times T_y$)

un voisinage distingué de x (resp. y). Autrement dit, le feuilletage $\mathcal{F}_{U_x}$ induit par $\mathcal{F}$ sur U_x est trivial, P_x est une plaque de U_x et T_x est une sou-variété passant par x transverse à $\mathcal{F}_{U_x}$ et isomorphe au quotient $U_x/\mathcal{F}_{U_x}$, de sorte que U_x s'identifie au produit $P_x \times T_x$.
Quitte à restreindre les transversales locales T_x et T_y, le chemin c induit un difféomorphisme d'holonomie $h_c : T_x \to T_y$. Si c_1 est un autre chemin tangent de source x et de but y et h_{c_1} le difféomorphisme d'holonomie correspondant, alors dire que c et c_1 ont même holonomie signifie que les germes en x de h_c et h_{c_1} sont égaux.
En d'autres termes, si on note $T = \sqcup_{i\in I} T_i \subset M$, les éléments du groupoïde d'holonomie de $(M, \mathcal{F})$ sont les éléments de la forme $\gamma = (x_0, h_{t_0}, y_0)$, où h_{t_0} est le germe en $t_0 \in T_i$ du difféomorphisme d'holonomie h d'un chemin tangent à $\mathcal{F}$ de source t_0 et de but $h(t_0) \in T_j$, $(x_0, t_0) \in P_i \times T_i$ et $(y_0, h(t_0)) \in P_j \times T_j$.
La structure de variété est alors induite par la topologie usuelle des germes de difféomorphismes. Plus précisément l'application suivante définit une carte autour de $\gamma = (x_0, h_{t_0}, y_0)$:

$$\begin{array}{rcl} P_i \times T_i \times P_j & \to & Hol(M, \mathcal{F}) \\ (x, t, y) & \mapsto & (x, h_t, y) \ . \end{array}$$

En considérant le pseudogoupe des difféomorphismes locaux de T, on construit de façon analogue un groupoïde différentiable $G(M, \mathcal{F})$ de base M dont les éléments sont de la forme (x, h_t, y), où h_t est le germe en $t \in T_i$ du difféomorphisme local $h : T_i \to T_j$, $(x, t) \in P_i \times T_i$ et $(y, h(t)) \in P_j \times T_j$.
On vérifie aisément que $Hol(M, \mathcal{F})$ est un sous-groupoïde unifère ouvert de $G(M, \mathcal{F})$. Puisque $Hol(M, \mathcal{F})$ est α-connexe, une conséquence immédiate est que $Hol(M, \mathcal{F})$ est la composante α-connexe de $G(M, \mathcal{F})$.
On est donc ramené à étudier les difféomorphismes locaux de T. Etant donnés $i, j \in I$, on voudrait définir les difféomorphismes (locaux) de T_i sur T_j à partir des données de $G_i \rightrightarrows U_i$ et $G_j \rightrightarrows U_j$.
Pour ce faire, on considère les équivalences de Morita. Une équivalence de Morita entre deux groupoïdes peut se comprendre comme un "isomorphisme généralisé" entre les espaces d'orbites correspondants. C'est donc particulièrement bien adapté à notre cas.
En particulier, si $h : T_i \to T_j$ est un difféomorphisme alors le graphe

$$((pr_1, pr_2), (pr_3, h \circ pr_2)) : P_i \times T_i \times P_j \to U_i \times U_j$$

induit une équivalence de Morita de G_i sur G_j.En fait toute équivalence de Morita entre G_i et G_j est de cette forme.

Proposition 16 *Il existe une correspondance bijective entre d'une part l'ensemble des équivalences de Morita entre les groupoïdes $G_i = P_i \times P_i \times T_i \rightrightarrows P_i \times T_i = U_i$ et*

$G_j = P_j \times P_j \times T_j \rightrightarrows P_j \times T_j = U_j$ et d'autre part l'ensemble des difféomorphismes de T_i sur T_j.

Preuve On vérifie immédiatement qu'il y a une correspondance bijective entre l'ensemble des difféomorphismes de T_i sur T_j et l'ensemble des équivalences de Morita du groupoïde trivial $T_i \rightrightarrows T_i$ sur le groupoïde trivial $T_j \rightrightarrows T_j$.
Par ailleurs, il existe une équivalence de Morita du groupoïde $G_k \rightrightarrows U_k$ sur le groupoïde trivial $T_k \rightrightarrows T_k$ admettant pour graphe $(pr_2, id) : P_k \times T_k = U_k \to T_k \times U_k$, $k = i, j$.
La composition des équivalences de Morita permet alors de conclure. □

Remarque Si h est un difféomorphisme de T_i sur T_j, le graphe de l'équivalence Morita correspondante est une carte du groupoïde $G(M, \mathcal{F})$.

Ainsi, pour construire le groupoïde d'holonomie de $(M, \mathcal{F})$ à partir de l'atlas généralisé, nous allons dans un premier temps définir les équivalences de Morita locales entre groupoïdes locaux, ainsi que leurs germes. On considère alors le *pseudogroupe local des équivalences de Morita locales* entre éléments de l'atlas généralisé et $G(M, \mathcal{F})$ apparaît comme le groupoïde des germes de ce pseudogoupe. Le groupoïde d'holonomie, $Hol(M, \mathcal{F})$ est alors simplement la composante α-connexe de $G(M, \mathcal{F})$.
Il n'est donc pas nécessaire de posséder des transversales locales pour construire un tel groupoïde. Si l'on se donne un feuilletage presque régulier muni d'un atlas généralisé, alors ce dernier permet de pallier à la non trivialité locale du feuilletage. Ainsi, cette construction, que nous décrivons soigneusement dans la suite, s'étend à tout feuilletage presque régulier muni d'un atlas généralisé.

5.3 Pseudogroupe local d'isomorphismes Morita locaux

5.3.1 Définitions

On étend la notion d'équivalence de Morita entre groupoïdes différentiables aux groupoïdes locaux. Les définitions qui suivent sont analogues à celles rappelées au paragraphe 5.1, la différence réside dans le fait qu'une action de groupoïde local ne peut pas être définie globalement, il faut donc prendre quelques précautions pour étendre ces notions au contexte local.

Soient $R \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A$ un groupoïde différentiable local, Z une variété et $p : Z \to A$ une application différentiable.

Définition 10 *Une action locale à droite de R sur Z relativement à p est la donnée d'une application différentiable surjective*

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & D_\Psi & \longrightarrow & Z \\ & (z,r) & \mapsto & \Psi(z,r) := z * r \ , \end{array}$$

où D_Ψ est un ouvert du produit fibré $Z \times_{p,\beta} R = \{(z,r) \in Z \times R \ ; \ p(z) = \beta(r)\}$, qui vérifie les propriétés suivantes :
1- $p(z * r) = \alpha(r)$, pour tout $(z,r) \in D_\Psi$,
2- si $(z, r_1) \in D_\Psi$, si le produit $r_1.r_2$ est défini et si l'une des expressions suivantes $(z * r_1) * r_2$ ou $z * (r_1 \cdot r_2)$ est définie alors l'autre l'est aussi et elles coïncident,
3- pour tout $z \in Z$, $(z, p(z)) \in D_\Psi$ et $z * p(z) = z$.

On dira que l'action de R sur Z est *libre* lorsque $z * r = z$ si et seulement si $r \in A$. On dira que l'action est *localement propre* si pour tout $z \in Z$, il existe un voisinage ouvert V_z de z dans Z tel que si $\Upsilon : D_\Psi \longrightarrow Z \times Z$ est l'application définie par $\Upsilon(z,r) = (z, z * r)$ alors la restriction de Υ à $D_\Psi \cap \Upsilon^{-1}(V_z \times V_z)$ est propre.

On définit de façon analogue les actions locales à gauche.

Remarque Comme dans le cas des actions de groupoïde, une action locale (à droite) et libre de R sur Z relativement à p induit un feuilletage régulier $\mathcal{F}_R$ sur Z. Le tangent de $\mathcal{F}_R$ s'obtient de la façon suivante :
Si Ψ désigne l'action et D_Ψ son domaine, on note $(\Psi)_* : TD_\Psi \to TZ$ la différentielle de Ψ. Soit $F = \{(z, 0; r, v) \in TZ \times TR \ ; \ p(z) = \beta(r) \ et \ T\alpha(v) = 0\}$. Il s'agit d'un fibré vectoriel sur $Z \times_{p,\beta} R$ dont la restriction $F|_{\mathcal{D}_\Psi}$ à $\mathcal{D}_\Psi$ s'identifie à un sous-fibré du tangent TD_Ψ. Le fibré tangent à $\mathcal{F}_R$ est simplement $(\Psi)_*(F|_{\mathcal{D}_\Psi})$.

Soient $R_0 \rightrightarrows A$ et $R_1 \rightrightarrows B$ deux groupoïdes différentiables locaux. Un *isomorphisme local* f de R_0 sur R_1 est défini par son *graphe* :

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & Z_f \arrow[dl, "b_f"'] \arrow[dr, "a_f"] & R_0 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ B & & A \end{tikzcd}$$

Il s'agit de la donnée d'une variété différentiable Z_f munie de deux submersions surjectives $a_f : Z_f \longrightarrow A$ et $b_f : Z_f \longrightarrow B$ ainsi que d'une action locale libre et localement propre à gauche de R_1 sur Z_f et d'une action locale libre et localement propre à droite de R_0 sur Z_f. Les propriétés suivantes doivent aussi être vérifiées.
1- Pour tout $r_0 \in R_0$, $z \in Z_f$ et $r_1 \in R_1$ tels que $r_1 * z$ et $z * r_0$ sont définis, alors $a_f(r_1 * z) = a_f(z)$, $b_f(z * r_0) = b_f(z)$ et si l'une des expressions $(r_1 * z) * r_0$ ou $r_1 * (z * r_0)$ est définie, l'autre l'est aussi et elles coïncident.
2- Pour tout $z \in Z_f$, il existe un voisinage ouvert V_z de z dans Z_f tel que l'action de R_0 (resp. R_1) est transitive sur les fibres de b_f (resp. a_f) restreintes à V_z. Alors

V_z/R_0 et V_z/R_1 ont un sens et b_f induit un difféomorphisme entre V_z/R_0 et $b_f(V_z)$ et a_f induit un difféomorphisme entre V_z/R_1 et $a_f(V_z)$.

Deux tels graphes $(b_f, a_f) : Z_f \to B \times A$ et $(b_g, a_g) : Z_g \to B \times A$ sont *équivalents* s'il existe un isomorphisme de graphes de Z_f vers Z_g qui entrelace les actions de R_0 et de R_1.

Définition 11 *La classe d'équivalence d'un isomorphisme local f de R_0 sur R_1 est appelé un isomorphisme Morita local et noté $f : R_0 \curvearrowright R_1$. On appelle graphe de f tout représentant de cette classe.*

5.3.2 Structure de Pseudogroupe local

On montre ici que l'ensemble des isomorphismes Morita locaux entre éléments d'un atlas généralisé sur une variété M se comporte presque comme un pseudogroupe de difféomorphismes locaux. On parlera alors de pseudogroupe local d'isomorphismes Morita locaux. Il s'agit donc de décrire ce qui va jouer le rôle de l'identité, l'inversion, la restriction et la composition.

L'identité : Si $R \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} O$ est un groupoïde différentiable local, on note $Id_R : R \curvearrowright R$ l'isomorphisme Morita local donné par $Z_{Id_R} = R$, $a_{Id_R} = \alpha$, $b_{Id_R} = \beta$, les deux actions étant la multiplication à gauche et à droite respectivement.
Le lemme 2 garantit que $Id_R : R \curvearrowright R$ est bien un isomorphisme Morita local.

L'inverse : Soit $f : R_0 \curvearrowright R_1$ un isomorphisme Morita local de $R_0 \rightrightarrows A$ vers $R_1 \rightrightarrows B$. Soit $(b_f, a_f) : Z_f \to B \times A$ un graphe pour f.
On se donne $Z_{f^{-1}}$ une variété difféomorphe à Z_f et $i : Z_{f^{-1}} \to Z_f$ un difféomorphisme. On définit alors $a_{f^{-1}} = b_f \circ i$ et $b_{f^{-1}} = a_f \circ i$.
L'action de R_1 à droite sur $Z_{f^{-1}}$ relativement à $a_{f^{-1}}$ est donnée par $\Psi_0(z, \gamma_1) = \gamma_1^{-1} * z$. L'action à gauche de R_0 sur $Z_{f^{-1}}$ relativement à $b_{f^{-1}}$ est donnée par $\Psi_1(\gamma_0, z) = z * \gamma_0^{-1}$.
Muni de ces actions, $(b_{f^{-1}}, a_{f^{-1}}) : Z_{f^{-1}} \to A \times B$ est un graphe de l'isomorphisme Morita Local $f^{-1} : R_1 \curvearrowright R_0$, *inverse* de f.

La restriction : Soient $f : R_0 \curvearrowright R_1$ un isomorphisme Morita local de $R_0 \rightrightarrows A$ vers $R_1 \rightrightarrows B$ et $(b_f, a_f) : Z_f \to B \times A$ un graphe pour f.
On se donne H_0 (resp. H_1) un sous-groupoïde local ouvert de R_0 (resp. R_1) et V un ouvert de Z_f tel que $a_f(V)$ est égal à l'ensemble des unités de H_0 et $b_f(V)$ est égal à l'ensemble des unités de H_1.
La *restriction* de f à H_0, H_1 et V, notée $f|_{H_0,H_1,V} : H_0 \curvearrowright H_1$, est l'isomorphisme Morita local admettant pour graphe $(b_f, a_f)|_V : V \to b_f(V) \times a_f(V)$, les actions étant induites par celles de R_0 et de R_1.

La composition locale: Soient $f : R_0 \curvearrowright R_1$ et $g : R_1 \curvearrowright R_2$ deux isomorphismes Morita locaux admettant respectivement pour graphes $(b_f, a_f) : Z_f \to O_1 \times O_0$ et $(b_g, a_g) : Z_f \to O_2 \times O_1$ où O_i est la base de R_i, $i = 0, 1, 2$.

$$\begin{tikzcd}
R_2 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & & R_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & & R_0 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
O_2 & Z_g \arrow[ul, "b_g"'] \arrow[ur, "a_g"] & O_1 & Z_f \arrow[ul, "b_f"'] \arrow[ur, "a_f"] & O_0
\end{tikzcd}$$

On considère la variété produit fibré

$$Z_g \times_{O_1} Z_f := \{(z_1, z_2) \in Z_g \times Z_f \ ; \ a_g(z_1) = b_f(z_2)\}.$$

On a une action locale et libre de R_1 à droite sur $Z_g \times_{O_1} Z_f$ donnée par $\Psi(z_1, z_2, r) = (z_1 * r, r^{-1} * z_2)$. Cette action définit un feuilletage régulier $\mathcal{F}_{R_1}$ sur $Z_g \times_{O_1} Z_f$.

Les isomorphismes Morita locaux f et g sont dits *composables* lorsque la relation d'équivalence induite par $\mathcal{F}_{R_1}$ sur $Z_g \times_{O_1} Z_f$ est régulière, c'est-à-dire que l'espace des feuilles de $\mathcal{F}_{R_1}$ est une variété. Dans ce cas, on note $Z_{g \circ f} = Z_g \times_{O_1} Z_f / \mathcal{F}_{R_1}$ l'espace des feuilles. L'application $a_f \circ pr_2 : Z_g \times_{O_1} Z_f \to O_0$ (resp. $b_g \circ pr_1 : Z_g \times_{O_1} Z_f \to O_2$) passe au quotient, on note $a_{g \circ f}$ (resp. $b_{g \circ f}$) l'application correspondante.
Finalement, $(b_{g \circ f}, a_{g \circ f}) : Z_{g \circ f} \to O_2 \times O_0$ avec les actions locales évidentes de R_0 à droite et R_2 à gauche est le graphe d'un isomorphisme Morita local noté $g \circ f : R_0 \curvearrowright R_2$ et appelé *composé* de g et f.

Dans la cas général, le feuilletage $\mathcal{F}_{R_1}$ est régulier donc localement trivial. Moyennant des restrictions, on peut composer f et g et la composition dépend des restrictions choisies. Contrairement à ce qui ce passe dans le cas des difféomorphismes locaux sur une variété, il n'y a pas une restriction meilleure que les autres pour la composition. On parle donc de *composition locale*.
Il faut noter que pour tout couple $(z_1, z_2) \in Z_g \times_{O_1} Z_f$, on peut trouver un sous-groupoïde local ouvert H_1 de R_1, un voisinage ouvert V_1 de z_1 et un voisinage ouvert V_2 de z_2 tels que $f|_{R_0, H_1, V_1}$ et $g|_{H_1, R_2, V_2}$ sont composables.

Les applications précédentes sont bien un inverse et une composition lorsqu'on les regarde localement. Plus précisément, on vérifie aisément la

Proposition 17 *Soient $f : R_0 \curvearrowright R_1$ un isomorphisme Morita local de $R_0 \rightrightarrows A$ vers $R_1 \rightrightarrows B$ admettant pour graphe $(b_f, a_f) : Z_f \to B \times A$ et z un point de Z_f.*
Les assertions suivantes sont vérifiées :
i) Il existe un sous-groupoïde local ouvert H_0 de R_0 de base A et un sous-groupoïde local ouvert H_1 de R_1 de base B tels que :

$$Id_{H_1} \circ f|_{H_0, H_1, Z_f} = f|_{H_0, H_1, Z_f} \circ Id_{H_0} = f|_{H_0, H_1, Z_f} \ .$$

ii) Il existe un voisinage ouvert V_z de z dans Z_f, un sous-groupoïde local ouvert H'_0 de R_0 de base $a_f(V_z)$ et un sous-groupoïde local ouvert H'_1 de R_1 de base $b_f(V_z)$ tels que :

$$f|_{H'_0,H'_1,V_z} \circ (f|_{H'_0,H'_1,V_z})^{-1} = Id_{H'_1},$$
$$(f|_{H'_0,H'_1,V_z})^{-1} \circ f|_{H'_0,H'_1,V_z} = Id_{H'_0}.$$

Définition 12 *Un pseudogroupe local d'isomorphismes Morita locaux sur une variété M est la donnée d'un atlas généralisé $\mathcal{U}$ sur M et d'un ensemble $\mathcal{IU}$ d'isomorphismes Morita locaux entre éléments de $\mathcal{U}$ tels que :*
i) $\mathcal{IU}$ contient "l'identité", c'est-à-dire que pour tout $R \rightrightarrows O$ dans $\mathcal{U}$, $Id_R : R \curvearrowright R$ est un élément de $\mathcal{IU}$,
ii) $\mathcal{IU}$ est stable pour les opérations inversion, composition locale et restriction.

5.4 Groupoïdes associés

On se donne une variété M. Etant donné un quasi-graphoïde local de base M ou de façon équivalente un atlas généralisé sur la variété M, atlas constitué de morceaux de quasi-graphoïdes, on peut donc considérer le pseudogroupe local des isomorphismes Morita locaux entre ces morceaux de quasi-graphoïdes. On va associer à un tel pseudogroupe, le groupoïde différentiable de ses germes, comme on le fait habituellement avec un pseudogroupe de difféomorphismes locaux.

5.4.1 Germes d'isomorphismes Morita locaux

Soient $f : R_0 \curvearrowright R_1$ et $g : R'_0 \curvearrowright R'_1$ deux isomorphismes Morita locaux entre des morceaux de quasi-graphoïdes sur une variété M. Soient $(b_f, a_f) : Z_f \to O_1 \times O_0$ et $(b_g, a_g) : Z_g \to O'_1 \times O'_0$ un graphe respectivement pour f et pour g. On se donne $\gamma_f \in Z_f$ et $\gamma_g \in Z_g$.
On dira que le *germe* de f en γ_f, noté $[f]_{\gamma_f}$ est égal au germe de g en γ_g s'il existe un voisinage ouvert V_{γ_f} de γ_f dans Z_f, un voisinage ouvert V_{γ_g} de γ_g dans Z_g et un isomorphisme de graphes $\phi : V_{\gamma_f} \longrightarrow V_{\gamma_g}$ qui envoie γ_f sur γ_g.

Avant de poursuivre, nous énonçons un résultat technique essentiel pour la suite et qui permettra de justifier la définition précédente.

Lemme 4 *Soient $R_0 \underset{\beta_0}{\overset{\alpha_0}{\rightrightarrows}} A$ et $R_1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} B$ deux morceaux de groupoïdes différentiables, $f : R_0 \curvearrowright R_1$ un isomorphisme Morita local entre R_0 et R_1 et $(b_f, a_f) : Z_f \to B \times A$ un graphe pour f. Alors si $R_0 \rightrightarrows A$ ou $R_1 \rightrightarrows B$ est un morceau de quasi-graphoïde, pour tout $z \in Z_f$ il existe un voisinage ouvert V_z de z dans Z_f ayant la propriété suivante : si S est une variété munie de deux submersions a_S et b_S sur $a_f(V_z)$ et $b_f(V_z)$ respectivement, il existe au plus un morphisme de graphes $\Phi : S \to V_z$.*

Preuve Supposons que R_0 est un morceau de quasi-graphoïde.
Soit $z \in Z_f$ et V_z un voisinage de z tel que b_f induise un difféomorphisme entre V_z/R_0 et $b_f(V_z)$. Soit S une variété munie de deux submersions a_S et b_S sur $a_f(V_z)$ et $b_f(V_z)$ respectivement et supposons qu'il existe deux applications différentiables $\Phi_0, \Phi_1 : S \to V_z$ telles que $a_f \circ \Phi_0 = a_S = a_f \circ \Phi_1$ et $b_f \circ \Phi_0 = b_S = b_f \circ \Phi_1$.
On en déduit alors deux applications différentiables :

$\Psi : S \to R_0$, $s \mapsto r$ tel que $\Phi_0(s) = \Phi_1(s) * r$,

$\Psi' : S \to R_0$, $s \mapsto a_S(s)$,

qui vérifient les égalités $\alpha_0 \circ \Psi = \alpha_0 \circ \Psi' = a_S$ et $\beta_0 \circ \Psi = \beta_0 \circ \Psi' = a_S$.
Puisque R_0 est un morceau de quasi-graphoïde $\Psi = \Psi'$ et donc $\Phi_0 = \Phi_1$. $\square$

En particulier, si $(b_S, a_S) : S \to b_f(V_z) \times a_f(V_z)$ est le graphe de g, un isomorphisme Morita de $H_0 = R_0\,|_{a_f(V_z)}$ vers $H_1 = R_1|_{b_f(V_z)}$ et si $\Phi : S \to V_z$ est un isomorphisme de graphes alors Φ entrelace les actions. Autrement dit, les isomorphismes Morita locaux g et $f|_{H_0,H_1,V_z}$ sont égaux.

Remarque Reprenons les notations de début de paragraphe : $f : R_0 \curvearrowright R_1$ et $g : R'_0 \curvearrowright R'_1$ sont deux isomorphismes Morita locaux entre des morceaux de quasi-graphoïdes sur M, admettant respectivement pour graphes $(b_f, a_f) : Z_f \to O_1 \times O_0$ et $(b_g, a_g) : Z_g \to O'_1 \times O'_0$.
On suppose que les germes $[f]_{\gamma_f}$ de f en γ_f et $[g]_{\gamma_g}$ de g en γ_g sont égaux et on note $\phi : V_{\gamma_f} \longrightarrow V_{\gamma_g}$ l'isomorphisme de graphes qui envoie γ_f sur γ_g.
Quitte à restreindre V_{γ_f}, les assertions suivantes sont vérifiées.
i) L'action de R_0 (resp. R_1) est transitive sur les fibres de b_f (resp. a_f) restreintes à V_{γ_f}. L'action de R'_0 (resp. R'_1), est transitive sur les fibres de b_g (resp. a_g) restreintes à V_{γ_g}.
ii) Il existe une section locale différentiable σ de b_f définie sur $b_f(V_{\gamma_f})$ et à valeurs dans V_{γ_f}.
Pour $\gamma \in R_1|_{b_f(V_{\gamma_f})}$ suffisamment proche des unités, $\gamma * \sigma(\alpha(\gamma))$ est défini et appartient à V_{γ_f}. D'autre part $a_g \circ \phi(\gamma * \sigma(\alpha(\gamma)) = a_g \circ \phi(\sigma(\alpha(\gamma)))$, donc il existe un unique $\Psi(\gamma) \in R'_1$ tel que

$$\phi(\gamma * \sigma(\alpha(\gamma))) = \Psi(\gamma) * \phi(\sigma(\alpha(\gamma)) \ ,$$

de plus, $\alpha'_1(\Psi(\gamma)) = \alpha_1(\gamma)$ et $\beta'_1(\Psi(\gamma)) = \beta_1(\gamma)$.
On montre ainsi qu'il existe un sous-morceau de quasi-graphoïde ouvert H_1 de R_1 et un sous-morceau de quasi-graphoïde ouvert H'_1 de R'_1 tel que Ψ soit un isomorphisme de H_1 sur H'_1.
Finalement, l'égalité $[f]_{\gamma_f} = [g]_{\gamma_g}$ signifie simplement qu'il existe un voisinage ouvert V_{γ_f} de γ_f, un voisinage ouvert V_{γ_g} de γ_g, un sous-morceau de quasi-graphoïde ouvert H_0 de R_0 et un sous-morceau de quasi-graphoïde ouvert H_1 de R_1 tels que
i) H_i s'identifie à un sous-morceau de quasi-graphoïde ouvert de R'_i, $i = 0, 1$;

ii) moyennant cette identification

$$f|_{H_0,H_1,V_{\gamma_f}} = g|_{H_0,H_1,V_{\gamma_f}} \ .$$

5.4.2 Construction du groupoïde

Dans la suite, $\mathcal{U} = \{G_i \underset{\beta_i}{\overset{\alpha_i}{\rightrightarrows}} U_i,\ i \in I\}$ est un atlas généralisé sur une variété différentiable M et $\mathcal{IU}$ est le pseudogroupe local des isomorphismes Morita locaux entre éléments de $\mathcal{U}$.
Remarquons que la condition de recollement signifie que lorsque $x \in U_i \cap U_j$ les isomorphismes Morita locaux Id_{R_i} et Id_{R_j} ont même germe en x.

Proposition 18 *L'ensemble des germes des éléments de $\mathcal{IU}$, noté $\mathcal{GIU}$, est naturellement muni d'une structure de variété différentiable. Pour cette structure, M est une sous-variété plongée de $\mathcal{GIU}$.*

Preuve Soit $[f]_\gamma \in \mathcal{GIU}$ et $f : G_1 \curvearrowright G_2$ un de ses représentants admettant pour graphe Z_f, $\gamma \in Z_f$. Alors le lemme 4 garantit l'injectivité locale de l'application

$$\begin{array}{ccc} Z_f & \to & \mathcal{GIU} \\ \gamma' & \mapsto & [f]_{\gamma'} \ . \end{array}$$

Cela permet de construire l'atlas cherché sur $\mathcal{GIU}$.
La variété M s'identifie à une sous-variété plongée de $\mathcal{GIU}$ par l'application

$$\begin{array}{ccc} M & \to & \mathcal{GIU} \\ x & \mapsto & [Id_R]_x \end{array} ,$$

où R est une "carte" au-dessus de x, c'est-à-dire que R est un élément de $\mathcal{U}$ et x une unité de R. □

On est maintenant en mesure de définir le groupoïde différentiable associé à l'atlas $\mathcal{U}$. On déduit de ce qui précède le

Théorème 5 *Les applications suivantes munissent $\mathcal{GIU}$ d'une structure de groupoïde différentiable sur M.*
- Source et but :

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathcal{GIU} & \longrightarrow & M \\ [f : R_0 \curvearrowright R_1]_z & \mapsto & a_f(z) \end{array} \quad et \quad \beta : \begin{array}{ccc} \mathcal{GIU} & \longrightarrow & M \\ [f : R_0 \curvearrowright R_1]_z & \mapsto & b_f(z) \end{array}$$

- Inverse :

$$[f : R_0 \curvearrowright R_1]_z^{-1} = [f^{-1} : R_1 \curvearrowright R_0]_z$$

- *Produit : soient* $[f : R_0 \curvearrowright R_1]_z$ *et* $[g : R_1 \curvearrowright R_2]_t \in \mathcal{GIU}$ *tels que* $a_g(t) = b_f(z)$,

$$[g : R_1 \curvearrowright R_2]_t \cdot [f : R_0 \curvearrowright R_1]_z = [g \circ f : R_0 \curvearrowright R_2]_{(t,z)}$$

-*Unité :*

$$\begin{array}{rcl} M & \to & \mathcal{GIU} \\ x & \mapsto & [Id_R : R \curvearrowright R]_x \end{array}$$

où R *est une "carte" au-dessus de* x*, c'est-à-dire que* x *est une unité de* R.

On a la proposition suivante :

Proposition 19 *Le groupoïde différentiable* $\mathcal{GIU} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ *est un quasi-graphoïde.*

Preuve Soit O un ouvert de M et $\nu : O \to \mathcal{GIU}$ une application différentiable qui vérifie $\alpha \circ \nu = \beta \circ \nu = 1_O$. Quitte à restreindre O, on peut supposer qu'il existe un élément $R \underset{\beta_0}{\overset{\alpha_0}{\rightrightarrows}} O$ de $\mathcal{U}$ et un isomorphisme Morita local $f : R \curvearrowright R$ admettant pour graphe $(b_f, a_f) : Z_f \to O \times O$ tels que l'image de ν soit incluse dans $\{[f]_\gamma ; \gamma \in Z_f\}$. Il existe alors une unique application différentiable $\tilde{\nu} : O \to Z_f$ telle que
i) $\nu(x) = [f]_{\tilde{\nu}(x)}$, pour tout $x \in O$,
ii) $a_f \circ \tilde{\nu} = b_f \circ \tilde{\nu} = 1_O$.
Quitte à restreindre encore O, on peut trouver un voisinage W de O dans R sur lequel l'application

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & W & \to & Z_f \\ & r & \mapsto & r * \tilde{\nu}(\alpha_0(r)) \end{array}$$

est définie. On vérifie aisément que φ est un isomorphisme de graphes sur son image. Par suite on a l'égalité $[Id_R]_r = [f]_{\varphi(r)}$ pour tout $r \in W$. En particulier, pour $x \in O$, on a l'égalité $[Id_R]_x = [f]_{\varphi(x)} = [f]_{\tilde{\nu}(x)} = \nu(x)$. Donc ν est l'inclusion des unités. □

Proposition 20 *Soient* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *deux atlas généralisés sur la variété* M*. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
1- $\mathcal{GIU}$ *et* $\mathcal{GIV}$ *sont égaux.*
2- $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *sont des atlas équivalents.*

Preuve L'implication de 1- vers 2- est triviale dès que l'on a remarqué que $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$) est équivalent à l'atlas formé de l'unique élément $\mathcal{GIU}$ (resp. $\mathcal{GIV}$).
Inversement, on vérifie que si $f : G_i \curvearrowright G_j$ est un isomorphisme Morita entre deux morceaux de quasi-graphoïdes admettant $(b_f, a_f) : Z_f \to U_j \times U_i$ pour graphe et si V_i (resp. V_j) est un voisinage des unités dans G_i (resp. G_j) alors $(b_f, a_f) : Z_f \to U_j \times U_i$ induit un isomorphisme Morita entre $G_i|_{V_i}$ et $G_j|_{V_j}$. On en déduit que si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux atlas équivalents, alors ils induisent le même pseudogroupe local d'isomorphismes Morita, d'où le résultat. □

Corollaire 5 *Soit $G \rightrightarrows M$ un quasi-graphoïde et $\mathcal{U}$ un atlas généralisé équivalent à l'atlas constitué du seul élément G. Alors G est un sous-groupoïde unifère de $\mathcal{GIU}$.*

Ce corollaire implique qu'étant donné un morceau de quasi-graphoïde, R sur une variété M, le plus "gros" quasi-graphoïde sur M qui admet R pour sous-morceau de quasi-graphoïde est $\mathcal{GIR}$ et le plus petit est la composante α-connexe de $\mathcal{GIR}$.

Remarques

1- Retour à l'exemple des feuilletages réguliers

On reprend les notations de la section précédente. Soient $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage régulier et $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ un atlas généralisé pour $(M, \mathcal{F})$.

Alors $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ et $Hol(M, \mathcal{F})$ le groupoïde d'holonomie de $(M, \mathcal{F})$ sont deux atlas généralisés sur M équivalents. Ce qui précède montre que $Hol(M, \mathcal{F})$ est un sous-groupoïde unifère de $\mathcal{GIU}_{\mathcal{F}}$ et comme $Hol(M, \mathcal{F})$ est α-connexe, c'est donc la composante α-connexe de $\mathcal{GIU}_{\mathcal{F}}$.

On peut également remarquer que $G(M, \mathcal{F}) = \mathcal{GIU}_{\mathcal{F}}$.

2- Si on considère $\mathcal{V}$ l'ensemble de tous les morceaux de quasi-graphoïdes sur M et $\mathcal{IV}$ celui des isomorphismes Morita locaux entre éléments de $\mathcal{V}$, une construction analogue à celle du théorème précédent donne un groupoïde différentiable $\mathcal{GIV} \rightrightarrows \mathcal{GV}$, où $\mathcal{GV} = \{[Id_R]_x \ ; \ R \in \mathcal{V} \ et \ x \in R^{(0)}\}$ est une variété étalée sur M. On peut montrer que ce groupoïde est isomorphe au convecteur universel de J. Pradines et B. Bigonnet [Big86, Pra85, BP85].

Chapter 6

Groupoïde d'holonomie de feuilletages presque réguliers

Il s'agit ici de rassembler les résultats obtenus aux chapitres précédents et de les appliquer aux feuilletages presque réguliers. Ensuite nous donnerons des exemples illustrant ces résultats. Nous finirons par quelques remarques relatives aux liens qui existent entre le groupoïde que l'on a construit ici et la notion d'holonomie introduite par C. Ehresmann et P. Ver Eecke [Ehr61, VE85] puis concernant les C^*- *algèbres de feuilletages singuliers*.

6.1 Groupoïdes de feuilletages singuliers

Dans la suite $(M, \mathcal{F})$ désigne un feuilletage presque régulier et $(M_0, \mathcal{F}_0)$ son sous feuilletage régulier maximal. On note k la dimension du feuilletage régulier $\mathcal{F}_0$.

D'après le chapitre 3, si G est un quasi-graphoïde α-connexe de base M, définissant le feuilletage $\mathcal{F}$, alors la restriction de G à la partie régulière M_0 est isomorphe au groupoïde d'holonomie (usuel) du feuilletage régulier $(M_0, \mathcal{F}_0)$. Ceci nous amène à poser la

Définition 13 *On dira qu'un groupoïde différentiable G de base M est un groupoïde d'holonomie du feuilletage presque régulier $(M, \mathcal{F})$ si G est un quasi-graphoïde α-connexe dont les orbites sont les feuilles de $\mathcal{F}$.*

Comme nous l'avons déjà remarqué, une condition nécessaire sur $(M, \mathcal{F})$ pour qu'il admette un groupoïde d'holonomie est que $\mathcal{F}$ soit défini par un algébroïde de Lie $\mathcal{A}$ sur M de dimension k. Alors nécessairement, le fléchage de $\mathcal{A}$ sera injectif au-dessus de l'ouvert dense M_0. Les résultats des chapitres précédents nous permettent d'affirmer que cette condition est également suffisante.
Supposons qu'il existe un algébroïde de Lie $\mathcal{A}$ de dimension k qui définisse $\mathcal{F}$.

L'intégration locale des algébroïdes de Lie (cf. 4.5) garantit l'existence d'un atlas généralisé $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ pour $(M, \mathcal{F})$. En appliquant à cet atlas la construction du chapitre 5, on obtient un quasi-graphoïde $\mathcal{GIU}_{\mathcal{A}}$ de base M. Notons $H(\mathcal{U}_{\mathcal{A}}) \rightrightarrows M$ la composante α-connexe de $\mathcal{GIU}_{\mathcal{A}}$. Par construction, les orbites de $H(\mathcal{U}_{\mathcal{A}})$ sont les feuilles de $\mathcal{F}$. De plus $H(\mathcal{U}_{\mathcal{A}})$ intègre l'algébroïde de Lie $\mathcal{A}$.

On déduit alors le

Théorème 6 *Le feuilletage presque régulier $(M, \mathcal{F})$ admet un groupoïde d'holonomie si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*
i) $\mathcal{F}$ peut être défini par un quasi-graphoïde de base M.
ii) $\mathcal{F}$ peut être défini par un quasi-graphoïde local de base M.
iii) $\mathcal{F}$ peut être défini par un atlas généralisé sur M.
iv) $\mathcal{F}$ peut être défini par un algébroïde de Lie de dimension k sur M.

Remarques
1- La condition suivante est également équivalente aux conditions ci-dessus :
v) $\mathcal{F}$ peut être défini par un groupoïde différentiable de base M dont la restriction à M_0 est isomorphe au groupoïde d'holonomie de $(M_0, \mathcal{F}_0)$.
Effectivement, si un tel groupoïde existe alors son algébroïde de Lie vérifie iv).
2- Le groupoïde $\mathcal{GIU}_{\mathcal{F}}$ associé (cf. Théorème 5) à un atlas généralisé $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ est très gros. Si, au lieu de considérer le pseudogroupe local des isomorphismes Morita entre éléments de $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$, on considère le pseudogroupe local des isomorphismes Morita entre éléments de $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ qui respectent $\mathcal{F}$, on construit de la même façon un quasi-graphoïde de base M qui est un sous-groupoïde unifère de $\mathcal{GIU}_{\mathcal{F}}$. Donc en particulier sa composante α-connexe est un groupoïde d'holonomie de $(M, \mathcal{F})$.

En fait on a montré le résultat suivant :

Théorème 7 *Tout algébroïde de Lie dont le fléchage est injectif au-dessus d'un ouvert dense est intégrable.*

Il faut noter que la construction présentée ci-dessus d'un groupoïde d'holonomie d'un feuilletage presque régulier $(M, \mathcal{F})$ dépend fortement du choix de l'atlas, ou de façon équivalente de l'algébroïde de Lie.
Par exemple, considérons sur $\mathbb{R}$ le feuilletage $\mathcal{F}$ admettant pour feuilles $]-\infty, 0[$, $\{0\}$ et $]0, \infty[$.

———•———

On peut "comprendre" ce feuilletage de diverses façons :
- $\mathcal{F}$ est induit par le champ $X_1 = x\dfrac{\partial}{\partial x}$. Alors $\mathcal{F}$ provient de l'action de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$\begin{array}{rccc} \Phi_1 : & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \ . \end{array}$$

A cette action est associé le groupoïde $G_1 \rightrightarrows \mathbb{R}$ de l'action Φ_1.
- $\mathcal{F}$ est induit par le champ $X_2 = -x^2\dfrac{\partial}{\partial x}$, c'est à dire que $\mathcal{F}$ provient de l'action locale de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$(\lambda, x) \mapsto \frac{x}{\lambda x + 1} \ ,$$

pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que cela ait un sens. On obtient alors un groupoïde G_2 à partir d'un atlas de cette action locale.
Les groupoïdes G_1 et G_2 sont isomorphes au-dessus de $\mathbb{R}^*$ mais ne sont pas isomorphes sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, étant donné un feuilletage presque régulier $(M, \mathcal{F})$, il n'y a pas a priori unicité d'un algébroïde de Lie définissant ce feuilletage, ni unicité, à équivalence près, d'un atlas généralisé de $(M, \mathcal{F})$ et par suite, un même feuilletage singulier peut admettre plusieurs groupoïdes d'holonomie distincts. Cependant certains feuilletages admettent un groupoïde d'holonomie "remarquable". Plus précisément, on pose la

Définition 14 *On dit que G est le groupoïde d'holonomie universel du feuilletage $(M, \mathcal{F})$ si quel que soit H, un autre groupoïde d'holonomie de $(M, \mathcal{F})$, il existe un morphisme différentiable de groupoïde de H vers G au-dessus de l'identité.*

Le fait que les groupoïdes d'holonomie de $(M, \mathcal{F})$ soient des quasi-graphoïdes garantit l'unicité du groupoïde d'holonomie universel. D'autre part, supposons que $(M, \mathcal{F})$ admette un groupoïde d'holonomie universel G. Notons $\mathcal{A}G$ l'algébroïde de Lie de G et p son fléchage. Alors pour tout algébroïde de Lie $\mathcal{A}$ de dimension k définissant le feuilletage, il existe un morphisme d'algébroïde de Lie de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}G$. On dira d'un tel algébroïde de Lie qu'il est *extrêmal* pour $\mathcal{F}$. C'est en particulier le cas lorsque p induit un isomorphisme entre $\Gamma(\mathcal{A})$, l'espace vectoriel des sections locales de $\mathcal{A}$ et $\Gamma(T\mathcal{F})$, l'espace vectoriel des champs de vecteurs locaux tangents à $\mathcal{F}$.
Inversement soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux algébroïdes de Lie de dimension k définissant $\mathcal{F}$. Notons G_1 (resp. G_2) le groupoïde d'holonomie correspondant. S'il existe un morphisme f d'algébroïde de Lie de $\mathcal{A}_1$ vers $\mathcal{A}_2$ alors l'intégration locale des morphismes (cf. 4.4) associée à la proposition 1 du chapitre 3 permet d'intégrer f en un morphisme différentiable du groupoïde de G_1 vers G_2 au-dessus de l'identité.
Finalement on a la

Proposition 21 *Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage presque régulier. Alors $(M, \mathcal{F})$ admet un groupoïde d'holonomie universel si et seulement si $\mathcal{F}$ peut être défini par un algébroïde de Lie extrêmal pour $\mathcal{F}$.*

Finalement, si $(M, \mathcal{F})$ est un feuilletage singulier dont le sous-feuilletage régulier maximal est de dimension k, alors $(M, \mathcal{F})$ vérifie l'une des trois propriétés suivantes

:
i) $(M, \mathcal{F})$ n'admet pas de groupoïde d'holonomie. Ce qui est équivalent à $(M, \mathcal{F})$ ne peut pas être défini par un algébroïde de Lie de dimension k sur M.
ii) $(M, \mathcal{F})$ admet des groupoïdes d'holonomie mais pas de groupoïde d'holonomie universel. Ce qui est équivalent au fait que $(M, \mathcal{F})$ peut être défini par des algébroïdes de dimension k sur M mais qu'aucun de ces algébroïdes de Lie n'est extrêmal pour $\mathcal{F}$.
iii) $(M, \mathcal{F})$ admet un groupoïde d'holonomie universel. C'est à dire qu'il existe un algébroïde de Lie de dimension k sur M qui est extrêmal pour $\mathcal{F}$.

Nous allons illustrer dans la suite les résultats précédents par des exemples.

6.2 Exemples

Avant toute chose, il faut remarquer que si $(M, \mathcal{F})$ est un feuilletage singulier sur une variété M et $(M_0, \mathcal{F}_0)$ est le sous-feuilletage régulier maximal de $\mathcal{F}$ alors il suffit, lorsque c'est possible, de se donner un algébroïde de Lie de bonne dimension sur un voisinage V de la partie singulière $M \setminus M_0$ qui définisse le feuilletage restreint. Ensuite il faut intégrer localement cet algébroïde de Lie afin d'obtenir un atlas généralisé sur V que l'on complète en un atlas généralisé de $(M, \mathcal{F})$ en y rajoutant le groupoïde d'holonomie de $(M_0, \mathcal{F}_0)$. Ainsi le problème de la construction d'un groupoïde d'holonomie est un problème local.
Dans la suite, on reprend les notations des chapitres précédents; à savoir, si $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ est un atlas généralisé pour $\mathcal{F}$, on note $H(\mathcal{U}_{\mathcal{F}})$ le groupoïde d'holonomie de $(M, \mathcal{F})$ associé et si $\mathcal{A}$ est un algébroïde de Lie définissant $\mathcal{F}$, on note $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ un atlas généralisé obtenu par intégration locale de $\mathcal{A}$ (cf. Proposition 15 Chap. 4)

1- Feuilletages réguliers
Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage régulier de dimension k. Il existe un unique algébroïde de Lie définissant $\mathcal{F}$. Il s'agit du tangent $T\mathcal{F}$ au feuilletage, le fléchage étant l'inclusion. Le feuilletage $(M, \mathcal{F})$ admet un unique groupoïde d'holonomie, $Hol(M, \mathcal{F})$.

2- Action presque libre d'un groupe de Lie
Soit H un groupe de Lie de dimension k agissant différentiablement sur la variété M. Notons $\phi : M \times H \to M$ l'action. On suppose que l'action est libre sur une partie dense de M. Les orbites de l'action sont alors les feuilles d'un feuilletage singulier $\mathcal{F}_H$ sur M. Notons $\mathcal{H}$ l'algèbre de Lie de H.

L'ensemble $\mathcal{A}_H = M \times \mathcal{H}$ est muni d'une structure d'algébroïde de Lie de dimension k sur M de fléchage $p : (x, v) \mapsto (\phi)_*(x, v)$, où $(\phi)_*(x, v)$ désigne la différentielle de l'application ϕ appliquée au vecteur $(x, 0, 1_H, v) \in T_xM \times \mathcal{H} \subset T_xM \times T_{1_H}H \simeq T_{(x,1_H)}(M \times H)$.
Cet algébroïde de Lie définit $\mathcal{F}$. Autrement dit, $\mathcal{F}_H$ est défini par une algèbre de

Lie de champs de vecteurs (cf. Exemple 3 section 4.6).
Si l'on note H^c la composante connexe de 1_H, le groupoïde produit croisé $M \ltimes H^c \rightrightarrows M$ intègre $\mathcal{A}$ et est un groupoïde d'holonomie de $(M, \mathcal{F}_H)$.

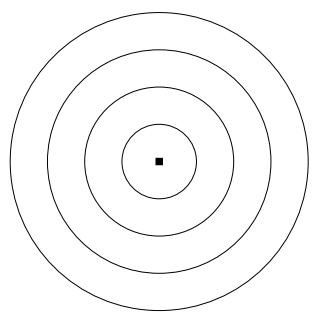
3- Orbites d'un champ de vecteurs
Soit X un champ de vecteurs sur une variété M, non nul sur un ouvert dense de M. On définit alors *l'algébroïde de Lie associé au champ* X, comme l'algébroïde de Lie $\mathcal{A}_X = M \times \mathbb{R}$ sur M admettant pour fléchage

$$p_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_X & \to & TM \\ (x,t) & \mapsto & tX(x) \end{array} .$$

Le flot de X induit une action locale de $\mathbb{R}$ sur M. Le groupoïde local Ω de cette action intègre $\mathcal{A}$ et à équivalence près $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \{\Omega\}$.
Supposons pour simplifier que X soit complet. On a alors une action de $\mathbb{R}$ sur M. Notons

$$M \rtimes \mathbb{R} \underset{\beta_\rtimes}{\overset{\alpha_\rtimes}{\rightrightarrows}} M$$

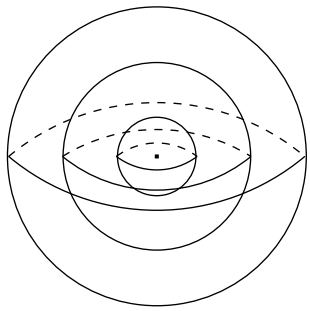
le groupoïde de cette action. Soit H le sous-groupoïde constitué des $\gamma \in M \rtimes \mathbb{R}$ pour lesquels il existe une section locale $\sigma : O \to M \rtimes \mathbb{R} \rightrightarrows M$ où O est un voisinage ouvert de $\alpha_\rtimes(\gamma)$ dans M telle que $\sigma(x) = \gamma$ et $\alpha_\rtimes \circ \sigma = \beta_\rtimes \circ \sigma = 1_O$.
Alors le quasi-graphoïde $H(\mathcal{U}_{\mathcal{A}})$ est la composante α-connexe du groupoïde quotient de $M \rtimes \mathbb{R} \rightrightarrows M$ par H.
Soit sur le plan $\mathbb{R}^2$, le champ de vecteurs $X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$.



Le groupoïde d'holonomie obtenu est $\mathbb{R}^2 \rtimes S^1$, le groupoïde produit croisé de $\mathbb{R}^2$ par S^1, où S^1 agit par rotation dans le plan. Il s'agit en fait du groupoïde d'holonomie universel du feuilletage du plan par des cercles concentriques.

4- Orbites d'un quasi-graphoïde
Soit $G \rightrightarrows M$ un quasi-graphoïde de base M et $\mathcal{A}_G$ son algébroïde de Lie. Par intégration locale de $\mathcal{A}_G$, on obtient un atlas généralisé équivalent à l'atlas constitué de l'unique élément G et par suite le groupoïde obtenu $H(G)$ est simplement la composante α-connexe de G.

5- Sphères concentriques
Considérons le feuilletage $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$ par des sphères concentriques :



Ce feuilletage n'admet pas de groupoïde d'holonomie. Effectivement, si c'était le cas, il pourrait être défini par un algébroïde de Lie $\mathcal{A}$ de dimension 2, dont le fléchage serait injectif en restriction à $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. En se restreignant à un voisinage trivialisant de $\{0\}$ pour $\mathcal{A}$ on pourrait obtenir une trivialisation du fibré tangent à la sphère S^2. Or S^2 n'est pas parallélisable.
Plus généralement si un feuilletage $(M, \mathcal{F})$ est localement feuilleté par des sphères concentriques de dimension $n \neq 1,\ 3,\ 7$, alors $(M, \mathcal{F})$ n'admet pas de groupoïde d'holonomie [BM58].

6- Feuilletages "composés"
Soit M une variété munie de deux feuilletages réguliers $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ où $\mathcal{F}_1$ est un sous-feuilletage de $\mathcal{F}_2$ (c'est-à-dire que toute feuille de $\mathcal{F}_1$ est contenue dans une feuille de $\mathcal{F}_2$). On munit $M \times \mathbb{R}$ du feuilletage singulier $\mathcal{F}$ défini par $\mathcal{F}_1 \times \{0\}$ et $\mathcal{F}_2 \times \{t\}$ pour $t \neq 0$.
Soit G_1 (resp. G_2) le groupoïde d'holonomie de $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$) et $\mathcal{A}_1$ (resp. $\mathcal{A}_2$) les algébroïdes de Lie correspondants de fléchage p_1 (resp. p_2). Il existe alors une immersion de groupoïde $\varphi : G_1 \to G_2$ et par suite un morphisme injectif d'algébroïdes de Lie $\varphi_*^{\mathcal{A}} : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$. On se donne une métrique euclidienne sur $\mathcal{A}_2$ et on note N l'orthogonal de $\mathcal{A}_1$ dans $\mathcal{A}_2$. Alors $\mathcal{A}_2$ s'identifie à $\mathcal{A}_1 \oplus N$. On considère alors l'algébroïde de Lie adiabatique partielle $\mathcal{A}_{adp}$ de fléchage

$$\begin{array}{rccc} p_{adp} : & \mathcal{A}_{adp} = \mathcal{A}_1 \oplus N \times \mathbb{R} & \longrightarrow & T(M \times \mathbb{R}) = TM \times TR \\ & (v_1, v_2, t) & \mapsto & (p_2(v_1 + tv_2), (t, 0)) \end{array} .$$

Comme au chapitre précédent, l'intégration locale de $\mathcal{A}_{adp}$ sur un voisinage V de $M \times \{0\}$ donne le groupoïde local Ω_{adp} d'une action (locale) de G_1 sur N. On obtient ainsi un atlas généralisé $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ pour $\mathcal{F}$, constitué de Ω_{adp} et du groupoïde produit $G_2 \times \mathbb{R}_*$ sur $M \times \mathbb{R}_*$. Finalement le groupoïde d'holonomie correspondant $G_{\mathcal{U}_{\mathcal{F}}}$ est le groupoïde normal de φ (cf. Eclatement d'une immersion, Chap. 2). Il s'agit du groupoïde d'holonomie universel de $\mathcal{F}$.

Un cas extrême de cette situation est celui où $\mathcal{F}_1$ est le feuilletage de M par ses points et $\mathcal{F}_2$ le feuilletage de M admettant pour unique feuille M. La construction précédente donne alors le groupoïde tangent de M.

7- Sous-variété

Soit M une variété de dimension n et N une sous-variété connexe de M de dimension $k < n$. On considère le feuilletage $\mathcal{F}_N$ sur M admettant pour feuilles N et les composantes connexes de $M \setminus N$.

Localement ce type d'exemple se ramène à l'inclusion de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$ et si l'on étudie ce qui se passe "transversalement", on est ramené à l'étude de l'inclusion d'un point dans $\mathbb{R}^{n-k}$. En d'autres termes, un tel feuilletage est localement le produit du feuilletage (régulier) de $\mathbb{R}^k$ par lui-même et du feuilletage singulier sur $\mathbb{R}^{n-k}$ admettant pour feuilles $\{0\}$ et $\mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0\}$.

Si la codimension de N est différente de 1, un tel feuilletage admet des groupoïdes d'holonomie mais pas de groupoïde d'holonomie universel. On va illustrer ici les deux cas extrêmes $\mathrm{codim}(N) = 1$ et $\dim(N) = 0$.

Sous-variété de codimension 1

Soit N une sous-variété de codimension 1 de M. On se donne $(T_N, \pi, N, \mathbb{R})$ un voisinage tubulaire de N dans M, c'est-à-dire que T_N est un ouvert de M contenant N et $\pi : T_N \to N$, un fibré vectoriel localement trivial de fibre type $\mathbb{R}$ (équivalent au fibré normal de N dans M [Spi70]).

On pose $\mathcal{A} = T(T_N)$, soit $\{f_i : \pi^{-1}(N_i) \to N_i,\ i \in I\}$ une trivialisation locale de T_N, on en déduit la trivialisation

$$\{(f_i)_* : T(\pi^{-1}(N_i)) = T(T_N) \mid_{N_i} \to T(N_i) \times T(\mathbb{R}),\ i \in I\}.$$

Soit $p : \mathcal{A} \to T(T_N)$ défini par $(f_i)_*(p((f_i)_*^{-1}(x, v, t, \lambda)) = (x, v, t, t\lambda)$ lorsque $((x, v), (t, \lambda)) \in T_x(N_i) \times T_t(\mathbb{R})$. Lorsque $M = N \times \mathbb{R}$, on retrouve la construction de l'exemple 6-1 de la section 4.6.

On munit alors $\mathcal{A}$ de la structure d'algébroïde de Lie admettant p pour fléchage.

On est localement dans la situation d'une variété feuilletée $N_i \times \mathbb{R}$ admettant pour feuilles $N_i \times \{0\}$, $N_i \times \mathbb{R}_*^+$ et $N_i \times \mathbb{R}_*^-$. On a donc une action "transverse" par multiplication de $\mathbb{R}_*^+$ sur $\mathbb{R}$. On obtient le groupoïde $N_i \times N_i \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \rightrightarrows N_i \times \mathbb{R}$, produit du groupoïde des couples sur N_i et du groupoïde de l'action de $\mathbb{R}_*^+$ sur $\mathbb{R}$.

L'atlas $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ est équivalent à l'atlas généralisé sur M associé à l'inclusion de N dans M (cf. Chapitre 3). Le groupoïde $G_{\mathcal{U}_\mathcal{A}}$ est le groupoïde de l'éclatement de la sous-variété N dont on trouve une description dans [Wei96, NWX97, Mon98]. Il s'agit du groupoïde d'holonomie universel du feuilletage $(M, \mathcal{F}_N)$.

Sous-variété réduite à un point

Soit M une variété de dimension $n > 1$ et s un point de M. On considère le feuilletage singulier $\mathcal{F}_s$ sur M admettant deux feuilles : $M \setminus \{s\}$ et $\{s\}$. Autrement dit on est ramené à étudier le feuilletage $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^n$ constitué des deux feuilles $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

et $\{0\}$.
Il existe de nombreux algébroïdes de Lie sur $\mathbb{R}^n$ définissant le feuilletage $\mathcal{F}$.
Soit par exemple $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$ et $f \neq 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus 0$. Alors il existe sur $\mathcal{A}_f = T(\mathbb{R}^n)$ une structure d'algébroïde de Lie sur M admettant pour fléchage $p_f : V_x \in T_xM \mapsto f(x).V_x \in T_xM$. Ainsi $\mathcal{A}_f$ est de dimension n et définit $\mathcal{F}$. Donc il existe des groupoïdes d'holonomie.
En revanche il n'existe pas de famille $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ qui s'annulent en 0, qui soient linéairement indépendants en restriction à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et tels que tout champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ s'annulant en 0 soit un élément du module sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ engendré par les X_i. Donc il n'existe pas de groupoïde d'holonomie universel.

Par exemple dans $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. On pose

$$\begin{array}{rccc} p_1 : & \mathcal{A}_1 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & T\mathbb{R}^2 \\ & (z, t_1, t_2) & \mapsto & (z, \mid z \mid (t_1 \frac{\partial}{\partial r} + t_2 \frac{\partial}{\partial \theta})) \end{array} .$$

On munit $\mathcal{A}_1$ d'une structure d'algébroïde de Lie sur $\mathbb{R}^2$ de fléchage p_1. Alors $\mathcal{A}_1$ engendre le feuilletage $\mathcal{F}$ du plan $\mathbb{R}^2$ admettant pour feuilles $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On a déjà intégré localement $\mathcal{A}_1$ au chapitre 4. On définit $H = \mathbb{R}^2$ muni de la structure de groupe de Lie non abélien (groupe affine) donnée par : $(0, 0)$ pour élément neutre, $(t_1, t_2).(t_3, t_4) = (t_1 + t_3, t_2 + t_4 e^{t_1})$ pour produit et $(t_1, t_2)^{-1} = (-t_1, -t_2 e^{-t_1})$ pour inversion. Alors $G_{\mathcal{U}_{\mathcal{A}_1}} = \mathbb{C}_* \times \mathbb{C}_* \cup H \rightrightarrows \mathbb{C}$, la réunion du groupoïde des couples sur $\mathbb{C}_*$ et du groupe H sur $\{0\}$.
On peut aussi considérer

$$\begin{array}{rccc} p_2 : & \mathcal{A}_2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & T\mathbb{R}^2 \\ & (x, y, t_1, t_2) & \mapsto & (x, y, (-yt_1 + xt_2)\frac{\partial}{\partial x} + (xt_1 + yt_2)\frac{\partial}{\partial y}) \end{array} .$$

$\mathcal{A}_2$ est muni d'une structure d'algébroïde de Lie sur $\mathbb{R}^2$ de fléchage p_2 engendrant le feuilletage $\mathcal{F}$. On vérifie aisément qu'il existe un morphisme d'algébroïdes de Lie $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{A}_1$ vers $\mathcal{A}_2$.
Le groupoïde de Lie associé à $\mathcal{A}_2$ est le groupoïde $G_{\mathcal{U}_{\mathcal{A}_2}} = \mathbb{C} \rtimes (S^1 \times \mathbb{R}_*^+) \rightrightarrows \mathbb{C}$ de l'action par rotations et homothéties de $(S^1 \times \mathbb{R}_*^+)$ sur le plan.
Soit maintenant

$$\begin{array}{rccc} p_3 : & \mathcal{A}_3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & T\mathbb{R}^2 \\ & (x, y, t_1, t_2) & \mapsto & (x, y, (x^2 + xy + y^2)(t_1 \frac{\partial}{\partial x} + t_2 \frac{\partial}{\partial y})) \end{array} .$$

$\mathcal{A}_3$ est muni d'une structure d'algébroïde de Lie sur $\mathbb{R}^2$ de fléchage p_3 engendrant le feuilletage $\mathcal{F}$ mais il n'existe pas de morphisme d'algébroïdes de Lie $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{A}_3$ vers $\mathcal{A}_2$.

6.3 Remarques

6.3.1 Holonomie réduite de feuilletages singuliers

Rappelons la construction du groupoïde d'holonomie (topologique) de feuilletages singuliers localement simple introduit par C. Ehresmann [Ehr61, VE85]. Pour qu'il n'y ait pas de confusion, nous le désignerons par *groupoïde d'holonomie réduit* du feuilletage.

Soit $(M, \mathcal{F})$, un feuilletage presque régulier. Si U est un ouvert de M, on note $\mathcal{F}_U$, le feuilletage restreint à U et $\breve{U}$ l'espace des feuilles de $\mathcal{F}_U$. Enfin si $x \in U$ on note $\bar{x}$ son image dans $\breve{U}$.
Une feuille F de $\mathcal{F}$ est dite *simple* lorsque tout point x de f admet un système fondamental de voisinages ouverts U dans M tel que l'application canonique (i.e. induite par l'inclusion) de $\breve{U}$ dans $\breve{M}$ soit un homéomorphisme sur son image. Le feuilletage est dit *simple* lorsque toute feuille est simple et *localement simple* lorsque tout point x de M admet un voisinage ouvert U dans M tel que $(U, \mathcal{F}_U)$ soit simple.

Pour de tels feuilletages, il existe une bonne notion d'espace transverse local et l'on peut définir une notion d'holonomie analogue à celle des feuilletages réguliers.
Plus précisément, soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage singulier localement simple. Des ouverts simples U_0, $U_1 \subset U$ de $(M, \mathcal{F})$ induisent un *homéomorphisme transverse élémentaire* $i_{U_0U_1} : \breve{U}_0 \to \breve{U}_1$. On appelle alors *isomorphisme d'holonomie* tout triplet (U, f, U') où U et U' sont simples et où $f : \breve{U} \to \breve{U}'$ est composé d'homéomorphismes transverses élémentaires. Notons H l'ensemble des isomorphismes d'holonomie.
Si x et y sont sur une même feuille, on note

$$H_{x,y} = \{(U, f, U') \in H \ ; \ x \in U \ et \ y \in U'\} \ .$$

Il existe sur $H_{x,y}$ une relation d'équivalence de type "germe transverse" [Ehr61] dont le quotient est désigné par $\mathcal{H}_{x,y}(\mathcal{F})$. Le groupoïde d'holonomie réduit est

$$\mathcal{H}(\mathcal{F}) = \bigcup_{x,y \in F \ ; \ F \in \breve{M}} \mathcal{H}_{x,y}(\mathcal{F}) \underset{r}{\overset{s}{\rightrightarrows}} M$$

avec la structure algébrique évidente de groupoïde, la topologie étant du type topologie des germes. Plus précisément, si (U, f, U') est un homéomorphisme transverse, on note $U \times_{\breve{U}',f} U' = \{(x, y) \in U \times U' \ ; \ f(\bar{x}) = \bar{y}\}$. Alors la topologie de $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ est telle que l'application de $U \times_{\breve{U}',f} U'$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ qui à (x, y) fait correspondre la classe de (U, f, U') dans $\mathcal{H}_{x,y}(\mathcal{F})$ est un homéomorphisme sur un ouvert de $\mathcal{H}(\mathcal{F})$.

Notons que la définition de quasi-graphoïde s'étend naturellement aux groupoïdes topologiques. On vérifie alors immédiatement que $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ est un quasi-graphoïde. Effectivement, si $\nu : O \to \mathcal{H}(\mathcal{F})$ est une section locale continue d'un ouvert O de M

telle que $s \circ \nu = r \circ \nu = 1_O$, alors on peut supposer que O est simple et qu'il existe un homéomorphisme transverse (O, f, O) tel que pour tout $x \in O$, $\nu(x)$ est la classe dans $\mathcal{H}_{x,x}(\mathcal{F})$ de (O, f, O). De plus f doit vérifier $f(\bar{x}) = \bar{x}$ pour tout $x \in O$ d'où le résultat.

On suppose désormais que l'on a construit $G(M, \mathcal{F}) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$, un groupoïde d'holonomie du feuilletage presque régulier $(M, \mathcal{F})$. On a la

Proposition 22 *Il existe un morphisme surjectif de groupoïde (topologique)*

$$\varphi : G(M, \mathcal{F}) \to \mathcal{H}(\mathcal{F}) \ .$$

Preuve On se donne un atlas généralisé $\{\Omega_i \to O_i \ ; \ i \in I\}$ de $(M, \mathcal{F})$ équivalent à $\{G(M, \mathcal{F})\}$ et tel que pour tout $i \in I$:

- O_i est un ouvert simple de $\mathcal{F}$,
- l'image par (α, β) de Ω_i est dans $O_i \times_{\breve{O}_i, id} O_i$.

Pour tout $i \in I$ on définit $\varphi_i : O_i \to \mathcal{H}(\mathcal{F})$ qui à $\gamma \in O_i$ fait correspondre la classe de (O_i, id, O_i) dans $\mathcal{H}_{\alpha(\gamma), \beta(\gamma)}(\mathcal{F})$. On obtient ainsi un morphisme de morceaux de quasi-graphoïdes.

Puisque $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ est un quasi-graphoïde, les φ_i coïncident sur l'intersection de leur domaine de définition. On obtient ainsi un morphisme noté $\tilde{\varphi}$ d'un voisinage de M dans $G(M, \mathcal{F})$ vers $\mathcal{H}(\mathcal{F})$. On applique alors la proposition 1 et on conclut à l'existence de φ.

La surjectivité provient simplement du fait que tous les homéomorphismes transverses élémentaires sont atteints par les φ_i et que tout élément de $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ peut se décomposer en un produit d'homéomorphismes transverses élémentaires. $\square$

6.3.2 C^*-algèbre de feuilletages singuliers

Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage presque régulier admettant un groupoïde d'holonomie G de base M, de source α et de but β. On vérifie immédiatement que les α-fibres de G sont séparées. On peut donc associer à G une C^*-algèbre comme cela a été fait par A. Connes ([Co90] page 101 ou [Co82]). Nous rappelons brièvement ici cette construction.

La (possible) non séparation de G implique que l'algèbre des fonctions à support compact sur G est "trop petite", aussi on définit $C_c^\infty(G)$ comme l'espace vectoriel engendré par les sommes finies de fonctions dont le support est inclus dans une carte de G.

D'autre part, on note k la dimension du sous-feuilletage régulier maximal. C'est donc également la dimension des fibres de G. Rappelons que le fibré des demi-densités $\Omega^{\frac{1}{2}}$ est le fibré en droite sur G dont la fibre $\Omega_\gamma^{\frac{1}{2}}$ en $\gamma \in G$ est l'espace vectoriel des applications

$$\rho : \wedge^k T_\gamma(G^{\beta(\gamma)}) \otimes \wedge^k T_\gamma(G_{\alpha(\gamma)}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

telles que $\rho(\lambda\nu) = |\lambda|^{\frac{1}{2}}\rho(\nu)$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, où k désigne la dimension des fibres de la submersion α.
Les demi-densités permettent de définir de manière canonique l'algèbre de convolution associée à G. On note $C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ l'espace vectoriel engendré par les sommes finies de sections $\mathcal{C}^\infty$ du fibré $\Omega^{\frac{1}{2}}$ dont le support est inclus dans une carte de G. On munit alors $C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ de :
Produit de convolution

$$(f * g)(\gamma) = \int_{\gamma_1 \in G^{\beta(\gamma)}} f(\gamma_1) g(\gamma_1^{-1}\gamma)$$

où f, $g \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ et $\gamma \in G$. L'intégrale de droite a un sens car il s'agit de l'intégrale d'une 1-densité sur la variété séparée $G^{\beta(\gamma)}$.
Involution

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}$$

où $f \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ et $\gamma \in G$.
Représentations
Pour $x \in M$ il existe une représentation π_x de $C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ sur l'espace de Hilbert $L^2(G_x)$ donnée par

$$((\pi_x(f)(\xi))(\gamma) = \int_{\gamma_1 \in G^{\beta(\gamma)}} f(\gamma_1)\xi(\gamma_1^{-1}\gamma)$$

où $\xi \in L^2(G_x)$, $f \in C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ et $\gamma \in G_x$.
La C^*-algèbre (réduite) $C_r^*(G)$ de G est la complétion de $C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ pour la norme donnée par $\| f \| = \sup_{x \in M} \| \pi_x(f) \|$.

Remarquons que $C^*(M_0, \mathcal{F}_0)$, la C^*-algèbre du sous-feuilletage régulier maximal, est un idéal de $C^*(G)$.

Appendix A

Orbites de champs de vecteurs

Nous étudions ici la "longueur" des orbites fermées d'un champ de vecteurs sur une variété. Ces résultats nous permettent de montrer dans le chapitre 4 que le groupoïde local construit pour intégrer l'algébroïde de Lie d'un feuilletage singulier est un morceau de quasi-graphoïde.

Lemme 5 *On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique usuelle, $n > 1$.*
a) Soit $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ un lacet différentiable tel que pour tout $t \in [0,1]$ on ait $||c'(t)|| = 1$. Alors la longueur de la courbe $c' : [0,1] \to S^{n-1}$ est plus grande que 2π.
b) Soit $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ un chemin de classe $\mathcal{C}^2$, périodique de période $T > 0$ et tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $||c''(t)|| \leq A||c'(t)||$ où A est une constante. Alors $T \geq \frac{2\pi}{A}$.

Preuve : a) Puisque $c(0) = c(1)$, pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire $< u, c'(t) >$ s'annule au moins une fois. Donc l'image de c' dans S^{n-1} n'est pas contenue dans un hémisphère.
b) Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x ||c'(t)||dt$ et φ sa bijection réciproque.
On pose $f = c \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $||f'(t)|| = 1$.
On vérifie que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f''(t) = \frac{1}{||c'(\varphi(t))||^4}(||c'(\varphi(t))||^2 c''(\varphi(t)) - < c'(\varphi(t)), c''(\varphi(t)) > c'(\varphi(t)))$$

et par suite

$$||f''(t)|| \leq \frac{||c''(\varphi(t))||}{||c'(\varphi(t))||^2} \leq A\varphi'(t) \ .$$

Notons $T_0 = H(T)$ la période de f. Alors $T = \int_0^{T_0} \varphi'(t)dt \geq \frac{1}{A}\int_0^{T_0} ||f''(t)||dt$.
D'après le a), $\int_0^{T_0} ||f''(t)||dt \geq 2\pi$. □

On déduit alors immédiatement la

Proposition 23 *Soit $X : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$. Notons J_X le jacobien de X.*
Si $\sup\limits_{\substack{(x,v)\in T\mathbb{R}^n \\ \|v\|=1}} \|J_X(x,v)\| = A$ *alors toute période non nulle de X est supérieure ou égale à* $\frac{2\pi}{A}$.

Preuve : Si c est un chemin intégral de X on a pour tout t, $c'(t) = X(c(t))$ et $c''(t) = J_X(c'(t))$. On a alors $\|c''(t)\| \leq A\|c'(t)\|$ et le lemme ci-dessus permet de conclure. □

Corollaire 6 *Soit $X : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs C^1. Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ il existe un réel $\eta_K > 0$ tel que si l'orbite de X passant par $x \in K$ est périodique de période $\tau_x > 0$ alors $\tau_x \geq \eta_K$.*

Remarque A. Weinstein m'a signalé que le lemme 5 ci-dessus est l'estimation de la courbure totale d'une courbe fermée due à Fenchel et que le corollaire 7 apparaît sous le nom de "Period bounding lemma" dans le livre de R. Abraham et J. Robbin sur les systèmes dynamiques.

Appendix B

Intégration locale des algébroïdes de Lie de J. Pradines

Nous allons décrire ici l'intégration locale des algébroïdes de Lie telle qu'elle a été définie par J. Pradines [Pra67, Pra68a, Pra68b] puis nous mettrons en évidence les liens entre cette construction et celle présentée dans le chapitre 4. Il s'agit ici d'une libre interprétation des travaux de J. Pradines mentionnés ci-dessus ainsi que de la thèse de R. Almeida [Alm80].

Comme nous l'avons remarqué au chapitre 4, l'intégration locale des algébroïdes de Lie repose sur l'application exponentielle ainsi que sur les propriétés des champs invariants à droite de groupoïdes. Nous complétons ici les rappels concernant ces notions puis nous expliquerons la démarche adoptée par J. Pradines.

Dans la suite, $G \rightrightarrows M$ désigne un groupoïde différentiable de base M de source α et de but β. On note $\mathcal{A}G$ son algébroïde de Lie, p son fléchage et k la dimension du fibré $\mathcal{A}G$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}G & \xrightarrow{p} & TM \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow \\ M & = & M \end{array} .$$

Si $\tilde{X}$ est une section locale de $\mathcal{A}G$, on note X le champ invariant à droite correspondant et φ_X^t son flot. Soit x un point de M, $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_k\}$ une base locale de $\mathcal{A}G$ sur un ouvert O de M contenant x et $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ les champs de vecteur invariants à droite correspondants. Il existe un voisinage ouvert Ω de $O \times \mathbb{R}^k$ contenant $O \times \{0\}$ tel que l'application suivante soit un difféomorphisme sur son image

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Exp}: & \Omega & \longrightarrow & G \\ & (x, \xi) & \mapsto & \varphi^1_{X_\xi}(x) \end{array}$$

où $X_\xi = t_1 X_1 + \ldots + t_k X_k$ lorsque $\xi = (t_1, \ldots, t_k)$.

On définit alors

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \Omega \times [-1,1] & \longrightarrow & M \times \mathbb{R}^k \\ & (y,\xi,t) & \mapsto & (\beta \circ \mathrm{Exp}(x,t.\xi),\xi) \end{array}$$

L'application Φ est le flot du champ de vecteurs χ sur Ω défini par

$$(y,\xi) \in \Omega \ \mapsto \ (y, p(X_\xi(y)), \xi, 0) \in T\Omega \subset TO \ . \tag{B.1}$$

La propriété suivante caractérise les champs invariants à droite.
Notons $T^\alpha G = \mathrm{Ker}(T\alpha)$ le fibré des champs α-verticaux. On définit

$$\begin{array}{rccc} \omega : & T^\alpha G & \longrightarrow & \mathcal{A}G \\ & (\gamma, v) & \mapsto & (TR_{\gamma^{-1}})_\gamma(v) \end{array}$$

qui est un isomorphisme en restriction à chaque fibre et vérifie les propriétés suivantes :

i) $P \circ \omega = T\beta$;

ii) si $\tilde{X}$ est une section locale de $\mathcal{A}G$ et X est le champ de vecteurs local invariant à droite correspondant, alors pour tout $\gamma \in \mathrm{dom}(X)$,

$$\omega(X(\gamma)) = \tilde{X}(\beta(\gamma)) \ .$$

Notons $G \times_\beta G$ le produit fibré de G avec lui-même au-dessus de l'application but. On considère alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \delta : & G \times_\beta G & \longrightarrow & G \\ & (\gamma_1, \gamma_2) & \mapsto & \gamma_1^{-1}.\gamma_2 \end{array} \ .$$

C'est une submersion surjective. On note $\mathcal{F}_\beta$ le feuilletage régulier sur $G \times_\beta G$ dont les feuilles sont les composantes connexes des images inverses par δ des points de G. Si l'on identifie $T(G \times_\beta G)$ au produit fibré $TG \times_{T\beta} TG$, on vérifie aisément que si $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ est une base locale de champs invariants à droite alors $\{(X_1, X_1), \ldots, (X_k, X_k)\}$ est une base locale du fibré tangent à $\mathcal{F}_\beta$.
D'autre part, remarquons que pour tout $\gamma \in G$, la feuille F_γ de $\mathcal{F}_\beta$ passant par $(\beta(\gamma), \gamma)$ est donnée par $F_\gamma = \{(\gamma', \gamma'.\gamma) \ ; \ \gamma' \in G \text{ tel que } \alpha(\gamma') = \beta(\gamma)\}$.

L'idée de la construction de J. Pradines pour intégrer localement les algébroïdes de Lie est alors la suivante.
On définit d'abord une application but via le flot pris en 1 d'un certain champ de vecteurs (cf. B.1 ci-dessus). Puis on "retrouve" le feuilletage $\mathcal{F}_\beta$ afin de pouvoir définir le produit et l'inversion. Pour ce faire, il faut préalablement définir l'application ω. Plus précisément :

Soit $\mathcal{A} \to M$ un algébroïde de Lie sur une variété M et $p : \mathcal{A} \to TM$ son fléchage. On identifie M avec son image dans $\mathcal{A}$ par la section nulle; on dira que M est *l'ensemble des unités* de $\mathcal{A}$.
Il s'agit de munir un voisinage de M dans $\mathcal{A}$ d'une structure de groupoïde différentiable local dont l'algébroïde de Lie est $\mathcal{A}$.
On note α la projection de $\mathcal{A}$ sur M. Ce sera la source.
On identifie $\mathrm{Ker}(T\alpha)$ au produit fibré $\mathcal{A} \times_\alpha \mathcal{A}$. On a la *suite exacte fondamentale* de fibrés sur $\mathcal{A}$:

$$0 \to \mathcal{A} \times_\alpha \mathcal{A} \xrightarrow{i} TA \xrightarrow{(id,T\alpha)} \mathcal{A} \times_M TM \to 0$$

On se donne ensuite une connection sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire un morphisme de fibrés $c : \mathcal{A} \times_M TM \to T\mathcal{A}$ tel que $(id, T\alpha) \circ c$ est l'identité sur $\mathcal{A} \times_M TM$.
On considère le champ de vecteurs sur $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{rccc} \chi : & \mathcal{A} & \longrightarrow & T\mathcal{A} \\ & z & \mapsto & c(z, p(z)) \end{array} .$$

On note Φ^t le flot de ce champ de vecteurs. Il existe un ouvert Ω de $\mathcal{A}$ contenant la section nulle sur lequel Φ^1 est défini. On définit le but $\beta : \Omega \to M$ par $\beta := \alpha \circ \Phi^1$.
L'étape suivante consiste à retrouver le feuilletage $\mathcal{F}_\beta$, qui va permettre de récupérer le produit local et l'inversion. Pour ce faire J. Pradines, décrit les "équations de structure" d'un groupoïde différentiable. Ces équations font intervenir la *courbure* de l'algébroïde de Lie et s'obtiennent à partir de l'étude de diverses connexions associées à $\mathcal{A}$, ainsi que des dérivées covariantes correspondantes [Pra68b, Pra67, Alm80].
Ces équations caractérisent l'application $\omega : T^\alpha\mathcal{A} \to A$. Ainsi, J. Pradines aboutit à l'existence d'un ouvert Ω de $\mathcal{A}$ contenant la section nulle et d'un morphisme d'algébroïdes de Lie $\omega : T^\alpha\Omega \to \mathcal{A}$, où $T^\alpha\Omega$ est le noyau de $T\alpha$ restreint à Ω, tel que
1- $\omega(z, 0) = \beta(z)$ pour tout $z \in \Omega$,
moyennant l'identification naturelle de $T^\alpha\Omega$ avec le produit fibrés $\Omega \times_\alpha \mathcal{A}$, on a
2- $\omega(x, v) = v$ pour tout $x \in M$ et $v \in \mathcal{A}_x$,
3- $p \circ \omega = T\beta$.
L'application ω permet alors de trouver au voisinage de tout point de Ω une base de champs "invariants à droite". Effectivement, quitte à restreindre encore Ω autour des unités, l'assertion 1- ci-dessus garantit que ω est un isomorphisme en restriction à chaque fibre. Donc si $\tilde{X}$ est une section locale de $\mathcal{A}$ dont l'image est contenue dans Ω, on définit le champ "invariant à droite" correspondant comme l'unique section locale X de $T^\alpha\Omega$ satisfaisant à $\omega(X(z)) = X(\tilde{\beta}(z))$. On considère alors le feuilletage $\mathcal{F}_\beta$ sur $\Omega \times_\beta \Omega$ engendré par les champs locaux (X, X) à valeur dans $T(\Omega) \times_\beta T(\Omega)$, où X est un champ "invariant à droite".
Après avoir montré que $\mathcal{F}_\beta$ est régulier, en examinant les propriétés de transversalité de ce feuilletage le long de la base, on vérifie que les feuilles sont les graphes de

difféomorphismes locaux. C'est-à-dire que pour tout $z \in \Omega$, il existe un voisinage U de $\beta(z)$ dans $\alpha^{-1}(\beta(z)$ et un difféomorphisme $h_z : U \to h_z(U) \subset \alpha^{-1}(\alpha(z))$ tels que la feuille F de $\mathcal{F}_\beta$ passant par $(\beta(z), z)$ coïncide avec le graphe de h_z sur un voisinage de $(\beta(z), z)$. On définit alors le produit local par $z'.z = h_z(z')$ pour tout $z' \in U$. On définit l'inverse par $z^{-1} = h_z^{-1}(\alpha(z))$ lorsque cela a un sens.

La démarche que nous avons adoptée au chapitre 4 est essentiellement la même que celle ci-dessus. En fait, il existe deux types d'identifications entre un voisinage des unités d'un groupoïde différentiable et un voisinage de la section nulle de son algébroïde de Lie qui donnent donc deux modèles équivalents. Dans les deux cas, la difficulté réside, une fois que l'on a déterminé l'application but, à retrouver les champs invariants à droite. La méthode adoptée par J. Pradines, via les équations de structure est très abstraite et difficile à comprendre. J'ai donc pris le parti de me baser sur l'autre modèle, pour lequel il suffit d'adapter aux algèbres de Lie de dimension infinie des méthodes d'intégration classiques d'algèbre de Lie de dimension finie (cf. Formule de Baker, Campbell, Hausdorff généralisée). D'autre part, une fois les "champs invariants à droite déterminés", j'ai utilisé directement, le fait que leur flot se devait d'être des translations à gauche du groupoïde cherché sans passer par le feuilletage $\mathcal{F}_\beta$. En particulier, si Υ est le pseudogroupe de difféomorphismes locaux engendré par ces flots, alors tout $\varphi \in \Upsilon$, doit vérifier que si $\varphi(x) = x$ pour une unité x alors $\varphi(z) = z$ pour tout z ayant x pour but. L'hypothèse de fléchage injectif au-dessus d'un ouvert dense simplifie considérablement la preuve de cette propriété. Cependant on doit pouvoir la montrer en toute généralité en utilisant les propriétés de transversalité du feuilletage $\mathcal{F}_\beta$.

Bibliography

[Alm80] R. Almeida. *Teoria de Lie para os groupóides diferenciáveis*. PhD thesis, Universidade de Sao Paulo, 1980.

[AM85] R. Almeida and P. Molino. *Suites d'Atiyah et feuilletages transversalement complets. C.R.A.S. série I*, 300 (1):pages 13–15, 1985.

[Big86] B. Bigonnet. *Holonomie et graphe de certains feuilletages avec singularités*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, 1986.

[BM58] R. Bott and J. Milnor. *On the parallelizability of the spheres. Bull. Amer. Math. Soc.*, 64:pages 87–89, 1958.

[BP85] B. Bigonnet and J. Pradines. *Graphe d'un feuilletage singulier. C.R.A.S.*, 300 (13):pages 439–442, 1985.

[CdSW99] A. Cannas da Silva and A. Weinstein. *Geometric Models for Noncommutative Algebras*. Berkeley Mathematics Lecture Notes series, 1999.

[CDW87] A. Coste, P. Dazord, and A. Weinstein. *Groupoïdes symplectiques. Publications du Dep. de Maths. de l'Univ. de Lyon 1*, 2/A, 1987.

[Co82] A. Connes. *A survey of foliations and operators algebras*. In providence AMS, editor, *Operator algebras and applications, Part 1*, volume 38 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 521–628, 1982.

[Co86] A. Connes. *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation*. In Longman, editor, *Geometric methods in operator algebras (Kyoto, 1983)*, volume 123 of *Pitman Res. Notes in Math.*, pages 52–144, 1986.

[Co90] A. Connes. *Noncommutative Geometry*. Academic Press, 1990.

[CS84] A. Connes and G. Skandalis. *The longitudinal index theorem for foliations. Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.*, 20:pages 1139–1183, 1984.

[Daz84] P. Dazord. *Holonomie et feuilletages singuliers.* *C.R.A.S.*, 298 (2):pages 27–30, 1984.

[Daz97] P. Dazord. Groupoïde d'holonomie et géométrie globale. *C.R.A.S.*, 324 (1):pages 77–80, 1997.

[Ehr61] C. Ehresmann. *Structures feuilletées.* In *Proc. 5 th Canad. Math. Congress*, 1961.

[Ehr65] C. Ehresmann. *Catégories et structures.* Dunod, Paris, 1965.

[Est84] W.T. van Est. *Rapport sur les S-atlas.* *Asterisque*, 116:pages 235–292, 1984.

[FS82] T. Fack and G. Skandalis. *Sur les représentations des ideaux de la C^*-algèbre d'un feuilletage.* *J.Operator Theory*, 8:pages 95–129, 1982.

[God91] C. Godbillon. *Feuilletages - Etudes géométriques*, volume 98 of *Progress in Math.* Birkhäuser Verlag, 1991.

[Hae84] A. Haefliger. *Groupoïdes d'holonomie et classifiants.* *Astérisque*, 116:pages 70–97, 1984.

[Hec93] G. Hector. *Groupoïdes, feuilletages et C^*-algèbres.* In *Geometric study of foliations*, pages 3–34, 1993.

[HS83] M. Hilsum and G. Skandalis. *Stabilité des C^*-algèbres de feuilletages.* *Ann. Inst. Fourier*, 33:pages 201–208, 1983.

[HS87] M. Hilsum and G. Skandalis. *Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov.* *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 20 (4):pages 325–390, 1987.

[LG94] P-Y Le Gall. *Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes.* PhD thesis, Univ. Paris VII, 1994.

[Mac87] K. Mackenzie. *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, volume 124 of *London Mathematical Society Lecture Note.* Cambridge university press, 1987.

[Mac95] K. Mackenzie. *Lie algebroids and Lie pseudoalgebras.* *Bull. London Math. Soc.*, 27:pages 97–147, 1995.

[Mol88] P. Molino. *Riemannian Foliations*, volume 73 of *Progress in Mathematics.* Birkhauser, Boston.Basel, 1988.

[Mon98] B. Monthubert. *Groupoïdes et calcul pseudo-différentiel sur les variétés à coins*. PhD thesis, Université Paris VII-Denis Diderot, 1998.

[MP97] I. Moerdijk and D.A. Pronk. *Orbifolds, Sheaves and groupoids. K-Theory*, 12:pages 2–21, 1997.

[NWX97] V. Nistor, A. Weinstein, and P. Xu. *Pseudodifferential operators on differential goupoïds*. Preprint, 1997.

[Phi87] J. Phillips. *The holonomic imperative and the homotopy groupoid of a foliated manifold. Rocky Mountain J. of Math.*, 17 (1):pages 151–165, 1987.

[Pra67] J. Pradines. *Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. C.R.A.S.*, 264:pages 245–248, 1967.

[Pra68a] J. Pradines. *Géométrie différentielle au-dessus d'un groupoïde. C.R.A.S.*, 266:pages 1194–1196, 1968.

[Pra68b] J. Pradines. *Troisième théorème de Lie pour les groupoïdes différentiables. C.R.A.S.*, 267:pages 21–23, 1968.

[Pra84] J. Pradines. *Feuilletages : holonomie et graphes locaux. C.R.A.S. série I*, 298 (13):pages 297–300, 1984.

[Pra85] J. Pradines. *How to define the differentiable graph of a singular foliation. C. de Top. et Geom. Diff. Cat.*, XXVI (4):pages 339–381, 1985.

[Ren80] J. Renault. *A goupoïde approach to C^*-algebras*, volume 793 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1980.

[Ren82] J. Renault. *C^*-algebras of groupoids and foliations. Proc. Sympos. Pure Math.*, 38:pages 339–350, 1982.

[Spi70] M. Spivak. *Differential Geometry*, volume 1. 1970.

[Ste74] P. Stefan. *Accessible sets, orbits and foliations with singularities. Proceedings of the London Math. Society*, 29:pages 699–713, 1974.

[Sus73] H.J. Sussmann. *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. Trans. of the A.M.S.*, 180:pages 171–188, 1973.

[VE85] P. Ver Eecke. *Sur le groupe fondamental d'un feuilletage singulier. C.R.A.S.*, 301 (18):pages 837–840, 1985.

[Wei87] A. Weinstein. *Symplectic groupoids and Poisson manifolds. Bull. Amer. Math. Soc.*, 16:pages 101–104, 1987.

[Wei89] A. Weinstein. *Blowing up realizations of Heisenberg-Poisson manifolds. Bull. Sci. Math.*, 113 (2):pages 381–406, 1989.

[Wei96] A. Weinstein. *Groupoids: Unifying internal and external symmetry. Notices Amer. Math.Soc.*, 43:pages 744–752, 1996.

[Win83] H.E. Winkelnkemper. *The graph of a foliation. Ann. Glob. Analysis and Geometry*, 1 (3):pages 51–75, 1983.