



**HAL**  
open science

# UN MODÈLE DIDACTIQUE DE REFERENCE POUR LA CONSTRUCTION DES SAVOIRS ET L'ACTUALISATION DES CONNAISSANCES SUR LA NOTION DE LIMITE AU MALI

Cheick Oumar Doumbia

► **To cite this version:**

Cheick Oumar Doumbia. UN MODÈLE DIDACTIQUE DE REFERENCE POUR LA CONSTRUCTION DES SAVOIRS ET L'ACTUALISATION DES CONNAISSANCES SUR LA NOTION DE LIMITE AU MALI. Mathématiques [math]. Université Fédérale de Bahia, 2020. Français. NNT : . tel-03750217

**HAL Id: tel-03750217**

**<https://hal.science/tel-03750217>**

Submitted on 11 Aug 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ FÉDÉRALE DE BAHIA**  
**UNIVERSITÉ ÉTATIQUE DE FEIRA DE SANTANA**  
**BRÉSIL**



**Cheick Oumar Doumbia**

**UN MODÈLE DIDACTIQUE DE REFERENCE POUR LA  
CONSTRUCTION DES SAVOIRS ET L'ACTUALISATION DES  
CONNAISSANCES SUR LA NOTION DE LIMITE AU MALI**

**Thèse sur l'enseignement, la philosophie et l'histoire des Sciences de  
L'Université Fédérale de Bahia et l'Université Étatique de Feira de  
Santana**

**Salvador / Bahia**

**2020**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA**  
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA**  
**BRASIL**



**Cheick Oumar Doumbia**

**UM MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA  
CONSTRUÇÃO DE SABERES E ATUALIZAÇÃO DE  
CONHECIMENTOS SOBRE A NOÇÃO DE LIMITE NO MALI**

**Tese do programa de pós-graduação em ensino, filosofia e história das  
ciências, da Universidade Federal da Bahia / Universidade Estadual de  
Feira de Santana**

**Salvador / Bahia**

**2020**

**UNIVERSITÉ FÉDÉRALE DE BAHIA – BRÉSIL**

**Cheick Oumar Doumbia**

**UN MODÈLE DIDACTIQUE DE REFERENCE POUR LA  
CONSTRUCTION DES SAVOIRS ET L'ACTUALISATION DES  
CONNAISSANCES SUR LA NOTION DE LIMITE AU MALI**

**Thèse sur l'enseignement, la philosophie et l'histoire des Sciences de  
L'Université Fédérale de Bahia et l'Université Étatique de Feira de  
Santana**

Thèse présentée au jury du Programme de Post-Graduation en Enseignement, Philosophie et Histoire des Sciences de UFBA/UEFS comme exigence partielle pour l'obtention du titre de docteur.

Directeur: Dr. Luiz Marcio Santos Farias

CoDirecteur: Dr. Saddo Ag Almouloud

**SALVADOR / Bahia**

**2020**

## **Membres du jury**

### **Rosiléia De Oliveira Almeida**

Professeure à l'Université Fédérale de Bahia UFBA Brésil (rapporteure)

### **André Luis Mattedi Dias**

Professeur à l'Université Fédérale de Bahia UFBA, Brésil (rapporteur)

### **José Luiz De Freitas Magalhes**

Professeur à l'Université Fédérale de Matto Grosso do Sul UFMS Brésil (Examineur)

### **José Messildo Viana Nunes**

Professeur à l'Université Fédérale de Para UFPA Brésil (rapporteur)

### **Mamadou Soulymane Sangaré**

Professeur à l'École Normale Supérieure de Bamako Mali ENSUP (rapporteur)

### **Abdel Hamid Chaachoua**

Professeur à l'Université de Grenoble Alpes UGA France (rapporteur)

### **Pierre Job**

Professeur à Brussels Management School ICHEC Belgique (rapporteur)



J'autorise la reproduction et la diffusion de tout ou partie de cette thèse par tout moyen de photocopieurs ou électroniques, à des fins d'étude et de recherche, à condition que la source soit citée.

Signature : 

Lieu et date : Salvador, le 15 mai 2020





Doumbia, Cheick Oumar.

Un modèle didactique de reference pour la construction des savoirs et l'actualisation des connaissances sur la notion de limite au Mali / Cheick Oumar Doumbia. – 2020.

280 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Marcio Santos Farias.

Coorientador: de Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.

Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia. Faculdade de Educação, Salvador, 2020. Programa de Pós-Graduação em convênio com a Universidade Estadual de Feira de Santana.

1. Matemática - Estudo e ensino (Superior) - Mali. 2. Funções (Matemática) - Estudo e ensino (Superior) - Mali. 3. Conceitos - Estudo e ensino (Superior). I. Farias, Marcio Santos. II. Almouloud, Saddo Ag. III. Universidade Federal da Bahia. Faculdade de Educação. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. IV. Universidade Estadual de Feira de Santana. V. Título.

CDD 510.7 – 23. ed.

## **Dédicace**

À mes chers parents Broulaye DOUMBIA et Hadia TRAORE.

## REMERCIEMENTS

Je remercie très sincèrement mes directeurs de thèse professeur Luiz Marcio Santos FARIAS de l'Université Fédérale de Bahia et le professeur Saddo Ag ALMOULOU de l'Université Pontificale de Sao Paulo qui n'ont ménagé aucun effort pour diriger cette thèse.

Je remercie les professeurs Rosileia Oliveira de ALMEIDA de UFBA, André Luis MATTEDI UFBA, Mahamadou Souleymane SANGARE de l'ENSUP, Abdel Hamid CHAACHOUA de l'Université de Grenoble France, Pierre JOB de la Belgique, José Luiz Magalhães DE FREITAS de UFMS, José Messildo Viana NUNES de UFPA de s'intéresser à notre travail et d'avoir accepté d'être membres du jury. Je vous remercie pour votre contribution qui m'a permis d'améliorer le travail.

Je remercie la professeure Michèle Artaud pour sa lecture et critiques constructives, je remercie également les professeurs Afonso Henriques de UESC et Cileda de Queiroz e Silva Coutinho de la PUC-SP pour leurs observations.

Je remercie mes collègues du Département de Mathématiques de l'ENSUP pour les critiques, suggestions et encouragement tout au long de la construction de cette thèse.

Mes remerciements vont aux collègues et amies brésiliennes Maridete Brito Cunha Ferreira, Grace Baquero, Maria Eliana Silva et Maria de Fatima Costa Leal pour leur soutien indéfectible durant tout mon séjour à Bahia.

Mes remerciements à madame Vanderli Salatiel de Sao Paulo pour l'hospitalité, les conseils et les orientations, vous êtes une inconditionnelle pour les africains et particulièrement pour les maliens vivant à Sao Paulo

Je remercie son excellence monsieur l'Ambassadeur du Mali au Brésil Mamadou Maki TRAORE et tout son personnel pour l'accueil et le soutien qu'il m'a réservé lors de mes deux passages à Brasilia.

Je remercie mes collègues du NIPEDICMT pour leur bonne collaboration.

Je remercie le CAPES d'avoir financé ma formation

Je remercie également la Direction de L'École Normale Supérieure de m'avoir autorisé à venir faire ma thèse au Brésil dans le cadre de la convention de coopération interuniversitaire qui lie l'ENSUP et l'UFBA. Ce type d'accord est très enrichissant pour

les institutions concernées et pour nous une source de grand contentement, en particulier pour son dévouement à la recherche.

Je remercie le proviseur du Lycée Kankou de Daoudabougou de nous avoir autorisé à faire expérimentation dans son Lycée,

Je remercie également monsieur Mohamed Ag ARIMA le professeur de la terminale où nous avons passé l'expérimentation et tous les élèves qui ont participé à notre expérimentation ;

Je remercie mes parents de m'avoir donné la chance d'étudier.

Je remercie ma femme et mes enfants qui ont supporté avec patience mon absence pendant ses années d'études.

Mes remerciements vont également à mes frères et sœurs pour leur appui moral et financier pendant mon absence.

Je remercie tous les professeurs qui ont participé à ma formation du fondamental au supérieur.

.

## RÉSUMÉ

Nous nous intéressons à l'étude du concept de limite de fonction, plus particulièrement aux aspects épistémologique et didactique de ce concept mathématique. L'objet de notre étude est d'aider les futurs enseignants, participant de notre projet de recherche, à construire des situations d'enseignements permettant aux élèves de donner un sens mathématique à la notion de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point et de l'utiliser pour montrer qu'un réel donné est la limite d'une fonction en un point donné. Notre recherche est qualitative et elle est à visé didactique, elle s'insère dans le domaine de la Didactique des Mathématiques avec comme cadres théoriques principales la Théorie des Situations Didactiques et la Théorie Anthropologique du Didactique. Dans un premier temps, nous faisons une enquête épistémologique exploratoire au près des enseignants du Lycée et des futurs enseignants, pour analyser leur conception et ensuite nous élaborons une situation expérimentale que nous appliquons aux élèves de la terminale sciences exactes, pour mettre en évidence les savoirs et connaissances construites sur la notion de limite. Nous nous proposons plus spécifiquement de répondre aux questions suivantes : Quels savoirs/connaissances sur le concept de limite, sont construits par les élèves, durant les articulations et interactions des cadres algébrique, géométrique et analytique, et les registres de représentation sémiotique dans le cas d'un Modèle Épistémologiques Alternatif de Référence construit en s'appuyant sur les dimensions épistémologiques, écologique et économico-institutionnel de l'objet mathématique en étude ? Et des sous questions telles que : Ce modèle permet-il de réduire l'écart entre le savoir savant et le savoir enseigné ? Permet-il de faire fonctionner la définition formalisée ? N'y-a-t-il pas une confusion entre calculer la limite en un point et étudier la continuité en ce point ? Comment la notion de limite a-t-elle évoluée dans le système éducatif malien ? Et pour quelles raisons ? Quelle compréhension les élèves et enseignants ont-ils actuellement de la définition de la limite ? Quelles sont les connaissances nécessaires pour comprendre la définition formelle de la limite ? Quels sont les différentes techniques utilisées ? Quelle est l'importance de la prise en compte du domaine de définition dans le calcul de la limite ? À quels niveaux d'enseignement la définition formalisée doit-elle faire son apparition ? Quelle est l'importance de la définition formelle ? L'analyse de la revue de la littérature montre que c'est la définition intuitive qui émerge et s'érige en obstacle pour la compréhension de la définition formelle précise. Les enseignants qui ont fait l'objet de notre enquête ont une conception dynamique de la limite, et nos résultats montrent qu'il est nécessaire d'inclure l'histoire des mathématiques dans le cursus des futurs professeurs, que la définition formalisée de la limite n'est pas inaccessible aux élèves. Sa manipulation permet aux élèves de mettre à jour beaucoup de connaissances qui lui sont connexes telles que la notion d'intervalle, inéquations avec valeur absolue, distance, composition, décomposition de fonction ordre dans  $\mathbb{R}$  etc. La définition formelle précise permet de corriger des obstacles tels que la limite atteinte ou non, l'effacement des quantificateurs, la confusion entre la limite et la continuité, la prise en compte de l'ensemble de définition dans le calcul de la limite, elle marque le passage de l'algèbre à l'analyse.

**Mots-clés :** Concept de limite, Définition formelle, Enseignement-apprentissage, Cadre Algébrique et Cadre Géométrique.

## ABSTRACT

We are interested in the study of the concept of function limit, more particularly in the epistemological and didactic aspects of this mathematical concept. The object of our study is to help future teachers, participating in our research project, to build teaching situations allowing students to give a mathematical meaning to the notion of limit of a numerical function of a real variable at a point and to use it to show that a given real is the limit of a function at a given point. Our research is qualitative, and it is aimed didactically, it fits into the field of Mathematics Didactics with as theoretical frameworks the theory of didactic situations, the anthropological theory of didactic, the theory of conceptual fields and the theory of registers of semiotic representation. We propose more specifically to answer the following questions: What knowing / knowledge on the concept of limit, are built by the students, during the articulations and interactions, in the case of an Alternative Epistemological Model of Reference built by leaning on the epistemological, ecological and economic-institutional dimensions of the mathematical object under study? And sub-questions such as: Does this model reduce the gap between scholarly knowledge and academic knowledge? Does it allow the formalized definition to work? Is there not a confusion between calculating the limit at a point and studying continuity at this point? How has the notion of limit evolved in the Malian education system? And why? What understanding do students and future teachers currently have of defining the limit? What knowledge is needed to understand the formal definition of the limit? What are the different techniques used? How important is it to take the domain of definition into account when calculating the limit? At what educational levels should the formalized definition appear? How important is the formal definition? Analysis of the literature review shows that it is the intuitive definition that emerges and stands in the way of understanding the precise formal definition. The teachers who were the subject of our survey have a dynamic conception of the limit, and our results show that it is necessary to include the history of mathematics in the curriculum of future teachers, that the formalized definition of the limit is not inaccessible to students. Its manipulation allows students to update a lot of knowledge related to it such as the notion of interval, inequalities with absolute value, distance, composition, decomposition of function order in  $\mathbb{R}$  etc. The precise formal definition makes it possible to correct obstacles such as the limit reached or not, the erasure of the quantifiers, the confusion between the limit and the continuity, the taking into account of the domain of definition in the calculation of the limit, it marks the passage from algebra to analysis.

**Keywords:** Limit concept, Formal definition, Teaching-learning, Algebraic framework, and Geometric framework.

## RESUMO

Estamos interessados no estudo do conceito de limite de função, mais particularmente nos aspectos epistemológicos e didáticos desse conceito matemático. O objetivo de nosso estudo é ajudar futuros professores, participantes de nosso projeto de pesquisa, a construir situações de ensino que lhes permitissem atribuir um significado matemático à noção de limite de uma função numérica de uma variável real em um ponto e usá-la para mostrar que um dado real é o limite de uma função em um determinado ponto. Nossa pesquisa é qualitativa e enquadra-se no campo da Didática da Matemática, tendo como referenciais teóricos a teoria das situações didáticas, a teoria antropológica do didático, a teoria dos campos conceituais e a teoria dos registros de representação semiótica. Propomos mais especificamente responder às seguintes perguntas: Quais saberes / conhecimentos sobre o conceito de limite são construídos por alunos, durante as articulações e interações, no caso de um Modelo Epistemológico Alternativo de Referência construído apoiando-se nas dimensões epistemológicas, ecológicas e econômico-institucionais do objeto matemático em estudo? Para responder à esta questão, tecemos as seguintes questões intermediárias: Este modelo reduz a distância entre o conhecimento acadêmico e o conhecimento ensinado? Permite que a definição formal de limite funcione? Existe uma confusão entre calcular o limite em um ponto e estudar a continuidade nesse ponto? Como fazer evoluir a noção de limite no sistema educacional do Mali? E por quais razões? Qual entendimento os alunos e professores têm atualmente da definição do limite? Quais conhecimentos são necessários para entender a definição formal do limite? Quais são as diferentes técnicas usadas? Qual é a importância de levar em consideração o domínio de definição no cálculo do limite? Em quais níveis educacionais a definição formalizada deve aparecer? Qual é a importância da definição formal? A análise da revisão da literatura mostra que é a definição intuitiva que surge e impede o entendimento da definição formal. Os professores que foram sujeitos de nossa pesquisa têm uma concepção dinâmica do limite, e nossos resultados mostram que é necessário incluir a história da matemática no currículo dos futuros professores, que a definição formal do conceito de limite não é inacessível para os alunos. Sua manipulação permite que os alunos atualizem muitos conhecimentos relacionados a ele, como a noção de intervalo, as desigualdades com valor absoluto, a distância, a composição, a decomposição de função, de ordem em  $\mathbb{R}$  etc. A definição formal permite corrigir obstáculos como “o limite atingido ou não”, a ausência dos quantificadores, a confusão entre o limite e a continuidade, a consideração do domínio de definição no cálculo do limite, marca a passagem da álgebra para a análise.

**Palavras-chaves:** conceito de limite, definição formal, ensino-aprendizagem, quadro algébrico e quadro geométrico.

## LISTE DES FIGURES

Figure 1: Différentes constructions et définition des nombres réels.....	70
Figure 2: Illustration de la situation.....	81
Figure 3: Illustration de la situation.....	83
Figure 4: Représentation de la fonction donnée .....	86
Figure 5: Illustration de la situation.....	88
Figure 6: Illustration de la situation.....	88
Figure 7: Illustration de l'exemple .....	89
Figure 8: Illustrations de l'exemple.....	90
Figure 9 – Répartition d'un champ.....	106
Figure 10 - Production d'un groupe de futurs profs.....	110
Figure 11 - production d'un groupe de futurs profs .....	111
Figure 12 - Unité d'analyse des processus didactique.....	113
Figure 13- Carte conceptuelle sur le concept de limite .....	115
Figure 14: Organisation mathématique régionale .....	123
Figure 15 – Limite de $f$ suivant la nature de $a$ .....	124
Figure 16 – Continuité ou non continuité de la fonction $f$ .....	125
Figure 17 – la fonction représentée dans différents registres de représentation sémiotique.....	125
Figure 18 – Nature de la fonction $f$ .....	125
Figure 19 - Extrait du livre ALEPH1 Analyse/Probabilité 1 <sup>ère</sup> CDE 1972 .....	135
Figure 20 - Extrait du manuel Alpeph1 Analyse/probabilités 1 <sup>ère</sup> CDE 1972 .....	136
Figure 21 - Extrait du manuel Alpeph1 Analyse/probabilités 1 <sup>ère</sup> CDE 1972 .....	136
Figure 22 - Extrait du livre Alpeph 1 Analyse/probabilités 1 <sup>ère</sup> CDE et fonctions/calcul intégral terminale B 1972 .....	137
Figure 23 - Extrait de ALEPH01 1972.....	137
Figure 24 - Extrait du manuel collection Transmath 1 <sup>ère</sup> S 1986 .....	140
Figure 25 - Extrait du manuel Transmath 1 <sup>ère</sup> S, 1971 .....	141
Figure 26 - Extrait du manuel Collection Queysane- Revuz terminale B 1981.....	143
Figure 27 - Extrait du manuel Collection Queysane- Revuz terminale B 1981.....	144
Figure 28 - Extrait du manuel Collection Queysane- Revuz terminale B 1981.....	145
Figure 29 - Extrait du manuel Collection Queysane- Revuz terminale B 1974.....	146
Figure 30 - Extrait du manuel Collection Queysane- Revuz terminale B 1981.....	147
Figure 31 extrait de collection Queysanne-Revuz terminale B 1981 .....	148
Figure 32 extrait du manuel problèmes de mathématiques et leurs solutions terminale CDE 1975 .....	150
Figure 33 extrait du manuel problème de mathématiques avec leurs solutions terminales CDE tome 4 de 1975 .....	151
Figure 34 extrait du livre Manuel problème de mathématiques avec leurs solutions terminales CDE tome 4 de 1975 .....	152
Figure 35 extrait du livre Manuel problème de mathématiques avec leurs solutions terminales CDE tome 4 de 1975 .....	153
Figure 36 extrait d'un ancien cahier d'élève de 1974.....	155
Figure 37 extrait d'un ancien cahier d'élève de 1974.....	156
Figure 38 extrait d'un ancien cahier d'élève de 1974.....	157
Figure 39 : extrait d'un ancien cahier de 1974 .....	158
Figure 40 extrait d'un ancien cahier d'élève de 1974.....	159
Figure 41 extrait d'un ancien cahier d'élève de 1974.....	160
Figure 42 - Extrait de Collection IRMA 1 <sup>ère</sup> D 1986 .....	162



Figure 43 - Extrait de Collection IRMA 1ère D 1986.....	163
Figure 44 - Extrait de Collection IRMA 1ère D 1986.....	163
Figure 45 - Extrait de Collection IRMA 1ère D 1986.....	164
Figure 46 extrait de la collection Transmath : Mathématiques 1ères SE tome1 1991.....	166
Figure 47 extrait de la collection Transmath 1ère SE 1991.....	167
Figure 48 extrait du manuel Collection CIAM 1ère SM 1998.....	177
Figure 49 - Modèle Épistémologique de Référence extrait des manuels scolaires.....	184
Figure 50 – Représentation de la fonction f.....	187
Figure 51 – Représentation de la fonction par morceaux.....	188
Figure 52 – Représentation de la fonction présentée à l’item c) la situation 1.....	188
Figure 53 – Représentation de la fonction f.....	195
Figure 54 – Représentation graphique de la fonction g.....	196
Figure 55 – Représentation de la fonction g.....	196
Figure 56 - Représentation des fonctions e visualisation de la solution.....	200
Figure 57 – Graphique de la fonction donnée.....	202
Figure 58 – Graphique la fonction de la question 2 de la situation 3.....	202
Figure 59 – Représentation de l’item 3 de la situation 3.....	203
Figure 60 - Représentation de la fonction.....	204
Figure 61. Représentation de la solution de cette question.....	205
Figure 62. Représentation de la solution.....	206
Figure 63- Graphique de la fonction f définie para $f(x) = x + 1$ .....	208
Figure 64. Représentation de la fonction.....	210
Figure 65 – Graphique de la fonction f.....	213
. Figure 66 – Représentation de la fonction.....	215
Figure 67 - Figure de la fonction f du problème 3.....	217
Figure 68. Représentation de la fonction.....	218
Figure 69 - Représentation de la fonction.....	220
Figure 70 - Représentation d’une fonction par intervalle.....	221
Figure 71 Représentation de la fonction.....	221
Figure 72 - Représentation de la fonction.....	222
Figure 73. Graphique de la fonction de l situation 1.....	234
Figure 74 - Représentation de la fonction.....	235
Figure 75 – Représentation de la fonction de la situation 1, item c).....	235
Figure 76 . Production d’élève.....	238
Figure 77 - Production d’élève.....	239
Figure 78 - Production d’élève.....	240
Figure 79. Production d’élève.....	241
Figure 80. Production d’élève.....	242
Figure 81 - Production d’élève.....	243
Figure 82 Production d’élève.....	243
Figure 83 Production d’élève.....	245
Figure 84. Production d’élève.....	245
Figure 85. Production d’élève.....	246
Figure 86. Production d’élève.....	247
Figure 87. Production d’élève.....	247
Figure 88. Production d’élève.....	248
Figure 89. Production d’élève.....	249
Figure 90. Production d’élève.....	250

Figure 91. Production d'élève - Erreur de type $E_1$ .....	251
Figure 92 - Production d'élève – Erreur de type $E_2$ .....	252
Figure 93 - Production d'élève.....	253
Figure 94 - Production d'élève.....	254
Figure 95. Production d'élève.....	255
Figure 96. Production d'élève.....	255
Figure 97. Production d'élève.....	256
Figure 98. Production d'élève.....	256
Figure 99. Production d'élève.....	257
Figure 100 - Graphique 1 de la situation 3.....	258
Figure 101 - Graphique 2 de la situation 3.....	258
Figure 102 - Graphique 3 de la situation 3.....	259
Figure 103. Production d'élève.....	260
Figure 104. Production d'élève.....	260
Figure 105. Production d'élève.....	261
Figure 106 - Graphique du problème 1.....	262
Figure 107. Production d'élève.....	263
Figure 108 - Production d'élève.....	264
Figure 109 - Graphique de la fonction $f$ du problème 2.....	265
Figure 110 - Graphique de la fonction $f$ du problème 3.....	266
Figure 111 - Graphique de la fonction $f$ du problème 4.....	268
Figure 112 - Graphique de la deuxième fonction du problème 4.....	268
Figure 113. Production d'élève.....	269
Figure 114. Production d'élève.....	270
Figure 115. Production d'élève.....	271
Figure 116. Production d'élève.....	272
Figure 117. Production d'élève.....	274
Figure 118. Production d'élève.....	274
Figure 119. Production d'élève.....	275
Figure 120. Production d'élève.....	275
Figure 121. Production d'élève.....	276
Figure 122. Production d'élève.....	277

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1: Coévolution du statut numérique des réels et de la notion de limite .....	69
Tableau 2- Structure et organisation du système éducatif malien .....	98
Tableau 3 - Types de tâches, techniques et technologies/théories associées .....	126
Tableau 4 - Types de tâches mettant en jeu les représentations graphiques et le cas où la valeur de $a$ est l'infini.....	127
Tableau 5 - Tableau récapitulatif.....	180
Tableau 6 -Tableau de valeurs de la fonction $f$ .....	194
Tableau 7 – Tableau des valeurs de la fonction $f$ .....	195
Tableau 8 – Tableau des valeurs de la fonction $g$ .....	196
Tableau 9 - Tableau des valeurs .....	208
Tableau 10 - tableau des valeurs .....	209
Tableau 11 tableau des valeurs.....	213
Tableau 12 - Tableau des valeurs de $f$ .....	214
Tableau 13. Tableau des valeurs de la fonction $f$ .....	217
Tableau 14. Tableau des valeurs .....	218
Tableau 15 -Tableau récapitulatif des types d'erreurs.....	237
Tableau 16. Tableau récapitulatif des types d'erreurs .....	250
Tableau 17. Tableau récapitulatif des types d'erreurs .....	257
Tableau 18. Tableau récapitulatif des types d'erreurs .....	261

## Liste des abréviations

BT - Brevet de Technicien ;  
BTS - Brevet de Technicien Supérieur,  
CAP - Certificat d'aptitude professionnel ;  
CDPE - Centre de développement de la petite enfance ;  
CIAM - Collection Inter Africaine de Mathématiques ;  
DUT - Diplôme Universitaire de Technicien ;  
DUTS - Diplôme Universitaire de Technicien Supérieur.  
IRMA Institut de Recherche en Mathématiques  
MDD - Modèle Didactique Dominant  
MEAR - Modèle Épistémologique Alternatif de Référence  
MED - Modèle Épistémologique Dominant  
MER - Modèle Épistémologique de Référence  
MPR - Modèle Praxéologique de Référence  
NIPEDICMT - Núcleo de Pesquisa em Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologias  
OD - Organisation Didactique  
OE - Obstacle Épistémologique  
OM - Organisation Mathématiques  
OML - Organisation Mathématique Locale  
OMR - Organisation Mathématique Régionale  
OP - Organisation Ponctuelle  
T - Type de Tâche  
TAD - Théorie Anthropologique du Didactique  
TAL - Terminales arts-lettres,  
TLL - Terminales langues-lettres,  
TSD - Théorie des Situations Didactiques  
TSE - Terminales sciences exactes  
TSECO - Terminales sciences économiques  
TSEXP - Terminales sciences expérimentales,  
TSS - Terminales sciences sociales,  
UEFS - Universidade Estadual de Feira de Santana  
UFBA - Universidade Federal da Bahia  
ENSUP - École Normale Supérieure  
Θ - Théorie  
Θ - Technologie  
τ - Technique

## TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I - INTRODUCTION.....	23
1. Questions de recherche :.....	23
2. Objectifs généraux.....	24
3. Objectifs spécifiques .....	27
4. Fondement théorique :.....	27
5. Méthodologie de recherche : .....	41
CHAPITRE II° SYNTHÈSE DES TRAVAUX EXISTANT .....	45
1. Travaux de A. Sierpiska (1985).....	45
2. Travaux de B. Cornu (1983).....	48
CHAPITRE III° ÉTUDE HISTORIQUE ET ÉPISTÉMOLOGIQUE DE LA NOTION DE LIMITE .....	55
1. Étude historique de la notion de limite.....	56
1.1 Importance de l'étude historique .....	56
1.2 Les ancêtres de la notion de limite .....	59
1.3 Les problématiques.....	60
1.4 Les débats contradictoires .....	62
1.5 Définition de la notion de limite.....	63
2. Étude épistémologique de la notion de limite.....	71
2.1 Quelques obstacles épistémologiques de la notion de limite : .....	73
2.2 Analyse mathématique de la définition formelle.....	78
3. Le champ conceptuel de la notion de limite .....	85
4. Enquête épistémologique sur les conceptions des enseignants sur les obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite .....	98
4.1 Questionnaire .....	99
4.2 Analyse du questionnaire : .....	100
4.3. Analyse à posteriori des productions des élèves professeurs : .....	107
4.4. Conclusion :.....	112
5. Un modèle épistémologique de référence .....	113
CHAPITRE IV° - ANALYSE DES RELATIONS INSTITUTIONNELLES.....	129
1. Analyse des programmes et manuels.....	129
1.1. Période 1970-91 : .....	134
1.2. Par rapport au programme 1992 .....	168
1.3. Par rapport au savoir-faire :.....	171
1.4. Par rapport aux manuels .....	173

1.5. Les manuels du supérieur .....	178
1.5.1 Mathématiques tout-en-un pour la licence niveau L1 .....	178
1.5.2 Le manuel Mathématiques tome1 de F. Liret et M. Zisman Bordas, Paris 1983. ....	179
1.5.3 Cours de mathématiques A. Doneddu Analyse tome 8, 1985 .....	179
2. Organisations mathématiques autour de la notion de limite dans les manuels .....	180
3. Organisation didactique : .....	181
3.1. Organisation mathématique de la notion de limite dans les manuels de la période 1992 à nos jours .....	182
3.2. Organisation didactique autour de OM 1.....	182
CHAPITRE V- CONSTRUCTION ET MISE EN ŒUVRE DU DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL .....	186
1. Stabilisation du milieu.....	187
Objectifs .....	194
Cette situation a pour objectifs de vérifier si les élèves savent : .....	194
1.3. Situation 3 .....	201
2. Situations problèmes : .....	208
2.1. Problème 1 .....	208
2.2. Problème 2 : .....	213
2.3. Problème 3.....	216
2.4. Problème 4.....	220
2.5. Problème 5 : (mise en application de la définition formalisée) .....	224
3. Rôle du travail individuel .....	232
4. Rôle du travail collectif : .....	232
5. Le scénario : .....	232
6. Analyse à posteriori de l'expérimentation .....	234
6.1. Stabilisation du milieu : .....	234
6.2. Analyse des situations-problèmes.....	262
CONCLUSION .....	278
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	282



# CHAPITRE I - INTRODUCTION

La notion de limite est une notion polysémique ; mais l'enseignement actuel, au Mali, de cette notion ne permet pas aux élèves de donner un sens mathématique à la notion de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle. Cet enseignement est essentiellement basé sur le cadre algébrique et le cadre numérique. Les pratiques de classes posent le problème comme la recherche de la limite  $\ell$  en  $x_0$  ; elles ne donnent aucune justification. L'enseignement actuel accepte de gérer le fait qu'il est difficile d'enseigner de prime à bord la définition formelle de la limite. Il opte pour une approche intuitive qui veut donner du sens à partir de la mise en place des techniques. Cela nous amène à poser les questions suivantes : qu'apprennent réellement les élèves ? Quelles conceptions de la notion de limite qu'ils manipulent sans jamais pouvoir recourir à sa définition précise ? Avec ce type d'enseignement quel sera le rapport à la notion de limite des élèves qui vont poursuivre des études mathématiques à l'université ? Niveau où l'on sait que la définition formelle n'est pas construite mais, on la fait fonctionner sur des cas particuliers et généraux, on y rencontre aussi des situations dont la résolution nécessite la définition formelle de la limite. Il est nécessaire de signaler ici que les professeurs du supérieur évitent les questions sur l'utilisation de la définition formelle. Ce qui explique le fait que beaucoup se retrouvent au niveau licence de mathématiques avec des conceptions erronées, puisqu'il semble que l'enseignement reçu au supérieur n'a pas permis de les actualiser.

Nous voulons rompre avec cette pratique en essayant de réduire l'écart entre le savoir savant et le savoir enseigné. Pour cela, comme tâches, nous proposons la démarche suivante

- 1 Expliquer pourquoi  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $x_0$ . Ou bien justifier que  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $x_0$ .
- 2- Démontrer que :  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $x_0$ . Il est important de signaler que ces types de questions sont presque inexistantes dans l'enseignement de la limite dans les classes de terminale Sciences Exactes au Mali.

## 1. Questions de recherche :

Les techniques mises en place pour calculer la limite au Lycée que sont la factorisation, la simplification, la rationalisation, le changement de variable, la comparaison des fonctions etc. ne permettent pas de comprendre la définition de la limite, de plus ces techniques sont des connaissances déjà disponibles chez les élèves. En se limitant à ces techniques on peut affirmer que l'on ne construit pas de savoirs sur la notion de limite



puisque l'on se limite au bloc praxis du quadruplet de Chevallard (1999) le bloc logos est absent.

La notion de praxéologie conduit à exprimer dans ses grandes masses l'effet du travail transpositif par la formule  $O = [\Pi/\Lambda] \_ O^* = [\Pi^*/\Lambda^*]$ , où l'on peut avoir  $\Lambda^* \approx \emptyset$  (le bloc pratico-technique, éventuellement altéré, subsiste, tandis que la part technologique-théorique s'efface), mais aussi  $\Pi^* \approx \emptyset$  (la part pratico-technique a disparu, des éléments technologique-théoriques se mettent à « flotter », pour engendrer peut-être un « mauvais petit savoir »).(CHEVALLARD 2007, pp. 11-12)

Or l'enseignement d'une nouvelle notion requière la construction de nouveaux savoirs (acquisition de nouveaux savoirs) et l'actualisation des connaissances antérieures. En d'autres termes faire évoluer les conceptions. Le cours sur la notion de limite en terminale sciences exactes doit permettre de faire évoluer le rapport à cet objet des élèves de onzième science, la différence entre les deux niveaux doit-être perceptible et considérable. Dans son article sur la valeur absolue difficulté majeure pour une notion mineure Duroux(1983) affirme qu'un savoir n'est pas à enseigner s'il fait déjà partie des connaissances des élèves.

Considérant la problématique développée dans le processus de l'enseignement et l'apprentissage du concept de limite, et les résultats pointés dans les recherches consultées Cornu (1983), Sierpiska (1985), Artigue (1996), Bkouche (1997) et Schneider (2001, 2015) (voir les chapitres II et III), soulevons-nous la question suivante: **Quels savoirs/connaissances sur le concept de limite, sont construits par les élèves, durant les articulations et interactions entre les cadres algébrique, géométrique et analytique et les registres de représentation sémiotique, dans le cas d'un Modèle Épistémologiques Alternatif de Référence construit en s'appuyant sur les dimensions épistémologiques, écologique et économique-institutionnel de l'objet mathématique en étude?**

À partir de cette question principale de recherche, nous distinguons les objectifs généraux et spécifiques suivants :

## **2. Objectifs généraux**

Les objectifs spécifiques, que nous nous donnons ci-dessous, doivent mettre en évidence les résultats et/ou les facteurs qui permettraient d'atteindre les objectifs généraux, et par conséquent, répondre à notre question de recherche. Nous visons, donc :

### **1. Une analyse de la dimension épistémologique d'un problème didactique**

Pour Almouloud (2010, p. 156), l'analyse épistémologique est basée sur le développement historique, ce qui permet d'identifier les différentes formes de conceptions

d'un objet mathématique déterminé que pourront favoriser l'analyse didactique. Barquero, Bosch et Gascón (2013) indiquent que la dimension épistémologique est importante et est présente dans tout problème didactique quel qu'il soit, car c'est dans cette dimension que nous cherchons à comprendre :

- a) L'amplitude du cadre mathématique pour situer notre problème didactique ;
- b) les types de problèmes découlant de la problématique de l'enseignement et l'apprentissage, dans notre cas, le concept de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point;
- c) les tentatives d'aborder et jusqu'à proposer de solutions à une telle problématique;
- d) Quelles sont les raisons d'être de cet objet mathématique et de la problématique de son enseignement.

## **2. Une analyse de la dimension économique**

Pour l'étude de cette dimension, nous tenterons de répondre à la question suivante : Comment les praxéologies se comportent dans une institution particulière ? Font partie de la dimension économique des questions relatives aux conditions régissant l'organisation et le fonctionnement de ces praxéologies dans l'institution de référence, c'est-à-dire les questions relatives au système de règles, de principes et de lois (normes) régissant la vie institutionnelle elle-même.

## **3. Une analyse de la dimension écologique de notre problème didactique :**

La dimension économique-institutionnelle imprègne la dimension écologique, une fois que la « naissance », la « vie » et la possibilité de « flétriment » et/ou de « résurgence », n'abandonnent pas des conditions économiques. Ceci est souligné par Gascón (2011) et Gascón (2013), quant à la dimension écologique, entre autres facteurs, doivent être mis en évidence :

- a) les domaines institutionnels considérés ;
- b) les institutions impliquées et les façons dont elles décrivent et interprètent l'objet de la recherche;
- c) les pratiques mathématiques dans les institutions concernées par rapport à l'objet recherché;
- d) les modèles épistémologiques mathématiques impliqués dans les institutions ;
- e) les difficultés qui se posent lorsqu'on tente de modifier l'OD (organisation didactique) dans une institution donnée.

Ces facteurs permettent, par exemple, de situer, en termes de didactique des mathématiques, l'habitat et les niches de l'objet mathématique étudiés dans l'écosystème par

l'enseignement considéré, dans notre cas la terminale science exacte. Les habitats seront des champs conceptuels où un objet déterminé du savoir mathématique se trouve et de l'expérience de ses pratiques. Les habitats seront des secteurs d'un écosystème où les composants curriculaires donnent repère aux praxéologies avec des objets mathématiques. Les niches, à leur tour, ils contempleront leurs fonctionnalités et praxéologies, qui sont mises à l'évidence par les pratiques qui, par rapport à un objet d'enseignement, sont attestées dans un habitat donné dans un écosystème donné, en interaction avec les autres niches.

L'étude de la dimension écologique devrait nous aider dans l'étude de l'écologie didactique du concept de limite, à savoir, de questionner sur son existence réelle, ou l'inexistence, ou les possibilités de ressurgir, dans l'institution où il s'installe, ou s'est installé, c'est à dire comment est-ce qu'il surgit, comment il reste "vivant", comment il cesse d'exister, et dans ce cas, il peut revenir à "vivre" là. L'écologie d'une organisation praxéologique est associée aux conditions qui pèsent sur sa construction et sa « vie », normalisées tant dans les établissements d'enseignement que dans la production, l'utilisation et/ou la transposition du savoir.

En ce qui concerne l'écologie didactique, Artaud (1998, p. 102-103) identifie quatre types d'écosystèmes éducatifs, selon le régime épistémologique auquel il est soumis à des savoirs mathématiques :

- a) L'écosystème du savoir, où les mathématiques sont produites ;
- b) L'écosystème didactique scolaire, où les mathématiques sont étudiées ;
- c) L'écosystème professionnel, l'utilisateur de mathématiques pour accomplir quelques tâches ;
- d) L'écosystème noosphérien, où les mathématiques sont manipulées à des fins de transposition.

#### **4. La dimension économique versus dimension écologique :**

Pour étudier les dimensions économiques et écologiques de la problématique didactique, le chercheur (ou le professeur) utilise inévitablement comme référence un modèle (bien qu'il soit implicite) des praxéologies mathématiques qui sont en jeu, c'est-à-dire, un modèle épistémologique de référence (MER) du champ de l'activité mathématique en question. Lorsque le modèle épistémologique (MER) est ouvertement et explicitement exposé à la critique et au contraste empirique, il constitue un instrument d'émancipation (du didactique et de la science didactique) en ce qui concerne le modèle épistémologique dominant (MED) dans l'institution (GASCÓN, 2014). En cohérence avec ce MER et basé sur lui, l'enseignant (ou chercheur) utilise (et finit par construire) un modèle didactique de

référence (MDR) de ce que signifie pour « apprendre » la connaissance mathématique dudit champ, dans notre cas, le concept de limite.

5. **Construire un MER et MDR** en relation, en nous appuyant sur le champ conceptuel du concept de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point.

### 3. Objectifs spécifiques

À partir d'une analyse des dimensions épistémologique, écologique et économique, prétendons-nous :

- Construire une Organisation Mathématique Régionale (OMR) sur l'objet mathématique "limite de fonction qui constituera une rupture par rapport à ce qui est proposé dans les programmes actuels de l'Enseignement Secondaire au Mali";
- Construire une Organisation Didactique à partir de cette OMR et la tester à partir d'une ingénierie didactique et mettre en évidence les savoirs/connaissances appropriés par les élèves de la terminale science exacte, qui sont les sujets de la recherche.

### 4. Fondement théorique :

L'objet de l'étude se situe dans une problématique d'enseignement et/ou d'apprentissage du concept de limite d'une fonction réelle à variable réelle.

D'abord, nous nous référons à la théorie des situations didactiques de Brousseau (1986) selon laquelle :

L'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine ; ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève, se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage. (BROUSSEAU., 1986, p. 40).

Une des principales tâches de notre étude est de concevoir et d'organiser ce milieu, système antagoniste de l'élève qui sera la cause des adaptations de l'élève par rapport à l'objet épistémologique. Mais, c'est dans des situations de résolution de problèmes qu'une connaissance acquiert du sens pour les élèves. Pour qu'il y ait apprentissage, il est nécessaire que l'élève participe activement à la construction de la connaissance de l'objet d'enseignement.

La théorie des situations didactiques étudie l'enseignement du savoir et l'apprentissage des connaissances lors de *situations didactiques* : le maître propose à l'élève une situation qui va l'obliger à se poser des questions et à progressivement adapter ses *connaissances* vers de nouvelles *connaissances* que le maître va pouvoir *institutionnaliser* en *savoir* in fine.

La théorie des situations a défini et utilise plusieurs termes tels que:

**Le savoir** est issu des recherches d'une discipline et donc le produit d'un processus historique, social et culturel, individuel et collectif, d'une société et d'une époque. Le texte du savoir gomme en général, pour des raisons d'économie de la communication, tous les aspects de ce processus pour n'en retenir que le produit fini. Ainsi le savoir est dépouillé souvent même de sa raison d'être, et en particulier de toutes les questions qui sont à son origine et dont il constitue la réponse. On dit que le savoir est dépersonnalisé.

**Les connaissances** d'un élève sont formées de tous les éléments d'apprentissage d'origine didactique ou non. Celles-ci peuvent être des éléments de savoir que l'élève s'est approprié.

**L'institutionnalisation** est le moyen par lequel le professeur va transformer certaines des connaissances de l'élève dans la situation didactique en savoir. En effet, certaines de ces connaissances ont vocation à devenir savoir mais elles n'en ont pas initialement les propriétés : elles sont locales, contextualisées, personnalisées, et l'élève ne peut, seul, pas leur reconnaître la valeur de généralité que leur confère l'institution (la société, l'école, la communauté savante). Le professeur a la charge de les identifier, de les décontextualiser, de les dépersonnaliser et de les généraliser, bref de leur donner un caractère institutionnel.

**La notion de situation didactique** est le concept fondamental de la TSD. Dans une relation didactique classique, le maître a naturellement tendance à accorder de l'importance aux bonnes réponses, à les susciter, et l'élève a naturellement tendance à chercher les indices des bonnes réponses dans le jeu et les questions du maître. Le savoir dans ce type d'interaction didactique répond beaucoup plus aux intentions des acteurs - l'un veut des bonnes réponses et l'autre veut les produire - qu'à ses propres nécessités internes : il est donc dénaturé par la nature même de ce jeu. Pour échapper à ce phénomène le maître fait *dévolution* du problème : il installe un autre type de dialogue où l'élève a pour interlocuteur principal la situation didactique elle-même. Ses propositions ne sont alors plus sanctionnées par le maître mais par leurs (in)adéquations-mêmes au problème qui apparaissent de manière évidente : on parle de *rétroaction du milieu*.

**Le milieu** est l'ensemble de ce qui est à disposition de l'élève pour résoudre le problème posé par la situation didactique. Il est constitué des éléments qui définissent le problème, les consignes, le matériel mais aussi de l'organisation de son travail (en groupe ou individuel), de ses connaissances, tout ce qui peut influencer sur ses réponses ; ce milieu se modifie constamment pendant l'activité de l'élève et s'enrichit de ses essais infructueux, de ses conjectures provisoires.

**La phase a-didactique** de la situation est celle où l'élève cherche à résoudre un problème, à trouver une réponse qui lui convienne. L'intention (didactique) du maître de transformer les connaissances de l'élève est alors totalement secondaire. L'élève ne s'occupe et n'a à faire qu'au milieu avec lequel il interagit et qui l'oblige à réviser, modifier, progressivement ses connaissances.

Cette phase a-didactique peut être divisée, par des interventions du professeur, en moments a-didactiques (Mercier 1997) quand les conditions de l'adidacticité ne semblent plus suffisantes.

Pour qu'une situation puisse ainsi fonctionner, elle doit répondre à une double contrainte épistémologique : les tentatives « naïves » provenant des conceptions des élèves trouvent dans la situation un terrain naturel d'application et doivent pouvoir être questionnées par les rétroactions du milieu, le savoir visé doit être contenu dans la situation comme la seule stratégie accessible optimale de résolution. La phase a-didactique devrait déboucher sur l'institutionnalisation par le maître des connaissances qui correspondent à ce savoir.

On peut résumer cette première partie de la présentation de la théorie des situations par une nouvelle définition du savoir : le savoir est la part institutionnelle des connaissances produites par l'interaction d'un individu avec un milieu adéquat. Remarquons ainsi que cette définition correspond aussi bien à l'activité d'enseignement/apprentissage qu'à la production du savoir par la recherche.

L'activité de l'élève est modélisée dans la phase a-didactique de la situation par différents niveaux qui mettent en évidence l'évolution de l'activité mathématique de l'élève :

**- La phase d'action** : L'élève agit sur son milieu, observe les rétroactions et progressivement acquiert des connaissances dans l'action. Celles-ci ne sont pas encore ni formalisées, ni formulées mais sont identifiables dans les stratégies de plus en plus adaptées qu'il utilise. A ce niveau, l'élève contrôle et anticipe les rétroactions du milieu dit *milieu antagoniste* (nommé ultérieurement *milieu matériel*).

- **La phase de formulation** : il arrive un moment où ces connaissances qui sont apparues dans l'action sont formulées pour être partagées. Elles n'ont, à ce moment-là, que le statut d'heuristiques, de conjectures, de déclarations qui n'auront de statut plus certain que lorsqu'elles chercheront une validité dans la phase suivante. À ce niveau, l'élève partage des idées et de l'expérience

- **La phase de la validation** : Les affirmations proposées sont étayées par des arguments, des preuves, des éléments de justification.

Ces trois niveaux peuvent naturellement s'enchaîner dans cet ordre mais souvent apparaissent imbriqués et/ou ne respectent pas cet ordre car l'activité de l'élève est sinueuse, non directe, à l'image de la recherche.

Ensuite, nous nous inscrivons dans la Théorie Anthropologique du Didactique de Y. Chevallard selon laquelle :

Toute action humaine procède d'une praxéologie, en admettant bien sûr que cette action puisse être en cours d'élaboration, ou, aussi bien, que sa construction se soit arrêtée – peut-être définitivement, à l'échelle d'une vie humaine ou institutionnellement -, en la figeant dans un état d'incomplétude ou de sous-développement, avec, par exemple, un type de tâches mal identifié, une technique à peine ébauchée, une technologie incertaine, une théorie inexistante. (CHEVALLARD, 1999, p. 19).

Le point de départ de cette approche est que « *tout est objet* ». L'auteur distingue néanmoins les types d'objets particuliers : *institutions* (**I**) et *personnes* (**x**) et les *positions* qu'occupent **R<sub>I</sub>** (**o**, **x**) les personnes dans les institutions. En occupant ces positions, ces personnes deviennent les sujets des institutions – sujets actifs qui contribuent à faire vivre les institutions par le fait même de leur être assujettis. La connaissance – et le savoir comme une certaine forme d'organisation de connaissance – entre alors en scène avec la notion de *rapport*.

Un objet (**o**) de savoir existe dès lors qu'une personne **x** ou une institution **I** le reconnaît comme existant. Chevallard explique comme suit.

Un objet **o** existe pour une personne **x** s'il existe un rapport personnel noté  $R(x,o)$ , de la personne **x** à l'objet **o**. Autrement dit, le rapport personnel à **o** précise la manière dont **x** connaît **o**. De même, se trouve défini un rapport institutionnel de **I** à **o** noté  $R(I,o)$  qui traduit la connaissance de l'objet **o** par l'institution **I**. **o** est alors un objet institutionnel. On appelle alors *univers cognitif* de **x** l'ensemble  $U(x) = \{ (o, R(x, o)) / R(x, o) \neq \emptyset \}$ .

Étant donné un objet **o**, une institution **I**, et une position **p** dans **I**, on appelle *rapport institutionnel* à **o** en position **p**, et on note  $R_I(p, o)$ , le rapport à l'objet **o** qui devrait être,

idéalement, celui des sujets de  $I$  en position  $p$ . Dire que  $x$  est un *bon sujet* de  $I$  en position  $p$ , c'est dire que l'on a  $R(x, o) \cong R_I(p, o)$ , où le symbole  $\cong$  désigne la *conformité* du rapport personnel de  $x$  au rapport institutionnel en position  $p$ . De même que pour une personne  $x$ , on parle alors de l'*univers cognitif de la position  $p$  de  $I$* ,  $U_I(p) = \{ (o, R_I(p, o)) / R_I(p, o) \neq \emptyset \}$ , et, par extension, de l'*univers cognitif de  $I$* ,  $U(I) = \bigcup_p U_I(p)$ . En particulier, s'il existe une position  $p$  de  $I$  telle que  $R_I(p, o) \neq \emptyset$ , on dit que  $I$  connaît  $o$ . Pour nombre d'objets  $o$ , on a  $R_I(p, o) = \emptyset$  : les sujets de  $I$  en position  $p$  n'ont pas alors, *en tant que tels*, à connaître  $o$ .

Chevallard (1989a) affirme que tout savoir est ainsi attaché à une institution *au moins*, dans laquelle il est mis en jeu par rapport à un domaine de réalité. Le point essentiel est alors qu'un savoir n'existe pas *in vacuo*, dans un vide social : *tout savoir apparaît, à un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions.*

Le rapport personnel d'une personne à un objet de savoir ne peut être établi que lorsque cette personne entre dans une institution  $I$  où existe cet objet  $o$ . Au-delà des questions propres aux rapports institutionnels et personnels, il convient de dégager la nature des enseignements dans l'institution. Pour ce faire, nous allons faire appel à un autre volet de la théorie anthropologique du didactique à savoir L'approche praxéologique. Un rapport institutionnel est en particulier, directement lié aux activités qui sont demandées aux étudiants. Il est en quelque sorte caractérisé par les différents types de tâches que les étudiants doivent savoir effectuer et par des raisons qui justifient les recours à ces types de tâches. Le rapport institutionnel à un objet ( $R(I, o)$ ) est donc décrit par un ensemble de pratiques sociales qui fonctionnent au sein de l'institution en mettant en jeu cet objet de savoir. Comme le souligne Chevallard, le savoir mathématique en tant que forme particulière de connaissance, est le fruit de l'action humaine institutionnelle : c'est quelque chose qui se produit, s'utilise, s'enseigne, ou plus généralement, se transpose dans des institutions. Chevallard propose donc la notion d'*organisation praxéologique* ou *praxéologie* (comme la notion clé) pour étudier les pratiques institutionnelles relatives à un certain objet de savoir et en particulier les pratiques sociales en mathématiques. Il se propose de distinguer les *praxéologies* qui peuvent se construire dans une classe où l'on étudie cet objet, d'analyser la manière dont peut se construire l'étude de cet objet, et de permettre la description et l'étude des conditions de réalisation. Les *praxéologies* sont donc décrites en termes de : **1.** (Type de) Tâches ; **2.** (Type de) Techniques ; **3.** Technologie et **4.** Théorie ([ $T, \tau, \theta, \Theta$ ]).



## **Tâche :**

Le symbole **T** est adopté pour représenter un type de *tâches* identifiées dans une praxéologie et contenant au moins un exercice **t**. Cette notion suppose un objet relativement précis.

*Monter un escalier* par exemple est un type de tâche, mais *monter*, tout court, *n'en est pas un*. De même, *calculer la limite d'une fonction en un point*, est un type de tâche ; mais *calculer*, tout court, c'est un genre de tâches qui appelle un déterminatif. Ainsi, *la tâche*, *le type de tâches*, *le genre de tâches* ne sont pas des données de la nature : ce sont des « *artefacts* », des « *œuvres* », des *construits institutionnels*, dont la reconstruction dans telle institution, et par exemple dans telle classe, est un problème à part entière, qui est l'objet même de la didactique.

## **Technique**

Une *technique* notée  $\tau$  est une manière de faire ou de réaliser un type de tâche **T**. Donc, une praxéologie relative à **T** précise (en principe) une manière d'accomplir, de réaliser les tâches  $t \in T$ , c'est-à-dire, une *technique*, du grec *tekhnê*, savoir-faire. À propos d'un type de tâches **T** donné, il existe en général une seule technique, ou du moins un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues, (à l'exclusion des techniques alternatives possibles qui peuvent exister effectivement, mais dans d'autres institutions) qui permettent de réaliser  $t \in T$ .

## **Technologie**

La *Technologie* notée  $\theta$  est un discours rationnel (*le logos*) ayant pour objet premier de *justifier* « rationnellement » la technique  $\tau$  tout en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches de type **T**, c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu. Le style de rationalité mis en jeu varie selon l'espace institutionnel, et en une institution donnée, au fil de l'histoire de cette institution.

Une deuxième fonction de la technologie est d'*expliquer*, de rendre intelligible, d'éclairer la technique. Si la première fonction – *justifier* la technique – consiste à assurer que la technique donne bien ce qui est prétendu, cette deuxième fonction consiste à exposer pourquoi il en est bien ainsi. Il est notable que ces deux fonctions (*justification* et *explication*) sont inégalement assumées par une technologie donnée. De ce point de vue, en mathématiques, la fonction de la *justification* l'emporte traditionnellement, par le biais de l'exigence démonstrative, sur la fonction d'*explication*. Exemple : un étudiant mémorise une

certaine technologie (un théorème ou une formule), il arrive à résoudre certains types de tâches avec cette technologie, mais il ne sait pas expliquer la raison du résultat trouvé.

### **Théorie**

La *Théorie* à son tour notée  $\Theta$  a pour fonction de justifier et de rendre compréhensible une *technologie*  $\theta$ .

### **Organisation praxéologique**

Les quatre notions : *type de tâche* ( $T$ ), *technique* ( $\tau$ ), *technologie* ( $\theta$ ) et *théorie* ( $\Theta$ ), décrivent une *organisation praxéologique* complète  $[T/\tau/\theta/\Theta]$  décomposable en deux blocs  $[T/\tau/]$  et  $[\theta/\Theta]$ , constituant respectivement, le *savoir-faire* [*praxis*] et le bloc *technologique-théorique* [le *logos*].

Nous pouvons donc affirmer que *produire, enseigner et apprendre des mathématiques* sont des actions humaines qui peuvent se décrire selon le modèle *praxéologique*. Dans ce sens on pourra alors dire que l'*organisation praxéologique* relative aux activités mathématiques est une *organisation mathématique*.

Donc analyser la vie d'un objet mathématique dans une institution, comprendre sa signification pour cette institution, c'est identifier l'organisation mathématique qui met cet objet en jeu. Dans ce paradigme, nous nous proposons d'étudier l'organisation mathématique relative à la notion de limite. Cette notion est en analyse.

La notion d'organisation praxéologique et la notion du rapport institutionnel nous donnent, à partir d'une étude écologique des manuels et des programmes, les outils pour cette étude. Il nous semble important d'analyser les programmes et les manuels de l'institution nous concernant car elle permet d'accéder à l'aspect officiel de l'objet d'enseignement.

Chevallard (1994) théorise ce phénomène dans ce qu'il dénomme *écologie des savoirs*, basée sur les notions *d'habitat* et de *niche*.

Dans cette approche, *l'habitat* est défini comme le lieu de vie et l'environnement conceptuel d'un objet de savoir. Il s'agit, pour l'essentiel, des objets avec lesquels il interagit mais aussi des situations d'enseignements dans lesquelles apparaissent des manipulations et des expériences auxquelles on a recours. La *niche* écologique décrit, quant à elle, la place fonctionnelle occupée par l'objet de savoir dans le système ou praxéologie des objets avec lequel il interagit.

Cette idée d'interrelation des objets de savoir est mise en évidence par Bosch et Chevallard(1999) quand ils soulignent :

L'approche anthropologique modélise le savoir mathématique en termes d'objets et d'interrelations entre eux. De cette vision volontairement unitaire de l'univers mathématique où « tout est objet » a surgi le questionnement sur la « nature » des objets mathématiques appelés normalement « concepts » ou « notions »... Cette question renvoie au problème de la description des pratiques institutionnelles où l'objet est engagé, problème auquel il faut répondre en termes d'organisation praxéologique. (BOSCH et CHEVALLARD, 1999, p. 87)

Comme nous l'avons déjà présenté plus haut, dans cette organisation, on se pose des questions sur les types de tâches et les techniques qui composent les praxéologies institutionnelles (où est censé intervenir l'objet étudié) et sur les éléments technologiques et théoriques décrivant et justifiant ces pratiques. Dans ce contexte et pour revenir aux notions fondamentales de l'approche anthropologique, Bosch et Chevallard soutiennent l'idée que dans cette organisation, la mise en œuvre d'une technique pour réaliser un type de tâche se traduit par une manipulation des objets *ostensifs* réglée par des *non-ostensifs*.

### **Les objets ostensifs et non-ostensifs**

La question de la « nature » des objets mathématiques et celle de leur « fonction » dans l'activité mathématique, a conduit à établir une dichotomie fondamentale entre deux types d'objets : une part les *objets ostensifs* et d'autre part les *objets non-ostensifs*.

- Les *objets ostensifs*<sup>1</sup> sont tous les « objets » ayant une nature sensible, une certaine matérialité et qui, de ce fait, acquièrent pour le sujet humain une réalité perceptible.
- Les objets *non-ostensifs* sont les « objets » qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés.

Par exemple :

Écriture :  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in Df \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ , peut être vu comme une simple manipulation d'objets ostensifs mais, ce calcul ne saurait s'effectuer intentionnellement sans l'intervention de certains objets non-ostensifs spécifiques, telle la notion limite.

En général, dans toute activité humaine il y a *co-activation* d'objets *ostensifs* et d'objets *non ostensifs*. (BOSCH et CHEVALLARD, 1999, p. 92).

---

<sup>1</sup> Du latin *ostendere* « montrer, présenter avec insistance ».

L'ostensivité dont parlent Bosch et Chevallard, réfère plus généralement à l'ensemble des sens, même si, de fait, la vue et l'ouïe jouent un rôle privilégié. Au-delà de la perceptibilité des ostensifs, ce qui les caractérise, est le fait d'être « *manipulables* » par le sujet humain. Un son peut être fait (et perçu), un graphisme peut être tracé (et lu), un objet matériel quelconque peut être manipulé concrètement de diverses manières. Chevallard utilise le terme de *manipulation* pour désigner les divers usages possibles des objets ostensifs pour le sujet humain. C'est cette *manipulation* concrète qui permet de distinguer les objets *ostensifs* des objets *non-ostensifs*. Cependant, ces deux types d'objets sont unis par une dialectique qui considère ces derniers comme des émergents de la manipulation des premiers et par conséquent, comme des moyens de guidage et de contrôle de cette manipulation.

Les objets *ostensifs* constituent donc la partie perceptible de l'activité, ce qui se donne à voir dans la réalisation d'une tâche aussi bien à l'observateur qu'aux acteurs eux-mêmes. Ils affirment que:

Dans l'analyse du travail mathématique, les éléments *ostensifs* font partie du réel empirique accessible aux sens. Par contraste, la présence de tel ou tel *non-ostensif* dans une pratique déterminée, ne peut être qu'induite ou supposée à partir de manipulations d'ostensifs institutionnellement associés. [...] L'intervention des *non-ostensifs* dans la praxis manipulatrice d'objets *ostensifs* peut conduire à donner aux *non-ostensifs* le statut de condition d'une manipulation adéquate des instruments *ostensifs*. (BOSCH et CHEVALLARD 1999, p. 92-93)

Donc, selon eux, un objet *ostensif* est avant tout considéré comme un *instrument* possible de l'activité humaine. C'est-à-dire comme une entité qui permet, en association avec d'autres, de conformer des techniques permettant d'accomplir certaines tâches, de mener à bien un certain travail. Comme l'approche anthropologique décrit le savoir mathématique en termes de praxéologies composées de types de tâches, de techniques (constituant le *praxis* ou *savoir-faire*), de technologies et de théories (constituant le *logos* ou « *savoir* »), Bosch et Chevallard insistent sur le fait que ces organisations praxéologiques se donnent à voir à travers les ostensifs qui composent les tâches, les techniques, les technologies et théories à travers les différentes façons de les activer. Ce travail avec des ostensifs doit être à la fois, efficace, lisible et intelligible. Tout ceci contribuera à donner aux ostensifs leur valeur instrumentale et sémiotique. Dans ce contexte les auteurs voient, sur le plan du développement des mathématiques,

De nouvelles créations ostensives, de nouvelles façons de manipuler des ostensifs anciens, mais aussi la perte de certaines façons de parler, d'écrire ou d'effectuer certains gestes. Une telle « évolution ostensive » ne se réalise jamais de manière uniforme et universelle mais dépend étroitement

des instruments et des conditions écologiques qu'elles sont capables de créer pour faire vivre des praxéologies déterminées. (BOSCH & CHEVALLARD, 1999, p. 113)

La théorie anthropologique du didactique considère que, *en dernière instance*, toute activité humaine consiste à *accomplir une tâche*  $t$  d'un certain *type*  $T$ , *au moyen* d'une *technique*  $\tau$ , justifié par une *technologie*  $\theta$  qui permet en même temps de la *penser*, voire de la *produire*, et qui a son tour est *justifiable* par une *théorie*  $\Theta$ .

En bref, elle part du postulat que toute activité humaine *met en œuvre* une organisation que Chevallard (1998) note  $[T/\tau/\theta/\Theta]$  et qu'il nomme *praxéologie*, ou *organisation praxéologique*.  $[T / \tau]$  étant *la pratique* – ou encore le *savoir-faire* ;  $[\theta/\Theta]$  le *logos* – ou encore le *savoir*.

On parle de *praxéologie mathématique* – ou d'organisation mathématique – lorsque les types de tâches  $T$  relèvent des mathématiques, de *praxéologie didactique* – ou d'organisation didactique – lorsque les types de tâches  $T$  sont des types de tâches d'étude.

Généralement, en une institution  $I$  donnée, une théorie  $\Theta$  répond de plusieurs technologies  $\theta_j$ , dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques  $\tau_{ij}$  correspondant à autant de types de tâches  $T_{ij}$ . Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisations locales,  $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ , centrées sur une technologie  $\theta$  déterminée, ensuite en organisations régionales,  $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta/\Theta]$ , formées autour d'une théorie  $\Theta$ . Au-delà, (Chevallard, 1999a) nomme organisation globale le complexe praxéologique  $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta/\Theta]$  obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories  $\Theta_k$ .

#### Description des praxéologies

(BOSCH & GASCON, 2004) précisent que l'organisation mathématique à enseigner constitue un modèle praxéologique du curriculum mathématiques qui est obtenu à partir des programmes et les manuels. L'identification de ces OM à enseigner passe par la caractérisation du type de tâches institutionnel qui est une « re »construction du chercheur à partir de l'analyse des manuels et des programmes. Notons que le chercheur peut procéder à un autre découpage que celui de l'institution voire le compléter pour des raisons liées à sa problématique. Il s'agit de construire une OM de référence (Bosch & Gascon, 2004). Dans la construction d'une telle OM de référence on doit prendre en compte les praxéologies institutionnelles. (CHAACHOUA, 2010)

Ces deux théories ne sont pas contradictoires, elles sont, au contraire, complémentaires et ont toutes en commun le paradigme constructiviste de Piaget et le socioconstructivisme de

Vygotsky. La TSD gère le local, en particulier ce qui relève de l'ingénierie didactique tandis que la TAD gère le global et l'étude des rapports institutionnels, à travers celles des documents officiels, manuels et ressources diverses pour l'enseignement, la TAD étudie les apprentissages non pas en termes « d'acquisition de concepts » mais en termes de « travail mathématique » s'appuyant sur une manipulation contrôlée d'ostensifs s'avérant instrumentale pour un type de tâche donné. D'après Artigue (2009), ce qui fait la force d'un cadre théorique, comme le souligne à juste titre Michael Otte (2006), c'est qu'il renonce à être holistique; et c'est dans ce renoncement même qu'il puise sa cohérence et sa force. Nous allons les combinés pour mener notre recherche.

Nous nous appuyerons sur les travaux de R. Duval qui affirme que :

Les objets mathématiques ne doivent jamais être confondus avec la représentation qui en est faite. En effet, toute confusion entraîne, à plus ou moins long terme, une perte de compréhension et les connaissances acquises deviennent vite inutilisables hors de leur contexte d'apprentissage : soit par non-rappel soit parce qu'elles restent des représentations 'inertes' ne suggérant aucun traitement. La distinction entre un objet et sa représentation est donc un point stratégique pour la compréhension des mathématiques. (DUVAL, 1993, p. 1)

Un peu plus loin l'auteur affirme :

Néanmoins, les diverses représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont absolument nécessaires. En effet, les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles dans la perception, ou dans une expérience intuitive immédiate, comme le sont les objets communément dit "réels" ou "physiques" ! Il faut donc pouvoir en donner des représentants. Et, en outre, la possibilité d'effectuer des traitements sur les objets mathématiques dépend directement du système de représentation sémiotique utilisé...les représentations sémiotiques jouent un rôle fondamental dans l'activité mathématique.

D'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible.

Comment des sujets en phase d'apprentissage pourraient-ils ne pas confondre les objets mathématiques avec leurs représentations sémiotiques s'ils ne peuvent avoir affaire qu'aux seules représentations sémiotiques ? L'impossibilité d'un accès direct aux objets mathématiques, en dehors de toute représentation sémiotique rend la confusion presque inévitable. Et à l'inverse, comment peuvent-ils acquérir la maîtrise des traitements mathématiques nécessairement liés aux représentations sémiotiques s'ils n'ont pas déjà une appréhension conceptuelle des objets représentés ? (DUVAL, 1993, p. 2)

Duval (1993) affirme que l'on ne prête guerre d'attention à ce paradoxe cognitif de la pensée mathématique dans l'enseignement. Pour justifier ses idées, il affirme que tout simplement parce qu'on accorde beaucoup plus d'importance aux représentations mentales

qu'aux représentations sémiotiques. Pour lui les représentations mentales recouvrent l'ensemble des images et, plus globalement, des conceptions qu'un individu peut avoir sur un objet, sur une situation et sur ce qui leur est associé. Il définit les représentations sémiotiques comme des productions constituées par l'emploi des signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiante et de fonctionnement. Une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique un graphe sont des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes de sémiotiques différents. Il affirme aussi que l'on considère généralement les représentations sémiotiques comme simple moyen d'extériorisation des représentations mentales pour des fins de communication, c'est-à-dire pour rendre visibles ou accessibles à autrui. Selon lui ce point de vue est trompeur. Les représentations sémiotiques ne sont pas seulement nécessaires pour des fins de communication, elles sont également essentielles pour l'activité cognitive de la pensée. En effet, elles jouent un rôle primordial dans le développement des représentations mentales ; dans l'accomplissement de différentes fonctions cognitives et dans la production de connaissances

Le paradoxe cognitif de pensée mathématique et les difficultés qui en résultent pour son apprentissage tiennent au fait qu'il n'y a pas de **néosis**<sup>2</sup> sans **sémiosis**<sup>3</sup> alors qu'on veut enseigner les mathématiques comme si la sémiotique était une opération négligeable par rapport à la néosis. Pourtant il est essentiel, dans l'activité mathématique, soit de pouvoir mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotiques (figures, graphes, écriture symbolique, langue naturelle, etc...) au cours d'une même démarche, soit de pouvoir choisir un registre plutôt que l'autre. Et, indépendamment de toute commodité de traitement, ce recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent aussi être reconnus dans chacune de leurs représentations. La coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique apparaît fondamentale pour une appréhension conceptuelle des objets : il faut que l'objet ne soit pas confondu avec ses représentations et qu'il soit reconnu dans chacune de ces représentations possibles. C'est à ces deux conditions qu'une représentation fonctionne véritablement comme représentation c'est-à-dire qu'elle donne accès à l'objet représenté. (DUVAL 1993, p. 40)

D'autre part, il affirme que pour qu'un système sémiotique puisse être un registre de représentation, il doit permettre trois activités cognitives fondamentales liées à la sémiotique : la formation d'une représentation identifiable comme une représentation d'un registre donné, le traitement d'une représentation et la transformation de cette représentation dans le registre

---

<sup>2</sup>R. Duval appelle néosis l'appréhension conceptuelle d'un objet

<sup>3</sup>R. Duval appelle sémiotique l'appréhension, ou la production, d'une représentation sémiotique

même où elle a été formée. Le traitement est une transformation interne à un registre et la conversion d'une représentation est la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale. La conversion est une transformation externe au registre de départ (le registre de représentation à convertir)

Nous nous appuyerons enfin sur la théorie des champs conceptuels dont l'auteur est G. Vergnaud, travail qu'il a entrepris dès les années 1980. Il la décrit comme « une théorie cognitiviste qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage de compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques. » (VERGNAUD, 1990).

L'hypothèse première qui est faite dans les recherches en didactique des sciences est que l'acquisition du sens ou des significations d'un concept (ou d'une connaissance) se fait à partir de la confrontation à des situations problématiques qui mettent en jeu le concept (ou la connaissance). Vergnaud parle d'un « processus d'élaboration pragmatique » du concept, affirmant que ce processus est « essentiel pour la psychologie et la didactique, comme il est d'ailleurs essentiel pour l'histoire des sciences. »

Dans le cadre de la théorie des champs conceptuels, sont définis et développés différents modèles dont les principaux sont : *concepts, schèmes, champs conceptuels, situations, signifiés et signifiants*.

Un ***schème*** est un outil qui décrit l'organisation invariante de la conduite d'une personne dans une classe de situations. Il affirme que c'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire.

Reprenons l'exemple que Vergnaud donne du schème de la résolution des équations de la forme  $ax+b=c$ . chez des élèves de cinquième et quatrième :

- en soustrayant  $b$  des deux côtés de l'égalité, on conserve l'équation,
- en divisant par  $a$  des deux côtés de l'égalité, on conserve l'équation.

Ce schème, très efficace (et fiable) lorsque  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des valeurs numériques positives et que  $b < c$ , se révèle moins fiable chez ces mêmes élèves par exemple pour la résolution de l'équation  $\frac{1}{2}x - 3 = 1$ .

Le concept de *schème* est considéré par Vergnaud comme un concept fondamental de la psychologie cognitive, mais aussi de la didactique. Il est composé de règles d'action et d'anticipations, mais aussi d'invariants opératoires.



Ce sont essentiellement les *invariants opératoires* que la didactique des mathématiques a investi pour ses recherches. Vergnaud distingue des invariants opératoires de trois types logiques :

- des invariants de type « propositions » ; les *théorèmes-en-acte* en font partie, ils peuvent être vrais ou faux ; Un théorème-en-acte désigne « les propriétés des relations saisies ou utilisées par l'élève en situation de résolution de problème, étant entendu que cela ne signifie pas qu'il est capable pour autant de les expliciter ou de les justifier » ;
- des invariants de type « fonction propositionnelle » : ils sont indispensables à la construction de propositions ; les *concepts-en-acte* ou *catégories-en-acte* en font partie ;
- des invariants de type « argument » ; en mathématiques, les arguments peuvent être des objets, des nombres.

Nous utiliserons aussi, dans nos analyses didactiques les termes de *règles d'action*, *propriétés-en-acte*, c'est-à-dire des règles, propriétés auxquelles les stratégies ou les réponses (dans les productions des élèves) sont conformes ; ce sont donc les propriétés attribuées au concept par les élèves pour résoudre le problème.

Ces invariants (qui constitue le *signifié*), *règles d'action*, *théorèmes-en-acte*, ont leur **domaine d'application**, c'est-à-dire l'ensemble des situations où ils peuvent apporter une réponse et leur **domaine de validité**, c'est-à-dire l'ensemble des situations où ils donnent une réponse exacte. Généralement, ce domaine de validité est non vide. Il peut même sembler très grand à l'élève parce que les situations qu'il rencontre le « renforce ». Il est nécessaire que l'enseignant soit capable d'aller au-delà de ce domaine de validité pour pouvoir déstabiliser l'élève.

Dans cette approche théorique, **une production erronée** (une « erreur ») provient de l'application d'une règle d'action ou d'un *théorème-en-acte* hors de leur domaine de validité. L'erreur est pour nous constitutive de la connaissance, car toute connaissance, à tout niveau, est locale et on ne peut connaître le domaine de validité d'une connaissance si l'on en n'a pas établi ses limites.

Dans cette modélisation de l'acquisition des connaissances, un concept se construit donc, pour l'individu, à travers les nombreuses situations qui le questionnent ou l'utilisent. Et le sens qui se construit est lié aux types de situations où l'individu l'a rencontré. Cependant, le sens n'est contenu entièrement ni dans les situations elles-mêmes, ni dans les seuls mots et symboles associés. **Le langage** et les autres *signifiants* (représentations graphiques ou géométriques, tableaux, équations caractéristiques, etc..) participent à la construction du sens du concept, et ils ont une double fonction de communication et de

représentation. Denise Grenier met en évidence les conséquences de cela dans ses notes de cours de DEA de didactique des mathématiques de Bamako, 2004

On voit bien les conséquences de cela : ce n'est pas parce qu'on dispose d'un ensemble de définitions, propriétés, théorèmes, du concept que l'on est sûr d'en maîtriser le sens. Les questions, difficultés et échecs de l'enseignement scolaire depuis des décennies sont là pour l'attester : un cours aussi parfaitement écrit soit-il, aussi « complet » soit-il, ne peut assurer à lui seul l'apprentissage. (Notes de cours de DEA de didactique des mathématiques de Bamako D. GRENIER, 2004, p. 2)

Comme nous pouvons le constater aussi dans l'enseignement de la notion de limite, malgré les théorèmes et techniques puissants que sont mis à la disposition des apprenants, ils ont du mal à appliquer la définition formelle de la limite.

Vergnaud modélise un concept par un « **triplet de trois ensembles**  $C=\{\mathbf{S}, \mathbf{I}, \mathbf{S}\}$  où

- **S** est l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept,
- **I** est l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié),
- **S** est l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant). »

**Exemple.** Le concept de « droite » en géométrie euclidienne se construit dans des situations aussi diverses que des problèmes de construction ou de reconnaissance, l'utilisation des propriétés du concept pour résoudre d'autres questions, le travail sur les équations caractéristiques, etc.

Les invariants opératoires sont les axiomes, définitions, propriétés caractéristiques et théorèmes qui concernent le concept de droite ; chacun de ces invariants est plus ou moins fonctionnel selon le type de situations considéré.

Les signifiants sont les équations, les représentations graphiques, la règle comme outil de construction, etc.

## **5. Méthodologie de recherche :**

Nous appliquons certains principes de l'ingénierie didactique classique de Artigue(1988). Cette méthodologie s'inscrit dans le registre des études de cas dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori. Elle comporte quatre phases : phase des analyses préalables, phase de

la conception et analyse a priori des situations de l'ingénierie, la phase de l'expérimentation et la phase de l'analyse a posteriori et de l'évaluation.

**a) Les analyses préalables :**

Dans une recherche d'ingénierie didactique, la phase de conception s'effectue en s'appuyant sur un cadre théorique didactique général et sur les connaissances didactiques déjà acquises dans le domaine étudié ; mais aussi en s'appuyant sur un certain nombre d'analyses préliminaires, le plus souvent :

- l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement,
- l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets,
- l'analyse des conceptions d'élèves, des difficultés et obstacles qui marquent leur évolution,
- l'analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective, et bien sûr en prenant en compte les objectifs spécifiques de la recherche.

**b) Conception et analyse a priori :**

Dans cette phase, le chercheur prend la décision d'agir sur un certain nombre de variables du système non fixées par les contraintes : variables de commande dont il suppose qu'elles sont des variables pertinentes par rapport au problème étudié. Il nous semble utile, pour faciliter l'analyse d'une ingénierie, de distinguer deux types de variables de commandes :

- les variables macro-didactiques ou globales qui concernent l'organisation globale de l'ingénierie,
- et les variables micro-didactiques ou locales qui concernent l'organisation locale de l'ingénierie, c'est-à-dire l'organisation d'une séance ou d'une phase, les unes et les autres pouvant être elles-mêmes des variables d'ordre général ou des variables dépendantes du contenu didactique dont l'enseignement est visé.

Au niveau micro-didactique, cette seconde distinction est classique puisqu'on distingue les variables dites du problème des variables dites de situation, reliées à l'organisation du milieu (Brousseau 1986), les variables didactiques étant, parmi elles, celles dont la preuve de l'effet didactique a été attestée.

### **c) Expérimentation, analyse a priori e validation**

Cette phase correspond à l'application de l'ingénierie. L'Analyse a posteriori et la validation s'appuient sur l'ensemble des données recueillies lors de l'expérimentation : observations réalisées des séances d'enseignement, mais aussi productions des élèves en classes ou hors classe. Ces données sont souvent complétées par des données obtenues par l'utilisation de méthodologies externes : questionnaires, entretiens individuels ou en petits groupes, réalisés en divers moments de l'enseignement ou à son issue. Et c'est sur la base de la confrontation des analyses a priori et a posteriori que se fonde essentiellement la validation des hypothèses engagées dans la recherche.

Pour donner une vue d'ensemble au lecteur, nous présentons la structure de notre thèse. Dans le premier chapitre, comme vous venez de le voir, nous avons justifié le choix de notre thème, présenter les questions de recherche et les objectifs, le cadre théorique et la méthodologie. Dans le chapitre 2 nous ferons l'état des lieux des travaux de références en didactique des mathématiques sur la notion de limite et préciserons son apport pour notre recherche. Dans le chapitre 3 nous procéderons à l'étude des relations institutionnelles : étude de la dimension épistémologique économique et institutionnelle du concept de limite ; étude de la dimension économique ; étude de la dimension écologique ; étude de la dimension économique versus dimension écologique ; et la synthèse de ces études et leurs apports pour la thèse (Modèle épistémologique de référence (MER), Modèle épistémologique de référence dominant (MERD) etc.)

Dans le chapitre 4 nous allons mener une enquête épistémologique pour mettre en évidence les conceptions des enseignants sur le concept de limite d'une fonction en un point en construisant et en analysant à priori un questionnaire adressé aux enseignants du Lycée, expérimenter et analyser à posteriori le questionnaire, utiliser les résultats de ce questionnaire dans la construction de la thèse.

Dans le chapitre 5 nous réaliserons la construction d'un modèle épistémologique de référence (MER), la construction et l'expérimentation d'un modèle didactique de référence (MDR). Pour cela nous allons construire et analyser a priori MDR lié à notre MER, l'expérimenter et collecter des informations, décrire et analyser a posteriori des données de l'expérimentation et faire la synthèse de résultats de cette phase expérimentale. Et enfin le chapitre 6 prendra en charge les conclusions et les perspectives de recherches.



## CHAPITRE II° SYNTHÈSE DES TRAVAUX EXISTANT

Nous allons faire dans ce chapitre une synthèse des travaux de didactiques existant qui nous ont servi de références à savoir les travaux de A. Sierpiska (1985) et B. Cornu (1983). En ce qui concerne les autres travaux sur la limite nous les évoquerons dans les chapitres qui suivront.

### 1. Travaux de A. Sierpiska (1985)

L'article d'A. Sierpiska se situe dans la voie des recherches indiquées par Guy Brousseau dans son article de 1983. Découvrir les obstacles épistémologiques liés aux mathématiques à enseigner à l'école et trouver les moyens didactiques pour aider les élèves à les surmonter. Son travail porte sur la notion de limite ; elle aborde le premier aspect seulement « découvrir les obstacles épistémologiques », elle a présenté une liste d'obstacles épistémologiques ; mais ne propose pas de situations didactiques qui permettraient aux élèves de franchir ces obstacles.

Son objectif est de mettre en évidence les OE (obstacles épistémologiques) relatifs à la notion de limite. Elle donne le champ conceptuel et la définition de la limite, la définition de la limite à l'aide des voisinages, elle évoque la divergence des points de vu concernant la notion d'OE en mathématiques ; mais elle retient deux aspects de la notion d'OE selon Bachelard (1938) qui souligne que cela n'a pas de sens de chercher à éviter les obstacles ; on doit butter contre l'obstacle, en prendre conscience et ensuite le franchir pour progresser dans le développement de son savoir.

Elle précise que : la répétition de leur apparition dans la philo genèse et ontogénèse des concepts. Cette idée n'est pas explicite chez Bachelard, et que ce sont ces deux aspects qui font l'objet de son travail. Elle fait l'hypothèse suivante :

Pour un concept mathématique déterminé, il est possible de mettre en évidence des causes de lenteur et de troubles dans l'acquisition du concept qui :

- 1) sont spécifiques de ce concept et de lui seul,
- 2) sont telles que leur prise de conscience est indispensable pour le développement de ce concept. C'est cet ensemble qu'elle appelle obstacle épistémologique relatif au concept mathématique.

La seconde condition met en relief l'aspect nécessité et la première la répétition de leur apparition dans la philo-genèse et ontogénèse des concepts.

Elle s'appuie sur l'étude historique et une étude expérimentale (élaboration d'une définition opératoire de la notion de limite) dans une situation de communication. Elle met en jeu une situation dont la résolution exige le passage à la limite. Elle présente les éléments caractéristiques d'une situation de communication, et pour l'analyse, elle utilise une analyse historique et les expressions écrites et orales des élèves. Elle conclut que les mêmes obstacles de l'histoire continuent chez les élèves, partant d'une étude du développement historique de la notion de limite et d'une situation de communication son travail lui conduit aux résultats suivants :

Proposition d'une liste d'obstacles relatifs à la notion de limite : 1) « Horror infiniti » ; 2) Obstacles liés à la notion de fonction ; 3) Obstacles « géométriques » ; 4) Obstacles « logiques » : effacement des quantificateurs ou de leur ordre, le symbole de l'opération de passage à la limite ; 5) Obstacles du symbole

Elle définit l'« horror infiniti », comme étant le refus du statut d'opération mathématique pour le passage à la limite : il s'agit de se convaincre du fait que

1.1 le passage à la limite est une méthode de démonstration suivant un schéma rigoureux qui élimine le problème de l'infini.

1.2 Un raisonnement basé sur une instruction incomplète

1.3 Le passage à la limite considéré comme la recherche de ce dont nous ne connaissons que des approximations.

1.4 Pour donner une justification à un résultat, on ne cherche pas à faire les démonstrations rigoureuses, il suffit de trouver une formule qui décrive la situation donnée et qui permet une vérification à posteriori par un calcul simple. Ici on tente d'éliminer l'infini.

1.7 Transfert des propriétés des termes d'une suite à sa limite.

1.6 Transfert automatique des méthodes d'algèbre propres à manipuler des grandeurs finies à des grandeurs infinies.

1.5 Obstacle << physique >>

Dans la rubrique quelques commentaires, l'auteure précise que la liste des obstacles citées ci-dessus n'est pas exhaustive et que l'élaboration de situations-problèmes permettant la prise de conscience et le franchissement de ces obstacles par les élèves, leur expérimentation en classe et leur analyse en interaction avec une étude historique et philosophique des problèmes liés avec l'infini surtout résulte une remise en cause de cette liste, sa modification, un approfondissement. (Notre travail s'inscrit dans ce cadre)

Il y a des obstacles sérieux à surmonter sur les notions de nombre et de l'infini, la notion de fonction est fondamentale à la notion de limite et le franchissement des obstacles qui lui sont liés à une signification particulière.

Il est nécessaire de garder une certaine distance vis-à-vis des méthodes de démonstrations ou intuitives d'introduction de la notion de limite à l'aide des représentations graphiques, il est nécessaire de mettre en place de cours d'histoire du développement des notions mathématiques pour la formation des enseignants.

L'auteure met à notre disposition les résultats de la thèse de A. Robert et de celle de B. Cornu en établissant leur correspondance à ces propres résultats.

Les modèles primitifs, modèles dynamiques, modèles statiques et modèles mixtes, la négligence de la variabilité de  $n$ , la déformation de certaines hypothèses dans les théorèmes ou définitions, appel aux procédures algébriques ou algorithmiques.

A. Robert(1982) parle de modèle stationnaire lorsque la convergence d'une suite est décrite par des phrases du type : "les termes sont les mêmes à partir d'un certain rang" les derniers termes ont toujours la même valeur... , modèle barrière si la convergence est décrite par des phrases du type : "ses valeurs ne peuvent pas dépasser  $\ell$ ", " la limite n'est pas dépassée", " ses valeurs restent inférieures à  $\ell$  et ne le dépassent jamais" ; modèle intermédiaire si on a des descriptions du type " une suite convergent est une suite qui admet un terme plus grand que tous les autres", modèle monotone si " une suite est convergente si elle est croissante majorée (ou décroissante minorée", "un suite convergente est une suite croissante qui ne peut dépasser sa limite" modèle dynamique si " plus  $n$  augmente, plus  $u_n$  se rapproche d'un nombre" ; "plus  $n$  augmente, plus la distance de  $u_n$  à  $\ell$  est petite", "les images se rapprochent d'un nombre de plus en plus près", " $u_n$  tend vers  $\ell$ " ou " les valeurs de  $u_n$  tendent vers  $\ell$ " et " $u_{n+1}$  est plus près de  $\ell$  que  $u_n$ ". ; modèle tend vers si les explications produites sont les suivantes : " une suite convergente a une limite vers laquelle elle tend", " tous les termes de la suite qui viennent après ce rang seront égaux à la valeur ou tendront vers la valeur" ; modèle statique si ils figurent des expressions du type " tout intervalle contenant  $\ell$  contient tous les unsauf un nombre fini" il s'agit de la traduction en langage naturel de la définition en  $(\varepsilon, \eta)$  de la convergence des suites ; modèle préstatique si figurent des descriptions du type " les éléments de la suite finissent par se trouver dans un voisinage de  $\ell$ " ; ou encore " pour  $n$  assez grand, les nombres  $u_n$  restent dans un intervalle autour de  $\ell$ ". il s'agit de la déformation de du modèle statique qui consiste à ne plus tenir compte du tout du "pour tout  $\varepsilon$ " la question du rapport entre  $\eta$  et  $\varepsilon$  ne se posant plus ; modèle mixte si sont juxtaposées ou imbriquées une description statique ou préstatique et une description



dynamique (à l'exclusion de "tend vers") ; modèle tautologie où il y a l'expression d'une tautologie du type "une suite convergente est une suite qui a une limite (finie)" ou "une suite est convergente si sa limite est finie" Les résultats de cette recherche confirment ceux de B. Cornu (1983)

## 2. Travaux de B. Cornu (1983)

Il commence par faire une analyse de l'objet mathématique. Il fait la genèse de la définition formalisée de la notion de limite, en montrant la liaison étroite entre la notion de limite et l'espace topologique. La notion de limite est définie de diverses manières ; selon Cornu, l'objet mathématique, notion de limite, ne doit pas être limité à sa définition seulement. *Une définition est mathématiquement suffisante pour restituer une notion, mais sur le plan de la connaissance, elle ne rend pas compte de tous les aspects de la notion.*

Pour avoir une idée complète de ce qu'est la notion de limite, il faudrait examiner en détails les différentes façons dont on l'utilise dans les secteurs des mathématiques. Ici il veut parler du champ conceptuel. Examiner les calculs de limites, les démonstrations « par passage à la limite », les résultats sur l'approximation etc... *c'est le fonctionnement de la notion qui détermine l'objet mathématique.*

Selon Cornu, la notion de limite telle que les mathématiciens la connaissent actuellement a été mise sur place progressivement. Weierstrass en a donné la formulation en epsilon – téta. Dans Bourbaki (topologie générale), elle est définie à partir de la limite des filtres (filtre de Frechet pour le cas des suites) et l'écriture  $\lim_{x \rightarrow \infty} U_n$ . Pour le cas des fonctions, on utilise le filtre des voisinages de  $a$  et on introduit la notation  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$ .

D'après Cornu, la notion de limite est étroitement liée à l'espace topologique, et c'est par le biais de la topologie que la notion de limite trouve ses applications dans tous les secteurs des mathématiques.

La notion de limite est l'une des notions fondamentales de l'analyse. La notion de limite est définie de diverses manières.

Dans l'enseignement des mathématiques, la notion de limite n'apparaît pas de la même façon que pour le mathématicien professionnel. Elle subit une transposition didactique et continue sous la pression de l'enseignement. B. Cornu n'a pas fait d'étude concernant cette transposition didactique, il s'est contenté de quelques exemples pour affirmer qu'il y a un décalage entre l'objet mathématique et l'objet d'enseignement.

Les programmes ne sont pas les seuls à déterminer l'enseignement qui est donné : les manuels scolaires y contribuent pour une grande part surtout si on prend l'exemple des pays où il existe peu d'information dans les programmes, l'enseignement est orienté par les manuels<sup>4</sup>.

Cornu a analysé les manuels de mathématiques et cette analyse montre que :

-Dans les vieux livres français de 1913, la définition de  $U$  tend vers  $K$  signifie que  $\forall \varepsilon > 0 \ |U - K| < \varepsilon$  cette définition est non cohérente, car elle peut s'appliquer à tout point d'accumulation, elle signifie aussi que  $U=K$  en analyse. Donc elle n'assure pas l'unicité de la limite et on ne donne pas non plus de méthode pour calculer cette limite.

-Le mot "limite" est introduit au moment de l'étude de la dérivée et l'expression "tend vers" apparaît pour décrire les variations d'une fonction.

-A partir de 1961-1962 le problème de la limite d'une variable, mais pas d'une fonction,  $x$  tend vers  $a$ , signifie que  $\forall \varepsilon > 0, \ 0 < |x - a| < \varepsilon$ . Nous avons encore  $x=a$ .

-La définition de la limite d'une fonction quand  $x$  tend vers  $a$  : Soit  $f$  une fonction,

$x_0 \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}, \ \forall \varepsilon > 0 \ f(x) a$  pour limite  $b$  lorsque  $\dots x$  tend vers  $x_0$  si  $\exists \alpha > 0$  tq:  
 $0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ .

Dans cette définition on ne fait pas attention à  $Df$  ni à la position de  $x_0$  par rapport à  $Df$ . Dans cette analyse des manuels, Cornu met en exergue une variété de définitions rigoureuses de la notion de limite.

Il étudie les contenus des programmes et des manuels de 1902 à 1983. Cette étude va beaucoup nous servir dans l'étude écologique de la notion de limite. Dans cette étude, il montre que la notion de limite était un simple ingrédient pour étudier la dérivée et progressivement son statut va évoluer dans les programmes.

A partir de 1961 les programmes en France sont rédigés d'une façon beaucoup plus détaillée ; mais avec la mention on se bornera à donner les définitions indispensables, ainsi que l'énoncé des propriétés utilisées. La démonstration des propriétés est hors programme. En 1966, la notion de limite apparaît explicitement en France dans le programme de 1<sup>ère</sup> C ; mais là encore on admettra sans démonstration tous les théorèmes utilisés). En 1968 elle apparaît à plusieurs reprises en 2<sup>nde</sup>, 1<sup>ère</sup> et en terminales C, D, E ; mais toujours avec la

---

<sup>4</sup> Le Mali n'a pas de manuel qui correspond à son programme ; mais les enseignants utilisent les livres d'édition française et d'autres pays de l'Afrique pour enseigner les contenus des programmes. Exemple la Collection Interafricaine de Mathématiques (CIAM) et les livres d'édition française.

mention définitions indispensables, illustrées par des exemples et contre-exemples énoncé sans démonstration des théorèmes relatifs à la limite (somme, produit, quotient de fonctions).

A travers cette étude, Cornu montre qu'il y a une autonomisation croissante de la notion de limite et donne aussi les stades d'apprentissage de la notion de limite comme suit :

- Étude d'une fonction au voisinage d'un point  $x_0$  (exemple  $\frac{1}{x}$ )
- Formulation verbale de l'idée de si  $x$  est près de  $x_0$  alors  $f(x)$  est près de  $\ell$ . "près de" ne contient aucune idée de variation ;  $x$  ne se rapproche pas de  $x_0$  : il n'y a pas encore de quantification
- Début de quantification :  $x$  s'approche de  $x_0$
- Introduction de  $\varepsilon$ , et  $\eta$  et l'interconnexion de leurs rôles
- Introduction des quantificateurs existentiel  $\exists$ , et universel  $\forall$  leur rôle et leur ordre.
- Que se passe-t-il si  $f(x_0)$  existe ?

Cette dernière question est importante à plus d'un titre, si  $f(x_0)$  existe nous avons deux cas possibles : la limite et l'image sont confondues ou elles sont distinctes.

*Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas de question, il ne peut y avoir de connaissance scientifique. (B. Cornu 1983)*

Cornu rapporte qu'il y a d'autre, comme Sue Taylor, qui affirme que le degré de difficulté d'une expression quantifiée est lié au nombre de quantificateurs qu'elle contient. Taylor propose d'introduire les quantificateurs universels un par un, et donc d'introduire une notion intermédiaire : Une étude des différentes activités pédagogiques (innovations pédagogiques)

La notion de limite était un simple ingrédient pour étudier la dérivée et progressivement son statut va évoluer dans les programmes. À partir de 1961 les programmes français sont rédigés d'une façon beaucoup plus détaillée. Par exemple, l'étude de la fonction définie par  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  quand  $x$  tend vers plus l'infini ou quand  $x$  tend vers  $-\frac{d}{c}$ , dérivée pour ce qui concerne la notion de limite, est déjà rencontrée dans l'étude des fonctions précédentes, dans ce cas, on se bornera à donner des définitions indispensables ainsi que l'énoncé des propriétés utilisées ; la démonstration des propriétés est en dehors du programme de 1966. La notion de limite apparaît explicitement au programme de 1<sup>ère</sup> C, ainsi que la continuité d'une fonction pour une valeur donnée de la variable (on admettra sans démonstration tous les théorèmes utilisés)

Le programme stipule que l'on peut approcher les fonctions  $\sin x$ ,  $\tan x$  et  $\cos x$  respectivement par  $x$  et  $1 - \frac{1}{x^2}$  pour  $x$  très petit.

En terminale C (notion de limite, définition de la limite d'une suite etc.)

Queysanne Revuz 1<sup>ère</sup> CDE tome 1 (Fernand Nathan) 1970. Définit la limite en  $x_0$  :

$Df = I - \{x_0\}$  ou  $I(x_0, r) - \{x_0\}$   $J(\ell, r) \exists I'(x_0)$  tel que  $f(I) \subset J$   
 “ $(\forall \alpha > 0) (\exists \beta > 0) \forall x \in ]x_0 - \beta; x_0 + \beta[ - \{x_0\} |f(x) - \ell| < \alpha$ ”

Dans les programmes de 1981-1982, on peut lire dans les commentaires “commencer l'étude de la limite par le cas  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  on définira  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  par  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = 0$  on dira que  $\ell$  est la limite de  $f$  au point  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - \ell) = 0$ ”

Soit  $E$  un intervalle ou  $E \cup \{0\} = I_1 \cup I_2$  et  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  si et seulement si  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 x \in \mathbb{R} x \in E$  et  $|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ , on notera que l'inégalité  $|x| < \delta$  a remplacé l'inégalité  $0 < |x| < \delta$  qui prévalait dans l'usage antérieur. Il résulte de là que si une fonction est définie en un point, elle n'a de limite en ce point que si elle est continue en ce point.

Cornu affirme que cette définition de la limite qui prend plus en compte la valeur de la fonction au point où l'on cherche la limite, suscite beaucoup de débats entre les partisans de l'ancienne définition à ceux de la nouvelle définition. Ce qui signifie qu'il y a un décalage entre le savoir savant et le savoir enseigné. Selon Cornu parmi les pistes qu'il serait intéressant à explorer, figure l'analyse de cette transposition didactique. Car le choix d'une définition dénote des intentions pédagogiques qu'il est intéressant d'analyser.

La notion de limite est étroitement liée à des notions telles que, la continuité, la dérivée, nombres réels, l'infini, les suites et séries, infiniment petit et la fonction. Cornu a mis en évidence quelques écarts entre la limite et sa définition.

L'acquisition de la notion de la limite suppose une représentation mentale, des images, des conceptions, des exemples, des liens, qui ne sont pas les mêmes que pour l'acquisition de la définition formelle de la limite. Cornu (1983) affirme que :

L'objet mathématique que constitue la notion de limite ne doit pas être réduit à la définition de la limite. Une définition est mathématiquement suffisante pour restituer une notion ; mais sur le plan de la connaissance, elle ne rend pas compte de tous les aspects de la notion. Pour avoir une idée complète de ce qu'est la notion de limite, il faudrait examiner en détail les différentes façons dont on l'utilise dans tous les secteurs des mathématiques, examiner le calcul des limites, les démonstrations par « passage à la limite », les résultats sur l'approximation, etc... C'est le fonctionnement de la notion qui détermine l'objet mathématique. (CORNU, 1983, p. 9-10).

Dans le fonctionnement, la mise en œuvre il y a un écart entre la notion et sa définition. Dans l'activité de résolution d'un problème, la notion et sa définition ne fonctionnent pas de la même façon. Avoir compris la définition permet de montrer que la limite de la somme est la somme des limites ; mais pas de calculer une limite.

Cela est claire parce que, face à la question calculer la limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point  $a$ , il y a des techniques puissantes pour vite et bien répondre ; mais face à la question montrer que  $\ell$  est la limite d'une fonction en un point  $a$ , il y a des difficultés énormes. On a l'impression que la notion de limite n'a pas de définition. On a compris que lorsque l'on peut faire et justifier son résultat.

L'enseignement de la notion de limite semble se limiter à comment faire, le côté pourquoi est ignoré. En d'autres termes on reste dans le bloc praxis et l'on ne touche pas au bloc logos. On ne peut découvrir ce déphasage entre la limite et sa définition que lorsque l'on construit sa définition formelle et la faire fonctionner.

Nous allons faire une analyse des institutions maliennes et confronter les résultats aux résultats de l'analyse faite par Cornu. Dans les travaux de Cornu on retrouve une liste de quelques obstacles fondamentaux liés à la notion de limite :

- La transposition numérique ;
- L'aspect "métaphysique" de la notion de limite ;
- La notion d'infiniment petit ou d'infiniment grand ;
- La limite atteinte ou pas ? ;
- Toute convergence est monotone ;
- Difficulté à imaginer qu'une somme infinie puisse être finie ;
- Le problème de " $\frac{0}{0}$ " deux quantités peuvent tendre vers zéro et leur rapport tend vers un nombre fini.

Nous retenons des travaux de Cornu qu'un véritable enseignement de la notion de limite nécessite non seulement la prise en compte de ces obstacles ; mais aussi la mise en lien de la notion de limite avec d'autres notions, sans lesquelles elle ne peut se développer telles que : quantificateurs, inégalités, conditions suffisantes, notion d'infini, valeur absolue, inéquations etc. Pour cet auteur, « cet apprentissage doit prendre en compte à la fois les conceptions d'élèves, les obstacles et le champ conceptuel de la notion de limite ». Il affirme que :

Le but d'un enseignement n'est donc pas seulement de donner une théorie sans défaut, de la définition aux applications. L'enseignement doit agir sur

les conceptions propres, et les transformer de façon à les rendre aptes à résoudre des problèmes variés, et à faire disparaître les contradictions. On voit donc le rôle important des exemples, des contre-exemples, des situations conflictuelles. (CORNU, 1983, p. 70)

Nous allons, à partir de ces recommandations, pour construire nos situations-problèmes. Le prochain chapitre est destiné à la dimension historico-épistémologique du concept de limite.



## CHAPITRE III° ÉTUDE HISTORIQUE ET ÉPISTÉMOLOGIQUE DE LA NOTION DE LIMITE

La notion de limite a fait l'objet de nombreux travaux de didactique des mathématiques, tous intéressants. Notamment Cornu (1983), Sierpiska (1985), Artigue (1996a, 1996b, 1989), Bkouche (1996, 1997), Job (2011), Hitt (2006) et Lecorre (2016) etc. C'est une notion fondamentale de l'analyse, ces travaux ont permis de mettre en exergue des obstacles épistémologiques et la nécessité de la définition formelle dans l'enseignement de la notion de limite.

La notion de limite apparaît comme une notion polysémique en mathématique. Ce caractère polysémique n'aide pas à la compréhension de la notion de limite par les élèves et les étudiants. L'une de ces significations est que la limite est la fin il n'y a rien de l'autre côté. C'est une notion statique pour les élèves. C'est-à-dire ils privilégient les aspects statiques

La notion de limite est avant tout une notion statique, il s'agit d'une interdiction ou d'une impossibilité de franchir quelque chose. Cette limite peut se trouver dans le temps ou dans l'espace (on s'arrête ...). Éventuellement, il peut s'y ajouter l'idée qu'il est difficile de s'approcher de la limite, et à fortiori de l'atteindre. L'expression tend vers a en général un sens plus dynamique. (CORNU, 1983, p. 122).

Il a détecté d'autres significations, la limite apparaît comme :

- Une borne infranchissable que l'on peut atteindre ;
- Une borne infranchissable que l'on peut atteindre pour d'autres ;
- Point dont on se rapproche, sans l'atteindre,
- Point dont on se rapproche jusqu'à l'atteindre ;
- Borne supérieure, borne inférieure ;
- Minimum, maximum, extrémités, frontière (CORNU, 1983, p. 104)

Pour ce qui nous concerne nous allons vérifier si ces obstacles persistent et proposer des solutions pour les surmonter à partir d'une analyse fine des définitions dites respectivement intuitive et formelle.



## 1. Étude historique de la notion de limite

Pour cette étude nous nous appuyerons sur les travaux de Cornu (1983), Sierpinski (1985), Artigue (1996a, 1996b), Bkouche (1997) et Job (2011).

On donnera l'importance de l'étude historique, les obstacles relatifs à la notion de limite, les problèmes qui ont permis l'émergence de la notion de limite et quelques débats contradictoires à propos de la définition de la notion de limite. Nous présenterons aussi une analyse de la définition formelle de  $l$  est la limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point fini  $a$ . Enfin, nous présenterons les résultats d'une enquête épistémologique exploratoire que nous avons menée auprès de futurs enseignants de l'École Normale Supérieure de Bamako.

### 1.1 Importance de l'étude historique

Un regard détaillé sur l'histoire d'une notion mathématique apporte une aide considérable à l'étude de l'apprentissage de cette notion par les élèves d'aujourd'hui. Parce qu'un tel regard permet de cerner quasiment toutes les difficultés que comporte la notion<sup>5</sup>, l'étude historique apporte un éclairage sur le champ conceptuel dans lequel la notion s'est développée car une notion ne se développe pas toute seule, son évolution est liée à celle d'autres notions, d'autres théories, apporte également un éclairage sur les "problématiques" qui ont favorisé l'apparition de la notion, une notion mathématique n'est en général pas inventée ou fabriquée de façon abstraite, à partir de rien. Elle est ébauchée petit à petit comme outil pour résoudre des problèmes, elle permet aussi de voir quels sont les problèmes qui ont permis la naissance d'une notion, et aussi quels sont les problèmes qui ont été à la source de progrès, et en fin, l'étude historique permet de repérer les principaux obstacles épistémologiques.

Cela nous paraît utile, car il nous aide à accepter certaines erreurs des apprenants et d'avoir la patience de les traiter.

Gleaser G(1981) définit l'étude épistémologique comme « l'étude des circonstances qui ont permis la production de la connaissance scientifique ». Pour Cornu (1983, p. 38) « L'étude de ces circonstances dans l'histoire, c'est-à-dire à grande échelle, apporte des éclairages sur les circonstances qui pourront permettre, chez un individu donné, chez un élève donné, de

---

<sup>5</sup> Dans le développement historique d'une notion, au contraire, le point de départ se situe dans les problèmes. On veut résoudre tel problème, on se pose telle question. On cherche alors à fabriquer un outil approprié, soit en adaptant un outil déjà existant, soit en créant un nouvel outil. Puis, au fur et à mesure que l'on avance dans la résolution du problème, on affine l'outil, de façon à l'adapter encore mieux à ce qu'on veut faire, ou de façon à l'utiliser pour un plus vaste champ de problèmes

développer la connaissance scientifique ». L'auteur précise que cela ne veut pas dire qu'il faut refaire avec les élèves ce qui s'est fait dans l'histoire, car l'élève n'aura pas nécessairement à franchir les mêmes obstacles, à suivre le même itinéraire. Le contexte scientifique a changé. Ainsi,

Il y a un équilibre à trouver entre un enseignement "historique" qui restaurerait une forêt de distinctions et de points de vue périmés dans laquelle se perdrait l'enfant, et un enseignement direct de ce que l'on sait aujourd'hui être une structure unique et générale, sans se soucier d'unifier les conceptions de l'enfant, nécessairement et naturellement différentes. La recherche des conditions d'un tel équilibre est un des grands problèmes qui se pose actuellement à la didactique. (BROUSSEAU, 1981 p. 48)

L'histoire des mathématiques est donc d'un grand secours à la didactique. Mais doit-elle seulement mentionner les découvertes et leurs dates ? La réponse est non, elle ne doit pas non plus se réduire à une simple histoire des succès ; l'historien doit s'attacher aussi aux errements, aux débats et aux obstacles.

Une histoire utilisable par les didacticiens ne saurait éliminer toute mention des débats anciens, même si la prospérité semble les avoir tranchés : car certaines objections survenues au cours des discussions sont peut-être de même nature que les réticences éprouvées aujourd'hui par quelques étudiants (G. Gleaser, 1981 cité par Cornu 1983, p.39)

Lorsqu'une incompréhension se manifeste de siècles en siècles sous les plumes les plus autorisées, on soupçonne que les causes profondes de cet aveuglement méritent d'être étudiées : on se trouve en présence d'un obstacle épistémologique caractérisé (GLEASER, 1981 cité par CORNU, 1983, p. 39)

Sans que les obstacles rencontrés dans l'histoire soient les mêmes que ceux auxquels se heurtent l'étudiant, on peut donc penser qu'il y a un certain nombre de "passages obligés" communs, et que certaines des circonstances qui ont permises dans l'histoire le franchissement d'un obstacle peuvent servir de sources d'inspiration pour construire des situations qui aujourd'hui, permettront à l'élève de mieux affronter l'obstacle.

L'étude historique permet d'illustrer comment on a fait autrefois et comment on fait aujourd'hui des mathématiques. Elle met aussi en évidence le rôle de l'erreur dans l'évolution des mathématiques. En voyant parfois de grands mathématiciens se casser les dents sur des problèmes, l'élève en conclut qu'il est normal de discuter d'un problème et d'avoir éventuellement des difficultés à le résoudre.

Sur l'importance de l'étude historique Michèle Artigue écrit :

Ceci rend d'autant plus intéressant un retour sur l'histoire de cet enseignement qui nous permette d'analyser si les problèmes aujourd'hui

ressentis l'étaient ou non déjà hier, et en quels termes ; de savoir aussi comment nos aînés ont abordé et géré cet enseignement, dans les contextes et les contraintes qui étaient les leurs ; de comprendre enfin quelle filiation est issu notre enseignement actuel et en quoi certaines de ses caractéristiques sont la marque directe de cette filiation, qu'elles se situent en continuité ou, au contraire en rupture évidente, avec des pratiques plus anciennes. (ARTIGUE, 1996a, p. 198)

Louis Charbonneau du groupe de travail *la place de l'histoire dans l'enseignement de mathématiques EMF 2000* a dégagé deux grandes catégories, non disjointes, de motivations pour justifier l'usage de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques, d'une part des motivations d'ordre pédagogique, d'autre part, des motivations ayant trait à l'image que se font les élèves des mathématiques.

En ce qui a trait aux motivations pédagogiques, il mentionne cinq :

- 1) Introduire d'une façon plus vivante des notions mathématiques ;
- 2) Varier les approches didactiques en classe ;
- 3) Permettre à l'enseignant de manifester son propre plaisir intellectuel face aux mathématiques et à leur histoire, dans l'espoir que son enthousiasme se transmettra à certains de ses élèves ;
- 4) Favoriser un travail mathématique qui repose non seulement sur l'usage des symboles mais aussi sur l'expression, sous forme de texte, des idées et méthodes mathématiques impliquées dans l'activité mathématique ;
- 5) Aborder les mathématiques par le biais de ce cheval de Troie intellectuel qu'est l'histoire des mathématiques de sorte que par des activités relevant plutôt des sciences humaines, on en vienne à entreprendre des activités plus mathématiques.

En ce qui a trait aux motivations ayant trait à l'image des mathématiques il cite sept:

- 1) Contre le dogmatisme apparent des mathématiques scolaires ;
- 2) Mettre les élèves en situation de voir les mathématiques comme une activité humaine, même humaniste ;
- 3) Permettre à l'élève une liberté dans la façon d'aborder et de diriger son travail mathématique ;
- 4) Donner l'occasion aux élèves d'entrevoir la diversité des approches qui existent à l'intérieur des mathématiques ;
- 5) Permettre aux élèves de voir que leurs difficultés en mathématiques sont souvent naturelles puisque les mathématiciens d'autrefois ont eux-mêmes fait des erreurs ;

- 6) Amener les élèves à constater, par la fréquentation de quelques textes anciens, qu'il est possible de faire des mathématiques sans avoir nécessairement recours au symbolisme ;
- 7) Relever le niveau culturel des cours de mathématiques.

Vu l'importance de l'histoire, il est nécessaire d'introduire l'histoire des mathématiques dans la formation des futurs enseignants. Cela leur permettra de prévenir les types d'obstacles et d'erreurs que les apprenants peuvent commettre, les anticiper et élaborer des situations pouvant aider les élèves à les surmonter. Elle permet aussi aux enseignants de faire une bonne organisation sociale des apprenants.

## 1.2 Les ancêtres de la notion de limite

Du point de vue historique on peut citer : les paradoxes de Zénon d'Elée ; la notion d'infini (infini potentiel et l'infini actuel, infiniment grand et infiniment petit), la méthode de la double réduction par l'absurde (méthode d'exhaustion), les suites et les séries, les problèmes de géométrie : calcul d'aire, de volume, les indivisibles, la méthode dite des fluxions de Newton (le calcul des dérivées).

Dès l'antiquité, avec les paradoxes de Zénon d'Elée. Le problème se pose la question de savoir si une somme infinie peut être finie ?

Les trois autres paradoxes sont du type : « on ne peut pas traverser un nombre infini de point en un temps fini ». On voit apparaître aussi le lien avec le temps. On ne sut pas à cette époque, expliquer les paradoxes ; Aristote les situait dans la façon dont une ligne est partagée en points. C'est-à-dire dans la nature des objets géométriques : on ne peut considérer une ligne comme juxtaposition de points.

La notion d'infini est également présente, mais de façon potentielle. Selon Aristote, on peut partager indéfiniment en deux une quantité : l'illimité existe potentiellement, mais n'est jamais atteint. Vers 400 av. J.-C., les problèmes essentiels que l'on se posait en mathématiques étaient des problèmes de géométrie : calculs de longueurs, calculs d'aires : par exemple, Hippocrate de Chios (430 av. J.-C.) veut prouver que le rapport des aires de deux cercles est égal au rapport des carrés de leurs diamètres.

Pour cela, il inscrit dans les deux cercles des polygones réguliers semblables, et, en augmentant indéfiniment le nombre de côtés, il recouvre les deux cercles. A chaque étape, le rapport des aires des polygones inscrits est égal au rapport des carrés des rayons des cercles : il en résulte que, "à la limite", il en est de même des aires des cercles. Ce passage

à la limite, très peu explicité, sera précisé un siècle plus tard, sous la forme de la méthode d'exhaustion, due à Eudoxe De Cnide (408-355 av. J.-C.). Cette méthode s'appuie sur le principe d'Eudoxe (Euclide Eléments, livre X, proposition 1) ; "Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées". Autrement dit, par des divisions par 2 successives, on peut rendre une grandeur aussi petite que l'on veut. De là, on obtient le principe d'exhaustion, qui permet d'affirmer que pour tout  $\varepsilon > 0$  l'existence d'un polygone régulier inscrit dans le cercle, dont l'aire approche celle du cercle à moins de  $\varepsilon$  près.

La propriété sur le rapport des aires est facile à démontrer pour les polygones réguliers. On en déduit le rapport des aires des cercles, au moyen d'une "reductio ad absurdum" : on veut montrer que le rapport des aires  $\frac{A_1}{A_2}$  est égal au rapport des carrés des rayons  $\frac{r_1^2}{r_2^2}$ . On a l'un des trois cas :  $\frac{A_1}{A_2} > \frac{r_1^2}{r_2^2}$ ,  $\frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$ , ou  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$ . On élimine les deux premiers en montrant qu'ils conduisent à une contradiction. D'où l'égalité recherchée. Bien que la méthode d'exhaustion soit assez proche de la notion de limite par certains aspects, on ne peut pas dire que les Grecs possédaient le concept de limite. Car la méthode d'exhaustion est avant tout une méthode géométrique, qui permet de démontrer des résultats sans avoir recours à l'infini. Les grecs manifestaient une très grande réticence à l'égard de l'infini, et s'interdisaient d'en faire usage dans des raisonnements mathématiques. Il faut voir aussi que la méthode d'exhaustion s'applique à des grandeurs géométriques, et pas à des nombres.

Le concept unificateur de limite sur des nombres n'est pas présent, on ne dispose pas de résultats généraux, et on remet la méthode en œuvre sur chaque exemple, sans avoir dégagé véritablement l'outil qui permettrait de résoudre les problèmes de façon plus générale (J.L OVAERT cité par CORNU, 1983, p.42)

C'est compte tenu de l'insuffisance, parfois peu rigoureuses et l'inefficacité de ces méthodes que la notion de limite a vu le jour.

### 1.3 Les problématiques

Nous avons le problème du découpage des figures géométriques en figures élémentaires ("indivisibles"), le calcul des sommes de séries<sup>6</sup>, la notion de fonction est

---

<sup>6</sup> Il ne s'agit pas alors de parler de convergence ou de divergence, mais de calculer explicitement des sommes : Archimède a calculé la somme de la série de terme général  $\frac{1}{4^n}$  ; Oresme (1323-1382) calcule  $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} +$

encore très mal assurée, Fermat résoud des problèmes de minimum et de maximum<sup>7</sup>, -la méthode des fluxions de Newton : notion de “rapport premier”, et celle de “rapport ultime”<sup>8</sup> » Les fluxions sont, aussi près que l’on veut, comme les accroissements de fluentes générés en de très petites particules de temps, égales et pour parler de façon précise, elles sont dans le rapport premier des accroissements naissants” (de quadratura curvarum)

Cette notion de “rapport premier”, et celle de “rapport ultime”, sont d’une grande importance dans l’histoire de la notion de limite. Elles donneront lieu par suite à des débats houleux.

Voyons un exemple de rapport ultime : Si on change  $x$  en  $x+\theta$ , quel est le “taux de variation” de  $x^n$  ? on a :  $(x + \theta)^n - x^n = n\theta x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\theta^2 x^{n-2} + \dots$ . Le rapport du taux de variation de  $x^n$  à celui de  $x$  est alors :  $\frac{(x+\theta)^n - x^n}{\theta} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\theta x^{n-2} + \dots$ . Ainsi en faisant devenir « $\theta$ » très petit, on obtient le rapport  $(nx^{n-1})$ . Newton appelle cette valeur le rapport ultime. Alors que deux quantités tendent vers zéro, le rapport se rapproche d’une “limite”. La dérivée n’est pas une “application”, une utilisation, de la notion de la limite. Au contraire, c’est en cherchant à calculer des dérivées qu’on a façonné un peu mieux la notion de limite. Nous avons également la notion d’infiniment petit et d’infiniment grand.

---

$\frac{4}{16} + \dots$  et la somme de la série de terme général  $\frac{3^n}{4^n}$  ; il obtient la divergence de la série harmonique en montrant que  $a_{2n} - a_n$  est plus grand que  $\frac{1}{2}$ . Au xvii<sup>e</sup> siècle les séries interviennent massivement. Grégoire Saint De Vincent (1584-1667) mathématicien Belge, reprend les méthodes de dichotomie en permettant à la subdivision de continuer “ad infinitum”. Il a fallu ainsi le lien avec les séries, et, en particulier, il est le premier à appliquer aux paradoxes de Zénon, il résout le problème de la rencontre d’Achille et de la tortue. Il utilise le mot “terminus” pour parler de la limite, et pour lui, ce “terminus” est vu comme un obstacle, un mur, qu’il est impossible d’atteindre et de dépasser. Mengoli (1638-1686) calcule la somme de la série harmonique alternée. Grégoiry (1638-1675) commence à développer certaines fonctions en série ; il introduit le terme “converge” qu’il emprunte à l’optique. Mercator et Newton obtiennent l’égalité  $\log(x+1) = x - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3}$ .

<sup>7</sup>Par exemple, il veut partager un segment de longueur  $b$  en deux segments de longueurs  $x$  et  $b-x$  de produit maximum : on veut que  $x(b-x) = bx - x^2$  soit maximal : Fermat remplace  $x$  par  $x+e$  :  $b(x+e) - (x+e)^2 = bx + be - x^2 - 2xe - e^2$ , et ceci doit être peu différent de  $bx - x^2$  ; donc  $be - 2xe - e^2 = 0$  et  $b = 2x + e$ , c’est-à-dire  $b = 2x$ , d’où  $x = b/2$ . L’idée sous-jacente est qu’au voisinage d’un maximum, la fonction ne varie presque pas. Mais Fermat ne donne aucune explication sur sa méthode. En particulier, il ne demande pas que  $e$  soit petit, et il ne parle pas de prendre une limite. Son raisonnement est purement algébrique : partant de  $f(x+e) = f(x)$ , il divise par  $e$ , puis prend  $e=0$

<sup>8</sup>Newton élabore ce qui est connu sous le nom “méthode des fluxions” : “je ne considère pas les grandeurs mathématiques comme formées de parties si petites soient-elles, mais décrites d’un mouvement continu. Les lignes sont décrites et engendrées, non pas par la juxtaposition de leurs parties, mais par le mouvement continu des points, les surfaces par le mouvement des lignes... considérant donc que les grandeurs qui croissent dans le temps égaux sont plus grandes ou plus petites selon quelles croissent avec une vitesse plus grande ou plus petite, je cherchais une méthode pour déterminer les grandeurs d’après les vitesses des mouvements ou accroissements qui les engendrent. En nommant fluxions les vitesses de ces mouvements, tandis que les grandeurs engendrées s’appelleraient fluentes, je suis tombé sur la “méthode des fluxions”.

## 1.4 Les débats contradictoires

Ces problématiques ci-dessus sont à l'origine des débats qui vont s'instaurer au 18<sup>e</sup> siècle en Grande-Bretagne. Berkeley (1667-1745) reproche à Newton de faire le rapport de deux quantités qui s'annulent. Pour lui, cela n'a pas de sens ; on ne peut pas parler de "vitesse instantanée", car pour qu'il y ait vitesse, il faut qu'il y ait un lien avec l'espace et le temps<sup>9</sup> : Berkeley n'admet pas non plus les raisonnements dans lesquels on annule une quantité  $a$  après avoir divisé par  $a$ <sup>10</sup>. John Walton, professeur à Dublin, prendra la défense de Newton, en repliquant à Berkeley : "Dans la méthode des fluxions, on ne s'intéresse pas à la grandeur des incréments ou des décréments instantanés des quantités, mais à leur premier rapport ou à leur rapport ultime, c'est-à-dire la proportion dans laquelle elles commencent ou cessent d'exister... il y a des limites fixées vers lesquelles ces proportions tendent perpétuellement, et dont elles s'approchent plus que toute différence assignée, mais qu'elles n'atteignent jamais avant que les quantités elles-mêmes soient infiniment diminuées, ou avant l'instant où elles s'évanouissent et deviennent rien". On notera cette référence "l'instant" où des quantités commencent d'exister ou s'évanouissent; l'idée d'un tel instant est certainement liée à la notion d'infiniment petit, c'est-à-dire d'un état intermédiaire entre ce qui est nul et ce qui ne l'est pas.

Un autre débat a lieu en Grande Bretagne à la même époque, entre Jurin (1684-1751) et Robins.

Ce débat porte sur la possibilité ou non d'atteindre la limite, et sur ce qui se passe à l'instant où une quantité s'annule. Pour Robins, on ne peut pas atteindre la limite, de même que des polygones réguliers inscrits dans un cercle ne seront jamais égaux au cercle : "on appelle grandeur ultime la limite à laquelle une quantité variable peut s'approcher aussi près que l'on veut, mais à laquelle elle ne peut jamais être absolument égale".

---

<sup>9</sup> un point peut être la limite d'une ligne ; une ligne peut être la limite d'une surface ; un instant peut terminer le temps. Mais comment peut-on concevoir une vitesse au moyen de telles limites ? une vitesse dépend du temps et de l'espace, et ne peut-être conçu sans eux. Et si les vitesses de quantités naissantes ou qui s'évanouissent, c'est-à-dire sans lien avec le temps et de l'espace, ne peuvent être comprises, comment peut-on comprendre et montrer leur rapport ; ou considérer leur rapport "premier" ou "ultime" ? car, considérer le rapport de deux choses suppose que ces choses aient une grandeur, et que cette grandeur puisse être mesurée". (The Analyst, §31)

<sup>10</sup> ce raisonnement ne semble pas juste ni probant. Car lorsqu'on dit que les incréments s'annulent, c'est-à-dire que les incréments ne sont plus rien, ou qu'il n'y a plus d'incréments, la supposition précédente que les incréments étaient quelques chose, ou qu'il y ait des incréments, est détruite, et cependant une conséquence de cette supposition est retenue... c'est une faute de raisonnement. Il est certain que lorsqu'on suppose que des incréments s'annulent, nous devons supposer que leurs rapports, leurs expressions, et tout ce qui découle de la suppression de leur existence, s'annule avec eux". (The Analyst, §13).

Pour Jurin au contraire, le “rapport ultime” est le rapport atteint à l’instant où les quantité s’annulent. Jurin tente d’analyser ce qui se passe à cet instant : “il ne s’agit pas que l’incrément soit rien, mais qu’il s’évanouisse, ou qu’il soit sur le point de s’évanouir”.

“il y a un rapport dernier d’incrément qui s’évanouissent”. “ Un incrément naissant est un incrément qui commence à exister à partir de rien, ou qui commence à être généré, mais qui n’a pas encore atteint une grandeur que l’on peut assigner, aussi petite soit-elle”. (CORNU, 1983, p. 49 ).

Jurin note l’importance du temps dans la notion de limite : “qu’une quantité ou un rapport atteigne sa limite ou ne l’atteigne pas dépend uniquement de ce qu’on suppose à propos du temps pendant lequel la quantité ou le rapport est considéré comme tendant vers ou s’approchant de sa limite”.

### 1.5 Définition de la notion de limite

Euler (1707-1783) aide beaucoup à débarasser le calcul de son support géométrique. Il veut travailler non pas sur des grandeurs, mais sur des fonctions. L’étude des fonctions a été l’un des facteurs de développement de la notion de limite. A l’époque d’Euler, la notion de fonction n’était pas encore très claire ; il s’agit essentiellement d’expressions algébriques. En introduisant plusieurs ordres d’infiniment petits :  $dx$ ,  $(dx)^2$ . Euler développe des fonctions en série. Cela lui permet d’obtenir de nombreux résultats sur les séries numériques. Il est important de signaler qu’Euler ne s’est pas seulement intéressé au point de vue qualitatif (convergence ou divergence) ; mais surtout au point de vue quantitatif (rapidité de convergence, ou même de divergence).

D’Alembert (1717-1783) est très sensible au problème des infiniment petits et des infiniment grands. Pour lui, les infiniment petits, relèvent de la “métaphysique”, et n’ont rien à faire dans le raisonnement mathématique<sup>11</sup> : Il résulte des raisonnements faisant intervenir des quantités “qui s’évanouissent” :

une quantité est quelque chose ou rien ; si elle est quelque chose, elle n’est pas encore évanouie ; si elle n’est rien, elle est évanouie tout à fait. C’est une chimère que la supposition d’un état moyen entre ces deux-là” (Œuvre philosophique de D’Alembert volume2, Ed Jean-François Bastien, 1805, p. 353).

---

<sup>11</sup> “on peut du reste se passer très aisément de toute cette métaphysique de l’infini dans le calcul différentiel”, “la supposition que l’on fait de quantités infiniment petites, n’est que pour abréger et simplifier les raisonnements, mais dans le fond le calcul différentiel ne suppose point l’existence de ces quantités”. ( Encyclopédie, article “différentiel”)



D'Alembert va donc s'attacher à dégager la notion de limite de cette "métaphysique" des infiniment petits, et à en donner une définition précise, il la définit ainsi :

On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on puisse la supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche ; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable. (La Chapelle, D'ALEMBERT. L'Encyclopédie, 1<sup>ère</sup> éd. 1751, Tome 9, p.542)

Il insiste sur le fait qu'une quantité ne devient jamais égale à sa limite<sup>12</sup> : Il prend pour exemples le cercle, limite des polygones inscrits, ou encore la somme d'une progression géométrique. Il définit la "somme d'une suite" ( i.e. d'une série) comme "la limite de ses différents termes, c'est-à-dire une quantité dont on approche aussi près qu'on veut, en prenant toujours dans la suite d'un nombre de termes de plus en plus grand". Il est très réticent à l'égard des séries divergentes<sup>13</sup>. La notion de limite mise en place par D'Alembert oppose la notion de limite à celle d'infiniment petit, par souci de rigueur mathématique. Sierpiska (1985) précise que la notion de fonction n'apparaît pas dans cette définition, il n'est pas question de nombres mais de grandeurs, et enfin les expressions *s'approcher*, *différence entre les grandeurs*, et *inassignable* ne sont pas définies non plus.

Lagrange (1736-1813) est réticent à la fois à l'égard de la notion de limite et à l'égard des infiniment petits. À propos de la limite, Il écrit : "l'espèce de métaphysique que l'on est obligé d'y employer est, sinon contraire, du moins étrangère à l'esprit de l'analyse, qui ne doit avoir d'autre métaphysique que celle qui consiste dans les premiers principes et dans les premières opérations fondamentales du calcul".

Il veut ramener toute l'analyse au calcul algébrique, et pour cela, il travaille avec le développement en série des fonctions. Lagrange qui refuse la notion de limite, est l'un des principaux artisans du passage au domaine numérique, passage qui permettra l'unification du concept de limite. Pour Lagrange, la limite ne met pas en jeu l'infini ; il développe la pratique des majorations et des minorations, en particulier pour contrôler le reste d'une série. Les séries sont avant tout pour lui des objets algébriques formels. Lorsqu'on substitue des

---

<sup>12</sup> A proprement parler, la limite ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra.

<sup>13</sup> pour moi, j'avoue que tous les raisonnements fondés sur les séries qui ne sont pas convergentes me paraissent très suspects, même quand les résultats s'accorderaient avec des vérités connues d'ailleurs. (Opuscles Mathématiques, 5, p.183)

nombre aux indéterminées, se pose le problème de la convergence, et donc la nécessité d'une majoration du reste : après avoir établi la formule :  $f(x) = f(x - xz) + xzf'(x - xz) + \frac{x^2z^2}{2}f''(x - xz) + etc.$  Il prend soins de calculer le reste pour le cas où "on veuille s'arrêter à son premier, second, troisième, etc. terme", et il obtient par exemple : " $f(x) = f + xf' + \frac{x^2}{2}f'' + x^3R, R.$  étant une fonction de  $z$  qui s'évanouisse lorsque  $z=0$ ". Ayant ainsi travaillé dans le domaine numérique, il applique ensuite ses résultats à la géométrie et à la mécanique. A partir de là, la pratique du calcul se développe considérablement, et le passage au domaine numérique s'effectue totalement : après le calcul formel sur les fonctions, on travaille sur les nombres. Fourier, Poisson et Gauss en sont les principaux artisans. Gauss a une idée claire de la notion de limite, et en 1800, il définit les notions de borne supérieure, borne inférieure, limite supérieure, limite inférieure.

C'est Cauchy (1789-1857) qui donne sa place définitive à la notion de limite, en réorganisant l'analyse à partir de cette notion. Pour lui, le concept de limite est le concept de base en analyse, et, dès le début de son cours à l'École Normale Polytechnique, il définit la limite et introduit les opérations sur les limites :

Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchaient indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus. (CORNU, 1983, p. 53)

Il va fonder toute l'analyse sur la limite : continuité, dérivée, intégrale. Toutefois, Cauchy reste encore marqué par les infiniment petits, et il s'en sert parfois : cela influence son langage ; ses articles de recherche utilisent essentiellement la notion d'infiniment petit. La notion de limite n'est pas encore définitivement affinée : elle se confond encore avec la notion de point d'accumulation :  $\lim(\sin(\frac{1}{x}))$  a pour Cauchy, une infinité de valeurs comprises entre -1 et +1. Il y a aussi la confusion entre l'étude de la continuité et l'étude de la limite en un point et confusion entre limite et image.

La relation fonctionnelle apparaît déjà avec une attribution de valeurs numériques. Mais on parle de valeurs consécutives ce qui fait dire selon Sierpinski que cette définition concernait seulement les suites numériques. Inspirée par (LAKATOS, 1978b, p. 48), elle précise que les quantificateurs sont implicites dans cette définition et des expressions

indéfinies comme par exemple *s'approcher indéfiniment*. De plus elle précise que Cauchy ne marquait pas distinctement la dépendance entre le voisinage du point auquel on calcule la limite et le voisinage du point qui est la limite. Elle attire notre attention qu'en langue naturelle on ne fait pas bien attention à l'ordre des mots et aux différences subtiles qui s'ensuivent.

Alors qu'en France les idées de Cauchy ne sont pas reprises immédiatement, la notion de limite se développe rapidement en Allemagne, et Weierstrass (1816-1897) en donne une formulation "statique", sous la forme que nous connaissons aujourd'hui.

« Si étant donné un nombre réel positif quelconque  $\varepsilon$ , il existe un nombre  $\eta_0$  tel que pour  $0 < \eta < \eta_0$ , la différence  $f(x_0 \pm \eta) - \mathcal{L}$  est plus petite en valeur absolue que  $\varepsilon$  alors  $\mathcal{L}$  est la limite de  $f(x)$  pour  $x=x_0$ . Il n'y a rien à ajouter, rien à supprimer ». Ou encore

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in Df (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

#### **Les notions qui ont été éclairées à l'aide de la définition de la notion de limite**

Selon P. Dugas(1970) Méray avait le désir de bâtir l'analyse, qui est pour lui le fondement de toutes les mathématiques, sur des bases solides, désir que domine une exigence souveraine de la rigueur, excluant, en particulier, dans les démonstrations en analyse tout emprunt à la géométrie ; et, d'autre part, par la première définition correcte des nombres irrationnels, contribution importante à l'arithmétisation de l'analyse, et qui a débarrassé la notion de limite de toute contradiction.

C'est en 1868 et 1869 qu'il va publier deux mémoires, dont le premier esquisse sa doctrine d'Analyse basée sur le développement des fonctions en séries de Taylor et dont le second donne, pour la première fois, une définition satisfaisante des nombres irrationnels. Le deuxième mémoire nous intéressera principalement dans notre travail, car il a permis de faire sortir la notion de limite du « cercle vicieux » dans lequel elle était enfermée à cette époque.

Selon Dugas, la conception de l'analyse de Méray était basée sur le développement des fonctions en séries de Taylor et cela a eu comme conséquence de préciser le rôle et la place de la notion de limite en analyse. Ce rôle est fondamental, et dans ses traités Méray commence par donner la définition de la limite. D'où la raison qui l'a poussé à élaborer sa théorie des nombres irrationnels, car sans leur définition correcte la notion de limite était contradictoire.

Il affirme que tous les historiens des mathématiques sont d'accord sur le point que c'est Charles Méray qui a, le premier, publié une théorie cohérente et rigoureuse des nombres

irrationnels dans son mémoire paru en 1869. Après avoir analysé ce mémoire Dugas affirme que la définition des nombres irrationnels qu'il donne et qui, à quelques précisions près, est celle que l'on utilise encore aujourd'hui.

Méray commence par dire que deux principes sont le fondement essentiel de toutes les parties des mathématiques où intervient la notion de limite d'une suite et en particulier de celles qui concernent les nombres irrationnels, les séries et l'intégration. Le premier principe est qu'une suite croissante majorée (resp., décroissante minorée) tend vers une limite. Le deuxième principe est qu'une suite de Cauchy tend vers une limite. Et Méray poursuit :

Jusqu'à présent on a regardé ces propositions comme des axiomes. Toutefois, en les examinant avec attention, j'ai reconnu qu'on peut ramener la seconde à la première, dont le caractère d'évidence est plus prononcé, et même finalement qu'il est possible de se passer de l'une et de l'autre. En procédant de cette manière, on suit, il est vrai, une voie détournée, mais elle est plus sûre, et on échappe à la nécessité d'introduire dans le raisonnement la conception assez obscure de nombre incommensurable. (MÉRAY cité par P. DUGAS, 1970, p. 339-340).

Il dépassera cette difficulté par une audacieuse hypothèse en « complétant » l'ensemble des nombres rationnels. Sur cette difficulté, Méray écrit :

Toute méthode propre à constater l'existence d'une quantité remplissant des conditions déterminées repose essentiellement sur quelque procédé à l'aide duquel on pourrait calculer d'après les données la valeur même de cette inconnue. Or les notions fournies par notre axiome sur la nature de la variable ne permettent pas à elles seules de découvrir la valeur de sa limite ; donc elles ne suffisent pas à en établir l'existence (P. DUGAS, 1970, p. 340)

Et la seule façon de résoudre ce problème est de tourner cet obstacle. Pour vaincre ces difficultés, Méray va avoir une idée extraordinairement féconde, celle de chercher les propriétés qui caractérisent les nombres rationnels, leur structure. Car « les énoncés actuels dissimulent des propriétés spéciales des nombres proprement dits » et « il suffira de les en extraire » pour trouver la solution. Pour cela, Méray développe sa théorie des nombres irrationnels, en supposant que les nombres rationnels sont déjà construits et en leur réservant exclusivement la dénomination de nombre.

Il commence par donner la définition d'une suite (Méray dit variable progressive) de nombres  $v = (v_n)$  qui tend vers une limite  $V$ , « et on voit immédiatement que  $v_{n+p} - v_n$  a pour limite zéro, quelle que soit la loi de croissance simultanée imposée à  $n$  et à  $p$  ». S'il n'y

a pas de nombre rationnel vers lequel tend la suite  $v$ , mais si la différence  $v_{n+p} - v_n$  tend vers zéro, « la nature de  $v$  offre une ressemblance extraordinaire » avec les suites qui tendent vers un nombre rationnel. Et Méray dira qu'une telle suite est convergente et, pour exprimer sa convergence, il dira qu'elle a une limite (fictive).

Ce sont les précisions que Méray donnera dans la suite de son mémoire qui vont faire de cette limite fictive, par laquelle il complète l'ensemble des rationnels, le nombre réel tel que, à peu de chose près, on le définit encore actuellement, car sa définition va correspondre à un « passage au quotient » par une relation d'équivalence. En effet, l'utilité de définir une limite fictive va se manifester lorsqu'il introduira la notion de suites équivalentes : deux suites  $u$  et  $v$  sont équivalentes si leur différence tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini. « Et on voit tout de suite que deux variables équivalentes à une troisième le sont entre elles. » Ainsi complété par les limites fictives, l'ensemble des nombres réels conserve l'ordre total de l'ensemble des rationnels : si les suites sont équivalentes, « elles ont des limites égales », sinon la limite fictive de  $v$  « est supérieure ou inférieure à celle de  $u$ , selon que  $u - v$  finit par rester positive ou négative ».

**Donc le nombre irrationnel, c'est l'ensemble des suites dont la différence tend vers zéro.** L'exemple de la racine carrée d'un nombre rationnel est une confirmation de ce que Méray appelle un nombre irrationnel. Si  $a$  est un nombre rationnel et s'il n'est pas « un carré », «  $\sqrt{a}$  désignera dans le langage cette racine fictive et dans les calculs toute variable progressive dont le carré tend vers  $a$  ».

La même théorie est applicable aux nombres complexes qui ne sont « que des combinaisons de deux quantités réelles »

À partir d'un examen attentif de son mémoire de 1869, P. Dugas(1970) affirme que Méray a donné une définition claire et rigoureuse des nombres irrationnels, dégagée de toute notion géométrique et qu'il a vu qu'il fallait sortir la notion de limite des contradictions où elle était enfermée à cette époque du fait que les nombres irrationnels n'étaient pas définis correctement.

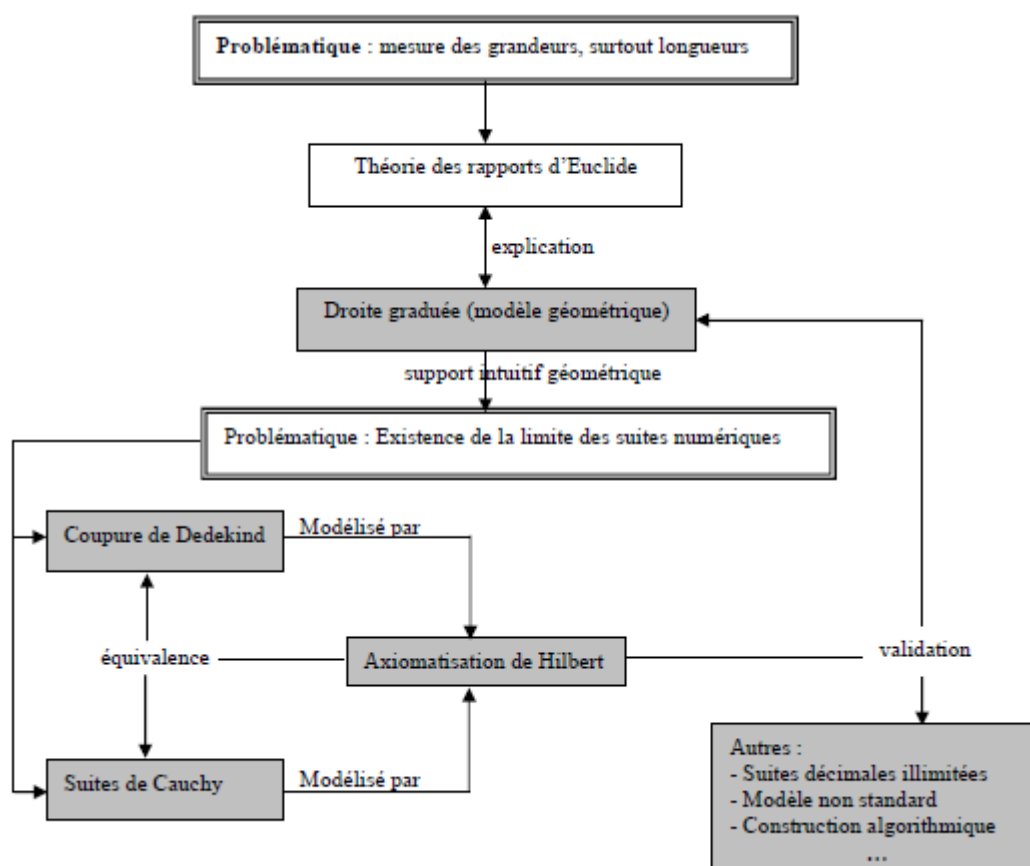
On termine cette étude historique en présentant le tableau de coévolution de la notion de limite et de nombre et le schéma réalisé par Le Thai Bao 2007, avant d'entamer l'étude épistémologique.

Tableau 1: Coévolution du statut numérique des réels et de la notion de limite

Moment	Nombre en tant que rapport	Relation entre nombre et limite	Evolution de la notion de limite
Euclide	<i>Notion protomathématique des nombres réels</i> Statut numérique : ordre total, sans opérations, sans complétude		
	- Construction des rapports par la relation d'égalité - Existence de rapports commensurables et incommensurables. - Irrationnel : pas objet d'étude	Méthode d'exhaustion comme outil pour montrer l'égalité entre deux rapports et pour faire certains calculs approchés	Méthode d'exhaustion : grandeur devenant aussi petite que l'on veut ( <i>approximation monotone</i> )
Stevin 1585	<i>Notion paramathématique des nombres réels</i> Statut numérique : ordre total, opérations géométriques, continu géométrique		
	Rapport = Nombre	Tout rapport est approchable par des décimaux	Approximation décimale
Newton 1642-1727	Nombre = Rapport abstrait.	Nombre ou « limite » = Rapport abstrait	Méthode des fluxions : rapport ultime de deux quantités infiniment décroissantes. ( <i>approximation monotone</i> )
D'Alembert 1717-1783	- Rapport commensurable = Nombre - Incommensurable $\neq$ nombre	Irrationnel = Limite de rationnels	Notion de limite d'une grandeur : approcher comme l'on veut mais sans dépasser. ( <i>approximation monotone</i> )
Cauchy 1821	- Rapport = Nombre. - Nombre avec les signes (+/-) = Quantité. $\Rightarrow$ Ensemble des nombres positifs et négatifs	On sait exactement ce que veut dire : « $a$ est la limite de $(x_n)$ ».	Notion de limite d'une suite numérique du point de vue de l' <i>approximation non monotone</i>

Source : Le Thai Bao 2007, p. 47

Figure 1: Différentes constructions et définition des nombres réels



Source : Le Thai Bao (2007, p. 54)

À la lumière de cette étude historique, on peut affirmer que la notion de limite a mis du temps pour être clairement définie, sa construction a permis la construction de l'ensemble des nombres réels. Elle n'est pas apparue pour résoudre de nouveaux problèmes ; mais pour formaliser, unifier, généraliser et simplifier des concepts de base de l'analyse. Comme le disent Nicolas Grénier-Boley dans « La notion de « limite de fonction » : quelques exemples d'évolution au cours des diverses réformes de l'enseignement secondaire »

Historiquement, la notion de limite n'est pas apparue pour résoudre de nouveaux problèmes<sup>14</sup> mais pour fonder l'analyse et l'enseigner (Cauchy, 1811) et il n'y a donc pas de situation fondamentale à son introduction. Plus précisément, la notion de limite est une notion FUG au sens d'Aline Robert, c'est à dire une notion formalisatrice, unificatrice et généralisatrice (elle unit et généralise des notions vues précédemment par le biais d'un nouveau formalisme). (NICOLAS GRÉNIER-BOLEY [http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/limite\\_ngb\\_annexe.pdf](http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/limite_ngb_annexe.pdf). (02/02/2019)

<sup>14</sup> C'est compte tenu de l'insuffisance, parfois peu rigoureuses et l'inefficacité de ces méthodes (mdra, exhaussion) que la notion de limite a vu le jour.

C'est une notion complexe et polysémique. Nous allons mettre cette complexité en exergue dans l'étude épistémologique. C'est à travers la notion de limite que les mathématiciens ont mis au point la notion de convergence, la notion d'infini, la notion de nombre réel, la continuité, la dérivée, l'intégrale.

## **2. Étude épistémologique de la notion de limite**

Nous présenterons dans cette étude, les obstacles épistémologiques de la notion de limite, une analyse de la définition formelle de  $\ell$  est la limite d'une fonction numérique d'une variable en un point fini  $a$ , les difficultés de l'enseignement et l'apprentissage de la notion de limite, enfin nous présenterons les résultats d'une enquête épistémologique que nous avons menée auprès de futurs enseignants de l'École Normale Supérieure de Bamako afin de connaître leur rapport personnel à la notion de limite.

### **2.1 Définition de l'épistémologie :**

C'est la connaissance des processus par lesquels les concepts scientifiques se forment et se développent et, plus généralement, connaissance des caractéristiques de l'activité scientifique.

### **2.2 Les apports de l'épistémologie à la didactique :**

D'après Artigue(1990) a un premier niveau, l'analyse épistémologique semble-t-il, nécessaire au didacticien pour l'aider à Mise à distance et sous contrôle des savoirs présents dans l'enseignement :

- en aide à redonner une historicité aux concepts scientifiques que l'enseignement usuel a tendance à présenter comme des objets universels à la fois dans le temps et dans l'espace,
- en aidant à redonner une historicité également à des notions métamathématiques comme celle de la rigueur alors que l'enseignement cultive la fiction d'une rigueur éternelle et parfaite des mathématiques.
- Elle permet l'identification des principales questions ou problèmes auxquelles ce savoir a été une réponse à un moment donné de son histoire, afin de reconstruire son sens et sa raison d'être. Les problèmes qui ont permis l'introduction de tel ou tel concept comme ceux qui ont gouverné son évolution sont constitutifs de la signification de ce concept (ARTIGUE, 1990) et d'après Chevallard (1995), on ne comprend véritablement un savoir, en tant que production humaine, que si l'on a su identifier les questions auxquelles il est censé répondre. [Raisons d'être d'un savoir].



Nous avons aussi la notion de vigilance épistémologique, de la prise de distance par rapport aux objets d'étude, elle permet également au didacticien de prendre la mesure des disparités entre le savoir savant et le savoir enseigné au sens de Chevallard(1985). En fin l'épistémologie aide beaucoup à la théorisation en didactique. Dans cette perspective, Bachelard affirme que

Quand on cherche les conditions [...] des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. [...] c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons obstacles épistémologiques. [...] En fait, on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle à la spiritualisation. (BACHELARD, 1938, p. 13)

Brousseau (1983) met le concept « d'obstacle épistémologique » dans le champ de la didactique. Il distingue quatre types d'obstacles qui se différencient par leur origine :

- Épistémologique, lié au développement historique des connaissances et dont le rejet a dû être intégré explicitement dans le savoir transmis.
- Ontogénétique, du aux limitations du sujet à un moment de son développement;
- Didactique, connaissances résultant d'une transposition didactique, semble ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif ;
- Culturel, connaissances véhiculées par le contexte culturel, déjà traitées scientifiquement, mais toujours présentes.

Brousseau fait aussi la distinction entre difficulté et obstacle :

- Si le problème qui se pose, à une époque donnée, dans une certaine théorie [scientifique], vient à être résolu *sans que sa solution ne remette en cause de façon décisive le point de vue de la théorie en question*, dans un tel cas, on dit qu'une difficulté a été vaincue. Le signe qu'il y a eu difficulté, c'est que les [sciences] de l'époque ont été bloquées, même si les moyens de la résoudre étaient peut-être déjà disponibles [...] On peut parler de la même façon de difficulté dans l'évolution des conceptions d'une notion mathématique chez un individu ou dans la genèse d'une notion.
- Si, cependant, le problème qui se pose vient à être résolu après avoir exigé une restructuration de la connaissance et un changement important de point de vue, alors

on dit qu'un obstacle a été surmonté. *Le signe qu'il y a eu obstacle, c'est que la théorie de l'époque a freiné et empêché la résolution du problème.*

- De la même façon, on peut parler d'obstacle dans l'évolution des conceptions d'une notion [scientifique] chez un individu ou dans la genèse d'une notion. (EL BOUAZZAOU, 1988)
- Brousseau caractérise un obstacle de la façon suivante :
- a) Un obstacle sera une connaissance, une conception, pas une difficulté ou un manque de connaissance.
- b) Cette connaissance produit des réponses adaptées dans un certain contexte, fréquemment rencontré.
- c) Mais elle engendre des réponses fausses hors de ce contexte. Une réponse correcte et universelle exige un point de vue notablement différent.
- d) De plus, cette connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure. Il ne suffit pas de posséder une meilleure connaissance pour que la précédente disparaisse (ce qui distingue le franchissement d'obstacles de l'accommodation de Piaget). Il est donc indispensable de l'identifier et d'incorporer son rejet dans le nouveau savoir.
- e) Après la prise conscience de son inexactitude, elle continue de se manifester de façon intempestive et opiniâtre. (DUROUX, 1983)

## **2.1 Quelques obstacles épistémologiques de la notion de limite :**

Nous avons la limite comme « notion métaphysique », comme la notion d'infiniment petit et d'infiniment grand. Ces notions mystérieuses ont constitué l'un des principaux obstacles. Existe-t-il un état intermédiaire entre ce qui est nul et ce qui n'est pas nul ? Y-a-t-il un nombre plus grand que les autres ? Les débats autour des quantités évanescences ont montré toute la difficulté qu'il y a à faire tendre une quantité vers zéro... la limite peut-elle être atteinte ? et la transposition numérique : (Il s'agit ici d'un obstacle lié à la « difficulté de se détacher du contexte géométrique et cinématique, pour travailler non plus sur les grandeurs, mais sur les nombres », en bref difficulté avec l'arithmétisation de la notion de limite).

La recherche menée par Sierpinska avait pour but la mise en évidence d'obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, elle retient deux aspects de la notion d'obstacle épistémologique selon G. Bachelard : L'apparition des obstacles a un caractère

inévitables et la répétition de leur apparition dans la phylogenèse et l'ontogenèse des concepts. Elle définit l'obstacle épistémologique relatif à un concept comme l'ensemble des causes de lenteurs de troubles dans l'acquisition de concept qui sont spécifiques de ce concept et de lui seul et sont telles que leur prise en conscience est indispensable pour le développement de ce concept. Après l'analyse à priori elle précise que : des obstacles sérieux relatifs aux notions de nombre et d'infini restent à surmonter chez les élèves, malgré un enseignement systématique de ces notions, à cause de l'importance fondamentale de la notion de fonction dans la notion de limite, le franchissement des obstacles qui lui sont liés a une importance toute particulière, il est nécessaire de garder une certaine réserve vis-à-vis des méthodes démonstratives ou intuitives d'introduction des notions de tangente ou de limite à l'aide de différentes représentations géométriques. En fin elle présente les obstacles épistémologiques de la notion de limite : *horror infiniti*<sup>15</sup>, obstacles liés à la notion de fonction, obstacles « géométriques », obstacles « logiques », et l'obstacle du symbole. Elle ne propose pas de situations permettant de surmonter ces obstacles. Cornu a beaucoup travaillé dans le cadre numérique appelé "Jauge numérique", il a eu des résultats similaires que Sierpiska qui a travaillé dans le cadre géométrique appelé "Jauge topologique".

Michèle Artigue (1996a) présente une liste d'obstacles épistémologiques :

- le sens commun véhiculé par le terme limite qui favorise une conception de la limite comme barrière infranchissable et même non-atteignable, comme borne ou encore comme ultime terme d'un processus, qui tend aussi à renforcer des conceptions monotones strictes de la convergence,
- le principe de « continuité » (ainsi nommé par référence à Leibniz) qui consiste, traitant le processus de limite comme un processus algébrique « fini », à faire passer à la limite les propriétés communes aux éléments du processus, et plus globalement à ne pas être attentif à ce qui différencie cette opération particulière des opérations algébriques usuelles,
- des conceptions trop dépendantes d'une « géométrie de la forme » qui n'obligent pas à identifier clairement sur quels objets porte exactement le processus de limite et la topologie sous-jacente. Ceci rend difficile la perception du jeu subtil entre cadre numérique et cadre géométrique sous-jacent au processus de limite, et induit ou renforce des

---

<sup>15</sup> Cette expression renvoie à Georg Cantor : « l'horreur de l'infini est une forme de myopie qui empêche de voir l'infini actuel, bien que, dans sa forme supérieure cet infini nous ait créés et nous maintient, et dans toutes ses formes secondaires transformées il se manifeste tout autour de nous et va jusqu'à nos esprits » (Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen* 1932).

convictions erronées comme celle constant à croire que si ‘géométriquement’ un objet tend vers un objet, toutes les grandeurs qui lui sont associées auront pour limite les valeurs correspondantes des grandeurs pour l’objet limite.

Elle évoque aussi les difficultés liées au double statut opérationnel et structural de la limite qui se traduisent par les difficultés à se détacher d’une vision de la limite en simples termes de processus pour dissocier clairement l’objet limite du processus qui a permis de le construire, pour le doter d’une identité propre. Pour illustrer elle présente l’exemple sur la comparaison de  $0.99999\dots$  et 1. La fréquence des réponses erronées, la force des convictions qui leurs sont associées, montrent clairement la difficulté qu’il y a à lire la notation  $0.9999\dots$  autrement que comme un processus dynamique qui ne s’arrête jamais, pour y avoir la désignation d’un nombre. Elle affirme qu’il est d’ailleurs tout à fait intéressant de noter que ce type de réponse peut tout à fait coexister avec un traitement correct de la question : peut-on calculer la somme :  $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$  et si oui que vaut-elle ? Dans ce cas, en effet ce qui est évoqué directement à l’étudiant par la question posée, c’est l’objet série géométrique et, dans le même temps, se trouvent activés, soit directement la formule de la somme, soit l’algorithme qui permet de la calculer. Dans la vision, comme dans la résolution du problème, le processus de limite lui-même est relégué à l’arrière-plan et la situation n’est en rien reliée à la question précédente, même si les deux se succèdent dans le même questionnaire.

Enfin elle dit que l’on ne peut pas manquer de souligner les difficultés de la formalisation standard de la notion de limite. Selon elle, d’une part, cette formalisation fonctionne comme un tout indivisible, alors que spontanément, l’élève a plus tendance à considérer deux processus distincts : un portant sur la variable, l’autre sur les valeurs de la fonction ; l’imbrication s’opère de plus dans un sens qui n’est en rien naturel : pour écrire que la limite de la fonction est  $\ell$  à l’infini, par exemple, on n’écrit pas que pour  $x$  grand,  $f(x)$  est proche de  $\ell$ , on se donne au contraire un voisinage de  $\ell$  et on cherche à garantir que, si  $x$  est suffisamment grand,  $f(x)$  sera dans ce voisinage ! Et cette imbrication peut naturelle, induit, dans toutes les définitions standard, une alternance de quantificateurs dont on sait qu’elle est logiquement mal maîtrisée à ce niveau d’enseignement. Fort de ce constat on peut affirmer que la maîtrise des quantificateurs est capitale dans la compréhension et la mise en marche de la définition formelle de la limite.

Michèle Artigue pointe le saut qualitatif majeur entre la définition intuitive et la définition formelle de la limite

En fait il y a entre un maniement relativement intuitif de la notion de limite et la notion formalisée standard un saut qualitatif majeur, attesté d'ailleurs par l'histoire même du concept. Le concept formalisé apparaît, au sens de Imre Lakatos (LAKATOS, 1976), comme un concept fait pour "prouver", en rupture partielle avec les formes de connaissance qui le précède. Et sa fonction de concept unificateur du champ de l'analyse est, à ce moment-là, aussi fondamentale que sa fonction de production mathématique. (ARTIGUE, 1996b, p. 10)

Et elle précise qu'il s'agit là d'une problématique dont la transposition dans l'enseignement usuel ne peut aller de soi, même si ce dernier, en commençant aujourd'hui par une approche intuitive de l'analyse, et en souhaitant que la formalisation, quand elle est introduite, réponde à des besoins ressentis réellement par les élèves, cherche visiblement à se rapprocher du « sens » de l'évolution historique.

En plus des difficultés évoquées ci-dessus Michèle Artigue(1996b) évoque aussi les difficultés liées à la rupture algèbre/analyse. Elle signale que cet aspect est très peu travaillé dans les recherches sur l'apprentissage de l'analyse et que M. Legrand (Legrand, 1993) est l'un des rares chercheurs à avoir pointé ces ruptures. Legrand insiste en particulier sur les ruptures nécessaires au niveau du traitement de l'égalité, ainsi qu'au niveau des formes de raisonnement. En algèbre pour montrer que deux expressions sont égales, les élèves s'habituent en effet à raisonner si possible par équivalence, transformant ainsi par exemple l'écriture  $a(x)=b(x)$  en une succession d'écritures  $a_i(x)=b_i(x)$ , jusqu'à obtenir deux expressions identiques. Il en est de même pour le traitement des équations et inéquations. Entrer dans le champ de l'analyse, cette démarche sera le plus souvent hors de portée, que l'on va faire le détour de montrer que :  $\forall \varepsilon > 0 \mid a-b \mid < \varepsilon$  et que ce détour sera payant.

C'est comprendre que pour montrer qu'au voisinage d'un point  $a, f(x) < g(x)$ , on ne cherche pas à résoudre exactement l'inégalité mais à trouver un intervalle de centre  $a$  où l'on peut garantir, par un « bricolage » de majorations et minorations, l'inégalité. Plus tard, ce sera aussi comprendre que, pour qu'une famille  $F_1$  d'objets possède une propriété, on va le plus souvent suivre un cheminement analogue : démontrer la propriété pour une famille  $F_2$  plus simple convenablement choisie, montrer que tout élément de  $F_1$  est limite d'éléments de  $F_2$ , pour une topologie convenable, et que la propriété considérée résiste au passage à la limite. Elle précise que tout ceci n'a pas de raison d'être naturel et le sera d'autant moins que l'idéologie usuelle de l'enseignement qui conduit à minimiser les ruptures pour maintenir la

fiction d'un apprentissage progressif et continu, tendra à laisser la prise de conscience de ces ruptures au seul registre du travail privé de l'élève.

Ceci est difficile également parce que les modes de raisonnement qui sous-tendent ce travail sont nouveaux pour les élèves et les techniques mathématiques associées, délicates. On passe de raisonnement par équivalences successives à des raisonnements par conditions suffisantes : pour montrer que  $a$  est inférieur à  $b$ , on construira ainsi généralement une suite d'expressions  $a_i$  telles que :  $a < a_1 < \dots < a_n$  jusqu'à pouvoir montrer aisément que  $a_n < b$ . à chaque étape du processus, il faut à la fois accepter de perdre de l'information sur  $a_i$  pour pouvoir avancer dans la résolution, sans trop en perdre, ce qui ferait sortir des limites de l'épure. Il y a là tout un jeu subtil qui suppose une familiarité avec les expressions, les ordres de grandeur respectifs qui ne peut s'apprendre que dans le long terme. En plus de ceux-ci nous savons que la construction des solutions aux problèmes est mise en avant dans la résolution des problèmes en analyse.

Artigue (1996) affirme que l'on mesure là également la distance qui va séparer nécessairement la capacité de restituer les définitions formelles, même intelligemment, en les illustrant d'images montrant une compréhension certaine, et la capacité d'opérationnaliser les définitions dans le traitement des problèmes précis.

Artigue (1996) s'appuyant sur les actes du groupe de travail sur le Calculus du congrès ICME 7 au Québec en 1992 affirme que partout se manifeste le souci de développer une première approche de l'analyse, adaptée aux élèves actuels, moins étroitement algébrique et algorithmisée que les approches antérieures mais aussi moins formelle, ayant l'ambition de permettre aux élèves de donner plus de sens aux notions qu'ils vont manipuler, et que dans une telle approche, les points de départ sont les intuitions et les conceptions des élèves qu'il s'agit de mettre à jour, de travailler et de faire évoluer, via des situations adaptées. L'arrivée aux formalisations usuelles n'étant pas l'objectif en soi.

Par rapport à cette affirmation nous nous posons la question comment peut-on mettre à jour les conceptions erronées des élèves sur la notion de limite sans utiliser sa définition formelle ? La réponse est non puisque, on voit qu'avec ces approches les élèves et les étudiants trainent des conceptions erronées jusqu'au niveau de la maîtrise. Les travaux de A. Robert (1982), Cornu (1983) le prouvent clairement.

Les problèmes liés à l'enseignement de la notion de limite ne se situent pas seulement au niveau des élèves, il y'a une part considérable au niveau des enseignants. Cela a été détecté par Job (2011) le cas d'une étudiante en agrégation qui discute avec son professeur de didactique. Elle doit préparer un cours sur le concept de limite. Elle pense définir «  $b$  est

la limite en  $a$  de la fonction  $f$ » par la condition :  $\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x) - b| < \varepsilon$  son professeur la questionne sur cette définition, lui faisant remarquer que  $f(x)=b$  lorsque la condition  $\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x) - b| < \varepsilon$  est satisfaite, et donc la fonction est constante. Elle lui répond que cela aurait été le cas si elle avait considéré  $\forall \varepsilon \geq 0$  au lieu de  $\forall \varepsilon > 0$  dans la condition  $\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x) - b| < \varepsilon$ . Pour elle c'est une « stratégie didactique » visant à éclater la complexité de la définition usuelle de la limite. Au lieu d'une définition où des conditions, portant sur  $a$  et  $x$  d'une part, et sur  $b$  et  $f(x)$ , d'autre part, se retrouvent imbriquées les unes dans les autres, ce qui lui semble « complexe », elle propose par le truchement de deux « définitions »,  $f(x)$  tend vers  $b$  si  $\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x) - b| < \varepsilon$  et  $x$  tend  $a$  si  $\forall \varepsilon > 0 \quad |x - a| < \varepsilon$ , une présentation où les deux conditions sont en quelque sorte « séparées ». il est alors plus facile d'étudier les deux définitions, pour ensuite former la « définition » de la limite qui devient alors « triviale »  $b$  est la limite de  $f$  en  $a$  si  $f(x)$  tend vers  $b$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ .

On voit qu'elle a l'obstacle de la limite atteinte ou non, et elle ne sait pas que l'on ne peut pas séparer les deux expressions car chacun pris isolément n'a aucun sens mathématique, les deux sont inséparables. Ici nous pouvons dire que les résultats des recherches n'atteignent pas souvent les salles de classes ou bien, on n'en fait pas une large diffusion. On doit mettre l'aspect inséparable des deux termes en exergue, l'un est une condition suffisante pour l'autre, l'un est commandé par l'autre ; sinon on n'aura pas accès au sens mathématique de la limite. Et tant que cela n'apparaît pas dans les exercices sur la limite on peut dire que l'on n'a pas appris la notion de limite.

L'acquisition des connaissances sur la notion passe par la confrontation et le franchissement d'un nombre suffisant de ces obstacles. Donc un cours sur la notion de limite doit permettre l'apparition des obstacles et de les surpasser. Pour permettre aux élèves d'acquérir des connaissances. Les pratiques de classes actuelles ne s'inscrivent pas dans cette vision d'où notre question de recherche et nos objectifs.

## 2.2 Analyse mathématique de la définition formelle

Les pratiques sur la notion de limite sont diverses et cette diversité va jusqu'à la définition de la limite d'une fonction en un point  $a$  de  $\mathbb{R}$ . Pour certains, la formulation de "  $\ell$  est limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ " est :

**Définition 1** : On dit que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  si pour toute suite  $x_n$  tendant vers  $a$ , la suite  $f(x_n)$  tend vers  $\ell$  ;

Cette définition 1 met en exergue l'aspect covariant de la limite en d'autres termes, elle respecte l'ordre « naturel » entre les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction considérée ce qui semble correspondre aux formulations spontanées des élèves, elle prend en compte les connotations dynamiques de l'expression « tend vers » :

[...] la Définition 1 aborde les éléments de l'ensemble de départ et ceux de l'ensemble d'arrivée dans l'ordre naturel : on y considère d'abord les  $x$ , et puis seulement les  $f(x)$ . On est proche de la formulation familière de l'idée de limite d'une fonction  $f$  en un point  $a$  : « Quand les  $x$  se rapprochent de  $a$ , les  $f(x)$  se rapprochent de  $b$  », dont on retrouve d'ailleurs la trace dans l'expression canonique « quand  $x$  tend vers  $a$ ,  $f(x)$  tend vers  $b$  » (HAUCHART & ROUCHE, 1987, p. 330 cité par JOB, 2011).

Les auteurs précisent que cette définition présente aussi des inconvénients : Dans sa formulation, il apparaît explicitement un seul quantificateur (pour toute suite). Donc elle cache certaines quantifications « *La Définition 1 fait apparaître un quantificateur, tandis que les Définitions<sup>16</sup> 2 et 3 en font chacune apparaître deux. Mais il s'agit bien de quantificateurs apparents, car il y a des quantificateurs cachés dans l'expression «  $x_n$  tendant vers  $a$  » ; Il est difficile pour l'esprit d'envisager toutes les suites qui convergent vers  $a$  et en plus toutes les suites correspondantes engendrées par la fonction (double infinité):*

[...] la difficulté principale de la Définition 1 est qu'elle oblige à imaginer toutes les séries de limite  $a$ . C'est particulièrement difficile à cause de la double infinité d'objets qu'elle mobilise : envisager seulement une suite infinie n'est déjà pas banal ; qu'en est-il alors lorsqu'il s'agit d'envisager toutes celles qui tendent vers  $a$  ? L'imagination est brusquement encombrée. ((HAUCHART & ROUCHE, cité par JOB, 2011, p.520)

Job (2011) précise ici que les auteurs parlent de suites au lieu de séries :

- la définition 1 tend à masquer l'aspect approximation sous-jacent à la notion de limite « [...] en gros, elle [la définition 2] se base sur l'idée d'approximation, qui est d'ailleurs estompée dans la Définition 1. »
- la définition 1 rend mieux compte des intuitions dynamiques sous-jacentes à des expressions comme « tendre vers » que la définition en epsilon et delta, néanmoins, « tendre vers » renvoie à un mouvement continu alors que la définition 1 traite du discret en tablant sur des suites.

Pour certains, la formulation de " $l$  est limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ " est :

---

<sup>16</sup> Il s'agit de la définition en epsilon delta et la définition topologique de la limite.



**Définition 2** :  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in Df \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$  tandis que pour d'autres c'est :

**Définition 2'** :  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$  de plus dans chaque cas on utilise la même notation  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

Job(2011) présente l'analyse en termes d'avantages et inconvénients faite par (HAUCHART et ROUCHE) :

**Avantages :**

La définition 2 rend compte de l'aspect approximation sous-jacent au concept de limite. Une deuxième idée est d'utiliser, pour définir une limite de fonction, une démarche analogue à celle qui a été suivie pour définir une limite de suite (en gros, elle se base sur l'idée d'approximation, qui est d'ailleurs estompée dans la Définition 1.). Le type de quantification universelle qui intervient dans la définition 2 est d'une certaine manière plus aisée que la quantification universelle qui apparaît dans la définition 1 car elle n'oblige pas à considérer une double infinité d'objets, ses objets (des réels) sont plus « simples » que des suites et en plus on ne doit pas tous les considérer, uniquement les plus petits.

**Inconvénients :**

La définition 2 ne rend pas compte des aspects dynamiques du concept de limite. Elle ne respecte pas l'ordre « naturel » entre les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction considérée . La quantification universelle « pour tout  $\varepsilon$  » masque l'idée qu'on ne s'intéresse qu'aux « petites » valeurs de  $\varepsilon$ . Elle établit parfois une dialectique entre la covariance et la contravariance.

Comparons ces deux définitions :

Prenons d'abord D2  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in Df \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Ici on voit que  $x$  peut être égal à  $x_0$  si  $f$  est définie en  $x_0$ . Dans ce cas on aura  $\ell = f(x_0)$  et par suite  $f$  est continue en  $x_0$ .

En effet  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - \ell| < \varepsilon$  . Supposons  $f(x_0) - \ell \neq 0$  alors  $\frac{|f(x_0) - \ell|}{2} > 0$  posons  $\varepsilon = \frac{|f(x_0) - \ell|}{2}$  on obtient  $|f(x_0) - \ell| < \frac{|f(x_0) - \ell|}{2}$  ce qui est contradictoire d'où  $f(x_0) - \ell = 0$  c'est à dire  $f(x_0) = \ell$ .

Cette démonstration s'appuie sur la propriété suivante :  $\forall \varepsilon > 0 \quad |x| < \varepsilon \Leftrightarrow x = 0$ , dans  $\mathbb{R}$ , être aussi proche que l'on veut, signifie l'égalité. Dans  $\mathbb{R}$ , la notion de « nombres consécutifs » n'existe pas, chaque nombre est son propre successeur à partir de là on la complétude de  $\mathbb{R}$  c'est-à-dire on peut représenter  $\mathbb{R}$  par la droite numérique. Cette notion de nombres consécutifs marche dans des ensembles tels que  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{D}$ . dans ces ensembles tout élément admet un prédécesseur et un suivant.

Avec la définition D2' on peut énoncer les propriétés suivantes :

**Propriété 1** : Une fonction  $f$  définie en  $x_0$  admet une limite en  $x_0$  si la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  est égale à  $f(x_0)$ .

**Propriété 2** : soit  $f$  une fonction définie en  $x_0$ , si  $f$  admet une limite en  $x_0$  alors  $f$  est continue en  $x_0$ .

**Propriété 3** : Soit  $f$  une fonction et  $a$  un nombre réel.

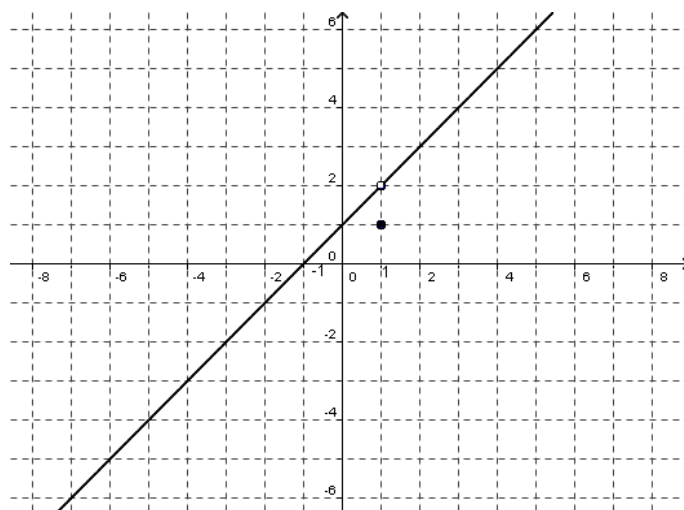
Lorsque  $f$  admet une limite en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$  ou bien elle est prolongeable par continuité en  $a$ .

Avec cette définition on a tendance à confondre la limite et la continuité en un point, la limite et l'image.

**Exemple 1** :

Considérons la fonction suivante définie par  $f(x)=x+1$  si  $x \neq 1$  et  $f(1)=2$

Figure 2: Illustration de la situation



Source : Construction de l'auteur

Ici  $f$  est définie en 1 mais,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  mais  $f(1) = 1$ ,  $f$  n'est pas continue en 1 et  $f$  n'est pas prolongeable par continuité en  $a$ . par suite  $f$  n'admet pas de limite en  $a$ .

Maintenant analysons la deuxième définition D2'

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Avec cette définition on voit clairement que  $x$  ne peut pas être égal à  $x_0$ . Elle met en évidence qu'il est difficile d'atteindre la limite. Avec D2 une fonction  $f$  définie en  $a$  peut admettre une limite en  $a$  qui est différente de  $f(a)$ . En effet considérons la fonction suivante définie par  $f(x) = x + 1$  si  $x \neq 1$  et  $f(1) = 2$

Ici  $f$  admet une limite en 1 égale à 2 ; mais  $f$  n'est pas continue en 1 car  $f(1) \neq 2$

Avec la définition D2' la propriété suivante marche :

Lorsque  $f$  admet une limite à gauche en  $a$  et une limite à droite en  $a$  égales alors  $f$  admet une limite en  $a$ .

Cette propriété n'est pas toujours vérifiée avec la définition D2.

Si la plupart des résultats sont valables avec les deux définitions, il n'en va pas de même dans l'ensemble, et cela peut conduire à énoncer des résultats faux. Les définitions D2 et D2' se contredisent.

Une même notion mathématique peut-elle admettre deux définitions différentes ? La réponse est non en mathématique si une notion admet deux définitions alors ces deux définitions sont équivalentes.

Deux cas sont possibles :

1 une des définitions est fautive

2 il manque des précisions pour les deux définitions.

Si  $f$  n'est pas définie en  $a$  les définitions D2 et D2' sont équivalentes

Si  $f$  est définie en  $a$  les deux définitions se contredisent.

Si la fonction  $f$  est continue en  $a$  les deux définitions coïncident.

Ici on peut affirmer que D2' est une restriction de D2. Car on peut obtenir D2' à partir de D2 en prenant une restriction de la fonction  $f$ . En effet soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $Df - \{a\}$ ,

$$\text{on a } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

C'est la définition D2' qui est la « bonne » définition de la notion de limite.

Autres formulations de D2'.

Limite finie d'une fonction en un point

1- Une fonction  $f$  définie au voisinage du nombre réel  $a$ , sauf peut-être en  $a$ , admet une limite réelle  $l$  au point  $a$ , si étant donné le nombre réel strictement positif arbitraire  $\varepsilon$ , on peut prouver l'existence d'un nombre réel strictement positif  $\beta$ , tel que la condition :

$\forall \varepsilon > 0 \exists \beta > 0$  tel que  $\forall \left\{ \begin{array}{l} x \in V \\ 0 < |x - a| < \beta \end{array} \right\}$  on a  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  est satisfaite

Interprétation géométrique

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  Signifie que l'on peut rendre la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  aussi petite que l'on veut à condition de prendre  $x$  suffisamment proche de  $a$  et en restant dans  $V$  ou éventuellement  $V$  privé de  $\{a\}$ .

L'image réciproque de tout intervalle de centre  $\ell$  et de rayon très petit est un intervalle de centre  $a$  et de rayon très petit éventuellement privé de  $\{a\}$ .

Un des problèmes frappant de la notion de limite est l'écriture symbolique de la définition formalisée.

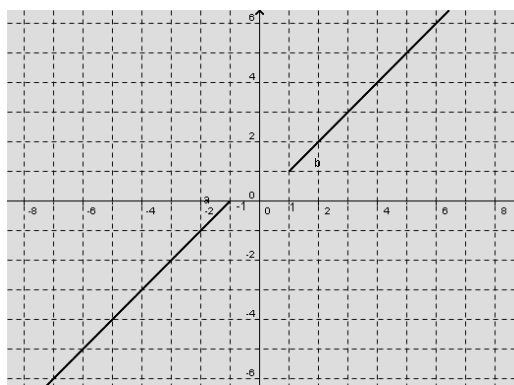
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in Df \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ . On a tendance à faire une lecture linéaire, c'est-à-dire partir de  $0 < |x - x_0| < \delta$  pour avoir  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ . Nous avons ici un obstacle « logique ». L'effacement des quantificateurs

C'est comme si on connaissait d'avance  $\delta$ . Cela parce que c'est un nombre très petit. On oublie que  $\varepsilon$  est fonction de  $f(x)$  et  $\ell$ . Comme on peut le constater chez Sierpiska (1985, p. 54) « un autre problème lié à l'ordre des quantificateurs dans la définition de la limite est la suivante : la fonction nous mène de l'axe de  $x$  à l'axe des  $y$ , tandis qu'en faisant l'étude de la limite en un point de la fonction on va en sens inverse ».

La définition n'a pas d'intérêt si on ne suppose pas que  $a$  est un point adhérent à  $A$ . En effet, si tel n'est pas le cas, on peut trouver  $U \in \mathcal{V}_a$  tel que  $U \cap A = \emptyset$ , et la condition  $f(U \cap A) \subset V$  est alors vérifiée pour tout nombre  $L \in \mathbb{R}$  et tout  $V \in \mathcal{V}_L$ ; tout nombre réel serait alors limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ .

**Exemple** : considérons la fonction  $f$  définie par sa représentation graphique suivante :

Figure 3: Illustration de la situation



Source : Construction de l'auteur

Ici 0 n'est pas une valeur d'adhérence de  $Df$  car  $V = ]-1/2 ; 1/2[$  est un voisinage de 0  $V \cap Df$  est vide. Donc  $f(V \cap Df) = \emptyset$  qui est inclus dans tout intervalle de  $\mathbb{R}$ . Par suite tout nombre réel est limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 0.

On ne doit pas séparer les deux membres de la phrase : «  $f(x)$  tend vers  $\ell$  » et «  $x$  tend vers  $a$  » car aucun des deux pris isolément n'a de signification mathématique.

Nous avons deux types de difficultés dans le registre algébrique :

**La difficulté liée aux symboles quantificateurs (existentiel et universel) ;**

**La difficulté logique le sens de l'implication, l'effacement des quantificateurs et leur ordre.**

### Définition topologique

$D_3$  : Pour tout intervalle  $V$  de centre  $\ell$ , il existe un intervalle  $U$  de centre  $a$  tel que  $f(U) \subset V$ .

$D_3'$  : pour tout voisinage  $V$  de  $\ell$  il existe un voisinage  $U$  de  $a$  tel que  $f(A \cap c_a^U) \subset V$  avec  $A = Df$ .

Interprétation

$D_3$  signifie que l'image réciproque de tout intervalle de centre  $\ell$  est un intervalle de centre  $a$  ou encore l'image réciproque de tout voisinage de  $\ell$  est un voisinage de  $a$ . il manque une précision dans cette définition, il s'agit du cas où la fonction n'est pas définie en  $a$ . avec cette formulation on confond la limite et la continuité en  $a$ .

$D_3'$  signifie que l'image réciproque de tout intervalle de centre  $\ell$  est un intervalle de centre  $a$  éventuellement privé de  $\{a\}$ . Cette définition met en exergue que si on cherche la limite en un point, on peut se passer de ce qui se passe si la fonction est définie en ce point.

Ces deux définitions nous permettent de faire une interprétation géométrique de la définition de la limite en un point.

### Définition littérale

On dit que  $\ell$  est la limite de  $f(x)$  en  $x_0$  lorsqu'on peut rendre  $f(x)$  aussi proche de  $\ell$  que l'on veut en prenant  $x$  suffisamment proche de  $x_0$ .

L'utilisation de la table de valeurs de  $f$  peut conduire à l'interprétation suivante : l'écriture  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  signifie que lorsque  $x$  s'approche de  $x_0$  alors  $f(x)$  s'approche de  $\ell$  ce que nous appelons approche intuitive de la notion de limite. Cette approche est le fruit d'une transposition didactique, elle ne correspond pas à la définition mathématique de la limite.

Dans l'écriture,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in Df; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ . On va de gauche à droite mais la méthode intuitive brûle deux étapes  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  et elle commence directement par :  $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ . Ce qui correspond à l'effacement des quantificateurs appelé obstacle logique. On doit partir de  $\forall \varepsilon > 0$  c'est-à-dire de  $f(x)$  et  $\ell$  pour avoir  $|x - x_0| < \delta$  car la donnée de  $f(x)$  et  $\ell$  détermine entièrement  $\varepsilon$ . Le problème consiste à montrer que  $\forall \varepsilon > 0$  l'existence de  $\delta > 0$  qui satisfait la condition.

### 3. Le champ conceptuel de la notion de limite

Le problème est d'étudier le comportement local d'une fonction numérique d'une variable réelle au voisinage d'un point. Pour définir la notion de limite d'une fonction, on a besoin des notions topologiques telles que voisinage, d'intervalle, point adhérent, point d'accumulation, distance, successeur et prédécesseur d'un nombre réel (ordre dans  $\mathbb{R}$ ), inéquations avec ou sans valeur absolue, de notions de la logique telles que : les quantificateurs universel et existentiel, la condition suffisante, l'implication de la logique des prédicats, la notion de fonction, composition et décomposition de fonctions, l'image directe et réciproque d'un intervalle, infiniment petit et infiniment grand. Pour notre cas on se limitera aux fonctions numériques d'une variable réelle affines ou affines par intervalles.

La notion de limite est fondamentale pour la dérivée, l'intégrale, la convergence d'une suite, le théorème des valeurs intermédiaires.

#### Topologie de $\mathbb{R}$

La topologie de  $\mathbb{R}$  est liée à la relation d'ordre. La conception intuitive de l'expression «  $x$  tend vers  $a$  » est une conception dynamique : on imagine un mobile se déplaçant en se rapprochant de  $a$  par la gauche ou par la droite. D'ailleurs les notions de limite à gauche ou à droite font explicitement appel à la relation d'ordre. L'expression «  $x$  tend vers  $a$  » n'a aucun sens mathématique lorsqu'elle est considérée toute seule. Les intervalles jouent un rôle important dans la notion de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle. D'écrire la topologie de  $\mathbb{R}$  revient à caractériser l'ensemble des voisinages d'un point  $a$  de  $\mathbb{R}$  que nous noterons  $Va$ .

**Voisinage de  $a$**  : c'est une partie  $V$  de  $\mathbb{R}$  contenant un intervalle ouvert qui contient  $a$ .

**Point adhérent à une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$**  :

Un point  $a$  de  $\mathbb{R}$  est adhérent à  $A$  si tout voisinage de  $a$  rencontre  $A$ .  $\forall V \in \mathcal{V}a, V \cap A \neq \emptyset$  (il existe des éléments de  $A$  aussi proche que l'on veut de  $a$ ). Un point adhérent de  $A$  est un point isolé de  $A$  ou un point d'accumulation de  $A$

**Point isolé :**

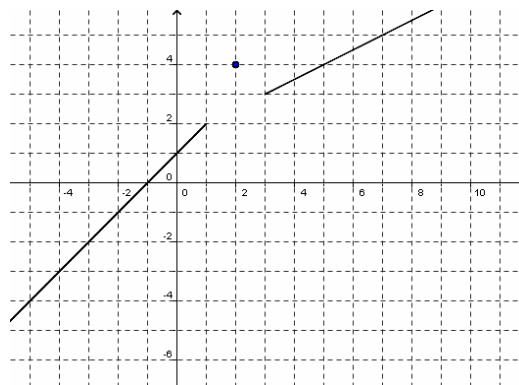
Un point  $a$  de  $A$  est isolé dans  $A$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $V \cap A = \{a\}$   
 Dans ce cas le comportement local de  $f$  au voisinage de  $a$  se réduit à la connaissance de la valeur de  $f(a)$  ( $f(V \cap A) \subset J \Rightarrow \{f(a)\} \subset J$ ). Cela n'a pas de sens d'étudier la limite au sens de D2 en un point isolé. Car tout nombre réel est limite de  $f$  en  $a$  dans ce cas.

Exemple :

Considérons la fonction suivante définie par :  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$  et sa  $f(2) = 4$

courbe et sa représentation graphique

Figure 4: Représentation de la fonction donnée



Source : Construction de l'auteur

Ici 2 est un point isolé de  $Df$ . La limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers 2 au sens de D1 est 4 et  $f$  est continue en 2. Mais tout nombre réel  $\ell$  est limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers 2 au sens de D2. Cela n'a pas de sens de chercher la limite en un point isolé au sens de D2.

**Point d'accumulation:**

Un point  $a$  de  $\mathbb{R}$  est un point d'accumulation de  $A$  si tout voisinage de  $a$  rencontre  $A$  en au moins un point distinct de  $a$ . c'est à dire  $a$  est adhérent à  $A - \{a\}$ .

La notion de limite est polysémique. L'écriture formalisée :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  signifie que  $(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0)$  telque  $\forall x \in Df \ 0 < |x - x_0| <$

$\delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$  permet à la fois d'étudier la limite, la continuité et le prolongement

par continuité en  $x_0$ . On peut tomber dans l'erreur à chaque fois si on ne fait pas attention, par ce que ces notions sont très liées.

En changeant  $f$  en sa dérivée  $f'$  on peut étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0$ . On peut élargir à quatre les notions qui sont définies à partir de l'écriture formalisée. Nous avons remarqué au cas où  $x_0$  n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction de  $f$  il n'y a pas de confusion ; mais dès que  $x_0$  appartient à  $Df$  l'étude de la limite semble se confondre avec l'étude de la continuité ou le prolongement par continuité en  $x_0$  de  $f$ .

A. Douady(1996) considère que la notion de limite est une notion statique. Il est d'accord aussi que la limite est toujours atteinte lorsqu'elle existe. En effet dans ses remarques sur l'article de Bkouche dans la revue "point de vu" il affirme que la définition formalisée peut être interprétée de quatre manières différentes qu'il appelle position :

1) *Accepter l'égalité au départ et à l'arrivée. C'est la position « moderne » Inconvénient (que BKOUCHE signale) : l'existence d'une limite est équivalente à la continuité. Nous verrons comment y pallier.*

2) *Accepter l'égalité au départ et la refuser à l'arrivée. Inconvénient majeur : avec cette définition, il n'existe aucune fonction qui ait une limite en un point de son ensemble de définition.*

3) *Exclure l'égalité au départ et l'accepter à l'arrivée. C'est la position défendue par Bkouche. Inconvénient : on perd la transitivité. De «  $f(x)$  tend vers  $b$  quand  $x$  tend vers  $a$  » et de «  $g(y)$  tend vers  $c$  quand  $y$  tend vers  $b$  », on ne peut pas déduire (ce que le langage cependant suggère) que  $g(f(x))$  tend vers  $c$  quand  $x$  tend vers  $a$ . il est facile de trouver des contre-exemples.*

4) *Exclure l'égalité au départ et à l'arrivée. Ce qu'on perd alors, c'est l'additivité. Pour des fonctions  $f_1$  et  $f_2$  à valeurs réelles, si  $f_1$  et  $f_2$  ont pour limite  $b_1$  et  $b_2$  respectivement, on ne peut pas déduire que  $f_1+f_2$  a pour limite  $b_1+b_2$ .*

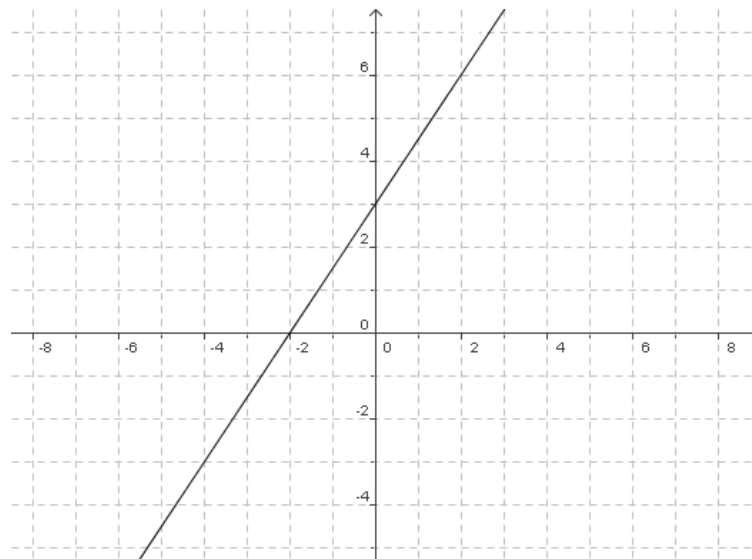
Pour nous il n'y a pas quatre positions il y a au contraires quatre notions connexes à la notion de limite qui sont définies ici. La première position correspond à la définition de la continuité de  $f$  en  $x_0$ . Dont l'écriture formalisée est :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad 0 \leq |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 \leq |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Autrement dit  $f(x_0) = \ell$ . il n'y a pas de palliatif pour que  $f$  ne soit pas continue en  $x_0$ . Donc nous pouvons dire qu'il n'y a pas d'inconvénient, c'est la confusion qui constitue ici l'inconvénient. Illustration graphique



Figure 5: Illustration de la situation



Source : Construction de l'auteur

### Définition littérale

On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  appartenant à l'ensemble de définition de  $f$  lorsque, la limite en  $x_0$  et l'image en  $x_0$  de  $f$  coïncident.

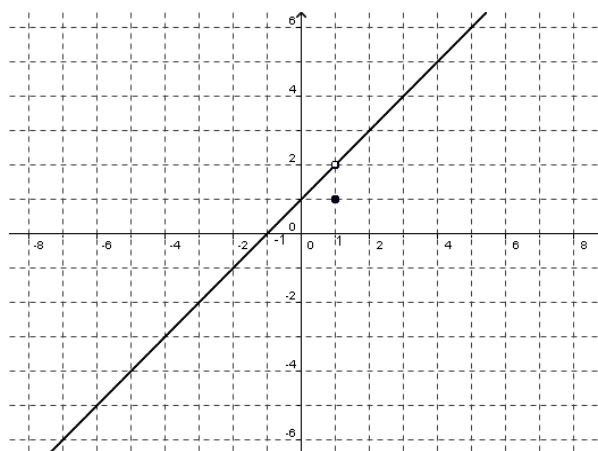
La deuxième correspond à la définition de la discontinuité de  $f$  en  $x_0$  dont l'écriture formalisée est

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad 0 \leq |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Ici on voit que la confusion est nette car  $x_0$  appartient à  $Df$ , il confond la limite et la continuité en  $x_0$  la limite de  $f$  est différente de son image en  $x_0$ .

### Illustration graphique

Figure 6: Illustration de la situation



Source : Construction de l'auteur

### Définition littérale

On dit que  $f$  n'est pas continue en  $x_0$  appartenant à l'ensemble de définition de  $f$  lorsque la limite de  $f$  en  $x_0$  et  $f(x_0)$  sont distinctes. Dans notre cas la limite  $l$  est finie mais elle est différente de l'image de  $x_0$  par  $f$ .

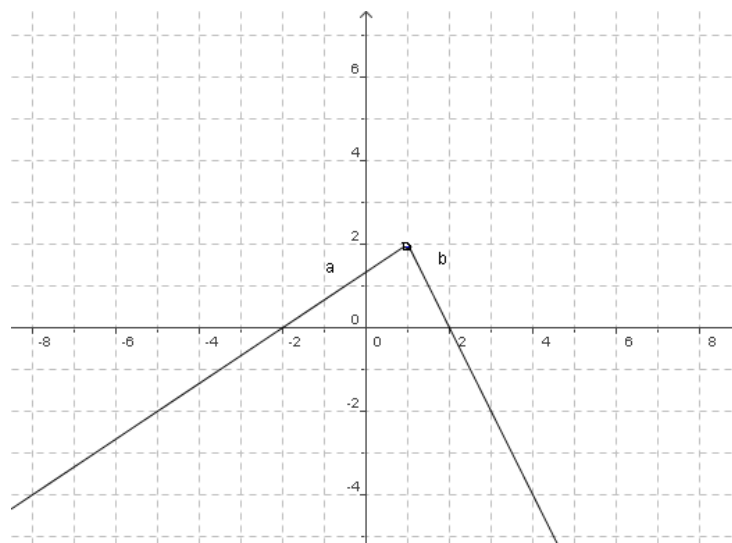
La troisième position correspond à la définition de la limite de  $f$  en  $x_0$  d'écriture formalisée

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 \leq |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

L'inconvénient c'est de confondre la limite et la continuité en  $x_0$ . Sinon on a la transitivité.

Illustration graphique

Figure 7: Illustration de l'exemple



Source : Construction de l'auteur

### Définition littérale

On dit que  $f$  est prolongeable par continuité en  $x_0$ , lorsque  $x_0$  n'appartient pas à l'ensemble de définition de  $f$  mais ;  $f$  admet une limite finie  $l$  en  $x_0$ .

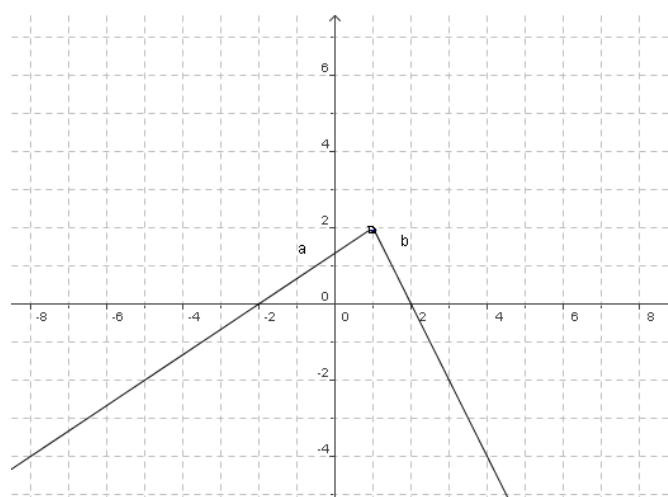
Et enfin la quatrième position correspond à la définition de la limite de  $f$  en  $x_0$  comme une notion dynamique et d'approximation. Une fonction n'atteint jamais sa limite. L'écriture formalisée est :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On ne perd pas l'additivité, l'inconvénient c'est de considérer que la limite n'est jamais atteinte.

Illustration graphique

Figure 8: Illustrations de l'exemple



Source : Construction de l'auteur

### Définition littérale

On dit que  $\ell$  est la limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  lorsque on peut rendre la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  aussi petite que l'on veut (plus petite que n'importe quel réel positif) en prenant  $x$  suffisamment proche de  $x_0$ .

Selon R. Bkouche (1997) la notion de limite relève de deux problématiques qui, si elles sont liées, présentent des aspects contradictoires :

La première problématique est d'ordre cinématique au sens où elle s'appuie sur la notion de mouvement; la formulation canonique (en termes de fonction par exemple): " $f(x)$  tend vers  $b$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ " doit alors être entendue de la façon suivante: lorsque la variable indépendante  $x$  s'approche indéfiniment de la valeur  $a$ , alors la fonction (la variable dépendante)  $f(x)$  s'approche indéfiniment de la valeur  $b$ . L'assertion citée : " $f(x)$  tend vers  $b$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ " est ici constituée de deux propositions, une proposition principale " $f(x)$  tend vers  $b$ " et une proposition subordonnée "lorsque  $x$  tend vers  $a$ ", indiquant ainsi que la variable  $x$  entraîne, dans son mouvement vers  $a$ , la variable  $f(x)$  vers la valeur  $b$ ; autrement dit c'est la variable qui commande la fonction ;

La seconde problématique est celle de l'approximation, elle peut être formulée de la façon suivante: soit une suite numérique  $x_n$ , dire que la suite  $x_n$  tend vers une limite  $\ell$  c'est dire que "plus  $n$  est grand, plus le nombre  $x_n$  s'approche de  $\ell$ ", ce qui participe encore du mouvement, mais s'y ajoute le problème suivant: jusqu'où faut-il aller dans la suite pour que la différence entre  $x_n$  et  $\ell$  soit plus petite qu'un nombre donné à l'avance, ou, si l'on préfère, pour que l'erreur que l'on fait en remplaçant  $\ell$  par  $x_n$  soit plus petite qu'une valeur donnée à

l'avance. Un exemple élémentaire d'approximation est le calcul décimal approché d'un nombre: combien de chiffre après la virgule pour que le nombre calculé diffère du nombre cherché de moins d'une valeur donnée à l'avance? Cet exemple a l'avantage de mettre en valeur le lien entre la notion d'approximation et le calcul lui-même. On peut citer ici la pratique de la division euclidienne lorsque "ça ne tombe pas juste". Ici l'aspect cinématique devient second, ce qui importe n'est plus le mouvement de la variable indépendante, mouvement défini par la succession des numéros d'ordre, ce que l'on cherche est le numéro d'ordre permettant l'approximation voulue. Autrement dit, c'est la variable dépendante qui s'impose et la structure grammaticale de l'assertion rituelle " $f(x)$  tend vers  $b$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ " est différente; il n'y a plus qu'une seule proposition qui indique à la fois ce qu'est la limite et le principe d'un calcul approché. On reconnaît dans cette seconde formulation la définition weïerstrassienne de la limite.

Lorsque la différence  $x - a$  devient infiniment petite, alors la différence  $f(x) - b$  devient infiniment petite, formulation que l'on peut rapprocher de celle de Cauchy dans son Résumé des leçons données à l'Ecole Polytechnique (1823), il faut prendre ici le terme "suite" dans son acception usuelle et non comme désignant une application de l'ensemble des entiers dans l'ensemble des nombres. Rappelons la formulation originale de Weïerstrass:

"S'il est possible de déterminer une borne  $d$  telle que, pour toute valeur de  $h$  plus petite en valeur absolue que  $d$ ,  $f(x+h) - f(x)$  soit plus petite qu'une quantité  $e$ , aussi petite que l'on veut, alors on dira qu'on a fait correspondre à une variation infiniment petite de la variable une variation infiniment petite de la fonction." (cours de 1861, rédigé par H.A. SCHWARZ, cité par PIERRE DUGAC in Jean). On voit ainsi apparaître une contradiction entre les deux problématiques; la première met l'accent sur le mouvement de la variable indépendante et l'effet d'entraînement sur la variable dépendante, la seconde met l'accent sur la variable dépendante et la façon dont elle force les valeurs de la première variable, d'après R. Bkouche c'est cette contradiction qui constitue l'une des difficultés de la notion de limite, difficulté qui relève de l'ordre mathématique et c'est en cela qu'elle est une difficulté pédagogique.

Une conception utilitariste de l'enseignement (assurer la réussite, ce qui implique d'éviter ce type de difficulté aux élèves) conduirait à choisir une seule problématique et à choisir les exercices en fonction de cette problématique, ou bien à inventer l'artefact pédagogique convenable qui permettra aux élèves de réussir les exercices ad hoc qu'on leur proposera. Mais qu'auront-ils compris et qu'auront-ils appris? (RUDOLF BKOUCHE 1997, p. 16)

Selon Bkouche(1997) en revenant sur la notion de limite et les deux problématiques dites ci-dessus; on remarque que plusieurs éléments entrent en jeu parmi lesquels on pourra citer l'aspect intuitif et l'aspect opératoire. Il faut alors préciser que l'aspect intuitif participe de chacune des deux problématiques définies ci-dessus, celle du mouvement et celle de l'approximation dans la mesure où c'est autour de cet aspect intuitif que sont définies les deux problématiques considérées. Cependant l'aspect opératoire a conduit à mettre en avant la problématique de l'approximation dans la mesure où c'est la formulation weïerstrassienne qui, s'est imposée pour donner une définition rigoureuse de la notion de limite et en déduire les conditions de calcul des limites. R. Bkouche(1997) affirme qu'ignorer, dans l'enseignement, les deux problématiques constitutives de la notion de limite et les deux aspects, l'intuitif et l'opératoire, qui permettent d'appréhender cette notion, ne peut que contribuer à mutiler la notion, et par cela même à mutiler la pensée mathématique des élèves.

Il illustre cette mutilation, en citant un article publié dans le Bulletin de l'APMEP; les auteurs y déclarent que l'on ne peut expliquer à un élève de lycée que la fonction  $\sin x$  n'a pas de limite lorsque  $x$  tend vers l'infini. Que signifie une telle déclaration si ce n'est la disparition du concept de limite de l'enseignement du lycée; la limite se réduit à un certain mode de calcul dans des cas très particuliers sans que l'élève soit conscient de la signification du calcul qu'il fait. Comme s'il fallait éviter à tout prix que l'élève fasse appel à son intuition (il pourrait se tromper!), comme s'il ne pouvait à ce stade (le formalisme des  $(\epsilon, h)$  n'est pas encore introduit) que suivre aveuglément les procédures qu'on lui impose; serait-il inconvenant qu'un élève fasse ce que tout mathématicien pratiquant fait, savoir, s'appuyer sur son intuition et remarquer qu'une fonction périodique, oscillant constamment lorsque les valeurs de la variable augmentent, ne peut avoir de limite. Par contre, marque de conscience professionnelle de la part des auteurs de l'article, ils tiennent à montrer à leurs élèves ce qu'est une démonstration et utilisent les intervalles emboîtés pour montrer, rigoureusement, que la fonction  $x^2$  tend vers 1 lorsque  $x$  tend vers 1. Que voilà de la belle mathématique ! il est difficile d'expliquer une propriété évidente mais on sait démontrer d'une façon sophistiquée une autre propriété évidente en utilisant une méthode dont les élèves ne peuvent comprendre, à ce stade, la véritable signification. Cela l'amène alors à poser la question de la part de l'intuition et de la rigueur dans l'enseignement; faut-il laisser une grande part à l'intuition, quitte à faire peu de démonstrations, ou faut-il exiger des démonstrations en forme, quitte à laisser de côté la compréhension par les élèves des mathématiques auxquelles ils sont confrontés? Selon R. Bkouche (1997) lorsque la question est posée de cette façon, tout est déjà biaisé et les mathématiques disparaissent derrière une pédagogie vide. C'est que,

sous cette forme, la question des limites a été déproblématisée. On ne sait plus de quoi il s'agit, on sait seulement qu'il y a un certain règlement à appliquer et que ce que l'on cherche n'a d'autre définition que l'application correcte du règlement, d'où la recherche d'un règlement facile à appliquer. On voit ainsi la fonction de la problématisation, d'une part expliciter, autant que faire se peut, les raisons qui conduisent à étudier une notion et d'autre part mettre en valeur les aspects opératoires qui permettront de résoudre les problèmes relevant de cette notion.

Bkouche(1997) affirme que cette explicitation des raisons ne se réduit pas à la recherche d'une genèse de la notion (que ce soit celle de l'histoire ou celle de l'apprentissage), c'est l'activité mathématique elle-même qui est en question, la façon de penser la limite, de la calculer quand cela est possible ou d'inventer de nouvelles méthodes de détermination quand cela est nécessaire. On pourrait parler par exemple de l'un des premiers problèmes où l'on rencontre la notion de limite, la division qui ne tombe pas juste, et l'on pourrait citer de nombreux exemples où la notion de limite intervient, que ce soit pour comprendre un phénomène ou que ce soit pour calculer la valeur d'une quantité (nombre ou grandeur), usant de l'une ou de l'autre problématique explicitée ci-dessus ou même des deux ensembles. Il note alors que cette réduction de l'aspect opératoire à la problématique de l'approximation via la définition de Weierstrass relève moins d'une nécessité logique que d'un choix historique en réponse aux difficultés posées par la notion d'infiniment petit encore utilisée par Cauchy.

Lecorre (2016) inspiré par Lutz, Makhlouf et Meyer (1996) écrit :

Notons d'abord le caractère contra-variant (LUTZ, MAKHLOUF & MEYER, 1996) de cette définition qui appelle à déterminer pour un voisinage de  $f(x)$ , le voisinage de  $x$  correspondant. Un caractère covariant au contraire appelle à déterminer pour un voisinage de  $x$ , le voisinage de  $f(x)$  correspondant. (LECORRE 2016, pp. 30-31)

Et il poursuit

En examinant ensuite cette définition, on s'aperçoit du rôle déterminant de certains éléments de formalisme : la quantification universelle et existentielle (il y a aussi trois quantifications universelles implicites sur  $f$ ,  $m$  et  $k$ ), la notion de variable, celle d'intervalle, de voisinage d'un réel, de nombre réel, celle de fonction et celle d'implication. On peut, sur cette simple analyse des éléments constitutifs de la définition, s'apercevoir que celle-ci concentre un nombre important de notions nécessaires pour lui donner sens. . (LECORRE, 2016, p. 30-31)

Michele Artigue dans une approche de l'analyse non standard et en s'appuyant sur les travaux de Deledicq (1994) reprend ces questions d'introduction de l'analyse avec un regard non-standard, mais sensiblement modifié quand on évoque l'enseignement non standard de l'analyse selon (KEISLER, 1976) et (SULLIVAN, 1976).

Deledicq (1994) montre en particulier qu'une perspective non standard permet de distinguer dans l'entrée dans le champ de l'analyse deux niveaux qui sont en fait inséparables dans une approche standard :

The first level is based on the numerical manipulation of orders of magnitude so leading to familiarity with small and large numbers and with their behavior with respect to elementary operations and functions [...],

The second level is geared more towards the introduction of elementary notions and, particularly towards definitions and results related to the completeness of  $\mathbb{R}$ .

Le premier niveau est basé sur la manipulation numérique des ordres de grandeur conduisant ainsi à la familiarité avec les petits et les grands nombres et avec leur comportement vis-à-vis des opérations et fonctions élémentaires [...],

Le deuxième niveau est davantage axé sur l'introduction de notions élémentaires et, en particulier, sur les définitions et les résultats liés à la complétude de  $\mathbb{R}$ .

Le premier niveau est celui de l'introduction des ordres de grandeurs. On distinguera en fait trois types de nombres, ceux à notre échelle (limités), ceux beaucoup plus grands (i-grands) et ceux beaucoup plus petits (i-petits) et il n'est pas nécessaire pour ce faire d'utiliser un vocabulaire infinitésimal. (DELEDICQ, 1994) cité par ARTIGUE 1996b, p. 19)

On admettra qu'il existe deux de ces ordres de grandeurs sont représentés dans  $\mathbb{N}^*$  : les entiers limités et les entiers i-grands, obéissant aux règles suivantes :

- un entier i-grand est plus grand que tout entier limité,
- la somme et le produit de deux entiers limités sont limités,
- si  $n$  est limité,  $2^n$  l'est aussi.

Et pour ce qui est des nombres réels, un réel sera dit i-grand s'il est supérieur à un i-grand, i-petit s'il est nul ou si son inverse est i-grand, limité dans les autres cas.

On peut, comme l'explique l'auteur, considérer que  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{R}$  sont inchangés et que simplement, on les a "colorés" en introduisant des ordres de grandeur. Ces ordres de grandeur ont rompu l'homogénéité de  $\mathbb{N}$  et de  $\mathbb{R}$ , mais ceci n'est-il plus conforme à la "réalité" du nombre des grandeurs et mesures de grandeurs que la vision homogène standard ? A partir de cette distinction, peut se mettre en place un calcul sur les ordres de grandeur dont les règles reproduisent celles de l'infinitésimal de Leibniz, et où, bien sûr, certaines réponses demeurent indéterminées (on ne sait dire à priori quel est l'ordre de grandeur du produit d'un

i-petit par un i-grand). Ce calcul peut être mis en jeu dans une première approche des limites puisque, par exemple, le fait que :

- la fonction  $f$  admette pour limite  $\ell$  à l'infini signifiera que : pour tout  $x$  i-grand,  $f(x) - \ell$  est i-petit ;
- le fait que la suite  $(u_n)$  soit convergente s'exprimera par : Si  $n$  et  $n'$  sont deux entiers i-grands,  $u_n - u_{n'}$  est i-petit ;
- le fait que la fonction soit continue en  $3$ , s'exprimera par : Si  $x-3$  est i-petit,  $f(x) - f(3)$  est aussi i-petit.

Elle affirme que l'on a ici coupé l'insécable de la définition standard et remplacé, de fait, un calcul sur des fonctions, N fonction de  $\varepsilon$  par un calcul sur des nombres. On a également rétabli l'ordre en quelque sorte naturel de regard, allant de  $x$  à  $f(x)$ . On touche là du doigt deux avantages essentiels d'une approche non standard et ce qui fait que les définitions peuvent ici constituer de véritables outils de travail pour le débutant.

Le second niveau de l'analyse est celui qui correspond à l'entrée en scène du théorème de complétude, entrée en scène équivalente dans l'axiomatique non-standard à l'axiome de standardisation qui va nous garantir qu'il existe des réels dits standards tels que tout réel limité soit i-proche d'un réel standard et d'un seul (c'est-à-dire qu'il existe dans le halo de tout réel limité un nombre qui joue le même rôle que 0 parmi les nombres i-petits). Comme l'écrit Deledicq :

on retrouve alors le point de vue originel de Cauchy et Dedekind et l'on pourra ensuite affirmer que toute suite classique (c'est-à-dire définie sans faire appel à la distinction entre ordres de grandeurs) convergente définit un seul réel standard : celui dans le halo duquel viennent s'accumuler ses termes d'indice i-grands", et c'est là que commence véritablement l'analyse. C'est à ce niveau qu'intervient aussi la notion d'ombre qui joue un rôle analogue de standardisation au niveau graphique et permet de rendre compte d'intuitions ou de propriétés graphiques plus difficilement exprimables au niveau standard. (ARTIGUE, 1996b, p. 20)

L'auteure affirme que Deledicq souligne que l'on pourrait dire que cette séparation en deux niveaux de l'analyse existe de fait dans l'enseignement actuel, avec la distinction qui s'est opérée entre analyse intuitive et analyse formelle. Il existe cependant une différence essentielle : dans la séparation non-standard, existe, dès le premier niveau, une formalisation simple mais efficace qui permet d'engager réellement le jeu des preuves et réfutations.

L'auteure soulève la question faut-il pour autant se lancer dans l'aventure d'un enseignement non standard ? et elle répond que se lancer dans cette aventure serait



méconnaître lourdement la réalité des lois qui gouvernent les systèmes didactiques que de penser qu'une approche aussi faiblement reconnue dans la communauté mathématique, aussi peu présente dans la culture mathématique, puisse légitimer un enseignement à grande échelle.

De plus elle affirme que si une approche non standard comme celle présentée ci-dessus est séduisante, il serait faux de prétendre que l'on a grâce à elle trouvé la voie royale de l'enseignement de l'analyse. On peut penser qu'elle fournit certes un équilibre entre l'intuition et la rigueur plus satisfaisant au départ que celui que nous vivons actuellement au lycée. Mais, pour ce que l'on gagne ainsi, il y a nécessairement un prix à payer. L'analyse non standard ne nous balise pas un chemin sans obstacles et il faudra bien un jour affronter les difficultés qui lui sont inhérentes. Par exemple le fait que, l'on peut trouver chaque définition classique, comme celle de la continuité d'une fonction en un point, un critère non standard qui lui est équivalent (cf. plus haut), il n'y a équivalence que tant que l'on s'intéresse à des fonctions standard et à des points standards (une fonction aussi simple que la fonction linéaire  $x \rightarrow \omega x$ , avec  $\omega$   $i$ -grand, continue bien sûr au sens classique, ne vérifie pas ce critère en 0). Dès que l'on quitte le champ des objets standards, le non standard nous est en fait difficilement compréhensible.

D'après Artigue sans doute ne serait-il pas inutile que les enseignants sachent que derrière le langage infinitésimal qu'ils utilisent sans cesse, de façon floue et éventuellement avec un peu de mauvaise conscience, dans leurs explications et commentaires informels, il y a une rigueur accessible qui, de plus, n'a rien à voir avec la métaphysique de l'infini.

Selon elle, il est clair qu'il n'existe pas de voie royale qui puisse faire de cette entrée dans le champ de l'analyse, un chemin régulier, continu, sans embûches. Comme l'ont clairement montré les travaux qui se sont développés en didactiques de l'analyse, les difficultés et obstacles sont multiples et chercher à les contourner ne fait que les renforcer. Les connaissances acquises en fait nous aident d'abord à mieux comprendre le fonctionnement de nos élèves et étudiants, à anticiper leurs difficultés, à chercher patiemment des moyens d'action adaptés au lieu d'osciller entre quête de la méthode miracle et résignation fataliste.

S'appuyant sur les résultats des recherches en didactique sur l'entrée en analyse, elle affirme que cette entrée ne peut se penser que dans le long terme, sur plusieurs années, elle ne peut s'effectuer d'emblée avec les savoirs formalisés, « achevés », qui nous sont devenus si familiers. Elle se fera nécessairement par des approches provisoires qui permettront d'avancer mais engendreront aussi des connaissances, des représentations de la

connaissance, nécessairement partiellement erronées. Ceci signifie que notre enseignement ne peut pas vivre sur la fiction d'un développement continu et régulier de la connaissance mais sur l'image d'un développement plus chaotique d'où les régressions liées aux déséquilibres ne sont pas exclues.

Elle fait remarquer qu'un peu partout, les approches intuitives basées sur l'exploration des phénomènes, souvent liées à l'utilisation des technologies informatiques, ont remplacé ou tendent à remplacer les approches formelles qui avaient accompagné la réforme des mathématiques modernes. Ces approches fournissent sans aucun doute aux élèves, une familiarité, un contact enrichissant avec un certain nombre de phénomènes ou objets relevant du champ de l'analyse. Notre expérience didactique doit cependant nous inciter à considérer avec une certaine méfiance les discours partout trop enthousiastes qui accompagnent souvent ces réactions à un ordre ancien décevant. Nous devons en particulier, selon elle, être attentifs à la façon dont est engagée dans ces approches la rationalité scientifique. Certes, la formalisation limitée et provisoire, mais nous devons nous demander si elle permet d'engager de façon raisonnable le jeu des preuves et des réfutations qui est une composante essentielle de l'activité mathématique.

Enfin, elle attire l'attention qu'en tant qu'universitaires, nous ne devons surtout pas minimiser le saut qualitatif qui sépare ces approches intuitives du rapport à l'analyse que nous visons à l'université dans les filières scientifiques. Il y a là une rupture qu'il faut se donner les moyens de marquer et de consommer, en n'attendant pas qu'elle s'opère d'elle-même. La majorité de nos étudiants n'y survivrait pas et nous serions plus que jamais prisonniers du piège d'un enseignement qui, tout en affichant de grandes ambitions, se borne à évaluer des compétences minimales.

On peut conclure à partir de ces analyses que pour le succès de l'enseignement de la notion de limite, il faut rentrer par les conceptions intuitives des élèves, les mettre à jour, élaborer des situations qui mettent à défaut les conceptions erronées et en fin procéder à la formalisation de la notion de limite et la rendre opérationnelle. En d'autres termes, trouver un équilibre entre l'intuition et la rigueur dans l'enseignement des mathématiques: cela met en évidence l'importance de la dialectique entre l'intuition et la rigueur dans l'enseignement des mathématiques comme le dit Berrou (2011, p. 1) « Entre rigueur et intuition, il n'y a pas à choisir. Les deux sont un précieux atout pour l'étude des mathématiques et l'idéal pour se faire de la mathématique une alliée plutôt qu'un obstacle est de cultiver les deux attitudes, surtout si l'on se connaît une dominante. »

L'enseignement actuel de la notion de limite au Mali n'aborde pas ces aspects épistémologiques importants, acquérir des connaissances sur la notion de limite c'est prendre conscience de ces aspects épistémologiques les affrontés et les surmontés. L'enseignement de la notion de limite doit s'organiser autour de ces obstacles épistémologiques pour que les élèves et étudiants leurs rencontrent pour faire leur crise de limite et enfin mettre à leur disposition des moyens permettant de les surmonter. C'est dans ces conditions que l'on dira que les élèves ont appris la notion de limite. Cela n'est possible qu'à travers la construction et la mise en application de la définition formelle de la limite. Pour que les aspects épistémologiques soient abordés il est nécessaire que les enseignants aient une conception claire de ceux-ci. C'est pourquoi nous avons procédé à une enquête épistémologique exploratoire auprès des enseignants dont nous présentons dans le titre suivant.

#### **4. Enquête épistémologique sur les conceptions des enseignants sur les obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite**

Avant de présenter la structure de notre enquête épistémologique, nous donnons quelques informations sur la structure du système éducatif malien. Le système éducatif malien est composé de plusieurs ordres d'enseignements : le préscolaire, le fondamental, le secondaire général et technique et professionnel, l'enseignement normal et l'enseignement supérieur

Tableau 2- Structure et organisation du système éducatif malien

Ordre d'enseignement	Type d'école ou établissement	Scolarité	Age	Diplôme
Préscolaire	Centre de développement de la petite enfance(CDPE)	3 ans		
Fondamental	Écoles publiques et privées Écoles communautaires Medersas	Premier cycle de 6 ans Et un second cycle de 3 ans	De 7 à 14ans De 14 à 17 ans	Diplôme d'études fondamentales (DEF°)
Secondaire général et technique	Lycées publics et privés	3 ans	16 à 20 ans	Baccalauréat

	Medersas et				
	Écoles professionnelles	2 à 4 ans	17 à 23 ans	CAP BT	
Enseignement normal	IFM (Institut de Formation des Maîtres)	2 à 4 ans	18 à 25 ans	Diplôme de l'IFM	
Enseignement supérieur	Facultés	3 à 7 ans	17 ans et plus	Licence, Master Doctorat	
	Instituts	2 à 4 ans			
	Grandes écoles	2 à 5 ans.		BTS, DUT, DUTS, Ingénieur	

Source : L'auteur

CAP certificat d'aptitude professionnel ; BT Brevet de Technicien ; BTS Brevet de Technicien Supérieur, DUT Diplôme Universitaire de Technicien ; DUTS Diplôme Universitaire de Technicien Supérieur.

C'est dans ce cadre que nous présenterons les résultats d'une enquête exploratoire sur les conceptions des futurs professeurs et des professeurs du Lycée sur quelques obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point.

Nous avons constaté que dans les calculs de limite, les enseignants font l'amalgame entre la limite en  $x_0$  et la continuité en  $x_0$ .

Les pratiques de classes posent le problème de la recherche de la limite  $\ell$  en  $x_0$ ; elles ne donnent aucune justification. Nous voulons rompre avec cette pratique en essayant de réduire l'écart entre le savoir savant et le savoir enseigné. Pour cela comme tâche nous proposons la démarche suivante

- a) Expliquer pourquoi  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $x_0$ .
- b) Démontrer que :  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $x_0$ .

Pour s'y prendre nous avons élaboré un questionnaire pour les futurs enseignants et les enseignants du Lycée afin d'étudier leurs conceptions de la notion de limite.

#### 4.1 Questionnaire

Public cible 1 les professeurs du lycée auxquels nous avons proposé les questions suivantes :

1. Dans vos cours sur la notion de limite donnez-vous la définition formelle de  $\ell$  est la limite de  $f$  au point  $a$  ?
2. Si oui faites-vous fonctionner la définition formelle ?
3. Donner deux exemples d'applications
4. Si non dites pourquoi vous ne donnez pas la définition formelle.
5. Selon vous la notion de limite est-elle une notion dynamique ou statique ?
6. Une fonction peut-elle atteindre sa limite ou non ? illustrez votre réponse à l'aide d'exemples.

#### 4.2 Analyse du questionnaire :

Dans le programme de la 11<sup>ème</sup>, il est dit de ne pas donner la définition formelle de la limite par ce qu'elle est difficilement accessible aux élèves, en terminale c'est l'extension de la notion de limite qui est étudiée il n'y a aucune mention pour la définition formelle. Dans les manuels tels que la collection interafricaine de mathématiques science mathématique CIAM 11<sup>ème</sup> SM et terminale SM et d'autres livres d'édition française qui sont utilisés par les enseignants, est absente la définition formelle cela peut influencer la décision des enseignants en ce qui concerne la construction et l'utilisation de la définition formelle de la limite. Malgré qu'il y ait des types de tâches qui font appel à la définition formelle de la limite tels que montrer que la droite d'équation  $x=a$  est asymptote verticale à la courbe de  $f$  et montrer que  $y=b$  est asymptote horizontale à la courbe de  $f$ .

Pour ces différentes raisons on peut s'attendre aux réponses suivantes :

- Non je ne donne pas ;
- Oui je donne mais ; je ne la fais pas fonctionner ;
- Oui je la donne et je la fais fonctionner.

Comme exemples on peut s'attendre des cas de fonctions affines qui illustrent à la fois l'aspect covariant et contra-variant de la définition formelle, parce qu'elles sont bijectives. Il sera difficile que l'on rencontre des cas où il y a une dialectique entre les deux aspects.

La notion de limite est une notion statique ; mais elle est étudiée comme une notion dynamique et d'approximation. Donc cela va beaucoup influencer les réponses.

On peut rencontrer les réponses suivantes :

- La limite peut être atteinte si la limite est finie et  $f$  est définie en  $a$  (cas de  $f$  continue en  $a$ ) ;
- La limite peut ne pas être atteinte cas de limite finie et  $f$  n'est pas définie en  $a$  ;
- La limite n'est jamais atteinte car  $f$  s'approche indéfiniment de sa limite ;

-La limite est toujours atteinte.

Ceux qui ont une conception dynamique de la limite diront que la limite n'est jamais atteinte et ceux qui ont une conception statique diront que la limite est toujours atteinte. Les exemples nous éclaireront sur les autres conceptions.

Public cible 2 professeurs d'université (Faculté des Sciences Techniques et Technologiques)

- a. Dans votre cours sur la notion de limite vous construisez la définition formelle de la limite avec les étudiants ou vous leur donnez la définition formelle ?
- b. Faites-vous fonctionner la définition formelle ?
- c. Attirez-vous l'attention des étudiants sur les obstacles suivants :
  - La limite peut être atteinte ou non ?
  - L'effacement des quantificateurs

La réponse peut-être je leur donne la définition formelle de la limite parce qu'ils ont déjà étudié cette notion au lycée. Cela met en exergue le cloisonnement des deux ordres d'enseignement. Il est fort probable que les professeurs fassent fonctionner la définition formelle de la limite dans ces différents aspects ; mais il n'est pas certain qu'ils attirent l'attention des étudiants sur les obstacles tels que la limite peut être atteinte ou non, l'ordre des quantificateurs et l'effacement des quantificateurs. Bref ils ne font pas une analyse fine de la définition formelle de la limite.

Nous nous sommes entretenus avec deux professeurs d'analyse. La réponse à la première question a été la suivante : nous ne construisons pas la définition formelle avec nos étudiants ; mais nous leur donnons sous diverses formes

- En epsilon et delta ;
- Définition topologique ;
- Définition à partir des suites.

Pour la deuxième question nous avons deux réponses différentes. Pour le premier il ne donne pas d'application ; mais il l'utilise au besoin dans des démonstrations. Le second dit qu'il donne des applications simples : le cas des fonctions affines juste pour montrer comment fonctionne la définition formelle.

Par rapport à la question 3, la réponse a été la même. Nous n'évoquons pas ces obstacles pendant nos cours ; mais ils sont tous d'accord que c'est important de mener cette étude.

Nous nous sommes appuyés sur les recommandations faites par Cornu et Sierpiska pour construire nos activités qui ont été proposées à des élèves professeurs de l'Ecole Normale Supérieure de Bamako spécialité mathématiques des semestres 2 et 3 (professeur

d'enseignement secondaire de mathématiques niveau semestre 2 et 3 PESMath S2 et S3) le 28 septembre 2017. Puis avec les professeurs du Lycée couplées avec le questionnaire en octobre 2018 pour mesurer l'écart entre ceux qui sont sur terrain et les futurs professeurs.

Pour que les professeurs se sentent dans leur rôle d'évaluateurs ou correcteurs de travaux d'élèves, nous avons proposé pour chaque question des réponses fictives d'élèves pour qu'ils puissent analyser ces réponses. À travers leur analyse, nous espérons mettre en évidence leur conception sur le concept de limite.

### Activité 1 :

1°) à la question : que signifie  $\ell$  est la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $a$  ?

Les élèves de la 11<sup>ème</sup> et 12<sup>ème</sup> ont donné les réponses suivantes :

Élève 1 : si  $x$  s'approche de  $a$  alors  $f(x)$  s'approche de  $\ell$ .

Élève 2 : on peut rendre la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  aussi petite que l'on veut en prenant  $x$  suffisamment proche de  $a$ .

Élève 3 : si  $x$  s'approche de  $a$  en restant inférieur à  $a$  alors  $f(x)$  s'approche de  $\ell$  en restant inférieur à  $\ell$ .

Élève 4 : si la distance entre  $x$  et  $a$  est petite alors la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  est aussi petite.

Élève 5 : pour que la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  soit petite il suffit que la distance entre  $x$  et  $a$  soit petite.

Élève 6 : pour tout nombre réel  $\alpha$  strictement positif, il existe un nombre réel strictement positif  $\delta$  tel que si  $d(x,a) < \delta$  alors  $d(f(x),\ell) < \epsilon$ .

Élève 7 : pour des valeurs de  $x$  très très proche de  $a$  sans lui être égal, alors  $f(x)$  est très très proche de  $\ell$ .

Élève 8 : On peut rendre la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  aussi petite que l'on veut, en prenant  $x$  très proche de  $a$  sans être égal à  $a$ .

Élève 9 : pour tout voisinage ouvert  $O$  de  $\ell$  privé de  $\ell$  il existe un voisinage ouvert de  $a$  privé de  $a$  dont l'image est contenue dans  $O$ .

Élève 10 : si l'image de  $a$  par  $f$  est  $\ell$ .

Élève 11 : si  $x$  appartient à  $Df$  et  $f(a)$  est égale à  $\ell$ .

Selon vous : quelle(s) est (sont) la (les) définition(s) qui est (sont) correcte(s) et dites pourquoi ? Quelle(s) est (sont) la (les) définition(s) qui est (sont) incorrecte(s) et dites

pourquoi ? Donnez la définition correcte si elle n'est pas parmi les propositions faites par les élèves.

2°) comment utilise-t-on votre définition pour déterminer la limite d'une fonction en un point ?

## Activité 2

On donne la définition suivante :  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in Df \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$  et on a posé les questions suivantes aux étudiants de 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> Année d'universités.

1°) Que vous rappelle cette définition ?

Élève 1 : la formule de Cauchy ;

Élève 2 : la formule de la continuité ;

Élève 3 : la formule de la limite

Élève 4 : formule qui permet d'étudier la continuité et la limite d'une fonction en un point.

Selon vous : quelle(s) est sont la (les) réponse(s) qui est (sont) correcte(s) et dites pourquoi ?

Quelle(s) est (sont) la (les) réponse (s) qui est (sont) incorrecte(s) et dites pourquoi ? Donnez la réponse correcte si elle n'est pas parmi les propositions faites par les élèves.

2°) Interpréter cette définition ci-dessus

Élève 1 : quand  $x$  s'approche de  $a$  alors  $f(x)$  aussi s'approche de  $\ell$

Élève 2 : c'est la définition de  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $a$

Élève 3 : c'est la définition de  $f$  est continue en  $a$

Selon vous : quelle(s) est sont la (les) interprétation(s) qui est (sont) correcte(s) et dites pourquoi ? Quelle(s) est (sont) la (les) interprétation (s) qui est (sont) incorrecte(s) et dites pourquoi ?

Donnez l'interprétation correcte si elle n'est pas parmi les propositions faites par les élèves.

3°) Expliquer comment on l'applique

Élève 1 : on va de  $|x - a| < \delta$  vers  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

Élève 2 : il s'agit de prouver l'existence de  $\delta$  on va de  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  pour construire  $\delta$

Élève 3 : il y a une dialectique on va de  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  pour construire  $\delta$  et en gardant en tête que  $\delta$  est un nombre qui est petit dépendant de  $\varepsilon$  autrement dit on fixe  $\delta$  à l'avance.

4°) Donner les connaissances nécessaires pour sa compréhension. Parmi ces connaissances préciser celles que les élèves ne disposent pas en justifiant votre affirmation.



### Activité 3 :

1°) Une fonction peut-elle atteindre sa limite ? Justifiez votre réponse en donnant un exemple.

2°) Parmi les exemples suivants préciser les fonctions qui atteignent leur limite et dites pourquoi et celles qui n'atteignent pas leur limite en justifiant votre réponse.

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}; \text{ b. } \lim_{x \rightarrow 3} 2x - 3; \text{ c. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+3x+1}{x+1}; \text{ d. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2-1}}$$

3°) On donne les fonctions suivantes définies sur un intervalle I, préciser celles qui admettent une limite en a.

$$\text{a. } f(x) = 2x+3 \text{ I}=[2, 7], a=2; \text{ b. } f(x) = -5x+2 \text{ I}=[-5; 5], a=5; \text{ c. } f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} \text{ I} = \mathbb{R} - \{-2\}, a=-2$$

$$\text{d. } f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ x + 2 & \text{si } x > 3 \\ f(3) = 6 \end{cases} \text{ I} = \mathbb{R}, a=3$$

4°) "Un riche agriculteur meurt en laissant derrière lui trois enfants et un champ de 28 hectares. Les enfants décident de partager l'héritage de la façon suivante : le plus âgé prend la moitié ; le second prend la moitié de ce qui reste et le troisième prend la moitié de ce qui reste. Le plus âgé prend encore la moitié de ce qui reste et ainsi de suite."

Questions:

Le champ sera-t-il complètement partagé ? Si oui quelle est la part de chaque enfant ? (Justifiez à chaque fois votre réponse)

### Analyse des activités :

L'activité 1 a pour objectif de connaître la conception des professeurs et les futurs professeurs sur la définition de la limite. Cela a une grande influence sur l'interprétation de la définition formelle et aussi leur choix entre la définition intuitive et la définition formelle de la limite. Nous voudrions aussi montrer la nécessité de la définition formelle.

1°) La réponse attendue pour la 1ère question est la définition formelle :

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in Df \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ . Ou bien la définition topologique de la limite « pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  contenant  $\ell$ , il existe un ouvert  $\mathcal{O}'_a$  centré en  $a$  peut être privé de  $a$  tel que  $f(\mathcal{O}'_a) \subset \mathcal{O}$  ».

Du point de vue qualitative : les définitions des élèves E1, E4 et E7 mettent seulement en exergue l'aspect covariant de la limite, elle n'est pas précise par ce que l'on ne sait pas comment  $x$  s'approche de  $a$  ni non plus comment  $f(x)$  s'approche de  $\ell$  Sierpinska(1985), celles des élèves E2, E5 et E8, mettent seulement en exergue l'aspect contra-variant de la

limite, avec une différence notable  $x$  différent de  $a$ . il est important ici de rappeler qu'il ne s'agit pas seulement de montrer l'existence de  $\delta$  ; mais aussi de construire un  $\delta$  qui convient le mieux. Celle de E3 confond la limite et la limite à gauche. La définition de E6 est celle de la continuité d'une fonction en un point. Celle de E9 veut dire qu'une fonction ne peut pas atteindre sa limite. Celles de E10 et E11 veulent dire que la limite d'une fonction en un point est son image en ce point. Aucune de ces définitions n'est correcte, nous avons des interprétations intuitives naïves ; mais comme réponses possibles c'est la définition intuitive qui va apparaître.

2°) La réponse attendue est : les données sont  $f(x)$ ,  $\ell, \varepsilon$  et  $a$  pour tout  $\varepsilon > 0$  on va de  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  pour montrer l'existence d'un  $\delta$  tel que  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$  sans oublier que delta est un nombre positif très petit, qui peut être fixé à l'avance pour construire un nouveau delta convenable.

Pour cette question on s'attend à un blocage, une illustration graphique, utilisation de tableau de valeurs ou d'exemples ou l'obligation de penser à la définition formelle pour pouvoir répondre à cette question.

L'activité 2 a pour objectif de savoir si les futurs professeurs se rappellent la définition formelle, son interprétation, et les connaissances mobilisables pour sa mise en œuvre. A l'aide de cette activité nous nous rendrons compte si les futurs professeurs et les professeurs du Lycée ont l'habitude de faire fonctionner la définition formelle de la limite et quelles sont les difficultés qu'ils rencontraient dans son application.

La réponse attendue de la 1ère question est : “la définition de  $\ell$  es la limite de  $f$  en  $a$ ”

Nous pouvons nous attendre à des réponses suivantes : c'est la formule de Cauchy

Pour la 2è question la réponse correcte est la proposition de l'élève3 : c'est la formule de la limite ; mais ce sont les résultats des élèves E1 et E2 qui vont dominer.

Pour la 3è question la réponse attendue est “ les données sont  $f(x)$ ,  $\ell$   $\varepsilon$  et  $a$  pour tout  $\varepsilon > 0$  on va de  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  pour montrer l'existence d'un  $\delta$  tel que  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$  sans oublier que delta est un nombre positif très petit, qui peut-être fixer à l'avance pour construire un nouveau delta convenable”.

Comme résultat prévisible les élèves professeurs peuvent faire une interprétation linéaire de la définition formelle. Ce que nous qualifierons d'effacement de quantificateurs.

Pour la 4è question nous avons : l'identification des données, les connecteurs logiques et leur ordre ; les équations et inéquations avec valeur absolue ; la majoration et la

minoration ; l'ordre et opérations dans  $\mathbb{R}$  ; la composition et décomposition des fonctions ; les différentes significations de l'égalité. Parmi ces connaissances c'est la dernière seulement qui peut faire défaut chez les élèves. Les différentes significations de l'égalité:

$$a = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow |a - b| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon \leq b \leq a + \varepsilon.$$

L'activité 3 a pour objectif de connaître la conception des futurs professeurs sur la question une fonction peut-elle atteindre sa limite ou non et de savoir si les futurs professeurs prennent en compte l'ensemble de définition d'une fonction dans le calcul de la limite d'une fonction en un point.

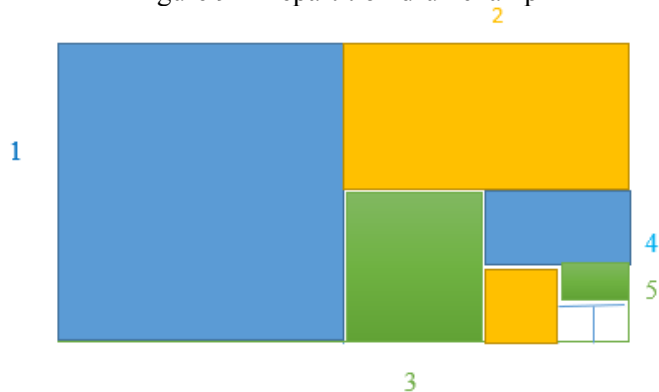
Réponse attendue : dès qu'une fonction admet une limite alors elle atteint cette limite.

Réponses possibles : si une fonction est définie en un point alors elle atteint sa limite en ce point, ou si une fonction n'est pas définie en un point alors elle ne peut pas atteindre sa limite en ce point ou une fonction ne peut jamais atteindre sa limite en un point ou enfin, une fonction atteint toujours sa limite en un point.

Tous les quatre cas illustrent bien la notion de limite, la seule différence est que dans certains cas la fonction est définie au point  $a$  et dans d'autres cas elle n'y est pas définie. On rappelle ici que pour la recherche de la limite en un point  $a$ , on ne se préoccupe pas de savoir ce qui se passe si  $x = a$ .

Pour la quatrième question la réponse attendue est oui, le champ sera complètement partagé et la part de chaque enfant est la somme partielle (limite de la somme des séries de raisons  $1/8$ ).

Figure 9 – Répartition d'un champ



Source : construction de l'auteur

Le plus âgé aura  $S_{1,n} = 14 + \frac{7}{4} + \frac{7}{32} + \frac{7}{2^9} + \dots + \frac{7}{2^{3n}}$  la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 14 et de raison  $2^{-3}$  donc la part du plus âgé sera

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{1,n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - 2^{-3n}}{1 - \frac{1}{8}} \right) 14 = 16$$

Le second aura S2,  $n=7+\frac{7}{8}+\dots+\frac{7}{2^{3n}}$  de la même façon la part du deuxième enfant

$$\text{sera } \lim_{n \rightarrow +\infty} S2, n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1-2^{-3n}}{1-\frac{1}{8}} \right) 7 = 8$$

Et le plus jeune aura S3,  $n=\frac{7}{2}+\frac{7}{16}+\dots+\frac{7}{2^{3n}}$  et en fin la part du troisième sera

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S3, n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1-2^{-3n}}{1-\frac{1}{8}} \right) \frac{7}{2} = 4. \text{ Et on a } 16+8+4=28. \text{ Le champ sera complètement}$$

partagé.

On pouvait aussi remarquer qu'il s'agit de décomposer 28 en trois nombres qui sont en progression géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

Les réponses possibles :

Les futurs professeurs peuvent dire que le champ ne sera pas complètement partagé parce que l'on continue indéfiniment de partager. Ils peuvent aussi constater que la part du plus âgé est le double du second et la part du second le double du plus jeune et résoudre le problème ; mais c'est la justification qui pourra poser un problème.

#### 4.3. Analyse à postériori des productions des élèves professeurs :

**Activité 1** : nous avons rencontré seulement des définitions intuitives (qualitatives), parfois la limite est confondue avec l'image, à la limite à gauche, ce qui confirme notre hypothèse qu'il y a une confusion entre étudier la limite et l'image ou la continuité en un point.

Par exemple : la production d'un étudiant du semestre 2 S2

« Les définitions correctes sont :

Élève 1 : si  $x$  s'approche de  $a$  alors  $f(x)$  s'approche de  $\ell$ .

Élève 4 : si la distance entre  $x$  et  $a$  est petite alors la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  est aussi petite.

Élève 6 : pour tout nombre réel  $a$  strictement positif, il existe un nombre réel  $\beta$  strictement positif tel que : si  $d(x,a) < \delta$  alors  $d(f(x),\ell) < \varepsilon$

Élève 7 : pour des valeurs de  $x$  très très proche de  $a$  sans lui être égal, alors  $f(x)$  est très très proche de  $\ell$

Justification : toutes ces définitions données sont correctes, seulement les formulations en langage mathématique diffèrent. Les élèves 1 et 7 se servent de définition littérale tandis que les élèves 4, 6 se servent de la notion de distance.

Les définitions incorrectes et justifications

Élève 2 : dans sa définition le terme  $x$  suffisamment proche de  $a$  n'est pas bien éclairci, tant que  $x$  n'est pas égal à  $a$ , il peut toujours être plus proche de  $a$ .

Élève 3 : sa définition syntaxe sur la notion de limite à gauche qui n'est pas générale.

Élève 9 : sa définition est celle de la continuité de  $f$  en  $a$  qui est un cas particulier de la notion de limite.

Élève 10 : définition mal formulée et il veut définir la notion de continuité. »

Il y a eu beaucoup de difficultés pour répondre à la question comment applique-t-on la définition formelle. Certains calculent  $f(a)$ , d'autres n'ont pas pu répondre, d'autres expliquent les techniques de calcul de la limite. Il y a seulement deux élèves professeurs sur dix-neuf qui ont utilisé une définition quantifiée ; mais cette définition correspond à celle de la continuité d'une fonction en un point.

Pour déterminer la limite d'une fonction en un point j'utilise la définition :  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in Df, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$  c'est à dire  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

En résumé nous pouvons dire que les élèves professeurs ont appris la définition intuitive, mais, ils ne se rappellent pas bien la définition formelle. Cela parce que l'enseignement reçu privilégie la définition intuitive au début et ne met pas l'accent sur la définition formelle précise au niveau supérieur. On accorde beaucoup d'intérêts aux règles de calcul de limite ; et on néglige la justification. Cela a comme conséquences la résistance des conceptions erronées telles que la confusion entre la limite et l'image, la limite et la limite à gauche, limite atteinte ou non, l'étude de la limite et l'étude de la continuité en un point.

On peut affirmer sans se tromper qu'il y a chez ces élèves professeurs une confusion entre la limite et la continuité en un point. Cela nous amène à remettre en cause les professeurs d'analyse du supérieur, parce qu'ils ne font pas une analyse fine de la définition formelle pour mettre en évidence sa rigueur qui une de sa raison d'être pour mettre en évidence les limites de la définition intuitive qualitative ; raison pour laquelle les étudiants continuent de trainer des lacunes sur le concept de limite. Ils ne se rappellent pas la définition formelle, et ne savent pas non plus comment l'appliquer pour montrer qu'un nombre réel donné  $\ell$  est la limite d'une fonction en un point  $a$ .

## Activité 2

La première question fut bien répondue par la majeure partie des élèves professeurs seulement (2 sur 9) ont dit que c'est la formule de Cauchy. On peut dire qu'ils reconnaissent la définition formelle précise de la limite. Cependant, ils ont des difficultés dans comment la mettre en œuvre. Certains font une lecture linéaire et pour d'autres c'est seulement l'aspect

contra-variant ; ils ne connaissent pas non plus les connaissances nécessaires pour appliquer la définition formelle.

deux étudiants de S2 ont choisi les réponses suivantes :

1. *Elève4 : c'est la formule qui permet d'étudier la continuité et la limite d'une fonction en un point car la relation prouve que  $f$  est continue en  $a$  et admet  $\ell$  comme limite en  $a$  ;*
2. *Elève3 c'est la définition de  $f$  est continue en  $a$  ;*
3. *Elève1 : on va de  $|x - a| < \delta$  vers  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  par ce que du fait qu'on a l'implication dans la définition cela prouve qu'on doit partir de  $|x - a| < \delta$  pour construire  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  sinon la réciproque est fausse.*

Ce groupe confond la limite et la continuité en un point et aussi il pense que la définition formelle fonctionne de façon « covariante » seulement. Il a fait une lecture linéaire ce qui correspond à l'effacement des quantificateurs.

Un autre groupe répond aux questions :

- 1) *Cette formule nous rappelle : "la formule de la limite"*
- 2) *Cette définition interprète la définition de  $l$  est la limite de  $f$  en  $a$*
- 3) *L'application de cette définition : "il s'agit de prouver l'existence de  $\delta$  on va de  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  pour construire  $\delta$ ".*

Ici on voit que ces élèves professeurs connaissent la définition formelle de la limite ; mais ils pensent que la définition formelle fonctionne de façon « contra variant » seulement.

### Activité 3 :

Pour la question 1 les résultats sont de deux types :  $x_0$  appartient à  $Df$  ou non, ce qui nous renvoie à l'obstacle limite atteinte ou non, confusion entre la limite et l'image, limite et continuité en un point.

- 1) *Parmi les exemples suivants précisons ceux qui illustrent bien la définition de la limite*
  - a.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$  *N'illustre pas la définition de la limite car la fonction n'est pas définie en  $l$ .*
  - b.  $\lim_{x \rightarrow 3} 2x - 3$  *Illustre la définition de la limite car elle admet une limite  $l$ .*
  - c.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+3x+1}{x+1}$  *N'illustre pas la définition de la limite car elle n'est pas définie en  $l$ .*

d.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2-1}}$  illustre la définition de la limite car elle est définie en 1.

2) Précisons celles qui admettent une limite en a.

a.  $f(x)=2x+3$   $I=[2, 7]$   $a=2$   $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$  b.  $f(x)=-5x+2$   $I=[-5;5]$   $a=5$   $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -23$ ;

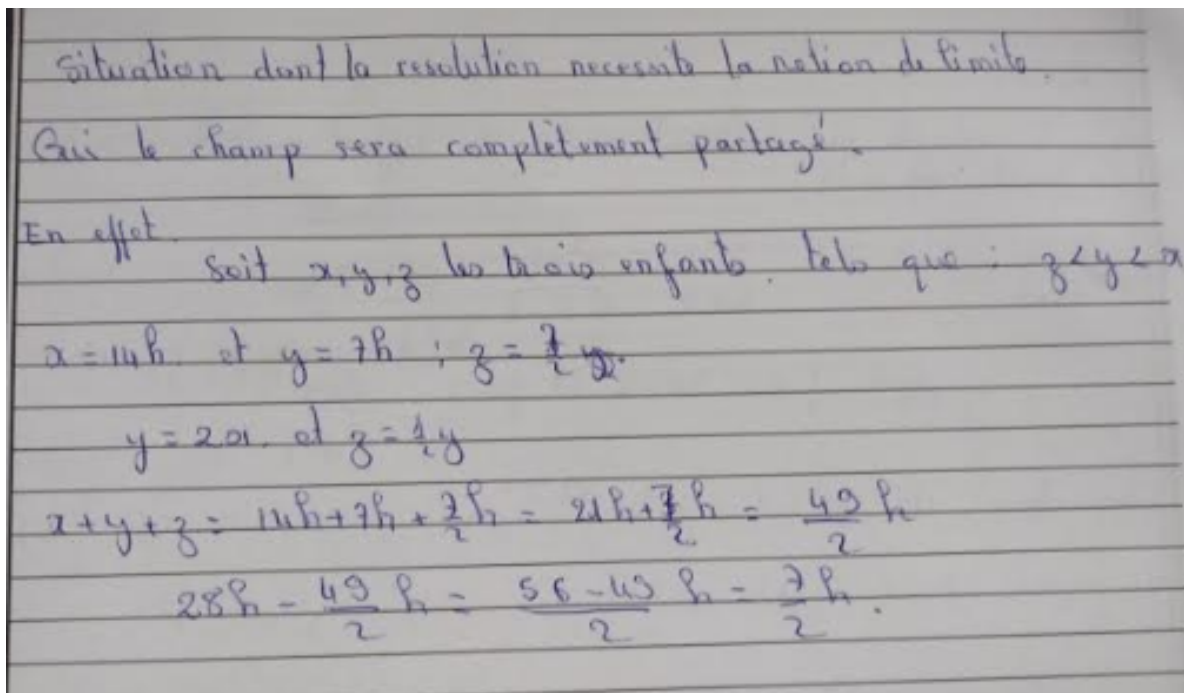
d.  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ x + 2 & \text{si } x > 3 \\ f(3) = 6 \end{cases}$   $I = \mathbb{R}$   $a=3$   $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} 6 \\ 5 \end{cases}$   $f(3) = 6$

Les élèves professeurs ne prêtent pas attention au domaine de définition dans le calcul de la limite d'une fonction en un point.

4°) pour cette question nous avons rencontré les types de réponses suivantes : le champ sera complètement partagé sans justification ; le champ sera complètement partagé avec une justification erronée sans la part de chaque enfant, le champ ne sera pas complètement partagé avec des justifications erronées.

Voici quelques illustrations :

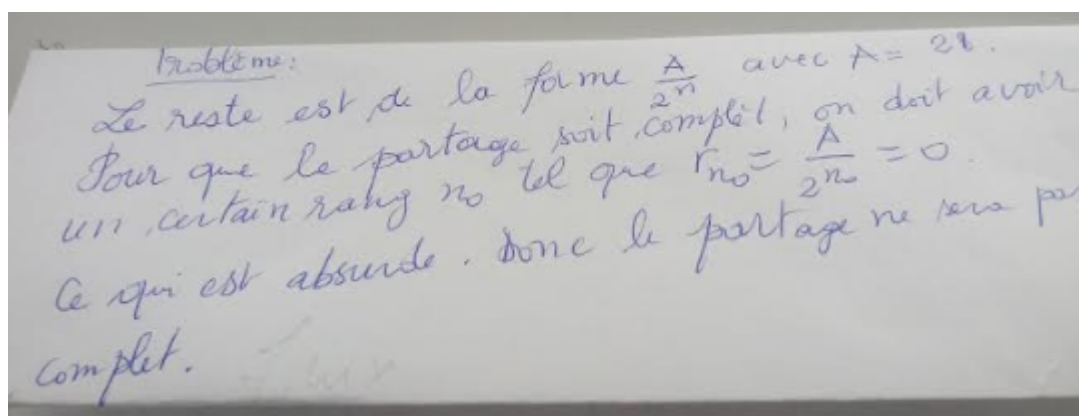
Figure 10 - Production d'un groupe de futurs profs



Source : Données de l'enquête

Ce groupe a compris que les parts sont en progressions géométriques de raison  $\frac{1}{2}$  ; mais au moment de les calculer il a commis des erreurs. Il devrait s'apercevoir de cette erreur car la somme des parts doit donner 28 ce qui n'est pas le cas.

Figure 11 - production d'un groupe de futurs profs



Source : Données de l'enquête

Ce groupe a compris qu'il s'agit d'une division successive par 2 ; il a des problèmes avec la convergence des suites. Il ne sait pas que l'on continue indéfiniment le partage. Nous avons ici l'obstacle du principe de la continuité. D'autres futurs profs ont bien posé le problème mais ils ont eu du mal à conclure. Aucun groupe n'a utilisé la limite pour justifier sa réponse.

### Analyse a posteriori des productions des professeurs du Lycée

#### Le questionnaire :

La majeure partie répond qu'il ne donne pas la définition formelle, il n'en fait pas usage parce qu'il trouve que les élèves ne comprennent pas cette définition. Ils ont tous une conception dynamique de la notion de limite. Et ils pensent qu'une fonction atteint sa limite si et seulement si elle est continue en ce point.

Par rapport aux activités nous avons retrouvé les mêmes types d'erreurs que chez les futurs professeurs. Cela montre que les conceptions des étudiants n'ont pas évoluées.

### Traitement des obstacles à l'aide de la définition formelle

#### -Obstacle logique ou effacement des quantificateurs

En effaçant les quantificateurs la définition devient si  $x=a$  alors  $f(x)=l$  c'est-à-dire  $f(a)=l$ . Ce qui correspond à la confusion entre limite et l'image. Pour cela il est bon d'expliquer les différentes significations de l'égalité. «  $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$  » équivaut à «  $x=a$  implique  $f(a)=l$  ». C'est-à-dire la limite est l'image. Car  $\forall \varepsilon > 0, |x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow x=a$ .



### **-Limite atteinte ou pas :**

Avec la définition intuitive on voit qu'une fonction s'approche de sa limite mais qu'elle ne peut pas l'atteindre. Elle renforce l'idée qu'une fonction ne peut pas atteindre sa limite. Par contre avec la définition formelle, il est facile de s'apercevoir que dès qu'une fonction admet une limite, alors cette limite est atteinte. En effet supposons que  $f$  n'atteint pas sa limite  $\ell$  en  $a$  i.e  $f(x) \neq \ell$  alors  $|f(x) - \ell| > 0 \Rightarrow \frac{|f(x) - \ell|}{2} > 0$  d'où  $|f(x) - \ell| < \frac{|f(x) - \ell|}{2}$  ce qui est absurde donc  $f$  atteint sa limite  $\ell$ .

### **-Le fonctionnement de la définition formelle de la limite :**

Elle fonctionne de deux façons sinon trois suivant la nature de la fonction en jeux :

**Contra variant** "on peut rendre la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  aussi petite que l'on veut en prenant  $x$  suffisamment proche de  $a$ "

**Covariant** "quand  $x$  s'approche de  $a$  alors  $f(x)$  s'approche de  $\ell$ " ;

Si  $f$  est bijective les deux fonctionnent c'est-à-dire nous avons la réciprocity de la condition ;

**La dialectique entre la contravariance et la covariance** "on fixe delta à l'avance et on construit un nouveau delta qui satisfait la condition suffisante".

La définition intuitive met seulement l'un ou l'autre aspect de la notion de limite. C'est seulement avec la définition formelle que l'on rencontre les trois.

### **4.4. Conclusion :**

Il ressort de cette étude que c'est la définition intuitive qui émerge chez les étudiants se perpétue et s'érige en obstacle. Elle est nécessaire pour introduire la limite ; mais elle est limitée car elle est une qualification approximative de la définition formelle, elle permet aux étudiants d'avoir une idée de ce qu'est la limite, elle renforce l'obstacle une fonction n'atteint pas sa limite, la limite est la limite à gauche, la limite est une notion dynamique. La définition formelle précise n'émerge pas compte tenu de la forme dont elle est enseignée ; elle est donnée de façon brute et appliquée à des cas simples, il n'y a pas d'analyse fine autour d'elle.

Il est nécessaire de faire une analyse fine de la définition formelle pour corriger de façon efficace les obstacles épistémologiques tels que : limite peut être atteinte ou non, confusion entre la limite et l'image, entre l'étude de la continuité et

l'étude de la limite en un point, l'effacement de quantificateurs. Il est important de proposer des situations dont la résolution fait appel à la limite.

Une analyse fine de la définition formelle permettra aux futurs professeurs de réaliser une séquence didactique qui va permettre aux élèves de donner une signification mathématique au concept de limite, elle permet aussi d'actualiser les conceptions. Cette analyse doit intervenir dans les écoles de formation des élèves professeurs pour qu'ils aient une idée claire (conception correcte) de la notion de limite, cela leur aidera à procéder à une transposition interne significative et aussi d'avoir une vision plus large sur les obstacles que leurs élèves pourront rencontrer dans l'apprentissage de la notion de limite.

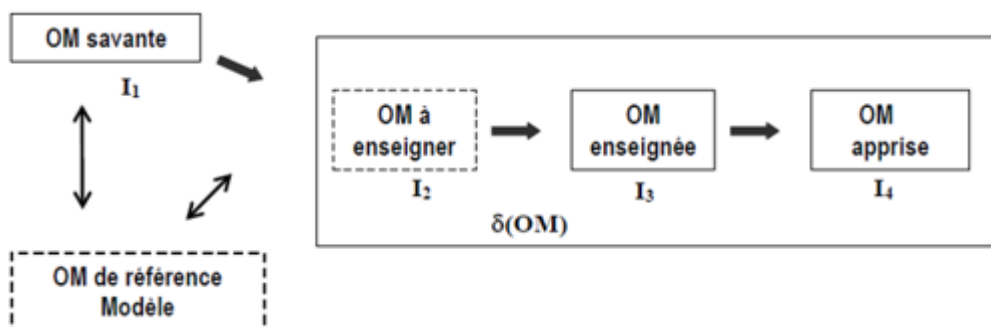
### 5. Un modèle épistémologique de référence

Nous nous appuyons sur Boch et Gascón (2005) qui précisent qu'une organisation mathématique est une méthode praxéologique pratique de programme d'études en mathématiques, qui est obtenue à partir de manuels et de programmes. L'identification de ces OM dont l'usage passe par la caractérisation des types de tâches institutionnelles est une «re» construction du chercheur à partir de l'analyse des manuels et des programmes d'études. Du point de vue de la transposition didactique, ils proposent deux postulats:

- on ne peut pas comprendre ou expliquer une OM apprises sans comprendre et expliquer l'OM des étapes précédentes;
- L'unité d'analyse des processus didactiques doit contenir une organisation didactique qui permet l'application (établissement) d'au moins une OM local.

Il faut ajouter un modèle épistémologique "référence praxéologique", que Chaachoua et Bittar (2019) appellent Modèle Praxéologique de Référence (MPR), permettant de caractériser et d'analyser les praxéologies à utiliser (Figure 12).

Figure 12 - Unité d'analyse des processus didactique



Source (BOCH et GASCON 2005, p. 11)

L'OM à enseigner constitue un modèle praxéologique du programme de mathématiques. La base empirique pour l'élaboration de ce modèle se trouve dans les documents curriculaires (programmes officiels) et les manuels. Son influence sur l'organisation didactique associée à l'organisation mathématique notée  $\delta$  (OM) est centrale, même si ni l'enseignant ni l'institution n'ont explicitement ce modèle, mais seulement des matériaux praxéologiques plus ou moins bien articulés entre eux. Boch et Gascón affirment que :

Mais cette influence ne peut pas être interprétée correctement si nous n'avons pas un point de vue épistémologique. Ce point de vue est fourni par une OM de référence dont la description est généralement faite à partir de  $\delta$  (OM) légitimant le processus d'enseignement. La référence OM est celle prise en compte par le chercheur dans son analyse. Il ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes dont il dérive (car il les inclut dans l'analyse), mais il est formulé en termes très proches. L'OM de référence est celle que le chercheur met à l'épreuve de la contingence et qui subit un remaniement constant pour cela. (BOCH et GASCON 2005, P. 11)

L'élaboration d'un modèle praxéologique de référence est devenue une étape essentielle dans la plupart des travaux développés dans le cadre de la TAD. Le MPR est lui-même un résultat didactique et également un outil pour effectuer des analyses didactiques.

Chevallard (2007) qui affirme que :

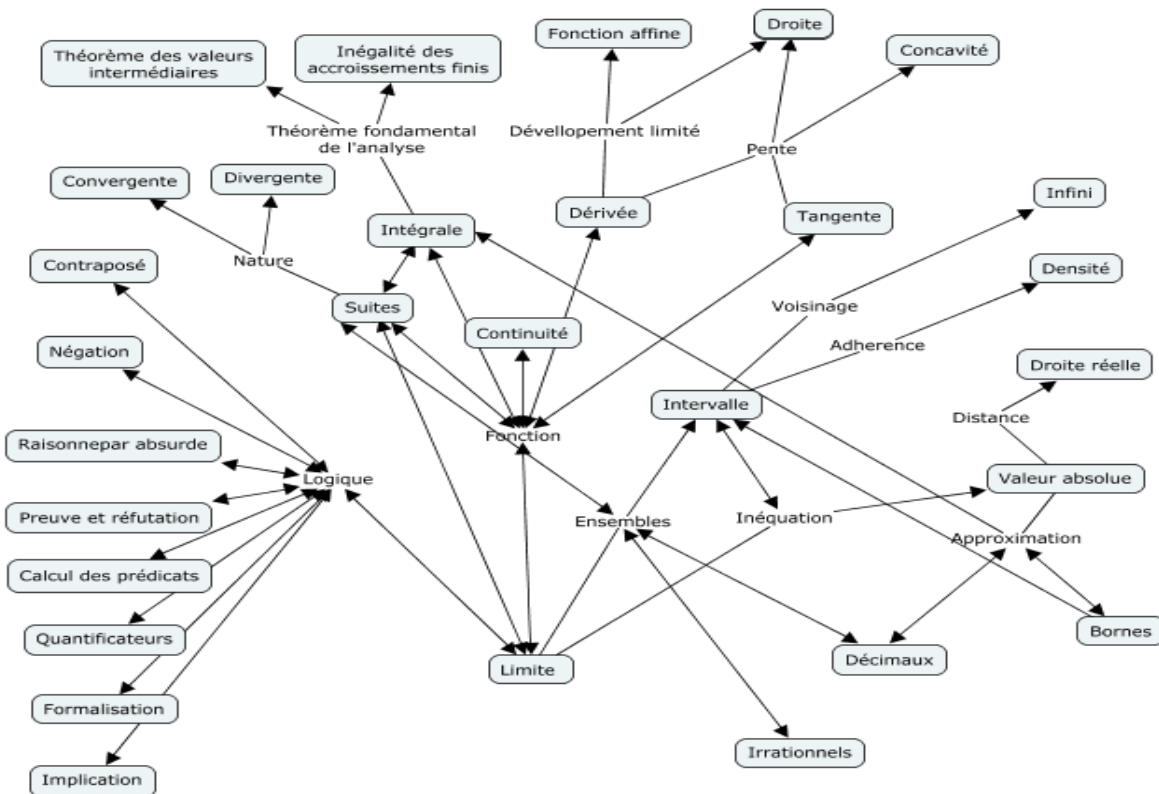
Ce que dit la théorie de la transposition didactique, en d'autres termes, c'est qu'il n'y a pas de « repère privilégié » à partir duquel observer, analyser, juger le monde des savoirs et, plus largement, des praxéologies. Le « savoir savant » lui-même est une fonction, non une substance, et par rapport à quoi le didacticien doit expressément s'excentrer. De là découle que le travail du didacticien consiste, chaque fois, en la construction d'un repère jamais définitif depuis lequel analyser les praxéologies dont il étudie la diffusion. (CHEVALLARD, 2007, p. 12)

Enfin, comme les concepts scientifiques ne sont jamais seuls et ne peuvent être totalement isolés, il est nécessaire de prendre en compte les relations entre les différents concepts mis en jeu dans toute situation liée au champ conceptuel du concept en jeu. Vergnaud (1990) définit un *champ conceptuel* comme un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion. Cette notion de champ conceptuel permet de :

- replacer un concept dans un ensemble de concepts qui lui sont voisins ;
- préciser les classes de problèmes où ces concepts sont outils de résolution (donc préciser leurs significations).

Ainsi nous allons mettre la notion de limite en relation avec son champ conceptuel et ensuite préciser les types de tâches. Nous construisons à cet effet la carte conceptuelle (Figure 13) qui met en évidence certains des objets mathématiques qui nourrissent le concept de limite, et les notions mathématiques construites à l'aide de la limite.

Figure 13- Carte conceptuelle sur le concept de limite



Source : Construction de l'auteur

La notion de limite est intimement liée aux concepts de fonction, de variable, d'intégrale, de dérivée, de continuité, d'ensemble, d'inéquations avec valeur absolue, de logique et de topologie de  $\mathbb{R}$  et la notion d'infini.

### Les types de tâches

**Du point vu de la logique, nous identifions 22 types de tâches :**

1. Donner la définition formelle de la limite d'une fonction  $f$  en un point  $a$  donné à l'aide des quantificateurs.
2. Démontrer qu'un nombre réel  $\ell$  est la limite de  $f$  en un point  $a$ .
3. Prouver qu'un réel  $\ell$  n'est pas la limite d'une fonction  $f$  en un point  $a$ .
4. Montrer que si  $f$  admet une limite en  $a$  alors cette limite est toujours atteinte.
5. Montrer que la limite en un point  $a$  de la somme, produit et quotient de deux fonctions est la somme, produit et le quotient des limites finies non nulles en ce point.

6. Montrer que si  $f$  est dérivable en  $a$  alors elle est continue en  $a$
7. Étudier la continuité de  $f$  en  $a$
8. Étudier la dérivabilité de  $f$  en  $a$
9. Montrer l'existence d'une intégrale sur un intervalle donné
10. Montrer que, si  $f$  est continue en  $a$  alors  $f$  est bornée au voisinage de  $f(a)$
11. Démontrer le théorème des fonctions continues monotones sur un intervalle  $[a, b]$  (existence de la limite)
12. Démontrer le théorème de la borne supérieure et inférieure.
13. Démontrer qu'une suite est convergente
14. Démontrer qu'une suite est divergente
15. Déterminer l'écriture sous forme de fraction d'un nombre admettant une écriture décimale illimitée périodique
16. Démontrer qu'un nombre rationnel est la limite d'un nombre décimal illimité périodique.
17. Démontrer qu'un nombre irrationnel est la limite d'un nombre décimal illimité non périodique.
18. Démontrer que toute suite croissante et majorée converge vers une limite finie ;
19. Démontrer que toute suite croissante et non majorée converge vers  $+\infty$  ;
20. Démontrer que toute suite décroissante et non minorée converge vers une limite finie ;
21. Démontrer que deux suites adjacentes sont toujours convergentes et de plus leurs limites sont fines et égales ;
22. Démontrer que toute suite décroissante et minorée converge vers  $-\infty$  ;

**Par rapport à la dérivée, nous mettons en évidence 5 types de tâches :**

1. Déterminer le nombre dérivé d'une fonction en un point ;
2. Déterminer le développement limité d'ordre  $n$  d'une fonction au voisinage d'un point ;
3. Montrer que le développement limité d'ordre  $n$  d'une fonction est unique ;
4. Démontrer qu'une fonction admet un extremum en un point ;
5. Étudier la concavité d'une courbe en un point;

**En ce qui concerne les ensembles, ce sont 16 types de tâches qui sont mises en évidence :**

1. Démontrer que si une fonction admet une limite en un point, alors cette limite est unique ;
2. Démontrer que « être aussi proche que l'on veut » signifie l'égalité dans  $\mathbb{R}$  »
3. Démontrer que  $\mathbb{R}$  est complet ;

4. Démontrer que l'on peut approcher toute fonction numérique d'une variable réelle par une droite affine dans un intervalle de rayon réduit (c'est-à-dire au voisinage d'un point adhérent à son ensemble de définition)
5. Calculer la limite d'une fonction en un point  $a$  ;
6. Étudier la limite d'une fonction en un point ;
7. Démontrer que la courbe de la fonction  $f$  admet une asymptote verticale en  $a$ , une asymptote horizontale en infini ou une asymptote oblique en infini ;
8. Déterminer graphiquement la limite d'une fonction en  $a$  ;
9. Démontrer que la limite de  $g \circ f$  est égale à  $g(\lim f)$  ;
10. Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires ;
11. Démontrer le théorème fondamental de l'analyse ;
12. Démontrer le théorème des accroissements-finis ;
13. Calculer si elle existe, la limite d'une suite à l'infini ;
- 14.** Calculer si elle existe, la limite d'une fonction en un point de  $\mathbb{R}$  ;
15. Déterminer la valeur exacte de la solution d'une équation ;
16. Montrer qu'une fonction admet un point d'inflexion en un point  $a$  ;

À partir des types de tâches relatifs à la notion de limite. On s'aperçoit que sa raison d'être est de prouver avec rigueur des propriétés et des axiomes sur les fonctions, c'est-à-dire fonder l'analyse sur des bases solides au sens de Cauchy.

Le Thai Bao, (2007) dans sa thèse, inspiré par Boch et al. (2003), identifie et décrit trois organisations mathématiques locales relatives à la notion de limite :

a. OM 1 autour de l'algèbre des limites (cf. BOSCH et al. 2003)

En s'appuyant sur la problématique du calcul de la limite existante, l'algèbre des limites est le fruit d'une modélisation en règles algébriques du passage à la limite dans les opérations sur les fonctions. L'algèbre des limites permet d'éviter la problématique de l'infini de la notion de limite comme les problématiques d'approximation de cette notion. Elle permet aussi d'associer. L'écriture  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  à un nombre réel ou à l'infini ;

b. OM 2 autour de la topologie des limites

L'OM 2 s'appuie sur la problématique de l'existence de la limite. Bosch et al. (2003) abordent les techniques mathématiques associées aux types de tâches dans OM 2 en présentant un exemple :

Junto a estos tipos de tareas, tenemos las técnicas matemáticas asociadas útiles para realizar las demostraciones requeridas. Veamos, por ejemplo, cómo se aborda una tarea del primer tipo: Demostrar que la función  $f(x) = \text{sen}(x)$  no tiene límite en el infinito. Consideremos la sucesión de término general  $x_n = (\pi/2 + 2\pi n)$ . Sabemos

que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ . Estudiemos el comportamiento de la sucesión de las imágenes :  $f(x_n) = \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1$  para todo  $n$ . Luego  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_n) = 1$ . Sea ahora la sucesión de términos general  $x_n' = (-\frac{\pi}{2} + 2\pi n)$ . Sabemos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n' = +\infty$ . Estudiemos el comportamiento de la sucesión de las imágenes:  $f(x_n') = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = -1$  para todo  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_n') = -1$ . Tenemos dos sucesiones que tienden a infinito y cuyas imágenes por  $f$  convergen a puntos diferentes. Por lo tanto, no existe el límite de  $f(x) = \sin(x)$  en el infinito. (LE THAI BAO 2007, p. 65)

Pour ces types de tâches, nous avons les techniques mathématiques associées utiles pour réaliser les démonstrations requises. Regardons, par exemple, comment s'aborde une tâche du premier type : Démontrons que la fonction  $f(x) = \sin(x)$  n'a pas de limite à l'infini.

Considérons la suite de terme général  $x_n = (\frac{\pi}{2} + 2\pi n)$ . Nous savons que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

Étudions le comportement à l'infini de la suite des images :

$f(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$  pour tout  $n$ . Nous avons deux suites qui tendent vers l'infini et dont les images par  $f$  convergent en un point différent. Par conséquent la limite de  $f(x) = \sin(x)$  n'existe pas. (Traduction en français par BESSOT cf. LE THAI BAO, 2007)

Dans l'exemple précédent, la non-existence de la limite de la fonction  $f(x) = \sin(x)$  à l'infini s'appuie sur la production de suites numériques et le calcul des limites de ces suites. Ces calculs appartiennent à OM 1 et abordent de façon indirecte la relation entre nombre et limite.

À partir des résultats de son enquête épistémologique, il modélise une restriction de OM 2, de Bosch et al. (2003), dans une organisation mathématique OM 2' locale qui relève plus explicitement de la relation dialectique entre la notion de limite et la notion de nombre réel.

• OM 2' locale « existence de la limite d'une suite numérique ». Certains des types des tâches constitutives de OM 2' sont les suivantes :

- T<sub>2'1</sub> : Démontrer la convergence (dans  $\mathbb{R}$ ) d'une suite numérique ;
- T<sub>2'2</sub> : Démontrer l'existence de la solution d'une équation.

Pour réaliser ces démonstrations, la technique mathématique ci-après porte explicitement sur la relation dialectique entre nombre et limite, c'est-à-dire, produire et vérifier que la suite numérique satisfait l'un des critères de convergence :

- le critère de Cauchy,
- le critère « monotone bornée »,
- le critère des intervalles emboîtés (ou des suites adjacentes),
- la définition en terme  $(\epsilon, N)$ .

Dans certains cas, on peut utiliser aussi des techniques portant sur des théorèmes démontrés précédemment comme les théorèmes de l’algèbre des limites ou le théorème des valeurs intermédiaires ... Dans ce cas, la relation dialectique entre nombre et limite se pose de façon indirecte. Le Thai renforce cette idée en affirmant que

Le bloc théorique (technologie et théorie) est celui décrit par Bosch et al. (2002) por OM2. El discurso tecnológico de OM2 está centrado en el uso de las propiedades de los límites de las sucesiones y en la definición clásica de « límite » en términos de  $\epsilon$  y  $\delta$ . Dicha tecnología se apoya, a su vez, en la teoría de los números reales que considera su estructura como espacio métrico y sus múltiples propiedades : densidad, completitud, caracterización de la topología de  $\mathbb{R}$  inducida por la métrica euclídea, existencia del supremo (y del ínfimo) de cualquier subconjunto no vacío y acotado de  $\mathbb{R}$ , sucesiones de Cauchy, etc. (LE THAI BAO, p. 66)

Le discours technologique de OM 2 est centré sur l’usage des propriétés des limites des suites et sur la définition classique de la « limite » en termes d’epsilon et delta. Cette technologie s’appuie, à son tour, sur la théorie de nombres réels qui considère sa structure comme espace métrique et ses multiples propriétés : densité, complétude, caractérisation de la topologie de  $\mathbb{R}$  induite par la métrique euclidienne, existence d’un maximum (et d’un minimum) dans n’importe quel intervalle non vide et fermé de  $\mathbb{R}$ , suites de Cauchy, etc. (Traduction en français par BESSOT, cf. LE THAI BAO, 2007)

Autrement dit, le bloc théorique s’appuie sur la topologie de  $\mathbb{R}$  pour la notion de limite. Pour illustrer l’OM2’, il prend comme exemple une activité du manuel Mathématiques 1<sup>re</sup> S. E de la collection Dimathème (1982) qui prépare l’introduction des notions de limite et de continuité de fonction : On appelle  $D_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) l’ensemble des décimaux  $d$  tels que le nombre  $10^n \times d$  soit un entier relatif (ex. :  $2,427 \in D_3$ ).

- a) Combien l’ensemble  $[0 ; 1] \subset D_n$  a-t-il d’éléments ?
- b) Soit  $f(x) = x^3 + 2x - 1$ . Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , il existe 2 réels  $a_n$  et  $b_n$  :  
 $a_n = \text{Max } \{x \in D_n, f(x) < 0\}$   
 $b_n = \text{Min } \{x \in D_n, f(x) > 0\}$   
 Quelle relation existe-t-il entre  $a_n$  et  $b_n$  ?
- c) Montrer que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont convergentes et que  $\lim(a_n) = \lim(b_n)$ . Soit  $x_0$  cette limite.
- d) Montrer que :  $\exists k > 0$  tel que : " $\forall x \in [0 ; 1]$  et " $\forall x' \in [0 ; 1]$ .  
 $|f(x) - f(x')| < k|x - x'|$ .
- e) En déduire que : " $\forall n \in \mathbb{N}, |f(b_n) - f(a_n)| < k \times 10^{-n}$  puis que  
 $-k \times 10^{-n} < f(x_0) < k \times 10^{-n}$ .  
 Conclure que  $f(x_0) \neq 0$  conduit à une contradiction. (LE THAI BAO 2007, p.67)



L'activité supra relève d'une technique pour démontrer l'existence d'une racine de l'équation  $f(x) = 0$  dans l'intervalle  $[0 ; 1]$  en produisant deux suites décimales adjacentes  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que les suites de leurs images  $f(a_n)$  et  $f(b_n)$  soient aussi adjacentes et vérifient  $f(a_n) < 0 < f(b_n)$  pour tout  $n$ . Cela permet de conclure à l'existence d'un nombre réel  $x_0$  tel que  $f(x_0) = 0$  et tel que  $a_n$  et  $b_n$  soient successivement les valeurs décimales approchées à  $10^{-n}$  près de  $x_0$  à travers la relation  $b_n - a_n = 10^{-n}$  ;

L'OM 3 locale « développement décimal d'un nombre réel » est la restriction d'une OM plus générale – « développements usuels des nombres réels » présente, par exemple, chez Bourbaki (1960) ; elle répond à la question de la représentation des nombres réels selon une suite de base qui forme une partie dense de  $\mathbb{R}$ , par exemple : développement en fraction continue, développements dyadiques ...

Nous identifions deux types des tâches constitutives de OM3 :

- T<sub>31</sub> : Approximation décimale à  $10^{-n}$  près d'un nombre réel
- T<sub>32</sub> : Résolution approchée décimale à  $10^{-n}$  près d'une équation (l'existence de la racine étant connue). La technique générale associée à ces types de tâches est d'encadrer le nombre réel (ou la racine d'une équation)  $x$  par un couple décimal  $(dn, dn')$  où  $dn, dn' \in D_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) tels que  $dn' - dn = 10^{-n}$ .

Cette technique se justifie par la technologie minimale assurant l'existence d'un tel couple décimal  $(dn, dn')$ . En effet :

- $D$  est une partie dense de  $\mathbb{R}$  : on peut toujours choisir un décimal  $d$  proche de  $x$  tel que  $0 < x - d < 10^{-n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $pn$  est la projection de  $d$  dans  $D_n$  (Margolinas, 1985), alors  $0 < d - pn < 10^{-n}$ . On a donc  $0 < x - pn < 2 \cdot 10^{-n}$ . Autrement dit,  $-10^{-n} < x - (pn + 10^{-n}) < 10^{-n}$ . Soit  $dn = pn + 10^{-n}$   $n \in D_n$ . On a  $x - dn < 10^{-n}$ .
- On a alors  $dn - 10^{-n} < x < dn + 10^{-n}$ . Si  $dn < x$ , il suffit de choisir  $dn' = dn + 10^{-n}$ . Sinon, on choisit  $dn' = dn - 10^{-n}$ .

Cette technologie s'appuie, comme dans OM1 et OM2, sur la théorie des nombres réels, en particulier  $\mathbb{R}$  comme espace métrique et ses multiples propriétés (cf. OM 2 de BOSCH et al. 2003) en ajoutant les propriétés minimales de  $D$  : sous-groupe additif dense de  $\mathbb{R}$  (cf. Bourbaki).

Nous pouvons citer les problèmes de calcul de la valeur approchée à  $10^{-n}$  près du quotient  $\frac{b}{a}$  ou de la racine carré de  $a$  (où  $a$  est un entier positif et  $b$  est un entier non nul) comme des exemples de tâches du type T<sub>31</sub>. L'activité de Dimathème (1982) citée plus haut

donne un exemple d'une technique de résolution approchée décimale à  $10^{-n}$  près d'une équation comme une tâche du type  $T_{32}$ .

Les deux dernières OM – OM 2' et OM 3 - relèvent d'une problématique de l'approximation des nombres par des suites numériques, tout particulièrement des suites décimales (approximation décimale d'un réel).

Les trois OM locales – OM 1, OM 2' et OM 3- tournent autour de la construction des nombres réels. Elles peuvent donc être intégrées dans une OM régionale. (LE THAI BAO 2007, p. 65-68).

Maggy Schneider inspirée par Hardy (2009) et (BOCH et al., 2003) évoque une bicéphalie entre les deux premières OM : une première OM 1 organisée autour de l'algèbre des limites et dont les tâches sont des calculs de limites, tous cas confondus, basés sur une technologie minimale qui est l'axiomatique de cette algèbre et une deuxième axée sur la topologie des limites et dont les tâches consistent à démontrer les propriétés de cette algèbre, ainsi que l'existence de limites particulières. Dans la première le bloc théorique manque et, dans la seconde, c'est le bloc pratique qui fait défaut. Elle affirme qu'au niveau de l'enseignement secondaire en Belgique, cette transposition se traduit par une étude assez systématique de tous les cas de limites des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , dans un ordre ou dans un autre suivant le réseau d'enseignement. Mais que tous ces cas sont « confondus » dans le sens où il manque des tâches qui permettraient de les hiérarchiser a priori en fonction d'un objectif ou d'un niveau d'étude. Elle présente un exemple pour illustrer, elle rapporte le cas d'un cours qu'elle a assisté sur les limites dont le premier cas étudié est la limite d'une fonction en un point de son domaine de continuité. Pour elle cela pourrait se justifier dans une approche plus formelle, le concept de fonction continue jouant un rôle majeur dans l'analyse formalisée. Mais, elle constate dans les classes concernées, que l'ambiance devient assez vite surréaliste et électrique, les élèves s'étonnent que l'on considère les valeurs de  $x$  sans cesse plus proches de ce réel tout en s'interdisant de prendre directement l'image de celui-ci. Ces cours se poursuivent en général par des limites de fonctions rationnelles dont les numérateur et dénominateur ont un facteur commun. Les élèves ne sont guère plus convaincus se demandant pourquoi le professeur n'étudie pas directement la fonction « simplifiée » qu'il identifie à la précédente, sans penser qu'elle s'en différencie en tant qu'un prolongement continu. Elle dit que l'on peut supposer là que les enseignants situent effectivement ce cas de limite dans une intention didactique de les faire factoriser et simplifier une fraction rationnelle.

À partir de ce constat, on peut affirmer qu'il vaut mieux introduire la limite avant la continuité dans un premier temps et la continuité dans un second temps et enfin établir une liaison entre les deux notions. Il semble nécessaire d'articuler ces deux OM pour permettre aux apprenants d'acquérir un sens mathématique au concept de limite. Pour réserver une part importante à l'intuition et à la logique, nous pensons qu'il serait intéressant d'adjoindre une organisation mathématique locale intuition dont les types de tâches tourneront autour des questions suivantes :

T<sub>i1</sub> : Conjecturer graphiquement la limite d'une fonction définie par sa représentation graphique ;

T<sub>i2</sub> : Déterminer l'image réciproque d'un intervalle par une fonction définie par sa représentation graphique ;

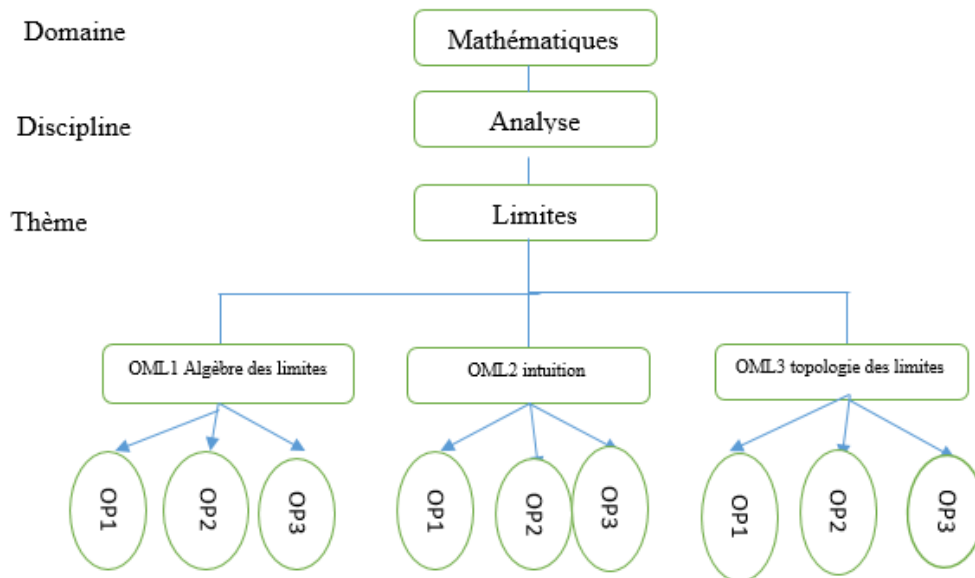
T<sub>i3</sub> : Compléter une table de valeurs d'une fonction définie par son expression algébrique explicite ;

T<sub>i4</sub> : Interpréter géométriquement le tableau de valeurs.

Les techniques seront basées sur la projection orthogonale sur les axes du repère, substitution de  $x$  par sa valeur dans  $f(x)$ , comparaison des nombres réel. Le complexe théorie technologie est constitué de calculatrice graphique, les propriétés de la projection orthogonale, l'algèbre élémentaire et la géométrie plane.

Cette OM intuition va nous permettre de faire vivre les conceptions des élèves sur la notion de limite, l'OM algèbre des limites nous permet de manipuler la notion de limite et enfin l'OM topologie des limites nous permet en fin d'actualiser les conceptions et les faire évoluer. Avec ces trois OM locales nous pouvons mettre en place une organisation mathématique régionale (Figure 14) qui permettra aux élèves d'acquérir un sens mathématique de la notion de limite.

Figure 14: Organisation mathématique régionale



Source : Construction de l'auteur

Générateur de tâches GT : Calculer, Démontrer, trouver, déterminer, conjecturer etc.

(Calculer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $a$ . V1, V2, V3, V4), V1, V2, V3, V4 sont des

variables de types de tâches. Les verbes d'action constituent ici des variables

épistémologiques parce qu'ils provoquent des changements de techniques de résolution. Ils montrent les limites des techniques mises en jeu pour répondre.

V1 nature de  $a$  :

V1.1  $a$  peut-être fini ou infini

V1.2 position de  $a$  par rapport à l'ensemble de définition de  $f$  :  $a$  appartient ou n'appartient pas à  $Df$  avec des niveaux de granularités ( $a$  est un point isolé adhérent à  $Df$  ou non ; ou  $a$  est une des bornes de  $Df$ ,  $a$  est un point intérieur de  $Df$ ),

V2 nature de  $f$ .

V2.1  $f$  est continue en  $a$  ;

V2.2  $f$  n'est pas continue en  $a$ . ( $f$  est prolongeable par continuité en  $a$  ou non)

V3 registre de représentation de  $f$ .

V3.1  $f$  est définie par une expression algébrique explicite ;

V3.2  $f$  est définie par sa représentation graphique ;

V3.3  $f$  est définie par une table de valeur ;

V3.4  $f$  est définie par un programme

V4 Type de fonction de  $f$

V4.1  $f$  est une fonction affine ;

V4.2  $f$  est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 ;

V4.3  $f$  est une fonction rationnelle

V4.4  $f$  est une fonction irrationnelle ;

V4.5  $f$  est une fonction circulaire ;

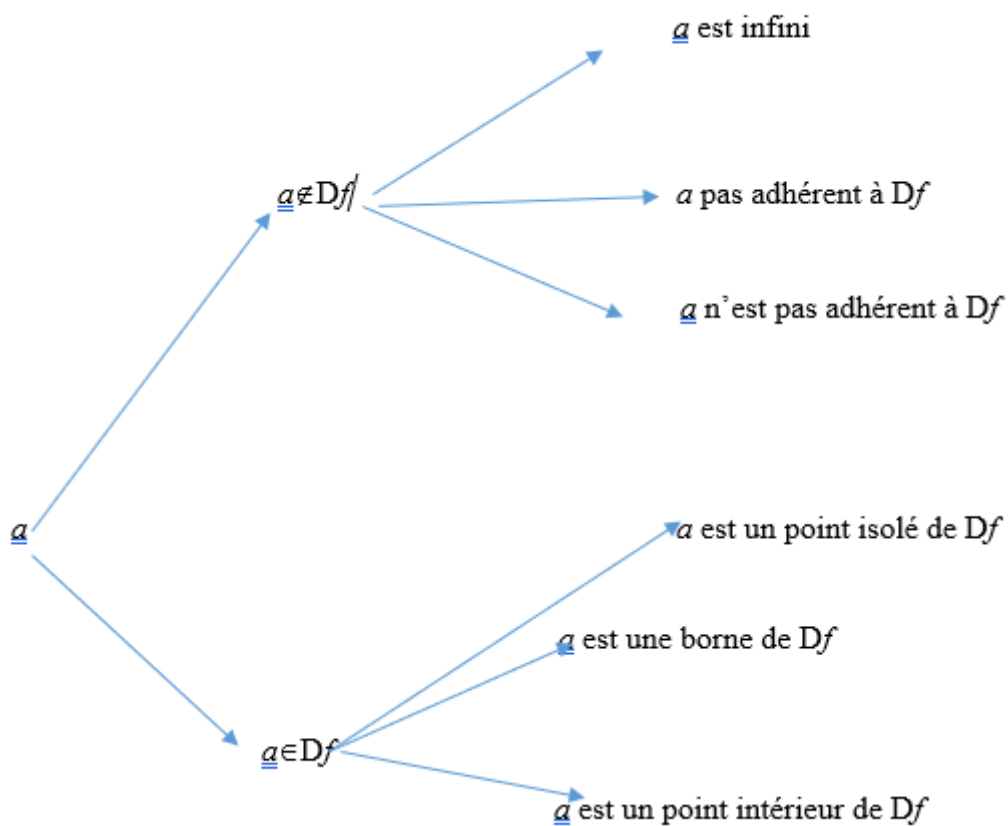
V4.6  $f$  est une fonction exponentielle ;

V4.7  $f$  est une fonction logarithmique ;

V4.8  $f$  est une combinaison de fonctions

Nous pouvons les résumer dans les schémas suivants (Figures 15, 16, 17 et 18)

Figure 15 – Limite de  $f$  suivant la nature de  $a$

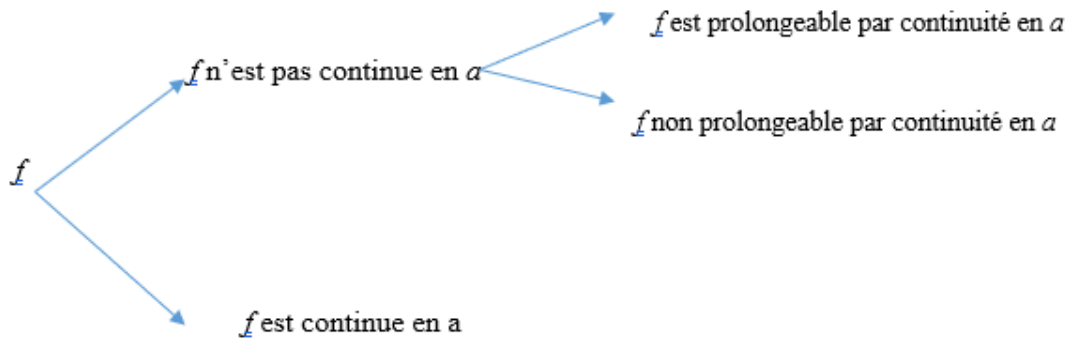


Source : Construction de l'auteur

Remarque :

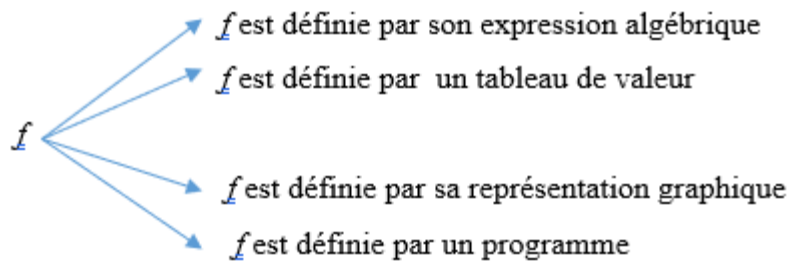
Le cas où  $a$  est un point isolé non adhérent à  $Df$  doit-être évité.

Figure 16 – Continuité ou non continuité de la fonction  $f$



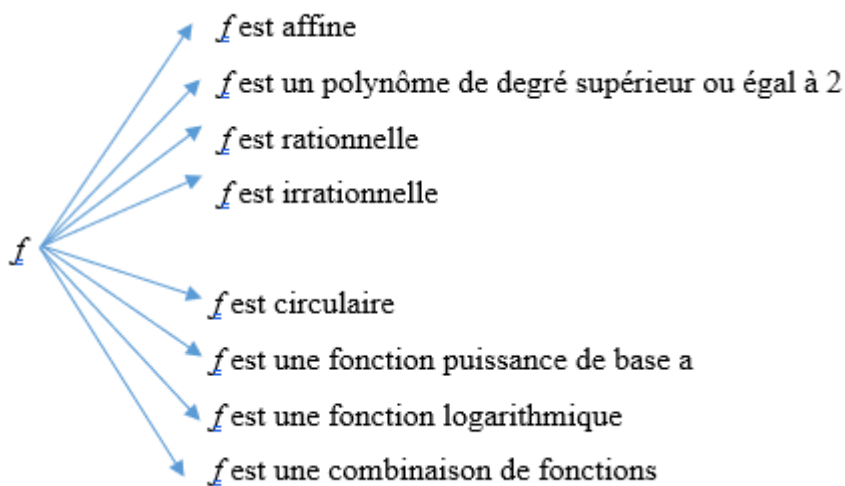
Source : Construction de l'auteur

Figure 17 – la fonction représentée dans différents registres de représentation sémiotique



Source : Construction de l'auteur

Figure 18 – Nature de la fonction  $f$



Source : Construction de l'auteur

Nous mettons en évidence des types de tâches liées à ces différentes caractérisations de la fonction  $f$ :

Tableau 3 - Types de tâches, techniques et technologies/théories associées

Types de tâches	Technique	Technologie/Théorie
T <sub>1</sub> : calculer la limite de $f$ en $a$ sachant que $f$ est continue en $a$	Substitution	Propriété des fonctions continues, calcul littéral.
T <sub>2</sub> ' : montrer que $\ell$ est la limite de $f$ en $a$ .	Utilisation de la définition formelle de la limite, majoration et minoration  $\tau 1$ : substitution comparaison (si $f$ est définie par morceaux) ;  $\tau 2$ : factorisation simplification substitution (si on a $\frac{0}{0}$ avec $f$ est une fonction rationnelle) ;	Définition formelle, comparaison des fonctions, ordre dans $\mathbb{R}$
T <sub>3</sub> : calculer la limite de $f$ en $a$ sachant que $f$ n'est pas continue en $a$	$\tau 3$ : rationalisation factorisation simplification substitution ( $\frac{0}{0}$ avec $f$ est une fonction irrationnelle) ;  $\tau 4$ : changement de variable réduction substitution.	Définition de la limite, propriétés de fonctions continues et calcul littéral.
T <sub>4</sub> ' : montrer que $\ell$ n'est pas la limite de $f$ en $a$	La négation de la définition formelle de la limite (on montre l'existence d'un epsilon tel que pour tout delta positif l'implication est fausse)	La logique formelle, ordre dans $\mathbb{R}$ , la topologie faible de $\mathbb{R}$
T <sub>5</sub> : déterminer la condition suffisante pour que $ f(x) - \ell  < \varepsilon$ .	Transformer l'inéquation d'inconnue $f(x) :  f(x) - \ell  < \varepsilon$ en une inéquation d'inconnue $x :  x - a  < \delta$ telle que delta est une fonction d'epsilon	Propriétés de la valeur absolue, inéquation dans $\mathbb{R}$
T <sub>6</sub> : démontrer que $f$ admet une limite infinie en $a$	Application de la définition formelle de la limite. On transforme l'inéquation $ f(x) - \ell  < \varepsilon$ en une inéquation d'inconnue $x :  x - a  < \delta$ telle que delta est une fonction d'epsilon	Définition de la limite et l'ordre dans $\mathbb{R}$ .
T <sub>7</sub> : démontrer que si $\ell$ est la limite de $f$ en $a$ et $\ell'$ celle de $g$ en $a$ alors $\ell + \ell'$ est la limite de $f+g$ en $a$	Définition formelle de la limite : on choisit epsilon tel que .....	Définition de la limite et l'ordre dans $\mathbb{R}$ . Propriétés de la valeur absolue, le corps des réels et ses propriétés
T <sub>8</sub> : démontrer que si $\ell$ est la limite de $f$ en $a$ et $\ell'$ celle de $g$ en $a$ alors $\ell \cdot \ell'$ est la limite de $f \times g$ en $a$	Application de la définition formelle de la limite	Définition de la limite et l'ordre dans $\mathbb{R}$
T <sub>9</sub> : démontrer que si $\ell$ est la limite de $f$ en $a$ et $\ell' \neq 0$ celle de $g$ en $a$ alors $\frac{\ell}{\ell'}$ est la limite de $\frac{f}{g}$ en $a$ .	Application de la définition formelle de la limite	Définition de la limite et l'ordre dans $\mathbb{R}$

Source : Construction de l'auteur

Nous présentons dans le tableau 3, les types de tâches mettant en jeu les représentations graphiques et le cas où la valeur de  $a$  est l'infini.

Tableau 4 - Types de tâches mettant en jeu les représentations graphiques et le cas où la valeur de  $a$  est l'infini

Types de tâches	Technique	Technologie/Théorie
	<b>Représentation graphique</b>	
$T_{10}$ : conjecturer la limite de $f$ définie par sa représentation graphique quand $x$ tend vers $a$	Lecture graphique, détermination graphique l'image réciproque d'un intervalle. Montrer que l'image réciproque de tout intervalle de centre $\ell$ et de rayon $\varepsilon$ est un intervalle de centre $a$ éventuellement privé de $\{a\}$	Projection orthogonale, géométrie plane. Si $a$ est infini
	<b>Si <math>a</math> est infini</b>	
$T_{11}$ : montrer que $\ell$ est la limite de $f$ en infini	Application de la définition formelle de la limite : Pour cela, considérer un réel $\varepsilon$ strictement positif. Écrire que $ f(x) - \ell  < \varepsilon$ et travailler cette inéquation de façon à obtenir un encadrement de $x - a$ ; en déduire que l'on peut prendre pour valeur de delta le maximum des valeurs absolues des bornes de l'encadrement de $x - a$ obtenu. Puis considérer que delta est le maximum des valeurs absolues des bornes de l'encadrement de $x - a$ obtenu précédemment. Et montrer qu'alors $ f(x) - \ell  < \varepsilon$ .	Définition formelle et ordre dans $\mathbb{R}$ , corps des réels et ses propriétés
$T_{12}$ : démontrer $f$ admet une limite infinie en infini	Application de la définition formelle de la limite	Définition de la limite et l'ordre dans $\mathbb{R}$

Source : Construction de l'auteur

On peut regrouper les types de tâches suivant la technique qui permet de les réaliser. Dans ce cas nous aurons les regroupements suivants :

Par rapport aux techniques qui mettent en jeu la substitution, la factorisation, la simplification substitution, la rationalisation et/ou le changement de variable, nous avons les types de tâches  $T_1, T_2$ .

En ce qui concerne la technique qui s'appuie sur la définition formelle, nous retenons les types de tâches suivantes :  $T_1, T_2, T_4, T_5, T_6, T_7, T_9, T_{10}$ .



Les types de tâches  $T_3$  et  $T_8$  font appel respectivement aux techniques « transformer » et « lecture graphique ».

Dans le cas de  $f$  non continue en  $a$ , nous pouvons choisir  $f$  de telle sorte que la limite  $\ell$  soit sous l'une des formes indéterminées  $0/0$  ou  $0 \times \infty$

Exemple :

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \text{ et } a=2 ; f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \text{ et } a=1 ; f(x) = \begin{cases} -x-2, & x < 0 \\ 3-x, & x \geq 0 \end{cases} \text{ et } a=0 ; f(x) = \frac{x-2}{(2-x)^2} \text{ et } a=2.$$

Nous allons construire notre modèle didactique de référence en nous appuyant sur ce modèle épistémologique de référence, il nous servira d'instrument utile pour l'analyse de relations institutionnelles que constitue l'objet du chapitre suivant.

## CHAPITRE IV° - ANALYSE DES RELATIONS INSTITUTIONNELLES

Dans ce chapitre, nous allons faire l'analyse des programmes, des savoir-faire et des manuels du Lycée (niveaux 11<sup>ème</sup> et 12<sup>ème</sup>) et du début de l'université par rapport à la notion de limite au Mali.

### 1. Analyse des programmes et manuels

De 1960 à nos jours, nous n'avons pas encore vu un manuel du Lycée produit par les enseignants maliens et qui traitent intégralement le programme du Lycée ; néanmoins nous avons la collection IRMA et CIAM qui sont des manuels produits par des enseignants de la sous-région en collaboration avec l'Inde. Ces manuels traitent en partie le programme malien. Nous avons aussi des livres d'édition française. Le programme malien s'inspire beaucoup du programme français. Beaucoup d'enseignants combinent les collections IRMA et CIAM et les livres d'édition française pour préparer leur cours.

Le système éducatif malien a connu trois réformes. La première date de 1962, elle avait comme but fondamental :

- 1)-Un enseignement tout à la fois de masse et de qualité
- 2)-Un enseignement qui puisse fournir, avec une économie maximum de temps et d'argent, les cadres dont le pays a besoin pour ses divers plans de développements.
- 3)-Un enseignement dont le contenu sera basé non seulement sur nos valeurs spécifiquement africaines et maliennes, mais aussi sur les valeurs universelles
- 4)-Un enseignement qui décolonise les esprits

Cette réforme a examiné tour à tour tous les aspects de l'enseignement, à savoir sa structure, législation, programmes, horaires, examens, débouchés, cadres, personnel d'exécution et personnel de contrôle.

Les commissions qui ont travaillé sur la dernière réforme (2010-2011) ont plaidé pour la naissance de nouvelles filières, une approche par compétence et le regroupement des disciplines. Ainsi les nouvelles séries de l'enseignement secondaire général seront bâties autour de cinq axes appelés, domaines de compétences. Ce sont les "arts", le "développement de la personne », les "langues et communications", les "sciences, mathématiques et technologies" et les "sciences humaines". Ces nouvelles filières se déclinent en une 10<sup>ème</sup> commune, trois séries de 11<sup>ème</sup> (11<sup>ème</sup> lettres, 11<sup>ème</sup> sciences économiques et 11<sup>ème</sup> sciences) et six séries de terminales : Terminales langues-lettres (TLL), Terminales arts-lettres (TAL),

Terminales sciences sociales (TSS), Terminales sciences expérimentales (TSEXP), Terminales sciences exactes (TSE) et Terminales sciences économiques (TSECO). Estimant que la 10<sup>ème</sup> doit rester une classe d'acclimatation, la 11<sup>ème</sup> une classe d'exploration et la 12<sup>ème</sup> une classe d'accentuation.

Nous avons eu des difficultés pour avoir les programmes de 1960-1970. Nous nous appuyerons sur les anciens livres des années 1970 à 1991 pour analyser cette période. Pour les autres périodes, nous présenterons l'analyse des programmes, des manuels séparément.

Notre analyse va consister à présenter les praxéologies autour de la notion de limite dans les textes du programme et dans les manuels. Nous préciserons le(s) type(s) de définition privilégié(s), les choix de transposition didactique, le modèle épistémologique de référence et le modèle didactique de référence présents dans le programme, l'étude des manuels va nous permettre de préciser le modèle épistémologique dominant et le modèle didactique dominant et enfin construire notre MER et MDR. Cette analyse sera faite en fonction de nos questions de recherche : N'y a-t-elle pas une confusion entre l'étude de la limite et l'étude de la continuité en un point ? Quels savoirs/connaissances sont appris par les élèves suivant le MER et le MDR en jeu ? A partir de quel niveau la définition formelle doit être enseignée ? Quelles sont les connaissances qui font défaut chez les élèves pour faire fonctionner la définition formelle ?

Notre analyse s'appuie sur les travaux de Chevallard (1991, 1991-1992, 1995, 1997, 1999), Chevallard modélise par le quadruplet  $[T/\tau/\theta/\Theta]$  les actions humaines : Ces 4T vont permettre de rendre compte à la fois des mathématiques elles-mêmes et de leur enseignement et plus généralement de leur étude. Les 4T vont aussi permettre de décrire les OM de différents niveaux, ainsi que des OD mettant en œuvre différents moments. Ainsi les praxéologies sont un modèle fondamental qui permet d'appréhender les objets de savoirs, d'étudier leurs transformations, de rendre compte de ce qui se fait dans telle institution avec ces objets et rend explicite le modèle épistémologique de référence qui nourrit les analyses des phénomènes de transposition.

Nous nous appuyerons sur le modèle T4TEL<sup>17</sup> développé par Hamid Chaachoua et Annie Bessot (2019).

Ces auteurs inspirés par la notion de variables didactiques de Guy Brousseau, ont introduit la notion de variable pour formaliser et structurer des types de tâches, qui constitue

---

<sup>17</sup> T4TEL : *T4* renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et *TEL* pour Technology Enhanced Learning.

son objectif principal. S'appuyant sur Chevallard (1999), ils montrent qu'une praxéologie ponctuelle peut regrouper plusieurs techniques  $\tau_i$  pour un même type de tâches  $T$ . Une praxéologie ponctuelle peut donc donner lieu à plusieurs praxis  $[T, \tau_i]$ . Dans T4TEL, pour des raisons de calculabilité, ils définissent pour chaque technique accomplissant un même type de tâches  $T$  une *praxéologie ponctuelle élémentaire* : il y a autant de *praxéologies ponctuelles élémentaires* que de techniques accomplissant un unique type de tâches  $T$ . Les praxéologies ponctuelles élémentaires permettent de « remonter » par regroupement autour de  $T$  aux praxéologies ponctuelles au sens de la TAD. Pour ces auteurs, la porte d'entrée de ce modèle est constituée des exercices, parce que c'est à partir de l'analyse des types de tâches que l'on va mettre en évidence le modèle épistémologique dominant et le modèle épistémologique de référence, questionner le MED et analyser sa congruence avec le MER. Ce modèle est un outil très important dans l'analyse des manuels.

### **Définition de type de tâches et de sous-types de tâches dans T4TEL**

Les auteurs font la remarque suivante pour une institution d'enseignement donnée. On ne considèrera que les types de tâches mis à l'étude possédant au moins une technique avant de définir les termes type de tâches et sous-type de tâches. Parce que selon eux, la porte d'entrée ce sont les types de tâches. A partir des types de tâches, on s'aperçoit de la présence ou non des valeurs des variables didactiques pertinentes.

Un *type de tâches*  $T$  est un ensemble de tâches tels que :

- toute tâche est décrite par un verbe d'action donné et des compléments fixés, pris dans les objets d'une discipline ; il existe au moins une technique  $t$  qui accomplit au moins une tâche de  $T$  tel que soit la portée de la technique  $P(t)$  est un sous-ensemble de  $T$ , soit  $T$  est un sous-ensemble de  $P(t)$ .
- On dit que  $T'$  est un *sous-type de tâches* du type de tâches  $T$  si
  - $T'$  est un sous-ensemble de  $T$
  - $T'$  est un type de tâches.

Dans T4TEL, une technique  $\tau$  est décrite par un ensemble de types de tâches  $\{(T_i)_i\}$  qui peuvent être de deux sortes :

- d'une part, les types de tâches qui n'existent qu'à travers la mise en œuvre des techniques de certains autres types de tâches, appelés *types de tâches intrinsèques* ;

- d'autre part, les types de tâches qui peuvent être prescrits institutionnellement aux élèves, qualifiés de *types de tâches extrinsèques*.

*Afin de prendre en compte ces relations et de les rendre calculables, les auteurs introduisent les notions de variables et de générateur de type de tâches.*

Un *générateur* de type de tâches est défini par un type de tâches et un *système de variables*. C'est un nouvel objet qui permet de structurer un ensemble de types de tâches pour les besoins d'une recherche.

Les auteurs parlent de système de variables pour désigner une liste de variables avec des valeurs qu'elles peuvent prendre. Pour illustrer, ils donnent un exemple, le type de tâches  $T$  « Calculer la somme de deux nombres » définit un générateur de type de tâche GT : [Calculer la somme de deux nombres ; V1, V2, V3] où V1 : nature des nombres (entiers naturels, entiers relatifs, décimaux) ; V2 : taille du premier nombre si entier (nombre de chiffres) et V3 : taille du second nombre si entier (nombre de chiffres).

Les variables d'un générateur de type de tâches prennent des valeurs dans un domaine d'une discipline. Ces valeurs engendrent des types de tâches plus spécifiques que le type de tâches  $T$ .

Selon les auteurs, *une première fonction* d'une variable est donc de générer des sous-types de tâches en jouant sur les valeurs de cette variable : par exemple  $T_1$  « calculer la somme de deux entiers » ou  $T_2$  « calculer la somme d'un entier de taille 1 et d'un entier de taille 3 ».  $T_1$  et  $T_2$  sont des sous-types de tâches de  $T$ ,  $T_2$  étant lui-même un sous-type de tâches de  $T_1$ . Ces sous-types de tâches peuvent avoir des techniques spécifiques : par exemple, une technique économique de  $T_2$  consiste à permuter les deux nombres et à faire un sur-comptage, technique peu pertinente pour deux nombres de taille 2 et 3.

Ainsi, *une deuxième fonction* de la notion de variable est de permettre de caractériser les portées des techniques. Ces deux fonctions apparaissent comme particulièrement intéressantes pour conduire des analyses *a priori* (point de vue épistémologique et didactique) et calculer des parcours d'apprentissage à partir d'un jeu sur ces variables et leurs valeurs. En particulier, la construction d'un modèle praxéologique de référence pour un domaine mathématique (au sens de l'échelle de codétermination) inclut de fait pour les auteurs l'explicitation de variables et de ses valeurs possibles.

Ils portent une attention particulière aux valeurs des variables d'un générateur de type de tâches pour distinguer un triple point de vue sur les variables : épistémologique, institutionnel et didactique.

Du point de vue épistémologique, Chaachoua et Bessot (2019) définissent des variables d'un type de tâches au niveau même du modèle praxéologique de référence (MPR) : le découpage des valeurs d'une variable est tel que le changement d'une valeur modifie l'éventail des techniques possibles (donc le rapport à un objet de savoir) d'un type de tâches. Dans ce cas, ces auteurs parlent de variable épistémologique.

Du point de vue institutionnel, les auteurs affirment qu'en se plaçant dans une institution, les contraintes et les conditions définies par celle-ci vont restreindre non seulement le type de tâches, mais aussi des valeurs possibles d'une variable d'un type de tâches institutionnel. Par exemple, au cycle 1 du primaire, pour le type de tâches *T* « Calculer la somme de deux nombres », les nombres sont entiers (V1) et la taille des deux nombres est limité à 30 (V2 et V3).

Une variable et ses valeurs institutionnelles modélisent des conditions et des contraintes explicites ou implicites (relevant des niveaux de l'échelle de codétermination) sous lesquelles une praxéologie existe ou peut exister institutionnellement. Le découpage institutionnel en valeurs d'une variable peut ne pas avoir de pertinence épistémologique.

Du point de vue didactique, une variable *didactique* est une variable au sein d'une institution, *potentiellement* à la disposition du professeur. Une variable didactique dans une institution peut ne plus l'être dans une autre.

T4TEL va-nous permettre de mettre en évidence les genres de tâches, et à l'aide des variables de types de tâches nous pouvons rencontrer tous les types de tâches institutionnels avec leurs niveaux de granularités et aussi les techniques et leur portée. À l'aide de T4TEL nous allons mettre en évidence les types de tâches qui sont absents dans les institutions et dans les manuels.

Nous nous appuyerons aussi sur les travaux de Raymond Duval (1995) pour mettre en évidence les cadres et les registres qui sont en jeu dans les différents manuels des différentes périodes. Et enfin les travaux de (FARIAS, L.M.S, 2010) qui affirme que

...Il nous semble clair que les liens existant entre les domaines mathématiques, plus particulièrement entre les domaines numérique-algébrique et géométrique, occupent une place importante dans le processus de développement de la connaissance mathématique. .  
(FARIAS, L.M.S, 2010, p.40)

Pour la période 1961-1982, nous nous référons à l'analyse faite par Bernard Cornu (1983) dont nous avons fait dans le chapitre II de cette thèse.

## **1.1. Période 1970-91 :**

La période 1970-1991 a été marquée par l'introduction de l'institutionnalisation du choix pédagogique relatif à la rédaction des programmes de mathématiques selon des Objectifs Pédagogiques Opérationnels (O.P.O.). Cette présentation est perceptible sur l'extrait de programme de la 11<sup>ème</sup> Sciences Exactes à travers les savoir-faire (pp.3-4).

### **1.1.1. Programme de 1970 : ALEPH1 et ALEPH0**

Dans le programme de 1970, on retrouve la notion de limite dans le chapitre Fonction numérique d'une variable réelle avec les restrictions suivantes :

Continuité « en un point » d'une fonction. Limite d'une fonction (on se bornera aux définitions indispensables, illustrées d'exemples et de contre-exemples : à l'énoncé, sans démonstration, des théorèmes relatifs aux limites de somme, produit et quotient de fonctions).

Le manuel pose correctement le problème comme on peut le constater dans la figure

19

### 6.1.1 Position du problème.

Il est fréquent que deux grandeurs X et Y soient liées de telle façon que, si  $x$  et  $y$  désignent les mesures respectives de X et Y dans un certain système de référence, il existe une fonction  $f$  permettant, pour chaque valeur de  $x$ , de prévoir la valeur théorique  $y$  correspondante :

$$y = f(x).$$

Mais, dans la pratique, et compte tenu des imperfections des appareils de mesure et des erreurs inévitables de manipulation (sans compter qu'en outre, et à strictement parler, le fait de mesurer influence la valeur du phénomène mesuré), la valeur mesurée  $x_0$  n'est qu'une valeur approchée de la valeur exacte  $x$ .

Les techniques du calcul d'erreur permettent de déterminer une famille de réels positifs non nuls dont on choisit un élément  $\alpha$  suivant des critères assez flous ( $\alpha$  doit être le plus petit possible, et en même temps commode pour la suite des calculs), et tels que l'on puisse affirmer que la valeur exacte  $x$  appartient à l'intervalle  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ . Le nombre  $\alpha$  apparaît comme une majoration de la valeur absolue de l'erreur commise sur  $x$  en l'assimilant à la valeur mesurée  $x_0$ .

Du fait même que la valeur exacte  $x$  n'est pas connue, la valeur exacte  $y = f(x)$  est également inconnue. On ne connaît que  $x_0$ , donc  $y_0 = f(x_0)$ ; on sait en outre que  $x$  est élément d'un certain intervalle  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ .

Le problème est alors de savoir si la valeur  $y_0$  peut être rendue suffisamment proche de la valeur exacte  $y$  pour être utilisable à sa place. Autrement dit, étant donné une incertitude  $\varepsilon$  sur  $y$  (nécessitée par des considérations extérieures), et compte tenu de ce qu'on peut raisonnablement espérer agir sur la précision de la mesure de  $x$ , peut-on réduire l'incertitude  $\alpha$  sur  $x$  de façon que  $y$  soit connue avec la précision désirée?

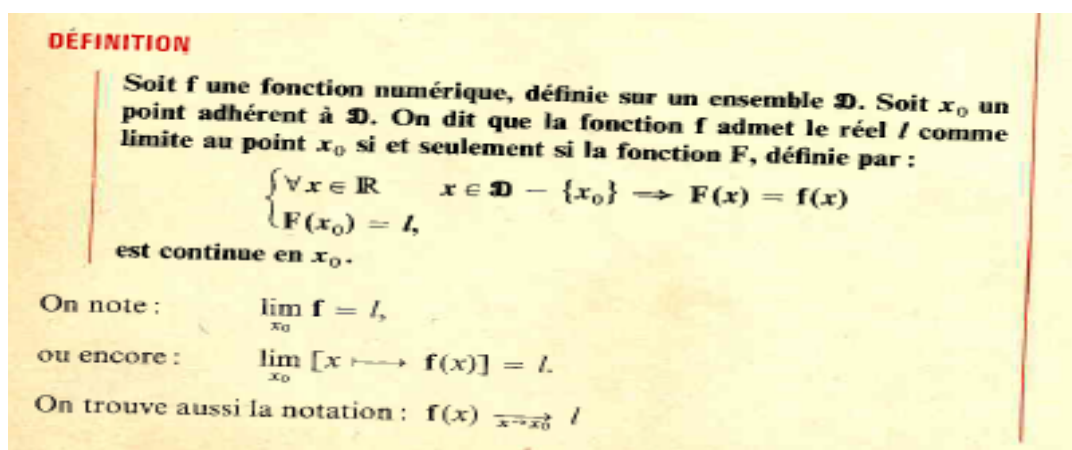
La réponse à cette préoccupation fréquente dépend en premier lieu des propriétés de la fonction  $f$  vis-à-vis de  $x_0$  et des « valeurs proches » de  $x_0$ . Une fonction  $f$  conviendra en  $x_0$  si, pour être « proche de  $y_0 = f(x_0)$  », il suffit d'être « proche de  $x_0$  ».

Source : ALEPH1 Analyse/Probabilité 1<sup>ère</sup> CDE (1972, p. 150)

On définit d'abord la continuité en un point, et la limite en un point apparaît comme un corollaire (voir figure 20). Il donne la définition et les propriétés de la notion de voisinage d'un point. S'appuyant sur les propriétés caractéristiques du voisinage, il donne la définition en epsilon delta de la continuité et la non-continuité en un point. Cette définition formelle est utilisée pour montrer la continuité de plusieurs types de fonctions (affines, affines par intervalles, rationnelle, et des fonctions circulaires, partie entière) et illustrer par des graphiques. Il y a une interaction entre les cadres géométrique et algébrique. Il n'y a pas d'interaction entre l'algébrique et le numérique, il n'y a pas non plus d'interaction entre le numérique et le graphique.



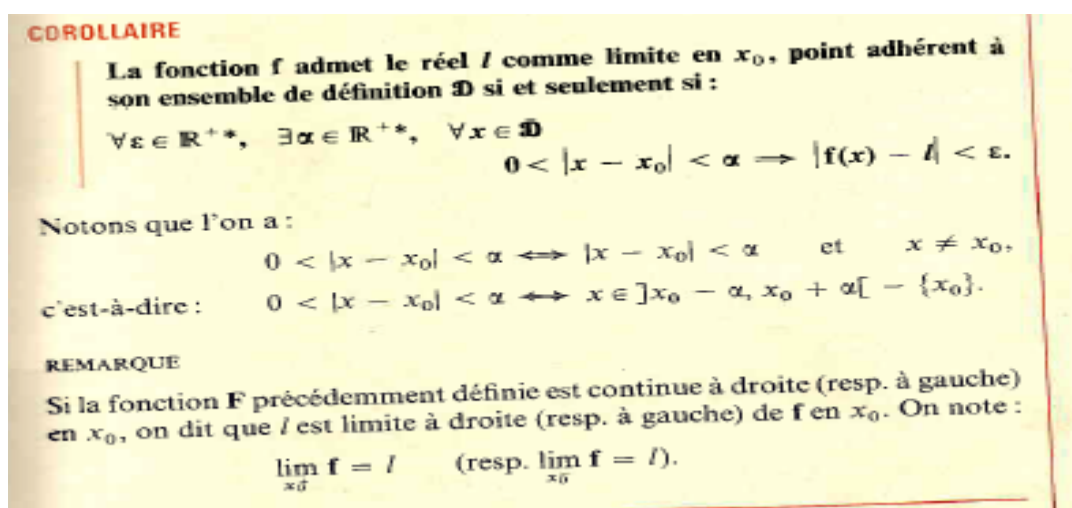
Figure 20 - Extrait du manuel Alpeph1 Analyse/probabilités 1<sup>ère</sup> CDE 1972



Source : ALEPH1 Analyse/probabilités 1<sup>ère</sup> CDE (1972, p. 172)

Et la définition en epsilon delta

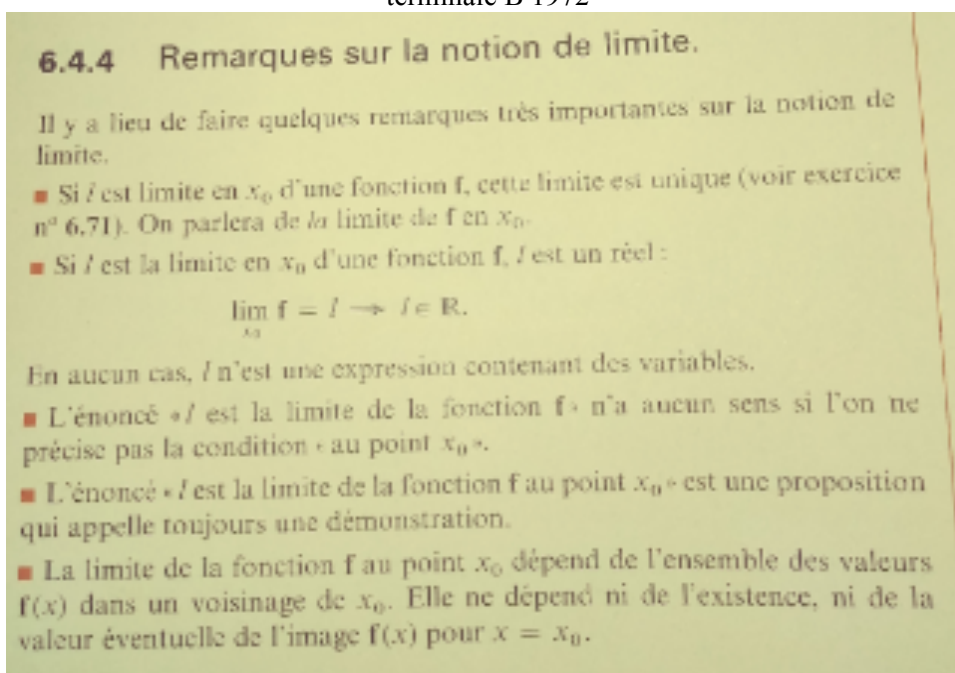
Figure 21 - Extrait du manuel Alpeph1 Analyse/probabilités 1<sup>ère</sup> CDE 1972



Source : ALEPH1 Analyse/probabilités 1<sup>ère</sup> CDE (1972, p. 173)

Ce manuel donne des définitions formelles et les fait fonctionner. Il n'y a pas de confusion entre la limite et la continuité. La limite est définie en epsilon delta, mais cette définition n'est pas utilisée pour montrer qu'un réel  $l$  est la limite d'une fonction en un point donné  $a$ . On y rencontre aussi des remarques pertinentes voir figure ci-dessous :

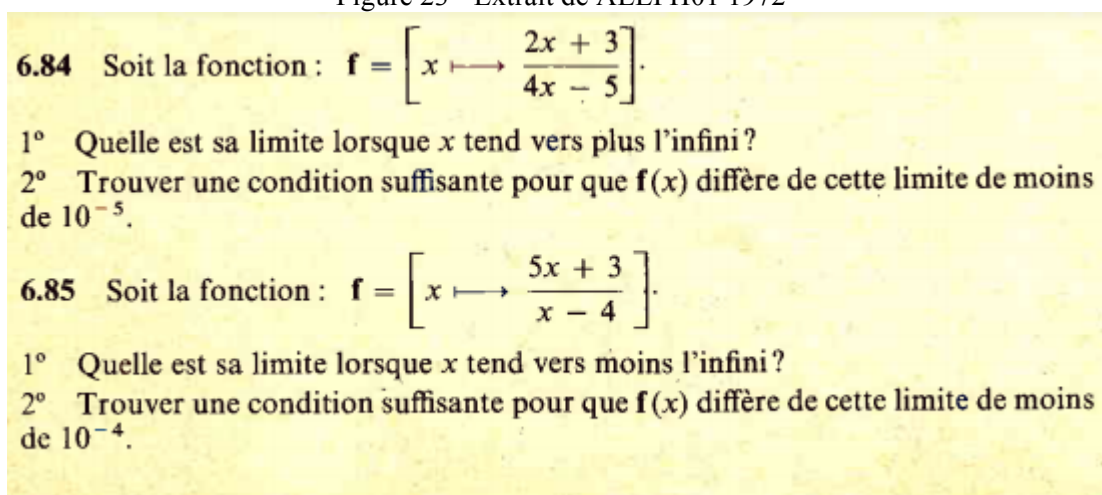
Figure 22 - Extrait du livre Alpeph 1 Analyse/probabilités 1<sup>ère</sup> CDE et fonctions/calcul intégral terminale B 1972



Source : ALEPH1 Analyse/probabilités 1<sup>ère</sup> CDE (1972, p. 174)

On y rencontre aussi la démonstration de l'unicité de la limite. Les exercices portent sur la condition suffisante et le calcul de limites.

Figure 23 - Extrait de ALEPH01 1972



Source : Aleph1 Analyse/probabilités 1<sup>ère</sup> CDE (1972, p. 192)

Les types de tâches que nous avons identifiées sont : (T<sub>1</sub>) Déterminer la condition suffisante pour que  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ , (T<sub>2</sub>) Démontrer que  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $a$  ( $a$  fini ou non,  $\ell$  fini ou non) et (T<sub>3</sub>) Calculer la limite de  $f$  en  $a$  ( $a$  fini ou infini).

Les techniques mises pour résoudre ces tâches sont : application des règles de calcul sur les limites, résolution des inéquations avec valeur absolue (on travaille l'expression

$|f(x) - \ell| < \varepsilon$  pour avoir l'expression  $|x - a| < \sigma$ ), Factorisation et simplification, rationalisation et simplification. Ces techniques s'appuient sur le complexe Technologique-théorique suivant : ordre et inéquations dans  $\mathbb{R}$ , calcul infinitésimal, la définition formelle de la limite, le corps des nombres réels et ses propriétés.

### Caractérisation des types de tâches :

La tâche  $T_1$  est du genre « déterminer la condition suffisante pour que  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  ». Les variables sont :  $V_1$  : la nature de la fonction,  $V_2$  : la représentation de la fonction  $f$ ,  $V_3$  : la limite  $\ell$ . La valeur de  $V_1$  choisie :  $f$  est une fonction rationnelle, celle de  $V_2$  est «  $f$  est définie par son expression explicite algébrique », et la valeur de  $V_3$  est «  $\ell$  est un nombre réel fini ». Dans le cadre de la tâche  $T_1$ , la technique consiste à choisir un  $\varepsilon > 0$ , transformer l'inéquation  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  en une inéquation de la forme  $x > M$  avec  $M = f(\varepsilon) > 0$ , on choisit  $M$  tel que qu'il soit un entier plus grand que  $E(f(\varepsilon)) + 1$ . Cette technique s'appuie sur (technologie) la décomposition d'une fonction en éléments simples, la définition formelle de la limite en l'infini et les propriétés de la valeur absolue. La topologie de  $\mathbb{R}$ , le corps des réels et ses propriétés, et l'axiome de choix permettent de justifier cette technique.

La tâche  $T_2$  est du genre « démontrer que  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $a$  ». Les variables choisies en rapport avec cette tâche sont : ( $V_1$ ) la nature de la fonction  $f$ , ( $V_2$ ) la représentation de la fonction  $f$ , ( $V_3$ ) la limite  $\ell$  et ( $V_4$ ) le point où l'on calcule la limite  $a$ . Les valeurs attribuées à ces variables sont respectivement :  $f$  est une fonction rationnelle,  $f$  est définie par son expression explicite algébrique,  $\ell$  est un nombre réel fini et «  $a$  est infini ». Pour résoudre cette tâche, on choisit un epsilon strictement positif et on écrit  $|f(x) - l| < \varepsilon$ , on le développe et éventuellement le simplifie. On travaille l'expression  $|f(x) - l| < \varepsilon$  de façon à trouver une inéquation du type  $|x - a| < \delta$  où  $\delta = f(\varepsilon) > 0$ .

La tâche  $T_3$  est du genre « calculer la limite d'une fonction en infini ». Le système de variables est constitué par la nature de la fonction  $f$ , et  $a$ . Dans ce cas, nous identifions trois valeurs respectivement pour les variables  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  : « La fonction  $f$  en jeu est une fonction rationnelle », «  $f$  est définie par son expression algébrique explicite » et «  $a$  est infini ».

Parmi les tâches que nous avons identifiées, il n'y a pas de cas où  $a$  est un nombre réel fini. Nous n'avons pas non plus de cas où  $f$  est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2. Ces exemples ne permettent pas de mettre en exergue tous les aspects de la

définition formelle. Il y a des variables épistémologiques qui ont été écartées. L'organisation mathématique sous-jacente ici est la topologie des limites.

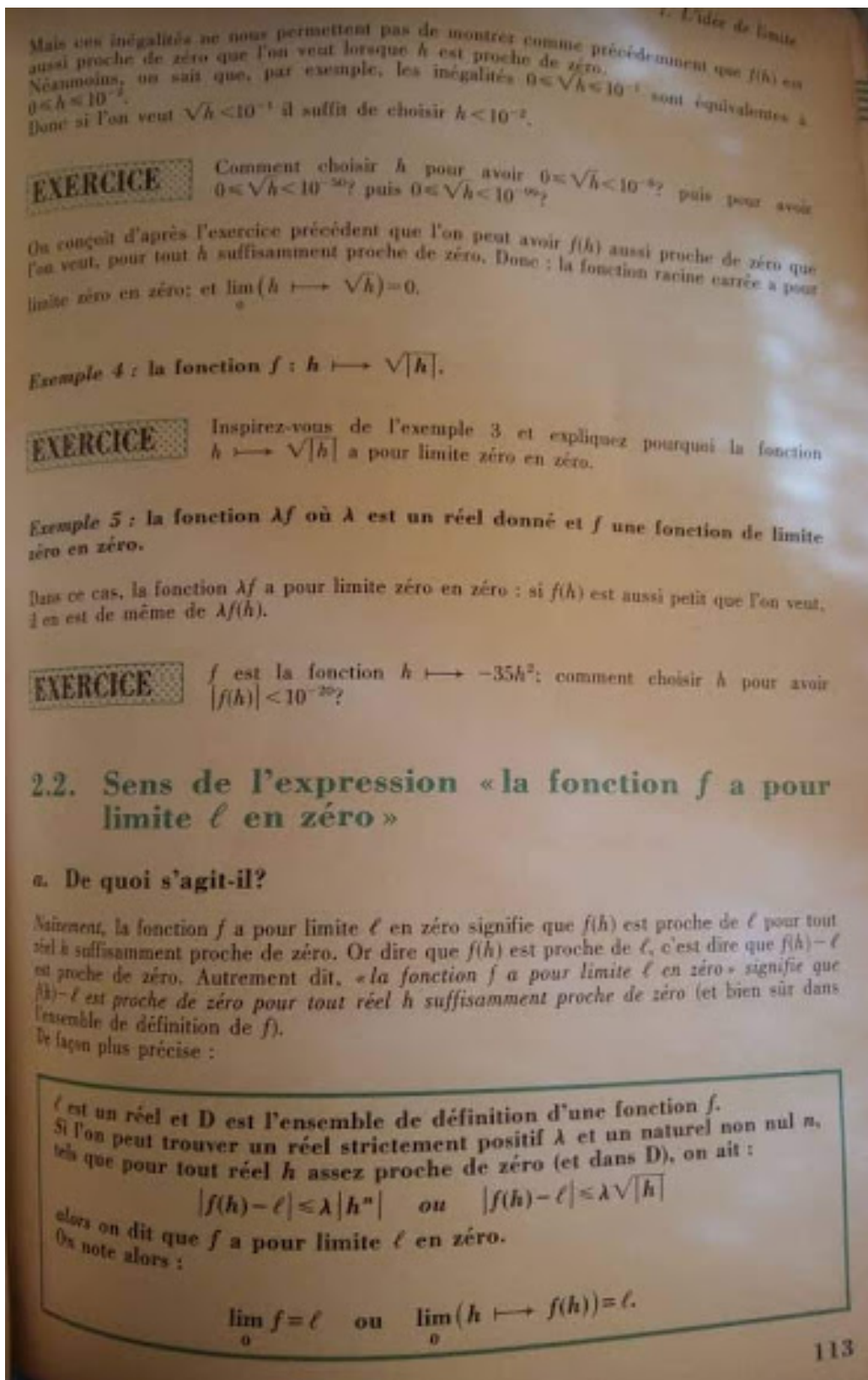
**1.1.2. Les manuels 1986, manuel français 1<sup>ère</sup> scientifiques collection  
TRANSMATH mathématiques tome 1 : analyse programme  
1986.**

Dans ce manuel la limite est étudiée au 7<sup>e</sup> chapitre. Ce manuel précise que dans le langage courant le mot limite a de multiples significations, le sens mathématique est bien particulier et il est préférable, au début, d'éviter des rapprochements avec les sens usuels. Il explique à travers des exemples, la signification de l'expression « la fonction a pour limite  $\ell$  au point 0 » ; et l'auteur du manuel affirme que « nous nous en tiendrons là, évitant l'étude de limite d'une fonction... » (Collection TRANSMATH mathématiques tome 1 : analyse, 1986, p. 111). Il se limite à l'étude des exemples.

Dans sa rubrique « pour prendre un bon départ » ce manuel étudie la valeur absolue et l'intervalle, la comparaison autour de zéro des fonctions puissances, puis dans la partie cours, il explique à l'aide d'exemples le sens de l'expression « la fonction a pour limite 0 au point 0 (ou en 0) ».

Le premier exemple porte sur la fonction carrée, où à l'aide des comparaisons de fonctions, il montre que la fonction carrée a pour limite 0 en 0, et il généralise avec la fonction  $x^n$  et la fonction racine carrée, enfin il donne la définition "précise" de « la fonction  $f$  a pour limite  $\ell$  au point 0 » comme on peut le constater dans la figure 24 :

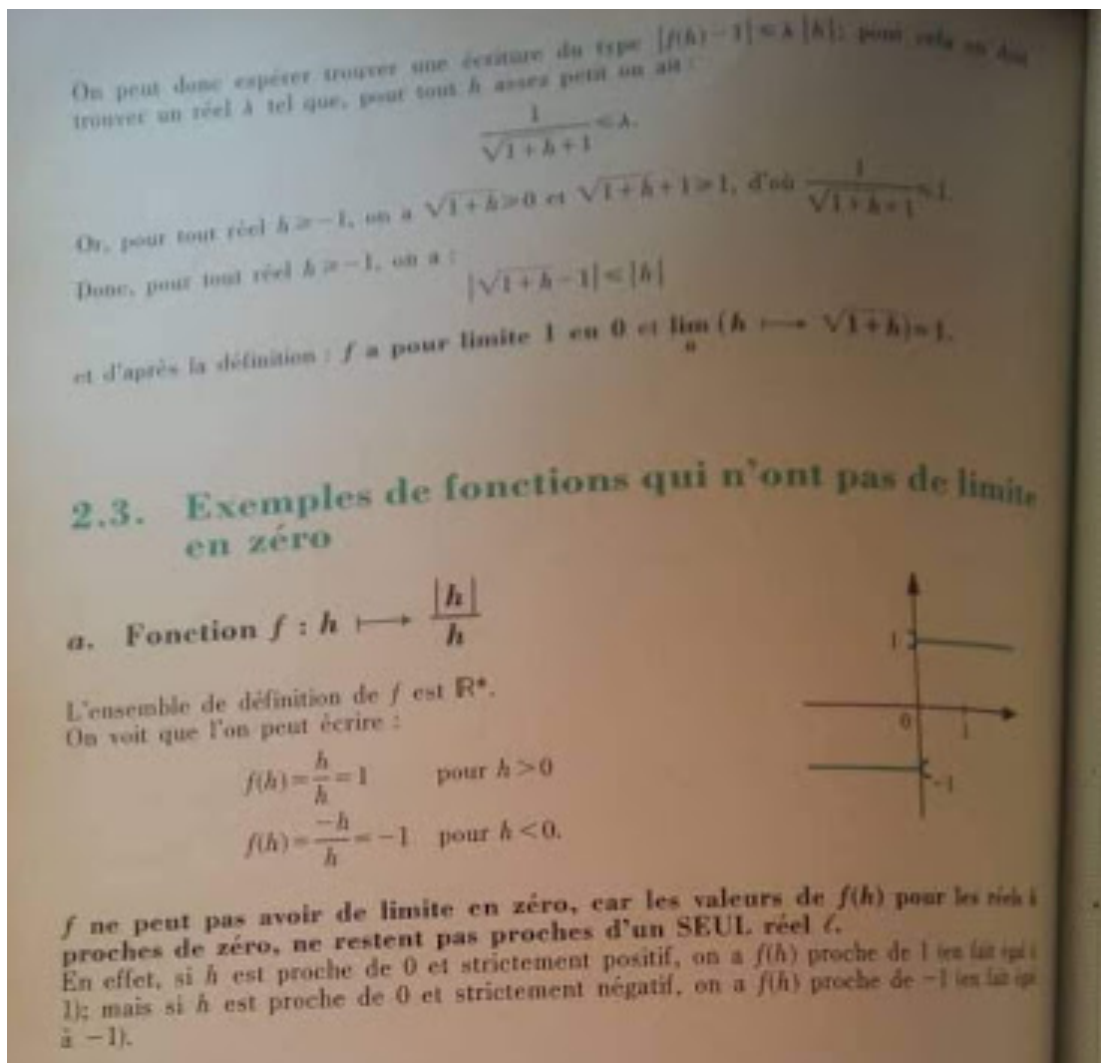
Figure 24 - Extrait du manuel collection Transmath 1ère S 1986



Source : Collection Transmath 1ère S (1986, p. 113)

Le manuel présente des exemples de fonctions qui ont une limite  $\ell$  en 0 et aussi des fonctions qui n'ont pas de limite en 0. Par exemple, voici le cas où la fonction n'admet pas de limite dans la figure 25

Figure 25 - Extrait du manuel Transmath 1ère S, 1971



Source : Collection Transmath 1ère S (1986, p. 116)

L'analyse de ce manuel nous a permis d'identifier les types tâches suivantes :

1. Type de tâches 1 : Étudier la limite en 0 de la fonction proposée (si cela n'est pas possible expliquer pourquoi).

Ce type de tâches est du genre étudier la limite en 0 d'une fonction. Les tâches liées à ce type de tâches mettent en jeu, généralement, la fonction comme combinaison de fonctions de références et représentés par une expression algébrique explicite. La technique pour résoudre ces tâches consiste à comparer la fonction  $f$  à une des fonctions de références de limite 0 en 0. Cette technique s'appuie sur la technologie suivante : Pour tout  $\alpha > 0$ ,  $|f(x)| < \alpha \mathcal{R}(x)$  où  $\mathcal{R}(x)$  est une fonction de référence de limite 0 en 0, alors  $f(x)$  a pour limite 0 en

0. Cette technologie a pour fondement le corps des nombres réels et ses propriétés, les opérations sur les fonctions de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Type de tâche 2 : Calculer la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $a$ .

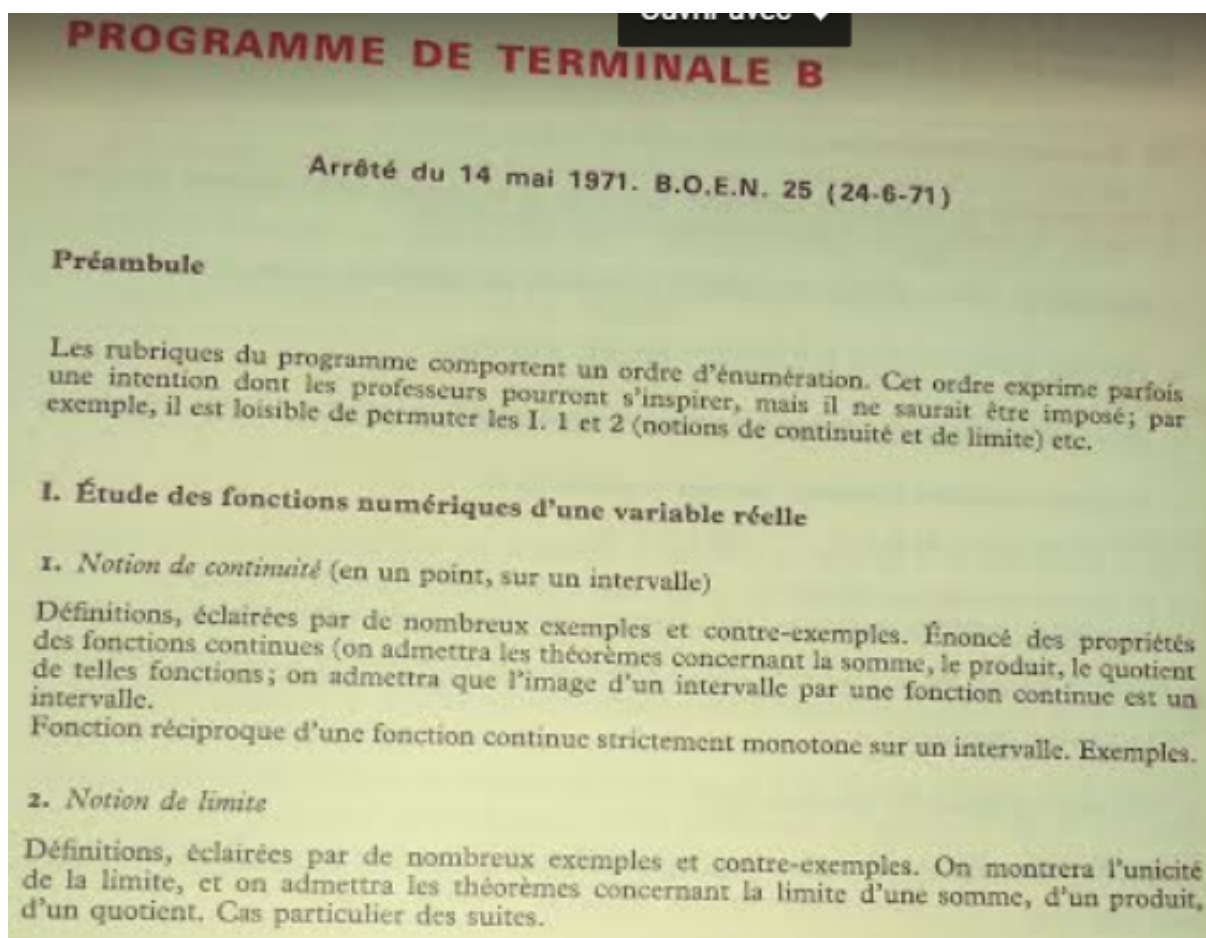
Ce type de tâches est du genre calculer la limite de  $f$  en  $\theta$ . Les tâches en rapport avec ce type de tâche, mettent en jeu généralement, aussi la fonction  $f$  comme combinaison de fonctions de références et est définie par sa représentation algébrique explicite. La comparaison autour de zéro des fonctions puissances sert, en général, comme technique pour résoudre ces tâches. Comme dans le type de tâche 1, cette technique a aussi pour complexe technologique-théorique le corps des nombres réels et ses propriétés, majoration, minoration comparaison des fonctions et la structure des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Ce manuel traite le concept de limite conformément au programme, mais il ne met pas en interaction les cadres géométrique et numérique, ni les cadres géométrique et algébrique. Son approche est principalement basée sur le registre algébrique et n'utilise pas la définition formelle en epsilon – delta. Il essaye de donner une signification de  $\varepsilon$  ; en revanche, il ne dit rien sur  $\delta$  qui est à rechercher. Cette perspective est une transposition qui met en exergue l'aspect dynamique de la notion de limite. Elle ne correspond pas à la définition formelle. L'organisation mathématique sous-jacente est l'algèbre des limites.

### 1.1.3. Analyse du manuel Collection QUEYSANE- REVUZ Mathématique Terminale B (1981)

Le programme français (Figure 26) est différent du programme malien de 1974, car dans ce programme on doit définir les notions et les illustrer par des exemples et contre exemples. On doit aussi montrer l'unicité de la limite. Il précise aussi qu'il est loisible de permuter les notions de limite et de continuité.

Figure 26 - Extrait du manuel Collection Queysane- Revuz terminale B 1981



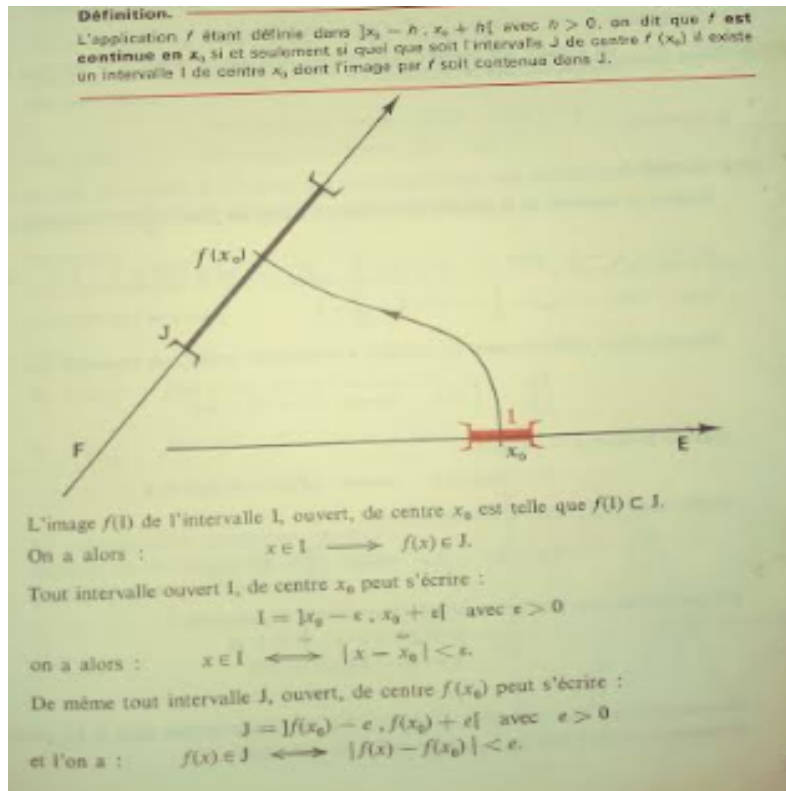
Source : Collection QUEYSANE- REVUZ Mathématique terminale B (1981, p.3)

Dans ce manuel, on étudie la continuité avant la notion de limite, la définition de la continuité est une définition topologique. L'auteur affirme (Figure 27) que

L'application  $f$  étant définie dans  $]x_0-h ; x_0+h[$  avec  $h>0$ , on dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si quel que soit l'intervalle  $J$  de centre  $f(x_0)$  il existe un intervalle  $I$  de centre  $x_0$  dont l'image par  $f$  soit contenue dans  $J$ . (Collection QUEYSANNE – REVUZ terminale B, 1981, p. 15).



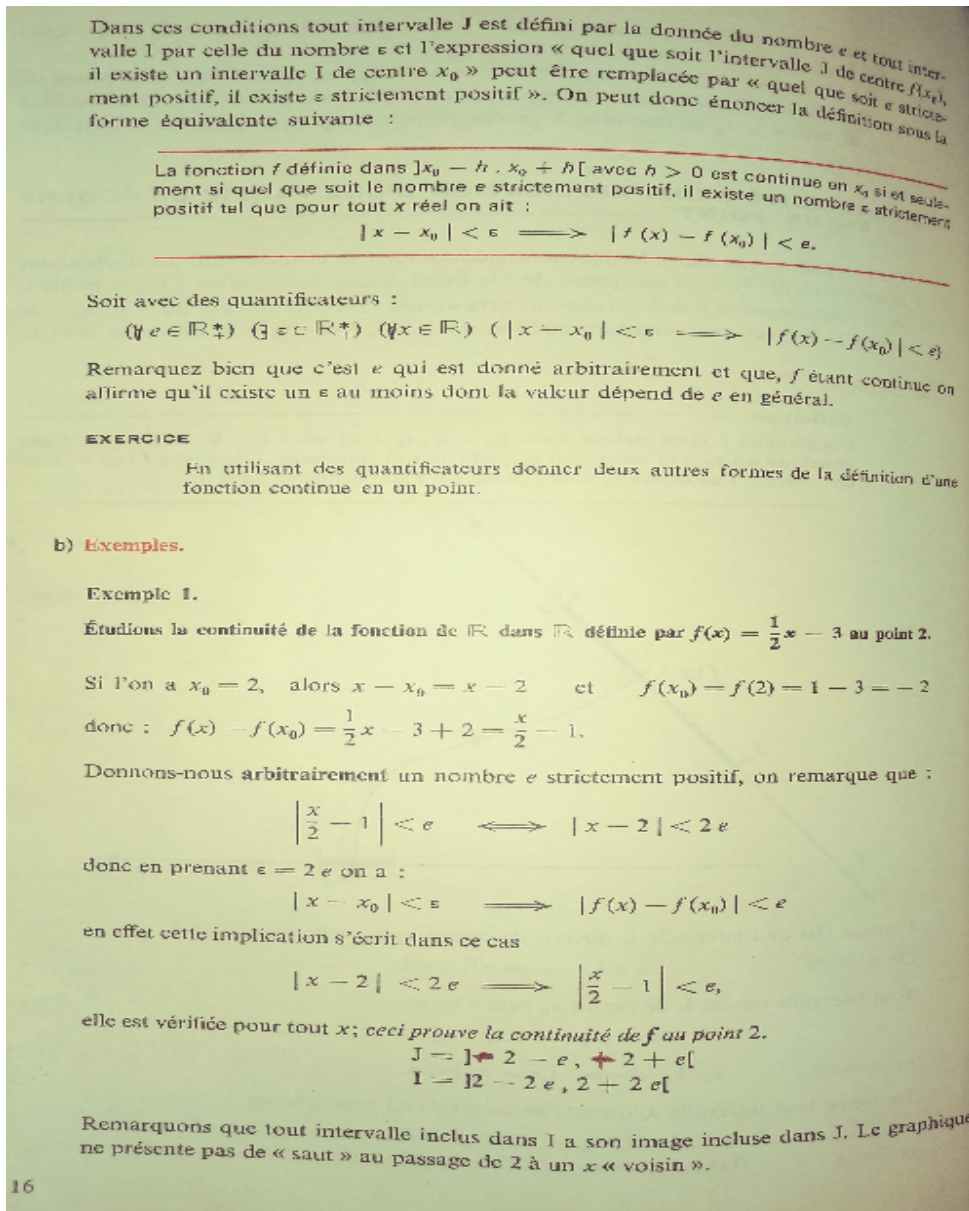
Figure 27 - Extrait du manuel Collection Queysane- Revuz terminale B 1981



Source : Collection Gueysanne – Revuz terminale B (1981, p. 15)

Cette figure (Figure 27) nous donne l'impression que l'on va toujours de  $x$  à  $f(x)$  ; alors qu'en pratique on va de  $f(x)$  à  $x$ , et souvent nous avons une dialectique entre les deux. De plus, on n'a pas de repère ici. Cette illustration est trompeuse. Elle met en exergue que l'aspect covariant de la notion de limite.

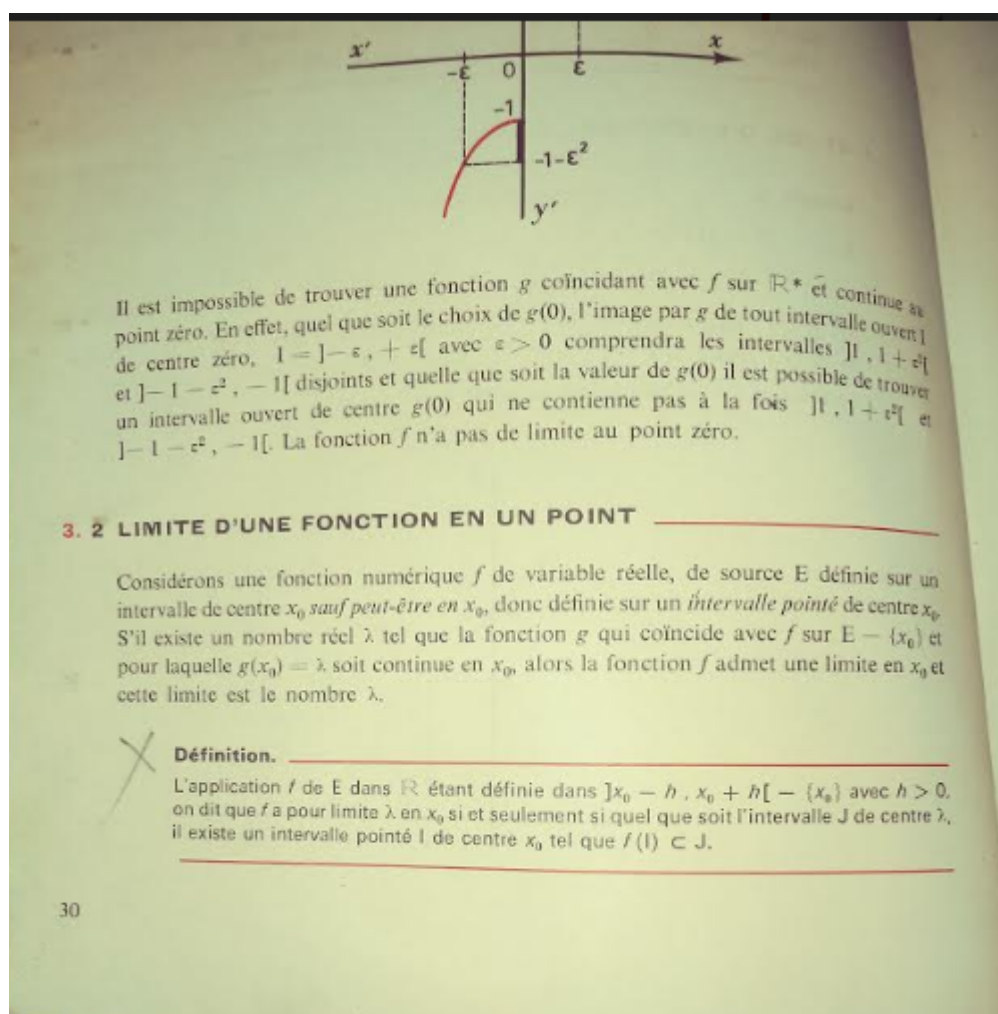
Figure 28 - Extrait du manuel Collection Queysane- Revuz terminale B 1981



Source : Collection Gueysanne – Revuz (1981, p. 16)

La limite est définie à l'aide de la continuité, puis avec epsilon et delta. Il démontre l'unicité de la limite, définit la limite à gauche et à droite et les opérations sur les limites (Figure 28).

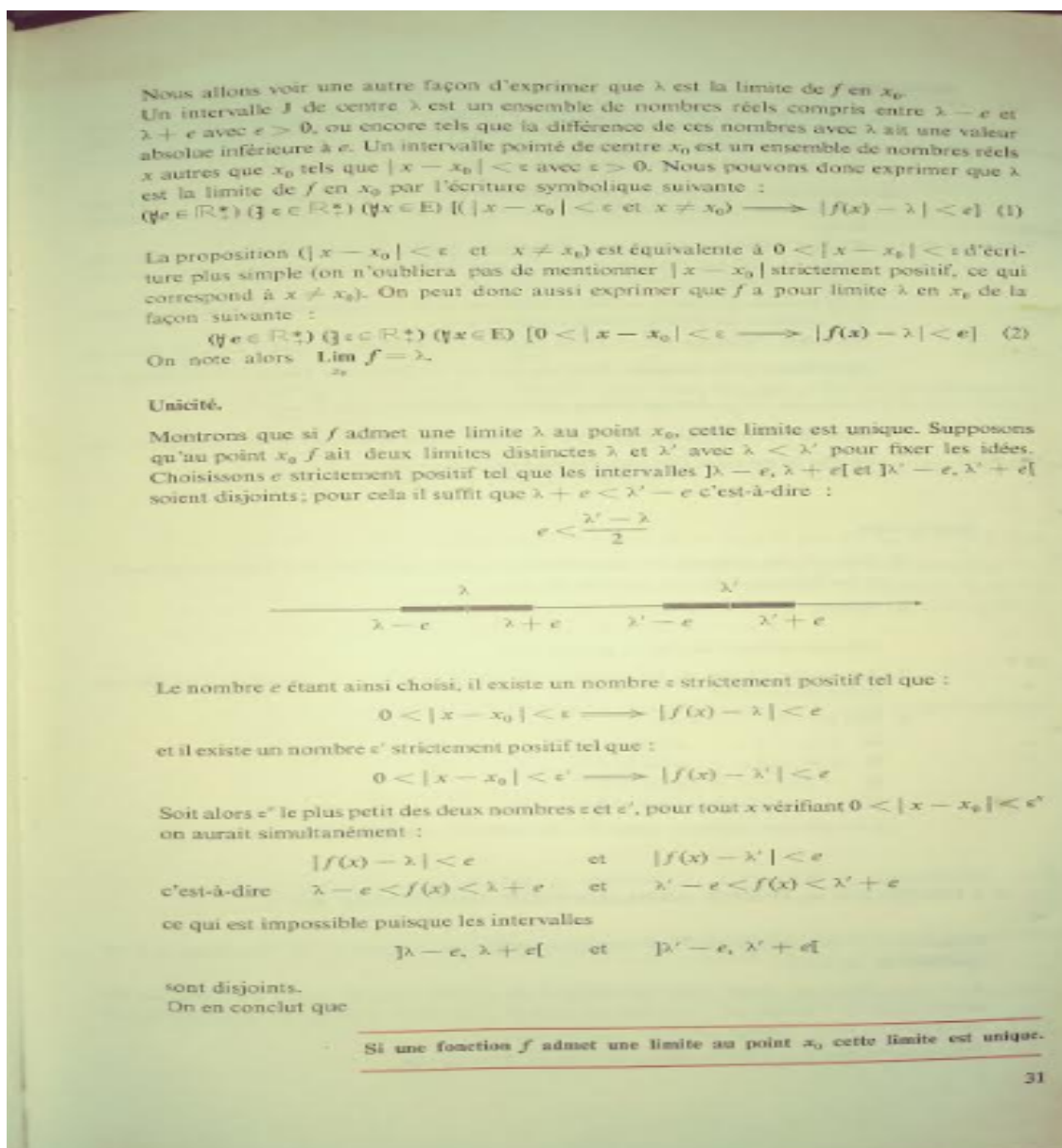
Figure 29 - Extrait du manuel Collection Queysane- Revuz terminale B 1974



Source : Collection Gueysanne – Revuz terminale B (1981, p. 30)

La limite apparaît (Figure 29) ici comme un corollaire de la continuité, alors que c'est la continuité qui est un cas particulier de limite. C'est la définition topologique qui est donnée, cela prouve qu'il y a une interaction entre les cadres géométrique et algébrique.

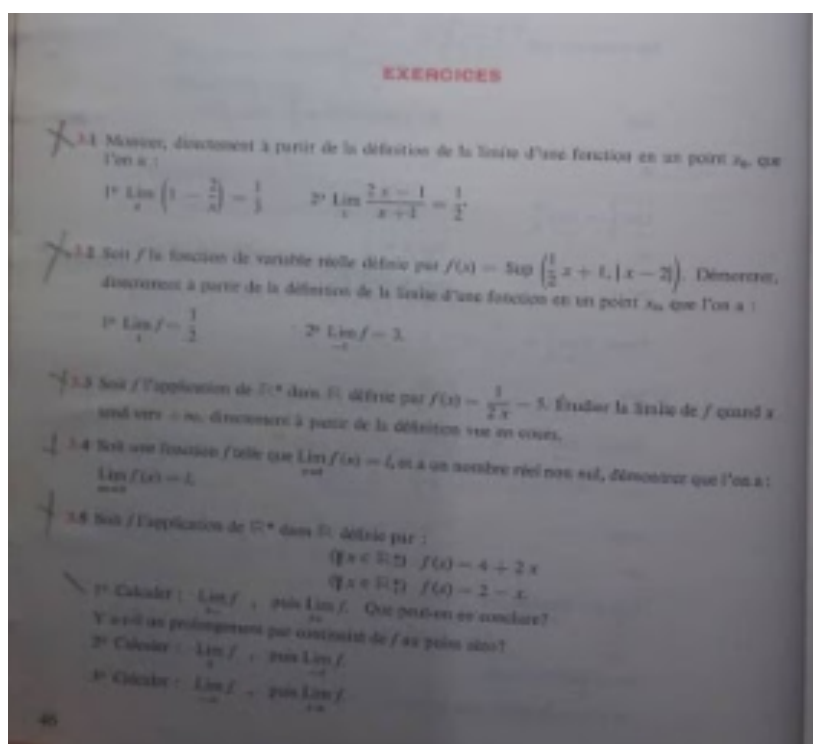
Figure 30 - Extrait du manuel Collection Queysane- Revuz terminale B 1981



Source : Gueysanne – Revuz terminale B (1981, p. 31)

Ce manuel donne des définitions formelles et propose des exemples pour leur application. Comme on peut le constater dans la figure 30.

Figure 31 extrait de collection Queysanne-Revuz terminale B 1981



Source : Collection Queysanne-Revuz terminale B (1981, p.46)

Cet manuel formalise la définition de la limite et propose des exercices pour son application. Ces exemples portent sur le cas où la fonction est défini en  $a$ .

Nous avons mis en évidence les types de tâches suivants : (T<sub>1</sub>) Démontrer que  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $a$  ( $a$  fini ou non et  $\ell$  fini ou non) et (T<sub>2</sub>) Calculer la limite de  $f$  en  $a$  ( $a$  fini ou non).

Le type de tâche (T<sub>1</sub>) est du genre « Démontrer que  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $a$  ». Les tâches liées à ce type de tâches mettent en jeu la fonction  $f$  comme combinaison de fonctions de références ;  $f$  est représentée par son expression algébrique explicite, le nombre  $a$  vers lequel la variable  $x$  tend est un réel fini adhérent à  $Df$  ou est infini et la limite est, en général, un nombre réel fini. Les tâches sont résolues en s'appuyant sur la technique suivante : on se donne un epsilon strictement positif, on travaille l'expression  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  pour avoir une expression de la forme  $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ , et on vérifie que  $\delta$  convient effectivement. les propriétés sur les limites. Ou bien on fixe  $\delta > 0$  à l'avance, et on se donne un epsilon strictement positif, on travaille l'expression  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  pour avoir une expression de la forme  $|x - a| < \delta(\varepsilon)$  on choisit  $\delta' = \min\{\delta, \delta(\varepsilon)\}$  et on montre que  $\delta'$  convient. Le complexe technologico-théorique que justifie cette technique est composé des éléments

suiuants : la définition formelle, la logique des prédicats, la topologie de  $\mathbb{R}$ ., le corps des réels et ses propriétés.

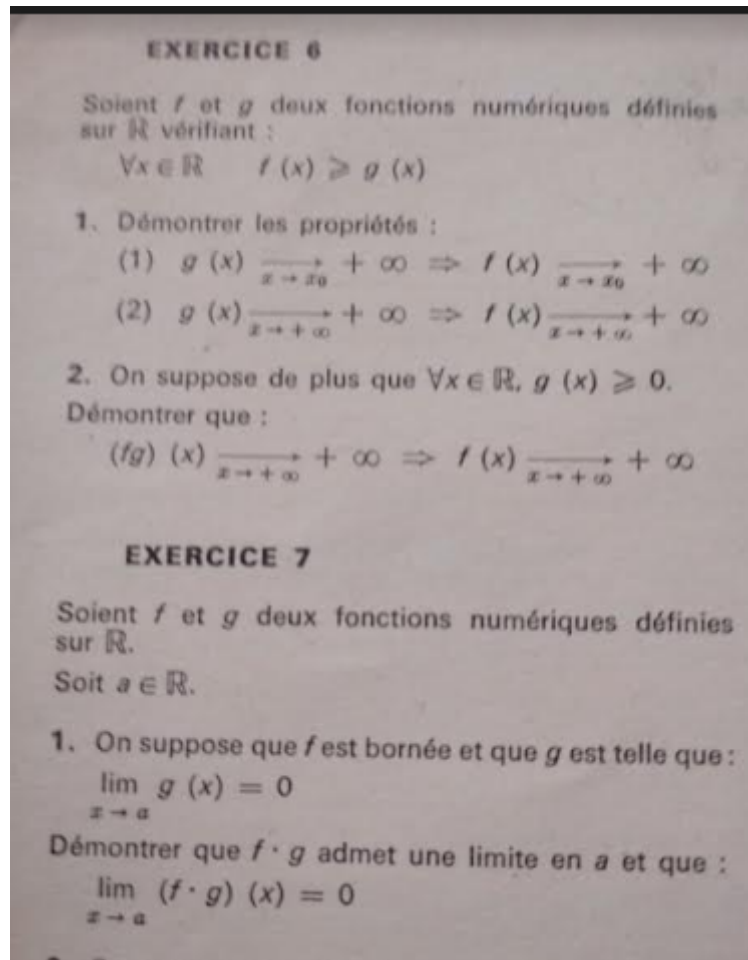
Le type de tâche  $T_2$  est du genre « Calculer la limite de  $f$  en  $a$  ( $a$  fini ou non) ». Les choix des différentes tâches de  $T_2$  mettent en jeu, comme dans le cas de  $T_1$ , la fonction  $f$  comme étant la combinaison de fonctions de références, le nombre  $a$  vers lequel la variable  $x$  tend est un réel fini adhérent à  $Df$  ou est infini et la limite est, en général, un nombre réel fini. Pour résoudre ces tâches, on identifie l'intervalle auquel appartient  $a$ , on remplace  $x$  par  $a$  dans l'expression de  $f$  si  $a$  est fini. Le complexe technologico-théorique que justifie cette technique est composé des éléments suivants : le corps des réels, les opérations sur les fonctions, la comparaison des fonctions. L'organisation mathématique sous-jacente est la topologie des limites.

#### **1.1.4. Manuel « problème de mathématiques avec leurs solutions terminales CDE tome 4 de 1975 »**

Ce manuel a un triple objectif : permettre l'assimilation de cours grâce à la présence de résumé concis et d'exercices qui en sont des applications immédiates, faire le tour des méthodes de résolutions attendant à chaque centre d'intérêt et éveiller la curiosité de l'élève en livrant à sa réflexion des sujets plus difficiles, dont l'approfondissement le dotera de bases solides pour affronter les études supérieures. La notion de limite est étudiée dans le 12<sup>ème</sup> chapitre de ce manuel, il utilise uniquement des définitions formelles des limites en  $\varepsilon, \eta$ , avec une remarque :  $f$  peut ne pas être définie en  $x_0$  il présente sans démonstration les opérations sur les limites, la définition formelle n'est pas construite, elle n'est pas non plus contextualisée. Dans ce manuel les formes indéterminées sont au nombre de trois  $\infty-\infty$ ,  $0 \times \infty$  et  $\frac{0}{0}$  les quatre autres formes indéterminées sont absentes. En fin du résumé il donne la définition formelle de la convergence d'une suite et quelques limites usuelles.

Il y a des exercices dont la résolution fait appel à la définition formelle de la limite ; mais on y rencontre aucun cas explicite de tâche dont la résolution fait appel à la définition formelle que  $l$  est la limite de  $f(x)$  en  $x_0$ . Cependant, le rôle et l'ordre des quantificateurs sont bien mis en relief dans la définition formelle.

Figure 32 extrait du manuel problèmes de mathématiques et leurs solutions terminale CDE 1975

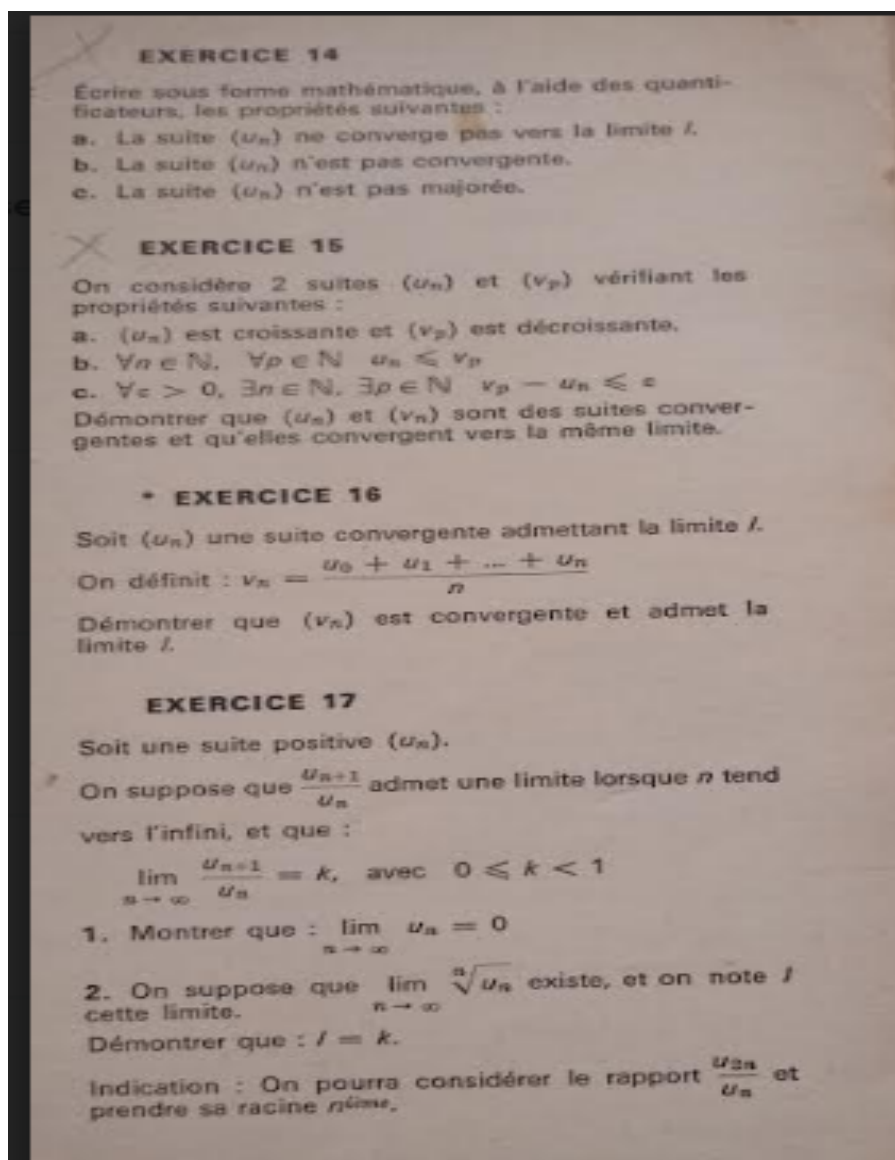


Source : Manuel problèmes de mathématiques et leurs solutions terminale CDE (1975, p.12)

Ces exercices (Figure 32) portent sur les propriétés telles que la limite et la comparaison, la limite et les opérations, le théorème des gendarmes.

Nous avons des exercices (Figure 33) sur la manipulation des expressions quantifiées (la négation d'une expression comportant un quantificateur universel et un quantificateur existentiel et leur ordre) et les propriétés sur les limites. Ils ne mettent pas en exergue l'aspect covariant et contravariant de la définition formelle.

Figure 33 extrait du manuel problème de mathématiques avec leurs solutions terminales CDE tome 4 de 1975



Source : Problème de mathématiques avec leurs solutions terminales CDE tome 4 de 1975, p. 13)

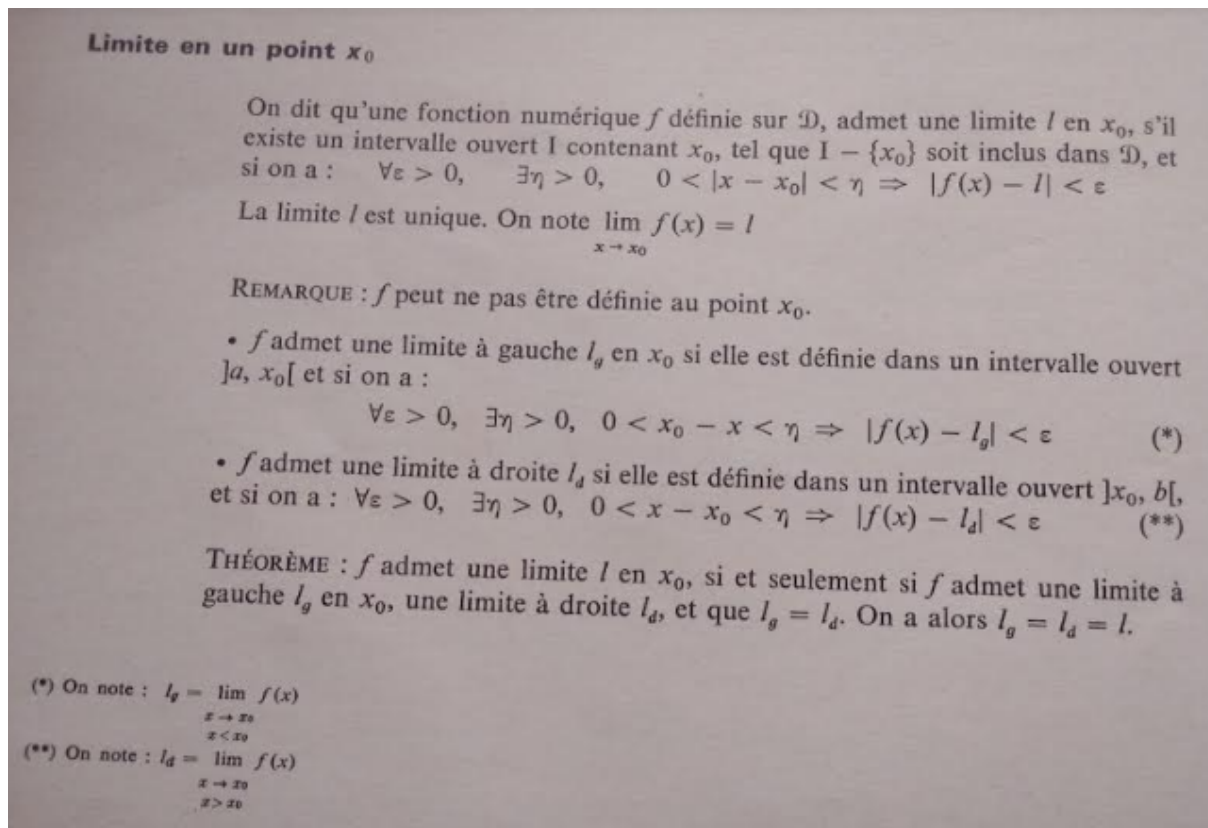
Nous avons identifié deux genre de tâches. (T<sub>1</sub>) « Démontrer les propriétés sur la limite et comparaison des fonctions » e (T<sub>2</sub>) T<sub>2</sub> « Écrire sous forme mathématique une proposition donnée en langue naturelle ».

Le genre de tâche T<sub>1</sub> met en jeu la définition formelle à la proposition donnée, le corps des réels et ses propriétés et la comparaison des fonctions. En revanche, en T<sub>2</sub>, la fonction est définie par une expression en langue naturelle et l'écriture de la négation d'une expression comportant à la fois un quantificateur universel et un quantificateur existentiel pour la résoudre. Ce qui met en jeu la compréhension de la signification des quantificateurs universel et existentiel et leur ordre dans une expression comportant plusieurs quantificateurs. Les définitions formelles sont données avec précision. Elles prennent toutes



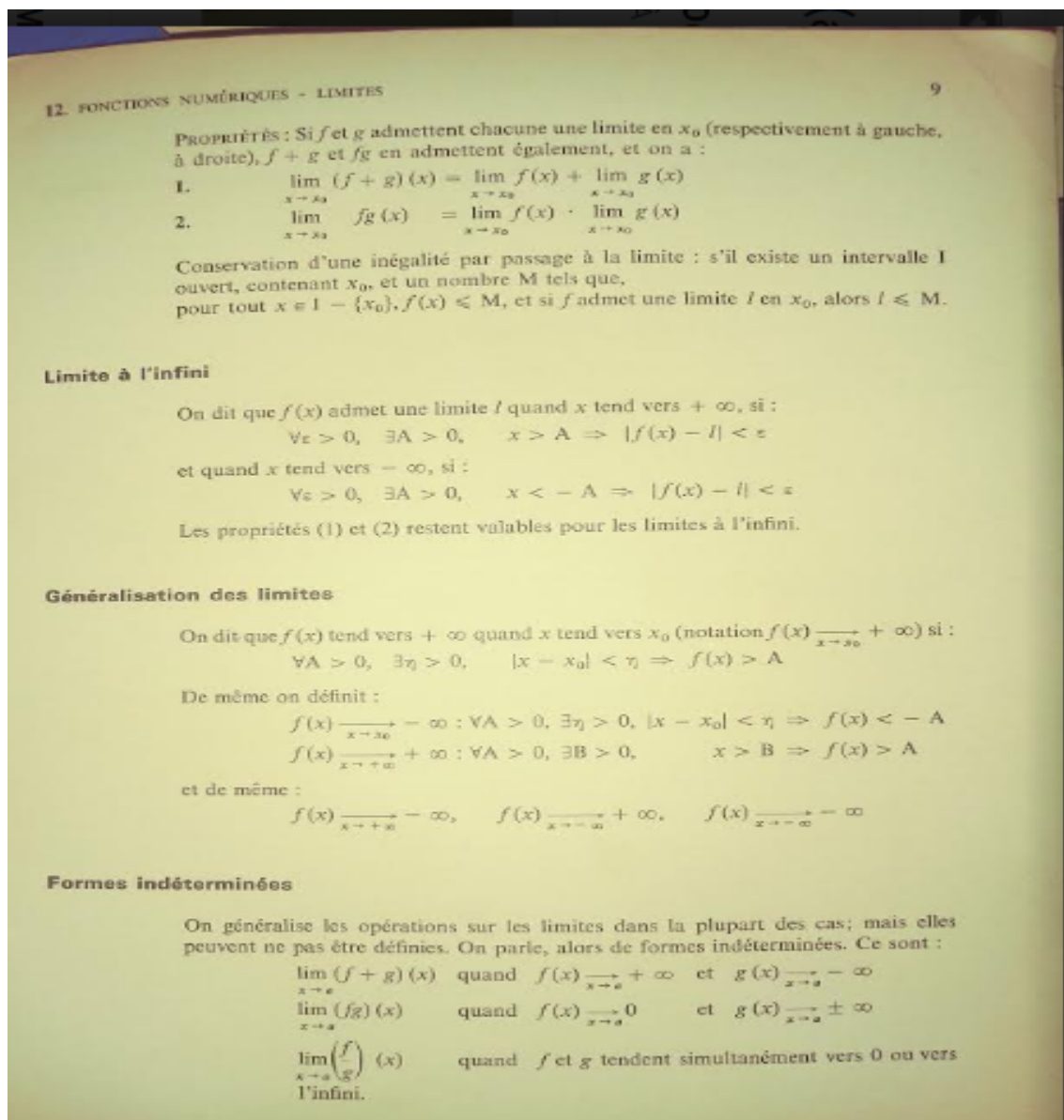
en compte l'ensemble de définition, mais elles ne sont ni construites ni démontrées. Il en est de même pour les propriétés et les théorèmes (Voir les figures 34 et 35).

Figure 34 extrait du livre Manuel problème de mathématiques avec leurs solutions terminales CDE tome 4 de 1975



Source : Problèmes de mathématiques avec leurs solutions terminales CDE, tome 4, (1975 p. 8)

Figure 35 extrait du livre Manuel problème de mathématiques avec leurs solutions terminales CDE tome 4 de 1975



Source : (G COHEN/ G CORNUEJOLS problèmes de mathématiques avec leurs solutions terminales CDE, tome 4, 1975 p. 9)

Les cadres et registres en jeu sont essentiellement le cadre algébrique et les registres de la langue naturelle et symbolique.

Les type de tâches identifiées sont : « Calculer la limite de  $f$  en  $a$  » et « Démontrer que  $l$  est la limite de  $f$  en  $a$  ». Pour résoudre les tâches de ces types de tâches, on se donne un epsilon, on travaille l'expression  $|f(x) - l| < \varepsilon$  pour avoir une expression de la forme  $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ ; mais aussi, la factorisation/simplification, la rationalisation/simplification et le changement de variable. Ce processus de résolution s'appuie sur la définition formelle et les propriétés sur les limites, le corps des réels et ses propriétés. Ce manuel utilise

uniquement le cadre algébrique. L'OM sous-jacente est la topologie des limites. Les registres en jeu sont le registre symbolique et le registre de la langue naturelle.

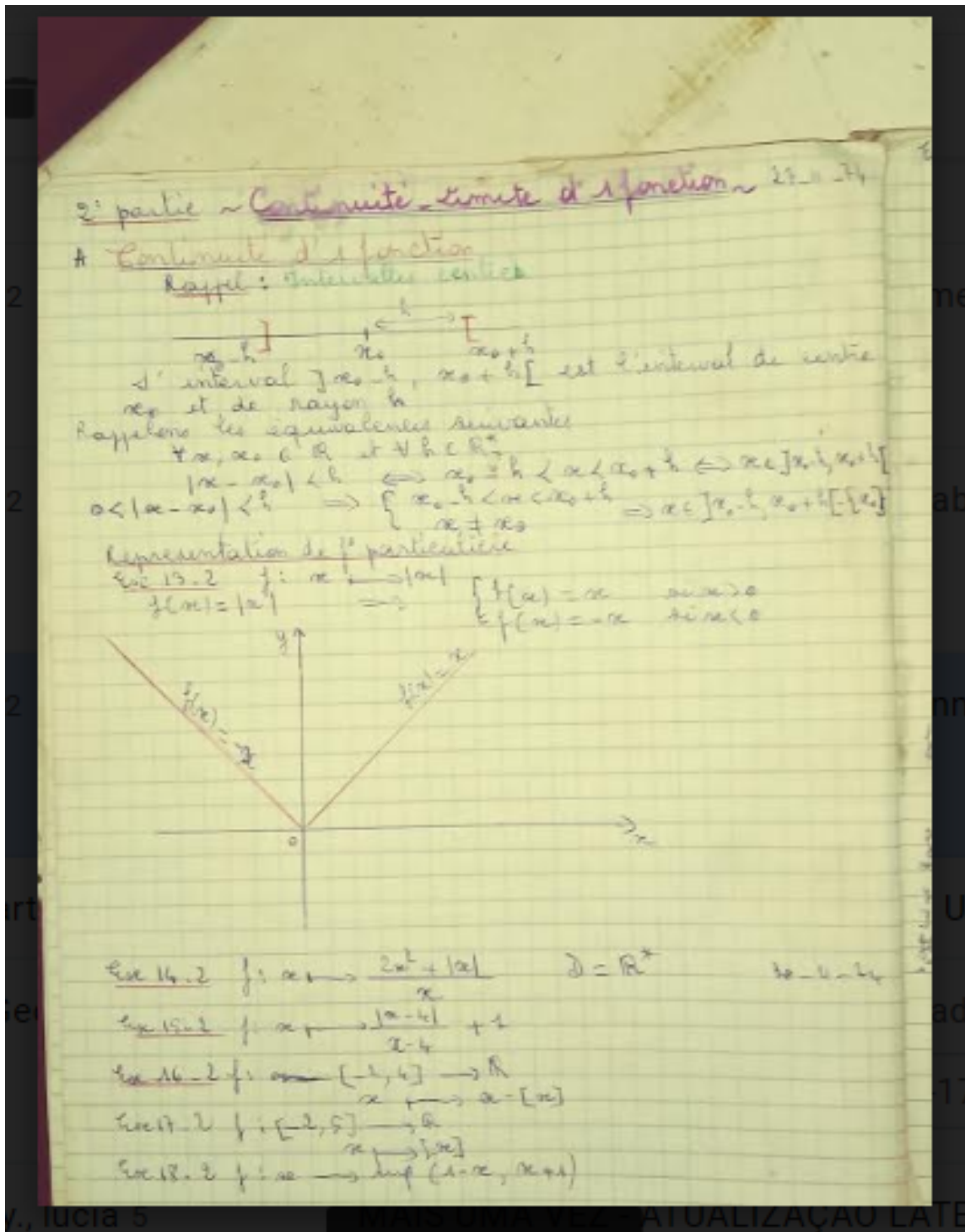
Dans les programmes officiels de l'École Normale Secondaire 2<sup>ème</sup> Année MPC (Mathématiques Physique et Chimie) de 1974 on rencontre la notion de limite dans le chapitre fonction numérique d'une variable réelle. Elle est traitée comme un sous-titre de la continuité d'une fonction en un point. On précise de se borner aux définitions indispensables, illustrées d'exemples et de contre-exemples ; énoncé, sans démonstration, des théorèmes relatifs aux limites de somme, produit et quotient de fonctions. Le programme prévoit l'enseignement de la continuité avant les limites, par ailleurs la continuité est un cas particulier de la limite et on définit la continuité à l'aide de la limite.

Pourquoi le programme prévoit-il d'enseigner dans cet ordre ? Quel est le lien entre la continuité et la limite ? Une des conséquences d'enseigner la continuité avant la limite est la confusion qui s'établit entre l'étude des deux notions, pour la continuité la fonction est définie au point donné et on peut calculer l'image, en revanche pour la limite la fonction peut ne pas être définie au point donné, et le calcul de la limite nécessite des factorisations, rationalisation et simplification et la substitution. Et cela peut amener l'élève à confondre une fonction et son prolongement par continuité.

Dans le programme de la 3<sup>ème</sup> année MPC (Mathématique-Physique-Chimie) de 1974, on retrouve la notion de limite d'une fonction dans le chapitre calcul différentiel, dans le contenu du programme on peut lire :

« Limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné ou vers l'infini, Unicité de cette limite et quelques propriétés sur les limites ». Le programme ne fait aucun commentaire. Là encore la continuité est étudiée avant la limite. Pour en savoir plus nous avons analysé un ancien cahier d'élève de 1974 dont voici le scan des pages (Figure 36) sur la continuité et les limites

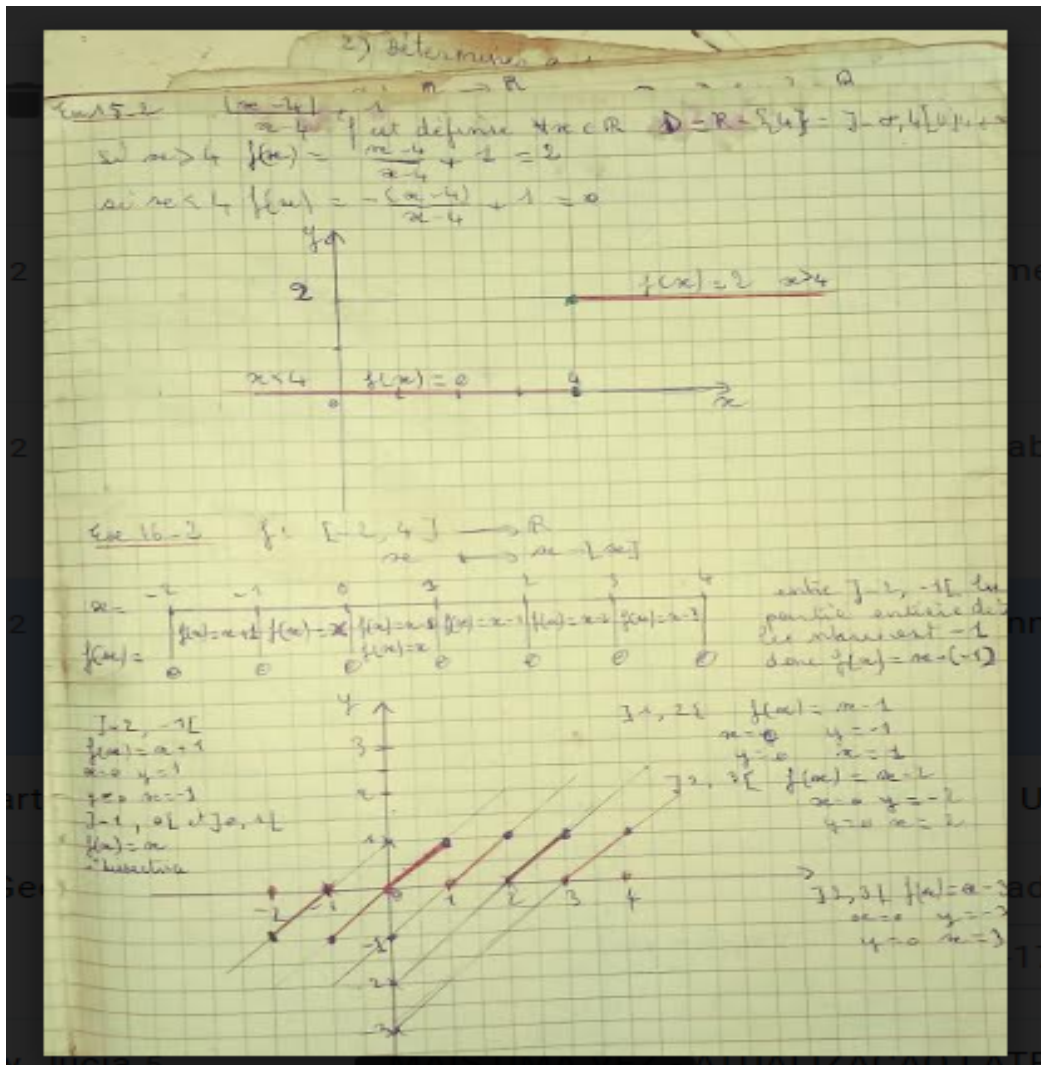
Figure 36 extrait d'un ancien cahier d'élève de 1974



Source : Extrait d'un ancien cahier d'élève (1974)

C'est la notion de voisinage qui est travaillée ici, elle est capitale dans la compréhension de la définition formelle. L'enseignant définit l'intervalle centré en  $x_0$  et l'intervalle épointé. Et donne la caractérisation de chacun d'eux. Il met aussi un accent sur l'ensemble de définition et la représentation graphique d'une fonction (Figure 37).

Figure 37 extrait d'un ancien cahier d'élève de 1974

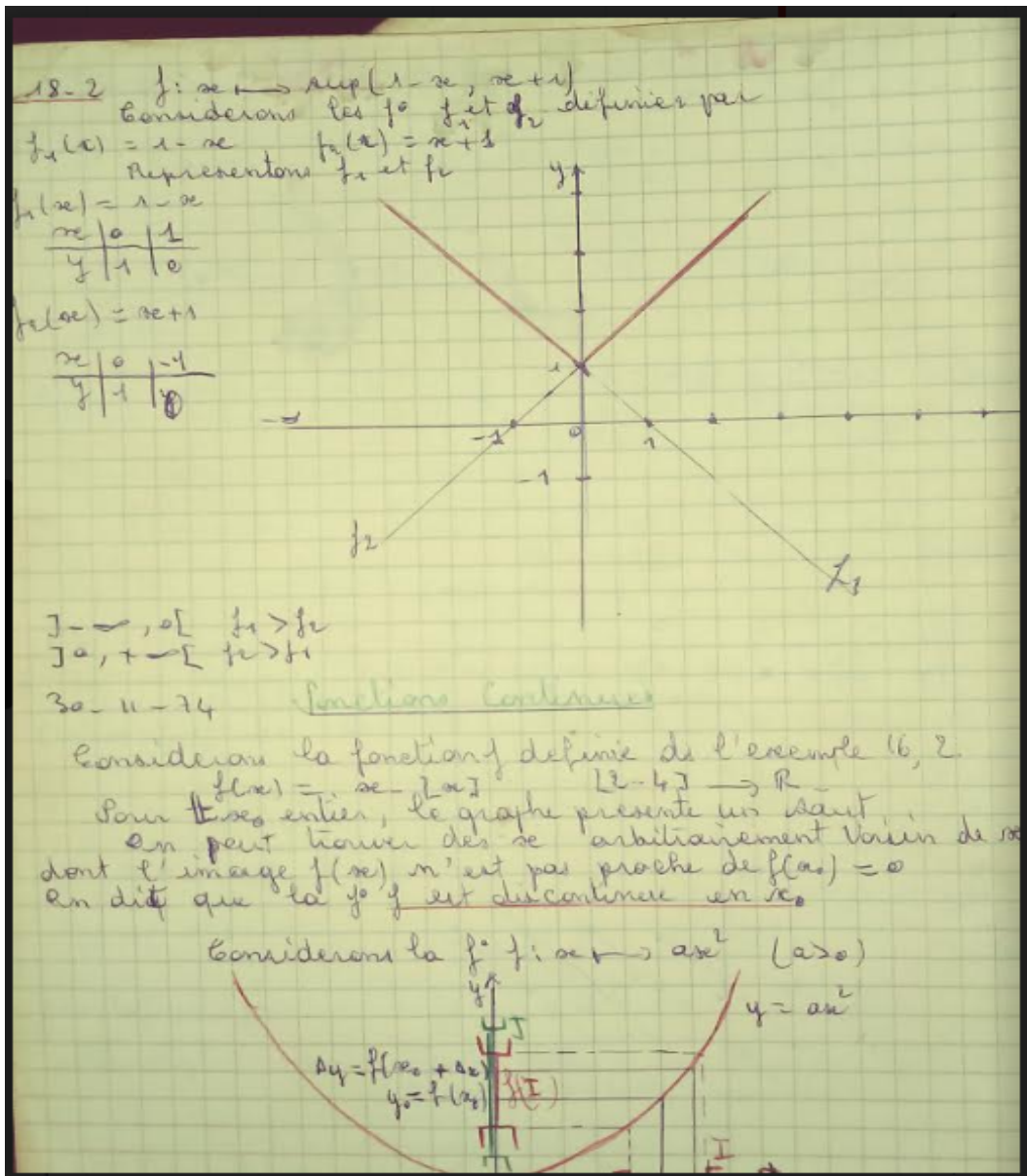


Source : Extrait d'un ancien cahier de 1974

Il diversifie les types de fonctions : fonctions affines, affines par intervalle sans saut, et avec un ou plusieurs sauts, comme on peut le voir sur la figure 38.

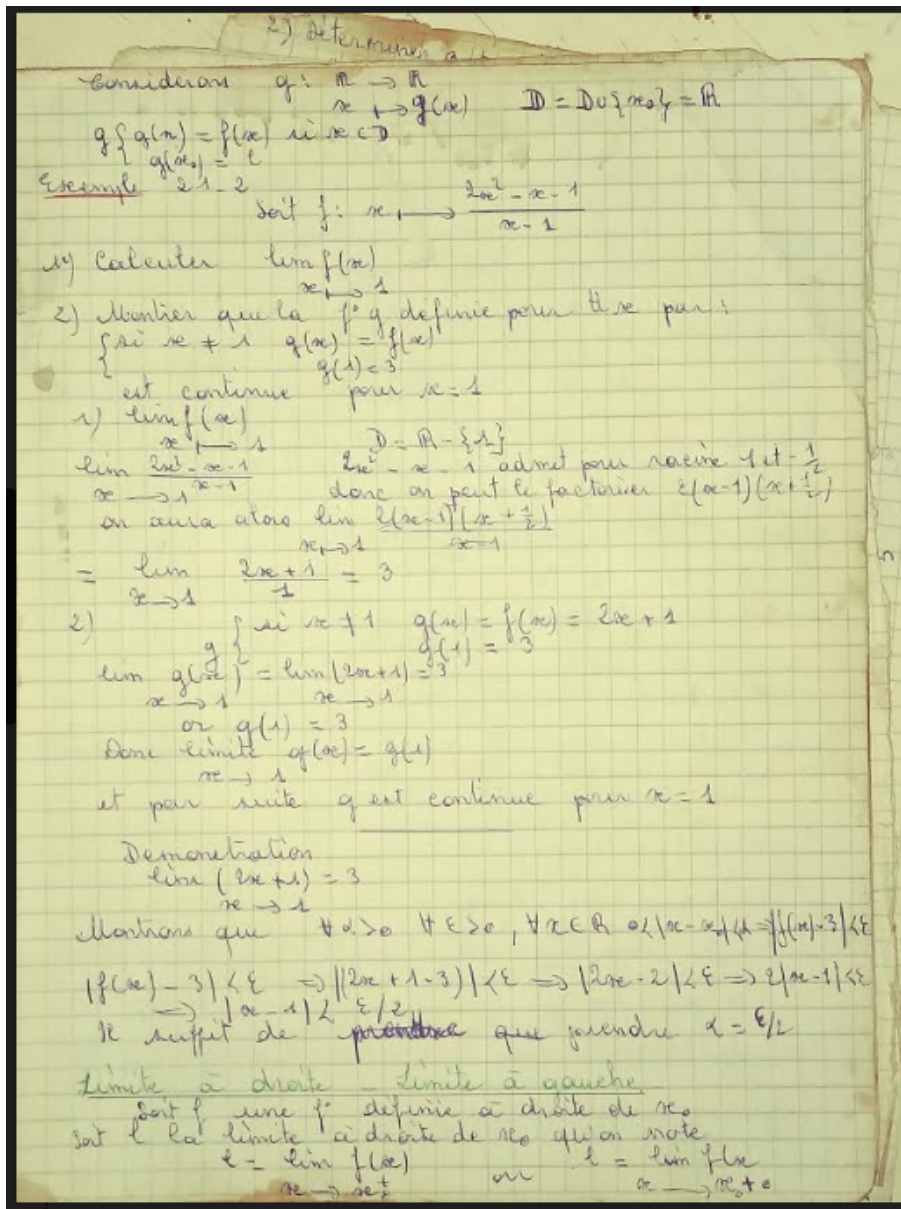
À partir des représentations des fonctions, il définit la continuité d'une fonction en un point et sur un intervalle. Il fait une illustration graphique de la continuité. La figure indique comment trouver l'image directe d'un intervalle par une fonction définie par sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Figure 38 extrait d'un ancien cahier d'élève de 1974



Source : Extrait d'un ancien cahier de 1974)

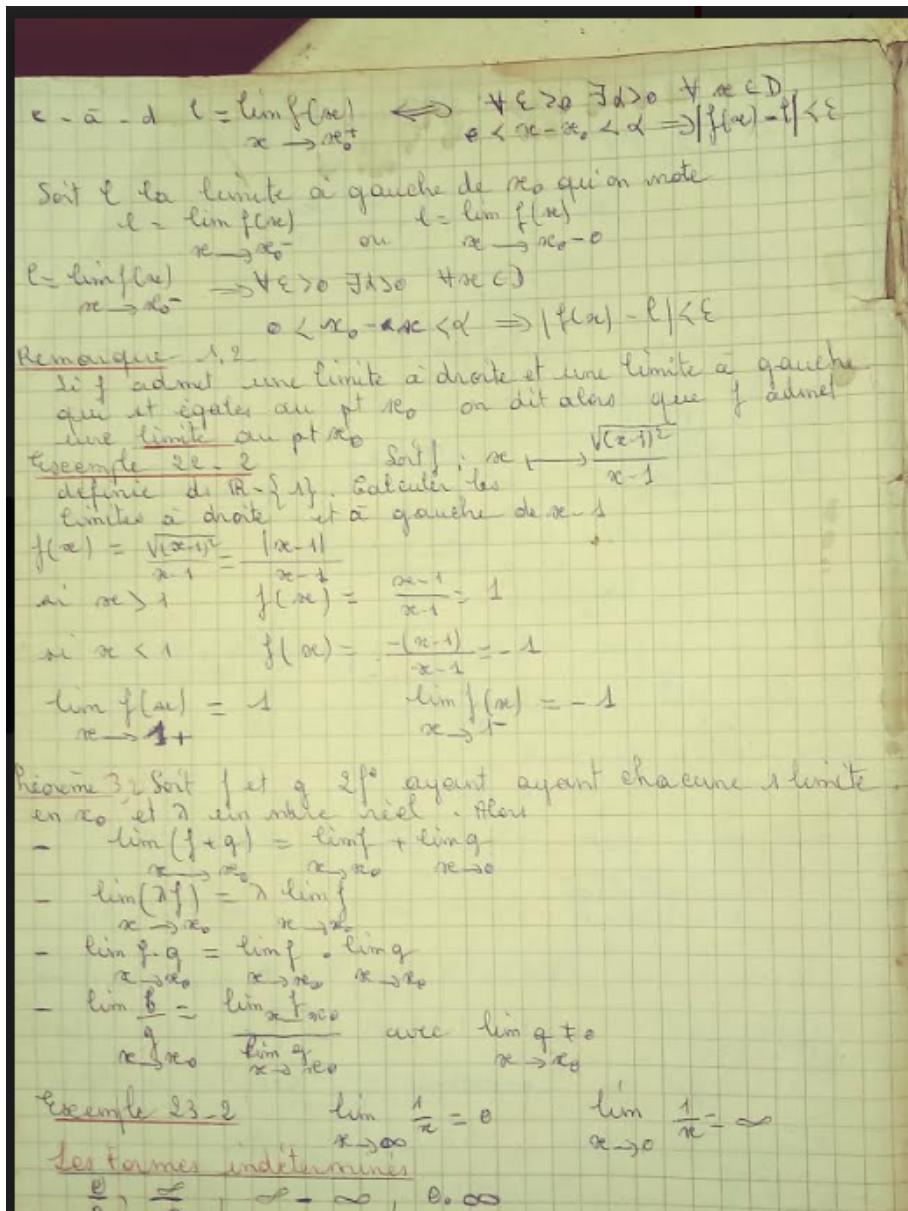
Figure 39 : extrait d'un ancien cahier de 1974



Source : Extrait d'un ancien cahier (1974)

L'enseignant présente un exemple dans le cadre algébrique (Figure 39). À travers cet exemple, il fait le lien entre la limite et la continuité en un point. Dans cet exemple, il fait fonctionner la définition formelle pour prouver le résultat du calcul.

Figure 40 extrait d'un ancien cahier d'élève de 1974

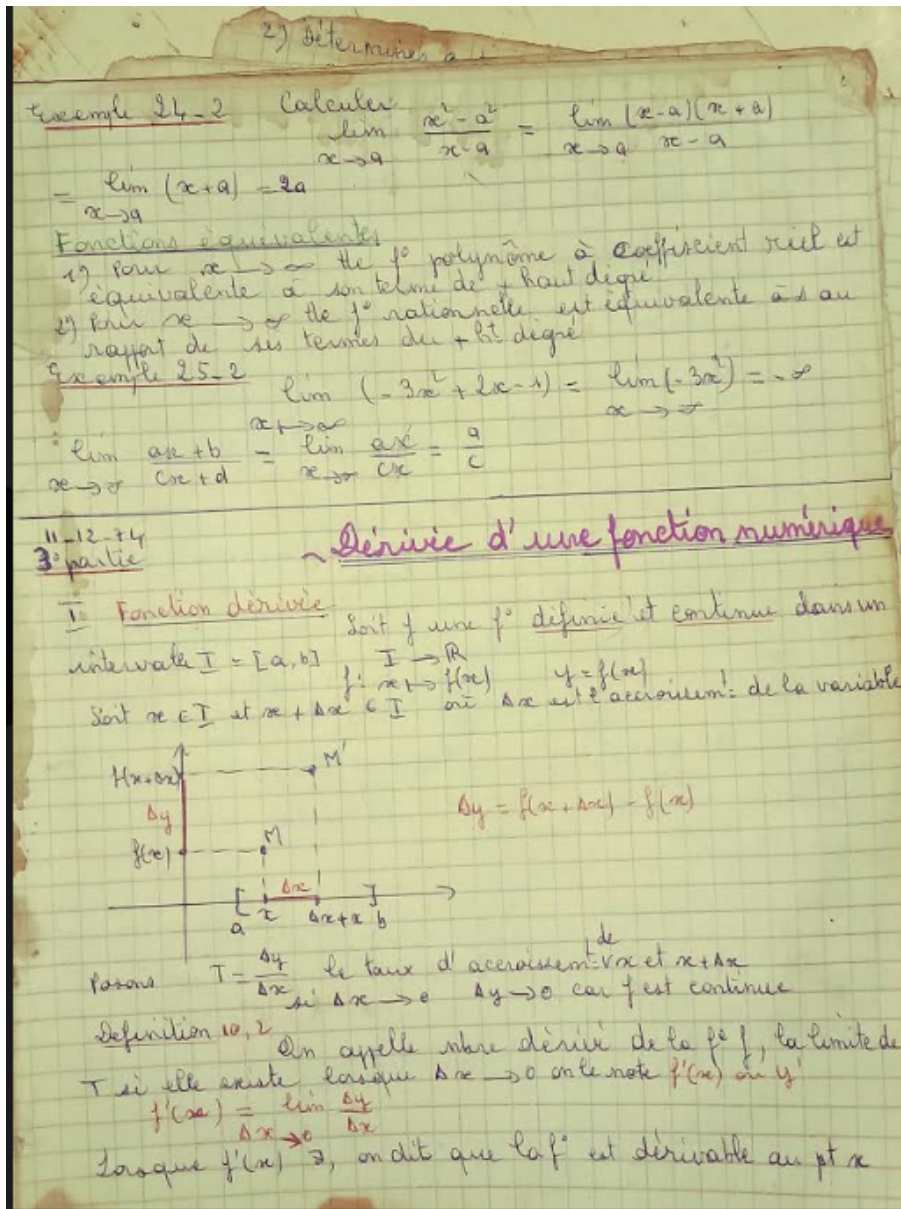


Source : Extrait d'un ancien cahier de 1974

Dans l'extrait représenté par la figure 40, l'enseignant donne la définition formelle de la limite à gauche et à droite en un point et les propriétés sur la limite et opérations sur les fonctions et les différentes formes indéterminées.



Figure 41 extrait d'un ancien cahier d'élève de 1974



Source : Extrait d'un ancien cahier de 1974

Le contenu de ce cahier nous informe que l'on étudiait la continuité avant la limite. On rencontre la définition formelle de la limite dans un exemple, la limite et la continuité ne sont pas définies dans ce cours. On y rencontre, seulement des exemples et des contre-exemples. La définition formelle n'est pas construite, elle est donnée et on l'a fait fonctionner sur un exemple simple (cas d'une fonction affine qui est continue). C'est l'aspect contra-variant qui est mis en relief. L'enseignant a le souci de rendre opérationnelle la définition formelle. Ce cours n'étudie pas la définition formelle dans tous ces aspects. À savoir l'aspect contra-variant, covariant et la dialectique entre les deux.

En résumé, l'enseignant met le concept de limite avec les notions de son champ conceptuel telles que la notion de fonction, de dérivé, d'intervalles, la valeur absolue et l'équation, la continuité. Il fait interagir les cadres géométrique et algébrique. Les fonctions sont définies par leur représentation graphique et ou leur expression algébrique explicite. Les fonctions en jeu sont des fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles, une combinaison de celles-ci et des fonctions spéciales (partie entière, et inf).

Nous identifions dans ce cahier trois types de tâches :  $(T_1)$  « Représenter graphiquement dans un repère orthonormé direct une fonction »,  $(T_2)$  « étudier la continuité de  $f$  en un point  $a$  » et  $(T_3)$  « calculer les limites latérales d'une fonction en un point  $a$  ». Nous voyons, dans le cas de  $T_1$ , que l'enseignant met l'accent sur l'étude d'une fonction particulière (valeur absolue, partie entière, inf), sur une fonction comme combinaison de fonctions spéciales. Ces fonctions sont représentées par leurs expressions explicites algébriques. Dans le cas de  $T_2$ , l'enseignant s'appuie sur une fonction rationnelle définie par son expression algébrique explicite. Dans les deux cas, l'étude de la limite de la fonction considérée se fait à partir d'un nombre réel  $a$  bien défini.

### **1.1.5. Collection Institut de Recherche en Mathématiques (IRMA)**

#### **1ère CE 1986**

La collection Institut de Recherche en Mathématiques (IRMA) est apparue et utilisée au Mali pendant la période 1980-1990 ; elle est caractérisée par l'abandon des mathématiques dites modernes de 1965/1990.

Dans ce manuel on rencontre la notion de limite dans le chapitre étude locale d'une fonction. L'abordage de ce manuel est conforme au programme, il fait interagir les cadres géométrique et numérique pour faire émerger l'idée intuitive de la limite nulle en 0 de quelques fonctions de références. À partir des majorations il montre comment on calcul des limites en 0 d'une fonction. Il donne les limites en 0 des fonctions de références, énonce des théorèmes et les propriétés sur les limites, présente les méthodes pratiques pour montrer qu'une fonction donnée a pour limite 0 en 0 et enfin, il étudie les limites latérales et la méthode pratique pour étudier la limite à gauche, ou à droite d'une fonction. Contrairement au manuel Collection Interafricaine de Mathématiques (CIAM) 1<sup>ère</sup> Sciences Mathématiques ce manuel ne présente pas de propriété erronée.

Nous avons identifié les types de tâches suivants : « Montrer qu'une fonction a pour limite  $\ell$  en  $a$  », « Calculer la limite en  $a$  d'une fonction » et « Étudier la limite à gauche ou

à droite en  $a$  d'une fonction » que peuvent être résolues en comparant des fonctions et en s'appuyant sur règles de calcul des limites. Ce processus de résolution sur les propriétés des fonctions, sur l'ordre dans  $\mathbb{R}$  et les propriétés sur les limites.

Nous remarquons que la définition formelle du concept de limite est absente.

### 1.1.6. Collection IRMA 1<sup>ère</sup> D 1986

Dans ce manuel on retrouve la notion de limite dans le chapitre intitulé limites et continuité en  $a$ . Pour introduire la notion de limite, ce manuel met en interaction les cadres numérique, géométrique et algébrique pour faire émerger la définition de la limite comme on peut le constater dans les figures 42 et 43.

Figure 42 - Extrait de Collection IRMA 1<sup>ère</sup> D 1986

1) introduction à la notion de limite d'une fonction en un point

a) Exemple  
Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
$$x \mapsto \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}$$

Son ensemble de définition  $D_f$  est  $\mathbb{R}_+ - \{1\}$ .  
A l'aide d'une calculatrice, calculons l'arrondi d'ordre 6 de  $f(x)$  pour quelques valeurs de  $x$  « proches » de 1 :

$x$	0,9	0,99	0,999	0,9999	1
$f(x)$	0,486833	0,498744	0,499875	0,499987	

$x$	1,0001	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	0,500013	0,500125	0,501244	0,511912

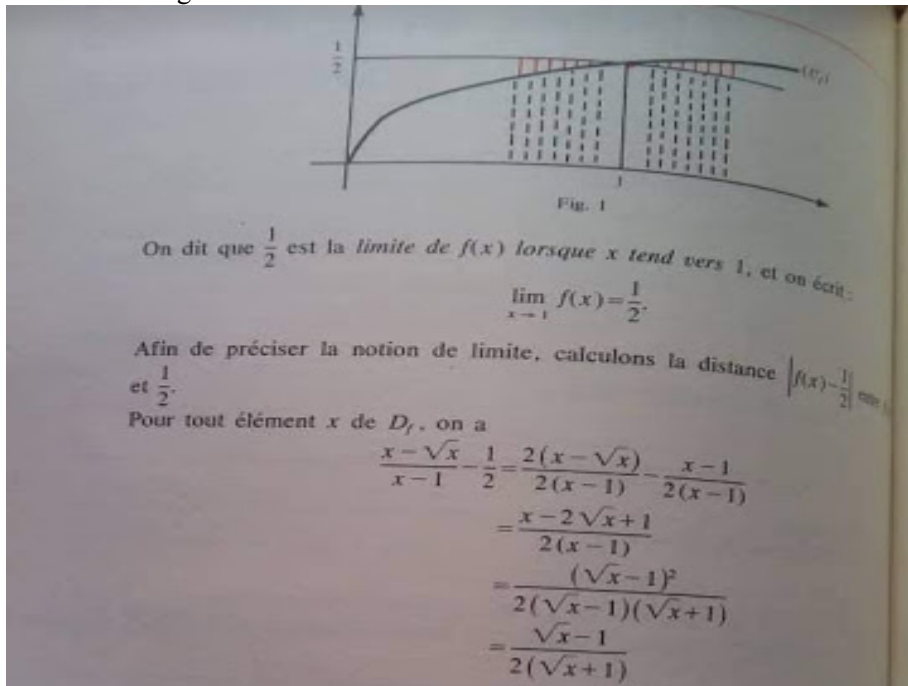
Il semble que la distance entre  $f(x)$  et  $\frac{1}{2}$  devient aussi petite que l'on veut lorsque  $x$  est de plus en plus proche de 1.  
Cette impression est confirmée par la figure 1 où :

- $(C_f)$  est la représentation graphique de  $f$ ;
- la longueur des segments rouges est la distance entre  $f(x)$  et  $\frac{1}{2}$  pour des nombres  $x$  de plus en plus proches de 1.

153

Source : Collection IRMA 1<sup>ère</sup> D (1986, p. 153)

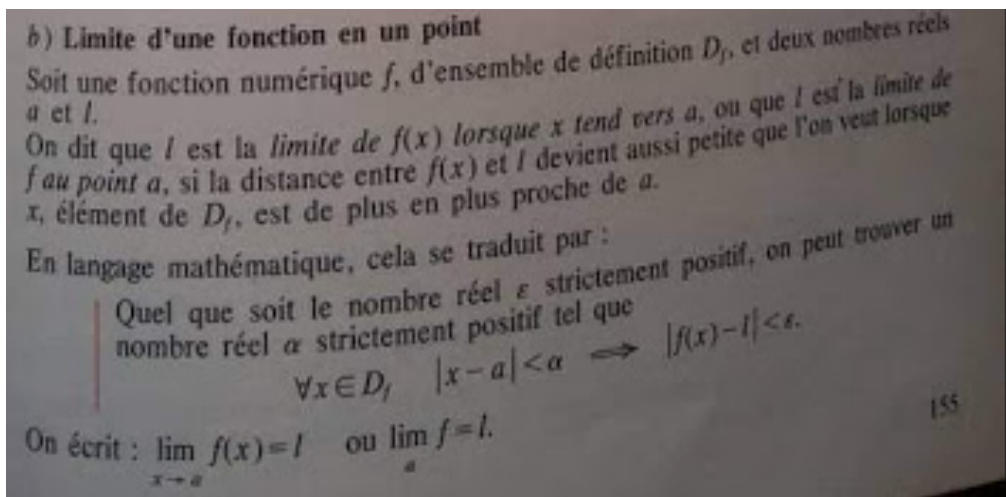
Figure 43 - Extrait de Collection IRMA 1ère D 1986



Source : Collection IRMA 1ère D (1986, p. 154)

Il donne la définition intuitive et la définition formelle ; mais sa définition formelle correspond à la définition de la continuité. Il confond la limite et la continuité. Il met l'accent sur l'ensemble de définition (Figure 44).

Figure 44 - Extrait de Collection IRMA 1ère D 1986



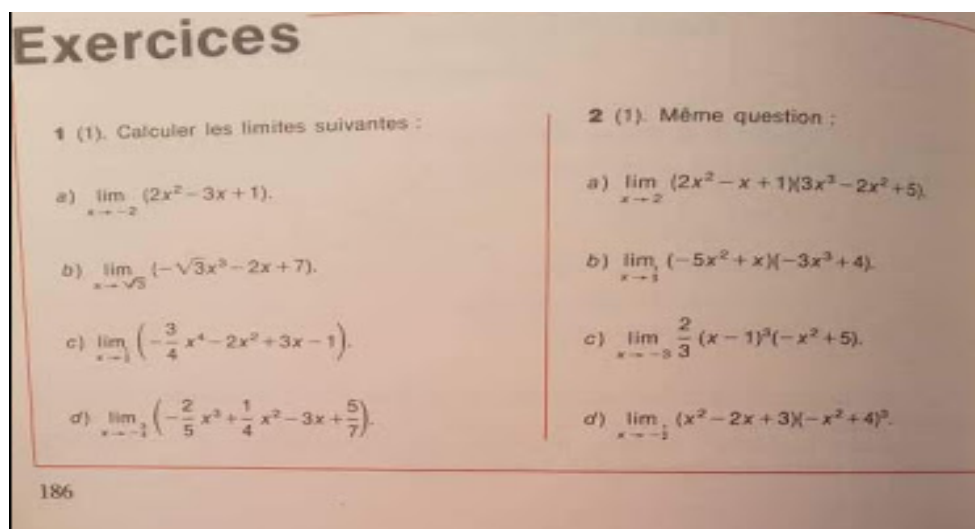
Source : Collection IRMA 1ère D (1986, p. 155)

Malgré qu'il formalise la définition il ne propose aucun exercice sur l'application de la définition formelle.

À partir des exemples présentés (Figure 45), on se rend compte que le manuel se borne à des fonctions continues au point où l'on calcule la limite. Comme la Collection Interafricaine de Mathématiques (CIAM) 1ère Sciences Mathématiques, ce manuel aussi

présente des théorèmes erronés tels que : « Si la fonction numérique est définie au point  $a$  et possède une limite en ce point, alors :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  ». Cette propriété est erronée parce, en considérant un point isolé adhérent à l'ensemble de définition de  $f$ , la limite peut être différente de l'image.

Figure 45 - Extrait de Collection IRMA 1ère D 1986



Source : Collection IRMA 1<sup>ère</sup> D (1986, p. 186)

On constate ici que tous les exercices portent sur le cas où  $f$  est continue au point  $a$ . cela renforce la confusion entre la limite et l'image ou l'étude de la limite et l'étude de la continuité d'une fonction en point.

L'analyse de ce manuel nous a permis d'identifier un type de tâche dominant : « Calculer la limite en  $a$  d'une fonction » dont la résolution s'appuie sur les règles de calcul de limite en un point.

### 1.1.7. Collection IRMA Terminale C E 1987

Dans ce manuel on continue l'étude des limites dans le chapitre complément sur les fonctions numériques. Ce manuel fait une remarque importante "soit  $f$  une fonction numérique d'ensemble de définition  $D_f$  et  $a$  un réel. La recherche d'une limite éventuelle de la fonction  $f$  au point  $a$  n'a de sens que s'il existe un intervalle  $I$  contenant  $a$ , tel que  $I - \{a\}$  soit inclus dans  $D_f$ ". Il définit la limite à gauche, à droite au point  $a$ , il ne fait aucune formalisation des définitions.

Ce manuel donne les limites de références et un théorème dit fondamental qui permet de calculer les limites en 0 d'autres fonctions. Le théorème fondamental est libellé comme suit :

Soit  $g$  une fonction dont l'ensemble de définition contient un ensemble de la forme  $]-r, 0[ \cup ]0, r[$  (où  $r$  est un nombre réel strictement positif). Soit  $f$  une fonction telle que  $\lim_{0} f = 0$  et  $k$  un nombre réel positif. S'il existe un intervalle ouvert  $I$  de centre 0 tel que :  $\forall h \in I - \{0\} |g(h)| \leq k|f(h)|$  et si  $g(0)=0$  lorsque  $g$  est définie en 0, alors  $\lim_{0} g = 0$ . Cette définition est conforme aux contenus du programme. Cette définition n'est pas illustrée dans ce manuel. (Collection IRMA, Terminale C E, 1987, p. 34)

### 1.1.7. Collection Transmath : Mathématiques 1ères SE tome 1

#### Programme 1991 :

Ce manuel traite la notion de limite dans son chapitre 6, il traite seulement le cas de la limite d'une fonction en un point. Ce manuel explique, à travers des exemples, la signification de l'expression «  $f$  a pour limite  $\ell$  au point  $a$  ». Conformément au programme, les explications resteront à un niveau intuitif élémentaire.

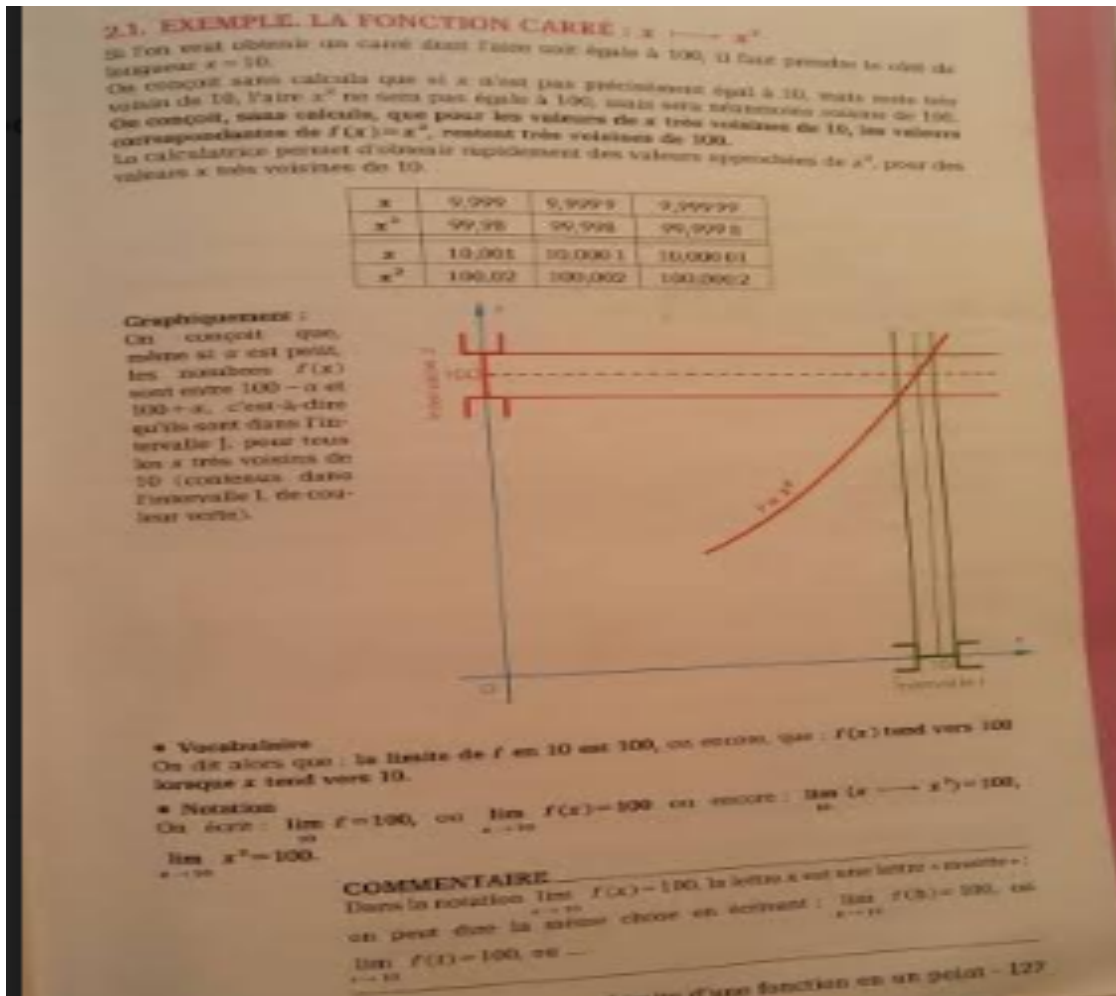
Dans les travaux pratiques d'approche, il présente un exemple de la façon suivante :

$$f : x \rightarrow \frac{x^2}{x+1} \text{ et } a=0$$

Lorsque  $x$  est voisin de 0,  $x^2$  est aussi voisin de 0, et  $x+1$  est voisin de 1. Lorsqu'on divise un nombre voisin de 0 par un nombre voisin de 1, on obtient pour quotient un nombre voisin de 0. On conçoit que pour les valeurs de  $x$  voisines de 0, les valeurs de  $f(x)$  correspondantes restent voisines de 0.

Dans la partie cours, ce manuel présente les raisons de l'étude de la limite d'une fonction en un point et sa signification. Il fait des remarques sur le vocabulaire « limite en mathématique » et « limite dans le langage courant ». Il précise que la limite n'est pas « quelque chose d'inaccessible ou d'infranchissable » et affirme qu'il est préférable de ne pas se référer aux sens usuels du mot limite lorsqu'on parle de limite d'une fonction. Il prend un exemple (Figure 46) qui met en interaction les registres numérique et graphique.

Figure 46 extrait de la collection Transmath : Mathématiques 1ères SE tome1 1991

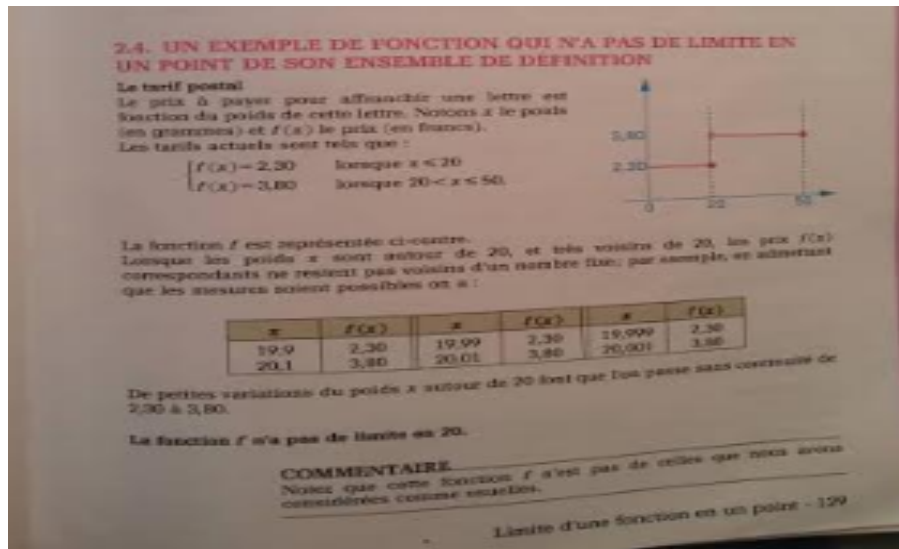


Source : Collection trans-math : Mathématiques 1ères SE tome1 (1991, p.127)

Les auteurs de ce manuel affirment que, intuitivement, dire que « la fonction  $f$  a pour limite  $\ell$  au point  $a$  » signifie que lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus voisines de  $a$ , les nombres  $f(x)$  correspondants deviennent très voisins de  $\ell$  (ils finissent par être entre  $\ell - \alpha$  et  $\ell + \alpha$  aussi petit que soit le nombre  $\alpha > 0$ ). Contrairement aux autres manuels tels que CIAM 1<sup>ère</sup> SM, IRMA 1<sup>ère</sup> D etc. ce manuel donne avec précision le théorème suivant : «  $f$  est une fonction usuelle<sup>18</sup>,  $a$  est un nombre qui appartient à son domaine de définition  $Df$ . Alors  $f$  a une limite en  $a$  et cette limite est  $f(a)$  ». Il présente un cas de fonction (Figure 47) qui n'admet pas de limite en  $a$  et enfin des propriétés et les théorèmes sur la limite.

<sup>18</sup> Fonctions  $ax+b$ ,  $1/x$ ,  $x^2$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $x^n$ ,  $n > 2$

Figure 47 extrait de la collection Transmath 1ère SE 1991



Source : Collection Transmath : Mathématiques 1ères SE tome1 (1991, p.128)

Le contenu du cours et des exercices présents dans ce manuel peut être modélisé par le type de tâches suivants : « Étudier la limite de  $f$  au point  $a$ . » qui peut être résolue par les règles classiques de calcul de limite qui s'appuient sur les propriétés et les théorèmes sur les limites.

Dans les programmes et les manuels de 1970 à 1991, la notion de limite en un point est étudiée après celle de la continuité, et on définit la limite à l'aide de la continuité. Et chacune est définie rigoureusement. Pourquoi étudie-t-on la continuité avant la limite ? Quelle est l'impact d'un tel choix ? Ce choix peut entraîner la confusion entre la limite et la continuité.

On constate que les anciens manuels ne définissent pas intuitivement la notion de limite, c'est la définition formelle qui est donnée et avec des exemples d'application, de plus les propriétés sur les limites sont démontrées. Seulement on rencontre en général des cas simples tels que le cas de la fonction affine et les fonctions rationnelles dont le numérateur et le dénominateur sont du premier degré. Ces cas mettent en exergue l'aspect contra-variant de la définition formelle. Ils ne donnent pas de méthode pratique d'application de la définition formelle. La plupart de ces manuels ne met pas en interaction les cadres algébrique, numérique et géométrique et ne propose pas non plus d'activités sur les notions connexes de la définition formelle telles les quantificateurs, l'implication, la valeur absolue, les intervalles, les inéquations et les équations, l'infini, les nombres réels et les suites, etc. Le cadre privilégié est le cadre algébrique.



Dans ces manuels la continuité est étudiée avant la limite, et parfois on définit la limite comme un corollaire de la continuité. Les manuels récents définissent intuitivement la notion de limite, avec parfois une pseudo formalisation en s'appuyant sur la comparaison des fonctions. Les propriétés sont énoncées sans aucune démonstration. Il y a une interaction entre les cadres algébriques, géométrique et numérique. Les exercices sont pour la plupart portés sur des cas où la fonction est définie et continue au point  $a$ . On constate qu'il y a une confusion entre la limite et la continuité. Ces manuels ne proposent pas d'activités sur les notions constitutives de la définition formelle. Ils donnent les méthodes pratiques d'application des propriétés des limites. Dans les manuels récents la limite est étudiée avant la continuité et celle-ci est définie à l'aide de la limite.

Les anciens manuels mettent l'accent sur l'étude topologique de la limite tandis que les nouveaux se focalisent sur l'étude algébrique (définition intuitive). L'algèbre des limites permet d'éviter la problématique de l'infini et de la notion de limite et les problématiques d'approximation de cette notion. Elle permet d'associer l'écriture  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , où  $a$  est un nombre réel ou l'infini et elle suppose que la limite existe. La topologie des limites s'appuie sur la problématique de l'existence de la limite, elle développe des techniques mathématiques pour les démonstrations requises. La définition de la limite fait toujours appel à une démonstration. Sous cette forme on peut dire que l'un est basé sur le bloc pratico-technique au sens de Chevallard et l'autre sur le bloc technologique-théorique.

Nous nous proposons d'interconnecter les deux pour constituer une organisation praxéologique autour de la notion de limite, qui pour nous permettra aux élèves de donner un sens mathématique à la cette notion.

## **1.2. Par rapport au programme 1992**

Au Mali, à partir de 1991 les programmes sont définis avec beaucoup plus de clarté, et accompagné de savoir faire qui précisent d'avantage les types de tâches à réaliser sur les contenus

### **Niveau 11<sup>ème</sup> :**

Dans le texte du programme il n'y a pas de chapitre intitulé limite. On trouve la notion de limite dans le chapitre étude locale d'une fonction numérique.

- Limite nulle en zéro
- Limite d'une fonction en un point (on admettra les théorèmes classiques sur les limites)

- Limite à droite, limite à gauche.

Dans les commentaires on peut lire :

On part de l'examen d'une figure, pour conjecturer l'existence d'une tangente à une courbe en un point. Les élèves ont déjà la notion intuitive de tangente à une courbe, elle ne sera définie dans un premier temps que graphiquement ; grâce à l'étude d'un agrandissement d'une partie de la courbe. Dans le but de donner véritablement une définition mathématique de cette notion de tangente, on ramène le problème à l'étude d'une courbe contenant l'origine O et l'éventuelle tangente de l'axe des abscisses à cette courbe en O. ceci conduit à la recherche d'une limite nulle en 0 d'une fonction.

Les méthodes pour déterminer cette limite nulle en zéro d'une fonction.

La limite nulle en zéro d'une fonction g est alors définie en s'appuyant sur une majoration de |g| par k|j| où k est un réel strictement positif, et j est l'une des fonctions :  $x \mapsto x$ ,  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto \sqrt{|x|}$  dont on a admis et constaté qu'elles admettaient une limite nulle en zéro.

On poursuit l'étude par : Pour tout  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$  On a alors

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \ell$  le nombre réel  $\ell$  est la limite de g en 0 et si et seulement si

$\lim_{x \rightarrow 0} (g(x) - \ell) = 0$  De plus, si g est définie sur un intervalle de centre 0

alors le nombre réel  $\ell$  est la limite de g en zéro si et seulement si la restriction de g à  $D_g - \{0\}$  a pour limite  $\ell$  en zéro et  $g(0) = \ell$ .

Les théorèmes sur les opérations sur les limites sont alors admis (Y compris |g|,  $\sqrt{g}$ ). Ainsi sans avoir donné une définition rigoureuse de la limite (définition difficilement accessible aux élèves) on a mis en place un certain nombre d'outils et de méthodes, en particulier les majorations qui permettent de conclure à l'existence d'une limite et de la calculer. (MALI, Programme de mathématiques 11<sup>ème</sup> Sciences Exactes, 1992, pp. 3-4)

Commentaire :

Le programme prévoit des approximations (comparaison de deux fonctions) ; mais c'est l'aspect algébrique qui est mis en relief. On manipule des expressions algébriques.

Exemple pour tout  $x > 0$   $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{x}$ . Il y a des choix de transposition didactique qui apparaissent dans ce programme qui ne sont pas dits. Tel que le choix des fonctions de limite nulle en 0.

Le programme ne met pas la notion de limite en lien avec tous les éléments de son champ conceptuel : tels que les quantificateurs (existential et universel), l'implication, la condition suffisante, la valeur absolue, les inéquations etc. Le programme propose d'organiser l'étude suivant le schéma suivant :

1- étudier les fonctions de références  $x \mapsto x$ ,  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto \sqrt{|x|}$  au voisinage de 0,

2- montrer que l'on peut majorer toute fonction par  $K^*|J|$  où J est une fonction de référence de limite 0 en 0 ;

À partir de ces indications on identifie le choix didactique : fonction de limite nulle en 0 : ce choix se justifie par le fait que l'on peut toujours se ramener au calcul de la limite nulle en 0 à partir d'une transformation. Par exemple, s'il s'agit de calculer  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , on pose  $h=x-a$  donc si  $x$  tend vers  $a$  alors  $h$  tend vers 0 et on aura  $\lim_{h \rightarrow 0} f(h+a)$ , de même si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  on prend  $\lim_{h \rightarrow 0} f(h+a) - \ell$  et à l'aide d'une majoration par une fonction de limite nulle en 0 on montre que  $\lim_{h \rightarrow 0} f(h+a) - \ell = 0$ .

S'il s'agit de la limite à l'infini, on effectue le changement de variable  $h = \frac{1}{x}$ . Dans ce cas quand  $x$  tend vers l'infini alors  $h$  tend vers 0. Ici nous avons une technique de calcul de limite, cette technique ne nous permet pas de définir la notion de limite. Sierpinska (1985, p. 8) affirme que cela n'a pas de sens d'éviter les obstacles ; on doit faire apparaître l'obstacle, en prendre conscience et ensuite le franchir pour progresser dans le développement de son savoir ;

3- Nous avons aussi le choix du graphique de la fonction pour introduire la notion de limite.

Le programme privilégie le cadre géométrique et le cadre algébrique, mais il ne prévoit pas une interaction entre les deux. Le graphique sert de support intuitif, il peut aussi être source de difficultés car les élèves peuvent confondre la valeur de la fonction en  $x$  et le point de la courbe d'abscisse  $x$  ; en le mettant en interaction avec l'expression algébrique et la table de valeur ces difficultés peuvent être levées facilement. L'objectif du contenu du programme est la mise en place d'outils permettant de calculer des limites. Les choix opérés permettent seulement de calculer certaines limites. Est-ce que le fait que la définition de la limite est difficilement accessible aux élèves qu'il faut la contourner ? C'est difficile ; mais est-ce que c'est impossible ? Ne peut-on pas élaborer une situation rendant accessible cette définition rigoureuse de la limite afin de permettre aux élèves d'acquérir un sens de cette notion de limite ? Le fait d'affirmer que la notion de limite est difficile peut influencer positivement comme négativement les pratiques de classe. Nous affirmons que l'on peut rendre cette définition rigoureuse et accessible aux élèves en nous appuyant sur des outils didactiques tels que le jeu de cadres et changement de registres, le modèle T4Tel. Cette définition rigoureuse écrite à l'aide des quantificateurs  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in Df \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$  à vue d'œil comporte des notions telles que la notion de fonction, d'intervalles, de valeur absolue, inéquation, les quantificateurs logiques et l'implication. À l'aide de T4Tel, on peut construire des organisations ponctuelles, locales

autour de chacune de ces notions et enfin une organisation régionale en les combinant et en jouant sur le jeu de cadres et le changement de registres pour donner du sens à cette définition et la rendre opérationnelle accessible aux apprenants. Voyons maintenant par rapport au savoir-faire et les manuels

### 1.3. Par rapport au savoir-faire :

Dans le savoir-faire de la 11<sup>ème</sup> SE on peut lire :

L'élève doit être capable de :

-montrer que la limite lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  de  $g(x)$  égale à  $\ell$ , en établissant une majoration de type :  $|g(x_0 + h) - \ell| \leq K \cdot j(h)$  avec  $k$  élément de  $\mathbb{R}^+$  et  $j$  est l'une des fonctions de références et  $l$ , un réel.

- déterminer la limite d'une fonction  $f$

.en un point  $x_0$  en utilisant les théorèmes sur les limites (somme produit, inverse, valeur absolue)

-déterminer intuitivement la limite  $\ell$  d'une fonction  $f$  en un point  $x_0$  et montrer que la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  est égale à  $\ell$ .

-déterminer la limite à gauche et à droite d'une fonction en  $x_0$ .

-déterminer la limite d'une fonction en plus ou moins l'infini en utilisant les théorèmes sur les limites.

**On ne manipule pas du tout ici la définition formalisée de la limite.**

(Source : MALI, savoir-faire mathématiques niveau 11<sup>ème</sup> S.E, 1994, p. 3-4).

La notion de limite d'une fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ , est apparût le plus souvent dans nos programmes en tant qu'outil (au sens de Douady), pour aborder les notions de continuité, de dérivation d'une fonction (en vue d'étudier sa variation) sur des intervalles de son domaine de définition ; ces supposés acquis sont destinés à être réinvestis pour introduire la notion de développement limité à l'ordre 3 au plus en 0, de certaines fonctions de référence.

Ici l'accent est mis uniquement sur « comment calculer la limite », on ne s'intéresse pas au pourquoi. Tant qu'on ne touche pas à la raison d'être du concept de limite, on ne peut pas parler de signification de cet objet.

#### 1.3.1. Organisation mathématique de la notion de limite relative au programme et le savoir faire

L'analyse des programmes nous a permis de mettre en évidence les types de tâches suivants : « calculer, lorsqu'elle existe, la limite (finie ou non) en  $x_0$  ( $x_0$  fini ou non) d'une fonction qui est une combinaison de fonction de références » et « montrer que la limite lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  de  $g(x)$  égale à  $\ell$  en établissant une majoration de type :

$|g(x_0 + \square) - \ell| \leq k \times |j(h)|$  avec  $k$  élément de  $\mathbb{R}^+$  et  $j$  est l'une des fonctions de références et  $\ell$  est un réel ».

Les techniques sont basées pour la plupart sur l'algorithme suivant :

- a) remplacer dans  $f(x)$ ,  $x$  par  $x_0$  ;
- b) si  $f(x_0)$  n'est pas une forme indéterminée «  $0/0$  ;  $+\infty - \infty$  ;  $0 \times \infty$  ;  $\frac{\infty}{\infty}$  » alors  $f(x_0)$  est la limite ;
- c) si non alors il faut lever l'indétermination par des techniques de calcul sur des expressions algébriques (factorisation, recherche de l'expression conjuguée, simplification) ;
- d) si malgré ces opérations l'indétermination n'est pas levée on dit alors que  $f$  n'a pas de limite en  $x_0$  ;
- e) établissement d'une majoration de type :  $|g(x_0 + \square) - \ell| \leq k \times |j(h)|$  avec  $k$  élément de  $\mathbb{R}^+$  et  $j$  est l'une des fonctions de références et  $\ell$  est un réel.

Cet algorithme s'appuie sur le complexe technologique-théorique

- a) Opérations algébriques sur les fonctions numériques d'une variable réelle (structures algébriques sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ) (addition, multiplication, passage à l'inverse, racine, élévation au carré). Le corps des nombres réels et ses propriétés
- b) Règles de calculs sur les infiniment petits et infiniment grands.

Si  $k \in \mathbb{R}$  alors  $\begin{cases} k + \infty = +\infty \\ k - \infty = -\infty \end{cases} ; \begin{cases} k \times \infty = \infty \\ \frac{k}{\infty} = 0 \end{cases} \quad (+\infty)(-\infty) = -\infty; \infty + \infty = +\infty; -\infty - \infty = -\infty$

- c) Majoration, minoration d'une fonction

On voit que c'est l'algèbre des limites qui est l'OM sous-jacente.

L'analyse des programmes nous a permis de mettre en évidence deux genres de tâches :

(GT1) « Calculer la limite de  $f$  en  $a$  » et (GT2) « GT2 : montrer que la limite lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  de  $g(x)$  égale à  $\ell$  en établissant une majoration de type :  $|g(x_0 + \square) - \ell| \leq k \times |j(h)|$  avec  $k$  élément de  $\mathbb{R}^+$  et  $j$  est l'une des fonctions de références et  $\ell$  est un réel ».

GT1 et GT2 mettent en jeu la combinaison de fonctions de références, la définition de la fonction  $f$  par son expression algébrique explicite. La seule différence entre GT1 et GT2 se situe au niveau du calcul de la limite en un point  $a$  qui est infini dans le cas du premier type de tâche, et qui est un réel fini dans le second type de tâche.

### 1.3.2. Organisation didactique

Pour l'enseignement de la notion de limite, on peut suivre les étapes suivantes :

- Choisir des fonctions de références de limite nulle en 0. Faire émerger l'idée intuitive de la limite en mettant en interaction le cadre numérique, géométrique et algébrique.
- Rappeler les propriétés de la valeur absolue, minoration, majoration (encadrement d'une fonction),
- Et en fin donner sans démontrer les propriétés et les techniques de calcul des limites.

Commentaire : on s'aperçoit ici que ce n'est pas le sens la notion de limite qui est visé ; mais les techniques pour calculer des limites. Donc l'organisation mathématique qui existe dans le programme et les savoir-faire sur la notion de limite correspond à l'algèbre des limites. Le modèle épistémologique dominant est l'algèbre des limites, le modèle praxéologique dominant est constitué d'organisations mathématiques autour des techniques de calcul de limites. Cela suscite la question suivante : Quelles sont les contraintes et les restrictions qui pèsent sur la notion de limite pour qu'elle vive de cette façon en terminale science exactes ?

Comme contraintes, on peut citer la réduction du volume horaire attribué à l'enseignement de la notion de limite, les restrictions faites par le programme, le fait que les programmes ne sont jamais épuisés, les conceptions non adéquates des enseignants sur la notion de limite. Les grèves des enseignants et des élèves.

#### 1.4. Par rapport aux manuels

Nous avons analysé le manuel de référence, la collection CIAM 1ère SM de la 11<sup>ème</sup> Sciences 1998. La collection CIAM a été mise à la disposition des enseignants durant la période 1992/2010 de l'enseignement des mathématiques selon des Objectifs Pédagogiques Opérationnels (O.P.O.), l'enseignant définit au début du cours tous les objectifs, à la fin du cours, il construit conformément aux objectifs énoncés des énoncés d'exercices. Cependant, elle a été considérée par beaucoup d'enseignants de mathématiques comme un manuel institutionnel, ce qui n'est pas exact : il s'agissait d'une collection à caractère sous régional avec un noyau minimal partagé par tous les pays impliqués.

Dans le manuel, on précise en tout début que, la notion de limite est trop délicate pour être formalisée en 11<sup>ème</sup> SE donc elle sera introduite de manière intuitive.

Pour l'étude des limites : Limite d'une fonction en infini, Limite d'une fonction en  $x_0$ , Il donne une fonction définie par son expression algébrique explicite et sa courbe, puis un tableau de valeurs à compléter. Les questions posées font référence à la comparaison des fonctions, majoration, et la condition suffisante. Pour les six cas de limite : Limite d'une fonction en l'infini ; Limite infinie en l'infini ; Limite finie en l'infinie ; Limite d'une

fonction en un point  $x_0$ ; Limite finie en un point  $x_0$ ; Limite infinie en un point  $x_0$ . Et enfin, il donne la propriété erronée suivante : « **soit une fonction  $f$  définie en  $x_0$ , si  $f$  admet une limite en  $x_0$  alors la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  est égale à  $f(x_0)$**  » (CIAM 1<sup>ère</sup> SM, 1998, p. 228).

Cette propriété s'érige en obstacle pour la compréhension de la notion de limite en un point. Ici on confond la limite et la continuité d'une fonction en un point  $x_0$ , et la limite et l'image. Pour illustrer leur définition, il présente la situation suivante : La fonction  $h$  définie par :  $h(x) = \frac{\sin x}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $h(0) = \frac{1}{2}$ , et il affirme que  $h$  n'admet pas de limite en 0. Ici  $h$  admet bien et bien une limite en 0 ; mais elle n'est pas continue en 0. Par ailleurs on trouve dans ce même manuel que  $h(x) = \frac{\sin x}{x}$  a pour limite 1 en 0. Ce livre utilise deux définitions de la limite :

Définition D1  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$  ;

Définition D2 :  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Avec la définition D1,  $x$  peut être égal à  $x_0$  et dans ce cas, la définition devient :  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x_0 - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - \ell| < \varepsilon$ , cela veut dire que  $\ell = f(x_0)$ . La propriété ci-dessus découle de la définition D1. Cette définition prend en compte la continuité en un point  $x_0$ .

Ce manuel privilégie le cadre numérique. Il utilise le cadre géométrique, mais sans aucun commentaire. Le graphique sert d'illustration et rien d'autre. La preuve en est que le repère en jeu n'est pas gradué. Il fait interagir le cadre algébrique et le cadre numérique, à partir de cette interaction, il fait remarquer que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ . Or, avec cette interaction, on part de  $x$  pour calculer  $f(x)$ . Cela peut conduire à l'interprétation suivante : lorsque  $x$  s'approche de  $x_0$ , alors  $f(x)$  s'approche de  $\ell$  ou de  $f(x_0)$ . Ce qui est la démarche inverse de pour que  $f(x)$  s'approche de  $\ell$  aussi proche qu'on veut, il suffit de prendre  $x$  suffisamment proche de  $x_0$ . Malgré la déclaration faite au début, il rajoute une ébauche de raisonnement. Ce qui montre la nécessité d'une formalisation. Ce manuel est un peu en contradiction avec son préambule. Il fait référence à la définition D1 ; mais utilise la définition D2 pour son introduction. La définition D2 est la mieux appropriée pour une méthode intuitive. Les propriétés relatives à la limite d'une fonction en un point  $x_0$  fini qui sont présentes dans ce manuel sont :

Propriété 1 :

Soit  $f$  une fonction définie en  $x_0$ . Si  $f$  admet une limite en  $x_0$ , alors :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

## Propriété 2

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que  $f \leq g$  sur intervalle  $]A ; +\infty[$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$  alors  $\ell \leq \ell'$

Limites et opérations sur les fonctions

Les propriétés présentées sous forme de tableaux sont admises. Elles donnent les limites en  $x_0$  des fonctions  $f+g, fg, 1/g, |f|$ , et  $\sqrt{f}$  connaissant les limites en  $x_0$  des fonctions  $f$  et  $g$ .

Limite de la somme de deux fonctions :

Cadre 1: Limites et opérations sur les fonctions

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\ell'$	$\ell'$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Source : Collection CIAM 1<sup>ère</sup> SM, 1998, p.

Cadre 2: Limite du produit de deux fonctions  $f$  et  $g$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\ell'$	$\ell'(\ell' \neq 0)$	$\ell'(\ell' \neq 0)$	0.	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x)$	$\ell\ell'$	$+\infty, \text{ si } \ell' > 0$ $-\infty, \text{ si } \ell' < 0$	$-\infty, \text{ si } \ell' > 0$ $+\infty, \text{ si } \ell' < 0$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Source : Collection CIAM 1<sup>ère</sup> SM, 1998, p.

Lorsque  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  alors, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^n(x) = \ell^n$

Cadre 3: Limite de l'inverse d'une fonction

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$l(l \neq 0)$	$+\infty$ ou $-\infty$	$0 \text{ et } f(x) > 0$	$0 \text{ et } f(x) < 0$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Source collection CIAM 1<sup>ère</sup> SM, 1998, p.

Pour calculer la limite de  $f$  en  $x_0$  de  $\frac{f}{g}$ , il suffit de remarquer que  $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$  et d'utiliser les propriétés précédentes.

Cadre 4: La limite de la valeur absolue

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\ell$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} ( f )(x)$	$ \ell $	$+\infty$

Source collection CIAM 1<sup>ère</sup> SM, 1998, p.



Cadre 5: Limite de la racine carrée d'une fonction

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\ell (\ell \geq 0)$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (\sqrt{f})(x)$	$\sqrt{\ell}$	$+\infty$

Source collection CIAM 1<sup>ère</sup> SM, 1998, p.

Propriété 3

Soit  $f$  une fonction,  $x_0$  un nombre réel et  $x \mapsto ax+b$  une fonction affine non constante. La fonction  $x \mapsto f(ax+b)$  admet une limite en  $x_0$  si et seulement si  $f$  admet une limite en  $ax_0+b$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(ax+b) = \lim_{u \rightarrow ax_0+b} f(u).$$

Par rapport à l'organisation mathématique du manuel CIAM 1<sup>ère</sup> SM, nous avons identifié 04 types de tâches : (T<sub>1</sub>) « Conjecturer à l'aide de la calculatrice le comportement d'une fonction définie par son expression algébrique lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus grandes », (T<sub>2</sub>) « Conjecturer la limite d'une fonction définie par sa représentation graphique en plus ou moins l'infini et en un point  $a$  de  $\mathbb{R}$ . », (T<sub>3</sub>) « Calculer la limite d'une fonction définie par son expression algébrique explicite en  $a$  et en plus ou moins infini » et (T<sub>4</sub>) « Étudier la limite en  $a$  d'une fonction ( avec  $a$  fini ou non ) ».

Nous avons identifié aussi deux genres de tâches : GT1 : « conjecturer à la limite d'une fonction en  $a$  » et « GT2 : calculer la limite d'une fonction en  $a$  ». GT1 et GT2 mettent en jeu la caractérisation d'une fonction par son expression algébrique explicite, la courbe représentative d'une fonction et la détermination de la limite d'une fonction en un point  $a$  fini et infini. Les types de tâches et les tâches liées à ces genres de tâches peuvent être accomplies en utilisant deux techniques :

$\tau_1$  : calcul de  $f(a)$  si  $f$  est définie en  $a$ , factorisation et simplification, rationalisation et simplification si on a une indétermination, et application des propriétés.

$\tau_2$  : encadrement de  $f$  par deux fonctions qui ont la même limite

Ces techniques sont justifiées par le complexe Technologique-théorique :  $[\Theta / \Theta]$  composé par l'usage de la calculatrice graphique, la majoration, la minoration, les encadrements et les opérations sur les infiniment petits et infiniment grand.

Ce manuel ne traite pas la question : montrer que  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $a$ . Il ne présente pas non plus la définition formelle de «  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $a$  ». Cependant il propose des exercices qui font appelle à la définition formelle de la limite à l'infini d'une fonction, comme le cas de la figure 48.

Figure 48 extrait du manuel Collection CIAM 1ère SM 1998

**4** Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = x - \sqrt{x}$ .

- Démontrer que :  $\forall x \in ]4 ; +\infty[ , f(x) > \sqrt{x}$ .
- a) Trouver un nombre réel  $A$  pour lequel :  $x > A \Rightarrow f(x) > 10^4$ .
- b)  $B$  étant un nombre réel strictement positif, trouver un nombre réel  $A$  pour lequel :  $x > A \Rightarrow f(x) > B$ .
- c) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

**5** Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ .

- Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* , |f(x) - 1| < \frac{1}{x}$ .
- a) Trouver un nombre réel  $A$  pour lequel :  $x > A \Rightarrow |f(x) - 1| < 10^{-4}$ .
- b)  $\varepsilon$  étant un nombre réel strictement positif, trouver un nombre réel  $A$  pour lequel :  $x > A \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$ .
- c) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

**6** Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ .

- Démontrer que :  $\forall x \in ]1 ; +\infty[ , f(x) > \frac{x}{2}$ .
- a) Comment choisir  $x$  pour que :  $|f(x)| > 10^6$  ?
- b) Peut-on rendre  $f(x)$  aussi grand que l'on veut ?
- c) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

Source : Collection CIAM 1<sup>ère</sup> SM 1998, p.241)

Dans tous les cas de calcul de limite en un point  $x_0$ , on constate que  $x_0$  n'appartient pas à  $Df$  de la fonction. Il n'est pas conforme au modèle épistémologique de référence proposé par le programme, et comme c'est le manuel de référence il va beaucoup influencer les pratiques de classe.

Le cours du manuel CIAM est structuré de la façon suivante : Limite d'une fonction en infini- limite infinie, limite finie, Limite d'une fonction en  $x_0$ -limite infinie, limite finie, limite à gauche, limite à droite, Calculs de limites- propriétés de comparaison (majoration, minoration, encadrement), limites et opérations sur les fonctions (addition, multiplication et composition).

Les savoirs et ou connaissances que doivent être appris par les élèves en appliquant ce modèle se limitent aux techniques de calcul des limites d'une fonction en un point. La construction de solution et la démonstration qui font la particularité de l'analyse sont laissées de côtés. On constate que l'on tente de contourner les difficultés pour un début ; mais ces difficultés sont-elles traitées ou corrigées dans un futur proche, puisque l'objectif de l'enseignement est de faire évoluer les conceptions ? L'étude des classes supérieures nous aidera à répondre à cette question.

A partir de 1991, on constate l'abandon progressif de la définition formalisée de la limite, on fait une étude intuitive, on ne fait aucune démonstration et on étudie la notion de limite avant la continuité. On définit aussi la continuité à partir de la limite.

Pourquoi on abandonne la définition formelle ? Pourquoi enseigne-t-on maintenant la limite avant la continuité ?

La réponse à la première question est que la définition formelle est difficilement accessible aux élèves ; mais elle est aussi difficile pour les enseignants et l'on sait d'après H Poincaré que.

Sans doute, il est dur pour un maître d'enseigner un raisonnement qui ne le satisfait pas entièrement ; et ce ne sera à ses yeux qu'un palliatif insuffisant de dire : nous admettons que, où : il arrive souvent que, au lieu de dire : il est évident que. Mais, la satisfaction du maître n'est pas l'unique objet de l'enseignement, et on doit se préoccuper avant tout de ce qu'est l'esprit de l'élève et de ce qu'on veut qu'il devienne. (POINCARÉ, H. 1899, p. 4)

Pour la deuxième question, le fait d'enseigner la continuité avant la limite peut amener les élèves à confondre l'étude de la limite, la limite et l'image.

## 1.5. Les manuels du supérieur

### 1.5.1 Mathématiques tout-en-un pour la licence niveau L1

Nous analysons, entre autres, principalement le manuel intitulé « Mathématiques tout-en-un pour la licence niveau L1 », 2006. Dans ce manuel on définit la limite à partir des suites : « On dit qu'une fonction  $f$  admet une limite  $\ell$  au point  $a$  si, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Df - \{a\}$  de limite  $a$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ . On écrit alors  $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , ou  $f(x) \rightarrow_a \ell$  etc. (Mathématiques tout-en-un pour la licence niveau L1, 2006, p. 588) ».

Il ne donne pas la définition formelle de la limite, mais il donne une caractérisation de la continuité sous forme de théorème :

**Théorème 1 (caractérisation de Weierstraß).** Une fonction  $f$  est continue en un point  $a \in Df$ , si et seulement si :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in Df, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ . (Mathématiques tout-en-un pour la licence niveau L1, 2006, p. 590) ».

Et il fait la démonstration du théorème 1. Dans ce manuel il n'y a pas d'exercice sur l'application de la définition formelle, les types de tâches se limitent à l'étude de la limite en un point et à l'infini.

### **1.5.2 Le manuel Mathématiques tome 1 de F. Liret et M. Zisman Bordas, Paris 1983.**

Ce manuel tente de clarifier la différence entre limite et la proximité et le voisinage avant de donner la définition littérale et formelle de  $\ell$  est la limite de  $f$  au point  $a$ .

#### Définition

Soit  $U = ]a, b[$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soit  $x_0 \in ]a, b[$  et  $\ell \in ]-\infty, +\infty[$ , soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ , ou que la limite de  $f$ , lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ , est  $\ell$ , si  $f(x)$  devient aussi près que l'on veut, pourvu que  $x$  soit suffisamment près de  $x_0$ , sans jamais se confondre avec lui.

Nous pouvons encore exprimer cette définition sous la forme équivalente suivante : quel que soit un voisinage donné de  $\ell$ , alors le phénomène suivant est vérifié au voisinage de  $x_0$  lorsque  $x$  parcourt  $U$  privé du point  $x_0$  : " $f(x)$  appartient au voisinage donné de  $\ell$ ". (MATHS tome 1 de F. LIRET et M. ZISMAN BORDAS, Paris 1983, p. 76)

Il donne des applications de la définition formelle qui illustrent l'aspect covariant et contra-variant de la définition formelle. On y rencontre aussi un exemple sur des types de tâches comme « montrer que  $\ell$  n'est pas la limite de  $f$  en un point  $x_0$  », et les démonstrations des propriétés sur les limites et opérations.

Ce manuel ne traite pas les obstacles épistémologiques de la limite tels que la limite peut être atteinte ou non, l'effacement des quantificateurs et leur ordre, le principe de continuité etc. ; mais son contenu aide à les traiter. Il fait un travail important sur les connaissances nécessaires pour la compréhension de la définition formelle.

Nous allons nous inspirer du modèle praxéologique de ce manuel pour construire le nôtre. Une organisation mathématique autour de l'algèbre des limites et une organisation mathématique autour de la topologie de limites.

### **1.5.3 Cours de mathématiques A. Doneddu Analyse tome 8, 1985**

Le second manuel que nous analysons est « cours de mathématiques A. Doneddu Analyse tome 8, 1985 ». Ce manuel définit d'abord la notion de continuité et après il définit la notion de limite en un point à l'aide de la continuité en un point. Les définitions des notions

de continuité et de limites sont des définitions topologiques. Dans ce manuel on constate une confusion entre la limite et la continuité en un point  $a$ .

Nous récapitulons dans le tableau 4 les principales approches proposées par les manuels scolaires que nous avons analysés.

Dans les programmes de mathématiques au secondaire le modèle épistémologique correspond à une construction didactique pour faire émerger la définition intuitive. Elle essaye de donner la signification d'épsilon ; cependant la signification de delta n'est pas évoquée, et c'est delta qui est à construire.

Tableau 5 - Tableau récapitulatif

Niveau et collection	Type de définition	Cadres et registres	Prise en compte de Df	Confusion entre limite et continuité	OM
1 <sup>ère</sup> CDE ALEPH1	Intuitive et formelle	Algébrique et géométrique	Oui	Non	Topologie des limites
1 <sup>ère</sup> scientifique Transmath	Intuitive Sémi-formelle	Algébrique et géométrique	Implicite	Non	Algèbre des limite
Term B ALEPH0	Formelle	Algébrique	Oui	Non	Topologie de limites
CIAM 1 <sup>ère</sup> SM	Intuitive	Algébrique, géométrique et numérique	Non	Oui	Algèbre des limites
IRMA 1 <sup>ère</sup> CE	Intuitive	Algébrique et géométrique	Oui	Non	Algèbre des limites
IRMA 1 <sup>ère</sup> D	Intuitive et formelle	géométrique, algébrique et numérique	Oui	Oui	Algèbre des limites
IRMA Terminale CE	Intuitive Sémi-formelle	Algébrique	Oui	Non	Algèbre des limites
1 <sup>ère</sup> SE Transmath	Intuitive	Algébrique et géométrique	Oui	Oui	Algèbre des limites
Mathématiques tout-en-un pour la licence niveau L1	A partir des suites (convergence)	Algébrique	Oui	Non	Topologie des limites
Maths tome1 F. loret et M. Zisman	Intuitive et formelle	Algébrique et géométrique	Oui	Non	Topologie des limites
Doneddu tome 8 analyse	Formelle	Algébrique	Oui	Oui	Topologie des limites

Source : Construction de l'auteur de cette thèse

## 2. Organisations mathématiques autour de la notion de limite dans les manuels

Nous identifions les types de tâches suivantes : « calculer lorsqu'elle existe la limite (finie ou non) en  $x_0$  ( $x_0$  fini ou non) d'une fonction qui est une combinaison de fonction de

références » et « montrer que la limite lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  de  $g(x)$  égale à  $\ell$  en établissant une majoration de type :  $|g(x_0 + \square) - \ell| \leq k^* |j(h)|$  avec  $k$  élément de  $\mathbb{R}^+$  et  $j$  est l'une des fonctions de références et  $\ell$  est un réel ».

Pour accomplir les tâches de ces types de tâches, les techniques sont basées pour la plupart sur l'algorithme suivant :

- a) remplacer dans  $f(x)$   $x$  par  $x_0$  ;
- b) si  $f(x_0)$  n'est pas une forme indéterminée «  $0/0$  ;  $+\infty - \infty$  ;  $0 \times \infty$  ;  $\frac{\infty}{\infty}$  » alors  $f(x_0)$  est la limite ;
- c) si non alors il faut lever l'indétermination par des techniques de calcul sur des expressions algébriques (factorisation, recherche de l'expression conjuguée, simplification) ;
- d) si malgré ces opérations l'indétermination n'est pas levée on dit alors que  $f$  n'a pas de limite en  $x_0$ .
- c) établir une majoration du type  $|g(x_0 + \square) - \ell| \leq k^* |j(h)|$  avec  $k$  élément de  $\mathbb{R}^+$  et  $j$  est l'une des fonctions de références et  $\ell$  est un réel.

Le complexe technologique-théorie suivant justifie ces techniques :

- a) Opérations algébriques sur les fonctions numériques d'une variable réelle (structures algébriques sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ) (addition, multiplication, passage à l'inverse, racine, élévation au carré) ;
- b) Règles de calculs sur les infiniment petits et les infiniment grands.

Si  $k \in \mathbb{R}$  alors  $\begin{cases} k + \infty = +\infty \\ k - \infty = -\infty \end{cases} ; \begin{cases} k \times \infty = \infty \\ \frac{k}{\infty} = 0 \end{cases} \quad (+\infty)(-\infty) = -\infty ; \infty + \infty = +\infty ; -\infty - \infty = -\infty$

### 3. Organisation didactique :

Nous observons que l'organisation didactique s'appuie sur les choix suivants :

- Choisir des fonctions de références de limite nulle en 0.
- Faire émerger l'idée intuitive de la limite en mettant en interaction les cadres numériques, graphique et algébrique.
- Rappeler les propriétés de la valeur absolue, minoration, majorer (encadrement d'une fonction), donner sans démonstration les propriétés et les techniques de calcul des limites.

Le modèle épistémologique dominant dans les manuels est l'algèbre des limites.

### 3.1. Organisation mathématique de la notion de limite dans les manuels de la période 1992 à nos jours

L'analyse des manuels de cette période nous permet de mettre en évidence le type de tâche le plus fréquent. Il s'agit de « calculer lorsqu'elle existe la limite (finie ou non) en  $x_0$  ( $x_0$  fini ou non) d'une fonction qui est une combinaison de fonction de références ». Comme dans le cas précédent, les techniques sont basées pour la plupart sur l'algorithme suivant :

- a) remplacer dans  $f(x)$   $x$  par  $x_0$  ;
- b) si  $f(x_0)$  n'est pas une forme indéterminée «  $0/0$  ;  $+\infty - \infty$  ;  $0 \times \infty$  ;  $\frac{\infty}{\infty}$  » alors  $f(x_0)$  est la limite ;
- c) si non alors il faut lever l'indétermination par des techniques de calcul sur des expressions algébriques (factorisation, recherche de l'expression conjuguée, simplification) ;
- d) si malgré ces opérations l'indétermination n'est pas levée on dit alors que  $f$  n'a pas de limite en  $x_0$ .

L'usage de cet algorithme s'appuie sur le complexe technologique-théorique dont les éléments suivent :

- a) Opérations algébriques sur les fonctions numériques d'une variable réelle (structures algébriques sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ) (addition, multiplication, passage à l'inverse, racine, élévation au carré) ;
- b) Règles de calculs sur les infiniment petits et infiniment grands.

Si  $k \in \mathbb{R}$  alors  $\begin{cases} k + \infty = +\infty \\ k - \infty = -\infty \end{cases} ; \begin{cases} k \times \infty = \infty \\ \frac{k}{\infty} = 0 \end{cases} \quad (+\infty)(-\infty) = -\infty ; \infty + \infty = +\infty ; -\infty - \infty = -\infty.$

Cette organisation correspond à l'OM 1, l'algèbre des limites. Dans les manuels de 1972 à 1992 : c'est l'OM topologie des limites avec parfois une combinaison avec l'algèbre des limites que nous rencontrons. Cela confirme les résultats de Boch et al. (2003) qui disent qu'il y a une bicéphalie, un praxis sans le logos et un logos technologique-théorique sans praxis déconnectée.

### 3.2. Organisation didactique autour de OM 1

Pour enseigner l'OM 1, on peut suivre le schéma suivant :

1. Faire émerger l'idée intuitive de la limite en mettant en interaction les cadres géométrique et algébrique ;
2. Rappeler les propriétés de la valeur absolue, minoration, majoration (encadrement d'une fonction) ;

3. Donner sans démontrer les propriétés et les techniques de calcul des limites,
4. Enfin, faire des applications.

### **3.2.1. Dimension économique**

Les praxéologies construites autour du concept de limite en un point permettent de calculer des limites en un point ; mais elles nous éloignent du sens mathématique de la notion et elles sont inefficaces face à des types de tâches telles que : « Montrer que  $\ell$  est la limite de  $f$  au point  $a$  » et « Montrer que  $\ell$  n'est pas la limite de  $f$  au point  $a$  ».

De plus, nous faisons l'hypothèse que les connaissances mobilisables dans ces praxéologies ne font pas évoluer les conceptions des apprenants. Dans cette OM 1, il manque le bloc Technologie-théorie (la justification des propriétés sur les limites). Elle ne permet pas l'acquisition du sens mathématique de la limite, mais elle permet de manipuler des techniques liées au concept de limite.

Il y a nécessité de revoir ces praxéologies pour permettre aux apprenants de construire de nouvelles connaissances et aussi faire évoluer leurs conceptions sur la notion de limite.

### **3.2.2. Dimension écologique**

Nous constatons à travers cette étude que l'enseignement de la notion de limite a connu des modifications dans les textes des programmes et aussi dans les manuels. Son habitat est le niveau de la onzième année dans l'étude des fonctions numériques d'une variable réelle et les suites numériques, ses niches sont la définition de la dérivée, la détermination de la valeur exacte de la solution d'une équation, étude du sens de variation d'une fonction, condition de convergence d'une suite, le théorème fondamental de l'analyse.

### **3.2.3. La raison d'être de la définition formelle**

La rupture entre l'algèbre et l'analyse, la rigueur mathématique, la topologie des limites, la valorisation des acquis de la logique et une entrée dans la logique des prédicats, l'actualisation et le réinvestissement des notions telles que la valeur absolue, la distance, les inéquations avec valeur absolue, convergence d'une suite, preuve et réfutation (montrer que  $\ell$  est ou non la limite de  $f$  en  $a$ ), le traitement des obstacles épistémologiques, elle est formalisatrice, unificatrice, généralisatrice et simplificatrice etc. constituent la raison d'être du concept de limite.

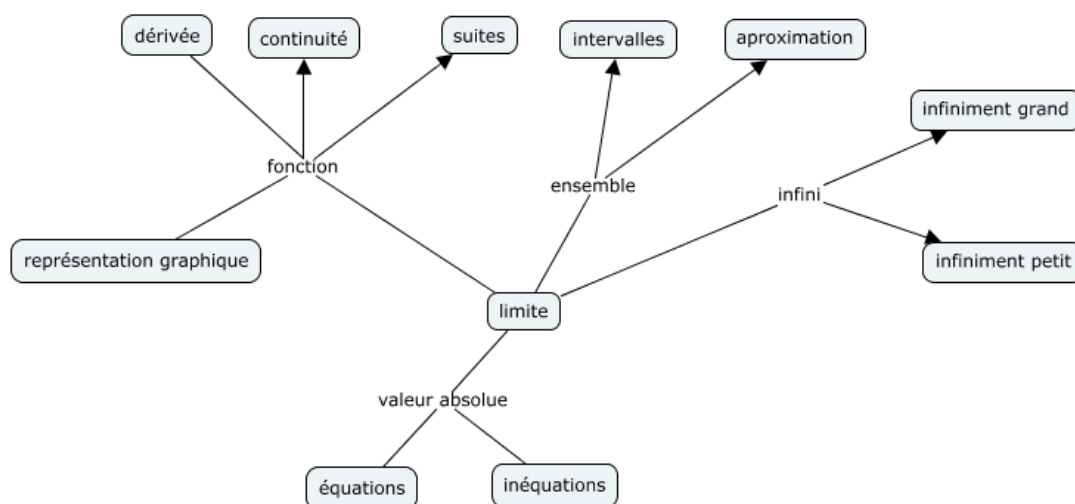


### 3.2.4. Synthèse

Cette analyse montre que l'enseignement de la notion de limite au Mali a connu des changements. Au départ, on enseignait les définitions intuitives et formelles en 1<sup>ère</sup> et en terminale avec des exercices d'application, ensuite c'est la définition intuitive de la notion qui est enseignée avec une pseudo formalisation avec des applications, ensuite c'est la définition intuitive de la notion qui est enseignée puis sa formalisation sans aucun exemple d'application et enfin on enseigne tout simplement la définition intuitive sans formalisation. Au début, on enseignait la continuité avant la notion de limite et celle-ci était définie à l'aide de la continuité, actuellement c'est dans l'ordre inverse et les types de tâches se limitent au calcul de limites en appliquant les règles et des propriétés sur les limites qui sont énoncées dans le cours sans démonstration.

On constate un abandon progressif de la définition formelle et son application au secondaire, cela suppose qu'elle va resurgir à un autre niveau, c'est-à-dire au supérieur. Nous constatons qu'au supérieur la définition formelle ressurgie, elle n'est pas construite et on donne quelques cas simples d'application pour la faire fonctionner (cas des fonctions affines). Ces cas n'illustrent pas la définition formelle dans toutes ses dimensions (contravariance, covariance et la dialectique entre les deux). C'est l'aspect contra-variant qui est mis en avant dans les cours de l'Université. Les obstacles tels que "la limite peut être atteinte ou non", les obstacles logiques ne sont pas traités, en d'autres termes on ne fait pas une étude minutieuse de la limite pour faire évoluer les conceptions des étudiants. La limite est enseignée comme une notion dynamique et d'approximation, alors que c'est une notion statique dans sa définition mathématique précise.

Figure 49 - Modèle Épistémologique de Référence extrait des manuels scolaires



Source : Construction de l'auteur

Comme on peut le constater la figure 49, la notion de limite n'est pas mise en relation avec tout son champ conceptuel, la logique et d'autres aspects importants manquent. Avec ce modèle épistémologique, les élèves apprennent à factoriser et simplifier les expressions des fonctions rationnelles, à décomposer en élément simples une fonction, rendre rationnelle le dénominateur et ou le numérateur d'une fonction irrationnelle, donner un sens à epsilon. Ils n'ont pas accès aux significations de delta, de l'implication, et les quantificateurs qui permettent de donner un sens à la définition formelle de la limite.

Nous allons tenir compte de ces observations pour construire et expérimenter des situations-problèmes qui prennent en charges ces insuffisances dans l'enseignement de la notion de limite dans le prochain chapitre.

## CHAPITRE V- CONSTRUCTION ET MISE EN ŒUVRE DU DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Ce chapitre comporte deux parties : la stabilisation des connaissances connexes qui permettent d'agir sur la notion de limite et les situations-problèmes sur la construction et l'application de la définition formelle de la limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point  $a$  fini. Nos situations-problèmes s'adressent à des élèves de la terminale Sciences Exactes.

La première partie a pour objectifs la vérification et la mise en place sinon la consolidation des connaissances connexes à la notion de limite et la deuxième vise la construction et la mise en application de la définition formelle de la limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point  $a$  fini. Pour cela nous avons construit des situations avec un double objectif : la vérification de ces connaissances connexes d'une part et travailler sur leur stabilisation d'autre part, en nous appuyant sur la théorie des Registres de Représentation Sémiotiques de R. Duval.

La notion de registre sémiotique introduit par Duval (1993) est associée à l'hypothèse que la conceptualisation mathématique passe par la capacité d'identifier un concept dans diverses représentations sémiotiques et qu'elle nécessite un travail spécifique sur l'articulation de ces registres. (DUVAL, 1993 cité par JULIO MORENO, COLETTE LABORDE 2003, p. 1)

Le concept de limite fonctionne dans plusieurs cadres : algébrique, numérique et géométrique. Il admet aussi plusieurs registres de représentation : le langage naturel, les expressions algébriques, la représentation graphique des courbes, les tableaux numériques, etc. Le travail dans un même cadre peut faire appel à un ou plusieurs registres de représentation et le changement de cadres implique nécessairement des passages entre registres. La notion de fonction est fondamentale dans la compréhension de la notion de limite. Elle est une notion complexe pour les élèves.

La notion de fonction est complexe car elle est abordée grâce à une multitude de représentations sémiotiques, celles-ci sont apportées presque en même temps. L'enseignement en seconde aborde bien ces différents registres et pour les élèves la notion de fonction reste importante durant les années de 1ère et Terminales. Il est donc essentiel que cette notion soit comprise et que les élèves ne confondent pas toutes les représentations et qu'ils puissent passer de l'une à une autre. Les élèves ont des difficultés à manipuler les représentations car ils n'en connaissent pas toujours les règles et les contraintes qui y sont associées. Ils ne savent pas choisir la plus efficace pour répondre à une question. (MELANIE DELAPORTE, 2015, p. 12)

Les notions d'intervalle, de valeur absolue et d'ordre dans  $\mathbb{R}$  (inéquations avec valeur absolue), de quantificateurs, d'implication, d'infini et de représentation graphique sont incontournables pour la compréhension et la mise en marche de la définition formelle de la limite, c'est pour cette raison que nous avons élaboré quelques situations sur ces différentes notions pour vérifier leur disponibilité et leur stabilisation s'il y a lieu.

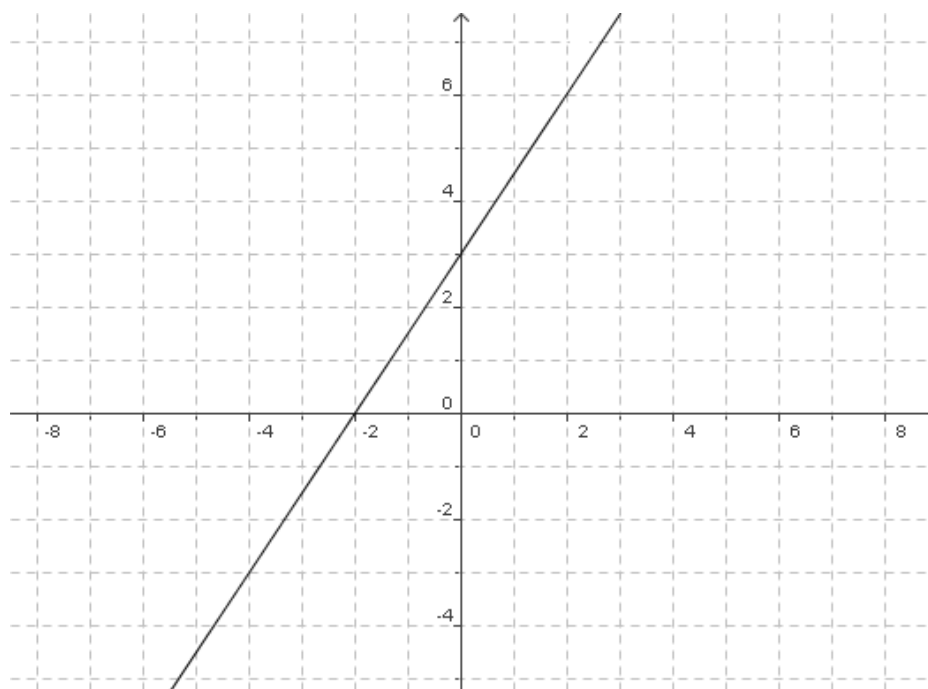
## 1. Stabilisation du milieu

### Situation 1

Les représentations suivantes sont celles d'une fonction affine ou affine par intervalles dans un repère orthonormé fixé. Dans chaque cas, déterminer l'expression explicite algébrique de la fonction  $f$  et l'ensemble de définition de  $f$ .

a)

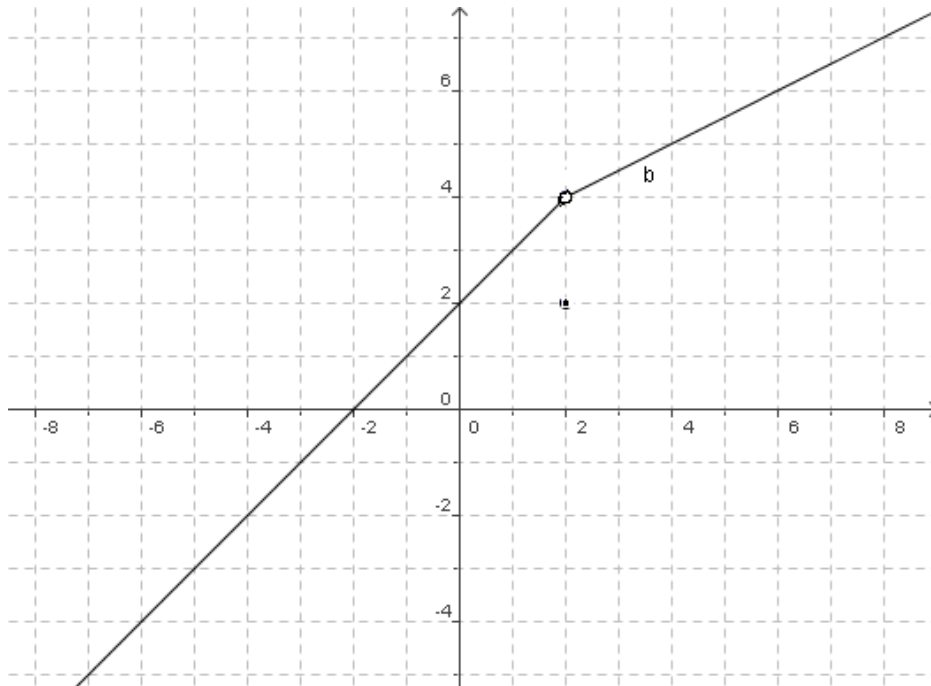
Figure 50 – Représentation de la fonction  $f$



Source construction de l'auteur

b).

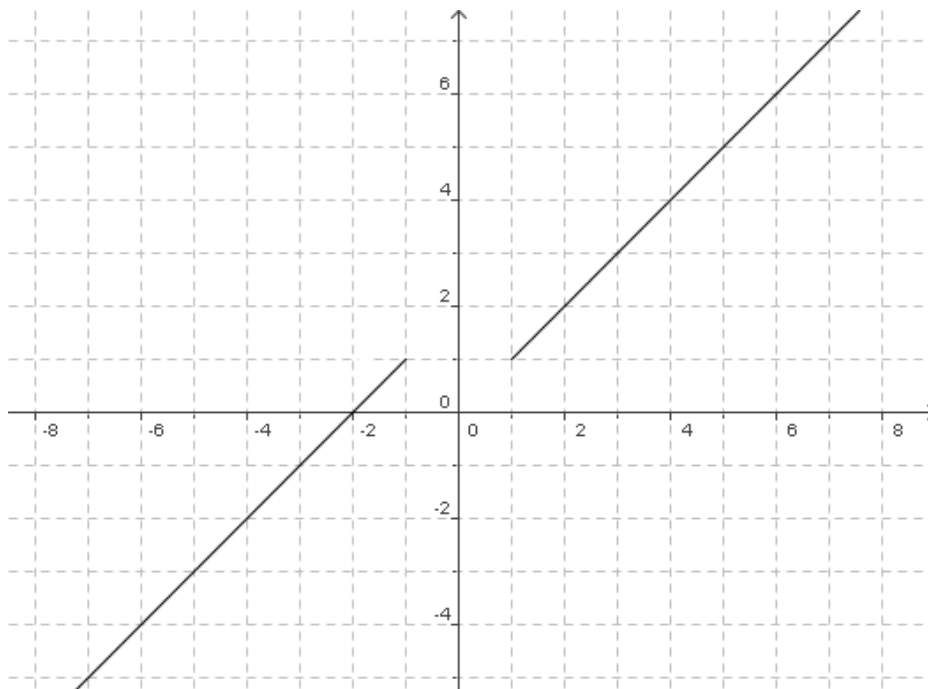
Figure 51 – Représentation de la fonction par morceaux



Source construction de l'auteur

c)

Figure 52 – Représentation de la fonction présentée à l'item c) la situation 1



Source construction de l'auteur

Nos objectifs sont :

- Déterminer l'expression explicite algébrique d'une fonction affine ou affine par intervalles définie par sa représentation graphique dans un repère orthonormé ;
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction affine ou affine par intervalles définie par sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

### 1.1. Analyse a priori de la situation 1 :

#### 1.1.1. Analyse mathématique :

Cette analyse consiste à résoudre la situation en présentant les différentes techniques de résolution.

a) la courbe de  $f$  est une droite affine. Donc l'expression algébrique de  $f(x)$  est de la forme  $ax+b$ .  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . La représentation graphique permet de s'apercevoir que : les points A (-2,0) et B (0,3) appartiennent à la courbe de  $f$  donc  $f(-2)=0$  et  $f(0)=3$   $\begin{cases} -2a + b = 0 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 3 \end{cases}$  par suite  $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$  est l'expression algébrique de  $f$ .

b) la courbe de  $f$  est la réunion de deux demi-droites et d'un point. Donc  $f$  est une fonction affine par intervalles et  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

Sur  $]-\infty; 2[$  la courbe de  $f$  est une demi-droite ;  $f(x)=ax+b$ . Les points A (-2,0) et B (0,2) appartiennent à la courbe de  $f$ .  $f(-2)=0$  et  $f(0)=2$   $\begin{cases} -2a + b = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$  et on obtient  $f(x) = x+2$  et  $f(2)=2$ .

Sur  $]2; +\infty[$  la courbe de  $f$  est une demi-droite ;  $f(x)=ax+b$ . Les points A(4,5) et B(6,6) sont sur la courbe de  $f$  :  $f(4)=5$  et  $f(6)=6$ .  $\begin{cases} 4a + b = 5 \\ 6a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases}$  On obtient  $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$  soit en

$$\text{fin } f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{2}x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

c) la courbe de  $f$  est la réunion de deux demi-droites. Donc  $f$  est une fonction affine par morceaux  $f$  est définie sur  $]-\infty; -1] \cup ]1; +\infty[$ .

Sur  $]-\infty ; -1]$  la courbe de  $f$  est une droite donc  $f(x)=ax+b$ . la représentation graphique permet de s'apercevoir que les points A (-2,0) et B (-1,1) sont éléments de la représentation graphique de  $f$ .  $f(-2)=0$  et  $f(-1)=1$   $\begin{cases} -2a + b = 0 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$  on obtient  $f(x)=x+2$

Sur  $[1 ; +\infty [$  la courbe de  $f$  est une droite donc  $f(x)=ax+b$ . les points A(1,1) et B(2,2) sont éléments de la représentation graphique de  $f$ .  $f(1)=1$  et  $f(2)=2$   $\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$  on trouve  $f(x)=x$ . soit en fin

$$f(x)=\begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

### 1.1.2. Analyse didactique

Cette analyse consiste à déterminer la praxéologie, les connaissances mobilisables pour résoudre la situation, les variables didactiques et les cadres et registres en jeu dans la situation.

#### La praxéologie

Le principal type de tâche est « Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine représentée par son graphe dans un repère orthonormé ». Il prépare l'apprenant au jeu de cadres, changement de registres et le traitement au sein d'un même registre. Les tâches de ce type de tâches peuvent être accomplies de la façon suivante : ( $\tau_1$ ) : 1. Chercher deux points distincts de la droite d'équation  $y = ax + b$  et appliquer  $A(x_A, y_A) \in D \Leftrightarrow y_A = f(x_A)$  et  $B(x_B, y_B) \in D \Leftrightarrow y_B = f(x_B)$  un point appartient à une droite si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite , 2. On résout le système formé par les deux équations pour déterminer les inconnues  $a$  et  $b$ . ( $\tau_2$ ) : la Colinéarité de deux vecteurs : elle consiste à chercher deux points distincts de la droite A et B et considéré un point M (x, y) de la droite alors A, B et M sont alignés ce qui entraîne que  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 0$  . ( $\tau_3$ ) : le coefficient directeur : cette technique consiste à chercher deux points distincts de la droite A et B et considéré un point M(x, y) de la droite alors on a :  $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{x - x_A} = c$  (le coefficient directeur). Enfin ( $\tau_4$ ) : elle consiste à calculer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine à l'aide du graphique. Et utiliser la forme réduite d'une droite  $y = ax + b$ . les discours technologiques suivants permettent de justifier ces différentes techniques: « une droite est entièrement définie par deux points distincts ;  $A(x_A, y_A) \in D \Leftrightarrow y_A = f(x_A)$  (les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite D) » ; « les points situés sur une même droite sont alignés »,

« Connaisant deux points distincts d'une droite on peut calculer son coefficient directeur et un vecteur directeur de cette droite ». Les propriétés des fonctions affines et certains outils de la géométrie analytique plane. (La géométrie des fonctions affines) permettent de justifier ces technologies.

Ce type de tâche est du genre « déterminer l'expression algébrique d'une fonction », avec comme variables de type de tâches : la nature de la fonction et la représentation de la fonction qui ont pour valeurs respectives -  $f$  est une fonction affine ou affine par intervalles, -  $f$  est définie par sa représentation graphique.

Pour pouvoir résoudre cet exercice l'élève doit être capable de lire les informations pertinentes sur la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé fixé ; savoir que les coordonnées d'un point  $M$  de la représentation graphique ( $M \in Cf. \Leftrightarrow M(x, y) = M(x, f(x))$ ) savoir qu'un point est un segment à extrémités confondues ; reconnaître qu'une application affine a pour représentation graphique : une droite ou une réunion de segments de droites ou de demi-droites ; savoir qu'une droite affine est entièrement définie par la donnée de deux de ses points distincts ; savoir trouver l'ensemble de définition d'une droite définie par sa représentation graphique ; connaître les techniques de détermination de l'expression algébrique d'une droite à partir de deux de ses points distincts  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$ , on pose  $f(x) = ax + b$  et on résout le système d'inconnues  $a$  et  $b$   $\begin{cases} ax_A + b = y_A \\ ax_B + b = y_B \end{cases}$  pour trouver les valeurs de  $a$  et  $b$ . On peut aussi appliquer la colinéarité de deux vecteurs

$\vec{AB}$  est un vecteur directeur de la droite,  $M(x, y) \in Cf$  signifie que  $\det \begin{pmatrix} \vec{AM} & \vec{AB} \end{pmatrix} = 0$ .

On peut aussi calculer le coefficient directeur et calculer l'ordonnée à l'origine pour donner la forme réduite de la droite :  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$  est le coefficient directeur de la droite

$y = mx + p$  est l'équation réduite de la droite  $(AB)$  le fait que  $A \in (AB)$  détermine  $p$ .

### Variables didactiques de la situation 1

Nous avons organisé en deux catégories les variables, celles qui sont liées aux outils et aux conditions de travail et celles de la situation-problème

Pour les **variables didactiques liées aux outils et aux conditions de travail**, nous en avons identifié trois : **(V1) Le niveau scolaire des élèves** : nos situations s'adressent à des élèves de la 12<sup>ème</sup> sciences exactes. C'est en 11<sup>ème</sup> que les élèves rencontrent pour la première fois la notion de limite et son étude continue en 12<sup>ème</sup> SE au Lycée. Et se sont eux



qui ont la chance de devenir des mathématiciens, **(V2) Les matériels** : nous avons autorisé les matériels de géométrie tels que la règle, l'équerre et le quadrillage, la règle permet aux élèves de tracer les droites, le quadrillage permet aux élèves de lire avec précision les coordonnées d'un point de la courbe car il permet de faire des projections précises sur les deux axes du repère. S'ils ne disposent pas de matériels de géométrie, ils feront recours aux ostensifs (codes, projection à main levée etc.) et **(V3) l'organisation du travail des élèves** : nous avons choisi que le travail sera réalisé individuellement par les élèves, car cela permet à chaque élève de s'imprégner du problème, de s'engager dans un processus de résolution du problème. Il permet le déclenchement des différentes méthodes de résolution et les erreurs éventuelles que peuvent commettre les élèves. Il permet à chaque élève de connaître les difficultés qu'il a vis-à-vis du problème.

Nous n'envisageons pas le travail en groupe, par ce que notre objectif est de connaître les difficultés que chaque élève pourrait avoir dans la résolution de cette situation. Le travail en groupe ne permet pas le déclenchement des erreurs individuelles des élèves.

**Pour ce qui concerne les variables du problème, on en a cinq :****(V1) La nature de discontinuité de la fonction** : à cette variable nous avons attribué les valeurs suivantes: une fonction affine continue ; une fonction affine par intervalles discontinue en un point définie sur  $\mathbb{R}$  ; **et une** fonction affine par intervalles, discontinue sur un intervalle (définie avec un « saut »), **(V2) la représentation de la fonction** dans notre cas, la représentation de la fonction coupe les deux axes du repère en des points dont les coordonnées sont des valeurs entières. Lorsque la droite intercepte les deux axes du repère, cela facilite la recherche des points de la courbe (point d'abscisse nulle et celui d'ordonnée nulle) et par suite la recherche de l'équation de la droite, **(V3) le choix de la fonction affine ou affine par intervalles**. Ce choix n'est pas fortuit. Il devra permettre aux élèves de rentrer dans le problème, car c'est une fonction qui a été longtemps travaillée par les élèves. Ils connaissent, en principe, sa représentation graphique et son expression algébrique explicite, **(V4) la nature du repère et des questions**. Cette variable admet deux valeurs : le repère orthonormé et - repère non orthonormé. Nous avons choisi de réaliser les représentations dans un repère orthonormé, cela facilite la projection sur les axes du repère, et une question fermée, elle permet d'éviter les interprétations multiples. Les questions sont toutes fermées, et **(V5) les cadres et registres en jeu**. Les cadres géométrique et numérique permettent de faire émerger la notion intuitive de la limite et le cadre algébrique nous permet de nous convaincre avec précision sur la définition de la notion de limite en un point. Les situations mettent en jeu différents cadres et registres. Dans le cadre géométrique, la fonction est définie par sa représentation

graphique. Dans le cadre algébrique, il s'agit de trouver l'expression algébrique de la fonction, et dans le cadre numérique, les coordonnées des points, la graduation du repère. Nous avons le registre graphique qui permet de représenter la fonction, le registre numérique, les coordonnées des points sont des nombres, le registre de la langue naturelle et le registre symbolique qui permet l'écriture symbolique de la fonction  $f(x) = ax + b$   $\begin{cases} f(a) = b \\ f(p) = q \end{cases}$ . Les élèves, pour donner du sens à une notion, doivent pouvoir l'identifier dans des cadres différents et pouvoir la manipuler dans des registres différents, c'est-à-dire, pouvoir faire des traitements au sein d'un même registre et faire des conversions de représentation de registres à d'autres représentations de registres, au sens de Duval (1995).

### Les difficultés prévisibles

Les élèves peuvent reconnaître que  $f$  est une fonction affine, mais ils peuvent avoir des difficultés pour déterminer l'expression algébrique de  $f$ . Notamment dans l'interprétation de : A (a, b) élément de la courbe de  $f(x)$  : si, et seulement si  $f(a) = b$  (un point appartient à une droite si ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite, il est plus facile d'interpréter l'appartenance à une courbe dans le registre graphique que dans le registre symbolique ; puisque on vérifie si la droite passe par le point. Cependant, dans le registre algébrique on fait une caractérisation. Le point doit faire partie de l'ensemble image de  $f$ .

La distinction entre l'axe des abscisses et celui des ordonnées (confusion entre l'abscisse et l'ordonnée) peut être aussi une source de difficulté. Les techniques de détermination de l'expression algébrique.

L'élève peut bien choisir deux points ; mais en écrivant leurs coordonnées, ils peuvent les intervertir au lieu de A (a, b), il prend A (b, a). Ou bien après avoir trouvé deux points et leurs coordonnées, il peut commettre une erreur dans la technique qu'il va mettre en œuvre. La détermination de l'ensemble de définition dans le cas d'une fonction affine par intervalles : la détermination de chaque sous domaine et l'expression de  $f(x)$  dans chaque sous domaine.

### Situation 2 :

1- Tracer la représentation graphique des fonctions suivantes définies par :

$$a) f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad b) g(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x > 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad c) h(x) = 3x + 5$$

2- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

a)  $|x - 2| \leq 3$  b)  $|2x - 5| < 1$  c)  $|-x + 2| < 2$  d)  $|x + 3| \leq 2$

On écrira les solutions sous forme d'intervalles et de distances.

**Objectifs :**

Cette situation a pour objectifs de vérifier si les élèves savent :

- Représenter graphiquement une fonction affine, fonction affine par morceaux définie par son expression algébrique ;
- Résoudre des inéquations du premier degré à une inconnue comportant la valeur absolue.

**1.2. Analyse a priori de la situation 2 :**

**1.2.1 Analyse mathématique**

Comme précédemment, nous allons résoudre le problème et préciser après les techniques et les connaissances mobilisables pour la résolution.

Représentation graphique des fonctions

$$\begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

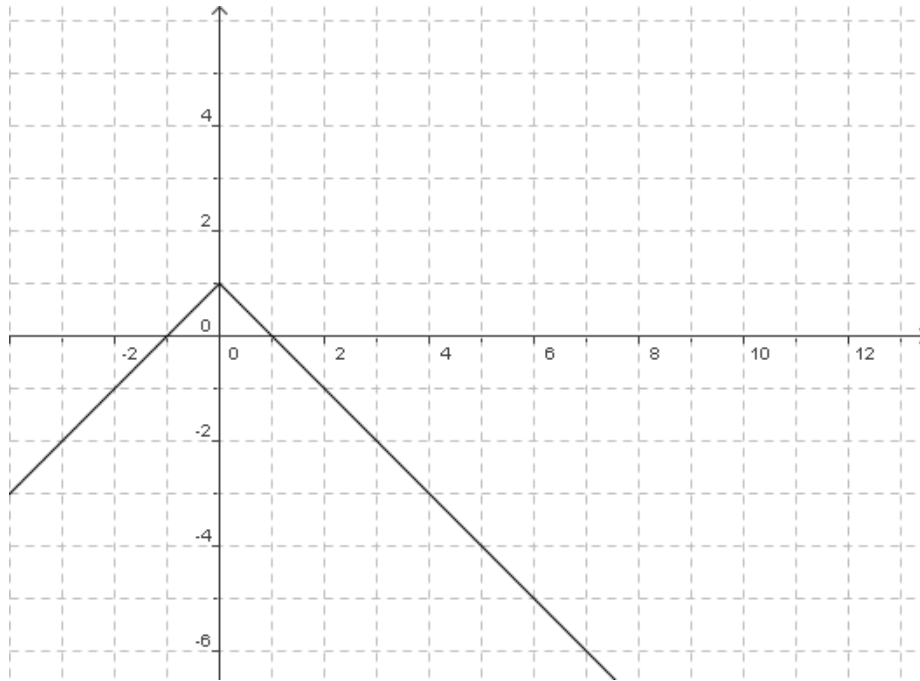
On a une fonction affine par intervalles. Donc la représentation graphique de  $f$  est la réunion de deux demi-droites on sait que  $f$  peut s'écrire  $f(x)=x+1$  si  $x \leq 0$  et  $f(x)=-x+1$  si  $x \geq 0$

Tableau 6 -Tableau de valeurs de la fonction f

$X$	-1	-2	0	1
$f(x)$	0	-1	1	0

Source : Construction de l'auteur

Figure 53 – Représentation de la fonction f



Source : L'auteur

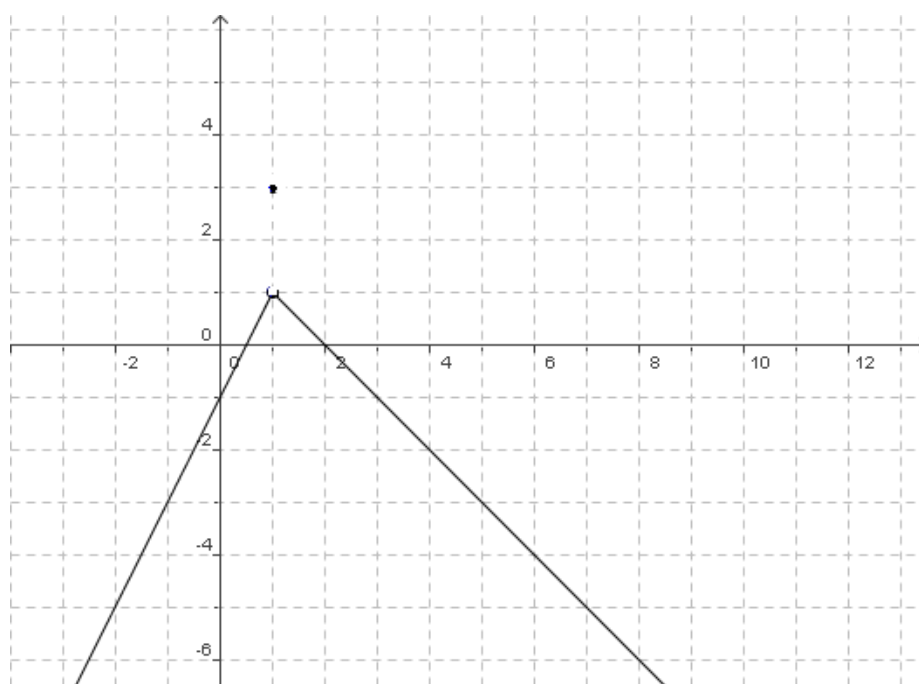
$$\begin{cases} -x + 2 & \text{si } x > 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases} \text{ g est une fonction affine par intervalles}$$

Tableau 7 – Tableau des valeurs de la fonction f.

$X$	3	2	0	$\frac{1}{2}$	1
$g(x)$	0	-1	-1	0	3

Source : Construction de l'auteur

Figure 54 – Représentation graphique de la fonction g



Source construction de l'auteur

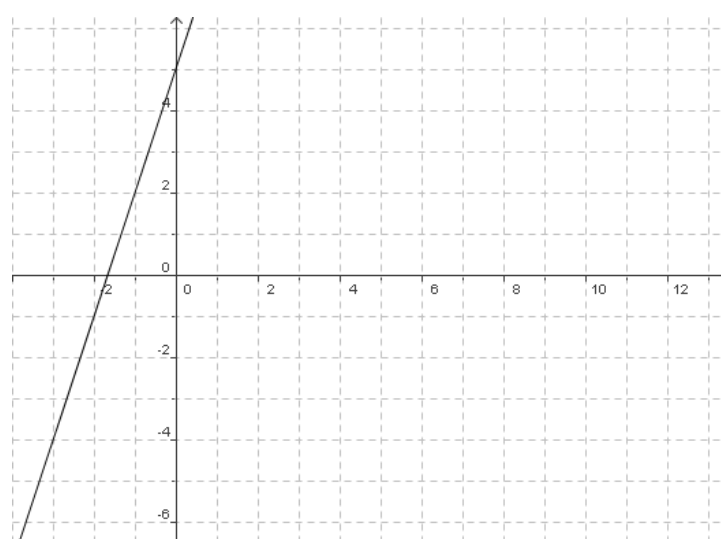
c)  $h(x)=3x+5$  c'est une fonction affine

Tableau 8 – Tableau des valeurs de la fonction g

$X$	-1	-2
$h(x)$	2	-1

Source : Construction de l'auteur

Figure 55 – Représentation de la fonction g



Source : L'auteur

### 1.2.2. Analyse didactique

La praxéologie attendue des élèves est de tracer la représentation graphique d'une fonction affine ou affine par intervalles définie par son expression algébrique explicite. Ce type de tâches est du genre « Tracer la représentation graphique d'une fonction », avec comme variables de type de tâches : la nature de la fonction qui a pour valeurs :  $f$  est une fonction affine,  $f$  est une fonction affine par intervalles et  $f$  est définie par son expression algébrique explicite. Les techniques suivantes peuvent être utilisées pour accomplir ce type de tâche : ( $\tau_1$ ) : déterminer les coordonnées de deux points distincts et tracer la droite qui passe par ces deux points dans un repère, et ( $\tau_2$ ): trouver un point A et un vecteur directeur  $\vec{u}$ ; et puis tracer la droite qui passe par ce point et ayant comme vecteur directeur  $\vec{u}$ . Ces techniques peuvent être justifiées en s'appuyant sur les propriétés et/ou définitions suivantes : « Définition d'une droite : c'est un ensemble de points alignés », « Deux points distincts déterminent entièrement une droite », « Une droite peut être définie et tracée à l'aide d'un point et un vecteur directeur, ou d'un point et son coefficient directeur » (complexe technologique - théorique).

### 1.2.3. Connaissances mobilisables :

Pour pouvoir résoudre cette situation l'élève doit reconnaître l'expression algébrique d'une fonction affine et affine par intervalles, reconnaître qu'une application affine a pour représentation graphique : une droite ou une réunion de segments de droites ou de demi-droites, il doit aussi savoir qu'une droite affine est entièrement définie par la donnée de deux de ses points distincts, savoir calculer l'image d'un point par une fonction affine ou affine par intervalles, savoir placer un point dans un repère orthonormé, savoir tracer une droite définie par deux points distincts, ou bien définie par un point et un vecteur directeur, un point et le coefficient directeur. Nous avons les mêmes connaissances que la situation 1 : nous avons un aller-retour. Pour la situation 1, on va du graphique à l'expression algébrique, et inversement pour la situation 2. À l'aide des instruments (la règle et l'équerre), les élèves pourront prolonger des droites, faire des projections précises. S'ils ne disposent pas de ces outils, ils peuvent faire recours aux ostensifs (les codes, projections à main levée etc.)

### 1.2.4. Variables du problème :

**Nous avons utilisé deux variables** : la nature de la fonction et sa représentation. Pour la première variable **nous avons choisi les valeurs suivantes** : a)  $f$  est une fonction affine,

b)  $f$  est fonction affine par intervalles définie sur  $\mathbb{R}$ . Pour la seconde variable, nous avons choisi la valeur unique suivante :  $f$  une fonction qui est représentée par son expression algébrique explicite.

### 1.2.5. Les cadres et registres en jeu

Nous avons le cadre algébrique parce que la fonction est donnée par son expression algébrique, le cadre graphique il s'agit de tracer sa représentation graphique, et le cadre numérique les coordonnées des points, la graduation du repère. Nous avons de petits nombres entiers relatifs. Nous avons le registre graphique qui permet de représenter la fonction, le registre numérique les coordonnées des points sont des nombres et le registre symbolique l'écriture symbolique de la fonction  $f(x)=ax+b$  ;  $\begin{cases} f(a) = b \\ f(p) = q \end{cases}$

### 1.2.6. Comportements possibles

Les élèves peuvent rencontrer des difficultés dans le choix des valeurs de  $x$ , par exemple, pour tracer la représentation graphique de  $f(x)= \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ . On doit délimiter les sous domaines et les expressions de  $f$  dans chaque sous domaine. Pour cela, on doit pouvoir s'orienter sur la droite numérique, savoir interpréter le sens des inégalités. Pour tracer chaque demi-droite, on cherche deux points distincts pour le premier domaine qui est l'intervalle  $]-\infty ; 0]$ , les abscisses doivent être négatives ou nulles. L'élève peut prendre une abscisse positive et tracer une droite au lieu d'une demi-droite. Au lieu de deux demi-droites, il se peut qu'il trace deux droites.

En fonction de la technique mise en œuvre par l'élève, il peut commettre une erreur au moment de tracer la représentation graphique dans le repère. Nous présentons ensuite quelques techniques susceptibles d'être utilisées par les élèves.

**Technique 1** : trouver un point et un vecteur directeur et utiliser la règle et l'équerre. Par exemple, l'élève peut trouver le point et un vecteur directeur ; mais au moment de la représentation, il peut commettre des erreurs dans le tracé de la droite. Par exemple, il peut intervertir les coordonnées de point choisi ou bien celles du vecteur directeur et dans ces conditions la droite tracée ne va pas correspondre à la droite recherchée.

**Technique 2** : trouver deux points et utiliser la règle.

Intervertir les coordonnées des points, c'est-à-dire placer le point  $A(a, b)$  à la place de  $A'(b, a)$  avec  $a$  différent de  $b$  (si l'élève interverti les coordonnées des points de la droite, alors la droite tracée ne correspondra pas à la droite recherchée).

**Technique 3** : chercher le coefficient directeur et un point, puis utiliser la règle et l'équerre. Cette technique n'est pas évidente, parce que cette technique n'est pas utilisée par les enseignants) donc pour raison de contrat didactique elle apparaîtra difficilement.

Le signe du coefficient directeur peut provoquer des difficultés par rapport à la détermination de la position de la droite que représente la fonction. Si le coefficient directeur est positif la droite est ascendante, s'il est négatif alors la droite est descendante.

2) résolvons dans  $\mathbb{R}$  les inéquations.

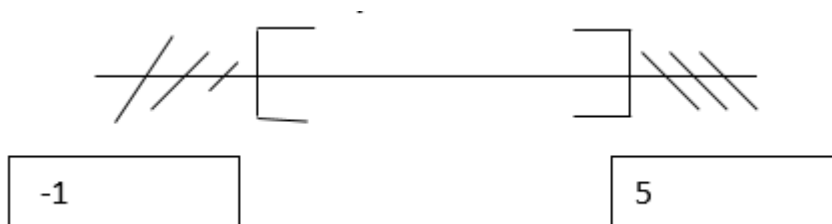
Résolution algébrique.

a)  $|x - 2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5 \quad S = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 5\}$

b)  $|2x - 5| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x - 5 < 1 \Leftrightarrow 2 < x < 3 \quad S = ]2; 3[$ . De façon analogue on résout  $|-x + 2| < 2$

Résolution graphique :

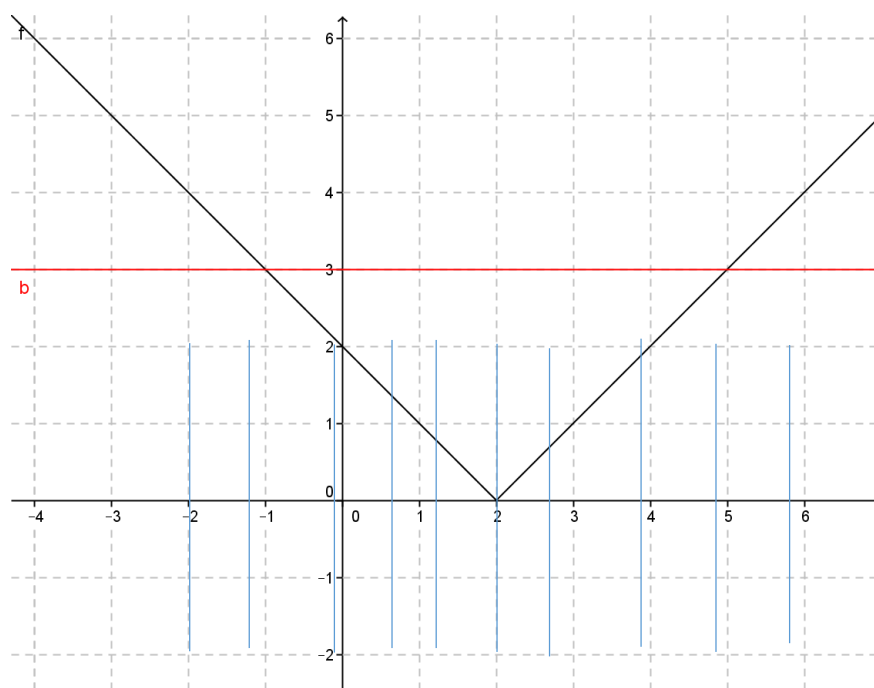
1.  $|x - 2| \leq 3 \Leftrightarrow d(x, 2) \leq 3$  Donc l'ensemble solution est l'intervalle fermé de centre 2 et de rayon 3



Nous pouvons aussi tracer la représentation graphique de la fonction  $f(x)=|x - 2|$  et la droite d'équation  $y=3$ . Dans ce cas, l'ensemble solution est la réunion des intervalles sur lesquels la courbe de  $f$  est en dessous de  $y=3$ .



Figure 56 - Représentation des fonctions e visualisation de la solution



Source : L'auteur

La courbe de  $f(x)$  est sous la droite  $y=3$  dans l'intervalle  $[-1 ; 5]$  donc  $S= [-1 ; 5]$ . Cette technique n'est pas commune en classe. Donc pour raison de contrat didactique elle apparaîtra difficilement. De façon analogue on résout les deux autres inéquations.

### **Variables du problème**

Nous avons joué sur les variables suivantes : le signe du coefficient de  $x$ . Ce choix est important, puisque que pour les apprenants on supprime le symbole valeur absolue en changeant les signes négatifs en positifs. Pour cette variable, nous avons deux valeurs possibles : le coefficient peut être positif ou négatif. Pa rapport aux méthodes de résolution demandées, les élèves ont plus d'habiletés dans le registre algébrique que dans le registre graphique. En leur demandant d'appliquer les deux méthodes ils seront obligés de faire le changement de cadres et de registres. Nous avons demandé la méthode algébrique et graphique

### **Connaissances mobilisables :**

Comme connaissances mobilisables nous avons : les propriétés de la valeur absolue :  $|-x| = |x|$  ; l'écriture d'une inéquation avec valeur absolue à l'aide de la distance ; la résolution algébrique et graphique d'une inéquation du 1er degré à une inconnue comportant

la valeur absolue. Représenter graphiquement une droite définie par son équation dans un repère et la détermination de la position relative de deux droites dans un même repère.

### Comportements probables :

Nous présentons quelques comportements possibles de élèves : les élèves peuvent transformer les inéquations en des équations et les résoudre en utilisant la propriété suivante :  $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$  ; Ils peuvent transformer en une seule inéquation sans valeur absolue  $|x - a| < b \Rightarrow x - a < b$  ; Ils peuvent aussi écrire sans la valeur absolue et résoudre deux inéquations  $|x - a| < b \Rightarrow \begin{cases} -x + a < -b & \text{si } x - a < 0 \\ x - a < b & \text{si } x - a > 0 \end{cases}$  ; et enfin, ils peuvent élever au carré pour enlever la valeur absolue et résoudre l'inéquation à une inconnue du second degré obtenue  $|x - a| < b \Rightarrow (x - a)^2 < b^2$ .

### La praxéologie attendue :

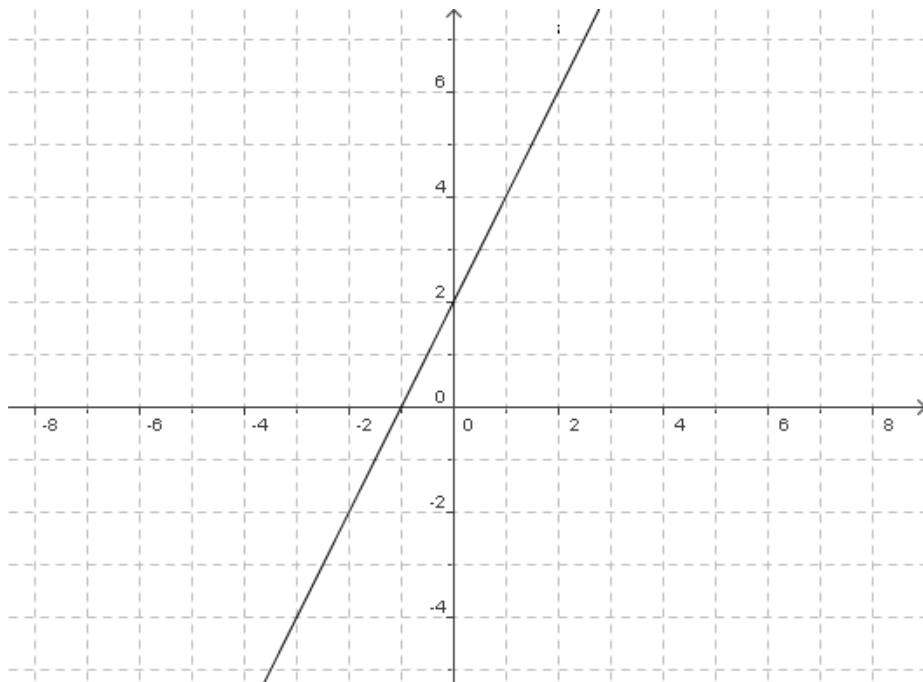
Le type de tâches principal est « résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue avec valeur absolue ». Cette tâche est du genre résoudre une inéquation avec valeur absolue à une inconnue. Elle a pour variable « le degré de l'inéquation : » : elle est du premier degré, « le signe du coefficient de l'inconnue » : il peut être positif ou négatif. Le second membre de l'inéquation, c'est une constante réelle. Cette tâche peut être résolue à l'aide des techniques suivantes ( $\tau_1$ ) : Résolution algébrique utilisant l'élévation au carré ou les propriétés de la valeur absolue pour enlever le symbole valeur absolue. C'est-à-dire pour  $b > 0$ ,  $|x - a| < b \Rightarrow (x - a)^2 < b^2$  ou  $|x - a| < b \Rightarrow \begin{cases} -x + a < -b & \text{si } x - a < 0 \\ x - a < b & \text{si } x - a > 0 \end{cases}$ . Si  $b < 0$ , alors l'ensemble solution est vide.

( $\tau_2$ ) : Résolution graphique :  $|x - a| < b \Rightarrow d(x, a) < b$ , l'ensemble cherché est le diamètre du cercle de centre  $a$  et de rayon  $b$  privé de ses points d'intersection avec le cercle. Ou bien on trace dans un repère orthonormé les représentations graphiques des fonctions  $f(x) = |x - a|$  et  $g(x) = b$  et on cherche les intervalles sur lesquels la représentation graphique de  $f$  est en dessous de celle de  $g$ . Ces intervalles représentent l'ensemble solution. Le complexe technologique-théorique constitué des notions suivantes permettent de justifier ces techniques : la Topologie de  $\mathbb{R}$ , (ordre et inéquation dans  $\mathbb{R}$ ), le corps des nombres réels et ses propriétés, la géométrie des fonctions affines.

### 1.3. Situation 3

1 On considère la représentation graphique suivante :

Figure 57 – Graphique de la fonction donnée

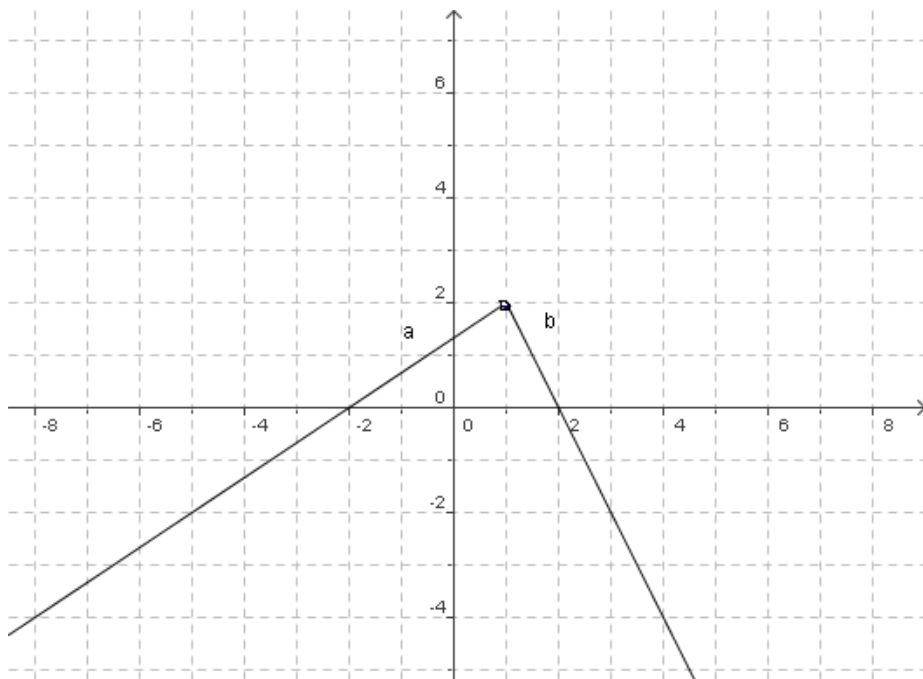


Source : L'auteur

Déterminer graphiquement puis algébriquement  $f([-2 ; 1])$  et  $f^{-1}([-2 ; 2])$

2) On considère la représentation graphique suivante :

Figure 58 – Graphique la fonction de la question 2 de la situation 3

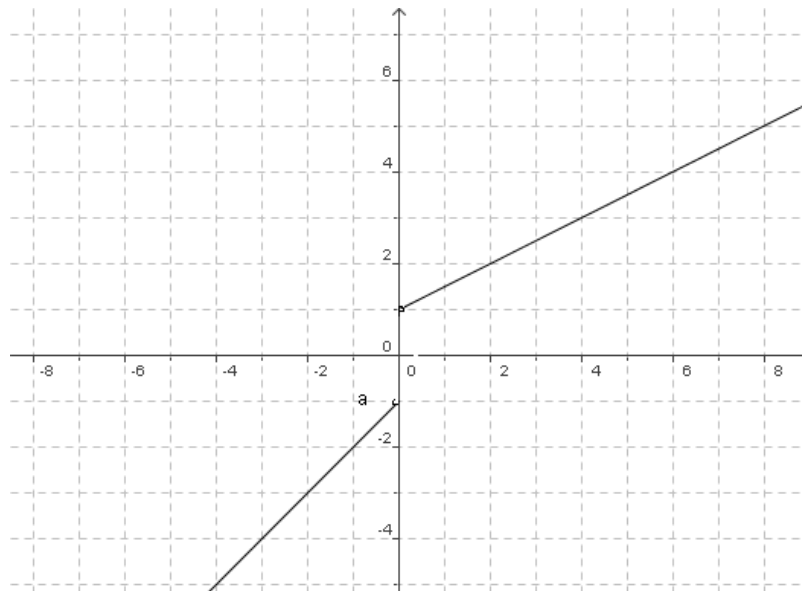


Source : L'auteur

Déterminer graphiquement puis algébriquement  $f([-2 ; 0[)$  et  $f^{-1}([1 ; 2])$

3) On considère la représentation graphique suivante :

Figure 59 – Représentation de l’item 3 de la situation 3



Source : L’auteur

Déterminer graphiquement puis algébriquement  $f([-1 ; 2])$ ,  $f^{-1}([-1/2 ; 1/2])$

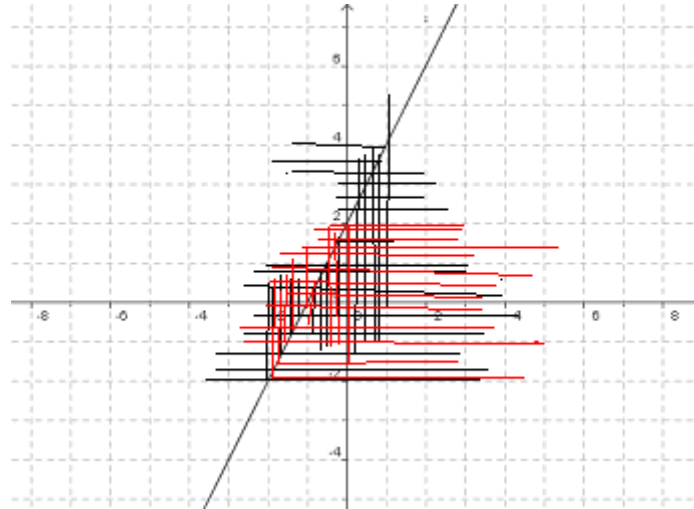
### 1.3.1 Objectifs et analyse a priori de la situation 3

L’objectif est de déterminer graphiquement l’image directe et réciproque d’un intervalle par une fonction, mais aussi de déterminer algébriquement l’image directe et réciproque d’un intervalle par une fonction. Ces connaissances sont nécessaires pour rentrer dans les situations-problèmes.

### 1.3.2. Analyse a priori :

#### Analyse mathématique

Figure 60 - Représentation de la fonction



Source : L'auteur

#### Détermination graphique

Elle consiste à chercher l'image par  $f$  de tous les points dont l'abscisse appartient à  $[-2 ; 1]$ . Graphiquement, on se place sur l'axe des abscisses et on projette l'intervalle  $[-2 ; 1]$  sur la représentation graphique de  $f$ , on obtient l'intervalle  $[-2 ; 4]$  sur l'axe des ordonnées et on dit que  $f([-2 ; 1]) = [-2 ; 4]$ . Pour l'image réciproque on se place sur l'axe des ordonnées et on projette l'intervalle  $] -2 ; 2[$  sur la courbe de  $f$  parallèlement à l'axe des abscisses, on obtient l'intervalle  $] -2 ; 0[$  sur l'axe des abscisses. On dit que  $f^{-1}(] -2 ; 2[) = ] -2 ; 0[$

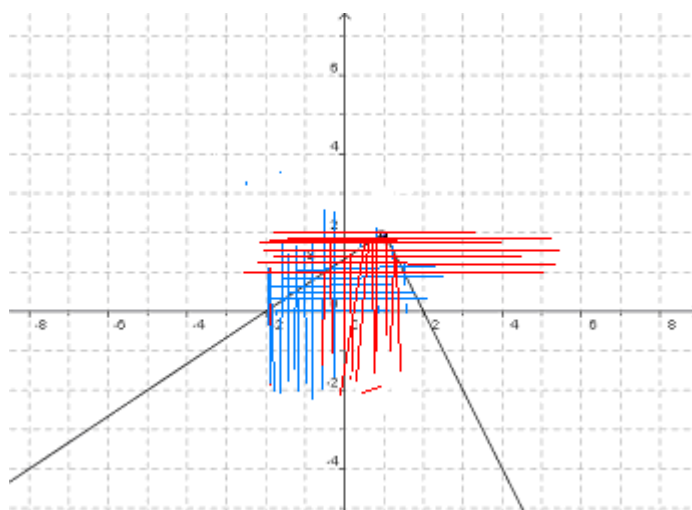
La résolution algébrique consiste à chercher un encadrement de  $f(x)$  à partir de l'encadrement  $-2 \leq x \leq 1$ .

Pour  $f([-2 ; 1])$ , on cherche d'abord l'expression algébrique explicite de  $f(x)$  : on a  $f(x) = 2x + 2$ , et partant de l'encadrement de  $x$  on cherche à encadrer  $f(x)$  comme suit :

$-2 \leq x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2x + 2 \leq 4$  c'est-à-dire  $f(x) \in [-2 ; 4]$ . Donc  $f([-2 ; 1]) = [-2 ; 4]$ . Pour  $f^{-1}(] -2 ; 2[)$  : on cherche l'expression algébrique de  $f(x)$  :  $f(x) = 2x + 2$  et puis on part de l'encadrement de  $f(x)$  pour encadrer  $x$   $-2 < 2x + 2 < 2 \Rightarrow -2 < x < 0$ . Donc  $f^{-1}(] -2 ; 2[) = ] -2 ; 0[$ .

2)

Figure 61. Représentation de la solution de cette question



Source : L'auteur

Graphiquement on observe que  $f([-2 ; 0]) = ]0 ; 4/3[$  et  $f^{-1}([1 ; 2]) = ]-2/3 ; 1[ \cup ]1 ; 3/2[$ .

Quant à la résolution algébrique, nous avons, pour  $f([-2 ; 0])$  :

1) On cherche l'expression algébrique de  $f(x)$  : on a

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2) Partant de l'encadrement de  $x$  on cherche à encadrer  $f(x)$  de la façon suivante :

$$-2 < x < 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \leq \frac{4}{3} \text{ c'est-à-dire } f(x) \in ]0 ; 4/3[$$

$$\text{Donc } f([-2 ; 0]) = ]0 ; 4/3[$$

$$\text{Pour } f^{-1}([1 ; 2]), \text{ on cherche l'expression algébrique de } f(x) : f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

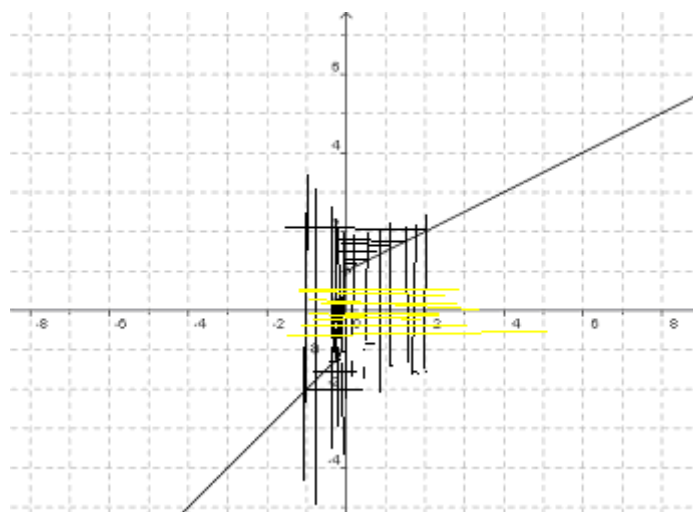
2 on part de l'encadrement de  $f(x)$  pour encadrer  $x$

$$1 < f(x) < 2 \Leftrightarrow (1 < \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} < 2 \text{ et } x < 1) \text{ ou } (1 < -2x + 4 < 2 \text{ et } x > 1) \Leftrightarrow -2/3 < x < 1 \text{ ou } 1 < x < 3/2. \text{ Donc}$$

$$f^{-1}([1 ; 2]) = ]-2/3 ; 1[ \cup ]1 ; 3/2[.$$

c)

Figure 62. Représentation de la solution



Source : l'auteur

La représentation graphique nous de mettre en évidence les solutions comme suit :

$f([-1 ; 2]) = [-2 ; -1[ \cup ]1 ; 2]$  et  $f^{-1} (]-1/2 ; 1/2[) = \emptyset$ . Algébriquement, pour  $f([-1 ; 2])$ , on cherche,

l'expression algébrique de  $f(x)$  : on a  $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$  qui nous permet d'ébaucher la

solution  $[-1 ; 2] \cap Df = [-1 ; 0[ \cup ]0 ; 2]$ . En partant de l'encadrement de  $x$ , on cherche à encadrer  $f(x)$  de la façon suivante :

$-1 < x < 0$  ou  $0 < x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x - 1 < -1$  ou  $1 < \frac{1}{2}x + 1 \leq 2$ , c'est-à-dire,  $f(x) \in [-2; -1[ \cup ]1; 2]$  Donc  $f([-2; 0]) = [-2; -1[ \cup ]1; 2]$ .

Pour  $f^{-1} (]-1/2 ; 1/2[)$ , en premier lieu, on cherche l'expression algébrique de  $f(x)$  :  $f(x) =$

$\begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$  et en deuxième lieu, on part de l'encadrement de  $f(x)$  pour encadrer  $x$  de

la façon suivante :

$-1/2 < f(x) < 1/2 \Leftrightarrow (-1/2 < x - 1 < 1/2 \text{ et } x < 0) \text{ ou } (-1/2 < \frac{1}{2}x + 1 < 1/2 \text{ et } x > 0) \Leftrightarrow (1/2 < x < 2/2 \text{ et } x < 0) \text{ ou } -3 < x < -1 \text{ et } x > 0)$  ce qui est impossible. Donc  $f^{-1} (]-1/2 ; 1/2[) = \emptyset$ .

**Analyse didactique :**

**Connaissances nécessaires :**

Nous avons les mêmes connaissances que celles des situations 1 et 2. Les variables didactiques sont les mêmes que celles des situations 1 et 2.

À l'aide de cette situation, nous voulons déstabiliser certaines conceptions erronées telles que :  $f([a ; b])=[f(a); f(b)]$  ou  $[f(b); f(a)]$  qui ne sont vraies que lorsque  $f$  est continue et monotone sur  $[a ; b]$ .

Nous avons demandé une détermination graphique et algébrique pour savoir si les connaissances nécessaires pour les exercices 1 et 2 ont été acquises par les élèves. C'est aussi un moyen de contrôle pour les élèves. Le résultat obtenu graphiquement peut être vérifié algébriquement et inversement. Nous voulons à l'aide de ce problème, réduire les difficultés de changement de cadres, de conversion de registres et de traitement au sein d'un même registre mises à l'évidence par les recherches antérieures citées dans notre état des lieux. Les cadres et registre en jeu sont les mêmes que ceux énumérés dans les exercices 1 et 2.

### **Comportements possibles d'élèves :**

Les problèmes peuvent surgir au niveau de la détermination des images directes et réciproques. Exemple :  $f([a ; b])=[f(a) ; f(b)]$  . La détermination algébrique peut poser des problèmes au niveau de la résolution des inéquations. Pour l'image directe on part de  $x$  pour encadrer  $f(x)$ . (Ordre et opérations dans  $\mathbb{R}$ ).

Pour l'image réciproque, on part de  $f(x)$  pour encadrer  $x$  et en tenant compte de  $Df$ , les problèmes seront au niveau du choix de l'expression algébrique et le sous domaine correspondant.

### **Type de tâches :**

Déterminer l'image directe et réciproque d'un intervalle par une fonction définie par sa représentation graphique.

Cette tâche est du genre déterminer l'image directe et l'image réciproque d'un intervalle par une fonction. Elle a comme variable de type de tâches : « la représentation de la fonction » :  $f$  est définie par sa représentation graphique, « la nature des intervalles » : nous avons des intervalles bornés. Ces deux types de tâches sont du genre déterminer l'image d'un intervalle par une fonction. Il nous permet de faire fonctionner la définition topologique de la limite.

Nous avons au moins deux techniques pour réaliser cette tâche :  $(\tau_1)$  : méthode graphique : elle consiste à projeter les points de l'intervalle sur la représentation graphique de  $f$  parallèlement à l'axe des ordonnées ensuite on projette les points de la représentation graphique de  $f$  sur l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses pour l'image directe et quant à l'image réciproque on procède dans le sens inverse,  $(\tau_2)$  : méthode



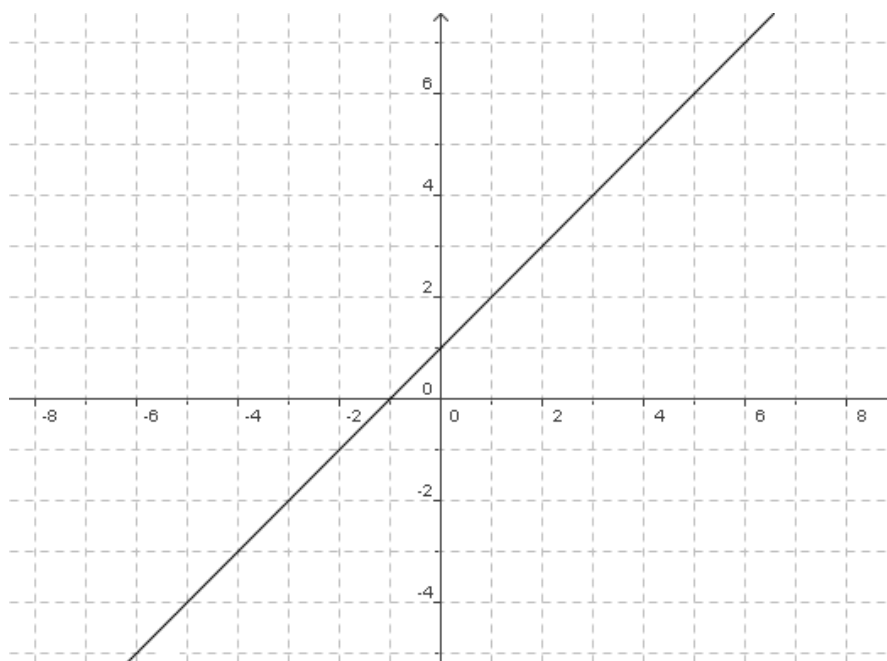
algébrique elle consiste à chercher l'expression algébrique explicite de  $f$ , puis chercher un encadrement de  $f(x)$  à partir de l'encadrement de  $x$  pour l'image directe, et pour l'image réciproque on part de l'encadrement de  $f(x)$  pour trouver un encadrement de  $x$ . le complexe technologique-théorique : constitué des notions suivantes permettent de justifier ces différentes techniques. Les Projections orthogonales, l'ordre et opérations dans  $\mathbb{R}$ , et le corps des nombres réels et ses propriétés.

## 2. Situations problèmes :

### 2.1. Problème 1

On considère la fonction affine  $f$  définie par :  $f(x) = x + 1$  et sa représentation graphique ci-dessous

Figure 63- Graphique de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x + 1$



Source construction de l'auteur

1. Compléter le tableau suivant :

Tableau 9 - Tableau des valeurs

$X$	1.98	1.99	2	2.01	2.02
$f(x)$					

Source : Construction de l'auteur

2. Résoudre algébriquement puis graphiquement les inéquations d'inconnue  $f(x)$ :

$$|f(x) - 3| < 0.5; \quad ; |f(x) - 3| < 0.4 \quad ; |f(x) - 3| < 0.3$$

3. Résoudre algébriquement puis graphiquement les inéquations d'inconnue  $x$  :

$$|f(x) - 3| < 0.5; \quad ; |f(x) - 3| < 0.4 \quad ; |f(x) - 3| < 0.3$$

4. Écrire les solutions sous forme d'intervalle et calculer le centre de chaque intervalle.

5. Interpréter géométriquement les résultats.

### Objectifs du problème 1 :

Nos objectifs pour ce problème sont :

1 Interpréter graphiquement la notion de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point  $a$

2 Donner du sens à epsilon et delta et leur interrelation dans le fonctionnement de la définition formelle de la limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point  $a$ .

#### 2.1.1. Analyse a priori du problème 1

##### -Analyse mathématique

Solution :

1) Complétons le tableau

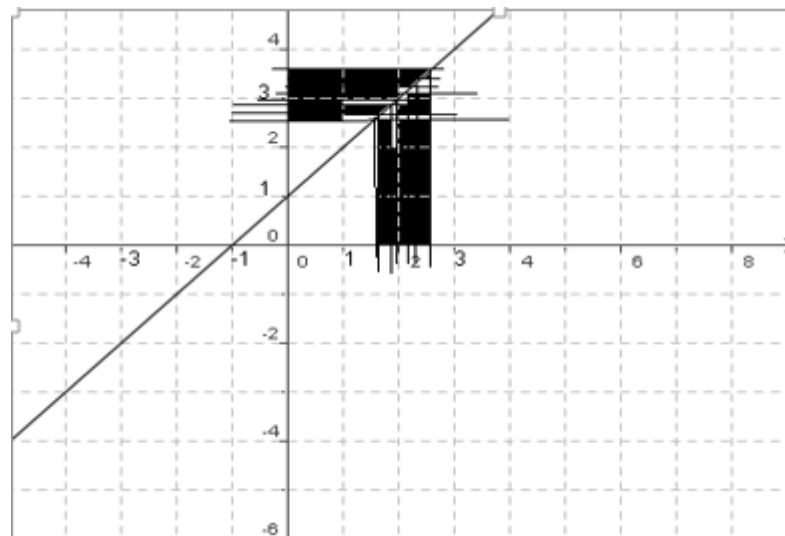
Tableau 10 - tableau des valeurs

$x$	1.98	1.99	2	2.01	2.02
$f(x)$	2.98	2.99	3	3.01	3.02

Source : Construction de l'auteur

## 2) Résolution graphique des inéquations d'inconnue $f(x)$

Figure 64. Représentation de la fonction



Source : L'auteur

Nous pouvons procéder de la façon suivante :  $|f(x) - 3| < 0.5$ ;  $\Rightarrow d(f(x), 3) < 0.5$   
 l'ensemble solution est l'intervalle ouvert de centre 3 et de rayon 0.5 soit  $S = ] 2.5 ; 3.5 [$  de  
 manière analogue on résout les deux autres inéquations.

Du point de vue algébrique, le problème peut être résolu de la façon suivante :

$|f(x) - 3| < 0.5$ ;  $\Rightarrow -0.5 < f(x) - 3 < 0.5$  ce qui donne  $2.5 < f(x) < 3.5$  donc l'ensemble solution  
 est :  $S = ] 2.5 ; 3.5 [$ .

3) résolution graphique des inéquations d'inconnue  $x$  :

$|f(x) - 3| < 0.5$ ;  $\Rightarrow |x + 1 - 3| < 0.5 \Rightarrow |x - 2| < 0.5$  Ce qui donne  $d(x, 2) < 0.5$  c'est  
 l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0.5 soit  $S = ] 1.5 ; 2.5 [$ .

### Résolution algébrique :

$|f(x) - 3| < 0.5$ ;  $\Rightarrow |x + 1 - 3| < 0.5 \Rightarrow |x - 2| < 0.5$ . Ce qui donne  $1.5 < x < 2.5$  donc  
 l'ensemble solution est :  $S = ] 1.5 ; 2.5 [$ . Nous pouvons interpréter de la façon suivante ces  
 résultats. Plus la distance entre  $f(x)$  et 3 est petite plus la distance entre  $x$  et 2 est petite. Pour  
 que  $d(f(x), 3)$  soit petite il suffit que  $d(x, 2)$  soit petite. On peut rendre la distance entre  $f(x)$  et  
 3 aussi petite que l'on veut en prenant  $x$  suffisamment proche de 2. L'image réciproque de  
 tout intervalle ouvert de centre 3 est un intervalle ouvert de centre 2 éventuellement privé de  
 $\{2\}$ . On dit que la limite lorsque  $x$  tend vers 2 de  $f(x)$  est égale à 3, ou  $f(x)$  a pour limite 3  
 quand  $x$  tend vers 2, ou encore  $f(x)$  a pour limite 3 en  $x$  égale à 2.

## Connaissances nécessaires

Les connaissances suivantes sont mobilisables pour la résolution de ce problème : le calcul de l'image d'un point par une fonction affine ; la résolution graphique et algébrique d'une inéquation avec valeur absolue ; l'écrire une inéquation avec valeur absolue sous forme de distance ; la distinction entre l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées ; la détermination de l'image directe et réciproque d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  ; savoir que  $f(I)=f(I \cap Df)$ , le calcul du centre et du rayon d'un intervalle ; le calcul de l'origine et de l'extrémité d'un intervalle ; savoir écrire un intervalle de  $\mathbb{R}$  sous forme de distance ; l'ordre et les opérations dans  $\mathbb{R}$ .

### 2.1.2. Variables didactiques du problème 1

Nous avons choisi comme variables (V1) le travail en petit groupe de quatre à six personnes, (V2) **la nature de la fonction** : nous avons une fonction affine croissante. Ici la résolution du problème est un peu facile. Il permet aux élèves de bien démarrer la résolution du problème. Certaines conceptions erronées marchent parce que  $x$  et  $f(x)$  croient dans le même sens, il est facile de constater que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $x_0$  ; (V3) **La nature des questions** : nous avons choisi des questions fermées cela évite les interprétations multiples, (V4) **la taille des nombres** : nous avons choisi des décimaux 0.5 ; 0.4 ; 0.2 ; 0.1 en ordre décroissant pour faire sentir la diminution de la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$ , cela pour faire voir par les élèves que l'on peut rendre la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  aussi petite que l'on veut en prenant  $x$  suffisamment proche de  $x_0$ . En d'autres termes plus  $f(x)$  s'approche de  $\ell$ , plus  $x$  s'approche de  $x_0$ , (V5) **les cadres et registres en jeu** : nous avons le cadre algébrique : l'expression algébrique de la fonction, résolution algébrique des inéquations, le cadre graphique : la représentation graphique de la fonction, résolution graphique des inéquations et le cadre numérique les précisions sont des nombres décimaux et les coefficients sont des entiers relatifs le tableau de valeurs de la fonction. Cela nous permet de faire des changements de cadres. Nous avons le registre tableau, le registre symbolique le registre graphique et le registre de la langue naturelle. Ils nous permettent de faire des traitements et de conversion de registres.

### Comportements probables des élèves

La résolution graphique des inéquations d'inconnue  $f(x)$  peut poser des problèmes aux élèves qui confondent la courbe de  $f$  et l'ensemble image de  $f$ , c'est-à-dire le point de la

courbe et la valeur de la fonction en ce point. La résolution de l'inéquation d'inconnue  $x$  aussi peut poser des problèmes aux élèves qui ont des difficultés dans la détermination de l'image réciproque.

Pour lever ces obstacles, on demandera aux élèves de remplacer  $f(x)$  par  $y$  pour les inéquations d'inconnue  $f(x)$  et  $f(x)$  par son expression algébrique pour celles d'inconnue  $x$ . Par rapport à la praxéologie attendue, nous avons au total deux type de tâches : le premier type de tâche est : « Déterminer l'image directe d'un nombre par une fonction définie par son expression algébrique explicite et ou son graphique ». Ce type de tâche est du genre « déterminer l'image d'un nombre par une fonction ». Nous avons choisi comme variables de type de tâches : « la nature de la fonction » et « sa représentation » qui ont respectivement pour valeurs : a)  $f$  est une fonction affine ; b)  $f$  est définie par son expression algébrique explicite et par sa représentation graphique. Cela nous permet de savoir si l'élève sait choisir le registre de représentation adéquat pour répondre à la question. Les techniques suivantes peuvent être appliquées :  $(\tau_1)$  : la substitution de  $x$  par sa valeur dans l'expression algébrique explicite de  $f(x)$  et  $(\tau_2)$  : projeter  $x$  sur la représentation graphique et chercher son ordonnée. La technologie suivante permet de justifier ces techniques la définition de l'ensemble image :  $Cf = \{A(x,y) ; y=f(x)\}$ . Calcul littéral, qui à son tour est justifiée par la théorie les fonctions numériques d'une variable réelle, l'algèbre linéaire, les projections orthogonales, le corps des réel et ses propriétés.

Pour le deuxième type de tâches « résoudre algébriquement et graphiquement des inéquations à une inconnue avec valeur absolue », il est du genre résoudre une inéquation avec valeur absolue, avec comme variables de type de tâches le degré de l'inéquation : elle est du premier degré. La technique de résolution met en jeu une résolution algébrique et graphique. On peut résoudre ce type de tâche en utilisant la caractérisation d'un intervalle à l'aide de son centre et son rayon, ou bien en utilisant les propriétés de la valeur absolue. Nous pouvons aussi faire des représentations graphiques et comparer les équations graphiquement. Ces techniques reposent sur les technologies suivantes :  $\forall r > 0 \ x \in I(c, r) \Rightarrow |x - c| < r \Rightarrow x \in ]c - r ; c + r[$ . Le corps des nombres réels et ses propriétés, la valeur absolue et ses propriétés justifient ces technologies, à ce type de tâche on peut associer des sous types de tâches tels que « Écrire en compréhension et sous forme d'intervalle l'ensemble solution d'une inéquation avec valeur absolue » et « calculer le centre d'un intervalle ». Pour le résoudre, nous avons identifié deux méthodes de résolution  $(\tau_1)$  : méthode algébrique (basée sur les propriétés de la valeur absolue) et  $(\tau_2)$  : méthode

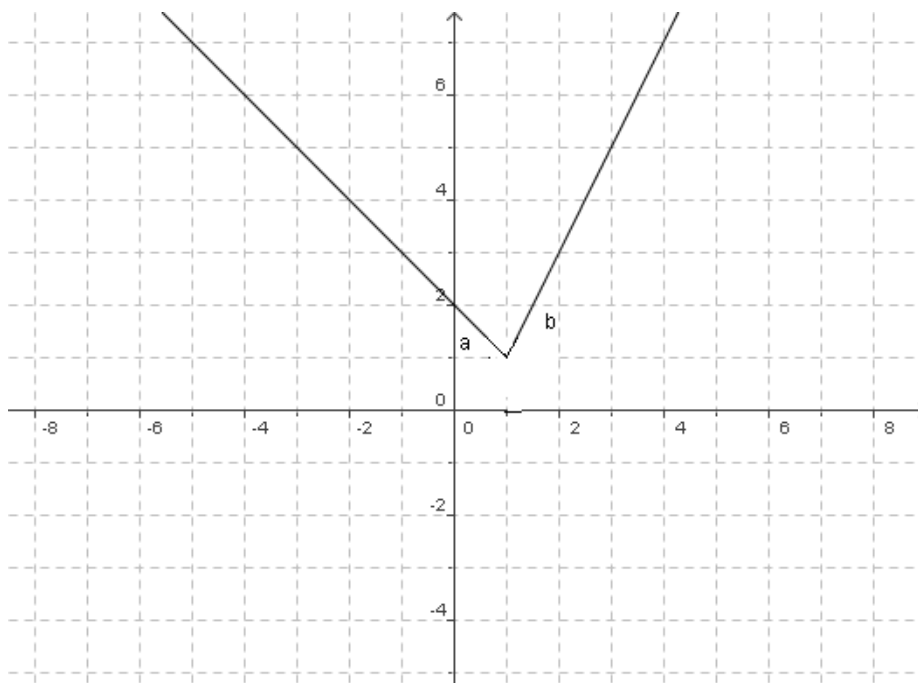
graphique (la caractérisation d'un disque de centre  $c$  et de rayon  $r$ , l'ensemble solution est le diamètre du disque de centre  $c$  et de rayon  $r$ ), la comparaison graphique des représentations graphiques de fonctions. Le complexe technologique-théorique suivant permet de justifier ces techniques la notion de distance, la valeur absolue et ses propriétés et la géométrie des fonctions, la projection orthogonale le corps des réels et ses propriétés.

**2.2. Problème 2 :**

On considère la fonction affine  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ et sa représentation graphique ci-dessous}$$

Figure 65 – Graphique de la fonction  $f$ .



Source construction de l'auteur

1. Compléter le tableau suivant :

Tableau 11 tableau des valeurs

$X$	0.98	0.99	1	1.01	1.02
$f(x)$					

Source : Construction de l'auteur

2. Résoudre algébriquement puis graphiquement les inéquations d'inconnue

$f(x) :$

$$|f(x) - 1| < 0.3; \quad ; |f(x) - 1| < 0.2; \quad ; |f(x) - 1| < 0.1$$

3. Résoudre algébriquement puis graphiquement les inéquations d'inconnue  $x$  :

$$|f(x) - 1| < 0.3; \quad ; |f(x) - 1| < 0.2; \quad ; |f(x) - 1| < 0.1$$

4. Écrire les solutions sous forme d'intervalle et déterminer le centre de chaque intervalle.

5. Interpréter géométriquement les résultats.

## Objectifs du problème 2

Nous avons les objectifs suivants :

1 Interpréter graphiquement la notion de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point  $a$  dans le cas d'une fonction non définie en  $a$ .

2 Donner du sens à epsilon et delta et leur interrelation dans le fonctionnement de la définition formelle de la limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point  $a$  dans le cas d'une fonction non définie en  $a$ .

### 2.2.1. Analyse a priori.

1) Complétons le tableau

La première question peut être résolue en substituant la variable  $x$  par sa valeur. Cette procédure permet d'obtenir le tableau des valeurs (Tableau11)

Tableau 12 - Tableau des valeurs de  $f$

$X$	0.98	0.99	1	1.01	1.02
$f(x)$	1.02	1.01	?	1.02	1.04

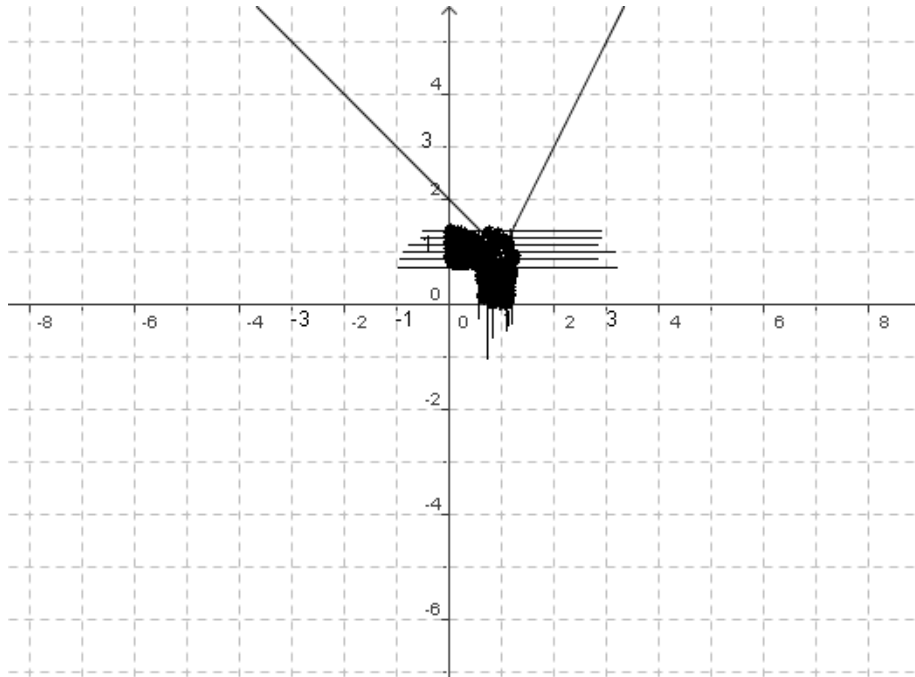
Source : Construction de l'auteur

On constate que plus  $f(x)$  est proche de 1, plus  $x$  est proche de 1 ; mais cela n'est pas facile à expliquer. Car on prend des valeurs de  $x$  pour calculer  $f(x)$ . Ce tableau exprime que plus  $x$  est proche de 1 plus  $f(x)$  est proche de 1. Pour lever cette équivoque on va utiliser la résolution graphique et la résolution algébrique.

2) Résolution graphique des inéquations d'inconnue  $f(x)$ .

$|f(x) - 1| < 0.3$ ; Signifie que  $d(f(x), 1) < 0.3$  donc l'ensemble solution est un intervalle ouvert de centre 1 et de rayon 0.3 soit  $S = ]0.7 ; 1.3[$ . De façon analogue on résout les deux autres inéquations.

. Figure 66 – Représentation de la fonction



Source construction de l'auteur

Pour la résolution algébrique d'inéquations d'inconnue  $f(x)$ , nous pouvons procéder de la façon suivante :

$|f(x) - 1| < 0.3$ ; Signifie que :  $-0.3 < f(x) - 1 < 0.3$  soit  $0.7 < f(x) < 1.3$  donc  $S = ]0.7 ; 1.3[$ .

3) résolution graphique des inéquations d'inconnue  $x$  (Figure 65).

Pour la résolution algébrique des inéquations d'inconnue  $x$ , les étudiants peuvent la stratégie de résolution suivante :

$$|f(x) - 1| < 0.3; \quad \text{Signifie que} \begin{cases} |-x + 1| < 0.3 \text{ et } x < 1 \\ |2x - 2| < 0.3 \text{ et } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.7 < x < 1 \\ \text{ou} \\ 1 < x < 1.15 \end{cases},$$

Donc  $S = ]0.7 ; 1[ \cup ]1 ; 1.15[$ .

4) interprétation géométrique

L'image réciproque de tout intervalle ouvert de centre 1 est un intervalle ouvert de centre 1 privé de 1. Plus la  $d(f(x), 1)$  est petite, plus la  $d(x, 1)$  est petite. On peut rendre  $d(f(x), 1)$



1) aussi petite qu'on veut en prenant  $x$  suffisamment proche de 1. Donc  $f(x)$  a pour limite 1 lorsque  $x$  tend vers 1.

### 2.2.2. Comportements possibles des élèves.

Les élèves peuvent compléter le tableau en utilisant l'une ou l'autre expression de  $f(x)$  ou bien ils calculent  $f(1)$ . Ces élèves ont du mal à interpréter le sens des inégalités  $<$  ;  $>$  et la détermination de l'ensemble de définition d'une fonction définie par morceaux. Ceux qui confondent la courbe et l'ensemble image de  $f$  ne pourront pas faire la résolution graphique des inéquations d'inconnues  $f(x)$ .

La résolution des inéquations d'inconnues  $x$  peut poser un problème, par exemple, après avoir résolu l'inéquation, l'élève peut donner l'ensemble solution sans tenir compte de l'ensemble de définition. Il peut aussi interpréter le système comme une intersection. Ici le système est une réunion de deux droites. La résolution de l'inéquation d'inconnue  $x$  est la recherche de l'image réciproque par  $f$ .

Pour lever certaines difficultés dans la résolution graphique on demandera aux élèves de remplacer  $f(x)$  par  $y$  si l'inconnue est  $f(x)$  et représenter l'ensemble solution sur l'axe des ordonnées, et  $f(x)$  par son expression algébrique et représenter l'ensemble solution sur l'axe des abscisses.

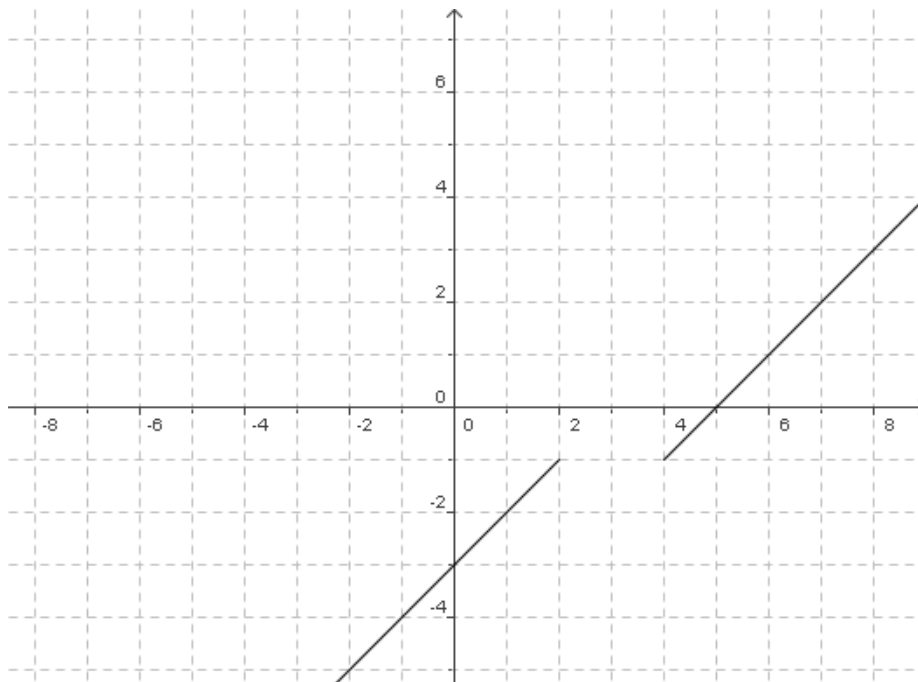
La praxéologie attendue

Nous avons la praxéologie que dans le problème 1. La différence se situe au niveau de la fonction ( $f$  est une fonction affine par intervalles) et au point où l'on cherche la limite est un point d'accumulation n'appartenant pas à l'ensemble de définition de  $f$ .

### 2.3. Problème 3

On considère la fonction affine  $f$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 4 \end{cases}$  et sa représentation graphique (**Figure 67**).

Figure 67 - Figure de la fonction f du problème 3



Source : L'auteur

1. Compléter le tableau suivant :

Tableau 13. Tableau des valeurs de la fonction f

$X$	2.98	2.99	3	3.01	3.02
$f(x)$					

Source : Construction de l'auteur

2. Résoudre algébriquement puis graphiquement les inéquations d'inconnue  $f(x)$  suivantes :

$$|f(x) + 1| < 0.3; \quad ; |f(x) + 1| < 0.2; \quad ; |f(x) + 1| < 0.1$$

3. Résoudre algébriquement puis graphiquement les inéquations d'inconnue  $x$  :

$$|f(x) + 1| < 0.3; \quad ; |f(x) + 1| < 0.2; \quad ; |f(x) + 1| < 0.1$$

4. Écrire les solutions sous forme d'intervalle et calculer le centre de chaque intervalle.

5. interpréter géométriquement les résultats.

Nos objectifs pour le problème 3 sont : Interpréter le graphique de la notion de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point  $a$ , et donner du sens à epsilon et

delta et leur interrelation dans le fonctionnement de la définition formelle de la limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point a.

### 2.3.1. Analyse a priori du problème 3

#### Analyse mathématique

Solution :

1) Complétons le tableau

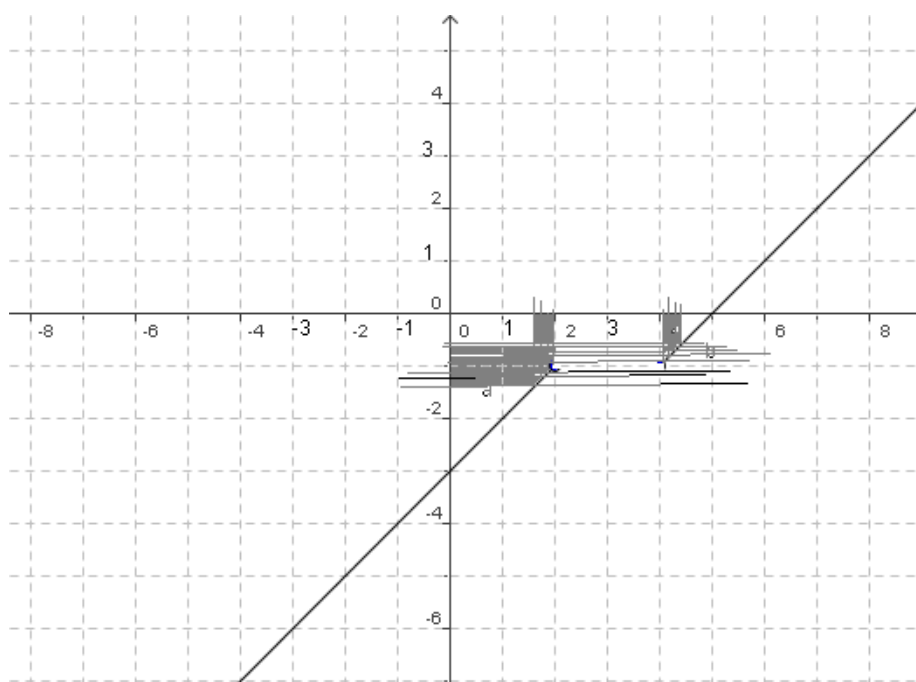
$f$  n'est pas définie en aucun de ces points.

Tableau 14. Tableau des valeurs

$x.$	2.98	2.99	3	3.01	3.02
$f(x)$	?	?	?	?	?

Source : Construction de l'auteur

Figure 68. Représentation de la fonction



Source : Construction de l'auteur

2) Résolution graphique et algébrique des équations d'inconnue  $f(x)$

$|f(x) + 1| < 0.3$ ; Signifie que  $d(f(x), -1) < 0.3$ . L'ensemble solution est l'intervalle ouvert de centre -1 et de rayon 0.3 soit  $S = ]-1.3 ; -0.7 [$

Par rapport à la résolution algébrique, nous procédons de la façon suivante :

$|f(x) + 1| < 0.3$ ; Signifie que  $-0.3 < f(x) + 1 < 0.3$  c'est-à-dire  $-1.3 < f(x) < -0.7$ , soit  $S = ]-1.3 ; -0.7 [$

Quant à la résolution graphique des inéquations d'inconnue  $x$ , l'analyse du graphique nous permet de déduire que

$|f(x) + 1| < 0.3$ ; c'est - à - dire  $\begin{cases} |x - 3 + 1| < 0.3 \text{ et } x < 2 \\ \text{ou} \\ |x - 5 + 1| < 0.3 \text{ et } x > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1.8 < x < 2 \\ \text{ou} \\ 4 < x < 4.2 \end{cases}$  . Soit

enfin  $S = ]1.8 ; 2[ \cup ]4 ; 4.2[$ . De manière analogue on résout les autres inéquations.

Pour l'interprétation géométrique des résultats, nous déduisons que pour que  $d(f(x), -1)$  soit petite, il suffit que  $d(x, 2)$  soit petite avec  $x < 2$  ou bien  $d(x, 4)$  soit petite avec  $x > 4$ . On dit que  $f(x)$  tend vers  $-1$  quand  $x$  tend vers  $2$  en restant inférieur à  $2$  ou bien  $-1$  est la limite de  $f(x)$  à gauche de  $2$ . On dit que  $f(x)$  tend vers  $-1$  quand  $x$  tend vers  $4$  en restant supérieur à  $4$  ou  $-1$  est la limite de  $f(x)$  à droite de  $4$ . Nous déduisons de ces résultats que  $f$  n'admet pas de limite en  $2$  ni en  $4$  car l'image réciproque de tout intervalle ouvert de centre  $-1$  n'est pas un intervalle de la forme  $]x-a ; x+a[$  ni de la forme  $]x-a ; x+a[-\{a\}$ . Donc on ne peut pas parler de limite.

### **Variables du problème :**

Nous avons retenu une seule variable la nature de la fonction. Nous avons choisi une fonction affine par intervalles croissante avec un « saut ». Elle nous permet de tester si la limite d'une fonction en un point chez l'élève est la limite de  $f$  à gauche ou la limite à droite de ce point ou bien l'image de ce point par  $f$ .

### **2.3.2. Comportements probables des élèves.**

Les élèves peuvent compléter le tableau en utilisant l'une ou l'autre expression de  $f(x)$ . Comme tous les nombres sont supérieurs à  $2$ , il est possible qu'ils choisissent la 2<sup>ème</sup> expression  $f(x) = x - 5$ . Ces élèves peuvent avoir des problèmes à interpréter le sens des inégalités  $<$  ;  $>$ . Ceux qui confondent la courbe et l'ensemble image de  $f$  ne pourront pas faire la résolution graphique des inéquations d'inconnues  $f(x)$ .

La résolution des inéquations d'inconnues  $x$  peut poser un problème, par exemple, après avoir résolu l'inéquation, l'élève peut donner l'ensemble solution sans tenir compte de l'ensemble de définition. Il peut aussi interpréter le système comme une intersection. Ici,

chacune des équations du système représente une droite. La résolution de l'inéquation d'inconnue  $x$  se fait par la recherche de l'image réciproque par  $f$ .

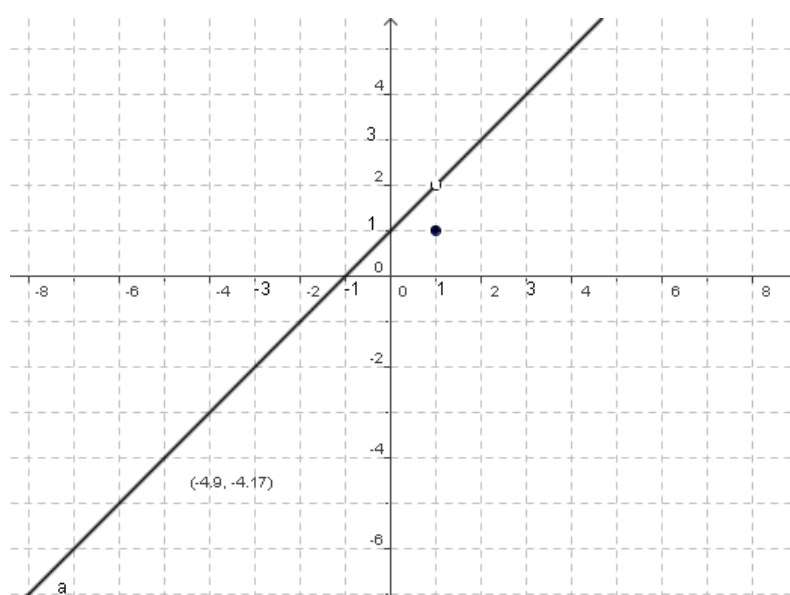
Pour lever certaines difficultés dans la résolution graphique, on demandera aux élèves de remplacer  $f(x)$  par  $y$  si l'inconnue est  $f(x)$ , de représenter l'ensemble solution sur l'axe des ordonnées, et  $f(x)$  par son expression algébrique. On leur demande aussi de représenter l'ensemble solution sur l'axe des abscisses.

Nous avons la même praxéologie que dans les problèmes précédents, la différence notable réside dans le fait d'avoir choisi dans ce cas une fonction affine définie par intervalle et discontinue sur tout un intervalle.

## 2.4. Problème 4

1. On considère l'application affine par morceaux  $f$  définie par sa représentation graphique suivante.

Figure 69 - Représentation de la fonction

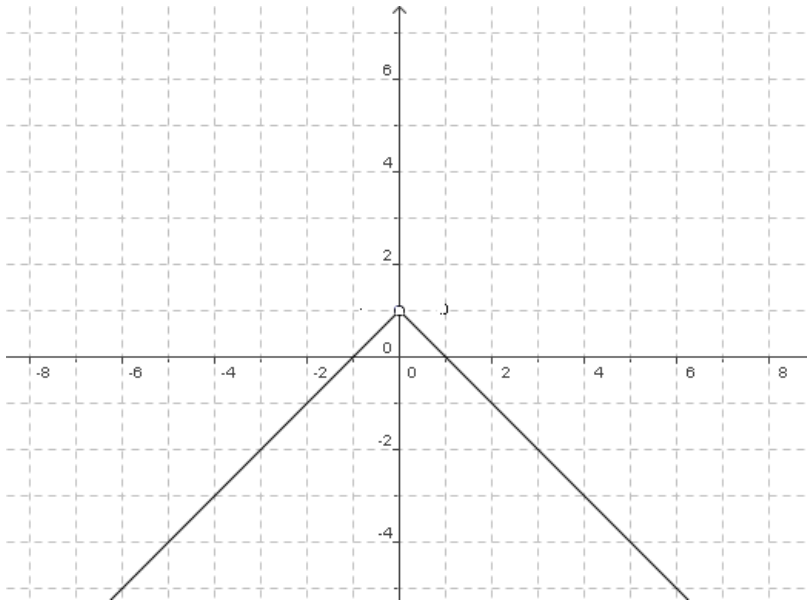


Source : L'auteur

Est-ce que  $f(x)$  a pour limite 2 lorsque  $f(x)$  tend vers 1 ? Justifiez votre réponse.

2. On considère l'application affine par morceaux  $f$  définie par sa représentation graphique de la figure 68. Est-ce que  $f(x)$  a pour limite 1 lorsque  $x$  tend vers 0 ? Justifiez votre réponse.

Figure 70 - Représentation d'une fonction par intervalle



Source : L'auteur

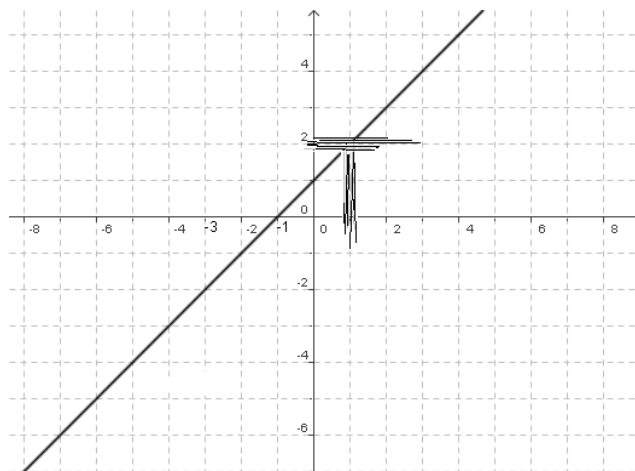
#### Objectifs du problème 4 :

Le seul objectif de ce problème est d'appliquer la définition formalisée de la notion de limite.

#### 2.4.1. Analyse a priori du problème 4

L'étude du graphique met en évidence que l'image réciproque de tout intervalle ouvert de centre 2 et de rayon très petit est un intervalle de centre 1 et de rayon très petit privé de 1 ; mais  $f(1)$  n'est pas égale à 2. Donc  $f$  a pour limite 2 lorsque  $x$  tend vers 1.

Figure 71 Représentation de la fonction

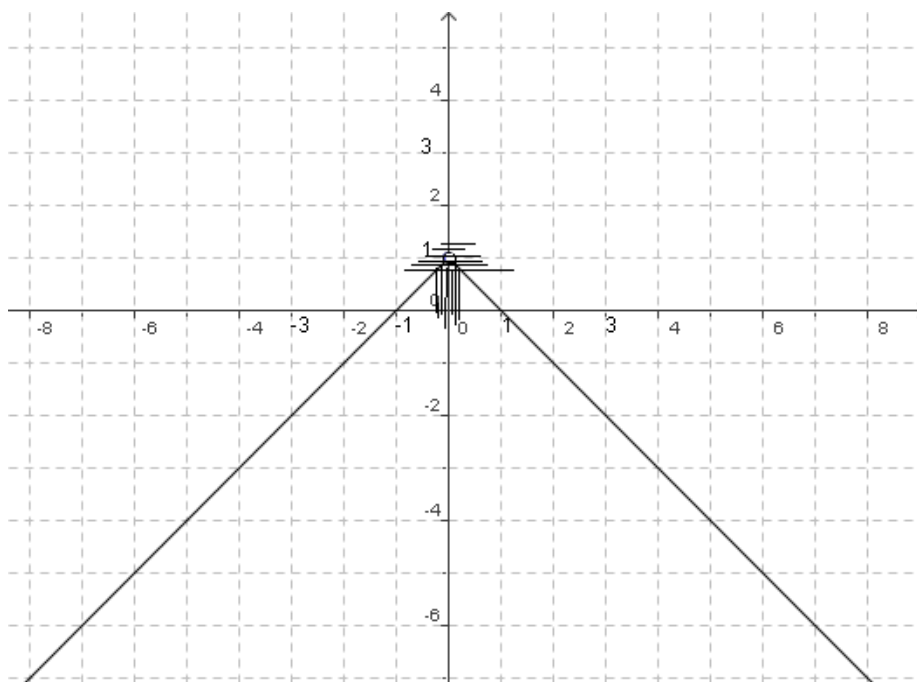


Source : L'auteur

Pour la résolution algébrique nous considérons  $I = ]1.99 ; 2.01[$  [ un intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0.01 (on suppose  $\varepsilon = 0.01$ ). Nous avons alors :

$|f(x) - 2| < 0.01 \Rightarrow \begin{cases} |x + 1 - 2| < 0.01 & \text{si } x \neq 1 \\ |1 - 2| < 0.01 & \text{si } x = 1 \end{cases} \text{ ou } \Rightarrow \begin{cases} 0.99 < x < 1.01 \\ 1 < 0.01 \text{ faux} \end{cases} \text{ ou si } x \text{ est différent de 1 on peut rendre la distance entre } f(x) \text{ et } 2 \text{ aussi petite qu'on veut en prenant } x \text{ suffisamment proche de 1 ; mais si } x = 1 \text{ cela n'est pas possible. Mais dans la recherche de la limite en un point (1) on ne s'intéresse pas à ce qui se passe pour } x = 1 \text{ donc 2 est la limite de } f(x) \text{ en 1.}$

Figure 72 - Représentation de la fonction



Source construction de l'auteur

L'image réciproque de tout intervalle ouvert de centre 1 et de rayon très petit est un intervalle de centre 0 et de rayon très petit privé de 0 et  $f$  n'est pas définie en 0. Donc  $f$  a pour limite 1 lorsque  $x$  tend vers 0.

Algébriquement

Soit  $I = ]0.99 ; 1.01[$  [ un intervalle ouvert de centre 1 et de rayon 0.01 (ici  $\varepsilon = 0.01$ )

$$|f(x) - 1| < 0.01 \Rightarrow \begin{cases} |x + 1 - 1| < 0.01 & \text{si } x < 1 \\ |-x + 1 - 2| < 0.01 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0.01 < x < 0 \\ 0 < x < 0.01 \end{cases}$$

Soit  $x \in ]-0.01 ; 0[ \cup ]0 ; 0.01[$ . Donc on peut rendre  $d(f(x), 1)$  aussi petite qu'on veut en prenant  $x$  suffisamment proche de 0. Par suite 1 est la limite de  $f(x)$  en 0.

### Les techniques utilisées :

Nous avons utilisé principalement deux techniques : une technique graphique et l'autre algébrique.

**T1 graphique :** Cette technique procède comme suit : On choisit un  $\varepsilon > 0$ , on prend un intervalle  $I = ]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$  sur l'axe des ordonnées, et on cherche son image réciproque par  $f$ , si on obtient un intervalle ouvert de centre  $a$  de rayon très petit éventuellement privé de  $\{a\}$  alors on dit que  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $a$ , sinon on dira que  $\ell$  n'est pas la limite de  $f$  en  $a$ .

**T2. Algébrique :** Elle procède comme suit : On détermine l'expression algébrique de  $f(x)$  en exploitant les informations du graphique. Puis, on montre que l'on peut rendre la  $d(f(x), \ell)$  aussi petite que l'on veut en prenant  $x$  suffisamment proche de  $a$ . en transformant l'inéquation  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  en une inéquation d'inconnue  $x$  du type  $|x - a| < \delta$  avec  $\delta = f(\varepsilon)$ . Il y a possibilité que l'on fixe  $\delta$  à l'avance et construire un nouveau  $\delta' = f(\varepsilon)$  et enfin choisir le minimum des deux.

### 2.4.2. Analyse didactique :

Les connaissances mobilisables pour résoudre ce problème sont : savoir projeter orthogonalement sur les deux axes du repère ; savoir résoudre graphiquement une inéquation du type  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  d'inconnue  $f(x)$  et  $x$ , et savoir déterminer graphiquement l'image directe et réciproque d'un intervalle par une fonction affine ou affine par intervalles.

Par rapport aux variables didactiques, nous avons essentiellement les suivantes : (V1) la nature de la fonction. Pour cette variable, nous avons attribué deux valeurs : fonction affine par intervalles non monotone et non définie en 0, fonction affine par intervalles non monotone et définie sur  $\mathbb{R}$ . Ce choix nous permet de tester si l'élève a les conceptions suivantes : la limite d'une fonction peut être atteinte ou non, la limite d'une fonction en un point est le minimum de cette fonction ou bien la valeur qu'elle ne peut pas dépasser (le maximum). La deuxième variable (V2) est la possibilité ou non du fonctionnement autonome du graphique (nécessité de contrôle numérique et algébrique ou non). Cette variable a deux valeurs : le graphique est suffisant pour répondre à la question, ou il faut lui adjoindre une validation par un calcul algébrique. À priori cela pourrait faire croître la difficulté ou au contraire aider à la validation. La variable algébrique est commandée par les éléments sur le graphique : les points avec leurs coordonnées lisibles ou non (possibilité de disposer d'une



équation de droite). La variable numérique est commandée par la présence ou non d'une graduation sur les graphiques et la variable algébrique est commandée par la donnée ou non de l'expression algébrique. La variable **(V3) est La nature des questions** : la formulation des idées aide à leur clarification. Nous avons utilisé des questions ouvertes et fermées pour obliger les élèves à justifier leur réponse. La variable **(V4) : Les cadres et registres en jeu**. Nous avons uniquement le cadre graphique. Il nous permet de présenter le problème dans le registre graphique et de modéliser les différentes conceptions erronées. Nous avons trois registres en jeu : Le registre de la langue naturelle il permet la compréhension du problème. Le registre symbolique il permet aux élèves de lire les codes, le registre graphique il permet de représenter les différentes propriétés de  $f$ . il oblige l'élève à faire un raisonnement graphique.

Le principal type de tâche est de justifier qu'un nombre réel  $\ell$  est la limite d'une fonction en un point. Ce type de tâche est du genre « justifier une proposition » avec les variables suivantes : la nature de la fonction :  $f$  est une fonction affine définie par son expression algébrique explicite, la représentation de la fonction :  $f$  est une fonction affine définie par sa représentation graphique, la position de  $a$  par rapport à  $Df$  :- le nombre  $a$  appartient à  $Df$  : nous pouvons appliquer les techniques suivantes : **(T1) Graphique** : Cette technique procède comme suit : on choisit un  $\varepsilon > 0$ , puis on prend un intervalle  $I = ]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$  sur l'axe des ordonnées et on cherche son image réciproque par  $f$ , si on obtient un intervalle ouvert de centre  $a$  de rayon très petit éventuellement privé de  $\{a\}$  alors on dit que  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $a$ , sinon on dira que  $\ell$  n'est pas la limite de  $f$  en  $a$ . **(T2) Algébrique** : Elle procède comme suit : on détermine l'expression algébrique de  $f(x)$  en exploitant les informations du graphique, puis on montre que l'on peut rendre la  $d(f(x), \ell)$  aussi petite que l'on veut en prenant  $x$  suffisamment proche de  $a$ . en transformant l'inéquation  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  en une inéquation d'inconnue  $x$  du type  $|x - a| < \delta$  avec  $\delta = f(\varepsilon)$ . Il y a possibilité que l'on fixe  $\delta$  à l'avance et construire un nouveau  $\delta' = f(\varepsilon)$  et enfin choisir le minimum des deux. Comme technologique-théorique nous avons la définition formelle de la limite, les propriétés de la valeur absolue, le corps des nombres réels et ses propriétés, les projections orthogonales.

### 2.5. Problème 5 : (mise en application de la définition formalisée)

Remarque : la définition intuitive est insuffisante car la phrase “  $x$  s'approche de  $a$  et  $f(x)$  s'approche de  $\ell$  ” est vague. Il est nécessaire de montrer que l'on peut rendre la distance entre

$f(x)$  et  $\ell$  plus petite que n'importe quel nombre réel positif d'où l'utilisation de  $\varepsilon$  et  $\delta$ , c'est-à-dire, pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver un  $\delta > 0$  qui peut dépendre de  $\varepsilon$ .

1. Expliquer en tes propres termes l'équation

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$

b. est-il possible que a. soit vraie ; mais que  $f(2)=3$  ? Expliquer.

2. a. Expliquez ce que signifie de dire que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2,999 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3,001.$$

Dans cette situation, est-il possible que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  existe ? Expliquer.

b. Expliquez ce que signifie de dire que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0.9\overline{9} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

Dans cette situation est-il possible que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  existe ? Expliquer

3. Démontrer en utilisant la définition précise de la limite que:

$$\lim_{x \rightarrow -2} 2x + 5 = 1; \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2-6x}{2x+1} = \frac{-1}{2}; \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3 = 6;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = -3; \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x+4} = 1; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = 1$$

4. Un tourneur mécanique a été invité à fabriquer un disque de métal circulaire d'une superficie de  $10.000 \text{ cm}^2$ .

(a) Quel est le rayon du disque produit ?

(b) Si une tolérance de l'erreur de  $0,05 \text{ cm}^2$  dans l'aire du disque est permise au tourneur, à quelle distance idéale du rayon de la partie (a) le tourneur doit-il contrôler le rayon ?

(c) En termes de définition en  $\varepsilon$ ,  $\delta$  de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , qu'est-ce que  $x$ ? Qu'est-ce que  $f(x)$ ?

Qu'est-ce que  $a$  ? Qu'est-ce que  $\ell$  ? Quelle valeur de  $\varepsilon$  est-elle donnée ?

Quelle est la valeur correspondante de  $\delta$ ?

### 2.5.1. Objectifs du problème 5 :

Notre objectif est de montrer les limites de la définition intuitive de la limite car elle n'est pas précise elle est naïve et peut rigoureuse, mais aussi de montrer l'efficacité de la définition précise dans la résolution d'un problème.

Nous voulons aussi montrer les aspects covariants et contra variant du fonctionnement de la définition formalisée de la limite ainsi que la dialectique entre les deux aspects. Dans la définition intuitive "plus  $x$  s'approche de  $a$  plus  $f(x)$  s'approche de  $\ell$ " nous avons ici la covariance. Dans l'application de la définition précise "on peut rendre la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  aussi petite que l'on voudra en prenant  $x$  suffisamment proche de  $a$ ", nous avons la contra variance. Dans le fonctionnement de la définition précise, nous avons une dialectique entre les deux ; car suivant certaines qualités de la fonction  $f$ , il y a nécessité de fixer  $\delta$  à l'avance pour construire un  $\delta$  convenable qui dépend de  $\varepsilon$ .

### 2.5.2. Analyse a priori du problème 5

Nous avons le choix des variables didactiques suivantes et leurs effets escomptés : (V1) Nous avons l'absence de l'expression algébrique explicite de  $f(x)$ . Cela doit obliger l'étudiant à faire un raisonnement et non donner un exemple ou un contre-exemple. Il doit se prononcer et justifier ses réponses. (V2) La nature des nombres : les nombres 2.999 et 3.001 sont tous proches de 3 mais cela ne signifie pas que 3 est la limite de la fonction. Les nombres 0.99999... et 1 sont égales et donc la limite de  $f(x)$  existe et est égale à 1. (V3) La nature de la fonction : Selon que la fonction soit affine, rationnelle, irrationnelle ou polynôme de degré supérieur à ou égal à 2, nous avons la covariance et la contra variance ou la dialectique entre les deux car on est souvent dans l'obligation de fixer  $\delta$  à l'avance pour construire un nouveau  $\delta$  qui dépend de  $\varepsilon$ . (V4) les registres en jeu : ici nous avons uniquement le registre des représentations symbolique, la fonction est donnée par son expression algébrique explicite et la limite par sa notation.

Para aux connaissances mobilisables pour résoudre ce type de tâche, nous pouvons citer : différence entre limite de  $f$  en  $a$  et l'image de  $f$  en  $a$ , les propriétés des limites : limites latérales, les différentes écritures d'un nombre réel  $1=0.99999\dots$ , l'ordre des quantificateurs universel et existentiel, l'axiome de choix, les propriétés mises en jeu dans la résolution d'inéquations avec valeur absolue, la factorisation des polynômes, la majoration et la minoration, les propriétés des structures additives e multiplicatives dans  $\mathbb{R}$

-ordre dans  $\mathbb{R}$ , et le retour au problème (comme nous faisons une construction il est bon sinon nécessaire de faire un retour au problème pour montrer que la solution construite convient).

En ce qui concerne la résolution des différentes questions, nous pouvons procéder de la façon suivante :

1. a. On peut rendre la distance entre  $f(x)$  et 5 aussi petite que l'on veut en prenant  $x$  suffisamment proche de 2. Nous avons aussi la définition en epsilon et delta.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon.$$

b. On peut avoir  $f(2)=3$ . Car la limite n'est pas toujours égale à l'image.

2. On peut rendre la distance entre  $f(x)$  et 2,999 aussi petite que l'on veut en prenant  $x$  suffisamment proche de 1 et inférieur à 1 ou  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad 0 < 1 - x < \delta \Rightarrow$

$|f(x) - 2.999| < \varepsilon$ . Et On peut rendre la distance entre  $f(x)$  et 3,001 aussi petite que l'on veut en prenant  $x$  suffisamment proche de 1 et supérieur à 1 ou  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad 0 < x - 1 < \delta \Rightarrow |f(x) - 3.001| < \varepsilon$ .

Dans cette situation, il n'est pas possible que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  existe car la limite à gauche de  $f(x)$  n'est pas égale à la limite à droite de  $f(x)$  en 1 ; mais si on s'en tient à la définition intuitive on a tendance à donner une réponse affirmative, par ce que les deux nombres se rapprochent de 3. Face à certaines situations, la définition intuitive conduit à des résultats erronés.

3. Démontrons que  $\lim_{x \rightarrow -2} 2x + 5 = 1$ . Soit  $\varepsilon > 0$ ;  $|2x + 5 - 1| < \varepsilon \Rightarrow |2x + 4| < \varepsilon \Rightarrow |x - (-2)| < \frac{\varepsilon}{2}$  par suite  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  convient. Ici nous avons la contra variance et la covariance car la fonction qui est en jeu est bijective. Le retour pour montrer que  $\delta$  convient. Supposons que  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , alors nous avons

$$|x - (-2)| < \delta \Rightarrow 2|x - (-2)| < \frac{2\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x + 4| < \varepsilon \Rightarrow |2x + 5 - 1| < \varepsilon. \text{ D'où le résultat.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2 - 6x}{2x + 1} = \frac{-1}{2} \text{ soit } \varepsilon > 0; \left| \frac{2 - 6x}{2x + 1} - \frac{-1}{2} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{\left| x - \frac{1}{2} \right|}{|2x + 1|} < \frac{\varepsilon}{5}$$

$$\text{par ailleurs } |x - 1/2| < 1/2 \text{ ie } 0 < x < 1 \Rightarrow 1 < 2x + 1 < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{|2x + 1|} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} |x - 1/2| < \frac{|x - \frac{1}{2}|}{|2x + 1|} < |x - \frac{1}{2}| \text{ Donc } |x - \frac{1}{2}| < \frac{\varepsilon}{5} \text{ par suite } \delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{5}\right\} \text{ convient}$$

Le retour pour montrer que  $\delta$  convient.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x+4} = 1 \text{ soit } \varepsilon > 0 \quad |\sqrt{x+4} - 1| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x+3}{\sqrt{x+4}+1} \right| < \varepsilon$$

par ailleurs on sait  $|x - -3| < 1 \Rightarrow -4 < x < -2 \Rightarrow 0 < x + 4 < 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+1} < \frac{1}{\sqrt{x+4}+1} < 1 \Rightarrow \left| \frac{x+3}{\sqrt{x+4}+1} \right| < |x - -3| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

donc  $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$

Le retour pour montrer que  $\delta$  convient.

$$\lim_{x \rightarrow -1} x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = -3$$

$$\text{soit } \varepsilon > 0 \quad |x^3 - 5x^2 + 2x - 1 - (-3)| < \varepsilon \Rightarrow |x^3 - 5x^2 + 2x + 2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |(x-1)(x^2 - 4x - 2)| < \varepsilon \Rightarrow |(x-1)((x-2)^2 - 6)| < \varepsilon$$

par ailleurs on sait  $|x - 1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$

$$\Rightarrow -2 < (x-2) < 0 \Rightarrow 0 < (x-2)^2 < 4 \Rightarrow -6 < (x-2)^2 - 6 < -2$$

$$\Rightarrow 2 < |(x-2)^2 - 6| < 6 \Rightarrow 2|x-1| < |(x-1)((x-2)^2 - 6)| < 6|x-1|$$

$$6|x-1| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{6} \Leftrightarrow$$

donc  $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$

Le retour pour montrer que  $\delta$  convient.

Nous voyons clairement dans ces cas que nous avons une dialectique entre la contra variance et la covariance.

4.a. Posons  $A =$  l'aire du disque et  $r$  son rayon.

$$A = 10000 \text{ cm}^2 \text{ et on sait que } A = \pi r^2. \text{ Donc } r = \sqrt{\frac{10000}{\pi}} \text{ cm} \cong 56,4189 \text{ cm.}$$

$$\text{b. } A = 10000 \text{ cm}^2 \pm 0.05 \Rightarrow |A - 10000| < 0.05 \Rightarrow 10000 - 0.05 < A < 10000 + 0.05$$

$$\Rightarrow 9999,95 < \pi r^2 < 10000,05 \Rightarrow \frac{9999,95}{\pi} < r^2 < \frac{10000,05}{\pi}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{9999,95}{\pi}} < |r| < \sqrt{\frac{10000,05}{\pi}} \quad \text{soit } 56,4188 < r < 56,4191$$

$56,4189 - 56,4188 = 0,0001$  et  $56,4191 - 56,4189 = 0,0002$

Donc on peut poser  $\delta = 0,0001$ .

$x=r$ ,  $A=f(x)$ ,  $\ell = 10000$  ;  $\varepsilon = 0,05$  et le  $\delta$  correspondant est  $0,0001$ .

### Connaissances mobilisables

Pour résoudre ce problème, l'élève doit connaître la définition formelle de la limite, faire la différence entre l'image d'une fonction et la limite de cette fonction, faire une majoration et ou une minoration, connaître l'ordre des quantificateurs universel et existentiel.

Du point de vue de la praxéologie attendue, nous avons deux types de tâches. Les premiers types de tâches sont du genre « expliquer une proposition » avec les variables suivantes : la nature de la proposition : a) une définition, b) égalité, c) une propriété. Les techniques suivantes peuvent être appliquées : ( $\tau_1$ ) la définition littérale de la limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point et ( $\tau_2$ ) l'identification dans la définition précise de la limite les données :  $f(x)$ ,  $a$  et  $\ell$ . La technologie suivante permet d'expliquer ces techniques : on peut rendre la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  plus petite que n'importe quel réel positif donné en prenant  $x$  suffisamment proche de  $a$ . ou bien montrer que l'image réciproque par  $f$  de tout intervalle ouvert de centre  $\ell$  est un intervalle ouvert de centre  $a$  (peut-être privé de  $\{a\}$ ). Cette technologie est justifiée par la théorie suivante constituée des notions suivantes : la définition précise de la limite d'une fonction numérique d'une variable réelle, l'ordre et opérations dans  $\mathbb{R}$ , le corps des nombres réels et ses propriétés, la projection orthogonale.

Les deuxièmes types de tâches  $T_2$  sont du genre « démontrer en utilisant la définition formelle de la limite ». Les variables de type de tâches sont la nature de la fonction : nous avons trois valeurs  $f$  est une affine,  $f$  est une fonction rationnelle et  $f$  est un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 ; la représentation de  $f$  :  $f$  est définie par son expression algébrique explicite, la position de  $a$  par rapport à  $Df$  : le nombre  $a$  est un réel fini appartenant à  $Df$ ,  $a$  n'appartient pas à  $Df$ . Pour les techniques, nous avons identifié deux techniques : ( $\tau_1$ ) la définition topologique de la limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un

point et  $(\tau_2)$ : Identifier dans la définition précise de la limite les données :  $f(x)$ ,  $a$  et  $\ell$ . Et appliquer la définition formalisée en epsilon et delta. Le complexe technologique théorique suivant permet de justifier ces techniques : La définition littérale de la limite d'une fonction en un point  $a$ . « On peut rendre la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  plus petite que n'importe quel réel positif donné en prenant  $x$  suffisamment proche de  $a$  », montrer que l'image réciproque par  $f$  de tout intervalle ouvert de centre  $\ell$  est un intervalle ouvert de centre  $a$  (peut-être privé de  $\{a\}$ ), la définition précise de la limite d'une fonction numérique d'une variable réelle, l'ordre et opérations dans  $\mathbb{R}$ , le corps des nombres réels et ses propriétés.

Les registres de de représentation sémiotique définis par R. Duval sont importants pour comprendre comment les élèves manipulent les représentations des objets mathématiques. Les objets mathématiques tels que les droites, cercles, nombres, fonctions ne sont pas des objets réels ou physiques. Pour les manipuler les élèves doivent passer par leurs représentations, mentales et sémiotiques.

Les représentations mentales d'un objet mathématique sont des constructions mentales faites dans un contexte particulier et à des fins spécifiques. Elles représentent les conceptions d'un individu sur un objet, une situation et ce qui leur est associé. Elles sont comme des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiante et de fonctionnement. Un objet mathématique peut avoir plusieurs représentations sémiotiques

La notion de registre de représentation sémiotique désigne tout système qui permet les trois activités suivantes :

- La communication qui consiste à former une représentation identifiable, à constituer une trace ou un assemblage de traces perceptibles qui soient identifiables comme une représentation de quelque chose dans un système déterminé ;
- Le traitement de cette représentation par les seules règles propres au système.

La conversion des représentations produites dans un système en représentations d'un autre système de telle sorte que ces dernières permettent d'explicitier d'autres significations relatives à ce qui est représenté.

Pour comprendre les objets mathématiques eux-mêmes et pas seulement leurs représentations, les élèves doivent maîtriser un même objet dans plusieurs registres de représentation sémiotique et ceux-ci doivent se coordonner. Comprendre un objet

mathématique, c'est la capacité de le reconnaître dans des registres différents. La conversion d'une représentation sémiotique à une autre peut ainsi être l'occasion d'apprentissage. (DUVAL, 1996)

### **Intérêt didactique**

Cette séquence nous permet de déterminer quelques connaissances intuitives des élèves. Cela nous permet d'élaborer des situations permettant de déstabiliser les connaissances erronées. Montrer les limites de la définition intuitive, l'insuffisance des registres graphique et numérique au profit de la complémentarité des trois registres (graphique, numérique et algébrique). Montrer la raison d'être de la définition précise à travers la résolution de certains problèmes dont elle est la solution la mieux adaptée.

Le fait qu'une droite n'a pas de limite, cela peut s'ériger en obstacle car les représentations graphiques sont ici des droites ou des demi-droites. La nature des nombres les élèves pourront penser que  $0.9999\dots$  n'est pas égal à 1. L'aller-retour entre la valeur fixée à l'avance de  $\delta$  et la construction par approximation de sa nouvelle valeur qui va dépendre d'epsilon.

### **Les conditions de passation**

Chaque élève disposera d'une copie de l'énoncé du problème, des feuilles, d'une règle, d'une équerre et d'un papier quadrillé. Le professeur distribuera les copies à chaque élève ainsi que les matériels de géométrie. Il veille au respect de l'heure, explique clairement les consignes du problème aux élèves qui seront dans le besoin. Il précisera qu'il n'y a pas de communication entre élèves, il ne doit juger bonnes ou mauvaises les réponses fournies par un élève, il doit recenser les différents types d'erreurs qu'il aurait rencontré. A la fin de l'heure il ramassera les copies.

Lorsqu'on constatera que les situations 1, 2 et 3 posent des difficultés aux élèves on procédera à leur correction au tableau. Pendant cette correction, on écrira au tableau les catégories d'erreurs rencontrées, les auteurs seront interrogés pour qu'ils donnent leur explication, afin de nous permettre de mieux comprendre leurs difficultés et de pouvoir en apporter une solution adéquate. Pour une bonne collaboration, nous leurs informerons que notre objectif est de connaître leurs difficultés et d'en apporter des solutions qui vont leur permettre de les surmonter.



Les situations 1, 2 et 3 seront traitées individuellement avec une durée de trente(30) minutes chacune et on formera de petits groupes de quatre(4) ou cinq(5) élèves pour la résolution des problèmes 1, 2, 3, 4 et 5. À la fin du problème 3, nous procéderons à la correction des problèmes 1, 2 et 3 puis on fera l'institutionnalisation avant d'entamer les problèmes 4 et 5 qui seront résolu par les élèves en groupe. Nous avons prévu trente(30) minutes pour chacun des problèmes 1, 2 et 3, vingt (20) minutes pour le problème 4 et une heure pour le problème 5.

### **3. Rôle du travail individuel**

L'objectif du travail individuel est d'amener chaque élève à s'imprégner du problème et à s'engager dans un processus de résolution. Il permet à l'élève de se poser des questions sur les difficultés qu'il peut rencontrer, le déclenchement des règles d'actions des élèves et la production des erreurs éventuelles (SACKUR ET MAUREL, 1999, p.16).

### **4. Rôle du travail collectif :**

Il permet la socialisation des élèves, l'élève apprend à coopérer, être à l'écoute de l'autre et défendre son point de vue. Il permet d'utiliser l'interaction entre pairs afin de déstabiliser des représentations ou des préjugés, de susciter la contradiction et l'inter-argumentation afin de permettre à chacun de mettre à l'épreuve ses conceptions et de les argumenter. Le travail en équipe permet d'opérationnaliser le conflit sociocognitif.

### **5. Le scénario :**

Notre expérimentation s'est déroulée au Lycée Kankou Moussa de Daoudabougou à Bamako (République du Mali) dans une classe de 12<sup>ème</sup> SET (Sciences Exactes Terminale) de 29 élèves les 19, 22 et 26 novembre 2018. Après avoir demandé et obtenu l'autorisation du proviseur, le censeur nous a mis en contact avec le professeur de la 12<sup>ème</sup> SET monsieur Mohamed Ag Arima, qui à son tour a informé ses élèves. Nous lui avons clairement expliqué les conditions de passation de notre expérimentation. Après ces rencontres nous avons programmé notre expérimentation en trois séances de deux heures chacune.

Le 19 novembre 2018 a eu lieu la première séance, pendant cette séance nous avons fait passer successivement les situations 1, 2 et 3. Pendant que les élèves traitent les situations 1, 2 et 3, les observateurs doivent circuler entre les tables pour recenser les difficultés qu'ont les élèves. A la fin de chaque situation, on ramassera les copies et on procédera à la

correction au tableau en mettant l'accent sur les erreurs éventuelles qui se sont produites. Pour leur pleine participation à l'expérimentation, nous avons rassuré les élèves que nous voulons connaître leurs difficultés afin de les aider à les surmonter. Ils doivent donc se sentir à l'aise pour traiter les situations et dans leur intervention pendant la correction.

Pour la correction, après avoir ramassé les copies, nous avons noté au tableau les erreurs significatives rencontrées et demandé aux auteurs de nous expliquer leur méthode. À l'aide de ces commentaires, nous avons fait la correction des situations en donnant des contre exemples pour montrer les limites des méthodes erronées.

La deuxième séance a eu lieu le 24 novembre 2018, elle a été consacrée aux problèmes 1, 2 et 3 d'une durée de trente (30) minutes chacun, cette fois-ci les élèves ont travaillé en petit groupe de 4 à 6 élèves.

La troisième séance a eu lieu le 26 novembre 2018, elle a portée sur les problèmes 4 et 5. Le problème 4 a duré 30 minutes et le problème 5 a duré une heure.

Pour le problème 1, nous avons informé les élèves qu'ils peuvent poser des questions sur les questions non comprises. Lorsqu'ils sont bloqués, la tâche de l'observateur est de les relancer. Par exemple, pour la question 2 du problème 1, on dit à l'élève qu'il peut remplacer  $f(x)$  par  $y$  et placer l'ensemble solution sur l'axe des  $y$ . Pour la question 3, l'élève peut remplacer  $f(x)$  par son expression algébrique. Pour la question 5, on peut leur demander d'exploiter les résultats de la question 4 et la représentation graphique de la fonction. À la fin de cette étape, nous prévoyons de faire une institutionnalisation locale sur les aspects suivants : plus  $d(f(x), 3)$  diminue, plus  $d(x, 2)$  diminue. On dit que  $f(x)$  tend vers 3 lorsque  $x$  tend vers 2. On peut rendre la distance  $d(f(x), 3)$  aussi petite qu'on veut en prenant  $x$  suffisamment proche de 2, l'image réciproque de tout intervalle ouvert de centre 3 est un intervalle ouvert de centre 2, éventuellement privé de  $\{2\}$ .

Pour les problèmes 2 et 3 on peut attirer l'attention des élèves sur le fait que  $f$  a deux expressions et sur deux intervalles différents.

À la fin du problème 3, on fait l'institutionnalisation :  $\ell$  est la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ , signifie que l'image réciproque de tout intervalle ouvert de centre  $\ell$  et de rayon très petit ( $\varepsilon$ ) est un intervalle ouvert de centre  $a$  ou un intervalle ouvert de centre  $a$  privé de  $\{a\}$  et de rayon très petit ( $\delta$ ). Et enfin on va donner la définition formelle en epsilon et delta, la faire fonctionner sur un cas.

Pour les problèmes 4 et 5 on ne fera qu'observer à la fin de l'heure on ramassera les

productions.

## 6. Analyse à postériori de l'expérimentation

### 6.1. Stabilisation du milieu :

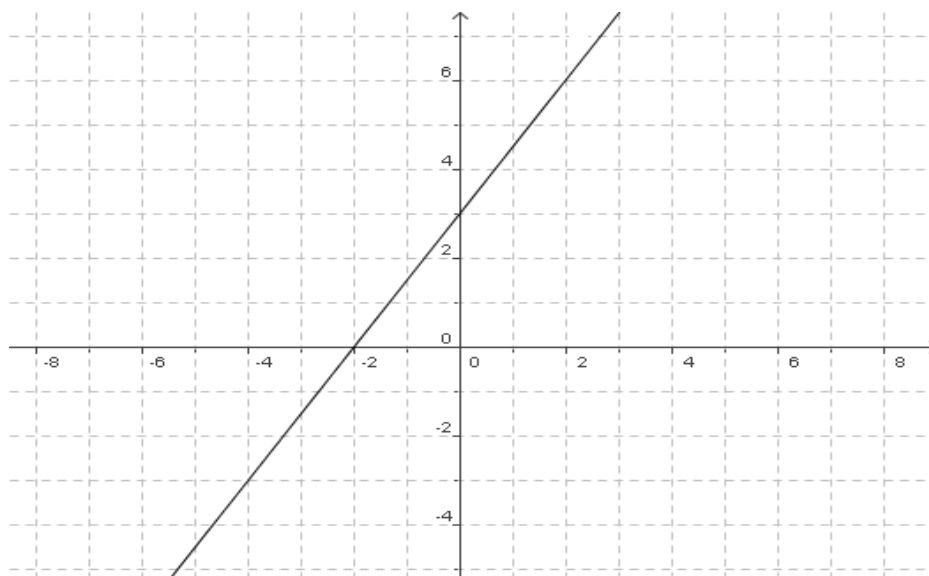
Nous avons trouvé qu'il était nécessaire de procéder à une stabilisation du milieu, les résultats montrent que sur l'ensemble des 29 élèves qui y ont participé seul un a pu faire correctement, tous les autres avaient des difficultés significatives dans le changement de cadres et la conversion des registres en jeu.

#### 6.1.1. Situation 1

Les représentations suivantes (Figures 73, 74 et 75) sont celles d'une fonction affine ou affine par intervalles dans un repère orthonormé fixé. Dans chaque cas, déterminer l'expression explicite algébrique de la fonction  $f$  et l'ensemble de définition de  $f$ .

a)

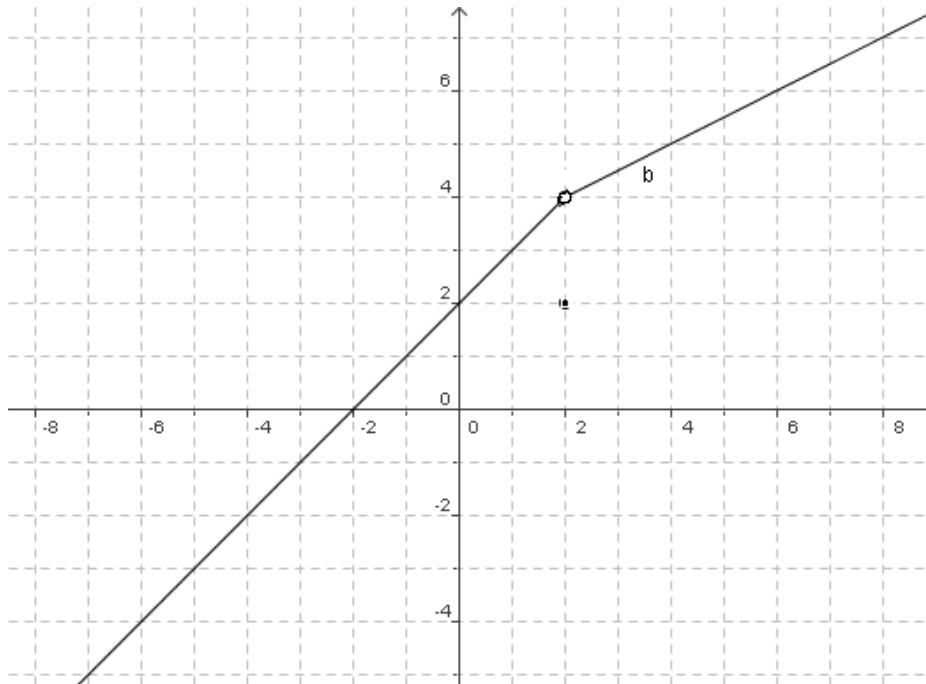
Figure 73. Graphique de la fonction de l situation 1



Source : L'auteur

b).

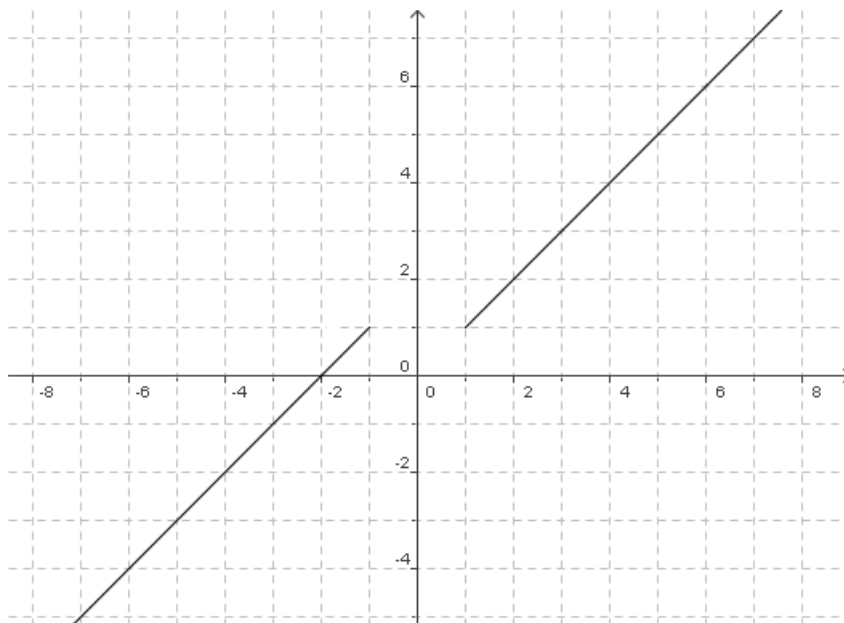
Figure 74 - Représentation de la fonction



Source : L'auteur

c)

Figure 75 – Représentation de la fonction de la situation 1, item c)



Source : L'auteur

Rappelons que notre objectif est de déterminer l'expression explicite algébrique d'une fonction affine ou affine par intervalles définie par sa représentation graphique dans un

repère orthonormé, mais aussi de déterminer l'ensemble de définition d'une fonction affine ou affine par intervalles définie par sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Nous avons trouvé que les élèves de la 12<sup>ème</sup> SE avaient de sérieux problèmes dans la détermination de l'expression algébrique d'une fonction affine ou affine par intervalles définie par son graphique. Parmi ces problèmes, on a la **détermination des coordonnées d'un point de la droite, la détermination de l'expression algébrique explicite d'une fonction affine ou affine par intervalle, la confusion entre les deux axes du repère, la détermination du domaine de définition dans le registre graphique**. Ces difficultés étaient prévisibles et prévues. Pour certains élèves, l'équation de la droite passant par les points  $A(a, 0)$  et  $B(0, b)$  est donnée par :  $f(x)=(x-a)(x-b)$ , et d'autres par  $f(x)=ax+b$ , on a aussi rencontré des réponses comme celles-ci :  $f(x) = ax^2 + b$  et  $f(x) = \frac{x}{(x-a)(x-b)}$ . Certains élèves ont cherché un point  $A(a, b)$  de la droite (D) et puis, ont posé que l'équation de (D) est :  $x+y=a+b$ . quant à l'ensemble de définition on pose toujours  $f(x) \neq 0$ .

Le passage du registre graphique au registre algébrique pose un problème et mais aussi le passage inverse, puisque nous avons constaté, que certains élèves ne savent pas non plus **représenter graphiquement une fonction affine ou affine par intervalles définie par son expression algébrique**. La majorité des élèves pensent que la représentation graphique de la fonction affine définie par  $f(x) = ax+b$  passe par les points  $A(a,0)$  et  $B(b,0)$ , pour certains élèves, elle passe par l'origine du repère et le point  $C(a, b)$ . D'autres confondent une fonction affine et une fonction du second degré. Certains ont même fait la confusion avec la fonction rationnelle. Nous avons ainsi rencontré des apprenants qui ont représenté des segments sur la droite numérique et d'autres avaient des difficultés avec les sous domaines des fonctions affines par intervalles.

Nous nous sommes rendu compte aussi qu'ils ne savaient pas résoudre des inéquations avec valeur absolue, ni déterminer l'image directe et réciproque d'un intervalle par une fonction affine ou affine par intervalles définie par sa représentation graphique ou son expression algébrique.

Ces connaissances qui font défaut aux élèves sont des connaissances déjà étudiées dans les classes antérieures, et elles sont nécessaires pour la compréhension du concept de limite. Après avoir pointé ces difficultés, nous avons procédé à leur actualisation avant de passer aux problèmes suivants.

Pour la situation 1, nous avons identifié cinq façons erronées de détermination de l'équation d'une droite.

Nous avons résumé les types d'erreurs commis dans la résolution de la situation 1 dans le tableau 14, suivi d'illustration par quelques copies témoins et les règles d'actions et théorèmes en actes sous-jacents.

Tableau 15 -Tableau récapitulatif des types d'erreurs

Formules	$f(x)=(x-a)(x-b)$	$x+y=a+b$	$f(x)=ax^2+b$	$f(x)=ax+b$	$\frac{x}{(x-a)(x-b)}$	Pas fait et autres
Effectif	6	3	1	11	2	5

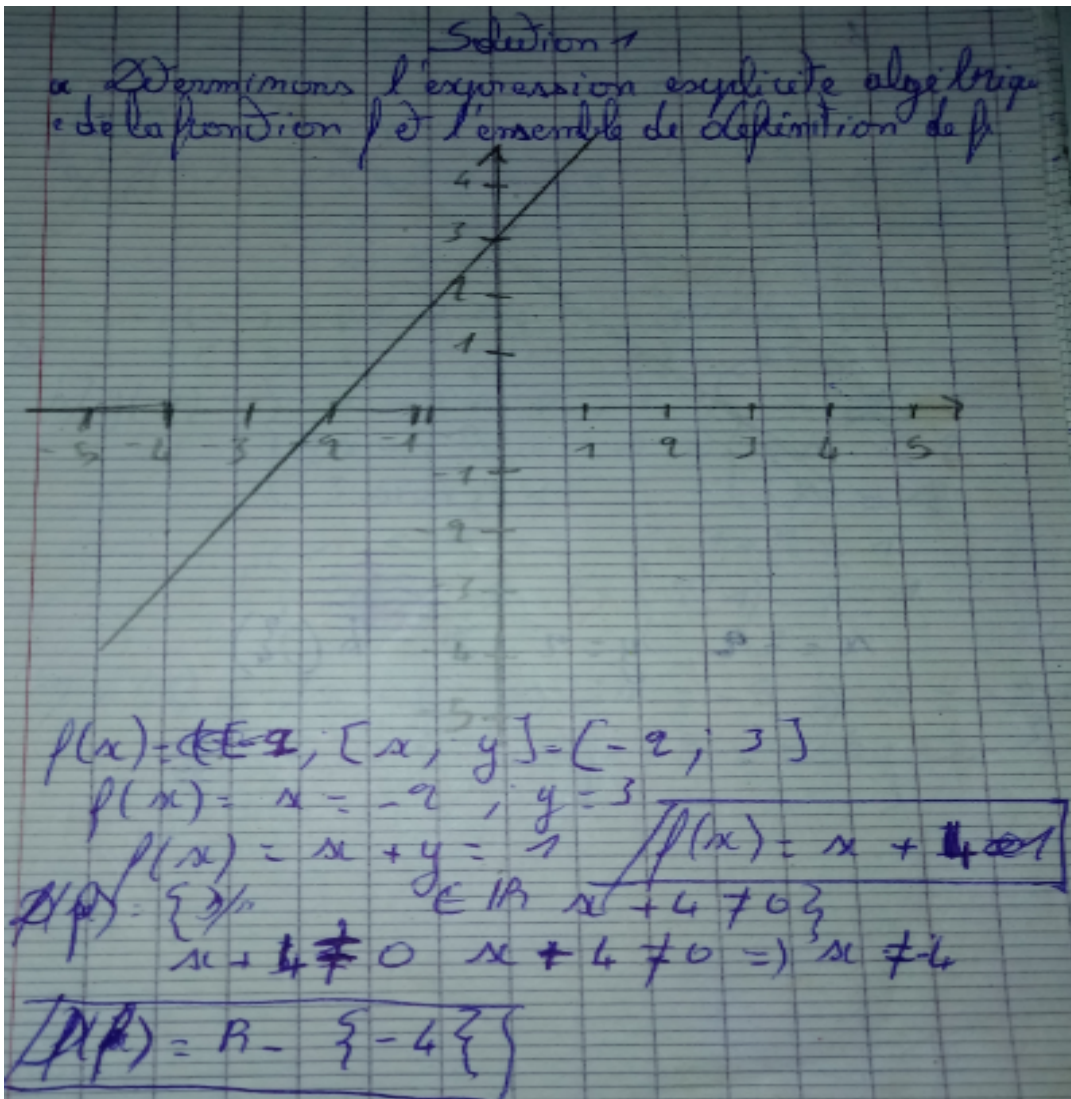
Source : L'auteur

Nous avons ici deux types d'erreurs significatives : la première et la quatrième. Le type d'erreur  $f(x)=(x-a)(x-b)$  a pour domaine de validité l'ensemble vide vu les fonctions mises en jeu dans la situation ;  $x+y=a+b$  a pour domaine de validité l'ensemble vide,  $f(x)=ax+b$  a pour ensemble de validité l'ensemble  $\{(-\sqrt{-b}, b)$  avec  $b < 0\}$  et  $f(x)=ax^2+b$  a pour domaine de validité l'ensemble vide

Dans la détermination de l'ensemble de définition, la plupart des élèves pensent que le domaine de définition est l'ensemble des réels privés des solutions de l'équation  $f(x)=0$ .

On voit sur le graphique (Figure 75) que la courbe intercepte les deux axes du repère, nous avons le point A(-2 ; 0) et le point B(0 ;3) et  $x_A + y_B = 1$  donc  $f(x)=x+y=1$  et l'élève tente de faire disparaître y et la deuxième égalité, pour cela il fait  $f(x)=x+4$ . Ici l'élève fait une mauvaise interprétation de l'appartenance d'un point à une droite (un point appartient à une droite si les coordonnées de ce point vérifient l'équation de cette droite).

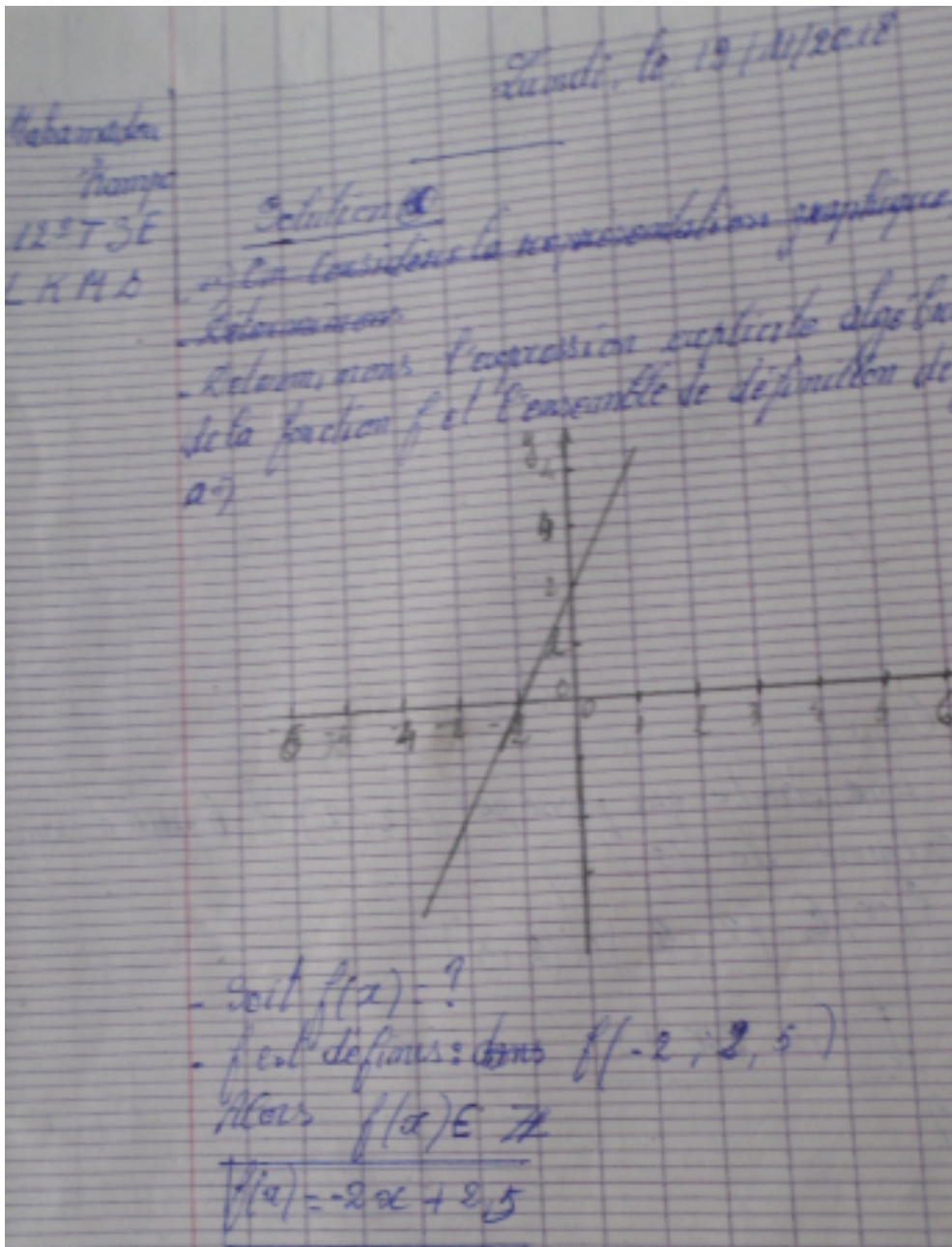
Figure 76 . Production d'élève



Source : Données de l'expérimentation

Les valeurs de la variable didactique sont :  $f$  discontinue en un point et  $f$  discontinue sur un intervalle. Ces variables ont beaucoup joué, les élèves n'ont pas réussi à identifier les différents sous domaines de  $f$  et les expressions algébriques respectives de  $f$  dans les sous domaines adéquats.

Figure 77 - Production d'élève



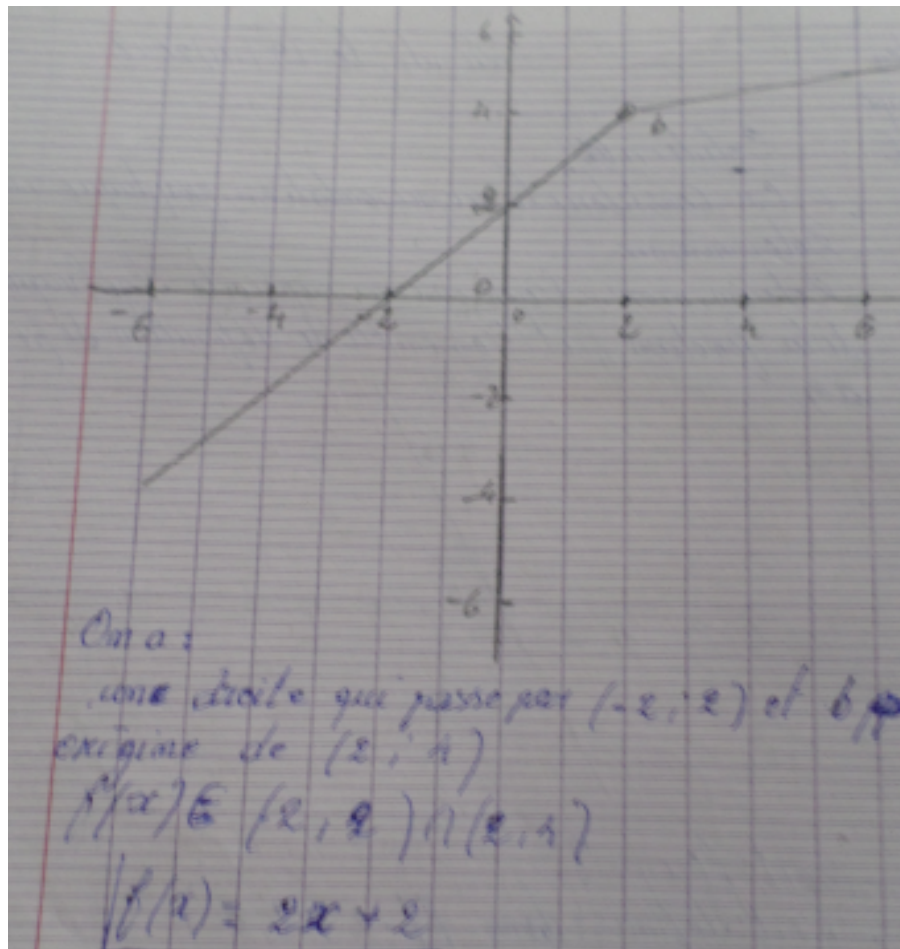
Source : données de l'expérimentation

La droite coupe les deux axes du repère aux points A(-2, 0) et B( 0, 3) (Figure 77). Son équation est alors définie par  $f(x) = -2x + 2,5$ . Ici l'élève a confondu 3 et 2,5, puisque dans le repère on avait des valeurs paires. Ici nous avons la confusion entre le coefficient directeur et l'intersection avec l'axe des abscisses dans la formule  $f(x) = ax + b$ .

L'ensemble de définition est  $\mathbb{Z}$  pour cet élève car sur la droite numérique nous avons des valeurs entières positives et négatives.



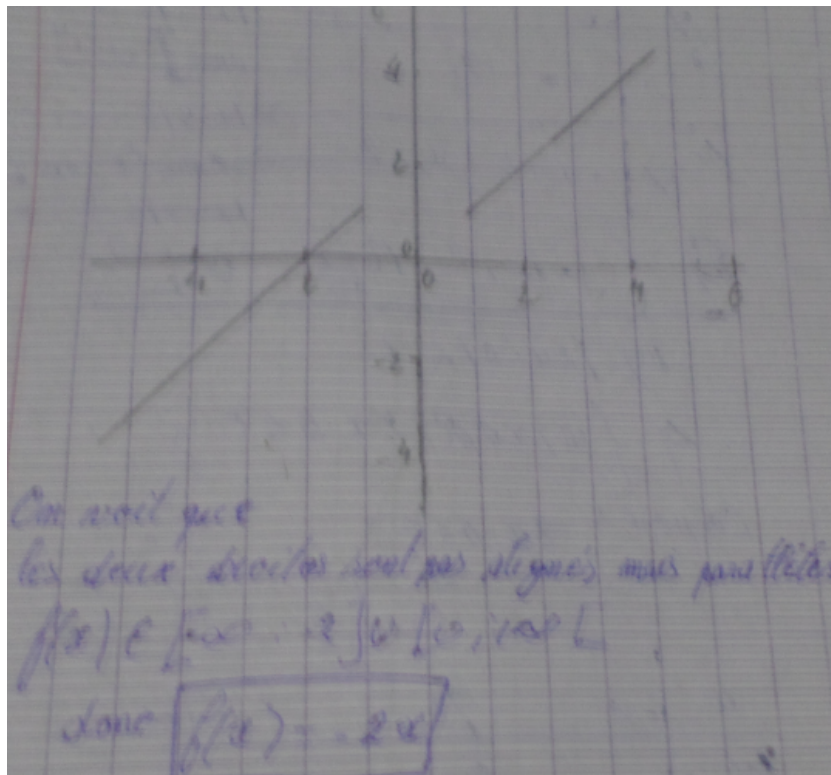
Figure 78 - Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

Pour la question b). L'élève continue dans le même ordre d'idée, mais, il est gêné par le fait que le graphique présente un point de discontinuité (Figure 79). Il signale que la droite passe par  $(-2, 2)$  et  $b$  ( $b$  est une droite) qui a son origine de  $(2, 4)$ . Il sait que l'on a deux demi-droites mais, malgré tout pour lui,  $f$  a une seule expression. C'est pour cela qu'il pose  $f(x) \in (-2, 2) \cup (2, 4)$  et  $f(x) = 2x + 2$ . Il rompt ici avec sa logique ( $f(x) = -2x + 2$  pour la première demi-droite) comme la deuxième demi-droite ne coupe pas les axes du repère il n'a pas d'équation.

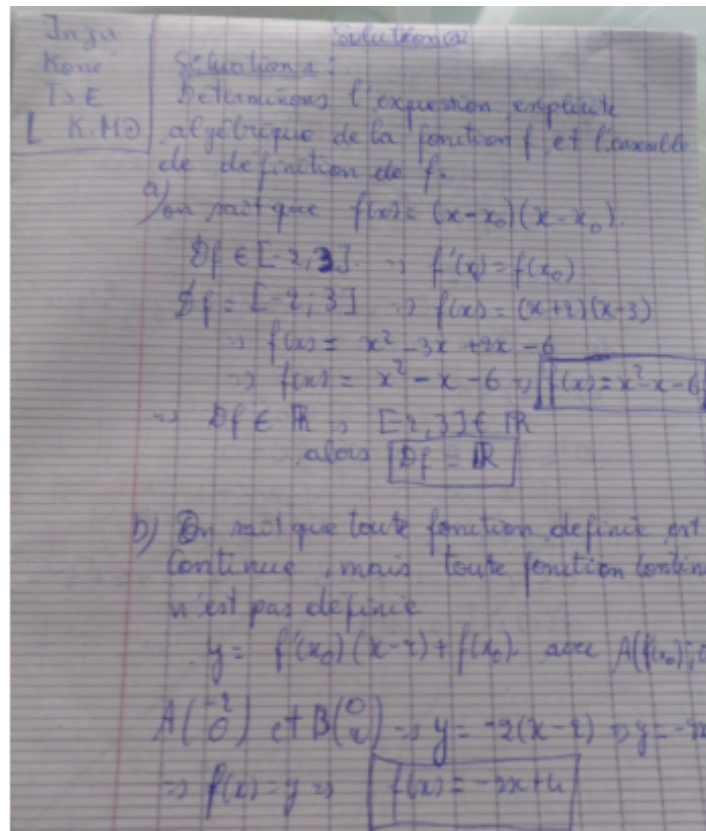
Figure 79. Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

La première demi droite coupe l'axe des abscisses en -2, mais la deuxième ne coupe aucune des axes du repère, donc l'équation de la droite est  $f(x) = -2x$ . Une droite qui n'intercepte pas les axes du repère, pour cet élève, n'a pas d'équation. Cet élève ne connaît pas les propriétés des droites, telles que : une droite n'a pas de limite, c'est un ensemble de points alignés. La discontinuité de  $f$  en un point et sa discontinuité sur un intervalle semblent avoir perturbé les élèves dans leurs processus de résolution de la situation.

Figure 80. Production d'élève

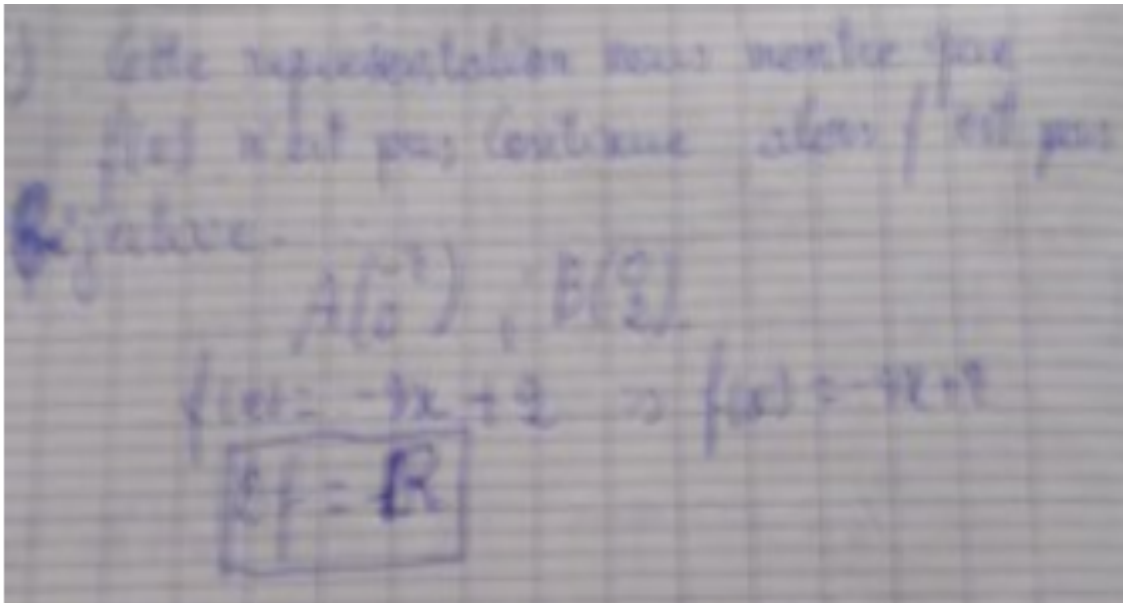


Source : données de l'expérimentation

Les difficultés de cet élève sont multiples (Figure 80). D'un côté, il confond les points d'intersection de la droite comme les solutions d'une équation du second degré. De deux, il ne connaît pas l'équation d'une droite affine, ni la représentation graphique d'une fonction du second degré. Troisièmement, il ne sait pas aussi déterminer l'ensemble de définition d'une fonction polynôme. Enfin, il a de sérieux problèmes de notation.

Lorsque l'on passe à une fonction affine par intervalle, il applique la formule de l'équation de la tangente à une courbe pour déterminer l'équation de la droite affine. En ce qui concerne la fonction discontinue sur un intervalle, il applique une autre technique (Figure 80) à savoir la droite qui passe par  $A(a, 0)$  et  $B(0, b)$  a pour équation  $y = ax + b$ . et bien que la fonction soit discontinue sur un intervalle, il dit que  $Df$  est  $\mathbb{R}$ .

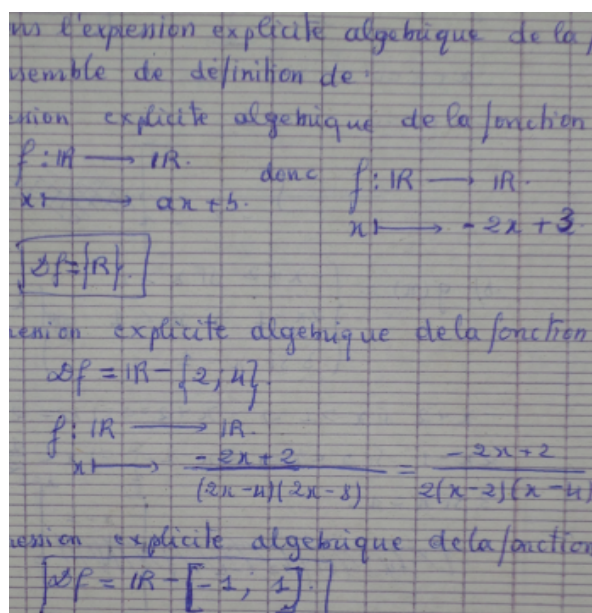
Figure 81 - Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

Avec cet élève le coefficient directeur d'une droite est l'abscisse du point d'ordonnée nulle. Et le fait que la représentation graphique présente un saut au point A(2, 4) cela est traduit par  $Df = \mathbb{R} - \{2, 4\}$ , et de ce fait  $f$  est une fonction rationnelle dont le dénominateur s'annule en 2 et 4. Comme la droite intercepte l'axe des abscisses en -2 et celui des ordonnées en 2 alors  $f(x) = \frac{-2x+2}{2(x-2)(x-4)}$  et enfin un point isolé n'est pas considéré comme une partie d'une représentation graphique (Figure 82).

Figure 82 Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

Nous pouvons donc conclure que cette analyse des productions d'élèves montre qu'ils ont des difficultés pour passer du registre graphique au registre algébrique. Parmi ces difficultés, on a la détermination graphique de l'ensemble de définition, la distinction entre une droite et une courbe, détermination graphique du coefficient directeur, distinction entre l'expression algébrique d'une fonction affine et une fonction du second degré ou fonction rationnelle.

### 6.1.2. Situation 2.

1- Tracer la représentation graphique des fonctions suivantes définies par :

$$a) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad b) g(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x > 1 \\ 2x-1 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad c) h(x) = 3x+5$$

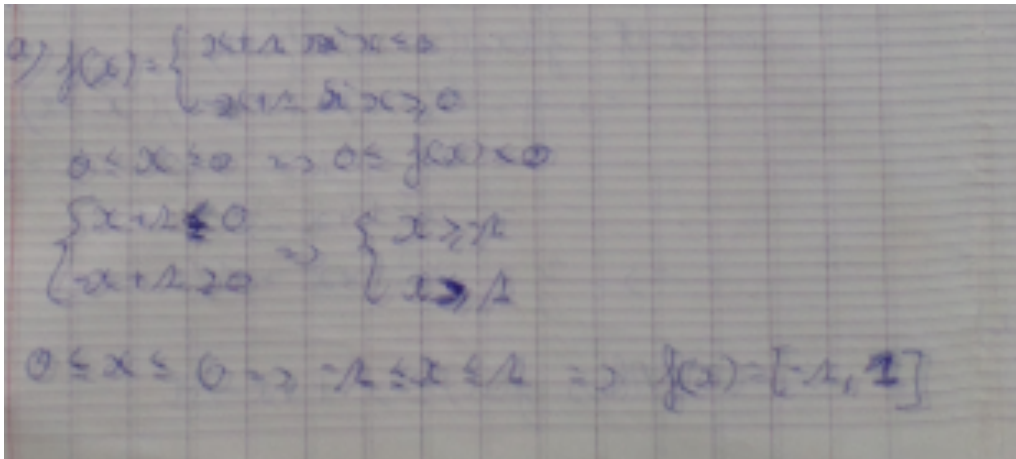
2- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

a)  $|x-2| \leq 3$  b)  $|2x-5| < 1$  c)  $|-x+2| < 2$  d)  $|x+3| \leq 2$ . On écrira les solutions sous forme d'intervalles et de distances.

Rappelons que notre objectif est d'amener les élèves à représenter graphiquement une fonction définie par son expression algébrique et une fonction affine par morceaux. Nous visons aussi que les élèves résolvent des inéquations du premier degré à une inconnue comportant la valeur absolue.

Nous avons remarqué que les élèves savent déterminer les coordonnées des points de la droite si elle est définie par son expression algébrique ; mais ils ont des difficultés à placer ces points dans un repère. Certains savent placer les points mais, ne prennent en compte les conditions sur la variable  $x$  (les sous domaines de  $D_f$ ). Certains ont calculé des limites et dérivées pour représenter les droites et d'autres ont transformé les expressions de la fonction pour tracer une seule droite. Il y en a aussi qui ont représenté des intervalles sur la droite numérique, comme on peut le voir sur la figure 81 qui représente la production d'un étudiant.

Figure 83 Production d'élève

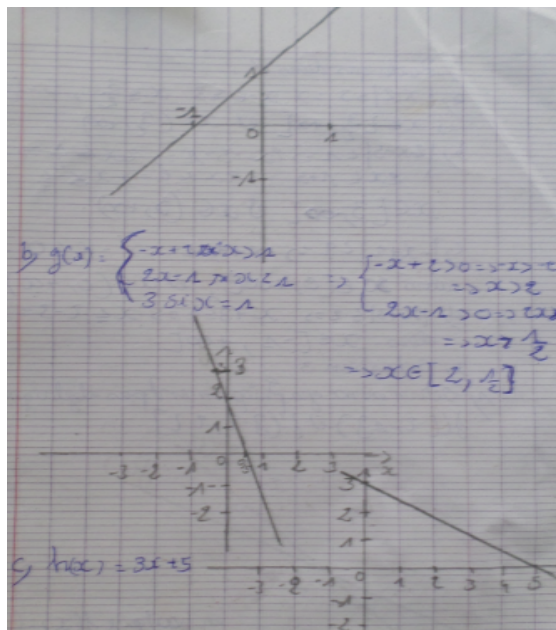


Source : Données de l'expérimentation

Cet élève a transformé l'expression de  $f(x)$  en un système d'inéquation qu'il a ensuite résolu en sa manière. Il a des difficultés sur l'ordre et inéquations dans  $\mathbb{R}$ .

En ce qui concernent les items d) e c) de la situation, nous constatons (Figure 83) que dans les deux cas, l'élève raisonne comme s'il était à la recherche du point d'intersection des droites. Après résolution du système d'inéquations, la représentation graphique de la fonction intercepte l'axe des ordonnées à l'origine de l'intervalle et celui des abscisses à l'extrémité de l'intervalle. Et pour tracer la droite qui passe par le point  $A(a, b)$ , on trace la droite qui intercepte l'axe des abscisses au point de coordonnées  $(a, 0)$  et celui des ordonnées au point de coordonnées  $(0, b)$ . Notons  $E_1$  ce type d'erreur.

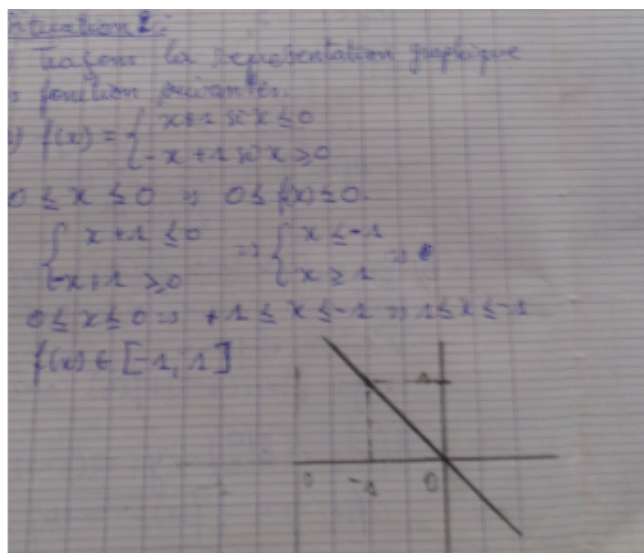
Figure 84. Production d'élève



Source : Données de l'expérimentation

Dans le troisième cas (Figure 84),  $f$  est une fonction affine d'expression  $3x+5$ , donc, elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3 et celui des abscisses au point d'abscisse 5. Désignons par  $E_2$  ce type d'erreur.

Figure 85. Production d'élève

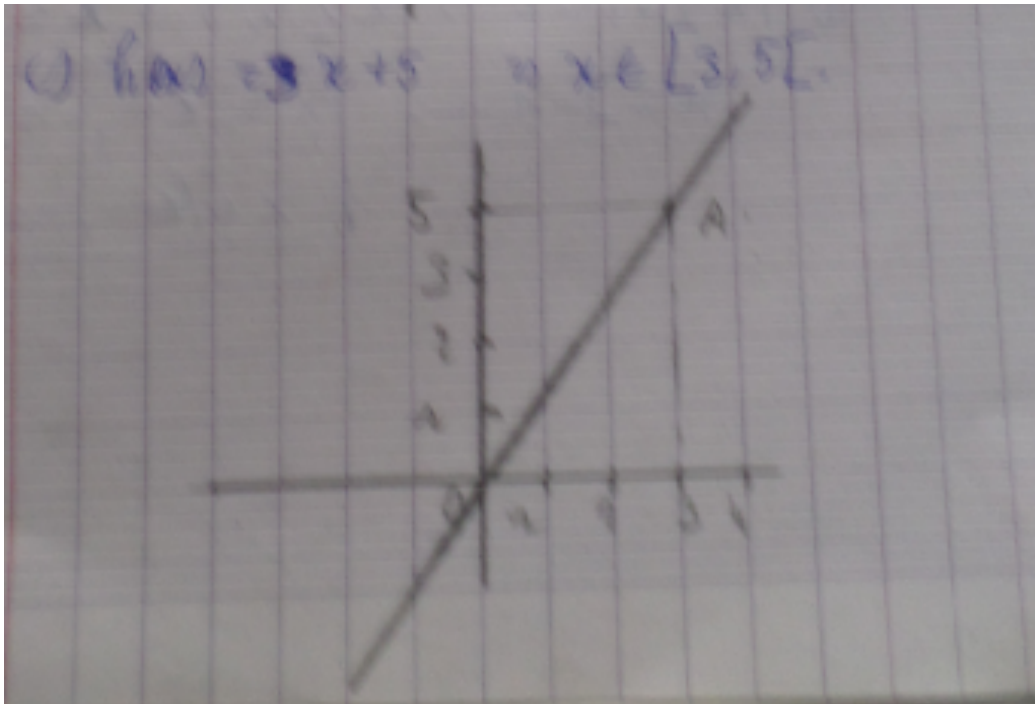


Source : données de l'expérimentation

Pour cet élève (Figure 85), après avoir obtenu le point d'intersection des deux demi droites, la représentation graphique de  $f$  passe par l'origine du repère et ce point d'intersection qui a pour coordonnées l'origine et l'extrémité de l'intervalle solution. Notons  $E_3$  ce type d'erreur

Dans le cas où  $f(x) = ax+b$ , la représentation graphique est la droite qui passe par l'origine du repère et le point  $A(a, b)$ . On désigne par  $E_4$  ce type d'erreur.

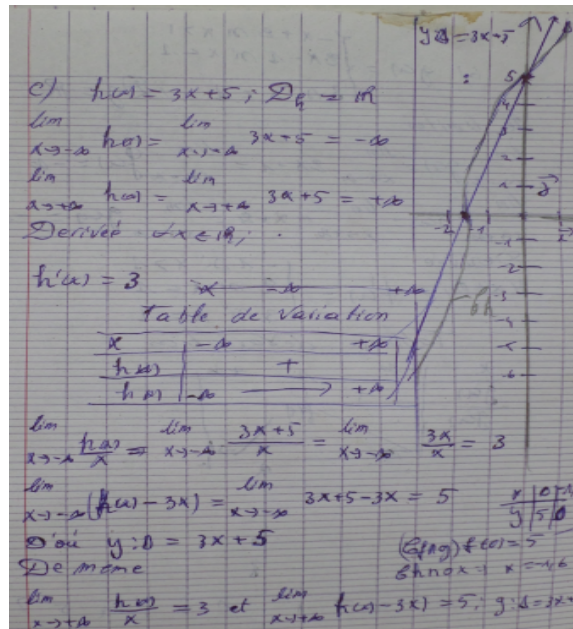
Figure 86. Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

A travers cette situation (Figure 86), les élèves ont confirmé leurs règles d'actions observées dans la première situation.

Figure 87. Production d'élève



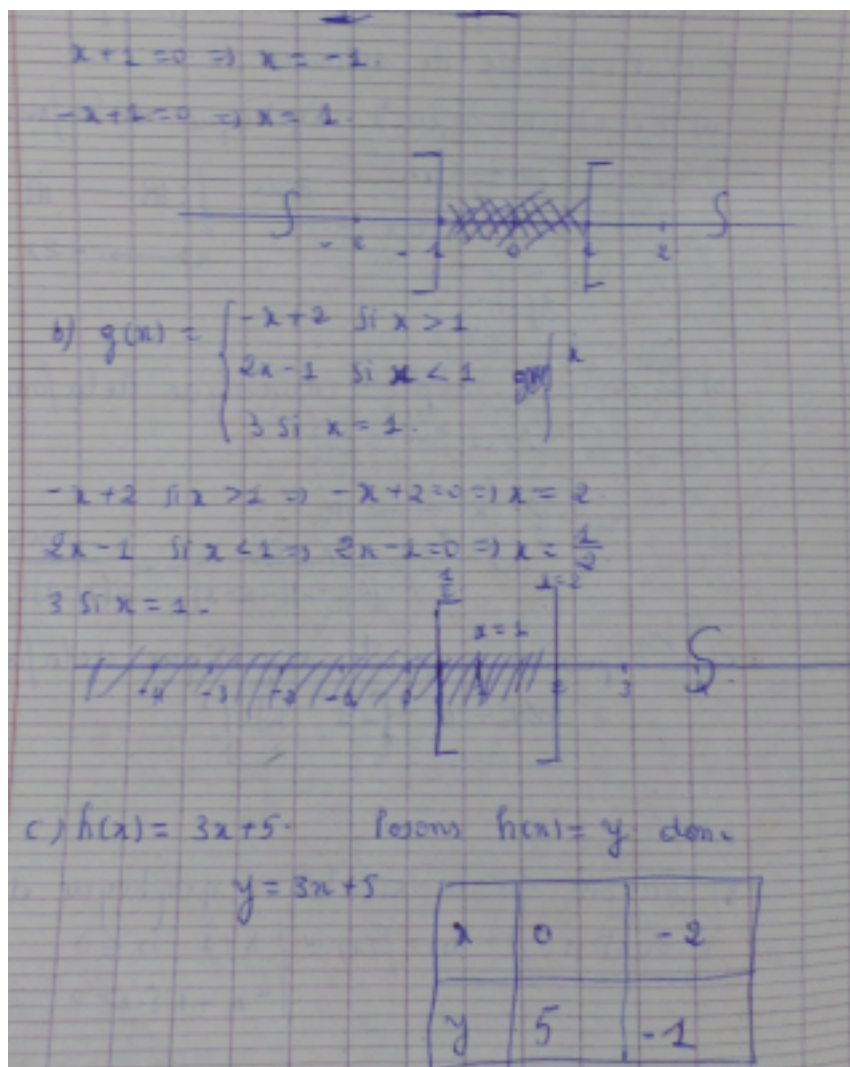
Source : Données de l'expérimentation



Cet élève (Figure 87) applique sans réflexion le plan d'étude d'une fonction. Il ne reconnaît pas l'expression algébrique d'une fonction affine, il n'est pas attentif, sinon il allait se rendre compte que la fonction et son asymptote sont les mêmes. Ce qui l'amène à tracer l'asymptote et une courbe. Désignons ce type d'erreur par E<sub>5</sub>.

Cette erreur peut être due aux types de fonctions étudiées en classe, si toutes les fonctions étudiées ont pour représentation graphique une courbe, cela fait penser à l'élève que la représentation graphique d'une fonction est toujours une courbe. Il est important de faire remarquer que la représentation graphique d'une fonction affine est une droite et on peut tracer une droite sans passer par le calcul des limites et des dérivés etc. cette erreur peut être considérée comme un effet du contrat didactique.

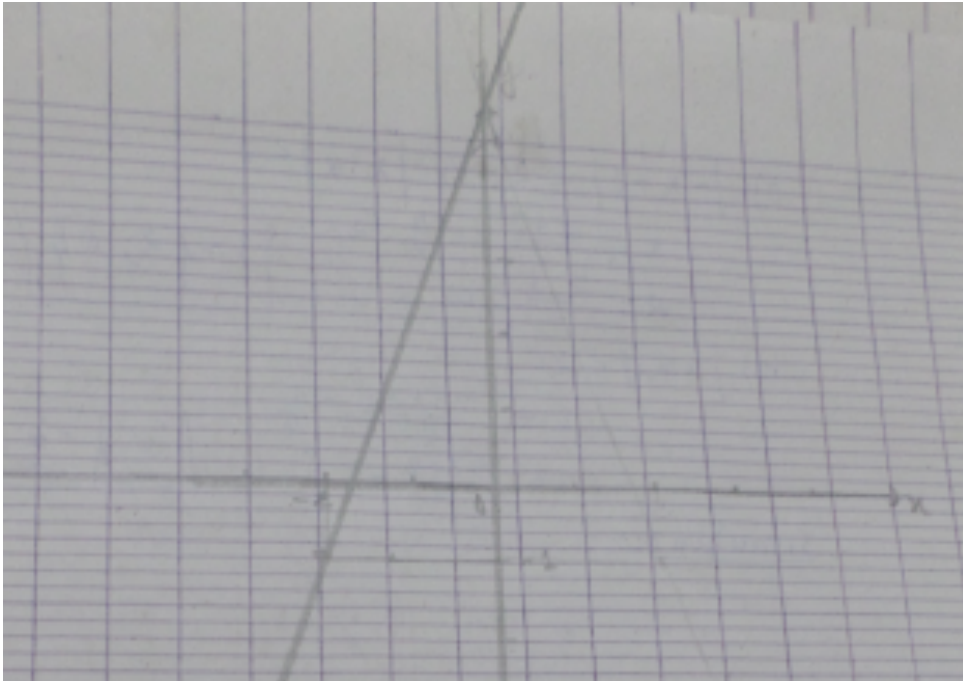
Figure 88. Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

Cet élève (Figure 88) a transformé les expressions de  $f(x)$  en un système d'inéquations qu'il a résolu et représenté l'ensemble solution sur la droite numérique. Désignons la par  $E_6$ .

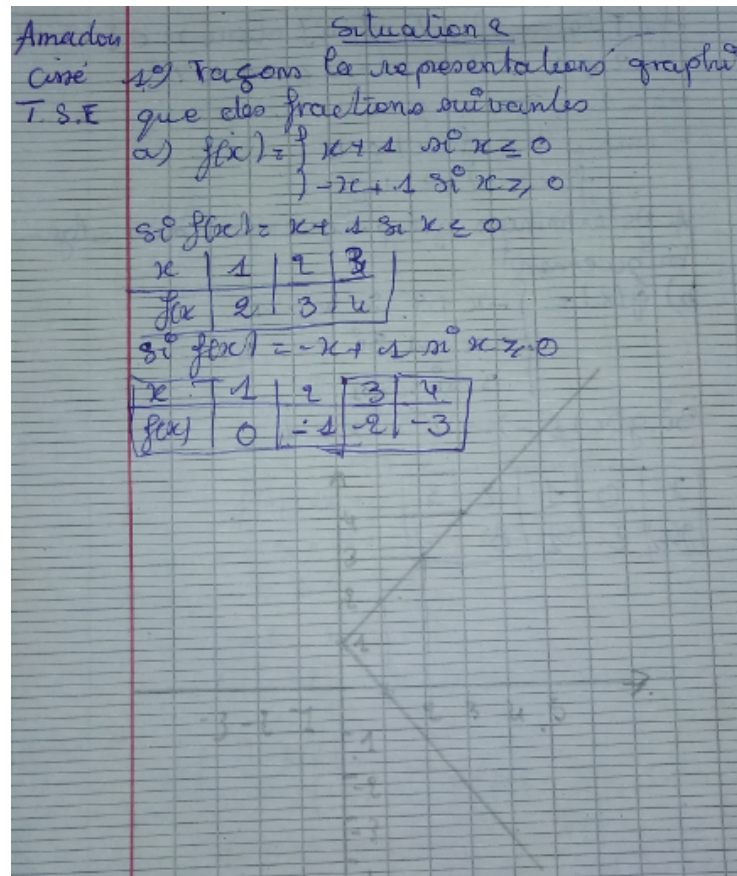
Figure 89. Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

Avec la présence des inégalités (Figure 89), l'élève pense à la résolution d'un système d'inéquations du premier degré à une inconnue. Dans le cas où la fonction n'est pas définie par morceaux, il fait un tableau de valeurs et fait une représentation correcte

Figure 90. Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

Ici on voit que l'élève a des difficultés par rapport au sens de l'inégalité. Dans le cas où  $x < 0$ , il choisit des valeurs supérieures à 0 pour remplir son tableau de valeurs. Mais, dans le cas de  $x > 0$ , il fait correctement son tableau de valeurs. Les points sont bien représentés, son problème se situe au niveau de la prise en compte du sous domaine de  $f$ . Il a tracé la partie qui est en dehors du sous domaine considéré. Ainsi le graphe tracé ne correspond à la représentation graphique d'une fonction, puisque nous avons des points qui ont deux images différentes par  $f$ . Nous désignons ce type d'erreur par  $E_7$

Le tableau 15 résume la répartition des élèves entre les types d'erreurs

Tableau 16. Tableau récapitulatif des types d'erreurs

Erreur	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	Autres
Effectif	1	2	1	1	2	9	1	11

Source : L'auteur

Par rapport à la deuxième question, nous nous sommes rendu compte que les élèves ne savent pas résoudre des inéquations avec valeur absolue. Il y en a aussi qui ont tout simplement écrit sans le symbole de la valeur absolue. Certains ont résolu comme dans le cas des inéquations sans valeur absolue, d'autres ont transformé les inéquations en des équations, il y en a aussi qui savent résoudre, mais, ils ont des difficultés pour écrire l'ensemble solution. Au total nous avons identifié cinq types d'erreurs :  $E_1$  transformer l'inéquation avec valeur absolue en une inéquation sans valeurs absolue,  $E_2$  : transformer l'inéquation en une équation,  $E_3$  ,  $E_4$  utilisation du tableau des signes. Nous présentons quelque cas pour illustrer ces types d'erreurs.

Figure 91. Production d'élève - Erreur de type  $E_1$

2) Résolvons dans  $\mathbb{R}$  les inéquations ci-dessous

a)  $|x-2| \leq 3$

Calculons ~~l'ensemble~~ <sup>transformons</sup> sans valeur absolue

$x-2 \leq 3$  ~~Parce que~~  $x-2 \geq 0$

$x \leq 5$

$x$	$\in$	5	$\rightarrow$
$x-2$	-	+	
$ x-2 $	$-x+2$	$x-2$	

$S: ] \leftarrow 5 [ \cup ] 5, \rightarrow [$

Source : données de l'expérimentation

Figure 92 - Production d'élève – Erreur de type E<sub>2</sub>

b)  $|2x-5| < 2$  posons  $x$  valeur absolue  
 $2x-5 < 2$  posons  $2x-5 > 0$   
 $x = \frac{5}{2}$

$x$	$<$	$\frac{5}{2}$	$>$
$2x-5$	$-$	$0$	$+$
$ 2x-5 $	$-2x+5$	$2x-5$	$2x-5$

c)  $|-x+2| < 2$  Résolvons sans valeur absolue  
 $-x+2 < 2$  posons  $-x+2 > 0$   
 $-x < 0$

$x$	$<$	$0$	$>$
$-x+2$	$+$	$0$	$-$
$ -x+2 $	$-x+2$	$x-2$	$x-2$

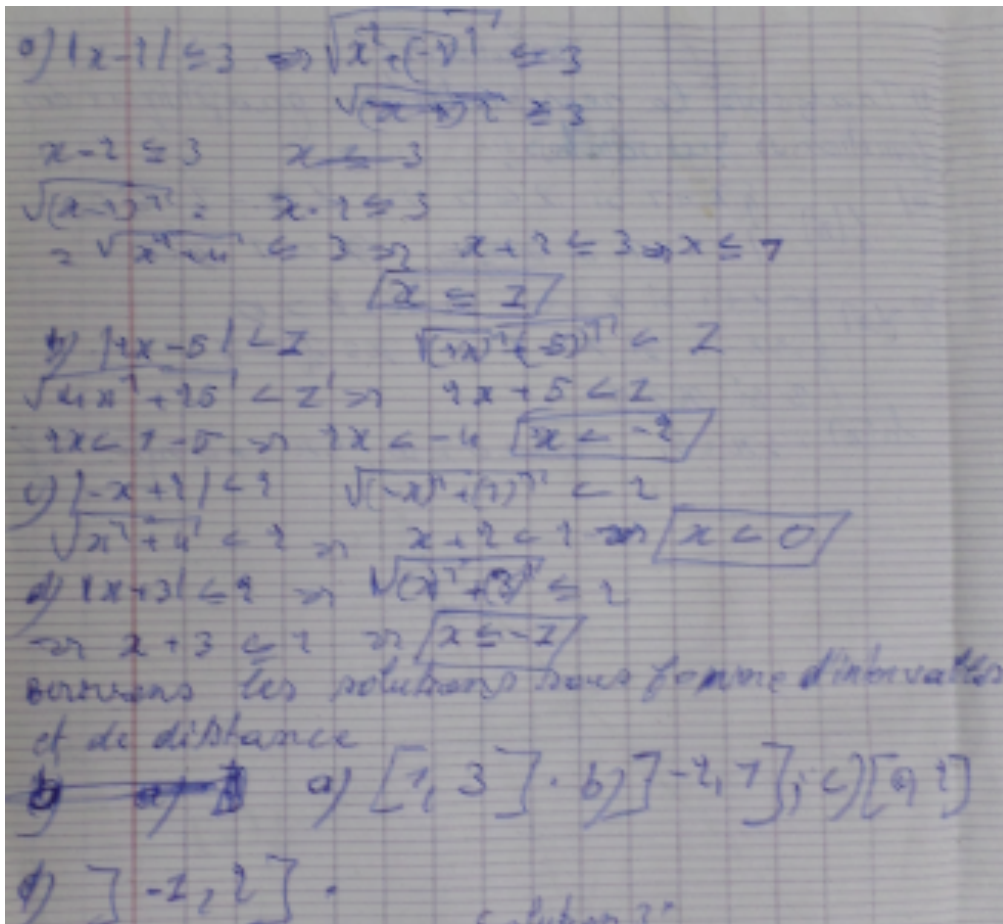
d)  $|x+3| \leq 2$  Résolvons sans valeur absolue  
 $x+3 \leq 2$  posons  $x+3 \geq 2$   
 $x \geq -1$

$x$	$<$	$-1$	$>$
$x+3$	$+$	$0$	$+$
$ x+3 $	$-x+3$	$x+3$	$x+3$

Source : données de l'expérimentation

Pour cet élève (Figure 92) résoudre une inéquation avec valeur absolue, c'est résoudre l'équation sans valeur absolue et l'ensemble solution est  $\mathbb{R}$  privé de la solution de l'équation si l'inégalité est au sens strict et  $\mathbb{R}$  si l'inégalité est au sens large.

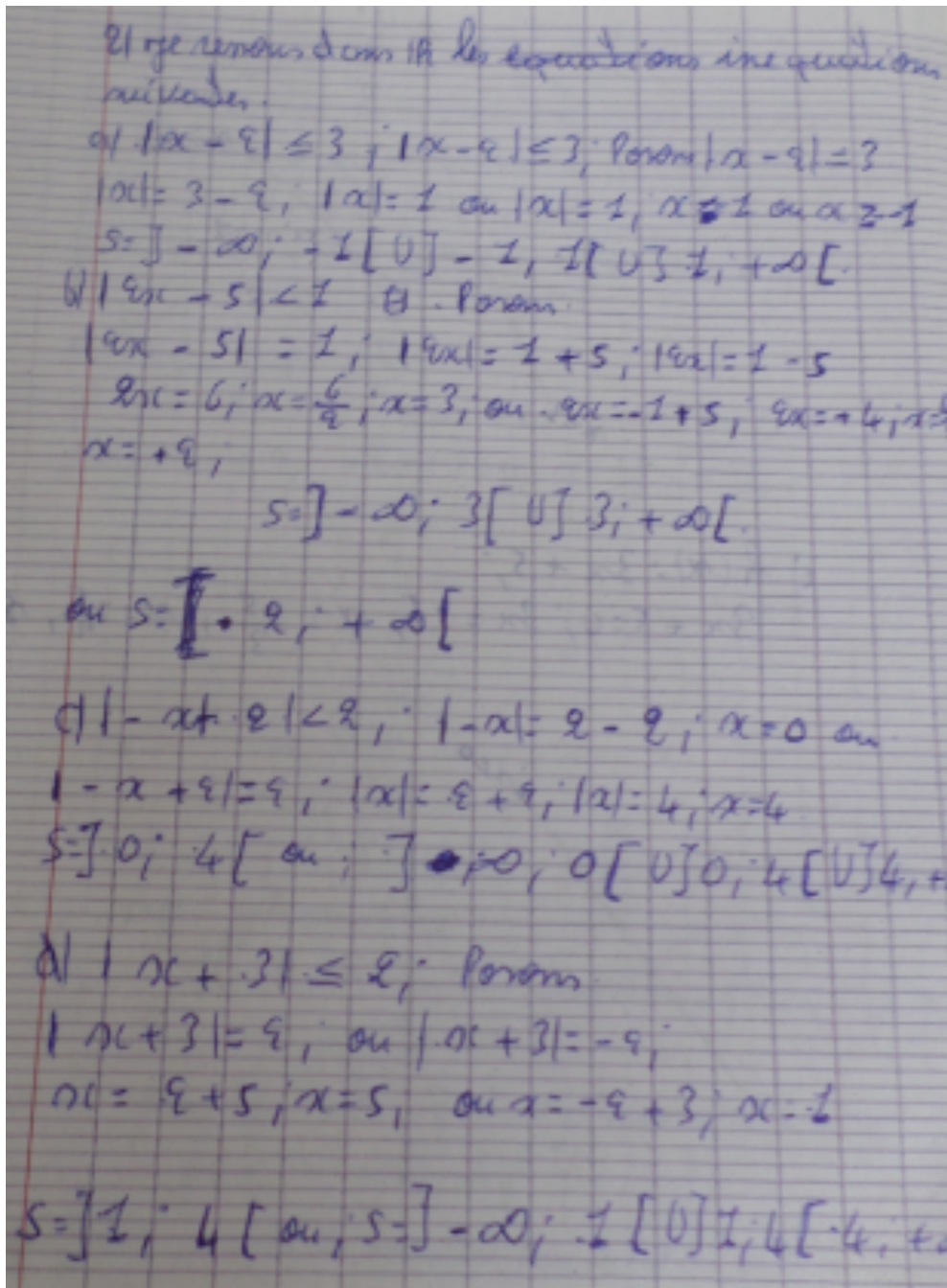
Figure 93 - Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

Cet élève (Figure 93) tente de supprimer le symbole valeur absolue en utilisant la propriété « la racine carrée de  $a$  au carré est égale à la valeur absolue de  $a$  », mais il a des difficultés par rapport aux propriétés de la racine carré, la racine carrée de  $\sqrt{(a-b)^2} = a+b$ . ainsi  $|x-c| < r$  équivaut à  $x-c < r$  ce qui implique que  $x < c+r$  et l'ensemble solution est l'intervalle d'origine  $c+r$  et d'extrémité  $r$ .

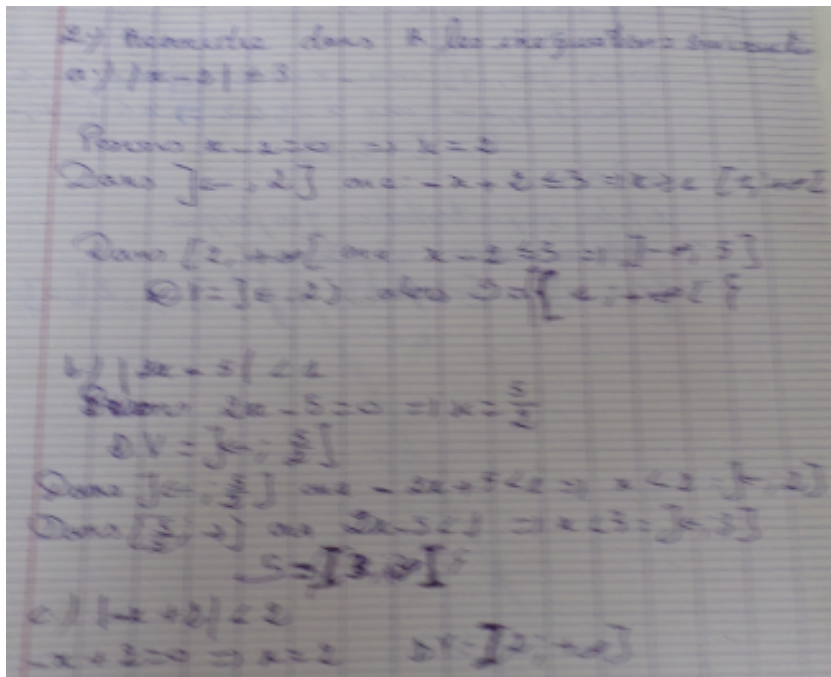
Figure 94 - Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

Pour cet élève (Figure 94) la valeur absolue affecte seulement le terme en x et  $|ax| = ax$  si  $a > 0$  et  $-ax$  si  $a < 0$ .

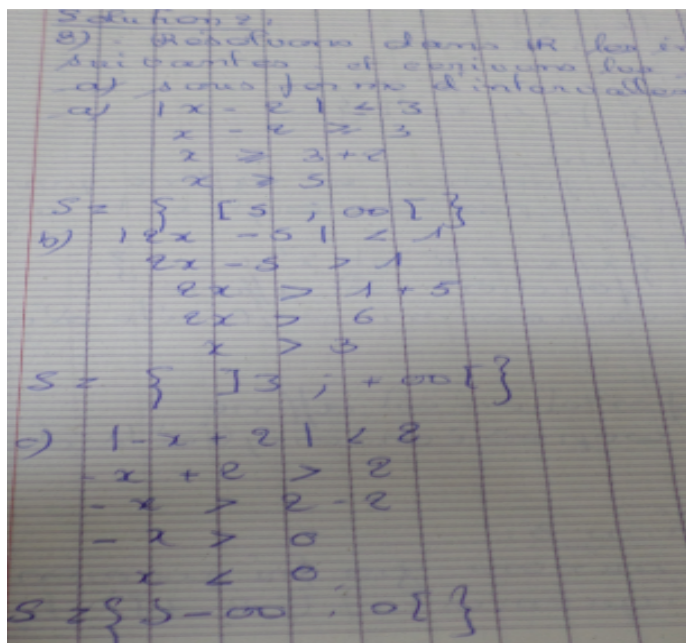
Figure 95. Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

Nous identifions une application erronée de la disjonction des cas (Figure 95). L'élève résout par disjonction des cas, mais au lieu de faire l'intersection des deux intervalles, il prend une des solutions partielles.

Figure 96. Production d'élève



Source : données de l'expérimentation



Pour cet élève (Figure 96), pour résoudre une inéquation avec valeur absolue, il résout une inéquation sans valeur absolue en changeant le sens de l'inégalité.

Figure 97. Production d'élève

2) Résolvons dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes

a)  $|x-2| \leq 3$   
 $-x+2 \leq 3$  ou  $x-2 \leq 3$   
 $-x \leq 1$                        $x \leq 5$   
 $x \leq -1$                        $x$

$S = ]-1, 5]$

b)  $|2x-5| < 1$   
 $-2x+5 < 1$  ou  $2x-5 < 1$   
 $-2x < 1-5$                        $2x < 6$   
 $x < 2$                                $x < 3$

$S = ]$   $S = [2, 3]$

c)  $|x+2| < 2$

Source : Données de l'expérimentation

Cet élève (Figure 97) applique les propriétés des équations avec valeur absolue aux inéquations avec valeur absolue. Si l'inégalité est au sens large l'ensemble solution, il existe un intervalle semi ouvert à l'origine, et un intervalle fermé si l'inégalité est au sens strict.

Figure 98. Production d'élève

2) Résolvons dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes.

a)  $|x-2| \leq 3$   
 déterminons le centre et le rayon  
 $C = \frac{3+3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow C = \frac{5}{2}$   
 $R = \frac{3-3}{2} = \frac{3}{2}$

$S = ]\frac{5}{2}, \frac{11}{2}]$

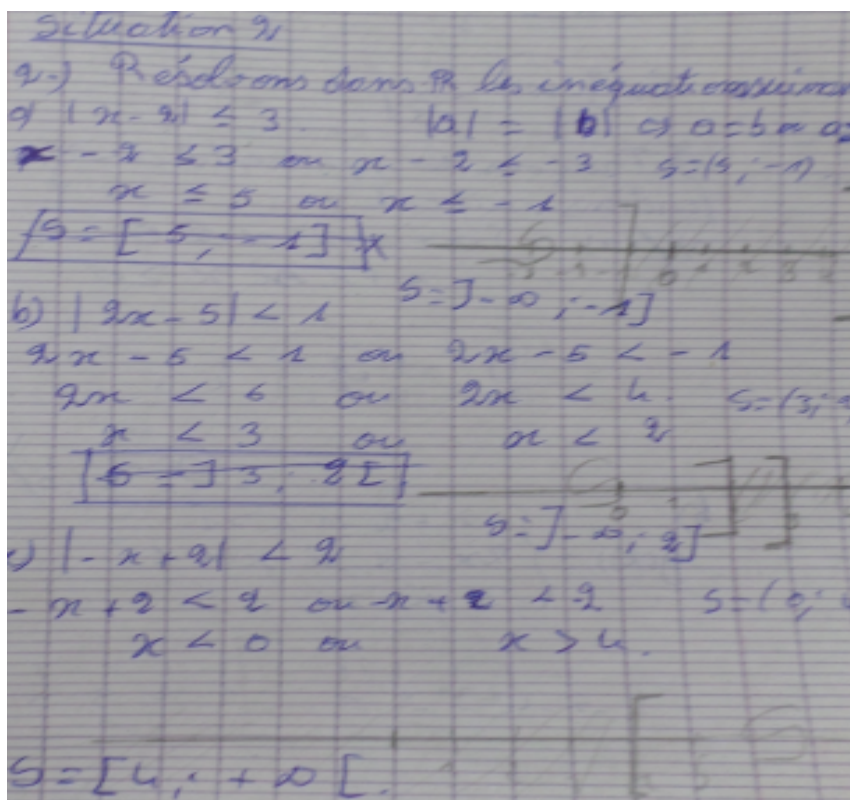
b)  $|2x-5| < 1 \Rightarrow |2 \cdot |2 - \frac{5}{2}| < 1$   
 $\Rightarrow |x - \frac{5}{2}| < \frac{1}{2}$   
 $C = \frac{\frac{5}{2} + \frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$   
 $R = \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$S = ]\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

Source : Données de l'expérimentation

La figure 98 montre la transformation de l'inéquation avec valeur absolue en une équation avec valeur absolue.

Figure 99. Production d'élève



Source : Données de l'expérimentation

La figure 99 montre que cet élève fait une transposition des propriétés des équations avec valeur absolue aux inéquations avec valeur absolue «  $|x| = a \Leftrightarrow x = a$  ou  $x = -a$ . », de plus  $|x+a| < b$  est absurde si  $a > b$ .

À l'issue de cette analyse nous pouvons donc conclure que les élèves ont des difficultés dans la résolution des inéquations avec ou sans la valeur absolue, ils appliquent mal les techniques de résolution. Donc il était nécessaire d'actualiser leur connaissance par rapport aux inéquations avec ou sans valeur absolue dans  $\mathbb{R}$ .

Nous résumons dans le tableau 16 la répartition des élèves entre les types d'erreurs.

Tableau 17. Tableau récapitulatif des types d'erreurs

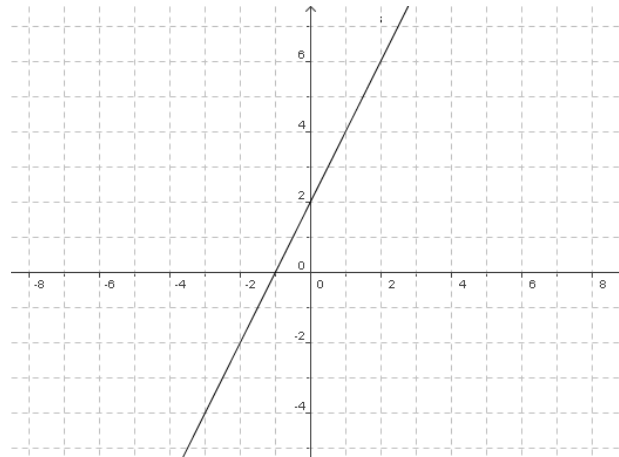
Type d'erreur	E1	E2	E3	E4	E5	Autres
Effectif	6	9	1	7	3	3

Source : L'auteur

### 6.1.3. Situation 3

1. On considère la représentation graphique suivante :

Figure 100 - Graphique 1 de la situation 3

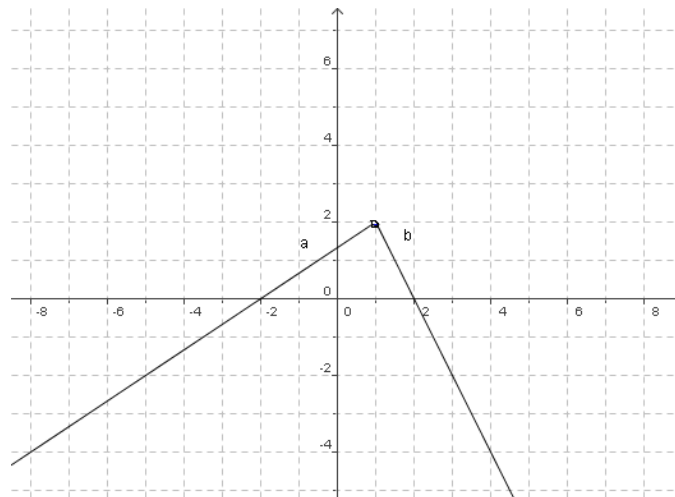


Source : L'auteur

Déterminer graphiquement puis algébriquement  $f([-2 ; 1])$  et  $f^{-1}([-2 ; 2])$

2) On considère la représentation graphique suivante :

Figure 101 - Graphique 2 de la situation 3

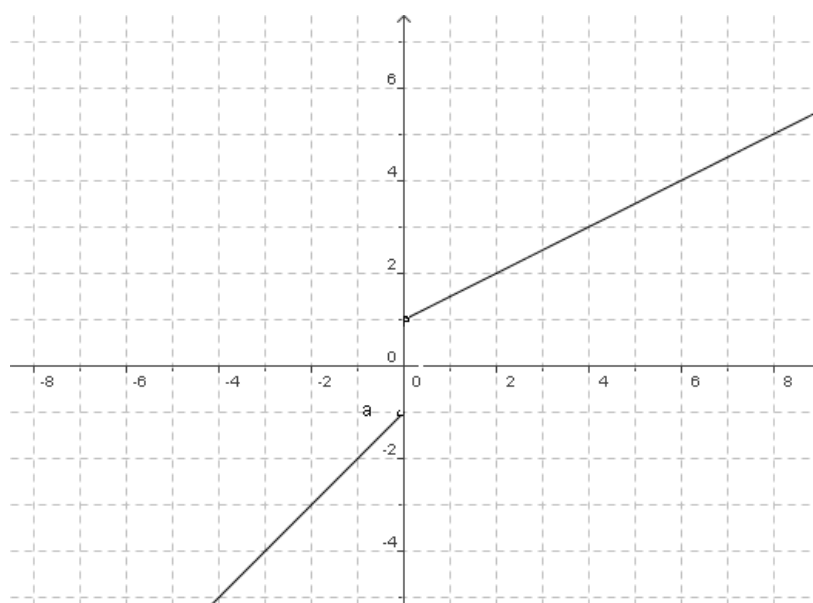


Source : L'auteur

Déterminer graphiquement puis algébriquement  $f([-2 ; 0])$  et  $f^{-1}([1 ; 2])$

3) On considère la représentation graphique suivante :

Figure 102 - Graphique 3 de la situation 3



Source : L'auteur

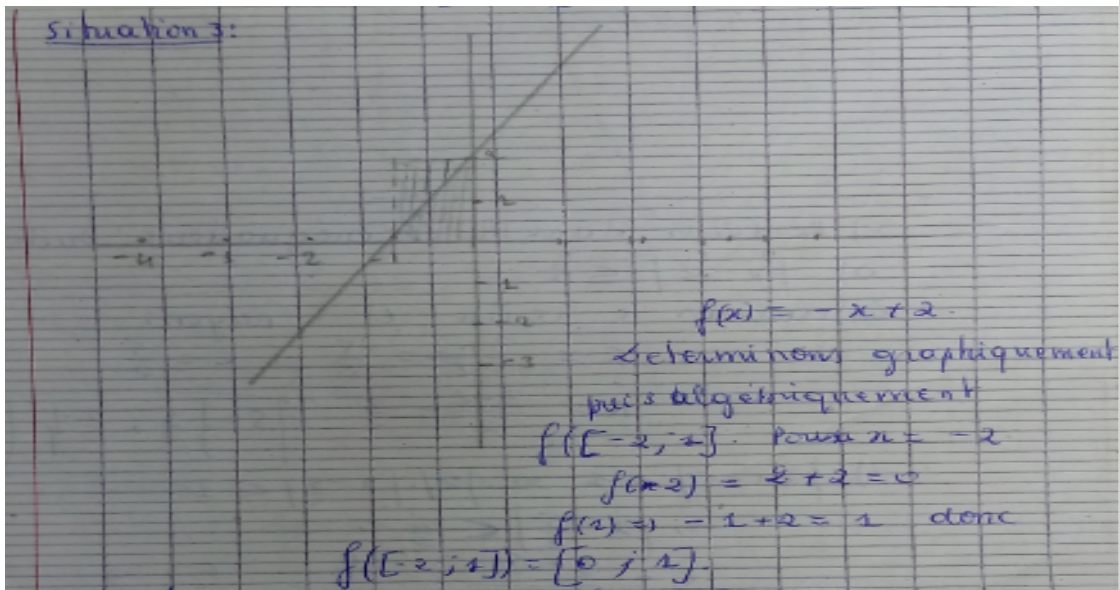
Déterminer graphiquement puis algébriquement et  $f([-1 ; 2])$   $f^{-1}([-1/2 ; 1/2])$

Nous rappelons que notre objectif est que l'élève détermine graphiquement l'image directe et réciproque d'un intervalle par une fonction, mais aussi qu'il détermine algébriquement l'image directe et réciproque d'un intervalle par une fonction. Ces connaissances sont nécessaires pour rentrer dans les problèmes.

Comme dans les situations précédentes, nous avons constaté beaucoup d'erreurs dans la résolution de cette situation, pour certains élèves l'image directe d'un intervalle  $[a, b]$  est la droite qui passe par les points  $A(a, 0)$  et  $B(0, b)$  (méthode graphique) et algébriquement l'image de  $[a, b]$  est  $f(x) = ax+b$ . Nous avons des élèves qui ont cherché l'expression algébrique, puis calculé l'image des extrémités de l'intervalle  $[a, b]$ . Pour certains  $f([a, b])$  est:  $f(x)=(x-a)(x-b)$ , pour d'autres l'image de l'intervalle  $[a, b]$  est le segment de droite obtenu en projetant verticalement les points d'abscisses respectives  $x=a$  et  $x=b$  sur la droite qui représente graphique de  $f$ .

La figure 103 met en évidence ce type d'erreur. Cet élève détermine l'expression algébrique en appliquant la formule suivante la droite qui passe par les points  $A(a,0)$  et  $B(0, b)$  a pour équation  $f(x)=ax+b$  et l'image de  $[a, b]$  est donnée par la formule :  $f([a,b])= [f(a), f(b)]$ .

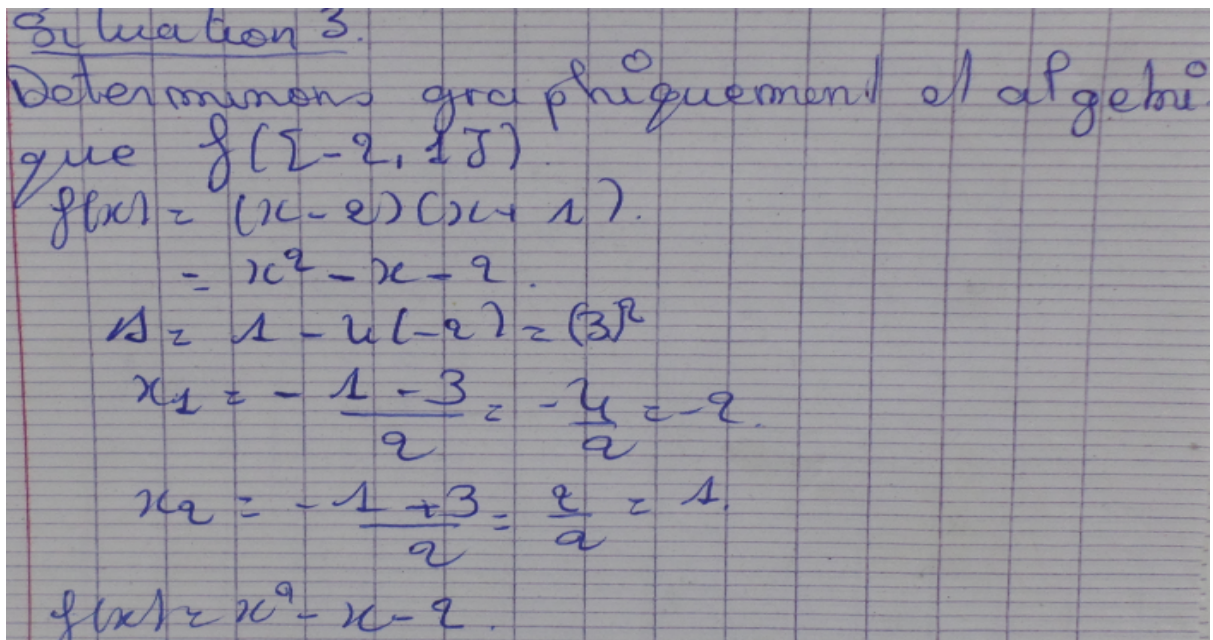
Figure 103. Production d'élève



Source : Données de l'expérimentation

Cette formule n'est vraie que lorsque  $f$  est continue et croissante sur  $[a, b]$ . Cet élève ne sait pas déterminer graphiquement l'image directe, sinon, il aurait dû se rendre compte de son erreur. La situation a été conçue de manière que si l'élève commet une erreur dans un registre qu'il s'en rend compte en passant à l'autre registre.

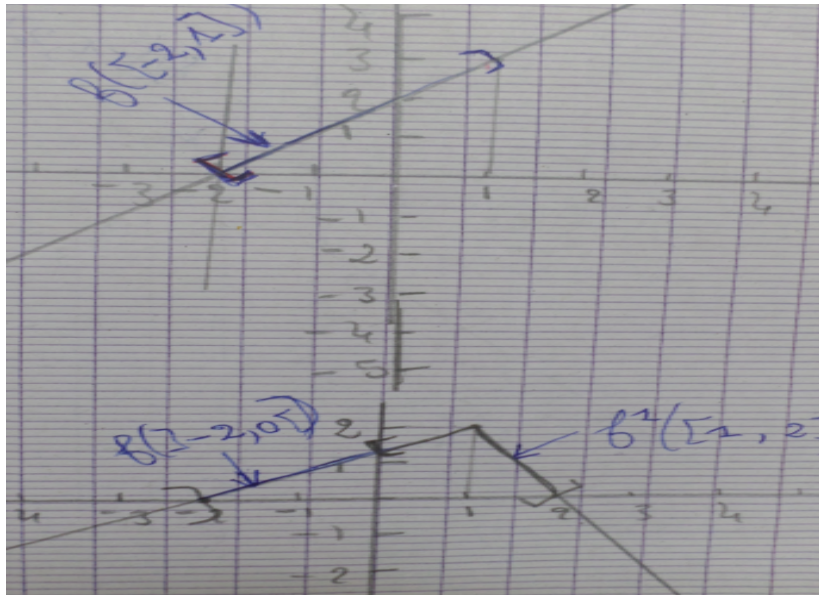
Figure 104. Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

Pour cet élève (Figure 104), algébriquement l'image d'un intervalle  $[a, b]$  par une fonction, est définie par  $f([a, b]) = (x+a)(x+b)$ . Ainsi on peut affirmer que l'image de tout intervalle est une fonction du second degré.

Figure 105. Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

Pour cet élève (Figure 105) pour trouver graphiquement l'image directe ou réciproque d'un intervalle, on trace deux droites verticales qui passent respectivement par les extrémités de cet intervalle, et l'image est le segment de droite formé par l'intersection des deux verticales et le graphique de la fonction.

Nous récapitulons dans le tableau 17, l'effectif des erreurs commises par certains élèves.

Tableau 18. Tableau récapitulatif des types d'erreurs

Type d'erreur	E1	E2	E3	E4	E5	Autres
Effectif	6	9	1	7	3	3

Source : L'auteur

Le constat est amer, puisque les activités graphiques et les inéquations avec valeur absolue sont vues depuis la 10<sup>ème</sup> et reprises en 11<sup>ème</sup> ; après tout cela on voit que les élèves de la 12<sup>ème</sup> année sciences exactes éprouvent d'énormes difficultés avec ces notions élémentaires. Les élèves avaient des difficultés dans les cadres algébrique et géométrique et dans l'interaction entre les deux. Il était donc nécessaire d'actualiser les connaissances des

élèves sur ces notions de bases qui sont nécessaires pour la compréhension de la définition formelle de la limite.

Après avoir collecté les copies, nous avons procédé à la correction des situations 1, 2 et 3. Avec ces difficultés, il était impossible de faire un travail dans le cadre géométrique, ni dans le cadre algébrique sur la définition formalisé de la limite.

## 6.2. Analyse des situations-problèmes

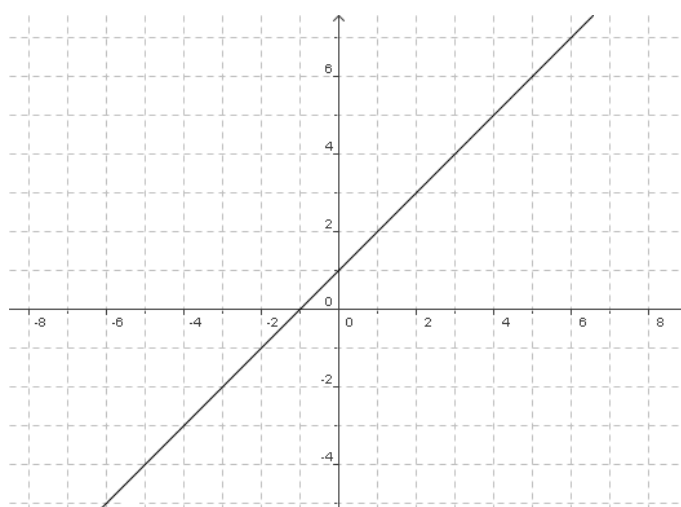
Pour la résolution des problèmes 1, 2, 3, 4 et 5 nous avons formé des groupes de 4 à 5 élèves. Nous avons constaté un effet positif de la stabilisation dans la résolution des problèmes. Par ce que les erreurs étaient d'autres types que celles rencontrées dans les situations 1, 2 et 3. Rappelons les situations-problèmes et leurs objectifs.

### 6.2.1. Problème 1

On considère la fonction affine  $f$  définie par :

$f(x) = x + 1$  et sa représentation graphique ci-dessous

Figure 106 - Graphique du problème 1



Source : L'auteur

1 Compléter le tableau suivant :

$X$	1.98	1.99	2	2.01	2.02
$f(x)$					

2. résoudre algébriquement puis graphiquement les inéquations d'inconnue  $f(x)$ :

$$|f(x) - 3| < 0.5 ; |f(x) - 3| < 0.4 ; |f(x) - 3| < 0.3$$

3. résoudre algébriquement puis graphiquement les inéquations d'inconnue  $x$  :

$$|f(x) - 3| < 0.5 ; |f(x) - 3| < 0.4 ; |f(x) - 3| < 0.3$$

4. écrire les solutions sous forme d'intervalle et calculer le centre de chaque intervalle.

5. interpréter géométriquement les résultats.

Cette situation-problème a pour objectif d'amener les élèves à interpréter graphiquement la notion de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point  $a$ , mais aussi de formaliser la définition de la notion de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point  $a$ .

Nous avons vu l'effet de la stabilisation du milieu à travers les résultats des élèves sur le problème 1. Tous les groupes ont réussi à remplir correctement le tableau de valeurs, la résolution des inéquations avec valeur absolue, il y avait un peu de difficulté dans l'interprétation géométrique des résultats. Malgré qu'ils aient reçu le cours sur les limites, aucun groupe n'a parlé de limite dans leur interprétation géométrique. Nous y avons rencontré quatre types d'interprétation : « si  $x$  s'approche de  $a$  et  $f(x)$  s'approche de  $l$  », « si  $d(f(x), l) < \alpha$  alors il faut que  $d(x, a) < \beta$  », « on constate que la distance entre  $f(x)$  et  $l$  diminue » et en fin « Plus  $x$  s'approche de  $a$  ;  $f(x)$  s'approche de  $l$  » qui sont toutes des interprétations intuitives de la limite. La figure 107 représente quelques indices de ce type d'erreurs.

Figure 107. Production d'élève

Problème 1

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x + 1$

1°) Complétons le tableau

$x$	1,98	1,99	2	2,01	2,02
$f(x)$	2,98	2,99	3	3,01	3,02

2°) Résolvons algébriquement puis graphiquement les inéquations

al. inconnue

\* Résolutions algébrique

$|f(x) - 3| < 0,5$  soit  $f(x) = y$

$|y - 3| < 0,5 \Rightarrow (y - 3)^2 < (0,5)^2 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 < 0,25$

$y^2 - 6y + 9 - 0,25 < 0 \Rightarrow y^2 - 6y + 8,75 < 0$

$\Delta = (6)^2 - 4(1)(8,75) = 36 - 35 = 1 \quad \Delta = 1$

$y_1 = \frac{6 - 1}{2} = \frac{5}{2} ; \quad y_2 = \frac{6 + 1}{2} = \frac{7}{2}$

$S = ]\frac{5}{2}, \frac{7}{2}[$

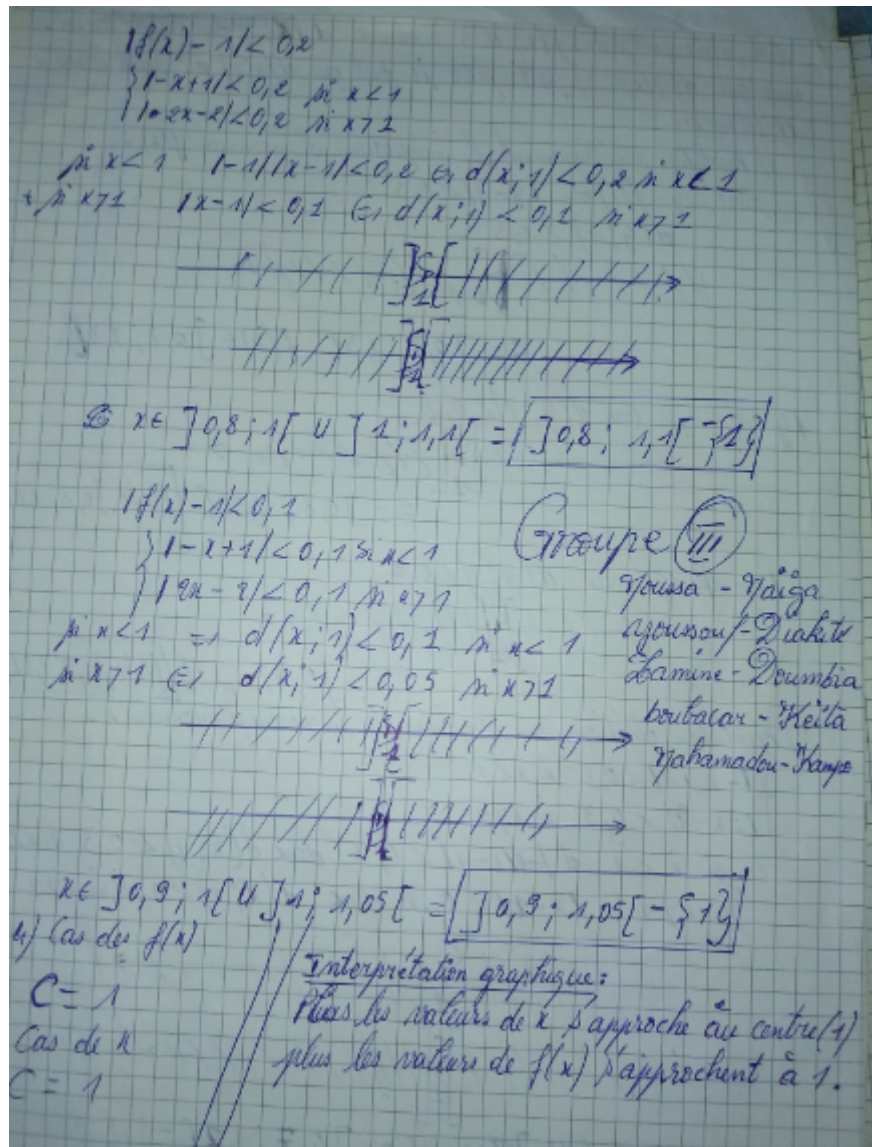
Graphique

Source : Données de la recherche



Ce groupe (Figure 107) a correctement rempli le tableau de valeurs et il a opté pour l'élévation au carré pour la résolution des inéquations avec valeur absolue.

Figure 108 - Production d'élève



Source les productions de l'expérimentation

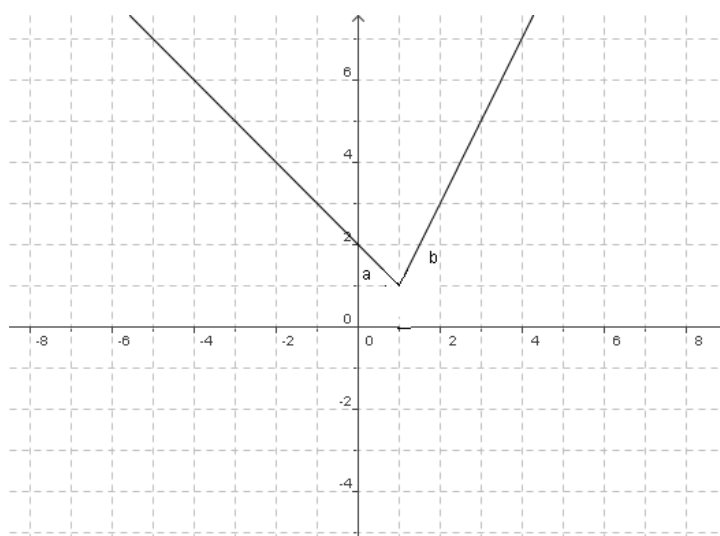
Ce groupe (Figure 108) a résolu les inéquations par disjonction des cas, il a fait une interprétation intuitive en s'appuyant sur les figures, il remarque que « plus  $x$  s'approche de 1 plus  $f(x)$  s'approche de 1 ». Cela est perceptible sur ses figures, on voit bien que le diamètre de l'intervalle devient de plus en plus petit.

### 6.2.2. Problème2 :

On considère la fonction affine  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ et sa représentation graphique ci-dessous}$$

Figure 109 - Graphique de la fonction  $f$  du problème 2



Source : L'auteur

1. Compléter le tableau suivant :

$X$	0.98	0.99	1	1.01	1.02
$f(x)$					

2. Résoudre algébriquement puis graphiquement les inéquations d'inconnue

$f(x)$  :

e)  $|f(x) - 1| < 0.3$ ; ;  $|f(x) - 1| < 0.2$ ; ;  $|f(x) - 1| < 0.1$

3. Résoudre algébriquement puis graphiquement les inéquations d'inconnue  $x$  :

$|f(x) - 1| < 0.3$ ; ;  $|f(x) - 1| < 0.2$ ; ;  $|f(x) - 1| < 0.1$

4. Écrire les solutions sous forme d'intervalle et déterminer le centre de chaque intervalle.

5. Interpréter géométriquement les résultats.

Nous rappelons que l'objectif de ce problème est d'interpréter graphiquement la notion de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point  $a$  dans le cas d'une fonction non définie en  $a$ , et de formaliser la définition de la notion de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point  $a$  dans le cas d'une fonction non définie en  $a$ .

Par rapport à la résolution de ce problème, nous avons constaté que les groupes ont rencontré quelques difficultés dans la résolution des inéquations d'inconnue  $x$ . Ils ont résolu

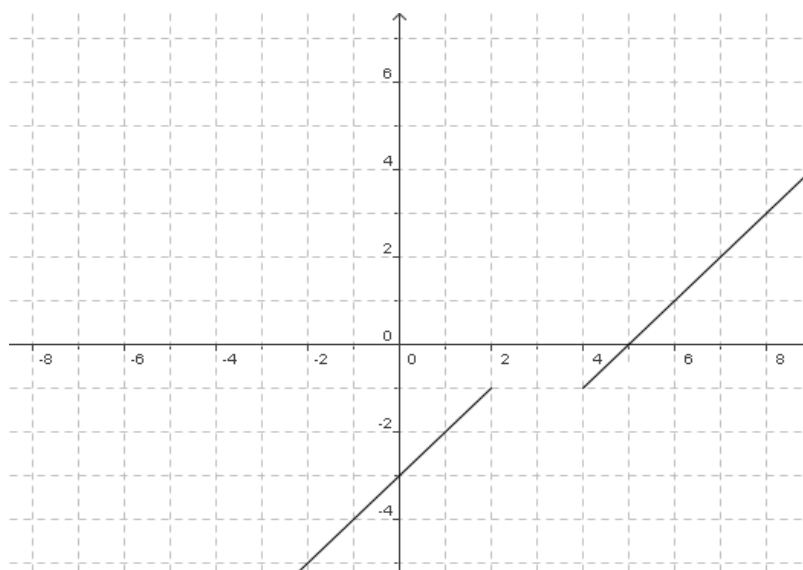
les inéquations par disjonction des cas, mais la détermination de l'ensemble solution a posé un problème. Ils l'ont tous interprété en s'appuyant sur le tableau de valeurs de  $f$ .

### 6.2.3. Problème 3

On considère la fonction affine  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 4 \end{cases} \text{ et sa représentation graphique ci-dessous}$$

Figure 110 - Graphique de la fonction  $f$  du problème 3



Source : L'auteur

1. Compléter le tableau suivant :

$X$	2.98	2.99	3	3.01	3.02
$f(x)$					

2. Résoudre algébriquement puis graphiquement les inéquations d'inconnue  $f(x)$ :

$$|f(x) + 1| < 0.3; \quad ; |f(x) + 1| < 0.2; \quad ; |f(x) + 1| < 0.1$$

3. résoudre algébriquement puis graphiquement les inéquations d'inconnue  $x$  :

$$|f(x) + 1| < 0.3; \quad ; |f(x) + 1| < 0.2; \quad ; |f(x) + 1| < 0.1$$

4. Écrire les solutions sous forme d'intervalle et calculer le centre de chaque intervalle.

5. interpréter géométriquement les résultats.

Ici aussi, nous rappelons que l'objectif du choix de ce problème est de permettre aux élèves d'interpréter graphiquement la notion de limite d'une fonction numérique d'une

variable réelle en un point  $a$ , et formaliser la définition de la notion de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point  $a$ .

Par rapport à ce problème, nous avons eu les mêmes comportements qu'au problème 2, il y a eu une discussion chaude dans quatre groupes sur le tableau de valeurs, ils ont rempli et après discussion, ils se sont rendu compte que la fonction n'était pas définie en ces points du tableau. Aucun groupe n'a pu interpréter correctement ces résultats. Il y avait des difficultés pour la prise en compte de l'ensemble de définition de  $f$ .

Nous avons procédé à la correction des problèmes 1, 2 et 3. Pendant cette correction, on a procédé à l'institutionnalisation, en faisant remarquer par les élèves que les inéquations d'inconnues  $f(x)$  et  $x$  sont très liées. Les solutions de celles d'inconnues  $x$  sont suffisantes pour trouver celles d'inconnue  $f(x)$ . En d'autres termes, pour que  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ , il suffit que  $|x - a| < \delta$ . Ce qui correspond à la contravariance de la définition formalisée. Il s'agissait de résoudre les inéquations avec valeur absolue en tenant compte des sous domaines et enfin faire la réunion des solutions partielles.

Le calcul des centres et l'écriture sous forme d'intervalle nous ont permis de faire savoir que  $f(x)$  s'approche de  $\ell$  et que  $x$  aussi s'approche de  $a$ . Cela était bien perceptible sur la droite numérique. A partir des figures, on s'aperçoit que la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  diminue et en même temps que la distance entre  $x$  et  $a$  aussi diminue. On traduit cela à l'aide de la valeur absolue et les inégalités. Et on l'exprime « on peut rendre la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  aussi petite que l'on veut en prenant  $x$  suffisamment proche de  $a$  », et d'une part, le fait que pour chaque epsilon il existe un delta, et d'autre part, le fait que les données du problème sont  $f(x)$ ,  $\ell$  et  $\varepsilon$ , on va partir de  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  pour construire un  $\delta$  qui convient. Enfin, on formalise en utilisant les quantificateurs universel et existentiel comme suit :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in Df \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

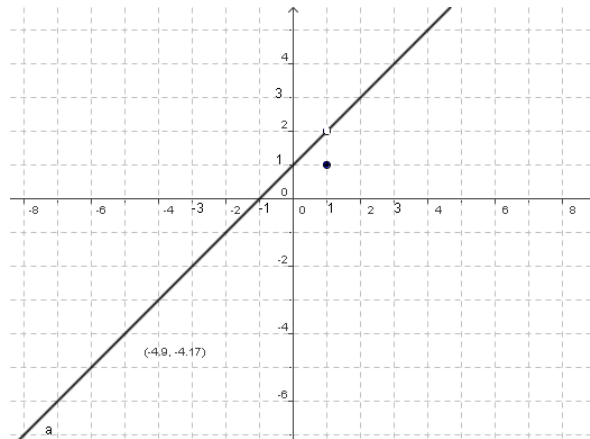
La condition «  $x$  s'approche de  $a$  » est une condition suffisante, elle n'est pas nécessaire. Il y a des cas où on peut rendre la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  aussi petite que l'on veut en prenant  $x$  suffisamment proche d'un nombre  $a'$  différent de  $a$ . Par exemple, considérons la fonction « valeur absolue de  $x$  », elle a pour limite 1 en 1 et en -1. Il en est de même pour la fonction carrée définie par  $x^2$ .

Si la fonction est bijective la condition est nécessaire et suffisante, sinon elle est seulement suffisante.

### 6.2.4. Problème 4

1. On considère l'application affine par morceaux  $f$  définie par sa représentation graphique suivante

Figure 111 - Graphique de la fonction  $f$  du problème 4



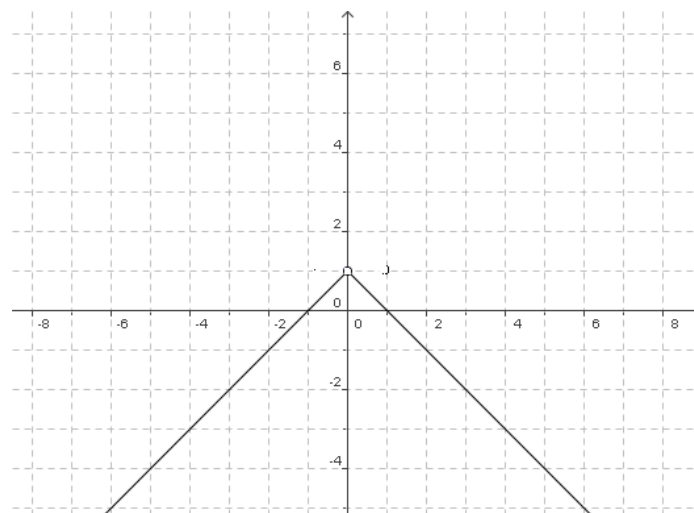
Source : L'auteur

Est-ce que  $f(x)$  a pour limite 2 lorsque  $f(x)$  tend vers 1 ?

Justifiez votre réponse.

3. On considère l'application affine par morceaux  $f$  définie par sa représentation graphique suivante :

Figure 112 - Graphique de la deuxième fonction du problème 4



Source : L'auteur

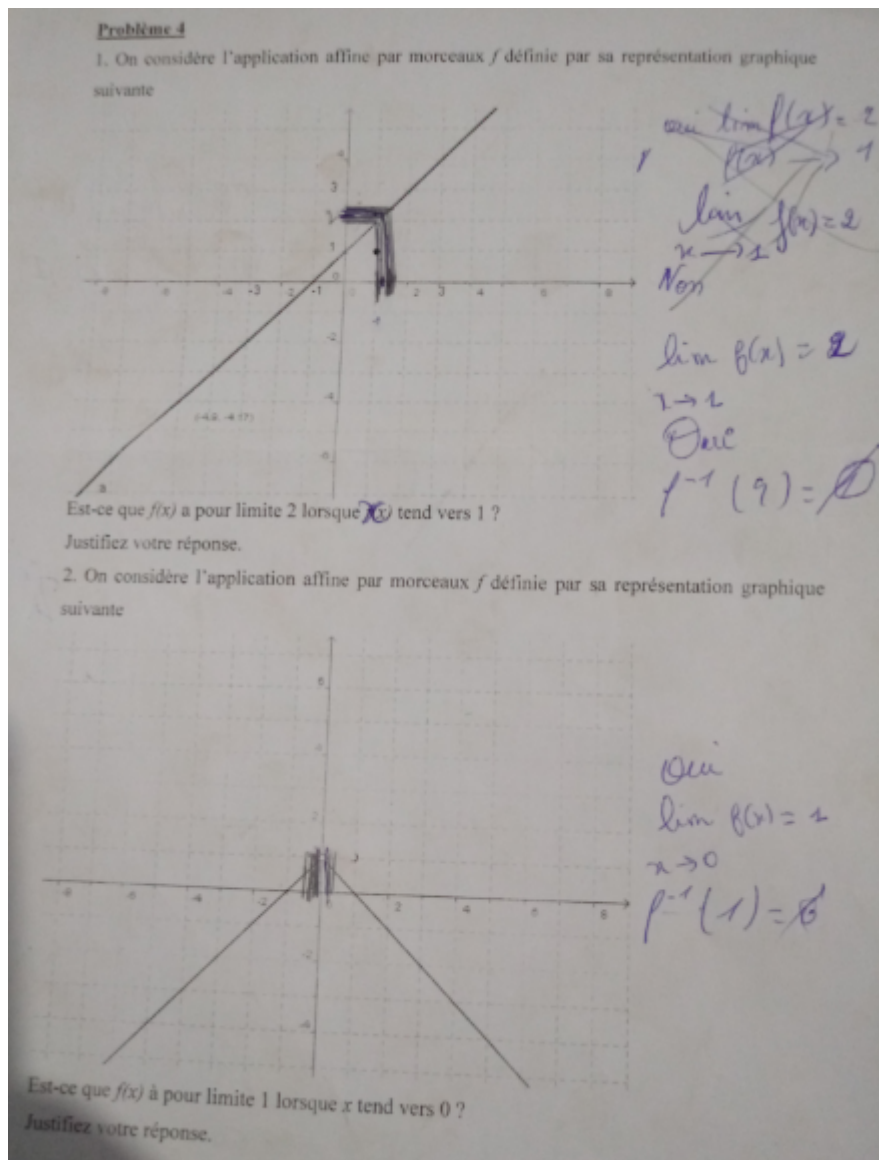
Est-ce que  $f(x)$  a pour limite 1 lorsque  $x$  tend vers 0 ? Justifiez votre réponse.

Nous visons essentiellement l'application de la définition formalisée de la notion de limite.

Nous avons constaté que c'est la définition topologique qui a émergée. Certains ont cherché l'expression algébrique de la fonction pour calculer les limites, d'autres ont tout simplement écrit la notation.

On s'attendait à ce que les élèves déterminent l'expression algébrique pour justifier leur réponse mais, à part un seul groupe, tous les autres groupes ont fait un raisonnement graphique, comme on peut le voir la figure 113.

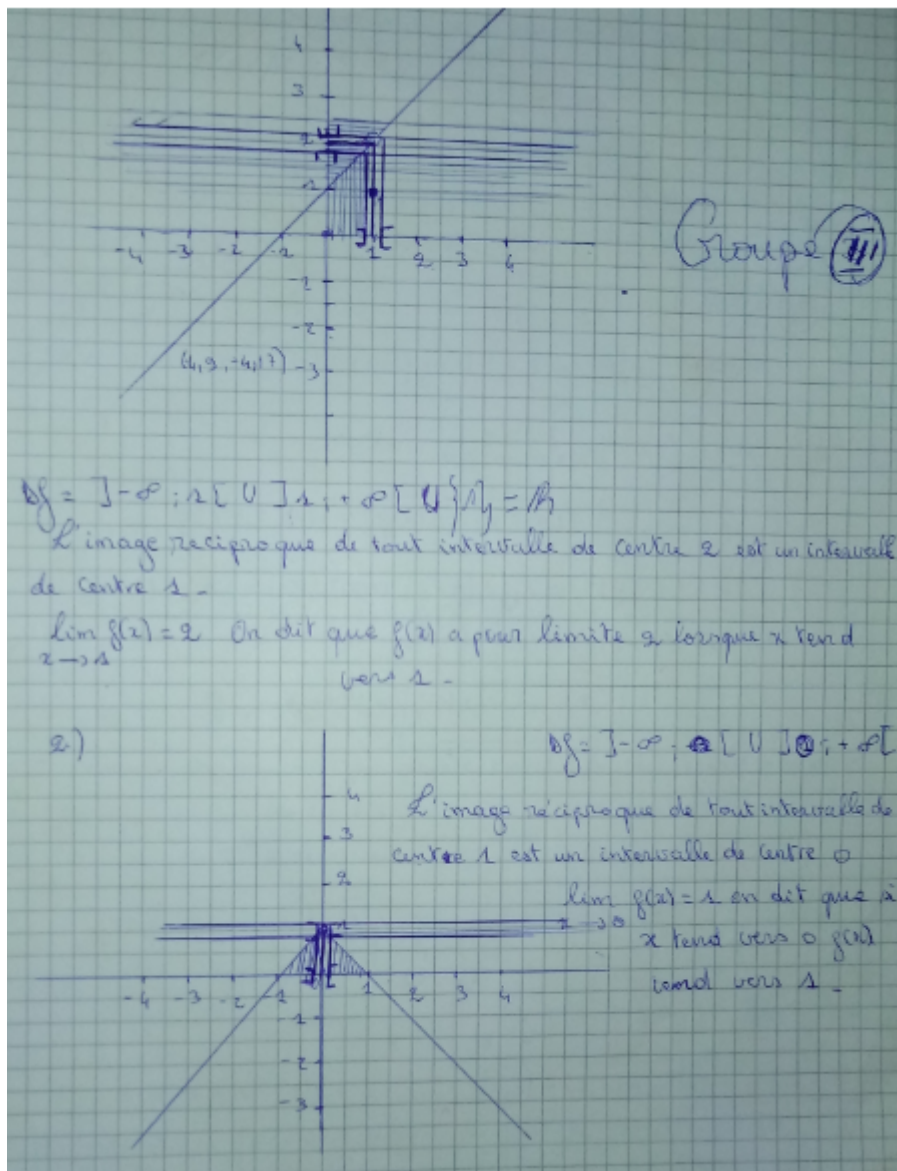
Figure 113. Production d'élève



Source : Données de l'expérimentation

Ce groupe (Figure 113) a d'abord cherché l'image réciproque d'un intervalle de centre  $l$  mais, sa justification est basée sur le fait que l'image réciproque de  $\ell$  est vide. Cela n'est pas toujours le cas. Car si la fonction est continue l'image réciproque ne peut pas être vide. Il a mal interprété la définition géométrique. Il voulait signaler que c'est un intervalle de centre 1 privé de  $\{1\}$

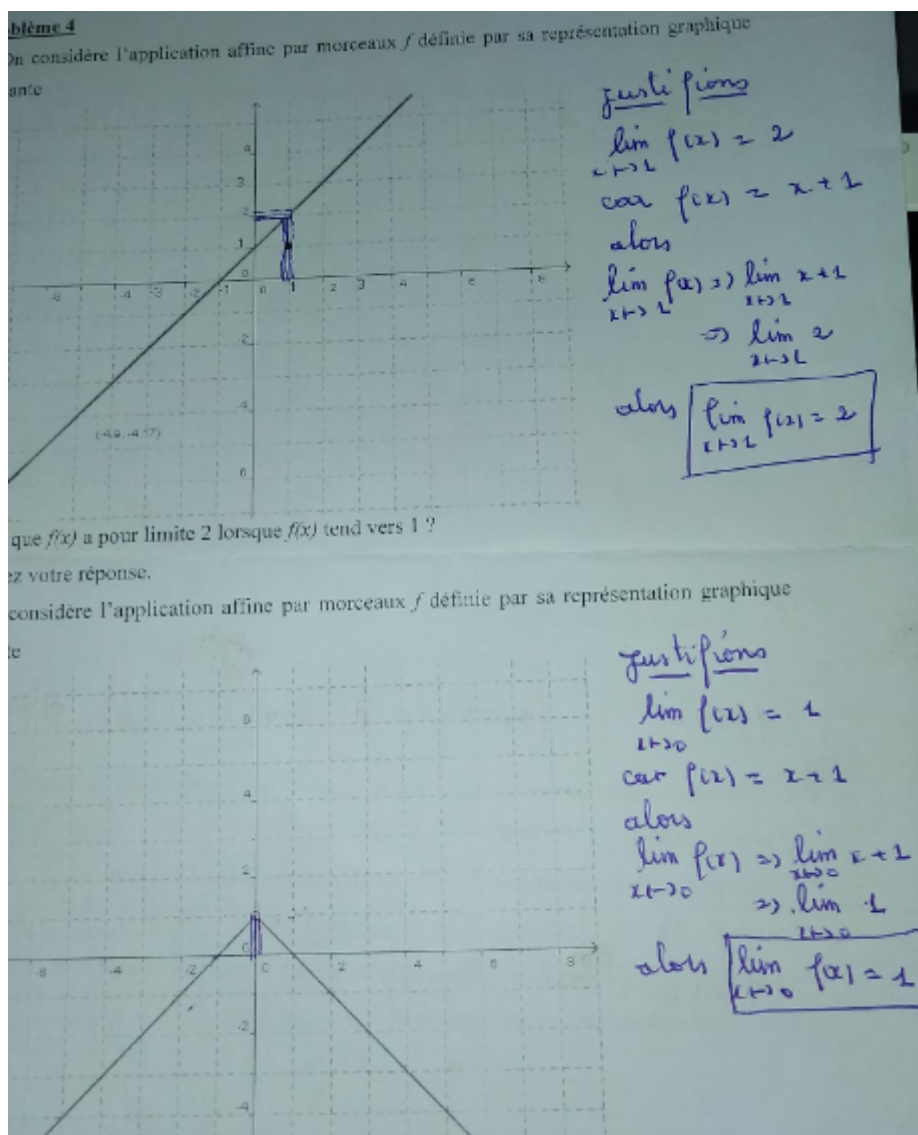
Figure 114. Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

Ce groupe (Figure 114) a cherché l'ensemble de définition puis l'image réciproque d'un intervalle ouvert de centre 2. Il affirme que c'est un intervalle de centre 1. Ici nous avons un intervalle de centre 1 privé de  $\{1\}$ . Il a appliqué la définition topologique de la limite, son problème se situe au niveau de la détermination de l'image réciproque.

Figure 115. Production d'élève

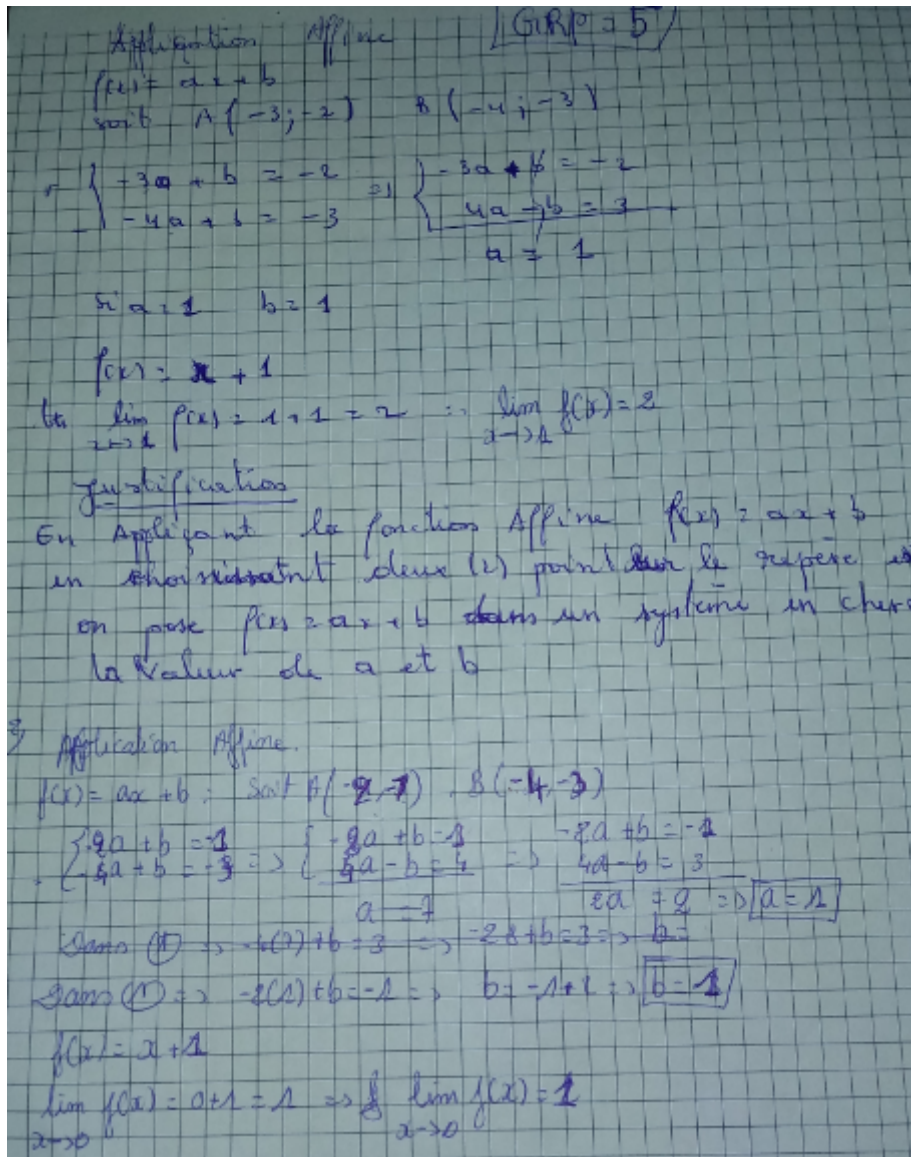


Source : données de l'expérimentation

Quant à ce groupe (Figure 115), ses membres ont fait recourt à l'expression algébrique mais, il a tout simplement substitué  $x$  par 1. Dans le deuxième cas il cherche les expressions de  $f$  dans les deux sous domaines de  $f$ . On voit que pour ce groupe la limite correspond à l'image. Au lieu de justifier pourquoi la limite de  $f$  est 1, il explique comment il a déterminé l'expression algébrique de  $f$ .



Figure 116. Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

Ce groupe (Figure 116) confond la limite et l'image. Au lieu de justifier, il a expliqué comment déterminer l'expression explicite algébrique de  $f$ .

6.2.5. **Problème 5 :** (mise en application de la définition formalisée)

1. Expliquer en vos propres termes l'équation

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$

b. est-il possible que a. soit vraie ; mais que  $f(2) = 3$  ? Expliquer.

2. a. Expliquez ce que signifie de dire que

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2,999$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3,001$ .

Dans cette situation est-il possible que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  existe ? Expliquer.

b. Expliquez ce que signifie de dire que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0.9\dots \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

Dans cette situation est-il possible que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  existe ? Expliquer

3. Démontrer en utilisant la définition précise de la limite que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x + 5 = 1 ; \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2-6x}{2x+1} = \frac{-1}{2} ; \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x + 3 = 6 ; \lim_{x \rightarrow -1} x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x+4} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = 1$$

4. Un tourneur mécanique a été invité à fabriquer un disque de métal circulaire d'une superficie de 10.000 cm<sup>2</sup>.

(a) Quel est le rayon du disque produit ?

(b) Si une tolérance de l'erreur de 0,05 cm<sup>2</sup> dans l'aire du disque est permise au tourneur, à quelle distance idéale du rayon de la partie (a) le tourneur doit-il contrôler le rayon ?

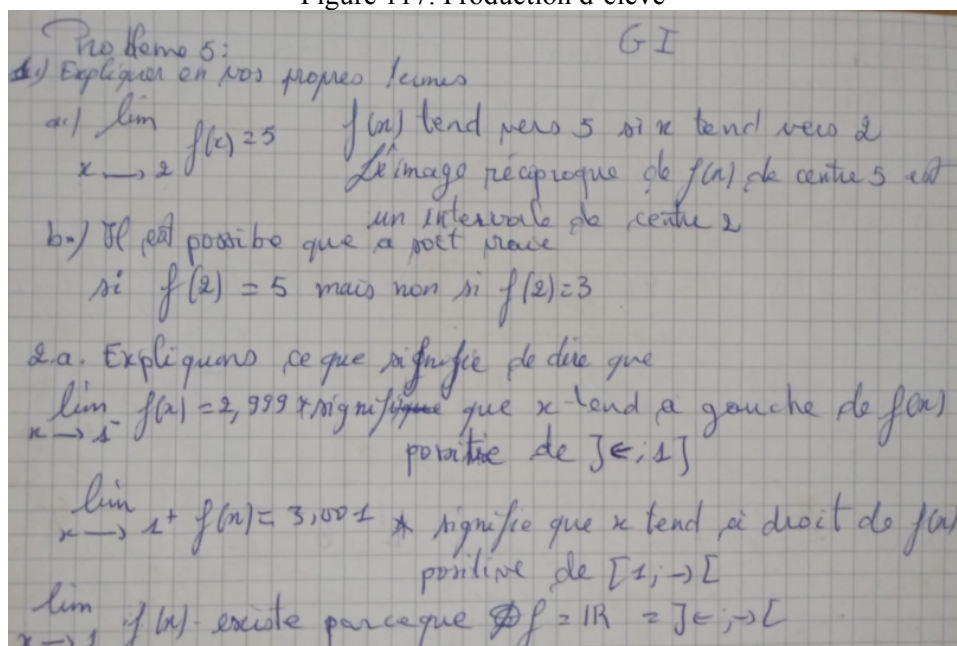
(c) En termes de définition  $\varepsilon$ ,  $\delta$  de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , qu'est-ce que  $x$  ? Qu'est-ce que  $f(x)$  ? Qu'est-ce que  $a$  ? Qu'est-ce que  $\ell$  ? Quelle valeur de  $\varepsilon$  est donnée ? Quelle est la valeur correspondante de  $\delta$  ?

Nous avons pour objectif de montrer les limites de la définition intuitive de la limite car elle n'est pas précise elle est naïve et peu rigoureuse, mais aussi de montrer l'efficacité de la définition précise dans la résolution d'un problème. On voudrait aussi montrer l'aspect covariant et contra variant du fonctionnement de la définition formalisée de la limite ainsi la dialectique entre les deux aspects. Dans la définition intuitive "plus  $x$  s'approche de  $a$  plus  $f(x)$  s'approche de  $\ell$ " nous avons ici la covariance. Dans l'application de la définition précise "on peut rendre la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  aussi petite que l'on voudra en prenant  $x$  suffisamment proche de  $a$ " nous avons la contravariance. Dans le fonctionnement de la définition précise, nous avons une dialectique entre les deux ; car suivant certaines qualités de la fonction  $f$ , il y a nécessité de fixer  $\delta$  à l'avance pour construire un  $\delta$  convenable qui dépend de  $\varepsilon$ .

Par rapport à la première question, c'est la définition topologique qui a été la plus fréquente, trois groupes ont donné la définition topologique. (L'image réciproque de tout intervalle de centre  $\ell$  est un intervalle de centre  $a$  éventuellement privé de  $a$ ). La définition

formelle en epsilon delta n'est pas apparue. Les deux autres groupes ont justifié en disant que l'image de 2 est 5. Pour ces deux groupes la limite c'est l'image.

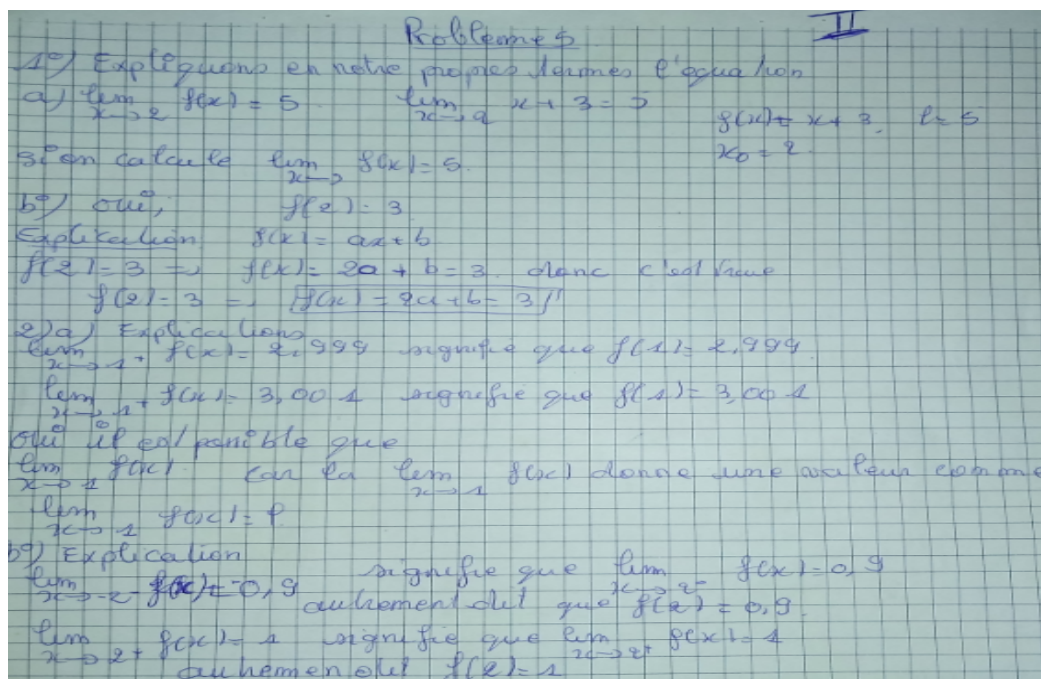
Figure 117. Production d'élève



Source : Données de l'expérimentation

Le groupe 1 (Figure 117) utilise la définition topologique pour justifier, mais il confond la limite et l'image. Sa réponse à la question 2.a) montre qu'il utilise la définition intuitive.

Figure 118. Production d'élève

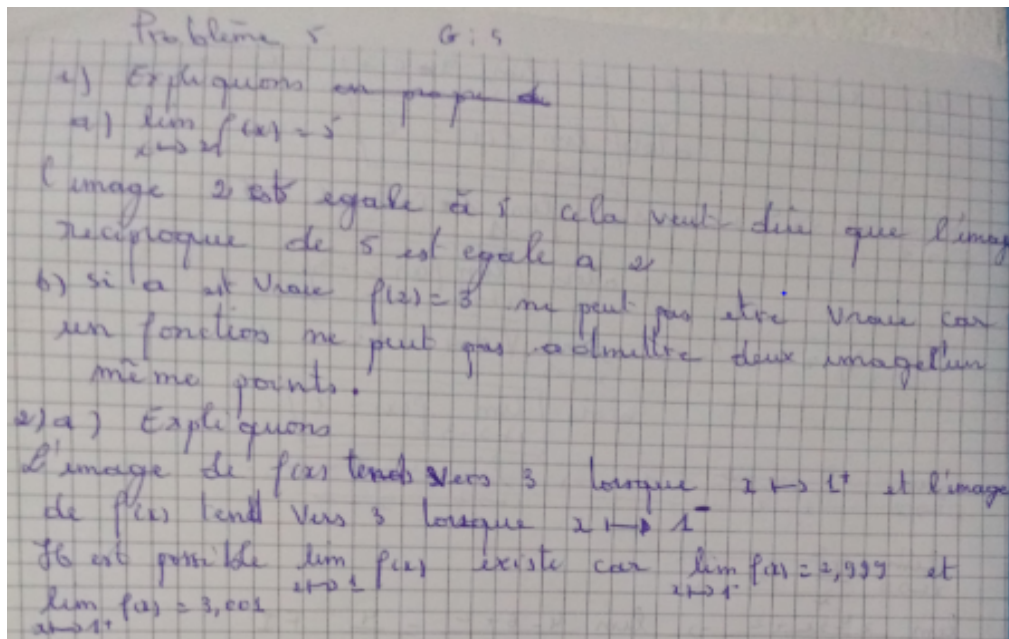


Source : Données de l'expérimentation

Le groupe II (Figure 118) confond l'image et la limite. Il pense aussi qu'une fonction peut admettre deux images différentes en un même point. Ces réponses aux questions 2 et 3 font voir qu'il applique la définition intuitive de la limite puisque les deux nombres 2.999 et 3.001 sont très proches de 3.

Pour la question b) ceux qui ont opté pour l'image ont répondu par non, en justifiant qu'une fonction ne peut avoir deux images en un même point.

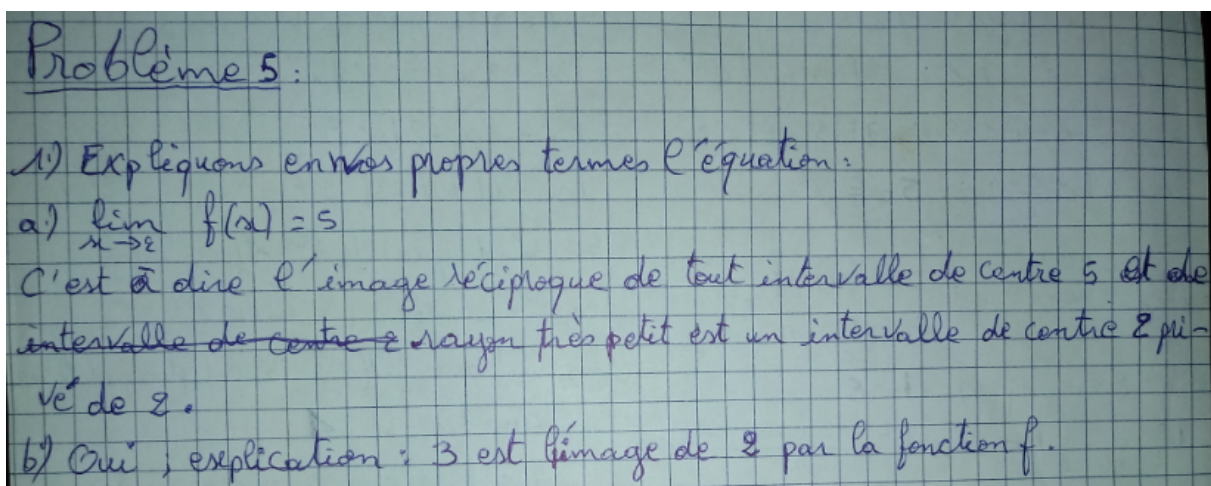
Figure 119. Production d'élève



Source : données de l'expérimentation

A côté de ceux-ci, il y a un groupe qui a bien interprété

Figure 120. Production d'élève



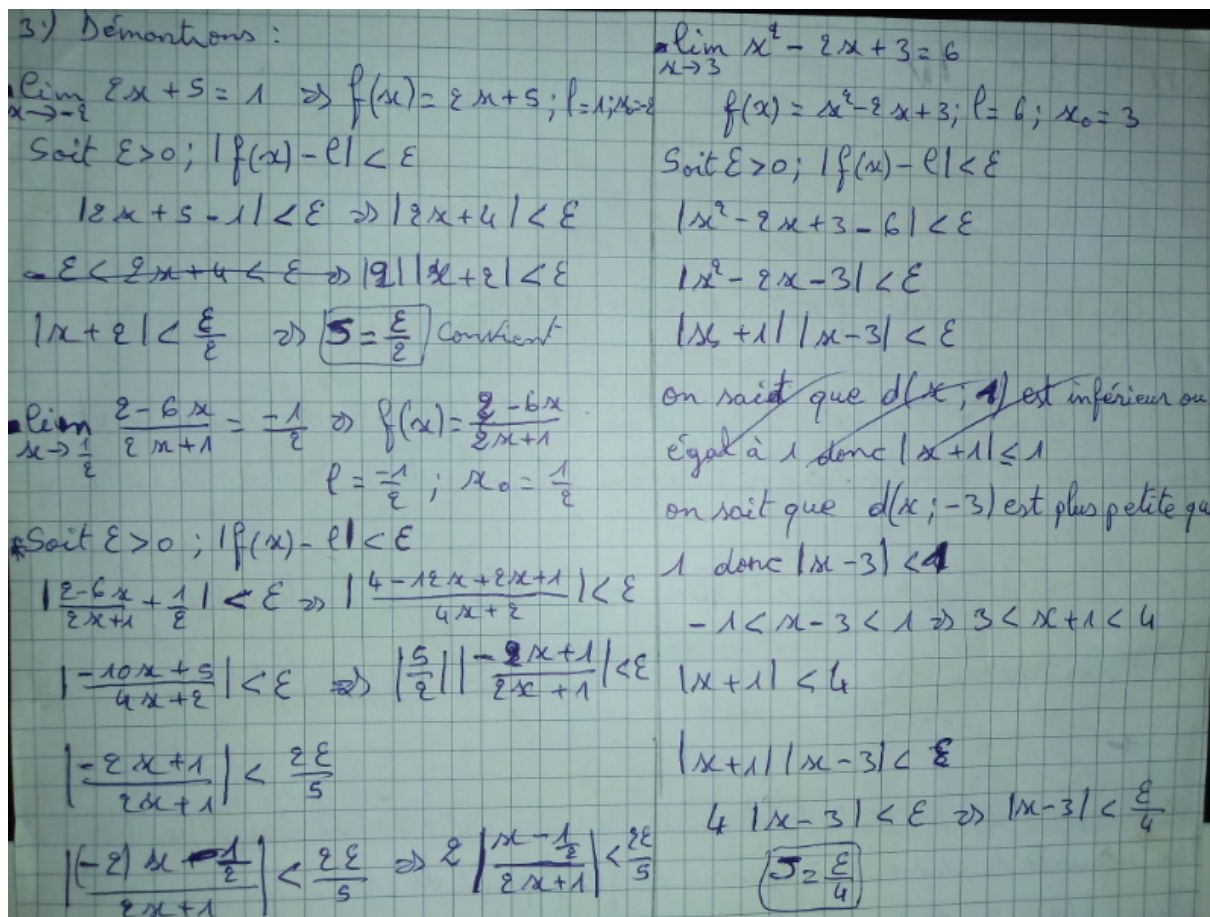
Source : Données de l'expérimentation

Ce groupe (Figure 120) fait remarquer que la limite peut être différente de l'image. Il a donné la définition topologique avec précision.

Pour la deuxième question nous avons rencontré deux types de justification : l'image réciproque de tout intervalle de centre  $\ell$  est un intervalle de centre  $a$  et l'image de  $a$  par  $f$  est  $\ell$ . Aucun groupe n'a réussi à interpréter correctement la limite à gauche et la limite à droite.

Pour la question 3, on a constaté que trois groupes ont appliqué les techniques de calcul de limite (substitution, factorisation et simplification) et deux groupes ont utilisé la définition formalisée de la limite. L'application des techniques de calcul de limites n'est pas surprenante, parce que les élèves rencontrent seulement le type de tâche « calculer la limite », les questions telles que « montrer que  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $a$  », ou « justifier que  $\ell$  est la limite » sont absentes.

Figure 121. Production d'élève



Source : Données de l'expérimentation

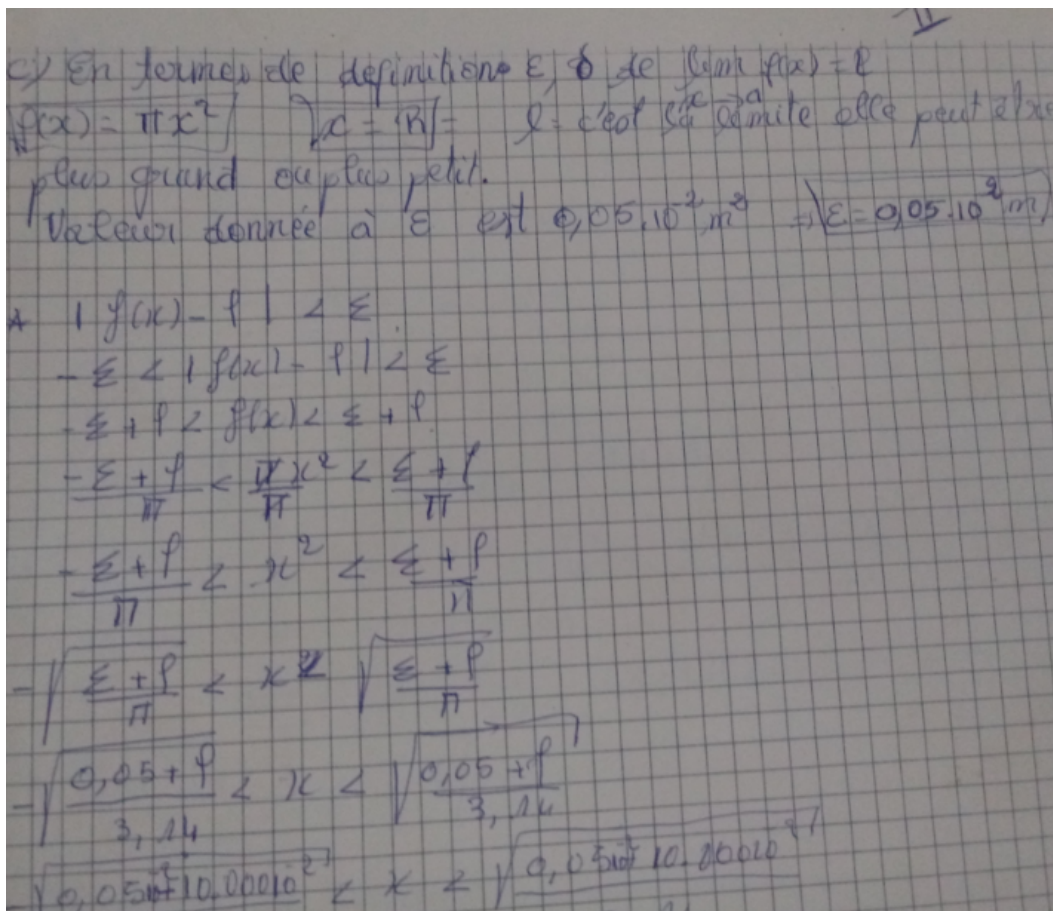
On voit ici que ce groupe (Figure 121) a bien appliqué la définition formelle, il commence par donner les données que sont la fonction, la limite et epsilon. Il sait aussi qu'il

s'agit de construire un delta, il se retrouve dans le cas contra-variant et le cas où il y a une dialectique entre la contravariance et la covariance. Cela est perceptible dans les copies des deux groupes qui ont appliqué la définition formelle de la limite. Il manque seulement le retour pour vérifier que le delta construit convient effectivement.

À partir des résultats de ces deux groupes on peut affirmer que la définition formelle est accessible aux élèves et de plus, ils peuvent la faire fonctionner dans ses différents aspects.

Pour la dernière question les groupes (Figure 122) ont eu des difficultés dans l'interprétation à l'aide de la définition formelle, néanmoins on voit qu'ils savent par quoi commencer et ils ont tous identifié la limite, la fonction  $f(x)$  et epsilon.

Figure 122. Production d'élève



Source : Données de l'expérimentation

Au début ce n'était pas facile pour les apprenants, les élèves avaient des difficultés dans le registre graphique mais, vers la fin on voit que les élèves sont plus enclins à utiliser les méthodes graphiques pour répondre aux questions, on constate qu'ils commencent à rentrer et faire preuve de compréhension de la définition formelle.

## CONCLUSION

Nos objectifs pour ce travail étaient, à partir d'une analyse des dimensions épistémologique, écologique et économique, construire une Organisation Mathématique Régionale (OMR) sur l'objet mathématique "limite de fonction qui constituera une rupture par rapport à ce qui est proposé dans les programmes actuels de l'Enseignement Secondaire au Mali "; mais aussi de construire une Organisation Didactique à partir de cette OMR et la tester à partir d'une ingénierie didactique et mettre en évidence les savoirs/connaissances appropriés par les élèves de la terminale science exacte, qui sont les sujets de la recherche.

Pour atteindre les objectifs généraux, et par conséquent, répondre à notre question de recherche. Nous avons, réalisé **une analyse historique et épistémologique** de la notion de limite et cette analyse nous a permis de situer notre problème didactique, à savoir le déphasage entre la notion de la limite et sa définition formelle, et les types de problèmes découlant de la problématique de l'enseignement et l'apprentissage : la notion de limite est covariante ; mais sa définition formelle est tantôt contra-variant, tantôt covariant et parfois nous avons une dialectique entre les deux aspects. Ainsi, nous avons construit des situations mettant ces différents aspects en exergue. Cette analyse nous a aussi permis de mettre à l'évidence la raison d'être de la définition formelle de la notion de limite : Cette notion FUG au sens de Aline Robert (1982), permet de marquer le passage de l'algèbre à l'analyse, la preuve et la réfutation, l'entrée dans la logique des prédicats, et aussi de lever certains obstacles épistémologiques tels que la limite peut être atteinte ou non, la confusion entre la limite et la continuité en un point etc. Nous avons aussi fait **une analyse de la dimension économique** et cela **nous a permis de** comprendre les praxéologies mises en place dans les classes de terminale science exacte. Les enseignants posent le problème de calcul des limites, les questions telles que montrer que  $\ell$  est ou non la limite d'une fonction en un point sont absentes ainsi que les démonstrations des propriétés sur les limites. C'est l'organisation mathématique « algèbre des limites » qui est présente. En d'autres termes, c'est l'aspect outil au sens de Douady (1986) qui est mis en avant on n'étudie pas la notion de limite comme objet.

Les praxéologies construites autour du concept de limite en un point permettent de calculer des limites en un point ; mais elles nous éloignent du sens mathématique de la notion et elles sont inefficaces face à des types de tâches telles que : « Montrer que  $\ell$  est la limite de  $f$  au point  $a$  » et « Montrer que  $\ell$  n'est pas la limite de  $f$  au point  $a$  ».

De plus, l'hypothèse que les connaissances mobilisables dans ces praxéologies ne font pas évoluer les conceptions des apprenants est vérifiée. Dans cette OM, il manque le bloc Technologie-théorie (la justification des propriétés sur les limites). Elle ne permet pas l'acquisition du sens mathématique de la limite, mais elle permet de manipuler des techniques liées au concept de limite.

Il y a nécessité de revoir ces praxéologies pour permettre aux apprenants de construire de nouvelles connaissances et aussi faire évoluer leurs conceptions sur la notion de limite. **L'analyse de la dimension écologique** montre que l'on rencontre pour la première fois la notion de limite en 11<sup>ème</sup> et son étude se poursuit en 12<sup>ème</sup> et le début de l'université. En 11<sup>ème</sup> et 12<sup>ème</sup>, c'est l'étude intuitive qui est visée et au début de l'université, c'est l'étude de la définition formelle qui est visée ; mais on constate que l'on ne construit pas la définition formelle, ni au lycée, ni à l'université. Ainsi, c'est l'algèbre des limites qui correspond au modèle épistémologique dominant au lycée, les propriétés sont énoncées sans aucune démonstration, on ne met pas la notion de limite en lien avec tout son champ conceptuel, par exemple la logique est absente. Les pratiques de classes se bornent au calcul des limites et au début de l'université, c'est la topologie des limites qui est enseignée. Mais on ne construit pas la définition formelle, elle est donnée et illustrée par quelques cas simples, ces cas en général mettent en exergue l'aspect contra-variant de la définition formelle. Les propriétés sur les limites sont énoncées et démontrées. À ce niveau la limite est en lien avec beaucoup de notions qui permettent de lui donner sens.

Nous constatons à travers cette étude que l'enseignement de la notion de limite a connu des modifications dans les textes des programmes et aussi dans les manuels. Son habitat est le niveau de la onzième année dans l'étude des fonctions numériques d'une variable réelle et les suites numériques. On poursuit son étude en 12<sup>e</sup> et au début de l'université, ses niches sont la définition de la continuité, de la dérivée, la détermination de la valeur exacte de la solution d'une équation, étude du sens de variation d'une fonction, condition de convergence d'une suite, le théorème fondamental de l'analyse.

L'étude des dimensions économiques et écologiques de la problématique didactique, nous a permis de construire un MER de la notion de limite et le MED. Nous avons comparé les deux et vu la différence, nous avons construit un MEAR Modèle Épistémologique Alternatif de Référence en nous appuyant sur le champ conceptuel de la limite, que nous avons appelé Modèle didactique de référence (MDR) de ce que signifie pour « apprendre » la connaissance mathématique du concept de limite.



La construction du MER nous a permis de mettre la notion de limite avec les notions qui permettent de lui donner du sens et de diriger notre analyse institutionnelle. La construction du MED a permis de montrer quelle est la signification à la notion de limite dans les différentes institutions (programmes, manuels scolaires etc.). Quel est le sens construit par les apprenants suivant ce MED.

Nous avons construit MEAR pour essayer de rapprocher le MED et MER, pour réduire l'écart entre le savoir savant et le savoir enseigné. Ce travail nous a permis d'actualiser les connaissances connexes à la définition formelle de la limite telles que les activités graphiques, la résolution des inéquations avec valeur absolue, les intervalles (notion de voisinage), les quantificateurs universel et existentiel, l'introduction à la logique des prédicats. Les élèves ont aussi appris à appliquer la définition formelle, la construction d'une condition suffisante. Les élèves ont appris une nouvelle tâche : montrer que  $\ell$  est la limite de  $f$  en  $a$ . Parmi les variables de l'expérimentation, c'est la variable « position du point  $a$  par rapport à l'ensemble de définition » qui a posé plus de difficultés aux élèves, précisément le cas où la fonction présente un saut

Les résultats de ce travail montrent que la définition formelle de la limite n'est pas construite ni au Lycée ni au début de l'université au Mali. Elle n'est pas non plus mise en œuvre dans ces différents aspects (covariant, contra-variant et la dialectique entre les deux).

Il n'y avait pas de définition littérale qui prend en compte ces trois aspects de la définition. Ce travail nous a permis de construire une définition qui prend en compte ces trois aspects. De mettre en évidence que les obstacles relatifs à la notion de limite sont encore présents chez les futurs professeurs et les professeurs du Lycée.

Il est nécessaire d'introduire l'histoire et l'épistémologie de la notion de la limite dans la formation des futurs professeurs du Lycée. Nous avons montré l'importance de la définition formelle dans le traitement des obstacles relatifs à la notion de limite. Ainsi, il est important de construire la définition formelle et la faire fonctionner pour mettre en relief ces différents aspects.

A partir des résultats de l'expérimentation on peut affirmer que les connaissances nécessaires pour l'application de la définition formelle sont accessibles aux élèves de la 12<sup>ème</sup> année sciences exactes. On n'a pas besoin de leur enseigner la logique des prédicats pour qu'ils puissent manipuler la définition formelle. Donc la définition formelle de la limite peut faire son apparition à partir de la 12<sup>ème</sup> année sciences exactes. On peut faire l'étude logique de cette définition au début de l'université.

Avec la définition formelle, les élèves ont appris un nouveau mode de raisonnement qui est la construction de la solution d'un problème, une nouvelle caractérisation de l'égalité « deux nombres aussi proche que l'on veut dans  $\mathbb{R}$  signifie qu'ils sont égaux ».

Les résultats de l'enquête épistémologique sur les conceptions des enseignants et futurs enseignants montrent avec acuité la nécessité de revoir l'enseignement de la notion de limite à l'université et plus précisément dans les écoles de formation des enseignants, l'introduction de l'histoire des mathématiques dans la formation des futurs professeurs de mathématiques. Il y a aussi la nécessité d'actualiser les conceptions des enseignants sur les obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. Nous pouvons aussi affirmer que la prise en compte des dimensions épistémologique, économique-institutionnelle et écologique nous permet de réduire l'écart entre le savoir savant et le savoir enseigné.

Les résultats confirment les résultats des recherches antérieures, notamment sur les obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite et la nécessité de la construction de la définition formelle de la limite.

Nous pensons que les situations que nous avons proposées peuvent être utiles pour la prise en compte et le franchissement de certains obstacles tels que la confusion entre l'étude de la continuité et celle de la limite, la limite atteinte ou non, la prise en compte de la position du point  $a$  par rapport à l'ensemble de définition. En même temps ces situations peuvent être utiles dans la formation continue des enseignants. Nous signalons que ce que nous avons fait avec les fonctions affines est réalisable avec d'autres types de fonctions. Ce travail nous a permis de relativiser notre rapport sur l'enseignement de la définition formelle de la limite, de connaître les difficultés qui se posent pour la formalisation de la définition de la limite en epsilon et delta. Cela montre qu'il y a besoin de pousser la réflexion.

En perspectives il nous semble intéressant de faire une enquête à grande échelle sur les conceptions des enseignants du Lycée du Mali sur les obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, sa définition en epsilon et delta et son opérationnalisation, et aussi une étude de la transition Lycée-Université par rapport à l'enseignement de la notion de limite.

Nous terminons avec le postulat suivant de la didactique : « ...Pour expliquer les faits d'enseignement auxquels elle se voit confrontée, la didactique postule que le “ mystère ” est dans les mathématiques, et non pas dans les sujets qui ont à apprendre et enseigner les mathématiques ».

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba-PR: Editora UFPR, 2010.
- ARTAUD, M. **Introduction à l'approche écologique du didactique, L'écologie des organisations mathématiques et didactiques**. In C. Comitictal. (eds) Actes de la IX<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques, Houlgate, pp. 101-139, 1997.
- ARTIGUE, M. « **Réformes et contre-réformes de l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994)** », eds. Bruno Belhoste et al., Les sciences au lycée: un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger (Paris: Vuibert), 195-217, 1996a.
- ARTIGUE, M. « **L'enseignement des débuts de l'analyse, problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques** », J.A Dorta, Diaz et alii (eds), La Universidad de la Laguna, Tenerife, pp. 27-53, 1996b.
- ARTIGUE, M. **Ingénierie didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9, n°3, pp. 281-308 La Pensée Sauvage, 1988.
- ARTIGUE, M. **Épistémologiques et didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage, vol. 10, n° 23, pp. 241-286, 1990.
- ARTIGUE, M. **Rapports et articulations entre cadres théoriques : le cas de la théorie anthropologique du didactique**. RDM, Vol.29, n°3 pp.305-334, 2009
- BACHELLARD, G (1938) **La formation de l'esprit scientifique**, Vrin, Paris. 1980
- BARQUERO, B., BOSCH, M. et GASCÓN, J. **Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias**. communication au 2<sup>e</sup> congrès TAD, Uzès, 2007.
- BARQUERO, B., BOSCH, M. et GASCÓN, J. **Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática**. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v. 15, n. 1, pp. 1-28, 2013.
- BARQUERO, B., BOSCH, M. et GASCÓN, J. **Ecología de la Modelización Matemática: los Recorridos de Estudio e Investigación** - III International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic, 2010.
- BERROU, Jean Marc. Rigueur et intuition, les deux faces des mathématiques du 24 mai 2011. Site <http://cours-mathématiques-nantes.com/rigueur-et-intuition-les-deux-faces-des->

mathématiques/.

BKOUICHE, R. **Des limites et de la continuité dans l'enseignement**, *Repères-IREM* n°24, juillet 1996.

BKOUICHE, R. **Épistémologie, histoire et enseignement des mathématiques**. For the learning of mathematics 17(1), 34-42, 1997.

BKOUICHE, R. **Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science**. *Repères IREM* 39, pp. 35-59, 2000.

BLOCH, I. **L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation**. Thèse. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, Bordeaux, 2000.

BOCH et CHEVALLARD. **Ostensifs Et Sensibilité Aux Ostensifs Dans L'activité Mathématique** *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19, no 1, pp. 77-124, 1999.

BOSCH, M. GASCÓN, J. **La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques**. In A. Mercier, C. Margolinas (Coord.) *Balises en Didactique des Mathématiques* Grenoble, France: La Pensée sauvage, pp. 107-122, 2005.

BROUSSEAU, G. (1997) **La Théorie des Situations Didactiques – Le Cours De Montréal, 1997**(in <http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/>)

BROUSSEAU, G. **Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques**, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 23, 303-346, 1983.

BROUSSEAU, G.: 1986, '**Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques**', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33–115.

CHAACHOUA, Hamid; BESSOT, Annie. **La notion de variable dans le modèle praxéologique**. *Educação Matemática Pesquisa*: Vol. 21, pp. 234-247, 2019. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/42583>>. Acesso em: 25 fev. 2020. doi:<https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p234-247>.

CHAPELLE DE D'ALEMBERT 1ère édition, 1751

CHEVALLARD, Y. **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique Premier congrès international de la TAD**. L. Ruiz-Higueras, A. Estepa et F. Javier

Garcia (Eds), Sociedad, Escuela y Mathematicas. Aportaciones de la Teoria Antropologica de la Didactico, Universidad de Jaen, 2007, pp. 705-746, 2007.

CHEVALLARD, Y. **Sur la déconcertation cognitive**. Texte d'une communication au colloque du COED tenu en juin 1990 à Marseille. A paru dans *Interactions didactiques*, 12 ("Les débuts de l'apprentissage"), universités de Genève et de Neuchâtel, pp. 27-51, 1991.

CHEVALLARD, Y. **A Theoretical Approach to Curricula**. Texte d'une communication au Séminaire International *Comparative Studies of Mathematical Curricula in Different Countries* tenu à Frascati (Italie) en mars 1987. Paru dans le *Journal für Mathematikdidaktik*, 13, 2/3, pp. 215-230, 1992.

CHEVALLARD, Y. (1994). **Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique**, Séminaire de l'Associazione Mathesis, Turin, 3 février 1994, in Actes du Séminaire 1993-1994, 190-200.

CHEVALLARD, Y. (1995). **La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique**. Notes du cours donné à la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques (Saint-Sauves, 22-31 août 1995). *Recherches en Didactique des Mathématiques* (no 17/3, 1997, p. 17-54) dans une version remaniée, sous le titre « Familiale et problématique, la figure du professeur ».

CHEVALLARD, Y. **Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission : un point de vue didactique**. Communication au colloque international *Savoirs scolaires, interactions didactiques et formation des enseignants* (Marseille, 28-30 avril 1997). Paru dans *Skholê*, no 7, p. 45-64, 1997.

CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique**. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, France: La Pensée Sauvage, Vol 19, n° 2, pp. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. **Pourquoi enseigne-t-on les mathématiques ?** Communication au colloque *Finalités des enseignements scientifiques* (Marseille, 10-12 janvier 1989). Paru dans les Actes de ce colloque publiés par le CCSTI Provence-Méditerranée, p. 41-45, 1989.

CHEVALLARD, Y. **La Transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

CORNU, Bernard. **Apprentissage de la notion de limite – Conceptions et obstacles –**

Thèse de doctorat de Troisième Cycle de Mathématiques Pures – L'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1983.

D. BRESSOUD ET AL. **Teaching and Learning of Calculus**, ICME-13 Topical Surveys, DOI 10.1007/978-3-319-32975-8\_1, 2016.

DELEDICQ A. **Theaching with infinitesimals**, Springer –Verlag, 1994.

DOUADY R. **Jeux de cadres et dialectique outil-objet**. Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 7. n° 2. p. 5-31. La Pensée Sauvage éditions Grenoble, 1986.

DUGAS, P. (1970) **Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite**. In: Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, tome 23, n°4, 1970. pp. 333-350;

DUROUX, A. « **La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure** », in Petit x n°3. IREM de Grenoble, 1983.

DUVAL R. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**, Annales des Sciences Cognitives et Didactiques, Vol.5, IREM de Strasbourg, 1993.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL R. **Quel cognitif retenir en didactique des Mathématiques**. Recherche en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions, p. 343-380, 1996.

EL BOUAZZAOUI H. **Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction**, Thèse, Université Laval, Québec, 1988.

FARIAS, L. M. S. **Étude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire**: Une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde. Thèse de Doctorat, Université de Montpellier 2, France 2010.

FERNANDO HITT. **Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example: the concept of limit** Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, , IREM de Strasbourg, Vol. 11 p. 251 – 267, 2006

FONSECA BON, Cecílio. **Discontinuidades Matemáticas Y Didácticas entre la Enseñanza Secundaria Y la Enseñanza Universitária**. Tesis Doctoral Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Vigo, Espanha, 2004.

GASCÓN, J. **Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de**

**emancipación de la didáctica une approche antropológica**, Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol. 12, n° 1, p. 73-112, 2014.

GASCÓN, Josep. **Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes**. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 4(2), 129-159, 2001.

GASCÓN, Josep. **Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico: El caso del álgebra elemental**. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, pp. 203-231, 2011

GRENIER. D. **Notes de cours DEA de didactiques de Bamako Décembre, 2004**

CHAACHOUA, H., BESSOT, A. **A noção de variável no modelo praxeológico**. Notas de curso. Escola de altos estudos em Didática da Matemática. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2019. Tradução Marilena Bittar.

CHAACHOUA, H et BITTAR, M. **A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas conferência em português** Escola de altos estudos em Didática da Matemática. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2019.

CHAACHOUA, Hamid. **La praxéologie comme modèle didactique pour la Problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves. Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain**. Université de Grenoble, 2010. <tel-00922383>

HARDY, N. **Student 's Models of the Knowledge to be Learned about Limits in College Level Calculus Courses. The Influence of Routine Tasks and thee Role Played By Institutional Norms (Thèse de doctorat non-publiée)**. Université Concordia, 2009.

JOB, P. **Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques**. Thèse. Université de Liège, Belgique, 2011.

JOB, P. et SCHNEIDER, M. **Une situation fondamentale pour le concept de limite ? Question de langage, de culture ? Comment la TAD permet-elle de problématiser cette question ?** Communication au 2e congrès TAD, Uzès, 2007

MORENO, J., LABORDE, C. **Articulation entre cadres et registres de représentation des équations différentielles dans un environnement de géométrie dynamique**. Jun 2003, Reims, France. [\(edutice-00001353\)](#)

- LAKATOS I. **Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique** Paris Herman, 1985.
- LAKATOS I (1978b) **Cauchy and continuum dans Mathematics, Science and Epistemology**, Cambridge University Press
- LECORRE, T. (2016). **Des conditions de conception d'une ingénierie relative à la définition de la notion de limite. Élaboration d'un cadre basé sur un modèle de rationalité pour l'accès aux objets mathématiques complexes.** Thèse. Université Grenoble Alpes.
- LEGRAND M. **Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse**, Repère IREM, Vol. 10, pp. 123- 159, 1993.
- LOIUS CHARBONNEAU (2000). Groupe de travail **la place l'histoire dans l'enseignement de mathématiques.** Université de Quebec EMF 2000
- MELANIE DELAPORTE.(2015) **Les registres de représentation sémiotiques : le choix d'un ou de plusieurs registres.** Education. **2015**. <dumas-01271618>
- Nicolas Grenier-Bolley [http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/limite\\_ngb\\_annexe.pdf](http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/limite_ngb_annexe.pdf) du 02/02/2019.
- Œuvre philosophique de D'Alembert volume2**, Editeur Jean-François Bastien, 1805
- PERRIN-GLORIAN, M. J. Problèmes d'articulation de cadres théoriques : L'exemple du concept de milieu. In RDM, Vol. 19, n° 3, pp. 279- 322, 1999
- POINTCARRÉ, H. **la logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. L'enseignement mathématique 1**, pp. 157-162, 1899. Disponible sur le link :<http://doi.org/1051.69/seals-1226> consulté le 15/01/2019.
- PRASLON J. Analyse du début d'un cours d'analyse en DEUG 1<sup>ère</sup> année, Mémoire de DEA Université Paris 7, 1994.
- ROBERT A. **Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur**, Thèse de doctorat Université Paris 7, 1982.
- SACKUR ET MAUREL. **Les inéquations en classe de seconde.** Une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques. in Petit x n° 53, pp. 5-26, 1999-2000
- SCHNEIDER M. **Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages infinis de surfaces et des solides**, Recherche en Didactique de Mathématiques. Vol. 11 2/3, pp. 241-



294, 1991.

SCHNEIDER M. **Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limites au secondaire**, RDM. Vol. 21, n°1.2. pp. 7-56, 2001.

SCHNEIDER M. **Un dosage délicat entre calculus et analyse mathématique au carrefour de plusieurs institutions** 18<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques, Brest, 2015.

SIERPINSKA, A. **Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite-** RDM vol. 6, 1, pp. 5-67, 1985.

SOKONA, S. B. **Aspects analogiques et aspects analytiques de la proportionnalité dans une situation de formulation**, Petit x 19, pp. 5-27, 1989.

THIEN TRUNG LE THAI BAO. **Etude didactique des relations entre enseignement de la notion de limite au lycée et décimalisation des nombres réels dans un environnement 'calculatrice'. Une étude de cas au Viêt-nam..** domain stic.educ. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2007. Français. <tel-00169190>.

VERGNAUD G. **La théorie des champs conceptuels**. Recherche en Didactique des Mathématique vol. 10, n 23 pp. 133-170, 1990.

### **Les manuels scolaires**

ALEPH1 Analyse/Probabilité 1<sup>ère</sup> CDE 1972

Collection Transmath 1<sup>ère</sup> scientifiques mathématiques tome1 : analyse programme 1986.

Collection Transmath mathématiques tome1 : analyse, Nathan 1986

Collection Transmath : Mathématiques 1<sup>ères</sup> SE tome1 Programme 1991. Nathan

Collection Queysane- Revuz terminale B. Fernand Nathan1981 par Gilbert Pitel et Claire Durant

G COHEN/ G CORNUEJOLS problèmes de mathématiques avec leurs solutions terminales CDE, tome 4, 1975

Collection Institut de Recherches Mathématiques (IRMA) 1<sup>ère</sup> CE 1986

Collection Institut de Recherches Mathématiques (IRMA) 1<sup>ère</sup> D 1986

Collection Institut de Recherches Mathématiques (IRMA), Terminale C E, 1987

Programme de mathématiques du Mali 11<sup>ème</sup> Sciences Exactes, 1994

Collection Inter-Africaine de Mathématiques (CIAM) 1<sup>ère</sup> SM, 1998 EDICEF

Maths tome1 de F. Liret et M. Zisman Bordas, Paris 1983

Mathématiques tout-en-un pour la licence niveau L1 , Dunod 2006

Mathématiques spéciales premier cycle des universités Analyse tome 8. Alfred Doneddu  
1985 Vuibert

Stewart, James. Cálculo, volume I / James Stewart; [tradução EZ2 Translate]. São Paulo :  
Cengage Learning, 2013.