



Linear forms in Logarithms and Diophantine equation

Pagdame Tiebekabe

► To cite this version:

Pagdame Tiebekabe. Linear forms in Logarithms and Diophantine equation. Number Theory [math.NT]. Université Cheikh Anta Diop de Dakar (Sénégal), 2022. English. NNT: . tel-03749794v2

HAL Id: tel-03749794

<https://hal.science/tel-03749794v2>

Submitted on 24 Aug 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Année : 2022

N° d'ordre :

THÈSE DE DOCTORAT UNIQUE

Mention : Mathématiques et Modélisation

Spécialité : Codage, Cryptographie, Algèbre et Applications

Présentée par **Pagdame TIEBEKABE**

Soutenue le 22 février 2022

En vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

Titre de la thèse :
FORMES LINÉAIRES DE LOGARITHMES ET
ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES

Devant le jury

Président :	Hamidou DATHE	Professeur Titulaire	UCAD
Rapporteurs :	Maurice MIGNOTTE	Professeur Titulaire	Université de Strasbourg
	Omar KIHIL	Professeur Titulaire	Brock University
Examineurs :	Mamadou SANGHARÉ	Professeur Titulaire	UCAD
	Oumar DIANKHA	Professeur Titulaire	UCAD
	Cheikh Thiécoumba GUEYE	Professeur Titulaire	UCAD
Directeur de thèse :	Ismaila DIOUF	Maître de Conférences (CAMES)	UCAD

Année académique : 2021 - 2022

Table des matières

INTRODUCTION	1
1 PRÉLIMINAIRES	9
1.1 Définitions	9
1.2 Anneaux	13
1.3 Idéaux, anneaux quotient	15
1.4 Divisibilité sur les anneaux intègres	18
1.5 Modules sur un anneau commutatif	22
1.6 Corps de nombres-Anneaux des entiers	24
1.7 Logarithmes Complexes et p -adiques	30
2 SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES ET ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES	37
2.1 Suites récurrentes linéaires	37
2.2 Quelques suites récurrentes linéaires	40
2.3 Équations Diophantiennes	45
2.4 Méthodes classiques	57
3 FORMES LINÉAIRES DE LOGARITHMES	73
3.1 Formes linéaires de Logarithmes	73
3.2 Mesure de Malher	76
3.3 Puissances de trois comme différence de deux nombres de Fibonacci	86
3.4 Sur les solutions de l'équation Diophantienne $L_n + L_m = 3^a$	94
3.5 Sur les solutions de l'équation Diophantienne $F_{n_1} + F_{n_2} + F_{n_3} + F_{n_4} = 2^a$	103

3.6 Commentaires	120
3.7 Méthode mathématique des équations Diophantiennes : applications en chimie et physique	121
ANNEXE	129
3.8 Codes Python : New Divisibility Tests	129
3.9 Codes sources SageMath	140

INDICE DE NOTATION

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Q}$	Corps de nombres rationnels
$\mathbb{R}$	Corps de nombres réels
$\mathbb{C}$	Corps de nombres complexes
$n!$	$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$
$\square$	Symbole marquant la fin d'une démonstration
L_n	n -ème nombre de Lucas
F_n	n -ème nombre de Fibonacci
$\mathcal{P}_n$	n -ème nombre de Padovan
P_n	n -ème nombre de Pell
$\mathcal{L}_n$	n -ème nombre de Pell-Lucas
$a b$	a divise b
$\text{pgcd}(a, b)$	Plus grand commun diviseur de a et b
$\text{ppcm}(a, b)$	Plus petit commun multiple de a et b
$\log(a)$	logarithme naturel
$\min(a, b)$	minimum de a et b
$\max(a, b)$	maximum de a et b
$a \equiv b \pmod{m}$	a est congru à b modulo m
$\Re(z)$	Partie réelle du nombre complexe z
$\ \alpha\ $	Distance de α à l'entier le plus proche
$A[x]$	Anneau de polynômes sur l'anneau intègre A
$\langle x_1, \dots, x_n \rangle$	Idéal engendré par $x_1, \dots, x_n$ éléments de l'anneau
$[\mathbb{K}_1 : \mathbb{K}_2]$	degré ou dimension du corps $\mathbb{K}_1$ sur le corps $\mathbb{K}_2$
G/H	H sous groupe normal de G
$\mathbb{Z}_p[u]$	$\{a + bu : a, b \in \mathbb{Z}\}$
$\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$	Anneau engendré par $\mathbb{Z}_p$ et $\frac{1}{p}$
$ x $	Valeur absolue de x
$\lceil x \rceil$	Partie entière supérieure de x
$\lfloor x \rfloor$	Partie entière inférieure de x
$\lceil x \rceil$	L'arrondi entier de x

$\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$	Anneau des entiers algébriques de $\mathbb{K}$
$\binom{m}{n}$	Coefficient binomial
$v_p(a)$	valuation p -adique
$ x _p$	norme p -adique
$c(P)$	Contenu d'un polynôme P
$\mathbb{Z}[i]$	Anneau des entiers de Gauss
$\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$	Anneau engendré par $\sqrt{d}$
$\text{Frac}(A)$	Corps de fractions de l'anneau A
$[a_0, a_1, \dots, a_n]$	Fraction continuée de quotients $a_0, a_1, \dots, a_n$
$H(\gamma)$	Hauteur naïve de γ
$h(\gamma)$	Hauteur logarithmique absolue de γ
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	anneau quotient
$K[X]$	Anneau des polynômes à coefficients dans K
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$	groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$d_n(I)$	Sous-ensemble de l'anneau A constitué de 0 et des coefficients dominants des éléments de degré n de I
$fld_K(\gamma)$	Polynôme formel

Bibliographie

- [1] S. Alaca and K. S. Williams, *Introductory algebraic number theory*, **Cambridge University Press**, 2004.
- [2] David Harari, *Algèbre 1-Anneaux et Modules*, notes de cours de Master 1, Université Paris Saclay, 2018.
- [3] T. Nagell, *Introduction number theory*, **ALMQVIST & WIKSELL**, 1957.
- [4] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the Theory of Numbers*, **Oxford University Press**, 4th ed., 1960.
- [5] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, *An introduction to the theory of number*, 5th ed., **John Wiley and Sons, Inc.**, 1991.
- [6] T. Andreescu, D. Andrica, and I. Cucurezeanu, *An introduction to diophantine equations*, **Birkhäuser**, 2010.
- [7] E. Zeckendorf, *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres ou de nombres de Lucas*, **Bull. Soc. Roy. Sci. Liège** 41(1972), 179 – 182.
- [8] L.J. Mordell, *Diophantine equations*, **Academic Press Inc**, 1969.
- [9] H. Cohen, *Number theory*, Vol. II : **Analytic and Modern Tools**, **Springer**, 2007.
- [10] Y. F. Bilu, Y. Bugeaud, and M. Mignotte, *The problem of Catalan*, **Springer International Publishing**, 2014.
- [11] C.L. Stewart, *Linear forms in logarithms and diophantine equations*, **Course notes of University of Waterloo taken by D. Wolczuk**.
- [12] A. Baker, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers*, iii, **Mathematika** 14(1967), pp 220 – 228.

- [13] P. Ribenboim, *My number, my friend, popular lecture on number theory*, Springer-Verlag, 2000.
- [14] A. Baker and G. Wüstholz, *Logarithm forms and groups varieties*, **J. Reine Angew.Math.** 442(1993), pp. 19 – 62.
- [15] A. Baker and G. Wüstholz, *Logarithmic and Diophantine Geometry*, Vol 9 **New Mathematical Monographs (Cambridge University Press)**, 2007.
- [16] M. Laurent, M. Mignotte, and Y. Nesterenko, *Formes linéaires de deux logarithmes et déterminant d'interpolation*, **Journal of Number Theory** 55(1995), pp 285 – 321.
- [17] F. W. Levi, *On $a^x + b^y = c$* , **J. Indian Math. Soc. (N.S.)** 2(1936), pp. 119 – 122.
- [18] F. W. Levi, *A correction to the paper on $a^x + b^y = c$* , **J. Indian Math. Soc. (N.S.)** 2(1937), pp 215.
- [19] F. W. Levi, *On the inequality $0 < a^x - b^y \leq c$* , **Journal Indian M. S.** 19(1931), pp. 1 – 11.
- [20] A. Baker and H. Davenport, *The equations $3x^2 - 2 = y^2$ and $8x^2 - 7 = z^2$* , **Quart. J. Math. Oxford Ser.** 20(1969), 129 – 137.
- [21] F. Amoroso et D. Vergnaud, *Minorations de la hauteur d'un nombre algébrique*, **Laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 613, Université de Caen** (2002).
- [22] A. Baker, *Transcendental Number Theory* **Cambridge University Press**, 1975.
- [23] Shorey, T. N. and Tijdeman, R. J. *Exponential Diophantine Equations* **Cambridge University Press**, 1986; reprinted 2008).
- [24] S. Kebli, O. Kihel, J. Larone, and F. Luca, *On the nonnegative integer solutions to the equation $F_n \pm F_m = y^a$* , **J. Number Theory** 220(2021)107 – 127.
- [25] J. J. Bravo and F. Luca, *On the Diophantine equation $F_n + F_m = 2^a$* , **Quaest. Math.** 39(2016), 391 – 400.
- [26] E. F. Bravo and J. J. Bravo, *Powers of two as sums of three Fibonacci numbers*, **Lithuanian Mathematical Journal**, (2015).
- [27] Y. Bugeaud, M. Mignotte, and S. Siksek, *Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations Fibonacci and Lucas perfect powers*, **Ann. of Math.** 163(2006), 969 – 1018.

- [28] F. Luca and V. Patel, *On perfect powers that are sums of two Fibonacci numbers*, **J. Number Theory** 189(2018), 90 – 96.
- [29] F. Luca, *Repdigits as sums of three Fibonacci numbers*, **Math. Commun.** 17(2012), 1 – 11.
- [30] F. Luca and S. Siksek, *Factorials expressible as sums of two and three Fibonacci numbers*, **Proc. Edinb. Math. Soc.** (2)53(2010), 747 – 763.
- [31] S. Diaz Alvarado and F. Luca, *Fibonacci numbers which are sums of two repdigits*, **Proceedings of the XIVth International Conference on Fibonacci numbers and their applications (Editors : F. Luca and P. Stanica)**, 2011, 97 – 111.
- [32] Milne, James S., *Algebraic number theory* (v3.06), 2014. pages : 164.
- [33] Benedict V. N. and Luca F., *Repdigits as Sums of Four Fibonacci or Lucas Numbers*, **Journal of Integer Sequence**, Vol. 21(2018), Article 18.7.7.
- [34] L. Debnath, *A short history of the Fibonacci and golden numbers with their applications*, **Int. J. Math. Education Sci. Technology** 42(2011), 337 – 367.
- [35] E. M. Matveev, *An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers*, II, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* 64(2000), 125 – 180. **Translation in Izv. Math.** 64(2000), 1217 – 1269.
- [36] A. Dujella and A. Pethő, *A generalization of a theorem of Baker and Davenport*, **Quart. J. Math. Oxford Ser.** 49(1998), no.195, 291 – 306.
- [37] Y. Bugeaud, F. Luca, M. Mignotte, and S. Siksek, *Fibonacci numbers at most one away from a perfect power*, *Elem. Math.* 63(2008), 65 – 75.
- [38] J. J. Bravo, F. Luca, and K. Yazán, *On a problem of Pillai with Tribonacci numbers and powers of 2*, **Bull. Korean Math. Soc.** 54.3 (2017), 1069 – 1080.
- [39] M. Ddamulira, F. Luca and M. Rakotomalala, *On a problem of Pillai with Fibonacci numbers and powers of 2*, **Proc. Math. Sci.** 127.3 (2017), 411 – 421.
- [40] Ddamulira, Mahadi et al. *On a problem of Pillai with k -generalized Fibonacci numbers and powers of 2*. **Monatshefte für Mathematik** 187 (2018) : 635 – 664
- [41] J. J. Bravo and F. Lucas, *Powers of Two as Sums of Two Lucas Numbers*, **Journal of Integers sequences**, Vol.17(2014) Article 14.8.3

- [42] Boris A. Kordemsky, *The Moscow Puzzles : 359 Mathematical Recreations*, **Dover Publications**, p. 140, 2014(1red.1971).
- [43] Cohen, H. **Number Theory**. Volume I : *Tools and Diophantine Equations* 1st ed. (eds Axler, S. & Ribet, K. A.) (Springer, 2007).
- [44] Z. Siar, R. Keskin, *On the Diophantine equation $F_n - F_m = 2^a$* , **Colloq. Math.** 159(2020)119 – 126.
- [45] B. Demirtürk Bitim, R. Keskin, *On solutions of the Diophantine equation $F_n - F_m = 3^a$* , **Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.** 129(2019)81.
- [46] Pagdame Tiebekabe and Ismaïla Diouf, *Powers of Three as Difference of Two Fibonacci Numbers*, **JP Journal of Algebra, Number Theory & Applications**, Volume 49, Number 2, (2021), Pages 185 – 196.
- [47] F. Erduvan, R. Keskin, *Nonnegative integer solutions of the equation $F_n - F_m = 5^a$* , **Turk. J. Math.** 43(2019)115 – 1123.
- [48] I. Pink, V. Ziegler, *Effective resolution of Diophantine equations of the form $u_n + u_m = wp_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s}$* , **Monatshefte Math.** 185(2018) 103 – 131.
- [49] Edward Brooks, *The Philosophy of Arithmetic*. **Normal Publishing Company**, 1880.
- [50] Leonard Eugene Dickson. *History of the Theory of Numbers*. **Chelsea Publishing Company**, (Originally published in 1919 by the Carnegie Institution, Washington, D.C., all three volumes of this text are now available in paperback from Dover Publications, Mineola, NY, 2005.), 1952.
- [51] Abodah Zarah, *Babylonian Talmud*. **Abod. Zar.** 9b http://come-and-hear.com/zarah/zarah_9.html.
- [52] Cherniavsky, Y. and Mouftakhov, A. Zbikowskis *Divisibility Criterion*. **The College Mathematics Journal**, Vol. 45, No. 1, pp. 17 – 21, January (2014).
- [53] Dickson, L. E. *History of the theory of numbers*. Vol. I : Divisibility and primality. **Chelsea Publishing Co.**, New York 1966.
- [54] Lagrange, J. L. *Leçons élémentaire. sur les math. données à l'école normale* (1795), **Jour. de l'école polytechnique**, vols. 7, 8, 194 – 9; *Oeuvres*, 7, pp. 203 – 8, 1812.

- [55] Charles L. Dodgson. *Brief method of dividing a given number by 9 or 11*. **Nature**, 56(1459) : 565 – 566, 1897.
- [56] D. H. Lehmer. *Factorization of certain cyclotomic functions*, **Ann. of Math.** 34(1933), pp.461 – 479.
- [57] A. Zbikowski, *Note sur la divisibilité des nombres*, **Bull. Acad. Imp. Sci. Saint-Pétersbourg** 3151 – 153, 1861.
- [58] Marc Renault. *Stupid divisibility tricks : 101 ways to stupefy your friends*. **Math Horizons**, 14(2) : 18 – 21, 42, November 2006.
- [59] Pagdame Tiebekabe and Ismaïla Diouf, *Powers of Three as Difference of Two Fibonacci Numbers*, **JP Journal of Algebra, Number Theory & Applications**, Volume 49, Number 2, (2021), Pages 185 – 196. <http://dx.org/10.17654/NT049020185>.
- [60] Pagdame Tiebekabe and Ismaïla Diouf, *New Divisibility Tests*, **Far East Journal of Mathematical Education**, Volume 21, Number 1, (2021), Pages 31 – 41. <http://dx.doi.org/10.17654/ME021010031>.
- [61] P. Tiebekabe and I. Diouf, *On solutions of the Diophantine equation $L_n + L_m = 3^a$* , **Malaya J. Mat.** 9(04)(2021), 228 – 238. <http://doi.org/10.26637/mjm904/007>.
- [62] Pagdame Tiebekabe and Ismaïla Diouf, *Linear forms in Logarithms and the mathematical method of Diophantine equations : Applications in Chemistry and Physics*, **Journal of Mathematical Chemistry**, <https://doi.org/10.1007/s10910-021-01274-y>, Volume 59, (2021), Pages 2009 – 2020.
- [63] P. Tiebekabe and I. Diouf, *On solutions of Diophantine equation $F_{n_1} + F_{n_2} + F_{n_3} + F_{n_4} = 2^a$* , **Journal of Algebra and Related Topics**, Volume 9, Issue 2, 131 – 148(2021) <https://doi.org/10.22124/JART.2021.19294.1266>.

RÉSUMÉ

Nom et prénom du candidat : **Pagdame TIEBEKABE**

Formes linéaires de logarithmes et équations Diophantienne

Le domaine de la transcendance a une variété de sous-domaines comprenant : la transcendance des nombres individuels, l'indépendance algébrique, la transcendance des fonctions (par exemple, les formes modulaires, les fonctions zêta et j , etc.) à des valeurs particulières, et les applications aux équations Diophantiennes qui impliquent les suites récurrentes linéaires (par exemple, les nombres de Fibonacci, les nombres de Lucas, les nombres de Tribonacci, les nombres de Padovan et les nombres de Pell-Lucas). Dans ce travail, nous avons considéré le corps des nombres en général, suivi des équations Diophantiennes, où nous avons exploré quelques équations Diophantiennes exponentielles en suites récurrentes linéaires. La méthode utilisée pour résoudre ces équations est une double application de la méthode de Baker et de quelques calculs avec des fractions continues. Elles combinent des arguments élémentaires avec des bornes pour les formes linéaires de logarithmes et techniques de réduction à partir de l'approximation Diophantienne. Nous avons également montré l'application de la méthode mathématique des équations Diophantiennes en physique et chimie.

ABSTRACT

Full Name of the candidate : **Pagdame TIEBEKABE**

Linear forms in Logarithms and Diophantine equation

The field of transcendence has a variety of subfields including : the transcendence of individual numbers, algebraic independence, transcendence of functions (for example, modular forms, the zeta and j functions, etc.) at particular values, and applications to Diophantine equations which involve the linearly recurrent sequences (for example, Fibonacci numbers, Lucas numbers, Tribonacci numbers, Padovan numbers, and the Pell-Lucas numbers). In this work we have considered the number field in general, followed by the Diophantine equations, where we have explored some exponential Diophantine equations in linearly recurrent sequences. The method used to solve these equations is a double application of Baker's method and some computations with continued fractions to reduce the brute force search range for the variables. They combine elementary arguments with bounds for linear forms in logarithms and reduction techniques from the Diophantine approximation. We have also shown the application of the mathematical method of Diophantine equations in physics and chemistry.