



HAL
open science

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA VETORIAL FUNDAMENTADA PELO MODELO T4TEL NO CONTEXTO DE UM AMBIENTE HÍBRIDO DE APRENDIZAGEM

Jany Goulart

► **To cite this version:**

Jany Goulart. UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA VETORIAL FUNDAMENTADA PELO MODELO T4TEL NO CONTEXTO DE UM AMBIENTE HÍBRIDO DE APRENDIZAGEM. Mathematics [math]. Universidade Federal da Bahia (Brésil), 2021. Portuguese. NNT: . tel-03747638

HAL Id: tel-03747638

<https://hal.science/tel-03747638>

Submitted on 8 Aug 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E
HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS



JANY SANTOS SOUZA GOULART

**UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA
VETORIAL FUNDAMENTADA PELO MODELO T4TEL NO
CONTEXTO DE UM AMBIENTE HÍBRIDO DE APRENDIZAGEM**

DEFESA REALIZADA: 08/08/2021

Salvador
2021

JANY SANTOS SOUZA GOULART

**UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA
VETORIAL FUNDAMENTADA PELO MODELO T4TEL NO
CONTEXTO DE UM AMBIENTE HÍBRIDO DE APRENDIZAGEM**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia – UFBA, como requisito final para obtenção do título de Doutora na área de Ensino de Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias.
Coorientador: Prof. Dr. Hamid Chaachoua.

Salvador
2021

Goulart, Jany Santos Souza.

Uma proposta didática para o ensino da álgebra vetorial fundamentada pelo modelo T4TEL no contexto de um ambiente híbrido de aprendizagem / Jany Santos Souza Goulart. - 2021.

479 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias.

Coorientador: Prof. Dr. Hamid Chaachoua.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal da Bahia. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Salvador, 2021.

Programa de Pós-Graduação em convênio com a Universidade Estadual de Feira de Santana.

1. Matemática - Estudo e ensino (Superior). 2. Álgebra vetorial - Estudo e ensino (Superior). 3. Teoria da didática. 4. Transposição didática. 5. Ensino. 6. Aprendizagem. I. Farias, Luiz Márcio Santos. II. Chaachoua, Hamid. III. Universidade Federal da Bahia. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. IV. Universidade Estadual de Feira de Santana. V. Título.

CDD 510.7 – 23. ed.

JANY SANTOS SOUZA GOULART

**UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA
VETORIAL FUNDAMENTADA PELO MODELO T4TEL NO
CONTEXTO DE UM AMBIENTE HÍBRIDO DE APRENDIZAGEM**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia – UFBA, como requisito final para obtenção do título de Doutora na área de Ensino de Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias.
Coorientador: Prof. Dr. Hamid Chaachoua.

Aprovada em: 08 de agosto de 2021

Banca Examinadora



Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias – UFBA-Brasil
(Orientador)



Prof. Dr. Hamid Chaachoua – Université Grenoble Alpes - França
(Coorientador)

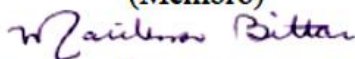


Dra. Avenilde Romo Vázquez – CICATA-IPN- México
(Membro)

Prof. Dr. André Luís Mattedi Dias – UFBA-Brasil
(Membro)



Prof. Dr. Edilson Fortuna de Moradillo – UFBA-Brasil
(Membro)



Prof. Dra. Marilena Bittar – UFMS-Brasil
(Membro)



Emitido em 11/08/2021

PARECER Nº 6886/2021 - IHAC (12.01.11)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado eletronicamente em 11/08/2021 09:17)

ANDRE LUIS MATTEDI DIAS
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
1808015

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sipac.ufba.br/documentos/> informando seu número: **6886**, ano: **2021**, tipo: **PARECER**, data de emissão: **11/08/2021** e o código de verificação: **6d7b4b194e**

AGRADECIMENTOS

Ao Rei eterno imortal, invisível, mas real, o único Deus – a Ele sejam dadas a honra e a glória, para todo sempre! Amém! (1 Timóteo 1:17) que esteve comigo em cada instante desta caminhada. Agradeço a ti, Senhor Jesus, pela tua presença, pelos direcionamentos e pela sabedoria concedida a mim, nos momentos em que pensava em desistir, pois achava que tudo tinha dado errado e que não teria forças para prosseguir. Mas o Senhor mostrou-me que minhas batalhas também eram suas, como esta que se concretiza hoje.

Ao meu esposo, amigo e companheiro Claudiano que susteve, sabiamente, as minhas inquietações fornecendo o suporte necessário para conseguir conciliar todas as demandas do curso frente às atribuições de mãe e esposa.

Às minhas princesas Ana Clara e Isabela, bênçãos concedidas a mim pelo meu Senhor, uma das razões do meu viver. Amo muito vocês.

Aos meus amados irmãos: Ubiratan (Birinha) pelo incentivo constante e Wilton (Tinho) pelo apoio incondicional em todas as etapas desta caminhada, por se alegrarem com as conquistas e me apoiarem em situações difíceis que se assemelharam às barreiras intransponíveis. À minha amada, querida e amiga irmã Eliane que sempre assumiu o papel de tia/mãe nos momentos em que eu estava ausente.

À minha linda e abençoada mãe Isaltina/Jury (in memoriam). A ela eu devo grande parte do que sou hoje, uma mulher guerreira que me amou, me educou e sabiamente me corrigiu no intuito de que eu fosse um ser humano melhor, os meus sinceros agradecimentos e o meu eterno “te amo mainha!”. A meu pai Ubiratan/ Bira por oportunizar e prover condições para que alcançasse o estudo, um dos elementos que alegra o meu viver.

Sou muito grata ao professor Doutor Luiz Marcio Santos Farias pela confiança, disponibilidade e acolhimento nesta importante etapa da minha vida acadêmica, bem como pelos direcionamentos no âmbito da pesquisa em Didática.

Destaco também minha gratidão ao professor Doutor Hamid Chaachoua que aceitou a coorientação deste trabalho com ricas e imensuráveis contribuições no seio da Didática da Matemática.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências pelos momentos de interlocuções e aprendizado.

Ao professor André Mattedi por ter sido instrumento de Deus para abrir portas que se apresentavam fechadas na fase embrionária do doutorado, que acreditou que seria capaz de

cumprir essa missão ao intermediar o diálogo com professor Luiz Márcio, saiba que será sempre meu orientador.

Aos professores André Luís Mattedi Dias, Avenilde Romo Vázquez, Edilson Fortuna de Moradillo e Marilena Bittar, membros da banca examinadora pela disponibilidade e gentileza em participarem dessa tarefa, contribuindo significativamente, para melhoria do relatório dessa pesquisa.

Aos estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática da UEFS um agradecimento muito especial a todos que gentilmente participaram da pesquisa. Ao Colegiado de Matemática da UEFS por acolher os minicursos que oportunizaram a obtenção de dados que integraram essa investigação.

Demonstro meus agradecimentos a Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS, pela liberação e pela bolsa PACDT-Programa de Ajuda de Custo para Docentes e Técnicos da UEFS.

Aos colegas do Núcleo Interdisciplinar de Pesquisas em Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologias/UFBA pela parceria. Em especial à família NIPEDCMT pelo apoio incondicional em um momento tão árduo da minha caminhada.

“Prepara-se o cavalo para o dia da batalha,
porém do Senhor vem a vitória.”

Provérbios 21:31

RESUMO

A pesquisa concentra-se no ensino e aprendizagem da Álgebra Vetorial no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana, denotado por nós como CLM-UEFS, a qual se alicerça nos pilares da Teoria Antropológica da Didática - TAD e se respalda em estudos pertencentes ao campo da Didática da Matemática, os quais têm revelado particularidades acerca da noção vetorial como um conceito de difícil aprendizado. A partir dessas ideias preliminares, o interesse de pesquisa trilhou caminhos que direcionou ao objeto matemático vetor e sua estrutura institucional dentro do CLM-UEFS, a partir da dupla perspectiva: a primeira, que se refere à empregabilidade e à relevância institucional dos vetores, e a segunda, especificou à multiplicidade conceitual e à vinculação aos obstáculos detectados no contexto matemático e didático refletidos no processo de ensino e aprendizagem deste ente matemático. Diante dessa problemática, admite-se a existência e o funcionamento dos Sistemas Didáticos - SD, regidos por um conjunto de condições e restrições. Introduziu-se a noção de Caminhos de Prática Pessoal - PPP - para analisar as produções e interações entre estudantes, no campo dos vetores baseados em um Modelo de Referência Praxeológico Alternativo - MPRA, materializado por meio do Ambiente de Aprendizagem Híbrido - AHA. Esses modelos foram desenvolvidos e estruturados utilizando o quadro de referência didático T4TEL. Mais precisamente, estudou-se a questão: como mobilizar recombinações praxeológicas, orientadas por condições e restrições, que promovam mediações entre relações pessoais e instituições no contexto dos Sistemas Didáticos - SD, subjacentes ao saber vetorial do CLM-UEFS? No âmbito metodológico, à Engenharia Didática - ED se apresentou como inspiração e permitiu testar hipóteses, traçar possíveis recombinações praxeológicas, mapear o escopo das técnicas dentro de cada Dispositivo Didático - DD que "vive" em AHA, além de permitir a imersão nas descrições do complexo de praxeologias pessoais produzidas pelos protagonistas deste cenário. No que pode ser discutido em termos de resultados, referiu-se à suscetibilidade dos diálogos que contribuem para a quebra das obstruções inerentes às escolhas dominantes, amplamente cristalizadas, no funcionamento dos Sistemas Didáticos dentro da CLM-UEFS.

Palavras Chave: Teoria Antropológica do Didático – TAD; T4TEL; Vetores; Ensino-Aprendizagem; Ambiente Híbrido de Aprendizagem – AHA.

ABSTRACT

This research discusses Vector Algebra teaching and learning in the Mathematics Teaching Course at Universidade Estadual de Feira de Santana (Feira de Santana Federal University, in free translation), which will be called CLM – UEFS in this text. It is based on the pillars provided by the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) and on studies developed in the scope of Didactics of Mathematics, which have shown peculiarities of the vector notion as a concept that is difficult to learn. Starting from those preliminary ideas, our research followed a path that led us to vectors as a mathematical object and to their institutional structure in CLM – UEFS, based on a double perspective: the first one refers to the application and institutional relevance of vectors, while the second aspect specifies the conceptual multiplicity and its links with the obstacles detected in the mathematical-didactical context and reflected in the teaching and learning process of said mathematical object. In this setting, we admit the existence and functioning of Didactical Systems (DS), coordinated by a set of conditions and restrictions. We introduced the notion of Personal Practice Paths (PPP) in order to analyze students' productions and interactions in the scope of vectors based on a Alternative Praxeological Reference Model (APRM), materialized through a Hybrid Learning Environment (HLE). The models were developed and structured through the didactical reference framework T4TEL. More specifically, we studied the question “How to harness praxeological recombinations – guided by conditions and restrictions – which can mediate personal and institutional interactions in the DS related to vector knowledge in CLM – UEFS?” In the methodological scope, Didactical Engineering (DE) presented itself as an inspiration and allowed to trace possible praxeological recombinations – path mapping and the reach of the techniques in each Didactical Device (DD) that “lives” in the HLE –, in addition to enabling an immersion into the descriptions of the personal praxeological complex produced by the players in this setting. Regarding results, we point to the susceptibility of dialogues that might contribute to removing obstacles related to choices that are dominant and widely crystalized in the functioning of DS in CLM – UEFS. Moreover, there is the emergence of a Didactical Device repertoire aimed at vector teaching and learning.

Keywords: Anthropological Theory of the Didactic – ATD; T4TEL; Teaching and Learning; Hybrid Learning Environment – HLE.

RÉSUMÉ

La recherche se concentre sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre vectoriel dans le cadre du Cours de Licence en Mathématiques de l'Université d'État de Feira de Santana, désigné par CLM-UEFSA. Elle repose sur les piliers de la Théorie Anthropologique de la Didactique - TAD et s'appuie sur des études relevant du domaine de la Didactique des Mathématiques, lesquelles ont révélé des particularités qui configurent la notion vectorielle comme un concept difficile pour l'apprentissage. À partir de ces idées préliminaires, notre intérêt de recherche a pris des orientations qui nous ont emmenés à l'objet mathématique vecteur et sa structure institutionnelle au sein de CLM-UEFS, sous la perspective de deux aspects : le premier, qui se réfère à l'employabilité et à la pertinence institutionnelle des vecteurs, et le second, qui se rapporte à la multiplicité conceptuelle de ces derniers qui peuvent renforcer les obstacles détectés dans le contexte mathématique et didactique répercuté dans le processus d'enseignement et d'apprentissage de cette entité mathématique. Face à cette problématique, sont admis l'existence et le fonctionnement de Systèmes Didactiques – SD, régi par un ensemble de conditions et contraintes. Nous avons introduit la notion de Parcours de Pratiques Personnelles – PPP - pour analyser les productions et les interactions entre des étudiants, dans le domaine des vecteurs en s'appuyant sur un Modèle Praxéologique de Référence Alternatif – MPRA, matérialisé au moyen de l'Environnement Hybride d'Apprentissage – EHR. Ces modélisations ont été développées et structurées en s'appuyant sur le cadre de référence didactique T4TEL. Plus précisément, nous avons étudié la question: comment mobiliser des recombinaisons praxéologiques, guidées par des conditions et des restrictions, qui favorisent des médiations entre les rapports personnelles et les institutions dans le contexte des Systèmes Didactiques – SD, sous-jacents au savoir vectoriel du CLM-UEFS? Dans notre méthodologie, Nous avons fait recours à l'Ingénierie Didactique – ID, s'est présenté comme une inspiration et a permis tester des hypothèses, tracer les recombinaisons praxéologiques possibles, mais aussi cartographier les parcours et les portées des techniques au sein de chaque Dispositif Didactique – DD qui « vit » dans un EHA, en plus de permettre l'immersion dans les descriptions du complexe de praxéologies personnelles produites par les protagonistes de ce contexte. Dans ce qui se discute à la vue des résultats, nous désignons la susceptibilité de dialogues qui contribuent à la rupture d'obstructions inhérentes aux choix dominants, amplement cristallisés, dans le fonctionnement des Systèmes Didactiques au sein du CLM-UEFS.

Mots-Clés: Théorie Anthropologique de la Didactique – TAD; T4TEL; Vecteurs; Enseignement-Apprentissage; Environnement Hybride d'Apprentissage – EHA

RESUMEN

Esta investigación se concentra en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra vectorial en la Carrera de Enseñanza de las Matemáticas en la Universidade Estadual de Feira de Santana, Brasil, - denominada como CLM – UEFS en este documento – y está fundamentada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (ATD) y en investigaciones en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas, los cuales han revelado particularidades acerca de la noción vectorial como un concepto de difícil aprendizaje. A partir de esas ideas preliminares, nuestro interés de investigación siguió un camino que nos direccionó al objeto matemático vector y a su estructura institucional en CLM – UEFS, a partir de una doble perspectiva: la primera se refiere a la aplicación y a la relevancia institucional de los vectores, mientras la segunda especificó la multiplicidad conceptual y la vinculación a los obstáculos detectados en el contexto matemático y didáctico y reflejados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este elemento matemático. Con este problema, admitimos la existencia e el funcionamiento de Sistemas Didácticos (SD) coordinados por un conjunto de condiciones y restricciones. Introducimos la noción de Caminos y Prácticas Personales (CPP) para analizar las producciones e interacciones entre los estudiantes en el ámbito de los vectores basados en un Modelo Praxeológico de Referencia Alternativo (MPRA), materializado a través de un Ambiente Híbrido de Aprendizaje (AHA). Esos modelos fueron desarrollados y estructurados a partir del cuadro de referencia didáctica T4TEL. Más precisamente, estudiamos la cuestión ¿cómo se puede movilizar re combinaciones praxeológicas, coordinadas por condiciones y restricciones, que puedan intermediar las relaciones personales y institucionales en el contexto de los Sistemas Didácticos (SD) relacionados con el saber vectorial en CLM-UEFS? En el ámbito metodológico, la Ingeniería Didáctica se presentó como una inspiración y permitió testar las hipótesis y trazar las posibles re combinaciones praxeológicas – el mapeo de las rutas, el alcance de las técnicas en cada Dispositivo Didáctico (DD) que <<vive>> en el AHA – además de permitir la inmersión en las descripciones del complejo de praxeologías personales producidas por los actores en ese contexto. Sobre los resultados, destacamos la susceptibilidad de diálogos que contribuyan al rompimiento de las obstrucciones relacionadas a las opciones dominantes y ampliamente cristalizadas en el funcionamiento de los Sistemas Didácticos en CLM-UEFS. Asimismo, hay la emergencia de un repertorio de Dispositivos Didácticos direccionados a la enseñanza y al aprendizaje vectorial.

Palabras Clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico – TAD; T4TEL; Enseñanza y Aprendizaje; Ambiente Híbrido de Aprendizaje – AHA.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esboço do processo de transição entre os currículos 314 e 318	30
Figura 2 - Conexões entre elementos da TTD e a TAD	46
Figura 3 - Esquema representativo das interligações entre a TTD e a TAD	47
Figura 4 - Triângulo de opiniões.....	73
Figura 5 - Interpretações de Felix Klein.....	78
Figura 6 - Translação: operações com pontos e vetores.....	79
Figura 7 - Congruência por translação.....	80
Figura 8 - Congruência por translação (Resolução)	80
Figura 9 - Simetria no plano.....	81
Figura 10 - Esquema dos Processos Didáticos	88
Figura 11 - Fluxograma do CLM-UEFS.....	97
Figura 12 - Exemplo 1 dos exercícios resolvidos.....	100
Figura 13 - Exemplo 2 dos exercícios resolvidos.....	101
Figura 14 - Problema resolvido sobre operações vetoriais.....	103
Figura 15 - Sequência de representações no espaço.....	105
Figura 16 - Recomendação do papel de coordenadas retangulares	108
Figura 17 - Representação de um paralelepípedo retângulo.....	110
Figura 18 - Representação da adição e vetor oposto	112
Figura 19 - Representações das multiplicações de vetores por número real	112
Figura 20 - Representação de \mathbb{R}^2	113
Figura 21 - Representação de \mathbb{R}^3	114
Figura 22 - Recorte do processo transpositivo	117
Figura 23 - Representação vetorial em flecha	125
Figura 24 - Configuração da aula observada... ..	130
Figura 25 - Recorte de uma nota de aula do professor 1	132
Figura 26 - Recorte de uma nota de aula do professor 1	133
Figura 27 - Regra do polígono (Soma vetorial).....	136
Figura 28 - Propriedades da soma.....	137
Figura 29 - Representação da subtração vetorial.....	140
Figura 30 - Esquema representativo da multiplicação por escalar	142
Figura 31 - 2º esquema representativo da multiplicação por escalar.....	144
Figura 32 - Propriedades da multiplicação por escalar.....	145
Figura 33 - Esquema das observações realizada na aula 1	150
Figura 34 - Reprodução da representação do vetor no espaço – \mathbb{R}^3 a partir da aula de P2	153
Figura 35 - Reprodução da representação do vetor no plano – \mathbb{R}^2 a partir da aula de P2	154
Figura 36 - Reprodução dos eixos e planos coordenados com base na aula de P2	155
Figura 37 - Representação da projeção do vetor no que toca aos planos coordenados (com base na aula de P2).....	158
Figura 38 - Protótipo tridimensional.....	159

Figura 39 - Representação geométrica da localização do ponto P	162
Figura 40 - Representação dos planos coordenados	163
Figura 41 - Distância entre pontos	165
Figura 42 - Representação dos pontos A e B no espaço R^3	166
Figura 43 - Representação do ponto médio	169
Figura 44 - Erro recorrente observado pelo professor no cálculo do ponto médio	169
Figura 45 - Cálculo para determinar o ponto médio M	170
Figura 46 - Esquema das observações realizadas na aula 2	176
Figura 47 - Representações algébricas e geométricas de alguns vetores no ambiente GeoGebra.....	191
Figura 48 - Seleção de tarefas propostas para resolução no minicurso	193
Figura 49 - Resolução 1	194
Figura 50 - Resolução 2	195
Figura 51 - Resolução 3	196
Figura 52 - Resolução da primeira tarefa no GeoGebra (1)	197
Figura 53 - Resolução da primeira tarefa no GeoGebra (2)	198
Figura 54 - Resolução da questão 2 e 3 com representação em um único gráfico em PL (2)	199
Figura 55 - Resolução da questão 2 e 3 com representação em um único gráfico em PL (2)	200
Figura 56 - Resolução da questão 2 e 3 com representação em gráficos distintos (1)	201
Figura 57 - Resolução das questões 2 e 3 com representação em gráficos distintos em PL(2).....	201
Figura 58 - Resolução da questão 2 com representação em GG(1).....	202
Figura 59 - Resolução da questão 3 com representação em GG(1).....	202
Figura 60 - Resolução das questões 2 e 3 com representação em GG(2).....	203
Figura 61 - Exemplo de resolução da questão 4 em PL	204
Figura 62 - Gráfico da Soma de números complexos	205
Figura 63 - Exemplo de resolução da questão 4 em GG	206
Figura 64 - Exemplo de resolução da questão 4 em PL	207
Figura 65 - Exemplo de resolução da questão 5	208
Figura 66 - Soluções geométricas da 5ª questão em GG	209
Figura 67 - Representação da sexta tarefa.	210
Figura 68 - Existência de um triângulo conhecidos os pontos médios.....	211
Figura 69 -Unicidade de um triângulo conhecidos os pontos médios.....	211
Figura 70 - Registro da resolução da tarefa 6.....	212
Figura 71 - Segundo registro da resolução da tarefa 6	213
Figura 72 - Registro da resolução da tarefa 6 no GeoGebra	213
Figura 73 - Registro da resolução da sétima tarefa (A).....	214
Figura 74 - Registro da resolução da sétima tarefa (B)	214
Figura 75 - Registro da resolução da sétima tarefa (C)	215
Figura 76 - Registro da resolução da sétima tarefa no GeoGebra	216
Figura 77 - Esquema do desenho da tese	220
Figura 78 - Exemplo de um Gerador de Tipo de Tarefas e suas especificidades.....	224
Figura 79 - Exemplo do Funcionamento de Sistema Didático Auxiliar (SDA).....	227
Figura 80 - Um cenário Híbrido de Aprendizagem.....	237

Figura 81 - Situando o habitat dos vetores na instituição CLM – UEFS	239
Figura 82 - Representação de diversos vetores.	241
Figura 83 - Capacidade geradora de um GT.....	242
Figura 84 - Momento de preparação para início da reprodução da figura 82	244
Figura 85 - Um momento de construção.....	244
Figura 86 - Exemplo de dois protótipos representativos da imagem apresentada na figura 82.....	245
Figura 87 - Construção do modelo manipulável	246
Figura 88 - Finalização da construção do modelo manipulável	246
Figura 89 - Resolução da questão do Quadro 12, utilizando canudos.....	253
Figura 90 - Resolução da tarefa do Quadro 12, utilizando lápis e papel.....	254
Figura 91 - Entraves detectados na resolução da questão do Quadro 12	255
Figura 92 - Início de uma resolução da questão do Quadro 12	256
Figura 93 - Traços de uma praxeologia pessoal	257
Figura 94 - Tentativa de interseção entre dois ambientes/dispositivos	258
Figura 95 - Comparação entre elementos de dispositivos distintos.....	259
Figura 96 - Definição de produto escalar.....	262
Figura 97 - Questão 1.....	262
Figura 98 - Questão 2.....	262
Figura 99 - Uma Resolução da Questão 1.....	263
Figura 100 - Uma Resolução da Questão 2.....	264
Figura 101 - Esquema do processo de estudo.....	270
Figura 102 - Sistema Didático em associação com as Funções Didáticas	273
Figura 103 - O estudante como gerenciador do saber	277
Figura 104 - O professor como gerenciador do saber	278
Figura 105 - Dinâmica de funcionamento dos Sistemas Didáticos - SD.....	278
Figura 106 - Desenho do Caminho de Práticas Pessoais - CPP	285
Figura 107 - Tarefa 1 de uma avaliação de EXA 180 em CLM- UEFS	286
Figura 108 - Registros Pessoais de Alguns Estudantes	288
Figura 109 - Tarefas 4 e 5 de uma avaliação de EXA 180 em CLM- UEFS	289
Figura 110 - Tarefa 2 de uma avaliação de EXA 180 em CLM- UEFS	292
Figura 111 - Resolução (GG) da Tarefa 2 de uma avaliação de EXA 180 em CLM- UEFS.	298
Figura 112 - Reprodução do gráfico que integra a Tarefa 2.....	299
Figura 113 - Uma Resolução da Tarefa 2.....	300
Figura 114 - Reprodução do gráfico que integra a Tarefa 2 com alterações de um dos lados do triângulo.....	301
Figura 115 - Reprodução do gráfico que integra a Tarefa 2 com alterações de um dos lados do triângulo utilizando barbante e canudos.....	302
Figura 116 - Tarefa 1 presente no repertório do Minicurso	303
Figura 117- Tarefa 2, presente no repertório do Minicurso	312
Figura 118 - Paralelogramo gerado a partir do triângulo AOB.....	314
Figura 119 - Inclusão de um sistema de coordenadas	315
Figura 120 - Enunciado e hexágono que integra a terceira tarefa	317
Figura 121 - Paralelogramo agregado a outros elementos atividade 4.....	318

Figura 122 - Tetraedro que integra o enunciado da quinta questão.....	320
Figura 123 - Caminhos de Práticas Pessoais CPP (t_i) ou CPP (T)	329
Figura 124 - Níveis de Análises.....	330
Figura 125 - Um exemplo da estruturação do curso.....	335
Figura 126 - Desenho dos arranjos das variáveis em termos dos Dispositivos Didáticos – DD.....	339
Figura 127 - Tarefas associadas a vetores no plano	341
Figura 128 - Tarefas associadas a vetores no plano e espaço.....	341
Figura 129 - Primeira tarefa do Curso um Estudo sobre os Vetores	342
Figura 130 - Reprodução da figura 129 (grupo 1).....	344
Figura 131 - Reprodução da figura 129 (grupo 2).....	347
Figura 132 - Semiologia e a Dialética de ostensivo não ostensivo	351
Figura 133 - Produções individuais da figura 129 (grupo 5).....	354
Figura 134 - Produção individual da figura 129 (grupo 6).....	355
Figura 135 - Representantes dos vetores u e v (grupo 5).....	357
Figura 136 - DO em função de u e v (grupo 5).....	358
Figura 137 - AF , AG e AH em função de u e v (grupo 6)	358
Figura 138 - Resolução da tarefa 1 utilizando o GeoGebra - GG (grupo 4)	362
Figura 139 - Técnicas utilizadas na representação da figura da tarefa 1 (grupo 4).....	363
Figura 140 - Técnicas utilizadas na representação da tarefa 1 (grupo 4)	363
Figura 141 - Ramificações do GTt_1	365
Figura 142 - Configurações retangulares da tarefa 1.....	366
Figura 143 - Triângulo AOB	368
Figura 144 - Ramificações do GTt_2	368
Figura 145 - Representação do triângulo AOB (grupo 5)	371
Figura 146 - Representação do triângulo AOB (grupo 6)	371
Figura 147 - Representação do triângulo AOB (junção dos grupos 1 e 2).....	379
Figura 148 - Protocolo de Construção do triângulo AOB (junção dos grupos 1 e 2)	381
Figura 149 - Ramificações do GTt_3	382
Figura 150 - Hexágono da atividade 3.....	383
Figura 151 - Construção do Hexágono da atividade 3 em MM (grupo 3)	384
Figura 152 - Resolução PL integrado a MM (grupo 3)	385
Figura 153 - Construção do Hexágono da atividade 3 em MM (grupo 4)	385
Figura 154 - Respostas apresentadas por um membro do grupo 1	387
Figura 155 - Respostas apresentadas por um membro do grupo 2.....	389
Figura 156 - Produção dos componentes do grupo 5	390
Figura 157 - Protocolo de construção tarefa 3.....	390
Figura 158 - Potencialidades do GTt_4	391
Figura 159 - Paralelogramo agregado a outros elementos atividade 4.....	392
Figura 160 - Reprodução da figura 159 em MM (grupo 1).....	393
Figura 161 - Resolução da 4ª atividade com suporte de MM.....	394
Figura 162 - Resolução da 4ª atividade com suporte de MM (grupo 2).....	394
Figura 163 - CPP trilhado pelo grupo 2.....	395
Figura 164 - Produção resolutiva da quarta tarefa em GG	402

Figura 165 - Protocolo de Construção da tarefa 4 em GG (a).....	402
Figura 166 - Protocolo de Construção da tarefa 4 em GG (b).....	403
Figura 167 - Potencialidades do GTt5.....	404
Figura 168 - Tetraedro que integra o enunciado da quinta questão.....	404
Figura 169 - Protótipo de Tetraedro em MM (Grupo 3).....	405
Figura 170 - Cálculos que acompanham o protótipo de tetraedro em MM (Grupo 3).....	407
Figura 171 - Cálculos que acompanham o protótipo de tetraedro em MM (Grupo 3).....	408
Figura 172 - Caminhos de Práticas Pessoais - CPP em PL (tarefa 5).....	409
Figura 173 - Caminhos de Práticas Pessoais - CPP em GG (tarefa 5).....	410
Figura 174 - Paralelepípedo que integra o enunciado da sexta questão.....	411
Figura 175 - Representação do Paralelepípedo em MM (grupo 1).....	412
Figura 176 - Representação do Paralelepípedo em MM (grupo 2).....	412
Figura 177 - Representação do Paralelepípedo em PL.....	414
Figura 178 - Representações do Paralelepípedo em GG.....	416
Figura 179 - Protocolo de Construção do Paralelepípedo.....	417
Figura 180 - Grupo 5 no processo de resolução da tarefa 1.....	431
Figura 181 - Grupo 6 no processo de resolução da tarefa 1.....	432
Figura 182 - Processo de Produções em MM dos grupos 1 e 2.....	432
Figura 183 - Exemplo de Processo de Produções em GG dos grupos 3 e 4.....	433
Figura 184 - Interligações entre o AHA e o CPP.....	439

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Primeira questão preliminar.....	129
Quadro 2 - Relatos de discentes do Curso de Licenciatura em Matemática	129
Quadro 3 - Multiplicação por Escalar ou Produto de Número real por Vetor.....	142
Quadro 4 - Questões Preliminares.....	183
Quadro 5 - Primeiro contato com os vetores ocorreu no nível superior (continua)	183
Quadro 6 - Primeiro contato com os vetores ocorreu entre o Ensino Fundamental e Médio.	184
Quadro 7 Primeiro contato com os vetores ocorreu entre o Ensino Fundamental e Médio (continua).....	186
Quadro 8 - Relevância do ensino de vetores no CLM-UEFS.....	190
Quadro 9 - Categorias das técnicas empregadas	196
Quadro 10 - Questão sobre a existência e unicidade	210
Quadro 11 - Programação Preliminar do Curso Introdutório sobre Vetores	234
Quadro 12 - Tarefa envolvendo vetores.....	250
Quadro 13 - Decomposição em sub-tarefas.....	251
Quadro 14 - Especificação da praxeologia pessoal apresentada na Figura 93	257
Quadro 15 - Gerador de Tipo de Tarefas direcionado às análises a priori	282
Quadro 16 - Direcionamentos institucionais da componente curricular Geometria Analítica – EXA 374.....	283
Quadro 17 - Gerador de Tipo de Tarefas GT'_{APt}	284
Quadro 18 - Exemplos de resoluções e ausência de resoluções	287
Quadro 19 - Exemplos de algumas resoluções 4ª questão (continua)	289
Quadro 20 - Exemplos de algumas resoluções 5ª questão.....	291
Quadro 21 - Exemplos de algumas resoluções de uma 2ª questão (continua)	292
Quadro 22 - Esperas institucionais relacionadas a tarefa 1	303
Quadro 23 - GT_{1nAPt1} subsidia o processo de ordenação das análises a priori da tarefa 1	323
Quadro 24 - GT_{2nAPt1} subsidia o processo de ordenação das análises a priori da tarefa 1	324
Quadro 25 - GT_{3nAPt1} subsidia o processo de ordenação das análises a priori da tarefa 1 .	325
Quadro 26 - Geradores de Tipo de Tarefas e os Níveis de Codeterminação.....	327
Quadro 27 - Valores das variáveis.....	343
Quadro 28 - Sub-Geradores de Tipo de Tarefas.....	343
Quadro 29 - Descrição praxeológica referente ao bloco prático	349
Quadro 30 - Descrição praxeológica referente ao bloco teórico (continua).....	352
Quadro 31 - Descrição do complexo praxeológico vinculado a figura 137 (continua).....	359
Quadro 32 - Um tipo de tarefa a partir de $G'T_{t1(MM)}$	365
Quadro 33 - Descrição da Organização Pessoal vinculada a Figura 146 (continua).....	372
Quadro 34 - Produção praxeológica do grupo 3 vinculada a tarefa 2 no dispositivo PL	376
Quadro 35 - Produção praxeológica do grupo 4 vinculada a tarefa 2 no dispositivo PL	376
Quadro 36 - Produção praxeológica proveniente da junção dos grupos 1 e 2 vinculada a tarefa 2 no dispositivo GG.....	380
Quadro 37 - Legenda de cores referente a figura 153	386
Quadro 38 - Praxeologia pessoal de um membro do grupo 1 (continua).....	387

Quadro 39 - Um zoom entre as duas resoluções	396
Quadro 40 - CPP dos grupos 5 e 6 da tarefa 4 em PL (continua).....	397
Quadro 41 - Trajetórias trilhadas na resolução da quarta tarefa.....	400
Quadro 42 - Resoluções da tarefa 6 com o suporte em MM	413
Quadro 43 - Registro praxeológico da tarefa 6 com o suporte em PL	415
Quadro 44 - Relatos dos estudantes acerca do trabalho desenvolvido em PL, MM e GG.....	420
Quadro 45 - Gerador de Tipo de Tarefas direcionado às análises a posteriori.....	430

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Comparativos entre Ementas.....	88
Tabela 2 - Indicações Bibliográficas (continua).....	91
Tabela 3 - Detalhamento praxeológico do problema resolvido na figura 14	104
Tabela 4 - Síntese da aula 1 (continua).....	147
Tabela 5 - Síntese da aula 2 (continua).....	171
Tabela 6 - Modelação praxeológica da tarefa.....	249
Tabela 7 - Controle de realizações das tarefas a partir dos escopos das técnicas alternativas.....	427
Tabela 8 - Identificação de técnicas vinculadas a tarefa 1 em MM (grupo 1)	435
Tabela 9 - Identificação de técnicas vinculadas a tarefa 1 em MM (grupo 2)	436
Tabela 10 - Identificação de técnicas vinculadas a tarefa 1 em PL (grupo 4).....	436
Tabela 11 - Identificação de técnicas vinculadas a tarefa 1 em PL (grupos 5 e 6).....	437
Tabela 12 - EXA 129 – Geometria Analítica	477
Tabela 13 - EXA 143 Álgebra Linear I A.....	478
Tabela 14– EXA 180 – Geometria Analítica e Álgebra Linear I.	479

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	23
O CONTEXTO E DELINEAMENTO DA PESQUISA	23
CAPÍTULO I	39
ASPECTOS DA GÊNESE ANTROPOLÓGICA DOS VETORES NA PERSPECTIVA DA TEORIA DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA-TTD	39
1.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS NO ÂMBITO DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA: DA TEORIA DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA - TTD À TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO – TAD.....	41
1.1.2 Entre a Geometria Posicional, Cálculo do Baricentro e Cálculo das Equipolências.....	53
1.1.3 Interconexões entre as ideias de Hermann Grassmann com a Teoria da Extensão e os <i>quaternions</i> de W. R. Hamilton.....	58
1.1.4 As adaptações feitas por Josiah Willard Gibbs e Oliver Heaviside em associação com o Cálculo Vetorial.....	62
1.1.5 Traços da evolução institucional da abordagem vetorial em Cursos de Licenciatura em Matemática.....	65
CAPÍTULO II	85
DESENHO DO MODELO PRAXEOLÓGICO CURRICULAR A PARTIR DOS LIVROS TEXTOS INDICADOS NA BIBLIOGRAFIA BÁSICA DE EXA 180 E EXA 374 EM CLM-UEFS	85
2 SUSTENTAÇÕES NOOSFÉRICAS NO CONTEXTO DO CLM-UEFS	85
2.1 UMA ANÁLISE DOS LIVROS TEXTOS	93
2.1.1 CAMARGO, I. de; BOULOS, P. <i>Geometria Analítica: um tratamento vetorial</i> . 3ªed. Revisada e Ampliada. São Paulo, SP: Prentice Hall, 2005;	94
2.1.2 Um olhar para o recorte ecológico e praxeológico da obra de Camargo e Boulos ..	97
2.2 STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. <i>GEOMETRIA ANALÍTICA</i> . SÃO PAULO: MCGRAW-HILL, 1987;	102
2.3 LEHMANN, C. H. <i>GEOMETRIA ANALÍTICA</i> . 2ª EDIÇÃO. TRADUÇÃO: RUY PINTO DA SILVA SIECZKOWSKI, RIO DE JANEIRO. EDITORA GLOBO,1998;	106
2.4 CALLIOLI, C. A. (ET AL.) <i>ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES</i> . SÃO PAULO: ATUAL EDITORA LTDA. 1991.	111
CAPÍTULO III	116
UMA CRÔNICA NARRADA A PARTIR DOS DISCURSOS DOS PROTAGONISTAS DE SISTEMAS DIDÁTICOS (SD) GERADOS NO CLM -UEFS	116
3.1 TRANSCRIÇÕES E ANÁLISE DAS AULAS OBSERVADAS.....	122
3.1.1 Transcrição da aula 1	122
3.1.2 Momentos de estudos agregados à trama praxeológica da aula 1	146
3.1.3 Transcrição da aula 2.....	150
3.1.4 Momentos de estudos agregados à trama praxeológica da aula 2	171

3.1.5 Das sessões de estudo observadas e os entrelaces metodológicos	176
CAPÍTULO IV	179
DESENHO DAS ANÁLISES PRÉVIAS POR MEIO DE UM MINICURSO: ARTICULAÇÕES ENTRE O GEOGEBRA E A ÁLGEBRA VETORIAL	179
4.1 PLANEJAMENTO, ORGANIZAÇÃO E EXECUÇÃO DO MINICURSO.....	182
4.2 DESCRIÇÕES E RESOLUÇÕES DE ALGUMAS TAREFAS.....	192
4.3 SÍNTESE ECOLÓGICA DAS PRÁTICAS EM UM CENÁRIO TECNOLÓGICO TEÓRICO.....	217
CAPÍTULO V	222
CONCEPÇÕES ACERCA DA CONSTRUÇÃO DE ESTRUTURAS DIDÁTICAS E MATEMÁTICAS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE VETORES À LUZ DO MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERÊNCIA - MPR	222
5.1 UM RETRATO DAS ANÁLISES PRÉVIAS	230
5.1.1 O contexto e o planejamento do curso	233
5.1.2 Descrição de algumas tarefas e Geradores de Tipo de Tarefas - GTs.....	238
5.1.3 Traços da praxeologia presente na tarefa	248
5.1.4 Análise de mais uma tarefa situada no âmbito vetorial	250
5.1.5 Retratos de algumas Praxeologias Pessoais.....	256
5.1.6 Aproximações entre os obstáculos didáticos e as Praxeologias Pessoais	260
CAPÍTULO VI	267
CONSTRUÇÃO DE UMA ANÁLISE A PRIORI A PARTIR DO T4TEL	267
6.1 UM DESENHO DA DINÂMICA DO FUNCIONAMENTO DOS SISTEMAS DIDÁTICOS – SD	269
6.2 POTENCIALIDADES DOS GERADORES DE TIPO DE TAREFAS NOS DIRECIONAMENTOS DAS ANÁLISES A PRIORI	279
6.2.1 Descrição dos Caminhos das Práticas Pessoais - CPP a partir de um recorte de tarefas avaliativas	284
6.2.2 Projeções do alcance das técnicas num cenário manipulativo e informático.....	294
6.2.3 Construção de uma análise a priori a partir das tarefas e possíveis técnicas mobilizadas nas resoluções	302
CAPÍTULO VII	328
UM ESTUDO SOBRE OS VETORES: UMA ANÁLISE EXPERIMENTAL NO CONTEXTO DO CLM-UEFS	328
7.2 ANÁLISES DAS RESOLUÇÕES DAS TAREFAS	341
7.2.1 Descrição e análise da tarefa 1.....	342
7.2.2 Potencialidades e alcance na produção de tarefas do <i>GTt1</i>	364
7.3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA TAREFA 2.....	367
7.4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA TAREFA 3.....	382
7.5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA TAREFA 4.....	391
7.6 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA TAREFA 5.....	403
7.7 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA TAREFA 6.....	411
CAPÍTULO VIII	419
VALIDAÇÃO DO AMBIENTE HÍBRIDO DE APRENDIZAGEM – AHA: UM RECORTE PONTUAL DE UMA ANÁLISE A POSTERIORI	419

8.1	ANÁLISE DO ALCANCE E ESCOPO DAS TÉCNICAS UTILIZADAS NO CURSO “UM ESTUDO SOBRE VETORES”	425
8.2	UMA AMOSTRA DE DIFERENTES ABORDAGENS E RESPOSTAS VINCULADAS A TAREFA 1.....	434
9	- CONSIDERAÇÕES FINAIS	440
9.1	O SABER DE REFERÊNCIA NO ÂMBITO HISTÓRICO INSTITUCIONAL.....	440
9.2	FUNDAMENTAÇÕES TEÓRICAS E SEUS VÍNCULOS COM AS INTENÇÕES DIDÁTICAS PRÓPRIAS DESTE ESTUDO	445
9.3	CONTRIBUIÇÕES PARA O CAMPO DA DIDÁTICA	449
	REFERÊNCIAS	452
	ANEXOS – TABELAS E GRÁFICOS REFERENCIADOS NA INTRODUÇÃO	477

1 INTRODUÇÃO

O CONTEXTO E DELINEAMENTO DA PESQUISA

Ao lembrar os caminhos trilhados no processo de formação, emergiram inquietações que constituíram uma das bases de inspiração para esse estudo. Dentre elas, destaca-se a predominância do modelo tradicional de ensino em que uma “suposta aprendizagem” ocorria guiada pela memorização de resolução de exercícios engendrados em um exaustivo processo de repetição de técnicas. Nessa lógica, o aprender se resumia ao emprego e à reprodução de técnicas e expressões eivadas de simbolismos as quais deveriam ser utilizadas em momentos pré-estabelecidos. Nesse contexto, o ato de ensinar e aprender matemática era caracterizado como um processo mecânico, desprovido de sentido, extremamente abstrato e desconectado do real. Em outras palavras, a matemática era descrita como uma disciplina de difícil entendimento para os estudantes não tipificados como bons memorizadores, reduzidos a genuínos observadores. Nuance essa, que comunga com a descrição de Dantas (1987):

O professor de Matemática (...), continua recitando a sua lição. Recita receitas para calcular coisas mal definidas, propriedades que devem ser decoradas e apresenta modelos que devem ser utilizados sem que haja justificção anterior para tal. (...). Os alunos, em geral, devem aceitar o que o mestre afirma, mesmo que não tenham compreendido a lição. (DANTAS, 1987, p.13)

Integra-se a esse cenário a figura do professor de matemática, que geralmente, assumia um status de detentor do saber associado a um caráter de superioridade que, concomitantemente, ditava as regras que regiam as aulas, enquanto que o aluno assumia o papel de subordinação imbricado à incumbência de receptor desse conhecimento, resultando em um cenário de lembranças em que traços paradigmáticos se mesclavam a uma cultura de exatidão inerente ao conhecimento matemático. Essa vertente foi vivenciada em diversas situações, hoje guardadas na memória, as quais foram gradualmente sedimentadas em aulas de matemática no limiar do Ensino Fundamental e se expandiram nos níveis subsequentes, adquirindo maior força no momento em que integrei o elenco de discentes do curso de graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana – Ba.

Parafraseando as palavras de Dias (1994) esse ponto de vista pode ser denominado como absolutização reprodutiva da matemática no ensino, que tem como um de seus efeitos a objetivação dos seus sujeitos, do aluno e do professor, metamorfoseados em auxiliares marginais do processo.

O professor, que na maioria das vezes aparece como autoritário, não passa de um mediador, um instrumento, pois sua competência restringe-se ao "saber fazer", ao "o que" e ao "como", ao conhecimento "correto" do ponto de vista técnico e à capacidade de comunicação "elegante" do ponto de vista lógico. (DIAS,1994, p.14).

O autor também ressalta que o autoritarismo advém do processo de ensino que absolutiza a matemática e objetiva o professor e o aluno. Soma-se a esse aspecto o que sublinha Douady (1994, p.35): “a memória é cada vez mais solicitada, mas há pouca possibilidade de estruturá-la. O recurso aos exercícios repetitivos é incontornável. Os alunos compreendem cada vez menos por que são obrigados a aprender Matemática.” Assim, se volta para uma aprendizagem de técnicas e algoritmos mais ou menos bem memorizados, mas que distanciam os estudantes do que poderia fazer sentido para eles.

Ademais, Gascón (2003) discute esse aspecto a partir de três modelos: teoricista, tecnicista e modernista.

Os modelos docentes teoricistas e tecnicistas compartilham uma concepção psicologista ingênua do processo didático que tem no behaviorismo sua mais clara referência. Em ambos os casos se concebe o processo de ensino como um processo mecânico e trivial totalmente controlável pelo professor: o teoricismo tende a conceber o aluno como uma “caixa vazia” que deve ser preenchida ao longo de um processo gradual que parte dos conceitos logicamente mais simples até chegar, passo a passo, aos sistemas conceituais mais complexos; o tecnicismo, por sua vez, considera o aluno como um “autômato” que melhora o domínio das técnicas mediante a simples repetição. Por todas essas razões denominaremos “clássicos” ambos modelos docentes em oposição aos “modernistas” [...] que identificam “ensinar” e “aprender Matemática” com ensinar e aprender uma atividade exploratória, livre e criativa, de problemas não triviais. (GASCÓN, 2003, p. 136)

Sob a lente teórica da Teoria Antropológica do Didático – TAD o paradigma que legitima essas ações é caracterizado por um conjunto de princípios que prescrevem, mesmo que implicitamente, o que é estudado. Parafraseando Chevallard (2013) trata-se de um ciclo devocional de uma peregrinação intelectual guiada por professores e aceita pelos alunos, os quais são reduzidos a meros espectadores do espetáculo de visita às cristalizadas obras matemáticas, as quais são apresentadas “como um monumento de valor em si mesmo, que os alunos devem admirar e desfrutar, mesmo que não saibam quase nada sobre seus motivos e razões de ser” (Chevallard, 2013, p. 164).

Em outro nível de assujeitamento institucional, o da prática docente, esse aspecto não foi abandonado e ganhou novos direcionamentos que apontaram para necessidade de reconstruções da minha prática, ou seja, consistiu em pensar acerca das possibilidades que contribuíssem para mitigar a nuance descontextualizada dos conceitos matemáticos que vivem nas instituições de ensino. A partir desse cenário, a capacitação profissional e os vínculos que foram criados no âmbito da pesquisa e da extensão, emergiram como um percurso de promoção

de possíveis respostas, a exemplo desta tese. Também pode-se citar o projeto de extensão, da Universidade Estadual de Feira de Santana, direcionado aos estudantes do Ensino Fundamental II intitulado “O visual e o concreto no ensino de geometria: uma abordagem sobre a observação, estudo e construção de objetos geométricos com a participação de alunos da rede pública de ensino de Feira de Santana”, que inaugurou algumas ações e produções que ratificaram a existência de um distanciamento entre o ensino e o entorno social dos estudantes.

O recorte dialoga com uma das noções da TAD, respaldada por uma crônica de sujeições pessoais, visto que, “uma pessoa x é o resultado de suas sujeições passadas e presentes” (CHEVALLARD, 2018, p. 37). De maneira geral, as nossas relações pessoais são resultados das nossas subordinações institucionais. De igual modo, as especificidades matemáticas estão intimamente ligadas ao contexto institucional em que operam. Pautado nesse escopo biográfico, é possível discorrer sobre uma das primeiras motivações que nos direcionaram a idealizar um estudo que também integrasse as relações pessoais e institucionais dos protagonistas dos Sistemas Didáticos - SD do Curso de Licenciatura de Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS, o qual denotaremos por CLM- UEFS mediatizados por Dispositivos Didáticos – DD, assim denotado por nós, em interação com um referido saber. Respaldada pela concepção de Bosch e Chevallard (1999),

Afastando esta visão comum, é preciso, pelo contrário, examinar o modo como a atividade matemática é condicionada pelos instrumentos materiais, visuais, sonoros e táteis que põe em jogo. Sabemos que a ausência de um conceito pode bloquear a evolução do “pensamento” matemático, tanto no nível histórico de uma comunidade quanto no nível individual do pesquisador ou aluno. Agora podemos nos perguntar em que medida essa ausência seria apenas a ausência de uma idealidade, de uma forma de “pensar” ou de “conceber” o mundo, e não de um complexo de ferramentas de trabalho, na sua maioria de natureza material, cuja disponibilidade - ou, pelo contrário, a ausência - pode alterar de forma “catastrófica” o curso da atividade. Acreditamos que, a análise didática do desenvolvimento do conhecimento matemático - apreendido no percurso histórico, na história de vida de uma pessoa, ou na vida de uma classe - *não pode considerar esta dimensão do conhecimento como uma atividade secundária*, atribuindo-lhe uma função puramente instrumental na construção de conceitos. (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p. 90, grifos nossos, tradução nossa¹)

Aditado a essa perspectiva, Chevallard (2012) também aponta para a emergência de um processo que abandone a peregrinação intelectual, relações antidemocráticas com o ato de

¹ Mettant à distance cette vision commune, il convient au contraire d'examiner la manière dont l'activité mathématique est conditionnée par les instruments matériels, visuels, sonores et tactiles qu'elle met en jeu. On sait que l'absence d'un concept peut bloquer l'évolution de la « pensée » mathématique, aussi bien au niveau historique d'une communauté qu'au niveau individuel du chercheur ou de l'élève. Or on peut se demander jusqu'à quel point cette absence serait seulement l'absence d'une idéalité, d'une façon de « penser » ou de « concevoir » le monde, et non celle d'un complexe d'outils de travail, la plupart de nature matérielle, dont la disponibilité – ou, au contraire, l'absence – pourrait modifier de façon « catastrophique » le déroulement de l'activité. Nous croyons en effet que l'analyse didactique du développement du savoir mathématique – saisi dans la durée historique, dans l'histoire de vie d'une personne, ou dans la vie d'une classe – ne peut considérer comme secondaire cette dimension de l'activité, en lui assignant une pure fonction instrumentale dans la construction des concepts.

aprender e o abuso do poder pedagógico. Para então, assumir a criação de um novo *ethos cognitivo* que objetive enfrentar questões e problemas em um currículo proposto e definido em termo de perguntas. Neste sentido, o engessamento dos currículos se apresenta como uma das restrições que obstaculizam a existência de uma cultura institucional de ensino pautada em inquéritos. Em síntese, significa dizer que, deve-se abandonar a postura retro cognitiva e assumir um comportamento pro cognitivo, ou seja, direcionar a atenção para uma “pedagogia de perguntas”, o que consiste em afirmar que devemos deixar o mundo “encantado e enganoso do turismo matemático para chegarmos ao universo de uma engenharia de precisão” (CHEVALLARD, 2011, não paginado).

Esse aspecto, abre um leque de possibilidades que nos direciona a pensar em aulas de matemática projetadas nos alicerces do Paradigma de Questionamento do Mundo (CHEVALLARD, 2009; 2010; 2012), permitindo que os professores e estudantes mergulhem num contrato diferente daquele que historicamente moldou as escolhas e práticas dominantes amplamente cristalizadas, pois na concepção de Chevallard (2018) deve-se abandonar o paradigma escolar do inventário dos saberes e substituí-lo por um paradigma escolar do questionamento do mundo: “em vez de uma leitura inventariante do universo dos saberes, então, uma leitura questionadora do Mundo (incluindo o mundo dos saberes).” (CHEVALLARD, 2018, p.44)

Desse modo, essa investigação se situa no âmbito da Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1996; 1998; 1999; 2001; 2006), ao promover um desenho praxeológico² institucional entre saberes e fenômenos didáticos, em diálogo com o quadro teórico de referência didática T4TEL³ (CHAACHOUA, 2018). Assim, a pesquisa se desenvolveu no contexto de um curso de formação inicial de professores de matemática, especificamente o Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana, o qual denota-se CLM-UEFS, no intuito de favorecer a articulação entre teoria e prática no que tange ao ensino e aprendizagem dos vetores no âmbito da Geometria Analítica no seio dos componentes curriculares Geometria Analítica e Álgebra Linear I (EXA 180) e Geometria Analítica (EXA 374).

É relevante destacar que, o objeto matemático em questão se integra, não somente, aos Cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática no Brasil, mas também aos cursos

² Uma praxeologia é o quarteto $[T; \tau; \theta; \Theta]$, em que T é o tipo de tarefas, τ é a técnica utilizada na resolução de T, θ o discurso que fundamenta a técnica τ respalda por uma teoria Θ .

³ T4TEL: T4 refere-se ao quádruplo praxeológico (tipo de tarefas, técnica, tecnologia, teoria) e TEL para aprendizado aprimorado por tecnologia.

situados no âmbito das ciências exatas em nível superior de ensino. Sua abrangência institucional é refletida em conteúdos presentes em disciplinas como Física, Cálculo, Álgebra Linear e Geometria. No entanto, na contramão dessa relevância institucional, nos deparamos com um elevado índice de retenção e conseqüente reprovação de estudantes no que se refere a componente curricular que porta em sua ementa os vetores. Esse contexto despertou também nossa atenção, assim preliminarmente emergiu uma primeira questão: que condições se requerem e que restrições dificultam ou impedem que os vetores sejam ensinados, apreendidos, estudados e utilizados no contexto das salas de aulas do CLM-UEFS? Destarte, os questionamentos constituíram um dos fios condutores da investigação, pois “(...) não devemos esquecer que quando nos perguntamos como são as coisas, surgem questões que só podem ser respondidas investigando o que acontece quando tentamos mudar as coisas em um determinado sentido (...)” (CHEVALLARD, 2010, p.213).

Em específico, essa indagação também pode ser respaldada pelas concepções de Barquero, Bosch e Gascón (2010, 240, tradução nossa⁴) ao declararem que “levar em consideração a dimensão ecológica do problema da modelização matemática significa assumir a existência de restrições que resultam de subjugações que lhes são impostas, independentemente da vontade dos sujeitos incidem sobre a vida institucional da modelização matemática.” O que significa dizer que, as restrições salientam o viés transpositivo que emergem quando as matemáticas são “manipuladas” e “transformadas” para poderem ser ensinadas sob um conjunto de condições institucionais.

Ainda pautados no processo transpositivo, os estudos de Chevallard (1991; 1994) ampliam a generalização da Teoria da Transposição Didática (TTD), partindo de uma concepção que envolvia apenas a ecologia dos saberes para uma abordagem que contempla a antropologia dos saberes, como assevera o autor: “Nesta perspectiva, a primeira teoria da transposição didática não serve apenas como ponto de partida, mas como ponto de apoio e orientação, pois de acordo com Barquero, Bosch e Gascón (2010),

A transposição pode facilitar a entrada no sistema de ensino de certos objetos (os conceitos, modelos e sistemas conceituais que tenham uma existência clara na instituição sabia) e dificultar a entrada de outros (em particular dos objetos “extramatemáticos” que não tenham uma existência clara no saber sábio). BARQUERO, BOSCH e GASCÓN, 2010, p. 240, tradução nossa⁵)

⁴ Tomar em consideración la dimensión ecológica del problema de la modelización matemática significa asumir la existencia de restricciones que, con independencia de la voluntad de los sujetos, inciden sobre la vida institucional de la modelización matemática.

⁵ La transposición puede facilitar la entrada en el sistema de enseñanza de ciertos objetos (los conceptos, modelos y sistemas conceptuales que tengan una existencia clara en la institución sabia) y dificultar la entrada de otros (em particular de los objetos “extramatemáticos” que no tengan una existencia clara em el saber sábio).

Na contemporaneidade, os pressupostos da transposição didática encontram-se inseridos no estudo da ecologia dos saberes – que se interessa pelas condições e restrições sob as quais um determinado saber “vive” em determinada instituição. A TTD é, assim, parte integrante da Teoria Antropológica do Didático -TAD. Diante dessas ponderações, infere-se que, possivelmente, existem lacunas que precisam ser analisadas através de um arcabouço teórico que contemple a estrutura organizacional do saber em pauta. No caso do estudo em questão, a estrutura organizacional concentra-se no seio da TAD, em como as funções (*nicho*)⁶ dos vetores são tratadas no desenvolvimento de aulas direcionadas para estudantes de um Curso de Licenciatura em Matemática - UEFS.

As razões pelas quais foi eleito o objeto matemático vetor se respaldam em suas características conceituais singulares, as quais extrapolam uma abordagem unicamente numérica, sejam elas: módulo, direção e sentido. Vertente que se atrela a concepção de Dorier (2000) ao distingui-lo em três "habitats ecológicos"⁷: o vetor geométrico, o vetor algébrico e o vetor físico. Nessa perspectiva, esse objeto reside em três ambientes diferentes, com especificidades próprias em cada um deles. Ou seja, “(...) um saber S sobre o qual um certo número de instituições reconhece que ele vive dentro delas” (CHEVALLARD, 1994, p. 22, tradução nossa⁸). Concepção essa, que se permite pensar acerca da multiplicidade conceitual deste objeto matemático, o qual pode constituir um obstáculo à aprendizagem, pois, de acordo com Brousseau (1976), todas as concepções podem constituir obstáculos às aquisições futuras.

Essas peculiaridades se configuram como um conceito considerado problemático, de acordo com pesquisas realizadas em torno da noção vetorial, notadamente as pesquisas de Pavlopoulou (1994), Dorier (1995), Lê Thi (1997), Bittar (1998), Pressiat (1999), Côté (2002), Cissé Ba e Dorier (2006), Hayfa (2006) dentre outras. Todavia é relevante destacar que se opta estudar os vetores nos limites e contextos das componentes curriculares EXA – 180 Geometria Analítica e Álgebra Linear I e EXA 374 – Geometria Analítica, como mais um dos pilares da nossa pesquisa. Essa escolha se justifica por se tratar do primeiro contato, em nível superior de ensino, que os professores em formação inicial têm com os vetores, além do trânsito desses em outros conteúdos inerentes ao próprio componente curricular, como os produtos (escalar, vetorial, misto), retas e planos. Essa empregabilidade, também se reflete em outras disciplinas como dito anteriormente.

⁶ Termo vinculado à ecologia dos saberes que indica as funções que o objeto de saber exerce em interação com outros objetos assim como situam o objeto em termos de localização institucional. (CHEVALLARD, 1996).

⁷ Idem nota 6.

⁸ “(...) Soit un savoir S dont un certain nombre d’institutions reconnaissent qu’il vit en leur sein”.

Outro ponto que será situado no transcorrer desta investigação encontra-se atrelado à relevância institucional ou razão de ser institucional desse ente matemático e sua associação a alguns aspectos controversos, pois, mesmo diante de um número acentuado de pesquisas que têm como tema o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, e conseqüentemente dos vetores, não existem repercussões, em mesma dimensão, quanto às intervenções em sala de aula. Fato destacado pelos estudos de Sena e Dorneles (2013) e Santos (2016), que retratam mapeamentos de pesquisas cujo enfoque é a Geometria Analítica em suas diferentes nuances e configurações em salas de aula.

Esse cenário se contrapõe e pouco ressoa no ensino da componente mencionada, aspecto ratificado pelos trabalhos de Di Pinto (2000), Passos *et al* (2007) e Silva *et al* (2016), que evidenciaram a existência de lacunas apontadas por índices de reprovação. Nas universidades Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP e Universidade de São Paulo - USP, por exemplo, o nível de reprovação em Geometria Analítica chega a 35%. Richit (2005) pontuou, neste setor, que em muitas Instituições do Ensino Superior – IES esta disciplina é caracterizada como um fator problema. Outro exemplo citado pelo autor é a UNESP -RC, que apresentou média de reprovação na matéria em torno de 39% em 2004.

Com a finalidade de reforçar ou refutar esta hipótese, foi solicitado ao setor de Divisão de Assuntos Acadêmicos (DAA) da Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS, um levantamento do número de aprovações e reprovações por disciplina. Toma-se como marco o ano de 2004, momento em que se inicia a primeira transição, abordada por nós, na reformulação curricular. Os dados encontram-se organizados em três tabelas e seus respectivos gráficos (anexo).

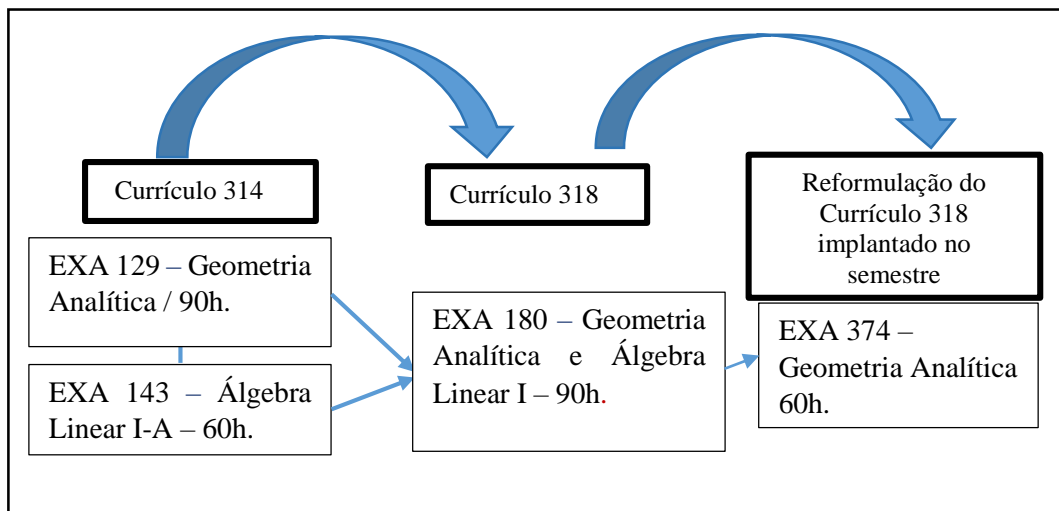
Até o ano de 2018 a estrutura curricular do referido curso teve como componente curricular Geometria Analítica e Álgebra Linear I (EXA 180) advinda da nova organização curricular herdando alguns temas que compunham as ementas de Geometria Analítica (EXA 129) e Álgebra Linear I-A (EXA 143), porém com redução de carga horária. Assim, EXA 180 começou a compor a grade curricular do curso a partir do primeiro semestre de 2004. Diante dessa constatação, direciona-se a atenção para os índices de aprovação, reprovação e trancamento detectados no período entre 2004 e 2018, conforme discrimina-se no gráfico 3 em anexo.

Ao estabelecer um comparativo entre o número amostral de aprovações e reprovações nas componentes EXA 129, EXA 143 (currículo 314) e EXA 180, substituta direta no currículo 318, compreende-se que, agregada à redução da carga horária designada ao componente Geometria Analítica e Álgebra Linear I, surgem fatores que limitam o desenvolvimento dos

momentos de estudo (CHEVALLARD, BOSCH e GASCÓN, 2001) inerentes às aulas, os quais sintetizam as organizações de estudo, pois se os docentes e discentes têm reduzido tempo para trabalhar com determinados assuntos que compõem a ementa, é inevitável a emergência de diferentes condições e restrições que se vinculam às delimitações e fragmentações as quais, possivelmente, não serão precisas e coerentes no que tange à natureza dos objetos matemáticos que integram o *corpus* de EXA 180 e hodiernamente EXA 374.

Em síntese, as reformulações, no âmbito institucional do CLM – UEFS, continuaram a acontecer, e propiciaram um trânsito entre o currículo 314 para o 318, regulamentado pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática (CNE/CES 1.302/2001). Ao focar na estrutura organizacional desse curso, coadunada pela reestruturação curricular, constata-se que desde o primeiro semestre de 2004 as disciplinas EXA 129 – Geometria Analítica, com 90 horas de carga horária, e EXA 143 – Álgebra Linear I-A, com 60 horas, foram extintas e deram lugar a uma nova componente curricular, denominada por EXA 180 – Geometria Analítica e Álgebra Linear I, com carga horária de 90 horas e atualmente representada por EXA 374 – Geometria Analítica com 60h, contemplando o corpus de conteúdos de Geometria Analítica. Como esquematicamente exposto na figura 1:

Figura 1 – Esboço do processo de transição entre os currículos 314 e 318



Fonte: Esquema realizado pela autora a partir de dados da UEFS, 2018

Neste sentido é possível identificar que houve reduções no tempo cronológico – carga horária das componentes curriculares – o que implica suprimir os tempos didático e/ou de estudos, já que as atividades matemáticas sempre pressupõem ações de estudos. Vertente esta, que desencadeia novos gerenciamentos nos momentos de trabalho coletivo e individual entre

docentes – discentes. O que em termos didáticos provocam modificações nas funções didáticas denominadas por Chevallard (1985; 2009) como cronogênese, a qual se encarrega da “gênese do tempo didático, ou seja, o tempo da construção praxeológica.” (Chevallard, 2009, p.79) cuja missão é regular os tempos didáticos para os diferentes componentes do sistema didático (SD), refletindo de forma direta ou indireta na gestão desse conhecimento (mesogênese) caracterizada como a gênese do ambiente didático, ou seja, do sistema de dispositivos utilizados no processo de construção praxeológica, a qual constitui e repercute no processo de construção do meio e intervenções dos sujeitos do processo (topogênese) que, por sua vez, encarrega-se da posição dos alunos e do professor no tocante à Organização Matemática – OM construída ou em vias de construção, ou seja, a gênese de equipamentos praxeológicos.

Dessa forma, a argumentação desse trabalho se apoia em todos os elementos descritos até o momento e tacitamente em alguns dos seus desdobramentos, os quais foram nutridos por inquietações advindas de uma trajetória formativa e profissional imersa numa problemática didática. A partir desse contexto, caracterizado por faces antagônicas, que evidenciam divergências entre a relevância institucional dos vetores, em Cursos de Licenciatura em Matemática, especificamente CLM-UEFS, e os obstáculos de natureza epistemológica⁹ e/ou didática¹⁰ que advém da conceituação vetorial, a implementação desse encadeamento de ideias levou a pensar em uma análise que também contemplasse o cenário praxeológico de funcionamento dos Sistemas Didáticos – SD, já que, tanto os Sistemas Didáticos – SD como as praxeologias são tidos por Chevallard (2011; 2018) como o coração da TAD.

Neste sentido, o interesse acerca das concepções vetoriais está pautado em como sua conceituação é construída ao longo do tempo por meio da mediação propostas aos estudantes. Assim, retomamos a essência da indagação apresentada a priori, certamente exposta ainda de forma pouco lapidada, para caracterizar a questão que nos acompanhará e direcionará esta investigação: *como mobilizar recombinações praxeológicas¹¹, pautadas por condições e restrições, que promovam mediações entre as relações pessoais e institucionais no âmbito dos SD subjacentes ao saber vetorial no CLM-UEFS?*

Agrega-se a esse questionamento outras inferências e indagações derivadas desta, em maior grau de especificidade, que também nortearão e comporão a melodia do percurso investigativo ao se integrarem aos arranjos que conduzirão o estudo. Dentre elas pode-se citar:

⁹ Consultar Bachelard (1996).

¹⁰ Ver Brousseau (1976).

¹¹ Em que modificaremos a prática Π e manteremos o logos Λ caracterizado por uma praxeologia transposta (Π^*) $\oplus \Lambda$ (Chevallard, 2018).

que tipo de tarefas T e técnicas τ integram as praxeologias institucionais onde se faz intervir o conceito de vetorial? Quais elementos tecnológicos θ e teóricos Θ descrevem e justificam essas práticas? Em outras palavras, quais são os ingredientes que compõem as técnicas τ quando os objetos de estudos são os vetores? Que praxeologias podem ser reformuladas, construídas, implementadas e mediadas por um Ambiente Híbrido de Aprendizagem - AHA? Que Caminhos de Práticas Pessoais – CPP podem ser desenvolvidos pelos sujeitos do CLM- UEFS no trabalho com o AHA? Quais são os alcances das técnicas τ criadas por meio de amalgamações de uma estrutura didática existente e executada no AHA?

Atrelam-se aos questionamentos elencados anteriormente a hipótese de que as práxis dos sujeitos (docentes / discentes) serão modificadas a partir do Ambiente Híbrido de Aprendizagem – AHA, configurado por nós, como um espaço constituído por uma variedade de recursos didáticos (*mídias*¹²) ao permitir um trânsito entre distintas *mídias* que se vinculam às modificações no *milieu* propiciando um encadeamento de alterações nas funções didáticas inerentes ao Sistema Didático – SD no âmbito vetorial do CLM-UEFS, pois concebe-se que ao disponibilizar distintas mídias aos estudantes (Goulart e Farias, 2018, p.308), diferentes das convencionais, é possível integrar uma abordagem flexível (Dreyfus, 1991) em detrimento à rigidez matemática (Silva et al, 1999). Nesses termos, advém a intenção de identificar, implementar e formalizar uma espécie de complementação das ferramentas de ensino no contexto vetorial, amalgamando novas às já existentes.

Frente a essa perspectiva, tem-se por primeiro objetivo, de natureza ecológica, identificar em que pressupostos documentais e práticos se apoia o Modelo Praxeológico Dominante – MPD, ou seja, o que existe e o que deveria ou poderia existir no contexto do MPD? Para situar, segundo a concepção de Gascón (1994), o MPD destaca as existências de certas práticas e impede o aparecimento de outras. Em outras palavras, essa função foi assumida pelo AHA que se apresentou como um “sistema de referência para analisar e interpretar os modelos dominantes na instituição.” (GASCÓN, 2018, p. 59), ou melhor, se revelou como uma ferramenta para questionar o MPD e mapear um campo de possibilidades no intuito de romper com as barreiras das escolhas dominantes amplamente cristalizadas. Assim, no nosso caso, a observação e análise do cenário de utilização de distintas *mídias* constituem as sessões de ensino, possibilitou configurar um desenho que poderia existir no âmbito dos SD do CLM-UEFS.

¹² Ver Chevallard (2007).

A partir dessas concepções, distintos “entretons” emergem e revelam traços da robustez do estudo. Nestes termos, fomos conduzidos a realizar análises que descortinaram as diferenças e os distanciamentos entre as relações pessoais e institucionais que se agregam às praxeologias dos discentes do CLM-UEFS em correlações com os vetores em sua nuance geométrica.

Em igual nível de relevância evidencia-se também na dinâmica dos Sistemas Didáticos - o que X (grupos de alunos) e Y (equipe de professores ou diretores de estudo) fazem para evoluir - as condições e as restrições que possibilitam e dificultam essa dinâmica, também são dimensões significativas que compõe o cerne do questionamento apresentado, correlacionando-se à economia e à ecologia de Sistemas Didáticos – SD, o que estabelece conexões com a concepção de Chevallard (2010, p. 213) ao sinalizar que a atividade que deve ser realizada para responder às questões relativas à dimensão econômico-institucional de um problema didático está intimamente ligado à análise clínica da didática, e engloba o que se costuma chamar de Engenharia Didática.

A esse respeito idealiza-se propor situações alicerçadas no AHA por meio da amalgamação de diversos Dispositivos Didáticos que convergem para alterações nos polos de ações (professor – aluno) ao investir nas movimentações das funções didáticas (mesogênese, topogênese e cronogênese) em que o professor “não é mais o profeta das verdades que devem ser transmitidas, mas um espírito livre que convoca outros espíritos livres a desenvolver e assumir suas responsabilidades” (REVUZ, 2000, p17, tradução nossa¹³). Ao assumir a posição de coordenadora de estudos, o olhar se direciona para as resoluções de tarefas e problemas propostos à turma como o intuito de conduzir os discentes a trilharem percursos que possibilitem construções, individuais ou coletivas, que promovam alcançar certos conhecimentos vetoriais. Pois de acordo com Llano e Otero (2017),

(...) a cronogênese, função que governa os tempos didáticos para os distintos componentes do Sistema Didático - SD. Enquanto que, a topogênese rege a ocupação de espaço de grupos de estudantes X e do professor Y. Sem esquecer que, modificações nas funções referenciadas anteriormente, repercute em mudanças na mesogênese, pois alterações no tempo e no papel dos autores do SD afetam o meio. (LLANOS; OTERO, 2017, p. 221, grifos nossos)

Frente ao que foi abordado, revela-se mais um dos objetivos desse trabalho, o qual consiste em propor condições ao meio (*milieu*) no intuito de promover articulações entre conceitos e propriedades vetoriais com técnicas de diferentes naturezas (manipulativas, informática e tradicionais) que desencadeiam modificações nas relações pessoais dos sujeitos em interação com os vetores. Outro propósito, caracteriza-se no afastamento do Sistema

¹³ he/she is no longer the prophet of truths that have to be transmitted, but a free spirit calling forth other free spirits to develop and assume their responsibilities.

Didático Principal – SDP (professor – alunos – saber) e na aproximação dos Sistemas Didáticos Auxiliares – SDA e dos Sistemas Didáticos Induzidos – SDI de acordo com a concepção de Chevallard (2011¹⁴). A partir deste viés, tornou-se possível direcionar atenção para noção de Praxeologia Pessoal (CROSET, CHAACHOUA, 2016) fundamentada pela noção do equipamento praxeológico (CHEVALLARD, 2009) na formalização de recombinações praxeológicas.

Em síntese, significa coordenar variados Dispositivos Didáticos em prol do processo de construção do conhecimento em salas de aula. Ou seja, o núcleo desse estudo se apoia na elaboração e coordenação de um AHA (sob uma perspectiva de desenvolvimento), intermediado pela identificação de condições e restrições (perspectiva de pesquisa) e metodologicamente organizado por fases da Engenharia Didática, que proporciona interligar ação e investigação (ARTIGUE, 1996) no intuito de contribuir no processo de ensino e aprendizagem dos vetores.

Neste sentido, a intenção é de abrir diálogos com esses distintos dispositivos postos em funcionamento no processo de ensino e aprendizagem vetorial, viabilizando não somente, um novo olhar sobre as práticas que sobrevivem nas aulas de Geometria Analítica, mas também a inserção, no seu “campo de jurisdição”, de abordagens diferenciadas. Nestes termos, emergiu o propósito de identificar, implementar e formalizar uma espécie de complementação das ferramentas de ensino no contexto vetorial. Aspecto esse que dialoga com a recomendação de Bosch e Gascón (2005) acerca do emprego de sistemas relativos que se adequem a cada problema ou situação.

Em sintonia à abordagem descrita, também foram eleitas as tarefas como elementos de observação e análise, visto que, Bessot e Chaachoua (2016, p. 3) defendem “que um dos objetos de observação do pesquisador são tarefas e que um tipo de tarefa é definido por um verbo de ação e um complemento fixo”, sem contradizer a perspectiva antropológica que não há práxis sem logoi. Pois na concepção de Chevallard (1998, p.91) “toda atividade humana pode ser modelada em termos de praxeologias.” Guiadas por essas concepções emergiram os Geradores de Tipo de Tarefas - GT, determinados por um tipo de tarefa e por um sistema de variáveis. Para os autores ora referidos, esse novo objeto permite estruturar um conjunto de tipo de tarefas

¹⁴ Os Sistemas Didáticos Periféricos são compostos pelos Sistema Didáticos Auxiliares – SDA, Sistema Didático Induzidos – SDI e os Sistemas Didáticos Furtivos – SDF que gravitam em torno dos Sistemas Didáticos Principais – SDP.

para fins de pesquisa. Nessa perspectiva, um GT tem a seguinte configuração: GT = [Verbo de Ação; Complemento Fixo; Sistema de Variáveis] (CHAACHOUA; BESSOT, 2016).

Os Geradores de Tipo de Tarefas em conjunto com o Sistema de Variáveis será alimentado pelas distintas combinações dos Dispositivos Didáticos provenientes do AHA. Assim, empreende-se a interpretação metafórica de que os geradores atuam como uma “máquina” que produz tarefas, no qual o Ambiente Híbrido de Aprendizagem - AHA fornecerá “combustível” para o funcionamento operacional em interação com as mídias, nos moldes da Dialética Media Milieu (CHEVALLARD, 2007), regulados pelos valores das variáveis inerentes a natureza de cada Dispositivo Didático.

A partir do que foi descrito preliminarmente, apresenta-se a estrutura organizacional da tese. A introdução tem por objetivo situar o leitor acerca dos elementos que dão sustentação teórica e metodológica, pautados na emergência da problemática de pesquisa em conexão com alguns traços que dela advém, além da exposição dos aspectos motivacionais que acompanham o percurso investigativo.

O primeiro capítulo traz, em seu escopo, uma versão embrionária e sintética do Modelo Epistemológico que vai servir de referência para análise dos aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem no âmbito vetorial, o que em termos de uma modelação epistemológica revela alguns observáveis empíricos necessários para descrever o MPD. E assim, por meio dessa trajetória investigativa, o MPR será enriquecido e assumirá sua verdadeira forma enquanto Modelo Praxeológico de Referência Alternativo – MPRA, advindo inicialmente dessa modelização epistemológica de referência presente no Capítulo I.

Recorremos também, ao viés transpositivo de um Saber Vetorial a Ensinar por meio de uma análise dos livros textos recomendados nas ementas das componentes curriculares EXA 180 e EXA374, os quais compõem o Capítulo II e os traços do Saber Vetorial Ensinado extraído dos diálogos protagonizados pelos sujeitos dos SD imersos num primeiro aporte do Modelo Praxeológico Dominante – MPD, extraído da instituição CLM-UEFS, presente no Capítulo III. Aspectos estes ratificados por García et al (2019),

O ponto de partida é um conteúdo ou tópico específico a ser ensinado e, geralmente, um problema didático relacionado a ele. A primeira fase, análise preliminar, inclui a análise epistemológica do conteúdo matemático, da sua necessidade de inserção numa determinada instituição escolar e das condições e restrições que podem afetar o seu estudo nessa instituição. Esta fase é crucial, pois envolve a construção de um modelo epistemológico de referência (MER) do conhecimento em questão, bem como a identificação de hipotéticos fenômenos didáticos (GARCÍA et al, 2019, p.81).

Esses aspectos foram observados e analisados nos três primeiros capítulos os quais serviram de aporte para nutrir e complementar a emergência do MPRA, que surge no Capítulo

IV, em meio ao desenho das análises prévias a partir de um minicurso ministrado em parceria com o docente responsável pela disciplina no semestre 2018.1, em que foram abordadas articulações entre o GeoGebra e a Álgebra Vetorial, o qual foi fortalecido no Capítulo V a partir das construções de estruturas didáticas e matemáticas direcionadas para o ensino e aprendizagem do vetores à luz do T4TEL. Momento este, em que a Engenharia Didática - ED aparece, por se tratar de uma metodologia de pesquisa caracterizada como um esquema experimental com base em realizações didáticas em classe, ou seja, promovendo o encadeamento entre concepção, realização, observação e análise das sequências de ensino.

A partir desta perspectiva o MPRA passa a fornecer novas lentes de observação e análises com as quais se torna possível questionar o MPD e mapear um campo de possibilidades no intuito de romper com as barreiras das escolhas dominantes amplamente cristalizadas, ou seja, retoma-se com MPR para promover uma reanálise e olhar com maior propriedade o MPD.

Em sentido complementar, na Teoria Antropológica do Didático (TAD), o desenho de tarefas integra-se dentro da sua metodologia experimental formulada em termos de Engenharia Didática. (GARCIA, BARQUERO, FLORENSA E BOSCH, 2019, p.75). No qual não se pode perder de vista a aproximação entre as concepções da Didática da Matemática com a Epistemologia Experimental (BROUSSEAU, 2002), ou seja,

o objetivo constitui na exploração de outras formas de organizar a atividade matemática por meio de processos de estudo nas instituições escolares, de maneira que, potencialmente, possam ser modificados, os efeitos manifestados na forma de fenômenos didáticos identificados pelo pesquisador (GARCÍA et al, 2019, p.79).

A composição das análises, a priori, é o foco do Capítulo VI, alicerçadas nas hipóteses que serão testadas no desenvolvimento da ED como sublinhado por Artigue (2014),

No desenho e análise a priori, hipóteses de pesquisa são engajadas no processo. O design requer uma série de escolhas, do global ao local. Eles determinam variáveis didáticas, que condicionam as interações entre alunos e conhecimentos, entre alunos e entre alunos e professores, daí as oportunidades que os alunos têm de aprender. (ARTIGUE, 2014, p. 160)

No Capítulo VII, intitulado “Um Estudo sobre os Vetores: uma análise experimental no contexto de CLM-UEFS” manifesta a terceira fase, de análise *in vivo* da experimentação em condições dos SD, inclui a implementação em sala de aula do processo de estudo desenhado, a sua observação e a recolha de dados. Tendo em vista que, na fase experimental, as características tecidas acerca do AHA se tornaram mais latentes e adquiriram uma maior consistência ao integrar-se a Dialética Mídia Meio, descrita por Chevallard (2007) e aos

Dispositivos Didáticos que delinearão às técnicas τ provenientes da resolução de certos tipo de tarefas T.

As experimentações foram apresentadas e analisadas a partir de três níveis: global, local e pontual. O primeiro nível apresentou uma configuração mais geral em termos das praxeologias dos grupos dos estudantes. No nível local ocorreu um afunilamento e a atenção se voltou para as praxeologias pessoais de alguns estudantes. E no nível pontual buscou - se um maior detalhamento na resolução de uma tarefa específica, a saber a quarta tarefa, em que gerou oportunidades para teorizar acerca dos Caminhos de Práticas Pessoais – CPP.

Em paralelo a esse aspecto, no quinto e sexto capítulos foram projetadas as produções de discentes do CLM-UEFS, participantes de dois minicursos ministrados pela autora. Nessa etapa foi possível a apropriação dos elementos do quadro teórico T4TEL¹⁵ inscrito no domínio da TAD, por meio de uma nova formalização ao modelo praxeológico a partir de duas extensões: as praxeologias pessoais (CROSET; CHAACHOUA, 2016) fundamentada pela noção do equipamento praxeológico (CHEVALLARD, 2009) e a noção de variável (CHAACHOUA; BESSOT, 2016).

Desse modo, surgiram recombinações praxeológicas oriundas das resoluções dos tipo de tarefas vetoriais $T_{\vec{v}}$ que demandaram diferenciadas técnicas τ integradas aos distintos Dispositivos Didáticos (Materiais Manipuláveis - MM, Papel Lápis - PL e o GeoGebra - GG) próprios do AHA. Nesta perspectiva, assumindo a posição de professora e pesquisadora, eclodiu a intenção em apontar caminhos que possibilitem aos estudantes uma construção de conhecimentos vetoriais, pois segundo Chevallard (1996, p. 141) “o funcionamento e as produções dos SD dependem do meio¹⁶, e em particular do sistema de ensino de que participa”, etapa que serve de ponte ou elo de ligação entre a fase anterior e a próxima.

No Capítulo VIII dedica-se atenção para um recorte da quarta fase da ED ou análise a posteriori em associação a validação do AHA, com base nas evidências empíricas recolhidas na fase anterior, a qual visa contrastar, validar e desenvolver as hipóteses que integraram o desenho da tese e, em particular, as hipóteses formuladas sobre possíveis fenômenos didáticos. Nessa etapa aponta-se caminhos que poderão ser trilhados em estudos futuros a partir da formulação de novos problemas e / ou novos fenômenos didáticos.

¹⁵ T4TEL: T4 refere-se ao quarteto praxeológico (Tipos de tarefas, Técnica, Tecnologia, Teoria) e TEL Technology Enhanced Learning.

¹⁶ Na TAD, as mídias correspondem a todo sistema que propõe certas condições ao meio, a propor certa realidade de mensagens.

E por fim e não menos importante são apresentadas as considerações finais, não como uma finalização em si, mas o início de uma nova etapa no âmbito da pesquisa, pois não se acredita que o encerramento dessa fase signifique apenas o fechamos de uma porta no processo investigativo, mas sim que se abre um leque de possibilidades para que futuros estudos se estabeleçam.

CAPÍTULO I

ASPECTOS DA GÊNESE ANTROPOLÓGICA DOS VETORES NA PERSPECTIVA DA TEORIA DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA-TTD

Descrever as distintas conjunturas históricas de um objeto de estudo não se integra, em sua plenitude, às funções dos pesquisadores em didática. No entanto, sua relevância não é omitida em seus estudos, visto que as buscas por registros originais se instauram como premissas basilares provenientes de leituras e interpretações historiográficas. Assim, análises sob diferentes olhares permitem descrever traços da trajetória histórica, a qual não ocorre de forma isolada, pois leva-se em consideração as delimitações contextuais em conexão com o cenário político, econômico e social de uma determinada época.

Nesse sentido, emergem exigências que requerem dos pesquisadores perspicácia ao lidar com os perigos e armadilhas no que tange à busca por fundamentações que se entrelaçam aos caminhos percorridos pelos precursores e estudiosos de determinado saber. Como descrito por Lima (2012), significa

construir novos olhares sobre velhos objetos, os quais são (re)colocados, como se fossem peças, numa espécie de mosaico que permite várias possibilidades de encaixes, inserindo outros até então ignorados pela historiografia vigente dos grandes paradigmas. (LIMA, 2012, p.11)

A partir desse ponto de vista, é relevante destacar que este trabalho não tem a pretensão de seguir os passos dos estudiosos em história da matemática, visto que o didata tem um enfoque diferenciado do historiador. Contudo, suas análises sob fatos constituintes da história são elementos de suma importância e se revelam como pilares que fundamentam a trajetória institucional do ente matemático em estudo nessa tese. Assim, faz-se pertinente buscar fatos históricos e epistemológicos que contribuam para o delineamento do processo ecológico dos vetores no intuito de fazer emergir a razão de ser (BOSCH; GASCÓN, 2010) institucional imersa nos cenários de cursos de formação inicial de professores de matemática. Aditado a isso é relevante destacar que,

O processo de transposição didática destaca a *relatividade do conhecimento institucional* e situa os problemas didáticos a nível institucional, além de características individuais dos sujeitos das instituições. Sua principal consequência é que a *unidade mínima de análise* de qualquer problema didático não pode ser limitada à consideração de como os alunos aprendem (e os professores ensinam matemática). Deve incluir todas as etapas do processo de transposição didática, incluindo dados provenientes de todas e de cada uma das instituições envolvidas como uma base empírica. Neste sentido, podemos dizer que os fenômenos de transposição didática

estão no cerne de qualquer problema didático. (BOSCH, CHEVALLARD e GASCÓN, 2005, p.4, grifos dos autores, tradução nossa¹⁷)

Frente a essa perspectiva, não se almeja aqui traçar de forma absoluta, a história dos vetores, mas tecer algumas considerações em torno do assunto guiadas por nuances e particularidades desse elemento, a partir de uma análise ecológica transpositiva. Nesse sentido, do ponto de vista teórico da análise, situa-se a apreciação no âmbito da ecologia dos saberes (CHEVALLARD, 1994), o que significa encontrar os diferentes lugares ocupados por esse objeto de estudo e contrastar mudanças nos *habitat e nicho*, conforme definido por Chevallard (1994):

Os ecologistas distinguem, em termos de um organismo, seu habitat e seu nicho. Para colocá-lo em uma linguagem voluntariamente antropomórfica, o habitat é, em certo sentido, o endereço, o local de residência da organização. O nicho são as funções que a organização cumpre: é de alguma forma a profissão que exerce lá. (CHEVALLARD, 1994, p. 142, tradução nossa¹⁸)

O aspecto salientado direciona o olhar do pesquisador em didática numa escala díspare dos historiadores, pois a esta pesquisa busca sustentação em arcabouços teóricos como a Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1999), estruturada a partir do delineamento das Organizações Matemáticas (OM) e Organizações Didáticas (OD) que se revelam no âmbito institucional de ensino. No entanto, como dito anteriormente, os estudiosos em didática valorizam e não negligenciam a força do caráter histórico-epistemológico, pautados na formação e estruturação do conhecimento científico, o que, sob o nosso ângulo de visão, embasa-se na fundamentação praxeológica do objeto de estudo.

De igual modo, essa investigação se apoia nas Organizações Matemáticas Vetoriais (OMV) em nível superior de ensino, como abordado neste capítulo, encarregando dos argumentos didático-matemáticos, com a finalidade de fazer emergir nuances do universo de constituição da geometria, em particular dos vetores. Por meio dessa concepção, emerge mais um eixo norteador que se configura em termos de fundamentações das possíveis recombinações praxeológicas (CHEVALLARD, 2018), as quais se atrelam a vertente histórica-epistemológica

¹⁷ The process of didactic transposition highlights the *institutional relativity of knowledge* and situates didactic problems at an institutional level, beyond individual characteristics of the institutions' subjects. Its main consequence is that the *minimal unity of analysis* of any didactic problem cannot be limited to the consideration of how students learn (and teachers teach) mathematics. It must include all the steps of the process of didactic transposition, including data coming from each and every one of the involved institutions as an empirical basis. In this sense we can say that phenomena of didactic transposition are at the very core of any didactic problem.

¹⁸ “Les écologistes distinguent, s’agissant d’un organisme, son habitat et sa niche. Pour le dire en un langage volontairement anthropomorphe, l’habitat, c’est en quelque sorte l’adresse, le lieu de résidence de l’organisme. La niche, ce sont les fonctions que l’organisme y remplit: c’est en quelque façon la profession qu’il y exerce”.

para o rastreamento das distintas “moradas” dos vetores, além de identificar suas funções exercidas. Contudo, antes de gerar um maior aprofundamento, retrocedemos às noções que movem a Teoria da Transposição Didática e seu papel na Teoria Antropológica do Didático.

1.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS NO ÂMBITO DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA: DA TEORIA DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA - TTD À TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO – TAD

A noção de vetores possui várias aplicações em diversas áreas do conhecimento, dentre elas pontua-se conteúdos vinculados a componentes curriculares como Física, Cálculo, Álgebra Linear e Geometria, conferindo-lhes destacada relevância institucional. Tomamos como inspiração essa amplitude e indagamos como os vetores, enquanto saber de referência, foram idealizados e propagados por estudiosos e pesquisadores ao longo dos anos. Segundo Almouloud (2011, p. 194), “o saber sábio é construído e faz parte do patrimônio cultural do pesquisador.”

Nesse sentido, ao situar o referido conteúdo no âmbito da Didática da Matemática, considera-se que “tanto o estudo do conhecimento como o ensino se fazem a partir de uma transposição de saberes” (CONNE, 1996, p. 242), o que revela a necessidade de “estudar toda a cadeia como um fenômeno relacionado à disseminação didática do conhecimento” (ANTIBI; BROUSSEAU, 2002, p. 47). A expressão “transposição didática” foi introduzida por Verret (1975), em seu trabalho *O tempo dos estudos*,¹⁹ difundida e teorizada por Chevallard (1991; 1992; 1994) através da Teoria da Transposição Didática (TTD), conforme evidenciou, ao declarar que: “eu introduzi o tema da transposição didática na comunidade francesa da didática matemática no início dos anos 80.” (CHEVALLARD, 1994, p. 1, tradução nossa).²⁰

Assim, a estruturação de um percurso transformativo pelo qual transita o saber o que, para Conne (1996, p. 240), “(...) é acompanhada por uma alteração do significado dos saberes (...) é o princípio que liga os saberes e as suas significações para além desse relativismo”. Assim, é possível sintetizar a partir das palavras de Bosch, Chevallard e Gascón (2005),

Nós, portanto, precisamos ir ao lugar onde esses fenômenos iniciam, ou seja, as instituições de produção do conhecimento matemático. Esta é a primeira contribuição da *teoria da transposição didática* (CHEVALLARD, 1985). Se quisermos entender (e, portanto, modelar de forma adequada) que tipo de atividade matemática é feita na escola, é preciso conhecer os outros tipos de atividades matemáticas que motivam e justificam o ensino e a aprendizagem da primeira. E também precisamos saber a forma como estas outras atividades são interpretadas em diferentes instituições. Assim, os

¹⁹ Le temps des études.

²⁰ “J’ai introduit le thème de la transposition didactique dans la communauté française des didacticiens des mathématiques au tout début des années 1980”.

fenômenos didáticos não podem ser separados de fenômenos relacionados com a *produção* e o *uso* da matemática. Atividades matemáticas escolar são, então, integradas a um domínio mais amplo do estudo das *práticas matemáticas institucionalizadas*. (BOSCH, CHEVALLARD e GASCÓN, 2005, p.3, tradução nossa²¹)

Dito isso, é possível perceber que o domínio da didática vai além das instituições de ensino e, a partir desse direcionamento, é viável notar que os pilares teóricos da transposição didática se assentam no estudo das transformações que um determinado saber sofre para que possa ser ensinado. Nestes termos, Chevallard (1994) pontua a existência de lacunas entre a matemática ensinada e a matemática apreendida:

O conceito de transposição didática, somente por isso, refere-se à passagem do saber acadêmico para o saber ensinado, portanto, a eventual distância obrigatória que os separa, testemunha a necessidade de questionamento, enquanto que ao mesmo tempo é a primeira ferramenta. Para o didático, é uma ferramenta que lhe permite dar um passo atrás, questionar as evidências, erodir ideias simples, retirar-se da familiaridade enganosa de seu objeto de estudo, em suma, exercer sua vigilância epistemológica (CHEVALLARD, 1982, p. 3, grifos dos autores, tradução nossa.²²)

Questionar o distanciamento entre o saber científico e o saber ensinado é o mesmo que questionar as *deformações* que este saber sofreu ao longo de um percurso transpositivo, o que evidencia a necessidade de acompanhamentos (vinculados ao âmbito histórico no qual reside a razão de ser dos objetos matemáticos) e de uma análise epistemológica das hipóteses de aprendizagem e do contexto social. Brousseau (1996) também revelou sua concepção acerca da transposição didática ao afirmar que:

Ela mascara o verdadeiro funcionamento da ciência, impossível de comunicar e de descrever fielmente a partir de fora, para colocar no seu lugar uma gênese (sic) fictícia. Para tornar mais fácil o seu ensino, isola determinadas noções e propriedades do tecido de atividades em que elas tiveram a sua origem, o seu sentido, a sua motivação e a sua utilização transpondo-as para o contexto escolar (BROUSSEAU, 1996, p. 36).

A crítica empreendida por Brousseau (1996) nos leva a inquirir sobre a forma fragmentada com que o saber é difundido e decomposto sob o intento de torná-lo acessível aos membros do contexto escolar. Em sentido análogo, Lagrange (1795, p. 271) já afirmava que: “enquanto a Álgebra e a Geometria estiveram separadas, o seu progresso foi lento e o seu uso

²¹ We thus need to go to the place where these phenomena start, that is, the institutions of production of mathematical knowledge. This is the first contribution of the *theory of didactic transposition* (Chevallard, 1985). If we want to understand (and thus to model in an appropriate manner) what kind of mathematical activity is done at school, we need to know the other kinds of mathematical activities that motivate and justify the teaching and learning of the former. And we also need to know the way these other activities are interpreted in the different institutions.

²² Le concept de transposition didactique, par cela seulement qu'il renvoie au passage du savoir savant au savoir enseigné, donc à l'éventuelle, à l'obligatoire distance qui les sépare, témoigne de ce questionnement nécessaire, en même temps qu'il en est l'outil premier. Pour le didacticien, c'est un outil qui permet de prendre du recul, d'interroger les évidences, d'éroder les idées simples, de se déprendre de la familiarité trompeuse de son objet d'étude, bref, d'exercer sa vigilance épistémologique.

limitado; mas uma vez que estas ciências se uniram, elas deram uma à outra um apoio mútuo e rapidamente avançaram juntas para a perfeição.”

Pautados em concepções como estas, este capítulo, seguirá uma abordagem que se ancora no saber sábio vetorial, primeiro estágio do processo transpositivo. Em outras palavras, configura a base de interesse do conjunto de transformações, reconstruções que imprimem alterações que derivam de um saber de referência construído ao longo da trajetória histórica, dentre estas estão os aspectos vinculados à ecologia dos saberes, que, de acordo com Artaud (1998), têm a função de questionar o real. E para indagar o que está posto em aulas, cujo tema de estudo são os vetores, é necessário retroceder no tempo, “dar um passo atrás, questionar as evidências, erodir ideias simples, retirar-se da familiaridade enganosa de seu objeto de estudo” (CHEVALLARD, 1982, p. 3, tradução nossa).²³

Diante desse contexto, que integra e apresenta como suporte as criações coletivas – o saber primeiramente constituído no trajeto da esfera histórica, muitas vezes evidenciadas por embates controversos, seja no âmbito da física ou da matemática, que desencadearam transformações epistemológicas pelas quais passou a Álgebra Vetorial. Esse aspecto subsidia mais um eixo da nossa investigação, ao colocar em evidência um revisitar de elementos que pertencem à gênese deste saber por meio do seu percurso histórico-epistemológico transpositivo,²⁴ com o intuito de compreender como se comporta e o que é refletido no terreno do ensino e da aprendizagem deste objeto matemático.

Fundamentados nesta intenção didática de estudo, subscrevemos a concepção de Chevallard (1996):

(...) à classe dos saberes corresponde um subdomínio específico do conhecimento, a que chamo a antropologia dos saberes, que não é, na realidade, senão aquilo que habitualmente chamamos epistemologia – mas uma epistemologia cujo conceito a antropologia dos saberes renova. Porque, tradicionalmente, as epistemologias apenas se interessam pela produção dos saberes, interessando-se muito menos pela sua utilização; e mantém fora do seu campo a questão do seu *ensino* e da *aprendizagem*. (CHEVALLARD, 1996, p. 148, grifos do autor)

O autor ora citado apresenta uma nova configuração epistemológica, em que a ênfase transita da produção para a utilização e funcionamento dos saberes, o que gera questões no seio do ensino e da aprendizagem, denominado por ele como *didática dos saberes*. Nestes termos,

²³ Le concept de transposition didactique, par cela seulement qu’il renvoie au passage du savoir savant au savoir enseigné, donc à l’éventuelle, à l’obligatoire distance qui les sépare, témoigne de ce questionnement nécessaire, en même temps qu’il en est l’outil premier. Pour le didacticien, c’est un outil qui permet de prendre du recul, d’interroger les évidences, d’éroder les idées simples, de se déprendre de la familiarité trompeuse de son objet d’étude, bref, d’exercer sa vigilance épistémologique.

²⁴ Termo que pode ser melhor compreendido em Chevallard (1991).

inferimos que é possível apontar direções para obtermos respostas aos nossos questionamentos, cuja essência se encontra, conforme destacado por Torres Salas (2010) no:

(...) paradigma ecológico que surge como um modelo sociológico e fornece ao ensino e aprendizagem das ciências em particular uma proposta de transformação e prática escolar, que permite trabalhar com certos princípios epistemológicos para fornecer as bases teórico-metodológicas, que sustentam a concepção do conhecimento: a realidade é um processo de construção sócio histórico cultural, em que intervêm a historicidade do sujeito e a intencionalidade do conhecimento, a criatividade, a dimensão antropológica e a dimensão axiológica. (TORRES SALAS, 2010, p. 134, tradução nossa²⁵)

Considera-se, nesse sentido, que é possível estabelecer conexões ao que se postula como princípios norteadores da estruturação ecológica (nicho e habitat)²⁶ dos vetores, ao ponderar sobre o que está posto praxeologicamente,²⁷ caracterizado, primeiro, pelo Modelo Epistemológico Dominante (MED) (FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013), atualmente reconfigurado como um Modelo Praxeológico Dominante (MPD) (GASCÓN, 2018), conformado nas salas de aula e geralmente dissociado dos conceitos que compõem os referenciais e as discussões das razões formais ou motivacionais que levaram ao estabelecimento de tais estruturas, o que retrata o não questionamento do MED, como destacam Farras, Bosch e Gascón (2013):

Esta proximidade é evidente no fato de que, como na formulação usual de problemas de ensino, algumas pesquisas didáticas não questionam os modelos epistemológicos usuais do campo da atividade matemática envolvida no problema didático que representam e, conseqüentemente, também não levam em consideração a relatividade institucional do conhecimento matemático. (FARRAS, BOSCH E GASCÓN, 2013, p. 4)

Trata-se de estabelecer uma análise que contemple o Sistema Didático (SD) que vive na sala de aula e todos os elementos reguladores que operam em conjunto com as interações entre o sistema de ensino e o meio social, os quais intervêm e condicionam, de forma implícita ou explícita, a natureza e o funcionamento do conhecimento que deve ser ensinado no âmbito didático matemático da classe.

Busca-se também respostas por meio da confrontação entre as *razões de ser* do que está instituído e difundido no seio da componente curricular que integra a Álgebra Vetorial – o que

²⁵ “(...) paradigma ecológico que nace como un modelo sociológico viene a proporcionar a la enseñanza y al aprendizaje de las ciencias en particular una propuesta de transformación y praxis escolar, que permite trabajar con ciertos principios epistemológicos para proporcionar las bases teóricas-metodológicas, en las que se sustenta la concepción de conocimiento: La realidad es un proceso de construcción socio-histórico cultural, en la que intervienen la historicidad del sujeto y la intencionalidad del conocimiento, la creatividad, la dimensión antropológica y la dimensión axiológica”.

²⁶ Termos vinculados à ecologia dos saberes que indicam as funções que o objeto de saber exerce em interação com outros objetos, assim como situam o objeto em termos de localização institucional.

²⁷ Derivada da palavra praxeologia, proveniente da junção das palavras gregas práxis e logos, encontramos a palavra praxeologia. Ver Chevallard *et al* (2001).

faz despontar o imperativo de revisitar a gênese do saber em estudo, objetivando clarificar e compreender, sob a ótica de Artaud (1998) a partir de um questionamento ecológico,

O que existe, e porquê? Mas também, o que não existe e porquê? Ou poderia existir? Sobre quais condições? Ou de forma inversa, dado um conjunto de condições, quais objetos são forçados a viver, ou pelo contrário, quais são impedidos de viver nessas condições? Essas são as questões características da problemática ecológica. (ARTAUD, 1998, p.101, tradução nossa²⁸)

Essa perspectiva impulsiona a questionar: O que existe e o que deveria existir no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra Vetorial no Curso de Licenciatura em Matemática da UEFS? Sem perder de vista que no cerne da didática,

O ensino e aprendizagem da matemática não são considerados como o ensino e a aprendizagem de ideias matemáticas, noções ou conceitos, mas como o ensino e a aprendizagem de uma *atividade humana situada*, realizada, em instituições concretas. Além disso, uma situação inclui a "razão de ser" ou a *racionalidade* que dá sentido à atividade matemática realizada sob restrições institucionais que fornecem e limitam a aplicação do conhecimento matemático correspondente. (BOSCH, CHEVALLARD e GASCÓN, 2005, p.2-3, grifos dos autores, tradução nossa²⁹)

Assim, se apresenta, neste estudo, a premência em retroceder e visitar a gênese da Álgebra Vetorial, assim como seu nicho no contexto educacional para que se possa compreender com maior nitidez as configurações que se instauram em Sistemas Didáticos do CLM-UEFS. Visto que, segundo Artaud (1998),

(...) objetos matemáticos e objetos didáticos vivem em associação desde que as organizações matemáticas iniciaram suas vidas, para pessoas ou instituições, por um processo de estudo. Mas estas organizações matemáticas adquiriram muito rapidamente uma autonomia em relação a suas condições de produção, e é justamente esta autonomia que rende instrumentais na concretização de tarefas diferentes das quais pediam sua criação. (ARTAUD, 1998, p.103, tradução nossa³⁰)

Em síntese, a transposição didática, caracterizada como uma teoria que abarca os fenômenos que se vinculam ao trânsito do saber entre instituições³¹ (GUERRA; ANDRADE,

²⁸ Qu'est-ce qui existe, et pourquoi? Mais aussi, qu'est-ce qui n'existe pas, et pourquoi? Et qu'est-ce qui pourrait exister? Sous quelles conditions? Inversement, étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions? Telles sont les questions caractéristiques de la problématique écologique.

²⁹ Teaching and learning mathematics is not considered as teaching and learning mathematical ideas, notions or concepts, but as teaching and learning a *situated human activity* performed in concrete institutions. Moreover, a situation includes the "raison d'être" or *rationale* that gives sense to the performed mathematical activity. And it also contains institutional restrictions that provide and limit the application of the corresponding mathematical knowledge.

³⁰ (...) objets mathématiques et objets didactiques vivent en association, dès lors que les organisations mathématiques se mettent à vivre, pour des personnes ou des institutions, par un processus d'étude. Mais ces organisations mathématiques acquièrent très vite une autonomie par rapport à leurs conditions de production, et c'est d'ailleurs cette autonomie qui les rend instrumentales dans l'accomplissement de tâches différentes de celles qui ont suscité leur naissance.

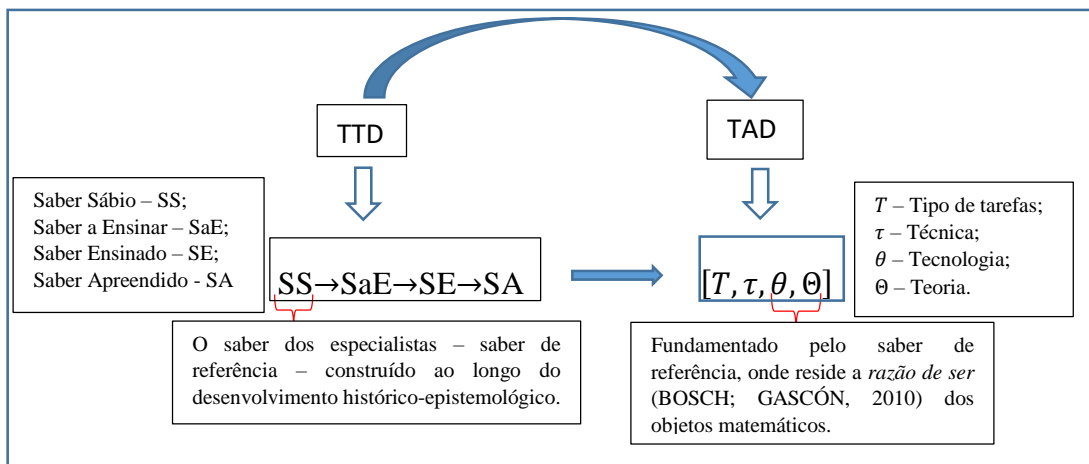
³¹ Segundo Chevallard (1996) "uma instituição pode ser quase o que quer que seja. [...] Uma escola é uma instituição, tal como o é uma sala de aula; mas existe igualmente a instituição 'trabalhos orientados', a instituição 'curso', a instituição 'família'" etc.

2013), pode ser entendida como a propagação do que foi produzido na esfera científica de um saber de referência no domínio do ensino e da aprendizagem deste saber. A título de ilustração, parafraseamos Chevallard (1985) quando este apresenta a similitude entre uma música executada por múltiplos instrumentos e a transposição, pois quando uma música é transformada do violão ao piano, por exemplo, é a mesma peça, a mesma música, mas a diferença é que ela está escrita de maneira distinta para ser interpretada com um instrumento diverso.

Anos mais tarde, como um alargamento da TTD, Chevallard (1991; 1992) apresenta uma primeira introdução sobre a Teoria Antropológica do Didático (TAD), em estado embrionário, nas primeiras formulações relativas à TTD, “a qual deve ser encarada como um desenvolvimento e uma articulação das noções cuja elaboração visa permitir pensar de maneira unificada um grande número de fenômenos didáticos, que surgem ao final de múltiplas análises” (CHEVALLARD, 1996, p. 126).

Assim, a Teoria da Transposição Didática (TTD) passou a integrar a Teoria Antropológica do Didático (TAD) e lhe impôs uma nova configuração, ao estabelecer associações entre os estudos que contemplam a ecologia dos saberes, que se interessa pelas condições e restrições sob as quais um determinado objeto do conhecimento “vive” em uma instituição. O escopo teórico da TAD salienta a relevância da inseparabilidade entre os blocos práticos e teóricos intrínsecos às atividades matemáticas. Em termos esquemáticos, tem-se:

Figura 2 - Conexões entre elementos da TTD e a TAD



Fonte: acervo da autora (2019).

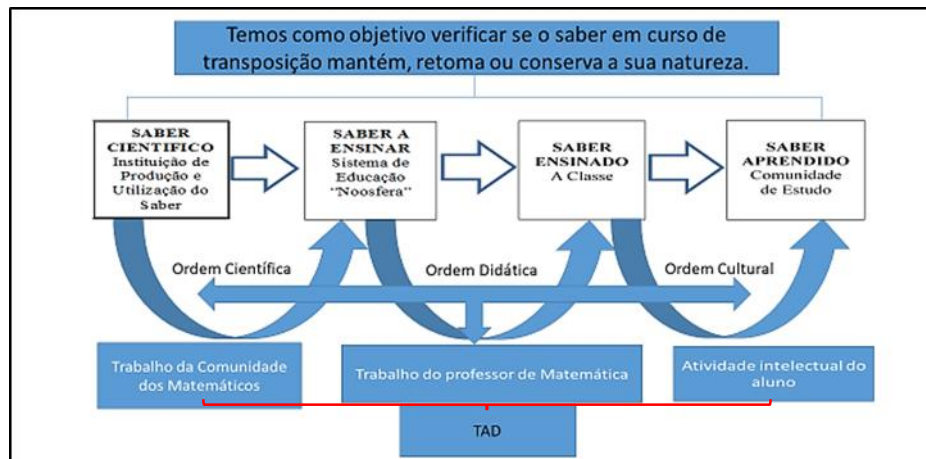
O alargamento do quadro teórico conduziu Chevallard (1996),

A propor uma teorização em que qualquer *objeto* pudesse aparecer: a função logarítmica é, evidentemente, um objeto *matemático*, mas existe igualmente o objeto *escola*, o objeto *professor*, o objeto *aprender*, o objeto *saber*, [...] etc. Assim, se passa de uma *máquina* para pensar um universo didático restrito para uma maquinaria de

mais vasto alcance, apta, em princípio, a permitir-nos situar imediatamente a didática no seio da antropologia. (CHEVALLARD, 1996, p. 127, grifos do autor)

O esquema abaixo sintetiza o processo transpositivo e vincula-o à Teoria Antropológica do Didático (TAD) em associação com as vertentes científica, didática e cultural.

Figura 3 - Esquema representativo das interligações entre a TTD e a TAD



Fonte: adaptação de Goulart e Farias (2019, p. 312)

O esquema acima retrata como foram identificadas as interligações entre os dois campos teóricos (TAD e TTD) que dialogam e possibilitam cruzamentos de ordem científica, didática e cultural, caracteres que se encontram no âmago da TAD. Contudo, é importante destacar que a TAD contempla todo o processo e não somente o trabalho do professor como poder ser equivocadamente interpretado. Assim, sendo tratada com mais minúcia no decorrer deste texto. Antes de se discutir, de forma mais densa, as praxeologias, é relevante abordar alguns conceitos centrais, como os três temas primitivos (*os objetos O, as pessoas X, as instituições I*), que constituem a base da construção teórica e foram expostos por Chevallard (1996) de maneira quase que axiomática.

Os objetos ocupam, contudo, uma posição privilegiada: são o “material de base” da construção teórica considerada. Da mesma maneira que, no universo matemático contemporâneo, fundado na teoria dos conjuntos, tudo é um conjunto (os próprios números inteiros são conjuntos), assim também, no universo que estou a considerar, *todas as coisas são objetos*. As pessoas X e as instituições I, bem como as entidades restantes que serei levado a introduzir, *são, pois, objetos de um tipo particular* (CHEVALLARD, 1996, p. 127, grifos do autor).

A ênfase dada à noção genérica de *objeto O* compõe o pilar desta teorização, fato evidenciado ao se estabelecer um comparativo entre a teoria dos conjuntos pertencente ao universo matemático, em que tudo pode ser caracterizado como conjunto, e a TAD, em que

tudo é caracterizado como *objeto O*. Chevallard (1996) também descreveu as relações entre os elementos primitivos da teoria ao declarar que:

Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como *existente* (para ela). Mais precisamente, podemos dizer que o objeto O *existe para X* (respectivamente, *para I* se existir um objeto, que denotarei por R (X, O) (resp. $R_I(O)$), a que chamarei *relação pessoal de X com O* (resp. *relação institucional de I com O*). Por outras palavras, o objeto O existe se existir ao menos para uma pessoa X ou para uma instituição I, isto é, se pelo menos uma pessoa ou uma instituição *tiver uma relação com esse objeto* (CHEVALLARD, 1996, p. 127, grifos do autor).

Assim, o autor parte de uma teoria, cujo interesse de estudo limitava-se aos objetos matemáticos, para um prolongamento que abarca todos os tipos de objetos, sem distinção. Do ponto de vista de Chevallard, o interesse central da TAD consiste nas condições de possibilidade, puras e simples, do seu funcionamento – adequado ou menos adequado, enquanto que a TSD, não menos importante, se interessa pelas condições de funcionamento adequado dos Sistemas Didáticos (SD), tendo como premissa básica os modelos epistemológicos do conhecimento matemático. Como descrito por Bosch, Chevallard e Gascón (2005),

Ela propõe uma metodologia que começa por questionar o conhecimento matemático, como ele é implicitamente assumido nas instituições de ensino: o que é a geometria, o que é estatística, o que são números decimais, o que é contagem, o que é álgebra, etc. Então propõe *modelos epistemológicos específicos* do conhecimento matemático -as situações- que são testados experimentalmente: uma noção matemática só pode ser analisada na medida em que aparece como solução para uma situação. Este é o princípio metodológico fundamental da TSD: um pedaço de conhecimento matemático é representado por uma "situação" que envolve os problemas que podem ser resolvidos da melhor forma usando este conhecimento. (BOSCH, CHEVALLARD e GASCÓN, 2005, p.3, tradução nossa³²)

A respeito do SD, Chevallard (1996) toma como ponto de partida que qualquer instituição é, em essência, didática, regulada por intenções didáticas que se manifestam como um Sistema Didático (SD), que integra sujeitos de I os quais ocupam as posições: professor *P* ou aluno *a* em prol de um ou vários “investimentos didáticos” (CHEVALLARD, 1996, p. 133).

O autor também ressalta que é necessário que seja satisfeita uma série de condições “ecológicas” para que um SD possa, não apenas existir, mas continuar a existir e funcionar. Nestes termos, Chevallard (1996, p. 141) postula “que o funcionamento de um Sistema Didático, aquilo que ele consegue produzir, depende fortemente do seu meio, e em particular

³² It proposes a methodology that starts questioning mathematical knowledge as it is implicitly assumed in educational institutions: what is geometry, what is statistics, what are decimal numbers, what is counting, what is algebra, etc. It then proposes *specific epistemological models* of mathematical knowledge –the *situations*– that are to be experimentally tested: a mathematical notion can only be analysed as far as it appears as the solution to a situation. This is the fundamental methodological principle of the TSD: a piece of mathematical knowledge is represented by a “situation” that involves problems that can be solved in an optimal manner using this knowledge.

do sistema de ensino de que ele participa”. Fato este que revela dependências ecológicas de outros tipos de Sistemas Didáticos (SD) e do meio, que no cerne da TAD institui a condição *sine qua non* das aprendizagens:

o importante é perceber que a formação de um sistema didático – seja ele qual for – pressupõe um ambiente sistêmico (sic), cujo papel é essencialmente criar todo conjunto de condições necessárias à existência do sistema didático (...). Tomemos então para I um sistema didático SD (x,y,O), em que x aluno, y professor e O o investimento didático. Como qualquer instituição, um sistema didático como este só pode existir em determinadas condições do meio (CHEVALLARD, 1996, p. 138).

A partir deste aporte teórico, foi desenhada uma análise ecológica na abordagem dos fenômenos antropológicos (e, em particular, didáticos) da Álgebra Vetorial. Portanto, sobressaem possibilidades de estudos ecológicos que abordem a gênese dos vetores em consonância com as organizações praxeológicas,³³ didáticas vetoriais em ambientes educacionais (salas de aula) movidos pelas interações entre os Sistemas Didáticos. De acordo com Bosch e Gascón (2010):

Como em todas as atividades humanas, as práticas didáticas são constituídas pelas tarefas e as técnicas didáticas, que só podem viver com normalidade em uma instituição se esta tem disponível um discurso tecnológico - teórico didático capaz de descrever, justificar, interpretar e desenvolver a *práxis*, disponível para fornecer critérios além de projetar e gerenciar isso. (BOSCH; GASCÓN, 2010, p.57, tradução nossa³⁴)

Os autores supracitados também assinalam que, se as práticas não vivem com normalidade, o que faz emergir a tendência de envelhecimento e desuso destas, assim, torna iminente a ausência de sentido para os sujeitos da instituição e tais práticas acabam por serem substituídas por outra(s). Em direção análoga, Chaachoua e Bittar (2016) apresentam as seguintes proposições:

(1) todo saber é saber de uma instituição, (2) um mesmo objeto do saber pode viver em diferentes instituições, (3) para que um saber possa viver em uma instituição, é necessário que ele se submeta a uma série de restrições, o que implica em modificações sobre o saber, caso contrário, ele não consegue se manter na instituição. (CHAACHOUA E BITTAR, 2016, p. 2)

Essas premissas são eixos que ratificam as interligações entre a TTD à ecologia dos saberes, visto que a Teoria da Transposição Didática estuda o processo que possibilita que um

³³ Segundo Bosch e Gascón (2010), as praxeologias apresentam uma estrutura composta por dois blocos inseparáveis: o bloco prático-técnico (a prática ou o saber-fazer didático) e o bloco tecnológico-teórico (o logo ou saber didático).

³⁴ “Como sucede em todas las actividades humanas, la praxis didáctica, constituida por las tareas y las técnicas didácticas, sólo puede vivir con normalidad en una institución si em ésta hay disponible um discurso tecnológico-teórico didáctico capaz de describir, justificar, interpretar y desarrollar la praxis, aportando además criterios para diseñarla y gestionarla”.

saber transite entre instituições, enquanto que no cerne da ecologia abarca-se a unidade funcional, ou seja, o ecossistema do saber constituído pelas relações entre os objetos de estudo e o meio. Nessa perspectiva, os fatores mencionados justificam a busca pela origem, *razão de ser* e sentido das tarefas e técnicas vetoriais empregadas em salas de aula de Geometria Analítica, em específico EXA 180 e EXA 374. Sob este ponto de vista, concebe-se que os fatos históricos apresentam elementos que contribuam para decifrar algumas das indagações preliminares.

Desse modo, o intuito neste capítulo concentra-se em identificar e compreender elementos dos discursos históricos e epistemológicos que envolvem os vetores, delineando os principais componentes do bloco tecnológico-teórico, por intermédio de descrições, interpretações, justificativas e desenvolvimento dos processos de investigação vetorial, a partir de intersecções, entre o âmbito histórico-epistemológico e a análise didática, propagadas nas instituições concebidas como nas salas de aula de Geometria Analítica.

Nesta prefação, podemos sobrelevar que as pesquisas desenvolvidas por Chevallard (1996) permitem a criação de cenários metafóricos e significativamente transpositivos, cujos princípios encontram-se nas condições de vida dos objetos matemáticos dominados por critérios institucionais. Com essa lente teórica, direciona-se a atenção ao foco deste estudo: os vetores, mais especificamente a Álgebra Vetorial que habita as salas de aula de alguns semestres do CLM-UEFS. Contudo, antes de habitar as classes, esse objeto do saber foi protagonista dos palcos da matemática e da física, cercado por distintas tramas em meio a diálogos controversos.

Através desse enfoque, foi descrita a visita teórica de alguns aspectos de cunho histórico e epistemológico, o que colaborará para compreender o que aparece refletido, contemporaneamente, nas salas de aula em questão. Ressalta-se que a teorização a seguir, apresentada sucintamente, possui uma gama de conexões e termos, os quais, por razões econômicas no tocante à extensão do texto, não serão descritos em sua totalidade e para tal transitaríamos para uma tese com enfoque histórico, o que não é nosso objetivo, visto que, o intento neste tópico é suscitar e situar a presente investigação na referida teorização.

1.1.1 Nuances históricas e epistemológicas dos vetores

Primeiramente, atenta-se para aceção da palavra vetor, disposta num formato multifacetado, de acordo com áreas do conhecimento a que pertence. De acordo com Táboas (2010, p.1), “a palavra “vetor” tem sido utilizada com um sentido algébrico mais moderno, ou seja, como diferença entre dois pontos no espaço, a partir do trabalho de Sir William R.

Hamilton (1805-1865) com quaternions” (*generalização dos números complexos*). Hamilton (apud CROWE, 1994) também destacou, em seus estudos, terminologias que se aproximam de elementos que são abordados no âmbito vetorial,

(...) ele criou uma terminologia elaborada utilizando palavras e combinações como vector, vehend, vectum, revector, revectum, revehend, revection, revectum, provector, ... transvector, ... factor, ... profactor, ...versor, ...e quadrantal versor, que é, naturalmente, um semi-inversor (...) (HAMILTON, apud CROWE, 1994, p.36, tradução nossa³⁵)

Sua origem etimológica, neste contexto, sofreu uma variação: de *vector*, originário do latim, que significa conduzir, transportar, se vinculando ao sentido mais físico. Nesse sentido, Ba e Dorier (2006) constataram em seus estudos que a primeira referência à palavra vetor remete aos

astrônomos que costumavam falar *vetor do redemoinho* para designar o movimento de um planeta e o raio vetor para designar o segmento que une o foco da cônica descrevendo a trajetória do planeta para uma posição na órbita. O uso do termo raio vetor, em seguida, tornou-se generalizado em geometria, mas em última análise, não tem nada a ver com o vetor como é atualmente entendido. (BA e DORIER, 2006, p. 18, grifos dos autores)

Contudo, essa conceituação ainda era incipiente para a formulação da teoria de espaços vetoriais, devido às fortes recorrências geométricas e intuitivas que subsidiavam os problemas físicos. Por outro lado, Crowe (1994) sublinha que,

A história inicial da análise vetorial é mais apropriadamente vista dentro do contexto de duas grandes tradições na história da ciência. Uma dessas tradições está relacionada à matemática, a outra à ciência física. A primeira tradição, que dentro da história da matemática, estende-se (...) até o presente e consiste no alargamento progressivo do conceito de número. Ao longo do tempo, o conceito de número foi ampliado de modo a incluir não apenas inteiros positivos, números negativos, frações e irracionais algébricos e transcendentais. Eventualmente, foram introduzidos complexos e números complexos mais altos (incluindo vetores). As atividades de alguns dos números da história da análise vetorial podem ser vistas como pertencentes a esta tradição. (CROWE, 1994, p.1, tradução nossa³⁶)

Menon (2009) frisa o papel basilar exercido pelo conceito vetorial no âmbito das ciências exatas e tecnológicas, destacando a sua associação com grandezas que necessitam de

³⁵ (...) he set up an elaborate terminology by using such words and combinations as vector, vehend, vection, vectum, revector, revectum, revehend, revection, revectum, provector, ... transvector, ... factor, ... profactor, ...versor, ...and quadrantal versor, which is of course a semi-inversor (...)

³⁶ The early history of vectorial analysis is most appropriately viewed within the context of two broad traditions in the history of science. One of these traditions relates to mathematics, the other to physical science. The first tradition, that within the history of mathematics, extends from the time of the Egyptians and Babylonians to the present and consists in the progressive broadening of the concept of number. Throughout time the concept of number has been expanded so as to include not only positive integers, but negative numbers, fractions, and algebraic and transcendental irrationals. Eventually complex and higher complex numbers (including vectors) were introduced. The activities of some of the figures in the history of vector analysis may be viewed as belonging to this tradition.

modulo direção e sentido tais como: o deslocamento de uma partícula, a velocidade, a aceleração e a força. Neste sentido, o autor ressalta que,

(...) um vetor é geometricamente representado por uma seta, com comprimento proporcional ao seu módulo, o que é intuitivo. Em seguida, fazendo-se uso das regras do paralelogramo ou do polígono, passa-se à adição de vetores e, então, à multiplicação de um vetor por um escalar (número real), também geometricamente intuitivo, uma vez que se conecta ao produto com o aumento ou a diminuição do comprimento da seta e/ou inversão de seu sentido. (MENON, 2009, p.1)

As diferentes formas de representação dos vetores transportam, intrinsecamente em sua formação, “feições” numéricas, algébricas e geométricas, fatos estes que reportam à trajetória histórica que envolve o tema. Nestes termos, observa-se conexões com a concepção de Dorier (1997, p. 47, tradução nossa³⁷) ao sublinhar “que o vetor é assim encontrado em três diferentes lugares de ensino: a geometria, álgebra linear e física”, com distintas especificidades. Neste diapasão, nota-se que os matemáticos desenvolviam seus estudos estabelecendo interligações entre variados domínios da matemática. A partir desse aspecto, Farias (2010) desenvolveu sua pesquisa focalizando as inter-relações entre os distintos campos matemáticos (numérico, algébrico e geométrico – NAG). As constatações deste autor indicam problemas na implícita utilização do NAG no processo de ensino e aprendizagem em sala de aula. Uma amostra desta assertiva encontra-se nos trabalhos formulados por Grassmann, como afirma Táboas (2010):

Na verdade, o que Grassmann pretendia era consolidar uma linguagem que fizesse a ligação entre a Geometria Sintética e a Análise Geométrica como já dito anteriormente. E a consolidação dessa linguagem passa pela concepção de vetores (deslocamento ou extensões para Grassmann) e, também, de operações como soma e produtos entre eles. (TÁBOAS, 2010, p. 18)

Em direcionamento análogo Dorier (1997) destaca que,

A abordagem sintética pelo cálculo vetorial do mundo geométrico mostrou suas vantagens em relação ao método analítico herdado de Descartes. A introdução da linguagem geométrica na análise funcional desloca esse debate para uma dimensão infinita, favorecendo o abandono da representação analítica por uma abordagem que trata a função como um objeto independente de suas representações. (DORIER, 1997, p.34, tradução nossa³⁸)

Nestes termos, o limiar da história da análise vetorial pode ser concebida imersa em dois contextos tradicionais da História das Ciências: a Matemática e a Física. Nas primícias históricas da física, para Crowe (1994), Eves (2004) e Boyer e Gomide (1998), a preocupação

³⁷ Le vecteur se retrouve ainsi dans trois lieux différents de l'enseignement: la géométrie, l'algèbre linéaire et la physique.

³⁸ L'approche synthétique par le calcul vectoriel du monde géométrique a montré ses avantages par rapport à la méthode analytique héritée de Descartes. L'introduction du langage géométrique en analyse fonctionnelle déplace ce débat en dimension infinie favorisant ainsi l'abandon de la représentation analytique pour une approche traitant la fonction comme un objet indépendant de ses représentations.

central consistia em modelar matematicamente a realidade – período ainda em que os objetos físicos foram modificados em suas representações.

Essa transformação consistiu na mudança de ênfase de tais quantidades escalares como posição e peso para tais quantidades vetoriais como velocidade, força, impulso e aceleração. A transição não foi abrupta e nem confinada ao século XVII. Mais tarde o desenvolvimento na eletricidade, magnetismo e ótica atuaram facilitando a transformação do espaço da matemática física num espaço preenchido com vetores. (CROWE, 1994, p. 1, tradução nossa³⁹)

A matemática e a física convergiram em vários períodos da história; um desses períodos foi no século XIX, marcado pela criação e pelo desenvolvimento de métodos vetoriais.

1.1.2 Entre a Geometria Posicional, Cálculo do Baricentro e Cálculo das Equipolências

A criação da noção de espaço vetorial resultou de um longo processo, o que nos faz rastrear os principais registros que se imbuíram na elaboração dessa estruturação. Crowe (1994) aborda as principais contribuições acerca das ideias evolutivas que envolvem a história do sistema vetorial. Dentre as várias colaborações elencadas pelo autor, destaca-se as que, ao nosso ver, imprimirá maior significância ao repertório do método vetorial. Assim, parte-se dos contributos de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), com destaque para a Geometria de Situação. Nesse segmento Crowe (1994) também destaca que,

Leibniz discutiu a possibilidade de criar um sistema que serviria como método direto para análise espacial. Embora os detalhes dessa ideia nunca tenham sido completamente elaborados por Leibniz, ele avançou o suficiente para ser classificado como um precursor conceitual entre os primeiros analistas vetoriais. Ademais, o seu ensaio, que foi publicado pela primeira vez em 1833, desempenhou um papel na história posterior da análise vetorial. (CROWE, 1994, p. 3, tradução nossa⁴⁰)

Nesses termos, Dorier (1995) revela sua concepção acerca do fracasso do método de Leibniz,

Gottfried Wilhelm Leibniz criticou o método analítico e tentou - embora sem sucesso - criar uma análise geométrica intrínseca que ele chamou de "geometria da situação". As razões de seu fracasso, tão óbvias para um leitor moderno, são menos interessantes do que o conteúdo de suas críticas, que deram uma análise precisa não apenas da fraqueza do método analítico, mas também da natureza do que deveria ser uma análise geométrica intrínseca. (DORIER, 1995, p. 234, tradução nossa⁴¹)

³⁹ This transformation consisted in the shift in emphasis from such scalar quantities as position and weight to such vectorial quantities as velocity, force, momentum, and acceleration. The transition was neither abrupt nor was it confined to the seventeenth century. Later developments in electricity, magnetism, and optics acted further to transform the space of mathematical physics into a space filled with vectors.

⁴⁰ Leibniz discussed the possibility of creating a system which would serve as a direct method of space analysis. Although the details of this idea were never fully worked out by Leibniz, he advanced far enough to be ranked as a conceptual forerunner of the first vectorial analysts. Moreover his essay, which was first published in 1833, played a part in the later history of vectorial analysis.

⁴¹ Gottfried Wilhelm Leibniz criticized the analytical method and tried-- although unsuccessfully--to create an intrinsic geometric analysis which he called the "geometry of situation". The reasons for his failure, so obvious to

Dentre as principais ideias de Leibniz, algumas estavam contidas em uma carta, datada de 8 de setembro de 1679, escrita para Christian Huygens. Nesta carta, Leibniz (apud CROWE, 1994) registrou:

Ainda não estou satisfeito com a álgebra, porque não dá os métodos mais curtos nem as mais belas construções em geometria. É por isso que, no que diz respeito à geometria, precisamos ainda de outra análise que seja distintamente geométrica ou linear e que expresse diretamente a situação como álgebra expressa diretamente a magnitude. E creio ter encontrado o caminho e que podemos representar figuras e mesmo máquinas e movimentos por caracteres, como álgebra representa números ou magnitudes. Estou a enviar-vos um ensaio que me parece importante. (LEIBNIZ, apud CROWE, 1994, p. 3, tradução nossa⁴²)

No referido ensaio, contido na carta, Leibniz descreveu seu sistema, como afirma Crowe (1994)

Descobri certos elementos de uma nova característica que é totalmente diferente da álgebra e que terá grandes vantagens em representar à mente, exatamente e de maneira fiel à sua natureza, mesmo sem figuras, tudo o que depende da percepção sensorial. A álgebra é a característica para números ou magnitudes indeterminadas, mas não expressa situação, ângulos e movimento diretamente. (CROWE, 1994, p.3, tradução nossa⁴³)

Sintetizamos seu posicionamento ao apontar para as dificuldades de análises das propriedades de uma figura por cálculo e, ainda mais complexo, encontrar demonstrações e construções geométricas muito convenientes, mesmo quando o cálculo algébrico fosse concluído. Mas essa nova característica, que segue as figuras visuais em termos da construção e a demonstração geométrica simultaneamente, de maneira natural e em uma análise, isto é, através de um procedimento determinado. Nesse sentido, o sistema de Leibniz, como esboçado por ele, mostra indícios de uma análise vetorial primitiva, o qual centrou-se na ideia da congruência de conjuntos de pontos. Crowe (1994) destaca:

Ele usou A, B, . . . para representar pontos fixos e X, Y, . . . para representar pontos desconhecidos. O símbolo ε foi usado para expressar a relação de congruência; assim ele escreveu $ABC \varepsilon DEF$ para expressar que um conjunto de três pontos A, B, C, cada um do qual estaria a uma distância fixa dos outros dois pontos, poderia ser feito para coincidir com outro conjunto de pontos fixos semelhante D, E, F. Ele então discutiu as relações de localidade geométrica e afirmou que o local de pontos congruentes a

a modern reader, are less interesting than the content of his criticism, which gave an accurate analysis not only of the weakness of the analytical method but also of the nature of what an intrinsic geometric analysis should be.

⁴² I am still not satisfied with álgebra, because it does not give the shortest methods or the most beautiful constructions in geometry. This is why I believe that, so far as geometry is concerned, we need still another analysis which is distinctly geometrical or linear and which will express situation directly as algebra expresses magnitude directly. And I believe that I have found the way and that we can represent figures and even machines and movements by characters, as algebra representes numbers or magnitudes. I am sending you essay which seems to me to be importante.

⁴³ I have discovered certain elements of a new characteristic which is entirely diferente from álgebra and which will have great advantages in representing to the mind, exactly and in a way faithful to its nature, even without figures, everything which depends on sense perception. Algebra is the characteristic for undetermined numbers or magnitudes only, but it does not express situation, angles, and motion directly.

um ponto fixo "será um espaço infinito em todas as direções". Se for dado que $AB \varepsilon AY$, os valores de Y serão pontos em uma esfera com centro em A e de comprimento AB . A relação $AX \varepsilon BX$ determina um plano cujos pontos (X) são equidistantes de A e B , e a relação $ABC \varepsilon ABY$ determina um círculo. Leibniz discutiu então o local dos pontos Y satisfazendo a relação $AY \varepsilon BY \varepsilon CY$ e concluiu que "o local de todos os Y será uma linha reta". Depois de mostrar que a relação $AY \varepsilon BY \varepsilon CY \varepsilon DY$ determina um ponto, Leibniz aplicou sua análise a quatro problemas simples. Um deles pode ser discutido como típico. O problema é mostrar que a interseção de dois planos é uma linha reta. A relação $AY \varepsilon BY$ determina um plano e a relação $AY \varepsilon CY$ determina um segundo plano, combinando estes temos $AY \varepsilon BY \varepsilon CY$, que, como foi mostrado antes, determina uma reta. (CROWE, 1994, p.4, tradução nossa⁴⁴)

A partir desta síntese acerca da mais conhecida exposição de Leibniz sobre seu sistema, vislumbramos traços com os conceitos os quais, hodiernamente, tratados na relação com a moderna análise vetorial. Entretanto, o teórico não conseguiu avançar em direção à criação de um sistema no qual entidades geométricas pudessem ser somadas, subtraídas e multiplicadas. De igual modo, ele não conseguiu reconhecer que AB e BA (por exemplo) são entidades distintas e que (menos) - AB poderia ter uma interpretação significativa. No entanto, assumiu o pioneirismo, por representar um ponto fixo por meio de um símbolo, refletido nos estudos de Möbius e Grassmann, como sinalizou Crowe (1994):

A visão de Leibniz tomado por Couturat, embora afirmado em relação ao sistema de Grassmann, também é aplicável em relação à moderna análise vetorial; Couturat escreveu: "Em resumo, o cálculo de Grassmann parece trazer totalmente à realidade a característica geométrica concebida por Leibniz, e mostra que a ideia de Leibniz não era simplesmente um sonho. Mas existe tal desproporção entre a concepção de Leibniz de um sistema e o ensaio muito defeituoso que ele realmente produziu, o qual Grassmann considerou que deveria ser feita uma distinção nítida entre o ideal concebido e o esboço realmente escrito." (CROWE, 1994, p.5, tradução nossa⁴⁵)

A representação de pontos, relações de congruências, equidistâncias e as interações algébricas e geométricas apontam para aproximações com a abordagem vetorial que se tem

⁴⁴ He used A, B, \dots to represent fixed points and X, Y, \dots to represent unknown points. The symbol ε was used to express the relation congruence; thus he wrote $ABC \varepsilon DEF$ to express that a set of three points A, B, C , each of which was a fixed distance from the other two points, could be made to coincide with another set of similarly fixed points D, E, F . He then discussed locus relations and stated that the locus of points congruent to a fixed point "will be a space infinite in all directions". If it is given that $AB \varepsilon AY$, the point values of Y will be points on a sphere with center at A and radius of length AB . The relation $AX \varepsilon BX$ determines a plane whose points (X) are equidistant from A and B , and the relation $ABC \varepsilon ABY$ determines a circle. Leibniz then discussed the locus of points Y satisfying the relation $AY \varepsilon BY \varepsilon CY$ and concluded that "the locus of all y 's will be a straight line". After showing that the relation $AY \varepsilon BY \varepsilon CY \varepsilon DY$ determines a point, Leibniz applied his analysis to four simple problems. One of these may be discussed as typical. The problem is to show that the intersection of two planes is a straight line. The relation $AY \varepsilon BY$ determines one plane, and the relation $AY \varepsilon CY$ determines a second plane. By combining these we have $AY \varepsilon BY \varepsilon CY$, which, as it was shown before, determines a straight line.

⁴⁵ The view of Leibniz system, taken by Couturat, though stated in relation to Grassmann's system, is also applicable in relation to modern vector analysis; Couturat wrote: "in summary, the calculus of Grassmann seems to bring fully into reality the geometrical characteristic conceived by Leibniz, and shows that Leibniz' idea was not simply a dream. But there is such a disproportion between Leibniz' conception of a system and the very defective essay which he actually produced that Grassmann felt a sharp distinction should be made between the ideal conceived and the sketch actually written."

conhecimento atualmente. Ao avançar em busca de elementos que fundamentem as operações com vetores, encontra-se as pesquisas de Bellavitis e Möbius. Como destacou Crowe (1994):

Bellavitis aqui descreveu entidades geométricas que são de todas as formas equivalentes a números complexos como geometricamente representados. Numerosos matemáticos, incluindo Bellavitis, reconheceram esta equivalência. No entanto, é de salientar que Bellavitis não considerava o seu sistema como baseado no sistema de números complexos; de facto, durante toda a sua vida, opôs-se aos números imaginários como entidades algébricas. Assim, ele considerava as suas linhas como entidades essencialmente geométricas, e não como representações geométricas. (CROWE, 1994, p. 53, tradução nossa⁴⁶)

Nesse caminho, em paráfrase a Crowe (1994), destaca-se que o matemático August Ferdinand Möbius (1790-1868) contribuiu significativamente para a matemática, a mecânica e a astronomia. Dentre suas obras destaca-se o *Barycentrische Calcul*, publicada em Leipzig no ano de 1827, a qual demonstrou ser bastante significativa. Uma ideia do sistema de Möbius estabelece associações com o conceito físico de centro de gravidade ou centroide, utilizado desde o tempo de Arquimedes para descoberta de verdades geométricas. Nestes termos o autor sinaliza que,

Embora ele não tenha interpretado um sistema vetorial original nem tenha influenciado decisivamente quem o fez, no entanto, August Ferdinand Möbius ocupa uma posição importante na história da análise vetorial por várias razões. A principal delas é que Möbius construiu um sistema matemático (seu cálculo baricêntrico) que é, em muitos aspectos, semelhante aos sistemas vetoriais. Em seu sistema de análise espacial, as entidades geométricas (Pontos ao invés de vetores) foram tratadas diretamente e (como ele esperava) de forma vantajosa. Möbius posicionou pontos, com os quais as magnitudes numéricas são geralmente associadas, são adicionados de tal forma que tanto a posição quanto a magnitude são incluídas na adição. Assim, tanto no objetivo como no método, seu sistema tem parentesco com os sistemas vetoriais. (CROWE, 1994, p. 48, tradução nossa⁴⁷).

A contribuição de Möbius para o contexto vetorial torna-se mais evidente com a abordagem apresentada por Dorier (1995),

(...) ele designou um segmento de linha de um ponto A a um ponto B pela notação AB e declarou que $AB = -BA$; ele então definiu a adição de segmentos colineares. O teorema central do cálculo baricêntrico é: *Dado qualquer número (v) de pontos, A, B, C, ..., N com coeficientes a, b, c, ..., n onde a soma dos coeficientes não é igual a zero, sempre pode ser encontrado um (e somente um) ponto S - o centróide - cujo ponto tem*

⁴⁶ Bellavitis herein described geometrical entities that are in all ways equivalent in behavior to complex numbers as geometrically represented. Numerous mathematicians, including Bellavitis recognized this equivalence. It should however be stressed that Bellavitis did not view his system as based on the complex number system; indeed, throughout his entire life he was opposed to imaginary numbers as algebraic entities. Thus he viewed his lines as essentially geometrical entities, rather than as geometrical representations.

⁴⁷ Though he neither constructed an original vectorial system nor decisively influenced anyone who did, nevertheless August Ferdinand Möbius holds an important position in the history of vector analysis for number of reasons. The chief of these is that Möbius constructed a mathematical system (his barycentric calculus) which is in many ways similar to vectorial systems. In his system of space analysis, geometrical entities (Points rather than vectors) were dealt with directly and (as he hoped) Advantageously. Möbius positioned points, with which numerical magnitudes are usually associated, are added in such a way that both position and magnitude are included in the addition. Thus both in aim and in method his system has kinship with vectorial systems.

a propriedade de que se traçar linhas paralelas (apontando em qualquer direção) através dos pontos dados e do ponto S, e se essas linhas cruzarem algum plano nos pontos A', B', C', ..., N', S', então sempre tem: $a.AA' + b.BB' + c.CC' + \dots + n.NN' = (a + b + c + \dots + n).SS'$ e conseqüentemente se o plano passa pelo próprio S, então $a.AA' + b.BB' + c.CC' + \dots + n.NN' = 0$. No caso em que a soma dos coeficientes é igual a zero, Möbius observou, sem mais comentários, que o ponto é enviado ao infinito. (DORIER, 1995, p.235, grifos nossos, tradução nossa⁴⁸)

A partir do que foi referenciado anteriormente é possível notar que Möbius introduziu o conceito de vetor oposto, utilizou as noções de combinação linear e paralelismo entre vetores para enunciar o Teorema Central do Cálculo do Baricêntrico. No entanto, Dorier (1995) ressalta também que seu propósito não consistia apenas na apresentação de uma estrutura algébrica, mas desejava exibir uma ferramenta para resolver problemas geométricos e físicos.

Os avanços organizacionais em direção à criação de alicerces que sustentam os pilares da concepção dos espaços vetoriais, são preliminarmente projetados por meio do produto de vetores. Nesse sentido, Dorier (1995) elenca as realizações do matemático Giusto Bellavitis ressaltando a originalidade em termos de objetos sobre os quais o cálculo foi elaborado a partir de entidades puramente geométricas como descrito a seguir,

Com seu *Calcolo delle Equipollenze*, Giusto Bellavitis pode ser considerado como o primeiro matemático a ter definido, em 1833, a adição de vetores no espaço: (2 °) Duas linhas retas são chamadas equipollenze se forem iguais, paralelas e direcionadas no mesmo sentido. (3 °) Se duas ou mais linhas retas estiverem relacionadas de tal forma que a segunda extremidade de cada linha coincida com a primeira extremidade das seguintes, então a linha que junto com estas forma um polígono (regular ou irregular), e que é traçada da primeira extremidade da última linha é chamada de equipollent-sum. Ele também definiu a multiplicação dos segmentos de linha coplanar dirigida. De fato, o cálculo dos equipollences não oferecia mais possibilidades do que números complexos. O próprio Bellavitis admitiu que sua descoberta foi baseada em sua leitura da obra de Buée, mas durante toda sua vida, ele se recusou a aceitar números complexos como parte da matemática. (DORIER, 1995, p.236, tradução nossa⁴⁹)

⁴⁸ [...]he designated a line segment from a point A to a point B by the notation AB and stated that $AB = -BA$; he then defined the addition of collinear segments. The central theorem of barycentric calculus is: Given any number (v) of points, A, B, C, ..., N with coefficients a, b, c, \dots, n where the sum of the coefficients does not equal zero, there can always be found one (and only one) point S--the centroid--which point has the property that if one draws parallel lines (pointing in any direction) through the given points and the point S, and if these lines intersect some plane in the points A', B', C', ..., N', S', then one always has: $a.AA' + b.BB' + c.CC' + \dots + n.NN' = (a + b + c + \dots + n).SS'$ and consequently if the plane goes through S itself, then $a.AA' + b.BB' + c.CC' + \dots + n.NN' = 0$. In the case where the sum of the coefficients equals zero, Möbius noted, without further comment, that the point is sent to infinity.

⁴⁹ With his *Calcolo delle Equipollenze*, Giusto Bellavitis may be considered as the first mathematician to have defined, in 1833, the addition of vectors in space: (2 °) Two straight lines are called equipollent if they are equal, parallel and directed in the same sense. (3 °) If two or more straight lines are related in such a way that the second extremity of each line coincides with the first extremity of the following, then the line which together with these forms a polygon (regular or irregular), and which is drawn from the first extremity of the last line is called the equipollent-sum. He also defined the multiplication of coplanar directed line segments. In fact, the calculus of equipollences offered no more possibilities than complex numbers. Bellavitis himself admitted that his discovery was based on his reading of Buée's work, but throughout his life, he refused to accept complex numbers as part of mathematics.

Contudo, parafraseando Táboas (2010), é possível admitir que Bellavitis tenha elaborado uma estrutura que envolveu o produto de vetores o qual se interligou com a concepção do produto de números complexos, concebidos em suas formas trigonométricas, “ele próprio relutou em aceitar essa categoria de números como entidades geométricas” (TÁBOAS, 2010, p.7). Essa resistência, também foi ressaltada por Crower (1994), o qual evidenciou repercussões restritivas acerca de questões que envolveram, por exemplo, a dedução do teorema de Pitágoras ao utilizar técnicas que não demonstravam efetividade. Assim, podemos inferir acerca da existência de um bloqueio, temporário, da generalização dos vetores em associação com a aceitação dos números complexos.

Aspecto esse que permite concluir que Bellavitis não alcança uma generalização do produto de segmentos de linha direcionada para o espaço. Essa generalização deveria ser feita pelo matemático irlandês, Sir William Rowan Hamilton, tema da próxima seção.

1.1.3 Interconexões entre as ideias de Hermann Grassmann com a Teoria da Extensão e os *quaternions* de W. R. Hamilton

No final do século XIX, uma das questões mais debatidas, na acepção de Silva (2002), era qual sistema matemático seria o mais apropriado para tratar as grandezas vetoriais. De acordo com esta autora, “William Rowan Hamilton (1805-1865) e seus seguidores, principalmente Peter Tait, acreditavam que os quaternions eram a ferramenta apropriada para resolver problemas em física” (SILVA, 2002, p. 55).

Outro aspecto relevante foi sublinhado por Crowe (1994), ao destacar que,

Hamilton apresentou um artigo sobre quaternions antes da Royal Irish Academy, do qual pelo menos parte foi publicada em 1844: "Sobre uma Nova Espécie de Quantidades Imaginárias Relacionadas com a Teoria dos Quaternions", em *Proceedings of the Royal Irish Academy*. Ou este artigo ou o artigo muito semelhante foi publicado na edição de julho de 1844 da revista *Philosophical Magazine* foi sua primeira publicação sobre quaternions. (CROWE, 1994, p. 31, tradução nossa⁵⁰)

Que na interpretação de Táboas (2010, p.8) “continha as ideias sobre a multiplicação de números complexos e rivalizou cronologicamente com a primeira edição do *Ausdehnungslehre*, de Hermann Günter Grassmann (1809-1877), em que também foram abordados produtos de vetores.” Este autor também destaca,

são trabalhos independentes, na medida em que o primeiro expande, de certa maneira, as ideias e conceitos já trabalhados por Buée, Möbius e Bellavitis, e o segundo cria

⁵⁰ Hamilton read a paper on quaternions before the Royal Irish Academy, of which at least part was published in 1844: "On a New Species of Imaginary Quantities Connected with the Theory of Quaternions" in *Proceedings of the Royal Irish Academy*. Either this paper or the very similar paper in the July, 1844, issue of the *Philosophical Magazine* was his first publication on quaternions.

um sistema original a partir de uma concepção filosófica da ciência e da matemática. Ainda assim, muitas vezes são reconhecidas ferramentas semelhantes em ambos depois de um ajuste semântico, já que o trabalho de Grassmann parte de uma perspectiva filosófica totalmente nova. (TÁBOAS, 2010, p.8)

Parafrazeando a interpretação de Táboas (2010), destaca-se que essa abordagem filosófica refletiu no campo científico matemático e inibiu um maior alcance do *Ausdehnungslehre*, o que exigiu significativo empenho da parte de Grassmann ao buscar novas formas e versões para divulgação e aceitação do seu trabalho. No entanto, Crowe (1994) revela a declaração de Hamilton sobre Grassmann em suas Palestras sobre Quaternions de 1853, contribuindo significativamente para a valoração ao ressaltar a originalidade da obra de Grassmann registrado no prefácio do seu *Lectures on Quaternions*, de 1853:

É correto afirmar aqui que uma espécie de multiplicação não-comutativa para linhas inclinadas (äussere Multiplikation) ocorre em um trabalho muito original e notável do Prof. H. Grassmann (*Ausdehnungslehre*, Leipzig, 1844), com o qual só me encontrei depois de anos de invenção e comunicação dos quaterniões. Não obstante estas e talvez algumas outras coincidências de visão, o sistema do Prof. Grassmann e o meu parecem ser perfeitamente distintos e independentes um do outro, em suas concepções, métodos e resultados. Pelo menos, que o profundo e filosófico autor do *Ausdehnungslehre* não estava, na época de sua publicação, de posse da teoria dos quaternários, que no ano anterior (1843) havia sido aplicada por mim como uma espécie de órgão ou cálculo para trigonometria esférica, parece claro de uma passagem de seu Prefácio (...) (HAMILTON apud CROWE, 1994, p. 87, tradução nossa⁵¹).

Esse aspecto foi reiterado diversas vezes, por Hamilton (apud CROWE, 1994, p. 86) como ao revelar seu envolvimento e admiração ao ler o livro de Grassmann por meio de uma carta, de 31 de janeiro de 1853, a De Morgan,

Tenho lido recentemente (e é curioso que às vezes, quando estou em atividade mental, pareço não conseguir ler uma página, ou quase uma frase de alemão) mais de cem páginas do *Ausdehnungslehre* de Grassmann, com grande admiração e interesse. Anteriormente eu tinha apenas o mais leve e geral conhecimento do livro, e pensava que ele exigiria que eu aprendesse a fumar para poder lê-lo. Se eu pudesse esperar ser colocado em rivalidade com Des Cartes, por um lado, e com Grassmann, por outro, minha ambição científica seria cumprida! Mas é curioso ver o quanto Grassmann não conseguiu se dar bem com os Quaternions, mas por muito pouco tempo. Ele publicou em 1844, um pouco mais tarde do que eu, mas com a mais óbvia e perfeita independência. (HAMILTON apud CROWE, 1994, p. 87, tradução nossa⁵²).

⁵¹ It is proper to state here, that a species of non-commutative multiplication for inclined lines (äussere Multiplikation) occurs in a very original and remarkable work by Prof. H. Grassmann (*Ausdehnungslehre*, Leipzig, 1844), which I did not meet with till after years had elapsed from the invention and communication of the quaternions. Notwithstanding these, and perhaps some other coincidences of view, Prof. Grassmann's system and mine appear to be perfectly distinct and independent of each other, in their conceptions, methods, and results. At least, that the profound and philosophical author of the *Ausdehnungslehre* was not, at the time of its publication, in possession of the theory of the quaternions, which had in the preceding year (1843) been applied by me as a sort of organ or calculus for spherical trigonometry, seems clear from a passage of his Preface [...]

⁵² I have recently been reading (and it is curious that sometimes, when otherwise in mental activity, I seem to myself unable to read a page, or almost a sentence of German) more than a hundred pages of Grassmann's *Ausdehnungslehre*, with great admiration and interest. Previously I had only the most slight and general knowledge of the book, and thought that it would require me to learn to smoke in order to read it. If I could hope to be put in rivalry with Des Cartes on the one hand, and with Grassmann on the other, my scientific ambition would be

Mais uma vez Hamilton (apud CROWE, 1994, p. 86) em outra carta de 2 de fevereiro de 1853 também direcionada a De Morgan, revela mais sobre suas impressões ao pontuar algumas similitudes entre a sua obra e a de Grassmann,

Li quase tudo o que pude obter de seus escritos, incluindo um comentário posterior (em alemão) de Möbius. Grassmann é um grande e genial alemão; sua visão do espaço é pelo menos tão nova e abrangente quanto a minha do tempo; mas ele não antecipou, nem alcançou a concepção dos quaternions, mesmo quase como eu imaginava que ele poderia ter feito, a partir de uma noção precipitadamente retomada do que poderia ter sido seu significado (e o que era, eu sei muito pouco mesmo agora), em sua doutrina de "multiplicação eingewandre". (...) seus produtos internos, na verdade, os "produtos internos" de Grassmann têm muita analogia com "partes escalares" de um quaternion, e seus "produtos externos" com as "partes vetoriais." (...). (HAMILTON apud CROWE, 1994, p. 87, tradução nossa⁵³)

Acredita-se que nesse cenário histórico existam motivos que apontam para superação da obra de Grassmann em relação a Hamilton, como conclui Crowe (1994),

de que a obra é um clássico, que é muito difícil de ler e que contém uma grande poção de análise vetorial moderna, que estava profundamente embutida dentro de um sistema muito mais amplo, e embutida de tal forma que só poderia ser extraída com dificuldade. (CROWE, 1994, p. 65, tradução nossa⁵⁴)

Pode-se perceber traços dessa perspectiva que contempla a ideia de um sistema mais amplo a partir dos elementos destacados por Grassmann acerca da existência de elementos encobertos relacionados ao espaço tridimensional.

Somente desta forma as leis apareceram em toda sua extensão e generalidade, e suas relações essenciais também apareceram, e muitas conexões, que 3 dimensões ainda estão ocultas ou apenas parcialmente visíveis, foram aqui claramente reveladas em sua generalidade total. (GRASSMANN, 1947, p. 13, tradução nossa⁵⁵)

Nesse direcionamento, Grassmann (1947) institui a teoria da extensão vinculada à teoria do espaço que, para ele, podem ser caracterizadas como:

fulfilled! But it is curious to see how narrowly, yet how completely, Grassman failed to hit off the Quaternions. He published in 1844, a little later than myself but with the most obvious and perfect independence.

⁵³ I am not quite so enthusiastic to-day about Grassmann as I was when I last wrote. But I have read through nearly all of what I could procure of his writings, including a subsequent commentary (in German) by Möbius. Grassmann is a great and most German genius; his view of space is at least as new and comprehensive as mine of time; but he has not anticipated, nor attained the conception of, the quaternions, even so nearly as I guessed he might have done, from a notion hastily taken up of what might have been his meaning (and what it was, I very dimly know even now), in his doctrine of "eingewandre multiplikation." (...) And even his inner products, in fact, the "inner products" of Grassmann have much analogy to my "scalar parts" of a quaternion, and his "outer products" to my "vector parts."(...)

⁵⁴ the work is a classic, that it is very difficult to read, and that it contains a large portion of modern vector analysis, which was however deeply embedded within a far broader system, and embedded in such a way that it could be extracted only with difficulty.

⁵⁵ Recién así aparecían las leyes en toda su extensión y generalidad, apareciendo también sus relaciones esenciales, y muchas conexiones que 3 dimensiones todavía permanecen ocultas o visibles sólo parcialmente, resultaban aquí claramente en toda su generalidade.

Na teoria do espaço o ponto aparece como um elemento, como sua variação contínua o deslocamento ou movimento, como suas diversas posições do ponto no espaço. (...) Como exemplo, tomemos novamente a teoria do espaço. Nesta teoria, todos os elementos de um plano são gerados por meio de duas direções diferentes e partindo de um elemento, deslocando o elemento gerador em ambas as direções arbitrariamente e reunindo conceitualmente o conjunto de todos os pontos (elementos) assim gerados. O plano é, portanto, o sistema de segundo grau; ele contém uma quantidade infinita de direções que dependem das primitivas. Ao acrescentar uma terceira direção independente, todo o espaço infinito é gerado com sua ajuda (como um sistema de terceiro grau); não se pode ir além dessas direções independentes (leis de variação), enquanto na pura teoria da extensão, o número delas pode ser aumentado até o infinito. (GRASSMANN, 1947, p.30, tradução nossa⁵⁶)

Soma-se a essa concepção, como ressaltado por Crowe (1994), que Grassmann incluiu em sua obra um viés filosófico que é interessante e historicamente significativo ao decompor a ciência em duas partes.

A divisão principal em todas as ciências é a real e formal. As primeiras representam em pensamento o existente como existindo independentemente do pensamento, e seu trono consiste em sua correspondência com o existente. As ciências formais, por outro lado, têm como objeto o que foi produzido apenas pelo pensamento, e sua verdade consiste na correspondência entre o pensamento que elas mesmas processam. (CROWE, 1994, p.65, tradução nossa⁵⁷)

Nesse sentido, a partir desta caracterização de ciência, vista sob uma vertente de materialização em associação ao aspecto abstrato e formal, nos faz dá um passo a frente e pensar acerca do viés ostensivo e não ostensivo (BOSCH; CHEVALLARD, 1999) dos objetos matemáticos e, de igual modo, pontuar a relevância de uma materialização apregoada por meio do AHA, o qual será revelado posteriormente nesta investigação.

Ao dirigirmos atenção para os números complexos, é inevitável mencionar que a representação geométrica dos mesmos pode ser, legitimamente, considerada, em termos gerais, como um sistema vetorial. Boyer e Gomide (1998) expõem resumidamente as considerações de William R. Hamilton (1805-1865) ao perceber que pares ordenados complexos poderiam ser pensados como entidades orientadas no plano objetivando estender a ideia para três dimensões,

⁵⁶ (...) En la teoría del espacio aparece como elemento el punto, como sua variación continua el desplazamiento o movimiento, como sus diversos estados las diferentes posiciones del punto em el espaci (...). Como ejemplo tomemos outra vez la teoría del espacio. Em ésta se generan mediante dos direcciones distintas y a partir de un elemento, todos los elementos de un plano, desplazándose el elemento generador em ambas direcciones arbitrariamente y reuniéndose conceptualmente el conjunto de todos los puntos (elementos) así engendrados. El plano es pues el sistema de segundo grado; él contiene una cantidad infinita de direcciones que dependen de las primitivas. Agregando una tercera dorección independiente, se genera con su ayuda todo el espacio infinito (como sistema de tercer grado); más allá de estas direcciones (leyes de variación) independientes, no se puede aqui llegar, mientras que em la teoría pura de la extensión, la cantidad de ellas se puede aumentar hasta el infinito.

⁵⁷ The primary division in all the sciences is into the real and formal. The former represent in thought the existent as existing independently of thought, and their trth consist in their correspondence with the existent. The formal sciences on the other hand have as their object what has been produced by thought alone, and their truth consists in the correspondence between the thought processes themselves.

passando dos números complexos binários $a + bi$ às triplas ordenadas $a + bi + cj$. No entanto, a base estrutural dos complexos apresentou aspectos controversos, referentes à aceitação de números como $\sqrt{-1}$ na tentativa de estabelecer comparações de ordem ou equivalência com o zero, questionando-as como legítimas entidades matemáticas para determinar os *quaternions*: “Um quaternion deve consistir assim de uma parte real e um vetor.” (CROWE, 1994, p. 31, tradução nossa⁵⁸). Nesse pensamento, o vetor consistiria, na teoria dos *quaternions*, na parte imaginária dos números complexos, mas discutiremos, a seguir, outros aspectos que envolveram os estudos de Hamilton.

1.1.4 As adaptações feitas por Josiah Willard Gibbs e Oliver Heaviside em associação com o Cálculo Vetorial

O físico americano Josiah Willard Gibbs (1839-1903), um estudante de física elementar, foi quem utilizou o conceito gráfico de vetor como um segmento de reta orientado, obedecendo as definições de igualdade, adição e multiplicação. Dentre as obras de Gibbs, destaca-se a que abordou os princípios fundamentais da análise vetorial, datada de 1901, direcionada a alunos de matemática e física, em que foi apresentada a seguinte definição:

Se qualquer coisa tem magnitude e direção, sua magnitude e direção em conjunto, constituem o que é chamado de vetor. A descrição numérica de um vetor requer três números, mas nada impede de usar uma única letra para sua designação simbólica. Uma álgebra ou método de análise em que uma única letra ou uma expressão é usada para especificar um vetor pode ser denominado álgebra vetorial. (GIBBS, 1901, p. 2)

Contudo, a efetiva sistematização da Álgebra Vetorial ocorreu no século XIX por meio dos trabalhos de William Hamilton com a álgebra dos quatérnions. A motivação dessa teoria partiu da estruturação e representação geométrica dos números complexos, como pontua Menon (2009):

Uma “realização visual” desses abstratos números foi estabelecida em 1797 pelo topógrafo norueguês Gaspar Wessel (e posteriormente por Robert Argand em 1806): representam-se geometricamente os números complexos por pontos no plano, tendo a e b por coordenadas associadas a dois eixos perpendiculares, denominados eixos real e imaginário, respectivamente. Essa representação tem muita semelhança com os vetores no plano (\mathbb{R}^2), embora as definições de multiplicação no \mathbb{R}^2 “álgebra vetorial” e de números complexos sejam completamente distintas. (...). As similaridades geométricas entre números complexos e vetores no plano e, por outro lado, a ausência de correlações entre números complexos e vetores no espaço tridimensional (\mathbb{R}^3) motivaram Hamilton a buscar generalizações dos números complexos em três dimensões. (MENON, 2009, p.4)

⁵⁸ A quaternion may thus be said to consist generally of a real part and a vector.

Crowe (1994) apresenta um detalhamento dessa concepção ao ressaltar a noção de quatérnions idealizada por Hamilton,

São números hipercomplexos da forma $w + ix + jy + kz$, onde w, x, y e z são números reais, e i, j e k são vetores unitários, dirigidos ao longo dos eixos x, y e z , respectivamente. As unidades i, j e k obedecem às seguintes leis: $ij = k; jk = i; ki = j, ji = -k; kj = -i; ik = -j, ii = jj = kk = -1$. Deve-se observar que para dois quatérnions q e q' , qq' não é em geral igual $q'q$. A perda de comutabilidade nos quatérnions, embora seja muito importante historicamente, também é significativa matematicamente, pois isto complica os cálculos nos quais os quatérnions são utilizados. Assim, pode-se verificar que a multiplicação dos quatérnions é associativa e a divisão dos quatérnions é inequívoca. Estas são duas propriedades importantes que têm menção especial, já que não são preservadas na álgebra dos vetores modernos. (CROWE, 1994, p.30, tradução nossa⁵⁹)

Pode-se observar na constituição dos quatérnions, apresentada anteriormente, a existência de três unidades imaginárias e uma real. Nota-se também, aproximações conceituais com os produtos escalar e vetorial, percebendo-se similaridade e mesma estrutura algébrica. Conforme exposto por Menon (2009),

A álgebra de quatérnions, formalmente construída por Hamilton com o desígnio de estabelecer um sistema fechado, reduz-se à álgebra de Gibbs-Heaviside, através de adaptações que, na prática correspondem a: - Separação das partes escalar e vetorial do produto de dois quatérnions puros em dois produtos independentes, hoje conhecidos como escalar e vetorial; - Eliminação do sinal negativo presente na parte escalar do produto de dois quatérnions puros; - Substituição das unidades imaginárias por versores da base retangular. (MENON, 2009, p.5)

Nestes termos, esse autor também sinaliza que,

constrói-se, nessa conjuntura, a álgebra de Gibbs-Heaviside, a qual possui amplas aplicações na Física Clássica (Mecânica Newtoniana e Eletromagnetismo) – embora tudo isso caracterize, de fato, as origens dos produtos escalar e vetorial e da conhecida “Álgebra Vetorial”. (...) De fato, as correlações e contrastes, entre quatérnions e vetores, envolvem várias sutilezas conceituais e foram motivo de intenso debate entre os eminentes criadores das duas abordagens. (op. cit., p.5)

No âmbito dos cursos de álgebra linear o conceito vetorial ganha uma “roupagem” mais genérica definindo-se um espaço vetorial por um conjunto V qualquer, sob um corpo de escalares K , no qual se definem duas operações (adição e multiplicação por escalar) com a exigência da validade de propriedades como: fechamento, comutatividade, associatividade,

⁵⁹ These are hypercomplex numbers of the form $w+ix+jy+kz$, where w, x, y , and z are real numbers, and i, j and k are unit vectors, directed along the x, y , and z axes respectively. The i, j , and k units obey the following laws: $ij = k; jk = i; ki = j, ji = -k; kj = -i; ik = -j, ii = jj = kk = -1$. It is to be noted that for two quaternions q and q' , qq' does not in general equal $q'q$. The loss of commutativity in quaternions, while it is very important historically, is also significant mathematically, because this complicates calculations in which quaternions are used. Thus it may be verified that quaternion multiplication is associative and quaternion division is unambiguous. These are two important properties which bear special mention, since they are not preserved in the algebra of modern vectors

existência de elemento neutro e oposto, distributividade. Denomina-se por vetor qualquer elemento deste conjunto.

Os elementos que satisfazem as condições da definição de um espaço vetorial são denominados vetores. Todavia, na concepção de Bruter (1998, p.93) “o espaço vetorial é o quadro no interior do qual se desenvolve a geometria”, o que nos encaminha a inferir acerca da interdependência entre os habitats no qual “vivem” os vetores. Nesse sentido, é viável identificar que a representação vetorial, citada na introdução desta pesquisa, de grandezas com módulo, direção e sentido, refere-se a tipos específicos de vetores. Como já destacado por Gibbs (1901),

Definição: um vetor é uma quantidade que é considerada como possuindo tanto a direção quanto a magnitude. Definição: um escalar é uma quantidade que é considerada como possuidora de magnitude, mas sem direção. Os números positivos e negativos de álgebra comum são os típicos escalares. Por esta razão, a álgebra comum é chamada de álgebra escalar quando necessário para distingui-la da álgebra vetorial ou análise [...] (GIBBS, 1901, p. 1, tradução nossa⁶⁰)

Indo além dessa concepção preliminar, é relevante sobrelevar que, “o produto de vetores não integra de forma plena o significado de espaço vetorial.” (MENON, 2009, p.7), pois se estabelecermos um comparativo entre as propriedades vetoriais do \mathbb{R}^2 e dos números complexos, por exemplo, e a conceitualização dos produtos vetorial e escalar é possível identificar que algumas propriedades comuns aos espaços vetoriais não se verificam para estes produtos. De fato, tendo em vista que o resultado do produto escalar é um número real, pode-se perceber que a propriedade de fechamento não é válida e, de igual modo, também não faz sentido falar em associatividade.

Quanto ao produto vetorial, pode-se perceber, também, que não se valida a propriedade de fechamento no sentido que passaremos a descrever. Visto que, se considerarmos o espaço vetorial gerado por dois vetores, não nulos, então o produto vetorial entre eles gera um terceiro vetor, simultaneamente ortogonal a estes vetores e, portanto, normal ao plano que os contém ou seja, não pertencente a este espaço vetorial. É importante ressaltar a ausência de associatividade e comutatividade desta operação.

Neste sentido, Gibbs (1901) apresenta a definição de produto escalar,

Definição: O produto direto de dois vetores **A** e **B** é a quantidade escalar obtida pela multiplicação do produto das magnitudes dos vetores pelo cosseno do ângulo entre eles. O produto direto é denotado pela escrita dos dois vetores com um ponto entre eles

⁶⁰ Definition: a vector is a quantity that is considered to have both direction and magnitude. Definition: a vector is a quantity that is considered to possess both direction and magnitude: A scalar is a quantity that is considered to possess magnitude but no direction. The positive and negative numbers of common algebra are typical scalars. For this reason, ordinary algebra is called scalar algebra when necessary to distinguish it from the vector algebra or analysis (...)

como $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. Lê-se A ponto B e, portanto, muitas vezes pode ser chamado de produto ponto ao invés do produto direto. Também é chamado de *produto escalar*, devido ao fato de que seu valor é um escalar. Se A for a magnitude de \mathbf{A} e B a de \mathbf{B} , então, por definição $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A B \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. (GIBBS, 1901, p. 55, grifos nossos, tradução nossa⁶¹)

Esse autor também revela a conceitualização do produto vetorial atrelado a um tratamento geométrico como exposto a seguir:

Definição: O produto oblíquo do vetor \mathbf{A} em \mathbf{B} é a quantidade vetorial \mathbf{C} cuja direção é a *normal* sobre aquele lado do plano de \mathbf{A} e \mathbf{B} em que a rotação de \mathbf{A} para \mathbf{B} através de um ângulo inferior a cento e oitenta graus parece positiva ou anti-horária; e cuja magnitude é obtida pela multiplicação do produto das magnitudes de \mathbf{A} e \mathbf{B} pelo seno do ângulo de \mathbf{A} para \mathbf{B} . A direção de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ também pode ser definida como aquela em que um parafuso comum com a mão direita avança ao girar de modo que carregue \mathbf{A} em direção a \mathbf{B} . O produto oblíquo é denotado por uma cruz, assim com o produto direto por um ponto $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$. (...). Mais freqüentemente, porém, é chamado de produto vetorial, devido ao fato de ser uma quantidade vetorial em contraste com o produto direto ou escalar, cujo valor é escalar. O produto vetorial é, por definição, $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = A B \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mathbf{c}$, onde A e B são as magnitudes de \mathbf{A} e \mathbf{B} , respectivamente, e onde \mathbf{c} é um vetor unitário na direção de \mathbf{C} . (GIBBS, 1901, p.61, grifos do autor, tradução nossa⁶²)

Assim, foi possível constatar que esse escopo histórico epistemológico nos fornecem pistas que apontam para distintos caminhos que envolvem o contexto vetorial e por conseguinte reflete traços da gênese vetorial revelando uma multiplicidade conceitual dos vetores.

1.1.5 Traços da evolução institucional da abordagem vetorial em Cursos de Licenciatura em Matemática

Neste tópico, torna-se pertinente reportar a uma das indagações, as quais se ambiciona analisar no contexto do ensino do cálculo vetorial no domínio de Cursos de Licenciatura em Matemática. Assim, indaga-se: quais a(s) funções (nicho) o saber vetorial assume nos repertórios praxeológicos de futuros professores de matemática? Esse questionamento nos direcionou a retroceder no tempo e visitar alguns traços de registros históricos que revelam traços da trajetória do primeiro Curso de Licenciatura em Matemática no Brasil. Dito de outra

⁶¹ Definition: The direct product of two vectors \mathbf{A} and \mathbf{B} is the scalar quantity obtained by multiplying the product of the magnitudes of the vectors by the cosine of the angle between them. The direct product is denoted by writing the two vectors with a dot between them as $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. This is read \mathbf{A} dot \mathbf{B} and therefore may often be called the dot product instead of the direct product. It is also called the scalar product owing to the fact that its value is scalar. If A be the magnitude of \mathbf{A} and B that of \mathbf{B} , then by definition $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A B \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

⁶² Definition: The skew product of the vector \mathbf{A} into the vector \mathbf{B} is the vector quantity \mathbf{C} whose direction is the normal upon that side of the plane of \mathbf{A} and \mathbf{B} on which rotation from \mathbf{A} to \mathbf{B} through an angle of less than one hundred and eighty degrees appears positive or counter clockwise ; and whose magnitude is obtained by multiplying the product of the magnitudes of \mathbf{A} and \mathbf{B} by the sine of the angle from \mathbf{A} to \mathbf{B} . The direction of $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ may also be defined as that in which an ordinary right-handed screw advances as it turns so as to carry \mathbf{A} toward \mathbf{B} . The skew product is denoted by a cross as the direct product was by a dot. It is written $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$. (...) More frequently, however, it is called the vector product, owing to the fact that it is a vector quantity and in contrast with the direct or scalar product whose value is scalar. The vector product is by definition $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = A B \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mathbf{c}$, when A and B are the magnitudes of \mathbf{A} and \mathbf{B} respectively and where \mathbf{c} is a unit vector in the direction of \mathbf{C} .

forma, emergiu o intuito de perquirir o sentido deste saber no âmbito do ensino e aprendizagem, seguindo os pressupostos ecológicos que advém da Teoria da Transposição Didática - TTD, ou seja, metaforicamente é como se colocássemos uma lente de aumento nas condições de existência dos vetores em diferentes tipos de ecossistemas, enfocando as transformações e adaptações sofridas neste processo. Vertente essa que, se interliga com a declaração de Lima (2002),

Primeiramente, nesse sentido, destacamos que o conhecimento científico, incluindo a matemática, está em constantes transformações. No entanto, tais transformações não significam atualmente, e muito menos em um passado distante ou recente, uma passagem linear e homogênea de um estágio contínuo de uma teorização anterior para uma posterior, num sentido crescente e unívoco de evolução, sem rupturas, erros, enganos e retornos. (LIMA, 2002, p. 231)

O percurso intermitente e descontínuo das adaptações e modificações pelas quais são impulsionados os saberes sábios, entre “idas e vindas”, são também delineados em termos didáticos pelo processo transpositivo, respaldado pela trajetória histórica-epistemológica, cuja promulgação do saber⁶³ muitas vezes não é um objeto puro e livre de interferências, as quais atrelam-se as disputas e, muitas vezes, são nutridas por interesses difusos que acompanham as tradições dos grupos de matemáticos, como também salientou Lima (2012) acerca de um dos certames vivenciados na primeira metade do século XX,

um confronto entre a abordagem geométrica e a algébrica, delineado, principalmente, entre as escolas de matemática italiana e a bourbakista circunscrito no campo da geometria algébrica, por outro, esse confronto também foi marcado pelas disputas políticas internacionais do período, envolvendo inclusive questões que estavam relacionadas ao fascismo, nazismo e matemáticos de nacionalidade judia. (Ibid, p. 234)

Assim, é possível perceber que os entraves científicos podem influenciar e refletir no processo transpositivo, provenientes dos trabalhos desenvolvidos por matemáticos condicionados ao intuito de atender diferentes interesses e significações, seja nas formas de fazer ou padrões exercidos, muitas vezes pautados na necessidade de construções de teorias da matemática, pois ainda segundo esta autora,

Essa forma de pensar o conhecimento matemático acabou influenciando por gerações a própria prática do exercício matemático, que ainda hoje está presente na organização do conhecimento matemático em todos os seus níveis de ensino, notadamente na articulação das disciplinas científicas para o ensino matemático superior. (Ibid, p.232)

A partir dessa declaração é viável observar traços que delineiam o processo transpositivo, o que significa dizer que as formas de organização do saber matemático remetem para práticas e articulações características das componentes curriculares no ensino superior.

⁶³ Em Conne (1996, p.222) apresenta-se a concepção de que o saber deve ser descontextualizado, despersonalizado, e mesmo sócio-culturalmente instituído.

Nessa linha de raciocínio é pertinente “retornar às raízes” e considerar que para tratarmos do contexto no domínio vetorial é crucial atentar-se para os caminhos de institucionalização da geometria e da álgebra linear no Brasil. Em outras palavras, faremos incidir uma luz acerca do Saber a Ensinar – SaE difundido no período em que são inaugurados os cursos de Licenciatura em Matemática no cenário brasileiro e para tanto os estudos de Ziccardi (2009) nos auxiliam nesse aspecto,

Em 1934, o Curso Matemático, destinado à formação de professores na FFCL⁶⁴ da Universidade de São Paulo, tinha a duração de três anos e compreendia basicamente as disciplinas de: Geometria (analítica e projetiva), Análise Matemática, Física Geral e Experimental, *Cálculo Vetorial*, Mecânica Racional e Geometria Superior, Física Teórica e Experimental fazia parte da formação do professor de matemática e isso permanece até os dias atuais. (ZICCARDI, 2009, p. 56, grifos nossos)

A autora destaca também que, no ano subsequente, foi identificado que a grade curricular do primeiro ano, da subseção de Matemática da FFCL da USP, era composta pelas disciplinas: Geometria (analítica e projetiva), Análise Matemática, Física Geral e Experimental, Cálculo Vetorial. Aspecto este, que desperta a nossa atenção acerca da necessidade de uma componente curricular destinada unicamente para o estudo dos vetores. Ela observou que em 1941 tinha-se as seguintes configurações para as componentes curriculares geometria e análise,

[...] A Geometria e a Análise, nos dois primeiros anos, têm um desenvolvimento no sentido da matemática pura, as próprias aplicações focalizam questões tanto quanto possível, abstratas. Utiliza-se da Geometria Descritiva para melhor ampliar o conhecimento do espaço. *O cálculo Vetorial* e Hemográfico permite um preparo sólido que os alunos devem possuir para enfrentar o estudo da Física da Mecânica Racional. [...] (Ibid, 2009, p.140, grifos nossos)

Nesses termos, Ziccardi (2009) também contemplou em sua investigação acerca dos Cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC – SP), descrevendo fatos que caracterizam três períodos: implantação (década de 1940), reforma (década de 1970) e nos dias atuais promovendo uma análise que envolveu as modificações e reformulações curriculares a partir da categorização das grades curriculares e ementas das disciplinas,

O curso nas décadas de 1940 e 1970 forneceu uma base sólida de Cálculo Diferencial e Integral sendo os conteúdos trabalhados durante dois anos do curso chegando ao Cálculo Avançado com Integrais de Linha e de Superfícies e os Teoremas de Gauss e Stokes. Esses conteúdos eram complementados por disciplinas de Análise Matemática, Equações Diferenciais Complexas, *Cálculo Vetorial* e Topologia. (Ibid, p.326)

⁶⁴ Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da USP.

Os conteúdos programáticos das disciplinas Geometria Analítica I e Geometria Analítica II do curso de Matemática da PUC- SP, inerentes ao Projeto de Estruturação de 1971, revelam o protagonismo dos vetores,

Geometria Analítica I – *Vetores*; Dependência Linear; Bases; Produtos; Equações e Sistemas *Vetoriais*; Coordenadas no Espaço; Transformações de Coordenadas; Estudo da Reta e do Plano no Espaço; Distância; Área e Volumes. Geometria Analítica II – *Cálculo Vetorial*; Curvas e Superfícies; Quádricas. (ZICCARDI, 2009, p.188, grifos nossos)

Nos três momentos analisados pela autora, é possível perceber que o curso ofereceu disciplinas de Geometria com variações apenas de carga horária,

Vale ressaltar que nem sempre as disciplinas de geometria trabalharam conteúdo do ensino superior, como Geometria das Transformações ou Geometrias não Euclidianas. Na década de 2000, houve um investimento maior em disciplinas de Geometria no curso de Licenciatura em Matemática e um dos fatores que pode explicar em parte este incremento é o fato de diversas pesquisas da área de Educação Matemática, desde a década de 90, apontarem em suas ementas as construções com recursos computacionais, com o software Cabri-Geomètre. (Ibid, p. 327, grifos nossos)

Como forma de estreitar e particularizar o nosso olhar, direciona-se atenção para o cenário baiano, no contexto da segunda metade do séc. XX, período em que o Movimento da Matemática Moderna - MMM no Brasil influenciou o campo das ideias matemáticas, desencadeando fortes mudanças nos programas curriculares, os quais repercutiram nas práticas escolares. Pesquisadores que se detiveram aos estudos dessa abordagem apontaram para o destaque de alguns professores da Universidade da Bahia - UBa⁶⁵ os quais integravam um grupo de estudos e pesquisas, coordenado pela professora Martha Maria de Souza Dantas⁶⁶ sob a supervisão do professor Omar Catunda⁶⁷. Nestes termos, Camargo (2009) sinaliza que os projetos concebidos por essa equipe tinham como meta introduzir a Matemática Moderna nas escolas secundárias da Bahia. Assim, livros foram produzidos, cursos ministrados com o propósito de introduzir e difundir os ideários do MMM na Bahia.

Os estudos de Dias (2002) revelam também que os esforços de Martha Dantas, e Omar Catunda, contribuíram significativamente para o processo de institucionalização de novos padrões de exercícios de Matemática na UBa, a qual foi fortalecida com a implantação do Instituto de Matemática e Física idealizado pela professora Arlete Cerqueira Lima após confrontar a forma em que a matemática era difundida na Faculdade de Filosofia e na USP, pois ao equiparar e “comparar a matemática que estudara na Faculdade de Filosofia – FF com a

⁶⁵ Atualmente Universidade Federal da Bahia – UFBA.

⁶⁶ Foi professora de Didática da Matemática na Faculdade de Filosofia da Universidade da Bahia.

⁶⁷ Foi professor catedrático da Faculdade de Filosofia da Universidade de São Paulo e, depois, diretor do Instituto de Matemática e Física da Universidade da Bahia.

matemática moderna que conheceu em São Paulo, ela construiu seu próprio julgamento: a situação baiana era de atraso e anacronismo.” (DIAS, 2002, p.149, grifos do autor).

Nesse ínterim, a união e os esforços desses professores recebem apoio do professor de física, Ramiro de Porto Alegre Muniz, do reitor Edgar Santos e do matemático Leopoldo Nachbin. A partir deste cenário, o que mais se aproxima do nosso foco de interesse refere-se ao movimento de algebrização da geometria que, segundo Camargo (2009),

Ao que tudo indica o ensino da geometria durante o MMM assumiu uma dinâmica particular em relação aos outros conteúdos da matemática, pelo fato do ideário do MMM ter a intenção de trazer para o ensino secundário a algebrização da geometria. Segundo documentos da época, a algebrização poderia ser realizada por três linhas: *via modificações dos axiomas de Euclides, por meio dos grupos das transformações geométricas ou via espaços vetoriais.* (CAMARGO, 2009, p.25, grifos nossos)

Nesses termos, é possível perceber que a introdução da abordagem vetorial era apresentada aos alunos desde o final do ginásial (contemporaneamente Ensino Fundamental II série finais), tornando-se gradualmente mais rebuscada no secundário e no nível universitário. Aspecto este evidenciado no trecho do prefácio do livro 3 de Catunda e colaboradores,

No terceiro ano ginásial, estudam-se, primeiramente, as transformações geométricas na reta. Em seguida, partindo da observação e tomando por base propriedades bastante intuitivas, introduz-se *a estrutura de espaço vetorial do conjunto das translações no plano.* O conjunto dos pontos do plano é, então, *o espaço afim bi-dimensional associado ao espaço vetorial assim definido.* Desta maneira se apresentam, naturalmente, as coordenadas cartesianas ligadas a um sistema de referência constituído por um ponto O e *dois vetores não paralelos u e v* (sistema Ouv). (CATUNDA, 1971, p. VII, apud CAMARGO, 2009, p. 84, grifos nossos).

Sob a orientação de Catunda, foi elaborado um projeto direcionado ao ensino atualizado de matemática, em parceria com professoras da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, as quais tinham formação e experiência no âmbito metodológico do ensino de matemática, tendo como objetivo principal preencher algumas lacunas do conhecimento e subsidiar a orientação no estudo da matemática superior. Nestes termos, dedica-se o terceiro capítulo à introdução da geometria afim no espaço, de modo análogo ao que foi desenvolvido para o plano, no curso ginásial. Assim, as translações figuram o limiar do capítulo,

A introdução dos *vetores* como representando translações no plano se aplica, sem alterações, ao caso do espaço ordinário (chama-se, assim, o meio onde estão imersos todos os corpos da natureza). As translações se compõem no espaço da mesma maneira no plano, e essa composição satisfaz às mesmas propriedades já vistas. Também se estende ao caso do espaço ordinário a operação chamada multiplicação por um escalar. Em conclusão, o conjunto das translações no espaço ordinário tem a estrutura de espaço vetorial, razão pela qual cada translação é representada por um vetor. O conjunto desses vetores será indicado por V . (CATUNDA et al, 1971, p. 77, grifos nossos)

Em outra obra, Catunda e colaboradoras (1988), destacam aspectos que demonstram preocupações com o ensino de geometria, atribuindo ausência de renovação, formalismo excessivo e vínculos exclusivos de medida como causas primeiras para a perda de vigor no ensino geométrico. Os autores conduzem o texto evidenciando que o ensino de geometria deve se basear na ideia de vetor, refletido no conceito intuitivo de translação, acompanhada das noções de simetria axial e de multiplicação por escalar, exploradas até a introdução das figuras planas elementares: triângulo, paralelogramo e trapézio. Desse modo, estabelecem um comparativo entre a Geometria Euclidiana e a Geometria das Transformações.

A Geometria de Euclides foi desenvolvida por ele e por seus continuadores de uma maneira estática. Isto quer dizer que as figuras são apresentadas e descritas como resultados de observação. Só depois é que se consideram as transformações dessas figuras. Se o ensino da Geometria começa a partir das transformações (o que já poderá ser feito na escola primária, através de jogos) a Geometria adquirirá um aspecto dinâmico porque as figuras passarão a ser construídas por meio do uso dessas transformações. (CATUNDA et al., 1988, p.11)

A partir de perspectiva semelhante, Gascón (2002) também retoma e relembra, em um dos seus artigos, aspectos constituintes de um palco de controvérsias e discussões, ocorrido na década de sessenta, cuja pauta principal fazia referência a que tipo de geometria que deveria estar presente na formação matemática básica de todo cidadão. Simplificando abusivamente a questão, pode-se dizer que a discussão polarizada entre adeptos de uma geometria sintética, típico do modelo "euclidiano" que basea-se em uma axiomática mais ou menos explícita, e os apoiantes de uma geometria analítica, específica do modelo "cartesiano", em que suas práticas se fundamentam em técnicas de álgebra linear por meio de uma axiomática implícita. Este autor ressaltou que se trata de uma controvérsia "curricular" que raramente envolve argumentos didático-matemáticos, pois

Embora no momento tenha alcançado certo consenso - pelo menos aparentemente - confirmando geometria sintética no ensino obrigatório e geometria analítica no pós-obrigatório, é previsível que a controvérsia mencionada reapareça, já que não foi encerrada com argumentos sólidos e, o que é mais óbvio, nenhuma resposta foi dada à descontinuidade flagrante entre a geometria sintética do ensino secundário e a geometria analítica do bacharelado. (GASCÓN, 2002, p.13, tradução nossa⁶⁸)

Aspecto este também pontuado pelo próprio Dieudonné (1964) ao destacar que:

Ensinamos nos últimos anos do ensino médio e até recentemente nas aulas preparatórias para grandes escolas (assim como em muitas universidades estrangeiras), uma lista impressionante de "ciências": geometria pura, geometria analítica, trigonometria, geometria projetiva, geometria conforme, geometria não

⁶⁸ Aunque en estos momentos se ha alcanzado un cierto consenso – al menos aparentemente – confinando la geometría sintética en la enseñanza obligatoria y la geometría analítica en la post-obligatoria, es pre-visible que la citada controversia vuelva a aparecer, pues-to que no há sido cerrada con argumentos sólidos y, lo que es más evidente, no se ha dado ninguna respuesta a la flagrante discontinuidad entre la geometría sintética de la ESO y la geometría analítica del Bachillerato.

euclidiana e teoria dos números complexos. Não só todas essas disciplinas as quais, são geralmente apresentadas isoladamente, mas também é comum ver cada uma delas tentando ignorar completamente as outras e vangloriando-se de sua independência: *as grotescas discussões dos geometras sintéticos e analíticos também. incompreensível para nós como discussões bizantinas sobre o modo desde o programa de Ganho de Felix Klein que desobstruiu outra era e ainda esconde uma única disciplina, a álgebra linear* dos matemáticos modernos, que também inclui, é claro, a teoria clássica dos sistemas de equações lineares, mas tornou-se, com suas ramificações atuais (que vão muito além até mesmo do ensino do universitário), uma das teorias mais centrais e eficazes da matemática contemporânea, rica nas mais variadas aplicações, da Teoria dos Números à Física Teórica, por meio de Análise, Geometria e Topologia. (DIEUDONNÉ, 1964, p. 11-12, grifos nossos, tradução nossa⁶⁹)

As ramificações da geometria são denominadas por Dieudonné como “pseudociências” e seu anseio é que fossem esquecidas o quanto antes, até mesmo seu nome. A exemplo da Geometria Analítica,

É urgente, entre outras coisas, libertar o nome de Geometria Analítica, que é certamente a melhor para designar uma das teorias mais vivas e profundas da matemática moderna, as das "variedades analíticas", que se assemelham à "Geometria Algébrica", estudo de variedades algébricas. (DIEUDONNÉ, 1964, p. 12, tradução nossa⁷⁰)

No entanto, Dieudonné em seus discursos transitou por argumentações contraditórias, que nos direcionou a pensar se ele realmente tentava se desvencilhar das “amarras” do campo geométrico, contudo nem sempre isso ocorria. Neste sentido, Hans Freudenthal (1967, apud GASCÓN, 2002) descreve esse aspecto um tanto contraditório, pois

em sua crítica a Dieudonné enfatiza que ele usa o modelo epistemológico "euclidiano" no desenvolvimento do texto Álgebra Linear e Geometria Elementar, especialmente paradoxal, quando o autor (Dieudonné) é o mesmo que lançou o famoso “Abaixo Euclides!”. Embora Freudenthal não tenha expressado com muita clareza esse aspecto, parece que o que ele critica do ponto de vista de Dieudonné é o fato de que este esconda os problemas por trás de suposições, razões para escolher alguns axiomas em detrimento de outros e, em última instância, a ocultação dos problemas que dão

⁶⁹ On enseigne en effet peu ou prou, dans les années terminales des lycées et même jusqu'il y a peu de temps dans les classes préparatoires aux grandes Ecoles (ainsi que dans beaucoup d' Universités étrangères) toute une impressionnante liste de "sciences": la géométrie pure, géométrie analytique, trigonométrie, géométrie projective, géométrie conforme, géométrie non-euclidienne et la théorie des nombres complexes. Non seulement toutes ces disciplines sont-elles en général présentées isolément, mais encore est-il fréquent de voir chacune s'efforcer d'ignorer totalement les autres et se targuer de son indépendance: les grotesques querelles des géomètres synthétiques et des géomètres analytiques, aussi incompréhensibles pour nous que les discussions byzantines sur le modo depuis le programme d'Erlangen de f. Klein que sous détroques d'un autre âge se cache toujours une seule et même discipline, l'algèbre linéaire des mathématiciens modernes, qui englobe aussi, bien entendu, la théorie classique des systèmes d'équations linéaires, mais est devenue, avec ses ramifications actuelles (qui vont bien au-delà même de l' enseignement de la Licence), une des théories les plus centrales et les plus efficaces de la Mathématiques contemporaine, riche en applications les plus variées, de la Théorie des nombres à la Physique théorique, en passant par l' Analyse, la Géométrie et la Topologie.

⁷⁰ Il est urgent entre autres de libérer le nom de Géométrie analytique, qui est certainement le meilleur pour désigner une des théories les plus vivantes et les plus profondes de la Mathématique moderne, celles des "variétés analytiques", qui fait pendant à la "Géométrie algébrique, étude des variétés algébriques.

origem à geometria como organização matemática. (FREUDENTHAL, 1967, apud GASCÓN, 2002, p.15, tradução nossa⁷¹)

Nesse sentido, essa concepção, torna-se mais evidente ao observar a declaração de Dieudonné (1964),

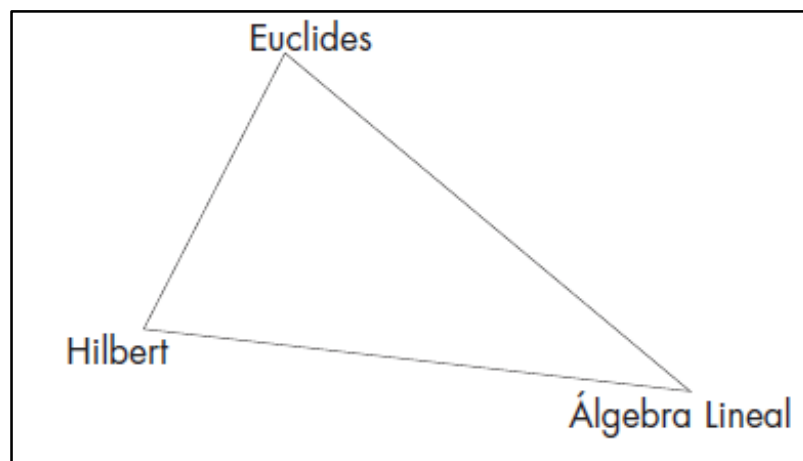
O que me oponho totalmente, por outro lado, é o que se poderia chamar de "método de andaime preliminar". Sob o pretexto de que o sistema de axiomas da Álgebra Linear é 'muito abstrato', gostaríamos, antes de introduzi-lo, a partir de outro sistema de axiomas, considerado mais acessível, e daí deduzir os axiomas da Álgebra Linear. Em suma, o que Hilbert fez em seus famosos trabalhos sobre os fundamentos da geometria, tomando como ponto de partida os axiomas euclidianos devidamente preenchidos. Todos sabem que esse feito ultrapassa, em muito, o nível do ensino médio, mas desde então foram feitas tentativas de se chegar a um acordo entre o andaime de Euclid-Hilbert e a simples axiomática da álgebra linear; o mais conhecido é, sem dúvida, o sistema de axiomas recentemente proposto por Choquet, *de notável engenhosidade que atesta o grande talento do seu autor, mas que considero perfeitamente inútil e até prejudicial. Só se justificaria se os conceitos que estão na base dos axiomas do plano euclidiano, adição de vetores, multiplicação por um escalar e produto escalar de dois vetores, eram extremamente abstratos e difíceis de representar graficamente*; todo mundo sabe que não é assim e alguns meses de experimentos em papel quadrado deveriam bastar para acostumar o aluno ao manuseio e prepará-lo para admitir sem hesitação que o edifício algébrico-geométrico se baseia em propriedades das quais é fácil verificar a precisão experimental. Então, de que adianta sobrecarregar sua memória com os chamados axiomas que ele terá que se apressar em esquecer? Na verdade, estamos simplesmente testemunhando aqui um sistema tradicional de axiomas, mais frequente do que se pensa entre os matemáticos profissionais, mesmo muito além do nível da geometria elementar, e que não me comprometerei a explicar. (DIEUDONNÉ, 1964, p.17, grifos nossos, tradução nossa⁷²)

⁷¹ en su crítica a Dieudonné subraya que éste utiliza el modelo epistemológico «euclidiano» en el desarrollo del texto Álgebra Lineal y Geometría Elemental, especialmente paradójico máxime cuando el autor (Dieudonné) es el mismo que lanzó el célebre «¡Abajo Euclides!». Aunque Freudenthal no lo acaba de expresar con demasiada claridad, parece que lo que critica del punto de vista de Dieudonné es el hecho de que éste esconda los problemas que hay detrás de las conjeturas, las razones de la elección de unos axiomas en lugar de otros y, en definitiva, la ocultación de la problemática que da origen a la geometría como organización matemática.

⁷² Ce par contre à quoi je suis tout à fait opposé, c'est ce que l'on pourrait appeler "la méthode de l'échafaudage préalable". Sous prétexte que le système d'axiomes de l'Algèbre linéaire est 'trop abstrait', on voudrait, avant de l'introduire, partir d'un autre système d'axiomes, réputé plus accessible, et en déduire ensuite les axiomes de l'Algèbre linéaire. C'est en somme ce qu'avait fait Hilbert dans célèbres travaux sur les fondements de la Géométrie en prenant pour point de départ les axiomes d'Euclide convenablement complétés. Chacun sait que ce tour de force dépasse de loin le niveau de l'Enseignement secondaire, mais on a tenté depuis lors des compromis entre l'échafaudage d'Euclide- Hilbert et l'axiomatique nue de l'Algèbre linéaire; le plus connu est sans doute le système d'axiomes proposé récemment par Choquet, d'une remarquable ingéniosité qui témoigne du grand talent de son auteur, mais que je tiens pour parfaitement inutile et même nuisible. Il ne se justifierait que si les notions qui sont à la base des axiomes du plan euclidien, addition des vecteurs, multiplication par un scalaire et produit scalaire de deux vecteurs, étaient extrêmement abstraites et difficiles à représenter graphiquement; chacun sait qu'il n'en est rien et quelques mois d'expériences sur le papier quadrillé devraient suffire pour accoutumer l'élève à leur maniement, et le préparer à admettre sans hésitation que l'on fonde l'édifice algébrico-géométrique sur des propriétés dont il lui est facile de vérifier l'exactitude expérimentale. Dès lors, à quoi bon surcharger sa mémoire de soi-disant axiomes qu'il lui faudra s'empresse d'oublier? En fait, on assiste simplement là à un système traditionnel d'axiomes, plus fréquent qu'on ne croit chez les mathématiciens professionnels, même bien au-delà du niveau de la Géométrie élémentaire, et que je ne me chargerai pas d'expliquer.

Ao mesmo tempo em que tece elogios para o trabalho de Choquet, ressalta que suas construções teóricas são desnecessárias e prejudiciais. Parece-nos que ele também considera relevante o caráter experimental ao recomendar o uso do papel quadriculado como uma ferramenta que auxiliaria a compreensão dos estudantes no que tange ao edifício algébrico-geométrico. Enfim, em termos transpositivos Gascón (2002) apoia interpretações primeiras, no âmbito da noosfera (Chevallard, 1985) e completa seus preceitos citando Artin (1963, apud GASCÓN, 2002, p.14) que caracterizou a “controvérsia inicial como um "conjunto convexo" de opiniões delimitado por três opiniões extremas.”

Figura 4 - Triângulo de opiniões



Fonte: (Artin, 1963, apud Gascón 2002, p.15)

Nuances dessas concepções já eram propagadas e estavam pautadas no advento da curricularização difundida no século XIX, a demanda de uma integralização entre cálculo, geometria e álgebra interligava-se aos discursos dos autores interessados na temática retratando traços controvertidos acerca das modificações propostas para geometria, visto que,

(...) parece muito difícil obter um acordo geral sobre as mudanças na geometria. (...), mas não é o desenvolvimento de um vínculo mais estreito entre álgebra e geometria, pelo qual um indivíduo não as considera mais como duas disciplinas independentes, de importância ainda maior? A geometria vetorial oferece uma excelente oportunidade para tal desenvolvimento. (...). Em primeiro lugar, os dados para o estudo da geometria são: a) A aquisição de informações sobre figuras geométricas no plano e no espaço; b) O desenvolvimento de uma compreensão do método dedutivo como forma de pensar, e uma habilidade razoável em aplicar este método a situações matemáticas; c) A oferta de oportunidades para o pensamento original e criativo dos alunos. (TROYER, 1963 p.290, tradução nossa⁷³)

⁷³ (...) it seems very difficult to obtain general agreement concerning changes in geometry. (...) But is not the development of a closer tie between algebra and geometry, whereby an individual no longer regards them as two unrelated disciplines, of even grater importance? Vector geometry affords one excellent opportunity for such a

Nos moldes da TTD guiados pela argumentação de Gascón (2002) fitamos a atenção no problema didático-matemático subjacente a essa problemática. Este autor também aponta em sua investigação, alguns elementos que consideramos pertinentes destacar. O primeiro enfoque refere-se às concepções de renomados matemáticos, a exemplo Choquet (1964) que considerou que

as axiomáticas de Euclides-Hilbert ocultam a estrutura vetorial do espaço porque são baseados nas noções de comprimento, ângulo e triângulo. Nestas axiomáticas é possível ver o triângulo, mas estava cego ao paralelogramo que levaria à noção de vetor. (CHOQUET, 1964, apud GASCÓN, 2002, p.15)

Neste sentido, ele expõe seu posicionamento favorável ao ensino de geometria elementar a partir de álgebra linear.

Dieudonné (1964, apud GASCÓN, 2002, p15, tradução nossa⁷⁴) “concorda com Choquet em relação ao avanço e simplificação que a álgebra linear representa quando comparado com os axiomas de Euclides-Hilbert.” No entanto, Gascón (2002) também aborda o posicionamento de Dieudonné ao revelar uma força em favor do ensino da álgebra linear, suprimindo e rejeitando as figuras e questionando a utilização dos instrumentos de desenho como régua e compasso, mesmo ao trabalhar com espaços de dimensões 2 e 3 e ao corpo \mathbb{R} dos escalares, expondo que:

a continuidade do ensino, ou seja, a vantagem de ensinar um tipo de geometria que não exigirá que ocorra mais tarde para matemática superior; aprendizagem precoce de métodos "modernos", que por si só não são mais difíceis que os tradicionais; e a unificação das disciplinas ensinadas (trigonometria, geometria projetiva, geometria não-euclidiana, números complexos, geometria pura ...), em vez de tratá-las independentemente, como se fossem universos não relacionados. (DIEUDONNÉ, 1964, apud GASCÓN, 2002, p.15, tradução nossa⁷⁵)

Gascón (2002) também inclui em suas inferências as concepções de Santaló (1980), um matemático espanhol que criticou o ponto de vista de Dieudonné (dominante durante a

development. (...)First, the objectives given for the study of geometry are: a) The acquisition of information about geometric figures in the plane and in space; b) The development of an understanding of the deductive method as a way of thinking, and a reasonable skill in applying this method to mathematical situations; c) The provision of opportunities for original and creative thinking by students.

⁷⁴ Dieudonné(1964) también coincide con Choquet en lo que respecta al avance y simplificación que representa el álgebra lineal si se compara con los axiomas de Euclides-Hilbert.

⁷⁵ la continuidad de la enseñanza, esto es, la ventaja de enseñar un tipo de geometría que no precisará de ningún rompimiento para pasar posteriormente a la matemática superior; 5el aprendizaje precoz de los métodos «modernos» que, de por sí, no son más difíciles que los tradicionales; y la unificación de las disciplinas enseñadas (trigonometría, geometría proyectiva, geometría euclídea, números complejos, geometría pura...), en lugar de tratarlas independientemente, como si se tratase de universos no relacionados entre sí.

revolução da chamada "matemática moderna"), dando voz à problemática que acompanhou o ensino da geometria, pautados no MMM ao destacar que,

(...) Mas na geometria o fenômeno tradicional ocorreu novamente. Procurou-se inviabilizar uma construção rigorosa e impecável da Geometria sem sair do nível elementar ou da capacidade de aprendizagem dos alunos e, como isso é impossível, decidiu-se, drasticamente, suprimir a Geometria ou transferi-la para a Álgebra Linear, com perda total de suas próprias características de beleza e harmonia que a adornavam desde os tempos antigos. (SANTALÓ, 1980, p. 24, tradução nossa⁷⁶)

O ponto de vista de Santaló (1980) dialoga e coaduna diretamente, além de apresentar similitudes, com o posicionamento de Catunda e equipe, ao demonstrar em poucas palavras um comparativo entre geometria afim e geometria métrica,

Não há dúvida de que pensar a matemática como uma construção intelectual, construída sob uma ordem estrita de complexidade crescente (a geometria afim aparece antes da métrica), suas regras são mais simples e são mais facilmente preservadas em deduções e, além disso, a passagem posterior ou simultânea para espaços vetoriais é mais fácil (a geometria afim algebriza linearmente). (SANTALÓ, 1980, p.26, tradução nossa⁷⁷)

Soma-se a esses aspectos o cenário descrito por Dorier (2002) acerca do currículo de matemática no domínio geométrico, na França, o qual nos fornece pistas e características inerentes ao período em que MMM protagonizou e guiou alterações no ensino.

Muitos departamentos de matemática decidiram criar um curso de segundo ano sobre geometria cartesiana e vetorial como pré-requisito para o curso mais formal de teoria do espaço vetorial. No entanto, essa atitude mostra que a geometria é vista pela maioria dos matemáticos como um contexto natural para a introdução dos principais conceitos de linearidade. Essa idéia foi explícita no famoso livro de Dieudonné, *Algebra Linear e Geometria Elementar* (Dieudonné, 1964) (...) o papel crucial que desempenhou na reforma da Matemática Moderna no ensino secundário na França. Portanto, há uma forte ênfase cultural (pelo menos na França) que sugere uma relação natural entre geometria e álgebra linear. No entanto, do ponto de vista histórico, a questão está longe de ser tão simples. (DORIER, 2002, p.12, tradução nossa⁷⁸)

⁷⁶ Pero en la geometria volvió a ocurrir el fenómeno tradicional. Se intentó hacer el imposible de una construcción rigurosa e impecable de la Geometria sin salirse del nivel elemental ni de la capacidad de aprendizaje de los alumnos y, como esto resulta imposible, se optó, drásticamente, para suprimir la Geometria o trasladarla al álgebra lineal, con pérdida total de sus características de belleza y armonia propias que la habian ido adornando desde la antigüedad.

⁷⁷ Geometria afim y geometria métrica. No hay duda de que pensando en la matemática como una construcción intelectual, edificada bajo un estricto orden de complejidad creciente (la geometria afim aparece antes que la métrica) sus reglas son más simples y se conservan más fácilmente en las deducciones y, además, el posterior o simultáneo paso a los espacios vectoriales es más fácil (La geometria afim se algebriza linealmente).

⁷⁸ Many mathematics departments decided to create a sophomore course on Cartesian and vector geometry as a prerequisite for the more formal course on vector space theory. Nevertheless, this attitude shows that geometry is seen by most mathematicians as a natural context for introducing the main concepts of linearity. This idea was explicit in Dieudonné's famous book *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (Dieudonné 1964) and we will show, at the end of this paper, the crucial role it played in the reform of Modern Mathematics in secondary teaching in France. Therefore, there is a strong cultural emphasis (at least in France) that suggests a natural relationship between geometry and linear algebra. Nevertheless, from a historical viewpoint, the question is far from being so simple.

Retornando ao contexto baiano, contagiado pelas premissas do MMM difundido no ensino europeu, nota-se que Catunda et al (1988) embasam e fundamentam suas escolhas pelas transformações geométricas baseadas em recomendações, a exemplo de Félix Klein que afirmou: “o conceito de transformação desempenha um vasto papel coordenador e simplificador no estudo da Geometria” (KLEIN, 1872, apud CATUNDA et al., 1988, p.13). Enfoque este, evidenciado em um dos escritos de Felix Klein (1939, p. 47, tradução nossa⁷⁹) ao apresentar o cálculo do volume do tetraedro e correlacioná-lo com as transformações geométricas: translações, rotação e reflexões,

Se entrarmos em detalhes, podemos distinguir diferentes tons na noção de escalar. Vamos considerar, primeiro, como exemplo, o segmento espacial, ou o volume do tetraedro:

$$T = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Isso se transforma, como é facilmente verificado por cálculo, da seguinte maneira:

Sob	Translação	Rotação	Inversão	Mudança do comprimento da unidade
Em	T	T	$-T$	$\lambda^3 T$

Destacando que os vetores são fundamentais nas configurações reveladas, pois:

(...). Devemos agora investigar como podemos obter, a partir de combinações de configurações fundamentais dadas (vetores e escalares de ambos os tipos), configurações adicionais da mesma espécie. Devemos considerar o primeiro exemplo muito simples. Seja T um escalar do segundo tipo, digamos o volume de um tetraedro, e seja X, Y, Z as coordenadas de um vetor polar. (KLEIN, 1939, p.48, tradução nossa⁸⁰)

⁷⁹ If we go into detail, we can distinguish different shades in the notion of scalar. Let us consider, fist, as example, the space-segment, or the volume of the tetrahedron:

$$T = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

This transforms, as is easily verified by calculation, as follows:

UNDER	TRANSLATION	ROTATION	INVERSION	CHANGE OF UNIT LENGTH
Over into	T	T	$-T$	$\lambda^3 T$

⁸⁰ We shall now inquire how we can obtain, from combinations of given fundamental configurations (vectors and scalars of both kinds), additional configurations of the same species. We shall consider fist a very simple example. Let T be a scalar of the second kind, say the volume of a tetrahedron, and let X, Y, Z be the coordinates of a polar vector.

Na sequência de suas considerações Klein (1939) expõe algumas interpretações geométricas, dentre as quais citamos quatro que contemplam as configurações vetoriais, deixando claro que “não é costume dar importância primária, como fazemos aqui, a uma investigação do comportamento de certas expressões analíticas sob a transformação das coordenadas, ou seja, uma teoria racional e simples de invariantes.” (KLEIN, 1939, p. 49, tradução nossa⁸¹).

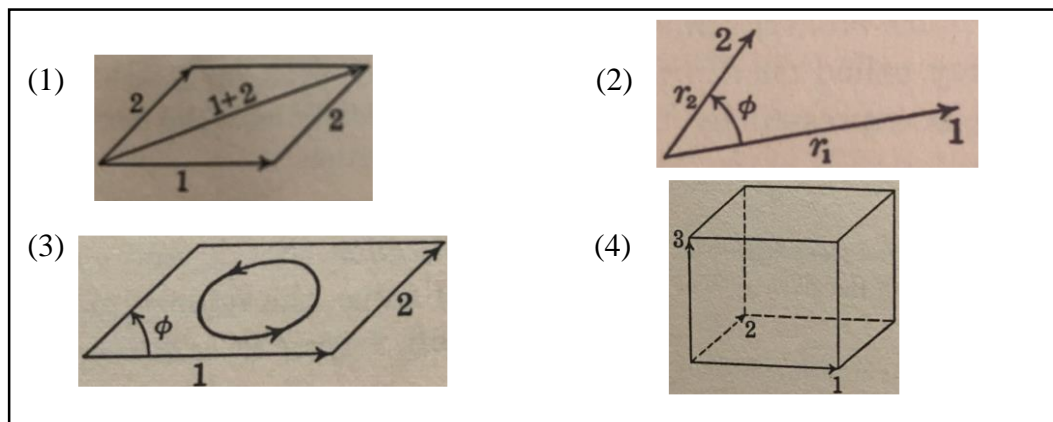
Interpretação 1. A interpretação da chamada soma dos dois vetores, aqui definida, é bem conhecida. Se os dois vetores são traçados do mesmo ponto, então a diagonal, traçada a partir desse ponto, do paralelogramo formado a partir deles representa essa soma. Interpretação 2. Se os vetores têm os comprimentos r_1 e r_2 , e se o ângulo entre suas direções é ϕ , então a combinação bilinear é $r_1 r_2 \cos\phi$. Interpretação 3. Consideramos, novamente, um paralelogramo, cujos lados são paralelos aos vetores 1 e 2, e pensamos nele como percorrido no sentido dado pela sucessão das direções de 1 e 2; então temos um plano-magnitude livre completamente determinado, precisamente aquele definido acima por suas três coordenadas. Além disso, o valor absoluto de sua área é dado por $r_1 r_2 |\sin\phi|$. Interpretação 4. Se os três vetores partem todos de um ponto, eles formam as três arestas de um paralelepípedo cujo volume, com sinal devidamente determinado, será igual ao escalar do segundo tipo definido pelo determinante. (Ibid, p. 49-50, tradução nossa⁸²)

Arelada às quatro interpretações apresentou, respectivamente, as figuras, segundo a seguinte ordem:

⁸¹ is not customary to give primary importance, as we do here, to an investigation of the behavior of certain analytic expressions under transformation of the coordinates, i.e., to a rational and simple theory of invariants.

⁸² Interpretation of 1. The interpretation of the so-called sum of the two vectors, defined here, is well known. If the two vectors are drawn from the same point, then the diagonal, drawn from that point, of parallelogram formed from them represents this sum. Interpretation of 2. If the vectors have the lengths r_1 and r_2 , and if the angle ϕ between their directions is, then the bilinear combination is $r_1 r_2 \cos\phi$. Interpretation of 3. We consider, again, a parallelogram, whose sides are parallel to the vectors 1 and 2, and we think of it as traversed in the sense given by the succession of the directions of 1 and 2; then we have a completely determined free plane-magnitude, precisely the one defined above by its three coordinates. Moreover, the absolute value of its area is given by $r_1 r_2 |\sin\phi|$. Interpretation of 4. If the three vectors all start from one point, they form the three edges of a parallelepiped whose volume, with properly determined sign, will be equal to the scalar of the second kind defined by the determinant.

Figura 5 - Interpretações de Felix Klein



Fonte: Klein (1939, p. 49-50)

A respeito dessas interpretações pode-se fazer as seguintes leituras: a primeira trata da definição de soma vetorial; a segunda refere-se ao cálculo do produto escalar entre dois vetores, não nulos, conhecido o comprimento e o ângulo entre eles; a terceira pode ser vista como aplicação do produto vetorial entre vetores e a quarta acepção aborda a interpretação geométrica do produto misto. Essas ideias são evidenciadas em diversas obras que abordam a Geometria Analítica sob uma ótica vetorial, dentre as quais podemos citar: (BOULOS e CAMARGO, 2005); (WINTERLE, 2000); (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987) dentre outros.

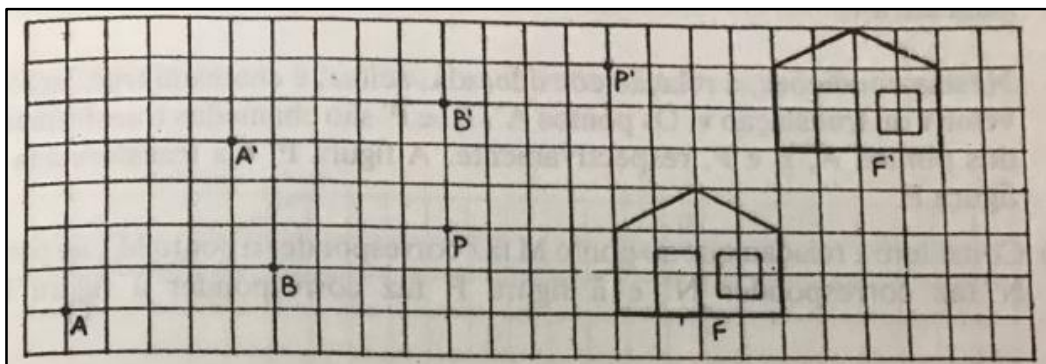
Na parte introdutória do livro *As Transformações Geométricas e o Ensino da Geometria*, Catunda e colaboradoras justificam, a partir da fala de renomados matemáticos, o porquê utilizar as transformações geométricas no ensino da geometria. A exemplo de Paul C. Rosenbloom, que em 1969 no 1º Congresso Internacional Educação Matemática, realizado em Lyon, na França, caracterizou “a geometria euclidiana como um espaço vetorial munido de uma métrica, direcionando a uma integração natural com a álgebra” (CATUNDA, et al., p.13, 1988). E, nesse mesmo ano, Carl Allendoerfer atribuiu relevância à “compreensão de fatos básicos das transformações tais como reflexões, rotações e translações” (Ibid, p.13) como um dos objetivos relevantes para o ensino da geometria. Em direcionamento análogo, Bruce E. Meserve disse que: “Nós estamos interessados, numa abordagem intuitiva e informal da geometria e, por isso, pensamos em *transformações e vetores*.” (CATUNDA et al., 1988, p.13, grifos nossos). Assim, nota-se que a geometria ganha espaço considerável com as transformações geométricas e os espaços vetoriais. Salientam que esse estudo deve partir da observação, estabelecendo propriedades intuitivas.

As fundamentações teóricas que embasaram os estudos do professor e pesquisador Omar Catunda e suas colaboradoras, no período em que viveu na Bahia, revelam como este grupo de pesquisadores começaram a repensar que tipo de geometria deveria fazer parte do 1º e 2º graus de ensino. Essas concepções, tiveram influência direta sobre a comunidade escolar. Visto que, para eles, a compreensão geométrica é essencial para os estudantes, isso repercutiu na “aprendizagem nos cursos universitários de Matemática se ressentia da absoluta falta de base que os alunos apresentam em geometria, ao ingressar na Universidade.” (Ibid, p. 11). Sem perder de vista que, segundo esses autores, todo o estudo deveria se apoiar, exclusivamente, em noções básicas de vetores e do plano afim.

O livro de Dantas (1987) revela-se como mais um exemplo da concepção empreendida por Catunda ao retratar o trabalho com fichas direcionadas aos estudantes do 1º grau (5ª a 8ª série), as quais correspondem aos três primeiros anos do Ensino Fundamental II, umas das ações desenvolvidas em parceria com: Eliana Costa Nogueira, Neide Clotilde de Pinho e Souza e Eunice da Conceição Guimarães (DANTAS, 1987), no intuito de implantar os pressupostos advindos do MMM, além de contribuir na atenuação da situação precária do ensino baiano. Pois, segundo Dantas (1987, p.16), “cada ficha constitui uma unidade de trabalhos onde, em geral, se pretende que o conceito seja definido, uma regra seja estabelecida ou uma propriedade seja induzida.” Dentre as fichas elencadas nesta obra, destaca-se a que trata do tema translação: operações com pontos e vetores dirigida aos alunos da sétima série. A primeira questão consiste no seguinte enunciado:

Considere, na figura a seguir, a relação que ao ponto A faz corresponder o ponto A', ao ponto B o ponto B', ao ponto P o ponto P' e a figura F a figura F'. Ligue por meio de uma régua, cada ponto ao seu correspondente. Ligue, também, alguns pontos de F aos seus correspondentes em F'. (Ibid, 1987, p.43)

Figura 6 - Translação: operações com pontos e vetores



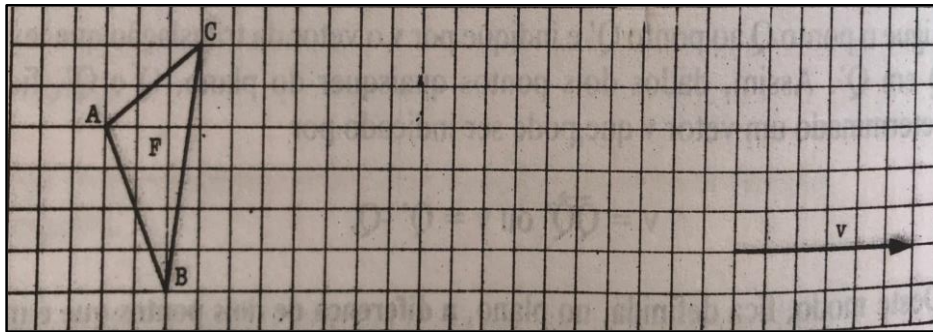
Fonte: Dantas (1987, p.43)

Após a resolução da questão, os estudantes deveriam responder se os segmentos orientados possuíam o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. Além disso,

ela destaca que os segmentos orientados que possuem essas três propriedades em comum definem os vetores. Nos comentários sobre a referida ficha, Dantas (1987, p.46) pontua que “o conceito de translação não é objeto de estudo na geometria apresentada nos livros do 2º nível do 1º grau”, porém a sua introdução ocorre de forma intuitiva e concreta. Ela pontua também que a partir da correspondência entre pontos são obtidos segmentos equipolentes, conduzindo a concepção de vetores.

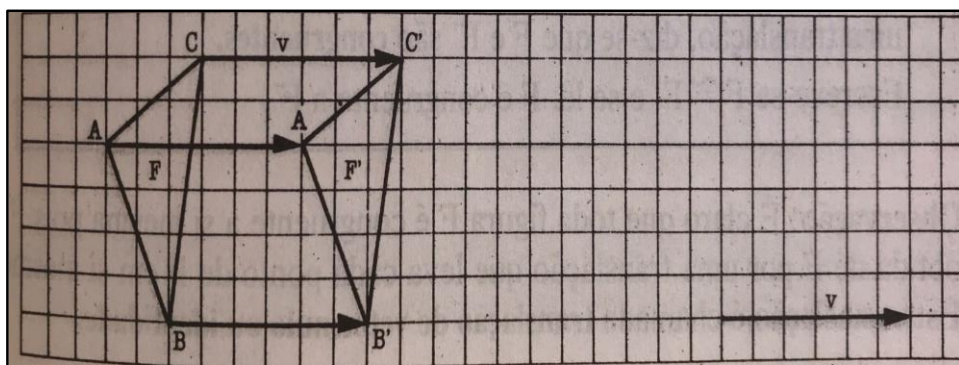
Na abordagem posterior, o tema é congruência por translação. A ficha 17 (denotada pela autora) apresenta a seguinte tarefa: “considere a figura F e o vetor \vec{v} dados a seguir e ache os transformados dos pontos A, B e C pela translação de vetor \vec{v} . Ligue os pontos obtidos.” (Ibid, p.46). Abaixo as figuras que acompanham a questão e sua resolução:

Figura 7 - Congruência por translação



Fonte: Dantas (1987, p.46)

Figura 8 – Congruência por translação (Resolução)



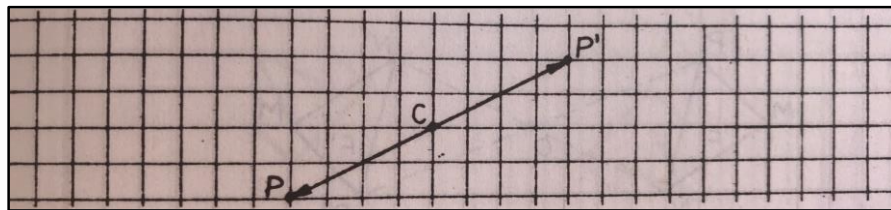
Fonte: Dantas (1987, p.46)

A figura F' obtida de F pela translação de vetor \vec{v} é a transformada de F por essa translação. Assim, dada uma figura F e um vetor \vec{v} , todo ponto P de F é levado num ponto $P' = P + \vec{v}$ e a figura F é levada na figura $F' = F + \vec{v}$, em sentido análogo pode-se verificar que F é levada em F' por uma translação do vetor $-\vec{v}$. No que tange aos comentários acerca desta ficha. (DANTAS, 1987, p.47)

Ela ressalta alguns aspectos dentre eles: “a utilização de figuras, feitas em papel quadriculado, permite ao aluno visualizar o conceito estudado e executar, com facilidade, o trabalho que dele se exige.” (ibid, p.49)

A ficha intitulada “Simetria no Plano; Congruência por Simetria”, aborda como primeira questão: “Considere, no plano, um ponto fixo C. A cada ponto P do plano pode-se fazer corresponder um ponto P’ tal que $\overrightarrow{CP'} = -\overrightarrow{CP}$ ” (DANTAS,1987, p.49) e acompanha a seguinte representação gráfica,

Figura 9 - Simetria no plano



Fonte: Dantas (1987, p.49)

Em Dantas (1987) não é abordada a homotetia. Contudo em Catunda et al., (1988), existe um aprofundamento nas abordagens próprias das transformações geométricas e a homotetia é definida: “Seja C um ponto fixo do plano e K um número real diferente de 0. Chama-se homotetia de centro C e razão K a correspondência que leva um ponto P qualquer do plano num ponto P’, tal que $\overrightarrow{CP'} = K\overrightarrow{CP}$. O ponto P’ é chamado homotético de P.” (CATUNDA et al., 1988, p. 85).

Se atentarmos de forma análoga para os vetores, pode-se referenciar os vetores homotéticos, pois de acordo com Bruter (1998):

Se w for um destes vetores, $w = kv$, em que k é um coeficiente chamado um número ou um escalar. Diz-se que multiplicamos o vetor v pelo escalar k . Os dois vetores, v e w , dizem-se homotéticos, na relação k . O conjunto dos vetores homotéticos apenas ao vetor v forma uma reta vetorial ou ainda um subespaço vetorial de dimensão 1. (BRUTER, 1998, p.93)

Ao estabelecer um comparativo entre as duas definições, é possível perceber que a ideia intuitiva de vetor permeou as construções e abordagens desenvolvidas pelos pesquisadores referenciados anteriormente. Neste sentido, é evidente notar que o conceito vetorial se apresentou como crucial no âmbito das transformações geométricas, por exemplo, particularmente destacadas no contexto baiano. No que se refere ao viés transpositivo, proposto neste capítulo, a leitura que fazemos reporta-se para uma heterogeneidade ecológica, inerente

aos vetores, em associação aos variados habitats e nichos, já que, é viável perceber que a abordagem vetorial não se define de forma isolada.

Dito de outra forma, pode-se extrapolar os limites transpositivos e ecológicos e transitar para uma descrição em termos da TAD no que se refere às variedades de estruturas de trabalho (praxeológicas) em que o conceito de vetor é mobilizado: algébrico, geométrico ou numérico. Aspecto esse que aponta para o delineamento da dicotomia entre objetos ostensivos e não ostensivos (CHEVALLARD, 1994), o que significa gerar mobilizações de “objetos” de natureza sensível, de certa materialidade e que, por isso, adquirem para o sujeito uma realidade perceptível. No entanto, os não ostensivos estão associados ao nível das ideias ou conceitos que podem ou não existir institucionalmente sem poder ser vistos, ditos, ouvidos, percebidos ou mostrados por si só: eles só podem ser evocados ou invocados pelo manuseio adequado de certos objetos ostensivos associados.

Neste sentido, caracteriza-se o campo geométrico em associação à percepção visual que potencializa o pensamento intuitivo e o conceito vetorial se apropria desse traço característico, pois a diversidade de quadros e registros que acompanham o vetor, como indicou Dorier (2000) distingue três "habitats ecológicos"⁸³ do vetor: o geométrico, o algébrico e o vetor físico. Assim, essa noção vive em três habitats diferentes, tendo as particularidades do vetor em cada uma delas. Assim, as concepções e manipulações particulares com respostas de naturezas diferentes, sejam a partir de nuances semânticas ou pragmáticas que contribuem para tornar essa noção “distinta” em geometria. No entanto, “a transição da geometria sintética (configuração) para a geometria vetorial representa um salto conceitual na aprendizagem” (LÊ THI, p. 27, 1998), tema este que integrou as concepções, discussões e diálogos controversos protagonizados por renomados matemáticos. Contudo, esse salto conceitual não é de fato alcançado sem dificuldades como pontuou Dorier (2002):

Portanto, desde a contrarreforma, o plano de estudos sobre geometria foi profundamente modificado. Embora os fundamentos da geometria cartesiana e vetorial ainda sejam ensinados, o ensino da geometria agora está essencialmente centrado em uma abordagem sintética. Por exemplo, as transformações são mais frequentemente introduzidas através do estudo de suas ações nas figuras do que através de suas propriedades como transformações em um conjunto de pontos com características estruturais. No final dos anos 80, essa mudança começou a afetar o ensino da álgebra linear na universidade. (DORIER, 2002, p. 12, tradução nossa⁸⁴)

⁸³ Ver Chevallard (1994).

⁸⁴ Therefore, since the counter-reform, the syllabus concerning geometry has been profoundly modified. Although the fundamentals of Cartesian and vectorial geometry are still taught, the teaching of geometry is now essentially centered on a synthetic approach. For instance, transformations are more often introduced through the study of their action on figures than through their properties as transformations on a set of points with structural features. In the late eighties, this change started to affect the teaching of linear algebra at university.

Assim, sintetizamos o Modelo Epistemológico de Referência – MER (GARCÍA et al, 2019, p.81) e a partir dele foi possível visitar a epistemologia do saber, no nível do setor, domínio segundo os níveis de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2002), e, por consequência, foi possível obter os observáveis empíricos em termos do complexo de praxeologia presentes no Modelo Praxeológico de Referência – MPR (GASCÓN, 2018), para então distanciarmos da instituição e analisar o Modelo Praxeológico Dominante – MPD (GASCÓN, 2018), descrito em termos do que está posto, evidenciando algumas de suas necessidades em termos do tema e dos Sistemas Didáticos (CHEVALLARD, 2002).

Neste sentido, emergiram elementos que possibilitaram abrir novos olhares sobre o que está posto nos cenários dos Sistemas Didáticos do CLM-UEFS, pautados em aspectos relacionados ao status dos vetores, viabilizando a inserção de práticas (praxeologias) respaldadas pelo campo histórico-epistemológico, o qual contribui significativamente para decifrarmos alguns dos traços que geram aproximações ou distanciamentos acerca da razão de ser imersa no âmbito vetorial de ensino.

Como delineado neste capítulo, foi possível identificar o protagonismo e efeitos de parte do processo transpositivo que gravitou em termos do Saber Sábio – SS, o qual sofreu adaptações eivados de distintas concepções advindas do MMM, como sinalizado na última seção do capítulo, para um Saber a ser Ensinado - SaE. O que significa dizer que transitamos entre as razões de ser histórica epistemológica para a razão de ser institucionalizada historicamente na gênese dos primeiros Cursos de Licenciatura em Matemática.

Dessa forma, foi viável notar a força da abordagem vetorial no seio da geometria, ratificada por declarações com: “o espaço vetorial é o quadro no interior do qual se desenvolve a geometria” (BRUTER, 1998, p.93), “o ensino de geometria deve se basear na ideia de vetor”, “todo o estudo deveria se apoiar, exclusivamente, em noções básicas de vetores (...)” (CATUNDA et al, 1998) ou “a geometria vetorial oferece uma excelente oportunidade para o desenvolvimento do vínculo entre geometria e álgebra” (TROYER, 1963, p.290) . Em síntese, a abordagem geométrica e vetorial é apontada como um dos pilares que dão sustentações aos avanços dos conhecimentos matemáticos nos Cursos de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática.

Assim, nesse estudo, são retomados alguns aspectos da problemática apresentada. Em primeiro lugar, o que despertou interesse foi o fato do elevado índice de reprovações e consequente retenção no que tange às componentes curriculares vinculadas à geometria analítica. Em seguida, foi identificado um objeto do saber que possuísse abrangência institucional nesse contexto. E os vetores foram eleitos, pois além do seu amplo trânsito no

corpus destas componentes curriculares, suas peculiaridades extrapolam o domínio numérico e imprimem características como direção e sentido.

Como pano de fundo dos pontos elencados, sinaliza-se para a existência do fio condutor da TTD em específico uma abordagem ecológica, que preliminarmente permitiu identificar as “deformações” sofridas pelo saber no seio da cadeia processual de transformação e transição entre o SS e o SaE. Em outras palavras, foi situado um dos primeiros passos investigativos a partir de uma visão macro que se vincula à epistemologia do objeto e se apresenta como um Modelo Epistemológico de Referência – MER (GARCÍA et al, 2019, p.81) sem perder de vista os pressupostos didáticos.

Nesse limiar, a fundamentação centra-se na concepção de irmos ao lugar onde esses fenômenos se iniciam, ou seja, as instituições de produção de conhecimento matemático. Esta é a primeira contribuição da *teoria da transposição didática* (CHEVALLARD, 1985). Fita-se, portanto, o olhar para os níveis do setor e do domínio que se enquadram na escala hierárquica de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2002), mas certamente será modificado à medida que avançar, particularizar e refinar o estudo. O próximo passo consiste em um olhar descritivo acerca dos funcionamentos dos Sistemas Didáticos no contexto do CLM-UEFS, ou seja, um aporte do Modelo Praxeológico Dominante – MPD (GASCÓN, 2018) por meio da análise dos livros textos indicados na bibliografia básica de EXA 180 e EXA 374 e a crônica dos discursos dos protagonistas dos Sistemas Didáticos, permitindo assim, questionar a realidade: o que existe no âmbito do CLM-UEFS em relação ao ensino e aprendizagem vetorial? E por quê? E o que poderia existir? E por quê? São questionamentos que respaldaram a abordagem dos capítulos II e III.

CAPÍTULO II

DESENHO DO MODELO PRAXEOLÓGICO CURRICULAR A PARTIR DOS LIVROS TEXTOS INDICADOS NA BIBLIOGRAFIA BÁSICA DE EXA 180 E EXA 374 EM CLM-UEFS

2 SUSTENTAÇÕES NOOSFÉRICAS NO CONTEXTO DO CLM-UEFS

A primeira assertiva destacada no cerne deste capítulo se assenta na constatação de que a propagação dos objetos de conhecimentos se difunde de formas variadas. No âmago de um curso de Licenciatura em Matemática isso não é diferente, o qual assume a responsabilidade de formação dos futuros professores para atuarem nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, frente a um repertório de recomendações curriculares estabelecidos por documentos que regem o campo do ensino superior, em especial as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática (CNE/CES 1.302/2001) em conjunto com a Resolução CNE/CP 1/2002, que instituiu Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, a qual foi contemporaneamente substituída pela Resolução CNE/CP 2/2015.

Pautados nessas bases legais que exibem cunhos diretivos, são elaborados nas Instituições de Ensino Superior e estrutura-se no âmbito da instituição universitária, um documento que apresenta maior especificidade, o Projeto Político Pedagógico (PPP)⁸⁵, situado no processo transpositivo no nível do saber a ensinar. Dentre os pontos evidenciados neste documento estão as ementas das componentes curriculares acrescidas do código/natureza, carga-horária, além das indicações bibliográficas básicas e complementares. Com base no PPP, os docentes têm o direcionamento para elaborar seu plano de ensino, materializado nas salas de aula e regido transpositivamente por um saber ensinado que, supostamente, gerará um saber apreendido. Sob uma perspectiva particular, o Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática (COLMAT) da Universidade Estadual de Feira de Santana direciona as discussões a partir das questões:

- 1) O quê, por quê, para quê e para quem estamos discutindo o currículo 318? 2) Que Matemática o professor da Educação Básica precisa saber? 3) Como realizar alterações no projeto pedagógico preservando a identidade própria do Curso de Licenciatura em Matemática (CLM)? (COLMAT – UEFS, 2018, p.4).

⁸⁵ O PPP é constituído institucionalmente como um documento direcionador, sem exercer em si uma vigilância epistemológica.

A abordagem ecológica tem um papel crucial ao delinear o estudo, o que subsidia, mesmo que tacitamente, um dos nossos objetivos. Nestes termos, este estudo opta por seguir alguns dos pressupostos que regem o Paradigma de Questionamento do Mundo (CHEVALLARD, 2009; 2010; 2012), certos de que, em tempos vindouros, estaremos a perquirir tais indagações que se vinculam à estruturação e à atualização do currículo 318, o mais recente PPP do CLM-UEFS. Dentre as alterações apontadas pela comissão ressalta-se a sexta, pois remete a um dos aspectos de interesse da pesquisa,

6) Separar a Geometria Analítica da Álgebra Linear, por questões metodológicas. Efetivamente, as disciplinas EXA 180 Geometria Analítica e Álgebra Linear I (90h) e EXA 215 Geometria Analítica e Álgebra Linear II (90h) serão substituídas pelas disciplinas EXA 374 Geometria Analítica (60h), EXA 379 Álgebra Linear I (60h) e EXA 382 Álgebra Linear II (60h). A disciplina EXA 374 Geometria Analítica (60h) é a disciplina que integra a unificação proposta pelo DEXA. (COLMAT - UEFS, 2018, p.22)

No intuito de clarificar os elementos que subsidiaram a separação apontada acima, sob a justificativa de questões metodológicas, foi contactado um dos membros da comissão afim de entender o que fundamentou o referido desmembramento. O professor relatou que, nesse sentido, a discussão foi guiada por duas constatações: a primeira está vinculada ao desfavorecimento da Álgebra Linear em função da Geometria Analítica e a segunda tratou do fracionamento de assuntos que estabelecem relação direta entre eles, a exemplo: matrizes e sistemas lineares, espaços vetoriais e transformações lineares e sistemas de coordenadas cartesianas e retas e planos. Respectivamente, eram conteúdos que metodologicamente deveriam “andar de mãos dadas”. No que tange a unificação trata-se de um projeto no qual se tem a intenção de criar ementas, carga horária e denominações únicas para ampliar o leque de opções de ofertas aos estudantes.

Destarte, a expressão desses aspectos a partir desse viés, nos faz retroceder no tempo e pensar que a separação entre Geometria Analítica e Álgebra Linear também foi prevista na implementação do currículo 314⁸⁶ que foi dissolvido e deu lugar a estruturação do currículo 318. A partir do que foi sinalizado por um dos membros da comissão, interpreta-se que as discussões e as reflexões geraram argumentações que enfraqueceram os pilares da junção efetivada em 2004, por meio das disciplinas EXA 180 - Geometria Analítica e Álgebra Linear I (90h) e EXA 215 - Geometria Analítica e Álgebra Linear II, culminando com o retorno parcial

⁸⁶ Nos moldes do currículo 314, as componentes EXA 129 – Geometria Analítica / 90h e EXA 143 – Álgebra Linear I-A – 60h estavam separadas no corpus estrutural do CLM-UEFS.

da estrutura original, agora substituídas pelas disciplinas EXA 374 - Geometria Analítica (60h), EXA 379 - Álgebra Linear I (60h) e EXA - 382 Álgebra Linear II (60h).

Outro elemento que desperta a atenção refere-se à redução da carga horária que inicialmente foi prevista de 90 horas para EXA 129 - Geometria Analítica, migrando para EXA 180 - Geometria Analítica e Álgebra Linear I, em que foram mantidas as 90 horas, porém para junção de dois componentes curriculares e, por fim, a configuração atual em que se apresenta com 60 horas. Em outras palavras, significa dizer que essa temporalidade mecânica pode refletir e influenciar a gênese do tempo didático, já que “este tempo serve como uma estrutura para o tempo didático” (MERCIER, 1995, p. 5, tradução nossa⁸⁷), o que reflete, conseqüentemente, nas construções praxeológicas, as quais foram alvo de significativas alterações nas reformulações curriculares relatadas neste estudo.

No entanto, como sublinhou Mercier (1985), para além do tempo cronológico é importante sobresselar que: “as inovações pedagógicas devem ser compatíveis com a necessidade de assegurar a progressão do tempo didático, que constitui a carga específica do professor dentro do sistema didático.” (MERCIER, 1985, p.4, tradução nossa⁸⁸). Neste âmbito, o autor também acrescenta que a organização da produção do tempo é de responsabilidade exclusiva do professor que aparece como organizador e mestre do tempo na obsessão de integralizar um programa. Entretanto, deve-se sublinhar que o tempo didático produzido pelo professor independe da temporalidade vivenciada pelo estudante no seio de um SD.

No que se refere ao ementário é possível identificar algumas modificações, que nos conduz a inferir que o componente curricular EXA 180, em essência, tinha uma moldura geométrica, por manter os temas próprios de Geometria Analítica e acrescentar produto escalar, vetorial e misto que, sob o nosso ponto de vista, enquanto docente desta disciplina, já compõem o tema álgebra vetorial, estudo da reta e do plano, cônicas e superfícies em um suposto incremento de 15 horas. Além disso, são substituídos alguns termos como: Sistemas de Coordenadas (cartesianas, polares, esféricas) para Sistemas de Coordenadas Cartesianas no Espaço, como exposto na tabela 1. Assim, percebe-se um maior detalhamento entre as ementas listadas.

⁸⁷ Ce temps sert de cadre au temps didactique.

⁸⁸ Les innovations pédagogiques doivent être compatibles avec la nécessité d'assurer la progression du temps didactique, ce qui constitue la charge spécifique de l'enseignant au sein du système didactique.

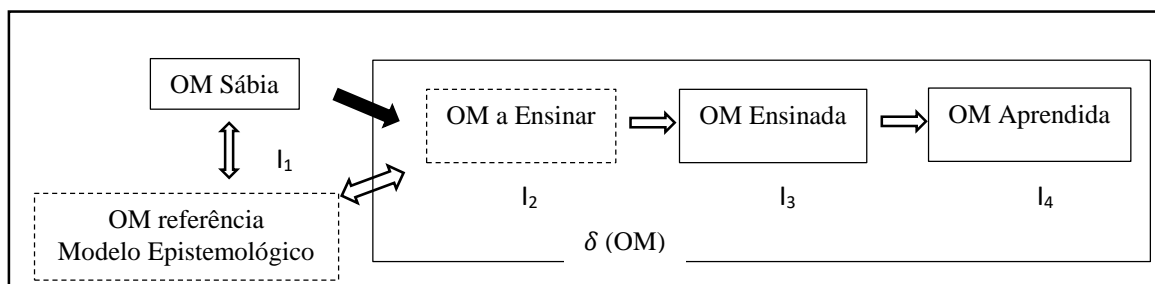
Tabela 1 - Comparativos entre Ementas

EXA 180 - GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR I – 90h	EXA 374 - GEOMETRIA ANALÍTICA – 60h
Sistemas de Coordenadas (cartesianas, polares, esféricas). Transformação de Coordenadas. Álgebra Vetorial, Matrizes e Determinantes. Espaço Vetorial, Dependência Linear.	Sistemas de Coordenadas Cartesianas no Espaço. Álgebra Vetorial. Produtos escalar, vetorial e misto. Estudo da Reta e do Plano. Coordenadas Polares. Cônicas e Superfícies.

Fonte: COLMAT – UEFS (2004; 2018)

O que foi apresentado até o momento, em termos do estudo das transformações adaptativas imprimidas a um saber, conforme a instituição em que vivem, se apresentam como resultado de um processo descrito por Chevallard (1991; 1994) como transposição didática. Este se revela por meio de quatro níveis interligados entre si e também pode ser melhor especificado ao estabelecer ligações com as escolhas metodológicas e ampliar o esquema para a seguinte estruturação em termos dos processos didáticos (Figura 10).

Figura 10 - Esquema dos Processos Didáticos



Fonte: Bosch, M., & Gascón, J. (2004)

Na interpretação de Tang (2014), é possível tecer esclarecimentos acerca do que foi esquematizado na Figura 10. O autor argumenta que,

A OM₂ a ser ensinada constitui um modelo praxeológico do currículo de matemática. A base empírica para o desenvolvimento desse modelo pode ser encontrada em documentos curriculares (programas oficiais) e livros didáticos. Sua influência sobre δ (OM) é central, embora nem o professor nem a instituição educacional tenham esse modelo explicitamente, mas apenas materiais praxeológicos mais ou menos bem articulados entre eles. Mas essa influência não pode ser interpretada adequadamente se não tivermos um ponto de vista epistemológico. Esse ponto de vista é fornecido por uma OM de referência, cuja descrição geralmente é feita a partir das OMs aprendidas que legitimam o processo de ensino. A OM de referência é aquela considerada pelo pesquisador para sua análise. Não coincide necessariamente com as OMs aprendidas das quais se origina (porque os inclui na análise), mas é expresso em termos muito semelhantes. A OM de referência é aquela que o pesquisador põe à

prova de contingência e que, portanto, passa por permanente remodelagem. (TANG, 2014, p. 6, tradução nossa⁸⁹)

Como sinalizado por Bosch e Gascón (2004) o eixo de sustentação do Modelo Praxeológico do Currículo pode ser encontrado em documentos curriculares (programas oficiais) e livros didáticos. Assim, guiados por tal concepção, nesta etapa da investigação, há um interesse particular em uma das ramificações oriundas de I₂ que estabelece correspondência com a noosfera, ou melhor dizendo, com a Organização Matemática - OM a ensinar (Figura 10) dos Cursos de Licenciatura em Matemática (CLM), em especial em CLM-UEFS. Dito de outra forma, significa que cabe a essa instituição a seleção dos saberes, pois como sublinha Chevallard (1982, p.8), “os conflitos se desenvolvem, as negociações acontecem, as soluções amadurecem.” Além disso,

O centro operacional do processo de transposição, que traduzirá em fatos a resposta ao desequilíbrio criado e observado (expresso pelos matemáticos, pais, os próprios professores), é a noosfera. Qualquer conflito entre o sistema e o ambiente se desloca para lá e encontra seu lugar privilegiado de expressão. Nesse sentido, a noosfera atua como um amortecedor. Mesmo em tempos de crise, mantém dentro de limites aceitáveis a autonomia da operação didática. (CHEVALLARD, 1982, p. 11, tradução nossa⁹⁰)

Em síntese, a noosfera pode ser designada como a instituição dos sujeitos que pensam sobre os saberes que serão difundidos no âmbito dos Sistemas Didáticos – SD moderando e intermediando as esferas da OM Sábia e da OM Ensinada, prevendo um funcionamento adequado dos SDs em termos de condições e restrições que se impõem no processo de ensino e aprendizagem.

Dentre os produtos que advém de I₂, direciona-se a atenção para os livros textos que compõem a bibliografia básica das componentes curriculares Geometria Analítica e Álgebra Linear I - EXA 180 e Geometria Analítica - EXA 374 em comparação com um plano de ensino

⁸⁹ L'OM2 à enseigner constitue un modèle praxéologique du curriculum de mathématiques. La base empirique pour élaborer ce modèle se trouve dans les documents curriculaires (programmes officiels) et dans les manuels. Son influence sur $\delta(OM)3$ est centrale bien que ni le professeur ni l'institution scolaire ne dispose explicitement de ce modèle mais uniquement de matériaux praxéologiques plus ou moins bien articulés entre eux. Mais cette influence ne peut être adéquatement interprétée si nous ne disposons pas d'un point de vue épistémologique. Ce point de vue est fourni par une OM de référence dont la description se fait généralement à partir des OM savantes légitimant le processus d'enseignement. L'OM de référence est celle que considère le chercheur pour son analyse. Elle ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes d'où elle provient (parce qu'elle les inclut dans l'analyse), mais elle se formule dans des termes très proches. L'OM de référence est celle que le chercheur met à l'épreuve de la contingence et qui subit pour cela de permanents remaniement.

⁹⁰ Le centre opérationnel du processus de transposition, qui va traduire dans les faits la réponse à apporter au déséquilibre créé et constaté (exprimé par les mathématiciens, les parents, les enseignants eux-mêmes), c'est la noosphère. Tout conflit entre système et environnement s'y déporte, et y trouve son lieu d'expression privilégié. À cet égard, la noosphère joue un rôle de tampon. Même en période de crise, elle maintient dans des limites acceptables l'autonomie du fonctionnement didactique.

de um docente que assumiu a disciplina curricular EXA 180 no semestre 2019.1. Destarte, mesmo com a permanência da Álgebra Vetorial em ambas as ementas, é possível notar alterações nas indicações bibliográficas. Neste contexto, é possível perceber o caráter dinâmico do panorama que envolvem os sistemas educacionais. Assim, este trabalho acompanha os direcionamentos de Chaachoua (2014) ao apontar que a análise de manuais constitui um ponto de entrada para estudo e caracterização do sistema em um dado momento, o qual pode ser concebido como um instrumento de análise do investigador.

Para tanto, é pertinente sinalizar algumas peculiaridades inerentes à análise de manuais (livros textos, no nosso caso). Dentre elas, Chaachoua (2014) ressaltou as que podem ser sintetizadas em cinco níveis: o momento da edição (publicação) que é regido pela dinamicidade dos sistemas educacionais, os quais demandam constantes adequações nos manuais; a representatividade da obra que suscita escolhas em conformidade com os livros mais utilizados pelos professores; a estrutura a qual fornece informações sobre a ênfase de atividades; e a presença ou não de exercícios resolvidos, por exemplo, uma análise ecológica delimitando o habitat e nicho e suas funções de interlocuções com o sistema em jogo culminando, assim, com a análise praxeológica como uma forma de caracterização da relação institucional.

Neste sentido, os três primeiros níveis de análise (tempo de edição, representatividade e estrutura) se encarregam de esclarecer o contexto geral e os outros dois (análise ecológica e praxeológica) fornecem concomitantemente um quadro teórico e metodológico, aspectos complementares mesmo com natureza distintas. Agrega-se a essa perspectiva as concepções de Chaachoua (2014) que demonstram a viabilidade em conceber, por meio do estudo dos livros, possibilidade de identificação de traços das relações institucionais. É essa vertente que impulsiona a examinar os discursos praxeológicos presentes nessas obras, vistas como produções instrutivas que, na maioria das vezes, exercem a função de apoio no planejamento e elaboração das aulas, no caso dos professores e guias de estudos para os estudantes.

Ademais, compactuamos com o ponto de vista de Bittar (2017, p. 364) ao declarar que, “o livro didático utilizado por um professor pode fornecer uma boa aproximação com a sua prática em sala de aula, especialmente no que diz respeito ao conteúdo apresentado e às metodologias utilizadas.” Neste sentido, este estudo segue no intuito de evidenciar quais são as pistas que os livros textos podem fornecer acerca das práticas desenvolvidas no seio de aulas cujo tema são os vetores. Assim, foram colhidas informações preliminares em um planejamento de ensino do semestre 2019.1 de EXA 180 – Geometria Analítica e Álgebra Linear I.

Antes de debruçar em torno das praxeologias presentes nos livros textos comuns nos documentos (ementas e programa de disciplina), alguns elementos despertaram atenção, pois

concebe-se, assim como Bittar (2017), que eles podem fornecer particularidades das práticas que vivem nos Sistemas Didáticos – SD do CLM-UEFS com relação ao Álgebra Vetorial. O primeiro deles refere-se ao tópico denotado pelo docente como habilidades e competências em que,

espera-se que após cursar a disciplina o discente tenha compreendido: o conceito formal da teoria de vetores no plano e no espaço, operações com vetores no plano e no espaço incluindo os produtos e a noção de espaços vetoriais e os diversos conceitos inseridos neste tópico tais como combinação linear, dependência linear, base e dimensão. (SOUZA, 2019, p.2)

Destarte, ressalta-se os trechos em que o âmbito vetorial constituiu o núcleo. Daí o extrairmos desta parte, como já sinalizado anteriormente, concernente à ementa de EXA 180, pois infere-se que o termo Álgebra Vetorial abre margem para dilatações como, por exemplo, os produtos (escalar, vetorial e misto), os quais aparentemente não integram a ementa, mas foi relevado nas esperas do professor, sinalizada em seu trecho: “incluindo os produtos...”. O que leva a pensar que a ementa de EXA - 374 apresenta um maior detalhamento do que implicitamente já pertencia a EXA - 180.

Nos PPPs disponibilizados no site do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática - COLMAT⁹¹ da Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS é possível consultar as recomendações bibliográficas as quais podem ser confrontadas com as escolhas do professor na construção do planejamento de ensino. Nestes termos, são reveladas as indicações segundo os PPPs e, em seguida, atenta-se para predileções do docente.

Tabela 2 - Indicações Bibliográficas (continua)

Indicações Bibliográficas segundo os PPPs e o Planejamento de Ensino	
EXA 180 - Geometria Analítica e Álgebra Linear I – 90h	<p>Bibliografia Básica:</p> <p>CALLIOLI, C. A. (et al.) Álgebra Linear e Aplicações, São Paulo: Atual Editora Ltda., 1991.</p> <p>EDWARDS, C. H. Jr., Introdução à Álgebra Linear, Prentice Hall do Brasil, 1998.</p> <p>SIMMONS, G. F. Cálculo com Geometria Analítica, volume 1. São Paulo. McGrawHill, 1987.</p> <p>FEITOSA, M. O. Cálculo Vetorial e Geometria Analítica. São Paulo. 1981.</p> <p>Bibliografia Complementar:</p> <p>HOFFMAN, K. (et al), Linear Álgebra, Englewood, Cliffs, Prentice Hall, 1961.</p> <p>JANICH, K. Álgebra Linear, LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S. A.,1998.</p>

⁹¹ <http://matematica.uefs.br/>

	LIPSCHHUTZ, S. Linear Álgebra, Englewood, Cliffs, Prentice Hall, 1991. MONTEIRO, L. H. J., Álgebra Linear, São Paulo, 1962.
EXA 374 - Geometria Analítica – 60h	<p>Bibliografia Básica:</p> <p>BOULOS, P.; CAMARGO, I. de. Geometria Analítica: um tratamento vetorial. São Paulo, SP: Prentice Hall, 2005.</p> <p>DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. Geometria Analítica. Rio de Janeiro: SBM, 2017.</p> <p>LEHMANN, C. H. Geometria Analítica. 2ª Edição. Tradução: Ruy Pinto da Silva Sieczkowski. Rio de Janeiro. Editora Globo, 1998.</p> <p>LIMA, E. L. Geometria Analítica e Álgebra Linear. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.</p> <p>VENTURI, J. J. Álgebra Vetorial e Geometria Analítica. Curitiba: Scientia et Labor, 2015.</p> <p>STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.</p> <p>Bibliografia Complementar:</p> <p>AVRITZER, D. Geometria Analítica e Álgebra Linear: uma visão geométrica. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2009.</p>
Plano de Ensino de EXA 180 Geometria Analítica e Álgebra Linear I (2019. 1)	<p>Bibliografia Básica:</p> <p>BOULOS, P.; CAMARGO, I. de. Geometria Analítica: um tratamento vetorial. São Paulo, SP: Prentice Hall, 2005.</p> <p>HOWARD, A.; RORRES, C. Álgebra Linear com Aplicações – 8ª Ed. Tradução: Claus Ivo Doering. Porto Alegre. Bookman, 2001.</p> <p>WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica – São Paulo, Makron Books, 2000.</p> <p>Bibliografia Complementar:</p> <p>BOLDRINI, J. L. Álgebra Linear. Ed. Harper & Row do Brasil.</p> <p>CALLIOLI, C. A. (et al.) Álgebra Linear e aplicações, São Paulo: Atual Editora Ltda., 1991.</p> <p>LEHMANN, C. H. Geometria Analítica. 2ª Edição. Tradução: Ruy Pinto da Silva Sieczkowski. Rio de Janeiro. Editora Globo, 1998.</p> <p>STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.</p>

Fonte: COLMAT – UEFS (2004; 2018) e SOUZA (2019)

Em consonância com o objetivo da pesquisa, foram eleitos dois parâmetros na escolha das obras, que serão analisadas. O primeiro refere-se à observância de intersecções entre os livros que constam nas bibliografias dos PPPs e no Plano de Ensino de EXA -180. E o segundo, à quantidade de exemplares disponibilizados na Biblioteca Central Julieta Carteadó – BCJC, da referida instituição, o que comunga com a representatividade da obra como já relatado anteriormente. Nestes termos, foram identificados:

- BOULOS, P.; CAMARGO, I. de. Geometria Analítica: um tratamento vetorial. São Paulo, SP: Prentice Hall, 2005;
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. São Paulo: McGraw-Hill, 1987;

- LEHMANN, C. H. Geometria Analítica. 2ª Edição. Tradução: Ruy Pinto da Silva Siczkowski, Rio de Janeiro. Editora Globo, 1998;
- CALLIOLI, C. A. (et al.) Álgebra Linear e Aplicações. São Paulo: Atual Editora Ltda. 1991.

Retoma-se à ideia de que os livros textos adotados por docentes são peças de um jogo que fornecem pistas acerca das práticas desenvolvidas em sala de aula. Nesse sentido, o olhar se volta para os vetores e para as metodologias utilizadas em EXA 180 e EXA 374, respaldadas por praxeologias presentes nestas obras. Nesta perspectiva, infere-se que os livros são elementos constituintes dos bastidores institucionais dos SD, no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem de um referido objeto do saber. Assim, as obras que integram o repertório de práticas docentes são supostamente refletidas em práticas dos estudantes que integram o aspecto ecológico do saber e sua vivência nas práticas institucionais. De acordo com Bittar (2017):

Uma análise de LD descortina ao pesquisar diversas paisagens que podem ir desde o estudo da cultura escolar em uma dada época à identificação de possíveis razões de dificuldades de aprendizagens e à elaboração de sequências didáticas. (BITTAR, 2017, p.366)

Aditado à citação, não se pode esquecer que Chevallard (1992) sublinha que todo saber pertence a uma instituição⁹². Além disso, o saber sofre transformações adaptativas em conformidade com a instituição em que habita, as quais se articulam a um conjunto de condições e restrições que devem ser cumpridas para que o saber possa existir nesta instituição, como apresentado nas orientações que legitimam o CLM-UEFS. Fundamentado neste escopo ecológico, este estudo tratará de uma análise que tem como o principal pilar as praxeologias, pois segundo Chevallard (2001) organizar é criar praxeologias, ou seja, uma organização do conhecimento. Assim, o foco será nas organizações praxeológicas presentes nos livros textos que figuram o corpus do CLM-UEFS.

2.1 UMA ANÁLISE DOS LIVROS TEXTOS

A configuração estabelecida no estudo dos elementos estruturadores das obras elencadas neste capítulo seguirá os níveis de análise sublinhados por Chaachoua (2014) em que se parte, no primeiro momento, de um contexto geral ao atentar para tempo de edição, representatividade e estrutura e, posteriormente, foca-se nas características ecológicas e praxeológicas, as quais se

⁹² Uma instituição I é uma entidade social que impõe às pessoas que ocupam uma posição em I, modos de fazer e de pensar próprios das demandas impostas por I. (CHEVALLARD, 1992).

apresentam como um quadro teórico e metodológico de análise. Aditado a essa composição, considera-se pertinente a inclusão do prefácio, geralmente negligenciado pelos leitores, porém acredita-se que o mesmo pode agregar potenciais fatores que contribuam para a identificação de vestígios específicos das intenções dos autores.

Na sequência, será discorrido sobre cada um dos livros escolhidos para análise. Como suporte deste momento inicial de análise de livros, apoiamos nos enfoques e pressupostos do repertório dos livros que integram a bibliografia básica, pois de acordo com Schmidt et al. (1997, p.53, tradução nossa⁹³), são “dois mundos - o das intenções oficiais e o das atividades reais da sala de aula - estão ligados, em parte, por livros didáticos”, assumindo a função de mediação entre o currículo e a sala de aula. Isto posto, são destacados quatro deles, indicados nas ementas das componentes curriculares, tratadas neste estudo no cerne do CLM-UEFS.

2.1.1 CAMARGO, I. de; BOULOS, P. Geometria Analítica: um tratamento vetorial. 3ªed. Revisada e Ampliada. São Paulo, SP: Prentice Hall, 2005;

No contexto do CLM-UEFS o livro texto de autoria de Ivan de Camargo e Paulo Boulos é comumente referenciado pelos docentes e propagado comumente entre discentes como o “livro de Paulo Boulos”, aspecto este refletido no escopo bibliográfico de um dos PPPs e no plano de ensino do professor, em que o segundo autor ocupa a posição de primeiro autor. Na BCJC - UEFS, dentre as obras destacadas neste estudo, é a que possui maior quantidade de exemplares, ou seja, detém maior representatividade, subdividas entre 2ª edição (1987) e 3ªedição (2005). Em todas as edições, os autores se reportam ao estudante por meio do “prefácio ao estudante”. A descrição se revela em forma de um diálogo em que os autores se colocam enquanto um professor experiente que entende os anseios de estudantes recém-ingressos no curso superior.

Segundo os autores, o pouco contato com a geometria e as circunstâncias que cercaram a passagem pelo curso secundário pode constituir uma das causas que imprimiram experiências desfavoráveis ao aprendizado da Geometria. No entanto, eles destacam que tudo isso pode ser contornado com dedicação aos estudos, resolução de exercícios e aprimoramento dos conhecimentos, pois nas palavras de Camargo e Boulos (2005, p. ix) “uma inteligência modesta aliada a muito trabalho, frequentemente, pode mais que uma inteligência brilhante e vadia.”

⁹³ two worlds - that of official intentions and that of actual classroom activities - are tied together, in part, by textbooks.

Outra vertente, sinalizada pelos autores, faz referência a intuição, considerada como uma “faca de dois gumes”, visto que, não se pode conceber o estudo da matemática e particularmente o da geometria sem o auxílio da intuição. Porém, a confiabilidade da intuição não é satisfatória, pela sua natureza subjetiva e, por conseguinte, é preciso saber a hora e até que ponto pode ser usada, pois ideias intuitivas exigem uma confirmação formal, precisa e rigorosa. Nesta perspectiva, eles destacam: “mesmo que estejamos prontos a apostar que um determinado fato é verdadeiro, só devemos aceitá-lo como tal após uma demonstração rigorosa.” (CAMARGO, BOULOS, 2005, p.ix)

A metodologia é apontada a partir de diferentes formas de estudos, distintos pontos de vista e diversos enfoques, ressaltando a necessidade de conhecer vários métodos. Ainda de acordo com a concepção utilizada, a Geometria recebe diferentes denominações como,

1. Geometria Axiomática (ou Geometria de Posição): é o estudo da Geometria sistematizado por Euclides (cerca de 300 a.C.) em seus “Elementos”, mediante o encadeamento lógico de axiomas, definições e teoremas.
2. Geometria Descritiva: é o estudo da Geometria pelo método mongeano (Gaspard Monge, 1746 – 1818), que consiste em considerar não os entes geométricos propriamente ditos, mas suas projeções sobre dois planos previamente fixados, e por meio do estudo dessas projeções (utilizando a *épura*) tirar conclusões sobre aqueles entes geométricos.
3. Geometria Analítica: é o estudo da Geometria pelo método cartesiano (René Descartes, 1596-1650), que em última análise consiste em associar equações aos entes geométricos, e do estudo dessas equações (com o auxílio da Álgebra), portanto tirar conclusões a respeito daqueles entes geométricos. (CAMARGO e BOULOS, 2005, p.x)

Correlacionam-se, a partir dos distintos âmbitos geométricos descritos na citação em recorte, algumas ferramentas de estudo: a lógica para os estudos da Geometria Axiomática, o desenho como cerne da Geometria Descritiva e a Álgebra como uma aliada no estudo da Geometria Analítica. Exemplificando esses dois métodos, os autores citam um plano. No âmbito da Geometria Descritiva, conhecer um plano equivale a determinar sua *épura*, enquanto para a Geometria Analítica significa determinar sua equação. Eles concluem o discurso introdutório, da segunda edição, evidenciando o papel de relevância ocupado pelos vetores no desenvolvimento da obra.

No preâmbulo da terceira edição, os autores adicionam ao texto da segunda, “o que há de novo” no que se refere ao conteúdo: acréscimo da quantidade de exercícios resolvidos e propostos, observações e comentários, além de um tratamento teórico completo e rigoroso. Eles também se reportam ao destaque à valorização de ideias geométricas, tidas em primeiro plano, e em seguida passa-se para o tratamento algébrico desses conceitos. Neste sentido, gera-se um

tripé: “conceituação geométrica/formulação e algébrica/aplicações.” (CAMARGO; BOULOS, 2005, p.xi)

Revela-se mais uma intenção, no item denominado como “modo de usar”, destinado para que os estudantes realizem uma leitura sistemática e possam usufruir de informações e orientações suplementares sobre procedimentos algébricos elementares que, geralmente, não são abordados em livros de geometria. Ademais, Camargo e Boulos (2005, p.xi) atribuem aos exercícios um importante papel no aprendizado, pois “os exercícios resolvidos pretendem esclarecer a teoria, exemplificá-la, complementá-la ou mostrar alguma técnica especial.” Eles sugerem que os leitores usem o “método do strip-tease” o qual consiste em buscar resolver o exercício sem a visualização prévia de sua resolução. Assim, possivelmente o estudante terá mais atenção e poderá refletir sobre a posterior leitura da solução.

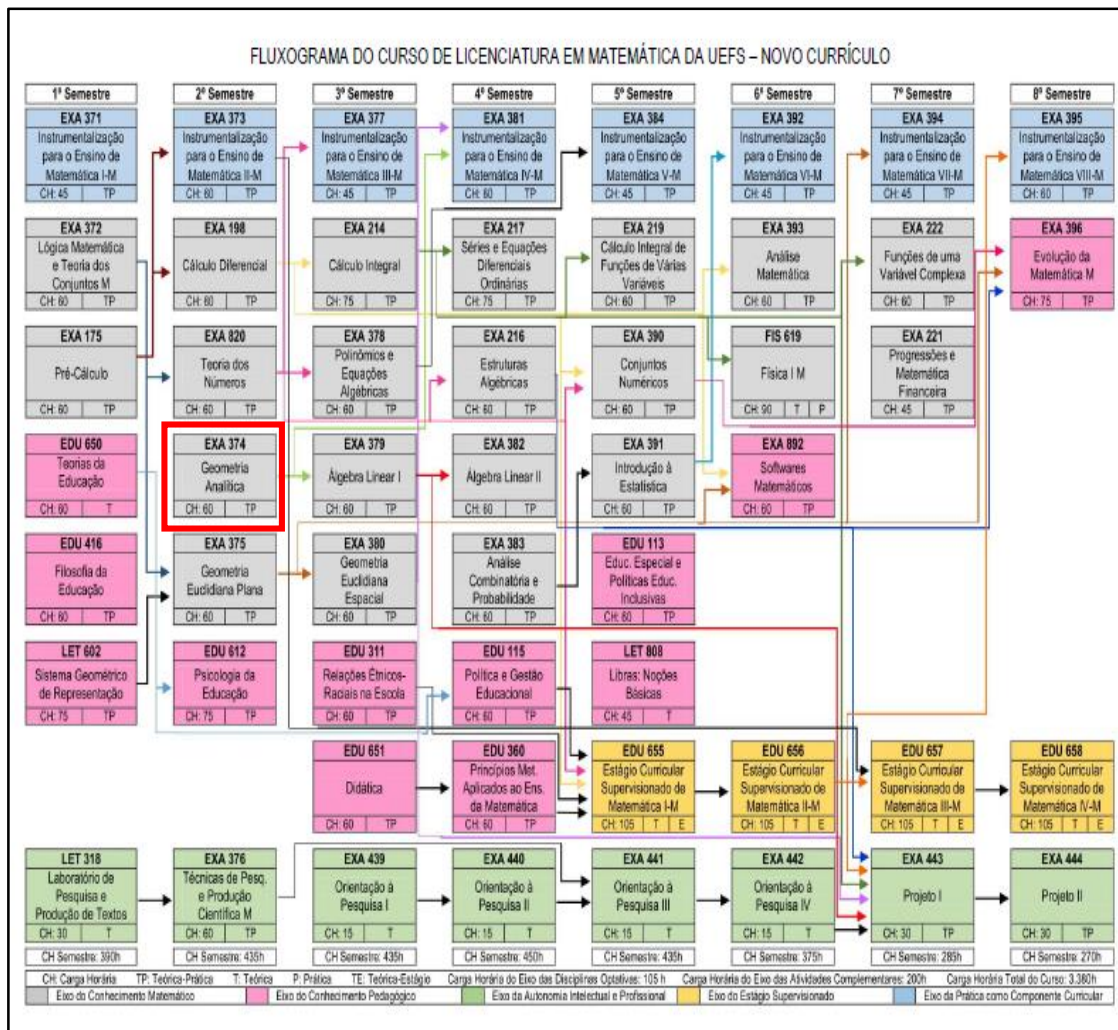
Faz-se uma breve descrição dos vinte seis capítulos em que os doze primeiros se ocupam da Álgebra Vetorial e, finalmente, apresentam os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento dos conteúdos tais como: os resultados da Geometria Euclidiana e conceitos da Álgebra Elementar, em especial, determinantes, matrizes e sistemas lineares. Ao tocar em algumas condições para o estudo de Geometria Analítica retorna-se às recomendações frisadas nos PPPs.

O PPP (COLMAT – UEFS, 2004), que iniciou o processo de desativação em 2018 e deverá concluí-la em 2022, traz como uma das recomendações que todas as disciplinas do Núcleo de Conhecimento Matemático deveriam acontecer na ordem em que estavam propostas, com exceção das disciplinas Análise Combinatória, Progressões, Matemática Financeira e Teoria dos Números. O aluno poderia, portanto, matricular-se nestas últimas em qualquer tempo, desde que houvesse vaga disponível. Nesses termos, a restrição imposta aos estudantes era a de seguir uma ordem determinada na organização do curso. No projeto atual, tem-se o seguinte direcionamento:

Numa concepção curricular em que se busca a maior flexibilização possível com o estabelecimento de um conjunto mínimo de pré-requisitos, o Colmat terá papel fundamental e imprescindível na orientação dos nossos estudantes, no sentido de mostrar-lhes a necessidade da aquisição de conhecimentos prévios para realizar determinados estudos. (COLMAT – UEFS, 2018, p.28)

O fluxograma revela de forma mais detalhada a interdependência entre as componentes curriculares.

Figura 11 - Fluxograma do CLM-UEFS



Fonte: COLMAT – UEFS (2018, p.50)

A componente curricular EXA-374 Geometria Analítica integra o rol de disciplinas do Eixo de Conhecimento Matemático, 2º semestre, como retratado na figura 11. É possível notar que nenhuma seta chega até ela, o que indica que não são exigidos pré-requisitos advindos do repertório disciplinar do 1º semestre para cursar EXA 374, o que de certa forma contradiz o que foi recomendado em Camargo e Boulos (2005).

2.1.2 Um olhar para o recorte ecológico e praxeológico da obra de Camargo e Boulos

A partir do panorama estrutural desta obra, direciona-se a atenção para um escopo ecológico em termos de nicho e habitat (CHEVALLARD, 1994, 1996) e das praxeologias que

vivem neste texto, no que se refere aos vetores. De forma simplista, o habitat designa o lugar e ambiente conceitual do objeto de conhecimento, enquanto o nicho consiste das funções assumidas pelo objeto dentro de um sistema ao qual pertence.

Ademais, os pressupostos ecológicos se apresentam como uma forma de questionar a realidade, como já apontado nesta investigação e retomada aqui, a saber:

O que há e por quê? Mas também, o que não existe, e por quê? E o que poderia existir? Sob quais condições? Por outro lado, dado um conjunto de condições, quais objetos são forçados a viver ou, pelo contrário, são impedidos de viver nessas condições? (ARTAUD, 1998, p.101, tradução nossa⁹⁴).

Respaldado por essas inferências, foi examinado o texto da obra e identificado um aspecto especial que o difere de outros livros. Inclusive na abordagem apresentada na segunda edição, revelado no apêndice Relação de Equivalência - RE cujo título é: “um exemplo prático de relação de equivalência”, no qual os autores estabelecem analogias da definição vetorial com uma situação cotidiana dos estudantes, objetivando atenuar o caráter abstrato do conceito de vetor. Assim, os autores se despem do formalismo no intuito de facilitar a compreensão do processo. A situação apresentada é:

Na rotina de uma escola, é importante o agrupamento de alunos em *turmas* ou *classes*. Ao fazer esse agrupamento, o secretário da escola leva em conta algumas características individuais e desconsidera outras. Não interessam, por exemplo, religião, peso, endereço, mas são importantes as disciplinas cursadas, os professores que as ministram, o período em que frequentam a escola, as salas que ocupam. (...) *O agrupamento em classes leva em conta algumas características individuais e desconsidera outras, de acordo com os objetivos da escola.* Dois alunos são considerados *colegas* se têm aulas das mesmas disciplinas, com os mesmos professores, nos mesmos horários e locais. Sob esse ponto de vista, *todo aluno é colega de si mesmo; se um aluno é colega de outro, este outro é seu colega; se um aluno é colega de outro, e este outro é colega de um terceiro, então o primeiro é colega do terceiro.* O que faz o secretário da escola para formar uma classe? *Agrupar em um conjunto todos os alunos que são colegas uns dos outros.* Desse modo, *a totalidade dos alunos fica dividida em classes, e nenhum aluno pode pertencer a duas classes diferentes.* Faz parte da rotina da escola (...) ouvir os alunos para conciliar interesses, porém é difícil organizar reuniões com todos os alunos, até pela falta de lugar adequado. A melhor solução é fazer uma reunião com *representantes de classe.* A 3ªA do noturno elegeu o aluno Abê como representante, (...). *Para todos os efeitos, durante a reunião, Abê não é Abê; Abê é a 3ªA.* (...) Abê vê-se impossibilitado de comparecer a outra reunião e é substituído por Cedê (...). Nessas condições, *qualquer aluno da 3ª A poderia substituir Abê.* (CAMARGO e BOULOS, 2005, p.486, grifos dos autores)

Para ressaltar as semelhanças, os autores criaram um glossário, estabelecendo a correspondência entre os termos: “aluno – segmento orientado, alunos colegas – segmentos

⁹⁴ La problématique écologique se présente, d'emblée, comme un moyen de questionner le réel. Qu'est-ce qui existe, et pourquoi? Mais aussi, qu'est-ce qui n'existe pas, et pourquoi? Et qu'est-ce qui pourrait exister? Sous quelles conditions? Inversement, étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions?

orientados equipolentes, classe – classe de equipolência (vetor) e representante – representante.” (CAMARGO e BOULOS, 2005, p.487)

Nesta perspectiva, nota-se uma preocupação no que diz respeito a uma complementação da abordagem formal do saber matemático, ou seja, por um momento, coloca-se de lado o rigor matemático. Assim, Camargo e Boulos (2005) apresentam possibilidade de criação de elos com o cotidiano do estudante. E como forma de sintetizar a definição geométrica de vetor e tratá-lo de modo mais intuitivo, sublinhando que: “vetor ‘é’ uma flecha que pode ser colocada em qualquer posição do espaço, desde que se preservem seu comprimento, sua direção e seu sentido.” (CAMARGO e BOULOS, 2005, p.5)

Com o respaldo das hipóteses ecológicas, elenca-se o que existe: as representações geométricas acompanham cada definição, os exercícios se reportam aos conceitos, proposições e propriedades imediatamente anterior em que aparecem. Além disso, algumas observações esclarecem pontos que integram a intenção de gerar maior especificidade e clareza para o leitor. Em termos do que deveria existir, sente-se falta de uma quantidade maior de situações em que, não apenas, se estabeleçam analogias, mas também revelem articulações entre as razões de ser (BOSCH; GASCÓN, 2010) dos vetores.

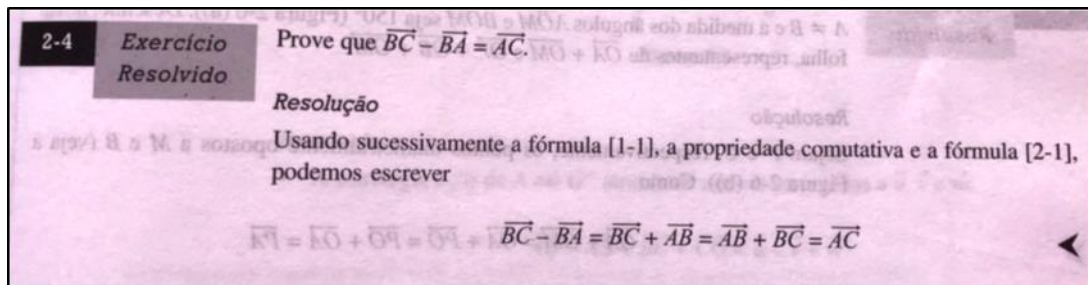
Em comparação com os PPPs, foram identificadas possíveis articulações com o cotidiano dos estudantes nas disciplinas de INEMs, visto que,

O Eixo da Prática como Componente Curricular é contemplado ao longo de todo o curso em atividades propostas em cada semestre, através de disciplinas denominadas de Instrumentalização para o Ensino da Matemática (INEM), inseridas no eixo articulador entre disciplinaridade e interdisciplinaridade e no eixo articulador das dimensões teórica e prática. (COLMAT – UEFS, 2018, p. 39)

Os INEMs têm a função de fomentar nos sujeitos do CLM-UEFS um caráter prático, construtivo no qual pode emergir um espaço para engajamento de natureza social a partir da transversalidade, em uma busca colaborativa entre docentes de diversas áreas do conhecimento. Como descrito na versão atual do PPP (COLMAT – UEFS, 2018, p. 39), “devem-se discutir maneiras de desenvolver no estudante, por meio do ensino da Matemática, conceitos, procedimentos e atitudes que contribuam para a formação da cidadania.” É nesse momento que se abre espaço para gerar reflexões e discussões acerca das relações entre a Matemática e os diversos temas que compõe o cenário da sociedade atual.

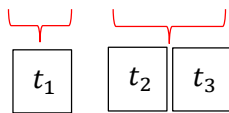
No bojo do complexo praxeológico, presente no texto, são revelados com maior nitidez, por meio dos exercícios resolvidos, as tarefas e técnicas, assim como o que legitima e respalda o bloco tecnológico teórico que acompanha cada resolução. Tomaremos alguns como exemplo.

Figura 12 - Exemplo 1 dos exercícios resolvidos



Fonte: Camargo e Boulos (2005, p.11)

No cerne desse exercício, pode-se identificar a tarefa que se enquadra no rol de tipo de tarefas T que se integram as operações vetoriais, denotada aqui como t_{2-4} na qual reporta-se ao exercício resolvido 2-4, sem perder de vista a concepção de Chaachoua e Bessot (2016) em que uma técnica é descrita como uma sequência de tipo de tarefas, ou seja, possibilita situar melhor as dificuldades dos alunos na implementação de uma técnica ao nível das “sub-tarefas” que a compõem. Assim, evidencia-se t_{2-4} : Prove que $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$. Enquanto técnicas tem-se: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



As quais podem ser descritas como:

t_1 : $-\overrightarrow{BA} = +\overrightarrow{AB}$ (vetor oposto) t_2 : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ t_3 : extremidade coincidindo com a origem resulta em origem com extremidade.

Essas sequências de tarefas (técnicas) são legitimadas, em um primeiro momento, pela premência de um estudo sobre as características e as propriedades dos segmentos orientados antes de desenvolver uma formalização acerca da definição deste ente matemático. E, no segundo momento, pela definição [1-1] em que um “segmento orientado é um par ordenado (A, B) de pontos do espaço, em que A é a origem e B é a extremidade do segmento orientado (A, B)” (CAMARGO e BOULOS, 2005, p.2), em conjunto com as propriedades do elemento oposto e comutativa.

O segundo exercício resolvido, que foi adotado como exemplo se apoia na representação de um paralelepípedo, objetivando exprimir vetores em função de outros vetores como apresentado na figura 13.

Figura 13 - Exemplo 2 dos exercícios resolvidos

2-7 Exercício Resolvido Na Figura 2-7 representa-se um paralelepípedo $ABCDEFGH$. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, exprima \overrightarrow{AG} e \overrightarrow{EC} em função de \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .

Resolução

- A estratégia é “ir de A até G” através de arestas associadas a \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

- Adotando estratégia semelhante, escrevemos

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\vec{w} + \vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$$

Fonte: Camargo e Boulos (2005, p.13)

Nestes termos, faz-se alusão a duas das quatro diagonais do paralelepípedo $ABCDEFGH$. Tem-se como tarefa, **t_{2.7}**: Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, exprima \overrightarrow{AG} e \overrightarrow{EC} em função de \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} . A sequência de tarefa (técnicas) segue a estratégia de ir de A até G por meio das arestas que são representantes de \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , ou seja,

$$\overrightarrow{AG} = \overbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}^{t_4} + \overbrace{\overrightarrow{CG}}^{t_6} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}.$$

$$\overrightarrow{EC} = \overbrace{\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}}^{t_4} + \overbrace{\overrightarrow{BC}}^{t_5} = -\vec{w} + \vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$$

t_4 : soma vetorial;
 t_5 : vetor oposto de \vec{w} ;
 t_6 : representantes dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .

Nos demais livros que serão visitados para construção da análise serão buscados aspectos semelhantes entre os tipos de tarefas T para que se possa estabelecer comparativos entre as praxeologias presentes nas obras escolhidas pelas instituições noosféricas retratadas neste texto. Como ressalta Artaud (2007), a noção de Tipo de Tarefas tem como principal função permitir o agrupamento de tarefas julgadas suficientemente próximas. Ademais, será viável analisar a proposta apresentada, realizar inferências acerca das escolhas dos autores e sobre possíveis dificuldades dos estudantes.

2.2 - STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. GEOMETRIA ANALÍTICA. SÃO PAULO: MCGRAW-HILL, 1987;

O prefácio desta obra é bastante sucinto, dividido em duas partes: a primeira destaca que a primeira publicação ocorreu em 1971 e que, até 1985, teve a configuração de um livro de Álgebra Linear e Geometria Analítica, sendo posteriormente transformado em dois livros – um de Geometria Analítica e outro de Álgebra Linear – no intuito de tornar os conteúdos mais acessíveis. Essa vertente, aponta para aspectos síncronos com as modificações ocorridas nas reformulações curriculares no que tange a junção ou a dissociação entre Geometria Analítica e Álgebra Linear.

A segunda parte destaca que, no processo de revisão, conceitos foram reformulados e a obra foi enriquecida com exercícios que o livro de Álgebra Linear e Geometria Analítica não continha, ou seja, segundo os autores o texto se tornou mais prático e mais simples para atender ao objetivo maior, que é o de ser útil no processo de ensino-aprendizagem.

Em termos de representatividade, se comparado com a obra abordada anteriormente, observa-se que o número de exemplares presentes no acervo da BCJC – UEFS é aproximadamente um terço do número de exemplares de Carmago e Boulos (2005).

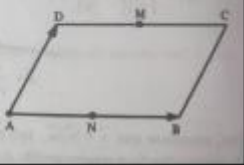
Na estrutura do texto foi identificada a seguinte organização: apresentação do conteúdo a partir de definições, observações, propriedades, problemas resolvidos e problemas propostos. De forma explícita, os vetores são abordados em três capítulos dos oito que contém o livro.

No âmbito ecológico, foram identificadas que as representações geométricas também subsidiam as definições. Contudo, nos problemas resolvidos não são feitas referências aos conceitos e às propriedades trabalhados no capítulo, tem-se esse entendimento, implicitamente, ficando a cargo do leitor inferir suas interpretações. Segue-se a inserção de observações que visam esclarecer algumas escolhas e características dos objetos que auxiliam a conceitualização do tema abordado no capítulo. Em comparação com Camargo e Boulos (2005), destaca-se a ausência de articulações claras com as definições e propriedades utilizadas nos problemas

resolvidos. De igual maneira, não foram identificados esforços em promover interligações com situações que se vinculem à razão de ser dos vetores.

Como parâmetros de comparação, foi dada atenção para problemas resolvidos que se assemelham com os exercícios citados no texto de Camargo e Boulos (2005). Contudo, a abordagem praxeológica que Steinbruch e Winterle (1987) adotam para solucionar as questões, de natureza similar, revelam nuances distintas. Neste sentido, disponibiliza-se:

Figura 14 - Problema resolvido sobre operações vetoriais

Enunciado	Soluções
<p>2) O paralelogramo ABCD é determinado pelos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AD}, sendo M e N pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente. Completar convenientemente:</p> <p>a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \dots$</p> <p>b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \dots$</p> <p>c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \dots$</p> <p>d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC} = \dots$</p> <p>e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} = \dots$</p> <p>f) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \dots$</p> 	<p>a) \overrightarrow{AC}</p> <p>b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$</p> <p>c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$</p> <p>d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM}$</p> <p>e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{MN}$</p> <p>f) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BD}$</p>

Fonte: Steinbruch e Winterle (1987, p.10)

Toma-se como suporte para a descrição da tarefa um paralelogramo ABCD, que acompanha o delineamento praxeológico do exercício, o qual pode ser descrito como um paralelogramo ABCD determinado pelos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AD} , sendo M e N pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente. Assim, se instaura a tarefa *t*: (Completar; convenientemente a, b, c, d, e, f), caracterizada por um verbo e seu completo, como destacado por Chaachoua e Bessot (2018, p.121) “toda tarefa é descrita por um determinado verbo de ação e seus complementos fixos, tomados nos objetos de uma disciplina.” As técnicas τ , mobilizadas em cada item, são empregadas propriedades em associações com os termos dos representantes dos vetores, sem explicitar expressamente as correlações empregadas. Isso pode ser notado no item a em comparação com os demais, visto que, usa-se a regra do paralelogramo e, nos demais, a regra do polígono. Porém, os autores não destacam que a regra do polígono pode constituir outro caminho repertoriado pela sequência de tipo de tarefas envolvendo outras técnicas de resolução, como indica Chevallard (1989) nos limitando a um reduzido número de técnicas. No entanto, em Camargo e Boulos (2005) todas as etapas dos exercícios resolvidos são referenciadas com propriedades e conceitos, reportando ao número da página em que aparecem.

Tabela 3 - Detalhamento praxeológico do problema resolvido na figura 14

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$	t_a : Regra do paralelogramo, em que a soma é representada pelo segmento orientado AC (uma das diagonais)
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$	t_b : Representante de $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$; pode-se manter \overrightarrow{BA} e fazer uso do representante de $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.
c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$	t_c : Representante de $-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$.
d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM}$	t_d : Representantes de $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NM}$ ou $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NB}$, logo $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AM}$
e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{MN}$	t_e : Representantes de $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DN}$, logo $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{MN}$. Este item da tarefa poderia constituir um momento de uso da propriedade comutativa, pois: $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{NA}$ e $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DN}$ assim, $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{DA}$ é representante de \overrightarrow{MN} .
f) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BD}$	t_f : Representante de $-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MD}$.

Fonte: acervo da autora (2020)

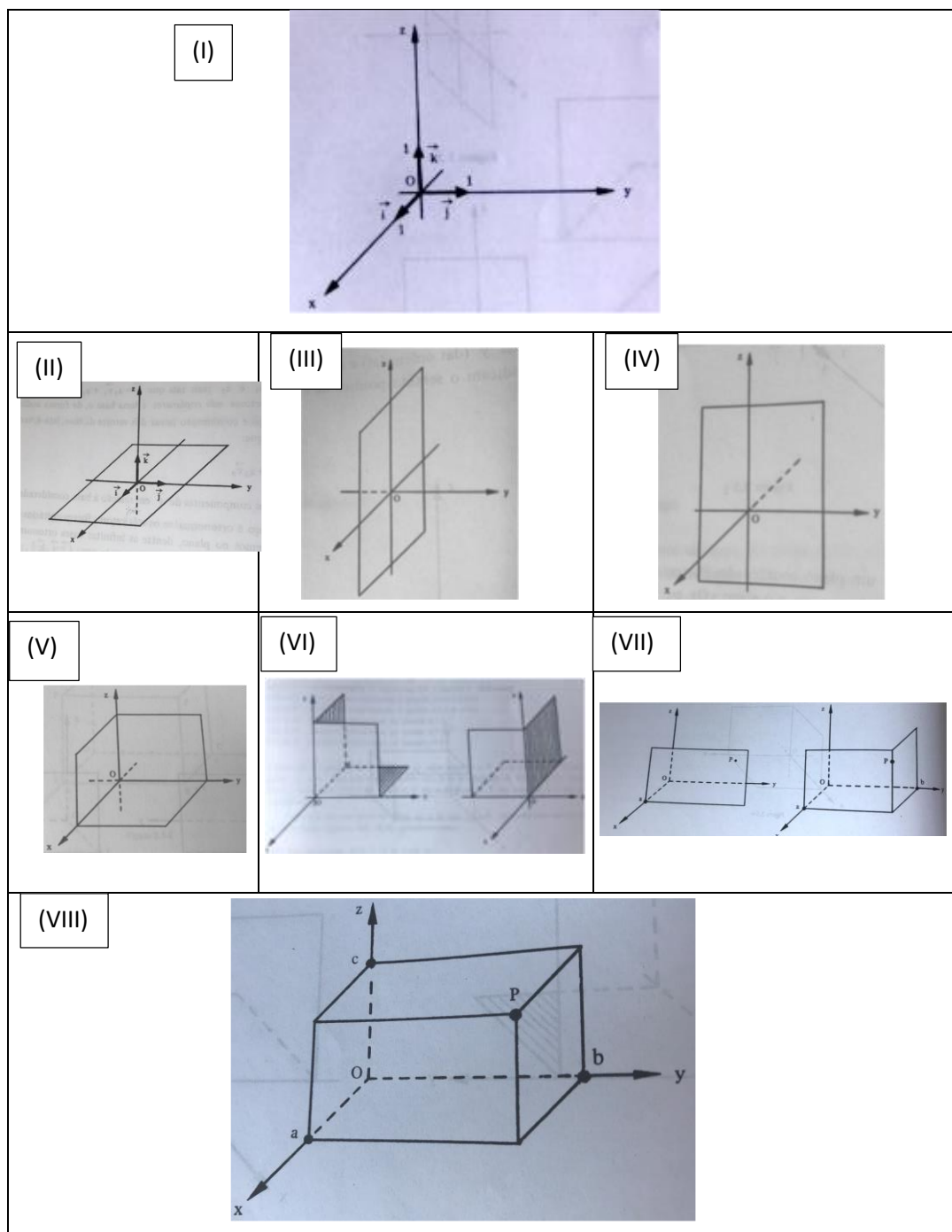
Nestes termos, o discurso tecnológico-teórico que legitima cada nível de “sub-tarefas” (técnica) permanece oculto. Contudo, sob outro ângulo de visão, pode-se supor que os autores delegaram aos sujeitos mais uma forma de interação com a obra, por meio das descobertas das interligações que respaldam cada etapa imersa no bojo do caminho resolutivo.

Já no parágrafo introdutório do Capítulo 2 é destacado que:

No capítulo 1, estudamos os vetores do ponto de vista geométrico e, no caso, eles eram representados por um segmento de reta orientado. No presente capítulo, vamos mostrar uma outra forma de representá-los: os segmentos orientados estarão relacionados com os sistemas de eixos cartesianos do plano e do espaço. (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987, p.15)

A partir desta perspectiva, introduz-se a decomposição de vetores no plano e no espaço, momento em que são apresentados os conceitos: projeções, coordenadas ou componentes do vetor em relação à base e combinações lineares. No entanto, a ênfase dada à decomposição no espaço revelou desígnios distintos ao texto de Camargo e Boulos (2005) ao recorrerem às noções do plano de projeções, por meio dos conceitos de diedros e épura (Geometria Descritiva) para representação dos vetores no plano e no espaço.

Figura 15 - Sequência de representações no espaço



Fonte: Steinbruch e Winterle (1987, p.26-28)

As construções representativas do espaço, exibidas na figura 15, consideram que qualquer conjunto de três vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, não coplanares, constituem para \mathbb{R}^3 uma base e que todo vetor \vec{v} do espaço é combinação linear dos vetores da base, isto é, existem números reais a_1, a_2 e a_3 tais que: $\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3$, em que a_1, a_2 e a_3 são as componentes de \vec{v} em relação à base considerada.

De posse desses conceitos, admitindo a base ortonormal, ou seja, três vetores unitários, dois a dois ortogonais, os autores optam pela base canônica representada por $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ situando estes três vetores na origem O. E por O partem três retas como mostra a figura 15(I). Os autores fazem uma breve descrição dos eixos coordenados, ou seja, “a reta com a direção do vetor \vec{i} é o eixo dos x (das abscissas), a reta com a direção do vetor \vec{j} é o eixo dos y (das ordenadas) e a reta com a direção do vetor \vec{k} é o eixo dos z (das cotas), e as setas indicam o sentido positivo de cada eixo.” (STEINBRUCH E WINTERLE, 1987, p.25). Segue-se evidenciando que cada dupla de eixos como determinantes dos três planos coordenados, como indicados nas figuras 15, em (II), (III) e (IV). A construção prossegue com a interseção entre os planos, segundo os três eixos, dividindo o espaço em oito regiões denominados octantes, conforme proposto nas figuras 15, em (V) e (VI).

As coordenadas são determinadas a partir dos traçados de planos paralelos e interseções com o eixo que contém as coordenadas. Por exemplo, na figura VII apresentada da figura 15, deseja-se obter a abscissa de um ponto P, traça-se um plano paralelo a yz e observa-se o ponto de interseção deste plano com o eixo x, procedendo de forma análoga para as demais coordenadas, resultando na construção do paralelepípedo retângulo (VIII) apontado na figura 15.

Em comparação com abordagem praxeológica apresentada em Camargo e Boulos (2005), mediante o exercício resolvido o qual também toma como base um paralelepípedo, nota-se condutas praxeológicas distintas, propiciando aproximações entre a geometria descritiva ou método mongeano⁹⁵, por meio das construções dos octantes e, por consequência, com as épuras que assumem uma forma de representação em que se utilizam dois planos perpendiculares (planos de projeção) no intuito de que objetos tridimensionais sejam representados em suportes bidimensionais.

2.3 LEHMANN, C. H. GEOMETRIA ANALÍTICA. 2ª EDIÇÃO. TRADUÇÃO: RUY PINTO DA SILVA SIECZKOWSKI, RIO DE JANEIRO. EDITORA GLOBO, 1998;

O projeto do livro é exposto no prefácio, denotado como um “primeiro curso de Geometria Analítica plana e espacial” e apresenta os pré-requisitos necessários ao estudante para compreensão dos tópicos abordados nesta obra. Adota-se como introdução o método analítico e a vinculação de ideias familiares que se apresentam como suporte para inserção de novos conceitos da Geometria Analítica, por meio dos artigos introdutórios que abrem cada

⁹⁵ Sistematizado na obra *Géométrie Descriptive* de 1799.

capítulo, com o objetivo de suprimir as dificuldades advindas de fases posteriores. Assim, como forma de contemplar esse aspecto, um dos apêndices traz uma lista de referências de fórmulas, definições e teoremas que abordam esses temas.

Em atenção aos leitores, a forma de exposição de Lehmann (1998) segue uma ordem de apresentação em termos de orientação, motivação, discussão e exemplos em conformidade com a exposição de uma aula, com ênfase para o processo de raciocínio em detrimento da simples memorização dos conceitos. Além disso, o autor destaca que os resultados da discussão de um tópico particular remetem para construção de um teorema. Procedimento este que, além de resumir o conteúdo estudado, servirá de referências para tópicos futuros. Contudo, agrega-se a esse aspecto a concepção de um material suplementar, apontando para a necessidade de acesso e de consulta a outras fontes. Ele ainda ressalta que,

O tratamento da Geometria Analítica do espaço é consideravelmente mais completo do que na maioria dos textos elementares. Uma boa fundamentação em Geometria Analítica espacial é um acervo inestimável para o estudante em seu posterior estudo de Matemática. Por exemplo, o amplo tratamento dado à interseção entre superfícies e curvas no espaço, apresenta uma nítida vantagem para o trabalho do estudante no Cálculo. (LEHMANN, 1998, p. VIII)

No contexto estrutural, o texto é subdividido em lições, em que as discussões dos tópicos são imediatamente seguidas por um ou mais exemplos ilustrativos acrescidos de um conjunto de exercícios. Outros aspectos da obra são as tabelas que sumarizam resultados os quais se inter-relacionam. O autor também relata que no livro há 1920 exercícios, divididos em 71 grupos além de 134 exemplos resolvidos.

Em termos de representatividade, o livro possui apenas treze exemplares disponível no acervo da BCJC – UEFS. Um exemplar das edições de 1970 e de 1974, cinco das edições de 1979 e de 1998 e um exemplar de 1985. Desta forma, pode-se inferir que se trata de um livro texto pouco adotado pelos docentes. Contudo, é o texto com o maior número de edições, dentre os aqui selecionados.

No que se refere ao aporte ecológico, foram identificados elementos que diferenciam este livro dos demais. O primeiro aspecto se relaciona às interligações estabelecidas entre a Geometria Elementar e Geometria Analítica, como revelado em alguns trechos:

O estudante já está familiarizado com o segmento retilíneo como conceito geométrico; entretanto, para as finalidades da Geometria Analítica, estendemos esta noção de segmento retilíneo, incluindo um sentido ou orientação. (...) Do ponto de vista da Geometria Elementar, os comprimentos dos segmentos retilíneos orientados AB e BA são iguais; entretanto, em Geometria Analítica deve ser feita uma distinção entre os sinais destes comprimentos. Assim, especificamos arbitrariamente que um segmento retilíneo com certa orientação tem comprimento *positivo*, ao passo que outro opostamente orientado terá comprimento *negativo*. (LEHMANN, 1991, p. 1-2, grifos do autor)

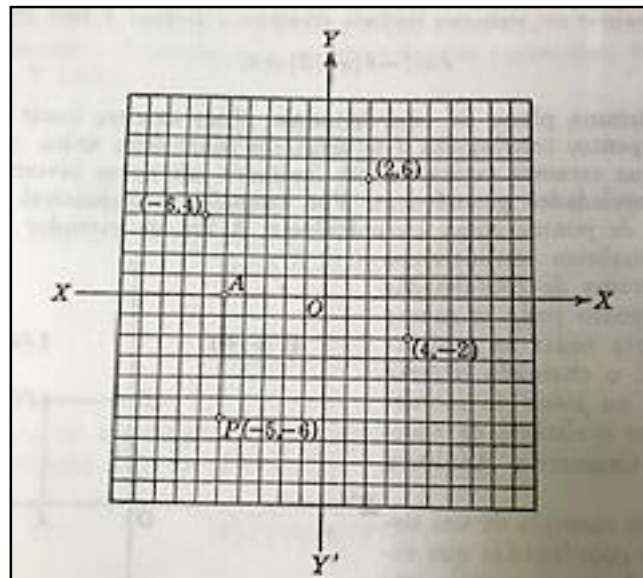
Outra vertente identificada é que o autor segue sua construção sem mencionar o termo vetor e segue introduzindo os conceitos de orientação e sinal para os segmentos retilíneos em conjunto com a ideia de comprimento formalizada por meio do

Teorema 1. Num sistema linear de coordenadas o comprimento do segmento retilíneo orientado determinado por dois pontos dados é obtido, tanto em grandeza como em sinal, subtraindo-se a coordenada do ponto inicial da coordenada da extremidade. (LEHMANN, 1991, p.4).

O que significa dizer que existe uma correspondência biunívoca entre pontos de uma reta e o conjunto dos números reais, o que, segundo este autor, possibilita “aplicar os métodos da Análise à Geometria, donde a designação Geometria Analítica” (LEHMANN, 1991, p. 9). Este direcionamento é seguido de igual modo para o plano e para o espaço.

Em outro momento do texto, o autor recomenda o uso de papel de coordenadas retangulares, conhecido atualmente como papel milimetrado ou quadriculado, que se apresenta dividido em quadrados iguais, formados por retas paralelas aos eixos coordenados, sugerindo que o estudante empregue o papel milimetrado sempre que seja requerido um gráfico detalhado, como apresentado na figura 16.

Figura 16 - Recomendação do papel de coordenadas retangulares



Fonte: Lehmann (1991, p.6)

Assim, foi possível perceber indícios que apontam para a recorrência e a necessidade do uso de um dispositivo didático que não é utilizado com frequência, como destacado em nossa investigação. Lehmann (1991) também pontua acerca da natureza da Geometria Analítica,

ratificando a relevância de uma abordagem histórica epistemológica, denominada como a natureza da Geometria Analítica, pois segundo ele,

A Geometria Elementar anteriormente estudada pelo aluno é denominada Geometria *pura* a fim de distingui-la de nosso presente assunto. Vimos há pouco que por meio de um sistema de coordenadas é possível obter uma correspondência biunívoca entre pontos e números reais; isto nos possibilita aplicar os métodos da Análise à Geometria, donde a designação *Geometria Analítica*. À medida que progredimos em nosso trabalho veremos, por exemplo, como equações e processos algébricos podem ser vantajosamente empregados na solução de problemas geométricos. Inversamente, os métodos da Geometria Analítica podem ser usados para obter uma representação de equações e relações funcionais. (LEHMANN, 1991, p.9, grifos do autor)

O discurso prossegue revelando concepções que apontam vantagens que advém da Geometria Analítica com o uso de sistema de coordenadas na resolução de um grande número de problemas. Nesse sentido, o autor ressalta que “o estudante deve ter em mente que agora ele está seguindo um curso de *Geometria Analítica* e que a solução de um problema geométrico não terá sido efetuada por métodos *analíticos* a menos que tenha sido empregado um sistema de coordenadas.” (LEHMANN, 1991, p.9, grifos do autor).

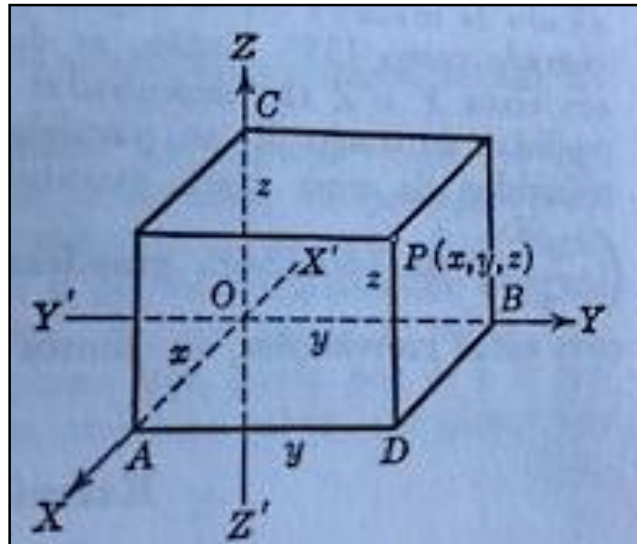
Em seu texto, Lehmann (1991) dá sinais da relevância da representação gráfica, seja por solicitar no primeiro grupo de exercícios o desenho relativo a cada questão de uma série de 20 ou ao recomendar que o estudante inicie a sua resolução pela construção de um sistema de coordenadas cartesianas. Destaca, também, que esse aspecto é particularmente importante nas etapas iniciais do estudo de Geometria Analítica, evitando um retorno aos métodos da Geometria Pura.

A abordagem segue situada no âmbito da reta e do plano em conexão com o tratamento de todos os objetos unidimensionais ou bidimensionais, respectivamente. Somente no capítulo XIII inicia-se a perspectiva do ponto no espaço tridimensional, permitindo que este assuma qualquer posição no espaço. Dito de outra forma, muda-se o referencial que agora passa a ser assumido por um sistema coordenado no espaço, ou seja, “um sistema tridimensional obtido como uma extensão do sistema bidimensional,” (LEHMANN, 1991, p.281), solicitando dos estudantes um olhar mais atento para a dimensionalidade e para o tratamento analítico do espaço. Assim, Lehmann (1991) sublinha que,

o estudante deverá sentir que a terceira dimensão da Geometria Analítica do espaço exigirá maiores esforços de seu poder de visualização de figuras no espaço do que era necessário para figuras no plano. (...) O estudante pode visualizar facilmente o primeiro octante considerando um canto de um quarto retangular onde duas paredes adjacentes e o piso representam os planos coordenados. (LEHMANN, 1991, p.281-282)

Essa concepção torna-se evidente e é reforçada a partir de um paralelepípedo retângulo como exposto na figura 17,

Figura 17 - Representação de um paralelepípedo retângulo



Fonte: Lehmann (1991, p.283)

Observa-se, então, o emprego do método denominado “projeção paralela” que, segundo o autor, é comumente empregado, como apresentado na figura 17. Neste sentido, ele destaca que,

[...] os eixos Y e Z são desenhados mutuamente perpendiculares, mas o eixo X é desenhado de maneira que o ângulo XOY é maior que 90° , sendo usualmente tomado como 135° . O que significa dizer que as distâncias medidas ao longo dos eixos ou paralelas aos eixos Y e Z são desenhadas em verdadeira grandeza, mas as distâncias medidas ao longo do ou paralelas ao eixo X são colocadas em perspectiva reduzida de uma certa quantidade, geralmente cerca de sete décimos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ da verdadeira grandeza. (LEHMANN, 1991, p.284)

Dessa forma, infere-se que a representação de figuras espaciais no plano reflete deformações, em termos das projeções e perspectiva utilizadas, que podem constituir obstáculos à aprendizagem que envolvem características dos objetos espaciais. Assim, como na abordagem do plano, o autor solicita como primeiro grupo de exercícios a ilustração por meio de desenhos representativos relativos a cada exercício. Deste modo, pode-se inferir acerca da existência de uma inclinação para o emprego de Dispositivos Didáticos (a exemplo do papel milimetrado) e a relevância do aspecto visual geométrico que também subsidiam as definições. Como nessa obra não foi destacado de forma tácita os vetores, nesta pesquisa opta-se por não retratar um recorte das características praxeológicas vetoriais, como prescrito pela análise de manuais

desenvolvida por Chaachoua (2014). No entanto, o discurso que delineou essa obra revelou elementos que se imbricam com esta investigação, em especial, o emprego de dispositivos didáticos diversos em consonância com a visualização.

2.4 CALLIOLI, C. A. (ET AL.) ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES. SÃO PAULO: ATUAL EDITORA LTDA. 1991.

A obra se materializa a partir da parceria entre três professores universitários: Carlos A. Callioli, Hygino H. Domingues e Rovertto C. F. Costa. Dentre os quatro livros selecionados para análise, este é o único que contempla a Álgebra Linear, também é o único que não apresenta um prefácio, desprezando, assim, a oportunidade de abrir a leitura do que está por vir, negligenciando a oportunidade de envolver o leitor e fazê-lo criar expectativas em relação às páginas seguintes.

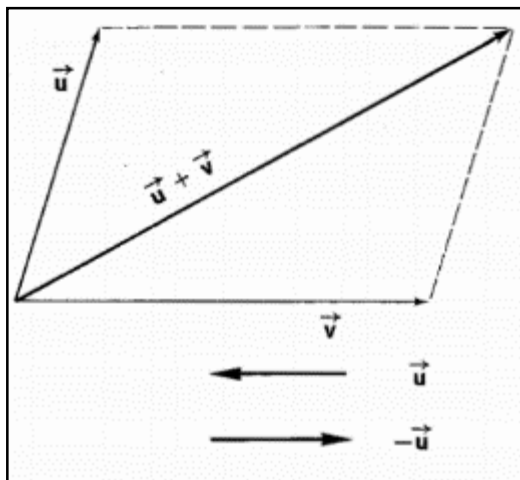
O recorte estrutural encontra-se dividido em duas partes: a primeira aborda a Álgebra Linear e a segunda está voltada para as aplicações. Trata-se de um livro com forte representatividade, visto que são seis edições e doze reimpressões. Estão disponíveis no acervo da BCJC-UEFS cinquenta e sete exemplares, ou seja, é um livro que o estudante poderá ter acesso com maior facilidade.

Os capítulos estão estruturados em definições, propriedades, exemplos e, para fechar cada assunto, finaliza-se com uma sequência de exercícios resolvidos e exercícios propostos. No primeiro capítulo, os autores sinalizam que não estão preocupados com o formalismo ou rigor excessivo, cujos temas tratados são os sistemas lineares e matrizes, considerados como pré-requisitos para o restante do livro.

Em termos ecológicos, pautados nas questões: o que existe e por quê? E o que deveria existir e por quê? Direciona-se o olhar para o segundo capítulo em que são abordados espaços vetoriais. Primeiramente, parte-se de uma introdução, em que se examinam aspectos relacionados a dois conjuntos, supostamente conhecidos dos leitores. O primeiro é o conjunto V dos vetores da geometria, definidos através de segmentos orientados (nosso objeto de estudo) e o outro é o conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ das matrizes reais m por n , em que m e n são números naturais dados (ambos maiores que zero). A intenção é revelar o que existe de comum entre os dois conjuntos.

No conjunto V está definida uma adição (de vetores), conforme figura 18, adição essa dotada das propriedades comutativa, associativa, além da existência de elemento neutro (vetor nulo) e do oposto para cada vetor de V .

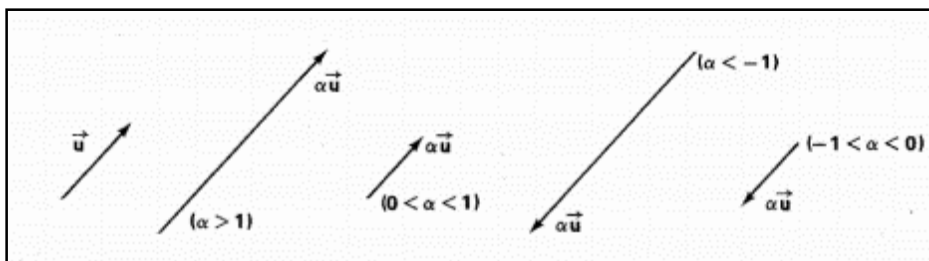
Figura 18 - Representação da adição e vetor oposto



Fonte: CALLIOLI et al (1991, p. 42)

Além disso, pode-se multiplicar um vetor \vec{u} por um número real α e isso se faz conforme a figura 19,

Figura 19 - Representações das multiplicações de vetores por número real



Fonte: CALLIOLI *et al.* (1991, p. 42)

Ainda segundo Callioli *et al.* (1991), se $\alpha = 1$, $\alpha\vec{u} = \vec{u}$ e se $\alpha = 0$, então $\alpha\vec{u} = \vec{0}$. Em geral $|\alpha\vec{u}| = |\alpha||\vec{u}|$.

Essa operação admite as seguintes propriedades, certamente vistas pelo estudante no curso de Cálculo Vetorial: $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$; $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$; $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$; $1\vec{u} = \vec{u}$. (CALLIOLI *et al.*, 1991, p.43)

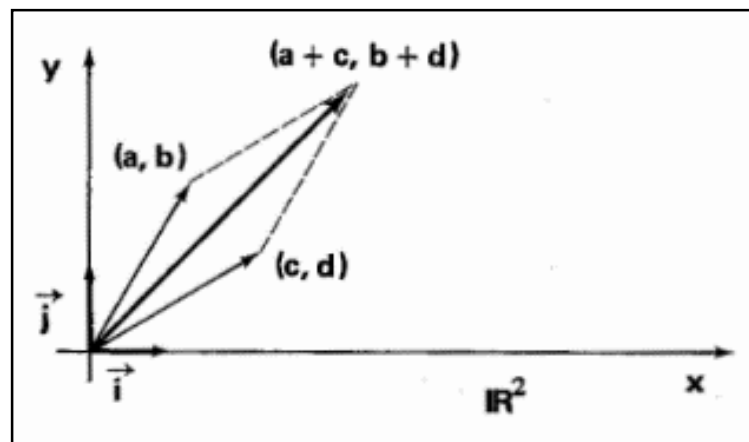
Estes autores também evidenciam que, para todos os números reais α e β e vetores \vec{u} e \vec{v} de forma similar no conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, também está definida a adição de matrizes em que são admitidas as propriedades: associativa, comutativa, elemento neutro, que é a matriz nula e toda matriz A de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tem matriz oposta. Assim, verifica-se que o comportamento de V e o de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ quanto à adição é o mesmo. Mas as coincidências não se encerram aí. Pode-se

também multiplicar uma matriz por um número real. E nessa multiplicação são apresentadas as mesmas propriedades destacadas para V , ou seja, valem as igualdades: “ $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$; $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; $1A = A$ ” (CALLIOLI et al., 1991, p.43)

Logo, os autores concluem que os conjuntos V e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ apresentam uma “coincidência” estrutural no que se refere a um par importante de operações definidas sobre eles. Nada mais lógico, do que estudar simultaneamente V , $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e todos os conjuntos que apresentam essa mesma “estrutura”. Assim, introduz-se o conceito de espaços vetoriais, objeto de estudo da Álgebra Linear.

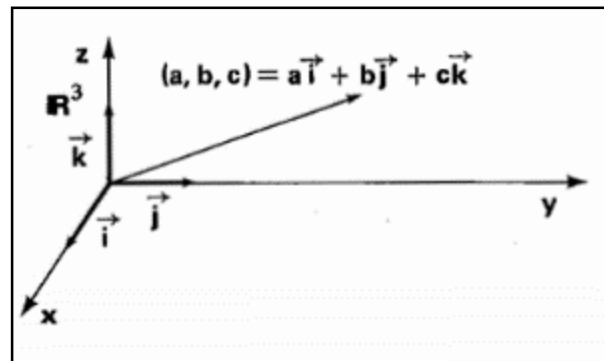
O primeiro exercício resolvido concernente aos espaços vetoriais remete ao plano e aos espaços \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , respectivamente, em que todas as propriedades relacionadas à multiplicação por escalar são verificadas. Em \mathbb{R}^3 a verificação é realizada em termos das propriedades relativas à adição, deixando a cargo do leitor as relacionadas com a operação da multiplicação por escalar. E com uma nota reportam-se às representações geométricas.

Figura 20 - Representação de \mathbb{R}^2



Fonte: CALLIOLI et al (1991, p. 48)

Nestes termos, associa-se a cada vetor (x,y) do \mathbb{R}^2 o vetor $x\vec{i} + y\vec{j}$ do Cálculo Vetorial, admitido como já de conhecimento do leitor. As definições dadas de adição e multiplicação por escalares concordam com as regras usuais para adição de vetores no plano e multiplicação de um vetor por um número. Em seguida, analogamente, apresenta-se a representação do espaço \mathbb{R}^3 .

Figura 21 - Representação de \mathbb{R}^3 

Fonte: CALLIOLI et al (1991, p. 48)

No \mathbb{R}^3 podemos associar a cada vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ o vetor $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. “As definições dadas de adição e multiplicação por escalares estão de acordo com as regras para adição de vetores e de multiplicação de um vetor por um número no espaço estudado no Cálculo Vetorial.” (CALLIOLI et al., 1991, p.48) Em seguida, analogamente apresenta-se a representação do espaço \mathbb{R}^3 . Ressalta-se também que, não se deve cometer o engano de dizer que \mathbb{R}^2 é subconjunto de \mathbb{R}^3 , visto que as estruturas diferem e, posteriormente, pode ser considerado como subconjunto $\{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}$. Aspecto esse que contradiz o que foi destacado por Lehmann (1991, p. 281) “(...) de nosso ponto de vista, um sistema coordenado no espaço é um sistema tridimensional obtido como uma extensão do sistema bidimensional. De igual modo, o sistema plano pode ser encarado como um caso especial do sistema coordenado espacial”. Destacando que desse último ponto de vista uma relação no espaço se reduz à correspondente relação no plano quando é dado o valor zero à coordenada da terceira dimensão.

Sob o ângulo de visão da vertente ecológica, é possível identificar que os autores optaram por caminhos que interligam elementos que pertencem, em primeira instância, ao âmbito do Cálculo Vetorial propondo uma ampliação dos conjuntos a partir da ótica dos espaços vetoriais. Nessa perspectiva, parte-se de um exemplo comparativo entre o conjunto das matrizes $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e os vetores da geometria, denotado por V , definidos por meio de segmentos orientados (objeto deste estudo), em que se busca destacar o que existe de comum entre eles. Os autores fazem inserções geométricas nos exemplos resolvidos que retomam os vetores da geometria, como denominados por eles, porém esse aspecto aponta para a necessidade dessa mesma abordagem na seção de exercícios propostos, visto que a vertente geométrica não é retomada e o foco passa a ser, exclusivamente, o campo da Álgebra Linear.

As praxeologias, como era esperado, se assentam na esfera algébrica, os recortes geométricos no âmbito vetorial são tidos como complementação da abordagem. Os verbos que integram cada tarefa são: provar, mostrar e verificar a partir de condições pré-estabelecidas em termos das operações de adição e multiplicação por escalar. Neste sentido, concebe-se que as tarefas e, conseqüentemente, as técnicas mobilizadas geram aproximações com o bloco tecnológico teórico.

Se quisermos entender (de maneira apropriada) que tipo de atividade matemática é feita na escola ou na universidade, é preciso conhecer os outros tipos de atividades matemáticas que motivam e justificam o ensino e a aprendizagem do primeiro. Agrega-se a esse aspecto a necessidade de conhecer o caminho dessas atividades e suas interpretações nas diferentes instituições. Assim, os “(...) fenômenos didáticos não podem ser separados dos fenômenos relacionados com a produção e o uso da matemática. As atividades matemáticas feitas na escola são então integradas ao domínio mais amplo do estudo das práticas matemáticas institucionalizadas.” (BOSCH, CHEVALLARD e GASCÓN, 2006, p.3, tradução nossa)⁹⁶

Em síntese, a partir do que foi abordado nesse capítulo, nota-se que os livros, enquanto guias de ensino e aprendizagem, imprimem características singulares que nem sempre convergem para um mesmo ponto, ou seja, as concepções dos autores acerca dos saberes apontam para distintas direções, seja por entre uma apreciação geométrica ou algébrica que subsidiam os conceitos e as propriedades do objeto estudado. Como destacou Matheron (2000, p.52) “a organização didática permite estudar uma mesma noção matemática designada por um mesmo nome, mas com organizações matemáticas de naturezas diferentes se desenvolvidas no seio de instituições diferentes.”

Dessa forma, este estudo tem intenção de identificar traços dessa prática por meio das observações descritas no próximo capítulo. A exemplo, a apresentação da Geometria Analítica como um método para olhar problemas de Álgebra que refletem na abordagem do estudo de vetores realizada pela complementação dos tratamentos geométrico e algébrico. Foi identificado, também, que do ponto de vista geométrico a representação algébrica vetorial se atrela às figuras responsáveis pelo aspecto representacional, da mesma forma que se interligam às definições, proposições e exercícios (tarefas). A partir destas influências, é possível projetar os possíveis caminhos que serão seguidos pelos discentes nas construções das técnicas empregadas em cada processo resolutivo.

⁹⁶ (...) didactic phenomena cannot be separated from phenomena related to the production and the use of mathematics. Mathematical activities done at school are then integrated to the broader domain of the study of institutionalised mathematical practices.

CAPÍTULO III

UMA CRÔNICA NARRADA A PARTIR DOS DISCURSOS DOS PROTAGONISTAS DE SISTEMAS DIDÁTICOS (SD) GERADOS NO CLM -UEFS

Ao seguir a cadeia do processo transpositivo, este estudo muda a direção do olhar para o que está posto nas salas de aulas de Geometria Analítica do CLM-UEFS, ou seja, as ideias dominantes que vivem neste contexto quando o tema abordado são os vetores. Em específico, o *habitat* institucional deste objeto matemático, no domínio transpositivo do saber a ensinar, ensinado e aprendido. O conteúdo citado, que parte do saber sábio, como descrito no capítulo anterior, para ser transformado num saber a ensinar, integra o Núcleo de Conhecimentos Matemáticos segundo o Projeto Político Pedagógico (PPP) – elementos estes ratificados pela concepção de Antibi e Brousseau (2002) ao postularem que:

Se queremos difundir a prática da matemática, não basta comunicar conhecimentos. Se quisermos entender as necessidades e possibilidades da transposição didática no sentido estrito, é essencial estudar toda a cadeia e abranger todo o processo. Nestas condições, o estudo da transposição e o das situações didáticas coincidem. Eles definem o mesmo objeto de estudo. [...] Na verdade, é uma questão de facilitar uma abordagem ao ensino que não seja apenas focada no conhecimento "terminal" do aluno - ou melhor, em sua lacuna com o conhecimento escolar - mas em geral relações com este conhecimento e a história que o estabelece. (ANTIBI; BROUSSEAU, 2002, p. 49).

Com base neste delineamento, este estudo dedicou particular atenção para o saber ensinado e o saber apreendido, o que reporta, conseqüentemente, à conjuntura das salas de aula de Geometria Analítica, que se encontram no âmago de um Sistema Didático – SD, conforme sublinha Chevallard (2011, não paginado): “o Sistema Didático encontra-se no coração da Teoria Antropológica do Didático – TAD.” Os direcionamentos deste campo teórico, em essência, fundamentam como determinante e crucial para a compreensão das diferentes ecologias desse conceito.

Frisa-se, nesse contexto, que não se deve desconsiderar a legitimidade e consistência do conhecimento em questão. Bosch e Gascón (2006, p. 55, tradução nossa)⁹⁷ enfatizam que “[...] não é possível interpretar adequadamente a matemática escolar sem levar em conta os

⁹⁷ “[...] it is not possible to interpret school mathematics properly without taking into account the phenomena related to the school reconstruction of mathematics, whose origin has to be found in the institutions that produce mathematical knowledge”.

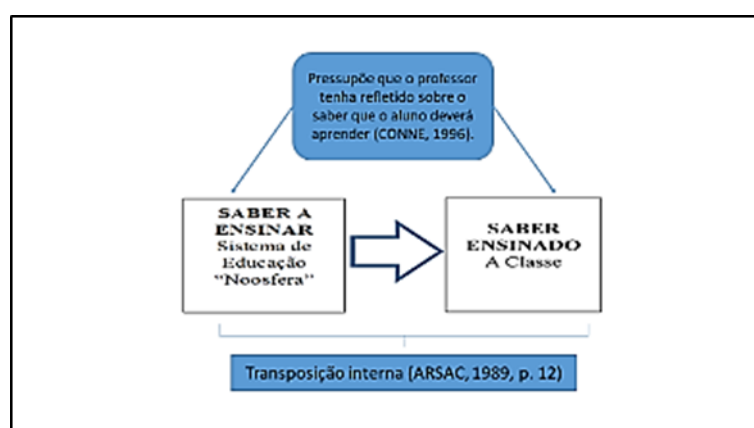
fenômenos relacionados à reconstrução escolar da matemática, cuja origem deve ser encontrada nas instituições que produzem conhecimento matemático”. Em direcionamento semelhante, Chacón (2008, p. 51, tradução nossa)⁹⁸ ressalta que “o processo de transposição didática sublinha, portanto, a relatividade institucional do conhecimento”, originando as submissões ou os assujeitamentos institucionais, a exemplo do uso regular de um livro didático para o ensino de uma Organização Matemática (OM).

Ao concentrar a atenção na esfera institucional das salas de aula, verifica-se as inferências e as interpretações do professor perante o saber que está institucionalmente posto sob a vigilância da noosfera,⁹⁹ conforme ressaltou Almouloud (2011):

O professor não transforma por iniciativa própria o saber sábio em objeto de ensino. A escolha dos objetos a ensinar é definida institucionalmente por meio de propostas curriculares, e é controlada de alguma forma pela sociedade (autoridades locais, pais de alunos, autoridades administrativas da educação). (ALMOULOU, 2011, p.196)

Nesse aspecto, Chevallard (1982, p. 3, tradução nossa¹⁰⁰) destacou que “para o professor, as coisas são diferentes. Em primeiro lugar, pelo menos, o reconhecimento da transposição didática prejudica sua feliz participação no trabalho didático”. Assim, deve ficar clara a existência de diferenças entre o saber designado para ser ensinado e o que efetivamente o é, o que significa inferir que o saber se adequa e se molda aos condicionantes da instituição em foco, como no caso da transposição interna caracterizada esquematicamente por meio da figura 22:

Figura 22 - Recorte do processo transpositivo



Fonte: Esquema adaptado pela autora a partir de Chacón (2008, p. 51)

⁹⁸ “Le processus de transposition didactique souligne donc la relativité institutionnelle des savoirs”.

⁹⁹ A noosfera viabilizaria a manutenção da compatibilidade entre o sistema didático e o seu entorno social, no “plano do saber” (CHEVALLARD, 1999, p. 26).

¹⁰⁰ “Mais pour l’enseignant, les choses vont autrement. En un premier temps au moins, la reconnaissance de la transposition didactique vient ébranler sa participation heureuse au fonctionnement didactique”.

O nível do saber ensinado sofre intervenções do professor, que empreende suas interpretações tomando, geralmente, como referencial o livro texto que, segundo Bittar (2017), fornece aproximações de suas práticas, o que pode ser resumido nas considerações de Almouloud (2011):

O texto do saber a ensinar não está completamente escrito em lugar algum. É indispensável examinar se a distância, a deformação entre o objeto do saber e o objeto de ensino não é, na pior das hipóteses, uma linguagem pseudocientífica. (ALMOULOU, 2011, p.197)

Caráter este que dialoga com o que declaram Farras, Bosch e Gascón (2013), quando situam o problema didático e a modelização matemática no âmbito da TAD, considerando que o problema docente é pré-científico.

Denominamos "problemas de ensino" aos quais o professor se considera *como tal professor* quando ele tem que ensinar um tema matemático a seus alunos. Os problemas de ensino são formulados usando as *noções disponíveis* na cultura escolar geralmente importadas de documentos curriculares (como, por exemplo, as noções de motivação, aprendizagem significativa, individualização do ensino, aquisição de um conceito, abstração, competência, etc.). Os problemas de ensino são formulados, normalmente, assumindo e sem questionar não apenas as noções, mas também as *ideias dominantes* na cultura escolar citada. Em particular, na formulação de um problema de ensino, geralmente, assumido de maneira acrítica a forma como se interpreta a cultura escolar da matemática envolvida no problema em questão (FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013, p. 3, grifos do autor, tradução nossa).¹⁰¹

A partir desse entendimento, emerge a pertinência da vigilância epistemológica no processo transpositivo, pois, de acordo com Chevallard e Joshua (1991, p. 43), “existe uma distância, muitas vezes imensa, entre o conhecimento científico, o conhecimento a ensinar e, conseqüentemente, o conhecimento ensinado”.

Torna-se pertinente ressaltar também o motivo pelo qual foram reconstruídas impressões acerca dos fenômenos didáticos detectados nos discursos e ações dos atores de duas aulas em que o tema de estudo foi vetores. Essas sessões de estudo foram observadas, gravadas em áudio e transcritas (com o consentimento dos docentes e discentes envolvidos). É relevante destacar que a observação diz respeito à Álgebra Vetorial e ao que efetivamente foi implementado na sala de aula. Trata-se de levantar as limitações da instituição através da análise

¹⁰¹ “Denominamos ‘problemas docentes’ a los que se plantea el profesor *como tal profesor* cuando tiene que enseñar un tema matemático a sus alumnos. Los problemas docentes se formulan utilizando las *nociones disponibles* en la cultura escolar importadas habitualmente de los documentos curriculares (como, por ejemplo, las nociones de motivación, aprendizaje significativo, individualización de la enseñanza, adquisición de un concepto, abstracción, competencia, etc.). Los problemas docentes se formulan, normalmente, asumiendo y sin cuestionar no sólo las nociones sino también las *ideas dominantes* en la citada cultura escolar. En particular, en la formulación de un problema docente se suele asumir de manera acrítica la forma como se interpreta en la cultura escolar la matemática involucrada en el problema en cuestión”.

das organizações didática e matemática das classes observadas. Assim, tomamos como ponto de partida o conceito apresentado por Comiti e Farias (2019).

Chamamos de crônica da classe o documento escrito resultante da observação: sua constituição incorpora certas anotações coletadas pelo observador sobre o que ele considerava importante notar. O trabalho de sua recomposição também é sustentado por escolhas metodológicas e pelo problema da pesquisa. A crônica resultante é então dividida em episódios para os quais o pesquisador faz a suposição de que eles são significativos. (COMITI; FARIAS, 2019, p.88, tradução nossa¹⁰²)

Paraphraseando os autores supracitados, no caso da observação de classes, a dinamicidade do processo vivenciado pelos atores dos SD no contexto da Álgebra Vetorial não é descrito em lugar algum. Portanto, é necessário "reconstruí-la" por meio da crônica da classe. A interpretação dos discursos e diálogos dos protagonistas em cada cena observada permitiu explicar um retrato do contexto da pesquisa, além de ser defendido aqui o postulado proposto por Chevallard (1997, p. 14) “de que toda ação humana procede de uma praxeologia”. Assim, evocaremos as praxeologias que vivem neste ambiente, pois, segundo o referido autor,

[...] defendemos aqui um postulado de que toda ação humana procede de uma praxeologia, admitindo, é claro, que esta praxeologia pode estar em processo de elaboração ou, ainda, que sua construção tenha parado – talvez permanentemente, na escala de uma vida humana ou institucional – bloqueando-a em um estado de incompletude ou subdesenvolvimento, um tipo de tarefas que não são bem identificadas, uma técnica mal esboçada, uma tecnologia incerta, uma teoria inexistente (CHEVALLARD, 1997, p. 14, tradução nossa¹⁰³)

Nesse sentido, ratifica-se a problemática ecológica que se apresenta como um dos fios condutores do estudo, evidenciada desde o início e retomada reiteradas vezes, como forma de questionar a realidade.

O que há e por quê? Mas também, o que não existe, e por quê? E o que poderia existir? Sob quais condições? Por outro lado, dado um conjunto de condições, quais objetos são forçados a viver ou, pelo contrário, são impedidos de viver nessas condições? (ARTAUD, 1998, p.101, tradução nossa¹⁰⁴).

¹⁰² Nous appelons chronique de la classe le document écrit résultant de l'observation: sa constitution intègre certaines notes recueillies par l'observateur sur ce qu'il a jugé important de relever. Le travail de sa recomposition est, lui aussi, sous-tendu par des choix méthodologiques et par la problématique de la recherche. La chronique obtenue est ensuite découpée en épisodes dont le chercheur fait l'hypothèse qu'ils sont significatifs.

¹⁰³ Ainsi qu'on l'a suggéré, on tient ici pour un postulat que toute action humaine procède d'une praxéologie, en admettant bien sûr que cette praxéologie puisse être en cours d'élaboration, ou, aussi bien, que sa construction se soit arrêtée – peut-être définitivement, à l'échelle d'une vie humaine ou institutionnelle –, en la figeant dans un état d'incomplétude ou de sous-développement, avec, par exemple, un type de tâches mal identifié, une technique à peine ébauchée, une technologie incertaine, une théorie inexistante.

¹⁰⁴ La problématique écologique se présente, d'emblée, comme un moyen de questionner le réel. Qu'est-ce qui existe, et pourquoi? Mais aussi, qu'est-ce qui n'existe pas, et pourquoi? Et qu'est-ce qui pourrait exister? Sous quelles conditions? Inversement, étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions?

Pautado nesta concepção pode-se questionar: O que existe nas salas de aula quando o tema abordado são os vetores? E o que deveria existir? A declaração de Matheron (2000) amplia estes questionamentos e traz à tona a abordagem de OMs de naturezas diferentes.

Essa organização permite estudar uma mesma noção matemática designada por um mesmo nome, mas com organizações matemáticas de naturezas diferentes se desenvolvidas no seio de instituições diferentes. Esse ponto de vista ressalta o aspecto ecológico relativo a um objeto O , quer dizer, o aspecto do questionamento da existência real ou da inexistência desse objeto na instituição onde vive uma dada organização matemática. Essa dimensão ecológica nos permite questionar como é ensinado um objeto identificado num livro didático, que tipo de técnica será utilizada na resolução de determinado exercício e qual é a organização matemática, e por consequência, que tipo de programa considerar (MATHERON, 2000, p. 52).

Em síntese, a noção de OM se configura enquanto uma estruturação praxeológica de natureza matemática, o que representa, para Chevallard (1997),

[...] um ou mais tipos de tarefas matemáticas, mais ou menos bem identificados, chamando a criação de técnicas matemáticas mais ou menos adaptadas, e mais ou menos bem justificadas por tecnologias matemáticas mais ou menos sólidas, elas próprias desenvolvidas no quadro de uma teoria matemática mais ou menos explícita. (CHEVALLARD, 1997, p.18, tradução nossa¹⁰⁵)

Perspectiva esta, que nos conduz a agregar mais elementos à questão que guiará a construção deste capítulo, a qual ganha a seguinte configuração: “como vive e se estrutura praxeologicamente o objeto matemático, Álgebra Vetorial, no CLM-UEFS?” Como respaldo a este questionamento, encontram-se os direcionamentos de Bosch e Gascón (2010, p. 60, tradução nossa),¹⁰⁶ que expõem a hipótese de que “toda organização ou praxeologia didática (a seguir OD) que vive em uma instituição particular, está sustentada e fortemente condicionada pelo modelo epistemológico dominante da matemática naquela instituição.” De acordo com os autores aludidos, esta hipótese toma como base a afirmação de Brousseau (1998) de que os modelos docentes espontâneos são simplistas.

Na concepção de Gascón (2018), os modelos são instrumentos de emancipação que

devem interagir (isto é, devem poder ser avaliados, corrigidos e contrastados) não apenas como os dados históricos, mas também com os fatos didáticos (uma vez interpretados como fenômenos), ou seja, permitem construir (“tornar visíveis”) fenômenos que tinham permanecido invisíveis. (GASCÓN, 2018, p.60)

¹⁰⁵ [...] un ou plusieurs types de tâches mathématiques, plus ou moins bien identifiés, qui appellent la création de techniques mathématiques plus ou moins adaptées, et plus ou moins justifiées par des technologies mathématiques plus ou moins solides, elles-mêmes développées dans le cadre d’une théorie mathématique plus ou moins explicite.

¹⁰⁶ Toda organización o praxeología didáctica (en adelante, OD) que vive en una institución determinada está sustentada y fuertemente condicionada por el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en dicha institución.

Este autor também pontua que, para estudar e revelar os fenômenos que vivem ocultamente nos sistemas de ensino, deve-se estudar e produzir artificialmente engenharias didáticas que ataquem essa problemática. Além disso,

O modelo epistemológico dominante de certo domínio do saber matemático ensinado (numa determinada instituição) condiciona fortemente não apenas o tipo de atividades matemáticas que são possíveis de realizar nessa instituição em torno do campo matemático em questão, mas também as atividades didáticas correspondentes que são materializadas em um modelo docente (Ibid, 2018, p.60)

Pautados nessa perspectiva, torna-se evidente a incidência do Modelo Epistemológico Dominante – MED, atualmente formulado por meio da emancipação das condições e restrições inerentes aos níveis da escala de codeterminação didática (Chevallard, 2002), que abarcam a estrutura e a dinâmica das praxeologias matemáticas (Chevallard, 1999, 2000), sendo denotado como Modelo Praxeológico Dominante – MPD.

Neste segmento, mesmo tendo ciência de que o Modelo Dominante é, em essência, descrito pelos pesquisadores em didática, a descrição deste estudo extrapola uma narração neutra, não deixando, contudo, de revelar traços do MPD¹⁰⁷. O intuito é entender e questionar o que está posto e que não funciona, a fim de propor mudanças, sob determinadas condições e restrições institucionais, confrontando com a realidade das ações produzidas pelos protagonistas dos SDs (CHEVALLARD, 2011) que desenham os cenários nas salas de aula.

Destarte, admite-se como fundamentação e direcionamento deste modelo praxeológico no qual as ideias dominantes vivem, a descrição do saber matemático em termos de organizações ou praxeologias matemáticas institucionais, como propõe a TAD (CHEVALLARD, 1999). Essa teoria tem como base a premissa de que “toda praxeologia é um sistema de tarefas em torno do qual técnicas, tecnologias e teorias são desenvolvidas e organizadas” (CHEVALLARD, 1997, p. 17, tradução nossa).¹⁰⁸ No intuito de fazer emergir os fenômenos que ocorrem no seio do ensino e aprendizagem vetorial no âmbito do CLM-UEFS, focaremos nos elementos identificados nas aulas e transcritos na sequência.

¹⁰⁷ Na conferência de encerramento da Escola de Altos Estudos promovida pelo DDMAT – MT, em fevereiro de 2019, sob a coordenação da Professora Doutora Marilena Bittar, esta questão foi bastante discutida, e compactuamos com a declaração do Professor Hamid Chaachoua, ao justificar que, se estamos inseridos em uma pesquisa cujos pilares teóricos são da Teoria Antropológica do Didático (TAD), a qual possui como base as praxeologias, é condizente trazermos este aspecto praxeológico para fundamentar e estruturar o construto teórico desenvolvido pela pesquisadora.

¹⁰⁸ Le socle de toute praxéologie est un système de tâches autour duquel se développent et s’organisent techniques, technologies, théories.

3.1 TRANSCRIÇÕES E ANÁLISE DAS AULAS OBSERVADAS

Inicialmente, será transcrita uma das aulas cuja duração foi de aproximadamente 2 horas, de um professor encarregado, no semestre 2016.2, por uma das turmas da componente curricular Geometria Analítica e Álgebra Linear I EXA – 180, contexto desta pesquisa. A título de compor o cenário matemático e didático, será preservada a identidade dos sujeitos envolvidos no processo, caracterizando-os, respectiva e adequadamente, como Professor 1 – P1 e Professor 2 – P2. De igual modo, os estudantes serão identificados como Estudantes e representados pela letra E acrescida de um número quando houver necessidade de menção a um discente em especial.

É relevante salientar, que sempre que os diálogos transcritos revelarem elementos de cunho didático ou matemático, considerados significativos e pertinentes, para estruturar o delineamento deste modelo, serão projetados intercâmbios com a abordagem teórica pertencente ao âmbito da didática da matemática. Segundo Bittar (2017):

A atividade do professor também pode ser modelada por meio do quarteto praxeológico: sua tarefa é “Ensinar o teorema de Pitágoras”. Para resolver essa tarefa didática é preciso fazer escolhas didáticas [...]. Tem-se, assim, a praxeologia didática ou organização didática (OD). [...], haja vista que uma organização didática está diretamente relacionada aos paradigmas de aprendizagem do “sujeito autor” da praxeologia. (Bittar, 2017, p. 368)

Soma-se a essa concepção o que assevera Conne (1996), ao pressupor que o docente tenha refletido sobre o saber que o aluno deverá aprender. Regulada pelas escolhas e decisões do professor, enquanto um dos atores que movimenta parte do processo de uma Transposição Interna (ARSAC; DEVELAY; TIBERGHIE, 1989), a transcrição aqui empreendida terá como norte este e outros elementos que serão revelados no percurso reproduzido.

3.1.1 Transcrição da aula 1

O professor adentra a sala de aula e cumprimenta os estudantes:

P1: – Bom dia!

Estudantes: – Bom dia! (Em forma de coro).

E prossegue:

P1: – Bom, no semestre passado eu comecei uma prática e aí o pessoal gostou e desde então, estou seguindo-a direto. Eu tenho uma coleção de textos de Júlio Machado, que em 2012 ministrou uma palestra no município de Araci em uma semana pedagógica. Ele escreve sobre

os mais variados temas, os quais comecei a ler. Percebi que são textos que nos induz a refletir e pensar sobre a vida. O de hoje é de um “cara” do século XVIII que fala sobre a questão da iniciativa, de tomar decisões, de assumir compromisso. Então diz assim.

Após esta fala introdutória, começa a leitura:

PI: – Deixo como reflexão para hoje as sábias palavras do escritor e filósofo alemão Goethe (1749-1832).

*“Antes do compromisso
há a hesitação, a oportunidade de recuar,
uma ineficácia permanente.
Em todo ato de iniciativa (e de criação),
há uma verdade elementar
cujo desconhecimento destrói muitas ideias
e planos esplêndidos.
No momento em que nos comprometemos,
de fato, a providência também age.
Ocorre toda espécie de coisas para nos ajudar,
coisas que de outro modo nunca ocorreriam.
Toda uma cadeia de eventos emana da decisão,
fazendo vir em nosso favor todo tipo
de encontros, de incidentes
e de apoio material imprevistos, que ninguém
poderia sonhar que surgiriam em seu caminho.
Começa tudo o que possas fazer
ou que sonhas poder fazer.
A ousadia traz em si o gênio, o poder e a magia”.*

Devemos confessar que o fato foi um tanto inusitado. Nunca tínhamos presenciado uma aula de matemática iniciada com tal abordagem, o que despertou em nós um misto de surpresa e estranheza. Possivelmente, esta sensação esteja diretamente ligada ao caráter formal e aos procedimentos padronizados produzidos pela visão de uma matemática rígida, como abordado nos estudos de Lucas *et al* (2014) acerca dos reflexos do fenômeno didático da rigidez das OMs. Contudo, devemos inferir que este feitio estabelece uma zona fronteira entre elementos de cunho psicogenético, e a nossa investigação não projeta como desígnio atribuir juízo de valor, e sim registrar o desenvolvimento da aula, identificando as intenções e fenômenos didáticos.

PI: – Ok? O texto fala justamente da iniciativa, de ação. Se eu quero alguma coisa, não adianta ficar parado. Comece! E aí trazendo um pouco para nossa situação, quando tem uma questão, o pessoal fica olhando para a questão e a questão olhando para ele..., não vai sair nada daí, tem que tomar a iniciativa, fazer alguma coisa, movimentar-se. É o mesmo quando estamos paquerando uma menina, se ficarmos parado não sairá nada. O que você tem que fazer? Dizer oi, tudo bem? Aí a coisa acontece... em matemática é a mesma coisa, teste uma ideia, rabisque alguma coisa, vai fazendo algo para sair da inércia.

Ao finalizar a leitura do texto, o professor demonstra uma intenção didática de caráter motivacional ao incentivar os estudantes a agir diante das dificuldades na realização de tarefas propostas. Nestes termos, Chevallard (1996) revela a estrutura de base de um SD, exposta pela

Intenção didática manifesta-se através da formação de instituições a que chamo, genericamente, *sistemas didáticos*. Um sistema didático (SD) comporta um ou vários sujeitos de I, que nele ocupam uma posição de *professor P*, um ou vários sujeitos de I que nele ocupam uma *posição de aluno a*, e finalmente um objeto O, pertencente a $P_I(a)$, que é o conjunto de investimentos didáticos para I. (CHEVALLARD, 1996, p. 133, grifos do autor)

O professor prossegue, lembrando o que foi abordado no último encontro:

PI: – Na última aula, nós vimos a definição básica de vetor. Vocês lembram a definição de vetor?

EI: – É uma classe de equipolência de segmentos orientados.

PI: – Ou seja, nós temos segmentos equipolentes que possuem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento. Então, esses infinitos que existem, se eu “pegar” um deles como meu representante ele vai ser “meu” vetor.

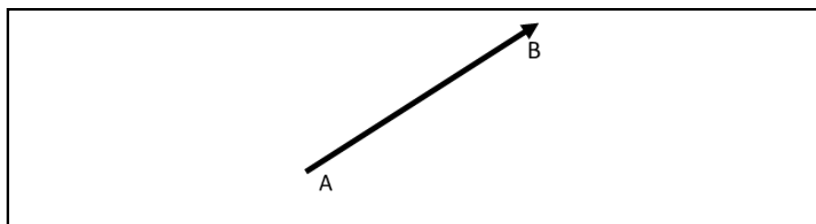
Como forma de uma primeira confrontação, retornamos aos livros textos que foram abordados no capítulo anterior. A partir dessa ação, detectamos algumas discrepâncias ou variações no que tange ao formato como é apresentado o conceito de vetor. A exemplo, Camargo e Boulos (2005) parte de uma noção intuitiva, que se vincula diretamente a uma diferenciação entre grandezas escalares e vetoriais. Steinbruch e Winterle (1987) e outros autores, como Loreto e Loreto Junior (2014), ressaltam como exigência a premência de um estudo sobre as características e propriedades dos segmentos orientados antes de desenvolver uma formalização do conceito de vetor.

As escolhas de Conde (2004) e Corrêa (2006) se debruçam, num primeiro momento, sobre o trato com as representações vetoriais no plano (\mathbb{R}^2) e no espaço (\mathbb{R}^3), para só então explicar a conceituação de vetores. Estes teóricos apresentam em seus textos um elemento que nos despertou atenção e pode constituir obstáculos no processo de aprendizagem, relativo à introdução da formalização do conceito de vetor:

Primeiramente, a definição de flechas. Flecha é, intuitivamente, um segmento no qual se fixou uma orientação. E fixar uma orientação é escolher um sentido. No caso da figura, o segmento orientado representado tem orientação de A para B. Na verdade não precisamos da flecha toda para os nossos objetivos. Bastam os pontos A e B, e a ordem: primeiro A e depois B (CAMARGO; BOULOS, 2005, p. 4).

A ilustração, referida na citação, apresenta a representação da figura 23:

Figura 23 - Representação vetorial em flecha



Fonte: Camargo e Boulos (2005, p. 4).

Estabelece-se uma associação da flecha com o segmento orientado. Neste percurso, consideramos pertinente salientar que os vetores ostentam algumas peculiaridades distintas do campo básico da matemática, visto que os aspirantes a futuros professores da disciplina em pauta se deparam com um objeto matemático que se insere na geometria, mas também abarca fundamentos algébricos e aritméticos, centrando-se em torno das seguintes características: *módulo, direção e sentido*.

Os estudos de Heckler e Scaife (2015) destacam o relevo das dificuldades encontradas pelos alunos ao resolverem questões que consideram a representação vetorial com setas, e sublinham que: “[...] incluindo a descoberta de que diferentes orientações relativas a flechas podem levar a variados caminhos de solução e diferentes tipos de erros, [...] sugere que os alunos precisam praticar com uma variedade de orientações.” (HECKLER; SCAIFE, 2015, p. 1, tradução nossa¹⁰⁹).

Outro aspecto que merece ênfase, neste primeiro trecho transcrito, faz alusão ao caráter ostensivo da representação vetorial, denominado por Bosch (1994, p. 47) “como todo objeto dotado de uma natureza sensível, de certa materialidade e que se apresenta ao sujeito como uma materialidade perceptível.” Devido à pujança deste assunto, retornaremos, sempre que necessário, a essa abordagem em capítulo subsequente para tratarmos de maneira mais detida sobre a dialética dos ostensivos e não ostensivos (BOSCH, CHEVALLARD, 1999) imbricada a caracterização vetorial. Retomemos, então, a aula:

PI: – Hoje eu começo com as operações básicas dos vetores. A primeira é operação da soma que vocês já viram no ensino médio.

¹⁰⁹ “[...] including the finding that different relative arrow orientations can prompt different solution paths and different kinds of mistakes, which suggests that students need to practice with a variety of relative orientations”.

Perante a declaração do professor e silêncio dos estudantes, surge a seguinte questão: será que os estudantes adquiriram esse conhecimento vetorial no ensino médio? Significa indagar se os discentes já tiveram contato, em algum momento da sua trajetória escolar, com OM vetorial. Neste caso, em particular com as operações com vetores, de modo específico, a exemplo a soma vetorial.

A partir deste fato, surge o interesse em averiguar atributos dos equipamentos praxeológicos (CHEVALLARD, 2009) dos alunos da turma em cujas aulas foram observadas. Elaboramos, então, algumas questões, as quais denominamos como “questões preliminares”, que abordam elementos basilares sobre os vetores. Admitimos como hipótese o discurso do professor, a saber, o de que os discentes do referido curso já tiveram contato com o objeto vetor em alguma etapa do nível médio de ensino, por meio de uma das disciplinas física ou matemática. Em mesmo direcionamento, Rodrigues (2015) propõe repatriar os vetores para o domínio da matemática no ensino médio, e os estudos de Assemany (2011), Assemany *et al* (2013) e Azevedo (2013) sublinham a relevância da base vetorial no currículo do nível médio, argumentando que constituem um diferencial para estudantes na transição para o ensino superior. Viés esse reforçado pela seguinte afirmação:

A introdução da noção de Vetores no R^2 no 1º ano do Ensino Médio pretende lançar mão de um instrumento importante e prático no estudo dos conteúdos expostos em sequência, mas principalmente da Trigonometria e Função Afim, reduzindo cálculos desnecessários que estes temas recorrem quando seu ensino é feito de maneira isolada. A organização dos conteúdos estruturados e baseados nos Vetores pretende conduzir o aluno a interpretações geométricas de fatos algébricos (ASSEMANY, 2011, p. 130).

Nesse sentido, Bittar (2013) relata que esse objeto pertencia aos programas curriculares desde o ensino fundamental, como ocorria, por exemplo, em escolas francesas: “[...] a noção de vetor aparece nesse nível como um ente geométrico que deverá servir para resolver problemas de geometria: trata-se de introduzir uma nova ferramenta para resolver problemas por vezes já conhecidos dos alunos” (BITTAR, 2013, p. 2).

Os aspectos históricos e epistemológicos também evidenciam a recorrência da representação vetorial para exprimir movimentos, representar forças, compreender fenômenos e reafirmar a existência de números negativos e imaginários. Conforme declarou Dorier (1995), o desenvolvimento do conceito de vetor se deu na busca do entendimento de resultados algébricos, uma vez que essa grandeza proporciona contribuições para a geometria, através da direção e do sentido e não só do comprimento (grandeza escalar), permitindo assim a ideia de movimento.

Pesquisadores da área de Matemática Pura e Educação Matemática, como Lima *et al* (2001), Rodrigues (2015), Reis (2016) e Vaz e Ferreira (2016) sinalizam acerca da ausência dos vetores nos currículos e nos livros destinados a este nível de ensino. Aspecto este sublinhado nas palavras de Vaz, Ferreira e Nasser (2017),

Observando as dificuldades apresentadas por alunos ao chegar à universidade, o grupo começou a questionar o que se ensina de vetores e retas no EM. Para nossa surpresa, verificou-se que “vetores” é um tópico que, em geral, não faz parte dos currículos de EM de Matemática. Em alguns casos, aparece no currículo de Física, mas, não está claro se os alunos conseguem aplicar esse conhecimento para usar vetores em Matemática. (VAZ, FERREIRA e NASSER, 2017, p. 57)

Vertente essa que se une à preocupação já sinalizada pelo professor Elon Lages Lima *et al* (2001) que, em conjunto com alguns de seus pares, declarou de maneira enfática suas inquietações, após ter analisado diversos livros de matemática para o Ensino Médio, e o descontentamento ao fazer referência à exiguidade dos vetores, expondo estas sensações em vários trechos da obra em foco: “Por alguma obscura razão, ou por nenhuma em especial, o importante conceito matemático de vetor [...], é personagem ausente deste e dos demais compêndios brasileiros, sendo usado apenas pelos professores de Física.” (LIMA *et al*, 2001, p. 62).

Fato esse que se confirma por meio da análise de outra obra:

O livro consegue vencer muito bem a dificuldade gerada pelo fato dos programas da maioria das escolas não incluírem vetores, construindo, disfarçadamente, um “cálculo vetorialzinho” de soma e produto por número para ser usado nesse contexto. [...] um dos defeitos deste livro e de todos os livros de Matemática para Ensino Médio existentes no mercado é a completa omissão de vetores. Estranhamente, vetores são ensinados nos livros de Física, não nos de Matemática (LIMA *et al*, 2001, p. 130).

As considerações, neste sentido, ganham cada vez mais força quando Lima (2001) prossegue com reflexões e críticas ao observar outros livros:

O primeiro capítulo trata da geometria analítica da reta, começando pela noção de medida algébrica de um segmento orientado (mas sem nunca dizer o que é um segmento orientado) (LIMA *et al*, Op.cit., p. 156).

[...] A falta de uma apresentação vetorial (no livro nenhum sentido é atribuído a $x_1 - x_2$ apenas a $|x_1 - x_2|$) torna a dedução da fórmula das coordenadas do ponto de um segmento médio algo extremamente complicado (Ibid., p. 210).

[...] Cabe aqui uma reflexão a respeito do conteúdo de Geometria Analítica dos livros nacionais para o ensino médio. Por que não falam em vetores? A noção de vetor é necessária ao aluno, a Física a utiliza e a Geometria Analítica fica muito mais rica com esta ferramenta, simplificando demonstrações e possibilitando soluções melhores para os problemas (Ibid., p. 259).

Hodiernamente, constatamos que o cenário examinado não apresenta significativas mudanças, fato este evidenciado ao consultarmos o Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de Matemática (2017). Encontramos no tópico que contempla a distribuição

de conteúdo apenas uma ocorrência que faz alusão aos vetores: “[...] é importante que o estudo dos complexos seja uma oportunidade privilegiada de articulação com tópicos como vetores e geometria no plano, com trigonometria e com as equações algébricas” (BRASIL, 2017, p. 24, grifos nossos).

Em mesmo direcionamento, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (2017) apresenta implicitamente a temática vetorial na área destinada à matemática e suas tecnologias, ao abordar movimento e posição:




[...] estão presentes na localização de números em retas, de figuras ou configurações no plano cartesiano e no espaço tridimensional; direção e sentido, ângulos, paralelismo e perpendicularidade, transformações geométricas isométricas (que preservam as medidas) e homotéticas (que preservam as formas) e padrões das distribuições de dados (BRASIL, 2017, p. 521).

Elementos esses que corroboram com o que foi constatado por um grupo de pesquisadores da matemática pura há quase duas décadas. Diante desse aspecto incompleto, encontrado na organização curricular matemática do nível de ensino citado, evocaremos elementos que darão suporte à análise didática aqui empreendida.

Assim, surge a seguinte indagação: no âmbito da didática, como podemos analisar o que foi pontuado por Lima *et al* (2001) e seus colaboradores? Preliminarmente, podemos interpretar a existência de uma problemática ecológica identificada por membros da noosfera, já que, de acordo com Bosch e Chevallard (1999, p. 4, tradução nossa),¹¹⁰ “o problema ecológico expandirá o campo de análise e abordará as restrições criadas entre os diferentes objetos de conhecimento a serem ensinados”. Em outras palavras, os vetores não possuem *habitat* no currículo de matemática do Ensino Médio. Perspectiva essa que repercute na aprendizagem da Geometria Vetorial presente nas ementas dos cursos de nível superior atrelados à área de ciências exatas. Neste diapasão, frente à fragilidade do ensino de vetores evidenciado no Ensino Médio, torna-se patente a necessidade de implementarmos ações didáticas que considerem o caráter incompleto e/ou inexistente dos vetores no nível superior de ensino. Ante o notório, exporemos um esboço da bagagem praxeológica da turma.

¹¹⁰ “Le problème écologique élargira le champ d'analyse et traitera les contraintes créées entre les différents objets de connaissance à enseigner”.

Quadro 1 - Primeira questão preliminar

Questões preliminares

1- Conte-nos como é a sua relação com os vetores:

- a) já teve contato com o assunto no ensino médio? Se sim, em qual ou quais disciplinas?
- b) caso tenha respondido afirmativamente a questão anterior, descreva como foi a abordagem deste conteúdo.
- c) você considera um tema de fácil aprendizagem? Justifique.

Fonte: acervo dos autores (2016).

A primeira reação dos estudantes expressou surpresa e certa apreensão na leitura da solicitação do item a. Assim, demonstraremos alguns desses registros:

Quadro 2 - Relatos de discentes do Curso de Licenciatura em Matemática

Estudante 4

a) Não.
Estudei em escola pública e fiz magistério no ensino médio. Não tive acesso a muitos assuntos de matemática. Tenho facilidade em porcentagem e algumas equações do 2º grau.

Estudante 7

- a) *Mais ou menos, foi só uma introdução de uma aula e depois nunca mais.*
- b) *Foi uma introdução, mas não teve nenhum tipo de exercício ou algo do tipo para um real aprendizado.*
- c) *Acho que não muito.*

Estudante 3

- a) *Sim, na matéria física.*
- b) *Foi uma abordagem simples. O conteúdo trabalhado foi Lei de Coulomb, a qual dependia do conhecimento básico de vetores. Vimos soma e diferença entre vetores de mesmo sentido e em sentidos diferentes. Estudamos a regra do paralelogramo também.*
- c) *A parte que vi no Ensino Médio achei fácil.*

Estudante 9

- a) Não!
- b)
- c) *Não. Talvez porque não tive contato com geometria no ensino básico.*

Fonte: acervo dos autores (2016).

Alguns discentes limitaram-se a responder o item *a* apenas com a palavra “não”, ou seja, com a negativa do contato com os vetores em sua trajetória escolar, sem justificarem suas respostas. Este fator nos impossibilita de avançar em direção a uma análise mais profunda. Contudo, considerando-se os relatos verbais, a amostra sinaliza a existência de fragilidades e incompletudes no que tange ao conhecimento vetorial.

Chaachoua (2019), em palestra proferida na Escola de Altos Estudos, na Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), abordou pontos que retratam a relação pessoal com determinado saber, no caso desta pesquisa os vetores, ao declarar que: “ $R_p(X, O)$ é o sistema de todas as interações, sem exceção, que X pode ter com o objeto O – manipular O, utilizar O, falar de O, sonhar com O, etc.” (CHAACHOUA, 2019, não paginado). Entretanto, no recorte apresentado por meio das respostas às questões preliminares, percebemos uma tímida relação pessoal com os vetores, e na sua grande maioria a inexistência deste vínculo, ou seja, $R_p(X, O) = \emptyset$.

Chevallard (1996) apontou perspectivas na direção de Chaachoua (2019). E neste estudo narramos que, quando existem modificações na relação pessoal para com o objeto *O*, por consequência, existe aprendizagem. Dessa maneira, indicamos que uma das ramificações desta pesquisa contemplará a não existência do vínculo em questão, promovendo transformações neste contexto no intuito de desencadear meios de aprendizagens. Nestes termos, temos como finalidade fomentar ações para que as relações pessoais tendam a se aproximar das esperadas pela instituição e gerem condições para que surja um bom sujeito institucional.

A partir deste encaminhamento, prosseguiremos transcrevendo as falas dos atores do SD em voga (CHEVALLARD, 2011). O professor segue copiando suas notas de aula para o quadro, e os alunos as copiam, em silêncio, em seu caderno.

Figura 24 - Configuração da aula observada



Fonte: acervo da autora (2016)

Ao emprendermos o processo de observação e análise da aula, como registrado na imagem exposta na figura 24, despontam traços de um contrato didático, denotado pelas posturas passivas dos alunos, regulado e mediado pela coordenação do professor. O que, de acordo com Bessot (2003, p. 3, tradução nossa¹¹¹) “representa os direitos e deveres implícitos dos estudantes e do professor em relação aos objetos, aos conhecimentos matemáticos ensinados.” O contrato didático surge quando ocorrem interações entre a tríade professor-aluno-saber, interligada diretamente com o conteúdo específico a ser estudado, o objeto de ensino e a aprendizagem em uma aula. De acordo com Brousseau (1986):

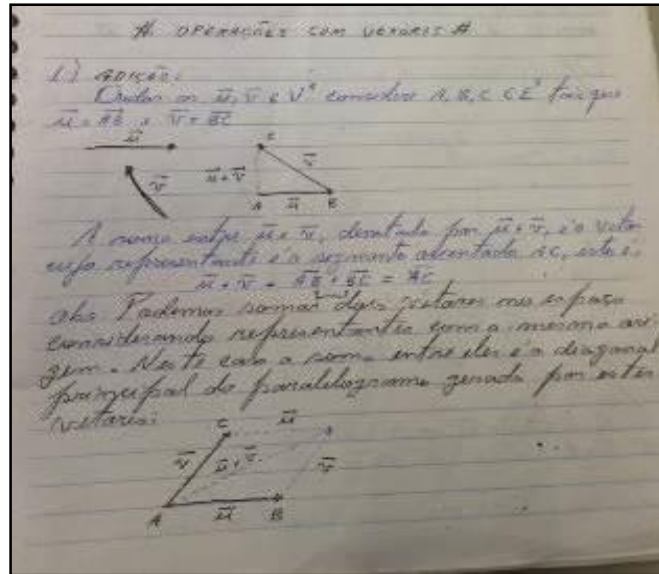
Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos dos alunos que são esperados pelo professor. [...] esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo, que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro. (BROUSSEAU,1986, p. 51)

As características do contrato didático manifestam-se sobretudo quando este é transgredido por um dos parceiros da relação didática. Em muitos casos é preciso que ocorram a ruptura e a renegociação deste contrato para o avanço do aprendizado. Foi um dos elementos de que sentimos falta na aula observada, visto que, não identificamos quebras dos acordos, tacitamente estabelecidos, tendo em vista que, como propõem Chevallard, Bosch e Gascón (2001), num projeto de estudo os principais protagonistas são os alunos.

Após a finalização de sua escrita no quadro, o docente aguarda os estudantes terminarem a cópia do apontamento como exposto abaixo, um trecho do que foi registrado na lousa, por meio de um recorte da nota de aula do professor.

¹¹¹ “Le contrat didactique représente 2 les droits et les devoirs implicites des élèves et de l'enseignant à propos d'objets, de savoir mathématique, enseignés”.

Figura 25 - Recorte de uma nota de aula do professor 1



Fonte: caderno do professor P1.

Depois de minutos em silêncio, com apenas alguns burburinhos entre colegas que estavam sentados próximos, um dos estudantes rompe a ausência de som na classe e pergunta:

E2: – Ali é o conjugado?

P1: – Não, é vetor.

O discente estava se referindo à representação ostensiva de: $-\vec{u}$ (usado na propriedade A_4 que corresponde ao elemento oposto). Neste ínterim, aflora mais um elemento que nos induz a supor que se trata do primeiro contato do aluno com a abordagem vetorial, o que, em termos de momentos de estudo, é definido como o primeiro encontro (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

A aula prossegue:

P1: – Posso começar?

Estudantes: – Não! (em coro).

Após a aproximadamente 2 minutos:

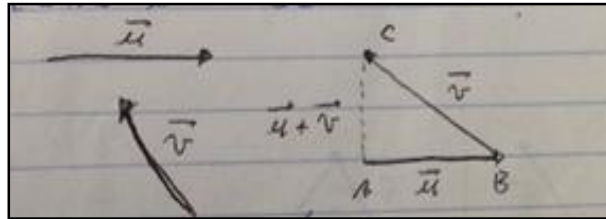
P1: – Pronto? Vocês já viram isso. É praticamente uma revisão do ensino médio, mudando alguns detalhes. Vamos lá... Então, a primeira operação que vamos estudar é a adição. Dados \vec{u} e \vec{v} pertencentes a V^3 , (como vimos na aula passada, V^3 é um espaço vetorial, onde os elementos são vetores). Considere os pontos A, B e C pertencente a E^3 , (são pontos do espaço), tais que \overrightarrow{AB} é um representante do vetor \vec{u} e \overrightarrow{BC} é um representante do vetor \vec{v} . Então, nós temos, dois vetores no espaço. E eu vou associar a seus representantes, vou dizer a origem e a extremidade. Então, como seria a soma? A soma entre \vec{u} e \vec{v} denotado por $\vec{u} + \vec{v}$, é o vetor cujo representante é o segmento orientado \overrightarrow{AC} , isto é: $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

P1: – Eu tenho essa situação: eu pego o vetor \vec{u} e faço coincidir a origem com o ponto A e a extremidade com o ponto B , em seguida pego a origem do vetor \vec{v} e coloco na extremidade do

primeiro vetor \vec{u} . Então, podemos dizer, que geometricamente, determinaremos o vetor soma da seguinte maneira, ao ligar a origem do primeiro com a extremidade do segundo que resulta no vetor $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Abaixo, de acordo com os registros das notas de aula do professor P1, segue recorte do desenho esboçado no quadro:

Figura 26 - Recorte de uma nota de aula do professor 1



Fonte: caderno do Professor P1.

Por intermédio da explicação do professor acerca da adição e soma de vetores, identificamos alguns elementos que podem constituir obstáculos à aprendizagem, segundo a concepção de Brousseau (1976). O primeiro refere-se à representação vetorial, que nos reporta à dialética dos ostensivos e não ostensivos (BOSCH, CHEVALLARD, 1999), visto que se os autores dos livros adotam na definição algébrica vetores e pontos no espaço, no entanto suas representações são construídas no plano, como já apresentado, ou seja, sem qualquer alusão à representação tridimensional E^3 . Perspectiva essa, já destacada por Bosch (2001, p. 16, grifos nossos): “a análise da atividade matemática requer a utilização de noções apropriadas que permitam *descrever seus distintos componentes, assim como suas condições de produção e reprodução.*”

O segundo fator diz respeito ao questionamento realizado pelo professor,

P1: – Então como seria a soma?

O professor faz e responde a pergunta lançada por ele mesmo, refletido um efeito do contrato didático ou fenômeno relacionado à atividade de ensino, como uma metáfora de um “diálogo no espelho”, situação em que o próprio professor responde às próprias perguntas (FARIAS, 2010, p.202). Neste sentido, Chevallard (1997) é mais enfático, e tece a seguinte declaração:

O aluno deve aceitar o professor como diretor de estudo e, ao mesmo tempo, renunciar, quase violentamente, às facilidades enganosas que ele lhe traz enquanto professor - e isso, em princípio, a cada momento do estudo. Incluindo avaliação e institucionalização. O "drama didático" que a palavra *topos* resume é assim formado

em torno do jogo do professor: sempre sutilmente presente, mesmo que seja em ausência, contudo deve saber estar ausente mesmo que presente, para deixar o aluno livre para conquistar uma independência que a figura tutelar do professor faz ao mesmo tempo possível e incerta. (CHEVALLARD, 1997, p. 25, tradução nossa, grifos nossos¹¹²)

Todavia, não identificamos qualquer incômodo por parte dos discentes, no tocante à explanação monologar do professor. E, finalmente, a afirmação:

P1: – A soma vai ser representada pela origem do primeiro com a extremidade do último, projetando uma maneira de fazer; uma técnica que aborda o tipo de tarefa soma de vetores no âmbito geométrico.

Dessa forma, podemos atentar para as tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias inerentes ao postulado de base da TAD, o qual foi denominado por Chevallard (1998; 1999) de praxeologia. A premissa desta teoria assevera que qualquer atividade humana, regularmente realizada, pode ser integrada a um único modelo, que é sintetizado pela palavra praxeologia (CHEVALLARD, 1998). Segundo esse mesmo direcionamento, o autor ora citado estruturou a organização praxeológica:

[...] em torno de um tipo de tarefas T, que encontramos em princípio, um tripleto formado de uma técnica (pelo menos), τ , de uma tecnologia de τ , θ e uma teoria de θ , Θ . O conjunto, denotado $[T / \tau / \theta / \Theta]$, constitui uma praxeologia específica, este qualificador significa que se trata de uma praxeologia relacionada a um único tipo de tarefas, T. Essa praxeologia - ou organização praxeológica - portanto, consiste em um bloco técnico prático, $[T / \tau]$, e um bloco tecnológico-teórico, $[\theta / \Theta]$ (CHEVALLARD, 1998, p. 5, tradução nossa¹¹³).

A partir deste olhar praxeológico, e de suas múltiplas interligações, infere-se que devemos aprender ou ensinar matemática enquanto ação humana, admitindo-se que toda atividade humana pode ser modelada praxeologicamente, ou seja, em outros termos, ensinar matemática consiste em realizar uma tarefa t de um determinado tipo T, cumprida por uma determinada técnica τ , fundamentada por uma tecnologia θ , legitimada por meio de uma teoria

¹¹² “L’élève doit accepter le professeur comme directeur d’étude, et, dans le même temps, renoncer presque violemment aux trompeuses facilités qu’il lui apporte comme enseignant – et cela, em principe, à propos de chacun des moments de l’étude, évaluation et institutionnalisation comprises. Le « drame didactique » que le mot de topos résume se noue ainsi autour du jeu du professeur: toujours subtilement présent, fût-ce in absentia, celui-ci doit savoir se faire absent même in praesentia, pour laisser l’élève libre de conquérir une indépendance que la figure tutélaire du professeur rend tout à la fois possible et incertaine”.

¹¹³ Autour d’un type de tâches T, on trouve ainsi, en principe, un triplet formé d’une technique (au moins), τ , d’une technologie de τ , θ , et d’une théorie de θ , Θ . Le tout, noté $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constitue une praxéologie ponctuelle, ce qualificatif signifiant qu’il s’agit d’une praxéologie relative à un unique type de tâches, T. Une telle praxéologie – ou organisation praxéologique – est donc constituée d’un bloc pratico-technique, $[T/\tau]$, et d’un bloc technologico-théorique, $[\theta/\Theta]$.

⊖. Essa estrutura é simbolicamente representada por $\wp = [T, \tau, \theta, \Theta]$, que significa um conjunto de técnicas no seio de uma tecnologia e de uma teoria organizadas para um tipo de tarefas, cuja denominação é Organização Praxeológica (OP) pontual, por envolver apenas um tipo de tarefa T. Ressalta-se que a OP preza pela inseparabilidade entre os blocos práticos $[T, \tau]$ e teóricos $[\theta, \Theta]$, intrínsecos às atividades matemáticas.

Retomamos à explanação do professor:

PI: – *Isso aqui está claro. Daqui a pouco, vou trabalhar com a soma de vetores sem precisar ficar desenhando seus representantes, mas vou usar certos pontos. Por exemplo se eu colocar:*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Composto pela origem do primeiro e extremidade do segundo.

Origem coincide com a extremidade.

PI: – *Bem sossegado, não é?*

PI: – *Uma observação: outra forma que vocês podem utilizar para somar vetores é usar a regra do paralelogramo que vocês também já viram no ensino médio.... Como é que eu faço? Eu escolho representante com origem em A, desde que não mude módulo, direção e sentido.*

O professor segue fazendo o desenho no quadro, enquanto fala:

PI: – *Como fazíamos lá no ensino médio e fechamos o paralelogramo. Quando eu faço isso a diagonal principal vai representar a soma dos vetores $\vec{u} + \vec{v}$.*

PI: – *Por que isso?*

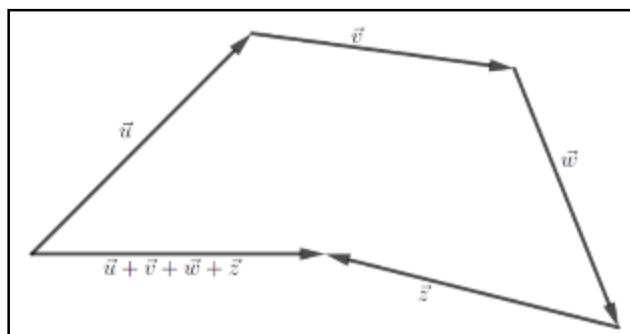
PI: – *Porque no paralelogramo os lados opostos são paralelos e congruentes.*

O professor continua apresentando técnicas que poderão ser utilizadas na determinação da soma entre vetores. Porém, no último discurso transcrito, notamos ingredientes tecnológicos que regem a técnica, isto é, uma possível justificativa da técnica, ao apresentar as razões da diagonal principal do paralelogramo coincidir com a soma vetorial, fundamentada pelas propriedades do paralelogramo.

PI: – *Qual a desvantagem de obter a soma usando a regra do paralelogramo? No paralelogramo eu só somo dois vetores a cada vez. Enquanto na definição geral, que chamamos regra do polígono, eu posso somar quatro, cinco ou mais vetores. É só ir fazendo coincidir extremidade com origem, sequencialmente, até obter a soma final.*

Exemplificaremos a seguir graficamente a soma vetorial aludida:

Figura 27 - Regra do polígono (Soma vetorial)



Fonte: caderno do professor 1.

A característica limitada da técnica do paralelogramo é posta em evidência. Dito de outra forma o professor destaca o alcance limitado da regra do paralelogramo ao somar vetores. Contudo, os estudantes se limitam a assistir à explanação do professor, sem nada questionar, expressando a manifestação de “um vício escolar: em que o aluno espera que o professor diga o que deve fazer” (CHEVALLARD *et al*, 2001, p. 264). Em sentido análogo, em uma de suas inúmeras obras, Chevallard (2011) nos convida a deixar o mundo “encantado e enganoso” do turismo matemático para chegar ao universo de uma engenharia de precisão, o que comunga diretamente com os pressupostos do Paradigma de Questionamento do Mundo (CHEVALLARD, 2012), assinalando que:

no Paradigma de Questionamento de Mundo, a educação é um processo vitalício.[...] Um segundo princípio central do paradigma de questionar o mundo é que, para aprender algo sobre algum trabalho O, x tem que estudar O, muitas vezes com a ajuda de alguns y.[...] O que o novo paradigma didático visa criar é um novo ethos cognitivo no qual, quando surgir qualquer pergunta Q, x a considerará, e, tantas vezes quanto possível, a estudará para chegar a uma valiosa resposta A, em muitos casos com uma pequena ajuda de alguns y. Em outras palavras, x não deve se abster sistematicamente em situações que envolvem problemas que ela nunca encontrou ou nunca resolveu. Por razões que não comentarei, chamo Herbartian - após o filósofo alemão e fundador da pedagogia Johann Heinrich Herbart (1776-1841) - esta atitude receptiva em relação a questões ainda sem resposta e problemas não resolvidos, que normalmente é a atitude do cientista em seu campo de pesquisa e deve se tornar a do cidadão em todos os domínios de atividade. (CHEVALLARD, 2012, p. 5, tradução nossa¹¹⁴).

¹¹⁴ The didactic paradigm of questioning the world, education is a lifelong process. [...] A second, central tenet of the paradigm of questioning the world is that, in order to learn something about some work O, x has to study O, often with the help of some y. [...] What the new didactic paradigm aims to create is a new cognitive ethos in which, when any question Q arises, x will consider it, and, as often as possible, will study it in order to arrive at a valuable answer A, in many cases with a little help from some y. In other words, x is supposed not to balk systematically at situations involving problems that she never met or never solved. For reasons I shall not comment on, I call Herbartian—after the German philosopher and founder of pedagogy Johann Heinrich Herbart (1776-1841)—this receptive attitude towards yet unanswered questions and unsolved problems, which is normally the scientist’s attitude in his field of research and should become the citizen’s in every domain of activity.

Por meio da concepção chevallardiana, o aluno assume um papel protagonista na aquisição do conhecimento, provocando rupturas com a postura estática e coadjuvante imposta no modelo tradicional¹¹⁵ de ensino subsidiado pelo Paradigma de Visitas a Obras ou Visitas aos Monumentos,¹¹⁶ que, na acepção de Chevallard (2012), resume-se a ouvir um relato ou narrativa recitada pelo professor sobre o monumento visitado. Perspectiva essa identificada na aula transcrita.

Na sequência da aula, o professor apresenta as quatro propriedades da operação adição de vetores:

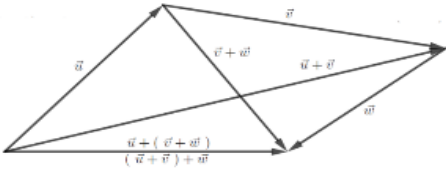
PI: – Bom, esta operação de adição possui quatro propriedades. Eu enumerei aqui como A₁, A₂, A₃ e A₄, (...). A álgebra de vetores possui propriedades bem semelhantes às dos números reais. Contudo, geometricamente falando, estamos trabalhando com segmentos no espaço, ou seja, estamos somando segmentos e não números.

O docente esquematiza no quadro a representação geométrica das duas primeiras propriedades:

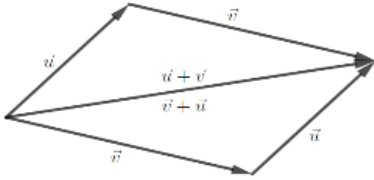
Figura 28 - Propriedades da soma

Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores quaisquer. Valem as seguintes propriedades:

A₁ - Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.



A₂ - Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.



A₃ - Elemento neutro (vetor nulo): $\forall \vec{u} \in V^3; \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

A₄ - Elemento oposto: $\forall \vec{u} \in V^3, \exists! (-\vec{u}) / \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Fonte: caderno do professor 1

¹¹⁵ O ensino tradicional apresenta como características “ensinar e praticar”.

¹¹⁶ In the framework of the anthropological theory of the didactic, this paradigm is known as the paradigm of “visiting works” or – according to a metaphor used in ATD – “of visiting monuments”, for each of those pieces of knowledge.

Essa descrição do professor dialoga com o que descreve Hayfa (2006).

A comutatividade é demonstrada através do paralelogramo, construindo os representantes dos vetores em um ponto; então, sua soma é a diagonal do paralelogramo construído nesses dois vetores. E isso usando os vetores iguais e a relação de Chasles. A associatividade da adição de vetor é mencionada. Além disso, a diferença do vetor é deduzida da adição. (HAYFA, 2006, p.15, tradução nossa¹¹⁷)

Após descrever e simbolizar geometricamente as propriedades A_1 e A_2 , o professor destaca:

P1: – Muitos de vocês, talvez não lembrem o significado deste “a de cabeça para baixo”, (fazendo menção ao símbolo ∇).

Assim,

P1: – Qualquer que seja, ou para todo \vec{u} pertencente a V^3 , temos: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

Nesse momento, percebe-se um clima de inquietação, impulsionando um aluno a questionar:

E3: – Professor!

P1: – Diga.

E3: – Então se você pegasse qualquer vetor e somasse com o vetor nulo é a mesma coisa que se tivesse somado com o zero?

P1: – É, não ia mudar nada. Só que aqui nós estamos com segmentos do espaço, ou seja, estamos trabalhando a priori, como sempre venho chamando atenção, com o vetor geometricamente. Depois, quando eu definir um sistema de coordenadas, aí o vetor não vai ficar somente associado a um ente geométrico, mas também ao algébrico. Certo?

E prossegue:

P1: – Uma sequência de números ordenados. É o que vocês vão ver em Álgebra Linear, o vetor vai ser (a_1, a_2, \dots, a_n) uma n -upla ordenada. Em \mathbb{R}^3 eu consigo associar um vetor a uma representação geométrica, certo? Tenho três coordenadas. Quando trabalhamos com quatro ou mais dimensões o vetor perde sua identidade geométrica e passa a ser uma n -upla de números ordenados (a_1, a_2, \dots, a_n) ou (x_1, x_2, \dots, x_n) , ou seja, passa a ser uma sequência numérica, ok?

A explicação do professor remete a momentos de estudos (CHEVALLARD *et al*, 2001), ao exibir traços do momento tecnológico-teórico, revelando caracteres inerentes à álgebra e à

¹¹⁷ La commutativité est démontrée par l’intermédiaire du parallélogramme, en construisant les représentants des vecteurs en un point, alors leur somme est la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs. Et cela en utilisant les vecteurs égaux et la relation de Chasles. L’associativité de l’addition vectorielle est mentionnée. En plus, la différence vectorielle est déduite de l’addition.

geometria, evidenciando elementos que integram a passagem do aspecto geométrico para uma configuração algébrica.

P1: – Bom, elemento oposto, esse aqui é importante, porque dele sai uma quantidade significativa de propriedades. Em termos de símbolos matemáticos temos algo novo, uma linguagem “matematiké”, referindo-se ao símbolo \exists !

E4: – Existe apenas um?

P1: – É. Existe apenas um ou existe um. \exists existe e \exists ! Com exclamação existe único. Então, para cada vetor, existe um único vetor que somado com ele vai gerar como resultado o vetor nulo. Quem vai ser o elemento oposto aqui? o $-\vec{u}$. No entanto, o menos (-) não vai ter o mesmo sentido que tem nos números reais. Vai significar oposto, terá o sentido contrário. Lembre-se que estou somando segmentos orientados, então abstraia!

Depois de elencar as quatro propriedades (associativa, comutativa, elemento neutro e elemento oposto), ressalta, diversas vezes, que está trabalhando com segmentos e amplia a necessidade de abstração, pois aflora, por meio dessa demanda, componentes que transitam de uma abordagem numérica para concepções geométricas, ao operar com segmentos. Essa postura revela certa preocupação com possíveis trocas que os alunos poderão fazer, desencadeando equívocos ou obstáculos à aprendizagem.

Diante do exposto, é possível identificar a necessidade de uma análise da dupla atribuição assumida pelos ostensivos e não ostensivos nas atividades matemáticas. Elementos estes, que ativam as organizações matemáticas, pois, por meio da manipulação ostensiva, evocam-se os não ostensivos, isto é, a manipulação dos objetos ostensivos permite dar forma à estruturação praxeológica presente na TAD (CHEVALLARD, 1999).

Bosch e Chevallard (1999, p. 26, tradução nossa)¹¹⁸ pontuam que: “os ostensivos têm uma dupla função: eles têm um ‘valor semiótico’, ligado ao seu poder de representar objetos não ostensivos, e um ‘valor instrumental’, ou seja, sua função como ferramentas de práticas matemáticas.”

Soma-se a essa concepção, o que sinaliza Arzarello *et al* (2008), a saber, que a dimensão ostensiva da atividade matemática é interessante na medida em que possibilita lançar luz sobre problemas de matemática. O que nos leva a considerar que não podemos desprezar as conexões existentes entre as particularidades numéricas, algébricas e geométricas, as quais fazem parte e estão intimamente ligadas às concepções acerca dos vetores.

¹¹⁸ “les ostensifs ont une double fonction: ils ont une "valeur sémiotique", liée à leur pouvoir de représentation d'objets non ostensibles, et une "valeur instrumentale", c'est-à-dire leur fonction en tant qu'outils de pratiques mathématiques.”.

Supomos, de modo preliminar, que o vetor nulo e sua associação ao número zero, assim como o sinal menos (-) à frente do vetor $-\vec{u}$ com o significado de sentido oposto em detrimento da subtração ensinada e apreendida desde a Educação Infantil, nos direcionam a inferir que o uso de outros símbolos matemáticos poderiam contribuir para eliminar tais ambiguidades.

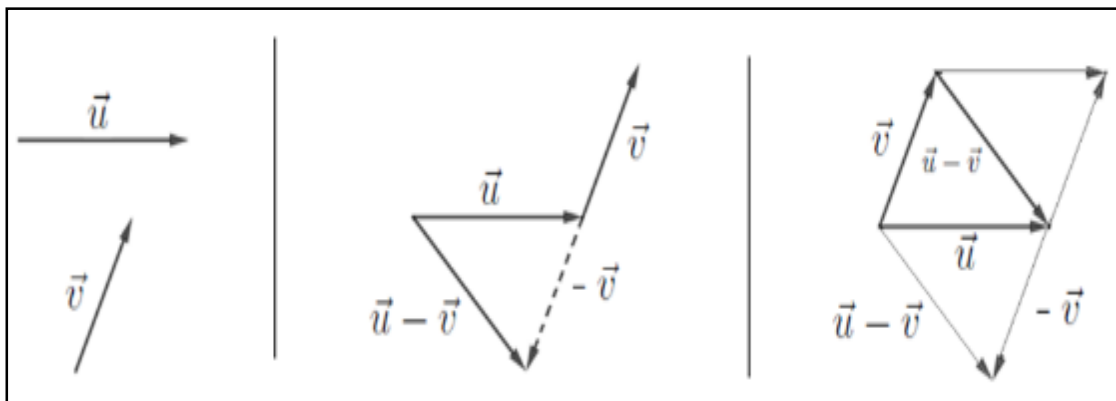
O professor pergunta se pode apagar as anotações do quadro, e os estudantes sinalizam que sim. Em seguida, volta a transpor na lousa seus apontamentos, deixando alguns espaços vazios, os quais serão preenchidos no momento da explicação. Outra característica dos registros feitos pelo docente é que ele utiliza pilotos de várias cores para desenhar os vetores. Entendemos que se trata de uma espécie de ênfase para diferentes representantes dos vetores. Enquanto a transcrição é feita no quadro, os alunos conversam entre si e a maioria reproduz os apontamentos em seu caderno.

Nessa ocasião, um grupo de alunos do Diretório Central dos Estudantes (DCE) se aproxima da porta da sala e solicita permissão ao professor para entrar; o objetivo era convidar os discentes da turma para a Calourada (a qual consiste na comemoração da entrada de “alunos novatos” na instituição de ensino superior). Este episódio não foi planejado pelo educador, como refletido em sua fala:

PI: – Vamos lá, vamos lá, ... posso ir agora? Vamos lá, vamos lá... Bom, definição, vamos definir subtração. Para eu definir subtração entre vetores \vec{u} e \vec{v} , denotada por $\vec{u} - \vec{v}$, ou seja, quem é este vetor $\vec{u} - \vec{v}$? É a soma de \vec{u} com o oposto de \vec{v} : $\vec{u} + (-\vec{v})$.

O professor prossegue, apressadamente, com sua exposição definindo geometricamente e fazendo uso da regra do paralelogramo, enfatizando que a diagonal secundária é a representação geométrica de $\vec{u} - \vec{v}$, conforme explanado a seguir:

Figura 29 - Representação da subtração vetorial



Fonte: caderno do professor 1

O docente segue com sua explicação. Entretanto, a partir do nosso ângulo de observação, assistimos a um monólogo, cuja definição se traduz num professor dando aula para si mesmo através de um espelho. Os questionamentos levantados por ele, também são respondidos por ele e o que emerge são silêncios para os tópicos abordados na aula acompanhados de conversas paralelas dos estudantes sobre assuntos diversos. Não notamos o interesse de participação dos estudantes, que apenas, reproduziam e transcreviam o que foi registrado no quadro para o seu caderno. O cenário ilustrado contradiz a concepção de Brousseau (1995, p. 140, tradução nossa),¹¹⁹ pois “[...] a aprendizagem envolve para ele recusar o contrato, mas também aceitar o apoio. A aprendizagem será, portanto, baseada não no bom funcionamento do contrato, mas em suas rupturas”, referindo-se ao docente.

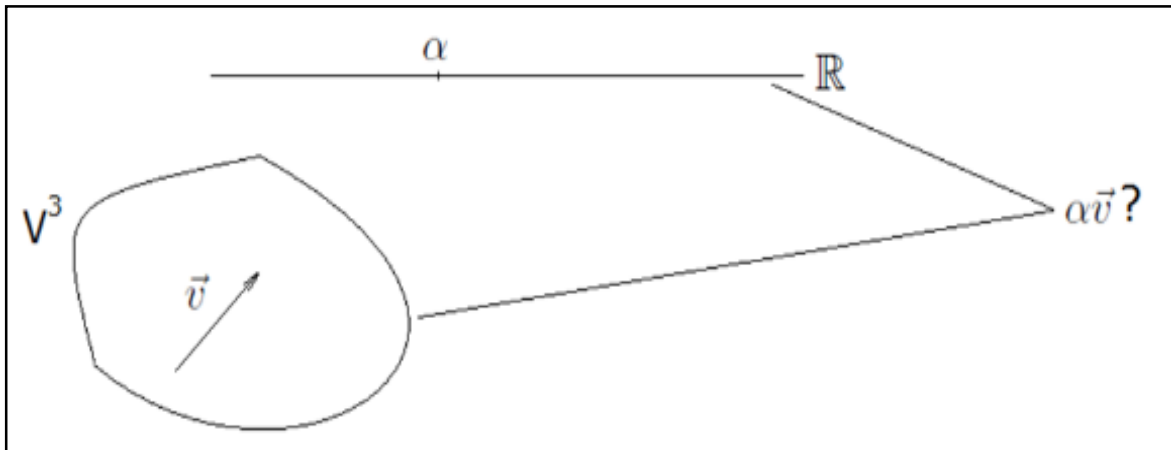
PI: – A próxima operação que vamos trabalhar é a multiplicação por escalar, que em alguns livros trazem como produto de um número real por um vetor. E é o que ocorre de fato! É o que eu gosto mais, pois na realidade um escalar é um número.

Ao consultarmos alguns livros como Lima *et al* (2001), Conde (2004), Camargo e Boulos (2005), Corrêa (2006), Steinbruch e Winterle (1987), Mello e Watanabe (2011), Winterle (2014), Venturi (2015) e Miranda, Grisi e Lodovici (2015), dentre outros que abordam o tema, detectamos que predomina o título “multiplicação de um número real por um vetor”, declarado como preferência do professor, em detrimento de “multiplicação por escalar”. O que nos leva a crer que a predominância desta expressão nos materiais de consulta para planejamento e preparação das aulas do docente em questão tenha influenciado em sua predileção. No entanto, o seguinte esquema é registrado no quadro e esclarecido na fala do professor transcrita abaixo:

PI: – Então a situação é a seguinte: agora eu vou pegar o desenho representativo de uma reta real. Nesta reta, vou escolher um número α qualquer. Agora, vou pegar em um conjunto de vetores um vetor \vec{v} qualquer. Vou operacionalizar esses dois elementos, ou seja, se eu multiplicar α por \vec{v} quais serão as características deste novo elemento que eu vou encontrar?(...).

¹¹⁹ Apprendre implique pour lui de refuser le contrat mais aussi d’accepter la prise en charge. L’apprentissage va donc reposer, non pas sur le bon fonctionnement du contrat, mais sur ses ruptures.

Figura 30 - Esquema representativo da multiplicação por escalar



Fonte: caderno do professor 1.

O esquema é acompanhado do registro, realizado pelo docente no quadro como evidenciado a seguir:

Quadro 3 - Multiplicação por Escalar ou Produto de Número real por Vetor

Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \in V^3$, definimos a multiplicação de α por \vec{v} e denotamos por $\alpha \cdot \vec{v}$ um vetor com as seguintes propriedades:

- i) $\alpha \cdot \vec{v}$ tem a mesma direção de \vec{v} ;
- ii) $\alpha \cdot \vec{v}$ tem o mesmo sentido de \vec{v} se $\alpha > 0$ e sentido contrário se $\alpha < 0$;
- iii) $\|\alpha \cdot \vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$, desde que $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então por definição $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Fonte: anotações de P1 no quadro

P1: – Então a multiplicação de um número por um vetor só mexe em duas características do vetor. Quais são elas?

E após alguns segundos, quase imediatamente ele responde:

P1: – A direção se mantém. O que muda é o sentido e o comprimento.

Ao explicar a propriedade (iii), o docente destaca:

P1: – Vocês devem ter atenção também com a notação entre número e vetor: o v com o tracinho em cima é um vetor e o α sem o tracinho é um número. Então, cuidado! Pois, às vezes, se esquecem de colocar o tracinho e aí fica difícil separar o que é vetor e o que é número.

Lembrem que a ideia de módulo aqui é módulo de número real, ou seja, α é um número real, enquanto $\|\vec{v}\|$ é o módulo de um vetor.

O discurso do professor revela uma preocupação com a notação vetorial quanto à recorrência das setas. Desse modo, os estudos de Heckler e Scaife (2015) sinalizam dificuldades dos estudantes em relação a este formato, como demonstrado no seguinte trecho: “[...] diferentes orientações de flechas podem levar a diferentes caminhos de solução e diferentes tipos de erros, o que sugere que os alunos precisam praticar com uma variedade de orientações” (HECKLER; SCAIFE, 2015, p. 2, tradução nossa).¹²⁰ Este aspecto, também foi tratado por Carneiro e Gravina (2012), que elaboraram atividades com a intenção de provocar o entendimento de que:

um vetor é uma coleção de setas com mesma direção, sentido e comprimento, [...] na desenvoltura para operar geometricamente com as setas, de forma a obter representantes de cada vetor resultante de soma de vetores ou de multiplicação de vetor por escalar (CARNEIRO; GRAVINA, 2012, p. 270).

O professor avança no discurso, estabelecendo comparações entre as operações vetoriais trabalhadas até o momento:

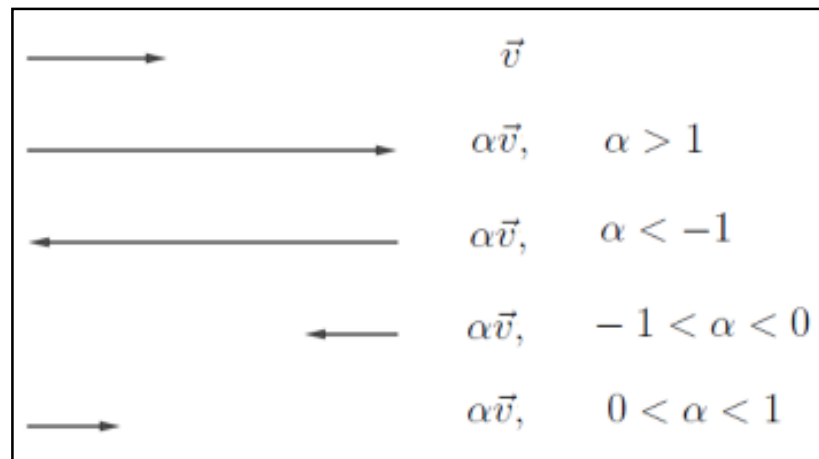
PI: – Tranquilo essa ideia? Lembrem que eu posso mudar o sentido também, mas a direção eu não mudo. Então observe, na soma e subtração a gente muda tudo, não é? Muda módulo, muda direção, muda sentido. Na subtração e soma, porém na multiplicação só podemos mudar o sentido e o comprimento, ou seja, sempre mantemos a direção.

Os questionamentos levantados pelo docente são, em sua grande maioria, respondidos imediatamente por ele. Neste sentido, reforçando o que já foi destacado por Chevallard (1997, p. 25) ao alertar que: “O aluno deve aceitar o professor como diretor de estudo e, ao mesmo tempo, renunciar violentamente às facilidades enganosas que ele lhe traz enquanto professor e isso, em princípio, a cada momento do estudo”. Entretanto, não foram identificados traços proativos nesta turma.

PI: – Vamos lá, agora eu vou representar geometricamente ou graficamente. Eu vou colocar graficamente essa parte da multiplicação, para a gente ver quais são os casos possíveis.

¹²⁰ “[...] different relative arrow orientations can prompt different solution paths and different kinds of mistakes, which suggests that students need to practice with a variety of relative orientations”.

Figura 31 - 2º esquema representativo da multiplicação por escalar



Fonte: caderno do professor 1.

P1: – *Esse semestre eu consegui me superar: escrever pior do que o semestre passado. Mas se não entenderem, perguntem. Eu estava aqui pensando... que devo fazer uns três tipos de provas... Três ou quatro tipos, pois se não vocês vão pescar sem querer querendo... se for um único tipo de prova... vou corrigir uma e vou repetir a nota para todos...*

E4: – *O pessoal daqui não pesca não. O pessoal daqui não pesca não...*

P1: – *Não tem jeito, é aquela “cola passiva”.*

E5: – *Pesca passiva?*

P1: – *A pesca passiva é assim: quando você não sabe ou está em dúvida de alguma questão e sem querer você vê um colega falando para outro, aí você pega para você.*

E a aula continua:

P1: – *Vamos lá? Eu vou parar de falar de direção, pois já sabemos que a multiplicação por escalar só vai modificar o sentido e o comprimento do vetor. Então, só tem essas quatro possibilidades: aumentar o comprimento e manter o sentido, aumentar e inverter o sentido, diminuir e inverter o sentido ou diminuir e manter o sentido.*

Referindo-se ao 2º esquema representativo da multiplicação por escalar que ele exibiu no quadro.

P1: – *Ok? Bom, uma observação é a seguinte: se β é um número real não nulo, então $\frac{\vec{v}}{\beta}$ significa o inverso de β multiplicado por \vec{v} , ou seja, eu não vou conseguir definir ou não se existe a definição de divisão de vetores.*

E4: – *Então, eu não posso dividir um vetor por outro?*

P1: – *Não. Lembra daquela operação que falei sobre o versor que é o vetor dividido pela sua norma, dá o inverso de sua norma multiplicado pelo vetor ($\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{v} \cdot \frac{1}{\|\vec{v}\|}$), pois não existe divisão de vetores, certo?*

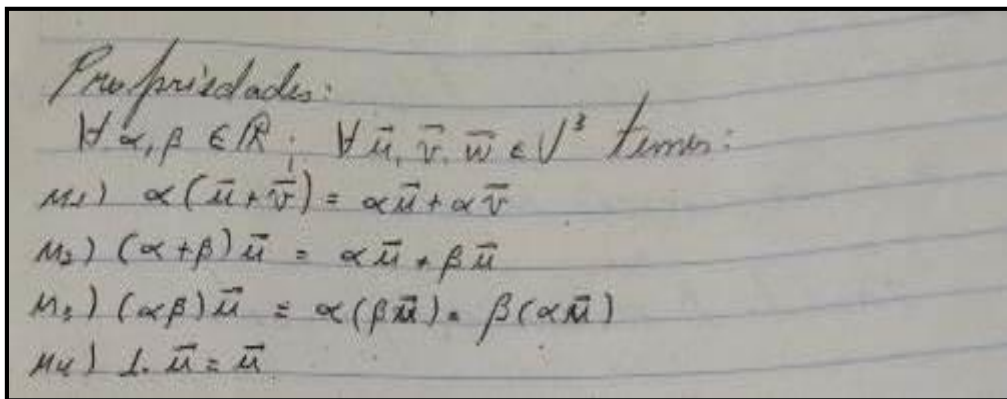
Neste trecho do discurso do professor, foi identificada a ausência de uma tecnologia que justificasse a inexistência da divisão entre vetores. Daí, reformulamos o questionamento de E4:

- “Quais as razões da inexistência da divisão entre vetores?” Indagações dessa natureza poderiam ter sido retidas para o desenvolvimento de um estudo mais acurado por parte dos estudantes e do professor. Visto que questões como essas oportunizam e induzem uma busca por justificativas que habitam no âmbito histórico-epistemológico que se relaciona diretamente com a natureza do objeto do saber, ou melhor dizendo, a razão de ser vetorial.

Assim, sob o nosso ponto de vista, o docente perdeu uma oportunidade em delegar aos estudantes o princípio do compromisso com a construção do conhecimento. Já que, possivelmente, se constituiria em uma escolha didática a qual poderia ser o primeiro passo para o despertar de ações proativas por parte dos discentes. Admitindo, em linhas gerais, que a conceitualização de divisão se baseia na concepção do oposto multiplicativo e, como os vetores têm como uma das fundamentações a orientação, não há significado em dividir direções e sentidos, pois o que está definido são as operações de dividir e multiplicar pelo comprimento de um vetor, este sim é um escalar.

PI: – E as propriedades para multiplicação de um número real com vetor são quatro: M_1 , M_2 , M_3 e M_4 .

Figura 32 - Propriedades da multiplicação por escalar



Fonte: caderno do professor 1.

PI: – Vale a propriedade distributiva em relação à soma de vetores, vale também a distributiva em relação à soma dos números reais por um vetor, ou seja, eu posso aplicar a distributiva $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$. E também eu posso aplicar a associativa em qualquer ordem. E o elemento neutro da multiplicação que é um número que pertence aos reais, o que significa que se multiplicar 1 por qualquer vetor será mantido módulo, direção e sentido. As quatro propriedades relacionada à soma de vetores com as quatro propriedades relacionada à multiplicação por escalar é o que chamamos de estrutura algébrica básica dos vetores. Que dá a ideia de espaço vetorial. O que é um espaço vetorial? É um espaço munido de duas operações: soma e multiplicação por escalar, as quais podem ser definidas de várias formas, valendo as oito propriedades (quatro da soma e quatro da multiplicação). Eu posso olhar para os vetores como um espaço vetorial, certo? Vocês vão ver isso de forma mais detalhada em álgebra linear. Lá

vocês vão ver algumas coisas interessantes, pois em um espaço vetorial, não necessariamente, os seus elementos serão vetores. Provavelmente vocês irão questionar: espaço vetorial com matrizes? Espaços vetoriais com derivadas, integrais? É porque nestes conjuntos são válidas as duas operações (soma e multiplicação) acrescida das respectivas propriedades. Esses objetos, que podem ser quaisquer, pertencem aos espaços vetoriais e se comportam como se vetores fossem, ok?

O professor apresenta uma explicação que suplanta o âmbito da Geometria Analítica, ao fornecer elementos que serão abordados em Álgebra Linear, por meio de uma definição que se desvencilha da ideia formal de espaço vetorial em que seus elementos são denotados vetores. Contudo, a tentativa de explicação do docente constitui em revelar que: o conjunto das matrizes, polinômios, conjunto das funções, dentre outros, definidas as operações de adição e multiplicação por escalar e verificadas as propriedades associadas a cada operação, constitui assim, um espaço vetorial. Ele também declara que os alunos ficarão surpresos com os espaços vetoriais cujos elementos são, por exemplo, matrizes. Contudo, os estudantes não esboçam reações que indiquem interesse pelo tema. O cenário que se configura fortalece o que Chevallard (2012, p. 174, tradução nossa¹²¹) denominou de “aclamar e estudar autoridades e obras-primas”, o que, gradualmente, foi transformado em um paradigma escolar – metaforicamente¹²² equivale a uma visita às obras ou aos monumentos referentes às ramificações do conhecimento.

3.1.2 Momentos de estudos agregados à trama praxeológica da aula 1

O processo de estudo ou organizações de estudo (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001), assim como a estrutura de tramas praxeológicas (FARIAS; PIRES, 2011) servirão como direcionamento para sintetizar e expor os diversos elementos que compõem cada sessão de estudo e que desempenharão uma função basilar ao contrastarmos nossas análises e identificarmos aspectos problemáticos no ensino e aprendizagem da Álgebra Vetorial.

Diferentes momentos integram o processo de estudo, dentre eles Chevallard, Bosch e Gascón (2001) destacam: o momento do primeiro encontro com um novo tipo de problema, o do trabalho da técnica, o tecnológico-teórico, o exploratório e o da avaliação. Nesse conjunto, os autores também ressaltam que a noção de “momento” não é uma concepção estritamente

¹²¹ Hailing and studying authorities and masterpieces.

¹²² O autor esclarece que deve estabelecer um comparativo com uma visita a um museu, onde os alunos admiram obras de arte que já estão prontas, finalizadas, sem vivenciar a produção da obra. Fato este que se assemelha às aulas de matemática, pois os estudantes, na maioria das situações, não vivenciam a construção do conhecimento, tudo está pronto e acabado.

cronológica, pois os momentos podem ser retomados e revividos em distintos instantes do estudo. Mencionado isso,

Quando dispomos de um professor para coordenar o estudo, essas tarefas didáticas são tarefas cooperativas, nas quais participam alunos e professor: o aluno conta com o professor, para que o ajude a viver esses diferentes momentos, e o professor conta com a energia de seus alunos e com seu envolvimento no processo de estudo (que inclui, como você bem sabe, a lição de casa), para que sua ajuda seja eficaz (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 263).

Os momentos de trabalho da técnica (didática ou matemática) e o tecnológico-teórico (que rege, justifica e fundamenta a técnica) têm sua gênese no âmbito praxeológico legitimado pela inseparabilidade entre a práxis e o *logos*, “pois não há práxis sem logos, assim como não há *logos* sem práxis. As duas estão unidas como os dois lados de uma folha de papel” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 251). Assim, os aspectos praxeológicos se tornam mais evidentes quando recorremos ao suporte da trama praxeológica (FARIAS; PIRES, 2011) imbricada entre praxeologias didáticas e matemáticas.

Tabela 4 - Síntese da aula 1. (continua)

Trechos da aula/Momentos	Síntese das praxeologias Didáticas e Matemáticas identificadas na aula			
	Ordem cronológica	Sistema de tarefas do professor (OD) /temas	Cenas/procedimentos	OM - [T / τ / θ / Θ]
1°	Intenção didática motivacional	Texto de Júlio Machado com o tema iniciativa		
2°	Intenção didática motivacional	Uso de metáfora para integrar a resolução de tarefas ao texto		
3°	Retomada da definição de vetores	<i>E1: – Classe de equipolência de segmentos orientados; P1: – [...] segmentos equipolentes que possuem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.</i>		Conceitos que advêm da álgebra pura, imbricados com a geometria plana e situados no âmbito [θ/θ]
4° Segundo Chevallard, Bosch e Gascón, (2001) caracterizado como primeiro encontro com as operações entre vetores	Operações com vetores	<i>P1: – [...] A primeira é a operação da soma que vocês já viram no ensino médio.</i> Detectamos que as relações pessoais dos estudantes para com os vetores direciona-se a $R_p(X,0) = \emptyset$.		
		<i>P1: – Dados \vec{u} e \vec{v} pertencentes a V^3, (como vimos na aula passada V^3 é um espaço vetorial, onde os elementos são vetores). Considere os pontos A, B e C pertencente a E^3, (são pontos do espaço), tais que \overline{AB} é um representante do</i>		Ingredientes tecnológico- teóricos [θ/θ] situados no campo dos espaços vetoriais presentes no corpus da álgebra, mais especificamente da Álgebra Linear.

<p>5º Momento tecnológico-teórico</p>	<p>Soma ou adição entre vetores</p>	<p><i>v</i>etor \vec{u} e \overrightarrow{BC} é um representante do vetor \vec{v}.</p> <p><i>PI:</i> – Então nós temos, dois vetores no espaço. E eu vou associar a seus representantes, vou dizer a origem e a extremidade. Então como seria a soma? A soma entre \vec{u} e \vec{v} denotado por $\vec{u} + \vec{v}$, é o vetor cujo representante é o segmento orientado AC, isto é: $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Reflete uma forma de fazer emergindo elementos do bloco prático [T, τ] que aborda um tipo de tarefa, soma de vetores, em que empreende uma técnica geométrica.</p> </div>
<p>6º Momento de trabalho da técnica</p>	<p>Soma ou adição entre vetores (representação geométrica)</p>	<p><i>[...]</i> – a soma de vetores sem precisar ficar desenhando seus representantes, mas vou usar certos pontos. Por exemplo se eu colocar: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Integra o tratamento geométrico da teoria de vetores, sem dependência de visualização.</p> </div>
<p>7º Momento de trabalho da técnica</p>	<p>Soma ou adição entre vetores</p>	<p><i>PI:</i> – [...]. Outra forma que vocês podem utilizar para somar vetores é usar a regra do paralelogramo [...]. Como é que eu faço? Eu escolho representante com origem em A, desde que não mude módulo, direção e sentido.</p> <p><i>PI:</i> – Como fazíamos lá no ensino médio e fechamos o paralelogramo. Quando eu faço isso a diagonal principal vai representar a soma dos vetores $\vec{u} + \vec{v}$. Por que isso? Porque no paralelogramo os lados opostos são paralelos e congruentes.</p> <p><i>PI:</i> – Qual a desvantagem de obter a soma usando a regra do paralelogramo? No paralelogramo eu só somo dois vetores a cada vez. Enquanto na definição geral, que chamamos regra do polígono eu posso somar quatro, cinco ou mais vetores. É só ir fazendo coincidir extremidade com origem, sequencialmente, até obter a soma final.</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Outra forma de realizar a tarefa t, somar vetores, pode ser cumprida pela, técnica τ, regra do paralelogramo.</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Fundamentação tecnológica θ e teórica Θ própria da geometria plana.</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Apresenta uma restrição da técnica regra do paralelogramo em detrimento da regra do polígono.</p> </div>
<p>8º Momento tecnológico-teórico</p>	<p>Propriedades da operação adição/soma entre vetores</p>	<p><i>PI:</i> – [...] Eu enumerei aqui como A_1, A_2, A_3 e A_4, que posteriormente vão definir algumas operações. A álgebra de vetores possui propriedades bem semelhantes aos números reais. Contudo, geometricamente falando, estamos trabalhando com segmentos no espaço, ou seja, estamos somando segmentos e não números.</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Similitude entre as propriedades dos números reais e a soma de segmentos orientados.</p> </div>
<p>A_3 - Elemento neutro (vetor)</p>		<p><i>E3:</i> – Professor!</p>	

<p>9º Momento tecnológico-teórico</p> <p>9º Momento tecnológico-teórico</p>	<p>nulo): $\forall \vec{u} \in V^3; \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.</p>	<p><i>PI: – Diga.</i></p> <p><i>E3: – Então se você pegasse qualquer vetor e somasse com o vetor nulo é a mesma coisa que se tivesse somado com o zero?</i></p>	<p>A tecnologia utilizada para justificar a questão foi, em essência, a perda da identidade geométrica do vetor, a partir de \mathbb{R}^4, e sua representação algébrica por meio de n-upla de números ordenados (a_1, a_2, \dots, a_n) ou (x_1, x_2, \dots, x_n), ou seja, passa a ser uma sequência numérica.¹²³</p>
<p>10º Momento tecnológico-teórico</p>	<p>A₄ – Elemento oposto: $\forall \vec{u} \in V^3, \exists! (-\vec{u}) / \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.</p>	<p><i>PI: – Bom, elemento oposto, esse aqui é importante, porque dele sai uma quantidade significativa de propriedades. [...] Quem vai ser o elemento oposto aqui? o $-\vec{u}$. No entanto, o menos (-) não vai ter o mesmo sentido que tem nos números reais. Vai significar oposto, terá o sentido contrário. Lembre-se que estou somando segmentos orientados, então abstraia.</i></p>	<p>Emprega-se o mesmo sinal ostensivo (-), com significado diferente do empregado no âmbito numérico. O (-) à frente do vetor $-\vec{u}$, indica que se deve mudar o sentido dos segmentos orientados que representam o vetor \vec{u}.</p>
<p>11º Momento tecnológico-teórico</p>	<p>Subtração entre vetores</p>	<p><i>[...] – Para eu definir subtração entre vetores \vec{u} e \vec{v}, denotada por $\vec{u} - \vec{v}$, ou seja, quem é este vetor $\vec{u} - \vec{v}$? É a soma de \vec{u} com o oposto de \vec{v}: $\vec{u} + (-\vec{v})$.</i></p>	<p>Aplica-se a propriedade A₄ abordada anteriormente.</p>
<p>12º Momento tecnológico-teórico</p>	<p>Multiplicação por escalar ou Produto de Número real por Vetor</p>	<p><i>Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \in V^3$, definimos a multiplicação de α por \vec{v} e denotamos por $\alpha \cdot \vec{v}$ um vetor com as seguintes propriedades:</i> <i>i) $\alpha \cdot \vec{v}$ tem a mesma direção de \vec{v};</i> <i>ii) $\alpha \cdot \vec{v}$ tem o mesmo sentido de \vec{v} se $\alpha > 0$ e sentido contrário se $\alpha < 0$;</i> <i>iii) $\ \alpha \cdot \vec{v}\ = \alpha \cdot \ \vec{v}\$, desde que $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então por definição $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0}$.</i></p>	<p>A justificativa apresentada pelo professor centra-se no corpo de números reais e espaço de vetores.</p>
<p>13º Momento tecnológico-teórico</p>	<p>Multiplicação por escalar ou Produto de Número real por Vetor</p>	<p><i>PI: – Então a multiplicação de um número por um vetor só mexe em duas características do vetor. Quais são elas? A direção se mantém. O que muda é o sentido e o comprimento.</i></p>	<p>Consequências da multiplicação de um número real por um vetor.</p>
<p>14º Momento tecnológico-teórico</p>	<p>Propriedades da multiplicação de</p>	<p>$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$, temos</p> <p>$M_1) \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ $M_2) (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$</p>	<p>Advém do fato de que V^3, com as operações usuais, é um espaço vetorial.</p>

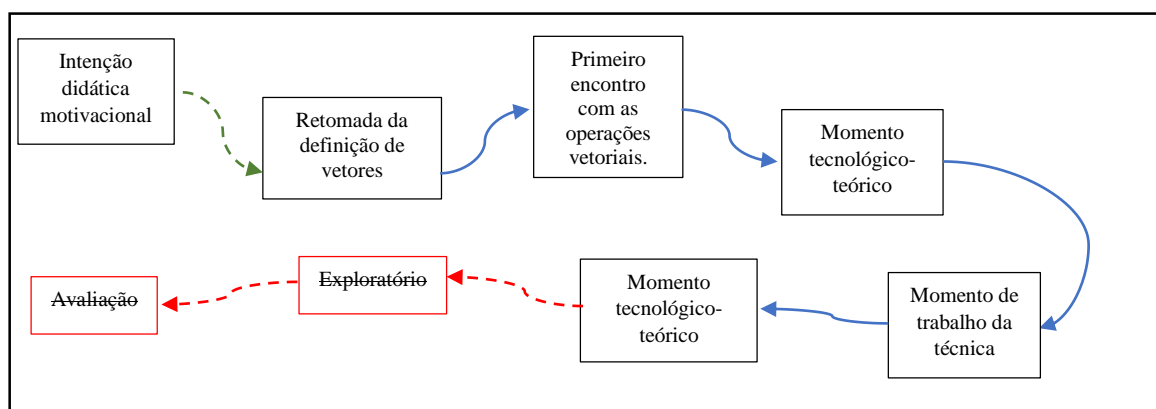
¹²³ Destacamos que o conceito de sequência numérica apresentado pelo professor pode gerar obstáculos à aprendizagem, visto que, na esfera do cálculo e análise, as sequências numéricas são infinitas, isto é, uma sequência ou sucessão de números reais é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real $f(n)$ (MATOS, 2001).

	um número real por vetor	$M_3) (\alpha, \beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}) = \beta(\alpha\vec{u})$ $M_4) 1.\vec{u} = \vec{u}$	
--	--------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

Fonte: acervo da autora (2019).

Acrescenta-se que não foram identificados na organização de estudo os momentos exploratório e de avaliação. Assim, apresentamos o desenho desta aula, na qual notamos a preponderância de alguns momentos em detrimento de outros, pois de acordo com Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p.264) “um momento pode ser vivido várias vezes”. Contudo, a ausência de uma organização matemática completa reduziu os alcances interpretativos desta aula, principalmente no que tange a uma participação ativas dos estudantes. No entanto, em outro viés, pode-se questionar se é recomendável a presença de todos os momentos de estudo (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001) em um único encontro. Ressalte-se que não abordaremos essa discussão e cedemos para investigações posteriores.

Figura 33 - Esquema das observações realizada na aula 1



Fonte: acervo da autora (2019)

Optamos por setas neste formato por entendermos que os momentos de estudos e, conseqüentemente, o funcionamento dos SDs não seguem uma lógica de linearidade. Visto que pode-se imaginar um mundo institucional no qual as atividades humanas são regidas por praxeologias bem adaptadas, permitindo que todas as tarefas desejadas sejam realizadas de maneira ao mesmo tempo eficiente, segura e inteligível. Mas tal mundo não existe, como foi sugerido, “as instituições estão repletas de toda uma dinâmica praxeológica (...)”. (CHEVALLARD, 1999, p. 230). Assim, o esquema objetivou representar aspectos deste movimento dinâmico inerente aos SDs.

3.1.3 Transcrição da aula 2

Para preservar a identidade dos autores no mapeamento da aula em questão, com vistas à clareza, trataremos os estudantes por meio da letra *E*, acrescida de letras minúsculas do nosso alfabeto, para identificar as falas e resguardar o anonimato dos alunos, enquanto o professor será referenciado pela letra *P*, adicionada ao número 2, por se tratar de outro docente e da segunda aula transcrita - *P2* neste estudo.

O docente adentra a sala e faz o seguinte questionamento:

P2: – E aí, pessoal, tranquilo?

Ea: – Vai ficar, professor.

Os estudantes demonstram uma efervescência não percebida, enquanto característica, na turma anterior. Eles conversavam entre si de forma conjunta, o que dificultou compreender qual era o assunto abordado. O professor convidou-os a iniciar a aula.

P2: – Vamos lá!

P2: – O que nós vimos ontem?

Eb: – O senhor deixou uns exercícios aí para a gente.

P2: – Não! Ontem? Ontem não.

Ec: – Ontem eu cheguei atrasado, mas o senhor resolveu uns exemplos aí...

Ea: – Eu não fiz nada.

Eb: – Oh, professor! O senhor deu o que ontem?

A pergunta do professor sobre o tema tratado na aula anterior gerou algumas respostas, como também a solicitação de exercícios, que se transformaram em exemplos que não foram resolvidos. E como efeito das várias incertezas sobre o assunto abarcado na aula, a questão retorna ao docente, que a responde:

P2: – Trabalhamos com as coordenadas para os vetores. Partindo da forma algébrica para a forma geométrica e, por consequência, visualizar geometricamente o vetor no espaço.

P2: – Bom. Então vamos lá! O assunto da aula de hoje vai ser coordenadas cartesianas no espaço.

Nesta prévia dialógica, é possível notar que *Ea* acredita que tudo vai ficar tranquilo, porém ele manifesta que não fez nada. Os diálogos prosseguem entre os alunos. O professor escreve o título, “pontos no espaço e coordenadas cartesianas”, no quadro e solicita:

P2: – Pessoal, me ajudem aqui. Vamos lá!

A solicitação do docente é atendida e os alunos silenciam e direcionam atenção ao discurso do professor, que retorna ao assunto trabalhado na aula anterior.

P2: – O que nós vimos, na aula de ontem, foi basicamente isso. Pegamos três vetores. Quem lembra aí? Sobre esses três vetores? Pegamos três vetores. Não foi isso? Vamos lá, gente...

Ed: – Sua aula deveria ser a primeira, porque depois de uma prova...

P2: – Na verdade vão reclamar sempre! Semestre passado, era antes de cálculo e reclamavam também.

Ed: – Dia de segunda-feira é melhor, pois na segunda-feira a aula desta disciplina é no primeiro horário.

P2: – O que a gente viu basicamente foi: pegamos três vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ unitários e ortogonais dois a dois.

O docente representa, simultaneamente, o registro no quadro enquanto fala.

P2: – O que fizemos ontem? Fizemos o seguinte: qualquer vetor do espaço, eu posso escrever como sendo alguma coisa vezes o primeiro vetor, mais alguma coisa vezes o segundo vetor, mais alguma coisa vezes o terceiro vetor.

Este trecho da interlocução revela uma restrição externada por Ed. O aluno, todavia, não responde aos questionamentos do professor, mas expressa uma suposta justificativa para a ausência de respostas às questões apresentadas por P2 com o intento de retomar o tema abordado na aula anterior. P2 não concorda com o posicionamento de Ed, destacando o aspecto recorrente em termos de reclamações por parte dos estudantes.

P2: – Bom, basicamente é isso aqui. Esse vetor $x\vec{i}$. (x vezes \vec{i}) represento onde aqui no desenho?

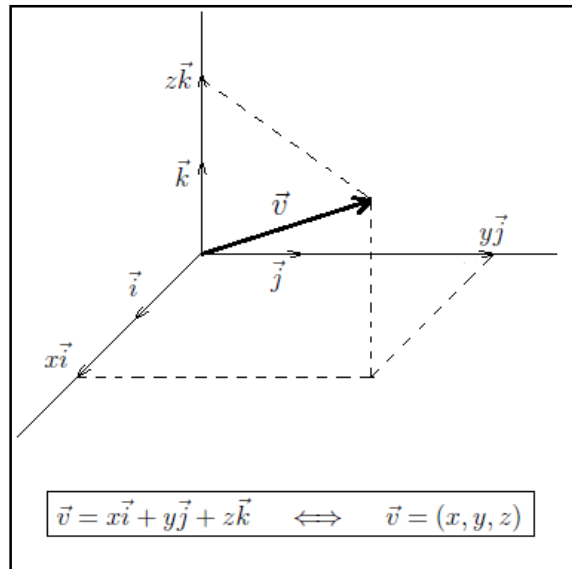
Eb: – Aí na frente.

P2: – Na frente? Na frente como? Acho que você quis dizer na mesma reta. Cuidado com esse na frente, pois pode ser representado na parte negativa. Na mesma reta.

P2: – De qualquer forma, é alguma coisa paralela a ele. $x\vec{i}$ algum vetor paralelo a \vec{i} e $y\vec{j}$ algum vetor paralelo a \vec{j} . Então vamos somar. Como seria? Olha, geometricamente, seria isso aqui. A soma $x\vec{i} + y\vec{j}$ é essa diagonal, correto?

P2: – Então, a partir desse ponto, eu posso somar o terceiro vetor $z\vec{k}$, assim obteríamos $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ que teria o nosso vetor representado mais ou menos por aqui.

Figura 34 - Reprodução da representação do vetor no espaço – \mathbb{R}^3 a partir da aula de P2



Fonte: reprodução da autora com base no desenho apresentado por P2 (2016)

P2: – Não vou entrar em detalhes novamente, pois o assunto foi da aula passada. Mais ou menos, foi isso aqui o que vimos na aula anterior.

O docente sintetiza o encontro passado, atendendo aos anseios dos alunos. No entanto, nota-se uma intenção didática tácita na atitude do professor em revisitar tópicos da aula anterior, pois o propósito era discorrer a aula a partir da precedente.

P2: – Bom! O que a gente fez foi o seguinte: ao invés de ficar escrevendo tudo isso, vou escrever $\vec{v} = (x, y, z)$. O primeiro coeficiente é a primeira coordenada, o coeficiente de \vec{j} é a segunda coordenada e a do \vec{k} a terceira coordenada. O que fizemos a partir disso? Tudo que foi feito na parte geométrica. A gente viu como somar usando coordenadas, como subtrair usando coordenadas, multiplicação por escalar, comprimento. Ok? Foi isso? Para que estou recordando isso? Pelo seguinte: começando a aula de hoje “coordenadas cartesianas”.

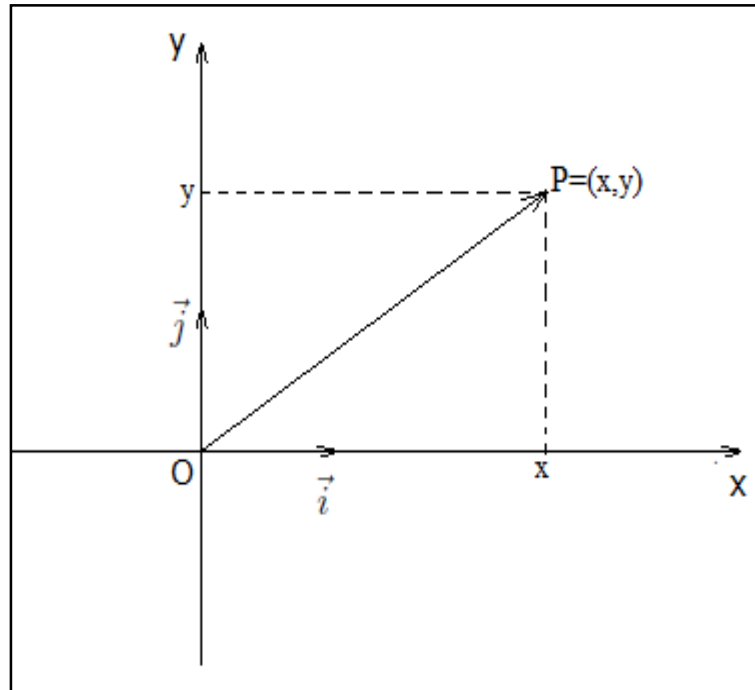
P2: – Bom! Isso aqui é um $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Agora imagine que eu falasse para vocês o seguinte: mesmo que não tivéssemos falado de pontos. Como vocês fariam para representar o ponto de coordenadas (x, y, z) ? Não mais um vetor, só um ponto agora. Como vocês fariam?

Ee: – Faz um ponto em qualquer lugar.

P2: – É de fato, é isso.

P2: – Se fosse usar duas coordenadas $P = (x, y)$? Lá no plano XY , como tradicionalmente se faz? Pega o eixo X , pega o eixo Y . Não é isso? Pega o ponto aqui e faça o que? Projeto paralelo a X e paralelo a Y e vejam quanto medem.

Figura 35 - Reprodução da representação do vetor no plano – \mathbb{R}^2 a partir da aula de P2



Fonte: reprodução da autora com base no desenho apresentado por P2 (2016).

P2: – Neste mesmo desenho represente o vetor \vec{v} de coordenadas (x, y) . Eu posso pensar do mesmo jeito. Eu vou escolher, uma medida unitária, um vetor unitário \vec{i} e um vetor unitário \vec{j} . Onde está o vetor de coordenadas (x, y) . Bom! $(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$. Onde estaria esse vetor nesse desenho, pensando em soma geométrica, somar o vetor $x\vec{i} + y\vec{j}$? Concordam que é esse vetor aqui. E quando eu falar para vocês. O ponto de coordenadas (x, y) e o vetor de coordenadas (x, y) . Qual a diferença de uma representação para outra? O ponto terminou aqui. Não tem seta, não tem nada. E o vetor? Muito pequena essa diferença?

A distinção entre a representação entre pontos no plano ou no espaço e os vetores é um assunto delicado segundo pesquisadores como Carneiro e Gravina (2012):

Nos diferentes argumentos matemáticos desenvolvidos anteriormente temos, sempre, um ponto delicado que diz respeito à compreensão do conceito de vetor. É preciso desenvolvê-lo com esse conceito, especialmente quanto: a) ao entendimento de que diferentes “setas” podem representar um mesmo vetor; b) a notação (x, y) ou (x, y, z) , que ora indica as coordenadas de um ponto no plano ou espaço, ora as coordenadas de um vetor. (CARNEIRO; GRAVINA, 2012, p.268)

Aspecto este também sinalizado por P2, que prossegue seu discurso apontando a diferença entre ponto e vetor, apesar da similitude ostensiva sob a perspectiva da representação algébrica.

P2: – Pessoal! É exatamente essa ideia que nós vamos usar para falar de coordenadas no espaço. Então, olhem só! Qual a diferença entre ponto e vetor? Olhem! Quando você fala de

você pode fazer o desenho em qualquer lugar do espaço. Correto? Só tem que manter o quê?

Estudantes: – Direção, sentido.

P2: – E o comprimento também.

P2: – Quando você fala ponto, ele está fixado em um certo lugar. Então, o que é que precisamos além desses três vetores, fixar na origem. Embora pareça que a origem esteja fixa. Não está não. Vetor você pode fazer o desenho dele em qualquer lugar desde que você mantenha direção, sentido e comprimento. Agora, no momento em que fixar uma origem, aí posso falar em coordenadas de ponto. Então, por exemplo: o plano XY, geralmente se coloca o ponto O. Porque você está fixando aqueles eixos, mas se fosse vetor poderia ficar “passeando à vontade”.

P2: – Então como eu vou falar de coordenadas para ponto. Desse jeito: considere, no espaço, um ponto O (chamado origem) e três vetores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} unitários e 2 a 2 ortogonais.

P2: – Só lembrando da última aula: o que são vetores unitários?

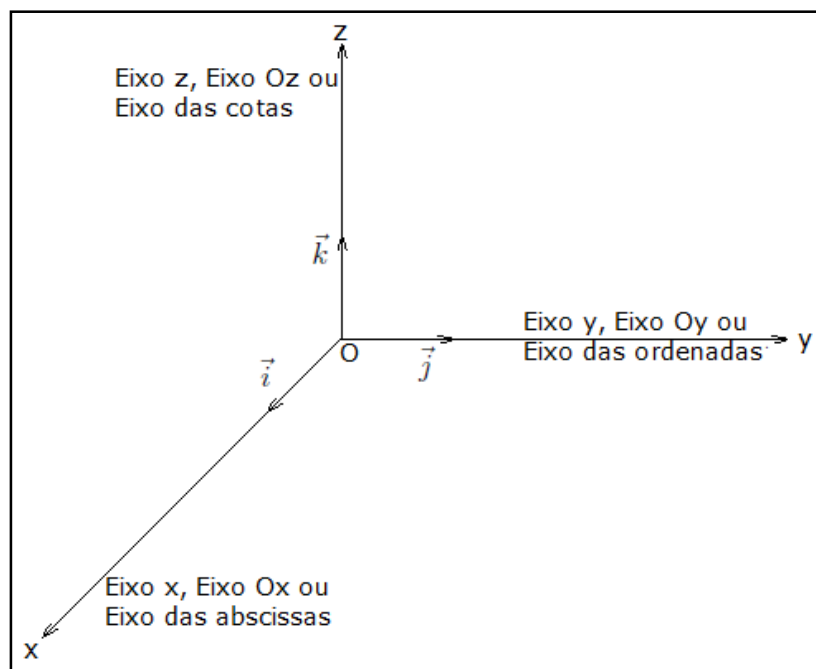
Eb: – Módulo igual a um (Falou bem baixo);

Ef: – Comprimento igual a 1.

P2: – Comprimento igual a 1. Então, são três vetores medindo uma unidade de comprimento.

E dois a dois ortogonais? Se eu pegar \vec{i} com \vec{j} , temos 90° , \vec{j} com \vec{k} também 90° e \vec{k} com \vec{i} 90° . Me parece que o desenho é algo parecido com esse.

Figura 36 - Reprodução dos eixos e planos coordenados com base na aula de P2



Fonte: reprodução da autora com base no desenho apresentado por P2 (2016).

Ed: – É muito importante também se habituar com o enunciado, não é, professor? Por que se você não conseguir correlacionar com o que tem que fazer.

P2: – Vocês percebem que às vezes coloco o desenho, faço todo um discurso e depois peço que vocês descrevam para mim. Essas passagens, às vezes, são complicadas mesmo. Mas vocês têm que se habituarem a ... Como vou sair do desenho e agora vou escrever um texto sobre isso?

Eu tenho que descrever tudo que está aqui. Tenho um ponto, três vetores unitários, ângulos de 90°.

P2: – É por isso que às vezes, na prova, o aluno sabe fazer a questão, porém não sabe definir formalmente. Mas, em matemática é assim mesmo, temos que saber definições, teoremas, os quais são uma das ferramentas matemáticas.

É possível notar, nas entrelinhas, um discurso preparado pelo professor, uma fundamentação tecnológico-teórica de acordo com a TAD, evidenciado no seguinte trecho: “Como vou sair do desenho e agora vou escrever um texto sobre ele? Eu tenho que descrever tudo que está aqui. Tenho um ponto, três vetores unitários, ângulos de 90°”. Perspectiva essa que remete à definição de base ortonormal no espaço:

Uma base $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ no espaço é chamada ortonormal se os seus vetores forem ortogonais entre si e unitários, isto é, se $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ e $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k} \perp \vec{i}$. A base ortonormal $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, que também é chamada de base canônica, determina no espaço um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $Oxyz$, com origem em um ponto arbitrário O . Os vetores unitários e ortogonais da base fornecem as direções dos eixos x, y e z , que são chamados de eixos das abscissas, eixos das ordenadas e eixos das cotas, respectivamente (LORETO; LORETO JÚNIOR, 2014, p. 35).

P2: – E aí, pessoal, tranquilo?

Os alunos conversam entre si, mas não expressam sinais acerca da suposta trivialidade exposta por P2.

P2: – Então, a situação toda está aqui. Aqui mede 90°, aqui 90° e aqui também. Ok?

Tomando como base a representação anterior esboçada no quadro, continua:

P2: – Assim, como eu fiz na aula ontem. Eu vou “esticar” este vetor, vou “esticar este outro vetor e este também.

Referindo-se aos vetores unitários $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

P2: – Olhem só, gente, eu quero usar essa estrutura que está aqui, ou seja, esses quatro itens (ponto e mais três vetores), para posicionar pontos no espaço. Vamos utilizar a teoria de vetores para atribuir coordenadas a pontos. O que significa que eu vou utilizar a teoria de vetores para trabalhar com coordenadas de pontos.

P2: – Concordam comigo que vocês podem pegar a origem que está aqui com aquele ponto e formar um vetor? Certo?

Ef: – Hum, Hummm...

P2: – E o que nós vimos na aula passada? A partir do momento em que vocês têm um vetor, podem escrever este vetor em função destes três outros que aparecem aqui. O assunto da aula passada foi esse.

P2: – Bom, percebam o seguinte: dado qualquer ponto P no espaço, podemos encontrar x, y, z reais, tais que o vetor $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, Ok? Esta última frase sintetiza a aula passada.

P2: – De que forma vocês fariam para determinar x, y, z , ou seja, como vocês fariam para representar estes três valores?

Os alunos, neste momento, permaneceram em silêncio. E o professor prossegue:

P2: – Basicamente eu vou fazer o que fiz na aula passada, porém seguindo o caminho inverso. Na verdade, eu tinha esses três vetores, aí fui somando, peguei a altura aqui e finalmente juntei. Agora vou fazer o contrário. Eu vou projetar aqui embaixo, no plano, ok? E aí?

P2: – Bom, posso projetar aqui também, paralelo ao vetor \vec{j} , projeta aqui paralelo ao vetor \vec{k} , concordam que é o mesmo desenho que tenho aqui? Se vocês somarem esse vetor, mais esse, qual vai ser a resultante?

Eg: – Vai ser da origem até a projeção (até embaixo).

P2: – Isso, concordam? Soma de vetores esse lado é igual a este lado e este é igual a este. A minha figura caracteriza um paralelogramo, na verdade, até um pouco mais que isto, é um retângulo. Por que um retângulo?

Eg: – Porque os lados são paralelos.

Ef: – Porque é 90° graus.

P2: – Além de serem paralelos, aqui é 90° , aqui também é 90° e o outro também é 90° . Como eu comentei na aula passada esse 90° assim “meio torto”, vai ser assim porque temos um objeto tridimensional que está desenhado no quadro que é bidimensional. Então, a visualização se perde um pouco, talvez...

P2: – E falta o que para a gente completar este desenho?

Eg: – Orientar o ponto P .

P2: – Deste jeito? Pronto!

Eg: – Isso.

Ef: – Mas tá um pouquinho diferente...

P2: – É! Está diferente. Mas está errado?

Ef: – Sei lá...

P2: – Pense um pouco, ..., em termos de soma de vetores, será que pensando em soma de vetores está correto? Porque no fundo o que eu estou fazendo é que este vetor $x\vec{i}$ mais o vetor $y\vec{j}$. No fundo o vetor que estou somando aqui é um vetor que tem um representante aqui, correto? Agora, será que o representante pode ser este?

O professor recorre, com frequência, a advérbios de lugar (aqui, ali, daqui, dentre outros) sempre que faz referência à figura desenhada no quadro.

Ee: – Não.

P2: – Não? Por quê?

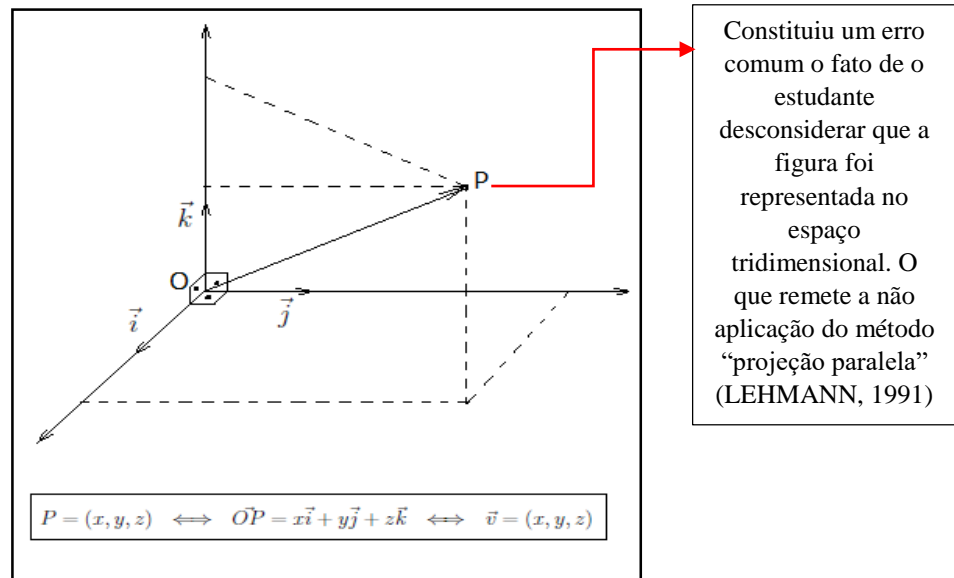
Ee: – Porque na hora de somar, ...

P2: – O comprimento é o mesmo?

Ee: – Não.

P2: – Se você vai manter o mesmo vetor você precisa manter comprimento, direção e sentido. Então, este desenho está certo ou errado? É mais ou menos isto aqui. E aqui eu teria o vetor \vec{zk} , certo? Fiz o mesmo desenho, praticamente, ok? Este é o vetor \overrightarrow{OP} .

Figura 37 - Representação da projeção do vetor no que toca aos planos coordenados (com base na aula de P2)



Fonte: reprodução da autora com base no desenho apresentado por P2 (2016).

A comunicação entre os ostensivos e não ostensivos ocorre de maneira alinhada com a representação gráfica, explanada no quadro, que se imbricam às associações e às parcerias realizadas pelo professor em conexão com os conceitos oriundos do *corpus* teórico da Geometria Analítica. Como destaca Casabò (2001, p. 20, tradução nossa¹²⁴): “toda manipulação de ostensivos é controlada pela ‘ativação’ ou ‘evocação’ de objetos não ostensivos cujas características podem ser modificadas durante toda a atividade”.

Dentre os inúmeros elementos de análise, direcionamos nossa atenção para a deformação sofrida pela figura tridimensional ao ser representada no plano bidimensional (quadro de vidro). Método já sinalizado por Lehmann (1991), denominado “projeção paralela”, que, segundo o autor, é comumente empregado. Contudo, deve-se atentar que os eixos Y e Z são desenhados mutuamente perpendiculares, mas o eixo X é desenhado de maneira que o ângulo XOY é maior que 90°, sendo usualmente tomado como 135°. Esta vertente pode ser considerada como um rastilho de obstáculos à aprendizagem, pois os estudantes devem abstrair uma terceira dimensão planificada. Nestes termos, idealizamos um protótipo que poderá auxiliar na localização de elementos tipificados tridimensionalmente.

¹²⁴ “toda manipulación de ostensivos viene controlada por la ‘activación’ o ‘evocación’ de objetos no-ostensivos cuyas características pueden verse modificadas a lo largo de la actividad”.

Figura 38 - Protótipo tridimensional



Fonte: construído e elaborado pela autora (2017).

O processo comunicativo progride:

P2: – Pessoal, novamente estes números que aparecem aqui, eu vou definir como sendo as coordenadas do ponto P. Como já tínhamos comentado aqui no plano. Qual a diferença entre vetor de coordenadas x, y, z ou ponto de coordenadas x, y, z? A maneira de começar a resolver a questão é essa, por exemplo, o que é que muda? Quando marca um ponto, terminou o ponto ali e pronto. Mas se um vetor com as mesmas coordenadas, é um vetor que une daqui até aqui. Então, esses números reais são denominados coordenadas do ponto P. Notação: $P = (x, y, z)$.

Ee: – Oh, professor, eu tenho uma dúvida.

P2: – Fale.

Ee: – Como é que o senhor sabe que onde está o y e o \vec{j} ?

P2: – Você quer saber por que eles estão exatamente aqui?

Ee: – Isso.

P2: – É o seguinte, isto aqui é só uma representação, então não precisa ser exatamente neste ponto. Eu poderia diminuir o comprimento ou até mesmo inverter o sentido. Isto aqui é só uma representação. Então, por exemplo, como construímos o desenho utilizamos valores acima de 1. Por que acima de 1? Porque eu aumentei o comprimento, assim como mantive o sentido. Se fornecesse para você o vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - 4\vec{k}$. O desenho seria aquele?

Ee: – Não.

P2: – E como ficaria o desenho? Você teria que dobrar o comprimento de \vec{i} , mantendo o mesmo sentido porque 2 é positivo. Dividir o \vec{j} em três partes e pegar uma, também mantendo o sentido e $-4\vec{k}$ você teria que aumentar o comprimento em 4 vezes, além de inverter o sentido. Então, o que foi desenhado no quadro é apenas uma representação de uma situação, só para a gente dar uma visualizada. O que significa que cada questão pode apresentar vetores distintos que gerará representações diferentes, ok?

P2: – Então, é o seguinte, o que está acontecendo aqui é que tenho o vetor paralelo ao vetor \vec{j} , quem vai determinar se tem mesmo sentido ou não, se aumentou ou diminuiu o comprimento é o valor da constante. Constantes entre -1 e 1 ; acontece o que em termos de comprimento? Por exemplo $\alpha\vec{j}$ e $-1 \leq \alpha \leq 1$ o que acontece com o comprimento deste vetor?

Ea: – Diminui.

Ed: – Diminui

P2: – Diminui? Para α entre -1 e 1 ?

Ef: – Ah, não!

O questionamento do professor coloca em dúvida a resposta do estudante, que subitamente muda de opinião.

P2: – Por exemplo, se pensarmos em $\frac{1}{2}$, em termos de comprimento diminui. Ok?

P2: – Pessoal, a representação não está exatamente aqui, neste desenho.

Ee: – Na prova o senhor vai colocar questões como estas? Na prova o senhor vai fornecer os valores das variáveis?

P2: – Na prova pode vim das mais variadas questões.

Eg: – Está chegando...

P2: – Uma delas, representar um ponto de coordenadas tais. Aí, você representa um ponto ou vários. E na avaliação será fornecido as coordenadas dos pontos ou elementos que permitirão que você encontre as coordenadas. Por exemplo, represente o triângulo de vértices tais...

Ee: – Sempre vai ser x , y e z ?

P2: – Não se prendam às letras, letras são só letras. Eu poderia falar que existem constantes a , b e c ou h , s e t , pois posso usar letras diferentes para representar o mesmo número.

Ee: – Por exemplo, se o senhor der uma coordenada eu tenho que saber, ...

P2: – Por tradição, os matemáticos convencionaram que este é o eixo x , eu não vou indicar por letras não. Ou seja, este aqui eu coloco a primeira coordenada ao longo desta reta, a segunda coordenada e ao longo desta e a terceira coordenada ao longo desta outra reta. É um padrão aceito nos livros, mas poderia mudar tudo, ok? Mas este é o padrão.

O professor continua explicando:

P2: – Notação, ou seja, como vou denotar, simbolizar ou representar? Observação: como passamos do que já conhecíamos para ponto? Olhem só: $\vec{OP} = (x, y, z) \Leftrightarrow P = (x, y, z)$ – transição de coordenadas de vetor para coordenadas de ponto.

P2: – Um exemplo, para fugirmos um pouco da teoria, imaginem que solicitasse que representem geometricamente o ponto $P = (2, 5, 3)$ e o vetor $\vec{v} = (2, 5, 3)$. Como vocês fariam? Estamos tentando entender, pelo menos visualmente, como isso parece a mesma coisa, mas é ligeiramente diferente. São distintos, porém, a construção começa da mesma forma.

Eh: – Vai ser o mesmo procedimento do outro.

P2: – Sim, a mesma ideia, na verdade, o que é o ponto de parada. Uma marca o ponto e outro a representação do vetor com origem em O e extremidade em P .

O tempo designado à resolução da questão sugerida pelo professor é de, aproximadamente, 2 minutos.

P2: – Quem me ajuda aqui? Vamos começar pelo ponto. O início da resolução é a mesma. Precisamos de três retas, ok? E aí eu faço o que?

Eh: – Marca os pontos.

P2: – Na verdade, eu marco as coordenadas. Vamos lá: 2 aqui, como eu disse é uma conversão, 5 aqui.

Ec: – E 3 do outro lado.

Ed: – E os vetores unitários?

P2: – Você falou sobre os três vetores unitários, \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} ? Não precisa frisar os vetores unitários em todos os desenhos, pois eles estão tacitamente definidos. Sempre que você define como uma unidade, implicitamente estes já serão os vetores unitários em cada eixo, ou seja, já estão aí.

Ed: – Ah, entendi.

A dependência que o aluno normalmente tem do professor se apresenta de forma reduzida, se comparada com a aula observada anteriormente, pois o docente delega inúmeras questões aos estudantes, em diversos trechos do seu discurso. Neste contexto, é possível pensarmos, como destacaram Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 82), “que o contrato didático evolua na direção de transferir para o aluno uma parte da responsabilidade matemática atribuída exclusivamente ao professor.”

Outro aspecto que merece realce e que se torna recorrente no processo de comunicação detectado nesta sessão de estudo, é a proximidade ostensiva na representação de ponto e de vetor, assim como a praxeologia didática empregada (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001), que se conecta à dupla função do verbo fazer, no sentido de produzir e na acepção de agir. De acordo com os autores ora citados, para agir será necessário recorrer a uma praxeologia matemática e, para produzir, será necessária uma praxeologia didática. No caso da aula transcrita, o registro ostensivo do desenho sustenta esta praxeologia didática em conjunto com as explicações do docente.

Fundamentamos também nossa concepção em juízo com a declaração de Casabò (2001), ao abordar a valência instrumental e sensibilidades das atividades com os ostensivos, pontuando que:

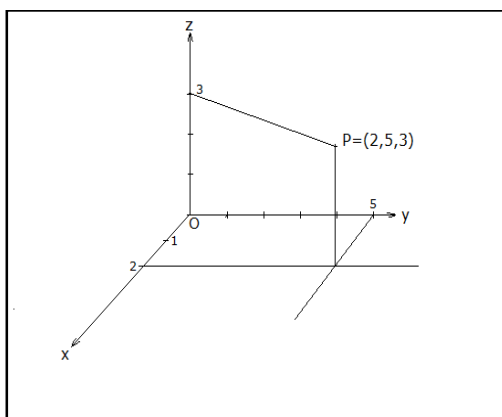
A Teoria Antropológica atribui aos objetos ostensivos, ao lado de sua valência semiótica, uma valência instrumental vinculada à capacidade dos sistemas ostensivos de serem integrados em manipulações técnicas, tecnológicas e teóricas. A partir do momento em que os objetos ostensivos são considerados constitutivos das organizações matemáticas e os ingredientes primários das tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, eles são apresentados, antes de tudo, como ferramentas da atividade matemática, ferramentas materiais sem as quais a atividade poderia ser feita (CASABÒ, 2001, p. 22, tradução nossa).¹²⁵

¹²⁵ “La Teoría Antropológica atribuye a los objetos ostensivos, al lado de su valencia semiótica, una valencia instrumental ligada a la capacidad de los sistemas de ostensivos para integrarse en manipulaciones técnicas, tecnológicas y teóricas. Desde el momento en que se consideran los objetos ostensivos como constitutivos de las organizaciones matemáticas y los ingredientes primarios de las tareas, técnicas, tecnologías y teorías, se presentan,

O sistema de coordenadas esboçado pelo professor serve como suporte ostensivo, ou seja, um ingrediente primário que subsidiará tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Nesse universo, focaremos na continuação da transcrição da aula, observando o referido elemento gráfico, em termos de adequação e efetividade nas realizações das atividades.

P2: – Feito isto, é só tomar cuidado na hora de juntar tudo isso, para não errar. E agora? O que devo fazer para associar tudo? Localizar o ponto $P = (2, 5, 3)$. Então, traço segmentos de retas paralelos a cada eixo e assim marcamos o ponto P .

Figura 39 - Representação geométrica da localização do ponto P



Fonte: acervo da autora com base na representação construída por P2 (2016)

P2: – E o vetor de coordenadas $(2, 5, 3)$?

Ed: – Vai sair da origem até o ponto P.

P2: – Isso mesmo.

P2: – Agora vamos nomear estes elementos, são extremamente parecidos com os entes do plano, porém temos um eixo a mais.

O professor escreve no quadro o seguinte subtítulo: “Eixos e Planos Coordenados”.

P2: – Olhem só, é o mesmo desenho que já tínhamos trabalhado, temos os vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, não vou defini-los novamente. São três vetores, o que mesmo?

Estudantes: – Unitários (em coro).

P2: – E o que mais?

Estudantes: – Ortogonais.

P2: – Ortogonais dois a dois.

Ei: – Oh, professor. No quadro o senhor fez aquela solução lá, ... meio que coincidiu que o ponto P ficou acima de y. Não é isso?

P2: – Mas ele não está acima de y não.

Ei: – Eu estou dizendo assim, visualmente..., mas vão ter caso em que ele pode estar exatamente no eixo y.

en primer lugar, como instrumentos de la actividad matemática, herramientas materiales sin las cuales no se podría realizar la actividad”.

Ed: – Mas ele está neste quadrante aqui. Não é, professor?

P2: – Na verdade é octante (oito regiões), pois não fica tudo visível, pois na verdade tem outra “parte depois da parede”.

A título de esclarecimento, como o desenho foi construído no quadro fixado na parede, o docente induz os alunos a pensarem que atrás da parede estão os outros octantes que não podem ser visualizados. Caráter este que pode adquirir potencial de obstáculo à aprendizagem.

Ed: – E se fosse um cubo?

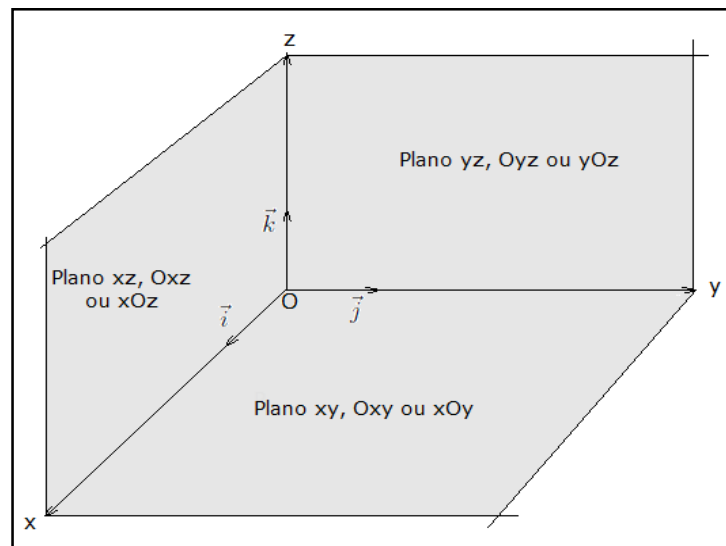
P2: – Não poderia ser um cubo, pois teríamos lados com comprimentos: 2, 3 e 5, seria um paralelepípedo e este ponto corresponderia um dos vértices.

Ed: – É mesmo, rapaz, rapaz, ...

P2: – Me ajudem aqui, como já dito anteriormente, vamos chamar estes eixos x , y e z . E a novidade está aqui neste no eixo z , o resto é igual ao plano. Os eixos recebem também outros nomes. Quais são: eixo x , eixo Ox ou eixo das abcissas, mudou alguma coisa com relação ao plano? Não. O outro eixo: y , Oy ou eixo das ordenadas. Agora a novidade: eixo z , Oz ou eixo das cotas. Então, quando questões solicitarem ou fornecer pontos que pertencem aos eixos: das abcissas, ordenadas ou cotas, vocês saberão identificar a que eixo pertence.

P2: – No plano, só fazíamos referência aos eixos, mas no espaço podemos falar dos planos coordenados. O que seria isso? Se vocês pensarem separadamente dois a dois, a junção deste eixo com este eixo já é um plano, correto?

Figura 40 - Representação dos planos coordenados



Fonte: acervo da autora com base na representação construída por P2 (2016).

P2: – Então, além dos eixos coordenados, que são retas, temos três planos. Lembre-se que sempre que falar de coordenadas de pontos ou coordenadas cartesianas tem que ter a origem do sistema. Então, vamos lá, temos três planos, os quais recebem as seguintes denominações: xy , Oxy , xOy / yz , Oyz , yOz / xz , Oxz , xOz .

Os alunos acompanham a explicação do professor interagindo sobre as combinações de letras para especificar cada um dos planos coordenados.

P2: – Bom, e daí? [...], então, vamos lá. O que mais? Então, olhem só, gente! Muitas vezes topamos com algumas questões do tipo: encontrar um ponto do eixo das abscissas, ordenadas ou das cotas que equidista de determinado ponto. Em caso como estes, que caminho devemos seguir? [...]

P2: – Bom, é o seguinte: vocês conseguiriam me dizer como são as coordenadas de pontos que estão sobre estes eixos? Ou dos planos que aparecem aqui? Por exemplo, um ponto P para pertencer ao eixo X ? Quais característica terá esse ponto?

Ea: – $(x, y, 0)$.

P2: – Como deve ser a “cara” desse ponto?

Ec: – $(x, 0, 0)$

P2: – Quem concorda? Será que é isso mesmo?

Ea: – É um ponto só do eixo X ?

P2: – P é um ponto do eixo X .

P2: – Significa que $P \in OX \Leftrightarrow P = (x, 0, 0)$, vetor \overrightarrow{OP} é paralelo ao eixo X e consequentemente paralelo ao vetor \vec{i} , correto? Minha pergunta é: quando dois vetores são paralelos? Que cálculos devem ser feitos para verificar se dois vetores são paralelos? No caso de $\overrightarrow{OP} // \vec{i}$, $\overrightarrow{OP} = \alpha \vec{i} = \alpha \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$. Imaginem que só caminhei na direção do eixo X de forma análoga temos para os eixos Y e Z , ou seja, $P \in OY \Leftrightarrow P = (0, y, 0)$ e $P \in OZ \Leftrightarrow P = (0, 0, z)$.

P2: – O mesmo raciocínio que utilizei para os eixos vou utilizá-lo para os planos. Quando olhamos para o plano XY , de que forma são suas coordenadas?

Ed: – $(x, y, 0)$.

Ei: – Ele não tem altura.

P2: – Eu vou ter alguma coisa em x , alguma coisa em y e nada em z . Conclusão, de que forma são suas coordenadas: $P \in OXY \Leftrightarrow P = (x, y, 0)$ de forma análoga $P \in OYZ \Leftrightarrow P = (0, y, z)$ e $P \in OXZ \Leftrightarrow P = (x, 0, z)$. Pessoal, muito cuidado, para não decorar sem entender o sentido geométrico, tentem sempre ligar a informação algébrica com a ideia geométrica.

A aula prossegue:

P2: – Me digam onde se localiza o ponto de coordenadas $(y, 0, x)$?

Ef: – Porque, quem é a primeira coordenada? y . E a terceira coordenada? z . Então, ele só trocou as letras.

Ed: – É assim que o senhor faz na prova? Para pensarmos que o y é o x e que o zero é o y .

P2: – O mais importante não é o x ou y neste ponto, o mais importante é que a segunda coordenada é nula. E aí? Segunda coordenada nula significa que o ponto pertence ao plano XZ ou XOZ , ok?

Ei: – Eu iria colocar que $P \in OXY$, de verdade... Nunca colocaria que $P \in OXZ$.

Ed: – Você e a torcida do Brasil.

P2: – Guardem isso, pessoal, muito mais importante que as letras que estou usando é a propriedade: “segunda coordenada nula, significa que plano? OXZ .”.

Ed: – Não faz isso na prova não, pelo amor de Deus!

P2: – Vocês criam amor pelas letras...

Neste trecho do discurso emerge mais um fator de aparente obstáculo à aprendizagem (BROUSSEAU, 1976). Na visão dos alunos, o x sempre deve corresponder à primeira coordenada, y à segunda coordenada e z à terceira. Conforme pontuam Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 266), “[...], sempre haverá alunos que se manterão na questão de início. [...] que terão dificuldades de se desprenderem da primeira técnica”.

Inferimos que a concepção logo ressaltada advém da convenção adotada em livros textos de matemática, que sempre vinculam os eixos coordenados às letras x , y e z , revelando um *status* estanque destas letras. Aspecto este, indicado na fala de P2, ao frisar que os discentes deveriam dirigir o olhar para a posição em que a coordenada nula se encontra na terna ordenada.

P2: – Opa! Vamos ver um exemplo aqui: determine os pontos P sobre o eixo das ordenadas que equidista dos pontos $A = (1, -2, 3)$ e $B = (2, 1, 0)$.

Ed: – Tenho que comprar outro caderno...

Ei: – Eu também. O professor escreve muito...

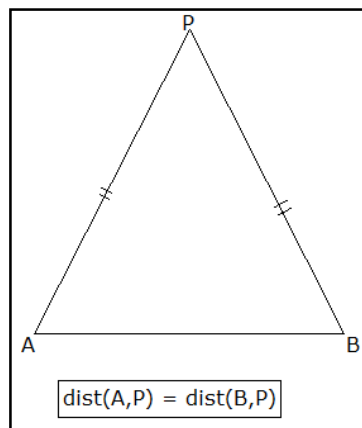
P2: – Como é que faço isso? Como resolvo o exemplo? Vamos lá, pessoal...

Eb: – Oh, professor. Não sei se é alguma falha da minha memória..., mas eu não sei o que significa equidista.

P2: – Uma mesma distância, uma igual distância, pontos que estão a uma mesma distância de A e B . É mais ou menos isso aqui.

Então, o professor expõe no quadro um esquema geométrico do exemplo.

Figura 41 - Distância entre pontos



Fonte: acervo da autora com base na representação construída por P2 (2016)

P2: – Me ajudem aqui, a conta que eu quero resolver é essa: $d(A, P) = d(B, P)$. E aí? O que tenho que fazer? Como faço para especificar que o ponto P está nos eixos das ordenadas? Quando eu digo que P pertence ao eixo das ordenadas significa o quê?

Ei: – x e z são zeros.

Ed: – Para quê? Só para confundir a mente da gente.

P2: – Tenho que usar essa informação: $P \in OY \Rightarrow P = (0, c, 0)$, para que vocês não fiquem presos às letras... Eu sei que a primeira coordenada é nula, a segunda é a letra que vocês gostarem mais e a outra?

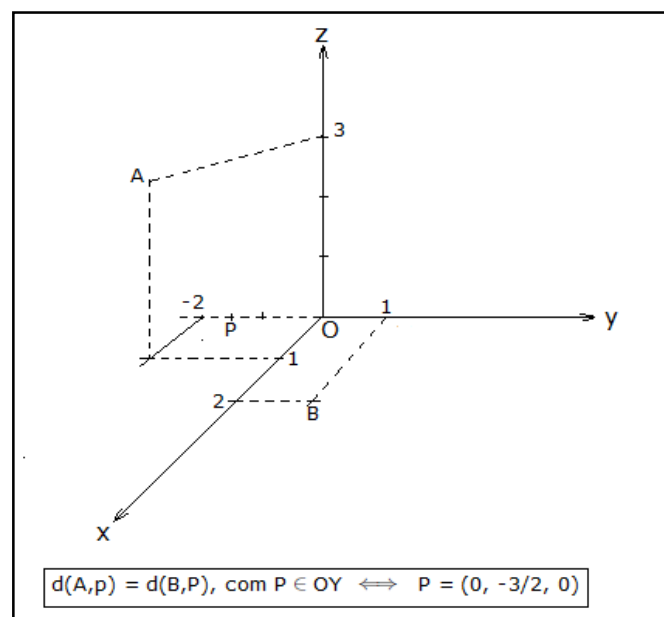
Estudantes: – Zero (em coro).

P2: – E agora, como é que obtenho a distância?

Eg: – O senhor mostra a forma geométrica e depois faz os cálculos, acho que fica mais fácil.

O docente segue a ideia de Eg; porém, ao finalizar a representação dos pontos A e B no quadro, o referido aluno concluiu: – Piorou!

Figura 42 - Representação dos pontos A e B no espaço R^3



Fonte: acervo da autora com base na representação construída por P2 (2016).

Retornemos ao fato discutido anteriormente que limita a visualização de elementos que pertencem ao espaço tridimensional e são desenhados usando o ambiente bidimensional. Mesmo recorrendo às perspectivas e projeções mongeanas, perde-se em termos de visualização, pois se agrava o primeiro requisito, considerando que o estudante tem como elementos interpretativos a compreensão da questão.

P2: – Distância de A até P, como posso utilizar os vetores para calcular? Temos o comprimento do vetor \overrightarrow{AP} , correto?

Estudantes: – Sim (em coro).

P2: – Eu conheço o ponto A e tenho características do ponto P, ok? Pois P é zero, qualquer coisa é zero, a partir daí vocês sabem me dizer, quais são as coordenadas de \overrightarrow{AP} ?

Ed: – Eu acho que é a distância da origem até P mais a distância da origem até A, algo assim... Não é a soma deles dois? É como se estivesse somando vetores?

P2: – Por que você pensou na origem?

Ed: – Ah, não sei explicar...

Ef: – Ela estudou antes, professor.

Ed: – Não, eu não estudei não.

P2: – Pensar na origem é um bom caminho. Lembrem do que comentamos mais cedo? O ponto P tem coordenadas $(x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$. Em resumo, eu não sei quais são as coordenadas do vetor \overrightarrow{AP} , mas se é possível incluir a origem na conta é mais simples de resolver. Por exemplo, quais são as coordenadas do vetor \overrightarrow{OA} ? O ponto $A = (1, -2, 3) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (1, -2, 3)$

Ed: – $(1, -2, 3)$?

P2: – Isso. Se o ponto B tem coordenadas $(2, 1, 0)$, quais são as coordenadas do vetor \overrightarrow{OB} ?

Estudantes: – $(2, 1, 0)$ em coro.

P2: – Bom, não sei se alguém está se perguntando, por que a origem entrou nesse caminho?

Pelo seguinte: eu não conheço as coordenadas desse vetor, mas sei as coordenadas de \overrightarrow{OA} separadamente e sei do vetor \overrightarrow{OP} separadamente. Então, se eu fizer uma ponte passando pela origem, conseguirei fazer minha conta, pois só falta concluir quem é \overrightarrow{AP} . Portanto $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}$.

Ed: – Mas como é que eu vou concluir isso aí?

P2: – Portanto quem é o vetor \overrightarrow{AP} ? Lembrem que estou passando pela origem e que o vetor que me interessa é?

Ec: – \overrightarrow{AP} .

P2: – Por que passar pela origem? Temos essa relação: o ponto final e o vetor possuem as mesmas coordenadas. Então, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}$ (passando pela origem), porém muito cuidado, pois temos \overrightarrow{AO} , mas acima temos \overrightarrow{OA} . Então, temos:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} \\ &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} \\ &= (-1, 2, -3) + (0, y, 0) \\ &= (-1, 2 + y, -3) \\ \overrightarrow{AP} &= P - A\end{aligned}$$

Eg: – Mas por que o senhor mudou o sentido de \overrightarrow{AO} ?

P2: – Por que mudei o sentido?

P2: – Eu só conheço a coordenada do vetor quando: o ponto de origem, portanto $(0, 0, 0)$ do vetor é o ponto de origem do sistema de coordenadas e o ponto final é P, por exemplo. Mas havia uma inversão, o ponto final era a origem. Entendeu?

Eg: – Sim.

P2: – No final, qual conta eu fiz de fato? No fundo foi $\overrightarrow{AP} = P - A$ (na prática). Terminamos? Não, estamos começando a questão..., portanto, qual a distância de A até P? Lembrando que estou procurando o comprimento deste vetor (\overrightarrow{AP}) para, em seguida, calcular essa distância e igualar os dois. Como calculamos comprimento de vetor, quando conhecemos suas coordenadas?

Professor e estudantes: – $d(A, P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{1 + 4 + 4y + y^2 + 9} = \sqrt{y^2 + 4y + 14}$.

Eg: – Sim, mas veio de onde essa raiz quadrada?

P2: – Vimos na aula passada o seguinte: se considerarmos $\vec{u} = (x, y, z)$ o comprimento dele é $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (teorema de Pitágoras). Se fosse no plano, só com duas coordenadas, é como se tivéssemos um triângulo retângulo, um cateto medindo x e outro cateto medindo y . No espaço eu faço o acréscimo da 3ª coordenada.

P2: – Pessoal, vamos tentar fazer esse mais rápido? $d(B, P) = |\overrightarrow{BP}| = |P - B| = |(-2, y - 1, 0)| = \sqrt{4 + y^2 - 2y + 1} = \sqrt{y^2 - 2y + 5} \therefore d(A, P) = d(B, P) \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 4y + 14} = \sqrt{y^2 - 2y + 5} \Leftrightarrow y^2 + 4y + 14 = y^2 - 2y + 5 \Leftrightarrow 4y + 14 = -2y + 5 \Leftrightarrow 6y + 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{-3}{2}$. Portanto, $P = (0, \frac{-3}{2}, 0)$.

P2: – Vou colocar uma dessa na prova...

Podemos inferir que trata-se de uma estratégia, utilizada por P2 para obter a atenção da turma e o diálogo prossegue.

Eg: – É?

P2: – De vez em quando cai..., outras vezes não...

Eg: – Vou refazer...

P2: – Seria um ponto por aqui, mais ou menos, correto?

Referindo-se ao gráfico feito anteriormente (Figura 42), acentua:

Eh: – Correto.

P2: – Vamos lá!

Estudantes: – Não.

P2: – Não! Por quê?

Eh: – Porque temos que copiar.

Enquanto copiam as anotações do quadro, os alunos também conversam entre si.

P2: – Pessoal, vamos lá. Pessoal, vamos lá...

O professor repete, várias vezes, a expressão “vamos lá”, no intuito de romper com diversas conversas paralelas.

P2: – Deixa eu formalizar o que já comentamos algumas vezes. Então, suponha que vocês conheçam os pontos A e B , então temos a seguinte propriedade: sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ pontos do espaço. Quais são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ ou a forma mais simples de guardar? $\overrightarrow{AB} = B - A$. Porém alguém mais atento, pode questionar o seguinte: essa igualdade não está fazendo muito sentido. Sabem por quê? De um lado eu tenho vetor e do outro lado da igualdade eu tenho pontos. Se eu fosse bem formal, falaria: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, ou seja, as coordenadas do vetor \overrightarrow{AB} são as coordenadas do vetor \overrightarrow{OB} menos as coordenadas do vetor \overrightarrow{OA} , onde O é a origem do sistema de coordenadas que coincide com $\overrightarrow{AB} = B - A$, não é melhor?

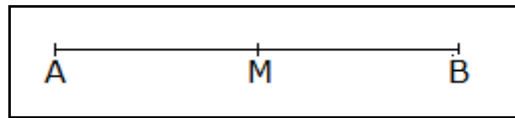
Eg: – Bem melhor!

P2: – Lembre-se que formalmente devemos incluir a origem.

P2: – Bem, quais são as coordenadas do ponto médio do segmento \overline{AB} ? Forneço as coordenadas do ponto A e as coordenadas do ponto B e desejo encontrar as coordenadas do ponto médio. Alguém tem alguma sugestão?

O docente registra no quadro o seguinte:

Figura 43 - Representação do ponto médio



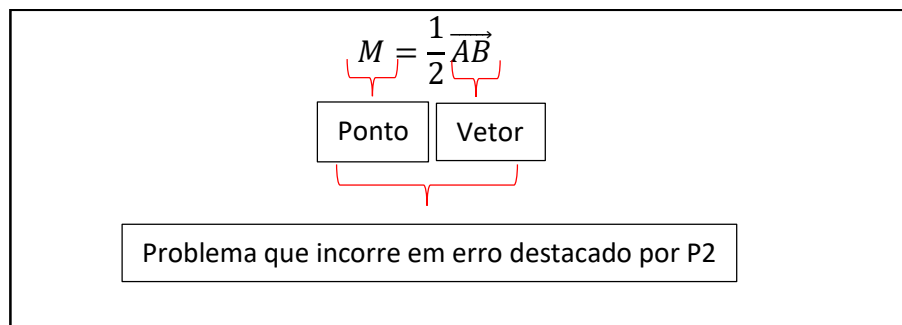
Fonte: acervo da autora com base na representação construída por P2 (2016).

Ed: – No meio seria a metade.

Eh: – É metade!

P2: – Eu não vou resolver, quero que vocês encontrem. Na lista de exercícios, falamos algo neste sentido, existe uma intenção por trás da lista, coisas que venho observando ao longo dos semestres. Tenho percebido que muitos estudantes escrevem a seguinte igualdade: $M = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Mas como transformar a questão de procurar o ponto médio em uma equação vetorial? Pois temos um problema sério aqui:

Figura 44 - Erro recorrente observado pelo professor no cálculo do ponto médio



Fonte: acervo da autora com base na representação construída por P2 (2016).

P2: – Escrevam algo parecido, porém igualando vetor com vetor.

Ef: – $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

P2: – Aí sim! Estamos comparando vetor com vetor.

Eh: – Professor, eu posso falar que $\overline{AB} = 2\overline{AM}$ ou $\overline{AB} = 2\overline{MB}$?

P2: – Pode sim. Que resulta no mesmo. O que não pode é coisa do tipo: $\overline{AM} = \overline{BM}$, vocês sabem por quê? Porque estou comparando vetores com sentidos opostos.

Eg: – Mas se eu igualasse o módulo de \overline{AM} com o módulo de \overline{BM} ?

P2: – Muito cuidado! Qualquer propriedade que envolva vetores, vocês têm que fornecer algo que determine, de modo único, aquela propriedade. Se você diz que as distâncias são iguais, você estará seguindo um raciocínio parcialmente correto. Pois eu posso criar outros pontos aqui em cima, por exemplo, que satisfaça esta condição e não será o ponto médio.

Eg: – Ah!

P2: – Se consideramos que a distância é a mesma e são paralelos, ou melhor, têm o mesmo sentido, teremos duas condições: – eles têm o mesmo comprimento e é metade do comprimento, ok? Porém o nosso problema é: se são equivalentes é ponto médio e, conseqüentemente, é equidistante, mas se é equidistante não quer dizer que é ponto médio.

Ec: – Faz referência ao se e somente se?

P2: – Sim, a matemática é bonita demais! Agora podemos resolver:

Figura 45 - Cálculo para determinar o ponto médio M

Perde-se o formalismo matemático.

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$M - A = \frac{1}{2}(B - A)$$

$$M = \frac{1}{2}(B - A) + A$$

$$M = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A + A$$

$$M = \frac{A + B}{2}$$

Fonte: acervo da autora com base na representação construída por P2 (2016).

Esclarecemos que, em termos do formalismo matemático, o cálculo correto seria:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})}{2}$$

Em que O é a origem do sistema de coordenadas cartesianas escolhido, porém a correspondência biunívoca entre pontos e vetores no espaço possibilita desenvolver o cálculo de maneira mais informal. Foi a partir desse viés que P2 trabalhou a igualdade entre pontos e vetores em uma vertente informal, a qual é, recorrentemente, utilizada nas resoluções de questões que envolvem igualdades entre vetores. Nas palavras de Brousseau (1976, p. 112, grifos nossos, tradução nossa),¹²⁶ pode constituir “obstáculos de origem didática, que parecem depender apenas de uma escolha ou de um projeto do sistema educativo”. Para Almouloud (2007),

[...] nascem da escolha de estratégias de ensino que permitem a construção, no momento da aprendizagem, de conhecimentos cujo domínio de validade é questionável ou incompleto que, mais tarde, revelar-se-ão como obstáculos ao desenvolvimento da conceitualização. (ALMOULOU, 2007, p.141)

¹²⁶ “obstacles d’origine didactique, qui semblent ne dépendre que du choix ou de la conception du système éducatif”.

Ante essas constatações, compactuamos com Brousseau (1976) ao admitir que as concepções podem constituir em empecilhos para aquisições futuras. Este caráter se confirma nas análises de algumas questões de avaliações da referida componente curricular, EXA 180, e que serão apresentadas em um dos capítulos posteriores desta pesquisa.

P2: – Para finalizar, qual é a distância entre A e B? Quem já viu geometria no plano sabe que é muito semelhante com distância entre pontos no plano. Muda o quê?

$$d(A, B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Eh: – Acrescenta uma coordenada.

P2: – Acrescentou uma parcela da soma.

P2: – Está bom por hoje ou vocês querem ver mais alguma coisa?

Ec: – Não, já são 12:00 horas! O senhor não está com fome? Quer dar aula até uma hora?

P2: – Então, está certo. Na próxima aula, faremos exercícios e na aula da próxima semana, revisão.

Diante da descrição do cenário da aula por intermédio dos diálogos e comportamentos dos protagonistas deste cenário didático e matemático, emergiram praxeologias variadas, como salientam Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 252): “[...] um sistema de praxeologia ou um conjunto estruturado de praxeologias”. Estas revelam que o trabalho que o professor realizou com seus alunos consistiu em reorganizar, por meio de técnicas, tarefas, tecnologias e teorias, uma organização vetorial.

3.1.4 Momentos de estudos agregados à trama praxeológica da aula 2

De igual modo recorreremos à trama praxeológica (FARIAS; PIRES, 2011) para deixar mais evidente os momentos de estudo (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001), enquanto síntese das praxeologias Didáticas e Matemáticas identificadas nos episódios que compuseram a aula 2.

Tabela 5 - Síntese da aula 2. (continua)

Trechos da aula/Momentos	Síntese das praxeologias Didáticas e Matemáticas identificadas na aula		
Ordem cronológica	Sistema de tarefas do professor (OD)/temas	Cenas/procedimentos	OM - [Γ / τ / θ / Θ]
1º Tentativa de adentrar no momento do trabalho da técnica		Relembrar o trabalho abordado na aula anterior com as coordenadas de vetores.	

(CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 262)	Intenção didática	[...] Partindo da forma algébrica para a forma geométrica e por consequência visualizar geometricamente o vetor no espaço.	Imbricam-se algébrico e geométrico
2º	Técnica didática (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 254) relativa ao estudo desenvolvido na aula anterior	[...] O assunto da aula de hoje vai ser coordenadas cartesianas no espaço.	
3º	Técnica didática: retomada do estudo desenvolvido na aula anterior	[...] pegamos três vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ unitários e ortogonais dois a dois.	A técnica τ , justificada tecnologicamente θ pela conceitualização de base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ em \mathbb{R}^3
4º	Retomada do estudo desenvolvido na aula antecedente	[...] Esse vetor $x\vec{i}$. (x vezes \vec{i}), represento onde aqui no desenho?	A técnica τ utilizada consiste em representar $x\vec{i}$ no quadro
5º	Retomada do estudo desenvolvido na aula anterior	[...] $x\vec{i}$, algum vetor paralelo a \vec{i} e $y\vec{j}$ algum vetor paralelo a \vec{j} . Então vamos somar [...]. A soma $x\vec{i} + y\vec{j}$ é essa diagonal [...]. Então a partir desse ponto eu posso somar o terceiro vetor $z\vec{k}$, assim obteríamos $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	Combinação linear de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ em \mathbb{R}^3
6º	Retomada do estudo desenvolvido na aula precedente	[...] escrever $\vec{v} = (x, y, z)$. O primeiro coeficiente é a que corresponde a a coordenada de \vec{i} , o coeficiente de \vec{j} é a segunda coordenada e a do \vec{k} a terceira coordenada.	Especificação das componentes ou coordenada de \vec{v}
7º	Início de uma nova sessão de trabalho	[...] a aula de hoje “coordenadas cartesianas”.	
8º Momento exploratório		[...] Como vocês fariam para representar o ponto de coordenadas (x, y, z)? Não mais um vetor, só um ponto agora.	
9º Momento de trabalho da técnica no \mathbb{R}^2 para ampliação para o \mathbb{R}^3	Representação Geométrica	P2: – Se fosse usar duas coordenadas $P = (x, y)$? Lá no plano XY, como tradicionalmente se faz? Pega o eixo X, pega o eixo Y. Não é isso? Pega o ponto aqui e faça o que? Projeto paralelo a X e paralelo a Y e vejam quanto medem.	Técnica empregada na projeção ortogonal do ponto P sobre os eixos X e Y.
10º Momento do primeiro encontro	Representação Geométrica	P2: – Neste mesmo desenho represente o vetor \vec{v} de coordenadas (x, y). [...] O ponto de coordenadas (x, y) e o vetor \vec{v} de coordenadas (x, y). Qual a diferença de uma representação para outra?	A cada vetor se associa um par (x, y), ou seja, estabelece-se uma correspondência biunívoca entre os vetores do plano e os pares ordenados (x, y) de números reais.
11º	Representação Geométrica	[...] quando você fala de vetor você pode fazer o desenho em qualquer lugar do espaço. Só tem que mantém o que? Estudantes: – Direção, sentido. P2: – E o comprimento também. P2: – Quando você fala ponto ele está fixado em um certo lugar.	
12º Momento tecnológico-teórico	Representação Geométrica	[...] Tenho um ponto, três vetores unitários, ângulos de 90°.	Fundamenta-se tecnologicamente por uma base $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ no espaço é chamada ortonormal se os seus vetores forem ortogonais entre si e unitários, isto é,

			se $ \vec{i} = \vec{j} = \vec{k} = 1$ e $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k} \perp \vec{i}$.
13º	Representação Geométrica	P2: – [...], eu quero usar essa estrutura que está aqui, ou seja, esses quatro itens (ponto e mais três vetores), para posicionar pontos no espaço. Vamos utilizar a teoria de vetores para atribuir coordenadas a pontos. O que significa que eu vou utilizar a teoria de vetores para trabalhar com coordenadas de pontos.	Vetores e pontos encontram-se imbricados no âmbito tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$
14º	Abordagem Algébrica	P2: – [...] dado qualquer ponto P no espaço, podemos encontrar x, y, z reais, tais que o vetor $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, [...] sintetiza a aula passada.	
15º Momento tecnológico-teórico	Abordagem Algébrica	P2: – [...] como passamos do que já conhecemos para ponto? Olhem só: $\vec{OP} = (x, y, z) \Leftrightarrow P = (x, y, z)$ – transição de coordenadas de vetor para coordenadas de ponto.	Discurso fundamentado nas concepções de pontos e vetores
16º Momento do trabalho da técnica imbricado a um momento exploratório	Representação Geométrica	P2: – Um exemplo, para fugirmos um pouco da teoria, imaginem que solicitasse representem geometricamente o ponto $P = (2, 5, 3)$ e o vetor $\vec{v} = (2, 5, 3)$. Como vocês fariam?	Precisamos de três retas. Eh: – Marca os pontos. P2: – Na verdade, eu marco as coordenadas. [...] localizar o ponto $P = (2, 5, 3)$. Então, traço segmentos de retas paralelos a cada eixo e assim marcamos o ponto P. (traços da técnica empregada e identificada pelos verbos e seus complementos)
17º Momento do primeiro encontro	Representação Geométrica	[...] “Eixos e Planos Coordenados”. [...] além dos eixos coordenados, que são retas, temos três planos. Lembre-se que sempre que falar de coordenadas de pontos ou coordenadas cartesianas tem que ter a origem do sistema. Então vamos lá, temos três planos, os quais recebem as seguintes denominações: xy, Oxy, xOy / yz, Oyz, yOz / xz, Oxz, xOz.	Cada dupla de eixos determina um plano coordenado.
18º Momento do trabalho da técnica	Tarefa	P2: – [...] encontrar um ponto do eixo das abscissas, ordenadas ou das cotas que equidista de determinado ponto. Em caso como estes, que caminho devemos seguir? [...] vocês conseguiriam me dizer como são as coordenadas de pontos que estão sobre estes eixos? Ou dos planos que aparecem aqui? Por exemplo, um ponto P para pertencer ao eixo X? Quais características terá esse ponto?	Discurso tecnológico-teórico: P2: – Significa que $P \in OX \Leftrightarrow P = (x, 0, 0)$, vetor \vec{OP} é paralelo ao eixo X e consequentemente paralelo ao vetor \vec{i} , correto? Minha pergunta é: quando dois vetores são paralelos? Que cálculos devem ser feitos para verificar se dois vetores

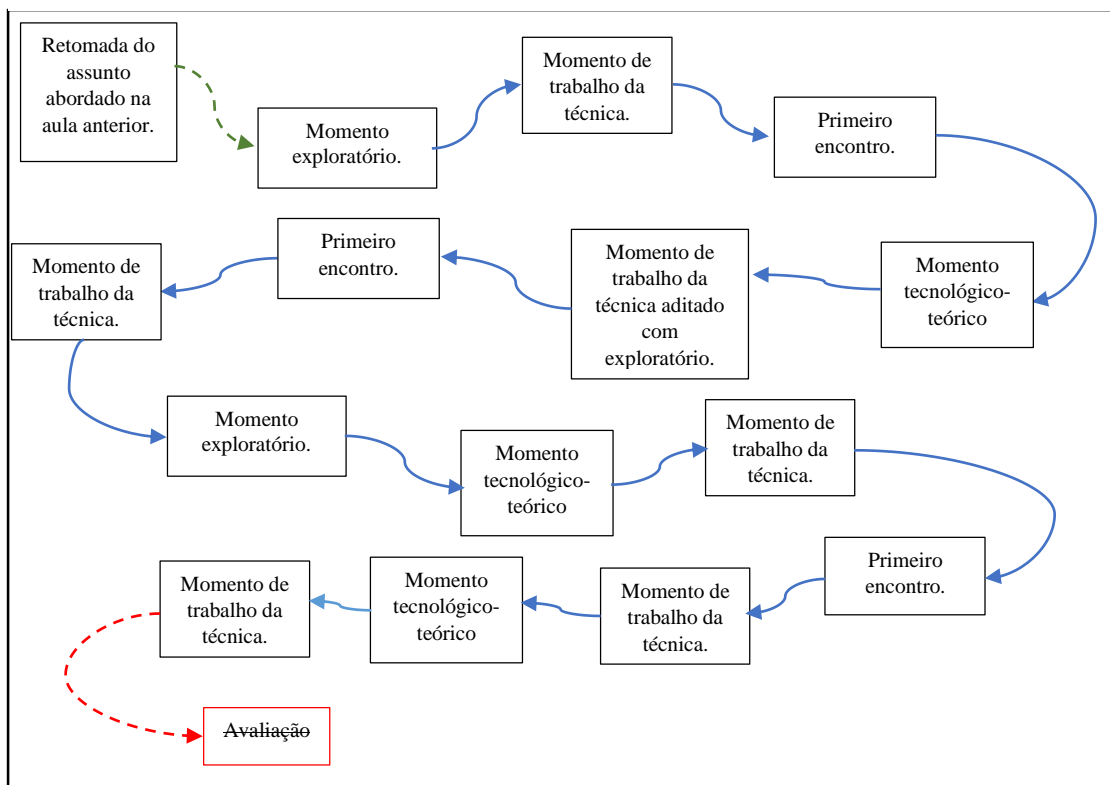
			<i>são paralelos? No caso de $\vec{OP} // \vec{i}$, $\vec{OP} = \alpha \vec{i} = \alpha \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$. Imaginem que só caminhei na direção do eixo X de forma análoga temos para os eixos Y e Z, ou seja, $P \in OY \Leftrightarrow P = (0, y, 0)$ e $P \in OZ \Leftrightarrow P = (0, 0, z)$.</i>
19º Momento do trabalho da técnica	Tarefa	<i>P2: – Me digam onde se localiza o ponto de coordenadas (y, 0, x)?</i>	<i>P2: – O mais importante não é o x ou y neste ponto, o mais importante é que a segunda coordenada é nula. E aí? Segunda coordenada nula significa que o ponto pertence ao plano XZ ou XOZ</i>
20º Momento exploratório	Tarefa	<i>Ei: – Eu iria colocar que $P \in OXY$, de verdade... Nunca colocaria que $P \in OXZ$. Ed: – Você e a torcida do Brasil. P2: – Guardem isso, pessoal, muito mais importante que as letras que estou usando é a propriedade: “segunda coordenada nula, significa que plano? OXZ.”</i>	Como pontuaram Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 266) “[...], mas sempre haverá alunos que se manterão na questão de início. [...] que terão dificuldades de se desprenderem da primeira técnica”
21º Momento tecnológico-teórico	Tarefa	<i>P2: – [...] muito mais importante que as letras que estou usando é a propriedade: “segunda coordenada nula, significa que plano? OXZ”.</i>	
22º Momento de trabalho da técnica	Tarefa	<i>P2: – [...] determine os pontos P sobre o eixo das ordenadas que equidista dos pontos $A = (1, -2, 3)$ e $B = (2, 1, 0)$.</i>	Fundamentação tecnológica da distância entre dois pontos
23º Momento do primeiro encontro	Representação Geométrica	<i>Eb: – [...], mas eu não sei o que significa equidista. P2: – uma mesma distância, uma igual distância, pontos que estão a uma mesma distância de A e B.</i>	$d(A, B) = d(B, P)$
24º Momento de trabalho da técnica	Abordagem Algébrica	<i>[...]. Quando eu digo que P pertence ao eixo das ordenadas significa o que? Ei: – x e z são zeros.</i>	$P \in OY \Rightarrow P = (0, c, 0)$
25º Momento de trabalho da técnica	Abordagem Algébrica	<i>P2: – Pensar na origem é um bom caminho. Lembra do que comentamos mais cedo? O ponto P tem coordenadas $(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{OP} = (x, y, z)$. Se não conheço as coordenadas desse vetor, mas sei as coordenadas de \vec{OA} separadamente e sei do vetor \vec{OP} separadamente. Então posso fazer uma ponte passando pela origem e concluir que: $\vec{AP} = \vec{AO} + \vec{OP}$</i>	Discurso fundamentado nas concepções de pontos e vetores, acrescida a adição entre vetores
26º Momento de trabalho da técnica	Tarefa	<i>Como calculamos comprimento de vetor, quando conhecemos suas coordenadas?</i>	$d(A, P) = \vec{AP} $ $= \sqrt{1 + 4 + 4y + y^2 + 9}$ $= \sqrt{y^2 + 4y + 14}$
27º Momento tecnológico-teórico	Tarefa	<i>Eg: – Sim, mas veio de onde essa raiz quadrada?</i>	<i>[...] se considerarmos $\vec{u} = (x, y, z)$ o comprimento dele é $\vec{u} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (teorema de Pitágoras). Se fosse no plano, só com duas coordenadas, é como se</i>

			<i>tivéssemos um triângulo retângulo, um cateto medindo x e outro cateto medindo y. No espaço eu faço o acréscimo da 3ª coordenada</i>
28º Momento tecnológico-teórico	Tarefa/técnica algébrica	$d(B,P) = \overrightarrow{BP} = P - B =$ $ (-2, y - 1, 0) =$ $\sqrt{4 + y^2 - 2y + 1} =$ $\sqrt{y^2 - 2y + 5} \therefore d(A,P) =$ $d(B,P) \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 4y + 14} =$ $\sqrt{y^2 - 2y + 5} \Leftrightarrow y^2 + 4y + 14 = y^2 - 2y + 5 \Leftrightarrow 4y + 14 = -2y + 5 \Leftrightarrow 6y + 9 = 0 \Rightarrow$ $y = \frac{-3}{2}. \text{ Portanto, } P = (0, \frac{-3}{2}, 0).$	Distância entre pontos, módulo de vetor (<i>teorema de Pitágoras</i>) e ponto pertencente ao eixo Oy
29º Momento tecnológico-teórico	Abordagem Algébrica	<p><i>P2: - Deixa eu formalizar [...]. Então suponha [...] os pontos A e B, então temos a seguinte propriedade: Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ pontos do espaço. Quais são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ ou $\overrightarrow{AB} = B - A$ [...]. Essa igualdade não está fazendo muito sentido. Sabem por quê? De um lado eu tenho vetor e do outro lado da igualdade eu tenho pontos. Se eu fosse bem formal, falaria: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$</i></p>	Vetor definido por dois pontos
30º Momento de trabalho da técnica	Tarefa	<p><i>P2: - Bem, quais são as coordenadas do ponto médio do segmento \overrightarrow{AB}? Forneço as coordenadas do ponto A e as coordenadas do ponto B e desejo encontrar as coordenadas do ponto médio. Alguém tem alguma sugestão?</i></p>	
31º Momento de trabalho da técnica	Técnica	<p><i>Ef: - $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.</i></p> <p><i>P2: - Aí sim! Estamos comparando vetor com vetor.</i></p> <p><i>Eh: - Professor, eu posso falar que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ ou $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MB}$?</i></p> $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $M - A = \frac{1}{2}(B - A)$ $M = \frac{1}{2}(B - A) + A$ $M = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A + A$ $M = \frac{A + B}{2}$	Definição de ponto médio do segmento de reta

Fonte: acervo da autora (2019).

De igual modo sintetizamos a trama praxeológica imbricada aos momentos de estudo identificados na aula observada como exposto abaixo,

Figura 46 - Esquema das observações realizadas na aula 2



Fonte: acervo da autora (2019)

O esquema descreve os momentos de estudo em conexão com uma dinâmica praxeológica que geriu o funcionamento deste SD coadunado pelos constantes diálogos entre docente e discentes evidenciados por uma participação mais ativa desses atores no âmbito de uma aula sobre os vetores. Contudo, não identificamos a etapa relacionada ao momento da avaliação.

3.1.5 Das sessões de estudo observadas e os entrelaces metodológicos

Sem perder de vista, o alvo da nossa investigação centra na caracterização das condições e restrições pautadas no que se faz, e do que não se faz, no contexto do MPD que vive no CLM-UEFS, ou seja, nos aspectos vinculados à problemática ecológica que constitui um dos fios condutores do nosso estudo. Os aspectos vinculados à ecologia dos saberes, de acordo com Chaachoua e Bittar (2016), têm a função de questionar a realidade. E, para questionar o que está posto em aulas cujo tema de estudo são os vetores, é necessário retroceder no tempo, “dar um passo atrás, questionar as evidências, erodir ideias simples, retirar-se da familiaridade

enganosa de seu objeto de estudo” (CHEVALLARD, 1982, p. 3, tradução nossa¹²⁷), permitindo que o pesquisador se desprenda de uma certa ilusão de transparência e esteja atento às dependências dos objetos de estudo.

Agrega-se a este aspecto a concepção de Chevallard (2010), destacada por García et al, (2019),

(...) Não devemos esquecer que quando nos perguntamos como são as coisas, surgem questões que só podem ser respondidas investigando o que acontece quando tentamos mudar as coisas em um determinado sentido (...). A atividade que deve ser realizada para responder às questões relativas à dimensão econômico-institucional de um problema didático está intimamente ligado ao que Chevallard (2010, no prelo [sic]) designou como a análise clínica da didática, e que engloba o que se costuma chamar de Engenharia Didática. (GARCIA et al., 2019, p. 78-79)

É relevante sobrelevar que em pesquisas pautadas na Engenharia Didática (ED), a fase de concepção suscita análises prévias que se efetuam “num quadro teórico didático geral e em conhecimentos didáticos já adquiridos no domínio estudado, mas também apoiando-se num certo número de análises preliminares” (ARTIGUE, 1996, p. 198). Em direcionamento análogo, o ponto de partida é um conteúdo ou tópico específico a ser ensinado e, geralmente, um problema didático relacionado a ele. A primeira fase, análise preliminar, inclui a análise epistemológica do conteúdo matemático, da sua necessidade de inserção numa determinada instituição escolar e das condições e restrições que podem afetar o seu estudo nessa instituição. “Esta fase é crucial, pois envolve a construção de um modelo epistemológico de referência (MER) do conhecimento em questão, bem como a identificação de hipotéticos fenômenos didáticos.” (GARCÍA et al, 2019, p.81)

As análises preliminares geralmente incluem três dimensões principais: “uma análise epistemológica do conteúdo matemático em jogo, uma análise das condições e restrições que a ED enfrentará e uma análise do que a pesquisa educacional tem a oferecer para apoiar o design.” (ARTIGUE, 2014, p. 160).

Nesse panorama, as informações colhidas nas transcrições serviram de base à concepção da ED, assim como serão retomadas e aprofundadas em diferentes fases do estudo, pois a metodologia de pesquisa da TAD normalmente se torna visível com o desenho e a execução de tarefas ou uma sequência de atividades para a sala de aula. Porém, seu escopo vai muito além de uma proposta de “inovação didática”. Aproxima-se da visão da didática da matemática como epistemologia experimental (BROUSSEAU, 2002),

cujo objetivo é explorar outras formas de organizar a atividade matemática e os processos de estudo nas instituições escolares, de forma que, potencialmente, possam

¹²⁷ (...) un outil qui permet de prendre du recul, d’interroger les évidences, d’éroder les idées simples, de se déprendre de la familiarité trompeuse de son objet d’étude, (...)

ser modificados, os efeitos manifestados na forma de fenômenos didáticos identificados pelo pesquisador. (GARCÍA et al, 2019, p.79)

Asseverada esta perspectiva, coloca-se em destaque alguns fatores que se caracterizaram como problemáticos (restritivos) nas aulas transcritas, e que direcionaram os estudantes à exposição de suas dúvidas, à incidência de erros e, por consequência, à instituição de dificuldades tanto à aprendizagem quanto ao ensino dos vetores. A exemplo, a definição dos vetores – caracterizados como segmentos orientados que possuem módulo, direção e sentido – emerge como um dos itens que obstaculizam à aprendizagem, basicamente, por qualificar os vetores como entes díspares dos habituais números, equações ou funções matemáticas. Heckler e Scaife (2015) indicam entraves com as distintas orientações das flechas, assim como Carneiro e Gravina (2012) apontam limitações com a desenvoltura para operar geometricamente com as setas.

A representação ostensiva dos vetores do espaço e suas similitudes com as representações dos pontos situados no espaço também se revelaram como um potencial impedimento à aprendizagem. Aditado a esta condição, sublinhamos a deformação sofrida pela figura tridimensional ao ser representada no plano bidimensional, perspectiva esta que reflete nas projeções de entes esboçados no \mathbb{R}^2 ou no \mathbb{R}^3 , recorrentes em aulas expositivas em que o quadro é um recurso didático fundamental.

Outro episódio que merece ênfase é protagonizado pelo seguinte trecho: “*P2: – Me digam onde se localiza o ponto de coordenadas $(y, 0, x)$?”*”. A forma padronizada e convencionalizada em livros dos pares ordenados (x, y) ou ternas ordenadas (x, y, z) desponta como mais um fator de entrave à aprendizagem.

Ao confrontar as duas sessões de estudo, notam-se características variadas, próprias do perfil dos docentes, repercutidas nas reações e participações dos discentes. Na primeira aula, transcrita percebemos o gerenciamento centralizador do professor, frente à passividade dos discentes, em contraposição à segunda aula que, mesmo imersa no cenário tradicional de ensino, foi estruturada pelo docente por intermédio de questões direcionadas aos estudantes, evidenciando assim, a ocorrência de uma dinâmica praxeológica. Ao serem constantemente indagados os alunos foram estimulados a explicar suas concepções, dúvidas e questionamentos acerca da Álgebra Vetorial.

CAPÍTULO IV

DESENHO DAS ANÁLISES PRÉVIAS POR MEIO DE UM MINICURSO: ARTICULAÇÕES ENTRE O GEOGEBRA E A ÁLGEBRA VETORIAL

Esse capítulo emerge pautado na primeira fase da Engenharia Didática-ED, ou seja, as análises preliminares, que integram a fase da concepção da sequência a qual está alicerçada em alguns aspectos: o quadro teórico, os conhecimentos didáticos já adquiridos no domínio da investigação e um certo número de análises preliminares que, segundo Artigue (1996), na maior parte dos casos são:

- a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- a análise do ensino habitual e dos seus efeitos;
- *a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;*
- a análise do campo de constrangimentos no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;
- e, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação. (ARTIGUE, 1996, p.198, grifos nossos)

Dentre os tópicos elencados pela autora é possível distinguir, em particular, o terceiro item, o qual sugere atenção para o caráter dicotômico entre as concepções e os obstáculos que marcam as trajetórias dos estudantes em torno de um saber. Nesse sentido, é relevante evidenciar que os trabalhos realizados no cerne do estudo nortearam o desenho inspirado na engenharia e serviram de pilares na concepção da investigação, assim como, de forma recorrente, retomados e aprofundados nas diferentes fases do estudo, em função das necessidades inerentes à pesquisa.

Assim, foi utilizado como estratégia, para adentrar no cenário do ensino e da aprendizagem dos vetores, o minicurso intitulado: *Articulações entre o GeoGebra e a Álgebra Vetorial*¹²⁸, o qual integrou a programação da XVIII SEMAT¹²⁹, evento direcionado a discentes e professores de matemática. No entanto, apenas estudantes se dispuseram a participar. Nestes termos, o desenho do curso se deu a partir de dois encontros presenciais, de duas horas cada. Vinte estudantes se inscreveram, porém 16 discentes do CLM-UEFS, de variados semestres,

¹²⁸ Uma síntese deste primeiro contato com os estudantes do CLM-UEFS originou o artigo intitulado: Uma proposta de articulações entre Álgebra Vetorial e GeoGebra publicado no periódico Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT v.15 n.1 (2020).

¹²⁹ Evento realizado anualmente na Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS, sob a coordenação de estudantes do Diretório Acadêmico - DA e pelo Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática – COLMAT.

participaram efetivamente. A comissão organizadora do evento informou acerca do interesse de uma quantidade maior de estudantes que desejavam participar do minicurso, contudo, por limitações relacionadas ao espaço físico, não foi possível ampliar o número de vagas. Assim, a proposta foi de estudar as representações vetoriais gerenciadas pelos domínios Numérico, Algébrico e Geométrico - NAG (FARIAS, 2010), subsidiado pelo software GeoGebra e no âmbito do Papel Lápis – PL. Pois este estudo tem como hipótese que o trabalho com diferentes Dispositivos Didáticos - DD permite construir recombinações praxeológicas (CHEVALLARD, 2018), despertando novas relações pessoais dos estudantes com os vetores.

Dessa forma, Chevallard (1982) sublinha que,

o seu funcionamento - para não falar do seu bom funcionamento - pressupõe que a “matéria” (professor, alunos, conhecimentos) que ocupará cada uma das três vagas satisfaça determinados condicionantes didáticos específicos. Para que o ensino de tal elemento do conhecimento seja possível, esse elemento deve ter sofrido certas deformações, que o tornam adequado para o ensino. Conhecimento-como-é-ensinado, conhecimento ensinado, é necessariamente diferente de conhecimento-inicialmente-designado-como-a-ser-ensinado. (CHEVALLARD, 1982, p.169)

Dito de outra forma, consiste em criar condições para que as trocas entre professores e alunos tenham por finalidade o saber. Entretanto, comungamos com Nascimento et al. (2019) ao sinalizar a existência de instabilidades nos relacionamentos de interdependências entre os agentes que integram os sistemas de ensino. Como já destacado anteriormente, o trânsito dos vetores entre diversas disciplinas e a abrangência institucional também compõe o campo de justificativa acerca da escolha por esse objeto matemático. Dessa forma, no minicurso foram abordados alguns conceitos inerentes ao tratamento vetorial, conteúdo que integra a ementa de componentes curriculares que abarcam a Geometria Analítica e a Álgebra Linear. Assim, foi considerado como pré-requisito que os participantes do curso tivessem um contato preliminar com o ente matemático referido, seja por meio de algumas das disciplinas citadas acima, seja por intermédio de outra componente que aborde o assunto.

Para cumprir esta condição a comissão organizadora do evento, só permitiu a inscrição de professores de matemática e discentes de Curso de Licenciatura em Matemática que estivessem cursando a partir do 3º semestre, já que a componente curricular Geometria Analítica e Álgebra Linear I (EXA 180)¹³⁰ integra o 2º semestre do CLM-UEFS. Dito isto, a configuração do perfil dos partícipes foi composta por estudantes do 3º ao 6º semestre.

Sob o eixo teórico da Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1996; 1998; 1999; 2001), respaldado pela Dialética Mídia Milleu (CHEVALARD, 2006), em atuação

¹³⁰ Geometria Analítica – EXA 134, ainda não tinha sido implementada, visto que as alterações curriculares ocorrem de forma gradual.

combinada com a Dialética Ostensivos e Não Ostensivos (BOSCH, CHEVALLARD, 1999, p. 10, grifos nossos), foram projetadas tarefas aptas a propiciar um milieu (meio) que possibilitasse aos participantes do curso a interação com a plataforma computacional do GeoGebra (mídia) interligado ao viés vetorial, respaldada pelos recursos ostensivos específicos do software para evocar elementos não ostensivos no âmbito vetorial.

Somou-se a essa perspectiva, a concepção Chevallardiana, a intenção didática que os estudantes assumissem um papel protagonista na aquisição da aprendizagem, provocando rupturas com a postura estática e coadjuvante imposta no modelo tradicional de ensino subsidiado pelo Paradigma de Visitas a Obras ou Visitas aos Monumentos,¹³¹ que, na acepção de Chevallard (2012), resume-se a ouvir um relato ou narrativa recitada pelo professor acerca do monumento visitado. Aspecto este evidenciado no capítulo anterior.

Bosch (2020) argumenta acerca da aparente proximidade entre o saber sábio pesquisado em instituições de ensino de nível superior e o saber ensinado neste mesmo âmbito, o que, segundo ela, constitui em “um aparente paradoxo: apesar da proximidade das pesquisas científicas já mencionadas, o trabalho exigido dos alunos dos cursos universitários de matemática muitas vezes parece muito distante da pesquisa.” (BOSCH, 2020, p.375) Vertente essa, fortalecida com a concepção de Klein (2016, p. 250), que alertou contra o estudo da matemática na universidade “baseando-se apenas no que se lê nos livros”, enquanto ignora o desenvolvimento de “concepções vívidas” e “julgamentos independentes”.

A partir do objetivo de apresentar um ambiente em que os participantes tivessem a oportunidade de questionar e não apenas visitar obras, foi disponibilizado material impresso como suporte. Esse material continha alguns conceitos e definições que foram abordados nos encontros, assim como os comandos e algumas noções preliminares relacionados à funcionalidade do software. A partir disso, os discentes dispunham de ferramentas para o enfrentamento e as confrontações das questões que posteriormente foram apresentadas. Visto que, ao propiciar ferramentas, na concepção de Chevallard (2012), centra-se em dois pilares:

O equipamento intelectual do investigador – ou mais exatamente o equipamento praxeológico do investigador, no sentido da palavra praxeologia própria da TAD, portanto, assenta em dois pilares: a capacidade de localizar recursos, on-line e off-line e o conhecimento necessário para aproveitá-los. Isso leva à questão de fazer uso de uma reunião de obras O (Chevallard, 2012, p. 9, tradução nossa¹³²).

¹³¹ No âmbito da TAD, é conhecido como paradigma das "visitas às obras" ou - segundo uma metáfora usada na TAD - "de visitar monumentos". Ver Chevallard (2012)

¹³² The inquirer's intellectual equipment – or more exactly the inquirer's praxeological equipment, in a sense of the word praxeology proper to ATD – thus rests on two pillars: the capacity to locate resources, online and offline, and the knowledge necessary to take advantage of them. This leads to the question of making good use of the works O gathered.

A partir desse olhar, apresentamos a estruturação do minicurso, subdividido em dois encontros presenciais, como descrito a seguir.


4.1 PLANEJAMENTO, ORGANIZAÇÃO E EXECUÇÃO DO MINICURSO

Com referência ao esquema estrutural e organizacional do minicurso, foi planejada uma quantidade de 20 participantes. Assim, para o desenvolvimento das atividades propostas foi solicitado 10 computadores, enquanto quantidade mínima, com o software GeoGebra já instalado funcionando normalmente, visto que uma das nossas intenções era permitir que os discentes resolvessem as tarefas em parceria com um colega, objetivando propiciar uma maior interação entre os participantes e gerar um ambiente de discussões e de questionamentos.

A comissão organizadora do evento ficou responsável pela reprodução e/ou impressão do material que foi distribuído entre os participantes além de, 50 folhas de papel A4, 20 lápis, 20 borrachas, 20 réguas, 10 pares de esquadros, marcador para quadro branco nas cores azul e preta e apagador. No entanto, como sinalizado previamente, o grupo de estudo foi constituído por 16 participantes.

No primeiro encontro, foi exibido um escopo do curso, aplicou-se um questionário preliminar, cujo intuito foi de identificar as condições e as restrições acerca da familiaridade na utilização dos recursos e ferramentas disponíveis na interface do GeoGebra. Assim como, perceber traços acerca do nível de conhecimento e domínio no âmbito vetorial. Desse modo, posteriormente, foi disponibilizado material impresso com todos os conceitos e definições abordados, de igual modo, os comandos e algumas noções do programa computacional. De posse das respostas dos estudantes, é viável identificar nuances das relações pessoais (CHEVALLARD, 1996) dos estudantes com o ente matemático.

Quadro 4 - Questões Preliminares



Minicurso: Articulações entre o GeoGebra e a Álgebra Vetorial

Questões Preliminares

- 1) Em que nível de ensino ocorreu seu primeiro contato com os vetores? Descreva como foi essa experiência.
- 2) Com os conhecimentos adquiridos até o momento, como você define vetores? Apresente propriedades deste objeto matemático e exemplifique sua aplicabilidade.
- 3) O que você entende pela expressão “produto entre vetores”? Utilize algum exemplo para deixar mais clara sua interpretação acerca dessa expressão.
- 4) Você considera relevante o ensino de vetores nos Curso de Licenciatura em Matemática? Justifique sua resposta.
- 5) Você conhece o software GeoGebra? Em caso afirmativo, descreva de que forma ocorreu seu primeiro contato com o mesmo.

Fonte: acervo da autora, 2018.

A primeira questão, neste momento é retomada, e busca extrair, dos discentes, características dos contornos da relação pessoal com o objeto do saber em curso, além de identificar traços do habitat e nicho dos vetores antes do nível universitário de ensino. Assim, expomos algumas das respostas no que tange à primeira questão, a qual foi subdividida em dois grupos como revelado nos quadro 5 e 6:

Quadro 5 - Primeiro contato com os vetores ocorreu no nível superior (continua)

1) Em que nível de ensino ocorreu seu primeiro contato com os vetores? Descreva como foi essa experiência.		
Participantes	Nível	Experiência
A	Superior (disciplina GAI)	“ <i>Dificuldade</i> em entender alguns conceitos”.
B	Superior	“Foi marcante, por ser algo novo, <i>cheio de detalhes</i> importantes.”
C	Superior	“Achei um <i>instrumento interessante</i> da soma matemática, sendo aplicáveis em várias coisas, até mesmo no dia a dia.”

D	Superior	“Experiência um pouco <i>complicada</i> , devido às dificuldades na disciplina em que tive contato com esse conteúdo.”
E	Superior	“Foi <i>difícil</i> no começo, mas assim que <i>compreendi gostei muito</i> .”
F	Superior (disciplina GAI)	Sem relato
G	Superior	Sem relato

Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Quadro 6 - Primeiro contato com os vetores ocorreu entre o Ensino Fundamental e Médio

1) Em que nível de ensino ocorreu seu primeiro contato com os vetores? Descreva como foi essa experiência.		
Participantes	Nível	Experiência
H	Final do Ensino Fundamental II em Física.	“Antes de <i>aprendermos mecânica</i> ”
I	1º ano do EM na disciplina Física	“Uma experiência boa, pois <i>o professor dominava o assunto e sabia ensinar</i> ”.
J	No Ensino Básico (9º ano)	“ <i>Interessante e enriquecedor</i> .”
K	1º ano do EM na disciplina Física	“Só aprendi <i>somas de vetores</i> , em que se destacava o <i>sentido</i> .”
L	Ensino Médio	“Algo <i>superficial</i> , pois o conteúdo não foi explorado.”
M	Entre o 9º ano e o 1º ano do EM, na disciplina de Física	Sem relato
N	9º ano do EF e 1º ano do EM em Física	“Abordado de <i>forma superficial</i> ”
O	2º semestre do Curso de Licenciatura em Matemática	Sem relato
P	Ensino Médio em Física	“Um pouco <i>complicado</i> ”

Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

A partir das sucintas declarações dos discentes, pode-se extrair alguns elementos que se encontram nas entrelinhas dos relatos. O primeiro aspecto, atrela-se aos elementos do contrato didático (BROUSSEAU, 1986), pois existem “normas que, tacitamente, regem em cada momento obrigações recíprocas dos alunos e do professor, em relação ao projeto de estudo que

têm em comum.” (CHEVALLARD, BOSCH e GASCÓN, 2001, p.62). Sob outra perspectiva, Brousseau (2002) parte da premissa básica de que uma situação envolve três dimensões: o sujeito, as circunstâncias nas quais ele se encontram e as relações que os unem ao meio.

Uma situação é caracterizada em uma instituição por um conjunto de relações e de papéis recíprocos de um ou vários sujeitos (aluno, professor, etc.) com um meio, visando à transformação deste meio segundo um projeto. O meio é constituído por objetos (físicos, culturais, sociais, humanos) com os quais o sujeito interage em uma situação. (BROUSSEAU, 2002, p. 1)

Esse aspecto é percebido e direcionado pelas esferas atitudinais e comportamentais entre a díade alunos e professor. Ou seja, é o conjunto de relações estabelecidas entre esses sujeitos e o conhecimento. Assim, pressupomos uma primeira interpretação, que sintetiza e integra todos os relatos em uma fala hipotética: “ Professora, não espere muito de nós, pois sabemos pouco acerca dos vetores, visto que é um assunto com uma gama de particularidades o que o torna difícil e complicado. E para sanar estas dificuldades, faz-se necessário que o professor se dedique para que ocorra aprendizagem”. No entanto, em direcionamento análogo, os estudos de Vaz, Ferreira e Nasser (2017) ratificam as declarações dos discentes ao indicarem que esse conteúdo é abordado no Ensino Médio (EM) de maneira ingênua e pontual, em Física, não contribuindo para a sua retomada de modo mais amplo no Ensino Superior. Percebe-se, também, que em alguns casos o conteúdo é trabalhado na disciplina Física, porém de forma totalmente desvinculada da matemática.

O conceito de vetor no Ensino Fundamental e, principalmente, no Ensino Médio é visto apenas em Física. Isso gera uma impressão de que este ente tão importante é um objeto exclusivo dessa disciplina, é inegável o seu papel neste contexto. No entanto, vetor é um objeto matemático, por isso ele pode ser inserido no currículo de Matemática, considerando os aspectos geométrico e algébrico com suas características e propriedades específicas. Vetores são ferramentas que simplificam cálculos na resolução de problemas e demonstrações de resultados importantes. Eles aparecem em áreas como a Geometria Analítica, a Álgebra Linear e o Cálculo, estão associados aos números complexos e suas operações. (SOUZA, 2015, p. 18)

Dito isso, faz-se necessário direcionar a atenção para o habitat dos vetores, no âmbito do Saber a Ensinar situado nas séries finais do Ensino Fundamental II, Ensino Médio e o Ensino Superior. A exemplo, nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio é possível identificar algumas recomendações:

É desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física. (BRASIL, 2006, p.77)

Contemporaneamente, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC segue o mesmo direcionamento ao apontar modificações em relação ao atual currículo do Ensino Médio, por meio da inclusão dos conteúdos: vetores e transformações lineares, fundamentado nos seguintes objetivos:

Compreender o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção de segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto do ponto de vista algébrico, caracterizado por suas coordenadas, aplicando-o em situações da Física. (...) Estabelecer relações entre as transformações isométricas (reflexão, translação e rotação) e vetores no contexto do plano cartesiano, incluindo o uso de softwares de geometria dinâmica. (BRASIL, 2017, p. 564-565)

No que diz respeito aos livros texto, Ventura e Almouloud (2013) realizaram um estudo acerca dos conteúdos de Geometria Analítica que estão presentes em livros didáticos direcionado ao Ensino Médio, constatando que, apenas na obra “Contextos e Aplicações”, em três volumes, faz referência aos vetores. Assim, nota-se a reduzida incidência dos vetores no âmbito da Organização Matemática a Ensinar e seus consequentes reflexos no que é ensinado e apreendido nos limites das salas de aulas nos níveis fundamental e médio.

A segunda questão apresenta um caráter específico, ao mesmo tempo em que pode ratificar ou não as menções dos participantes expostos na primeira questão.

Quadro 7 Primeiro contato com os vetores ocorreu entre o Ensino Fundamental e Médio (continua)

2) Com os conhecimentos adquiridos até o momento, como você define vetores? Apresente propriedades deste objeto matemático e exemplifique sua aplicabilidade.			
Participantes	Definição	Propriedades	Aplicabilidade
A	Como uma grandeza determinada por segmento de reta que indica módulo, direção e sentido.	Não especificada	Construção de retas e planos.
B	Definido através de um segmento, no entanto ele tem suas particularidades. Diferente de um segmento, um vetor tem mobilidade no espaço.	Apresenta em suas propriedades, um sentido, direção e comprimento.	Em mecânica, na física, os vetores aparecem para informar a direção e o sentido em que cada força exerce.

C	Conjunto de semi-retas que possuem a mesma direção, mesmo sentido e mesmo módulo.	Não especificada	Em diversos ramos da matemática e principalmente na mecânica clássica.
D	Uma ferramenta que indica direção, sentido e comprimento, podendo ocorrer soma, subtração, produto vetorial, produto escalar.	Não especificada	É bem utilizado na física para mostrar o direcionamento das forças.
E	Conjunto formado por segmentos de reta orientado.	Soma, subtração, produto escalar, produto vetorial.	Não especificada
F	Segmento orientado que representa um conjunto de segmentos equipolentes, ou seja, mesma direção, sentido e comprimento.	Somar vetores, calcular ângulos, produto escalar e vetorial.	Presente na física.
G	Um representante de um conjunto de segmentos orientados. Possui direção, sentido e comprimento.	Não especificada	Na física, por exemplo, a força de um corpo (para onde ela aponta)
H	É um ente matemático utilizado para representar grandezas vetoriais. Grandezas vetoriais, para ficarem perfeitamente, definidas necessitam de número, unidade e sentido.	Propriedades (algumas): I - Vetor oposto: $\vec{AB} = -\vec{BA}$; II - Vetor nulo: $\vec{0}$; III - Soma de vetores: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$; IV - Subtração de vetores: Somar com o oposto	Extremamente usado no ramo da física, exemplo: forças.
I	Um conjunto formado por segmentos de retas orientados equipolentes, ou seja, tem mesmo tamanho, direção e sentido. Com essa definição podemos dizer que vetor não é fixo, pois podemos pegar um vetor desse conjunto e movimentá-lo para o lugar que quisermos.	Não especificada	Na física para calcular força resultante. E na matemática para calcular áreas de figuras como triângulos, paralelogramos, etc.
J	Não me sinto apto para definir. Vetores possuem direção, sentido e norma.	Não especificada	Não especificada

K	Grandeza matemática com modulo direção e sentido, porém, não consigo defini-lo formalmente.	Entendo como propriedades as que citei aqui inicialmente.	Na física. No estudo de planos e retas. Mas sinto dificuldade quanto a isso.
L	É um conjunto de representação de um determinado segmento de reta.	Sejam u, v e w vetores e seja 0 o vetor nulo. i) $u + v = v + u$; ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$ iii) $u + \vec{0} = \vec{0} + u = u$ iv) $u + (-u) = \vec{0}$	Não especificada
M	Conjunto de segmentos equipolentes.	Não especificada	Não especificada
N	Segmento de reta que possui comprimento, direção e sentido.	Sejam \vec{u} e \vec{w} vetores $\in R^3$ e $x \in R$; $\cdot \ \vec{u}\ = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $\cdot \exists \vec{0}: \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$; $\cdot \exists -\vec{u}: \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$; $\cdot \alpha(\vec{u} + \vec{w}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{w}$	Não especificada
O	Segmento orientado \vec{AB} , o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a este segmento.	Sejam \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} vetores, i) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$; ii) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; iii) $\exists -\vec{v}$, talque, $\vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$; iv) $\exists \vec{0}$, talque, $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$; Sejam $\alpha, \beta \in R$, logo, v) $\vec{v} \cdot (\alpha + \beta) = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$; vi) $\alpha \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$; vii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\beta\alpha \cdot \vec{v})$; viii) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.	Não especificada
P	Segmento orientado de retas, que são equipolentes, ou seja, tem o mesmo comprimento, direção e sentido.	Não especificada	Nas área da geometria espacial, onde as projeções dos vetores formam determinadas figuras geométricas.

Dez dos dezesseis participantes associaram a definição dos vetores às características: módulo, direção e sentido. É possível perceber também que apareceu, com certa frequência, os seguintes conceitos: segmentos de retas, segmentos de retas orientados, segmentos de retas orientados e equipolentes e segmentos com particularidades de mobilidade. Nestes termos, Hayfa (2006) distingue vetores livres da concepção ou vetor vinculado à concepção, o que equivale:

(...) escolher um ponto O e desenhar um vetor equivalente a \vec{u} mostra que esse vetor não é apenas a seta que leva seu nome, mas representa todas as setas que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento. (...) revela-se o vetor de concepção vinculado, ou seja, dado que um vetor está limitado às suas extremidades, ele é único pela sua representação gráfica. (HAYFA, 2006, p.36, tradução nossa¹³³)

Os conceitos apresentados também seguiram os direcionamentos de grandezas vetoriais vinculadas a número, unidade e sentido, o que nos faz inferir que houve uma troca com a descrição de grandezas escalares, visto que, foram citados os termos: número e unidade próprios das grandezas escalares. E com uma única ocorrência, tem-se as definições: conjuntos de semi-retas, assim como, “ferramenta que indica direção, sentido e comprimento”. O que nos faz supor que os discentes, no primeiro caso, não têm bem definido a diferença entre semi-reta e segmento de reta e, no segundo caso, o verbo “indicar” parece intimamente ligado à palavra sentido, o que empreende uma conotação distinta para o vetor, enquanto uma ferramenta, que possui direção, sentido e comprimento.

No que se refere às propriedades vetoriais, nota-se que a maioria não especificou. Todavia, alguns descreveram de forma incompleta e apenas um dos participantes descreveu todas as propriedades em relação às operações de adição e multiplicação por escalar, próprias dos espaços vetoriais. Quando à aplicabilidade, foram reveladas tímidas aplicações à matemática. No entanto, física, forças e mecânica permearam a maioria dos registros. O que reforça a ausência dos vetores no âmbito da matemática do Ensino Médio. O que ratifica as respostas da primeira questão.

Não comporá a nossa análise as respostas referentes à terceira questão, pois a maioria dos estudantes não responderam. No que tange à quarta questão, elencaremos algumas respostas, pois muitas se repetem.

¹³³ (...) On the other hand, to choose a point (O) and to draw a vector equivalent to u , shows that this vector is not only the arrow that carries its name, it represents all arrows that have the same direction, the same sense and the same length (...) the conception tied vector is revealed, that is, given that a vector is bound to its extremities, then it is unique by its graphical representation.

Quadro 8 - Relevância do ensino de vetores no CLM-UEFS

4) Você considera relevante o ensino de vetores nos Curso de Licenciatura em Matemática? Justifique sua resposta.	
Participante	Seleção de algumas respostas/ Semestre
H	“É fundamental para o curso, pois relaciona geometria e álgebra”/ (3º semestre).
I	“Importante em várias disciplinas” / (3º semestre)
L	“ Muito importante para compreender outros assuntos no curso”/ (5º semestre)
N	“ Sim, pois os vetores estão presente no curso inteiro”/ (6º semestre)

Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Todos os participantes reconheceram a relevância dos vetores no seio dos Cursos de Matemática. Contudo, os quatro discentes relacionaram a relevância institucional deste objeto no contexto do CLM – UEFS e de forma mais específica, a declaração do estudante H, despertou nossa atenção, pois foi o único que interligou os vetores ao domínios geométrico algébrico, habitats deste objeto.

Pode-se retomar essa abordagem e tratá-los, preliminarmente, na esfera intuitiva definido como um conjunto de segmentos orientados equipolentes o qual é geometricamente representado por um elemento deste conjunto. Gradualmente, segue-se com a operação de adição (soma de vetores) e a multiplicação de um vetor por um escalar (número real). Operações estas vinculadas ao âmbito ostensivo geométrico, uma vez que, a primeira recorre às regras do paralelogramo ou polígono.

No segundo encontro, foi dada continuidade às resoluções das tarefas, as quais contemplaram os vetores em diferentes representações (numérica, algébrica, geométrica) utilizando os ambientes Papel Lápis - PL em sincronia com o computacional GeoGebra - GG, subsidiado pelos pressupostos da TAD, ao assumir que toda atividade humana é uma prática que se realiza no interior de uma instituição e que pode ser modelada por um modelo único denominado de praxeologia, que é constituído por uma práxis, ou saber-fazer, sempre acompanhada de um discurso, o logos ou saber, mais ou menos desenvolvido, que dá razão e justifica essa práxis (CHEVALLARD, 1999).

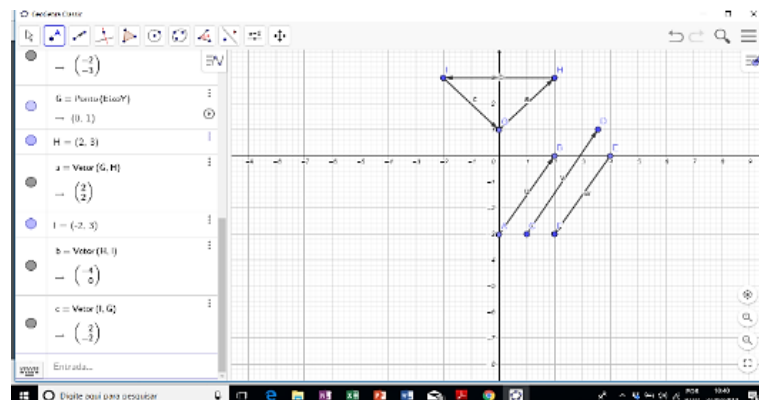
Dito de outra forma, “o conhecimento matemático é compreendido como o produto oriundo de atividades com a intenção de resolver determinados tipos de questões, ou tarefas, que foram problemáticas para uma determinada comunidade, em um dado momento histórico” (ANDRADE; GUERRA, 2014, p. 1202). Mas antes de adentrarmos na Organização Matemática – OM do curso, faz necessário identificar características dos equipamentos praxeológicos dos sujeitos (CHEVALLARD, 2009). Para tanto, revelamos as questões que nortearam esse contato prévio.

Ao retomar as respostas dos participantes, referente à segunda questão, no que tange a definição de vetores, pode-se sintetizar que um vetor é definido como um conjunto de segmentos orientados equipolentes e é geometricamente representado por um elemento deste conjunto, o que situa o mesmo na esfera intuitiva. Gradualmente, segue-se com a operação de adição (soma de vetores) e a multiplicação de um vetor por um escalar (número real). Operações essas, vinculadas ao âmbito geométrico intuitivo, uma vez que a primeira recorre às regras do paralelogramo ou polígono.

A segunda operação gera representantes de vetores que alteram as características do vetor inicialmente dado, tais como o aumento do comprimento, ao considerar um escalar menor que -1 ou maior que 1, ou a diminuição do comprimento do segmento orientado quando o número pertence ao intervalo aberto delimitado por -1 e 1; mantém-se o comprimento quando os escalares forem iguais a -1 ou 1, e obtém-se a inversão do sentido ao considerar-se um número negativo.

Partimos da prévia registrada na figura 47, ou exemplos da representação vetorial neste ambiente. Essas noções foram tratadas com relativa facilidade na utilização do software GeoGebra:

Figura 47 - Representações algébricas e geométricas de alguns vetores no ambiente GeoGebra



Fonte: acervo da autora (2018)

Nota-se que, utilizando-se a mesma tela, temos as representações vetoriais nos âmbitos algébrico (Janela de Álgebra) e geométrico (Janela de Visualização), além da possibilidade de comandos por meio da Caixa de Entrada. Como descrevem Baldin e Furuya (2011),

o GeoGebra é um programa de Geometria Dinâmica que transforma a tela do computador numa prancheta de desenho, e permite manipular os objetos geométricos através do clicar do mouse ou da janela de entradas algébricas. Além disso, todos os objetos geométricos são acompanhados de suas caracterizações algébricas. (BALDIN; FURUYA, 2011, p. 114)

Assim, abre-se um leque de possibilidades dinâmicas na modificação destes elementos: módulo, direção ou sentido. A partir desse aspecto, destaca-se a relevância do minicurso aqui mencionado, já que este considera os vetores e, conseqüentemente, as resoluções de tarefas que envolvem os mesmos. Nessa perspectiva, o referido software constituiu um elemento auxiliar na compreensão com o trato vetorial.

De acordo com informações obtidas no site¹³⁴ do programa computacional, o GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote, além de ser fácil de usar. Disponível em vários idiomas, foi criado pelo prof. Dr. Markus Hohemwarter, da Universidade de Salzburgo na Áustria, em 2001 (HOHEMWATER & FUCHS, 2004). Trata-se de um software de distribuição gratuita, baseado em linguagem Java e funciona nas plataformas Linux, Windows e Macintosh. Atualmente, as versões também contemplam dispositivos móveis como smartphones e tablets.

No âmbito dos processos educativos a recorrência ao software, enquanto ferramenta didática, se propaga e integra-se em diversas investigações como: Silva (2016); Lemke, Silveira e Siple (2016); Estevam, Basniak, Paulek, Scaldelai e Felipe (2018); Araujo e Pazuch (2018); Pereira Jr e Bertol (2019) e Lopes Júnior (2019), dentre outras. Aspecto esse que reforça o caráter hodierno e latente que emergem em torno do GeoGebra.

4.2 DESCRIÇÕES E RESOLUÇÕES DE ALGUMAS TAREFAS

As tarefas foram propostas aos participantes com a finalidade de abordar alguns conceitos característicos da álgebra vetorial agregados às representações nos diferentes domínios (algébrico, geométrico e numérico). Foram apresentados como orientações para resolução das tarefas os seguintes procedimentos: no primeiro momento, deveriam ser

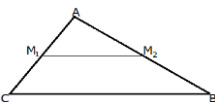
¹³⁴ www.geogebra.com

resolvidas no ambiente Papel Lápis - PL; no segundo momento, no ambiente do GeoGebra – GG.

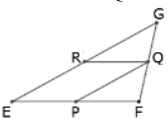
Figura 48 - Seleção de tarefas propostas para resolução no minicurso

Lista de tarefas

- 1) Considerando a figura abaixo, qual o vetor obtido pela soma $\vec{w} = \vec{s} + \vec{v} + \vec{u} + \vec{r}$?
- 2) Dados $\vec{u} = (1,3)$ e $\vec{v} = (2,1)$, represente no plano cartesiano os vetores: \vec{u} , \vec{v} e $\vec{u} + \vec{v}$.
- 3) Dados $\vec{u} = (1,3)$ e $\vec{v} = (2,1)$, represente no plano cartesiano os vetores: \vec{u} , \vec{v} e $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{u}$.
- 4) Um objeto sai de um ponto A e desloca-se até um ponto B, distante 10 Km de A no sentido Norte. A seguir, desloca-se mais 6 km até um ponto C que está a Leste do ponto B. Por fim, desloca-se mais 18 Km para o Sul, chegando então a um ponto D. Determine o módulo do vetor deslocamento do objeto.
- 5) Dado um quadrilátero qualquer ABCD, podemos afirmar que os pontos médios dos seus lados são vértices de um paralelogramo?
- 6) Prove que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem comprimento igual à metade do comprimento desse lado.



- 7) Justifique. Se EFG é um triângulo qualquer e P, Q e R são pontos médios dos lados EF, FG e GE, respectivamente, então EPQR é um paralelogramo.



Fonte: acervo da autora (2018)

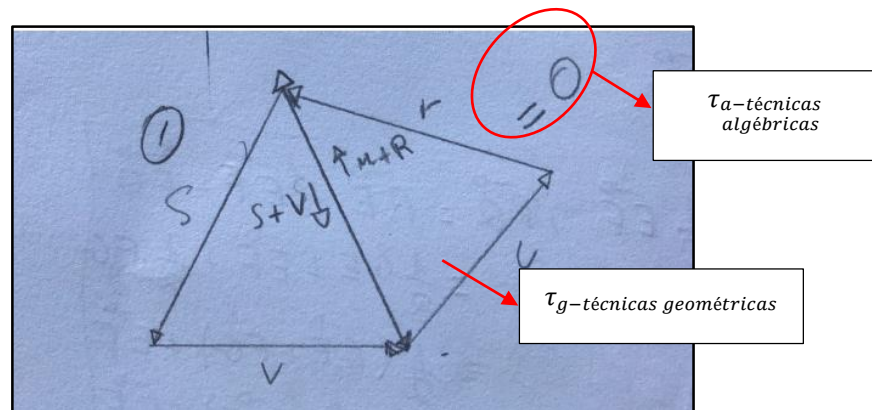
A primeira questão pode ser caracterizada como uma tarefa pertencente ao tipo de tarefas, denotada por uma soma vetorial - $T_{\vec{sv}}$, modelada por: $T_{\vec{sv}} = (\text{Calcular; a soma de vetores})$. Contudo, essa tarefa está atrelada ao conceito de vetor nulo, o qual pode configurar um obstáculo epistemológico (BACHELARD, 1996), pois a concepção traz um aspecto um tanto controverso, visto que a definição de vetores está relacionada a um conjunto de segmentos orientados associados aos elementos: módulo, direção e sentido. No entanto, foi pertinente questionar aos participantes acerca do sentido e da direção do vetor nulo. E para tal empreendemos alguns questionamentos, pautados na definição: “vetor é determinado por um *segmento orientado*, seja AB o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB” (STEINBRUCH, 1987, p. 4, *itálico nosso*); e como complementação do conceito, o autor explana, preliminarmente, que dois segmentos orientados AB e CD são *equipolentes* quando têm a mesma *direção*, o mesmo *sentido* e o mesmo *comprimento*. Questionamos então: – E o

vetor nulo? O que vocês nos dizem sobre o vetor nulo? Continuamos: – O vetor nulo possui direção e sentido?

Nesta etapa, os estudantes permaneceram em silêncio, num aparente ato de reflexão. Mesmo diante da convicção da existência do vetor nulo, notou-se porém, os aspectos que dificultam o entendimento deste conceito. No entanto, ao direcionar a atenção para a definição apresentada por uma das obras pertencentes às referências bibliográficas da maioria das ementas dos cursos de Geometria Analítica, identificou-se um cuidado neste sentido, “os segmentos orientados AB e CD são equipolentes, e indica-se $AB \sim CD$, se um dos casos seguintes ocorrer: a) Ambos são nulos; b) Nenhum é nulo, e têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.” (CAMARGO, BOULOS, 1987, p.5)

Perspectivas como essas, nos induzem a refletir sobre os obstáculos didáticos que se configuram em restrições às práticas institucionais, as quais podem ser geradas a partir de conhecimentos incompletos ou inadequados (BROUSSEAU, 2009). Nos registros das resoluções, encontramos soluções de diferentes naturezas: alguns preferiram ignorar este item da lista, outros se limitaram a apresentar $\vec{w} = \vec{0}$ e os demais apresentaram resoluções semelhantes às apresentadas a seguir, nas quais evidencia-se as seguintes técnicas:

Figura 49 - Resolução 1

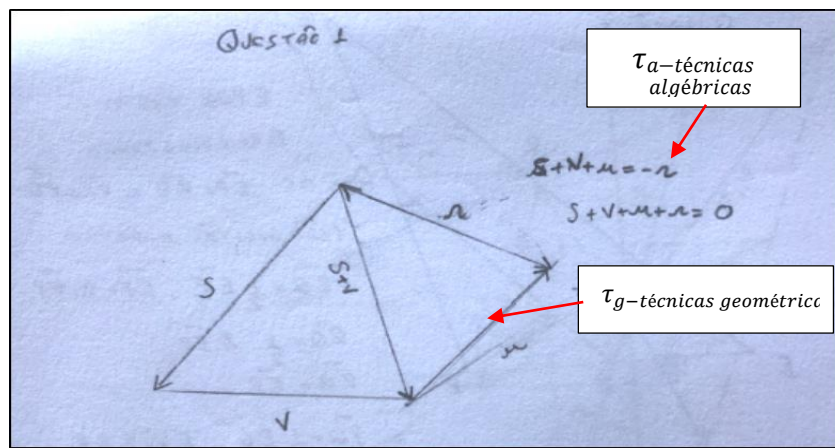


Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

As técnicas empregadas nessa resolução foram essencialmente geométricas, pois todo o desenvolvimento se deu no âmbito da representação, em que tomou-se como ponto de partida as duas somas vetoriais, tidas como: $t_1: \vec{s} + \vec{v}$ e $t_2: \vec{u} + \vec{r}$, resultando em uma técnica como caracterizado por Chaachoua (2018). Pois, ao estabelecer a comparação e, por conseguinte, a junção entre origem do representante do primeiro vetor com a extremidade do segundo, conclui-

se que as duas resultantes possuem mesmo módulo e mesma direção, porém com sentidos opostos, ou seja, existe uma sobreposição entre elas. A finalização ocorre com o “igual a zero”, técnica esta que se insere no âmbito algébrico no seio das equações, por exemplo, deixando evidente mais um aspecto no que tange aos obstáculos inerentes ao vetor nulo. O estudante interpreta a tarefa corretamente, contudo sua resolução é essencialmente alicerçada nas equações algébricas, ao invés de apresentar uma equação vetorial.

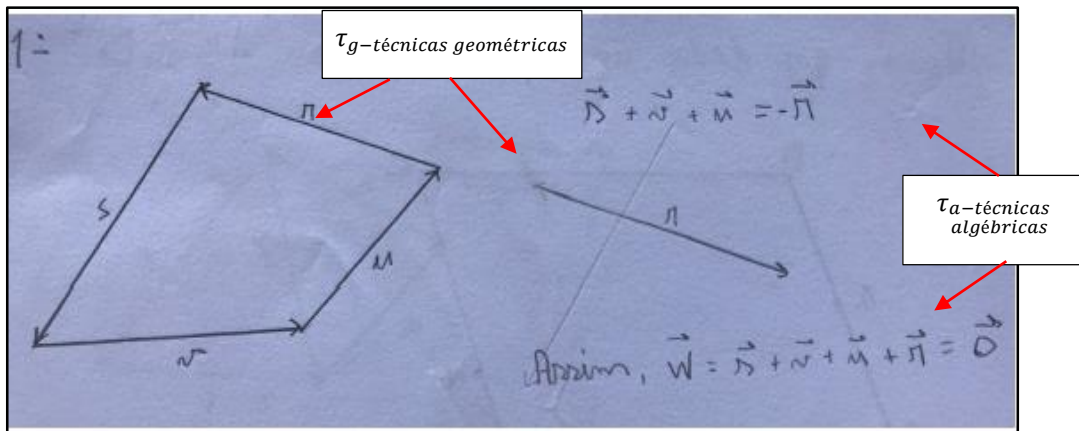
Figura 50 - Resolução 2



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

A segunda resolução, segue um direcionamento semelhante à anterior. Contudo, a sequência das duas somas são diferentes: $t_3: \vec{s} + \vec{v} + \vec{u} = -\vec{r} \Rightarrow \vec{s} + \vec{v} + \vec{u} + \vec{r} = \vec{0}$. O que significa dizer que, ocorreu a substituição de $\vec{s} + \vec{v} + \vec{u}$ por $-\vec{r}$, o que resulta em $-\vec{r} + \vec{r} = \vec{0}$. Nota-se, também o número zero assumindo o papel do vetor nulo, como exposto anteriormente. De igual modo, pode-se inferir que sua resolução se apoiou em uma notação incompleta, por não utilizar a seta indicativa de vetor.

Figura 51 - Resolução 3



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

O processo resolutivo, associado à figura 51, revela elementos mais condizentes com a definição de vetor nulo. Notou-se que, $t_2: \vec{s} + \vec{v} + \vec{u} = -\vec{r}$, após esta constatação, o discente fez o desenho do representante do vetor $-\vec{r}$ (mesmo utilizando a letra r sem a seta indicativa do vetor), o que possibilitou estabelecer um comparativo entre os vetores \vec{r} e $-\vec{r}$, deixando evidente que os vetores são opostos. Assim, concluiu que: $\vec{w} = \vec{s} + \vec{v} + \vec{u} + \vec{r} = \vec{0}$, sem incorrer nos erros detectados nas resoluções anteriores.

As demais soluções apresentadas seguem uma ordenação tácita do suporte geométrico. Por exemplo: a) $\vec{w} = \vec{s} + \vec{v} + \vec{u} + \vec{r} = -\vec{r} + \vec{r} = \vec{0}$; b) $\vec{w} = \vec{s} + \vec{v} + (\vec{u} + \vec{r}) = \vec{w} = \vec{s} + \vec{v} - (\vec{s} + \vec{v}) = \vec{0}$, ou seja, foi identificado que, $t_3: (\vec{u} + \vec{r}) = -(\vec{s} + \vec{v})$.

Dessa forma, a partir distintas “maneiras de fazer”, por meio da análise das atividades resolvidas, distinguimos algumas características inerentes às tarefas/técnicas empregadas exposta no quadro a seguir:

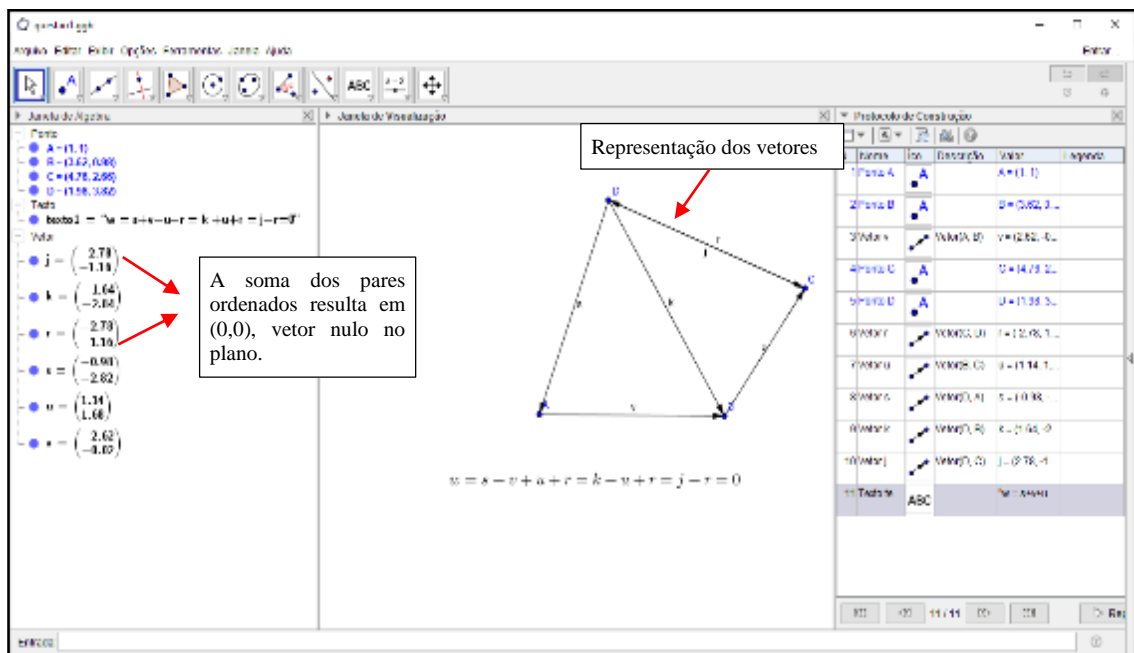
Quadro 9 - Categorias das técnicas empregadas

Técnica	Descrição	Natureza
τ_1	Comparação	Geométrica
τ_2	Substituição	Geométrica aditado a equações vetoriais
τ_3	Comparação e substituição	Equações vetoriais

Fonte: acervo da autora (2018)

Com técnicas distintas das realizadas no ambiente Papel Lápis – PL, revelamos algumas produções realizadas no software GeoGebra:

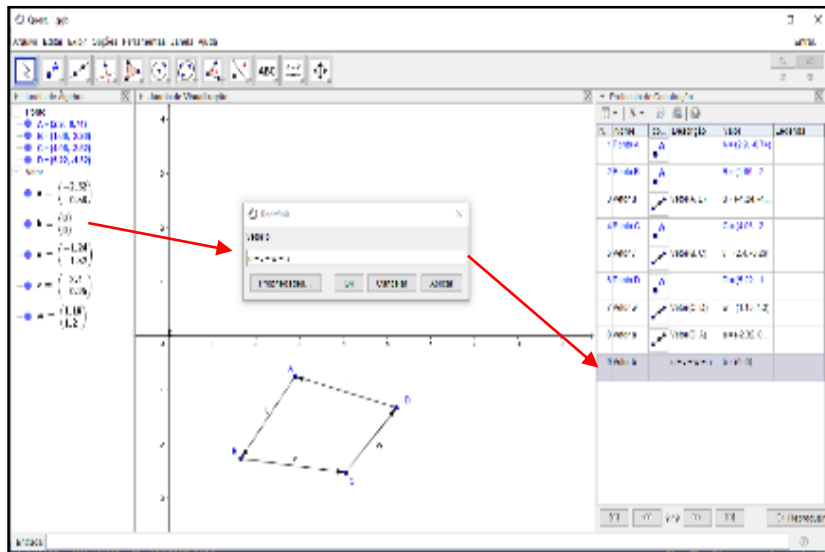
Figura 52 - Resolução da primeira tarefa no GeoGebra (1)



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Por meio do protocolo de construção é possível perceber que as ferramentas utilizadas foram: ponto e vetor definidos por dois pontos. A composição da imagem disposta na janela de visualização se comunica diretamente com a janela de álgebra, um dos atributos do software. As técnicas empregadas na reprodução da imagem seguem o direcionamento de semelhança com a imagem apresentada na lista de tarefas. Identificamos, enquanto técnica preponderante, o emprego da regra do polígono, em que faz coincidir extremidade com origem, sequencialmente, até obter a soma final.

Figura 53 - Resolução da primeira tarefa no GeoGebra (2)

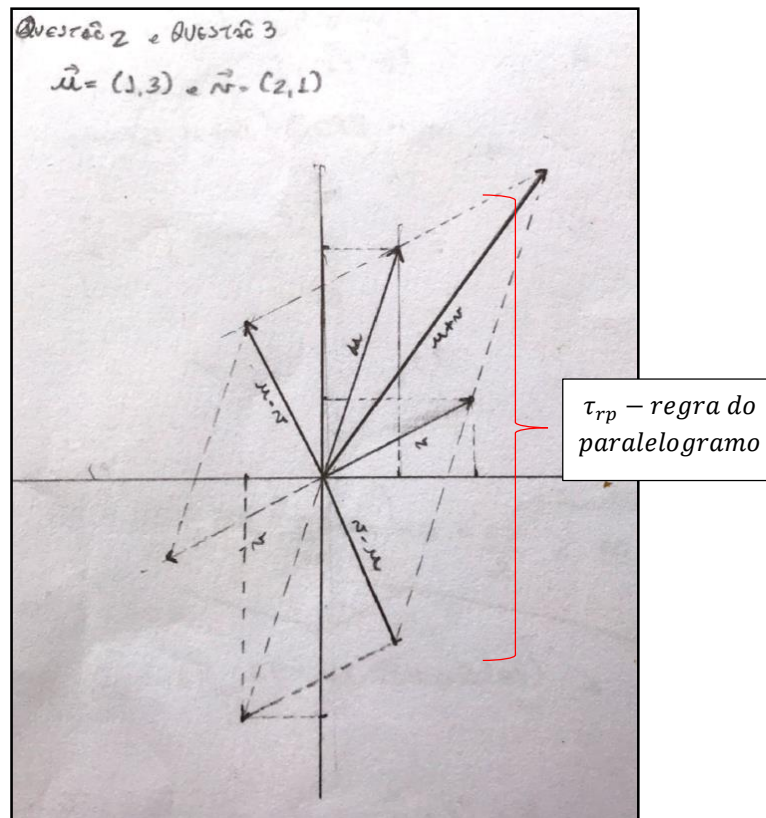


Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Na figura 53, foi evidenciado o vetor $\vec{b} = (0,0)$, o qual foi descrito como $\vec{b} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{r}$, indicados pelas setas. Ao estabelecer um comparativo entre as duas resoluções, é possível perceber que se fez uso das mesmas ferramentas, diferindo apenas na quantidade de etapas, porém outras técnicas foram mobilizadas para solucionar o que foi solicitado no exercício. Os aspectos similares das resoluções no ambiente Papel Lápis e o GeoGebra apresenta certas particularidades, especialmente no que se refere às técnicas empregadas. A celeridade das informações refletidas na tela e as interligações dos registros algébricos e geométricos são o cerne do software. No entanto, as construções em PL remetem às produções autorais que revelam seu valor no processo de aprendizagem, tal qual pode ocorrer no Geogebra.

Nas questões 2 e 3, os vetores pertencem ao plano cartesiano, assim transitamos da noção geométrica intuitiva, com atributos da geometria sintética, para a representação dos vetores no R^2 , como predicado do método cartesiano associando equações aos entes geométricos. Para tanto, destacaremos algumas construções resolutivas pontuando os aspectos de similaridade e contraste entre as técnicas empregadas.

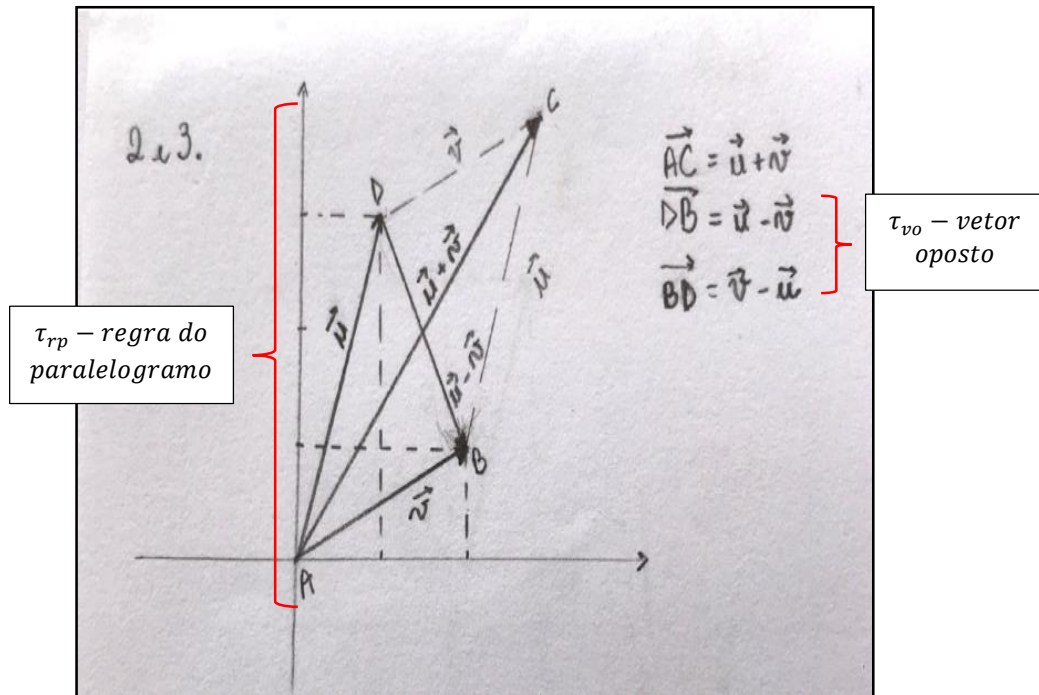
Figura 54 - Resolução da questão 2 e 3 com representação em um único gráfico em PL (2)



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Condensar as duas tarefas em um único gráfico, foi a forma adotada por alguns estudantes, visto que as questões versavam sobre as representações dos vetores $\vec{u} = (1,3)$ e $\vec{v} = (2,1)$, acrescida da decomposição vetorial em conjunto com a determinação representacional de $\vec{u} + \vec{v}$ na segunda questão e na terceira $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{u}$. Todavia, a intenção didática que fundamentou a adoção da tarefa consistia em estabelecer comparações entre as operações de adição e subtração de vetores. Assim, concebemos que a separação em duas questões possibilitasse maior efetividade ao processo comparativo por colocar em destaque as técnicas de cada tarefa, porém esse aspecto não foi revelado aos partícipes de forma que não houve interferências no processo resolutivo.

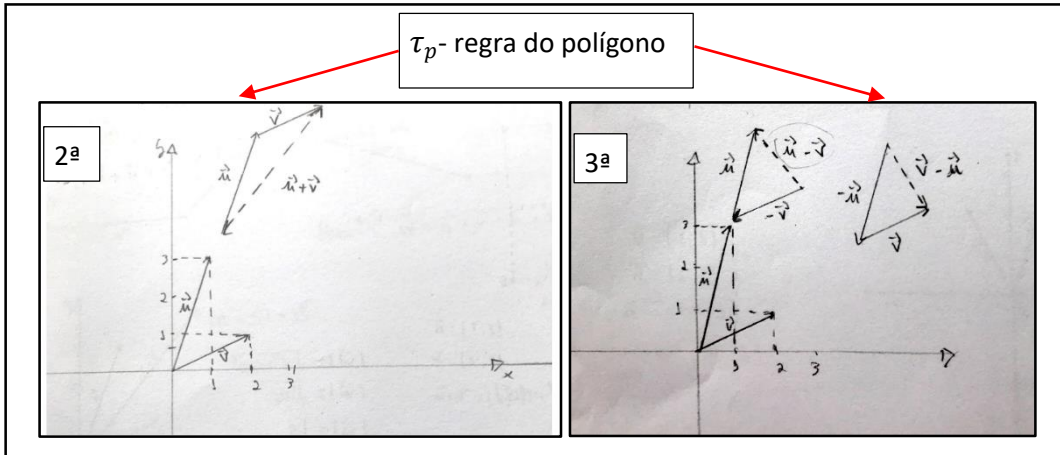
Figura 55 - Resolução da questão 2 e 3 com representação em um único gráfico em PL (2)



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

As técnicas empregadas pelos dois estudantes (figuras 54 e 55) possibilitaram estabelecer algumas comparações intrínsecas ao cerne do bloco prático técnico $[T;\tau]$. O primeiro discente (figura 54) representou, como solicitado na questão, todos os vetores aplicando a definição geométrica de vetor oposto na identificação de $-\vec{v}$ e $-\vec{u}$. Entretanto, o segundo estudante (figura 55) faz uso da regra do paralelogramo e da propriedade de equipolência entre segmentos orientados ao desenhar representantes do vetor $\vec{v} - \vec{u}$, no primeiro quadrante. Chamamos a atenção para o fato que o discente, em questão, comete um equívoco ao informar que o segmento DB representa o vetor $\vec{u} - \vec{v}$. Assim, é possível notar o emprego de técnicas distintas nas resoluções apresentadas. Nas próximas resoluções, os alunos optaram por apresentar suas produções separadamente, porém é possível identificar particularidades nas resoluções dos mesmos.

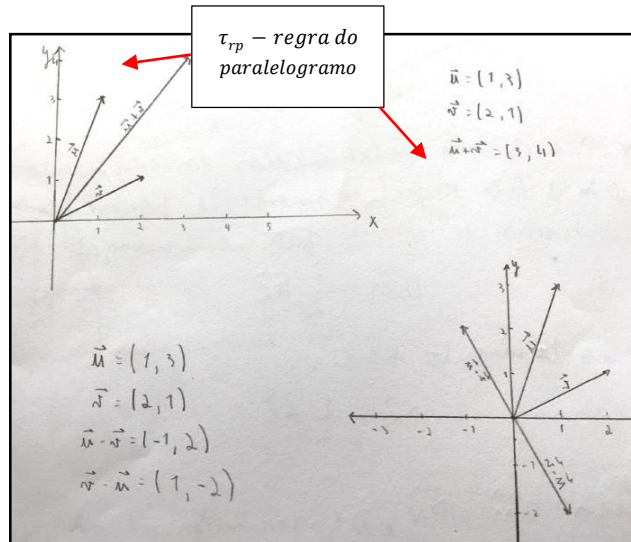
Figura 56 - Resolução da questão 2 e 3 com representação em gráficos distintos (1)



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Emergiu a necessidade, por parte desse aluno, em considerar representantes dos vetores dados, no mesmo plano cartesiano, porém com ponto inicial fora da origem, caracterizado pela translação dos segmentos orientados inicialmente considerados. Assim, inferimos que ocorreu uma recusa na aplicação da regra do paralelogramo e na realização da construção em termos das coordenadas cartesianas.

Figura 57 - Resolução das questões 2 e 3 com representação em gráficos distintos em PL(2)

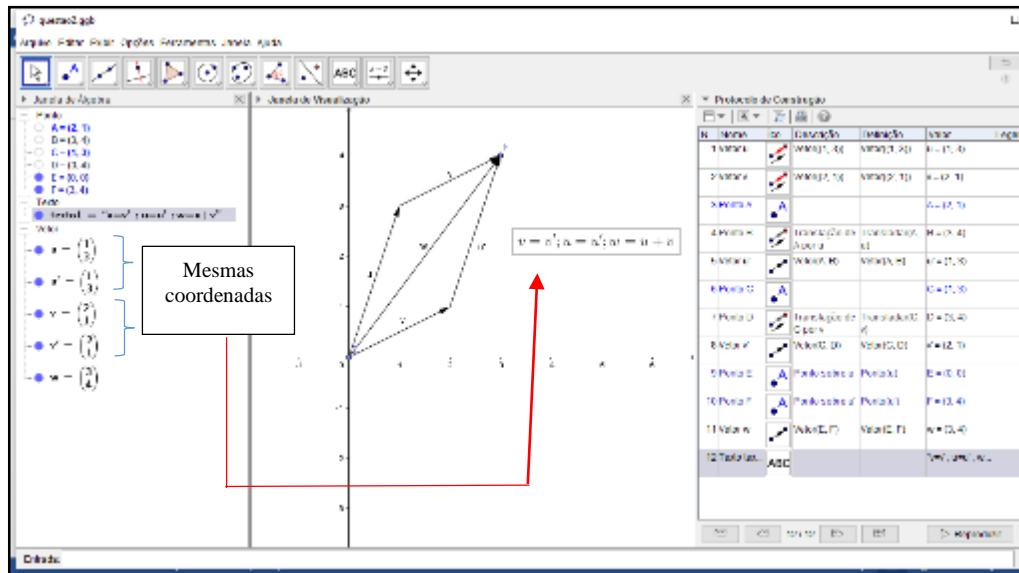


Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

A produção deste estudante condiz com o que foi idealizado a priori pela pesquisadora, ou seja, a representação geométrica dos vetores expostas em duas etapas: a soma de $\vec{u} + \vec{v}$ e a subtração $\vec{u} - \vec{v}$ e $\vec{v} - \vec{u}$, pois concebe-se a possibilidade de uma comparação do

comportamento de cada operação no âmbito geométrico. Contudo, é relevante observar as produções geradas no software relativa à mesma tarefa.

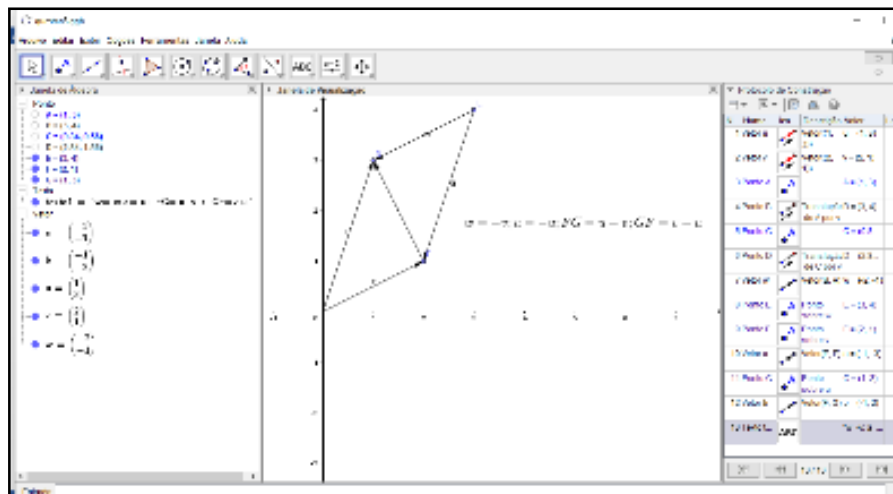
Figura 58 - Resolução da questão 2 com representação em GG(1)



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

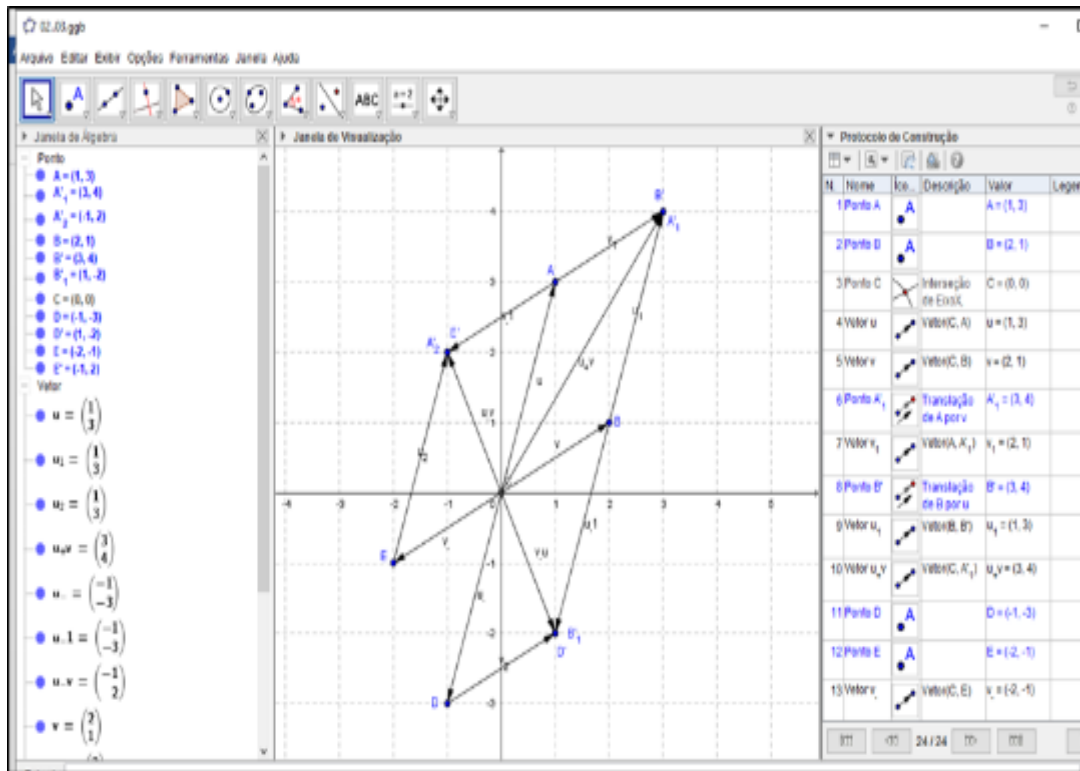
O destaque nesta construção assenta-se no emprego da ferramenta denominada “vetor a partir de um ponto”. O uso desse recurso propicia a translação de um ponto por um vetor, ou seja, desloca-se objetos de lugar quando levamos um objeto da posição A para uma posição B, fato este revelado no protocolo de construção, refletido nas janelas de álgebra e visualização.

Figura 59 - Resolução da questão 3 com representação em GG(1)



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Figura 60 - Resolução das questões 2 e 3 com representação em GG(2)



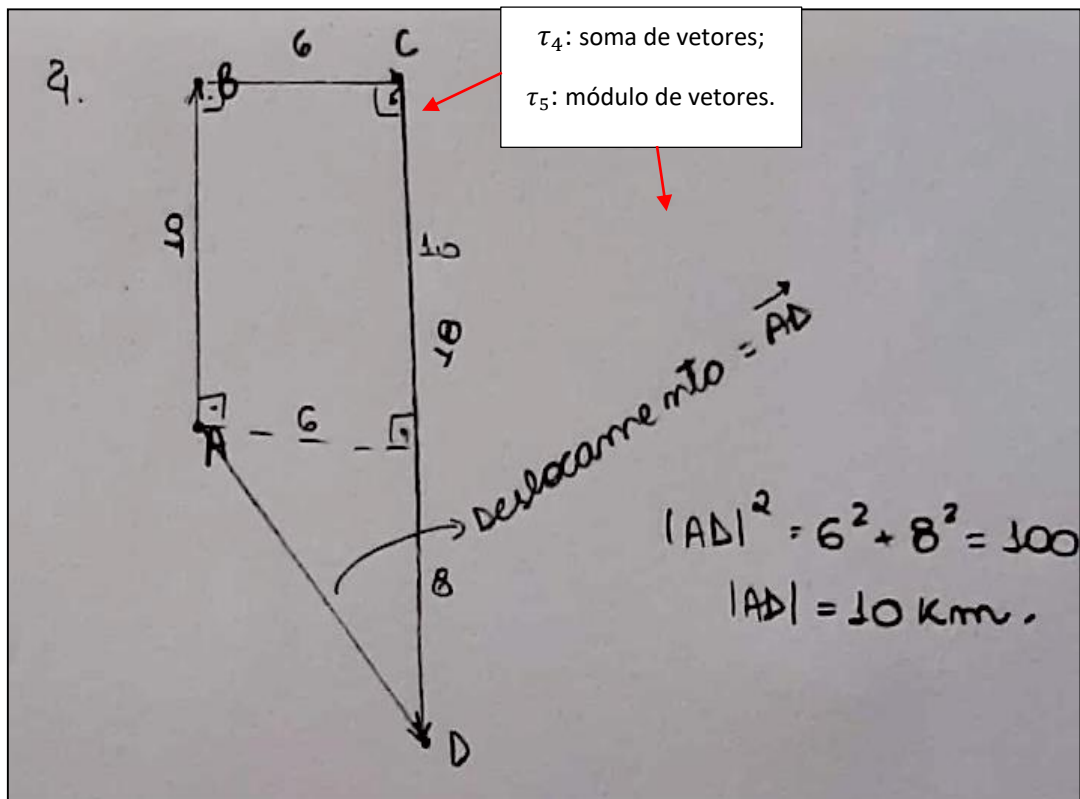
Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

É possível perceber o emprego da ferramenta que translada um vetor a partir de um ponto. Traços desse recurso também são notados na janela de álgebra por meio da manutenção dos valores das coordenadas vinculados aos vetores \vec{u} e \vec{v} . Todavia, a representação das duas soluções na janela de visualização ratificam a excessiva carga de informações como pensado aprioristicamente.

A quarta tarefa apresenta uma nuance bidisciplinar, o que direciona para uma “sinergia disciplinar¹³⁵” ao estabelecer relações entre direção e sentido, inerente aos vetores, contextualizada por uma situação em que se tem como suporte os pontos cardeais, tema este abordado no âmbito disciplinar da geografia pertencente ao Ensino Fundamental. No que tange a diferença entre direção e sentido foi identificado ausência de clareza, por parte de alguns estudantes, fato esse evidenciado nas duas primeiras questões preliminares. Contudo, os participantes utilizaram uma mesma técnica e, por esse motivo, revela-se duas resoluções apresentadas a seguir:

¹³⁵ Ver Chevallard (2009/2010)

Figura 61 - Exemplo de resolução da questão 4 em PL



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Os registros nos fornecem alguns indícios de técnicas implícitas associadas ao desenvolvimento resolutivo, a exemplo, a identificação de um retângulo, acrescida da representação de quatro ângulos retos cujos lados possuem medidas 10km e 6km e um triângulo retângulo com catetos que medem 6km e 8km, restando o cálculo da hipotenusa e, por conseguinte, o emprego do Teorema de Pitágoras, também empregado no cálculo do módulo de um vetor. Em direcionamento análogo, pode-se pensar em tarefas que estabeleçam interligações com os números complexos, como sinalizado por Menon (2009) e Carneiro (2004),

O ensino usual dos números complexos baseia-se em uma abordagem puramente algébrica, onde estão ausentes o significado e as aplicações destes números. [...]. No entanto, [...] há uma outra abordagem possível, a geométrica, onde desde o primeiro momento os complexos apresentam-se como pontos ou vetores no plano, e as operações entre eles aparecem como transformações geométricas capazes de sugestiva visualização (CARNEIRO, 2004, p.1).

Ainda segundo este autor, a correlação entre vetores e os números complexos pode ser representada geometricamente no plano (R^2), assim como os vetores, ao descrever que:

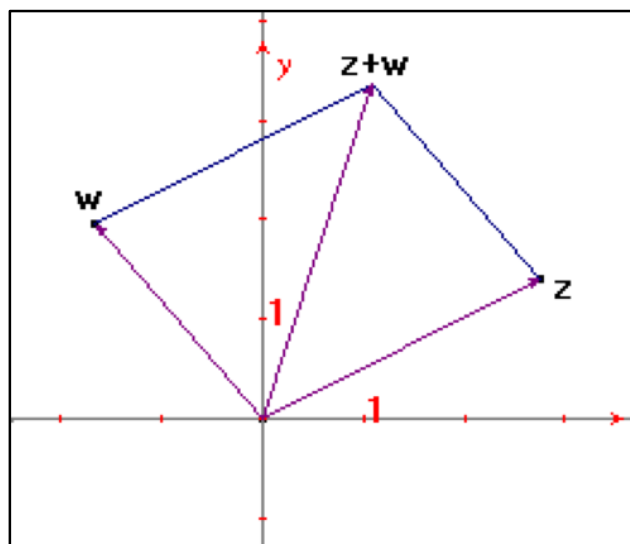
Deixando de lado, por enquanto, a intrigante raiz quadrada de -1, o número complexo $z = a + bi$ fica perfeitamente determinado pelo par ordenado de números reais (a, b) e este, por sua vez, pode ser visto como um ponto P no plano cartesiano (uma vez fixados os eixos), ou como o vetor determinado pela seta (ou “segmento orientado”). Com esta identificação, o seu módulo é a distância de P à origem, ou o módulo do vetor \vec{OP} , enquanto o conjugado de z é o simétrico de P em relação ao eixo das abscissas [...] (CARNEIRO, 2004, p.5)

Em complementação a essa declaração, Menon (2009), pontua que:

Representam-se geometricamente os números complexos por pontos no plano, tendo a e b por coordenadas associadas a dois eixos perpendiculares, denominados eixos real e imaginário, respectivamente. Essa representação tem muita semelhança com os vetores no plano (R^2) [...] (MENON, 2009, p. 4)

Nesta perspectiva, Carneiro (2004, p.7) apoiou-se na “soma $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$, a qual segundo ele, traduz-se na soma vetorial $(a;b) + (c;d) = (a+c;b+d)$, e pode ser visualizada pelo clássico paralelogramo (...)” evidenciada na figura 62,

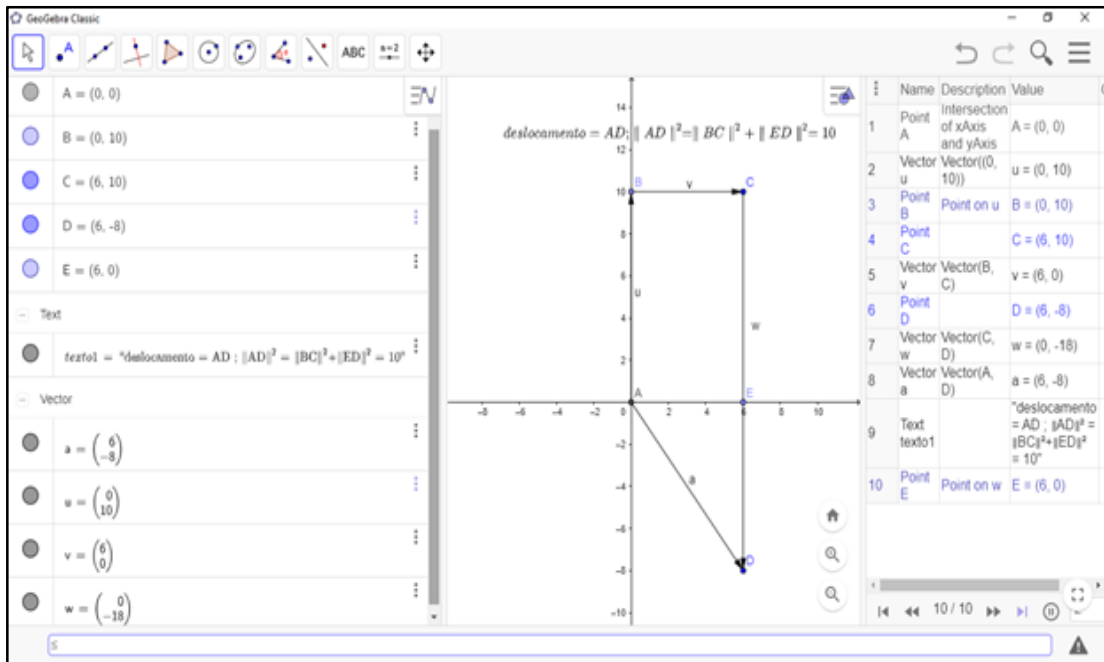
Figura 62 - Gráfico da Soma de números complexos



Fonte: CARNEIRO (2004, p.7)

Ao retomar as análises de uma das produções realizadas pelos discentes no âmbito do GeoGebra, divulgamos a figura 63,

Figura 63 - Exemplo de resolução da questão 4 em GG

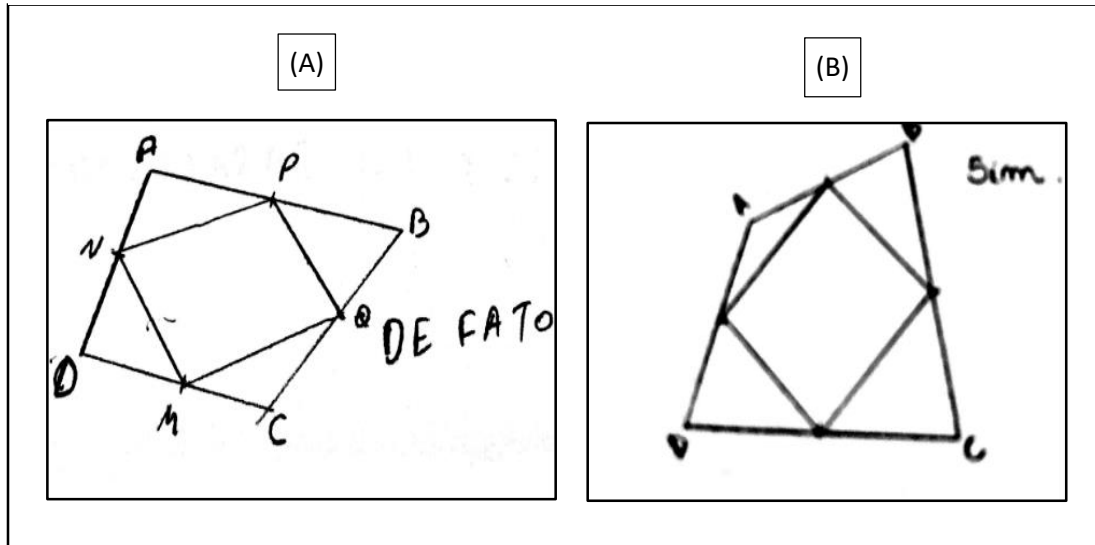


Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Além de uma retomada da soma vetorial, foi solicitado na questão o módulo da resultante. Para facilitar os cálculos, o discente optou por localizar o ponto A na origem do sistema cartesiano. Nota-se também, a necessidade em descrever o modelo matemático empregado na resolução, gerando aproximações entre os ambientes PL e GG. A título de comprovação, o estudante poderia ter usufruído da ferramenta (distância, comprimento ou perímetro) que permitiria ratificar, $\|\vec{AD}\| = \|\vec{a}\| = 10$, os cálculos realizados em PL.

A partir da 5ª questão, o cerne da abordagem passa a ser constituída no âmbito das provas e da demonstração, momento em que o bloco tecnológico teórico $[\theta/\theta]$ se torna mais latente. Contudo, alguns participantes se limitaram a legitimar seus discursos por meio de representações geométricas como evidenciados a seguir,

Figura 64 - Exemplo de resolução da questão 4 em PL



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Nestes termos, Balacheff (2000, p. 3, tradução nossa¹³⁶) assinala que “(...) em geometria, as figuras são evidências da demonstração. Contudo, (...) o racionalismo da demonstração se opõe a esse tipo de sensualidade que serve de base para as evidências”. O autor também destaca os aspectos principais de uma demonstração:

- a demonstração é uma ferramenta de teste essencial; isso leva a um exercício prático, que permite a comunicação e a avaliação ao mesmo tempo;
- É também objeto de estudo de quem lida com a lógica; a prova, portanto, tem uma definição precisa dentro da tabela de teorias formalizadas. (BALACHEFF, 2000, p.2, tradução nossa¹³⁷)

Todavia, outros participantes se aventuraram nas argumentações lógicas matemática delimitado por hipóteses e tese. Assim, pode-se afirmar que as técnicas (τ) mobilizadas no desenvolvimento resolutivo de tarefas (t) dessa natureza, demandaram um repertório tecnológico teórico advindo do equipamento praxeológico de cada sujeito.

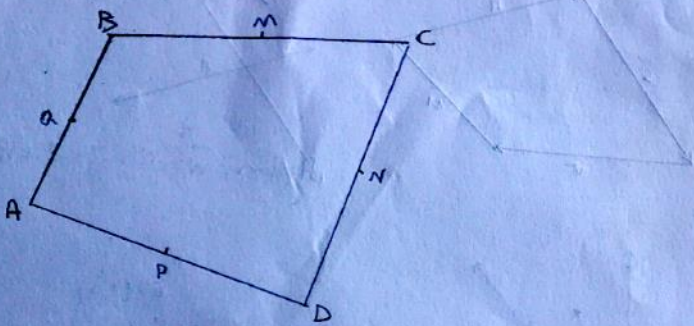
¹³⁶ (...) en geometría, donde las figuras son evidencia de la demostración. (...) el racionalismo de la demostración se opondría. a esta clase de sensibilidad que sirve de base a la evidencia.

¹³⁷ - la demostración es una herramienta esencial de prueba; ésta conduce a un ejercicio práctico, que hace posible la comunicación y la evaluación a la vez;

- es también el objeto de estudio de los que se ocupan de la lógica; la demostración tiene, por lo tanto, una definición precisa dentro del cuadro de las teorías formalizadas.

Figura 65 - Exemplo de resolução da questão 5

5 - Sim. Temos que dado um quadrilátero: $ABCD$.



Onde M, N, P e Q são pontos médios dos segmentos BC, CD, DA e AB respectivamente, é possível mostrar usando a teoria de vetores que no triângulo ABC .

$$\vec{QM} = \frac{1}{2} \vec{AC}$$

Assim como no triângulo ADC ,

$$\vec{PN} = \frac{1}{2} \vec{AC}$$

$$\begin{aligned} \vec{QM} &= \vec{QB} + \vec{BM} : (t_1) \\ &= \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} : (t_2) e (t_3) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC}) : (t_4) \\ &= \frac{1}{2} \vec{AC} : (t_1) \end{aligned}$$

De forma análoga, $\vec{PN} = \frac{1}{2} \vec{AC}$

O que implica $\vec{QM} = \vec{PN}$. De forma análoga, podemos mostrar que usando os triângulos ABD e BCD , $\vec{QP} = \vec{MN}$. Assim mostramos que $QMNP$ é um paralelogramo.

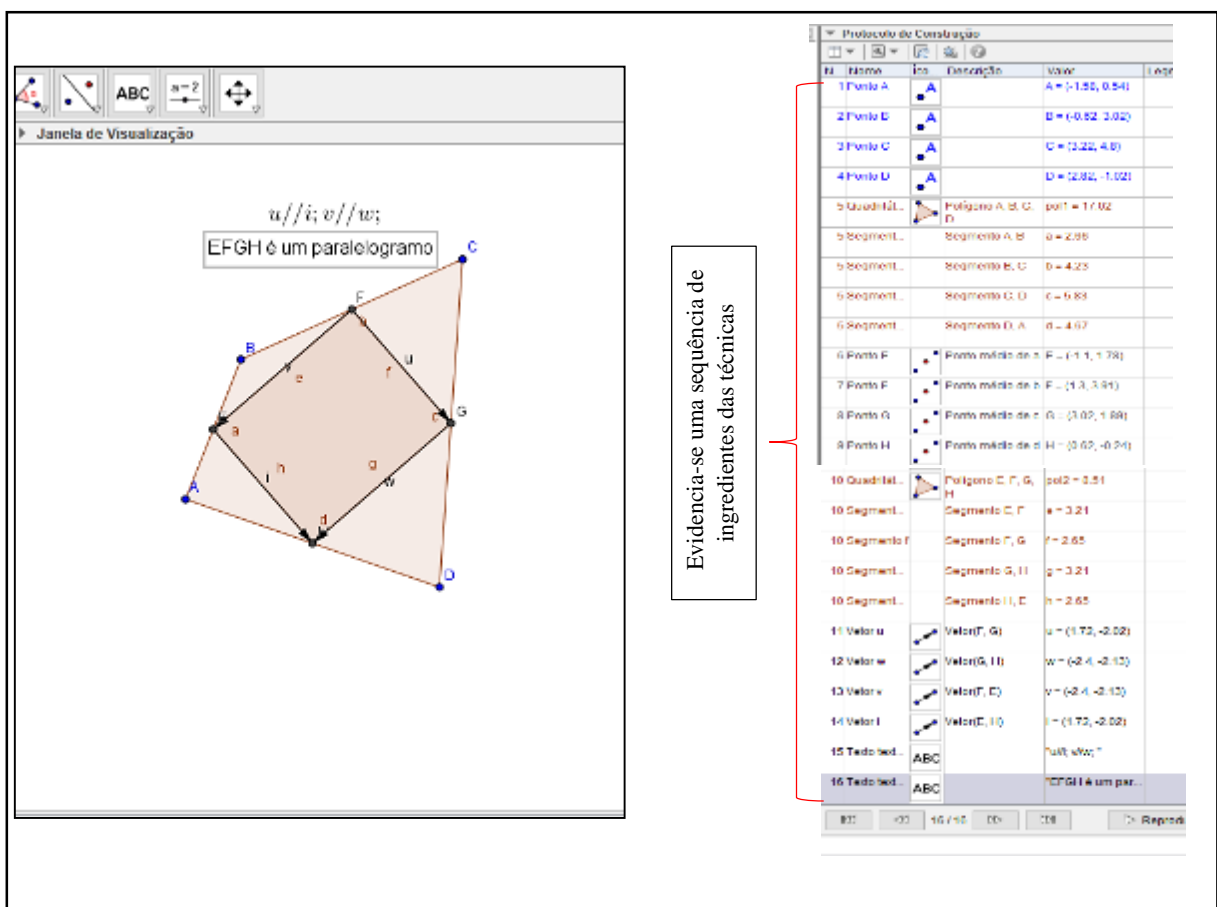
Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

As técnicas que, possivelmente, foram utilizadas pelo estudante encontram-se no quadro do lado direito à igualdade $\vec{QM} = \frac{1}{2} \vec{AC}$ ¹³⁸, descritas em termos de construções institucionais por meio das técnicas τ ou tarefas t_1, t_2, t_3 e t_4 , pois de acordo com Chaachoua e Bessot (2016, p.3), no quadro teórico “T4TEL uma técnica é definida como uma sequência de tipos de tarefas”. Esse autores também sinalizam que; “O escopo de uma técnica τ é o conjunto de tarefas realizadas por τ , denotado por $P(\tau)$.” (CHAACHOUA e BESSOT, 2018, p.121). Somase a essa perspectiva, que é possível notar a busca pelas características inerentes à definição de paralelogramo, como um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos e possuem mesmo comprimento e, conseqüentemente, dialoga com as recombinações praxeológicas (CHEVALLARD, 2018).

¹³⁸ É relevante destacar que esse resultado será demonstrado na questão 6.

A partir da leitura que fazemos do contexto vetorial apresentado nesta tarefa, foi possível identificar que os lados opostos são representantes de um mesmo vetor. Nesta perspectiva, as tarefas/técnicas elencadas ao lado da produção do estudante, objetivaram revelar técnicas tácitas, dentre elas destacamos: (τ_1)- soma de vetores, (τ_2) - substituição entre representantes vetoriais, (τ_3) - multiplicação de escalar por vetor, (τ_4)- propriedade da multiplicação de escalar por vetor. A construção realizada no GeoGebra demanda uma quantidade significativa de técnicas, como exposto, um recorte, no protocolo de construção.

Figura 66 - Soluções geométricas da 5ª questão em GG



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

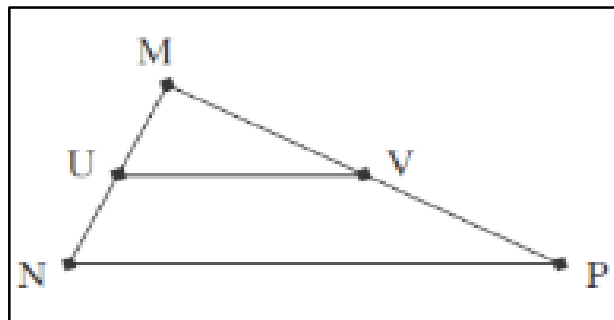
Chaachoua (2018, p. 14, tradução nossa¹³⁹) observa que “cada tipo de tarefa que é um ingrediente de uma técnica tem uma ou mais técnicas que, por sua vez, são expressas por um conjunto de tipos de tarefas.” Neste sentido, pode-se inferir que o protocolo de construção revela uma sequência de tarefas (t_1 : marcar uma sequência de pontos, ..., t_5 : construir um

¹³⁹ Remarquons que chaque type de tâches qui est ingrédient d'une technique a lui-même une ou plusieurs techniques qui s'expriment à leur tour par un ensemble de types de tâches.

quadrilátero a partir dos pontos, ..., t_6 : Determinar pontos médios, ...) que convergem para efetivação resolutiva da questão, além de expor traços do discurso tecnológico-teórico que acompanha cada etapa.

A sexta e penúltima tarefa, foi inspirada em Chevallard (2002, p. 5) com o seguinte enunciado: “Sejam M, N, P três pontos não alinhados. Seja U o ponto médio de MN e V o ponto médio de MP então $\overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{UV}$ ”. Evidenciado abaixo:

Figura 67 - Representação da sexta tarefa



Fonte: Chevallard (2002, p. 5)

Demonstração: Usando operações com vetores, temos:

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{UM} + 2\overrightarrow{MV} = 2\overrightarrow{UV}$$

Podemos representar a situação acima utilizando o GeoGebra e recorrendo a algumas de suas ferramentas para verificarmos se as propriedades dos objetos ostensivos revelados na janela de visualização possuem as características solicitadas, como por exemplo: a determinação dos pontos médios, quando usado o *comando ponto médio*, ou verificação do paralelismo entre os seguintes segmentos ao acionarmos a ferramenta que expõe as *relações entre objetos*. Em seguida, o autor questiona a existência e a unicidade de um triângulo, conforme enunciado no quadro abaixo.

Quadro 10 - Questão sobre a existência e unicidade

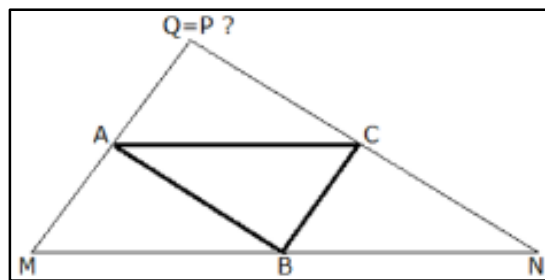
Sejam A, B, C três pontos não alinhados. Existe um triângulo MNP em que A, B, C são os pontos médios de seus lados? Se tal triângulo existe, é único?

Fonte: Chevallard (2002, p. 5)

Adotando o direcionamento de Chevallard (2002), apresentamos abaixo a demonstração deste resultado.

Existência: Dados os pontos A, B, C , construa os pontos $M = B + \vec{CA}$ e $N = B + \vec{AC}$, isto é, $\vec{BM} = \vec{CA}$ e $\vec{BN} = \vec{AC}$. Defina também, $P = N + 2\vec{BA}$ e $Q = M + 2\vec{BC}$, ou seja, $\vec{PN} = 2\vec{AB}$ e $\vec{MQ} = 2\vec{BC}$.

Figura 68 - Existência de um triângulo conhecidos os pontos médios



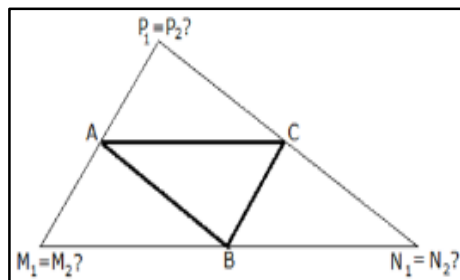
Fonte: acervo da autora (2018)

A existência do triângulo fica garantida se verificarmos que $Q = P$. De fato, esta igualdade é verdadeira, pois, ao fazer uso da questão anterior, obtivemos:

$$\vec{PQ} = \vec{PN} + \vec{NM} + \vec{MQ} = 2(\vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC}) = 2(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = 2\vec{AA} = \vec{0}.$$

Unicidade: Suponha que existam dois triângulos $M_1N_1P_1$ e $M_2N_2P_2$ de modo que A seja o ponto médio de P_1M_1 e P_2M_2 , B seja o ponto médio de M_1N_1 e M_2N_2 e que C seja o ponto médio de P_1N_1 e P_2N_2 .

Figura 69 -Unicidade de um triângulo conhecidos os pontos médios



Fonte: acervo da autora (2018)

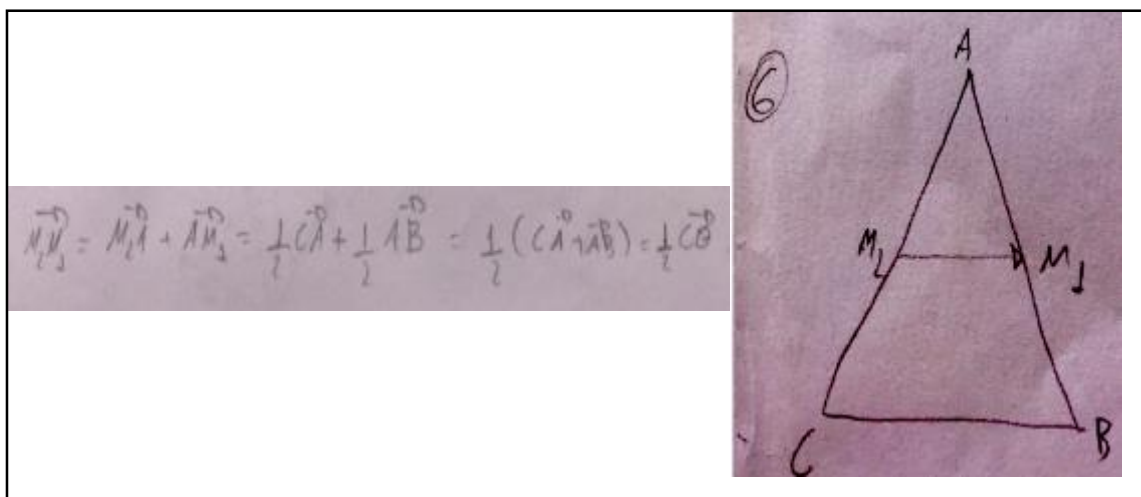
Por meio da questão anterior e as hipóteses acima, obtemos $\vec{M}_1\vec{N}_1 = 2\vec{AC} = \vec{M}_2\vec{N}_2$. Segue, portanto, que:

$$\vec{M}_1\vec{B} = \frac{1}{2}\vec{M}_1\vec{N}_1 = \vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{M}_2\vec{N}_2 = \vec{M}_2\vec{B}.$$

Desta forma, $M_1 = M_2$. Analogamente, é viável mostrar que, $N_1 = N_2$ e $P_1 = P_2$.

Nesta tarefa, também encontra-se fundamentada no discurso tecnológico teórico da questão anterior, porém direciona o olhar para a relação do paralelismo do terceiro lado em relação ao segmento que une os pontos médios dos outros dois lados do triângulo. O direcionamento seguido pela maioria dos discentes mobilizou técnicas que envolveram as operações: adição, multiplicação por escalar acrescido da propriedade distributiva. Vale ressaltar, que alguns estudantes não conseguiram alcançar o que foi solicitado no enunciado da questão. Quanto à recorrência da abordagem ostensiva, nota-se um aspecto dicotômico, pois emergiu, por parte do estudante, uma necessidade de representação e interpretação por meio do desenho da situação apresentada na questão, uma espécie de reafirmação ostensiva da figura que acompanhou a questão. Em outras palavras, foi verificado que alguns optaram em construir sua própria representação geométrica, dispensando o suporte da folha em que constam as tarefas como exposto a seguir:

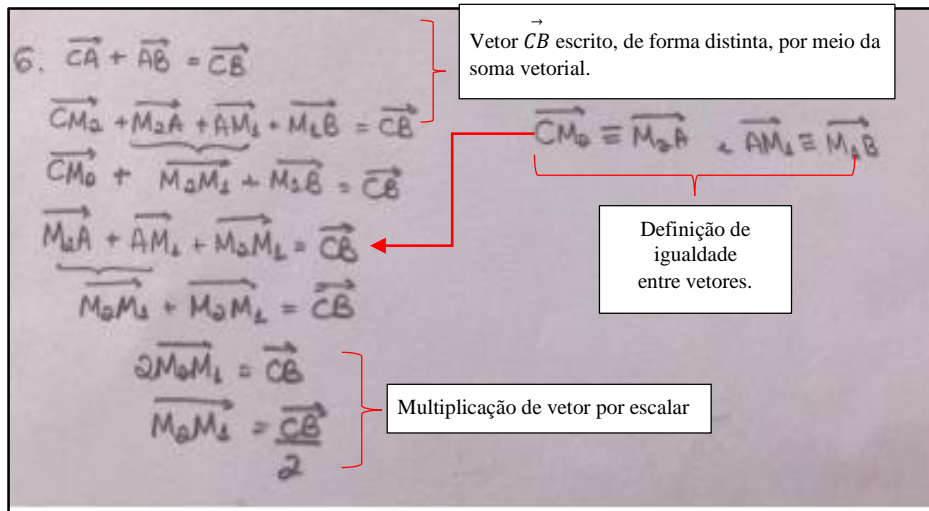
Figura 70 - Registro da resolução da tarefa 6



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Contudo, alguns preferem se apoiar nos elementos que foram apresentados e, a partir dos mesmos, desenvolver a prova guiados por um sequenciamento lógico.

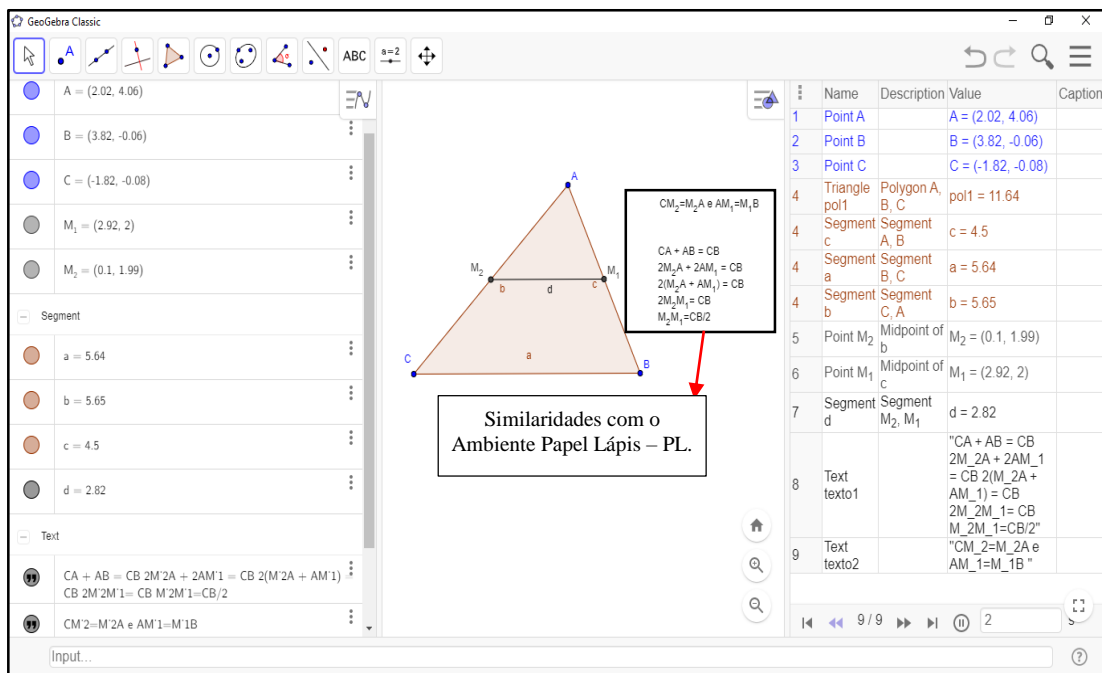
Figura 71 - Segundo registro da resolução da tarefa 6



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Ao estabelecer um comparativo entre as duas resoluções nota-se que as técnicas empregadas versaram sobre as mesmas operações, porém com trajetórias resolutivas distintas. Esta vertente também é revelada no desenvolvimento da resolução, no seio ambiente computacional do GeoGebra.

Figura 72 - Registro da resolução da tarefa 6 no GeoGebra

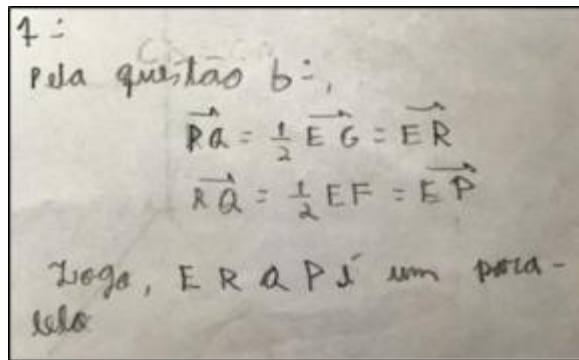


Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Percebe-se que a sequência de técnicas mobilizadas no ambiente do software não é suficiente para responder ao que foi demandado na tarefa, ou seja, provar que $\vec{M}_2\vec{M}_1$ é paralelo a \vec{CB} e igual a sua metade. Assim, pensamos que para chegarmos a tal conclusão faz-se necessário incluir novos passos que proporcionem o que se deseja mostrar. Essa perspectiva é ratificada com a necessidade de inclusão do texto exposto na janela de visualização.

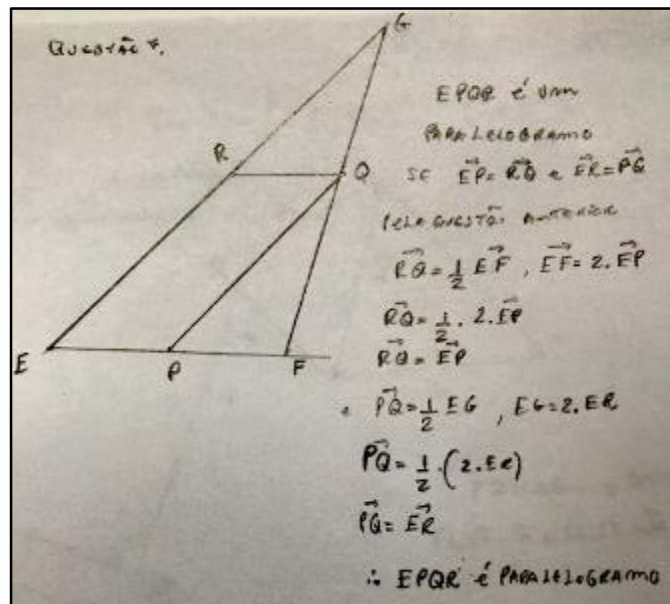
E finalmente, e não menos importante que as demais, a última questão da lista trabalhada no minicurso apresenta graus de similaridade com a anterior, em que pode-se fazer uso do que foi provado no ambiente PL.

Figura 73 - Registro da resolução da sétima tarefa (A)



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Figura 74 - Registro da resolução da sétima tarefa (B)

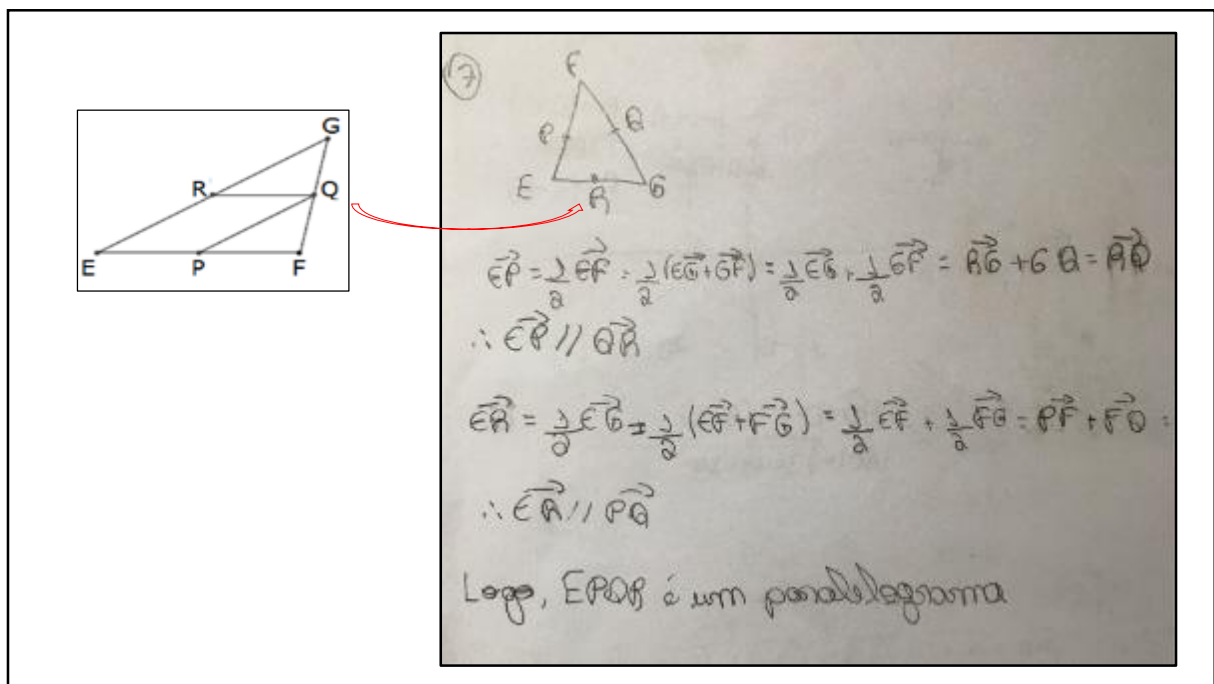


Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Os dois registros, fazem referência ao processo resolutivo da sétima questão e seguem direcionamentos similares, porém o discente (A) opta por apoiar-se integralmente na resolução da sexta questão e conclui a partir da conclusão produzida na tarefa anterior. No entanto, o estudante (B) prefere expor as condições que devem ser satisfeitas para que EPQR seja um paralelogramo, ou seja, primeiramente ele evoca o suporte tecnológico teórico o qual possibilita gerar um paralelogramo. Em um segundo momento, faz-se uso dos elementos que estão presentes na sexta questão e faz referência ao segmento constituído a partir dos pontos médios de dois lados do triângulo.

A próxima construção resolutiva apresenta uma característica que despertou a nossa atenção, pois o discente aplicou uma rotação ao triângulo, possivelmente com a intenção de visualizá-lo na posição convencionada desde as séries iniciais, em que o estudante é conduzido a pensar que um triângulo tem apenas uma base e que esta assume a posição de paralelismo com a borda inferior da folha de papel.

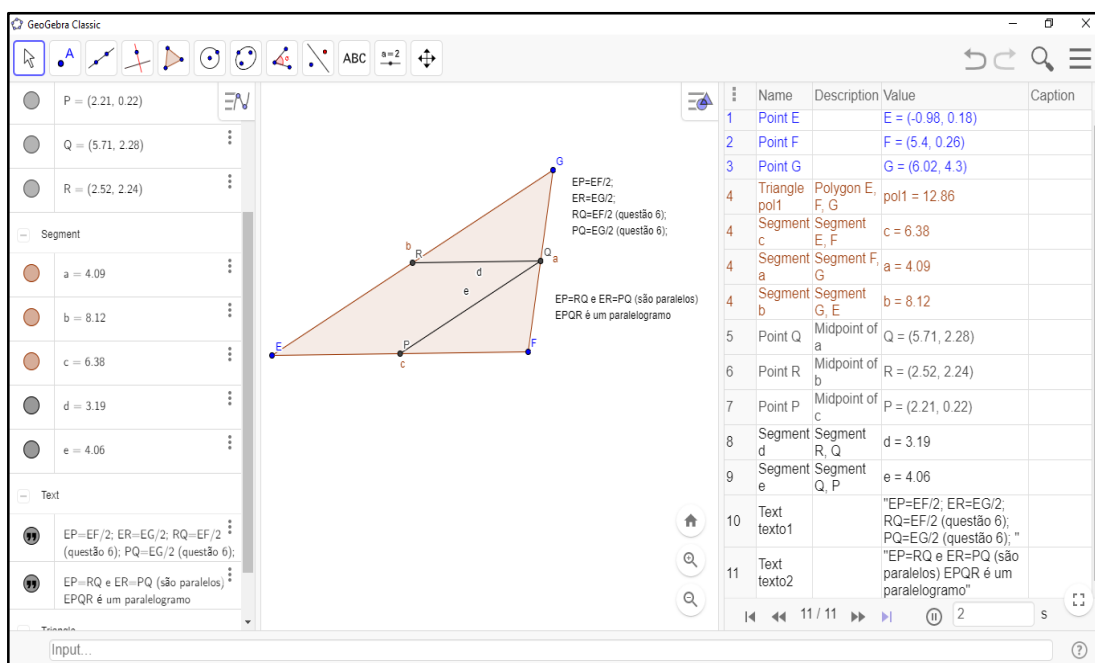
Figura 75 - Registro da resolução da sétima tarefa (C)



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

No que se refere ao GeoGebra, percebe-se a mesma limitação detectada na análise da prova apresentada na sexta questão. Essa vertente é sanada com a inserção do texto enquanto suporte na intenção de cumprir o que foi solicitado.

Figura 76 - Registro da resolução da sétima tarefa no GeoGebra



Fonte: dados produzidos no minicurso (2018)

Contudo, não podemos negar que, mesmo frente às limitações vinculadas aos aspectos das demonstrações, o GeoGebra se apresenta como um dispositivo didático como destacado por Chevallard (2002),

uma evolução vai enriquecer conjuntamente o trabalho pedido ao professor e o complexo de dispositivos didáticos, novos ou renovados, que, na sala de aula ou ao lado da sala (mas no estabelecimento), procurará “interromper” a aula expositiva: trabalho a meia aula, trabalho prático, tutoria, módulos, estudos supervisionados, etc. (CHEVALLARD, 2002, p. 6, tradução nossa¹⁴⁰)

A partir desses termos, o desenho da nossa investigação se ampliará e será enriquecido com o uso dos dispositivos didáticos em aulas cujo tema são os vetores, tendo como intuito auxiliar a compreensão do conceito deste objeto matemático. Dito isto, resumamos nossas impressões acerca desse contato prévio pautado em situações resolutivas de tarefas vetoriais. Assim, revela-se uma maneira de romper com a tradição monotécnica, pois as tarefas multiplicam-se e diferenciam-se.

¹⁴⁰ une évolution va enrichir tout ensemble le travail demandé au professeur et le complexe des dispositifs didactiques, nouveaux ou renouvelés, qui, dans la classe ou à côté de la classe (mais dans l'établissement), chercheront à « casser » la classe-cours magistral : travail en demi-classe, travaux pratiques, tutorat, modules, études surveillées, etc.

4.3 SÍNTESE ECOLÓGICA DAS PRÁTICAS EM UM CENÁRIO TECNOLÓGICO TEÓRICO

O minicurso assumiu o papel de um ecossistema que permitiu a análise do complexo praxeológico. Primeiramente, foram observados traços do nicho e habitat (CHEVALLARD, 1994) dos vetores demarcados por meio das concepções dos partícipes, ou seja, onde residiam os vetores e quais funções assumiam. Assim, procurou-se valorizar as ideias intuitivas dos conceitos, antes de trabalhar com o processo de abstração e de dedução de resultados teóricos, possibilitando extrair dos hábitos praxeológicos, segundo o viés de assujeitamentos pessoais, revelados nas questões preliminares que já evidenciam algumas incompletudes no que tange a este saber.

Isto posto, partiu-se para o estudo das resoluções das tarefas nos ambientes Papel Lápis - PL e GeoGebra - GG. A primeira questão se apresentou como um convite para estabelecer elos com os pressupostos do Paradigma de Questionamento do Mundo (CHEVALLARD, 2009; 2010; 2012), em especial, por meio da vinculação do funcionamento do “ (...) sistema didático S (X; y; O); (...) com a prerrogativa do professor y não assumir o centro do trabalho de X sob a direção de y, este último deixa de "professar" para se tornar um diretor de estudos ou diretor de investigação. ” (LADAGE e CHEVALLARD, 2011, p.2, tradução nossa¹⁴¹). Nesse sentido, pode-se tomar como exemplo um dos questionamentos iniciais, o qual versou sobre a direção e sentido do vetor nulo, aspecto este já sinalizado como um dos equívocos provocados devido às trocas entre direção e sentido revelados no elenco de questões preliminares.

Os distintos caminhos resolutivos percorridos pelos discentes, alimentaram e evidenciaram um sistema de técnicas, as quais versaram sobre: módulo, direção e sentido, ponto médio, adição e subtração vetorial, multiplicação por escalar, propriedades e paralelismo. Nas quatro primeiras questões, os gêneros de tarefas estavam pautados na obtenção das somas e subtrações acrescidas das representações imersas no domínio algébrico, geométrico e numérico (FARIAS, 2010). Nas demais, o cerne foram as provas e as demonstrações cujo objetivo foi o de propor problemas que induzissem os alunos a assumir a responsabilidade pela sua resolução e, conseqüentemente, delegar a verificação dos meios de validação por eles utilizados. Nesse sentido, Ballacheff (2000, p.4, tradução nossa¹⁴²) sublinha que “a demonstração é uma

¹⁴¹ (...) sistema didático S (X; y; O); (...) avec prerrogativa do professor y mas que está no centro do trabalho de X sob a direção de y, este último deixa de "professar" para se tornar um diretor de estudos ou diretor de de investigação.

¹⁴² la demostración sea una herramienta de prueba, una manera de validar un enunciado, está oculto bajo la concepción de la demostración como género del discurso, cuya base esencial es la estructura.

ferramenta de prova, uma forma de validar uma declaração, que está oculta sob a concepção da demonstração como um gênero de discurso, cuja base essencial é a estrutura.”

A visibilidade das provas ficaram obscurecidas nas produções realizadas no contexto do GeoGebra, pois nos registros das construções resolutivas, realizadas com o suporte do software, evidenciaram que os sujeitos recorreram ao texto para complementar a prova solicitada na questão. Contudo, Lima et al. (2018, p.201), sinalizam que ao trabalhar com “atividades sobre provas e demonstrações matemáticas com o uso do aplicativo GeoGebra, proporciona-se uma alternativa ao incentivo de se conjecturar, argumentar, provocar raciocínio hipotético-dedutivo e articular níveis de pensamento geométrico.”

Em direcionamento análogo, Yang(2011) pontua que os estudantes devem começar pelas figuras, por entender os termos, os conceitos e os símbolos matemáticos, para efetivamente perceberem o que se pretende demonstrar. Neste contexto, Amado et al. (2015, p. 638) pontuam que “as novas tecnologias, em particular o computador e os ambientes de geometria dinâmica, podem dar um importante contributo. (...) permitindo novas formas de abordar e explorar os problemas geométricos.”

Assim, fundamentados no que pressupõe Balacheff (2000), destaca-se a existência de uma linha tênue que diferencia provas e demonstrações, ou seja, provas e demonstrações não são palavras sinônimas. Neste sentido, Balacheff (2000) declara que,

Quando uma explicação é reconhecida e aceita, é conveniente projetá-la com um termo que permita distingui-la do sujeito locutor. Em matemática, é claro que o termo "demonstração" não é o mais conveniente porque seu significado é muito específico. Seleccionamos o termo prova. (BALACHEFF, 2000, p. 12, tradução nossa¹⁴³).

Desse modo, nos enunciados da quinta e sétima questões, optou-se por deixar implicitamente a palavra “prova” sendo revelada apenas na sexta questão. As provas apresentadas no ambiente PL e, posteriormente, no GG direcionaram alguns estudantes a expor a falta de um entrelaçamento inequívoco entre hipótese e tese. No entanto, não podemos esquecer que o GeoGebra proporciona um dinamismo, o qual gera maior oportunidade de investigação, de visualização e de criação de argumentos matematicamente válidos.

Outro aspecto, que merece destaque está relacionado às distintas tarefas: 5^a, 6^a e 7^a que demandaram o emprego de repetidas técnicas: τ_{PL} - Soma de vetores; Multiplicação por escalar, Propriedade distributiva e paralelismo entre vetores. O suporte tecnológico-teórico pautou-se na geometria analítica e na álgebra linear, por meio das combinações lineares presentes nas

¹⁴³ Cuando una explicación es reconocida y aceptada, conviene para diseñarla disponer de un término que permita marcar su distinción del sujeto locutor. En matemáticas es claro que el término “demostración” no es el más conveniente debido a que su acepción es muy específica. Seleccionamos el término prueba.

resoluções. Assim, o mapeamento das soluções das tarefas que foram trabalhadas no minicurso em questão, possibilitou análises mais aprofundadas no âmbito do ensino e aprendizagem dos vetores. Verificamos que, apesar da existência de alguns elementos conceituais não bem definidos, os participantes do curso conseguiram integrar o GeoGebra à construção dos procedimentos para obtenção de uma resposta satisfatória, ou parcialmente, em casos sinalizados nas questões trabalhadas.

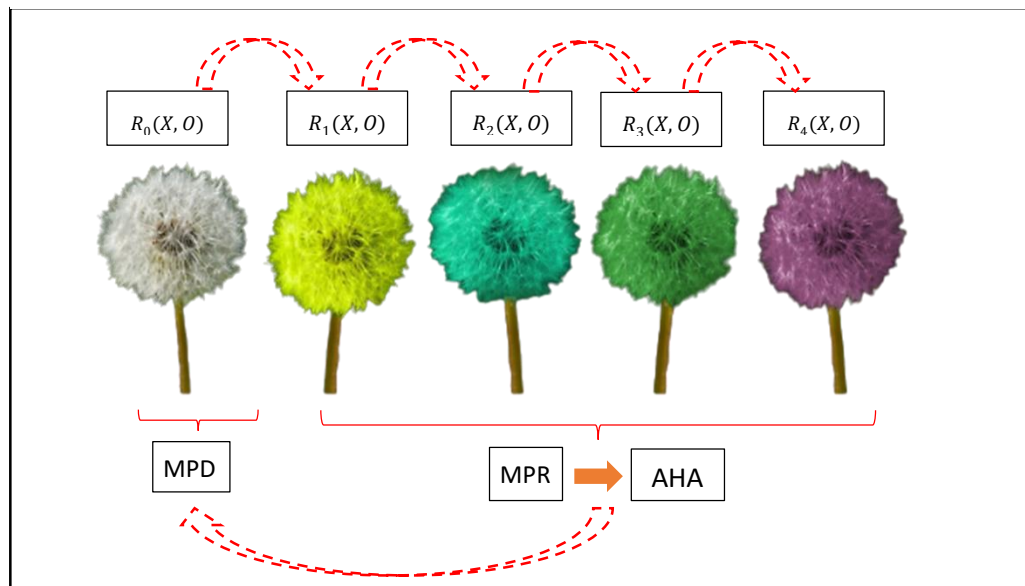
Isto posto, destaca-se a manifestação das nuances de um Modelo Praxeológico de Referência – MPR. Esse se estrutura por uma rede de praxeologias matemática e didática, as quais permitiram traçar mapeamentos que dialogam com as possibilidades do uso de distintos Dispositivos Didáticos, no âmbito do ensino e aprendizagem vetorial. Em particular, o MPR se apresenta com a função de questionar alguns alcances e limitações no seio das tarefas e técnicas direcionadas pelas recombinações praxeológicas.

Nestes termos o MPR, exporá pontos de vistas da pesquisadora, o qual possui um caráter relativo e provisório, pois de acordo com Gascón (2018), eles podem ser avaliados, corrigidos e contrastados. Adita-se a isso que,

o MPR é uma resposta provisória inicial às questões que fazem parte da dimensão epistemológica dos problemas didáticos envolvidos, pois a OM de referência é aquela que o pesquisador coloca à prova da contingência e que sofre para isso constantes remodelações. (BOSCH, 2004, p.117).

A partir dessa perspectiva, o MPR é em si um resultado didático e também uma ferramenta para conduzir análises didáticas. Em síntese, “são considerados como sistemas de referências úteis para analisar os modelos dominantes nas diferentes instituições.” (GASCÓN, 2018, p. 59). Dessa forma, é pertinente revelar como se estruturou a tese em conjunto com as hipóteses que subsidiaram o desenho inspirado da Engenharia Didática - ED que será materializada nos próximos capítulos. No intuito de deixar mais claro para o leitor, é apresentado o seguinte esquema:

Figura 77 - Esquema do desenho da tese



Fonte: acervo da autora (2020)

A título de ilustração, parafraseando Chevallard (1985) quando este apresenta similitude entre uma música executada por múltiplos instrumentos e a transposição, é possível observar que quando uma música é transformada do violão ao piano, por exemplo, é a mesma peça, a mesma música, mas a diferença é que ela está escrita de maneira distinta para ser interpretada enquanto um instrumento diverso. Nesse sentido, pode-se estabelecer a seguinte analogia, pois o timbre nos permite distinguir se sons de mesma frequência foram produzidos por instrumentos diferentes. Por exemplo, quando ouvimos uma nota tocada por um saxofone e, depois, a mesma nota, com a mesma altura, produzida por um trompete, podemos, imediatamente, identificar os dois sons como tendo a mesma frequência, mas com características sonoras muito distintas.

Nos moldes descritos na tese, ao referenciar no nível das praxeologias é viável apresentar uma tarefa, evidenciar ecologias para diferentes timbres em conjunto com a análise dos mesmos no entendimento da música escutada e executada pelos protagonistas dos Sistemas Didáticos do CLM-UEFS. Nesta perspectiva, consideramos que o trânsito entre as relações pessoais possibilita descrever como as recombinações praxeológicas permitem caracterizar e examinar as condições e restrições pautadas no que se faz e do que não se faz no âmbito do Modelo Praxeológico Dominante - MPD, guiado pelo Modelo Praxeológico de Referência - MPR e pela Engenharia Didática - ED. Pois concebemos que o trabalho com diferentes Dispositivos Didáticos - DD permite construir recombinações praxeológicas, despertando

novas relações pessoais dos estudantes com os vetores. O que nos direciona a especificar as seguintes hipóteses:

1. A partir do desenho e execução de tarefas vetoriais, subsidiadas por distintos Dispositivos Didáticos no âmbito do CLM-UEFS, é possível enriquecer e modificar a bagagem praxeológica e incorporar esses elementos às práticas dos estudantes;
2. É possível promover modificações e evoluções nas relações pessoais do estudantes com os vetores, no seio de CLM-UEFS, por meio da resolução de tarefas repertoriadas por distintas técnicas no seio do AHA¹⁴⁴;
3. Ao ampliar o repertório de técnicas empregadas nas resoluções de tarefas vetoriais é viável ofertar aos estudantes possibilidades de trilhar por distintos Caminhos de Práticas Pessoais – CPP¹⁴⁵.
4. A viabilidade de análise e observação das trajetórias resolutivas, em termos de Dispositivos Didáticos – DD, gerenciados pelos GT, pode promover maior engajamento e participação no processo de conhecimento vetorial.

De acordo com os direcionamentos de Artigue (2014),

o desenho e análise a priori, hipóteses de pesquisa são engajadas no processo. O design requer uma série de escolhas, do global ao local. Eles determinam variáveis didáticas, que condicionam as interações entre alunos e conhecimentos, entre alunos e entre alunos e professores, daí as oportunidades que os alunos têm de aprender. (ARTIGUE, 2014, p. 160)

A autora subdivide essas variáveis em duas categorias: macro didáticas ou globais e micro didáticas ou locais, assumindo uma ordem geral ou dependente do conteúdo matemático estudado, subdividida em três dimensões: epistemológica (associada às características do saber), cognitiva (vinculada ao aspecto cognitivo dos sujeitos envolvidos no processo de aprendizagem) e didática (associada às características do sistema de ensino, no qual os sujeitos estão inseridos. De igual modo, Chaachoua e Bessot (2016) impõem especial atenção aos valores das variáveis de um Gerador de Tipos de Tarefas-GT para distinguir um ponto de vista triplo das variáveis: epistemológico, institucional e didático. Essa caracterização aparece no cerne do funcionamento dos GTs e se imbricam às alterações dos valores das variáveis que desencadeiam uma gama de possíveis técnicas, que retratam condições e restrições enquanto variáveis didáticas disponíveis para os protagonistas do Sistema Didático - SD. Nos próximos capítulos esses elementos serão melhor delineados.

¹⁴⁴ Ambiente Híbrido de Aprendizagem.

¹⁴⁵ Será descrito com mais detalhes no Capítulo VI.

CAPÍTULO V

CONCEPÇÕES ACERCA DA CONSTRUÇÃO DE ESTRUTURAS DIDÁTICAS E MATEMÁTICAS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE VETORES À LUZ DO MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERÊNCIA - MPR

Neste capítulo, de posse das hipóteses, esta pesquisa utiliza a lente de observação inerente ao Modelo Praxeológico de Referência - MPR, que foi previamente idealizado e gradualmente ampliado, por meio da operacionalização dos Geradores de Tipo de Tarefas – GT. Esses geradores funcionam como dispositivos de produção de tipos de tarefas regidos e alimentados por distintas variáveis que assumem a esfera estrutural da modelação, associada ao papel de ferramenta metodológica em um processo de modelagem (CHAACHOUA, 2018). Dito isso, considera-se pertinente destacar a concepção de Chevallard (1999) acerca das tarefas,

Na raiz da noção de praxeologia, estão as noções conjuntas de tarefa t e de tipo de tarefas, T . Quando uma tarefa t faz parte de um tipo de tarefas T , ela será escrita $t \in T$. Na maioria dos casos, uma tarefa (e o tipo de tarefas associado) é expressa por um verbo: limpar a sala, desenvolver a expressão literal dada, dividir um inteiro por outro, cumprimentar um vizinho, ler um manual de emprego, subir uma escada, etc. (CHEVALLARD, 1999, p.2)

Agrega-se à noção de tarefa, ou melhor, de tipo de tarefas ao considerar um objeto relativamente preciso como subir uma escada que é uma espécie de tarefa, mas subir simplesmente não é. Da mesma forma, calcular o valor de uma função em um ponto é um tipo de tarefa, mas calcular, simplesmente, é o que se denota como um gênero de tarefas, que requer um complemento verbal, o qual é solicitado na forma de diferentes tipo de tarefas, cujo conteúdo é estritamente especificado a exemplo,

Calcular ... é, como já foi dito, um gênero de tarefas; mas calcular o valor (exato) de uma expressão numérica contendo um radical é um tipo de tarefa, o mesmo que calcular o valor de uma expressão contendo a letra x quando x assume um certo valor. Durante os anos de faculdade, o gênero calcular ... é enriquecido com novos tipos de tarefas; O mesmo acontecerá no instituto, onde o aluno vai primeiro aprender a calcular com vetores, depois a calcular uma integral ou primitiva, etc. E o mesmo se repetirá, é claro, com os gêneros demonstrar ..., (CHEVALLARD, 1999, p.2)

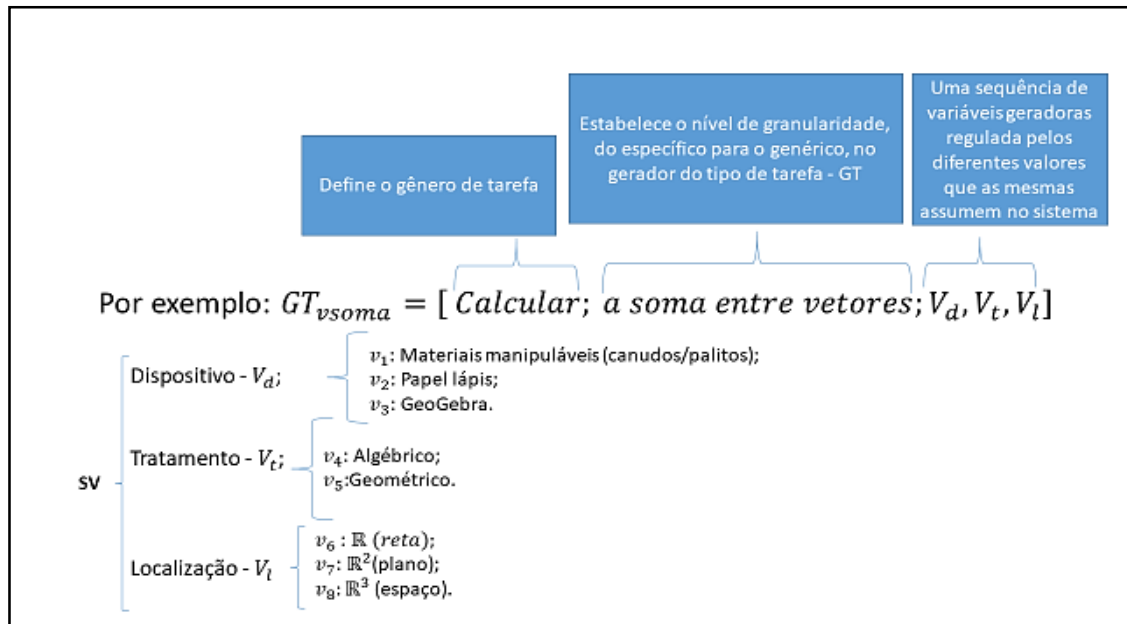
Em sentido estrito, concordamos com a declaração de Chaachoua (2019, não paginado): “o que o pesquisador observa em determinada instituição são tarefas, textos relacionados ao conhecimento e ao saber-fazer”. Acrescenta-se à concepção de Chevallard (1998, p. 91) de que “toda atividade humana pode ser modelada em termos de praxeologias”. Ou seja, admite-se,

com efeito, que toda atividade humana regularmente exercida pode ser descrita com um único modelo, que aqui se resume com a palavra praxeologia.

Essas e outras questões permeiam a trajetória desta pesquisa, bem como os pressupostos da TAD (CHEVALLARD, 1996; 1998; 1999; 2001; 2006) que apresentam como ponto crucial, situar a atividade matemática e, conseqüentemente, a atividade de estudo da matemática, no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. Dessa forma, ratifica-se o nosso precípua teórico, o qual vem se propagando como sustentação teórica de diversas investigações vinculadas ao campo da Educação Matemática, em especial pesquisas que contemplam a Didática da Matemática. Como exemplo deste panorama é possível citar o quadro T4TEL (T4, em referência ao quarteto praxeológico, isto é, tarefa, técnica, tecnologia e teoria, e TEL, de *Technology Enhanced Learning*) (CHAACHOUA, 2015), que também se alimenta dos pressupostos teóricos da TAD, além de agregar duas extensões: a praxeologia pessoal (CROSET; CHAACHOUA, 2016) e a noção de variável que, entre suas funções, estrutura e formaliza tipo de tarefas (CHAACHOUA; BESSOT, 2016). Esse aspecto possibilitou propor modelos praxeológicos como ferramentas descritivas da relação institucional, permitindo diálogos com a abordagem praxeológica (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

No campo do T4TEL, encontram-se também os Geradores de Tarefas (GT), os quais seguem a configuração do estatuto de tipo de tarefas (verbo, complemento fixo) aditado a um sistema de variáveis. Nesse contexto, um GT tem a seguinte configuração: “GT = [Verbo de ação; Complemento fixo; Sistema de variáveis]” (CHAACHOUA; BESSOT, 2016), tendo como norte a questão de pesquisa em que se apoia a investigação. A título ilustrativo, o GT funciona como uma máquina que produz tarefas, impulsionado pela questão de pesquisa e pelo Sistema de Variáveis. Abaixo, segue uma exemplificação do GT.

Figura 78 - Exemplo de um Gerador de Tipo de Tarefas e suas especificidades



Fonte: acervo da autora (2019).

As noções de variáveis e de Gerador de Tipo de Tarefas são dois aportes importantes do T4TEL. Entretanto, neste primeiro momento, modelamos um GT um tanto diferenciado e com menor abrangência, se comparado ao proposto inicialmente, pois é apresentado um sistema de variáveis estabelecendo uma categorização de valores de uma ou mais variáveis do GT, como evidenciado na figura 78, que, por consequência, produz um conjunto estruturado de subtipos de tarefas. Chaachoua e Bessot (2018) destacam que dentre as funções das variáveis em operação num GT, estão: gerar subtipos de tarefas e caracterizar os escopos das técnicas. Também podemos modificar o nível de granularidade e propiciar o trânsito de tarefas específicas ou locais para tarefas mais gerais ou globais, tudo isso regulado pelas intenções do pesquisador.

Destarte, um gerador de tipo de tarefas não é um tipo de tarefa. Sua função consiste em engendrar tipos de tarefas de acordo com a estruturação hierárquica definida pelas variáveis (CHAACHOUA, 2018). Outro aspecto que se considera de relevância ímpar, é a concepção empreendida pelo referido autor ao admitir que os valores das variáveis podem ser hierarquizados. Esse ponto de vista nos leva a pensar em estabelecer relações com os distintos níveis de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2002), posteriormente denominados como níveis de condições e restrições (CHEVALLARD, 2013), requisito primeiro para proceder análises associadas aos graus de codeterminação didática. Neste sentido, é relevante destacar que níveis hierárquicos da escala de codeterminação subsidiam o complexo

praxeológico e, segundo Chevallard (2002), ajudam a definir a ecologia das organizações matemáticas e das organizações didáticas através de pontos de apoio oferecidos por condições e restrições que lhes são impostas.

Sob esta vertente, é pertinente sublinhar que a relação institucional de um objeto para uma determinada posição institucional é moldada e re-moldada por um conjunto de tarefas que devem ser cumpridas, por intermédio de algumas técnicas, pelas pessoas que ocupam essa posição. Assim, “é frente ao cumprimento de diferentes tarefas que a pessoa, ao longo de sua vida, em diversas instituições, nas quais ela é sujeito, sucessiva ou simultaneamente, estabelece relações pessoais com o objeto considerado” (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 6).

A partir das palavras de Bosch e Chevallard (1999, p.84, tradução nossa¹⁴⁶), “a vida institucional é composta por uma ampla gama de tarefas executadas por "modos de fazer" institucionalizados, (...)”, denominados técnicas. Essa afirmação se entrelaça a um dos postulados da TAD, segundo a qual,

[...] a análise da atividade humana que leva à identificação de entidades mínimas, as praxeologias, que podemos designar pela fórmula $[T / \tau / \theta / \Theta]$, pois são constituídas por um tipo de tarefas T, uma técnica τ para realizar as tarefas do tipo T, uma tecnologia θ que justifica e torna inteligível a técnica τ , e finalmente uma teoria, que geralmente é denotada Θ , que justifica e esclarece a tecnologia θ , e em muitos casos até permite que ela seja gerada. (CHEVALLARD, 2006, p. 4, tradução nossa¹⁴⁷)

No entanto, o T4TEL (CHAACHOUA, 2015) revela-se como um modelo matemático didático que ultrapassa as fronteiras do que foi apresentado na TAD e avança em direção a uma proposta inovadora que promove a inclusão, nas análises e produção de tipo de tarefas, da noção de variável (CHAACHOUA; BESSOT, 2016), que advém da Teoria das Situações Didáticas (TSD) (BROUSSEAU, 1997), a fim de formalizar e estruturar tipo de tarefas, tido como principal objetivo deste modelo, além de concentrar especial atenção para praxeologias pessoais (CROSET e CHAACHOUA, 2016). Considerações como estas, nos conduzem a indagar: quais são os tipos de tarefas e técnicas que integram as praxeologias institucionais onde se faz intervir a abordagem vetorial no seio do CLM-UEFS? E quais elementos tecnológico-teóricos descrevem e justificam essas práticas, organizadas na perspectiva deste objeto? Quais os ingredientes que compõem as técnicas, tecnologias e teoria quando o objeto de estudo são os vetores?

¹⁴⁶ La vie institutionnelle est donc faite d'un large éventail de tâches accomplies selon des « manières de faire » institutionnalisées, (...)

¹⁴⁷ L'analyse de l'activité humaine conduit à dégager des entités minimales, les praxéologies, qu'on peut désigner par la formule $[T / \tau / \theta / \Theta]$, parce qu'elles sont faites d'un type de tâches T, d'une technique τ pour accomplir les tâches du type T, d'une technologie θ qui justifie et rend intelligible la technique τ , enfin d'une théorie, que l'on note usuellement Θ , qui justifie et éclaire la technologie θ , et permet même, en nombre de cas, de l'engendrer.

Para elucidarmos, inicialmente, as concepções acerca da noção de variável é crucial visitarmos sua gênese na TSD (BROUSSEAU, 1986), em que o cerne é constituído pela modelação de um conhecimento por uma situação. Em mesmo direcionamento, Chaachoua e Bessot (2016, p. 2) empreenderam a seguinte leitura interpretativa: “Situações são modelos mínimos para estudar como um conhecimento e intervém nas relações particulares que uma pessoa estabelece com um meio para exercer determinada ação”. No entanto, o cenário revelado, até o momento, permanece na esfera do genérico e pode adquirir um grau mais específico ao dirigir a nossa lupa investigativa para uma sala de aula que tenha como objeto de estudo um ente matemático. Esse caráter sinaliza escolhas e, nesse juízo, caracteriza os primórdios das variáveis de uma situação didática. De acordo com Brousseau (1986):

O salto informacional consiste, depois de encontrar uma situação fundamental que torna uma noção de "trabalho", escolhendo primeiro os valores de suas variáveis de tal forma que o conhecimento prévio dos alunos permita elaborar estratégias efetivas e explorar as características da situação, as restrições, os objetivos, as regras ... e sem modificar as regras do jogo, alterando os valores das variáveis de modo a tornar a complexidade da tarefa muito maior. (BROUSSEAU, 1986, p.23)

Uma das finalidades das escolhas das variáveis consiste em fazer emergir os conhecimentos prévios dos estudantes na elaboração de estratégias para perscrutar a situação. Neste campo, ao observar as influências e efeitos das variáveis na condução das situações didáticas, somadas às condições e às restrições institucionais, torna-se possível desenvolver associações acerca da relatividade institucional do conhecimento, propiciando analisar e integrar uma abordagem de comportamentos não esperados pela instituição, especialmente os erros dos alunos pela introdução da praxeologia pessoal (CHAACHOUA, 2010; CROSET e CHAACHOUA, 2016; CHAACHOUA, 2018), como assevera o autor:

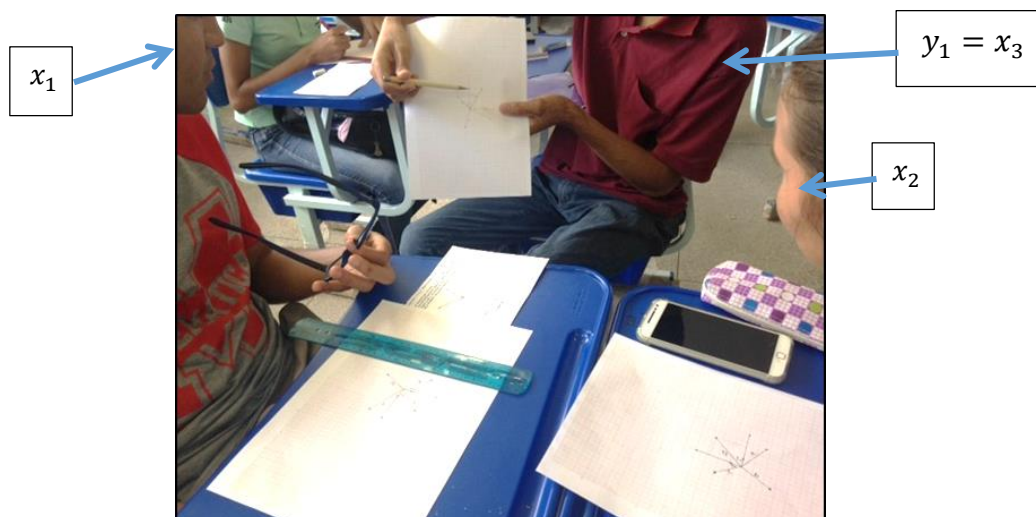
As restrições e condições definidas por uma instituição restringirão não apenas o tipo de tarefas, mas também variáveis ou valores possíveis de uma variável de um tipo de tarefa institucional. Por exemplo, no início da escola primária (3-6 anos) nos limitamos a números inteiros inferiores a 30. Assim, “uma variável e seus valores institucionais modelam condições e restrições explícitas ou implícitas (que se enquadram nos níveis da escala de codeterminação) sob as quais uma praxeologia existe ou pode existir institucionalmente” (CHAACHOUA, 2018, p. 7).

Ele exemplifica uma limitação provocada por condições e restrições institucionais, na esfera da escola primária, que, como resultado, afetam substancialmente os possíveis valores que as variáveis poderiam assumir. Em curso proferido em junho de 2018, para o Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências – PPGEFHC, o professor Hamid Chaachoua (2018, não paginado) declarou que: “a noção de variável aparece acima de tudo como uma ferramenta metodológica em um processo de modelagem, associado à análise a

priori de uma situação particular ou fundamental”. Tomando como base as concepções elencadas até o momento, pode-se inferir: Quais são as variáveis que provavelmente agirão sobre as apropriações do conhecimento vetorial? Com o intuito de apontar caminhos para produção de possíveis respostas ao questionamento acima, conjecturamos que o primeiro passo a ser dado segue o direcionamento de uma apreciação em conjunto com as praxeologias pessoais (CHAACHOUA, 2010; CROSET e CHAACHOUA, 2016) e seu vínculo com o equipamento praxeológico (CHEVALLARD, 2009) – ponto que será contemplado posteriormente.

Conforme exposto, os pressupostos teóricos da TAD serão nossa “bússola”, ao sinalizar quais caminhos trilhar na construção da presente investigação. Acrescida a essa base teórica, agrega-se uma abordagem flexível (DREYFUS, 1991), em contraposição à rigidez matemática (SILVA *et al*, 1999). Esta junção provocará alterações no meio, com o intento de desencadear modificações nas relações pessoais com o objeto vetor. Assim, é possível nos afastarmos do Sistema Didático Principal (SDP), $S(X, Y, O)$, e nos aproximarmos de Sistemas Didáticos Auxiliares (SDA), como por exemplo: $S(X; \emptyset; O)$ ou $S(x_1, x_2; \emptyset; O)$, exemplificado na imagem seguinte:

Figura 79 - Exemplo do Funcionamento de Sistema Didático Auxiliar (SDA)



Fonte: Goulart e Farias (2019, p. 309).

A dinamicidade que envolve os diferentes Sistemas Didáticos – SDs proporciona uma análise ampliada dos ecossistemas¹⁴⁸ e das inter-relações entre as tarefas que integram os

¹⁴⁸ Entendemos ecossistema como sendo o local onde se desenvolve um determinado sistema que possui uma ecologia própria, no caso em estudo, o sistema didático (ARTAUD, 1998).

objetos de ensino, indivíduos e membros de uma determinada instituição. Assim, a incorporação do T4TEL,¹⁴⁹ por meio das extensões e formalização do modelo Praxeológico, intermediado pelas praxeologias pessoais (CROSET; CHAACHOUA, 2016) e pela noção de variável (CHAACHOUA; BESSOT, 2016), dialoga em certo sentido com a declaração de Chevallard (1999, p. 9): “Enfim, tarefas, tipos de tarefas, gêneros de tarefas não são dados da natureza: são ‘artefatos’, ‘obras’, construções institucionais, cuja reconstrução em tal instituição, por exemplo, em tal classe, é um problema em si, que é o próprio objeto da didática.”

Assim, a comunicação estabelecida entre a TAD e o T4TEL obedece a um processo dinâmico pois, de forma explícita ou implícita, os alicerces deste arcabouço teórico transitam constantemente pelo modelo aludido. O que significa afirmar, que o processo de análise de tarefas reguladas pelas variáveis também conversa com os pressupostos da TAD, e particularmente, comungam com a abordagem praxeológica (BOSCH; CHEVALLARD, 1999) ao propor modelos praxeológicos como ferramenta descritiva da relação institucional.

A relação institucional de um objeto para uma determinada posição institucional, é moldada e re-moldada por um conjunto de tarefas que devem cumprir, por meio de determinadas técnicas, as pessoas que ocupam essa posição. Assim, é o cumprimento de diferentes tarefas que a pessoa se vê levada a realizar ao longo de sua vida em diversas instituições, nas quais ele é sujeito sucessivamente ou simultaneamente, que conduzirá a emergir sua relação pessoal ao objeto considerado (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 6, tradução nossa).¹⁵⁰

Agrega-se a este cenário, o reduzido nível de aprovação, destacado na introdução deste trabalho, na componente curricular Geometria Analítica e Álgebra Linear I – EXA 180¹⁵¹ a qual abrange e proporciona, em sua ementa, ao estudante o primeiro contato institucional, em nível superior de ensino, com o tema em questão. Elementos esses, que compõem o desenho da nossa problemática didática, regulada por um contexto que envolve análises de elementos de natureza matemática e didática.

Nesta pesquisa, almeja-se apresentar um construto, modelado por Geradores de Tipos de Tarefas Vetoriais - $GT_{\vec{v}}$, de ensino, em auxílio à aprendizagem, que integre, em essência, a constituição ou a reconstituição da *razão de ser* (BOSCH; GASCÓN, 2010) da Álgebra Vetorial

¹⁴⁹ (T4, em referência ao quarteto praxeológico, qual seja, tarefa, técnica, tecnologia e teoria, e TEL, de *Technology Enhanced Learning*, que podemos traduzir como: Tecnologia para o Ensino e a Aprendizagem (CHAACHOUA; FERRATON; DESMOULINS, 2013; CHAACHOUA, 2015).

¹⁵⁰ le rapport institutionnel à un objet, pour une position institutionnelle donnée, est façonné et refaçonné par l'ensemble des tâches que doivent accomplir, par des techniques déterminées, les personnes occupant cette position. C'est ainsi l'accomplissement des différentes tâches que la personne se voit conduite à réaliser tout au long de sa vie dans les différentes institutions dont elle est le sujet successivement ou simultanément qui conduira à faire émerger son rapport personnel à l'objet considéré.

¹⁵¹ Componente curricular pertencente ao Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual de Feira de Santana – BA (UEFS).

ensinada e, supostamente, apreendida em salas de aula do CLM-UEFS. De acordo com Bosch (2001):

É importante ressaltar que esse discurso, cuja função principal consiste em proporcionar atividade, descrições, explicações e justificativas válidas (para a instituição em que ela ocorre), deve também incorporar elementos de resposta às questões das *razões de ser* da atividade considerada e os trabalhos que esta produz. A "compreensão" no sentido aqui considerado inclui também a busca pelas tarefas problemáticas que estão (ou poderiam estar) na origem da organização matemática considerada. Para que servem os ângulos? E os triângulos? Por que devemos aprender a calcular com frações? Ou multiplicar números negativos? Esses tipos de questões fazem parte do questionamento teórico-tecnológico e constituem um aspecto importante da exigência de justificar as atividades correspondentes. (BOSCH, 2001, p.17. grifos do autor, tradução nossa¹⁵²)

Pautados em questionamentos desta natureza, é possível indagar: para que servem os vetores? Por que devemos aprender a operar com os vetores? Contudo, Bosch (2001) sinaliza que:

(...) a Teoria Antropológica, não fará referências à compreensão de conceitos, porque a unidade elementar de análise da atividade matemática não é o conceito, mas a organização matemática ou praxeologia. O estudo do que se considera como "compreensão de um conceito" em uma dada instituição para determinados sujeitos requer as explicitações das atividades (das praxeologias) que, em certo sentido, dão vida ao conceito mencionado, assim como a dinâmica de articulações entre as organizações matemáticas (incluindo as questões problemáticas que motivam ou originam estas organizações). (BOSCH, 2001, p.18, tradução nossa¹⁵³)

Baseados nesse ponto de vista, na análise central deste trabalho, almeja-se responder: "como favorecer articulações que potencializem a aprendizagem dos vetores em um curso dirigido aos futuros professores de matemática?" Tal questão nos impulsiona a indagar, primeiramente: o que existe de incompleto no ensino e, conseqüentemente, na aprendizagem da Álgebra Vetorial no CLM - UEFS?

Expomos como hipótese que, ao analisar questões/tarefas guiadas pela argumentação do T4TEL, é possível pensar na reconstrução das praxeologias pessoais com a intenção de

¹⁵² "Es importante recalcar que este discurso, cuya función principal consiste en proporcionar a la actividad descripciones, explicaciones y justificaciones válidas (para la institución en la que tiene lugar), también debe incorporar elementos de respuesta a la cuestión de las razones de ser de la actividad considerada y de las obras que ésta produce. La "comprensión" en el sentido aquí considerado incluye pues también la búsqueda de las tareas problemáticas que están (o que podrían estar) en el origen de la organización matemática considerada. ¿Para qué sirven los ángulos? ¿Y los triángulos? ¿Por qué hay que aprender a calcular con fracciones? ¿O a multiplicar números negativos? Este tipo de preguntas forma parte del cuestionamiento tecnológico-teórico y constituyen un aspecto importante de la exigencia de justificación de las actividades correspondientes".

¹⁵³ "(...) a Teoría Antropológica, no se hablará de "comprender un concepto", porque la unidad elemental de análisis de la actividad matemática no es el concepto sino la organización matemática o praxeología. El estudio de lo que se considera como "comprensión de un concepto" en una institución dada y para un tipo de sujetos dado requiere la explicitación de las actividades (es decir, de las praxeologías) que, en cierto sentido, dan vida al concepto mencionado, así como de la dinámica que articula entre sí unas organizaciones matemáticas con otras (incluyendo, claro está, las cuestiones problemáticas que motivan u originan dichas organizaciones)".

identificar incompletudes provenientes do ensino e da aprendizagem dos vetores e, diante destes elementos, propor recombinações praxeológicas¹⁵⁴ nas situações geradas no Ambiente Híbrido de Aprendizagem (AHA). Esse ambiente ganhará traços mais definidos ao tomarmos emprestados aspectos conceituais oriundos da concepção de cenários, como difundido por Laubé *et al* (2006; 2007), que ataquem tais lacunas, pois, segundo os autores ora citados, “trata-se de criar cenários que permitam que futuros professores ‘aprendam sua profissão’ realizando sequências de ensino.” (LAUBÉ *et al*, 2006, p. 45, tradução nossa¹⁵⁵).

Neste segmento, como apoio metodológico, o presente estudo investigativo situa-se nos pressupostos da Engenharia Didática, “ao designar, ao mesmo tempo, produções realizadas para o ensino na sequência de investigações” (ARTIGUE, 1996, p. 196). A autora também destaca que:

A engenharia didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais nada, por um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino. Aí se distinguem, classicamente, dois níveis, o da micro-engenharia e o da macro-engenharia, conforme a importância da realização didática implicada na investigação. (ARTIGUE, 1996, p. 196)

A partir desse escopo investigativo, o *Curso Introdutório sobre Vetores* apresenta-se como um esquema experimental do MPR (GASCÓN, 2018), em que as produções e as realizações dos estudantes em torno de tarefas vetoriais são examinadas. Aspecto este que possibilitará aproximações com as praxeologias pessoais destes discentes (CHAACHOUA, 2011; CROSET e CHAACHOUA, 2016). No intuito de clarificar o entendimento do leitor, serão expostos alguns detalhes que revelarão traços do planejamento e da concepção, assim como a execução e as produções dos discentes, dialogando com as percepções de base da engenharia ao suscitar retomadas, reformulações e aprofundamentos para um próximo experimento.

5.1 UM RETRATO DAS ANÁLISES PRÉVIAS

A ideia de elaborar um curso que evidenciasse os vetores, surge a partir de inquietações oriundas da prática de ensino ratificadas por constatações teóricas. Como afirmou Artigue (2004), as sociedades funcionam sobre a base de uma cultura matemática científica pouco profunda. E complementa, parafraseando Steen (2002):

¹⁵⁴ Em que modificaremos a prática Π e mantermos o logos Λ caracterizado por uma praxeologia transposta (Π^*) $\oplus \Lambda$ (Chevallard, 2018).

¹⁵⁵ “Il s’agit de mettre en place des scénarii qui permettent à de futurs enseignants ‘d’apprendre leur métier’ en réalisant des séquences d’enseignement”.

(...) a cultura matemática de que o cidadão precisa, atualmente, vai muito além do tradicional "contar" (parte integrante da trilogia básica: saber ler, escrever e contar), já que essa cultura deve permitir-lhe raciocinar em situações de risco e incerteza, decifrar e saber analisar criticamente a avalanche de informações codificadas que recebe (ARTIGUE, 2004, p. 6, tradução nossa¹⁵⁶).

No entanto, o que encontramos nas salas de aula, frequentemente, perpassa por um contorno incompleto e raso no que tange ao domínio do conhecimento matemático. Em mesmo caminho, Skim (2015) revela em sua tese a propagação desigual do conhecimento matemático operacional nas sociedades contemporâneas, regulado por condições e restrições de todos os níveis que determinam a difusão (e a não difusão) do conhecimento. Através dos estudos do autor, é possível evidenciar expressões e sentimentos que expõem uma propaganda negativa da matemática, uma espécie de fobia cultural da matéria, denominada por ele como *antimatemática*. O teórico explora declarações que retratam a tradicional “difamação” e que revelam expressivo distanciamento do saber em pauta. Para ilustrar esse fato, exemplificamos alguns trechos:

Michel Quint, que recentemente escreveu um excelente pequeno romance, tornou-se best-seller, *Effroyables jardins*, mostra sua antipatia pela ciência, a matemática em particular: "Mais que tudo, eu odiava os Augustes. Mais do que óleo de fígado de bacalhau, os beijos nos velhos familiares bigodudos e cálculo mental, mais do que qualquer tortura infantil"; (...) uma revista política publicou recentemente uma foto de uma câmara de execução do Texas: "Tudo nesta foto respira morte, (...) universo geométrico e técnico ..." geometria e técnica estão do lado da morte. O que podemos dizer em resposta? Talvez sugerir ao autor uma visita aos jardins da Alhambra de Granada; seus preconceitos devem desaparecer nesse tipo de paraíso de beleza, natureza e geometria. (...) José Garcia, um ator em ascensão, diz em uma entrevista recente: "Durante quinze anos da minha vida, eu pensei que eu era um tolo, um idiota, um burro. Tudo porque eu não era bom em matemática". (SKIM, 2015, p. 239-240, tradução nossa¹⁵⁷).

Entretanto, Artaud (2017, informação verbal¹⁵⁸) assevera que “o problema se encontra no cerne da matemática e não em seu ensino.” Por meio dessa declaração, pode-se inferir que

¹⁵⁶ “(...) la cultura matemática que necesita actualmente el ciudadano va mucho más allá del tradicional ‘contar’ (parte integrante de la trilogía básica: saber leer, escribir y contar), pues esta cultura debe permitirle razonar en las situaciones de riesgo e incertidumbre, descifrar y saber analizar de manera crítica la avalancha de informaciones codificadas que recibe”.

¹⁵⁷ “Michel Quint, qui a récemment écrit un petit roman excellent, devenu best-seller, *Effroyables jardins*, y montre de même son dégoût des sciences, des mathématiques en particulier: ‘Plus que tout, j’ai détesté les Augustes. Plus que l’huile de foie de morue, les bises aux vieilles parentes moustachues et le calcul mental, plus que n’importe quelle torture d’enfance’ (...) Une revue politique publiait récemment la photo d’une chambre d’exécution du Texas: ‘Tout, dans cette photo, respire la mort, (...) univers géométrique et technique... 3’ On l’aura compris, la géométrie et la technique sont du côté de la mort. Que répliquer? Peut-être suggérer à l’auteur une visite aux jardins de l’Alhambra de Grenade; ses préjugés devraient s’évanouir dans cette espèce de paradis de beauté, de nature et de géométrie. (...) José Garcia, acteur montant, déclare ainsi dans une interview récente: ‘Pendant quinze ans de ma vie, j’ai cru que j’étais un imbécile, un abruti, un cancre. Tout ça parce que je n’étais pas doué en maths’.

¹⁵⁸ Curso ministrado pela professora Michèle Artaud ao Programa de Pós-Graduação em Ensino História e Filosofia das Ciências em outubro de 2017.

o problema do ensino e da aprendizagem em matemática assenta-se na própria matemática ou atividade matemática, premissa básica promulgada pelos pesquisadores da Didática da Matemática. O que nos faz acreditar que, ao buscar compreender o complexo praxeológico, é possível obter respostas que contemplem os nossos questionamentos.

Fato esse corroborado por intermédio de algumas questões preliminares, as quais serão exemplificadas posteriormente. Em sentido análogo, Chaachoua e Bittar (2019) apresentam interpretações sobre os conceitos centrais que contribuíram para o desenvolvimento da TAD, e explanam que,

a aprendizagem é uma modificação da relação de um indivíduo X com O , ou seja, essa relação começa ‘a existir’ (se ela ainda não existia), ou essa relação é modificada (se ela já existia). Esse processo de aprendizagem modifica a pessoa (não o indivíduo). (CHAACHOUA; BITTAR, 2019, p. 31).

Através destas e de outras ferramentas de base da TAD (CHEVALLARD, 2013), admitimos que O corresponda aos vetores e X aos participantes do curso. Nessa conjuntura, as questões diagnósticas ou o questionário preliminar, também utilizado em uma das aulas observadas, nos permitiu detectar, previamente, as relações destes indivíduos X com o objeto O , e o que predominou foi uma ausência de relação $R(X, O) = \emptyset$. Esta lacuna indica que os alunos não conhecem O , ou, em termos ecológicos, que O ainda não vive em I (estudantes do curso de Licenciatura em Matemática enquanto participantes do curso). Uma das nossas intenções didáticas (CHEVALLARD, 1996) se constitui na modificação destas relações, já que, dialogando com Bosch e Chevallard (1999):

(...) Conhecer um objeto é ter o que fazer com – e muitas vezes ter de lidar com – esse objeto. O saber matemático, como uma forma particular de conhecimento, é o resultado da ação humana institucional: é algo que se produz, se utiliza, se ensina ou, mais geralmente, se transpõe em instituições. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p.85)

As respostas e reações dos alunos contradizem a nossa hipótese preliminar: a de que eles já tiveram um contato, mesmo que breve, com os vetores. Aspecto que se encontra no âmago de estudos em diversas investigações que estabelecem comparativos entre as conformidades das relações pessoais de estudantes com relações institucionais como, por exemplo, os estudos de Assude (1992) que colocam em evidência a distinção entre o que é esperado que o aluno aprenda e o que ele realmente aprendeu. Bittar e Chaachoua (2019) interpretam essa concepção, em termos da TAD, como uma avaliação do desnível entre a relação pessoal e a institucional de um estudante frente ao objeto estudado.

A afirmação de Artigue (1996, p. 202) comunga diretamente com o que foi ressaltado anteriormente, ao sinalizar que “pontos de apoio essenciais da concepção residem na fina

análise prévia das concepções dos alunos, das dificuldades e dos erros tenazes, e a engenharia é concebida para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções”.

Em termos da compreensão dos vetores, os estudos de Assemany (2011), Assemany *et al* (2013) e Azevedo (2013) salientam a relevância da base vetorial no currículo do Ensino Médio e argumentam que constituem um diferencial para estudantes na transição para o Ensino Superior, conforme pode ser visualizado através da seguinte afirmação:

A introdução da noção de Vetores no R^2 no 1º ano do Ensino Médio pretende lançar mão de um instrumento importante e prático no estudo dos conteúdos expostos em sequência, mas principalmente da Trigonometria e Função Afim, reduzindo cálculos desnecessários que estes temas recorrem quando seu ensino é feito de maneira isolada. A organização dos conteúdos estruturados e baseados nos Vetores pretende conduzir o aluno a interpretações geométricas de fatos algébricos (ASSEMANY, 2011, p. 130).

Nesse contexto, agregam-se as características históricas e epistemológicas que também demonstram a recorrência da representação vetorial para exprimir movimentos, representar forças, compreender fenômenos e reafirmar a existência de números negativos e imaginários. Conforme evidenciou Dorier (1995), o desenvolvimento do conceito de vetor se deu na busca pelo entendimento de resultados algébricos, uma vez que essa grandeza proporciona contribuições para a geometria através da direção e do sentido, e não só do comprimento (grandeza escalar), permitindo assim pensar a ideia de movimento. A caracterização da percepção de movimento pode ser potencializada no seio do AHA no âmbito dos dispositivos: manipuláveis ou tangíveis e no GeoGebra.

5.1.1 O contexto e o planejamento do curso

Prosseguimos destacando algumas características do curso. A primeira peculiaridade refere-se ao fato de termos desenvolvido o trabalho em horário distinto do momento das aulas da disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear I - EXA 180. Esse fato propicia um maior grau de liberdade em relação ao tempo de estudo dos vetores, ou seja, altera-se a cronogênese, função didática a qual se encarrega da “gênese do tempo didático, ou seja, o tempo da construção praxeológica” (Chevallard, 2009, p.79), que também integra ao *corpus* de estudo em foco. Assim, o curso ocorreu paralelamente às aulas da componente curricular EXA 180, ministrado por outro professor. Neste ínterim, o estudo introdutório sobre os vetores aconteceu em um horário livre, no qual os alunos não estavam envolvidos em outras atividades.

Inicialmente, 31 discentes tiveram interesse em participar da proposta, porém 19 compareceram ao primeiro encontro. O público-alvo foi constituído por estudantes do 2º semestre do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual de Feira de

Santana (UEFS) – período da graduação que sucede o primeiro contato com a abordagem vetorial em nível superior de ensino, objeto que compõe a ementa da componente curricular Geometria Analítica e Álgebra Linear I – EXA 180. Nestes termos, o curso ocorreu em paralelo às aulas desta componente curricular durante o período em que a abordagem vetorial era o tema central.

Exposto isto, emerge mais um atributo do curso, pensado e programado para que os desenvolvimentos dos estudos ocorressem antes da abordagem que o professor responsável pela disciplina empreenderia. O que não invalida uma das nossas hipóteses, a saber, a de que alguns alunos poderiam ter tido esse primeiro contato em algum momento do ensino médio. O objetivo desta ação consistiu na elaboração de tarefas que contemplassem, mesmo que sutilmente, traços de proximidade com o objeto de apreciação em pauta. Nessa perspectiva, foi apresentada a programação aos participantes do curso.

Quadro 11 - Programação Preliminar do Curso Introdutório sobre Vetores

Programação	
24/08	Qual a origem dos vetores? Por que e para que estudar vetores? Quais são as características dos vetores? Como podemos identificá-las? Qual a diferença entre segmentos orientados e vetores? E segmento nulo e vetor nulo, em que diferem? Quais associações práticas podem constituir elementos para representá-los?
31/08	Como trabalhar com as operações de adição e diferença entre vetores? Elaboração de material manipulável que contribua para o entendimento destes conceitos. O que podemos dizer sobre a soma de um ponto com um vetor? E a multiplicação de um número real por um vetor? E o que é o módulo de um vetor? Qual a diferença e a semelhança entre o módulo de um vetor e o módulo de um número?
14/09	Vetores no plano e no espaço, pontos no plano e no espaço, o que há de semelhante? E como podemos diferenciá-los? Utilizar as noções do plano de projeções por meio dos conceitos de diedros e épora (Geometria Descritiva) para representação dos vetores no plano e no espaço.
21/09	Análise das condições e restrições do recurso didático elaborado na aula anterior. É possível trabalhar com vetores definidos por dois pontos, ponto médio, paralelismo e perpendicularismo entre vetores utilizando o material elaborado na aula anterior?
28/09	Entendendo a conceituação dos produtos vetoriais (escalar, vetorial e misto). Como os discentes interpretam as representações ostensivas destes elementos? O que pode ser realizado para minimizar os entraves decorrentes deste fato? O que sugerem?
05/10	Trabalho direcionado ao GeoGebra. Como trabalhar com os temas elencados acima utilizando este software livre.
19/10	Continuação do estudo dos vetores usando o GeoGebra e encerramento das atividades.

Fonte: Goulart e Farias (2019, p. 309).

Para elaborar o referido planejamento foram consultados alguns textos que, geralmente, subsidiam o aporte bibliográfico básico da disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear I, mencionados na ementa disponível no Projeto Político Pedagógico (PPP), a exemplo de Lima *et al* (2001), Conde (2004), Camargo e Boulos (2005), Corrêa (2006), Steinbruch e Winterle

(1987), Mello e Watanabe (2011), Winterle (2014), Venturi (2015) e Miranda, Grisi e Lodovici (2015), dentre outros.

Seguimos também os apontamentos de Bosch (2018, não paginado), quando esta alega que uma sequência de “mais perguntas, mais respostas que geram uma dinâmica de estudo”, daí emerge uma programação estruturada em forma de questões, em consonância com o que pontua Chevallard (1987, p. 3): “O sentimento ilusório de que o mundo não deve ser questionado nos é imposto pela educação cotidiana. Mas é de grande importância histórica, filosófica e científica que o mundo possa de fato ser questionado”. Ainda segundo este autor, todas as “crises” com as quais a matemática tem sido historicamente confrontada gravitam em torno de questões acerca da noção de número, continuidade e conjunto, demandas que contrastam com o formato curricular presente nas instituições de ensino.

A intenção didática contida na expressão “programação preliminar” consistiu em abrir espaços para que os discentes pudessem imprimir suas contribuições e direcionamentos na construção do curso. No entanto, os estudantes não usufruíram de tal prerrogativa, possivelmente encontrando-se imersos no “vício muito escolar: espera que o professor diga o que deve fazer” (CHEVALLARD *et al*, 2001, p. 264). Outro desígnio do plano de trabalho sugerido diz respeito a um convite aos questionamentos no intuito de direcionar os discentes do Curso de Licenciatura em Matemática a indagar sobre o objeto de estudo e, conseqüentemente, a remeter suas concepções a uma apreciação de cunho ecológico, que os induz à análise das *razões de ser*¹⁵⁹ (BOSCH; GASCÓN, 2010) do tema, além de abrir caminhos para a instauração dos pressupostos do Paradigma de Questionamento do Mundo, idealizado por Chevallard (2012).

Soma-se a esta caracterização a apresentação de um formato diferenciado para o ensino e para a aprendizagem dos vetores, por meio de um AHA que contemple uma abordagem flexível (DREYFUS, 1991), em contraposição à rigidez matemática (LUCAS *et al*, 2014), tendo como um dos direcionamentos promover um meio exploratório que gere oportunidades para que os discentes se envolvam com tarefas vetoriais investigativas e assumam uma postura indagadora na procura por respostas aos seus questionamentos, comungando com os pressupostos do Paradigma de Questionamento do Mundo (CHEVALLARD, 2012). Nessa perspectiva, Chevallard (2006) apresenta a Dialética Mídia Meio, a qual estabelece íntimas relações com outras teorias chevallardianas, como a Teoria da Transposição Didática (TTD) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD),

¹⁵⁹ Verifica se a *razão de ser* dos tipos de tarefas está sustentada por um discurso didático tecnológico-teórico capaz de descrever, justificar, interpretar e desenvolver a práxis.

Os alunos – todos nós, na verdade – estamos cercados pelos meios de comunicação (mídias), uma palavra que uso aqui no sentido generalizado, chamado “médium” ou qualquer sistema social que objetiva informar algum segmento da população ou determinado grupo de pessoas sobre o mundo natural ou social. Nesse abrangente ponto de vista, um ciclo de palestras, por exemplo, é um meio, como também é um textbook, o mesmo pode ser dito de lendas urbanas transmitidas de boca em boca... (CHEVALLARD, 2006, p. 26).

O autor também esclarece que:

o “meio” é qualquer sistema desprovido de intenções e, portanto, se comporta como um fragmento da natureza – uma estrutura que não pretende agradar nem desagradar. Em matemática as provas constituem o meio, pois o sistema dedutivo não tenta cumprir o desejo do matemático (Ibid., p. 29).

Dito isso, seguimos a interpretação de Chevallard (2007) que um meio de ensino M é configurado, composto por todos os elementos disponíveis para o estudo das questões. O acesso a essas respostas e trabalhos é determinado pela mídia acessível à comunidade de estudo, entendida por qualquer “fonte de informação” como livro, artigo, página da web, especialista, professor, etc. Na medida em que essas respostas e obras possam ter sido elaboradas em outras instituições, mesmo em outros momentos históricos ou com base em outras necessidades, a adoção dessas, ou de alguns elementos delas, pode exigir análise e possível “desconstrução” em contraste com o meio disponível, o que é conhecido como dialética média-milieu.

Neste encaminhamento, projetamos propiciar um meio heterogêneo que caracterizamos como um espaço constituído por uma variedade de Dispositivos Didáticos disponibilizados aos discentes, o que permitirá o encontro presencial síncrono com novas situações, as quais poderão ser empregadas como alavanca para desconstrução e reconstrução das obras. Em termos mais simplistas, parafraseando Brousseau (2002), parte-se da premissa básica de que uma situação envolve três dimensões: o sujeito, as circunstâncias nas quais ele se localiza e as relações que o unem ao meio. A partir destas influências, a figura 80 esboça o preâmbulo do que presumimos como um AHA.

Figura 80 - Um cenário Híbrido de Aprendizagem.



Fonte: Goulart e Farias (2019, p. 308).

O Ambiente Híbrido de Aprendizagem – AHA, mesmo revelando similitudes nominiais como o trânsito entre a modalidade presencial e virtual (Gómez, 2011) amplamente apregoado em tempos pandêmicos vivenciados por todos em escalar mundial, é constituído por distintos Dispositivos Didáticos – DD que interagem entre si por meio do gerenciamento dos Geradores de Tipos de Tarefas – GT. No cerne dos GT, os DD podem assumir duas funções: variável pertencente ao Sistema de Variáveis – SV ou como elemento que integra o complemento verbal pertencente aos tipos de tarefas.

Diante do exposto, foi possível trabalhar as noções preliminares de vetores, intercambiando com diferenciadas maneiras de abordagem, recorrendo ainda às funções semiótica e instrumental dos ostensivos, associados à representação dos objetos não ostensivos (BOSCH; CHEVALLARD, 1999). Articulações essas que possibilitaram o desenvolvimento de atividades no âmbito vetorial.

Sublinhamos, também, em acordo com Mercier (1994), acerca da necessidade de análise do ensino imerso no próprio conhecimento, por intermédio da experimentação.

(...) a reflexão sobre o ensino deve começar dentro da própria matemática, com estudos comparativos críticos dos vários modos de exposição dos conceitos a serem ensinados. (...), tais estudos podem ajudar a quebrar um impasse pedagógico: "... que consiste em orientar os alunos para algum raciocínio catalogado, sempre o mesmo, e ensinar os alunos a experimentá-los sucessivamente, sem omissão" (MERCIER, 1994, p. 3, tradução nossa).¹⁶⁰

¹⁶⁰ (...) la réflexion sur l'enseignement doit commencer à l'intérieur même des mathématiques, avec les études comparatives critiques des divers modes d'exposition des notions à enseigner. (...), de telles études peuvent permettre de sortir d'une impasse pédagogique: '... qui consiste à guider les élèves vers certains raisonnements catalogués, toujours les mêmes, et à apprendre aux élèves à les essayer successivement, sans omission.

No que tange aos caracteres omissos, Brousseau (2013) ressalva que os aspectos históricos e epistemológicos refletem de maneira ilusória o trabalho dos matemáticos:

A epistemologia e a história da matemática, no entanto, dão uma imagem muito diferente da maneira pela qual o conhecimento matemático é criado e usado nos círculos dos matemáticos antes de se cristalizar em uma forma propícia à sua difusão e ensino. Por seu objeto, a epistemologia parece excluir qualquer componente experimental. No entanto, "compreender" a criação de um conceito deve, pelo menos implicitamente, referir-se a uma maneira de concebê-lo para alguém que não "inventou" ele mesmo. (BROUSSEAU, 2013, p. 3, tradução nossa¹⁶¹)

Nesse sentido, a resolução de tarefas vetoriais em um Ambiente Híbrido acionou vários desdobramentos de estudos, os quais serão detalhados no desenvolvimento desta investigação.

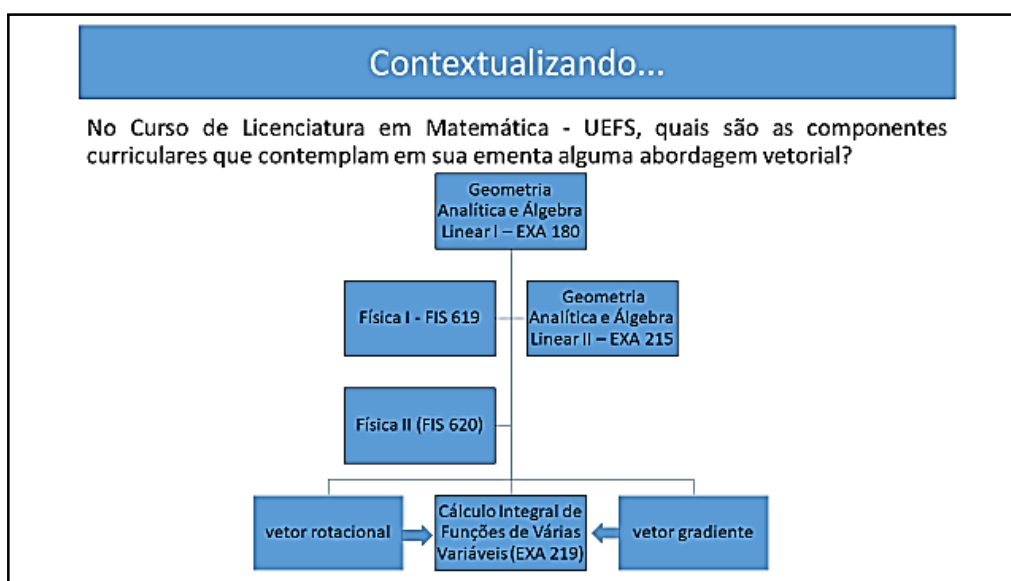
5.1.2 Descrição de algumas tarefas e Geradores de Tipo de Tarefas - GTs

Nas análises prévias, foi detectado que os participantes do curso tiveram pouco contato ou desconheciam o objeto de ensino visado. Consequentemente, segundo a TAD, e como expresso anteriormente, a relação pessoal da maioria dos participantes para com os vetores inexistia, ou seja, $R(X, O) = \emptyset$. Perante esse contexto, nossa intenção didática constituiu-se em modificar tal relação, já que, de acordo com Chevallard (1996, p. 130, grifos nossos), “Há, pois, aprendizagem (para a pessoa X , relativamente ao objeto O) quando $R(X, O)$ se altera. Bem entendido, é possível que $R(X, O)$ não se altere: dizemos, então, que X ‘nada aprendeu’.”

Nesse viés, o desenho de uma das análises trabalhadas nesta pesquisa partiu de uma aula introdutória sobre a “anatomia dos vetores” ou “natureza geométrica dos vetores”, e foi apresentado anteriormente, no quadro 06, abordando os tópicos: “- Por que estudar os vetores? - Diferenciação entre grandezas escalares e grandezas vetoriais; - definição, etimologia e notações e casos particulares de vetores”. Para conduzir os estudantes à *razão de ser* institucional dos vetores no Curso de Licenciatura em Matemática, evocamos os seguintes elementos institucionais:

¹⁶¹ “L’*épistémologie* et l’*histoire* des mathématiques donnent pourtant une image très différente de la façon dont les connaissances mathématiques se créent et s’utilisent dans le milieu des mathématiciens avant de se cristalliser dans une forme propice à leur diffusion et à leur enseignement. Par son objet l’*épistémologie* semble exclure tout volet expérimental. Pourtant ‘comprendre’ la création d’un concept doit bien se référer au moins implicitement à une façon de le concevoir pour quelqu’un qui ne l’a pas ‘inventé’ lui-même.”.

Figura 81 - Situando o habitat dos vetores na instituição CLM – UEFS



Fonte: acervo da autora 2018.

O protagonismo dos vetores foi identificado em diversos cursos vinculados às ciências exatas e tecnológicas, compondo, em geral, a ementa de disciplinas como a Geometria Analítica, a qual configura um aporte vetorial em consonância com um formato sequencial e recorrente em componentes ligadas à Álgebra Linear, Física ou Cálculo. E o CLM-UEFS não está imune à abordagem vetorial, como retratado na figura 81, a qual apresenta a estruturação dos Cursos de Licenciatura em Matemática. O que ratifica a relevância institucional da Álgebra Vetorial em cursos de formação de professores de matemática.

No que tange à definição, à etimologia, às notações e ao estudo de casos particulares de vetores, recorreremos à aceção de que um vetor está diretamente ligado à relação de equipolência entre segmentos. Conforme apresentado por Steinbruch e Winterle (1987, p. 3), “dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.” Os autores complementam declarando que a equipolência entre AB e CD , não pertencentes à mesma reta, é equivalente a dizer que A , B , C e D são vértices de um paralelogramo, ou seja, descartam totalmente a possibilidade desses segmentos serem nulos, apresentando apenas por meio de uma observação que quaisquer dois segmentos nulos são equipolentes.

Neste aspecto, os autores definem vetor determinado por um segmento orientado AB como “o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB .” (STEINBRUCH;

WINTERLE, 1987, p.4). E acrescentam que: “Se indicarmos com \vec{v} este conjunto, simbolicamente podemos escrever $\vec{v} = \{XY/XY \sim AB\}$, onde XY é um segmento qualquer do conjunto.” (Ibid., 1987, p.4). Nota-se que, a partir deste discurso, emerge uma quantidade significativa de elementos não ostensivos e consequentemente ostensivos, como destacado por Almouloud (2007):

A notação \vec{v} e a palavra “vetor”, por exemplo, são objetos ostensivos, enquanto a noção de vetor é um objeto não ostensivo, pois é impossível manipulá-lo, contudo podemos torná-lo presente pela manipulação de certos objetos ostensivos a ele associados. (ALMOULOU, 2007, p.20)

A título de comparação com o delineamento anterior de equipolência entre segmentos, apresentamos uma segunda formulação deste conceito, retirada de outra obra pertencente às referências bibliográficas da maioria das ementas dos cursos de Geometria Analítica:

Os segmentos orientados AB e CD são equipolentes, e indica-se $AB \sim CD$, se um dos casos seguintes ocorrer:

- a) Ambos são nulos;
- b) Nenhum é nulo, e têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido (CAMARGO; BOULOS, 1987, p. 5).

Constata-se, desse modo, que existe um aspecto incompleto e, por consequência, propulsor de obstáculos relacionados à definição, já que abre possibilidades para o seguinte questionamento: “Então, o que se pode afirmar sobre a noção de equipolência para segmentos nulos?” Neste momento, os estudantes permaneceram em silêncio diante da questão exibida.

Como podemos, assim, interpretar este elemento não-verbal eivado de significado? Steinberg (1988) expõe que o silêncio pode ser

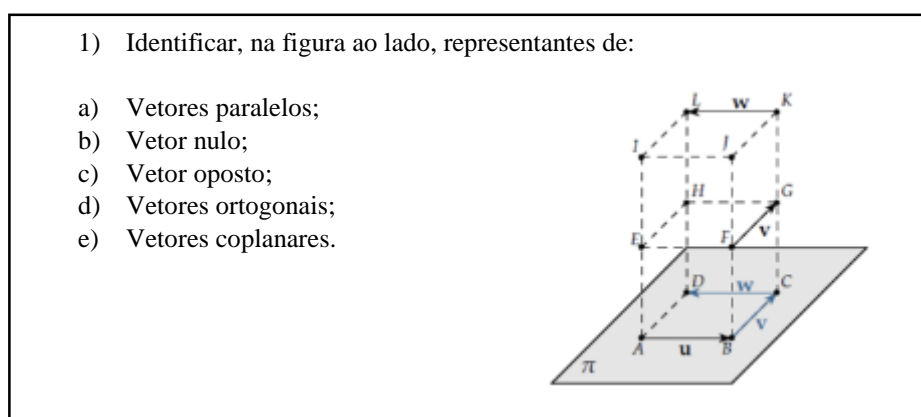
apresentado de diversas formas, com diferentes significados: o silêncio se apresenta sempre da mesma forma, isto é, ausência de som, mas sua ocorrência pode ter interpretações diferentes, dependendo do contexto social e cultural. (...) O silêncio pode ser imposto por normas sociais ou pode ser deliberado. (...) o silêncio propicia oportunidade a outros signos ou códigos de se evidenciarem mais fortemente no processo de comunicação. (STEINBERG, 1988, p. 22-23)

Esta ausência de som comunica a existência de um caráter controverso, visto que a condição necessária e suficiente é que todos os segmentos sejam orientados, e não podemos fazer referência à orientação do segmento nulo. Contudo, esse aspecto é sanado na segunda conceituação. A partir de perspectivas como as mencionadas, é possível refletir sobre os obstáculos ou as restrições que podem ser gerados através de conhecimentos incompletos ou inadequados (BROUSSEAU, 2009).

Também, pontuamos a etimologia da palavra vetor que provém do verbo *vehere*, que significa transportar, levar (VENTURI, 2015), que dialoga com a ideia de Dorier (1995) em

que se deve pensar na ideia de movimento. Quanto aos casos particulares, recorreremos a uma das representações demonstradas na figura 82, a fim de identificar e exemplificar diversos vetores. Assim, revelamos uma das tarefas que foi trabalhada no Curso Introdutório sobre Vetores, imbricada ao seu respectivo Gerador de Tipo de Tarefas.

Figura 82 - Representação de diversos vetores.



Fonte: Miranda, Grisi e Ludovici (2015, p. 5).

A partir de então, vislumbramos a possível construção e utilização dos Geradores de Tipo de Tarefas Vetoriais – $GT_{\vec{v}}$, seja para estruturar um conjunto de tipos de tarefas ou como um modelo estrutural que direcionou a pesquisa, pois se o alvo da investigação consiste em mobilizar recombinações praxeológicas (CHEVALLARD, 2018) em que optamos por promover “modificações nas práticas Π e manter o logos Λ caracterizado por uma praxeologia transposta $(\Pi^*) \oplus \Lambda$ ”(Ibid., p.35).

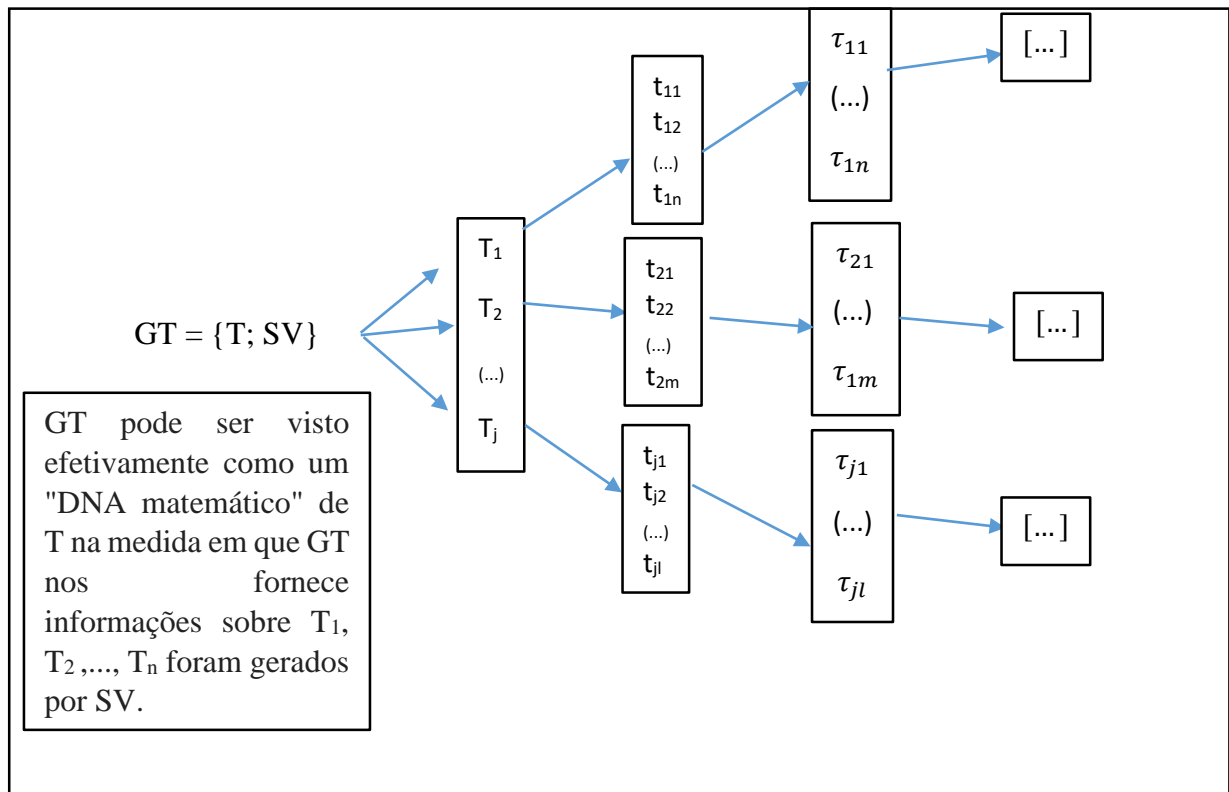
Dessa forma, é possível identificar os níveis de potencialidades geradoras dos GT, pois ao operá-los não existem limitações de análises para tipo de tarefas - T, um dos desígnios deste estudo. Outro relevante viés se apoia no fato de que é viável, por meio dos GT, identificar o alcance das técnicas (τ) ou até mesmo inserir elementos distintos, por exemplo trabalhos desenvolvidos com diferentes dispositivos didáticos, na bagagem praxeológica dos protagonistas dos Sistemas Didáticos - SD e, conseqüentemente, provocar alterações nos equipamentos praxeológicos (CHEVALLARD, 2009) desses sujeitos. Assim, é possível inferir que as praxeologias pessoais (CROSET e CHAACHOUA, 2016) dos discentes do CLM-UEFS sofreram modificações e ajustes em termos do processo de aprendizagem vetorial.

Diante dos fatos elencados, emerge mais uma função assumida pelos GT neste estudo, pois é possível admitir que cada Tipo de Tarefa produzida por um $GT = \{T; SV\}$. Por exemplo, T_1 transporta em si características de T, ou seja, a decomposição de cada Tipo e Subtipo de

Tarefas, de acordo com a caracterização das técnicas (BESSOT e CHAACHOUA, 2016), o que nos permitiu inferir que um GT oportuniza, analogamente, estudar o "DNA matemático" de T na medida em que podemos construir geradores que armazene a gênese e nos informe a natureza de T_1, T_2, \dots, T_n advindas de GT.

Ainda de acordo com esses autores, os objetos de observação do pesquisador são Tarefas e Tipo de Tarefas, neste sentido, os GTs operacionalizam e conduzem os encaminhamentos da problemática didática, que propicia analisar a junção dos Tipo de Tarefas em associação às variáveis, configurada por uma gama de Subtipos de Tarefas derivadas de T produzidas pelos GT, ou seja, a partir desse repertório é possível abordar a gênese de T estabelecendo associações com níveis de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2002) . Como esquematizado na figura 83:

Figura 83 - Capacidade geradora de um GT



Fonte: acervo da autora 2021

Em associação com essa concepção, pode-se pensar em um $GT_{\vec{v}rep}$, em termos de exemplificação, admitindo como variáveis as que foram descritas no $GT_{\vec{v}soma}$ que:

$$GT_{\vec{v}_{rep}} = [Identificar; representantes de vetores; V_d, V_t, V_l]$$

Consideramos a variável dispositivo - V_d e admitimos como valor da variável v_1 , conforme determinado no $GT_{\vec{v}_{soma}}$, que corresponde aos materiais manipuláveis, neste caso canudos, palitos e bolas de isopor. Em V_t , o valor da variável que foi usado na resolução da tarefa foi v_5 , que se refere ao tratamento geométrico e, no que tange à V_l , empregamos o valor v_8 que equivale ao espaço tridimensional.

O valor da variável v_1 assumida, nesta fase, tem uma natureza ostensiva manipulativa “como todo objeto dotado de uma natureza sensível, de certa materialidade e que se apresenta ao sujeito como uma materialidade perceptível.” (BOSCH, 1994, p. 47). A autora estabelece ainda a seguinte comparação: “O conceito de um número inteiro ou de uma função linear não existe sem toda uma atividade manipulativa de ostensivos (tanto linguísticos quanto gráficos, gestuais e escritos, sem esquecer a manipulação concreta de objetos materiais)” (BOSCH, 2001, p. 19, tradução nossa)¹⁶². Desta maneira, podemos admitir que, por meio destes objetos tangíveis-manipuláveis, é possível gerar um cenário de técnicas não esperadas pela instituição.

Tal escolha comunga diretamente com o que declara Artigue (1996, p. 202, grifos da autora) a respeito desta fase: “o investigador toma a decisão de agir sobre um determinado número de variáveis do sistema não fixadas pelos constrangimentos: *variáveis de comando*, que ele supõe serem variáveis pertinentes para o problema estudado”. Nesse contexto, destacamos o objetivo da tarefa, as possíveis estratégias de resolução, as variáveis didáticas da situação e os conhecimentos e as competências possíveis do sujeito para completar a tarefa.

As atividades que os sujeitos desenvolveram na construção concreta não deixaram de mobilizar a natureza abstrata dos objetos matemáticos, aspecto esse que se articula à declaração de Arzarello *et al* (2008, p. 180, tradução nossa):¹⁶³ “Todos esses recursos (ostensivos), com as ações e as produções que eles aprimoram, parecem importantes na construção de ideias matemáticas e no desenvolvimento de atividades matemáticas”.

¹⁶² “El concepto de número entero o el de función lineal no existen sin toda una actividad manipulativa de ostensivos (tanto lingüística como gráfica, gestual y de escritura, sin olvidar em el la manipulación concreta de objetos materiales)”.

¹⁶³ “All such (ostensive) resources, with the actions and productions they enhance, appear important in the building of mathematical ideas and the development of mathematical activities”.

No primeiro momento, os estudantes realizaram as possíveis identificações dos vetores, como solicitado na questão 1 da figura 82. Em um segundo momento, sugerimos aos alunos que, utilizando os materiais disponíveis (canudos, palitos de madeira, bolas de isopor) e os materiais de suporte (colas, tesouras, estiletes), reproduzissem a referida figura. Assim, admitimos como possível a manipulação e a construção dos representantes dos vetores em um ambiente que contemple a terceira dimensão (3D), através do valor da variável v_8 . Apresentamos abaixo trechos do processo de construção.

Figura 84 - Momento de preparação para início da reprodução da figura 82



Fonte: acervo da autora (2019).

Figura 85 - Um momento de construção



Fonte: acervo da autora (2019).

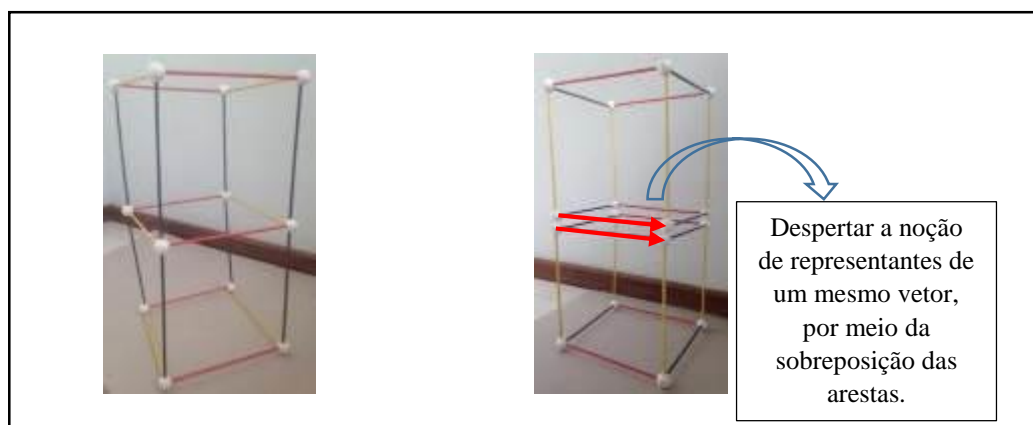
Os registros evidenciados nas figuras 84 e 85, revelam traços da produção dos estudantes, o que gera uma unidade de análise para a pesquisa, pois é possível identificar com maior nitidez os conceitos geométricos vetoriais envolvidos no processo de construção do modelo manipulável, revelando, assim, traços das praxeologias pessoais (CHAACHOUA,

2011; CROSET; CHAACHOUA, 2016), averiguados na construção do modelo tangível em 3D para identificação de vetores no espaço.

Na figura 84, por exemplo, percebe-se a preocupação do discente em cortar os canudos e palitos com mesmo comprimento, já que um cubo apresenta em sua gênese composicional seis faces quadradas. Como consequência desse fato, remete-se ao aspecto conceitual do quadrado enquanto uma figura geométrica plana que possui quatro lados congruentes e quatro ângulos retos. Em termos da TAD, seja qual for o tipo de tarefa T , encontrar um resultado solicitado ou demandado por T é função da técnica τ , que sempre é acompanhada por pelo menos um embrião ou, mais frequentemente, por um remanescente da tecnologia θ (CHEVALLARD, 1998).

Na figura 85, constatamos uma das escolhas dos estudantes, expressa pelas cores dos canudos, acrescida da fundamentação tecnológica implícita na construção: a produção de uma base quadrada (quatro ângulos retos e quatro segmentos congruentes), que serviu de suporte para a colocação da representação tangível de quatro segmentos ortogonais à base de construção. Supomos que o uso de canudos na mesma coloração simbolizou, para os discentes, vetores paralelos. A seguir, exibiremos duas construções de grupos distintos.

Figura 86 - Exemplo de dois protótipos representativos da imagem apresentada na figura 82

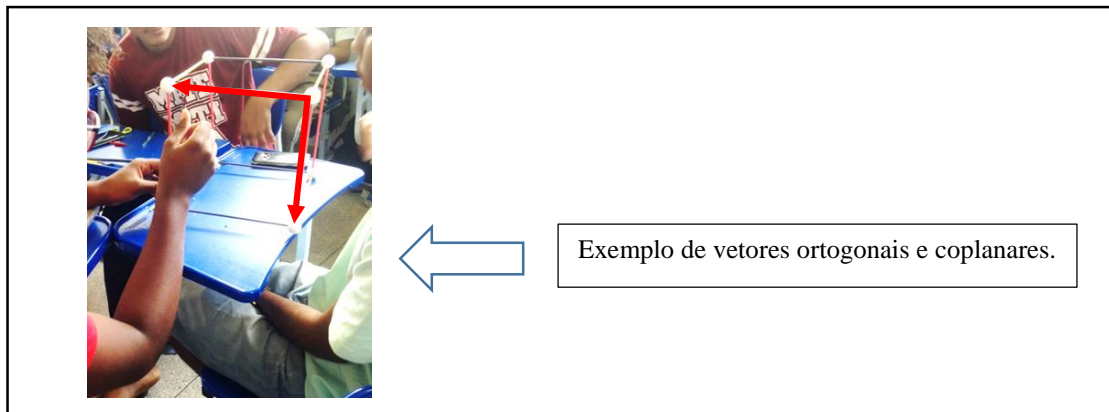


Fonte: acervo da autora (2018).

O ponto crucial da atividade consistiu em proporcionar aos estudantes um trabalho manipulativo com o intento de destacar as características dos vetores (módulo, direção e sentido). A partir deste modelo tangível, foi possível perceber exemplos de vetores associados aos seus representantes, desde que mantidos estes três elementos. Dessa maneira, ressaltamos que nossa intenção foi de construir praxeologias vetoriais recorrendo às técnicas didáticas no âmbito manipulável.

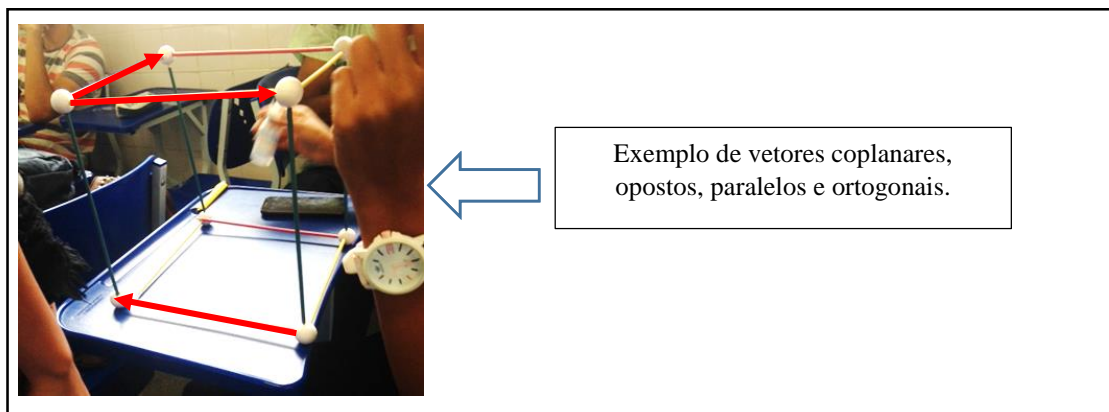
Nestes termos, por meio do modelo construído pelos discentes, foi viável identificar exemplos de vetores: paralelos, ortogonais, coplanares, dentre outros.

Figura 87 - Construção do modelo manipulável



Fonte: acervo da autora (2018)

Figura 88 - Finalização da construção do modelo manipulável



Fonte: acervo da autora (2018).

Diante da construção desse material, inferimos acerca da praxeologia que modela esta atividade, ponderando sobre o que afirma Arzarello *et al* (2008, p. 180, tradução nossa)¹⁶⁴ “do ponto de vista da TAD a dimensão ostensiva da atividade matemática é interessante na medida em que possibilita lançar luz sobre os problemas educacionais da matemática.” E complementa:

A TAD inclui a dimensão ostensiva da atividade matemática no cerne de seu modelo epistemológico, ou seja, como a “carne” na qual as praxeologias são corporificadas. Assim, qualquer praxeologia é sempre ativada pela manipulação de ostensivos e pela evocação de não ostensivos (por exemplo, o ostensivo $y = K \cdot x$, a expressão “função linear” ou o gráfico de uma linha reta é a evocação do conceito matemático abstrato “função linear”), que são como os dois lados da mesma moeda. Em geral, nossa cultura

¹⁶⁴ “From the ATD point of view, the ostensive dimension of mathematical activity is interesting as far as it makes it possible to shed light on the mathematics educational problems”.

tende a supervalorizar os não-ostensivos (os conceitos), enquanto os ostensivos são subestimados, principalmente gestos, palavras e grafismos informais. Eles são valorizados de acordo com sua função semiótica, ou seja, são considerados como signos ou objetos perceptíveis cuja única função é representar outros objetos. Mas a TAD aponta outra importante função, geralmente negligenciada, dos ostensivos: a função instrumental. De fato, os ostensivos não são simples meios de trabalho, mas instrumentos genuínos para a atividade matemática: sua manipulação cuidadosa não apenas permite a execução de uma tarefa matemática, mas também é essencial para a sua realização, por exemplo, para resolver uma equação (ARZARELLO *et al.*, 2008, p. 181, tradução nossa).¹⁶⁵

Pensar a dimensão ostensiva, enquanto uma materialização e ativação das praxeologias, revela uma genuína pujança do caráter instrumental para a atividade matemática. Através dessa perspectiva, vislumbra-se que a referida tarefa poderia ser solucionada por uma técnica tangível, porém mais custosa e não esperada pela instituição, possivelmente devido ao menosprezo cultural empreendido aos objetos ostensivos como sinalizou Arzarello (2008). Soma-se a esse aspecto a exclusão de técnicas alternativas em detrimento das técnicas naturalizadas em I, como sublinhou Chevallard (1999):

Tal exclusão é correlativa, entre os atores de I, de uma ilusão de "naturalidade" das técnicas institucionais em I - fazê-lo, é natural ...-, em contraste com o conjunto de técnicas alternativas possíveis, que os sujeitos de I. Se eles os ignoram ou, se confrontados, os veem espontaneamente como artificiais e (portanto) "contestáveis", "inaceitáveis" etc. Nessa visão, é frequentemente observada, entre os sujeitos de I, verdadeiras paixões institucionais pelas técnicas naturalizadas na instituição. (CHEVALLARD, 1999, p.3)

Entretanto, não podemos incorrer no equívoco de desprezar o fato de que qualquer praxeologia é sempre ativada pela manipulação de ostensivos e pela evocação de não ostensivos, como enfatizou Arzarello *et al.* (2008). Em mesmo sentido, a manipulação dos objetos ostensivos permite dar forma à estruturação praxeológica presente na TAD (CHEVALLARD, 1999), além de considerarmos que os ostensivos são instrumentos legítimos para a atividade matemática.

Dispúnhamos de uma tarefa que continha em sua estruturação uma representação bidimensional de uma figura tridimensional, isto é, empregou-se uma técnica da geometria

¹⁶⁵ "The ATD includes the ostensive dimension of mathematical activity in the core of its epistemological model, that is, as the 'flesh' in which praxeologies are embodied. Thus, any praxeology is always activated through the manipulation of ostensives and the evocation of non-ostensives (e.g. the ostensive $y = K \cdot x$, the expression 'linear function' or the graph of a straight line and the evocation of the abstract mathematical concept 'linear function'), which are like the two sides of the same coin. In general, our culture tends to overvalue the non-ostensives (the concepts), while the ostensives are under-estimated, especially gestures, words and informal graphisms. They are valued according to their semiotic function, that is they are considered as signs or perceivable objects whose only function is to represent other objects. But ATD points out another important, usually neglected function of ostensives: the instrumental function. In fact, ostensives are not simple working media but genuine instruments for the mathematical activity: their careful manipulation not only allows performing a mathematical task but is also essential for its accomplishment, e.g. for solving an equation".

projetiva de representação tridimensional que possibilita a ilusão de espessura e profundidade das figuras, já declarado por Lehmann (1989) no capítulo II, o qual denotou como método denominado de “projeção paralela”, que afirma ser comumente empregado. Contudo, deve-se atentar que os eixos Y e Z são desenhados mutuamente perpendiculares, mas o eixo X é desenhado de maneira que o ângulo XOY é maior que 90° , sendo usualmente tomado como 135° .

Assim, (...) “um objeto visto sob outro ângulo: uma anamorfose e uma projeção geométrica podem ser exemplos desta teoria das representações” (JOLY, 2005, p. 25). Fato esse que, consideramos um obstáculo à aprendizagem, visto que a representação bidimensional não traduz, em essência, uma imagem tridimensional e, quando representada no quadro ou no papel, pode provocar ambiguidades que se instalam na interpretação de determinada questão. Com base nesse esboço, verificamos a existência de obstáculos didáticos (BROUSSEAU, 2009) regulados pelas escolhas do professor.

5.1.3 Traços da praxeologia presente na tarefa

Ante essas ponderações, inferimos acerca da existência de lacunas como as apresentadas anteriormente, que precisam ser analisadas por meio de pressupostos de um arcabouço teórico que integre a estrutura organizacional do saber em pauta. No caso do estudo em questão, este suporte organizacional concentra-se no seio da TAD. Assim, fizemos referência às relações pessoais e institucionais imersas na gênese dessa teoria. Nessa perspectiva, Chevallard (2006) apresentou como premissa básica da TAD a afirmação de que “qualquer atividade humana, regularmente realizada, pode ser integrada a um único modelo, que é sintetizado pela palavra praxeologia” (CHEVALLARD, 1998, p.5).

A partir desse olhar praxeológico e de suas múltiplas interligações, entende-se que devemos aprender ou ensinar matemática enquanto ação humana, admitindo-se que toda atividade humana pode ser modelada praxeologicamente, ou seja, em outros termos, consiste em realizar uma tarefa t de um determinado tipo T , cumprida por uma dada técnica τ , fundamentada por uma tecnologia θ , legitimada por meio de uma teoria Θ . Essa estrutura é simbolicamente representada por $\wp = [T, \tau, \theta, \Theta]$ e significa um conjunto de técnicas no bojo de uma tecnologia e de uma teoria organizadas para um tipo de tarefa, cuja denominação é Organização Praxeológica (OP) pontual, por envolver apenas um tipo de tarefa T (CHEVALLARD, 2006). Ressalta-se que a OP preza pela inseparabilidade entre os blocos

práticos $[T, \tau]$ e teóricos $[\theta, \Theta]$, intrínsecos às atividades matemáticas. Neste segmento, montamos tabela 6:

Tabela 6 - Modelação praxeológica da tarefa

Tarefa T	Técnica τ	Tecnologia θ	Teoria Θ
Identificar representantes de vetores: paralelos, ortogonais, coplanares, nulo, oposto, a partir da figura.	Observar as características “geométricas” de cada vetor.	<p>Centra-se no conceito de:</p> <p>Vetores paralelos – Dois vetores \vec{u} e \vec{v} são paralelos, e indica-se por $\vec{u} // \vec{v}$ se os seus representantes tiverem a mesma direção;</p> <p>Vetor nulo – Qualquer ponto do espaço é representante do vetor nulo;</p> <p>Vetor oposto - quando dois vetores possuem o mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos;</p> <p>Vetores ortogonais – Dois vetores \vec{u} e \vec{v} são ortogonais, e indica-se por $\vec{u} \perp \vec{v}$, se algum representante de \vec{u} formar ângulo reto com algum representante de \vec{v};</p> <p>Vetores Coplanares – Dois ou mais vetores são coplanares se existir algum plano onde estes vetores possam ser representados (WINTERLE, 2014).</p>	O aspecto axiomático da Geometria Euclidiana imbricado à Álgebra Vetorial.

Fonte: acervo da autora (2019).

Neste sentido, a observação das características de cada vetor remete ao aspecto sublinhado por Chevallard (1998) ao destacar que,

(...) uma técnica τ não é necessariamente algorítmica ou quase-algorítmica por natureza: é assim apenas em muito poucos casos. Axiomatizar um certo domínio da matemática, pintar uma paisagem, fundar uma família são, portanto, tipos de tarefas para as quais quase não existe uma técnica algorítmica... Mas é verdade que parece haver uma tendência bastante geral para a algoritmização - embora este processo de progresso técnico às vezes pareça ter sido interrompido por um longo tempo, em uma determinada instituição, para um determinado tipo de tarefa ou para um determinado complexo de tipos de tarefas. (CHEVALLARD, 1998, p. 3, tradução nossa¹⁶⁶)

¹⁶⁶ (...) une technique τ n'est pas nécessairement de nature algorithmique ou quasi algorithmique: il n'en est ainsi que dans de trop rares cas. Axiomatiser tel domaine des mathématiques, peindre un paysage, fonder une famille sont ainsi des types de tâches pour lesquelles il n'existe guère de technique algorithmique... Mais il est vrai qu'il semble exister une tendance assez générale à l'algorithme - encore que ce processus de progrès technique paraisse parfois durablement arrêté, en telle institution, à propos de tel type de tâches ou de tel complexe de types de tâches.

Desta forma, pode-se direcionar atenção para os investirmos na transformação da figura em um modelo concreto manipulativo, os estudos dos “*casos particulares de vetores*” (WINTERLE, 2014, p. 4, grifos nossos) são alterados e se estabelece uma nova situação, que preliminarmente era estática, mas, ao se inserir essa variável, tornou-se concreta e empreendeu uma pujança dimensional, além de proporcionar uma mobilidade rotacional, materializando a 3ª dimensão, visto que sua representação bidimensional pode constituir um percalço à aprendizagem na configuração inicial, por solicitar dos estudantes habilidades de visualização e percepção espacial. Parafraseando e compactuando com Bishop (1992), os obstáculos à compreensão de temas geométricos podem ser provocados pela sua representação e visualização.

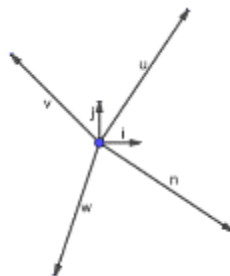
5.1.4 Análise de mais uma tarefa situada no âmbito vetorial

Por se tratar do primeiro contato dos estudantes com os vetores, conforme já evidenciamos, pensamos em apresentar outra questão no ambiente papel/lápis e materializá-la no ambiente manipulável, acordando com Bosch (1994), que também utiliza o termo *manipulación* para designar os múltiplos usos possíveis dos objetos ostensivos. Os objetos ostensivos se caracterizam pelo fato de poderem ser concretamente manejáveis, e se distinguem por este motivo dos objetos não ostensivos.

Revelamos mais um exemplo de *GT*, idealizado para contemplar a tarefa que atende o âmbito vetorial e que especifica em seu enunciado alguns valores para as variáveis. Assim, podemos descrevê-lo como $GT_{\vec{v}determ} = [Determinar; \text{os vetores } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ e } \vec{n} \text{ em função dos vetores } \vec{i} \text{ e } \vec{j}; V_d]$, ou seja, um gerador que origine tarefas como a seguinte:

Quadro 12 - Tarefa envolvendo vetores

Fixe dois vetores \vec{i} e \vec{j} unitários e ortogonais e considere $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e \vec{n} os vetores indicados abaixo.



Construa a figura acima nos respectivos ambientes: papel/lápis, materiais manipuláveis e no GeoGebra. Escreva os vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{n} em função dos vetores \vec{i} e \vec{j} , isto é, usando as operações com vetores estudadas (adição, subtração e multiplicação por escalar), escrevendo cada um deles na forma de vetores $x\vec{i}+y\vec{j}$, onde x e y são números reais.

Fonte: acervo da autora (2018).

É relevante destacar que elementos como: comprimentos (normas) e ângulos dos vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{n} em relação à base ortonormal, constituída pelos vetores \vec{i} e \vec{j} , são temas periféricos e não foram tomados como cruciais, visto que os objetivos da tarefa se fundamentam em conceitos como: adição, subtração e multiplicação por escalar, além da combinação linear em função dos vetores \vec{i} e \vec{j} , sem exigir do estudante uma representação fidedigna da imagem que integra a questão.

Ao seguir os direcionamentos de Cirade e Matheron (1998), é possível decompor a atividade mencionada acima em sub-tarefas.

Quadro 13 - Decomposição em sub-tarefas

- t_1 : Fixar dois vetores \vec{i} e \vec{j} unitários e ortogonais;
- t_2 : Considerar \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{n} os vetores indicados na figura;
- t_3 : Usar os diferentes ambientes para construção da figura mencionada na questão;
- t_4 : Escrever os vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{n} em função dos vetores \vec{i} e \vec{j} .

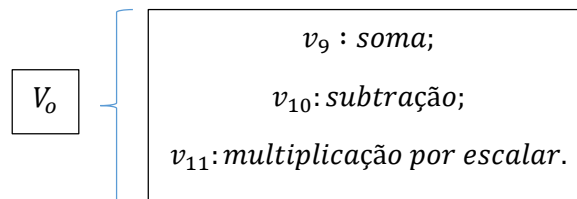
Fonte: acervo da autora (2018).

Ao considerar o sub-tipo de tarefa t_1 : Fixar dois vetores \vec{i} e \vec{j} unitários e ortogonais, a técnica terá traços característicos da variável V_d , pois fixar vetores ortogonais utilizando canudos não é o mesmo que no papel/lápis, assim como diferirá no GeoGebra. Neste domínio, é possível afirmar que a técnica mobilizada em cada sub-tarefa está subordinada ao dispositivo escolhido, isto é, produz gestos diferentes e manipulação distinta de ostensivos na abordagem de um mesmo tema – ortogonalidade entre vetores –, o que nos leva a conjecturar que para estabelecer comparativos entre dispositivos faz-se necessária a confrontação de técnicas.

Tomando como referência o $GT_{\vec{v}_{soma}}$ revelado inicialmente, a variável V_d assume os seguintes valores: v_1 : Materiais manipuláveis (canudos/palitos) v_2 : Papel/lápis; e v_3 : GeoGebra. No entanto, o $GT_{\vec{v}_{determ}}$ não integraliza por completo os requisitos da questão,

empreendendo a criação de um novo GT , que denominaremos como $GT_{\vec{v}operações} = [Escrever; determinados\ vetores; V_o, V_t]$. Se introduzidas duas novas variáveis, tem-se a seguinte ramificação, exposta no diagrama:

$$GT_{\vec{v}operações} = [Escrever; determinados\ vetores; V_o, V_t]$$

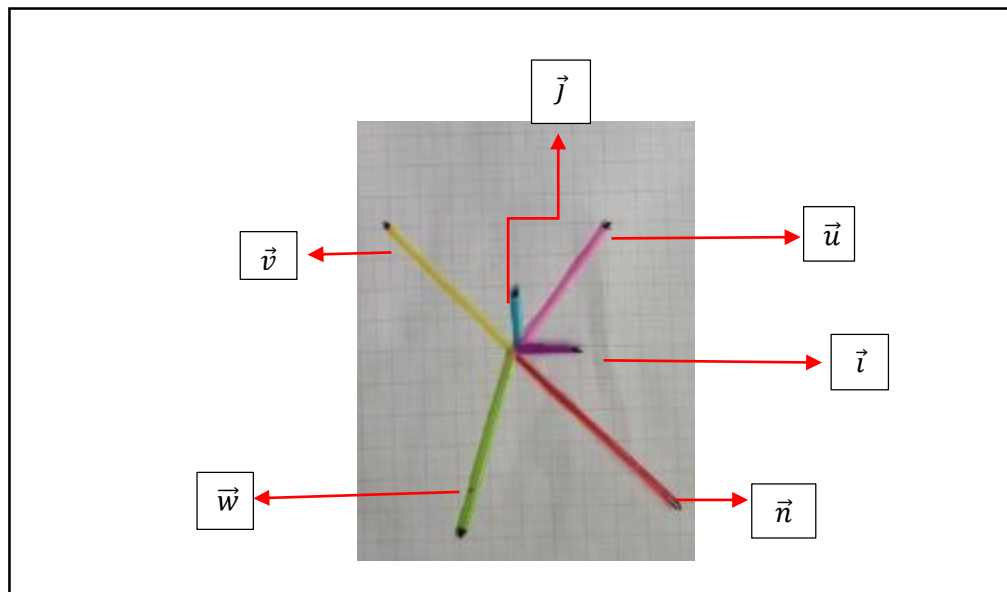


No que concerne à variável V_t , a tarefa aborda o valor da variável v_4 por solicitar o tratamento algébrico. Diante destas considerações, ratifica-se a decomposição de tarefas em sub-tarefas (CIRADE; MATHERON, 1998) com a finalidade de demonstrar a organização matemática e avaliá-la. Em mesma direção, Chaachoua e Bessot (2018) sublinham que:

Essa divisão nos parece de um interesse genuíno: na verdade refere-se às tarefas reconhecidas institucionalmente, e para as quais a prexeologia matemática foi amplamente introduzida. Isso ajuda a situar as dificuldades dos alunos na implementação de uma técnica no nível técnico de “sub-tarefas” que a compõem. (CHAACHOUA; BESSOT, 2018, p. 122)

Os autores ora aludidos destacam que no T4TEL uma técnica τ é descrita por um conjunto de tipo de tarefas. Concepção essa que nos direciona a avaliar uma das tarefas propostas aos discentes participantes do curso *Uma Introdução sobre os Vetores*. Isso porque a técnica será modificada pela variável V_d – Dispositivo, que, em síntese, significa afiançar que trabalhar na resolução de uma tarefa, usando dispositivos distintos, implicará o emprego de técnicas diferentes com alcances distintos, o que nos leva a inferir que a técnica sofrerá transformações conforme o dispositivo. Em outras palavras, os dispositivos vão alterar o complexo de ostensivos. Nesta perspectiva, apresentaremos alguns registros de resoluções nos diferenciados ambientes.

Figura 89 - Resolução da questão do Quadro 12, utilizando canudos



Fonte: acervo da autora (2018).

A tarefa inicial consistiu em reproduzir a figura 89 representada acima. Para isso, foi necessário manipular de forma ostensiva os representantes dos vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , \vec{n} , \vec{i} e \vec{j} (com canudos). A existência de um elemento implícito (sistema de coordenadas ortonormais – que consiste em decompor cada vetor em função dos vetores \vec{i} e \vec{j}), já que, ao posicionar os representantes dos vetores no papel milimétrico acrescido da exigência de fixar dois vetores \vec{i} e \vec{j} unitários e ortogonais, fundamenta-se na definição de bases ortonormais, porém este conceito não foi apresentado aos estudantes. Em termos do modelo praxeológico:

$$\mathcal{P}_{pontual} = [T, \tau, \theta, \Theta]$$

Reproduzir a figura/manipular os representantes dos vetores.

Envolveu o aspecto conceitual dos vetores (módulo, direção e sentido). Além de abordar, implicitamente, a definição de base ortonormal.

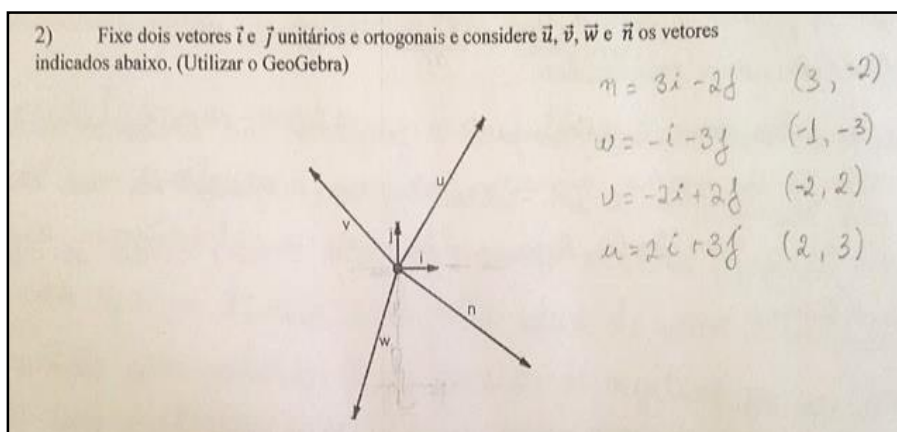
Contudo, o uso do papel milimetrado, enquanto uma *variável didática auxiliar*, restringiu e gerou uma atrofia na técnica que remete um déficit nos elementos praxeológicos com descrito por Artaud (2018),

A atrofia da técnica de projeto do momento exploratório é, sem dúvida, devida a vários fatores. Um deles poderia crer que a exploração acaba com o problema proposto, fornecendo uma resposta rápida, (...). Não é apenas uma questão de obter uma resposta ao problema proposto, mas também de realizar um “trabalho matemático”, isto é, enriquecer a teoria matemática disponível com os elementos que podem ser necessários para resolver o problema proposto, a sua matemática ou a constituição de uma técnica mais robusta, mais confiável ou menos dispendiosa. (ARTAUD, 2018, p.166)

Esse aspecto deixa evidente um alcance limitado da técnica nas resoluções apresentadas pelos discentes, pois esta se tornou uma tarefa elementar e simplória pelo suporte quadriculado do papel. Mesmo diante desse impasse que provocou o aparente enfraquecimento da técnica, é possível notar que a introdução de novas variáveis constitui um fator que enriquece e concomitantemente sinaliza a exigência de alterações no Gerador de Tipo de Tarefas (GT).

Quando retiramos o suporte do papel milimetrado, deparamo-nos com resoluções do tipo:

Figura 90 - – Resolução da tarefa do Quadro 12, utilizando lápis e papel



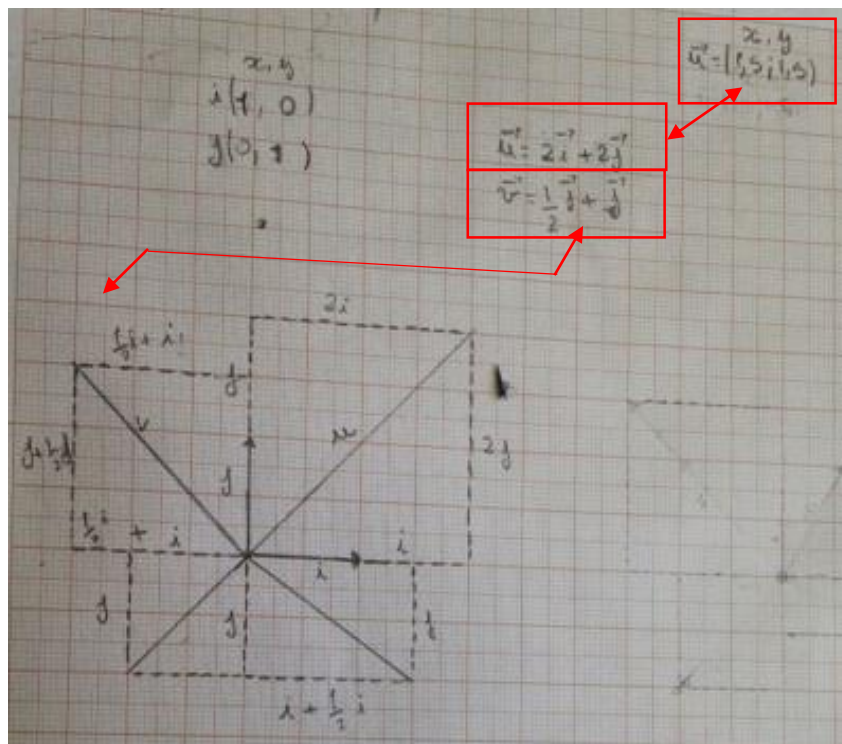
Fonte: acervo da autora (2018).

Observem que é solicitado aos alunos a resolução da mesma questão utilizando o software GeoGebra identificado pelo valor v_3 no sistema de variáveis. No entanto, o estudante recorre, primeiramente, a um dos valores do dispositivo v_2 : Papel/lápis. Assim, podemos acentuar que se trata de uma técnica fixada institucionalmente em diferenciados cursos, enraizada na nossa cultura e com recursos habituais, já que, ao empregá-la, bastam dois

recursos: lápis e papel. Percebemos que, em termos de dispositivos, será imprescindível um estudo que abarque o custo das técnicas em cada dispositivo/ambiente idealizado no AHA.

Quando olhamos para a tarefa, t_4 : (*escrever* os vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{n} em função dos vetores ortonormais fixados \vec{i} e \vec{j}), considerando a base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, observamos que nem todas as coordenadas dos vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{n} , com respeito a esta base, terão valores inteiros, o que contradiz o registro do estudante. Assim, notamos elementos que caracterizam traços que se inserem em uma praxeologia pessoal (CROSET; CHAACHOUA, 2016), revelando uma tentativa de satisfazer uma suposta espera institucional, vertente essa, ratificada por meio do próximo registro:

Figura 91 - Entraves detectados na resolução da questão do Quadro 12



Fonte: acervo da autora (2018).

Na construção exposta acima, desenvolvida por uma dupla de estudantes, notamos que o vetor \vec{u} escrito como combinação linear de \vec{i} e \vec{j} difere do mesmo vetor em termos de coordenadas, ou seja, é possível observar a existência de incompreensões no âmbito das duas formas representativas, o que o distancia das técnicas esperadas pela instituição. Outro elemento que merece destaque, no que tange às praxeologias pessoais (CROSET; CHAACHOUA, 2016) destes alunos, diz respeito ao que é representado geometricamente e à descrição algébrica para

o vetor \vec{v} . Analisando sua representação geométrica, deveríamos ter $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$ como representação algébrica.

5.1.5 Retratos de algumas Praxeologias Pessoais

Um dos pontos altos do presente estudo consiste em remodelar praxeologicamente as concepções matemáticas vetoriais de discentes do CLM-UEFS, que integram o conjunto de participantes da disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear I – EXA 180. Mas qual o interesse em reconstruir praxeologias? Uma das nossas intenções é perceber a possível distância ou o provável nível de incompletude entre as praxeologias institucionais e as praxeologias pessoais, pois acreditamos que, ao confrontar e revelar suas definições espontâneas, ou seja, praxeologias pessoais com praxeologias institucionais, será possível identificar falhas no equipamento praxeológico (CHEVALLARD, 2009) do estudante. Chevallard (2007, p. 4) também esclarece que “as relações pessoais e institucionais estão vinculadas ao estudo das deformações, reformas e formações transformadoras notadamente pela generalização da noção de transposição didática pela noção de transposição institucional”, pensando, desse modo, propor ações que reduzam tais fissuras no domínio do ensino e aprendizagem vetorial. Dito de outra forma, a partir da descrição do MPR é viável observar e mapear as possíveis rotas da rede praxeológica, assim como, verificar o alcance desse modelo e de igual modo questionar as limitações das técnicas mobilizadas em cada dispositivo.

Assim, em termos do $GT_{\vec{v} \text{operações}}$, situamos na variável V_d que assume o valor v_2 : Papel/lápis. Mantemos a abordagem da mesma tarefa e trabalharemos a partir de outros registros.

Figura 92 - Início de uma resolução da questão do Quadro 12

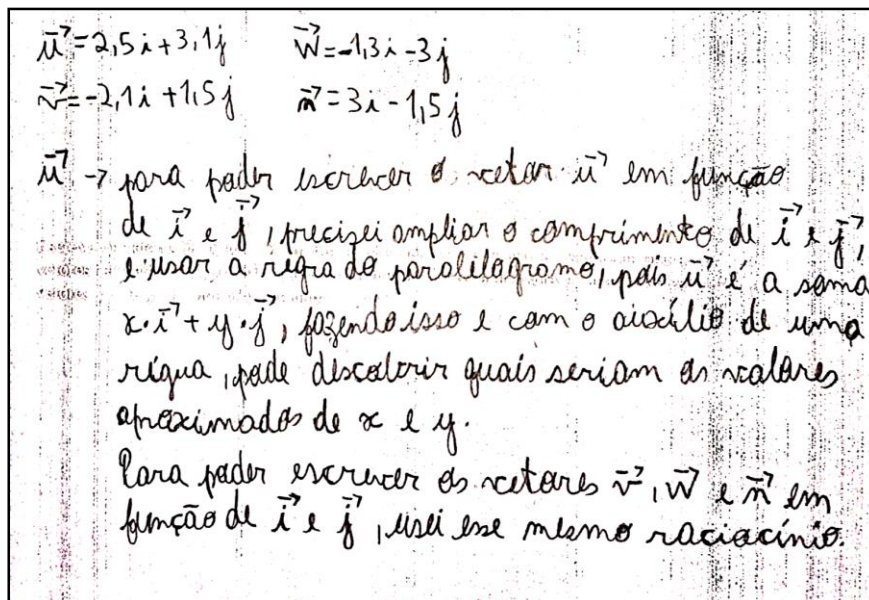
1) Fixe dois vetores \vec{i} e \vec{j} unitários e ortogonais e considere \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{n} os vetores indicados abaixo.

Escreva os vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{n} em função dos vetores \vec{i} e \vec{j} , isto é, usando as operações com vetores estudadas (adição, subtração e multiplicação por escalar) escreva cada um deles na forma vetores $x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, onde x, y são números reais.

Fonte: acervo da autora (2018).

Nota-se que o discente imprime seus conhecimentos ao, previamente, decompor geometricamente os vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{n} em relação a \vec{i} e \vec{j} , além de tomar como unidade de medida \vec{i} e \vec{j} unitários. Foi solicitado ao estudante que descrevesse com riqueza de detalhes o percurso que ele seguiu para solucionar a questão.

Figura 93 - Traços de uma praxeologia pessoal



$\vec{u} = 2,5\vec{i} + 3,1\vec{j}$ $\vec{w} = -1,3\vec{i} - 3\vec{j}$
 $\vec{v} = -2,1\vec{i} + 1,5\vec{j}$ $\vec{n} = 3\vec{i} - 1,5\vec{j}$

\vec{u} → para poder escrever o vetor \vec{u} em função de \vec{i} e \vec{j} , precisei ampliar o comprimento de \vec{i} e \vec{j} , e usar a regra do paralelogramo, pois \vec{u} é a soma $x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, fazendo isso e com o auxílio de uma régua, pude descobrir quais seriam os valores aproximados de x e y .
 Para poder escrever os vetores \vec{v} , \vec{w} e \vec{n} em função de \vec{i} e \vec{j} , usei esse mesmo raciocínio.

Fonte: acervo da autora (2018).

Transcreveremos a seguir o que foi descrito, ressaltando as técnicas utilizadas pelo aluno:

Ampliar o comprimento de \vec{i} e \vec{j} , usar a regra do paralelogramo, pois \vec{u} é a soma $x\vec{i} + y\vec{j}$, fazendo isso com o auxílio de uma régua, podemos descobrir quais são os valores aproximados de x e y . Para escrever os vetores \vec{v} , \vec{w} , \vec{n} , em função de \vec{i} e \vec{j} , usei o mesmo raciocínio.

A partir desse discurso, podemos apresentar o desenho desta praxeologia pessoal.

Quadro 14 - Especificação da praxeologia pessoal apresentada na Figura 93

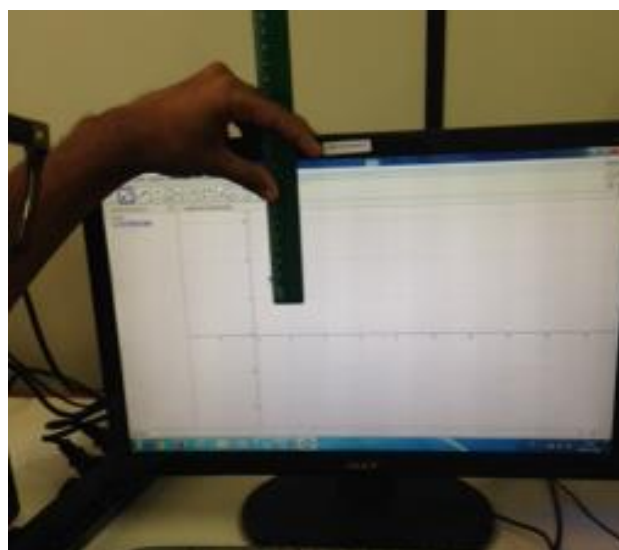
T_4	Escrever os vetores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e \vec{n} em função dos vetores \vec{i} e \vec{j} .
-------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

τ_4	<ul style="list-style-type: none"> - $t_{4.1}$: considerar vetores paralelos a \vec{i} e \vec{j} por meio da operação multiplicação por escalar; - $t_{4.2}$: usar a regra do paralelogramo; - $t_{4.3}$: traçar retas paralelas aos vetores \vec{i} e \vec{j}; - $t_{4.4}$: identificar \vec{u} como resultante da soma de $x\vec{i} + y\vec{j}$; - $t_{4.5}$: descobrir os valores de x e y.
θ	A conceitualização de base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ em um plano \mathbb{R}^2 , acrescida das noções geométricas de adição entre vetores e multiplicação de um vetor por um escalar para escrever \vec{v} , ou qualquer outro vetor do plano, como combinação linear de \vec{i} e \vec{j} .
Θ	Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Fonte: acervo da autora (2018).

Prosseguimos abordando a mesma atividade proposta, porém alteramos o valor da variável V_d , que passou a assumir v_3 : GeoGebra. Enfatizamos duas situações que nos despertaram interesse – por serem uma forma atípica de trabalhar com o computador e, conseqüentemente, com o software GeoGebra.

Figura 94 - Tentativa de interseção entre dois ambientes/dispositivos

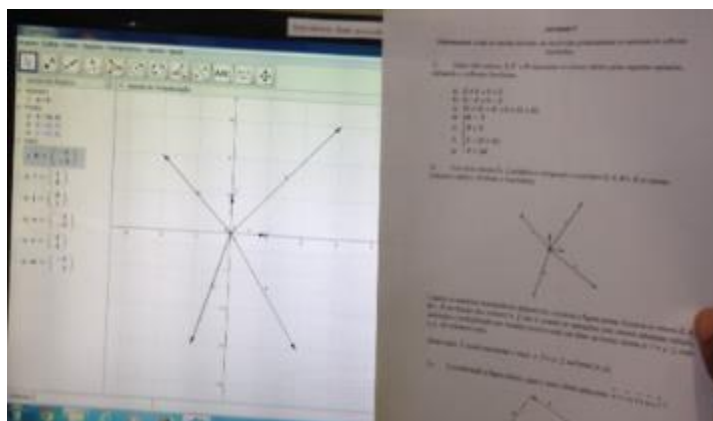


Fonte: acervo da autora (2018).

A situação retratada na figura 94, em que o estudante utiliza a régua, um instrumento que, normalmente, é usado quando V_d assume o valor v_2 : Papel/lápis, faz emergir a coexistência de um elemento em dispositivos diferentes. Contudo, devemos olhar a validade da técnica empregada, o que significa afirmar que ele usa uma praxeologia do ambiente papel/lápis e tenta transpor, sem sucesso, para o dispositivo v_3 : GeoGebra, expondo a ausência de uma bagagem praxeológica inerente ao dispositivo informático.

Ao pensar sobre esse aspecto, conjecturamos a possibilidade de uma análise que contemple também esses elementos externos aos Geradores de Tipo de Tarefas, que repercutem e influenciam na compreensão e completude das tarefas em sincronia com as variáveis. Em mesmo encaminhamento, ratificando que não tratava de um fato isolado outro discente estabeleceu o seguinte comparativo:

Figura 95 - Comparação entre elementos de dispositivos distintos



Fonte: acervo da autora (2018).

Finalizada a construção da figura na interface do GeoGebra, o aluno sente a necessidade de estabelecer um comparativo entre a imagem reproduzida na folha e a na tela do computador, posicionando-as lado a lado. Sob este ângulo, Balacheff (1994) sinaliza a existência de fenômenos que acompanham a multiplicidade da representação de conhecimento, em que

A manipulação direta, amplamente popularizada no campo dos jogos, abre o acesso a interfaces nas quais tudo acontece como se o usuário pudesse ter acesso direto aos objetos, introduz uma dimensão perceptual-gestural no repertório de possíveis meios de comunicação. (BALACHEFF, 1994, p. 6, tradução nossa¹⁶⁷)

Assim, concebemos que a interação do sujeito com a interface do software revela-se atípica e incompleta, conseqüentemente, dependente de instrumentos do universo externo à

¹⁶⁷ La manipulation directe, largement popularisée dans le domaine des jeux, ouvre l'accès à des interfaces dans lesquelles tout se passe comme si l'utilisateur pouvait avoir un accès direct aux objets, elle introduit une dimension perceptivo-gestuelle dans le répertoire des moyens possibles de communication.

situação proposta, como a régua, que cumpre a função de mensuração e também adquire a incumbência de comparação. Em mesmo sentido, o comparativo entre a imagem na folha de papel e na tela do computador. Entraves que ultrapassam a esfera do conhecimento vetorial e adentram em outra seara.

5.1.6 Aproximações entre os obstáculos didáticos e as Praxeologias Pessoais

A partir do que foi explanado, em termos de produções dos estudantes, ou seja, das praxeologias pessoais, identificamos peculiaridades que podem ser caracterizadas como obstruções à aprendizagem no âmago do contexto vetorial, envolvendo os âmbitos epistemológico e didático. Aspecto que nos induziu a abordar e a consultar a gênese dessas restrições, especificamente no campo da didática da matemática. Defrontamo-nos, assim, com a noção de *obstáculo epistemológico*, concebida por Gaston Bachelard (1996) e divulgada em sua obra intitulada *La Formation de L'esprit scientifique: contribution à une psychanalyse de la connaissance*, de 1938, traduzida para o português em 1996, e que expõe, dentre outras coisas, a seguinte declaração:

(...) em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentsidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1996, p. 17).

Diante destas estagnações e conflitos, Bachelard (1996) destacou também que,

o conhecimento do real é luz que sempre projeta algumas sombras. Nunca é imediato e pleno. As revelações do real são recorrentes. O real nunca é “o que se poderia achar”, mas é sempre o que se deveria ter pensado. O pensamento empírico torna-se claro *depois*, quando o conjunto de argumentos fica estabelecido. Ao retomar um passado cheio de erros encontra-se a verdade num autêntico arrependimento intelectual. No fundo, o ato de conhecer dá-se *contra* um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização. (Ibid., p.17, grifos do autor)

Ao dirigirmos a atenção para o domínio da Didática da Matemática, encontramos a seguinte vinculação transpositiva:

A transposição em matemática da noção de obstáculo epistemológico, BACHELARD [1938] pensamento que foi reservado para as ciências experimentais, tornou-se possível e até mesmo necessário pelo desenvolvimento da teoria das situações didáticas nos anos 70 (BROUSSEAU, 1989, p. 1).

Nestes termos, Brousseau (1989) salientou a existência de um movimento transpositivo dos obstáculos epistemológicos para o campo da didática por meio da TSD; a partir deste momento, outras estagnações surgem, a exemplo dos obstáculos didáticos, sobre os quais centram-se um dos ramos de interesse nesta pesquisa. O mesmo autor também afiança que:

Organizar a superação de um obstáculo consistirá em propor uma situação suscetível de evoluir e de fazer evoluir o aluno, segundo uma dialética conveniente. Não se trata de comunicar as informações que se quer ensinar, mas em encontrar uma situação em que somente elas satisfaçam ou atinjam a obtenção de um resultado satisfatório promovido pelo investimento do aluno (BROUSSEAU, 1976, p. 115).

Em sentido análogo, Almouloud (2007) pontua que o objetivo dessas situações é promover a evolução de concepções inadequadas dos alunos, além de revelar suas definições espontâneas diante de problemas em que certo conceito possa ser mobilizado. Nas palavras de Brousseau (1976, p. 112, grifos do autor), “os obstáculos de origem didática são aqueles que parecem depender apenas de uma escolha ou de um projeto do sistema educativo”, o que, para Almouloud (2007),

(...) nascem da escolha de estratégias de ensino que permitem a construção, no momento da aprendizagem, de conhecimentos cujo domínio de validade é questionável ou incompletos que, mais tarde, revelar-se-ão como obstáculos ao desenvolvimento da conceituação. (ALMOULOU, 2007, p.141)

Diante dessas constatações, retornamos a um dos vieses do MPD para oportunizar ao MPR questionar o MPD. Assim, ao examinar algumas avaliações cujo tema de verificação foram os vetores, detectamos peculiaridades das praxeologias pessoais, fundamentadas pela associação de concepções que limitam as representações ostensivas intrínseca da Álgebra Vetorial. Por exemplo, retomamos a seguinte abordagem: se consideramos \vec{u} como um vetor de coordenadas (a, b) e P_0 um ponto de coordenadas (x_0, y_0) , esses dois objetos são diferenciados apenas pela notação inicial \vec{u} e P_0 , pela linguagem natural ou pela representação geométrica. Fato este, destacado, no terceiro capítulo deste texto por Carneiro e Gravina (2012) como um ponto delicado.

Ao retrocedermos para o segundo capítulo e consultar um dos livros texto que integram a ementa da componente curricular Geometria Analítica e Álgebra Linear I – EXA 180, deparamo-nos com as definições de outros elementos que podem ser pivô de ambiguidades, como frisado a seguir:

Transita-se do universo vetorial para o âmbito dos números reais.

Figura 96 - Definição de produto escalar

9-2

Definição

Produto escalar dos vetores \vec{u} e \vec{v} , indicado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é o número real tal que:

(a) se \vec{u} ou \vec{v} é nulo, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;

(b) se \vec{u} e \vec{v} não são nulos e θ é a medida angular entre eles, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$.

Um novo tipo de produto é introduzido.

Contudo, o sinal convencional desde o ensino fundamental se mantém.

Fonte: Camargo e Boulos (2005, p. 72).

Esse caráter dúbio também se reflete nas concepções dos estudantes, como indicam os registros de duas questões presentes em duas avaliações da componente curricular Geometria Analítica e Álgebra Linear I – EXA 180.

Figura 97 - Questão 1

2. Dados os vetores \vec{u} e \vec{v} considere os vetores \vec{x} e \vec{y} definidos por

$$\vec{x} = \vec{u} - 2\vec{v}, \quad \vec{y} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Calcule o comprimento da projeção ortogonal de \vec{x} sobre \vec{y} nos casos abaixo

(a) **(1,0)** $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (0, -1, 1)$

(b) **(1,0)** \vec{u} é unitário, $|\vec{v}| = 6$ e o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} é 60° .

Fonte: acervo dos autores (2019)

Figura 98 - Questão 2

2. Considere os vetores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, -2, 0)$ e $\vec{w} = (0, 1, -1)$. Resolva as equações

(a) **(0,7)** $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = (1, 3, 1), \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$

(b) **(0,8)** $|\vec{u} - n\vec{w}|^2 = 6, \quad n \in \mathbb{R}.$

Fonte: acervo dos autores (2019).

As duas tarefas solicitam dos discentes conhecimentos que envolvem as operações entre vetores (soma, subtração, multiplicação por escalar), a definição de comprimento de um vetor e o conceito de produto escalar, assim como suas aplicações para o cálculo de módulo e ângulo. Nota-se, que na questão 1, \vec{x} , \vec{y} e \vec{z} são vetores, e na questão 2, x , y e z são números reais, ou

seja, uma roupagem ostensiva que impulsiona estagnações contra um conhecimento anterior, visto que as incógnitas habitam no domínio algébrico que emerge na configuração do Ensino Fundamental. A aparente contradição não se confirma, pois as questões apresentadas são constituintes de avaliações distintas. Contudo, ao observarmos a resolução das referidas tarefas, constatamos que os obstáculos, segundo Brousseau (1976), ou restrições na concepção de Chevallard (2013) estabelecem relações com a diferenciação entre número e vetor.

Figura 99 - Uma Resolução da Questão 1

$U = 1$
 $|V| = 4$
 $\theta = 60^\circ$
 $U \cdot V = |U| \cdot |V| \cdot \cos 60^\circ$
 $V = |U| \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ$
 $V = 4 \cdot \cos 60^\circ$
 $V = 4 \cdot \frac{1}{2}$
 $V = 2$ ✓
 $x = u + 2v$
 $x = 1 + 2(2)$
 $x = 5$ ✓
 $y = u - v$
 $y = 1 - 2$
 $y = -1$ ✓
 $\text{Proj}_x y = \frac{x \cdot y}{|x|^2} = \frac{5 \cdot (-1)}{5} = -1$
 $\text{Proj}_y x = \frac{x \cdot y}{|y|^2} = \frac{5 \cdot (-1)}{1} = -5$
 $\text{Proj}_x y = 5$ ✗

u e |u| são elementos diferentes!
números!
muito!

Fonte: acervo da autora (2019)

A solução apresentada pelo aluno desconsidera o fato de que a definição de vetores está intimamente ligada a três características básicas (comprimento, direção e sentido), tratando tais elementos como grandezas escalares, ao substituir de maneira equivocada, em seus cálculos, o vetor pelo seu comprimento (por exemplo, $y = u - v = 1 - 2 = -1$). Observa-se também que o ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} é completamente ignorado na obtenção do comprimento de

vetores resultantes da soma e subtração de outros vetores. Ainda que se tenha utilizado o ângulo para obter produto escalar entre \vec{u} e \vec{v} , o aluno não fez qualquer uso posterior deste valor.

Figura 100 - Uma Resolução da Questão 2

2.) a) (x, y, z)

$x \cdot (1, 0, 1) = 1 \Rightarrow x + x = 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$y \cdot (1, 2, 0) = 3 \Rightarrow y - 2y = 3 \Rightarrow -y = 3 \Rightarrow y = -3$

$z \cdot (0, 1, -1) = 1 \Rightarrow z = 1 + 1 \quad z = 2$

menos!

X

Fonte: acervo da autora (2019).

Nessa resolução, o discente deixa claro que não compreendeu operações e/ou ideias elementares vinculadas ao âmbito teórico da Álgebra Vetorial, quando não consegue utilizar conceitos como adição, multiplicação de um vetor por um número real e igualdade para construir um sistema linear e, em seguida, obter a solução da questão. Destaca-se ainda que não há distinção entre os conceitos de vetor e número real apresentando, possivelmente, uma tentativa de calcular um produto escalar ao realizar, incorretamente, cálculos como $x \cdot (1, 0, 1) = x + x$.

Não podemos desconsiderar que o uso de letras para representar números é abordado inicialmente a partir do sétimo ano do ensino fundamental, através das expressões numéricas. Perspectiva essa que se propaga por todos os anos subsequentes do nível fundamental e médio – como evidenciado na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2017):

No Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos. (BNCC, 2017, p.269-270)

Ao analisar as duas resoluções apresentadas na citação em destaque, notamos que a linguagem algébrica pode constituir uma barreira para a compreensão dos vetores, denotada pelo equívoco ao igualar número e vetor, ressaltado na correção do professor. Por meio de concepções como essas, aquiescemos com o questionamento de Brousseau (1976):

Deveríamos então pensar que todas as concepções são obstáculos a aquisições futuras? É claro, porque está na sua natureza, como já vimos. Mas muito poucos apresentam dificuldades suficientemente importantes e comuns para serem tratadas como tais. É fácil, todavia, compreender como um super aprendizado precoce pode aumentar as chances de transformar um saber necessário em obstáculo intransponível. (BROUSSEAU, 1976, p.54)

Diante do exposto, verifica-se a existência de uma transposição abrupta ao tratar de um objeto ostensivo matemático, representado pelas variáveis e incógnitas que expõem generalizações do que foi trabalhado nos anos iniciais do Ensino Fundamental, período que percorre uma parcela significativa da vida escolar dos alunos. São utilizados, nos níveis fundamental e médio, por exemplo, os mesmos elementos ostensivos, como x, y e z para manipulação de diferentes não ostensivos, sugerindo a existência de obstáculos cuja gênese assenta-se, possivelmente, no primeiro contato que os estudantes têm com esta representação ostensiva.

Assim, tornam-se evidentes alguns aspectos que inibem a evolução da aquisição do conhecimento pelo estudante no confronto entre o que está posto institucionalmente e a proposta de um Modelo Praxeológico de Referência Alternativo - MPRA, o qual assume a função de lente de observação, análise e interpretação do Modelo Praxeológico Dominante – MPD, por meio de um mapeamento do campo de possibilidades no intuito de expor as fragilidades e romper com as barreiras das escolhas dominantes amplamente cristalizadas. Dessa forma, pautados nas contribuições de elementos epistemológicos, foi elaborado um primeiro modelo de natureza histórica e epistemológica o qual fundamentou previamente e deu suporte ao estudo do saber vetorial no cerne do CLM-UEFS. O mesmo subsidiou a identificação de traços da vulnerabilidade do MPD nos impulsionando a idealizar e construir o MPRA que se materializou a partir do AHA, amparado no ponto de vista de Gascón (2018) que sublinha que parte dos fatos didáticos constroem a base empírica da pesquisa e os MPR devem ser avaliados, corrigidos e contrastados.

Isto posto, concebemos que situações didáticas projetadas no domínio do AHA, contribuem para o desenvolvimento do conceito de vetor na busca pelo entendimento do mesmo no contexto do CLM-UEFS, pois ao incidir nas características geométricas e algébricas, é viável promover o fortalecimento e emprego das representações geométricas em concordância com a compreensão da ideia de movimento e visualização em torno da concepção vetorial no plano ou no espaço, sob a perspectiva de distintos Dispositivos Didáticos (PL, MM e GG), os quais assumem, a depender da intenção de pesquisa, a função de variável ou de complemento nos Geradores ou Sub Geradores de Tipo de Tarefas.

É relevante destacar que as hipóteses que serão testadas por meio da Engenharia Didática se assentam na introdução e na incorporação de novos elementos na bagagem praxeológica dos estudantes, imprimindo modificações na relação pessoal dos sujeitos que protagonizam o funcionamento dos SDs no âmbito do CLM-UEFS. Assim, retornamos às hipóteses que foram reveladas no quarto capítulo:

1. A partir do desenho e da execução de tarefas vetoriais, subsidiadas por distintos Dispositivos Didáticos no âmbito do CLM-UEFS, é possível enriquecer e modificar a bagagem praxeológica e incorporar esses elementos às práticas dos estudantes;
2. É possível promover modificações e evoluções nas relações pessoais do estudantes com os vetores, no seio de CLM-UEFS, por meio da resolução de tarefas repertoriadas por distintas técnicas no seio do AHA¹⁶⁸;
3. Ao ampliar o repertório de técnicas empregadas nas resoluções de tarefas vetoriais é viável ofertar aos estudantes possibilidades de trilhar por distintos Caminhos de Práticas Pessoais – CPP¹⁶⁹.
4. A viabilidade de análise e observação das trajetórias resolutivas, em termos de Dispositivos Didáticos gerenciados pelos GT pode promover maior engajamento e participação no processo de conhecimento vetorial.

Estas hipóteses se apoiam na hipótese geral, que pode ser descrita como a análise do trabalho com diferentes Dispositivos Didáticos - DD e possibilita a construção de recombinações praxeológicas propiciando o despertar de novas relações pessoais dos estudantes com os vetores. Estabelece, assim, um diálogo com a tese que verificará a caracterização das condições e restrições pautadas no que se faz e no que não se faz no MPD, guiado pelo MPR e pela ED. Nestes termos, nos capítulos seguintes, exporemos nuances das fases da Engenharia Didática em interação com a ação dos Dispositivos Didáticos.

¹⁶⁸ Ambiente Híbrido de Aprendizagem.

¹⁶⁹ Será descrito com mais detalhes no Capítulo VI.

CAPÍTULO VI

CONSTRUÇÃO DE UMA ANÁLISE A PRIORI A PARTIR DO T4TEL

Primeiramente, considera-se pertinente retomar os pilares que estruturam o T4TEL, o qual se insere no contexto da TAD, em particular, na abordagem praxeológica (BOSCH e CHEVALLARD, 1999), tendo como pressupostos duas extensões: praxeologia pessoal (CROSET, CHAACHOUA, 2016) e a noção de variável praxeológica (CHAACHOUA, BESSOT, 2018). Em termos operacionais, Chaachoua e Bessot (2016) sublinham que o sistema de variáveis vai coordenar o nível de granularidade revelado no complemento, o qual integra o sentido do verbo de ação e caracteriza os tipos de tarefas, dando origem aos Geradores de Tipo de Tarefas – GTs. Aditado a isso, Chaachoua e Bessot (2018) elencam as funções das variáveis em operação num GT, que são: gerar subtipos de tarefas e caracterizar os escopos das técnicas.

Ambas as funções parecem particularmente interessantes para conduzir uma *análise a priori* (do ponto de vista epistemológico e didático) e calcular o percurso de aprendizagem a partir de um jogo sobre essas variáveis e seus valores. Em particular, a construção de um modelo praxeológico de referência para um domínio matemático (no sentido da escala de codeterminação) inclui fazermos a explicação das variáveis e os valores possíveis. (CHAACHOUA: BESSOT, 2018. P.124, grifos dos autores)

Nesse sentido, faz-se necessário atentar para o percurso de aprendizagem conduzido pelos valores das variáveis no cerne dos GTs. Com base nesses elementos, faz-se necessário discorrer acerca das especificidades de uma análise a priori, a qual tem a intenção de prognosticar que técnicas τ_n serão empregadas pelos estudantes frente às resoluções de um certo tipo de tarefa T. Assim, a partir dessa caracterização preditiva, é exequível projetar, indicar e supor quais técnicas serão utilizadas, nutridas pelos pilares tecnológicos teóricos de investimentos intrínsecos ao saber, os quais serão evocados pelos sujeitos, na resolução de determinada tarefa. Em outras palavras, é plausível prever alternativas e efeitos para a composição de respostas que são requisitadas ao colocar as tarefas em jogo nos Sistemas Didáticos - SD, visto que é viável, sob essa perspectiva pré-diagnóstica, inerente às análises a priori, anunciar um prelúdio de *praxeologias prováveis* de serem construídas na busca por soluções.

Frente à previsibilidade que acompanha essa etapa da investigação, precedido de um estudo dos diferentes níveis do processo transpositivo, as análises fornecem ao pesquisador diferentes nuances, a exemplo, da resolução de uma tarefa vetorial, especificando o status e “modos de vida”, assim como as condições de existência desse objeto no âmbito dos Sistemas

Didáticos – SD no seio do CLM-UEFS. Dessa forma, podemos caracterizá-la como uma ferramenta preparatória da observação constituindo, assim, o primeiro passo do desenvolvimento da análise dos efeitos esperados. Nesse sentido, Mercier e Salin (1988), pontuam imbricações entre o contrato didático e análise a priori,

Reteremos a ideia de que é no contrato didático que a análise a priori examina e cria o distanciamento necessário para a percepção das características do contrato. Como instrumento didático de ensino, ela o ajudará a se preparar para a observação dos fenômenos didáticos cobertos pelo contrato ou pela epistemologia do saber. (MERCIER; SALIN, 1998, p.2, tradução nossa¹⁷⁰)

Em suma, a análise a priori permite projetar intercâmbios entre os alicerces epistemológicos e as relações institucionais circunscritas por um saber, julgando-os enquanto objetivos almejados os quais se agregam às hipóteses que embasam as vertentes da investigação. Integra-se a essa noção, a intenção de produzir uma descrição dos delineamentos de um saber matemático vetorial, no âmbito educacional, perseguindo as características praxeológicas que influenciam ou interferem no significado do comportamento manifesto em relação a esse saber. Busca-se, também, compreender as relações desse saber (institucionalmente em jogo), pois os saberes, anteriormente apresentados, se interligam com as relações pessoais dos atores imersos nos cenários das salas de aulas de Geometria Analítica. Nessa perspectiva, Bessot e Comiti (1985, p.312) também alimentam a concepção de que “esta análise deve evidenciar vários fenômenos que podem ocorrer, nomeadamente para identificar as principais classes de procedimentos de resolução e as condições que os geram, através do estudo das variáveis da situação.”

De modo análogo, Artigue (1996, p.202, grifos da autora) sublinha que, nesta fase, “o investigador toma a decisão de agir sobre um determinado número de variáveis do sistema não fixadas pelas restrições: *variáveis de comando*, que ele supõe serem variáveis pertinentes para o problema estudado”. A autora subdivide essas variáveis em duas categorias: macro didáticas ou globais e micro didáticas ou locais, assumindo uma ordem geral ou dependente do conteúdo matemático estudado subdividida em três dimensões: epistemológica (associada às características do saber), cognitiva (vinculada ao aspecto cognitivo dos sujeitos envolvidos no processo de aprendizagem) e didática (associada às características do sistema de ensino, no qual os sujeitos estão inseridos). Essa caracterização tripla, das variáveis também é foco de atenção no Geradores de Tipo de Tarefas – GT (CHAACHOUA; BESSOT, 2016), seja por intermédio das alterações dos valores das variáveis que desencadeiam uma gama de possíveis técnicas, ou

¹⁷⁰ Nous en retiendrons cette idée que c'est le contrat didactique qu'analyse a priori, qu'elle crée la distance nécessaire à la perception des caractères du contrat. Comme outil d'enseignement de didactique, elle vous aidera à préparer l'observation de phénomènes didactiques relevant du contrat ou de l'épistémologie du savoir.

através dos valores institucionais que modelam condições e restrições explícitas ou implícitas, as quais, de igual modo, refletem nos valores que se atrelam às variáveis didáticas, enquanto repertório disponível para os protagonistas do Sistemas Didáticos – SD em questão.

No cerne das variáveis locais estão as variáveis, dependente do conteúdo didático cujo ensino é visado e se interliga à gestão do meio (BROUSSEAU, 1986). Ademais, Chevallard (2009/2010) sublinha que,

Condições e restrições. O que é normalmente descrito em termos de "variáveis" ou "fatores" é descrito na TAD, genericamente em termos de condições. Dada uma posição p em uma instituição I , diz-se que uma condição é uma restrição para as pessoas que ocupam a posição p se, como ocupantes dessa posição, elas não têm poder para mudar essa condição. (CHEVALLARD, 2009/2010, p.79, tradução nossa¹⁷¹)

Assim, no intuito de estruturar e operacionalizar o estudo, os Geradores de Tipo de Tarefas – GT (CHAACHOUA; BESSOT, 2016) propiciam ao pesquisador gerenciar os sistemas de variáveis respaldado pelo interesse da investigação. Visto que, dentre suas funções, um GT engendra tipo de tarefas de acordo com a estruturação hierárquica definida pelas variáveis (CHAACHOUA, 2018), viabilizando, assim, a operacionalização das indagações advindas de problemáticas didáticas. Nesses termos, a noção de variável aparece como uma ferramenta metodológica no processo de elaboração do Modelo Praxeológico de Referência Alternativo – MPRA, representado pelo AHA, associado às análises a priori. Resulta disso que as possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias e tomadas de decisões perpassam pelo controle que o estudante terá, visto que o professor/pesquisador, enquanto mediador do processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o discente responsável por sua aprendizagem.

Contudo, antes de enveredarmos pelo repertório de trilhas praxeológicas inerentes ao saber vetorial, consideramos pertinente atentarmos, aprioristicamente, para os vínculos que podem ser estabelecidos entre os Sistemas Didáticos – SD, Geradores de Tipo de Tarefas – GT e o Ambiente Híbrido da Aprendizagem – AHA no intuito de situar o leitor acerca do contexto e o background que envolve a dinâmica praxeológica (KASPARY; CHAACHOUA; BESSOT, 2020) no seio do funcionamento dos SD.

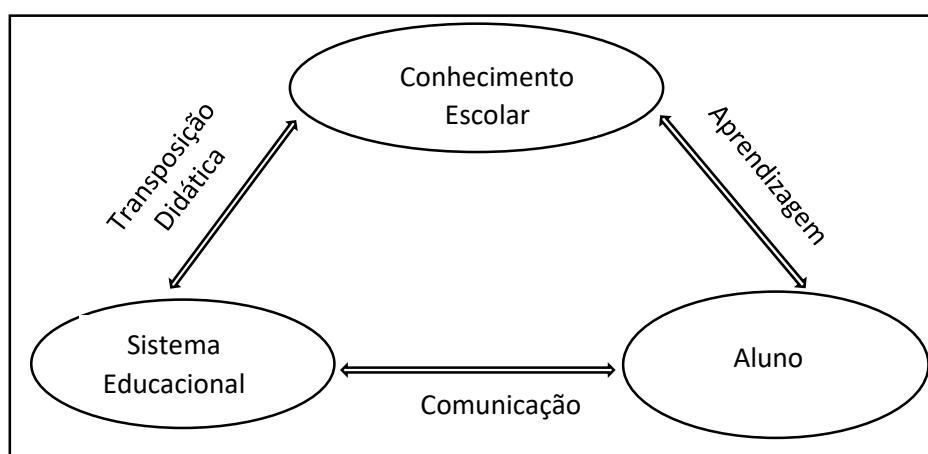
6.1 UM DESENHO DA DINÂMICA DO FUNCIONAMENTO DOS SISTEMAS DIDÁTICOS – SD

¹⁷¹ Conditions et contraintes. Ce qui est décrit ordinairement en termes de « variables » ou de « facteurs » l'est en TAD, de façon générique, en termes de conditions. Étant donné une position p dans une institution I , on dit qu'une condition est une contrainte pour les personnes occupant la position p si, en tant qu'elles occupent cette position, elles n'ont pas le pouvoir de modifier cette condition.

No campo da didática, os Sistemas Didáticos – SD foram caracterizados pelas relações entre estudantes, professores e saber. Brousseau (2008) esquematizou esses vínculos a partir de um triângulo equilátero em que cada vértice representa: o professor, os alunos e o conhecimento escolar, os quais se inter-relacionam aos pares, (professor – saber), (professor – alunos) e (alunos – saber).

Ainda, segundo esse autor, “esse esquema é associado a uma concepção de ensino em que o professor organiza o conhecimento a ser transmitido por meio de mensagens, das quais o aluno toma para si o que deve adquirir” (Brousseau, 2008, p.16). Em sentido análogo, na origem da teoria das situações, Brousseau (2008, p. 17) indica o esquema, figura 101, que associa a concepção de ensino à organização do conhecimento comunicado pelo professor, no qual o aluno se envolve na apropriação do saber.

Figura 101 - Esquema do processo de estudo



Fonte: Brousseau (2008, p. 17)

Os elementos responsáveis pela mediação entre os três polos aparecem como pilares de sustentação do processo de ensino e aprendizagem. Contudo, fazemos uma ressalva ao inferirmos que, de igual modo, como Brousseau (2008) estabeleceu como elo a transposição didática para intermediar as relações entre o Sistema Educacional e o Conhecimento Escolar. A transposição, em nível interno, deveria estabelecer conexões entre o aluno e o conhecimento escolar, já que uma das etapas do processo transpositivo se relaciona com o saber apreendido. De igual modo, se existe aprendizagem no processo interativo entre Aluno e o Conhecimento Escolar, então é possível atentar para a existência de uma ancoragem transpositiva que se atrela aos condicionantes didáticos em termos de um saber ensinado e apreendido. Nessa perspectiva, Chevallard (1982) sinaliza que,

O seu funcionamento - para não falar do seu bom funcionamento - pressupõe que a “matéria” (professor, alunos, conhecimentos) que ocupará cada uma das três vagas satisfaça determinados condicionantes didáticos específicos. Para que o ensino de tal elemento do conhecimento seja apenas possível, esse elemento deve ter sofrido certas deformações, que o tornam adequado para o ensino. Conhecimento-como-é-ensinado, conhecimento ensinado, é necessariamente diferente de conhecimento-inicialmente-designado-como-a-ser-ensinado, conhecimento a ser ensinado. (CHEVALLARD, 1982, p.169, tradução nossa¹⁷²)

Aditado à concepção transpositiva, Casabó (2018) ressalta que,

a disseminação das praxeologias se dá através dos Sistemas Didáticos. (...). A dinâmica desses sistemas – o que X e Y fazem para gerar evoluções – e as condições e restrições que permitem ou dificultam esta dinâmica também são dimensões importantes no cerne do questionamento didático. (CASABÓ, 2018, p.4034, tradução nossa¹⁷³)

A autora também aponta para a necessidade de questionar os modelos epistemológicos dominantes nas instituições educacionais que estão

no centro da pesquisa em didática da matemática, na perspectiva proposta pela teoria das situações didáticas Brousseau [1997], que está na origem da TAD. A evolução de um sistema didático $S(X; Y; \varnothing)$ sem dúvida depende do que X e Y podem fazer, mas também de como a praxeologia φ é delimitada, concebida, considerada, importada, utilizada, legitimada nas instituições escolares - assim como em outros níveis superiores de codeterminação. (Ibid, p. 4038, tradução nossa¹⁷⁴).

Assim, consideramos pertinente atentar para os Sistemas Didáticos- SD no seio da TAD, imersos no universo praxeológico, com a função de propagar e divulgar conhecimentos. Em essência, os SD são protagonizados por professores e alunos em torno de uma obra , denotado por “ $S(X; Y; O)$, sendo X instância estudantes; Y instância de ajuda de estudo e O a obra que X deve se esforçar para conhecer” (Chevallard, 2011, p. 44). Concebemos que esse processo, o qual envolve empenho na busca por conhecimento, se atrela diretamente às sujeições institucionais ou não, gerando um encadeamento de relações pessoais. Como descrito por Chevallard (2002),

A noção fundamental é a da relação pessoal de um indivíduo x com um objeto o, uma expressão pela qual designamos o sistema, notamos R (x, O), de todas as interações

¹⁷² Son fonctionnement – sans parler encore de son bon fonctionnement – suppose que la « matière » (enseignant, élèves, savoir) qui viendra remplir chacune des trois places satisfasse à certaines contraintes didactiques spécifiques. Pour que l’enseignement de tel élément de savoir soit seulement possible, cet élément devra avoir subi certaines déformations, qui le rendront apte à être enseigné. Le savoir-tel-qu’il-est-enseigné, le savoir enseigné, est nécessairement autre que le savoir-initialement-désigné-comme-devant-être-enseigné, le savoir à enseigner.

¹⁷³ The dissemination of praxeologies takes place through what we call didactic systems. (...). The dynamic of didactic systems—what X and Y do to make it evolve—and the conditions and constraints that enable and hinder this dynamic are also important dimensions at the centre of the didactic questioning.

¹⁷⁴ Questioning the prevailing epistemological models in educational institutions is at the core of research in didactics of mathematics in the perspective proposed by the theory of didactic situations Brousseau [1997], which is at the origin of the ATD. The evolution of a didactic system $S(X; Y; \varnothing)$ undoubtedly depends on what X and Y can do, but also on how the praxeology φ is delimited, conceived, considered, imported, used, legitimised in school institutions—as well as at the other higher levels of codeterminacy.

que x pode ter com o objeto o - se x o manipula, o usa, fala sobre ele, sonha com ele, etc. Diremos que o existe para x se a relação pessoal de x com o é "não vazia", que é anotada como $R(x, O) \neq \emptyset$. (CHEVALLARD, 2002, p. 81, tradução nossa¹⁷⁵)

Em outras palavras significa dizer que cada $x \in X$ deve agir para que relações com $O, (R(x, O))$, se criem. Assim como $y \in Y$ tem a função de “fazer algo” que origine oportunidades para que $R(x, O)$ se estabeleçam ou sejam fortalecidas se já existirem, pois como já dito anteriormente, “a aprendizagem é uma modificação da relação de um indivíduo x com O , ou seja, essa relação começa a existir (se ela ainda não existia), ou essa relação é modificada (se ela já existia).”(CHAACHOUA; BITTAR, 2019, p. 31).

Associados aos elementos aludidos anteriormente, estão as praxeologias, ou seja, “toda ação humana procede de uma praxeologia” (CHEVALLARD, 1997, p. 14). Dito de outra forma, “toda praxeologia é um sistema de tarefas em torno do qual técnicas, tecnologias e teorias são desenvolvidas e organizadas” (CHEVALLARD, 1997, p. 17, tradução nossa¹⁷⁶). O que significa dizer que essa estrutura organizacional que se forma nos âmbitos das salas de aulas se apoiam nas intencionalidades advindas dos sujeitos x e/ou y , os quais se envolvem em complexos praxeológicos ao possuir hábitos que envolvem o objeto de estudo. Dessa maneira, a gestão e intervenções dos professores e as interações dos alunos sob os conhecimentos se propagam no cenário institucional.

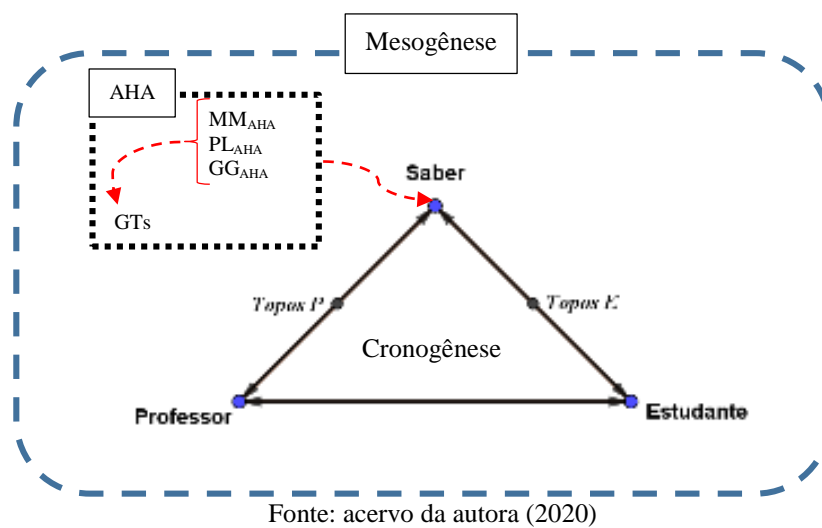
Assim, nessa via de investigação, determina-se os objetos a serem estudados e os papéis dos agentes no processo de estudo. Dito de outra forma, consiste em criar condições para que as trocas entre professores e alunos tenham por finalidade o saber. Entretanto, comungamos com Nascimento et al. (2019) que sinalizam acerca da existência de instabilidades nos relacionamentos e nas interdependências entre os agentes que integram os sistemas de ensino. A partir dessa interpretação, os autores apresentam um redesenho do esquema ao utilizar um triângulo escaleno, por considerar que as interações didáticas não ocorrem de forma estável, simétrica e regular. Nesse contexto, os autores concentram a atenção na função didática cronogênese, a qual se encarrega da “gênese do tempo didático, ou seja, o tempo da construção praxeológica” (CHEVALLARD, 2009-2010, p.79), estabelecendo um comparativo entre o monumentalismo (CHEVALLARD, 2012) e os Percursos de Estudo e Pesquisa – PEP (CHEVALLARD, 2009).

¹⁷⁵ Le notion fondamentale est celle de rapport personnel d'un individu x à un objet o , expression par laquelle on désigne le système, noté $R(x, O)$, de toutes les interactions que x peut avoir avec l'objet o – que x le manipule, l'utilise, en parle, en rêve, etc. On dira que o existe pour x si le rapport personnel de x à o est « non vide », ce qu'on note $R(x, O) \neq \emptyset$.

¹⁷⁶ Le socle de toute praxéologie est un système de tâches autour duquel se développent et s'organisent techniques, technologies, théories.

Apoiados nessa concepção, concebe-se que o esquema possa adquirir contornos variados e robustos ao estabelecer, observar e examinar a mobilidade dos vértices do triângulo que ilustra o SD. Para além disso, a análise do papel das demais funções didáticas em consonância ao Ambiente Híbrido de Aprendizagem - AHA e os Geradores de Tipo de Tarefas – GT regido pela dinamicidade própria dos Sistemas Didáticos pode constituir caminhos para estudos posteriores. No entanto, nesta investigação deixamos registrada essa ideia embrionária, esquematizada a seguir,

Figura 102 - Sistema Didático em associação com as Funções Didáticas



A imagem pontilhada caracteriza a configuração de um meio de ensino, composto por elementos disponíveis para o estudo de certo objeto O (vetores), visto que o *meio* M , segundo Chevallard (2013, p.33), é “o ambiente didático que reúne o conjunto evolutivo de recursos para o estudo de Q , um ambiente que é escrito genericamente da seguinte forma: $M = \{Q_1, \dots, Q_n, R_1^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_1, \dots, O_n\}$ ”. A evolução e a transformação do *meio* ocorre à medida que os estudantes consultam obras O (livros, textos e materiais de apoio, como por exemplo os Dispositivos Didáticos, dentre outros), os quais se somam a novas questões que derivam de Q , aditada às respostas acessíveis e reconhecidas institucionalmente, gerando um ciclo de aproximação gradual da resposta almejada R^\heartsuit . Como defende Chevallard (2007),

Na TAD, o meio não deve ser dado no início com X, Y e Q ; e, em vez de retocar o diagrama indicado acima, reescrevendo-o no formato $S(X, Y; Q; M) \rightarrow R$, escreverei aqui $[S(X; Y; Q) \rightarrow M] \rightarrow R$, significa que o sistema didático $S(X; Y; Q)$ produz e organiza o meio M com o qual, dialeticamente, ele gera R . A produção e organização desse meio didático é, como regra geral, um aspecto essencial da produção de uma *organização didática*. (CHEVALLARD, 2007, p.31)

Nesse sentido, Chevallard (2007) também ressalta que o meio pode ganhar uma amplitude, composto por uma reunião de obras e recursos que os alunos visitam para fundamentar e obter uma resposta desejada, que remeterá “a configuração didática evocada aqui pode ser colocada na seguinte forma, de acordo com um esquema que chamaremos Esquema Herbartiano¹⁷⁷: $[S(X; y^*; Q) \rightsquigarrow M\{ Q_1, \dots, Q_n, R_1^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_1, \dots, O_n\}] \rightsquigarrow R^\heartsuit$.” (CHEVALLARD, 2007, p.349, tradução nossa¹⁷⁸). Dessa forma, essa vertente não compõe o objetivo principal da pesquisa, mas estudos futuros terão como embasamento esse tipo de estruturação.

Dito isto, a *Dialética Mídia Meio* faz-se presente ao reger todos os direcionamentos para construção do meio, enriquecido e nutrido por diversas mídias que se fazem presentes no processo de experimentação, descrito por Chevallard (2007),

(...) mídia é entendida aqui como qualquer sistema para representar o mundo (ou parte do mundo) voltada a determinado público: um tratado aprendido é, portanto, uma mídia (ou mais exatamente uma produção pertencente a um determinado gênero de mídia), como é a mídia do curso de um professor, ou o sistema de boatos, etc. A palavra meio, por outro lado, entra em consonância com a TSD, qualquer sistema considerado desprovido de intenção na resposta que pode fornecer (de maneira eventual e implícita) a uma determinada pergunta, de modo que parece se comportar em relação a ele como um fragmento da natureza. (CHEVALLARD, 2007, p.40, tradução nossa¹⁷⁹)

Ademais, parafraseando Brousseau (2008), pode-se destacar que os comportamentos dos alunos revelam o funcionamento do meio, o qual deve ser modelado, ou seja, não é um elemento pronto e acabado. Assim, (Chevallard, 2009-2010, p. 80) apresenta um incremento a essa acepção ao conceber a mesogênese como “a gênese do ambiente didático, ou seja, do sistema de recursos utilizados no processo de construção praxeológica.” Nesse caso, podemos interpretar os recursos enquanto dispositivos didáticos, que, segundo Chevallard (1998), se apresentam como um componente material de uma técnica, em oposição ao seu componente gestual, o que significa dizer que são compostos por objetos que possuem propriedades intrínsecas à natureza física, viabilizando o manuseio dos ostensivos. Para nós, denotados por Materiais Manipuláveis - MM, Papel Lápis - PL e o GeoGebra - GG, esses se integram à configuração do AHA e alimentam os Geradores de Tipo de Tarefas – GTs, seja por intermédio

¹⁷⁷ Advém do sobrenome de Johann Friedrich Herbart (1776-1841), para obter maiores detalhes ver Chevallard (2007).

¹⁷⁸ Le configuration didactique évoquée ici peut être mise en forme comme suit, selon un schéma qu'on appellera le schéma herbartien: $[S(X; y^*; Q) \rightsquigarrow M\{ Q_1, \dots, Q_n, R_1^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_1, \dots, O_n\}] \rightsquigarrow R^\heartsuit$.

¹⁷⁹ (...) on entend par média, ici, tout système de mise en représentation du monde (ou d'une partie du monde) à l'adresse d'un certain type de publics: un traité savant est ainsi un média (ou plus exactement une production relevant d'un certain genre médiatique), de même qu'est un média le cours du professeur, ou le système des rumeurs, etc. Le mot de milieu, quant à lui, renvoie, en consonance avec la TSD, à tout système regardé comme dénué d'intention dans la réponse qu'il peut apporter (de manière éventuellement implicite) à telle question déterminée, en sorte qu'il paraît se comporter à son égard comme un fragment de nature.

do Sistema de Variáveis ou pela possibilidade de se integrar ao complemento verbal que acompanha a estruturação dos Tipo de Tarefas que compõem os GTs.

Assim, agrega-se ao posicionamento das demais funções didáticas um diálogo acerca da interpretação que temos das mesmas. Pois, a exemplo da topogênese se revela que como

a gênese de equipamentos praxeológicos (e relatórios institucionais associados) segundo as posições do aluno e do professor durante a construção praxeológica. O topos (lugar, em grego antigo) do aluno (respectivamente do professor) é a parte da posição do aluno (resp. do professor) que se relaciona com as entidades praxeológicas construídas ou em construção na sala de aula. (CHEVALLARD, 2009-2010, p.82, tradução nossa¹⁸⁰)

Sob esse ponto de vista, as construções de cunho praxeológico realizadas no âmbito dos SD estão diretamente vinculadas ao saber em jogo. Desse modo, o viés investigativo pode ser sintetizado com a estruturação e operacionalização dos Geradores de Tipo de Tarefas – GT alimentados pelos sistemas de variáveis provenientes da configuração revelada nos Dispositivos Didáticos que integram o Ambiente Híbrido de Aprendizagem – AHA. Aspecto esse que abre caminho que nos conduz a relacionar diferentes noções no que tange a dimensão vetorial.

Respaldados nessa representação ideal que perpassa por composições reais em conexão com uma aparente estabilidade que não sobrevive nos cenários que se enveredam pelos contextos institucionais das salas de aulas, Chevallard (1999) aponta que:

Pode-se imaginar um mundo institucional no qual as atividades humanas são regidas por praxeologias bem adaptadas, permitindo que todas as tarefas desejadas sejam realizadas de maneira ao mesmo tempo eficiente, segura e inteligível. Mas tal mundo não existe: como foi sugerido, as instituições estão repletas de toda uma dinâmica praxeológica (...). (CHEVALLARD, 1999, p. 230, tradução nossa¹⁸¹)

Nestes termos, admitimos que os Sistemas Didáticos - SD, em associação com as funções didáticas, acompanham este estudo e comungam com as pesquisas de Chevallard (2009; 2010; 2012) que apresentam a emergência do “Paradigma de Questionamento do Mundo”, cuja base se assenta em, “(...) atitudes diferentes, que eu chamo de procognitiva (...), e que inclina-se a se comportar como se o conhecimento ainda estivesse essencialmente para descobrir e ainda para conquistar - ou redescobrir e conquistar de novo.” (CHEVALLARD,

¹⁸⁰ Genèse des équipements praxéologiques (et des rapports institutionnels associés) selon les positions d’élève et de professeur au cours de la construction praxéologique. Le topos (le lieu, en grec ancien) de l’élève (respectivement du professeur) est cette partie de la position d’élève (resp. de professeur) qui a trait aux entités praxéologiques construites ou en cours de construction dans la class

¹⁸¹ On peut imaginer un monde institutionnel dans lequel les activités humaines seraient régies par des praxéologies bien adaptées permettant d’accomplir toutes les tâches voulues d’une manière à la fois efficace, sûre et intelligible. Mais un tel monde n’existe pas: comme on l’a suggéré, les institutions sont parcourues par toute une dynamique praxéologique (...)

2012, p.3, tradução nossa¹⁸²). Em outras palavras, uma visão prospectiva sobre a dimensão didática que aponta para um aflorar de uma postura autônoma dos estudantes, pressuposto este seguido durante todos os cursos, mesmo que de forma embrionária, os quais apresentam organizações, advindas da mobilidade entre os vértices dos triângulos. Como sublinham Farias; Carvalho e Teixeira (2018),

(...) passamos, por exemplo, pela relação do sujeito com os tratados publicados de ensino e aprendizagem, tratados estes que talvez não estejam permitindo um mergulho na atividade institucional, uma busca pela compreensão teórica relacionada com a prática (no caso dos professores), mergulho que representaria a autonomia desse sujeito. (FARIAS; CARVALHO e TEIXEIRA, 2018, p.98)

Assim, ilustramos um dos cenários que pode ser planejado em conexão com as funções didáticas. Frente a essa mobilidade de um dos vértices do triângulo, é possível examinar aproximações entre o estudante e o saber, ou seja, a distância entre o saber e os estudantes se reduz quando eles assumem o protagonismo da situação deslocando o posicionamento do AHA, oportunizando, assim, um repertório de Dispositivos Didáticos sob seu controle. Dito de outra forma, o professor proporciona aos alunos situações que demandam escolhas, testar seus efeitos, coordená-las, eventualmente regressar às conceitualizações prévias, estabelecer seleções, dentre outras.

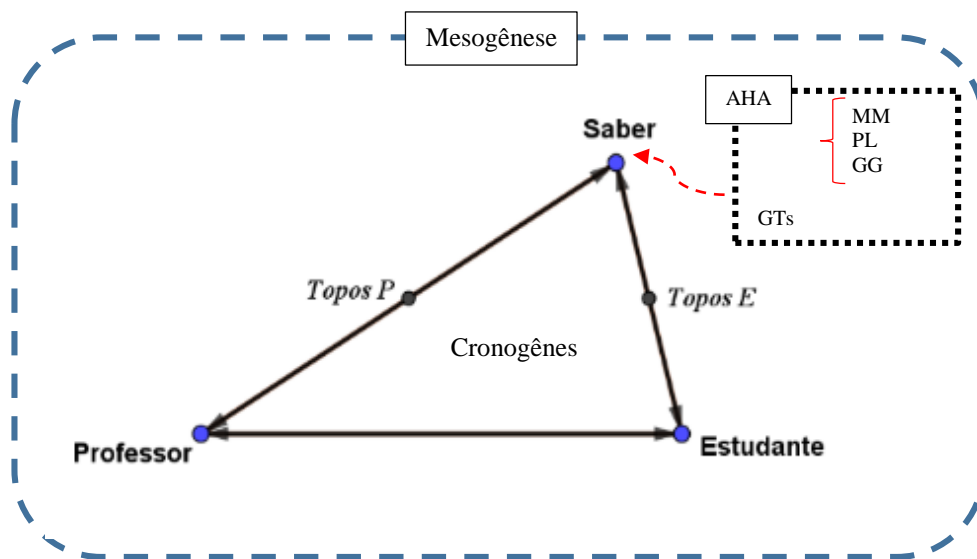
Em outras palavras, os estudantes aceitam o protagonismo da situação e assumem o papel de atores, pois eles solucionam, coletivamente, as questões sem inferências do docente. O que nos permite pensar que situações didáticas planejadas com distintos dispositivos didáticos oportunizam aos estudantes uma atuação que se desvencilha da dependência do docente, rompendo assim com o “vício escolar: espera que o professor diga o que deve fazer” (CHEVALLARD, BOSCH e GASCÓN, 2001, p.264). Esse aspecto está ausente na estruturação do ensino tradicional que sustenta seus pilares no Paradigma de Visitas às Obras. E muitas vezes, nessas condições,

O mais provável é que o estudante não veja que as dificuldades com as quais se depara são resultado mais da organização matemática escolar que de uma possível incapacidade pessoal. Sem dúvida, o contrato no qual trabalha não permite identificar seu problema como um problema didático, isto é, um problema *de estudo* e de *organização do estudo*. (...) O problema está no fato de que não existe nenhum lugar na organização tradicional do processo didático que possa responder, adequadamente, a essa necessidade de “mais matemática”. (CHEVALLARD, BOSCH e GASCÓN, 2001, p. 282, grifos dos autores)

¹⁸² (...) different attitude, that I dub procognitive (...) and which inclines one to behave as if knowledge was essentially still to discover and still to conquer—or to rediscover and conquer a new.

Assim, objetiva-se enfraquecer essa impressão de inabilidade pessoal para com os temas vetoriais, ao provocar modificações no meio no intuito de contribuir com a construção de possíveis respostas ou a efetiva solução de determinadas questões. Nessa perspectiva, a maioria dos discentes optaram por não se refugiarem na simples função de meros executantes. Como ilustrado a seguir,

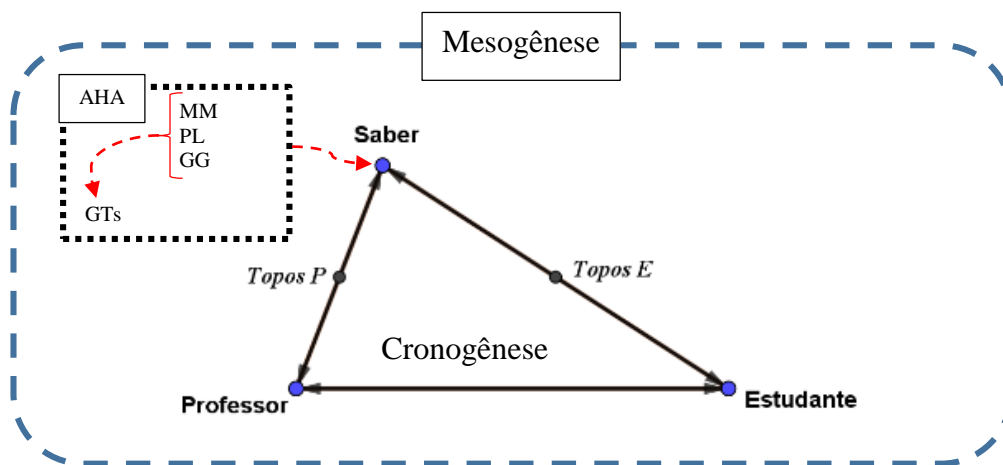
Figura 103 - O estudante como gerenciador do saber



Fonte: acervo da autora (2020)

Ao pensar em uma segunda movimentação do vértice que denota o saber, se deslizado para esquerda segundo a direção horizontal, descreve-se um momento em que o professor assume o protagonismo da situação, como evidenciado na figura 104, que retrata menor participação do estudante, visto que ocorre um maior distanciamento entre o estudante e o saber. À disposição do docente, também, podemos idealizar o mesmo repertório de mídias acessíveis à comunidade de estudo, gerenciado pelo GTs em funcionamento no AHA.

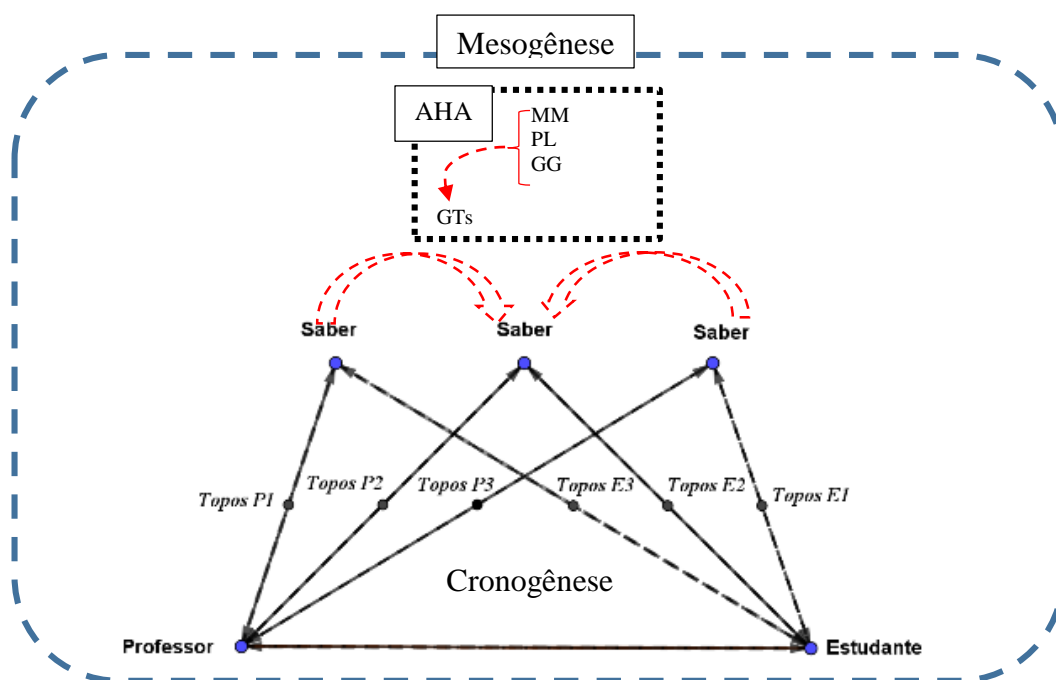
Figura 104 - O professor como gerenciador do saber



Fonte: acervo da autora (2020)

A junção das imagens anteriores, dão origem a figura 104, a qual representa três dos infinitos pontos que configuram a dinamicidade do funcionamento dos Sistemas Didáticos – SD, a partir da movimentação do vértice que contém o saber. Nestes termos, concebemos que a mobilidade de um ou mais vértices do triângulo retratam a movimentação inerente aos Sistemas Didáticos – SD, na busca por uma suposta situação de equilíbrio que, como já declarou Chevallard (1999), “tal mundo não existe” (...).

Figura 105 - Dinâmica de funcionamento dos Sistemas Didáticos - SD



Fonte: acervo da autora, (2020)

Daí inferimos que, em termos didáticos, existe uma meta de deslocamento dos vértices do triângulo em que se almeja obter um equilíbrio entre as congruências inerentes ao triângulo didático proposto por Brousseau (2008). Contudo, ressaltamos que, devido ao conjunto de condições e restrições que coadunam com o cenário dinâmico dos Sistemas Didáticos, em prol da difusão do conhecimento entre sujeitos dentro das instituições, por exemplo as salas de aulas, consideramos um tanto utópico alcançar uma tipificação de um triângulo equilátero.

Esse aspecto de deslocamento entre os vértices dos triângulos dá origem a diversas representações de triângulos: escalenos ou isósceles, segundo a longitude de seus lados ou segundo os seus ângulos (retângulo, acutângulo ou obtusângulo), os quais refletem diretamente no comportamento das funções didáticas que neles foram dispostas. Situados neste contexto, vislumbramos que, ao focar no caráter metodológico, é viável apresentar um repertório de possibilidades para as resoluções das tarefas, as quais foram dirigidas por distintas técnicas em sintonia com diversas variáveis, reguladas por escolhas e intenções próprias da pesquisa, imbricadas algumas das potencialidades dos GTs.

6.2 POTENCIALIDADES DOS GERADORES DE TIPO DE TAREFAS NOS DIRECIONAMENTOS DAS ANÁLISES A PRIORI

Ao recorrer a uma das metáforas propagadas por Chevallard (2014), escolhemos esta, a qual expõe uma perspectiva, que pode ser analogamente equiparada com “o pesquisador que se torna um (caçador-coletor) ou levantadas pelo pesquisador (que se torna um agricultor) (...)” (CHEVALLARD, 2014, p.10, tradução nossa¹⁸³). Respalhada por essa alegoria, descreve-se traços e similitudes evidenciados na nossa trajetória investigativa, a qual similarmente podemos inferir que os SD descritos anteriormente possam se assemelhar a um terreno fértil propício para o plantio. Ao seguir a etapa da semeadura (AHA) e conseqüente processo de germinação, as sementes rompem os limites do solo, passam modificar o meio que vem sendo propagado nas aulas cujo tema abordado sejam os vetores.

Dito de outra forma, a proposta de um trabalho que estabeleça diálogos entre distintos Dispositivos Didáticos (PL, MM, GG) imerso no Ambiente Híbrido de Aprendizagem – AHA

¹⁸³ Ces témoignages peuvent être disponibles *a priori* (le chercheur se fait alors chasseur-cueilleur) ou suscités par le chercheur (qui se fait alors agriculteur), (...).

e operacionalizado pelos GTs, nos direciona a empreender a interpretação metafórica de que os geradores atuam como uma “máquina” que produz tarefas, no qual AHA fornecerá “combustível” para o funcionamento operacional em interação com as mídias, nos moldes da Dialética Média Milieu (CHEVALLARD, 2007), regulados pelos valores das variáveis inerentes à natureza de cada Dispositivo Didático.

Assim, as práxis dos sujeitos (docentes / discentes) serão modificadas a partir do Ambiente Híbrido de Aprendizagem – AHA, estruturado por nós como um espaço constituído por uma variedade de Dispositivos Didáticos (mídias¹⁸⁴). Pois, dentre as hipóteses já elencadas, destacamos que, ao disponibilizar diferentes mídias aos estudantes (GOULART e FARIAS, 2018) – diversas das convencionais –, é possível integrar uma abordagem flexível (DREYFUS, 1991) em detrimento à rigidez matemática (SILVA et al, 1999). Dessa maneira, advém a intenção de identificar, implementar e formalizar uma espécie de complementação das ferramentas de ensino no contexto vetorial, amalgamando novas às que já existem.

Em sentido complementar, é possível avaliar as lacunas entre as relações pessoais e as relações de caráter institucional em torno de um objeto do saber, neste caso os vetores. Como destacou Chevallard (1989),

Esse relacionamento pessoal inclui notadamente tudo o que normalmente pensamos que podemos dizer - em termos de "saber", "saber fazer", "concepções", "habilidades", "domínio" e "imagens mentais", de "representações", de "atitudes", de "fantasias", etc ... - de X sobre Os. Tudo o que pode ser afirmado - certo ou errado, em conformidade ou não - deve ser considerado (na melhor das hipóteses) para um aspecto do relacionamento pessoal de X com Os. (CHEVALLARD, 1989, p. 219, tradução nossa¹⁸⁵)

Tais aspectos permitirão o encontro com novas situações aptas a serem utilizadas como alavancas para a desconstrução e reconstrução de tarefas vetoriais como sugerido por Casabò (2001):

Ensinar e aprender matemática corresponde à atividade de reconstruir organizações matemáticas para poder usá-las em novas situações e sob diferentes condições (...). Assim, o objetivo de um processo de ensino / aprendizagem pode ser formulado em termos dos componentes das organizações matemáticas a serem reconstruídas: que tipos de problemas devem poder ser resolvidos, com que tipos de técnicas, com base em quais elementos descritivo e justificativo, em que referencial teórico etc. (CASABÒ, 2001, p.16)

¹⁸⁴ Ver Chevallard (2007).

¹⁸⁵ De ce rapport personnel relève notamment tout ce qu'on croit ordinairement pouvoir dire - en termes de "savoir", de "savoir-faire", de "conceptions", de "compétences", de "maîtrise", d' "images mentales", de "représentations", d' "attitudes", de "fantasmes", etc...- de X à propos de Os. Tout ce qui peut être énoncé - à tort ou à raison, pertinemment ou non - doit être tenu (au mieux) pour un aspect du rapport personnel de X à Os.

Nesse contexto, foram projetadas recombinações praxeológicas, que equivalem a “praxeologia transposta $(\Pi \oplus \Lambda)^*$ que por vezes, pode ser escrita $(\Pi^*) \oplus \Lambda$ com um logos mantido, mas uma práxis modificada, (...)” (CHEVALLARD, 2018, p. 35), respaldada pela implementação de distintas organizações de ensino e aprendizagem, baseadas em diferenciadas formas de produção de técnicas. Dessa forma, ao explorar as competências dos Geradores de Tipo de Tarefas - GT (CHAACHOUA; BESSOT, 2016), é viável usufruir deste aspecto, na trajetória metodológica da pesquisa. Em outras palavras, pensamos em atrelar e remeter às análises a priori, apresentadas neste texto, a empregabilidade e a funcionalidade dos GTs, permitindo assim, um trânsito entre os diferentes níveis de granularidade, levando em consideração os variados aspectos da atividade matemática por meio da instanciação dos valores no sistema de variáveis, as quais a professora/pesquisadora pode ampliar, reduzir ou até mesmo bloquear um repertório de técnicas, supostamente, projetadas para a resolução das tarefas. O que significa dizer, que alguns fenômenos didáticos são mais ou menos perceptíveis a partir da modelização praxeológica proposta na pesquisa.

Então, sob esse ponto de vista, emerge uma primeira articulação entre a estruturação das análises a priori e os Geradores de Tipo de Tarefas, que se dará no nível do bloco prático, ou seja, das tarefas e técnicas, sempre legitimadas pelo arcabouço tecnológico-teórico, desenvolvidas ou mobilizadas em cada proposta de resolução. Assim, supomos que os sujeitos da pesquisa devam encontrar e seguir vias diferentes com o desígnio de alcançar as soluções das atividades propostas, viabilizando projeções e concepções distintas acerca das tarefas vetoriais. Todavia, a incorporação de variáveis gerais ou específicas regulará em que nível de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2002) o GT pertencerá. O qual pode ser exemplificado por meio do esquema, em que apresentamos um Gerador de Tipo de Tarefas direcionado para a construção das análises, a priori da primeira tarefa, o qual pode ser replicado para as demais questões, as quais serão tratadas neste capítulo, situadas a partir do nível pontual (atômico) na escala de codeterminação didática com projeções ascendentes para níveis superiores.

Quadro 15 - Gerador de Tipo de Tarefas direcionado às análises a priori

$$GT_{AP_t} = [\textit{Supor}; \textit{caminhos resolutivos para tarefas vetoriais}; V_{1AP_t}, V_{2AP_t}, V_{3AP_t}]$$

V_{1AP_t} – Natureza dos ostensivos: {geométrica, algébrica ou numérica};

V_{2AP_t} – Dispositivos: {PL, MM, GG};

V_{3AP_t} – Elementos auxiliares de V_{2AP_t}

Fonte: acervo da autora (2020)

Assim, denotaremos: GT_{AP_t} – Gerador de Tipo de Tarefas para Análise a Priori dos Tipos de Tarefas que foram trabalhadas no seio do minicurso projetado para os discentes do CLM-UEFS. Composto por um *verbo de natureza preditiva* e um complemento fixo, o qual pode ser definido a partir de distintos níveis de granularidade do específico para o genérico ou vice-versa, e que se atrela a um sistema de variáveis elaborados segundo os interesses inerentes à pesquisa. Assim, as distintas variáveis contribuem para o gerenciamento das ramificações particulares ou extensivas do estudo. É relevante destacar que o Gerador de Tipo de Tarefas - GT_{AP_t} , idealizado para análises a priori, possui uma natureza essencialmente metodológica, ou seja, contribuirá para a ordenação dos dados produzidos no intuito de obter, mesmo que parcialmente, a meta da investigação. No nosso caso, como mobilizar recombinações praxeológicas, pautadas em condições e restrições, que promovam mediações entre as relações pessoais e institucionais no âmbito dos SDs subjacente ao saber vetorial no CLM-UEFS?

Trata-se, então, de uma imersão por meio de tipos de tarefas que promovam o ingresso no âmbito vetorial, através das análises dos desenvolvimentos das praxeologias, compatíveis com as características de resoluções propostas no que se refere a esse saber e aos dispositivos didáticos empregados. Dessa forma, elencamos alguns pontos de interesse na análise a priori. O primeiro deles, refere-se ao *in situs*¹⁸⁶ institucional desta tarefa e das demais que serão tratadas nesta seção. Assim, institucionalmente todas as tarefas se inscrevem e estão respaldadas pela ementa da componente curricular Geometria Analítica e Álgebra Linear I EXA 180 e de igual modo se afilia a Geometria Analítica – EXA 374. De acordo com o quadro a seguir:

¹⁸⁶ Expressão em latim utilizada pelos franceses que significa no local.

Quadro 16 - Direcionamentos institucionais da componente curricular Geometria Analítica – EXA 374

COMPONENTE CURRICULAR	NATUREZA	CÓDIGO	CARGA HORÁRIA	ATIVIDADE PEDAGÓGICA
Geometria Analítica	ECM	EXA 374	60h	Teórico-prática
EMENTA: Sistemas de Coordenadas Cartesianas no Espaço. Álgebra Vetorial. Produtos escalar, vetorial e misto. Estudo da Reta e do Plano. Coordenadas Polares. Cônicas e Superfícies.				
BIBLIOGRAFIA BÁSICA: BOULOS, P.; CAMARGO, I. de. Geometria Analítica: um tratamento vetorial. São Paulo, SP: Prentice Hall, 2005. DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. Geometria Analítica. Rio de Janeiro: SBM, 2017. LEHMANN, C. H. SIECZKOWSKI, R. P. S. Geometria Analítica. Porto Alegre: Editora Globo, 1998. LIMA, E. L. Geometria Analítica e Álgebra Linear. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. VENTURI, J. J. Álgebra Vetorial e Geometria Analítica. Curitiba: Scientia et Labor, 2015. STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.				
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR: AVRITZER, D. Geometria Analítica e Álgebra Linear: uma visão geométrica. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2009.				

Fonte: Projeto Político Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática (UEFS, 2018)

Retrocedemos no Modelo Praxeológico Dominante – MPD para pontuar que, mesmo diante das modificações curriculares ocorridas no cerne institucional do CLM-UEFS, os vetores sempre integraram as ementas das componentes curriculares que versaram sobre a Geometria Analítica no contexto deste curso. Nestes termos, é possível perceber que Álgebra Vetorial tem seu habitat consolidado no âmbito geométrico, convergindo para ampliações domínio da Álgebra Linear. Assim, em paráfrase a Mercier (2010), sublinhamos que a identificação de elementos que pertencem ao repertório epistemológico do professor atrela-se às variáveis de sua ação didática e projeta uma análise ascendente da transposição didática que se realiza, na maioria das vezes, após o fato de que é a priori que produz a interpretação de traços de relações com objetos de conhecimento coletados por um dispositivo de observação didática.

Fundamentados nesses aportes teórico e curricular, fitamos a atenção para um aspecto que certamente contribuirá para descrição das condições e restrições respaldadas no que se faz e no que não se faz no MPD no cenário do CLM – UEFS. Dessa forma, algumas questões que integraram as avaliações da componente curricular EXA 180 – Geometria Analítica e Álgebra Linear I, em diversos semestres, nos forneceram pistas para o estabelecimento de diálogos com a fase experimental da investigação delineada no capítulo seguinte. Assim, no intuito de não

tornar exaustiva a leitura desse texto, faremos um recorte de algumas questões e Caminhos de Práticas Pessoais – CPP, o qual serão definidos, caracterizados e descritos na próxima subseção.

6.2.1 Descrição dos Caminhos das Práticas Pessoais - CPP a partir de um recorte de tarefas avaliativas

As lentes de análises que subsidiam essa etapa da pesquisa são conduzidas por meio da perspectiva dos valores assumidos pelas variáveis, nesse caso V_{1AP_t} – Natureza dos ostensivos: {geométrica, algébrica ou numérica} e V_{2AP_t} assume o valor de PL, pois as avaliações são potencialmente realizadas no campo deste dispositivo. Dessa forma, o GT'_{AP_t} pode ser designado por,

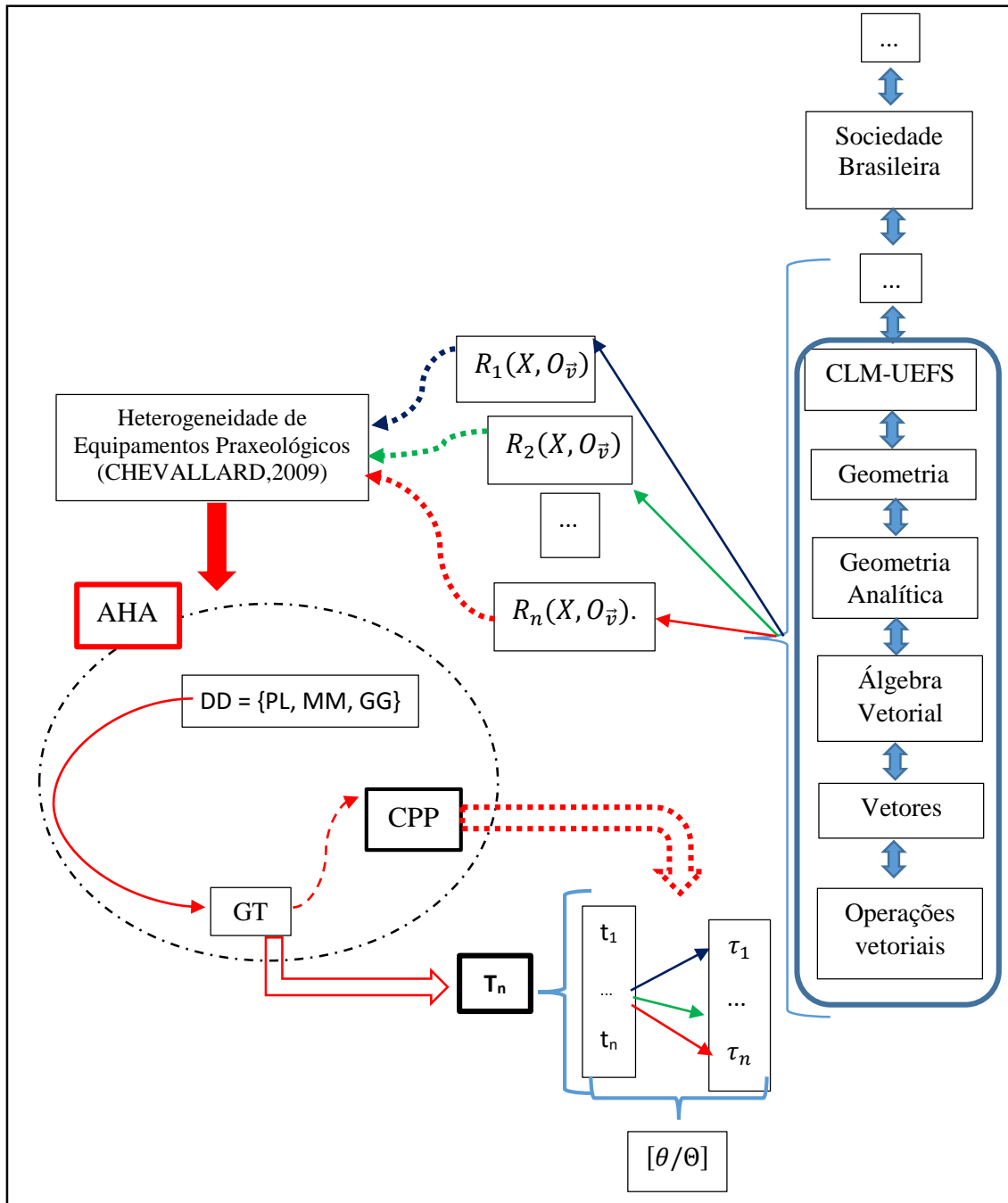
Quadro 17 - Gerador de Tipo de Tarefas GT'_{AP_t}

$GT'_{AP_t} = [\textit{Verificar; caminhos resolutivos para tarefas vetoriais; } V_{1AP_t}, V_{2AP_t}, V_{3AP_t}]$		
V_{1AP_t} – Natureza dos ostensivos: {geométrica, algébrica ou numérica}.	V_{2AP_t} – Dispositivos: {PL, MM, GG}	V_{3AP_t} – Elementos auxiliares de V_{2AP_t}

Fonte: acervo da autora (2020)

Como as avaliações foram e são realizadas no âmbito do Papel Lápis - PL, o que se apresenta enquanto uma restrição K (CHEVALLARD, 2014), nos impulsiona a olhar para o aspecto que aponta para trajetórias praxeológicas pessoais empregadas na resolução de cada tarefa. O que nos induz a pensar acerca dos elementos constituintes dos Caminhos de Práticas Pessoais – CPP trilhados pelos discentes ao se depararem com tarefas que demandam soluções. Nesse contexto, idealizamos os Caminhos de Práticas Pessoais que se inscrevem dentro das praxeologias pessoais (CROSET e CHAACHOUA, 2016), visto que os tipos de tarefas e técnicas pessoais nem sempre coincidem com os tipos de tarefas e técnicas institucionais. É nesse espaço, situado no cerne de uma transposição didática interna, que vivem os CPP regados pelas relações pessoais e institucionais de p com o objeto O , caracterizadas como existentes $R_I(p, O) \neq \emptyset$ ou não existentes $R_I(p, O) = \emptyset$ (CHEVALLARD, 2002). Como apresentado a seguir,

Figura 106 - Desenho do Caminho de Práticas Pessoais - CPP



Fonte: acervo da autora (2020)

Assim, para que uma pessoa p possa desenvolver distintas relações com o objeto $O_{\vec{v}}$ é necessário fomentar uma série de relações pessoais (CHEVALLARD, 1996) com esse objeto, as quais alimentam hábitos praxeológicos repertoriados por um encadeamento de relações modificadas em termos dos Dispositivos Didáticos e do Sistema de Variáveis, o qual concebemos preliminarmente que advém de: $R_1(X, O_{\vec{v}}) \cup R_2(X, O_{\vec{v}}) \cup \dots \cup R_n(X, O_{\vec{v}})$ assim, descrevendo o primeiro estágio do CPP. Neste sentido, retornaremos a essa concepção por

intermédio de algumas resoluções tratadas no sétimo capítulo a partir análises das experimentações.

Nestes termos, situamos os vínculos que se agregam aos CPP, pois supomos que os assujeitamentos institucionais que resultam do processo de apropriação do conhecimento advém da estruturação do meio no qual o estudante está imerso. De igual modo, o aspecto social, por sua vez, relaciona-se com a atividade desse sujeito. Numa instituição, o sujeito se apropria de tal ambiente cultural (científico – escolar) em situação de ação (diante de saberes matemáticos).

A partir dessa perspectiva, a conceitualização do CPP, o qual resulta de um sequenciamento heterogêneo das relações pessoais que se projetam nos equipamentos praxeológicos dos sujeitos revelados por meio das técnicas mobilizadas nas trilhas resolutivas de cada tarefa de certo tipo T, sem perder de vista as recombinações praxeológicas ou “praxeologia transposta $(\Pi \oplus \Lambda)^*$, poderia, por vezes, igualmente ser escrita $(\Pi^*) \oplus \Lambda$ com um logos mantido, mas uma práxis modificada”. (CHEVALLARD, 2018, p. 35). A partir dessa perspectiva, revelamos algumas questões que integraram avaliações da componente curricular EXA 180 do CLM-UEFS, em distintos semestres, no que tange aos conceitos que embasam a configuração vetorial nos termos da vertente conceitual e das operações como expostas a seguir:

Figura 107 - Tarefa 1 de uma avaliação de EXA 180 em CLM- UEFS

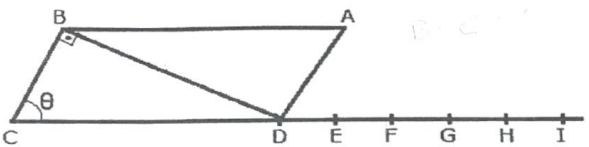
1. Com base na figura e nas informações abaixo, responda:

(a) (0,6) Vou F? (i) $|\vec{ID}| = |\vec{CD}|$ (ii) $\vec{CD} = \vec{AB}$ (iii) $\vec{IF} = -3\vec{DE}$.

(b) (0,3) Calcule o ângulo entre os vetores \vec{BD} e \vec{DI} , supondo $\theta = 66^\circ$.

(c) (0,3) Calcule $|\vec{CB}|$, supondo $|\vec{BD}| = 4$.

(d) (0,8) Obtenha o vetor \vec{AG} em função dos vetores \vec{CB} e \vec{CD} .



INFORMAÇÕES:

1. ABCD é um paralelogramo
2. D é ponto médio do segmento CI
3. os pontos E, F, G, H, I dividem o segmento DI em partes iguais
4. O segmento DE é unitário

Fonte: acervo da autora (2017)

Com respaldo institucional, foram solicitados aos estudantes domínio das definições: módulo de vetores, igualdade de vetores, vetor oposto, multiplicação por escalar, ângulo entre vetores e combinação linear. Informações adicionais foram fornecidas com o intuito de evitar constatações errôneas advindas da representação gráfica.

Quadro 18 - Exemplos de resoluções e ausência de resoluções

(a) V ou F? Justifique: (i) $ \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{CD} $; (ii) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$; (iii) $\overrightarrow{IF} = -3\overrightarrow{DE}$			
Estudantes	(i)	(ii)	(iii)
A	$\tau_{A(i)}$: V, pois o comprimento de $ \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{CD} $	$\tau_{A(ii)}$: F, tem mesmo comprimento, paralelos, sentidos opostos.	$\tau_{A(iii)}$: V, tem mesma direção, comprimento e sentido.
B	Não respondeu	Não respondeu	Não respondeu
C	Não respondeu	Não respondeu	Não respondeu
D	$\tau_{D(i)}$: V, porque D é o ponto médio de CI, e como os vetores $ \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{CD} $ estão em módulo, e sabemos que o módulo do vetor é sempre positivo pois representa uma distância ou tamanho do vetor como não existe distância negativa, provamos que eles são iguais, mesmo sabendo que eles tem sentidos contrários.	$\tau_{D(ii)}$: F, porque eles possuem mesma direção, mas seus sentidos são contrários, mesmo sendo paralelos, pois pertencem aos lados do paralelogramo.	$\tau_{D(iii)}$: V, porque com base nas informações dadas, sabemos que \overrightarrow{IF} é unitário, ou seja tem tamanho 1. Como podemos ver na figura \overrightarrow{DG} é um vetor em que $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DG}$, ou seja \overrightarrow{DE} está dividido em 3 partes iguais com valores iguais a 1. Agora transferindo esses vetores, podemos notar que \overrightarrow{DE} e \overrightarrow{IF} tem o mesmo tamanho, mesma direção, porém sentido contrário e por isso vale $-3\overrightarrow{DE}$

Fonte: acervo da autora (2020)

As resoluções dos discentes A e D, apresentam características distintas. O caminho trilhado por A apresenta algumas imprecisões no que se refere às justificativas dos itens (i), (ii) e (iii). Contudo, D já revela maior domínio ao usufruir, no primeiro momento, das informações que integram a questão “D é o ponto médio de CI” e prossegue fundamentando sua justificativa apoiando-se da definição do módulo de vetores. No item (iii), o estudante recorre a mais uma das informações fornecidas e usa que “ \overrightarrow{IF} é unitário” além de empregar mobilizar a técnica da igualdade entre vetores.

Ao fitarmos a atenção para mais um valor assumido por V_{1AP_t} , no que se refere à natureza ostensiva da representação geométrica desta tarefa, foi identificado que os discentes utilizaram como suporte a figura que acompanha a questão. Dessa forma, apresentamos os traços geométricos percebidos nos registros.

Figura 108 - Registros Pessoais de Alguns Estudantes

Valor Assumido por V_{1AP_t} (Geométrico)	
Estudantes	Registros geométricos pessoais
A	
B	
C	
D	

Fonte: acervo da autora (2017)

Identifica-se, nos registros pessoais dos estudantes traçados de segmentos, ângulos, o emprego de um dos casos de semelhanças de triângulo e os vetores. Em todos, os elementos que foram adicionados à figura integrada a questão, ficando latente que cada estudante trilhou caminhos distintos com a intenção de se aproximar gradativamente do que foi solicitado na tarefa. Aspectos semelhantes a esses também serão evidenciados nas demais questões. No que se refere aos valores do grupo das variáveis V_{3AP_t} - *Elementos auxiliares de V_{2AP_t}* não foram identificados elementos suplementares a esse dispositivo.

A próxima tarefa também integrou umas das avaliações, em semestre distinto do anterior, no contexto do CLM-UEFS.

Figura 109 - Tarefas 4 e 5 de uma avaliação de EXA 180 em CLM- UEFS

A figura abaixo, representa um trapézio $ACDE$ subdividido em 3 triângulos equiláteros congruentes. Além disto, o ponto F satisfaz a equação $\vec{AF} = \frac{1}{3}\vec{AE}$.

Denotemos por H o baricentro do triângulo BCD . Com estas informações, responda às questões (4) e (5) abaixo.

4. [1,0] Mostre que \vec{FH} é paralelo a \vec{AB} .

5. [1,0] Decida se as afirmações abaixo são falsas ou verdadeiras. Justifique.

- I. $\vec{EB} = \vec{CD}$
- II. O ângulo entre \vec{EB} e \vec{BC} é 120° .
- III. Se $|\vec{AE}| = 6$ então $|\vec{FH}| = 8$. [Sugestão: Use a questão 4.]

Fonte: acervo da autora (2018)

As questões que integram a figura 109 apresentam como suporte a representação gráfica de três triângulos equiláteros congruentes que resulta em um trapézio. Esse registro ostensivo se apoia no enunciado da questão. Com base nestes elementos, foram solicitados aos discentes que demonstrassem domínio dos seguintes saberes: baricentro do triângulo, paralelismo entre vetores, igualdade entre vetores, ângulo entre vetores e a definição de módulo.

Quadro 19 - Exemplos de algumas resoluções 4ª questão (continua)

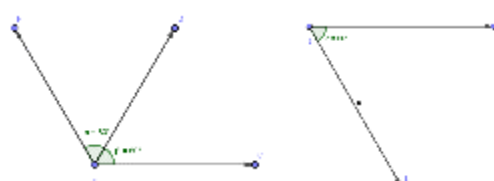
4- Mostre que \vec{FH} é paralelo a \vec{AB} .	
Estudantes	Resoluções
E	M é ponto médio de \vec{DC} $\vec{FH} // \vec{AG} \Rightarrow \vec{FH} = \alpha \vec{AB}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{FH} = \vec{FA} + \vec{AB} + \vec{BH}$; $\vec{FH} = (\vec{AB}) + \frac{1}{3}\vec{EA} + \frac{2}{3}\vec{BM}$; $\vec{FH} = (\vec{AB}) + \frac{2}{3}\vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{EA} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\vec{CD})$; $\vec{FH} = (\vec{AB}) + \frac{2}{3}\vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{CD}$; $\vec{FH} = (\vec{AB}) + \frac{2}{3}\vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{EA} + \frac{1}{3}(\vec{CD} + \vec{BD})$; $\vec{FH} = (\vec{AB}) + \frac{2}{3}\vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{CD} + \frac{1}{3}\vec{BD}$;

	$\vec{FH} = (\vec{AB}) + \frac{2}{3}\vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{EA} - \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{EA}; \therefore$ $\vec{FH} = (\vec{AB}) + \frac{1}{3}\vec{AB} \Rightarrow \frac{4}{3}\vec{AB}$
F	$\vec{FH} = \vec{FE} + \vec{ED} + \vec{DH} = \frac{2}{3}\vec{AE} + \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{DN} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{BE}) + \vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{DB} + \vec{BN}) = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BE} + \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{DB} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\vec{BC}) =$ $\frac{5}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BE} + \frac{2}{3}\vec{DB} + \frac{1}{3}\vec{BC} = \frac{5}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{BE} + \vec{DB}) + \frac{1}{3}\vec{AB} =$ $\frac{6}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{BE} + \vec{EA}) = \frac{6}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{BA}) = \frac{6}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AB} = \frac{4}{3}\vec{AB}. \quad \text{São}$ <p>múltiplos, logo são paralelos $\alpha = \frac{4}{3}$</p>
G	$\vec{FH} // \vec{AB}$ $\vec{FH} = \vec{AB} + \vec{BM} + \vec{FA} + \vec{MM}$ $\vec{FH} = \vec{AE} + \vec{EB} + \vec{BM}$ $\vec{FH} = \vec{AE} + \vec{EM}$ $\vec{FH} = \vec{AM}$ $\vec{AB} = \vec{AE} + \vec{EB}$ $\vec{AB} = \vec{AF} + \vec{FE} + \vec{EB}$ <p>(Quando vais usar as hipóteses?) $\left\{ \begin{array}{l} \vec{AF} = \frac{1}{3}\vec{AE} \\ H \text{ é o baricentro do triângulo } BCD \\ 3 \text{ triângulos equiláteros e congruentes} \end{array} \right.$</p>

Fonte: acervo da autora (2017)

O texto em vermelho indica elementos pontuados pelo docente na correção da questão. Ao estabelecermos um comparativo entre os três CPP, é possível notar que o discente G, não desenvolveu relações pessoais com os conceitos demandados institucionalmente para obtenção da solução da questão. Nesse sentido, percebe-se desequilíbrios entre uma espera institucional e o que efetivamente foi entregue pelo estudante. Contudo, os estudantes E e F trilharam caminhos distintos, porém alcançam o que foi solicitado na tarefa. Frente às tarefas que comumente integram as provas da componente curricular EXA180, construímos as análises a priori pautadas no que está posto e vive na instituição CLM-UEFS e o que esperamos que ocorra no cenário do minicurso na fase experimental. No entanto, consideramos pertinente apresentar mais uma questão se suas distintas interpretações.

Quadro 20 - Exemplos de algumas resoluções 5ª questão

5- Decida se as afirmações abaixo são falsas ou verdadeiras. Justifique.	
I. $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CD}$; II. O ângulo entre \overrightarrow{EB} e \overrightarrow{BC} é 120° ; III. Se $ \overrightarrow{AE} = 6$ então $ \overrightarrow{FH} = 8$. (Sugestão: use a questão 4)	
Estudantes	Resoluções
E	I. $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CD}$: Falso, pois os segmentos tem mesma direção e módulo, mas os seus sentidos são opostos, ou seja $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{CD}$. II. O ângulo entre \overrightarrow{EB} e \overrightarrow{BC} é 120° São formados dois ângulos entre esses vetores!!! Note que, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED} \Rightarrow$  Como pegamos sempre o ângulo menor $\alpha = 60^\circ$, afirmativa falsa; III. Se $ \overrightarrow{AE} = 6$ então $ \overrightarrow{FH} = 8$ Por $ \overrightarrow{AE} $ fazer parte de um triângulo equilátero $ \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE} $. Se $ \overrightarrow{AE} = 6 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 6$. Como pela questão anterior, $\overrightarrow{FH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{FH} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AB} $, substituindo temos: $ \overrightarrow{FH} = \frac{4}{3} \cdot 6 \Rightarrow \overrightarrow{FH} = 8$. Assim, podemos concluir que é verdade.
F	I. Falso, pois tem sentidos diferentes; II. Falso, Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$ e o ângulo entre \overrightarrow{EB} e $\overrightarrow{ED} = 60^\circ$, logo o ângulo entre \overrightarrow{EB} e $\overrightarrow{BC} = 60^\circ$. III. $ \overrightarrow{AE} = 6$ $ \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} $, logo $ \overrightarrow{AB} = 6$ $ \overrightarrow{FH} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{FH} = \frac{4}{3} \cdot 6 \Rightarrow \overrightarrow{FH} = 8$, Verdadeiro
G	I. Falso, porque possuem sentidos opostos; II. Verdadeiro. Porquê? III. Falso, porque $ \overrightarrow{FH} = \underbrace{ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} }_{= \overrightarrow{AM} } = 6 + 3 = 9$ e não $ \overrightarrow{FH} $.

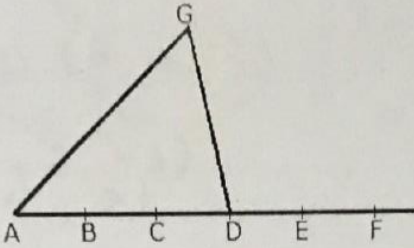
Fonte: acervo da autora (2018)

Nos exemplos apresentados acima, nota-se que foi solicitado aos discentes o domínio nos conceitos: igualdade de vetores, ângulo entre vetores e módulo. Ao atentar para resoluções, percebe-se traços inerentes a diferentes praxeologias, ou seja, é viável sublinhar que, as concepções dos estudantes registradas acima apontam dificuldades e erros, os quais podem ser gerenciados pela modelação da praxeologia pessoal (CROSET, CHAACHOUA, 2016). Ou seja, significa propor uma extensão da noção de praxeologia como modelagem das práticas institucionais para a modelagem das práticas do estudante como sujeito de uma instituição.

Assim, como no quadro 21, os destaques em vermelho indicam elementos pontuados pelo docente na correção da questão. Por fim, nesse recorte exemplificativo em que se respalda nossa argumentação a priori, apresentamos mais uma questão acrescida das descrições das prexeologias pessoais dos estudantes.

Figura 110 - Tarefa 2 de uma avaliação de EXA 180 em CLM- UEFS

2. [1,0] A figura abaixo apresenta um segmento de reta AF dividido em partes iguais pelos pontos B, C, D, E e um triângulo ADG .



Fixado um sistema de coordenadas cartesianas no plano, suponha $B = (-1, 4)$, $F = (3, -4)$ e $\vec{AG} = (1, 3)$. Mostre que $|\vec{DG}| = \sqrt{85}$.

Fonte: acervo da autora (2018)

No quadro, a seguir, descrevemos algumas resoluções, assim como comentários do docente no que se refere à correção da referida tarefa, destacado em vermelho.

Quadro 21 - Exemplos de algumas resoluções de uma 2ª questão (continua)

Estudantes	Resoluções
H	$B = (-1, 4); D = (1, 0);$ $A = (-2, 6); \vec{AG} = (1, 3)$ $G = A + (1, 3)$ $G = (-1, 9)$ $\vec{DG} = (-2, 9)$ $ \vec{DG} = \sqrt{(-2)^2 + (9)^2}$ $ \vec{DG} = \sqrt{4 + 81}$ $ \vec{DG} = \sqrt{85}$ Como o segmento foi dividido em partes iguais é possível perceber que a distância das abcissas é igual a 1 e das coordenadas é 2, sendo possível estabelecer todos os pontos descobrindo o ponto G no sistema acima e comprovar a informação.
	$B = (-1, 4);$ $F = (3, -4);$ $D = \frac{\vec{BF}}{2} \Rightarrow D = (1, 0)?$

I	$\overrightarrow{AG} = (1,3);$ $D = (1,0);$ $A = (-2,6);$ $G = (-1,9).$	$\frac{B+F}{2} \neq (1,0)$ Como encontrou estes pontos?
J	$B = (-1, 4); F = (3, -4) \text{ e } \overrightarrow{AG} = (1,3).$ $\overrightarrow{BF} = F - B = (4, -8) = \frac{4}{5} \overrightarrow{AF}$ $(20, -40) = 4\overrightarrow{AF} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = (5, -10)$ $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AC} = \frac{3}{5} (5, -10)$ $\overrightarrow{AD} = (3, -6)$ $A = ? \quad G = ? \text{ e } DG = ?$	
L	$B, C, D, E \text{ divide } AF \text{ em partes iguais} \Rightarrow D \text{ é ponto médio de } BF \therefore D = \frac{B+F}{2} =$ $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{4-4}{2}\right) = (1,0)$ $\overrightarrow{DA} = \frac{3}{2} \overrightarrow{DB} = \frac{3}{2} (-2,4) = (-3,6)$ $\text{Daí, } \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG} = (-3,6) + (1,3) = (-2,9) \therefore \overrightarrow{DG} = \sqrt{4 + 81} = \sqrt{85}$	

Fonte: acervo da autora (2018)

Frente ao recorte que foi revelado pelas produções dos estudantes e à latente interdependência com o âmbito geométrico, evidenciados nas figuras que integraram as tarefas, aspecto esse que reforça as especificidades do campo geométrico nas quais os vetores aparecem como elementos pertencentes aos espaços vetoriais euclidianos: \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . O que nos conduz a parafrasear Dorier (1995), ao considerar que, o desenvolvimento do conceito de vetor se deu na busca do entendimento de resultados algébricos, uma vez que essa grandeza proporciona contribuições para a geometria através da direção e do sentido, e não só do comprimento (grandeza escalar), permitindo assim a ideia de movimento.

Ao pensar na força que as transformações geométricas empreende no estudo dos vetores, vertente esta que também foi evidenciada no escopo histórico epistemológico, é viável concluir, mesmo que aprioristicamente, que ao modificar os valores das variáveis $V_{2_{AP_t}} - \text{Dispositivos: } \{PL, MM, GG\}$, seja viável propiciar aos discentes a ideia de movimento inerente aos vetores geométricos. Perspectiva essa reforçada pela declaração de Affongon e Tossa (2014),

Na linguagem natural, a indicação de direção geralmente é acompanhada de um gesto semelhante à indicação de um lugar. Essa prática dá vida a um obstáculo cultural que deve ser removido para distinguir o senso de direção ao aprender o vetor geométrico. (AFFONGON; TOSSA, 2014, p.2, tradução nossa¹⁸⁷)

Aditado a isso, Chevallard (1999) sublinha que

¹⁸⁷ Dans le langage naturel, l'indication de la direction est souvent accompagnée d'un geste semblable à l'indication d'un lieu. Cette pratique donne vie à un obstacle culturel qu'il faudra lever pour distinguer le sens de la direction au moment de l'apprentissage du vecteur géométrique.

(...) em uma dada instituição I, em relação a um determinado tipo de tarefa T, geralmente há apenas uma técnica, ou pelo menos um pequeno número de técnicas institucionalmente reconhecidas, *com exclusão de possíveis técnicas alternativas* - que podem existir, na verdade, mas em outras instituições. *Tal exclusão é correlativa, entre os atores de I, de uma ilusão de "naturalidade" das técnicas institucionais em I - fazer assim, é natural ...* -, em contraposição ao conjunto de técnicas alternativas possíveis, que os sujeitos que eu irei ignorar, ou, se forem confrontados com isso, que irão espontaneamente considerar artificiais, e (portanto) "contestáveis", "inaceitáveis", etc. Nesse sentido, observamos com bastante frequência, nos sujeitos de I, verdadeiras paixões institucionais pelas técnicas naturalizadas na instituição. (CHEVALLARD, 1999, p.225, grifos nossos, tradução nossa¹⁸⁸)

Nesse sentido, seguimos na “contramão” das técnicas naturalizadas na instituição CLM-UEFS, talvez consideradas artificiais, contestáveis ou inaceitáveis, como ressaltado pelo autor, que emergem enquanto técnicas alternativas, provocando “fissuras” nas práxis que possivelmente contribuirão para o rompimento da ilusão de "naturalidade" das técnicas institucionais em I (CLM-UEFS).

6.2.2 Projeções do alcance das técnicas num cenário manipulativo e informático.

Em primeiro lugar, é relevante pontuar que na TAD, “o desenho de tarefas integra-se dentro da sua metodologia experimental formulada em termos de Engenharia Didática.” (GARCIA et al, 2019, p.75). Nesse sentido, prognosticamos um repertório de técnicas que podem contribuir para a resolução de tarefas vetoriais em termos dos contornos que moldam essa análise a priori. Pois,

Distingue-se uma dimensão da análise matemática, da caracterização dos objetos matemáticos e da atividade que será realizada em torno deles (praxeologias matemáticas) em estreita relação com o MPR construído. Inclui-se também uma dimensão de análise didática, sobre como fazer emergir e sustentar a atividade pretendida em sala de aula, através do estudo de uma ou mais questões problemáticas e do processo de investigação a que elas dão origem (praxeologias didáticas). (GARCÍA et al, 2019, p.81)

A partir do MPR idealizado, pretende-se proporcionar aos discentes do CLM-UEFS aproximações com um “modo de fazer” no cerne dos Dispositivos Didáticos (MM, GG e o tradicional PL), já que apontamos que esses dispositivos “não vivem”, ou seja, não fazem parte

¹⁸⁸ Enfin, en une institution I donnée, à propos d'un type de tâches T donné, il existe en général une seule technique, ou du moins un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues, à l'exclusion des techniques alternatives possibles – qui peuvent exister effectivement, mais alors en d'autres institutions. Une telle exclusion est corrélative, chez les acteurs de I, d'une illusion de « naturalité » des techniques institutionnelles dans I – faire ainsi, c'est naturel... –, par contraste avec l'ensemble des techniques alternatives possibles, que les sujets de I ignoreront, ou, s'ils y sont confrontés, qu'ils regarderont spontanément comme artificielles, et (donc) « contestables », « inacceptables », etc. À cet égard, on observe assez fréquemment, chez les sujets de I, de véritables passions institutionnelles pour les techniques naturalisées dans l'institution

da bagagem praxeológica construída para o objeto do saber a ser trabalhado. O que significa dizer que, não são encontradas ecologias no sistema de ensino para tais objetos. Daí emerge a necessidade de atentarmos para o alcance das técnicas neste contexto. Nestes termos, Chevallard (1999), sublinha que,

uma técnica τ - um "modo de fazer" - é bem-sucedida apenas em uma parte $P(\tau)$ das tarefas do tipo T às quais é relativa, parte que é chamada de escopo da técnica: tende a falhar em $T \setminus P(\tau)$ de forma que se possa dizer que "não se sabe, em geral, realizar tarefas do tipo T ". A coisa é óbvia, mas muitas vezes esquecida, na matemática. Assim, toda técnica de cálculo em N falha em uma certa extensão dos números. Da mesma forma, o fato de que um determinado número inteiro não pode ser fatorado em geral é claramente a base de algumas técnicas de criptografia. Nessa visão, uma técnica pode ser superior a outra, senão em todo T , pelo menos em alguma parte dela. (CHEVALLARD, 1999, p. 225, tradução nossa¹⁸⁹)

A avaliação das técnicas instauradas no seio da pesquisa se apresenta como um elemento crucial dessa análise, já que isso evidencia a tendência que as técnicas têm em falhar, destacando seu caráter incompleto, o que nos permite inferir acerca da superioridade de uma “maneira de fazer” em detrimento de outra, remetendo assim ao alcance da técnica. Dessa forma, para Kaspary, Chaachoua e Bessot (2020), o alcance do escopo das técnicas (teórica, pragmática e institucional) está associada à competição entre elas. Os autores também sinalizam que a existência do escopo da técnica no âmbito pessoal estabelece ligações entre os aspectos pragmático e institucional. Nessa perspectiva, concebemos a existência da inserção de diálogos com elementos inerentes ao cerne dos Caminho das Práticas Pessoais – CPP reportando, assim, a mais um dos pilares de uma dinâmica praxeológica. Aspecto esse que nos permite indagar: quais das técnicas, mobilizadas nos Dispositivos Didáticos (MM, GG e PL), são mais adequadas de acordo com os escopos: teórico, pragmático ou institucional, para resolução de tarefas vetoriais apresentadas no âmbito do CLM-UEFS? Enquanto resposta parcial a esse questionamento, destacamos as seguintes definições,

O escopo teórico de uma técnica é o conjunto de tarefas onde a técnica permite realizar qualquer tarefa deste conjunto sem nenhuma consideração das condições de sua execução. Ou seja, examinamos esta técnica de um ponto de vista epistemológico sem levar em conta o cognitivo e, portanto, o domínio de sua realização por um sujeito. Será denotado por $PTh(\tau)$. O escopo pragmático de uma técnica é o conjunto de tarefas onde a técnica é confiável no sentido de que permite realizar essas tarefas com pouco risco de fracasso e a um custo razoável. A técnica tende a ter sucesso dentro deste escopo e tende a falhar fora dele. Será denotado por $P(\tau)$. O escopo institucional de uma técnica relacionada a um tipo de tarefa T é o conjunto de tarefas onde esta técnica

¹⁸⁹ Tout d’abord, une technique τ – une « manière de faire » – ne réussit que sur une partie $P(\tau)$ des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu’on nomme portée de la technique: elle tend à échouer sur $T \setminus P(\tau)$, de sorte qu’on peut dire que « l’on ne sait pas, en général, accomplir les tâches du type T ». La chose est évidente, mais très souvent oubliée, en mathématiques. Ainsi toute technique de calcul sur N échoue-t-elle à partir d’une certaine taille de nombres. De même, le fait qu’on ne sache pas en général factoriser un entier donné est notamment à la base de certaines techniques de cryptographie.

é esperada por uma instituição. Este escopo é uma consequência das condições e restrições da vida de τ em uma instituição. Será denotado por $PI(\tau)$. (KASPARY, CHAACHOUA, BESSOT, 2020, p.246, tradução nossa¹⁹⁰)

Primeiramente, revelaremos projeções dos Caminhos de Práticas Pessoais – CPP, enquanto suposições das formas de resoluções, e, na finalização desta seção, exporemos que análise faremos do alcance das técnicas. Ademais, em uma determinada instituição I, e para um determinado tipo de tarefas T, geralmente há apenas uma técnica, ou pelo menos um pequeno número de técnicas institucionalmente reconhecidas, com a exclusão de possíveis técnicas alternativas - que podem de fato existir, mas em outras instituições.

Tal exclusão é correlativa, entre os atores de I, de uma ilusão de "naturalidade" das técnicas institucionais em I - *fazê-lo, é natural ...*-, em contraste com o conjunto de técnicas alternativas possíveis, que os sujeitos os ignoram ou, se confrontados, os vêem espontaneamente como artificiais e (portanto) "contestáveis", "inaceitáveis" etc. Nessa visão, é frequentemente observada, entre os sujeitos de I, verdadeiras paixões institucionais pelas técnicas naturalizadas na instituição. (CHEVALLARD, 1999, p. 225)

A partir desses preceitos teóricos, inferimos que a inserção dos Materiais Manipuláveis-MM e de um software de Geometria Dinâmica, a exemplo o GeoGebra, denotado por nós como GG, se apresentam como alternativas na corporificação¹⁹¹ das representações vetoriais, ou seja, gera-se encadeamentos de ações e gestos, revelados no âmbito dos Dispositivos Didáticos (MM, GG) em estreita conexão com PL, os quais se integram as modificações e as recombinações praxeológicas, com recorrentemente destacado. Neste sentido, estudos sinalizam que o uso de software de geometria dinâmica na educação matemática permite que os alunos se envolvam em tarefas cognitivas em profundidade (RANASINGHE; LEISHER, 2009), além de oferecer oportunidades para fazer generalizações e explorar relações construindo, manipulando, arrastando e remodelando objetos geométricos (CHRISTOU, et al., 2005; LAVY, 2015).

Nesse contexto, as atividades de aprendizagem se apresentam como componentes cruciais, em que se centra nos ensejos da formulação, da resolução e de soluções de tarefas.

¹⁹⁰ La portée théorique d'une technique est l'ensemble des tâches où la technique permet d'accomplir une tâche quelconque de cet ensemble en dehors de toute considération des conditions de son exécution. C'est-à-dire qu'on examine cette technique d'un point de vue épistémologique sans prendre en compte le cognitif et donc la maîtrise de sa réalisation par un sujet. Elle sera notée $PTh(\tau)$. La portée pragmatique d'une technique est l'ensemble des tâches où la technique est fiable dans le sens où elle permet d'accomplir ces tâches avec peu de risque d'échec et à un coût raisonnable. La technique tend à réussir sur cette portée et tend à échouer en dehors. Elle sera notée $P(\tau)$. La portée institutionnelle d'une technique relative à un type de tâches T est l'ensemble des tâches où cette technique est attendue par une institution. Cette portée est une conséquence des conditions et des contraintes de la vie de τ dans une institution. Elle sera notée $PI(\tau)$.

¹⁹¹ Ver WATSON, A.; SPYROU, P.; TALL, D. (2003)

Assim, sublinhamos acerca da existência da composição do saber - fazer na construção de soluções, com o designo descritivo inerente ao complexo praxeológico que se forma a cada etapa do processo resolutivo.

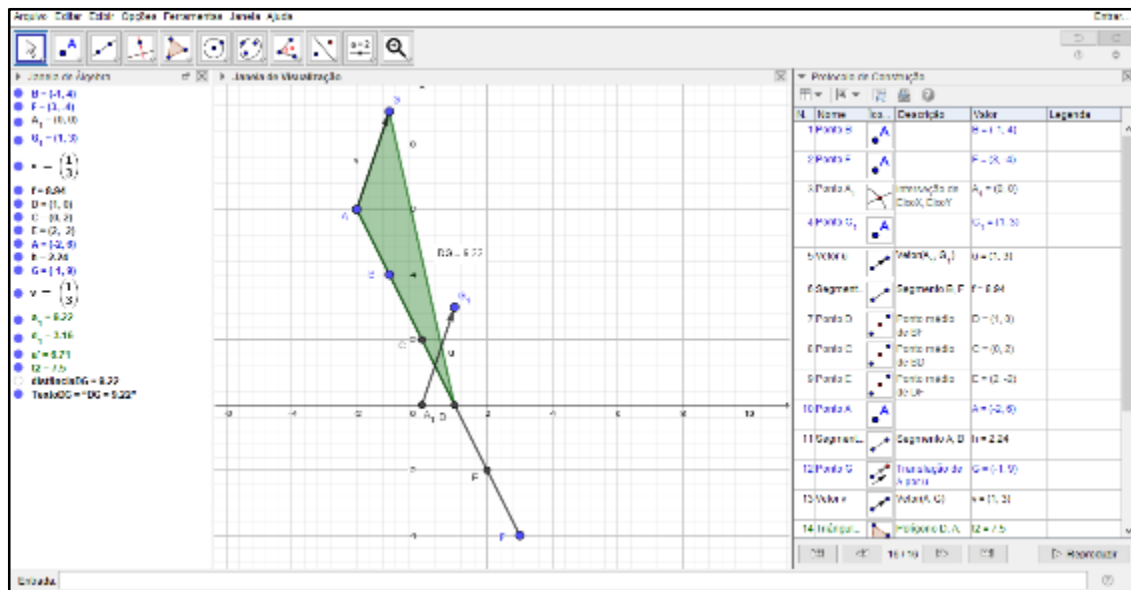
Dessa forma, foi pensado o convite direcionado aos discentes para resolver tarefas vetoriais, utilizando técnicas distintas das convencionais, o que desencadeará rompimentos no fenômeno geral de naturalização dos pares tarefas/técnicas, pois, de acordo com Bosch e Chevallard (1999, p.6, tradução nossa¹⁹²), “A técnica utilizada para realizá-las, apesar de um dia construída, foi rotineira, a ponto de não aparecer mais como tal - o uso dessa técnica para realizar tal tarefa agora é evidente e não apresenta mais problemas.”

A partir desse delineamento assumido pelo estudo, o qual desencadeia uma propensão de dissolução do aspecto rotineiro das técnicas, visa-se um despertar para a criação de técnicas associadas aos Dispositivos Didáticos. Aliado a isso, concebe-se como consequência direta desse fenômeno, transformações nas instâncias do Sistema Didático – SD, associadas às relações de um indivíduo x ou grupo de indivíduos X com determinada obra O . Pois, “a aprendizagem é uma modificação da relação de um indivíduo X com O , como já destacado diversas vezes nessa tese.

A título de exemplificação, apresentamos um possível percurso resolutivo da tarefa retratada na figura 110. Existe uma expectativa por parte da pesquisadora que envolve a viabilidade que os estudantes façam uso de técnicas semelhantes à construção realizada, abaixo, no âmbito do dispositivo GeoGebra – GG.

¹⁹² la technique utilisée pour les accomplir, bien qu’ayant été construite un jour, a été routinisée, au point de ne plus apparaître comme telle – utiliser cette technique pour accomplir une telle tâche va désormais de soi et ne pose plus aucun problème.

Figura 111 - Resolução (GG) da Tarefa 2 de uma avaliação de EXA 180 em CLM- UEFS



Fonte: acervo da autora (2018)

O primeiro elemento que desperta a nossa atenção refere-se à comparação entre a imagem que acompanha a tarefa 2 que integrou uma avaliação de EXA 180 e o que foi obtido na janela de visualização do GeoGebra, utilizando os dados e as coordenadas de pontos pertencentes ao enunciado da questão. Ou seja, não existe uma correspondência entre os dados e a representação geométrica apresentada, divergindo do que foi revelado no ambiente do software.

Outro aspecto, que despertou nossa atenção, faz referência às coordenadas do vetor $\overrightarrow{A_1G_1} = \overrightarrow{AG}$ e sua consequente localização no plano, a qual remete à representação vetorial na origem em associação com a sua translação pertencente ao segmento AF enquanto lado do triângulo. Neste direcionamento, as técnicas empregadas nas construções realizadas em GG diferem das mobilizadas em MM ou PL, ou seja, se apresentam como distintas formas de executar ou realizar tarefas $t \in T$. Aditado a isso, não podemos esquecer que, no cerne do T4TEL (CHAACHOUA, 2018), uma técnica é descrita por um conjunto de tipos de tarefas, cada tipo de tarefa denotado por ingrediente da técnica. Assim, é possível destacar-se que em qualquer técnica pode ter várias descrições, com diferentes níveis de granularidade.

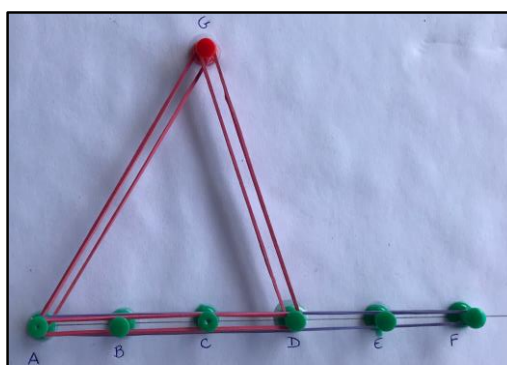
Dessa maneira, um cenário praxeológico, supostamente estável, no qual sobrevivem as práticas monumentalistas, segue um viés de limitações no rol de técnicas. Em oposição, ao projetar um contexto investigativo com emprego de distintos Dispositivos Didáticos, os quais abrem frentes de trabalhos para possíveis transformações e consequentes ampliações no número

de tarefas que repercute em distintas técnicas, pois como indica Chevallard (1989), geralmente, nos limitamos a um pequeno número de técnicas:

(...) numa determinada instituição sobre um determinado tipo de tarefa T, existe geralmente uma técnica única, ou, pelo menos, um pequeno número de técnicas reconhecidas institucionalmente, excluindo possíveis técnicas alternativas – que podem existir efetivamente, mas em outras instituições. (CHEVALLARD, 1989, p. 93)

Como repercussão do aparecimento de técnicas alternativas, torna-se viável supor uma ruptura com o que é difundido no âmbito institucional, pois “em vez de confrontar o estudante com um tipo de tarefas para o qual existem várias técnicas, a instituição organiza o estudo através de vários tipos de tarefas para as quais existe apenas uma técnica” (CHAACHOUA, 2010, p. 6, tradução nossa¹⁹³), ou seja, eles devem reconhecer a que tipo de tarefas pertence e quais técnicas são pertinentes utilizar para obter uma resposta aceita pela instituição ou não. Assentado nesta perspectiva, a descrição do uso de MM serve para descrever sumariamente como pode ser estruturada a resolução da tarefa retratada na figura 112.

Figura 112 - Reprodução do gráfico que integra a Tarefa 2



Fonte: acervo da autora (2018)

As técnicas em MM diferem das empregadas nos Dispositivos Didáticos PL e GG e geralmente demandam um custo maior, ou seja, não são econômicas principalmente por impor limitações das construções prexeológicas no âmbito da cronogênese. Contudo, mesmo tendo um alcance limitado, o uso dos Materiais Manipuláveis – MM exige construções que podem revelar aspectos que não são evidentes no trabalho com outros dispositivos. Essa vertente pode ser destacada a partir da interpretação efetivada por uma estudante na realização da questão abordada nesta seção.

¹⁹³ Ainsi, plutôt que de confronter l'élève à un type de tâches pour lequel il existe plusieurs techniques, l'institution organise l'étude à travers plusieurs types de tâche pour lesquels il y a une seule technique.

Figura 113 - Uma Resolução da Tarefa 2

2. [1,0] A figura abaixo apresenta um segmento de reta AF dividido em partes iguais pelos pontos B, C, D, E e um triângulo ADG .

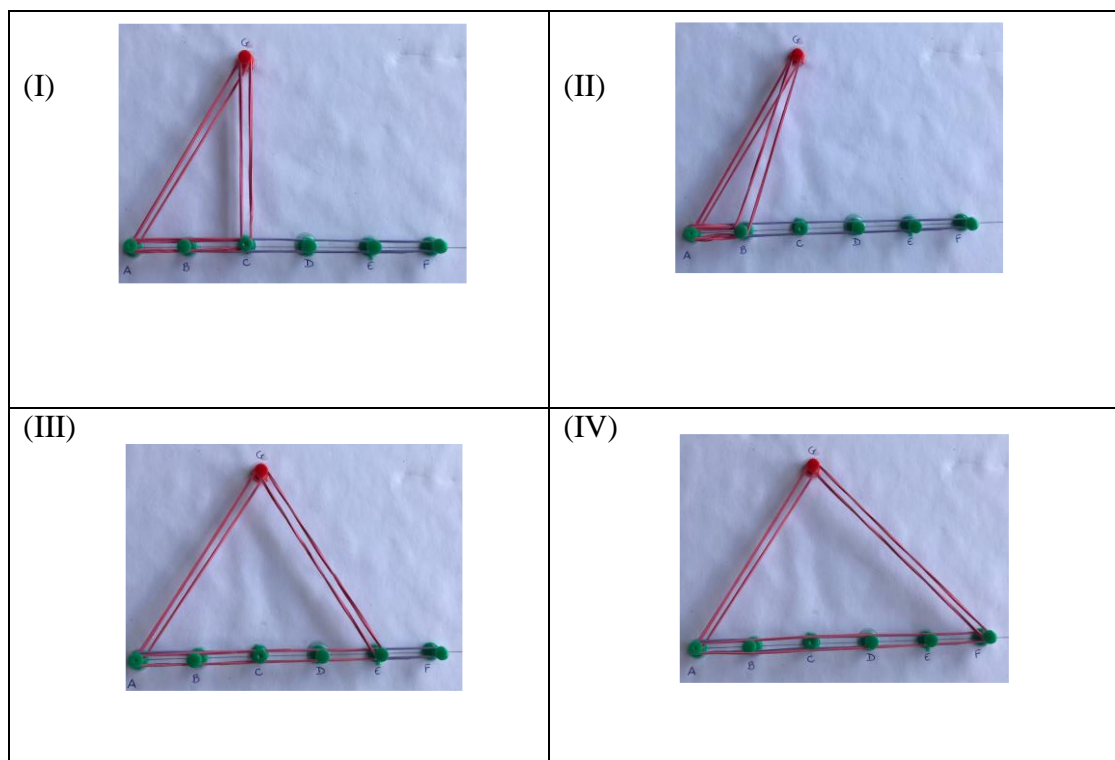
$|\vec{AG}| = \sqrt{3+9} = \sqrt{10}$
 $|\vec{AG}|^2 = |\vec{GD}|^2 + |\vec{AD}|^2$
 $10 = |\vec{GD}|^2 + \frac{1}{3} |\vec{BF}|^2$
 $|\vec{BF}| = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$

Fixado um sistema de coordenadas cartesianas no plano, suponha $B = (-1, 4)$, $F = (3, -4)$ e $\vec{AG} = (1, 3)$. Mostre que $|\vec{DG}| = \sqrt{85}$.

Fonte: acervo da autora (2018)

A partir do erro identificado e registrado pelo docente por meio de um questionamento: “Pitágoras?”, vislumbra-se uma oportunidade para promover uma discussão em sala de aula, na qual a correção da questão poderá ser transformada em uma situação de estudo, por meio de construções subsidiadas por MM, como exemplificadas a seguir. Assim, pode-se levantar como pressuposto que os estudantes ao se depararem com uma tarefa em que o arsenal de técnicas deva emergir de um repertório oriundos de diferentes materiais, os quais podem assumir a função de um “estopim” para o despertar de um maior engajamento praxeológico, provocando remodelações nas relações pessoais com o objeto (O), alimentando e enriquecendo os CPP e seus encadeamentos com um repertório de técnicas alternativas, aguçando assim, o estudo dos aspectos ostensivos inerente à vertente geométrica, intrínseca à Álgebra Vetorial presente em EXA 180, contemporaneamente denotada por EXA 374.

Figura 114 - Reprodução do gráfico que integra a Tarefa 2 com alterações de um dos lados do triângulo

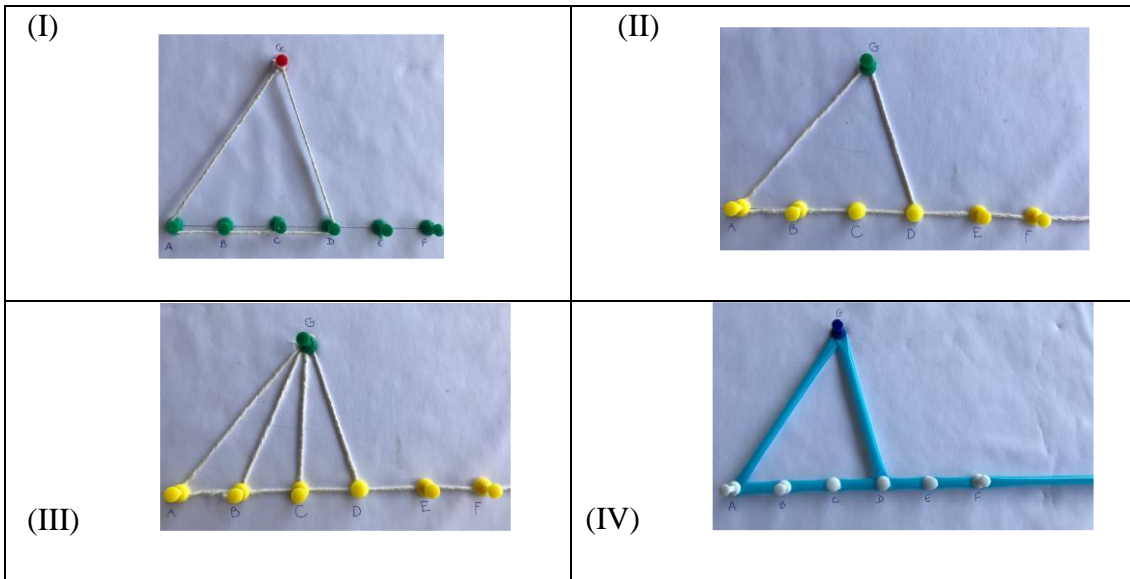


Fonte: acervo da autora (2018)

A movimentação de um dos elásticos abre possibilidades de alteração da tarefa ampliando, assim, o repertório de técnicas vinculadas à classificação de triângulos, nos quais os discentes podem mobilizar distintas técnicas em associação com diversas tarefas vetoriais. Ressaltamos que existem limitações no uso desse dispositivo, pois a flexibilidade presente nos elásticos pode distorcer algumas interpretações, por exemplo ao representar um vetor múltiplo de outro vetor como: $\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{v}$. O uso desse tipo de material pode gerar obstáculos de natureza didática, por falhar na precisão, no que se refere à característica de ser distendido (esticado) ou não. Contudo, a mesma situação no ambiente PL pode gerar uma quantidade excessiva de traços, limitando a visualização pelo aluno.

Nesse sentido, para mitigar entrave dessa natureza, outros materiais podem ser utilizados para construções dessa natureza. Como exposto a seguir,

Figura 115 - Reprodução do gráfico que integra a Tarefa 2 com alterações de um dos lados do triângulo utilizando barbante e canudos



Fonte: acervo da autora (2018)

Posto isso, as alterações dos tipos de materiais empregados na construção demandam, conseqüentemente, modificações nos valores das variáveis no que se refere a V_{3AP_t} - *Elementos auxiliares*, em associação com V_{2AP_t} e de igual modo, nas técnicas empregadas na construção do modelo. O que significa dizer que o trânsito entre diferentes dispositivos desencadeiam distintas transformações praxeológicas, as quais repercutem nas funções didáticas que estão presentes nos Sistemas Didáticos do CLM-UEFS.

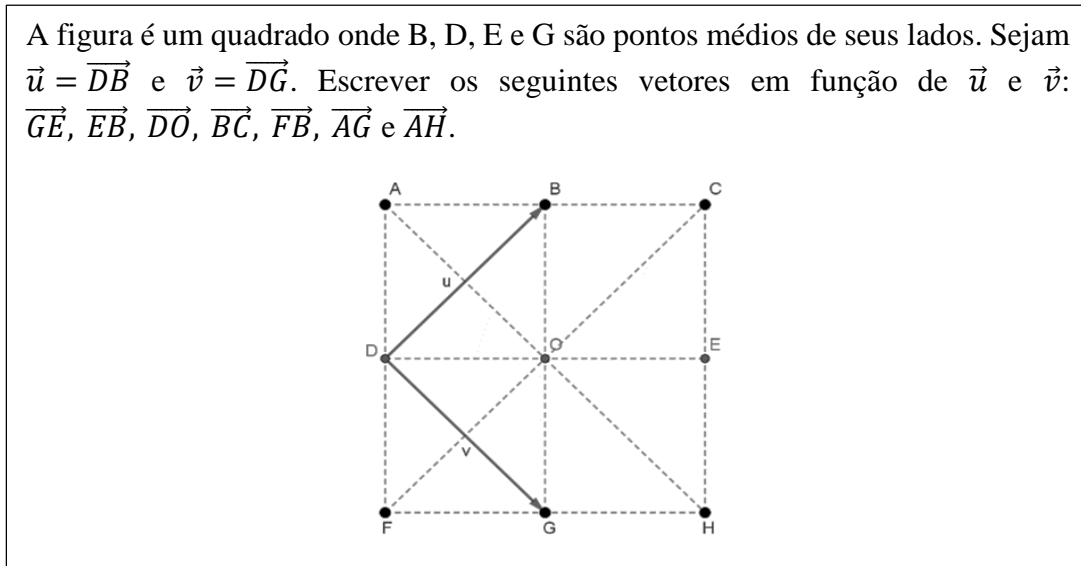
Em paráfrase a Chevallard (2009/2010), pode-se identificar modificações no tempo da construção praxeológica em associação com os sistemas de recursos utilizados em um processo de estudo. De igual modo, é viável observar transformações entre a gênese dos equipamentos praxeológicos e as relações institucionais associadas, pois as posições assumidas pelos sujeitos (estudantes e professor), durante a construção praxeológica, potencializa o aparecimento e a ocorrência do complexo de recombinações praxeológicas, em que se modifica a prática e mantém-se o logos.

6.2.3 Construção de uma análise a priori a partir das tarefas e possíveis técnicas mobilizadas nas resoluções

Os possíveis direcionamentos de resoluções de tarefas podem ser previstos pelo pesquisador ou pelo docente. Assim, admite-se como ponto de partida a tarefa 1, apresentada a

um grupo de discentes do CLM- UEFS, que participaram do minicurso “*Um Estudo sobre Vetores*”, o qual teve como objetivo atacar alguns elementos cruciais da problemática que circunda o contexto vetorial em nível universitário.

Figura 116 - Tarefa 1 presente no repertório do Minicurso



Fonte: (MELLO e WATANABE, 2011, p.9).

O enunciado da questão, em conjunto com a figura que o acompanha, nos induz a refletir acerca de alguns temas que se inserem no âmbito da espera institucional. Desse modo, temos como expectativa que a resolução da tarefa proporcione aos discentes o uso e mobilização de:

Quadro 22 - Esperas institucionais relacionadas a tarefa 1

Algumas esperas institucionais
<ul style="list-style-type: none"> - Propriedades do quadrado (quatro lados iguais e quatro ângulos retos); - Empreguem as características de ponto médio; - Identifiquem e usufruam das propriedades dos vetores geométricos (módulo, direção e sentido); - Utilizem as operações vetoriais; - Trabalhem implicitamente com combinações lineares.

Fonte: acervo da autora 2020

Primeiramente, faz-se necessário retomar alguns conceitos vinculados ao bloco tecnológico/teórico. Dentre eles, a constatação de que os pontos médios dos lados de qualquer

quadrilátero são vértices de um paralelogramo. Perspectiva essa já trabalhada no capítulo IV, particularmente na figura intitulada: “Exemplo de resolução da questão 5”. Além disso, os segmentos orientados \overrightarrow{DB} , \overrightarrow{BE} , \overrightarrow{EG} e \overrightarrow{GD} possuem o mesmo comprimento, pois são diagonais de quadrados congruentes, uma vez que B, D, E e G são pontos médios dos lados do quadrado ACHF. Soma-se a isso, o fato de que as diagonais de cada um dos quadrados (ABOD, BCEO, OEHG e DOGF) são bissetrizes dos ângulos internos destes e, por consequência, os ângulos \widehat{DBE} , \widehat{BEG} , \widehat{EGD} e \widehat{GDB} são ortogonais. Diante do que foi apresentado, obtemos o seguinte resultado: os pontos médios dos lados de um quadrado são vértices de um quadrado.

Frete às esperas institucionais elencamos possíveis caminhos resolutivos, segundo a ordem descrita na tarefa 1:

Vetor \overrightarrow{DO} .

$$\text{Caminho I: } \overrightarrow{DO} \underset{\boxed{(t_1)}}{=} \frac{1}{2} \overrightarrow{DE} \underset{\boxed{(t_2)}}{=} \frac{1}{2} (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DG}) \underset{\boxed{(t_3)}}{=} \frac{1}{2} (\vec{u} + \vec{v}) \underset{\boxed{(t_4)}}{=} \frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v}$$

(t_1) : As diagonais de um quadrado se encontram no ponto médio de ambas (quadrado de vértices D, G, E e B);

(t_2) : Soma de vetores pela regra do paralelogramo;

(t_3) : Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

(t_4) : Distributiva do produto de vetores por escalar.

$$\text{Caminho II: } \overrightarrow{DO} \underset{\boxed{(t_1)}}{=} \frac{1}{2} \overrightarrow{DE} \underset{\boxed{(t_{21})}}{=} \frac{1}{2} (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE}) \underset{\boxed{(t_3)}}{=} \frac{1}{2} (\vec{u} + \vec{v}) \underset{\boxed{(t_4)}}{=} \frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v}$$

(t_1) : As diagonais de um quadrado encontram-se no ponto médio de ambas (quadrado de vértices D, G, E e B);

(t_{21}) : Definição de soma de vetores;

(t_3) : Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

(t_4) : Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar.

$$\text{Caminho III: } \overrightarrow{DO} \stackrel{(t_1)}{=} \frac{1}{2} \overrightarrow{DE} \stackrel{(t_{21})}{=} \frac{1}{2} (\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GE}) \stackrel{(t_3)}{=} \frac{1}{2} (\vec{v} + \vec{u}) \stackrel{(t_4)}{=} \frac{1}{2} \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{u}$$

(t_1): As diagonais de um quadrado se encontram no ponto médio de ambas (quadrado de vértices D, G, E e B);

(t_{21}): Definição de soma de vetores;

(t_3): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

(t_4): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar.

$$\begin{aligned} \text{Caminho IV: } \quad \overrightarrow{DO} &= (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BO}) \\ \overrightarrow{DO} &= (\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GO}) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \overrightarrow{DO} &= (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BO}) \\ \overrightarrow{DO} &= (\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GO}) \end{aligned}} \right\} (t_{21})$$

$$2\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{GO} \stackrel{(t_5)}{=} \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BO} =$$

$$\stackrel{(t_7)}{=} \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DG} \Rightarrow \overrightarrow{DO} \stackrel{(t_8)}{=} \frac{1}{2} (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DG}) \stackrel{(t_4)}{=} \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DG} \stackrel{(t_4)}{=} \frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v}$$

(t_{21}): Definição de soma de vetores;

(t_5): Soma de equações;

(t_6): Definição do vetor oposto;

(t_7): Definição do vetor nulo;

(t_8): Multiplicação de ambos os membros da igualdade por $\frac{1}{2}$;

(t_4): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;

(t_3): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

Os vetores \overrightarrow{GE} e \overrightarrow{EB} mobilizam técnicas, como elencadas abaixo:

$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{DB} = \vec{u}$ (t_3): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{DG} = -\vec{v}$

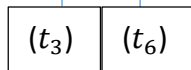


(t_3): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

(t_6): Definição do vetor oposto;

Vetor \overrightarrow{BC}

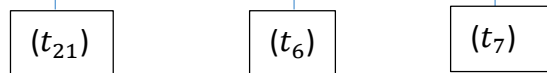
Caminho I: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$



(t_3): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

(t_6): Definição do vetor oposto;

Caminho II: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = -\vec{u} + \overrightarrow{DO} + \vec{u} = \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ ¹⁹⁴



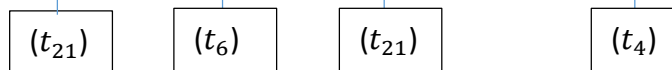
(t_{21}): Definição de soma de vetores;

(t_6): Definição do vetor oposto;

(t_7): Definição do vetor nulo;

Vetor \overrightarrow{FB}

Caminho I: $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FC} - \overrightarrow{BC} = 2\vec{u} - (\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) = -\frac{1}{2}\vec{v} + (2 + \frac{1}{2})\vec{u} =$



$= -\frac{1}{2}\vec{v} + \frac{3}{2}\vec{u}$

(t_{21}): Definição de soma de vetores;

(t_6): Definição do vetor oposto;

¹⁹⁴ Na última igualdade retoma-se as técnicas utilizadas nos caminhos I e II referente ao vetor \overrightarrow{DO} .

(t_{21}): Definição de soma de vetores;

(t_4): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar.

$$\text{Caminho II: } \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AB} =$$

(t_{21})

(t_3)

(t_{21})

$$= 2\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DB} + (-2 + 1)\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AB}$$

(t_4)

(t_6)

(t_4)

$$= 2\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} = (2 - \frac{1}{2})\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v} + \frac{3}{2}\vec{u}$$

$(t_{2.1})$

(t_4)

(t_3)

(t_4)

(t_{21}): Definição de soma de vetores;

(t_3): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

($t_{2.1}$): Definição de soma de vetores;

(t_4): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;

(t_6): Definição do vetor oposto;

($t_{2.1}$): Definição de soma de vetores;

(t_4): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;

($t_{2.1}$): Definição de soma de vetores;

(t_3): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores.

$$\text{Caminho III: } \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{DO} + 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} + 2(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}) =$$

$(t_{2.1})$

(t_9)

$(t_{2.1})$

$$= \overrightarrow{DO} + 2\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{DO} = 2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{DO} = 2\vec{u} - (\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v})$$

(t_4)

(t_6)

(t_3)

(t_4)

$(t_{2.1})$

(t_4)

$$= -\frac{1}{2}\vec{v} + (2 - \frac{1}{2})\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v} + \frac{3}{2}\vec{u}$$

(t_3)

(t_4)

- (t_{2.1}): Definição de soma de vetores;
 (t₉): Definição de ponto médio;
 (t_{2.1}): Definição de soma de vetores;
 (t₄): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;
 (t₆): Definição do vetor oposto;
 (t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;
 (t₄): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;
 (t_{2.1}): Definição de soma de vetores;
 (t₄): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;
 (t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;
 (t₄): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar.

Vetor \overrightarrow{AG}

$$\text{Caminho I: } \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DO} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DG}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{(t_{2.1})} \quad \boxed{(t_3)} \quad \boxed{(t_{2.1})} \quad \boxed{(t_6)} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{(t_3)} \quad \boxed{(t_4)} \end{array}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} + \vec{v} = \left(\frac{1}{2} - 1\right)\vec{u} + \left(\frac{1}{2} + 1\right)\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$$

- (t_{2.1}): Definição de soma de vetores;
 (t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;
 (t_{2.1}): Definição de soma de vetores;
 (t₆): Definição do vetor oposto;
 (t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;
 (t₄): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;
 (t₁₀): Soma e subtração de números reais.

$$\text{Caminho II: } \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DO} =$$

$$\boxed{(t_{2.1})} \quad \boxed{(t_3)} \quad \boxed{(t_6)}$$

$$\begin{array}{c} = \vec{v} - \vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) \\ \boxed{(t_3)} \quad \quad \quad \boxed{(t_4)} \quad \quad \quad \boxed{(t_{10})} \end{array} = \left(\frac{1}{2} - 1\right)\vec{u} + \left(\frac{1}{2} + 1\right)\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$$

(t_{2.1}): Definição de soma de vetores;

(t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

(t₆): Definição do vetor oposto;

(t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

(t₄): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;

(t₁₀): Soma e subtração de números reais.

Caminho III: Usando sistemas de coordenadas, aspecto inerente ao GeoGebra.

Considerando o sistema de coordenadas pré-fixado temos:

$$\overrightarrow{AG} = (1,2) = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = \alpha(1,1) + \beta(1,-1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 + \beta + \beta = 1 \\ \alpha = -2 + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta = 3 \\ \alpha = -2 + \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{3}{2} \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$$

Vetor \overrightarrow{AH}

Caminho I: $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DG} = 2\vec{v} = 0\vec{u} + 2\vec{v}$

$$\boxed{(t_{2.1})} \quad \boxed{(t_3)} \quad \boxed{(t_4)} \quad \boxed{(t_3)}$$

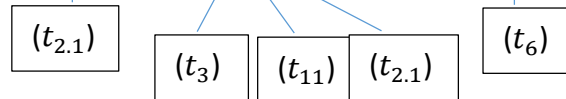
(t_{2.1}): Definição de soma de vetores;

(t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

(t₄): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;

(t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores.

$$\text{Caminho II: } \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{OH} =$$



$$= 2\left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) - \vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{u} + \vec{v} = 2\vec{v} = 0\vec{u} + 2\vec{v}$$

Diagram showing the decomposition of the vector equation. The terms are grouped into boxes labeled (t₃), (t₆), (t₇), (t_{1.2}), (t_{1.3}), and (t_{2.1}).

(t_{2.1}): Definição de soma de vetores;

(t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

(t_{1.1}): Multiplicação do escalar;

(t_{2.1}): Definição de soma de vetores;

(t₆): Definição do vetor oposto;

(t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

(t₆): Definição do vetor oposto;

(t₇): Definição do vetor nulo;

(t_{1.2}): Aplicação da propriedade comutativa;

(t_{1.3}): Aplicação da propriedade associativa.

No âmbito da Álgebra Linear, podemos supor a seguinte resolução em termos da base ortonormal escolhida. Assim, fixando $|\overrightarrow{OE}|$ como unidade de medida, podemos considerar os vetores ortonormais: $\vec{i} = \overrightarrow{OE}$ e $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$, ou seja, $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é uma base ortonormal no plano. Assim,

$$\vec{u} = \overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \overrightarrow{OH} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$\text{Somando as duas expressões temos: } \vec{u} + \vec{v} = 2\vec{i} \Rightarrow \vec{i} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$$

Subtraindo as duas expressões temos: $\vec{u} - \vec{v} = 2\vec{j} \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$

Segue que,

$$\overrightarrow{GE} = \vec{i} + \vec{j} = \vec{u};$$

$$\overrightarrow{EB} = \vec{j} - \vec{i} = -(\vec{i} - \vec{j}) = -\vec{v};$$

$$\overrightarrow{DO} = \vec{i} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{i} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GB} = \vec{i} + 2\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + 2\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2}\right)\vec{u} + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{2}\right)\vec{v}$$

$$= \frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \vec{i} - 2\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - 2\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{2}\right)\vec{u} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2}\right)\vec{v}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FH} = 2\vec{i} - 2\vec{j} = 2(\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{v}$$

As técnicas empregadas nas resoluções apresentadas acima, versam sobre combinações lineares, ou seja, escrevemos todos os vetores especificados na tarefa em que tomamos como referência a figura que integra a combinação linear em função da base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Temos ciência que, neste texto, apresentamos alguns dos possíveis caminhos resolutivos dos quais supomos que os estudantes possivelmente seguirão. Nessa perspectiva, expomos também um caminho trilhado no GeoGebra que, de forma direta, pode ser estabelecido no ambiente PL.

Percurso alternativo por meio da criação de um sistema de coordenadas. Considere um sistema de coordenadas no plano em que:

- F é a origem;
- O eixo OX é paralelo a \overrightarrow{FG} ;
- O eixo OY é paralelo a \overrightarrow{FD} ;
- $|\overrightarrow{FG}| = |\overrightarrow{FD}| = 1$ (escolha da unidade de medida)

Assim, tem-se as seguintes coordenadas:

A=(0,2); B=(1,2); C=(2,2); D=(0,1); E=(2,1); F=(0,0); G=(1,0); H=(2,0); O=(1,1).

Daí $\vec{u} = \overrightarrow{DB} = (1,1)$; $\vec{v} = \overrightarrow{DG} = (1,-1)$.

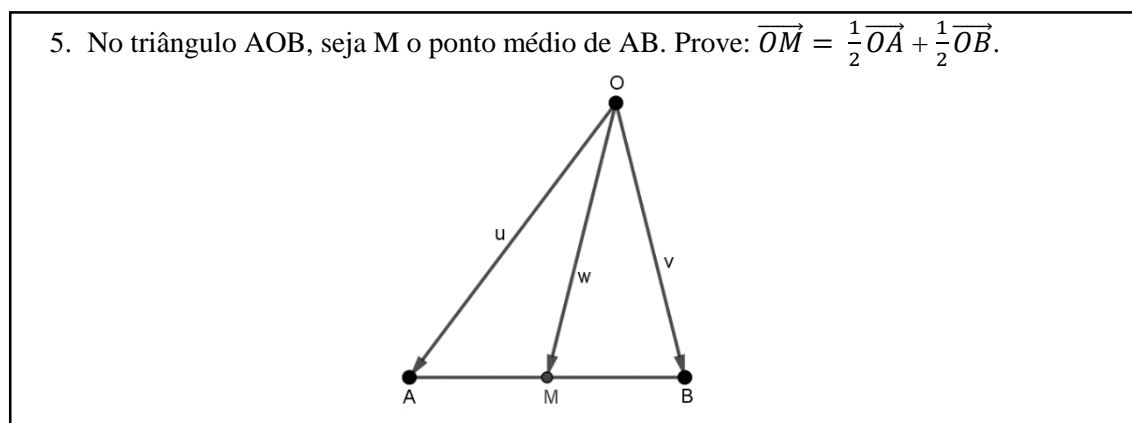
Temos:

- $\overrightarrow{GE} = (1,1) = \vec{u} = 1\vec{u} + 0 \cdot \vec{v}$
 - $\overrightarrow{EB} = (-1,1) = -\vec{v} = 0\vec{u} - 1 \cdot \vec{v}$
 - $\overrightarrow{DO} = (1,0) = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = (\alpha + \beta, \alpha - \beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$
- $$2\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \text{ e } \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Desse modo, deve-se proceder para os demais vetores, ressaltando que resoluções similares podem ser obtidas a partir da escolha de outros pontos como origem, por exemplo o ponto O. Outra possibilidade que advém dessa, constitui na inserção dos vetores que compõem a base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ do plano.

A segunda tarefa também se assenta no quadro das esperas institucionais ilustrado anteriormente. Dessarte que, devido às semelhanças entre técnicas empregadas nas demais questões, adotaremos um recorte dos possíveis caminhos trilhados nas resoluções, apontando para as decisões que supostamente serão adotadas pelos estudantes. Nesses termos, apresentamos o seguinte enunciado:

Figura 117- Tarefa 2, presente no repertório do Minicurso



Fonte: (MELLO e WATANABE, 2011, p.11)

Assim, elencamos algumas alternativas de resoluções que poderão ser seguidas pelos discentes ao se depararem com essa questão ou similares.

Caminho I: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) =$

$(t_{2.1})$

(t_9)

$(t_{2.1})$

(t_4)

$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} = \\
&\quad \quad \quad \boxed{(t_6)} \quad \quad \quad \boxed{(t_4)} \\
&= (1 - \frac{1}{2}) \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} \\
&\quad \quad \quad \boxed{(t_{10})}
\end{aligned}$$

(t_{2.1}): Definição de soma de vetores;

(t₉): Definição de ponto médio;

(t_{2.1}): Definição de soma de vetores;

(t₄): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;

(t₆): Definição do vetor oposto;

(t₁₀): Soma e subtração de números reais

É relevante destacar que os cálculos podem ser iniciados pela constatação da soma, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$ e seguir o mesmo sequenciamento de técnicas, o que constituiria um segundo caminho resolutivo.

Antes de descrevermos o caminho III, faz-se necessário observar que: dado o triângulo AOB, a definição de adição de vetores nos permite construir um ponto O', tal que $\overrightarrow{BO'}$ é um representante do vetor \vec{u} e $\overrightarrow{AO'}$ é um representante de \vec{v} , ou seja, os pontos A, O, B e O' são vértices de um paralelogramo.

$$\text{III Caminho: } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2} (\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB}$$

(t_{pp})

(t₂)

(t₄)

(t₃)

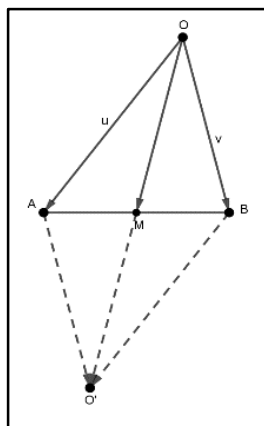
(t_{pp}): Como uma das propriedades do paralelogramo OAO'B, suas diagonais se interceptam no ponto médio de ambas, ou seja, conforme descrito anteriormente e ilustrado na figura 118, podemos expandir a representação do triângulo para um paralelogramo.

(t₂): Soma de vetores pela regra do paralelogramo;

(t_4): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;

(t_3): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores.

Figura 118 - Paralelogramo gerado a partir do triângulo AOB



Fonte: acervo da autora (2020)

(t_3): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

(t_4): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;

(t_3): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

($t_{2.1}$): Definição de soma de vetores;

(t_9): Definição de ponto médio;

($t_{2.1}$): Definição de soma de vetores;

(t_4): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;

(t_6): Definição do vetor oposto;

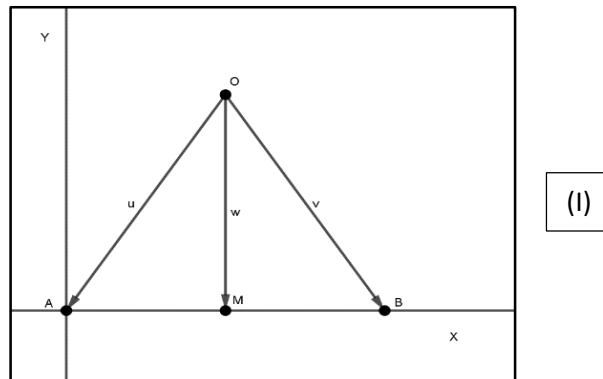
(t_3): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

(t_4): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;

($t_{2.1}$): Definição de soma de vetores;

Outra resolução poderia ser pensada a partir da escolha de um sistema de coordenadas como ilustrado abaixo,

Figura 119 - Inclusão de um sistema de coordenadas



Fonte: acervo da autora (2020)

$$A = (0,0); B = (b,0)$$

$$\Downarrow$$

$$M = \left(\frac{b}{2}, 0\right)$$

(II)

$$O = (x, y) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \left(\frac{b}{2} - x, -y\right)$$

$$\overrightarrow{OA} = (-x, -y) \quad \overrightarrow{OB} = (b - x, -y)$$

(III)

(IV)

(V)

$$\overrightarrow{OM} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} \Rightarrow \left(\frac{b}{2} - x, -y\right) =$$

(VI)

(VII)

(VII)

$$= \alpha(-x, -y) + \beta(b - x, -y) = (-\alpha x, -\alpha y) + (\beta(b - x), -\beta y) =$$

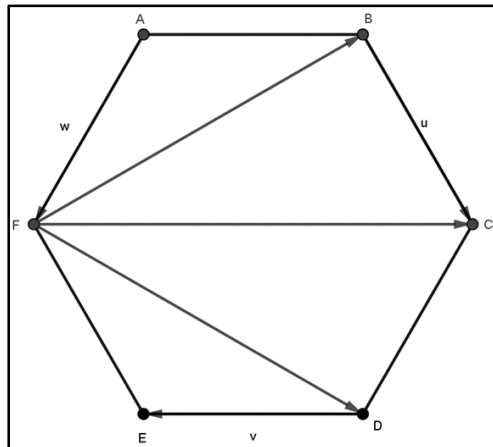
$$\begin{array}{l}
 \text{(VII)} \\
 = (-\alpha x - \beta x + \beta b, -\alpha y - \beta y) \\
 \\
 \frac{b}{2} - x = -\alpha x - \beta x + \beta b \\
 -y = -\alpha y - \beta y \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \\
 \\
 \text{(VIII)} \rightarrow \alpha x + \beta x - \beta b = -\frac{b}{2} + x \Rightarrow \underbrace{(\alpha + \beta)}_1 x - \beta b = -\frac{b}{2} + x \\
 \\
 -\beta b = \frac{b}{2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \\
 \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}
 \end{array}$$

Cientes de que as técnicas podem ser decompostas em um conjunto de tarefas especificadas da seguinte forma:

- (I) Escolha do sistema de coordenadas;
- (II) Ponto médio;
- (III) Vetor definido por dois pontos;
- (IV) Substituição do vetor pelas correspondentes coordenadas;
- (V) Multiplicação de vetor por escalar (forma algébrica);
- (VI) Adição de vetores (forma algébrica);
- (VII) Resolução de sistema linear;
- (VIII) Combinação linear de vetores.

É relevante destacar que não esgotaremos todas possibilidades de resoluções, principalmente por se tratar de suposições e esperas da pesquisadora. Na terceira tarefa, também, foram solicitados aos estudantes a determinação dos vetores \overrightarrow{FB} , \overrightarrow{FC} e \overrightarrow{FD} localizados em um hexágono, como ilustrado na figura 120,

Figura 120 - Enunciado e hexágono que integra a terceira tarefa



Fonte: (CORRÊA, 2006, p.21).

No hexágono regular abaixo: $\overrightarrow{BC} = \vec{u}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{AF} = \vec{w}$. Determine \overrightarrow{FB} , \overrightarrow{FC} e \overrightarrow{FD} . Assim, apresentamos algumas das possíveis resoluções:

$$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{DE} = -\vec{w} - \vec{v}$$

(t_{2.1})

(t₃)

(t₆)

(t_{2.1})

(t_{2.1}): Definição de soma de vetores;

(t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

(t₆): Definição do vetor oposto;

(t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

Ou de forma mais direta e econômica,

$$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{w} - \vec{v}$$

(t_{2.1})

(t₃)

De igual modo, pode-se obter \overrightarrow{FC} como combinação linear de \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .

$$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\vec{w} - \vec{v} - \vec{u} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} = -\vec{w} - \vec{v} - \vec{u}$$

(t_{2.1})

(t₃)

(t_{2.1})

(t₃)

(t_{2.1}): Definição de soma de vetores;

(t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

$$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} = \vec{u} - \vec{v}$$

(t_{2.1})

(t₃)

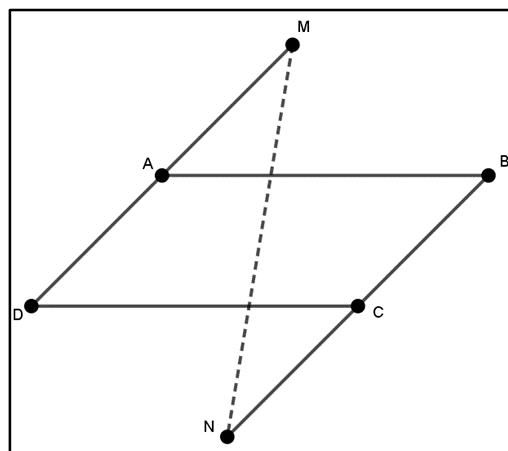
Assim como na questão anterior a essa, pode-se recorrer a uma solução pautada em um sistema de coordenadas, por exemplo, ao considerar o eixo Ox contendo o segmento FC e como eixo Oy a reta que passa por F, perpendicular a FC. Assim, F assumiria a origem e aos demais pontos poderíamos atribuir coordenadas, lembrando que se trata de um hexágono regular.

A quarta tarefa segue o mesmo direcionamento das tratadas anteriormente, ou seja, situa-se no plano, porém avançamos para representação geométrica que difere das demais, como especificado a seguir,

Na figura, ABCD é um paralelogramo e $|AM| = |AD|$, $|CN| = |BC|$. Se $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, então \overrightarrow{MN} será igual a:

- a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $2\vec{a} + \vec{b}$ c) $\vec{a} + 2\vec{b}$ d) $3\vec{a} + \vec{b}$ e) $\vec{a} + 3\vec{b}$

Figura 121 - Paralelogramo agregado a outros elementos atividade 4



Fonte: (CORRÊA, 2006, p.43).

Caminho I:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = 3\vec{b} + \vec{a}$$

(t_{2.1})

(t₉)

(t₃)

(t₄)

(t₃)

(t_{2.1}): Definição de soma de vetores;

(t₉): Definição de ponto médio;

(t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

(t₄): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;

(t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

Caminho II

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = 3\vec{b} + \vec{a}$$

(t_{2.1})

(t₉)

(t₃)

(t₄)

(t₃)

(t_{2.1}): Definição de soma de vetores;

(t₉): Definição de ponto médio;

(t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

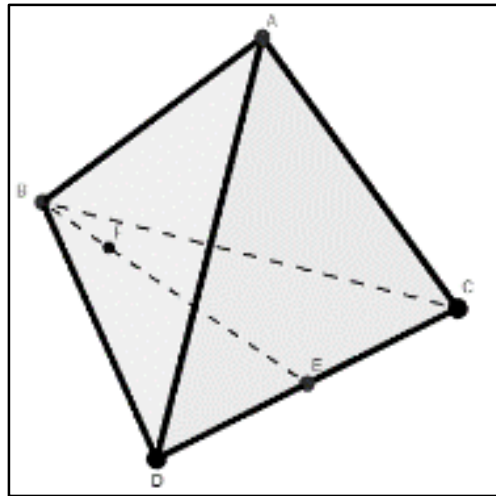
(t₄): Propriedade distributiva do produto de vetores por escalar;

(t₃): Segmentos equipolentes/ igualdade de vetores;

Ressalte-se que o mesmo conjunto de tarefas foram empregadas, porém trajetórias resolutivas distintas. De igual modo, podemos construir um sistema de coordenadas em que o eixo Ox contém a reta AB e o eixo Oy passando por A, perpendicular ao segmento AB. Nesse caso, teríamos: A=(0,0); B=(b,0). Se M=(x,y), então D=(-x,-y), usando a noção de soma de ponto com vetor teríamos $C = D + \overrightarrow{AB} = (-x,-y) + (b,0) = (b-x,-y)$ e $N = C + \overrightarrow{CN} = C + \overrightarrow{AD} = (b-x,-y) + (-x,-y) = (b-2x,-2y)$, assim, podemos resolver a equação $\overrightarrow{MN} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

A quinta tarefa está situada no âmbito do espaço, como descrita no enunciado: No tetraedro ABCD, E é o ponto médio do segmento DC e F satisfaz $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BE}$. Suponha $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$. Obtenha \overrightarrow{AF} como combinação linear de \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} .

Figura 122 - Tetraedro que integra o enunciado da quinta questão



Fonte: acervo da autora (2020)

Assim, esperamos como resolução algo que se assemelhe com o que expomos a seguir:

$$\begin{aligned}
 \text{I} \quad \text{II} \quad \text{III} \\
 \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) \\
 \text{IV} \quad \text{V} \\
 &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{8}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{8}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\
 \text{VI} \\
 &= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AD} \\
 \text{VII} \\
 &= (1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8})\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AD} \\
 \text{VIII} \\
 &= \frac{6}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AD} \\
 \text{IX} \\
 &= \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c}
 \end{aligned}$$

- (I) Soma vetorial;
- (II) Hipótese;
- (III) Soma de vetores: regra do paralelogramo;

- (IV) Propriedade Distributiva;
- (V) Soma de vetores;
- (VI) Propriedade Distributiva;
- (VII) Propriedade Distributiva;
- (VIII) Soma em \mathbb{R} ;
- (IX) Igualdade entre vetores.

Nesta etapa da resolução, denotada por (*), poderíamos seguir outro caminho, por exemplo: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$;

$$\begin{aligned}
 &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}); \\
 &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}; \\
 &= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}; \\
 &= -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c};
 \end{aligned}$$

A sexta e última tarefa segue um direcionamento análogo à questão anterior, porém existe distinção na abordagem por fazer referência a um paralelepípedo. Nestes termos, respaldados pelo repertório das técnicas que integraram às análises a priori, torna-se evidente a inseparabilidade entre o bloco prático e o bloco teórico. Assim, o desenho da Organização Matemática-OM foi revelado e se aproximou de uma praxeologia regional $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$, a qual pode ser fundamentada pela concepção de conhecimento de Chevallard em que,

Tal enfoque no conhecimento não é, de forma alguma, acidental. Na verdade, raramente se encontram praxeologias ad hoc. Geralmente, em uma determinada instituição I, uma teoria Θ responde a várias tecnologias θ_j , cada uma das quais por sua vez justifica e torna inteligíveis várias técnicas t_{ij} correspondentes a tantos tipos de tarefas T_{ij} . As organizações pontuais agregarão assim, primeiro em organizações locais, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centradas em uma determinada tecnologia θ , depois em organizações regionais, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, formadas em torno de uma teoria Θ . (Além disso, nomearemos a organização global o complexo praxeológico $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$ obtido, em uma determinada instituição, pela agregação de várias organizações regionais correspondentes a diversas teorias Θ_k). Agora a mudança de uma praxeologia pontual $[T/\tau/\theta/\Theta]$ para uma praxeologia local $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ traz a tecnologia θ para a vanguarda, da mesma forma que a mudança posterior para uma praxeologia regional $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$ trará a teoria Θ para a vanguarda. Em ambos os casos, a visibilidade do bloco de conhecimento aumenta, em detrimento da visibilidade do know-how. Tal desequilíbrio, sem dúvida, não é desprovido de justificação: embora seja verdade que, em muitos casos, o tipo de tarefa T precede geneticamente o bloco $[\Theta/\Theta]$ (que é então construído como um meio de produzir e de justificar uma técnica τ apropriada à T), continua a ser o caso que, estruturalmente, o conhecimento $[\theta/\Theta]$ permite a geração de τ (para um determinado T). Por este motivo, o conhecimento $[T/\tau]$ pode ser classicamente apresentada, no texto do conhecimento, como uma

simples aplicação do "conhecimento" $[\theta/\Theta]$. (CHEVALLARD, 1999, p.5, tradução nossa¹⁹⁵)

Em síntese, significa dizer que o desenvolvimento das várias tarefas, estruturas de ações (CHEVALLARD, 2006), estabeleceram mobilizações de diversas técnicas, as quais se assentam no contexto da tecnologia geométrica e algébrica. Nestes termos, compactuamos com Baldin e Furuya (2011),

as propriedades matemáticas de vetores que são estudadas com as representações geométricas permitem estender o conceito de vetor, posteriormente, para ambientes mais abstratos, chamados espaços vetoriais, que constituem uma ferramenta essencial para o entendimento da Matemática e suas aplicações em outros ramos da Ciência. (BALDIN; FURUYA, 2011, p.52)

Isso posto, o ambiente vetorial promove encadeamentos geométricos que, em primeira instância, são caracterizados como suporte para uma interpretação mais abstrata, presente nos espaços vetoriais imersos no cenário da Álgebra Linear.

A partir desse caráter preditivo, inerente às análises a priori e o do GT_{AP_t} e demais Geradores de Tipo de Tarefas (CHAACHOUA; BESSOT, 2016), e Sub Geradores de Tipo de Tarefas (KASPARY, 2020), que advém do complexo praxeológico matemático e didático, temos os seguintes desmembramentos, que ensejou o refinamento das análises e dos tipos de tarefas que nortearam as escolhas da pesquisadora. Nesta perspectiva esquematizamos, ao nosso ver, como os GT_{AP_t} podem ser caracterizados,

¹⁹⁵ Une telle mise en avant du savoir n'est nullement fortuite. On ne rencontre en fait que rarement des praxéologies ponctuelles. Généralement, en une institution I donnée, une théorie Θ répond de plusieurs technologies θ_j , dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques t_{ij} correspondant à autant de types de tâches T_{ij} . Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisations locales, $[T_i/t_i/\theta/\Theta]$, centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisations régionales, $[T_{ij}/t_{ij}/\theta_j/\Theta]$, formées autour d'une théorie Θ . (Au-delà, on nommera organisation globale le complexe praxéologique $[T_{ijk}/t_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$ obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k .) Or le passage d'une praxéologie ponctuelle $[T/t/\theta/\Theta]$ à une praxéologie locale $[T_i/t_i/\theta/\Theta]$ met en avant la technologie θ , de la même façon que le passage ultérieur à une praxéologie régionale $[T_{ij}/t_{ij}/\theta_j/\Theta]$ portera au premier plan la théorie Θ . Dans les deux cas la visibilité du bloc du savoir s'accroît, au détriment de celle du savoir-faire. Un tel déséquilibre, sans doute, n'est pas sans justification: car s'il est vrai que, en bien des cas, le type de tâches T précède génétiquement le bloc $[\theta/\Theta]$ (lequel se construit alors comme moyen de produire et de justifier une technique τ appropriée à T), il n'en reste pas moins que, structurellement, le savoir $[\theta/\Theta]$ permet d'engendrer τ (pour T donné). Pour cette raison, le savoir-faire $[T/\tau]$ pourra être classiquement présenté, dans le texte du savoir, comme une simple application du « savoir » $[\theta/\Theta]$.

Quadro 23 - GT_{1nAPt1} subsidia o processo de ordenação das análises a priori da tarefa 1

T_{1nAPt1}	Caracterização de Tipos de tarefas oriundas de GT_{1nAPt1}	Alguns ingredientes das possíveis técnicas e gestos exigidos
T_{11APt1} T_{12APt1} T_{13APt1} T_{14APt1} (...)	<p>Níveis de granularidade dos tipos de tarefas Do geral para o específico.</p> <p>Exemplo de valores das variáveis</p> <p>(Identificar, representantes de dois vetores)</p> <p>(Identificar, representantes de dois vetores inscritos em um quadrado)</p> <p>(Identificar, representantes de dois vetores inscritos em um quadrado nos ambientes dos dispositivos)</p> <p>(Identificar, representantes dos vetores \vec{u} e \vec{v} inscritos em um quadrado nos respectivos ambientes dos dispositivos)</p> <p>(...)</p> <p>PL: Régua, esquadros, papel milimetrado,...</p> <p>MM: Tipo de material (canudos, elásticos, barbantes, EVA, dentre outros)</p> <p>GG: Dispositivo móveis (notebook, celular, tablets.)</p>	<p>-Escolha do dispositivo e dos materiais complementares que se atrelam ao mesmo;</p> <p>-Traçar segmentos;</p> <p>-Verificar as condições de paralelismo</p> <p>- Realizar medições;</p> <p>- Estabelecer comparações.</p>
<p>$GT'_{1nAPt1} = [\text{Identificar, representantes de dois vetores; PL}]$</p> <p>$GT''_{1nAPt1} = [\text{Identificar, representantes de dois vetores; MM}]$</p> <p>$GT'''_{1nAPt1} = [\text{Identificar, representantes de dois vetores; GG}]$</p>		

Fonte: acervo da autora 2020

Inferimos que os estudantes, de posse desta primeira tarefa, identificarão previamente os representantes dos vetores \vec{u} e \vec{v} , assim como concomitantemente escolherão quais dos dispositivos irão subsidiar a busca pela resposta do que foi solicitado na tarefa.

Quadro 24 - GT_{2nAPt1} subsidia o processo de ordenação das análises a priori da tarefa 1

T_{2nAPt1}	Caracterização de Tipos de tarefas do GT_{2nAPt1}	Alguns ingredientes das possíveis técnicas e gestos exigidos
<p>T_{21APt1}</p> <p>↓</p> <p>T_{22APt1}</p> <p>↓</p> <p>T_{23APt1}</p> <p>(...)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>Níveis de granularidade dos tipos de tarefas Do geral para o específico.</p> <p>↓</p> <p>(Revisitar, conceitos que advém de níveis elementares de ensino)</p> <p>↓</p> <p>(Revisitar, propriedades do quadrado)</p> <p>↓</p> <p>(Revisitar, a conceitualização de ponto médio)</p> <p>(...)</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>Exemplo de valores das variáveis</p> <p>↓</p> <p>PL { <i>Régua, esquadros, papel milimetrado,...</i></p> <p>MM { <i>Tipo de material (canudos, elásticos, barbantes, EVA, dentre outros)</i></p> <p>GG { <i>Dispositivo móveis (notebook, celular, tablets.)</i></p> </div> </div>	<p>-Escolher o dispositivo e os materiais complementares que se atrelam ao mesmo;</p> <ul style="list-style-type: none"> -Traçar segmentos; - Fazer uso das propriedades dos quadrados; - Definição de ponto médio; - Realizar medições; - Estabelecer comparações.

Fonte: acervo da autora 2020

Quadro 25 - GT3nAPt1 subsidia o processo de ordenação das análises a priori da tarefa 1

T_{3nAPt_1}	Caracterização de Tipos de tarefas de GT_{3nAPt_1}		Alguns ingredientes das possíveis técnicas e gestos exigidos
	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">Níveis de granularidade dos tipos de tarefas Do geral para o específico.</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">Exemplo de valores das variáveis</div> </div> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>T_{31APt_1} ↓</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">(Retomar, as peculiaridades dos vetores geométricos)</div> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>T_{32APt_1} ↓</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">(Retomar, os conceitos de módulo, direção e sentido)</div> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>T_{33APt_1}</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">(Retomar, as operações vetoriais a partir das combinações lineares)</div> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>(...)</p> </div> <div style="width: 5%; text-align: center; font-size: 2em;">}</div> <div style="width: 45%;"> <p>PL</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">Régua, esquadros, papel milimetrado,...</div> <p>MM</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">Tipo de material (canudos, elásticos, barbantes, EVA, dentre outros)</div> <p>GG</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">Dispositivo móveis (notebook, celular, tablets.)</div> </div> </div>		<ul style="list-style-type: none"> -Escolher o dispositivo e os materiais complementares que se atrelam ao mesmo; -Reconhecer os representantes de \vec{u} e \vec{v}; - Usar as operações vetoriais; - Trabalhar implicitamente com as combinações lineares.

Fonte: acervo da autora 2020

A partir dos GT_{1nAPt_1} , GT_{2nAPt_1} e GT_{3nAPt_1} foi possível vislumbrar, de forma mais consistente, os possíveis gestos didáticos que os discentes podem realizar. Contudo, esse aspecto será ratificado e empreendido no processo de confrontação entre o que era esperado (alcançados parcialmente ou integralmente) e o que efetivamente ocorreu em conformidade com o paradigma da Engenharia Didática, “a validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.” (ARTIGUE, 1996, p.197) uma das singularidades desta metodologia.

Outro aspecto que merece destaque são os papéis desempenhados pelos ostensivos no processo de evocação de não-ostensivos, fato este inerente às tarefas matemáticas e, conseqüentemente, manifesto em todos os livros que apresentam uma abordagem vetorial, caracterizada, geralmente, pela representação geométrica que se imbrica às linguagens natural, algébricas ou numéricas. Neste contexto, Watson, Spyrou e Tall (2003, p.1, grifos nossos,

tradução nossa¹⁹⁶) sinalizam “que analisam a produção de três mundos matemáticos distintos, cada um com seu próprio modo de construir conceitos e com seu próprio modo de prova. Estes são, respectivamente, *corporificados, simbólicos e formais.*” No entanto, sem perder de vista a abordagem antropológica, apontamos para o que sublinha Bosch e Chevallard (1999),

(...) diremos agora que a implementação de uma técnica resulta em uma manipulação de ostensivos regulada por não ostensivos. Os ostensivos constituem a parte perceptível da atividade, ou seja, o que, no desempenho da tarefa, é visível, tanto para o observador quanto para os próprios atores. Na análise do trabalho matemático, os elementos ostensivos fazem parte da realidade empírica, acessíveis aos sentidos. Em contraste, a presença desta ou daquela prática não ostensiva em uma dada prática só pode ser induzida ou presumida a partir da manipulação de ostensivos institucionalmente associados. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 11, tradução nossa¹⁹⁷)

Ciente de que uma técnica pode ser decomposta em um conjunto de tarefas e que os Dispositivos Didáticos - DD enriquecem o repertório ostensivo gerenciado pelos GTs em associação com o AHA, é possível constatar que as condições sofrem alterações que se vinculam às escolhas dos DD em conjunto com sua carga ostensiva agregada. Soma-se a isso que, os contratos didáticos sofrem modificações frente às atividades de estudos desenvolvidas a partir da resolução das tarefas nos moldes de AHA. Sob outro ponto de vista, porém em constante diálogo com o que vem sendo abordado, as funções didáticas (mesogênese, topogênese e cronogênese) (CHEVALLARD, 1998; 2009) são sensivelmente alteradas. Esse aspecto provoca “fissuras” nas consolidadas tradições próprias dos Sistemas Didáticos tradicionais por meio do conjunto de dispositivos e ostensivos convocados para o estudo. Nesse sentido, Casabò (2018) sublinha que,

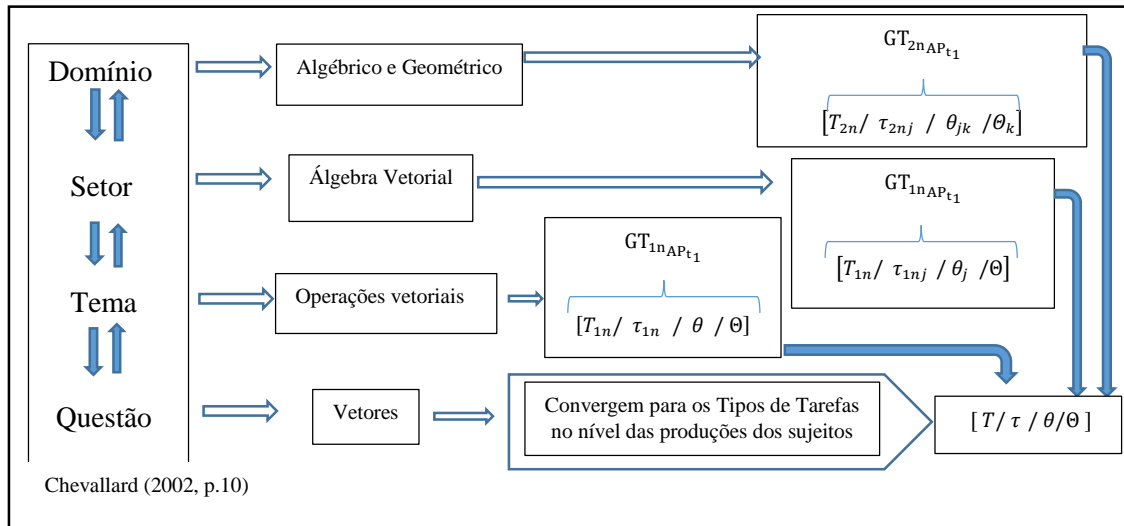
A escala da codeterminação didática é, antes de tudo, uma ferramenta para os pesquisadores em didática questionarem a realidade que pretendem estudar. Sua principal utilidade é ampliar nossa visão em direção a certos campos empíricos que tradicionalmente são mantidos fora da perspectiva dos didáticos e que, portanto, são tidos como garantidos. (...) Portanto, muitas das condições e restrições que vêm dos níveis inferiores permanecem ocultas, como se não fizessem parte dos problemas abordados. (CASABÒ, 2018, p.4037)

¹⁹⁶ Our analysis yields three distinct mathematical worlds, each with its own way of constructing concepts and with its own way of proof. These are respectively, embodied, symbolic and formal.

¹⁹⁷ Revenant aux notions fondamentales de l’approche anthropologique, nous dirons maintenant que la mise en œuvre d’une technique se traduit par une manipulation d’ostensifs réglée par des non-ostensifs. Les ostensifs constituent la partie perceptible de l’activité, c’est-à-dire ce qui, dans la réalisation de la tâche, se donne à voir, aussi bien à l’observateur qu’aux acteurs eux-mêmes. Dans l’analyse du travail mathématique, les éléments ostensifs font partie du réel empirique, accessible aux sens. Par contraste, la présence de tel ou tel non ostensif dans une pratique déterminée ne peut être qu’induite ou supposée à partir des manipulations d’ostensifs institutionnellement associés.

Respaldados por esta perspectiva, apresentamos o esquema revelado no quadro 26, o qual revela as possíveis interligações entre os GTs e os Níveis de Codeterminação, enquanto mais um suporte que ampara questionamentos da realidade alvo do estudo.

Quadro 26 - Geradores de Tipo de Tarefas e os Níveis de Codeterminação



Fonte: acervo da autora (2020)

A partir do desenho das análises a priori é possível perceber os vínculos praxeológicos intrínsecos e que são relevantes para investigação, o que revela também a potência metodológica dos Geradores de Tipo de Tarefas, os quais podem ser apresentados como uma das ferramentas que permitem que os pesquisadores transitem pelos diferentes níveis de codeterminação, por intermédio dos graus de granularidade dos GTs. Assim, podemos realizar a seguinte associação: uma OM global dialogaria com Geradores de Tipo de Tarefas em graus mais abrangentes. No entanto, nas OM pontuais as especificidades comporiam as estruturas dos Tipo de Tarefas originados por eles.

CAPÍTULO VII

UM ESTUDO SOBRE OS VETORES: UMA ANÁLISE EXPERIMENTAL NO CONTEXTO DO CLM-UEFS¹⁹⁸

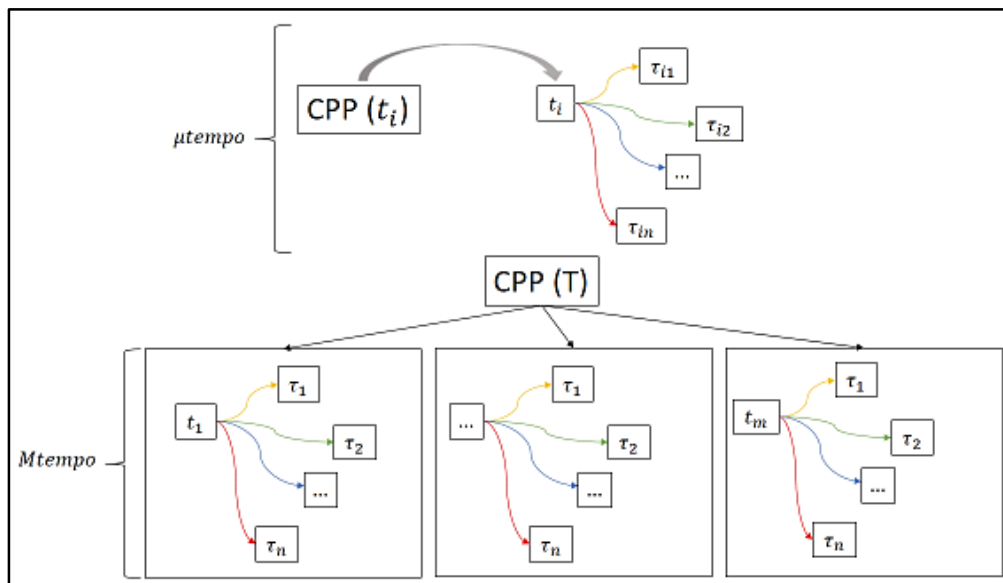
Primeiramente é de suma importância situar o leitor acerca das escolhas que guiaram o processo de análise que será revelado neste capítulo. Adotamos três níveis de análise os quais se agregam ao nível básico que integra todas as resoluções ao centrar no pilar que constituiu e direcionou atenção para o AHA, o qual alimentou o funcionamento dos Geradores de Tipos de Tarefas (CHAACHOUA, 2015) e os Sub Geradores de Tipos de Tarefas (KASPARY, 2020), por intermédio dos Dispositivos Didáticos {MM, PL, GG}. Contudo, em alguns momentos o nosso olhar se veste de uma lente de observação mais acurada e o interesse se volta para as praxeologias pessoais (CROSET; CHAACHOUA, 2016) e em casos específicos para os Caminhos de Práticas Pessoais – CPP, pois no processo resolutivo de algumas tarefas essas trajetórias aparecem ostensivamente por meio dos dados obtidos os quais viabilizaram revelar a forma como certas praxeologias pessoais são construídas e permitiu desenvolver uma análise proveniente de diferentes ângulos de observação.

Ademais, é relevante destacar que as praxeologias pessoais são construídas dentro de uma ou mais instituições de acordo com diferentes dinâmicas como sublinhado por Kaspary, Chaachoua e Bessot (2020). A partir desse viés, a confrontação de uma tarefa t pertencente a certo tipo de tarefa T oportunizando ao estudante invocar técnicas (τ_i) e implementá-las sem dificuldades se T for um tipo de tarefa familiar/rotineira para ele. Entretanto, se o tipo de tarefa T não estiver imersa no repertório praxeológico habitual do estudante, então a realização dessa tarefa pode passar por várias tentativas e adaptações, mobilizando técnicas (τ_i) que não conduzem a efetiva resolução da mesma, até que surja uma eventual associação com uma técnica com potencial de adequação. Aqui, o termo "adequação" significa que o estudante julga que a técnica permite solucionar a tarefa de forma condizente com a instituição. Se a técnica não for a esperada pela instituição, então o professor assumirá o papel de mediador e colocará em prática o que é necessário para alcançar o que foi inicialmente solicitado na tarefa.

¹⁹⁸ A partir do recorte deste capítulo foi elaborado o artigo intitulado: An Analysis of the Influences of a Hybrid Learning Environment in the Solution of Vector Tasks according to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) publicado no vol. 18, n. 3, da The Mathematics Enthusiast, 2021.

Dito isso, o processo pode ser descrito em termos de um conjunto de técnicas segundo o tempo da construção praxeológica (CHEVALLARD, 2009) e modelado por intermédio dos Caminhos Práticas Pessoais relativo a uma tarefa t : $CPP(t_i) = \{\tau_{i1}, \tau_{i2}, \tau_{i3}, \dots, \tau_{ik}\}$, como abordado nesta tese, por meio dos enda atividade do estudante ou melhor de sua praxis (t_i, τ_{ik}) . Essa sequência de técnicas em associação aos ingredientes e gestos das técnicas se conectam à concepção de dinâmica das construções praxeológicas pessoais. O que nos permite caracterizar essa trajetória como o somatório de todas as técnicas utilizadas para alcançar uma solução de t_i , ou seja, $\sum_{k=1}^n(t_i, \tau_{ik})$ em que fixa-se uma tarefa (t_i) e as técnicas sofrem variações. No entanto, pode-se inferir que o estudante pode encontrar outras tarefas (t_i) de certo tipo T em que são mobilizadas as mesmas técnicas ou distintas técnicas no intuito de gerar aproximações ou alcançar o resultado esperado pela instituição. Nestes termos, revelamos a modelação dos Caminhos de Práticas Pessoais relativo a um determinado tipo de tarefa T: $CPP(T) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n(t_i, \tau_k)$. Como ilustrado a seguir:

Figura 123 - Caminhos de Práticas Pessoais CPP (t_i) ou CPP (T)



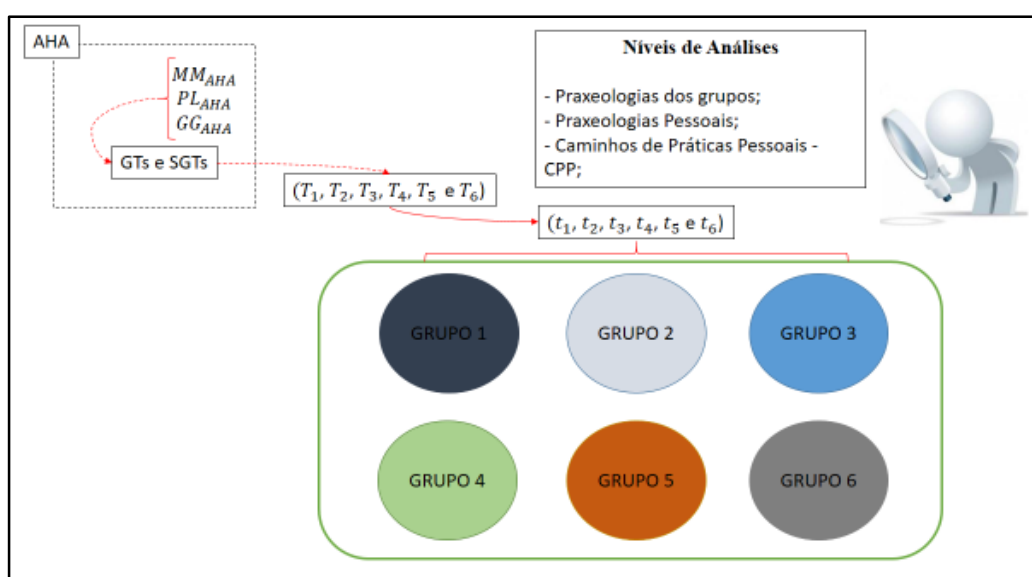
Fonte: acervo da autora (2021)

Nestes termos, essa ideia se une a concepção de dinâmica praxeológica descrita por Kaspary, Chaachoua e Bessot (2020), o que nos fez conceber que os processos que advém dos CPP se comportam como “um sequenciamento de fotos” registrados em momentos distintos. Essas imagens sequenciadas permitem que o pesquisador observe o processo de movimentação ou trânsito praxeológico. Assim, emergiu três níveis de análise, que se complementam e estão relacionados com o Sistema de Variáveis atribuído ao Gerador de Tipos de Tarefas direcionado

às Análises a Priori - GT_{AP_t} o que permitiria um melhor arranjo entre os valores e associações entre essas novas variáveis.

A análise dos grupos fornece uma visão global do funcionamento do AHA, e as outras duas análises podem explicar o trabalho pessoal de certos estudantes a dois níveis diferentes, o primeiro ao nível das praxeologias pessoais, específicas e locais, o segundo ao nível da forma como estas praxeologias são moldadas, uma meta-análise. A figura 124 sintetiza o que foi dito anteriormente,

Figura 124 - Níveis de Análises



Fonte: acervo da autora (2021)

A tarefa 1 foi analisada sob uma vertente mais completa por constituir o primeiro momento em que efetivamente trabalhamos com os elementos que consideramos cruciais nesta investigação, ou seja, é evidenciado o comportamento do Ambiente Híbrido de Aprendizagem a partir do trânsito entre as variáveis caracterizadas pelos Dispositivos Didáticos {MM, PL e GG} operacionalizado pelos Geradores de Tipos de Tarefas (CHAACHOUA, 2015) e Sub Geradores de Tipos de Tarefas (KASPARY, 2020). Assim, foi exposta uma Organização Praxeológica do Grupo – OPG.

Na análise da segunda tarefa é conservada a estrutura de base em que o Gerador de Tipo de Tarefas regido pelo Sistema de Variáveis - SV, constituído essencialmente pelos Dispositivos Didáticos – DD {MM, PL e GG}, assim como as ramificações do GT que originaram os Sub Geradores de Tipos de Tarefas e conseqüentemente as tarefas que deles advém. Contudo, mudamos o nível de análise ao revelar as praxeologias pessoais inerente as

construções realizadas pelos estudantes no âmbito de MM e para os grupos que optaram pelos ambientes PL e GG apresentamos OPG.

O estudo da tarefa 3 traz em seu âmago a construção de modelos em MM e resoluções da questão em PL e GG que é decomposta em sub tarefas de mesma natureza, diferindo apenas na associação vetorial em termos de segmentos equipolentes. Nesta etapa foca-se na praxeologia pessoal de um membro do grupo 1.

Na quarta tarefa observou-se aspectos que emergiram como inspiração na idealização dos Caminhos de Práticas Pessoais - CPP, em especial nas análises das resoluções em MM e PL. O primeiro elemento que despertou nossa atenção foram as distintas possibilidades de resoluções, como exemplificado no quadro intitulado “um zoom entre as duas resoluções”, em que notamos traços do emprego de distintas técnicas pessoais. De igual modo foram identificadas características similares nas resoluções com PL. Assim, diante de uma gama de resoluções vislumbramos a possibilidade de “mergulhar” em meio a uma análise mais fina para observar como todos elementos se comportam.

Dito isto, concebemos que a gênese dos CPP está diretamente relacionada ao conjunto de interpretações e escolhas praxeológicas que cada estudante (sujeito) realiza ao se deparar com tarefas que devem ser resolvidas. Em outras palavras, visa analisar a trajetória das predileções praxeológicas que cada discente elege como estratégia ao se deparar com determinada questão. Neste sentido, pode-se pensar, metaforicamente, que os CPP se assemelham às atribuições assumidas pelos analistas de partidas de futebol. Visto que, eles assumem a função de condutores de informações nas execuções de cada jogada, cada lance, ou seja, busca-se identificar o porquê e como as ações acontecem durante o jogo. Assim, objetiva-se entender os pontos fortes e fracos dos times, de uma parcela do time ou de um jogador em específico em termos de diferentes níveis de análises, por exemplo: geral, específico e individual, para então estabelecer estratégias de jogo mais robustas e consistentes.

A partir desta alegoria, concebemos que os CPP se apresentam como uma ferramenta teórica que oportuniza o acesso aos elementos explícitos e implícitos que integram às construções praxeológicas, uma espécie de “background” destas saber-fazer como descrito por intermédio das recombinações praxeológicas (CHEVALLARD, 2018) em que modificamos a prática e mantemos o logos, em um nível mais interno. A partir desta perspectiva, as estruturas de ações (CHEVALLARD, 2006) são desenvolvidas no contexto das praxeologias pessoais (CHAACHOUA; CROSET, 2016), o que possibilita direcionar a atenção para os gestos que precedem e acompanham as execuções das técnicas. Dito de outra forma, significa dizer que o CPP observa estruturas ou unidades mínimas que estão por trás das produções praxeológicas

pessoais de cada ator na resolução de tarefas. Essa perspectiva é respaldada pelo que sublinha Chevallard (1998),

Diremos que cada um dos atores x_i deve neste caso realizar certos gestos, o conjunto dos quais constitui então o seu papel na realização da tarefa cooperativa t , sendo estes *gestos diferenciados (de acordo com os atores) e coordenados entre eles pela técnica τ executada coletivamente*. Alguns destes gestos serão considerados como tarefas por direito próprio, t' , em cuja realização x_i atuará (momentaneamente) em relativa autonomia em relação aos outros atores da tarefa. O conjunto destas tarefas, um subconjunto do papel do x_i quando t é executada de acordo com τ , é então nomeado topos do x_i em t . (CHEVALLARD, 1998, p.107, grifos nossos, tradução nossa¹⁹⁹)

Outro ponto essencial que comunga diretamente com a idealização dos CPP é de considerar que na resolução de uma tarefa os sujeitos mobilizam distintas organizações didáticas e matemática. Dito isso, por intermédio dessa noção, pode-se pensar na observação e análise de um processo mais minucioso acerca da forma como alguns estudantes constroem microunidades matemáticas e didáticas ao compor os distintos caminhos de estudo.

E por fim, nas análises das tarefas cinco e seis expusemos os elementos de base do estudo, as praxeologias pessoais e mencionamos traços dos CPP, porém sem um detalhamento mais aprofundado por não constituir o objetivo primeiro desta pesquisa.

7.1 – DESENHO ESTRUTURAL DO CURSO “UM ESTUDO SOBRE VETORES”

O curso “*Um Estudo sobre Vetores*” cumpre, em essência, a fase experimental dessa investigação com a intenção de indagar a atuação do Modelo Praxeológico de Referência -MPR e verificar suas potencialidades na perspectiva de aspectos que circundam o ensino e a aprendizagem da álgebra vetorial em nível universitário, pois, frente a esta problemática, propomos analisar as produções dos discentes, em termos dos Caminhos de Práticas Pessoais - CPP das tarefas vetoriais, a partir de um Ambiente Híbrido de Aprendizagem – AHA, sob o âmbito de desenvolvimento estruturado no quadro de referência didática T4TEL (CHAACHOUA, 2018), detectados na trajetória desta pesquisa, além de abastecer o processo de confrontação entre as análises a priori e a posteriori.

¹⁹⁹ On dira que chacun des acteurs x_i doit en ce cas effectuer certains gestes, dont l'ensemble constitue alors son rôle dans l'accomplissement de la tâche coopérative t , ces gestes étant à la fois différenciés (selon les acteurs) et coordonnés entre eux par la technique τ mise en œuvre collectivement. Certains de ces gestes seront regardés comme des tâches à part entière, t' , dans l'accomplissement desquelles x_i agira (momentanément) en autonomie relative par rapport aux autres acteurs de la tâche. L'ensemble de ces tâches, sous-ensemble du rôle de x_i lorsque t est accomplie selon τ , est nommé alors le topos de x_i dans t .

A partir desse viés, colocamos em evidencia o AHA - Ambiente Híbrido de Aprendizagem, cuja intenção é identificar, implementar e formalizar uma espécie de complementação *das ferramentas de ensino*, amalgamando, novas às que já existem. Neste nível de investigação as características tecidas acerca do AHA adquirem uma maior amplitude ao se integrar à Dialética Mídia Meio (CHEVALLARD,2007) e ser disposto por nós como um espaço constituído por uma variedade de recursos didáticos (mídias²⁰⁰). Nestes termos, Brousseau (2002) declara que,

Uma situação é caracterizada em uma instituição por um conjunto de relações e de papéis recíprocos de um ou vários sujeitos (aluno, professor, etc.) com um meio, visando à transformação deste meio segundo um projeto. O meio é constituído por objetos (físicos, culturais, sociais, humanos) com os quais o sujeito interage em uma situação (BROUSSEAU, 2002, p. 1).

Com base nessa perspectiva, resulta em caracterizar a aprendizagem como adaptação a um meio. Em mesmo direcionamento, este autor também ressalta que “o sujeito aprende corrigindo suas acções e antecipando seus efeitos. As situações de acção em que ele está envolvido são, portanto, para ele “milieu” (de referência) sobre os quais exerce sua capacidade de conhecimento e da aprendizagem.” (BROUSSEAU, 2002, p.23, tradução nossa²⁰¹)

Em outras palavras, Costa, Arlego e Otero (2015, p. 149) “entendem por mídia todo sistema que emitem mensagens para determinado público, como por exemplo: um diário, um programa de televisão, um curso de um professor, um livro...”. Como parte da sua teorização, a TAD caracteriza as mídias como todo sistema que propõe *condições* ao meio, ao dispor de certa realidade às mensagens. E por consentir que o *meio* é desprovido de intenções didáticas, seguimos os direcionamentos de Chevallard (2007)

A TSD sublinha, em certo sentido, que um sistema didático não pode funcionar in vacuo: supõe a produção e a organização de um "meio didático", meio de estudo material e imaterial M, que será o fragmento do universo com o qual os atores do sistema didático estabelecerão uma negociação com o objetivo de produzir a resposta R para a pergunta Q. (CHEVALLARD, 2007, p. 31, tradução nossa²⁰²)

No seio dessa investigação, foi incorporado e materializado ao *meio didático* uma proposta alternativa para o ensino e a aprendizagem da Álgebra Vetorial, em que se permite

²⁰⁰ Ver Chevallard (2007).

²⁰¹ Le sujet apprend en corrigeant ses actions et en anticipant leurs effets. Les situations d'action où il s'est engagé sont donc pour lui des milieux (de référence) sur lesquels il exerce ses capacités de construction de connaissances et d'apprentissage.

²⁰² La TSD souligne, en un sens, qu'un système didactique ne saurait fonctionner in vacuo: il suppose la production et l'organisation d'un « milieu didactique », milieu d'étude matériel et immatériel M qui sera le fragment d'univers avec lequel les acteurs du système didactique établiront un commerce visant à produire la réponse R à la question Q.

que variados recursos dialoguem e coexistam em uma dada situação didática, pois eleva-se à premência em “desenvolver um meio M formado por um conjunto de recursos velhos e novos, que serão utilizados por X.” (SANTOS JÚNIOR, DIAS, BOSCH, 2019, p. 330).

Pautados nestas concepções, identificamos semelhanças com AHA, visto que se apresenta como uma fonte de mídias (MM, PL, GG) que, além de propor condições ao meio, nutrem o funcionamento dos Geradores de Tipo de Tarefas – GTs, promovendo o desenvolvimento de distintos Caminhos de Práticas Pessoais – CPP, em termos do sistema de variáveis, podendo ser caracterizado como um meio material (CHEVALLARD, 2007), ou seja, um meio formado por mídias materiais.

No intuito de aclarar o que foi dito, compactuamos com o ponto de vista de Jolivet (2016) que concebe os recursos educacionais como,

objetos que dão a conhecer, fazem trabalhar, questionamentos, etc., um ou mais saberes; são, portanto, produzidos dentro de uma instituição. No entanto, eles podem ter bastante utilidade dentro de outra instituição, mesmo que não seja aquela originalmente previsto por seu projetista. (JOLIVET, 2016, p.2, tradução nossa²⁰³)

Face ao *meio didático* gerido por *mídias* (dispositivos), produtos de construções institucionais, busca-se aproximações com os vieses epistemológico, institucional e cognitivo atrelados aos tipos de tarefas estudadas neste curso experimental. Nesse sentido, inferimos que, ao analisar as particularidades das resoluções de cada atividade, essas dimensões serão manifestas, seja por meio da vertente epistemológica que se atrela ao objeto do saber em jogo, viabilizada ou não pelo aspecto institucional que se relaciona às praxeologias pessoais (CROSET, CHAACHOUA, 2016), gerando aproximações com a nuance cognitiva.

De forma mais específica, é viável vestir-se da metáfora ecológica ao supor que, ao colocarmos em funcionamento uma Organização Didática Híbrida – ODH emergente de condições propiciadas por mídias (MM, PL, GG), regido por estruturas que fornecem caminhos distintos na busca por soluções das questões apresentadas, além de propiciar um novo olhar acerca da organização de estudo, fabricada com a participação ativa dos estudantes, ao delinear seu meio de estudo. Assim, coloca-se em evidência a elaboração dos experimentos e análises deste trabalho seguindo o fluxo da atividade matemática, enquanto gestos didáticos²⁰⁴ ou gestos de estudos²⁰⁵, desenvolvida nos moldes do AHA, que revelam um novo sistema de interpretação

²⁰³ (...) objets qui donnent à connaître, font travailler, questionnent, etc., un ou des savoirs; elles sont donc produites au sein d’une institution. Cependant elles peuvent tout à fait avoir une utilité au sein d’une autre institution, même si ce n’est pas celle initialement envisagée par le concepteur.

²⁰⁴ The “something” that y does or intends to do is metaphorically called a didactic gesture and is part of the didactic as a whole. (CHEVALLARD, 2012, p. 174)

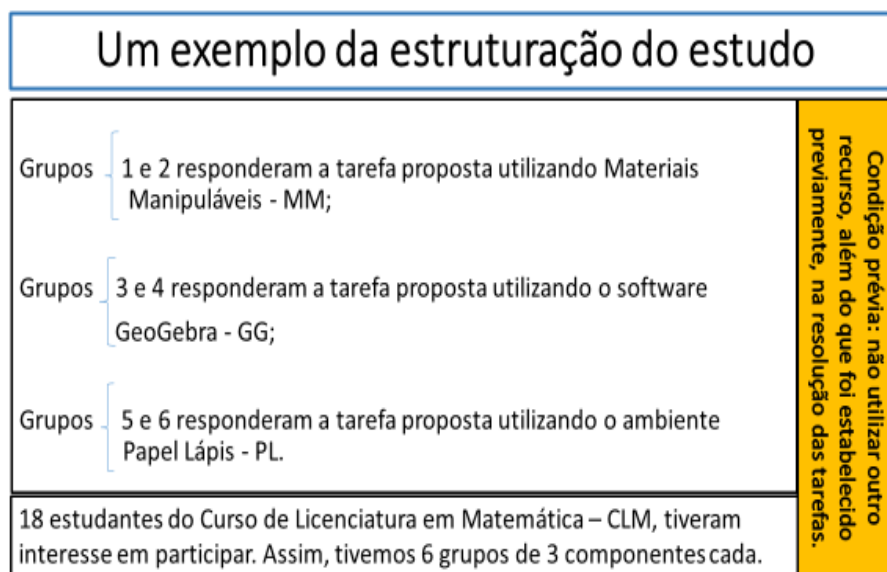
²⁰⁵ (...) um gesto didático é um gesto de estudo ou ajuda ao estudo. (CHEVALLARD, 2013, p.5, tradução nossa)

vetorial, por intermédio das condições circunstanciadas pelas *médias* nas produções de respostas R para questões Q propostas.

Essa fase foi realizada na Universidade Estadual de Feira de Santana, o público alvo foi composto por discentes do segundo semestre do CLM-UEFS, cursando a disciplina EXA 180 - Geometria Analítica e Álgebra Linear, os quais foram convidados a participar desta empreitada didática. Vinte vagas foram ofertadas, das quais dezoito foram preenchidas. Os encontros ocorreram no contra turno e, ao findar o curso, foi disponibilizado certificado que atestou 10 horas de atividades, as quais podem ser contabilizadas no Eixo das Atividade Complementares – EAC, de acordo com o Projeto Político Pedagógico - PPP (2018, p.43).

Dito isto, o cenário experimental emergiu ao disponibilizar, aos estudantes, tarefas vetoriais contextualizadas nos domínios Numérico, Algébrico e Geométrico – NAG (FARIAS, 2010), as quais foram solucionadas nos ambientes: Papel/ Lápis - PL; Material Manipuláveis – MM e o software GeoGebra – GG, estruturação exemplificada a seguir:

Figura 125 - Um exemplo da estruturação do curso



Fonte: acervo da autora (2020).

É relevante pontuar que ficou a cargo dos discentes a escolha dos Dispositivo Didático – DD que iriam trabalhar com cada questão. Contudo, nas resoluções seguintes, deveria ocorrer uma alternância entre os DD. Diante desse exemplo de formatação, percebemos traços e afinidades com mais uma das dialéticas ou “gesto de estudo e investigação” (CHEVALLARD, 2007, 2013), delineado por Costa, Arlego e Otero (2015) como:

Dialética do individual e do coletivo: é um processo que consiste no estudo coletivo da pergunta problemática levantada e, ao mesmo tempo, implica na distribuição de responsabilidades e nas atribuições de tarefas, para reinserir um processo coletivo, para dar uma resposta. Essa dialética desloca o "ator do estudo", passa do indivíduo para a comunidade. (COSTA, ARLEGO e OTERO, 2015, p. 148, tradução nossa²⁰⁶)

Essa perspectiva, suscita esforços que devem partir de cada sujeito²⁰⁷ do grupo com a intenção de alcançar uma resposta conjunta para tarefa proposta, o que supõe a implementação de técnicas, ou seja, “a escolha da técnica não surge: ou é dada ao aluno a possibilidade de reconhecer a especificidade da declaração da tarefa prescrita ou pelo contexto associado à tarefa que a técnica é induzida.” (CHAACHOUA, 2010, p.5, tradução nossa²⁰⁸)

Além da partilha de responsabilidades que procede desta dialética, deve-se ressaltar que “o estudo coletivo não deve ser confundido com o chamado *trabalho em grupo*, pois cada membro do grupo de estudo pode desenvolver estudos e investigações próprias, sem deixar de contribuir com o coletivo.” (SALGADO; OTERO, 2020, p.535, tradução nossa²⁰⁹).

A atuação dos estudantes na resolução das tarefas assumiu uma vertente cooperativa na ordenação das técnicas ou conjuntos de gestos específicos próprios de cada dispositivo. De acordo com Chevallard (1995), a posição p é caracterizada por um repertório de gestos, que o seu ocupante x , deve executar no domínio de um certo número de dispositivos, pois de acordo com Chevallard (1998):

As tarefas didáticas, de fato, são, em um certo número de contextos, cooperativas, no sentido de que devem ser realizadas em conjunto por várias pessoas x_1, \dots, x_n , os atores da tarefa. Diz-se que cada um dos atores x_i deve, nesse caso, realizar certos gestos, os quais constituem seu papel na realização da tarefa cooperativa t , sendo esses gestos diferenciados (segundo os atores) e coordenados entre si pela técnica τ implementada coletivamente. Alguns desses gestos serão considerados tarefas por si só, t' , cuja realização x_i atuará (momentaneamente) em relativa autonomia em comparação com os outros atores da tarefa. O conjunto dessas tarefas, um subconjunto da função de x_i quando t é realizado de acordo com τ , é chamado de topos de x_i em t . (CHEVALLARD, 1998, p.18, tradução nossa²¹⁰)

²⁰⁶ Dialéctica de lo individual y de lo colectivo: es un proceso que consiste en el estudio colectivo de la pregunta problemática que se ha planteado y a la vez en el reparto de las responsabilidades y de asignación de las tareas, para volver a incorporarse a un proceso colectivo, para dar una respuesta. Esta dialéctica desplaza el "actor del estudio," pasa del individuo a la comunidad.

²⁰⁷ Quando os indivíduos passam a ocupar tais posições, eles se tornam sujeitos das instituições - sujeitos ativos que contribuem para dar vida às instituições pelo próprio fato de estar assujeitados a elas. (CHEVALLARD, 1999, p. 4, tradução nossa)

²⁰⁸ Le choix de la technique ne se pose pas :soit on donne à l'élève la possibilité de reconnaître la spécificité de l'énoncé de la tâche prescrite soit par le contexte associé à la tâche que la technique est induite.

²⁰⁹ El estudio colectivo no debe confundirse con el llamado "trabajo en grupos". Cada miembro del grupo de estudio puede desarrollar un estudio e investigación, propios, pero sin dejar de contribuir al conjunto.

²¹⁰ Les tâches didactiques, en effet, sont, dans un certain nombre de contextes, coopératives, en ce sens qu'elles doivent être accomplies de concert par plusieurs personnes x_1, \dots, x_n , les acteurs de la tâche. On dira que chacun des acteurs x_i doit en ce cas effectuer certains gestes, dont l'ensemble constitue alors son rôle dans l'accomplissement de la tâche coopérative t , ces gestes étant à la fois différenciés (selon les acteurs) et coordonnés entre eux par la technique τ mise en œuvre collectivement. Certains de ces gestes seront regardés comme des tâches à part entière, t' , dans l'accomplissement desquelles x_i agit (momentanément) en autonomie relative par rapport

Essa vertente abriu novos caminhos de análises a partir dos diferentes encadeamentos de ações corporificadas por gestos, revelados no âmbito dos Dispositivos Didáticos (MM, PL, GG), os quais se integram ao processo das recombinações praxeológicas. Assim, sublinhamos acerca da existência da composição do saber - fazer na construção de soluções, com uma caracterização descritiva do complexo praxeológico que se forma a cada processo resolutivo.

Desse modo, na trajetória de estudo também foram contempladas as preferências, afinidades e consequentes escolhas realizadas pelos discentes ao resolver cada tarefa apresentada. Essa perspectiva propiciou congruência como uma das condições estabelecidas no estudo, a utilização de diferenciadas mídias. Todo o desenvolvimento do curso foi registrado por intermédio da coleta das produções dos estudantes, fotografias, áudio e vídeo, o que possibilitou analisar o sequenciamento das ações, (gestos, diálogos nas resoluções das questões, dentre outros), com intuito de descrever e compreender o cenário praxeológico que se formou em cada encontro.

Na condução deste processo, dotado de certa capacidade geradora que lhe outorga funcionar como um dispositivo de produção de tipos de tarefas, encontra-se o Gerador de Tipo de Tarefas – GT (CHAACHOUA, 2018), que dentre suas funções basilares está a produção de tipos de tarefas, regido e alimentado por distintas variáveis que assumem a esfera estrutural da modelação, associado ao papel de “ferramentas metodológicas em um processo de modelagem” (CHAACHOUA, 2018).

Nesses termos, concebemos que, a partir do funcionamento dos GTs, foram desencadeados transformações e desequilíbrios no Sistema Didático - SD, provocando novas organizações e reorganizações praxeológicas, pois segundo Chevallard et al. (2001, p.253), “organizar é criar uma praxeologia. Uma praxeologia nova ou renovada”, por meio da apresentação de um repertório de possibilidades, na execução das resoluções das tarefas, os quais foram dirigidos por distintas técnicas em sintonia com diversas variáveis, reguladas pelas escolhas e intenções de pesquisa.

Em complementação ao que foi dito anteriormente, concebe-se como consequência direta deste fenômeno, transformações nas instâncias do SD, no contexto da TAD, associadas às relações de um indivíduo x ou grupo de indivíduos X com determinada obra O . Ou seja, como já previamente apresentado neste texto, “a aprendizagem é uma modificação da relação de um indivíduo X com O , ou seja, essa relação começa “a existir” (se ela ainda não existia),

aux autres acteurs de la tâche. L'ensemble de ces tâches, sous-ensemble du rôle de x_i lorsque t est accomplie selon τ , est nommé alors le topos de x_i dans t .

ou essa relação é modificada (se ela já existia).” (CHAACHOUA; BITTAR, 2019, p. 31). Em sentido análogo, os encaminhamentos de Bosch e Chevallard (1999), sublinham que,

a realização de qualquer tarefa resulta da implementação de uma técnica. Mais uma vez, é necessário ouvir o termo técnica em um sentido muito amplo, como uma "maneira de fazer" particular, e não de acordo com o significado usual de um processo estruturado e metódico, algorítmico - que é apenas um caso muito particular de técnica. (BOSCH, CHEVALLARD, 1999, p.5, tradução nossa²¹¹)

Nesse sentido, os sujeitos da instituição CLM-UEFS ocuparam a posição de participantes proativos do “Curso um Estudo sobre Vetores”, os quais foram convidados a resolver tarefas vetoriais utilizando técnicas distintas das convencionais, no intuito de promover um distanciamento, mesmo que momentâneo, da execução de tarefas que são fragmentadas em subtarefas algoritmizadas, segundo os direcionamentos institucionais. O que provocou rompimentos no fenômeno geral de naturalização dos pares tarefas/técnicas, pois de acordo com Bosch e Chevallard (1999), o delineamento assumido pelo estudo rompe com o aspecto rotineiro das técnicas, visto que há um despertar para a criação de técnicas associadas aos Dispositivos Didáticos (MM, PL, GG), os quais também são organizados com mídias e/ou variáveis, a depender do contexto em conexão com as intenções de pesquisa.

Em complementação às características do AHA, integra-se a sua definição o fato de concebê-lo também enquanto aposta didática, o qual oferece um leque de possibilidades de estudo ao focar em determinado objeto O , a partir do repertório de recursos disponibilizados e reunião de obras O_b . Em outras palavras, se fornece distintos dispositivos para resolução das tarefas de certo tipo T , em que expecta a implementação de técnicas τ . Aspecto esse que comunga com a concepção de Chaachoua (2020, não paginado) no que se refere aos Dispositivos Didáticos: “composto de objetos identificáveis tendo uma materialização (tangível ou virtual), possuindo propriedades intrínsecas, de natureza física ou tecnológica”.

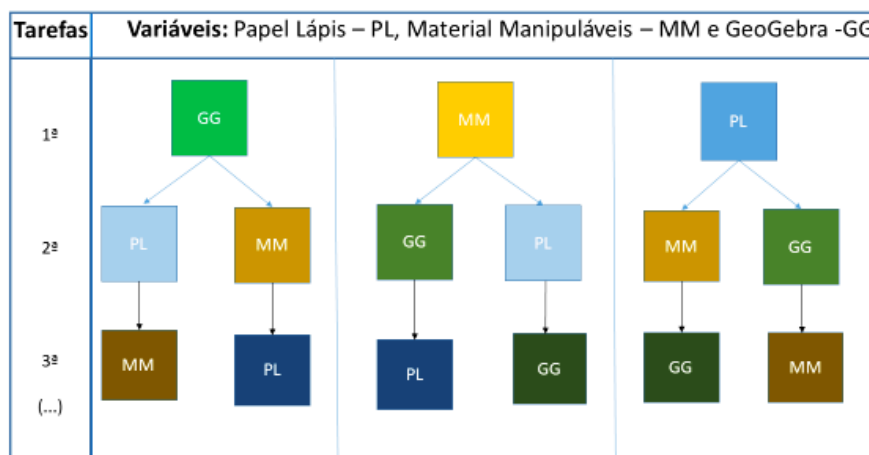
Como consequência desta concepção, mesmo diante do emprego rotineiro do ambiente Papel/Lápis – PL, em trajetórias resolutivas, faz-se emergir interações entre os Dispositivos Didáticos²¹², sejam o GeoGebra – GG, Materiais Manipuláveis – MM ou Papel/Lápis - PL. Nesse sentido, com o intuito de delinear mais uma característica do GT, descrevemos o desenho do arranjo das variáveis e suas possíveis ramificações. Nessa perspectiva, descrevemos o

²¹¹ L’accomplissement de toute tâche résulte de la mise en œuvre d’une technique. Là aussi il faut entendre le terme de technique en un sens très large, comme une « manière de faire » particulière, et non selon l’acception courante de procédé structuré et méthodique, voire algorithmique – ce qui n’est qu’un cas très particulier de technique.

²¹² Composto de objetos identificáveis tendo uma materialidade (tangível ou virtual). Eles possuem certas propriedades intrínsecas à natureza física ou tecnológica. (CHAACHOUA, 2020)

desenho do arranjo das variáveis $V_1 = \{GG, MM, PL\}$, em termos dos dispositivos, instaurado no curso com suas derivações e ramificações.

Figura 126 - Desenho dos arranjos das variáveis em termos dos Dispositivos Didáticos - DD



Fonte: acervo da autora (2020)

A imagem ilustra as primeiras opções das trajetórias resolutivas de cada tarefa apresentada aos estudantes. Nestes termos, pode-se interpretar que as duas primeiras linhas, associadas à primeira coluna, faz referência à 1ª questão, ou seja, temos: o grupo 1 e 2 utilizando o dispositivo de geometria dinâmica, software GeoGebra – GG. Contudo, na segunda, ocorre uma separação, projetando-os para caminhos resolutivos distintos, pois o grupo 1 preferiu resolver a próxima questão usando o dispositivo Papel Lápis –PL, enquanto o segundo grupo teceu sua resolução utilizando Materiais Manipuláveis – MM.

É relevante pontuar que, dentre as múltiplas funções, destacadas por Chaachoua e Bessot (2018), acerca das variáveis, esta investigação se identifica com dois aspectos:

- Distinguir diferentes significados do mesmo conhecimento, gerando situações diferentes do ponto de vista didático, mas equivalentes do ponto de vista do saber (aspecto epistemológico incluindo as razões de ser de um saber); (...)
- Estudar as condições de existência do conhecimento em certa realidade escolar e as razões para as dificuldades observadas. (BESSOT: CHAACHOUA, 2018, p. 120)

Admite-se como referência a realidade dos cenários construídos pelos estudantes do CLM no âmbito das resoluções de tarefas vetoriais, regidas por distintos Dispositivos Didáticos, dirigidas pelo Sistema de Variáveis – SV integrados aos Geradores e Sub-Geradores de Tarefas. A partir dessas indicações, é viável direcionar a atenção para as limitações no rol de técnicas, visto que o trabalho com distintos dispositivos franqueam caminhos para possíveis transformações e conseqüente ampliação no número de tarefas repercutindo nas técnicas, pois como indica Chevallard (1989), geralmente, nos limitamos a um pequeno número de técnicas,

também em paráfrase a Chevallard (1989), ao destacar que nas instituições existem um repertório reduzido de técnicas e, mesmo assim, as técnicas alternativas são excluídas ou posicionadas à margem do processo.

Em prol dessas técnicas alternativas, foram apresentadas tarefas para os estudantes que versavam em essência sobre os vetores, Organização Matemática - OM que segundo Costa, Arlego e Otero (2015, p.146), “proporciona aos alunos ferramentas básicas e indispensáveis para modelar matematicamente diversos eventos físicos”. Ressalte que, para além dos fenômenos físicos, o cálculo vetorial ou álgebra vetorial, em suas diferentes nuances, reverbera em outros domínios matemáticos.

Assim, a partir do desenho de diferentes cenários, é viável romper com o que é difundido no âmbito institucional. Dito de outra forma, como repercussão da emersão dessas técnicas alternativas, originárias das tarefas que foram trabalhadas pelos estudantes no trânsito entre cenários didáticos caracterizados por elementos intrínsecos a cada dispositivo, torna-se viável supor uma ruptura com o que é difundido no âmbito institucional, pois como já sinalizado por Chaachoua (2010), para um tipo de tarefa existem várias técnicas. Entretanto, a instituição, geralmente, organiza o estudo através de vários tipos de tarefas para as quais existe apenas uma técnica, ou seja, eles devem reconhecer a que tipo de tarefas pertence e quais técnicas são pertinentes utilizar para obter uma resposta aceita pela instituição ou não. Esta reflexão é complementada com a descrição de dois casos, que servem para exemplificar como os objetivos, princípios e metodologia foram implementados em processos didáticos com materiais tangíveis (MM) e não tangíveis (PL). Assentado nesse aspecto, descreveremos o trabalho desenvolvido no curso com as tarefas e os respectivos dispositivos MM, PL e GG.

A partir dessa configuração, sublinhamos que, no âmbito didático, a identificação e a análise das condições e restrições circundaram, por exemplo, os domínios geométricos e algébricos, os quais consistiram um pré-requisito na eleição e produção das questões. Vertente essa que confronta com um aspecto já pontuado por Artigue (1996, p.200) ao destacar que “o ensino habitual se centra no funcionamento do quadro algébrico. (...) estudar a viabilidade de uma abordagem epistemologicamente mais satisfatória, os constrangimentos que se opõem à extensão do ensino a outros quadros.”

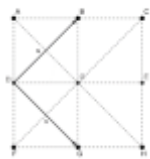
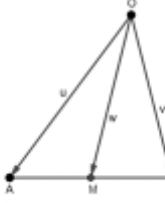
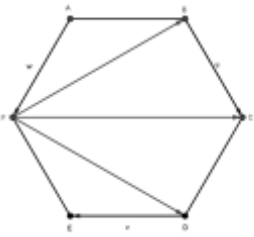
Em mesmo direcionamento, o estudo contempla, de forma explícita ou implícita, as dimensões: epistemológica (associada as características dos vetores), cognitiva vinculada ao público ao qual se dirigiu a proposta de trabalho, respaldada pelos princípios das praxeologias pessoais (CROSET; CHAACHOUA, 2016) e o âmbito didático relacionado ao funcionamento do sistema de ensino. Em sentido análogo, sublinha-se também que, as análises das concepções

dos estudantes, das dificuldades e dos erros foram propiciadas pela modelação da praxeologia pessoal (CROSET; CHAACHOUA, 2016).

7.2 ANÁLISES DAS RESOLUÇÕES DAS TAREFAS

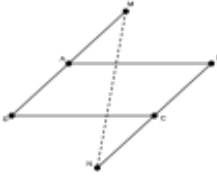
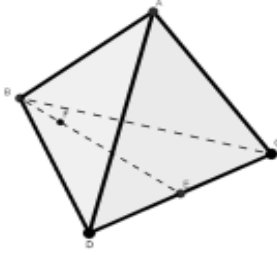
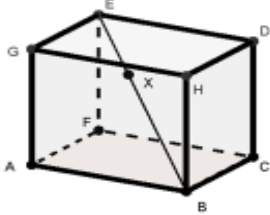
Primeiramente, ressalta-se que as questões escolhidas e trabalhadas no curso mobilizaram os domínios algébrico e geométrico. Assim, podemos tomar como referência a figura 78, onde exemplificamos um Gerador de Tipo de Tarefas e, dentre os valores das variáveis, temos: o tratamento V_1 que corresponde a v_4 – algébrico e v_5 – geométrico. A partir desse direcionamento, apresentamos as figuras 127 e 128.

Figura 127 - Tarefas associadas a vetores no plano

Tarefas		
<p>1) A figura é um quadrado onde B, D, E e G são pontos médios de seus lados. Sejam $\vec{u} = \vec{DB}$ e $\vec{v} = \vec{DG}$. Escreva os seguintes vetores em função de \vec{u} e \vec{v}: $\vec{GE}, \vec{EB}, \vec{DO}, \vec{BC}, \vec{FB}, \vec{AG}$ e \vec{AH}.</p> 	<p>2) No triângulo AOB, seja M o ponto médio de AB. Prove: $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$.</p> 	<p>3) No hexágono regular abaixo: $\vec{BC} = \vec{u}$, $\vec{DE} = \vec{v}$ e $\vec{AF} = \vec{w}$. Determine \vec{FB}, \vec{FC} e \vec{FD}.</p> 

Fonte: acervo da autora (2020).

Figura 128 - Tarefas associadas a vetores no plano e espaço

Tarefas		
<p>4) Na figura, ABCD é um paralelogramo e $AM = AD$, $CN = BC$. Se $\vec{AB} = \vec{a}$ e $\vec{BC} = \vec{b}$, então \vec{MN} será igual a:</p>  <p>a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $2\vec{a} + \vec{b}$ c) $\vec{a} + 2\vec{b}$ d) $3\vec{a} + \vec{b}$ e) $\vec{a} + 3\vec{b}$</p>	<p>5) No tetraedro ABCD, E é o ponto médio do segmento DC e F satisfaz $\vec{BF} = \frac{1}{4}\vec{BE}$. Suponha $\vec{a} = \vec{AB}$; $\vec{b} = \vec{AC}$ e $\vec{c} = \vec{AD}$. Obtenha \vec{AF} como combinação linear de \vec{a}, \vec{b} e \vec{c}.</p> 	<p>6) Dados $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$ e $\vec{CD} = \vec{c}$, determine, em função de \vec{a}, \vec{b} e \vec{c}, os vetores \vec{AX} e \vec{FX}, sabendo que $\vec{EX} = \frac{1}{4}\vec{EB}$.</p> 

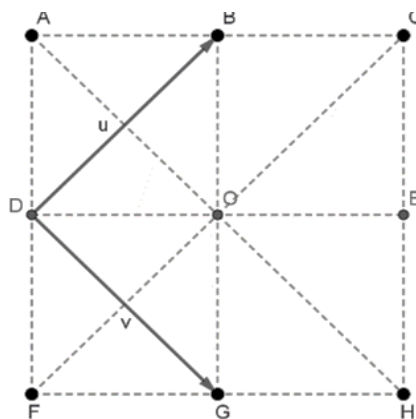
Fonte: acervo da autora (2020).

Neste curso, todas as tarefas advêm dos GTs que produzem tipos de tarefas que abordam: definição de vetor, operações com vetores e combinações lineares situadas no plano ou no espaço, temas com ampla empregabilidade e relevância não somente na Geometria Analítica como também em Álgebra Linear. A cada encontro foram trabalhadas duas questões, seguindo a ordem em que aparecem acima, os estudantes receberam uma folha com os enunciados das tarefas e as ferramentas correspondentes a mídia e/ou Dispositivo Didático (PL, MM, GG) escolhido pelos estudantes. No intuito de situar o leitor, intercalam-se as descrições e as análises das Organizações Didáticas – OD e Matemáticas - OM que emergiram no processo.

7.2.1 Descrição e análise da tarefa 1

A primeira questão apresentou em seu enunciado propriedades do quadrado, características de pontos médios, vetores, operações vetoriais e combinações lineares. Trata-se de um problema definido na esfera matemática e desejamos materializá-lo e resolvê-lo com o suporte representacional tangível, por exemplo. Na tarefa 1 foi solicitado: A figura é um quadrado onde B, D, E e G são pontos médios de seus lados. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{DB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{DG}$. Escrever os seguintes vetores em função de \vec{u} e \vec{v} : \overrightarrow{GE} , \overrightarrow{EB} , \overrightarrow{DO} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{FB} , \overrightarrow{AG} e \overrightarrow{AH} .

Figura 129 - Primeira tarefa do Curso um Estudo sobre os Vetores



Fonte: (MELLO e WATANABE, 2011, p.9).

O gerador que produziu esta tarefa tem o seguinte arranjo $GT_{t1} = [\text{Escrever}; \text{vetores em função de } \vec{u} \text{ e } \vec{v}; V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7]$, composto por um verbo de ação, complemento fixo e o sistema de variáveis, nesta ordem. As articulações entre os valores

assumidos pelas variáveis possibilitaram a elaboração de novas praxeologias didáticas administradas por gestos didáticos próprios de cada técnica. O quadro detalha os valores que cada variável pode assumir:

Quadro 27 - Valores das variáveis

<i>V₁- Dispositivos {GG, MM, PL};</i>
<i>V₂- Natureza de MM (canudos, elásticos, barbantes, EVA, dentre outros);</i>
<i>V₃- Instrumentos auxiliares agregados a MM (tesoura, cola, tachas, placa de isopor, etc.);</i>
<i>V₄- Menu do dispositivo ((barra de ferramentas, campo de entrada, ícones específicos, dentre outros);</i>
<i>V₅- Dispositivos móveis (notebook, celular, tablets);</i>
<i>V₆- Instrumentos disponíveis de PL (régua, esquadros, papel milimetrado, etc);</i>
<i>V₇- Configuração (plano, espaço, retangular, triangular, ...).</i>

Fonte: acervo da autora (2020)

Diante dos valores de V_1 e do GT_{t1} , no intuito de garantir maior especificidade, desmembramos em três Sub-Geradores de Tipo de Tarefas (KASPARY, 2020), que se relacionam aos dispositivos MM, PL e GG descritos como:

Quadro 28 - Sub-Geradores de Tipo de Tarefas

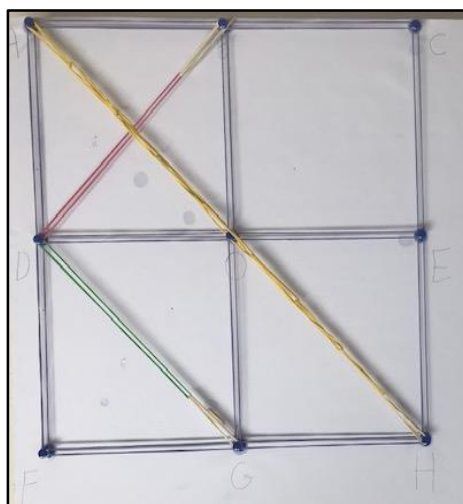
(1) $G'T_{t1(MM)} = [Escrever; \text{vetores em função de } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ em MM}; V_2, V_3]$
(2) $G'T_{t1(PL)} = [Escrever; \text{vetores em função de } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ em PL}; V_6, V_7]$
(3) $G'T_{t1(GG)} = [Escrever; \text{vetores em função de } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ em GG}; V_4, V_5]$

Fonte: acervo da autora (2020)

As produções dos estudantes serão apresentadas seguindo a ordem determinada acima. O primeiro Sub-Gerador de Tipo de Tarefas, produz tarefas no âmbito manipulável. Nessa perspectiva, apresentamos a produção do grupo 1. Ressalte que os componentes desta equipe tinham a sua disposição os seguintes materiais: elásticos coloridos, tachas, uma placa de isopor forrada, régua e lápis (elementos próprios do ambiente Papel Lápis - PL) e cola. Enquanto

construto tangível, expõem-se a “réplica” e reprodução da imagem que acompanha o enunciado da questão.

Figura 130 - Reprodução da figura 129 (grupo 1)



Fonte: acervo da autora (2020)

Discorreremos acerca desta produção, a qual corporifica²¹³ a representação gráfica que integra a primeira questão. Em sua construção, foi especificado o sentido dos vetores \vec{u} e \vec{v} , por meio dos elásticos na cor branca, além da diferenciação \vec{u} (representado pelo elástico vermelho) e \vec{v} (representado pelo elástico verde). A partir destas características, inferimos que os sujeitos estavam atentos à distinção entre os vetores \vec{u} e \vec{v} . É possível notar que os pontos A, B, C, D, E, F, G, H e O também foram nomeados e identificados na imagem por meio da marcação em PL.

Outra observação remete à representação do vetor \overrightarrow{AH} , o qual coincide com uma das diagonais do quadrado maior, materializado e concebido pelos membros deste grupo como um “encadeamento” entre elásticos amarelos. Dito de outra forma, os estudantes produziram uma técnica para solucionar a limitação da elasticidade deste elemento, ou seja, o comprimento do vetor \overrightarrow{AH} emergiu como um problema na elaboração deste modelo.

A tarefa proposta revela um progressivo grau de complexidade, o que demanda conexões entre as operações e propriedades na obtenção de \overrightarrow{FB} , \overrightarrow{AG} e \overrightarrow{OM} em função de \vec{u} e \vec{v} . Assim, identifica-se que o emprego dos materiais manipuláveis podem ser vistos como “parte

²¹³ Ver WATSON, A.; SPYROU, P.; TALL, D. (2003)

de um sistema que compreende elementos materiais ou simbólicos e regras de manipulação, dependendo do contexto da ação” (MATHÉ, 2012, p.197, tradução nossa²¹⁴).

Nesta etapa do processo, emergiram restrições impostas na manipulação material, fato esse que direcionou os sujeitos a considerarem o modelo manipulável como um elemento auxiliar, o que remonta a um alcance limitado dos ingredientes operacionais da técnica deste dispositivo, levando-os a transitar para outro dispositivo, neste caso PL. Aspecto esse que pode ser esclarecido no cerne do escopo da técnica o qual é caracterizado por,

(...) uma técnica - uma "maneira de fazer as coisas" - só tem sucesso em uma parte $P(\tau)$ das tarefas do tipo T às quais se referem ao chamamos de escopo da técnica: ela tende a falhar em $T \setminus P(\tau)$, de modo que podemos dizer que "não sabemos, em geral, como realizar tarefas do tipo T". (CHEVALLARD, 1999, p. 225, tradução nossa²¹⁵).

Dito de outra forma, essa definição sinaliza que, fora de seu alcance, uma técnica tende ao fracasso. Nestes termos, Kaspariy, Chaachoua e Bessot (2020) apresentam a seguinte interpretação:

1) uma técnica pode não ser aplicável fora de seu alcance; 2) uma técnica pode ser aplicada fora de seu alcance, mas com alto risco de falha. Essas duas possibilidades de interpretação nos levaram no T4TEL a definir escopo de uma técnica: o teórico e o pragmático. Nós complementamos com outro escopo, o escopo institucional, para dar conta das limitações específicas de uma instituição. (KASPARY; CHAACHOUA e BESSOT, 2020, p.246, tradução nossa²¹⁶)

As definições apresentadas pelos autores se articulam com os Dispositivos Didáticos (MM, PL, GG) empregados nessa experimentação. Seja pelo escopo teórico de uma técnica denotado como

(...) o conjunto de tarefas em que a técnica permite realizar qualquer tarefa deste conjunto sem nenhuma consideração das condições de sua execução, ou seja, examinamos esta técnica do ponto de vista epistemológico sem levar em conta o cognitivo e, portanto, o domínio de sua realização por um sujeito. Será denotado por $P_{Th(\tau)}$. (Ibid, 2020, p. 247, tradução nossa²¹⁷)

É inegável que as produções se vinculam, em sua grande maioria, às realizações no ambiente PL. Todavia, no escopo pragmático, Chevallard (1999) aponta para a relevância da

²¹⁴ partie constitutive d'un système comprenant des éléments matériels ou symboliques et des règles de manipulation dépendant du contexte de l'action.

²¹⁵ (...) une technique – une « manière de faire » – ne réussit que sur une partie $P(\tau)$ des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme portée de la technique: elle tend à échouer sur $T \setminus P(\tau)$, de sorte qu'on peut dire que « l'on ne sait pas, en général, accomplir les tâches du type T.

²¹⁶ 1) une technique peut ne pas s'appliquer hors de sa portée; 2) une technique peut s'appliquer hors de sa portée, mais avec un risque élevé d'échec. Ces deux possibilités d'interprétation nous ont conduit dans T4TEL à définir deux portées d'une technique: les portées théorique et pragmatique. Nous avons complété par une autre portée, la portée institutionnelle, pour rendre compte des limitations propres à une institution.

²¹⁷ (...) est l'ensemble des tâches où la technique permet d'accomplir une tâche quelconque de cet ensemble em dehors de toute considération des conditions de son exécution, c'est-à-dire qu'on examine cette technique d'un point de vue épistémologique sans prendre en compte le cognitif et donc la maîtrise de sa réalisation par un sujet. Elle sera notée $P_{Th(\tau)}$.

vida das praxeologias que se encontram no cerne das questões didáticas. Dessa forma, técnicas possibilitam que as “tarefas sejam realizadas com pouco risco de falha e a um custo razoável. A técnica tende a ter sucesso nessa faixa e inclina-se a falhar na parte externa. Denotado por $P(\tau)$ ” (Ibid, p.5). Essa vertente se aproxima dos traços inerentes aos dispositivos GG e MM. Já o “escopo institucional de uma técnica relativa a um tipo de tarefa T tido como o conjunto de tarefas onde esta técnica são esperadas por uma instituição. Este intervalo é uma consequência das condições e restrições da vida de τ em uma instituição, descrito por $PI(\tau)$ ” (Ibid, p.5).

Com referência aos dispositivos PL e GG, concebemos aproximações no âmbito do suporte operacional e nas maneiras de fazer e subsidiar as resoluções das tarefas. E por fim, e não menos importante, os autores sinalizam que a vertente cognitiva se insere no escopo pessoal, submetido aos escopos pragmático e institucional. Aspecto este que consideramos crucial no desenvolvimento deste cenário investigativo.

Imbrica-se a esta constatação, a força peculiar do contrato que ultrapassa a esfera didática e alcança o âmbito social. Esta interdependência emerge, visto que as situações didáticas estão contidas em situações sociais ($SD \subset SS$). Ponto de vista reforçado por uma das inúmeras definições, apresentadas por Chevallard, acerca da didática. “Existe didática em uma situação social quando observamos o que pode ser interpretado como uma intenção, realizada por uma pessoa ou por uma instituição, de empreender ações para que uma pessoa ou instituição aprenda algo.” (CHEVALLARD, 2013, p.3, tradução nossa²¹⁸).

Deve ser enfatizado que não temos como objetivo destacar um dispositivo em detrimento de outro, mas, parafraseando Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 82) propormos modificações no contrato didático, por meio da produção de situações vetoriais de ensino imersas em AHA, com a intenção de “fazer algo para provocar um agrupamento de encontros ou reencontros²¹⁹ o que equivale em criar condições.” (CHEVALLARD, 2013, p.6, tradução nossa²²⁰). Logo, infere-se que, ao transitar por distintos Dispositivos Didáticos, é possível delegar para os estudantes maior envolvimento e consequentes encontros com o objeto de estudo nas excursões das tarefas, assumindo uma postura procognitiva.

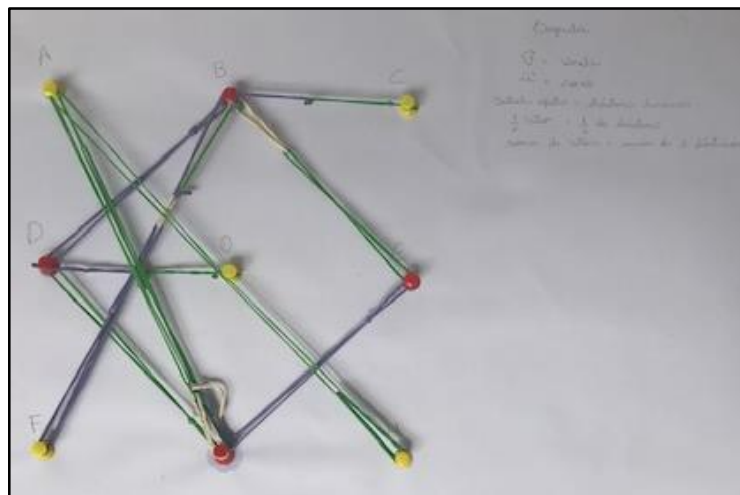
²¹⁸ Il y a du didactique dans une situation sociale lorsque s’y observe ce qui peut être interprété comme une intention, portée par une personne ou par une institution, de faire quelque chose pour qu’une personne ou une institution apprenne quelque chose.

²¹⁹ Em vez de aprender, dizemos com mais modéstia que nos encontramos; em vez de aprender, falaremos de encontro, para não esquecer a indeterminação irreduzível de que o uso do "aprendizado" mascara (CHEVALLARD, 2013, p.5)

²²⁰ "Fazer algo" para provocar criar condições de aprendizagem.

Quando direcionamos a atenção para a produção do grupo 2, nota-se que seguiu uma trajetória de resolução da primeira tarefa, distinta da equipe 1, como exibido na figura 131.

Figura 131 - Reprodução da figura 129 (grupo 2)



Fonte: acervo da autora (2020)

Discorremos acerca desta produção, a qual corporifica²²¹ a representação gráfica que integra a questão abordada. Nesse sentido, as recombinações praxeológicas envolveram “parte de um sistema que compreende elementos materiais ou simbólicos e regras de manipulação, dependendo do contexto da ação” (MATHÉ, 2012, p.197). Emerge uma primeira impressão, que nos leva a pensar, que as técnicas empregadas na resolução estão atreladas a um conceito prévio de desordem. No entanto, ao direcionar atenção para cada aspecto dessa produção, essa sensação se enfraquece e outros elementos afloram, por exemplo, as representações vetoriais foram construídas de acordo com o enunciado da tarefa. Outra vertente de destaque está na legenda criada por este grupo de estudantes:

- \vec{v} - verde;
- \vec{u} - roxo;
- sentido oposto: elástico branco;
- $\frac{1}{2}$ vetor corresponde $\frac{1}{2}$ elástico;
- soma de vetores mais de 2 elásticos.

Esse fato nos levou a supor que, diante da quantidade de informações, eles sentiram necessidade de especificar os caminhos trilhados em suas construções. Aspecto esse ratificado,

²²¹ Ver WATSON, A.; SPYROU, P.; TALL, D. (2003)

ao inter-relacionar a construção em MM e a legenda, o que tornou possível identificar que os sujeitos deste grupo produziram técnicas objetivando resolver a tarefa proposta. Visto que,

Se necessário, após um processo de estudo mais ou menos longo, pode se chegar a produzir técnicas que permitam fornecer respostas às perguntas inicialmente feitas. Um novo saber-fazer é construído, o qual deverá ser ainda organizado para lhe assegurar um funcionamento regular na instituição. (BOSH; CHEVALLARD, 1999, p. 6, tradução nossa²²²).

Esse fato repercutiu na implementação de técnicas resultantes da manipulação de objetos ostensivos (práxis manipuladora), neste caso MM, regulada por objetos não ostensivos (definições e propriedades vetoriais). Concepção essa, identificada nas variadas técnicas de resolução da tarefa, refletidas na análise praxeológica. Assim, retomamos as ferramentas de base da TAD, evidenciando as concepções que contemplam tarefas e técnicas, denominado por Chevallard (2013) como bloco do saber-fazer, que inaugura o complexo praxeológico. Em razão de,

admitimos que toda atividade humana pode ser analisada em uma sucessão de tarefas de tipos determinados. Se T é um tipo de tarefas, uma tarefa desse tipo, $t \in T$, é uma amostra do tipo de tarefa. A realização de uma tarefa t de um tipo T supõe a implementação de uma técnica (do grego *tekhnê*, know-how), denotado τ_T . O sistema formado pelo tipo de tarefas T e a técnica corresponde, $\Pi = [T/\tau]$, é chamado de bloco do saber-fazer ou bloco da práxis ou bloco prático.”(CHEVALLARD, 2013, p.5, tradução nossa²²³)

As concepções precedentes incidem, enquanto fundamentação da afirmação, que toda atividade humana pode ser modelada praxeologicamente, o que legitima a seguinte assertiva: “qualquer atividade humana pode ser descrita em aparência como uma manipulação de objetos ostensivos” (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p.11, tradução nossa²²⁴). Dito de outra forma, as praxeologias são compostas por objetos ostensivos e não ostensivos sem os quais as ações não se tornariam reais.

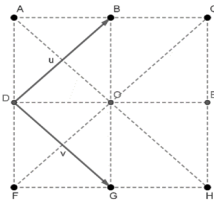
Esses autores também ressaltam que, no trabalho matemático, os elementos ostensivos integram o real, empírico e acessível aos sentidos. Assim, descrevemos a análise praxeológica em termos de tarefas T , técnicas τ pertencentes ao bloco prático, como fundamentação que advém do bloco teórico em termos de tecnologias θ e teorias Θ , como descrito a seguir:

²²² Le cas échéant, on arrive, après un processus d'étude plus ou moins long, à produire des techniques permettant de fournir des réponses aux questions initialement posées. Un nouveau « savoir-faire » est construit, que l'on doit encore organiser pour lui assurer un fonctionnement régulier dans l'institution.

²²³ On admet que toute activité humaine se laisse analyser en une succession de tâches de types déterminés. Si T est un type de tâches, une tâche de ce type, τ_T , est un spécimen du type de tâches. La réalisation d'une tâche t d'un type T suppose la mise en œuvre d'une technique (du grec *tekhnê*, savoir-faire), notée τ_T . Le système formé par le type de tâches T et la technique correspondante, $\Pi = [T/\tau]$, est appelé le bloc du savoir-faire ou bloc de la praxis ou bloc praxique.

²²⁴ Toute activité humaine se laisse décrire en apparence comme une manipulation d'objets ostensifs.

Quadro 29 - Descrição praxeológica referente ao bloco prático

Análise praxeológica - bloco prático (T/τ) – 1ª tarefa	
tarefas (t)	<p>A figura é um quadrado onde B, D, E e G são pontos médios de seus lados. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{DB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{DG}$. Escreva os seguintes vetores em função de \vec{u} e \vec{v}: \overrightarrow{GE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{AG} e \overrightarrow{AH}.</p> 
Técnicas (τ)	<p>1) Marcar os pontos A, B, C, D, E, F, G, H e O, sem uma ordem pré-definida;</p> <p>2) Fixar as tachas que representaram os pontos e que, posteriormente, serviram de sustentação para os elásticos;</p> <p>3) Identificar e representar os vetores \vec{u} (elástico verde) e \vec{v} (elástico roxo), de acordo com a legenda;</p> <p>4) O vetor \overrightarrow{GE} foi representado na mesma cor do vetor \vec{u}, isto é, \overrightarrow{GE} é um dos representantes de \vec{u};</p> <p>5) No caso do vetor \overrightarrow{EB}, o grupo utilizou o <i>elástico branco preso à extremidade do vetor</i>. De acordo com a legenda criada pelos estudantes, significa que \overrightarrow{EB} possui o sentido contrário de \vec{v};</p> <p>6) $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DG}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GE}) = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{u})$, como especificado na legenda $\frac{1}{2}$ vetor corresponde $\frac{1}{2}$ elástico;</p> <p>7) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DO}$, idem técnica empregada no item anterior;</p> <p>8) \overrightarrow{FB} é um vetor que não corresponde a uma das diagonais do quadrado ou um dos seus lados e também não é paralelos aos mesmos. Aspecto este, que exigiu dos sujeitos um repertório mais rebuscado de técnicas, resultando em $\overrightarrow{FB} = \frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$</p> <p>9) O vetor \overrightarrow{AG} também possui a característica (diagonal do retângulo) do item anterior, obtendo $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$. Neste momento, o uso do MM não foi suficiente para resolução da tarefa. Os discentes migraram para o ambiente PL. Nesta perspectiva, o MM assumiu a função de uma variável auxiliar ou coadjuvante na resolução deste item;</p> <p>10) \overrightarrow{AH} foi visualizado como múltiplo de \vec{v}, ou seja, $\overrightarrow{AH} = 2\vec{v}$. Neste caso, o material manipulável – MM cumpriu sua função, enquanto variável.</p>

A técnica vai depender do V_d escolhido.

Ao detalhar as técnicas, além dos conceitos e propriedades matemáticas, identifica-se, também, gestos didáticos enquanto ingredientes da técnica (CHAACHOUA, 2018), próprios do dispositivo MM, os quais surgem do leque de experiências ostensivas dependentes da natureza de que são compostos estes materiais, propiciando significados sensoriais muito diferentes, por exemplo, fixar as tachas, cortar elásticos, prender os elásticos, relacionar as cores dos elásticos às representações dos vetores, dentre outros, o que dialoga diretamente com a declaração de Chaachoua (2010),

A divisão em tipo de tarefas e subtipo de tarefas não é suficiente para descrever as praxeologias de um aluno. De fato, para uma determinada tarefa, abrangendo um tipo de tarefa institucional, os alunos podem implementar técnicas não esperadas por I válidas ou não matematicamente. (CHAACHOUA, 2010, p.7, tradução nossa²²⁵)

Esse aspecto atua de maneira combinada com a *Dialética Ostensivos e Não Ostensivos* (BOSCH, CHEVALLARD, 1999, p. 10, grifos nossos), que respalda a materialidade e consequente manipulação de objetos tangíveis presentes no dispositivo MM. Os quais são acessíveis aos sentidos, nesse caso específico, captados pela visão e dependente da manipulação e percepção tátil, desempenhando um papel privilegiado na resolução da tarefa. Os autores argumentam também que,

(...), note-se que, além de sua percepção, o que parece específico a objetos ostensivos é o fato de ser "manipulável" pelo sujeito humano: um som pode ser emitido (e recebido), um gráfico pode ser traçado (e interpretado), um gesto pode ser feito (e percebido), qualquer objeto material pode ser manipulado concretamente de várias maneiras. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 10, tradução nossa²²⁶)

Nesse sentido, entende-se que a dupla face destes elementos, está intimamente unida, caracterizando assim uma interdependência, pois “objetos ostensivos, embora diretamente acessível aos sentidos, não são um dado puro.” (BOSCH, CHEVALLARD, 1999, p. 12, tradução nossa²²⁷), já que não há ostensivo sem não ostensivo. Em perspectiva análoga, a implementação de técnicas tem implicações diretas no manuseio de objetos tangíveis regulada por objetos não tangíveis.

O que nos permite fazer certa analogia, oriunda da semiologia de Ferdinand de Saussure (2006), a qual se relaciona com a dialética tratada neste trecho, pois “o signo é designado como o total resultante da associação de um significante com um significado” (SAUSSURE, 2006,

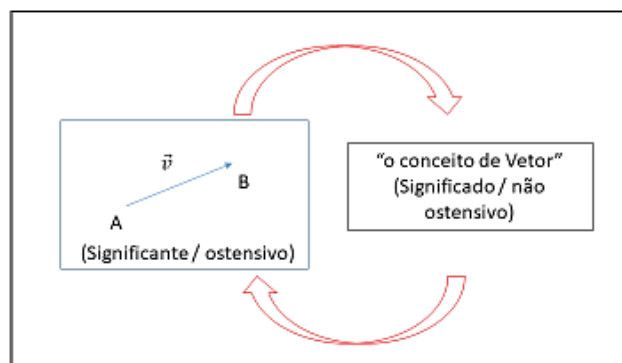
²²⁵ Le découpage en type de tâches et en sous-type de tâches n'est pas suffisant pour décrire les praxéologies d'un élève. En effet, pour une tâche donnée, relevant d'un type de tâche institutionnel, les élèves peuvent mettre en œuvre des techniques non attendues par I valides ou non mathématiquement.

²²⁶ Signalons en second lieu que, au-delà de leur perceptibilité, ce qui apparaît propre aux objets ostensifs est le fait d'être « manipulables » par le sujet humain: un son peut être émis (et reçu), un graphisme peut être tracé (et lu), un geste peut être fait (et perçu), un objet matériel quelconque peut être manipulé concrètement de diverses manières.

²²⁷ les objets ostensibles, bien que directement accessibles aux sens, ne sont pas des données pures

p.81). Essa definição suscita semelhanças entre ostensivos e não ostensivos, vinculados à atividade matemática, ao assumirem a função de significante e significado que integram o signo enquanto conceito, esquematizado na figura 132 a seguir:

Figura 132 - Semiologia e a Dialética de ostensivo não ostensivo



Fonte: acervo da autora (2020)

Assim, “postula-se o princípio de que, em toda atividade humana, há co-ativação de objetos ostensivos e não ostensivos” (BOSCH, CHEVALLARD, 1999, p.11). Em nosso caso, os elásticos co-ativaram, evocaram e assumiram um relevante papel na mobilização interpretativa dos vetores. Sem esquecer que, o acionamento de ostensivos e não ostensivos é identificado em todos os níveis da atividade, seja no bloco prático $[T/\tau]$ ou no bloco teórico $[\theta/\Theta]$.

Respaldo pelas ferramentas de base da abordagem antropológica, é possível reconhecer a importância em apresentar justificativas para as técnicas, empregadas na resolução da tarefa, função esta desempenhada pelo bloco do saber. Como sublinhou Chevallard (2013):

Na realidade antropológica, também observamos a existência de um discurso muitas vezes incompleto, mesmo implícito em grande parte para justificar a técnica τ , torná-la inteligível e, em alguns casos, permitir produzi-la ou reconstruí-la: esse discurso sobre a técnica é chamado de *tecnologia* da técnica τ denotado por θ .

A tecnologia θ , por sua vez, exige um discurso que justifique certos aspectos não justificados, fixa seu significado e muitas vezes permite sua produção: a *teoria* Θ da técnica τ . O sistema formado pela tecnologia θ e pela teoria Θ , se $\Lambda = [\theta/\Theta]$, é denominado bloco de saber ou bloco de logos ou bloco gnóstico (para evitar o adjetivo lógico, que em francês assumiu um significado mais específico). (CHEVALLARD, 2013, p.5, tradução nossa²²⁸)

²²⁸ Dans la réalité anthropologique, on observe en outre l'existence d'un discours souvent lacunaire, voire largement implicite pour justifier la technique τ , la rendre intelligible et, dans certains cas, permettre de la produire ou de la reconstituer : ce discours sur la technique est appelé la technologie de la technique τ et est noté θ . La technologie θ appelle à son tour un discours qui en justifie certains aspects non autojustifiés, en fixe le sens et en permette souvent la production : la théorie Θ de la technique τ . Le système formé par la technologie θ et la théorie Θ , soit $\Lambda = [\theta/\Theta]$, est appelé le bloc du savoir ou bloc du logos ou bloc gnosique (pour éviter l'adjectif logique, qui en français a repris un sens plus particulier).

Em sintonia com essa concepção, é viável focar que a partir da abordagem de Bosch e Chevallard (1999), existem inter-relações entre o discurso tecnológico e a co-ativação de ostensivos, pois,

todo discurso tecnológico é realizado concretamente pela manipulação de objetos ostensivos, em particular discursivo e escrito, que permitem materializar explicações e justificativas necessárias para o desenvolvimento da tarefa; e é o mesmo, claro, do nível teórico. Como dissemos acima, a co-ativação de ostensivo e não ostensivo é um postulado geral que afeta todos os níveis de atividade. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p.13, tradução nossa²²⁹)

Nestes termos, concebe-se uma estrutura ostensiva e não ostensiva que ampara e fundamenta as tarefas reveladas associadas às técnicas aplicadas no curso do trabalho desenvolvido, exposto esquematicamente a seguir:

Quadro 30 - Descrição praxeológica referente ao bloco teórico (continua)

Análise praxeológica - bloco teórico (θ/θ) – 1ª tarefa	
<p>Tecnologias (θ)</p>	<p>Vincula-se às características do quadrado (polígono regular):</p> <ul style="list-style-type: none"> • Quatro lados congruentes e lados opostos paralelos; • Quatro ângulos retos; • Diagonais são perpendiculares, além de serem congruentes e se interceptarem no ponto médio; • As linhas diagonais são bissetrizes dos correspondentes ângulos retos. <ul style="list-style-type: none"> • Relação de equivalência (equipolência) entre segmentos e igualdade entre vetores; • Operações entre vetores: adição, subtração e multiplicação por escalar; • Combinação linear.
Teorias ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$)	Geometria Plana, Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Fonte: acervo da autora (2020)

²²⁹ Or tout discours technologique se réalise concrètement par la manipulation d’objets ostensifs, en particulier discursifs et écrits, qui permettent de matérialiser les explications et justifications nécessaires au développement de la tâche; et il en est de même, bien sûr, du niveau théorique. Comme nous l’avons dit plus haut, la co-activation d’ostensifs et de non-ostensifs est un postulat général qui affecte tous les niveaux de l’activité

Com base na caracterização de uma pluralidade de registros ostensivos (oral, escrito, gráfico, gestual ou material), percebe-se que existe um gerenciamento de ações, gestos didáticos, subjacentes imersos no trabalho resolutivo de tarefas. O que significa dizer que, “na realização concreta da atividade matemática, os complexos de objetos ostensivos ativados são distribuídos entre estes vários registros, sem que seja possível ver um ou mais deles a funcionar independentemente dos outros.” (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 14, tradução nossa²³⁰).

Em mais uma amostra de subdivisão do GT_{t1} , desvelamos o $G'T_{t1(PL)} = [Escrever; vetores em função de \vec{u} e \vec{v} em PL; V_6, V_7]$. A variável que comandou esse $G'T_{t1(PL)}$ foram os instrumentos associados ao dispositivo Papel Lápis – PL, sendo disponibilizados aos discentes que optaram por trabalhar neste ambiente: folhas de papel ofício, lápis, borrachas e réguas.

Antes de retratar a situação em si, exhibe-se, primeiramente, um comparativo entre os dispositivos MM e PL. Dessa forma, percebe-se que os estudantes, os quais elegeram o MM enquanto dispositivo para resolução da primeira tarefa, solucionaram cada item da questão conjuntamente, ou seja, as tentativas e as discussões giravam em torno do seguinte questionamento: qual seria a melhor forma (técnica) de cumprir o que lhes fora solicitado utilizando MM? Uma vez que, hipoteticamente, o desafio de resolver a tarefa por meio de matérias manipuláveis é algo novo no âmbito do CLM-UEFS.

Ao considerar os escritos de Chevallard (2012), pode-se levantar a suposição que relaciona esse cenário às disposições evocadas e condicionadas ao saber (vetor) numa vertente concreta e conseqüentemente manipulável. Enfoque este que pode ser traduzido em “quais condições podem X e Y criar ou modificar, isto é, que gestos didáticos eles podem fazer para que X possa alcançar alguma relação determinada com O?” (CHEVALLARD, 2012, p.174). Apresenta-se como resposta a este questionamento a materialização do AHA, que se coloca enquanto condição para impulsionar mudanças no Sistema Didático- SD que se desenharam neste curso.

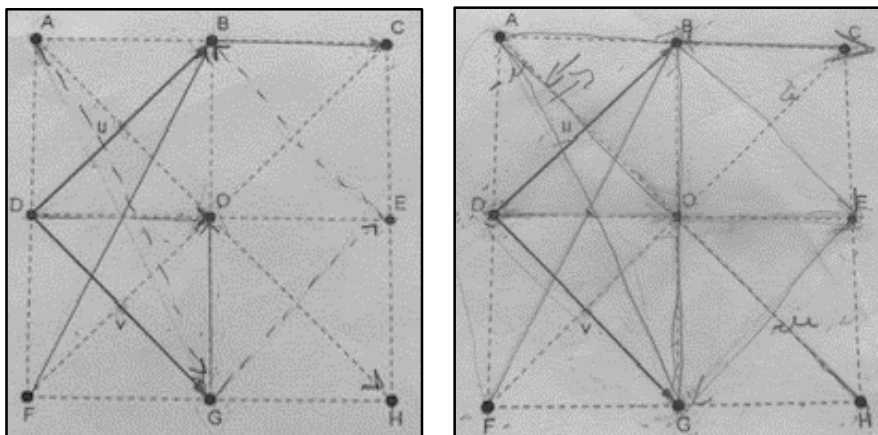
Dito isto, uma Organização Didática - OD é posta em execução a partir do AHA que alimenta os GTs que são nutridos pelos dispositivos que assumem sua função por meio das tarefas postas em jogo. Infere-se, então, que o GT_{t1} , assim como os demais GTs que integram

²³⁰ Dans la réalisation concrète de l'activité mathématique, les complexes d'objets ostensifs activés se distribuent entre ces divers registres, sans que l'on puisse voir fonctionner généralement un et un seul d'entre eux de manière autonome par rapport aux autres.

o estudo, assume a função de uma interpretação metafórica de que os geradores atuam como uma “máquina” que produz tarefas, no qual o Ambiente Híbrido de Aprendizagem - AHA fornecerá “combustível” para o funcionamento operacional em interação com as mídias, nos moldes da Dialética Media Milieu (CHEVALLARD, 2007), regulados pelos valores das variáveis inerentes à natureza de cada Dispositivo Didático. Em decorrência dessa estrutura, os discentes criaram e disponibilizaram técnicas resolutivas legitimadas por certas tecnologias. Por exemplo, no campo dos manipuláveis, esses elementos se interligam à Organização Matemática - OM por intermédio do domínio geométrico.

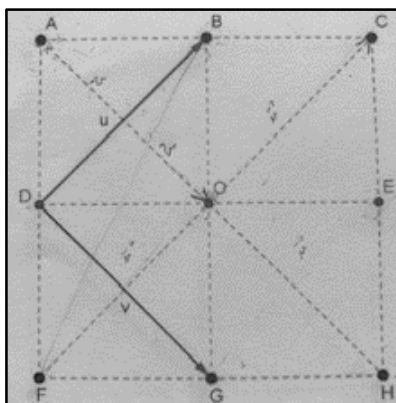
Prossegue-se com a reflexão, ao deduzir que os discentes, os quais optaram pelo dispositivo habitual PL, revelaram o predomínio de uma vertente individual, em contraposição ao desenvolvimento de um estudo coletivo, ou seja, pensava-se e registrava-se em atos solitários, para só então ocorrer uma socialização. Assim, foram evidenciados traços da dialética do individual e do coletivo (COSTA, ARLEGO E OTERO, 2015) citada anteriormente. Este enfoque também é revelado nas produções individuais, a seguir:

Figura 133 - Produções individuais da figura 129 (grupo 5)



Fonte: acervo da autora (2020)

Figura 134 - Produção individual da figura 129 (grupo 6)



Fonte: acervo da autora (2020)

Nas imagens exibidas na figura 133, é possível identificar conexões entre a imagem indicada na figura 131, o que nos permite inferir acerca da existência de *vínculos praxeológicos*²³¹ entre os referidos dispositivos. A título de exemplo, pode-se citar o quadrado gerado a partir dos pontos D, G, E e B inscrito no quadrado maior. Esse aspecto se fez presente em construções realizadas em ambos dispositivos e fomentou reflexões acerca da relação de equipolência²³², visto que um “vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados” (LORETO e LORETO JÚNIOR, 2014, p.4), em que se manifestam as características: módulo, direção e sentido.

É possível perceber que, no trabalho desenvolvido no ambiente PL, no que tange a representação gráfica do quadrado e seus respectivos componentes, o caráter ostensivo assume uma posição de destaque, perspectiva também detectada nas construções com recursos manipuláveis. A concepção de Mathé (2012) comunga com esta perspectiva, ao revelar a dicotomia entre duas dimensões, tidas como bússola para análises no âmbito geométrico.

A parte tangível das modalidades de interação dos alunos com os objetos materiais da situação admite, em minha opinião, duas dimensões: uma dimensão material, relativa às modalidades de ação material dos alunos (seu modo de uso dos instrumentos, seu método classificação de sólidos, método de construção de figuras) e dimensão da linguagem, referente à maneira pela qual os alunos designam os objetos e ao significado que atribuem aos termos utilizados. (MATHÉ, 2012, p. 199, tradução nossa²³³)

²³¹ Concebe-se que os vínculos praxeológicos ocorrem quando percebemos semelhanças entre itens do complexo de praxeologias empreendidas na resolução de determinada tarefa.

²³² Dois segmentos orientados não nulos são equipolentes se, e somente se, eles tiverem mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. (MELLO e WATANABE, 2011, p.3)

²³³ La partie tangible des modalités d’interaction des élèves avec les objets matériels de la situation admet, à mon sens, deux dimensions: une dimension matérielle, relative aux modalités d’action matérielle des élèves (leur mode d’usage des instruments, leur méthode de classement de solides, leur méthode de construction de figures), et une dimension langagière, relevant de la façon dont les élèves désignent les objets et la signification qu’ils assignent aux termes employés.

É relevante destacar que os elementos convocados para ação, interação e registros de gestos, diferem da predominância de técnicas que giram em torno dos representantes de \vec{u} e \vec{v} caracterizados por setas com comprimento, direção e sentido definidos.

A partir desse ponto de vista, é viável estabelecer “links” entre eles, já que identificamos efeitos similares nos traçados advindos de PL e nas produções de natureza tangíveis de MM. Alinhado às nossas interpretações, percebe-se ligações entre o uso dos dois dispositivos, agregado aos potenciais de tradução da noção de classe de equivalência próprias da esfera tecnológica-teórica (θ/Θ), em acordo com as representações simbólicas equivalentes pertencentes à esfera perceptual e gráfica contidas no bloco prático (T/τ).

Nestes termos, Gray e Tall (2001) defendem que, “um objeto corporificado é, como na geometria e nos gráficos que começam com fundamentos físicos e desenvolvem continuamente imagens mentais mais abstratas através do uso sutil da hierarquia da linguagem.” (GRAY e TALL, 2001, p.70, tradução nossa²³⁴).

No entanto, no terreno teórico da TAD, especificamente no âmbito da dialética dos ostensivos e não ostensivos, os representantes dos vetores foram traçados e marcados, exercendo certa materialidade. Os discentes (protagonistas dos Sistemas Didáticos Auxiliares - SDA ou de Sistemas Didáticos Induzidos – SDI)²³⁵ manipularam, gesticularam, discutiram por meio de registros orais e escritos. Contudo, não se pode desprezar que todas essas ações não anulam o vazio que circunda o objeto de estudo:

Os atores que manipulam certos gráficos, fazendo certos gestos e pronunciando certas frases - em um discurso oral ou escrito. Mas nunca colocaremos nossas mãos no objeto em si. Quando se pesquisa o que pode ser tal objeto, se descobre que ele é composto de outros objetos, de natureza sempre material, em particular sonora (discursiva) gestual, de caráter escrito (gráfico) e de muito “vazio” em torno. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p.8, tradução nossa²³⁶)

Essa vertente compartilha da mesma concepção defendida por (FARIAS et al., 2018), acerca do fenômeno da Incompletude da Atividade Matemática Institucional –IAMI, o qual pode gerar interferências nas praxeologias de tal modo que os sujeitos desenvolvam o saber-fazer, mas não o compreenda. Esse aspecto conecta-se com um dos interesses da pesquisa ao

²³⁴ One is the embodied object, as in geometry and graphs that begin with physical foundations and steadily develop more abstract mental pictures through the subtle hierarchical use of language.

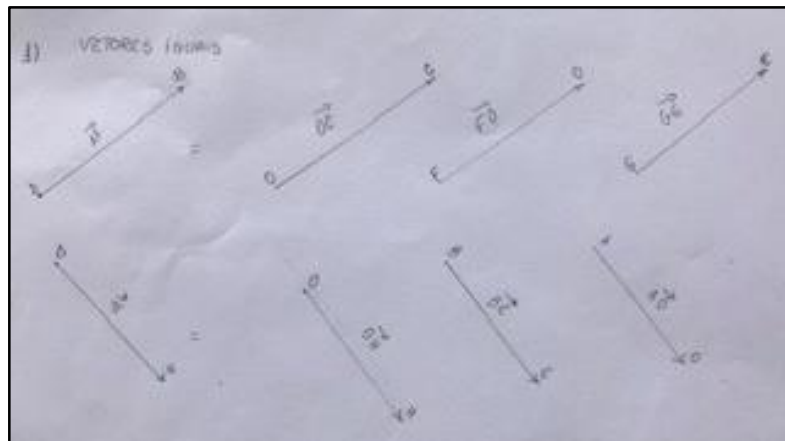
²³⁵ Ver Chevallard (2011)

²³⁶ des acteurs qui manipulent certains graphismes, en faisant certains gestes et en prononçant certaines phrases – en un discours oral ou écrit. Mais on ne mettra jamais la main sur l’objet lui-même. Ainsi donc, quand on cherche ce que peut-être un tel objet, on découvre qu’il se compose d’autres objets, de nature toujours matérielle, en particulier sonore (discursive), gestuelle, scripturale (graphique), et de beaucoup de « vide » autour.

contemplar não somente o resultado do processo, mas os passos específicos realizados em cada ato particular pertencente às etapas construtivas existentes na resolução de cada questão.

No cerne das ações que integram os processos resolutivos da referida questão, se manifestam traços das praxeologias pessoais (CHAACHOUA, 2011; CROSET; CHAACHOUA, 2016), as quais se agregam ao repertório de técnicas empregadas nas resoluções de tarefas vetoriais tornando viável ofertar aos estudantes possibilidades de trilhar por distintos Caminhos de Práticas Pessoais – CPP. Como evidenciado na figura 135, em que a técnica empregada descreve todos os representantes de \vec{u} e \vec{v} associada à figura 129 que acompanha a tarefa. Como revelado a seguir:

Figura 135 - Representantes dos vetores \vec{u} e \vec{v} (grupo 5)

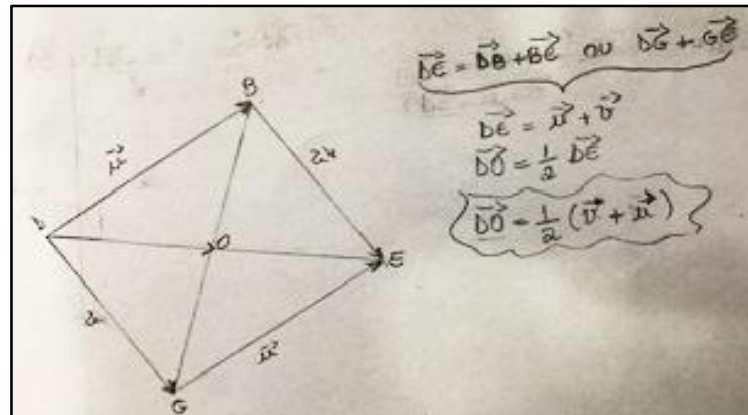


Fonte: acervo da autora (2020)

A partir desse recorte praxeológico, pode-se constatar que a técnica (τ) utilizada é justificada pelo discurso tecnológico (θ), que define um vetor determinado por um segmento orientado AB como “o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes à AB . Se indicarmos por \vec{v} este conjunto, simbolicamente poderemos escrever: $\vec{v} = \{XY/XY \sim AB\}$ onde XY é um segmento qualquer do conjunto.” (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p.4).

Sistematicamente, um dos estudantes deste grupo optou por apresentar todos os representantes de \vec{u} e \vec{v} , mesmo sem ter sido demandado no enunciado da questão, ou seja, técnicas que possibilitaram constatar que $\overrightarrow{GE} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{EB} = -\vec{v}$. Nesse sentido, concebemos que esses aspectos retratam características do CPP. Outro elemento que merece destaque é a associação representativa dos vetores enquanto setas. A respeito disso, ressalta-se a premência em especificar as peculiaridades: comprimento, direção e sentido. Esse fato, se repete ao determinar o vetor \overrightarrow{DO} em função de \vec{u} e \vec{v} .

Figura 136 - \overrightarrow{DO} em função de \vec{u} e \vec{v} (grupo 5)

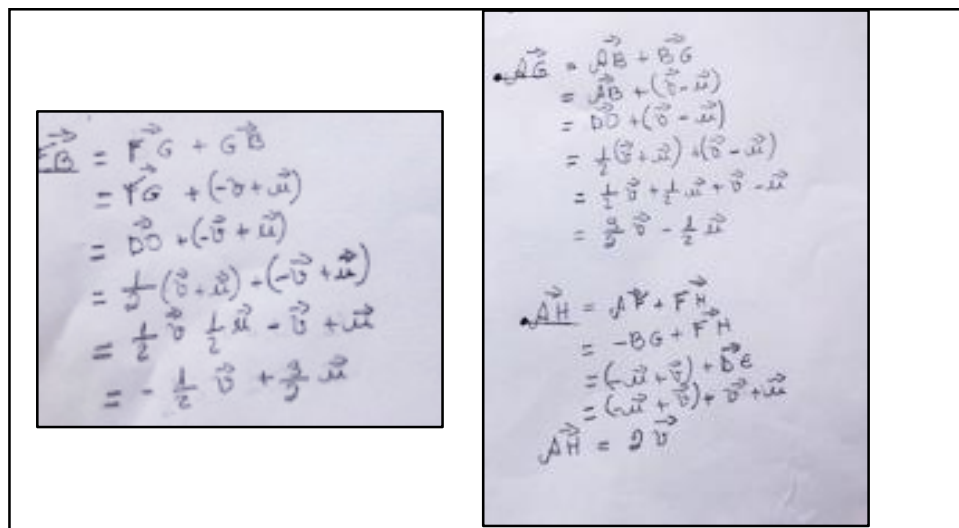


Fonte: acervo da autora (2020)

Duas possibilidades de resolução são apresentadas, com custos equivalentes no que tange ao escopo das técnicas. A interligação entre a representação gráfica e a escrita como combinação linear entre \vec{u} e \vec{v} impõe-se com força na prática destes sujeitos. Dessarte, ao transitar entre Dispositivos Didáticos MM, PL e GG, o meio é enriquecido para produzir e gerar respostas.

O trabalho de determinação dos vetores \overrightarrow{FB} , \overrightarrow{AG} e \overrightarrow{AH} , por meio das combinações lineares oriundas de \vec{u} e \vec{v} exigiu dos sujeitos efetuar algumas associações e manobras, visto que as respostas não podiam ser encontradas de imediato. Fato que nos permite pensar no sentido de Cirade e Matheron (1998), ao conceberem a decomposição de uma tarefa T em subtarefas, ou seja, a técnica é descrita por uma sequência de tipos de tarefas.

Figura 137 - \overrightarrow{AF} , \overrightarrow{AG} e \overrightarrow{AH} em função de \vec{u} e \vec{v} (grupo 6)



Fonte: acervo da autora (2020)

Enquanto sub-tarefas podemos identificar:

- Considerar \overrightarrow{FB} , \overrightarrow{AG} e \overrightarrow{AH} como resultantes de somas vetoriais;
- Escrever estas somas em função de \vec{u} e \vec{v} ;
- Efetuar a multiplicação de vetor por um escalar;
- Agrupar e operar os termos semelhantes empregando as propriedades: associativa, comutativa, elemento neutro, elemento oposto e distributiva.

Cirade e Matheron (1998) também acrescentam que essa divisão pode ser caracterizada como um modelo, cujo objetivo é destacar a organização matemática e avaliá-la. Assim, ao realizar a subdivisão de tarefas, é possível perceber com maior precisão os elementos que integram as praxeologias pessoais (CROSET; CHAACHOUA, 2016), o que permite uma análise mais detalhada das organizações matemáticas envolvidas na resolução da questão. Segundo Chaachoua (2010),

o interesse nessa divisão: refere-se às tarefas reconhecidas institucionalmente e, para cada uma delas, existe uma praxeologia matemática que foi criada anteriormente e, portanto, permite melhor situar as dificuldades dos alunos na implementação de uma técnica no nível das subtarefas que compõem a técnica. (CHAACHOUA, 2010, p.6, tradução nossa²³⁷)

Em mesmo direcionamento, se ordena num recorte do modelo praxeológico, em que t_1, t_2, t_3 e t_4 pertencem a T (Quadro 30).

Quadro 31 - Descrição do complexo praxeológico vinculado a figura 137 (continua)

Sub- tarefas (t_1, \dots, t_4)	Técnicas (τ_1, \dots, τ_9)	Tecnologias ($\theta_1, \dots, \theta_9$)	Teorias (Θ_1 e Θ_2)
Determinar \overrightarrow{FB} , \overrightarrow{AG} e \overrightarrow{AH} como resultantes de somas vetoriais;	Para determinar os vetores soma, aplicou-se a regra “fechar o triângulo”, tomando o cuidado de escolher a origem do segundo coincidindo com a	Regra do polígono ²³⁸	Geometria Analítica e Álgebra Linear

²³⁷ intérêt pour cette division: elle se réfère à des tâches institutionnellement reconnues et, pour chacune d'entre elles, il existe une praxéologie mathématique qui a été créée précédemment et, donc, permet de mieux situer les difficultés des élèves à mettre en œuvre " une technique au niveau des sous-tâches qui inventer la technique.

²³⁸ Significa fazer coincidir a extremidade de um vetor (a ponta da seta) com a origem do outro. O vetor soma também chamado vetor resultante, será o vetor que une a origem do primeiro com a extremidade do último,

t_1		extremidade do primeiro representante. (OLIVEIRA e BOULOS, 1987, p.7)		
t_2	Escrever estas somas em função de \vec{u} e \vec{v} ;	Realizaram associações entre os representantes dos vetores obtidos em t_1 com representantes de \vec{u} e \vec{v} .	Definição de vetor e combinação linear.	Geometria Analítica e Álgebra Linear
t_3	Efetuar a multiplicação de vetor por um número real;	Calcularam multiplicações de número real por vetor: $-\vec{u}$, $-\vec{v}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$, $\frac{1}{2}\vec{v}$, $\frac{3}{2}\vec{u}$, $\frac{3}{2}\vec{v}$ e $2\vec{v}$.	Produto de vetores por escalares.	
t_4	Agrupar e operar os termos semelhantes.	Identificaram vetores semelhantes, agrupou-os e operacionalizou-os aplicando uma sequência de propriedades.	Propriedades vinculadas a adição de vetores: comutativa, associativa, elemento neutro, elemento oposto, específica de cada item. Assim, como a propriedade distributiva associada a multiplicação de vetores por escalares.	

Fonte: acervo da autora (2020)

A escrita das respostas e a integração das técnicas são resultantes dos registros gráficos revelados nas figuras 136 e 137. Contudo, é relevante destacar que, “escrever, embora dominante, não é o único registro ativado: existe também, por um lado, a realização de um discurso interior, às vezes silencioso, mas essencial no decorrer da tarefa” (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p.16, tradução nossa²³⁹), o que caracteriza a esfera não ostensiva.

A partir desse direcionamento, são notadas por meio dos GTs, prescrições que expõem as naturezas desses discursos inerentes aos tipos de tarefas. Assim, o $G'T_{t1GG} = [\text{Escrever}; \text{vetores em função de } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ em } GG; V_4 \text{ e } V_5]$, em que o software GeoGebra se integra ao complemento da tarefa regido pelos valores das variáveis V_4 e V_5 . Nesta

formando assim um polígono. Santos (1979, p.3) pontuou que esta definição é motivada pela composição de forças em mecânica.

²³⁹ Remarquons ici que l'écrit, bien que dominant, n'est pas le seul registre activé: il y a aussi, d'une part, la réalisation d'un discours intérieur, parfois silencieux mais indispensable au déroulement de la tâche.

etapa, foram disponibilizados: computador, com software instalado, e a folha que continha os dados da questão. Contudo, como previsto nas análises a priori, surgiram alguns elementos limitadores, dentre eles podemos citar a falta de familiaridade dos sujeitos com software.

No intuito de mitigar essa restrição, foi disponibilizado aos discentes material que tratou, de forma condensada, dos conceitos e funções basilares do software, aditado a algumas explicações que contemplaram exemplificações práticas de como operar o conjunto de comandos acessíveis, sendo esses intermediados pelas funções e ícones contido na barra de ferramenta.

Ao revisitar o Projeto Político Pedagógico do CLM – UEFS, encontramos uma justificativa que respalda a ausência de relações pessoais com o software $R_I(p, O) = \emptyset$. Dito de outra forma, a vertente dicotômica entre condições e restrições se fez presente por meio da ausência de relações prévias com o software, repercutindo nos primeiros momentos do trabalho e, por consequência, as ações foram afetadas, provocando lentidão na resolução da questão, uma vez que os estudantes não dispunham do domínio exigido para operar o GeoGebra.

Esse aspecto se justifica pela estruturação revelada neste documento, visto que os estudos de softwares educativos serão contemplados na disciplina EXA 892 Softwares Matemáticos, componente que compõe a grade curricular do sexto semestre do curso. Ou seja, sinalizamos que esta disciplina poderia ser deslocada para os primeiros semestres do CLM-UEFS, oportunizando aos docentes a inserção no planejamento de suas aulas o suporte da ferramenta informática.

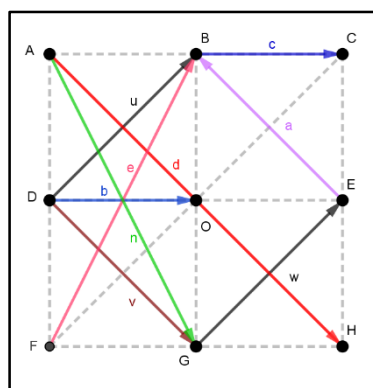
Ao sair do estágio de $R_I(p, O) = \emptyset$ para a inauguração de $R_I(p, O) \neq \emptyset$, no âmbito do ambiente informático, os estudantes puderam perceber que ao utilizar a mesma tela, obtém-se as representações vetoriais nos domínios algébrico (Janela de Álgebra), geométrico (Janela de Visualização), além da possibilidade de comandos por meio da Caixa de Entrada. Mesmo diante dessa ausência de intimidade com o software, o que descreve um obstáculo de cunho didático operacional, uma solução preambular da tarefa 1, foi exibida pela equipe de número 4.

Alguns ingredientes das técnicas se assemelham ao MM, como ao valer-se das cores para atender as especificações de cada vetor, por exemplo \vec{w} é um dos representantes de \vec{u} , logo correlacionaram a mesma cor, do mesmo modo acontece com os vetores \overrightarrow{DO} e \overrightarrow{BC} ou \vec{b} e \vec{c} . Essa perspectiva dialoga com os cenários do T4TEL, visto que uma técnica é descrita por um conjunto de tipos de tarefas, cada uma das quais descritas por um tipo de tarefa, sendo denominada ingrediente da técnica (CHAACHOUA, 2018).

A presença do quadrado D, G, E e B inscrito no quadrado A, C, H e F também compôs o registro gráfico virtual. A solução foi produzida seguindo uma sequência de técnicas materializadas e projetadas na tela do computador. As produções virtuais articularam uma *deixis gestual* (BOSCH e CHEVALLARD, 1999) distintas das já reveladas previamente. Assim, é possível exemplificar, que o acesso aos comandos provenientes da barra de ferramenta não se deu usando técnicas de MM ou PL, o que significa dizer que os sistemas de gestos e ações são regulados pelos dispositivos.

A partir de uma visão restritiva, identificamos que o GeoGebra associa a cada ponto criado, na janela de visualização, um par ordenado pertencente ao sistema de coordenadas cartesianas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Os membros do grupo identificaram este atributo e, na tentativa de aproximações com imagem que integrou a tarefa 1, ocultaram eixos e malha, ao aplicar a técnica, por meio da ação: “clique com o botão direito do mouse nas ferramentas Eixos e Malha.” Entretanto, a questão solicita que os vetores \overrightarrow{GE} , \overrightarrow{EB} , \overrightarrow{DO} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{FB} , \overrightarrow{AG} e \overrightarrow{AH} sejam escritos em função de \vec{u} e \vec{v} e, ao ter acesso as coordenadas de cada vetor, abre-se possibilidades para escrevê-lo como combinação linear de \vec{u} e \vec{v} , porém essa perspectiva não foi identificada pelos componentes deste grupo.

Figura 138 - Resolução da tarefa 1 utilizando o GeoGebra - GG (grupo 4)

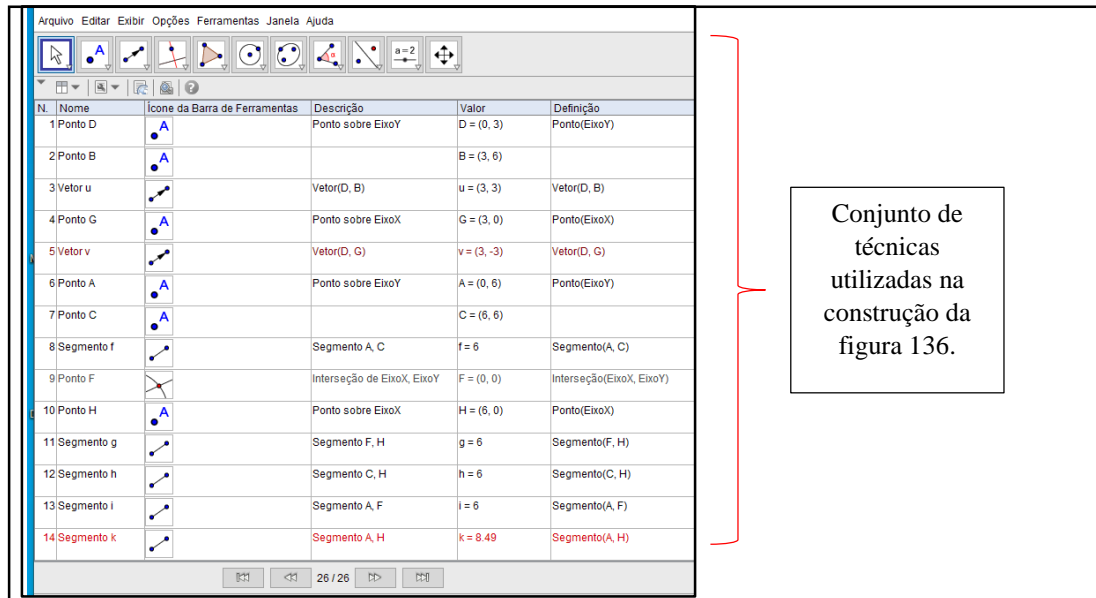


Fonte: acervo da autora (2020)

Por meio do protocolo de construção foi possível identificar a trajetória construtiva ou os Caminhos de Práticas Pessoais – CPP, tido como o conjunto das praxeologias pessoais (CROSET, CHAACHOUA, 2016) que integram a resolução de uma determinada tarefa. Nesta composição foram computados 26 comandos (técnicas) como revelado a seguir. As primeiras técnicas estavam direcionadas à construção dos vetores \vec{u} e \vec{v} , empregando o comando vetor, em que seleciona-se a origem e em seguida a extremidade. Nestes termos, pode-se dizer que

cada vetor foi gerado a partir de dois pontos. Os pontos e segmentos que estruturam o quadrado integraram a figura 139, porém o que efetivamente foi solicitado na questão: *Escrever os seguintes vetores em função de \vec{u} e \vec{v} : \vec{GE} , \vec{EB} , \vec{DO} , \vec{BC} , \vec{FB} , \vec{AG} e \vec{AH}* , não foi alcançado.

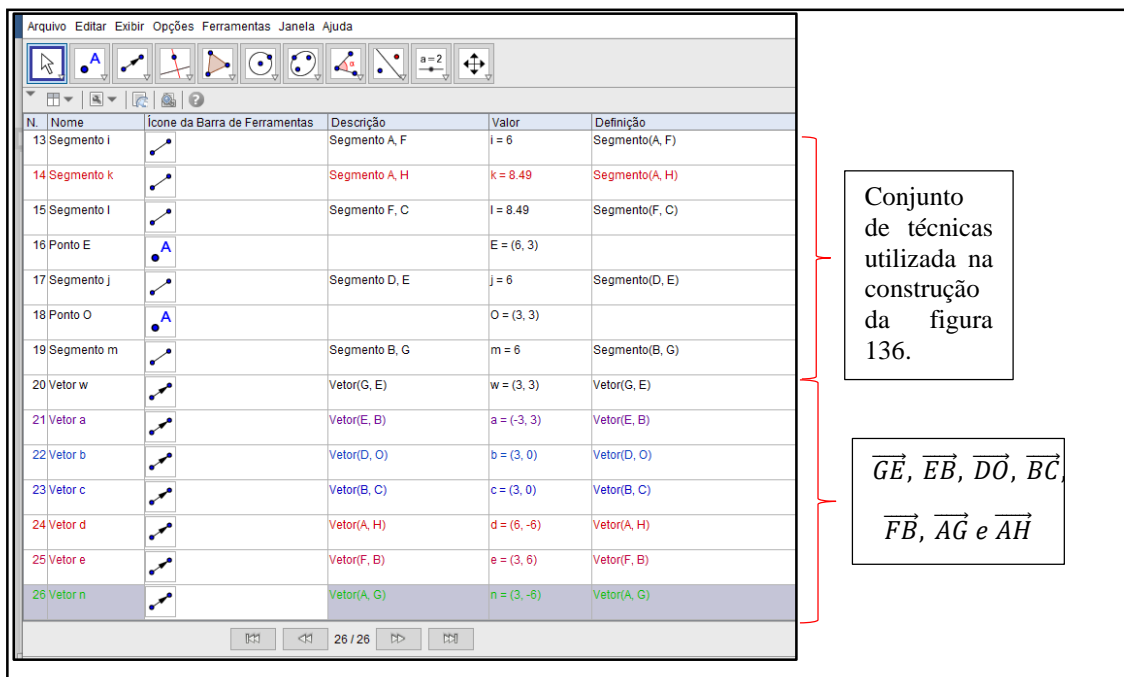
Figura 139 - Técnicas utilizadas na representação da figura da tarefa 1 (grupo 4)



N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Descrição	Valor	Definição
1	Ponto D		Ponto sobre EixoY	D = (0, 3)	Ponto(EixoY)
2	Ponto B			B = (3, 6)	
3	Vetor u		Vetor(D, B)	u = (3, 3)	Vetor(D, B)
4	Ponto G		Ponto sobre EixoX	G = (3, 0)	Ponto(EixoX)
5	Vetor v		Vetor(D, G)	v = (3, -3)	Vetor(D, G)
6	Ponto A		Ponto sobre EixoY	A = (0, 6)	Ponto(EixoY)
7	Ponto C			C = (6, 6)	
8	Segmento f		Segmento A, C	f = 6	Segmento(A, C)
9	Ponto F		Interseção de EixoX, EixoY	F = (0, 0)	Interseção(EixoX, EixoY)
10	Ponto H		Ponto sobre EixoX	H = (6, 0)	Ponto(EixoX)
11	Segmento g		Segmento F, H	g = 6	Segmento(F, H)
12	Segmento h		Segmento C, H	h = 6	Segmento(C, H)
13	Segmento i		Segmento A, F	i = 6	Segmento(A, F)
14	Segmento k		Segmento A, H	k = 8.49	Segmento(A, H)

Fonte: acervo da autora (2020)

Figura 140 - Técnicas utilizadas na representação da tarefa 1 (grupo 4)



N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Descrição	Valor	Definição
13	Segmento i		Segmento A, F	i = 6	Segmento(A, F)
14	Segmento k		Segmento A, H	k = 8.49	Segmento(A, H)
15	Segmento l		Segmento F, C	l = 8.49	Segmento(F, C)
16	Ponto E			E = (6, 3)	
17	Segmento j		Segmento D, E	j = 6	Segmento(D, E)
18	Ponto O			O = (3, 3)	
19	Segmento m		Segmento B, G	m = 6	Segmento(B, G)
20	Vetor w		Vetor(G, E)	w = (3, 3)	Vetor(G, E)
21	Vetor a		Vetor(E, B)	a = (-3, 3)	Vetor(E, B)
22	Vetor b		Vetor(D, O)	b = (3, 0)	Vetor(D, O)
23	Vetor c		Vetor(B, C)	c = (3, 0)	Vetor(B, C)
24	Vetor d		Vetor(A, H)	d = (6, -6)	Vetor(A, H)
25	Vetor e		Vetor(F, B)	e = (3, 6)	Vetor(F, B)
26	Vetor n		Vetor(A, G)	n = (3, -6)	Vetor(A, G)

Fonte: acervo da autora (2020)

Especificamente entre a vigésima e vigésima sexta linha, da figura 139, os vetores foram construídos a partir de ferramentas do dispositivo, porém não foram relacionados aos vetores \vec{u} e \vec{v} , conforme determinado na tarefa proveniente do $G'T_{t1(GG)}$. Balizado pelos registros apresentados no protocolo de construção, é possível constatar que as produções provenientes do dispositivo GG exigem o conhecimento dos comandos que cooperem com a elucidação da questão. Trabalhos como os de Dantas (2015) e Bittencout (2019) apontam caminhos para lidar com este tema no âmbito do GeoGebra.

7.2.2 Potencialidades e alcance na produção de tarefas do GT_{t1}

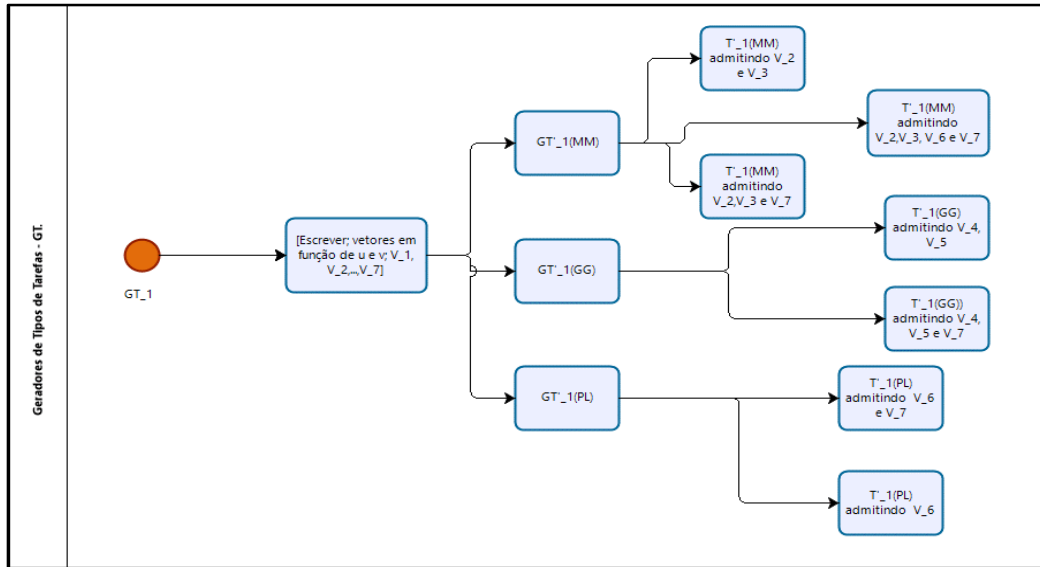
O funcionamento do GT_{t1} , integrado aos dispositivos MM, PL ou GG demonstraram ampliações e potencialidades. Dentre elas, está a de fomentar ou provocar desequilíbrios no Sistema Didático Auxiliar – SDA ou Sistema Didáticos Induzidos - SDI, os quais tiveram realce na organização deste curso, pois Chevallard (2010) sublinha que,

De modo geral, observamos que um sistema S (X; y; Q) não vive isolado: um sistema chamado sistema principal gera (e, até certo ponto, controla) um conjunto dos chamados sistemas auxiliares de ensino que, como seu nome diz, ajuda o principal sistema de ensino. O tipo mais conhecido de tais sistemas é o do trabalho pessoal imposto, que pode ser escrito como S(x ; \emptyset ; Q*), onde Q* é uma questão que aparece no estudo de Q (pode se referir, por exemplo, a uma ou outra das respostas Ri ou de outra obra Oj constituindo o meio para o estudo M). É claro, sistemas didáticos da forma S(x, x' ; \emptyset ; Q*), onde dois estudantes trabalham juntos; e também sistemas S(x; y*; Q*), onde y* é um ajuda ao estudo em princípio ignorada como tal pela instituição de ensino que encomendou X e y, embora ele possa ser reconhecido por ele em outra capacidade (y* pode ser a mãe do aluno x, por exemplo). (...). Enquanto um sistema de aprendizagem auxiliar apóia a operação do sistema de aprendizagem principal mesmo quando o faz por meio de um sistema que reúne estudantes identificados como "em dificuldade" dentro do sistema principal, um sistema induzido é suposto fornecer assistência aos estudantes que ele inclui. (CHEVALLARD, 2010, p. 10-11, tradução nossa²⁴⁰)

²⁴⁰ D'une manière générale, on observe qu'un système didactique S (X; y; Q) ne vit pas isolément: un système dit principal engendre (et, dans une certaine mesure, commande) un ensemble de systèmes didactiques dits auxiliaires qui, comme leur nom le dit assez, viennent en aide au système didactique principal. Le type le plus connu de tels systèmes est celui du travail personnel imposé, ce qu'on peut écrire S (x; \emptyset ; Q*), où Q* est une question apparue dans l'étude de Q (elle peut porter par exemple sur telle ou telle des réponses Ri ou des autres œuvres Oj constituant le milieu pour l'étude M). Bien entendu, on voit apparaître de même des systèmes didactiques de la forme S (x, x'; \emptyset ; Q*), où deux élèves travaillent ensemble; et aussi des systèmes S (x; y*; Q*), où y* est un aide à l'étude en principe ignoré en tant que tel par l'institution scolaire qui a mandaté X et y, même s'il peut être reconnu par elle à un autre titre (y* peut être la mère de l'élève x, par exemple). (...). Alors qu'un système didactique auxiliaire apporte une aide au fonctionnement du système didactique principal, même quand il le fait par le moyen d'un système réunissant des élèves repérés comme « en difficulté » au sein du système principal, un système induit est censé apporter une aide aux élèves qu'il inclut.

Apoiado nessa via, é possível reconfigurar o GT_{t1} e projetar novos investimentos, tanto de cunho didático quanto matemático. Isso ocorrerá sempre que alteramos os valores das variáveis. Assim, exibimos uma das possíveis composições.

Figura 141 - Ramificações do GT_{t1}



Fonte: acervo da autora (2020)

Dentre os diferentes tipos tarefas provenientes de GT_{t1} e sua decomposição em termos da noção Sub-Geradores de Tipo de Tarefas como proposto por Kaspary (2020, p. 268), “Seja $GT: [T, SV]$ e $GT': [T', SV']$. GT' é um sub-gerador de tipo de tarefas de GT se $T' \subseteq T$ e $SV' \subseteq SV$.” Fundamentado nessa concepção, emergiram as configurações de $G'T_{t1(MM)}$, $G'T_{t1(PL)}$ e $G'T_{t1(GG)}$. Nesse caso, toma-se como exemplo o tipo de tarefa $T_{t1(MM)}$, originada a partir de $G'T_{t1(MM)}$, exposta a seguir:

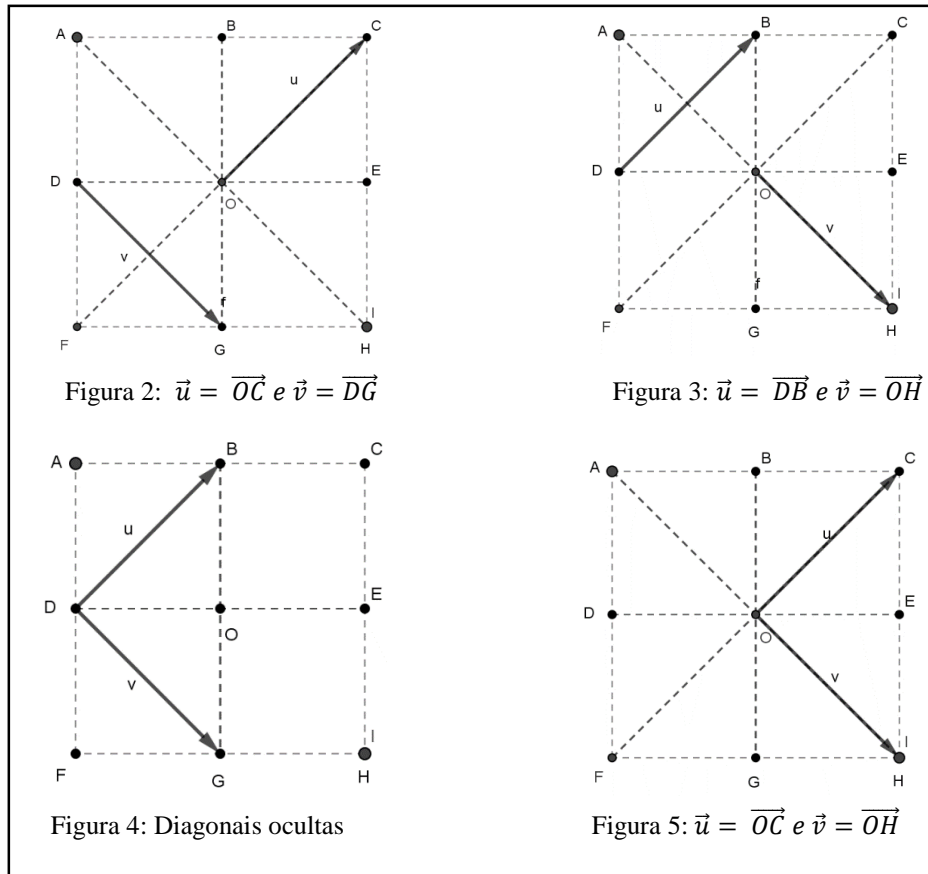
Quadro 32 - Um tipo de tarefa a partir de $G'T_{t1(MM)}$

$G'T_{t1(MM)} = [\text{Escrever; vetores em função de } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ em MM; } V_2, V_3 \text{ e } V_7]$ $T_{t1(MM)} = (\text{Escrever; vetores em função de } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ em MM com elásticos em uma configuração retangular}).$		
V_2 : Natureza de MM (canudos, elásticos, barbantes, EVA, dentre outros);	V_3 - Instrumentos auxiliares agregados a MM (tesoura, cola, tachas, placa de isopor, etc.);	V_7 - Configuração (plano, espaço, retangular, triangular, ...).

Fonte: acervo da autora (2020)

Observem que a variável V_7 pode assumir, enquanto configuração retangular, distintos valores, como exemplificado por meio das seguintes transformações ou modificações que podem ocorrer guiadas pela intenções de pesquisa que emergem do movimento investigativo em meio à dinâmica praxeológica (KASPARY, CHAACHOUA e BESSOT, 2020).

Figura 142 - Configurações retangulares da tarefa 1



Fonte: acervo da autora (2020)

E outras alterações podem ser realizadas, em termos de valores das variáveis, a exemplo, a substituição do tipo de papel empregado no ambiente PL, ou seja, trocar o papel ofício pelo milimetrado ou quadriculado, para que os cálculos das componentes vetoriais possam ser realizados a partir da contagem dos quadrados ou possam representar com maior precisão vetores ortogonais, paralelos, dentre outros, propiciando distintas representações ostensivas no desenho resolutivo das tarefas, o que segundo Kaspary (2020) significa,

(...) que a modelização de sub-geradores é uma etapa da análise, mas também um resultado produzido dos primeiros confrontos com os dados empíricos. Em resumo, cada sub-gerador é um resultado em si mesmo, que produz observáveis que permitem nos levar em direção a outros resultados. (KASPARY, 2020, p. 274)

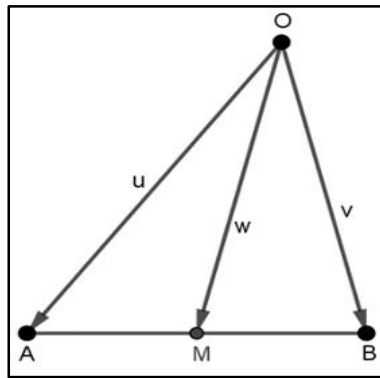
Concebe-se, enquanto implicações diretas das subdivisões de um Gerador de Tipo de Tarefas em Sub-Geradores de Tipo de Tarefas, que estes últimos herdaram a natureza do GT precursor, ou seja, assumem características do gerador instituidor. A partir dessa linha de raciocínio, é possível perceber que os Sub-Geradores de Tipo de Tarefas adquirem um grau de maior ou menor especificidade, ou seja, nas palavras de Kaspary (2020, p.280) leva-se em consideração “diferentes níveis de granularidade na descrição deste elemento praxeológico, (...) com um sistema composto por cinco variáveis.” Assim, o trabalho de análise consiste em mobilizar os valores que estas variáveis podem assumir e de que forma isto influencia e repercute nas praxeologias pessoais (CROSET; CHAACHOUA, 2016).

Em termos das singularidades e da cadeia de tarefas oriunda destes GTs, é possível considerar os aspectos de natureza: 1) epistemológica, no que se refere às propriedades dos vetores em suas múltiplas nuances; 2) institucional no que tange às condições e às restrições do uso dos Dispositivos Didáticos e adaptação de cada tarefa a estes; 3) cognitiva que ecoa nas praxeologias pessoais (CROSET, CHAACHOUA, 2016) advindas das resoluções destas atividades, o qual pode ser descrito como aproximações de uma análise mais refinada acerca das tarefas.

7.3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA TAREFA 2

A tarefa 2 designa em seu enunciado: *No triângulo AOB, seja M o ponto médio de AB. Prove: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$* , originada de um segundo Gerador de Tipo de Tarefas denotado por: $GT_{t2} = [\text{Provar, que dados quaisquer três vetores coplanares um deles é combinação linear dos outros dois; } V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7]$. A partir das especificidades inerentes dos Sub-Geradores de Tipo de Tarefas, pode-se criar $G'T_{t2} = \text{Provar, que o vetor determinado pela mediana OM de um triângulo OAB é igual a metade da soma dos vetores } \overrightarrow{OA} \text{ e } \overrightarrow{OB}; V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7]$. Um exemplo pode ser retratado na imagem que acompanha a segunda questão,

Figura 143 - Triângulo AOB

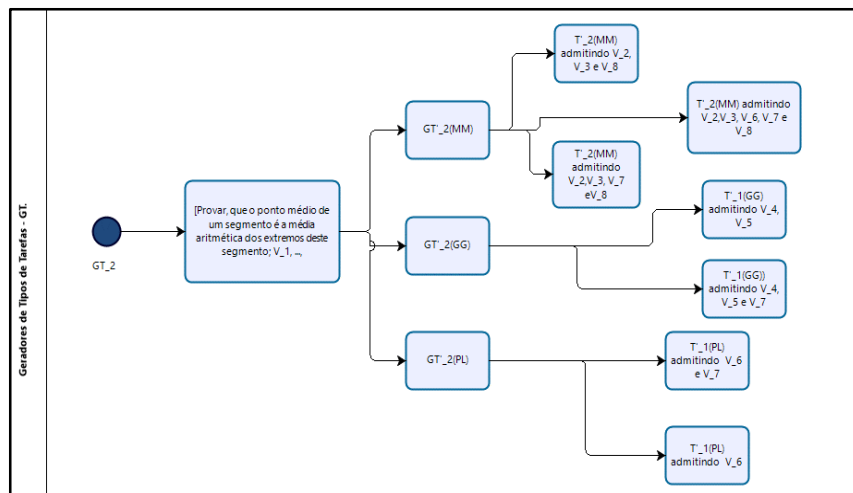


Fonte: (MELLO e WATANABE, 2011, p.11)

Primeiramente, se faz necessário pontuar duas características basilares que dão vida a cada GT, os verbos de ações são determinantes nos funcionamentos dos GTs, pois ditam o que deve ser feito, ou seja, quais tarefas devem ser executadas sob o arranjo das condições (Complemento mais o Sistema de Variáveis). Dito isto, é possível inferir que as tarefas que emergem dos geradores são singulares. O que significa dizer que, por exemplo, no caso do GT_{t1} o ato de *escrever* coopera para que as variáveis assumam valores determinados nos tipos de tarefas provenientes deste gerador independentemente do valor adotado em $V_1 = \{MM, PL, GG\}$.

Ao olhar para o GT_{t2} o verbo de ação, *provar*, direciona V_1 a centralizar-se em PL e os demais valores dessa variável se encarregam de assumir papéis auxiliares neste processo. Frente a essa perspectiva, emerge a existência de restrições provenientes da natureza e das limitações dos dispositivos, neste caso MM e GG, os quais assumem uma função coadjuvantes no processo de prova desta tarefa. O diagrama ilustra as ramificações deste gerador.

Figura 144 - Ramificações do GT_{t2}



Fonte: acervo da autora (2020).

É relevante destacar que essa restrição tem sua origem manifesta na força empreendida pelas provas e demonstrações presentes na gênese do desenvolvimento do conhecimento matemático, o que faz com que uma representação geométrica não passe de uma simples amostra experimental ou sirva como elemento inspirador, não sendo suficiente em si mesma, enquanto validação da veracidade ou falsidade de determinado teorema. Sob este ângulo, Balacheff (2000, p. 3, tradução nossa²⁴¹) assinala que “(...) em geometria, as figuras são evidências da demonstração. Contudo, (...) o racionalismo da demonstração se opõe a esse tipo de sensualidade que serve de base para as evidências”.

Sob outra perspectiva, Arsac (1999) sinaliza, no âmbito das demonstrações, um aspecto complementar entre textos e as representações geométricas,

- o mais conhecido é o fato de que certas premissas, certos argumentos em geometria, resultam da leitura do desenho. Esse uso do diagrama não é uma fraqueza do matemático em comparação com uma organização ideal da demonstração, tornando-o independente de qualquer coleta de informações visuais, testemunha, ao contrário, um caráter fundamental da organização do raciocínio matemático grego clássico.
- o papel das letras que aparecem no diagrama, cuja presença é atestada pelo texto, também é revelador. (ARSAC, 1999, p. 362, tradução nossa²⁴²)

Netz (1999, p. 35), designa que “as propriedades que a percepção extrai do diagrama formam um verdadeiro subconjunto das propriedades reais do objeto matemático”, corroborando, mesmo que de forma indireta, com a dialética dos ostensivos e não ostensivos, pois segundo a interpretação deste autor, a pragmática do texto é dada pelo diagrama, os quais estabelecem conexões com o contexto, o conjunto de pressupostos que governam o discurso.

Assim, é possível sinalizar que processo lógico dedutivo compõe a alma da matemática pura e esta concepção está presente nos discursos de diversos professores de matemática e se propagam em suas aulas. Em linhas gerais, os estudos de Balacheff (2000, p.2, tradução nossa²⁴³) sinalizam que a “(...) demonstração com o sentido e as características da comunidade matemática.” Nesse viés se desenha o modelo da atividade matemática. Esse autor, também ressalta a existência de certa intencionalidade implícita que pode ser configurada em obstáculo concernente ao funcionamento do Sistema Didático,

- De maneira implícita o ensino da matemática tira os alunos da responsabilidade da verdade. Isso é particularmente perceptível quando o problema gerado é apresentado na forma: "mostre que ...". Numa formulação desse tipo, a afirmação em questão é de

²⁴¹ (...) en geometría, donde las figuras son evidencia de la demostración. (...) el racionalismo de la demostración se opondría. a esta clase de sensualidad que sirve de base a la evidencia.

²⁴² le plus connu est le fait que certaines prémisses, certains arguments en géométrie, résultent de la lecture du dessin. Cette utilisation du diagramme n'est pas une faiblesse du mathématicien par rapport à une organisation idéale de la démonstration la rendant indépendante de toute prise d'information visuelle, elle témoigne au contraire d'un caractère fondamental de l'organisation du raisonnement mathématique grec classique. – le rôle des lettres figurant sur le diagramme, dont la présence est attestée par le texte, est également révélateur.

²⁴³(...) la demostración con el sentido y las características propias de la comunidad matemática.

fato considerada verdadeira; O que deve ser descoberto é uma demonstração. (BALACHEFF, 2000, p. 5, tradução nossa²⁴⁴)

O Tipo de Tarefa gerado pelo GT_{t2} é similar ao sinalizado por Balacheff, assim o que deve-se determinar é uma demonstração. E, por consequência disso, o GG e MM desempenharam um papel auxiliar no trabalho desenvolvido pelo sujeito no que tange à tarefa 2. Entretanto, é pertinente seguir a mesma ordem de análise utilizada no primeiro item, MM, PL e por último, e não menos importante, discorreremos sobre o GG.

A partir da organização retratada na figura 126, as equipes que empregaram os recursos provenientes de MM foram direcionadas a desenvolver o trabalho da segunda questão, utilizando PL ou GG, assim como os sujeitos que resolveram a tarefa utilizando PL mudaram para MM ou GG seguindo uma ordem sucessiva para os demais exercícios. Dessa forma, para resolução da tarefa 2, os grupos 5 e 6 optaram pelos materiais manipuláveis – MM. A partir dessa perspectiva, é possível identificar com maior precisão a coordenação do Sub-Gerador de Tipo de Tarefas, $G'T_{t2(MM)} \subset GT_{t2}$, agregado às variáveis como descrito abaixo:

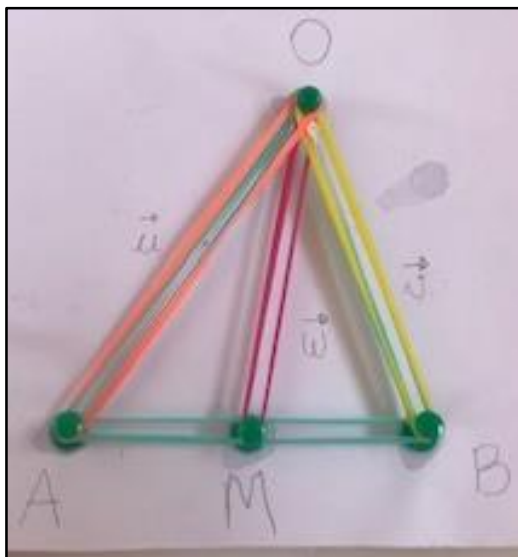
$G'T_{t2(MM)} = [Provar, que o vetor determinado pela mediana OM de um triângulo OAB é igual a metade da soma dos vetores \vec{OA} e \vec{OB} em MM; V_2, V_3, V_7].$			
V_2 - Natureza de MM (canudos, elásticos, barbantes, EVA, dentre outros).	V_3 - Instrumentos auxiliares agregados a MM (tesoura, cola, tachas, placa de isopor, etc.).	V_6 - Instrumentos disponíveis de PL (régua, esquadros, papel milimetrado, etc.)	V_7 - Configuração (plano, espaço, retangular, triangular, ...).

A resolução da segunda questão que decorre de $G'T_{t2(MM)}$ apresenta como enunciado: *No triângulo AOB, seja M o ponto médio de AB. Prove: $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$.* No primeiro momento de análise, os elementos ostensivos despontam com recorrência as cores dos elásticos, seja com a função de identificação ou diferenciação entre os vetores \vec{u}, \vec{w} e \vec{v} . De forma análoga, as tachas serviram de sustentação e representação dos vértices do triângulo. Isto posto, é pertinente pontuar que antes de manusear os MM, os discentes empregaram a régua e o lápis, (pertencente ao dispositivo PL), enquanto instrumento de medição, no intuito de localizar o

²⁴⁴ De manera implícita, la enseñanza en matemáticas despoja a los estudiantes de la responsabilidad de la verdad. Esto es particularmente notorio cuando el problema planteado se presenta de la forma: “mostrar que...”. En una formulación de este tipo, el enunciado en cuestión es de hecho considerado como verdadero; lo que está por descubrir es una demostración.

ponto M pertencente ao segmento AB. Perspectiva que nos conduz a inferir acerca da existência de produções exclusivamente manipuláveis. A figura 145 revela traços da construção.

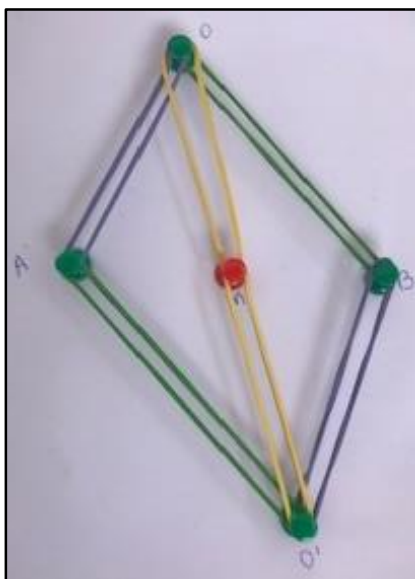
Figura 145 - Representação do triângulo AOB (grupo 5)



Fonte: acervo da autora (2020)

Note que PL constitui um elemento auxiliar na construção do modelo manipulável. Aspecto esse também evidenciado na produção do grupo 6.

Figura 146 - Representação do triângulo AOB (grupo 6)



Fonte: acervo da autora (2020)

A partir de um olhar mais atento, é possível identificar que os discentes seguiram rotas distintas ao mobilizar diferenciadas técnicas, em que se rompe com o nível da evidência tradicional da rotinização do emprego das técnicas, o que nos remete a diferentes tipos de análises. O estudo basilar se centra sob as distintas variáveis que interferem na estrutura de ação denotada por Chevallard (2006) como Tipos de Tarefa T que decorrem em tarefas t e técnicas τ sob a perspectiva das praxeologias pessoais, denominada por (CROSET e CHAACHOUA, 2016, p.19) “como um quarteto da organização praxeológica da atividade de sujeitos institucionais composta por: um tipo de tarefa pessoal, técnicas pessoais, legitimado e governado por tecnologia e teoria pessoais.” A partir desse ponto de vista foram revelados, em algumas resoluções, os Caminhos de Práticas Pessoais – CPP, descritos em termos do encadeamento de relações modificadas pelo emprego dos Dispositivos Didáticos e do Sistema de Variáveis no âmbito vetorial, os quais concebemos que sua conceitualização emerge de: $R_1(X, O_{\vec{v}}) \cup R_2(X, O_{\vec{v}}) \cup \dots \cup R_n(X, O_{\vec{v}})$, prescrito por um agrupamento de relações pessoais provenientes de distintos assujeitamentos.

Ao direcionar maior atenção para a construção indicada na figura 146, é possível analisar as produções dos discentes por meio do modelo praxeológico, o qual torna-se evidente a partir das relações específicas com o objeto de conhecimento sobressaído, enquanto concepções espontâneas nas articulações de técnicas não evidentes, já que a questão faz referência a um triângulo. Contudo os discentes, correlacionaram a uma das propriedades dos paralelogramos: *as diagonais dos paralelogramos interceptam-se em seu ponto médio*. A partir desta Organização Pessoal²⁴⁵, é possível identificar pontos de contatos entre as praxeologias pessoais (CROSET, CHAACHOUA, 2016) e institucionais, sem esquecer que “a qualidade do diagnóstico da práxis pessoal depende da variedade de tarefas propostas” (CHAACHOUA, 2010, p.11).

Quadro 33 - Descrição da Organização Pessoal vinculada a Figura 146 (continua)

<i>T institucional</i>	No triângulo AOB, seja M o ponto médio de AB. Prove: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$
<i>T pessoal - T_p</i>	No triângulo AOB, seja M o ponto médio de AB. Prove, usando Materiais Manipuláveis – MM, que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, condicionada às variáveis V_2, V_3, V_7 .
	- Marcar os pontos A, O, B, M e O' simétrico ao ponto O;

²⁴⁵ Chamamos de organização pessoal uma terna [T, τ , θ] formada em torno do tipo de tarefas T dada, τ sendo uma técnica pessoal usada para executar T e θ a tecnologia pessoal (teorema ou definição em ato) que produziu ou que justifica a técnica τ (DHIEB, 2009, p.45)

<i>Técnicas pessoais</i> - τ_p	<ul style="list-style-type: none"> - Aplicar as tachas em cada ponto; - Fixar os elásticos nas tachas, a partir da seguinte configuração: o vetor \overrightarrow{OA} é um dos representante de $\overrightarrow{BO'}$ (elástico na cor roxa), assim como \overrightarrow{OB} e $\overrightarrow{AO'}$ (elástico na cor verde). E o elástico amarelo representa o vetor $\overrightarrow{OO'}$.
<i>Tecnologias pessoais</i> θ_p	<ul style="list-style-type: none"> - Regra do paralelogramo, pois ao considerar representantes de dois vetores \vec{u} e \vec{v} em uma mesma origem, a diagonal do paralelogramo gerado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} é um representante da soma $\vec{u} + \vec{v}$. Assim, assume-se uma função explicativa. (CROSET e CHAACHOUA, 2016, p.27) - As diagonais de um paralelogramo se interceptam no ponto médio. (Função explicativa); - Propriedade distributiva da soma de vetores. Pois se desenvolvermos, encontramos a expressão de partida, atribuindo uma função de apoio (Ibid., p. 27)
Teorias Θ	- Geometria Analítica e Geometria Plana.

Fonte: acervo da autora (2020).

Ao dissertar acerca do que observa Chaachoua (2020), é legítimo declarar que “uma tecnologia, seja pessoal ou institucional, não pode ser reduzida a um conjunto de teoremas ou regras matemáticas. É um discurso que permite justificar, produzir, tornar inteligível, controlar e adaptar uma técnica.” (CHAACHOUA, 2020, p.114, tradução nossa²⁴⁶). O que significa dizer que as tecnologias pessoais podem conter ingredientes que não atendem às expectativas institucionais. Nestes termos, Croset e Chaachoua (2016) revelam, com riqueza de detalhes, o caracterizam como uma praxeologia pessoal,

É o quadrupeto da organização praxeológica da atividade de um sujeito institucional composto de quatro componentes: - Um tipo de tarefa pessoal é o conjunto de tarefas que o sujeito percebe como similares, fazendo com que ele aplique uma técnica. Se dois tipos de tarefas pessoais são distintas, necessariamente suas respectivas técnicas pessoais são distintas. A divisão em tipos de tarefas pessoais, portanto, não corresponde necessariamente a da instituição. - Uma técnica pessoal usada pelo aluno resolve apenas um tipo de tarefa pessoal. Ela pode estar errada, correta, legitimada pela instituição de referência ou não. Ela deve ter uma certa estabilidade em seu uso para ser considerada uma técnica de resolução: só obtém legitimidade para um determinado aluno se for usada regularmente por esse aluno. Nós evitamos considerar como técnica pessoal erros de descuido ou derrapagem pontual. Uma tecnologia pessoal, explícita ou não, governa e legitima o uso da prática pessoal. Frequentemente, um simples déficit tecnológico institucional pode ser capaz de explicar técnicas pessoais errôneas. Mas, às vezes, há situações em que uma tecnologia que tem legitimidade para responder a certos tipos de tarefas passa a ser generalizada e a técnica que legitima usada é usada fora de seu escopo. (CROSET; CHAACHOUA, 2016, p.19, tradução nossa²⁴⁷)

²⁴⁶ qu'une technologie, qu'elle soit personnelle ou institutionnelle, ne se réduit pas à un ensemble de théorèmes ou de règles mathématiques. C'est un discours qui permet de justifier, de produire, de rendre intelligible, de contrôler et d'adapter une technique.

²⁴⁷ Nous appelons praxéologie personnelle le quadruplet d'organisation praxéologique de l'activité d'un sujet institutionnel constitué de quatre composantes.

Nesse sentido, é possível estabelecer diálogos com o que Douady (1994) aponta acerca do duplo aspecto do saber matemático,

Por um lado, é ter a disponibilidade funcional de certas noções e teoremas matemáticos para resolver problemas, interpretar novas questões...Em tal sistema científico. As noções e teoremas matemáticos desempenham o papel de ferramenta. As ferramentas inserem-se em um contexto, sob ação e o controle de alguém (ou de um grupo) em um dado momento. As situações, ou os problemas nos quais as noções de um certo ponto de vista que chamaremos semântico. São também geradoras de relações que podem ser parcialmente externas à Matemática ou então completamente internas a ela. (DOUADY, 1994, p.33)

Os contrapontos entre os elementos internos ou externos que emergem do discurso do corpus científico matemático se relacionam com as modificações das situações que demandam noções diferenciadas, como o apresentado na pesquisa, prefigurando representações e oportunidades de cunho didático. Ressalte-se que, o modelo praxeológico pessoal descrito anteriormente foi regido pelo funcionamento do $GT_{t_2(MM)}$, comungando, assim, com os elementos que intervêm na capacidade de impulsionar técnicas pessoais para resolver a tarefa proposta, legitimadas ou não pela instituição de referência. A partir do contexto de experimentação, foi possível notar certo nível de estabilidade em seu uso, sendo caracterizado por uma técnica de resolução (CROSET e CHAACHOUA, 2016). Assim, é viável identificar qual OM foi mobilizada pelo aluno e se existem ou não articulações com Organizações Matemáticas Institucionais - OMI. Nesse sentido, Dhieb (2009) salienta,

Na TAD, vimos que o conhecimento de um objeto por um estudante é modelado pela relação pessoal do estudante com esse objeto, sendo esse relacionamento pessoal construído sob o efeito de relacionamentos institucionais com esse objeto dentro das instituições às quais pertence. (DHIEB, 2009, p.45, tradução nossa²⁴⁸)

- Un type de tâches personnel est l'ensemble des tâches que le sujet perçoit comme similaires, provoquant chez lui l'application d'une technique. Si deux types de tâches personnels sont distincts, alors nécessairement leurs techniques personnelles respectives sont distinctes. Le découpage en types de tâches personnel ne correspond donc pas nécessairement à celui de l'institution.

- Une technique personnelle utilisée par l'élève permet de résoudre un seul type de tâches personnel. Elle peut être erronée, correcte, légitimée par l'institution de référence ou non. Elle doit présenter une certaine stabilité dans son utilisation pour être considérée comme technique de résolution: elle n'acquiert sa légitimité pour un élève donné que si elle est régulièrement utilisée par cet élève. Nous évitons ainsi de considérer comme une technique personnelle, des erreurs d'étourderie ou de dérapage ponctuel.

-Une technologie personnelle, explicite ou non, gouverne et légitime l'utilisation de praxis personnelles. Souvent un simple déficit technologique institutionnel peut être à même d'expliquer des techniques personnelles erronées. Mais il est parfois des situations où une technologie qui avait sa légitimité pour répondre à certains types de tâches se trouve être généralisée et la technique qu'elle légitimait utilisée en dehors de sa portée.

²⁴⁸ Dans la TAD, nous avons vu que la connaissance d'un élève relative à un objet est modélisée par le rapport personnel de l'élève à cet objet, ce rapport personnel étant construit sous l'effet des rapports institutionnels à cet objet au sein des institutions auxquelles il appartient ou a appartenu.

Deve-se acrescentar a este entendimento que, “a relação pessoal de um aluno, por exemplo, com um objeto de conhecimento pode ser múltiplo, no sentido de ser um amálgama de relações devido à sujeição a várias instituições” (DHIEB, 2009, p.43, tradução nossa²⁴⁹).

Ao seguir o percurso de análise, muda-se a direção do olhar para o $G'T_{t2(PL)}$, tipificado como:

$G'T_{t2(PL)} = [Provar, que\ o\ vetor\ determinado\ pela\ mediana\ OM\ de\ um\ triângulo\ OAB\ é\ igual\ a\ metade\ da\ soma\ dos\ vetores\ \vec{OA}\ e\ \vec{OB}\ em\ PL; V_6, V_7]$	
V_6 - Instrumentos disponíveis de PL (régua, esquadros, papel milimetrado, etc.)	V_7 - Configuração (plano, espaço, retangular, triangular, ...).

A partir desta configuração, foi propiciado aos estudantes vínculos com as técnicas institucionais, situadas no terreno das provas e demonstrações, o que demanda a emergência de cadeias dedutivas, muitas vezes, qualificadas pelos verbos: explicar, provar ou demonstrar, os quais são frequentemente considerados como sinônimos da prática do ensino de matemática. Para Ballachef (2000), esses hábitos constituem um obstáculo às investigações sobre o assunto, pois, segundo ele, levam a amalgamar diferentes níveis da atividade estudantil e é necessário distingui-los. Esse autor também acentua que, “em matemática, é claro que o termo ‘demonstração’ não é o mais conveniente porque seu significado é muito específico. Seleccionamos o termo prova.” (BALLACHEF, 2000, p. 12, tradução nossa²⁵⁰).

Em sentido análogo, Almouloud (2007), admite que a prova matemática está relacionada,

a um processo de validação de um fato matemático, ou seja, o registro de uma demonstração deve ser apoiado em fatos matemáticos comprovados e que o conjunto organizado desses fatos devem comprovar de forma irrefutável algum tipo de proposição matemática. (ALMOULOUD, 2007, p.5)

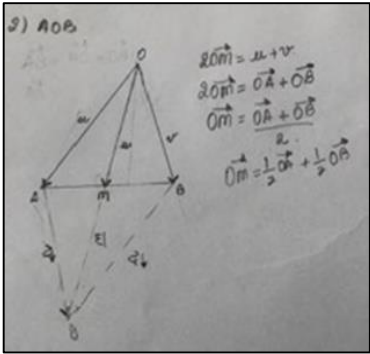
Em concordância com as concepções de Ballachef, o $G'T_{t2(PL)}$ forneceu a segunda questão: “provar que $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$ ”, associada ao triângulo representado na figura 143, em que se traduz com a hipótese de que M é ponto médio de AB. Frente a essa solicitação obtém-se os seguintes Caminhos de Práticas Pessoais – CPP, composto por conjunto das praxeologias pessoais (CROSET, CHAACHOUA, 2016) e/ou institucionais mobilizadas pelos sujeitos que integram a resolução de determinada tarefa no âmbito dos Dispositivos Didáticos,

²⁴⁹ Il faut ajouter à ce stade que le rapport personnel d'un élève, par exemple, à un objet de savoir peut être multiple au sens où c'est un amalgame de rapports dus à l'assujettissement à plusieurs institutions.

²⁵⁰ En matemáticas es claro que el término “demostración” no es el más convenientes debido a que su acepción es muy específica. Seleccionamos el término prueba.

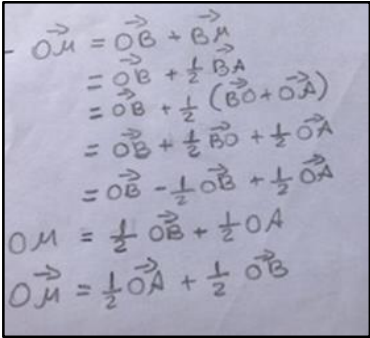
ou seja, significa um aglomerado de técnicas pessoais e/ou institucionais legitimadas pelo bloco tecnológico teórico $[\theta, \Theta]$ situado no âmbito matemático ou não, retratado nos quadros abaixo:

Quadro 34 - Produção praxeológica do grupo 3 vinculada a tarefa 2 no dispositivo PL

Registro de Resolução do Grupo 3	Técnicas (τ)	Tecnologia (θ)	Teoria (Θ)
	<ul style="list-style-type: none"> - Construiu o paralelogramo por meio da igualdade de vetores; - Identificou que as diagonais do paralelogramo se interceptam no mesmo ponto médio M; - Apontou que $2\vec{OM}$ corresponde a soma de $\vec{u} + \vec{v}$; - Identificou a igualdade entre os vetores $\vec{OA} = \vec{u}$ e $\vec{OB} = \vec{v}$; - Aplicou a propriedade distributiva da multiplicação de escalar em relação a soma. 	<p>Soma de vetores por meio da regra do paralelogramo, igualdade entre vetores, multiplicação de escalares por vetores, combinação linear, definição de ponto médio.</p>	<p>Geometria Analítica e Álgebra Linear.</p>

Fonte: acervo da autora (2020)

Quadro 35 - Produção praxeológica do grupo 4 vinculada a tarefa 2 no dispositivo PL

Registro de Resolução do Grupo 4	Técnicas (τ)	Tecnologia (θ)	Teoria (Θ)
	<ul style="list-style-type: none"> - Escreveu \vec{OM} como o resultante da soma entre \vec{OB} e \vec{BM}; - Identificou a igualdade entre os vetores \vec{BM} e $\frac{1}{2}\vec{BA}$; - Apontou que \vec{BA} é a resultante da soma de \vec{BO} com \vec{OA}; - Aplicou a propriedade distributiva em relação a soma; - Empregou a noção de vetor oposto; - Aplicou a propriedade associativa; - Operou-se com os termos semelhantes da equação vetorial (usou novamente a propriedade distributiva); - Finalizou com a propriedade comutativa. 	<p>Soma de vetores, igualdade entre vetores, multiplicação de escalares por vetores, combinação linear, definição de ponto médio.</p>	<p>Geometria Analítica e Álgebra Linear</p>

Fonte: acervo da autora (2020)

A distinção entre os processos praxeológicos pessoais se assentam nos CPP que cada grupo optou em seguir, seja $2\overline{OM} = \vec{u} + \vec{v}$ ou $\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM}$. O gerenciamento na passagem de cada igualdade, segue caminhos distintos, porém todos conservam uma sequência lógica situada no mesmo bloco tecnológico teórico $[\theta, \Theta]$, como descrito por Chevallard (2018) em termos das praxeologias transpostas com a práxis modificada e logos mantido $(\Pi^*) \oplus \Lambda$, com exceção do emprego da regra do paralelogramo aplicada pelo grupo 3. As técnicas empreendidas nas resoluções demonstram conhecimentos no que se refere à igualdade e à soma entre vetores, além da multiplicação de escalar por vetor agregada às propriedades comutativa, associativa e distributiva.

O contraste entre os dispositivos MM e PL, pode ser justificado pelos estudos de Watson, Spyrou e Tall (2003, p.1, tradução nossa²⁵¹) “que analisam a produção de três mundos matemáticos distintos, cada um com seu próprio modo de construir conceitos e com seu próprio modo de prova. Estes são, respectivamente, *corporificados, simbólicos e formais*”. Esses autores sinalizam também que,

(...) concentrando-nos principalmente nos dois mundos da matemática encontrados na escola - o mundo corporificado e o mundo simbólico dos procedimentos. Por enquanto, é suficiente notar que os vetores são concebidos de maneiras bastante diferentes em cada mundo (e no mundo corporificado, existem vários contextos distintos de significado), existem diferentes maneiras de executar construções (como adição e multiplicação por escalar) e existem diferentes formas de prova. (WATSON, SPYROU e TALL, 2003, p.2, tradução nossa²⁵²)

O aspecto dicotômico entre a corporificação dos manipuláveis frente à perspectiva simbólica dos escritos no âmbito do Papel/Lápis abre um leque de possibilidades de análise acerca das múltiplas interconexões entre os distintos registros das concepções dos vetores. Soma-se a esse aspecto o campo de concorrência entre técnicas, geralmente obscurecido pela ação institucional de reconhecimento de técnicas, contrapondo as técnicas alternativas, como já declarado por Chevallard (1999),

[...] Uma tal exclusão está correlacionada, para os atores de I, com uma ilusão da "naturalidade" das técnicas institucionais em I - fazer isso é natural... -, em contraste ao conjunto de possíveis técnicas alternativas, que os sujeitos de I ignoraram, ou, se forem confrontados com elas, que espontaneamente considerarão como artificiais, e (portanto) "contestáveis", "inaceitáveis", etc. A este respeito, observamos com bastante frequência, entre os sujeitos de I, verdadeiras paixões institucionais pelas

²⁵¹ Our analysis yields three distinct mathematical worlds, each with its own way of constructing concepts and with its own way of proof. These are respectively, embodied, symbolic and formal.

²⁵² (...), focusing mainly on the two worlds of mathematics that are met in school—the embodied world and the symbolic world of procepts. For the present, it is sufficient to notice that vectors are conceived in quite different ways in each world (and in the embodied world, there are several distinct contexts of meaning), there are different ways of performing constructions (such as addition and scalar multiplication) and there are different forms of proof.

técnicas naturalizadas na instituição. (CHEVALLARD, 1999, p. 225, tradução nossa²⁵³)

Em contraste a argumentação das preferências institucionais que elegem técnicas para realização de um mesmo tipo de tarefa, pode-se examinar os efeitos dessa competição do ponto de vista epistemológico, independentemente das condições institucionais que permitem ou não a existência dessas duas técnicas, no que concerne a sua eficiência.

Outra nuance que se faz presente no conjunto de tipos de tarefas ou estruturas de ação (CHEVALLARD, 2006) criadas pelos GTs se refere a um subconjunto da função de X (conjunto de estudantes), quando as tarefas t são realizadas usando uma técnica τ , denominada topos²⁵⁴ de X na tarefa t . Sublinhado por Chevallard (1998) como,

Uma das dificuldades didáticas mais comuns e urgentes para um professor é aquela que ele encontra para "dar um lugar aos alunos", ou seja, criar, para eles e sobre cada um deles temas estudados, topos apropriados, que dão ao aluno a sensação de ter um "papel real a desempenhar". (CHEVALLARD, 1998, p.18, tradução nossa²⁵⁵)

Esse aspecto comunga com os estudos hodiernos de Chevallard (2009; 2010; 2012) e dialoga com o "Paradigma de Questionamento do Mundo", cuja base se assenta no despertar de uma visão prospectiva sobre a dimensão didática e apontam para um aflorar de uma postura autônoma exigida aos alunos, pressuposto esse seguido durante todo o curso aqui descrito. Nesse sentido, as equipes 1 e 2, escolheram o GeoGebra enquanto dispositivo de resolução da tarefa 2, estabelecida pelo Sub-Gerador de Tipo de Tarefas, $G'T_{t2(GG)} \subset GT_{t2}$, descrito a seguir:

$G'T_{t2(GG)} = [Provar, \text{ que o vetor determinado pela mediana } OM \text{ de um triângulo } OAB \text{ é igual a metade da soma dos vetores } \overrightarrow{OA} \text{ e } \overrightarrow{OB} \text{ em } GG; V_4, V_5, V_7]$		
V_4 - Menu do dispositivo (barra de ferramentas)	V_5 - Dispositivos móveis (notebook, celular, tablets);	V_7 - Configuração (plano, espaço, retangular, triangular, ...).

Pontuamos que na execução desta etapa, estavam ausentes dois componentes, o que demandou um reagrupamento dando origem a um grupo com 4 estudantes. O que significa dizer

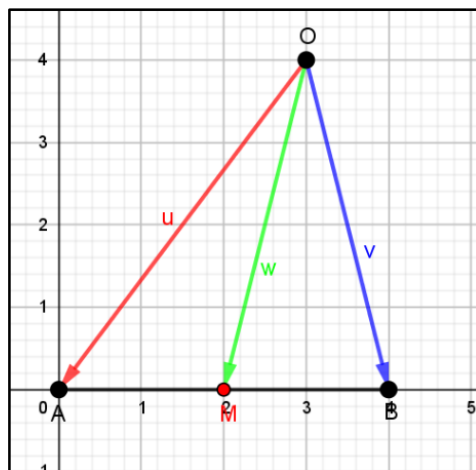
²⁵³ (...) Une telle exclusion est corrélative, chez les acteurs de I, d'une illusion de « naturalité » des techniques institutionnelles dans I — faire ainsi, c'est naturel... —, par contraste avec l'ensemble des techniques alternatives possibles, que les sujets de I ignoreront, ou, s'ils y sont confrontés, qu'ils regarderont spontanément comme artificielles, et (donc) « contestables », « inacceptables », etc. À cet égard, on observe assez fréquemment, chez les sujets de I, de véritables passions institutionnelles pour les techniques naturalisées dans l'institution.

²⁵⁴ Para maiores esclarecimentos ver Chevallard (1998), pois em síntese ele caracteriza que o topos do grego (que corresponde ao locus latino) significa "lugar": o topos de xi é o "lugar de xi", onde, psicologicamente, xi experimenta sensações em termos das estruturas de ações assumindo um papel próprio.

²⁵⁵ L'une des difficultés didactiques les plus ordinaires et les plus pressantes pour un professeur est celle qu'il rencontre pour « donner une place aux élèves », c'est-à-dire pour créer, à leur intention, et à propos de chacun des thèmes étudiés, un topos approprié, qui donne à l'élève le sentiment d'avoir un « vrai rôle à jouer ».

que a junção dos membros produziu uma fusão entre os grupos 1 e 2. Agrega-se também a esse contexto os elementos restritivos referentes à operacionalização do software GeoGebra. Assim, enquanto fruto desse encontro, temos:

Figura 147 - Representação do triângulo AOB (junção dos grupos 1 e 2)

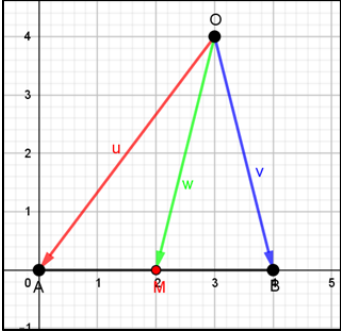


Fonte: acervo da autora (2020)

Os discentes preferiram manter a malha e os eixos. Dessa forma, é possível identificar que estes elementos serviram como suporte para determinar uma possível localização do ponto M, enquanto ponto médio do segmento AB. Outra característica recorrente, são as cores utilizadas na representação de cada vetor, aspecto que se assemelha com os elásticos utilizados em MM. Por meio do protocolo de construção é exequível resgatar o histórico das funções que foram utilizadas, viabilizando a distinção das técnicas empregadas na construção deste triângulo.

Foram empregados, sequencialmente, as ferramentas: ponto, vetor, mediatriz, interseção de dois objetos e segmentos. Dentre os elementos elencados, a recorrência à mediatriz, definida como uma reta perpendicular a um segmento de reta que passa pelo ponto médio deste segmento. A descrição da produção praxeológica nos fornece mais detalhes acerca destas construções resolutivas.

Quadro 36 - Produção praxeológica proveniente da junção dos grupos 1 e 2 vinculada a tarefa 2 no dispositivo GG

Registro de Resolução da junção dos grupos 1 e 2	Técnicas (τ)	Tecnologia (θ)	Teoria (Θ)
	<ul style="list-style-type: none"> - Mantiveram a malha e os eixos; - Localizaram o ponto A na origem do sistema de coordenadas; - Definiram a localização do ponto O; - Utilizaram a ferramenta “vetor definido por dois pontos” para gerar o vetor \vec{u}; - Determinaram a localização do ponto B, estrategicamente, posto sobre o eixo x com abscissa 4; - Obteve-se o vetor \vec{v}, a partir dos pontos O e B por meio da ferramenta “vetor definido por dois pontos”; - Selecionou os pontos A e B e empregou a ferramenta mediatriz; - Utilizou a ferramenta interseção de dois objetos (reta mediatriz e o eixo x); - Determinou o vetor \vec{w}, por meio da ferramenta vetor definido por dois pontos. 	<p>Sistema de coordenadas cartesianas, pontos, reta, vetor definido por dois pontos; mediatriz em associação a definição de ponto médio.</p>	<p>Geometria Plana e Geometria Analítica.</p>

Fonte: acervo da autora (2020).

O Caminho de Práticas Pessoais – CPP, revela uma trajetória diferenciada dos caminhos transitados pelos demais grupos nas resoluções situadas no âmbito dos recursos MM e PL. Este fato pode ser ratificado ao analisar o protocolo de construção.

Figura 148 - Protocolo de Construção do triângulo AOB (junção dos grupos 1 e 2)

N.	Nome	Ícone da Barra de ...	Descrição	Definição	Valor
1	Ponto A		Ponto sobre EixoY	Ponto(EixoY)	A = (0, 0)
2	Ponto O				O = (3, 4)
3	Vetor u		Vetor(O, A)	Vetor(O, A)	u = (-3, -4)
4	Ponto B				B = (4, 0)
5	Vetor v		Vetor(O, B)	Vetor(O, B)	v = (1, -4)
6	Reta f		Mediatriz de AB	Mediatriz(A, B)	f. x = 2
7	Ponto M		Interseção de f, EixoX	Interseção(f, EixoX)	M = (2, 0)
8	Vetor w		Vetor(O, M)	Vetor(O, M)	w = (-1, -4)
9	Segmento g		Segmento A, B	Segmento(A, B)	g = 4

Fonte: acervo da autora (2020)

Janzen (2011, p.45) sinaliza que, “provar uma propriedade geométrica significa estabelecer sua veracidade através de uma argumentação, então o propósito é explicitar as razões que esclarece a evidência de uma propriedade, por mais que seja intuitivamente óbvia”. No ambiente dinâmico do software, os alunos utilizaram os seguintes comandos: selecionar dois pontos ou segmento, neste caso, os pontos A e B ou o segmento AB dando origem a uma reta perpendicular que contém o ponto médio de AB. Feito isso, a ferramenta interseção de dois objetos foi empregada para garantir que M (ponto médio de AB) ocupe a localização determinada.

A partir do posicionamento do ponto M na representação geométrica, inferimos acerca da existência de tentativas argumentativas no que se refere a veracidade de $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. Contudo, após a realização desta construção, os integrantes do grupo migraram para o ambiente PL, no intuito de integralizar a resolução da questão, o que revela o aspecto incompleto do emprego do dispositivo GG para questões que envolvem provas e demonstrações matemáticas.

Aspecto esse, ratificado por Hofstadter (1997, p. 10 apud DE VILLIERS, 2001, p. 6), ao pontuar que trabalhos desenvolvidos no GeoGebra não são demonstrações, uma vez que “as demonstrações são ingredientes críticos do conhecimento matemático”, porém não podemos ofuscar as potencialidades deste software que possibilitou verificar as propriedades existentes na figura construída e, ao fazer movimentações, ampliou seu leque de conceitos, pois

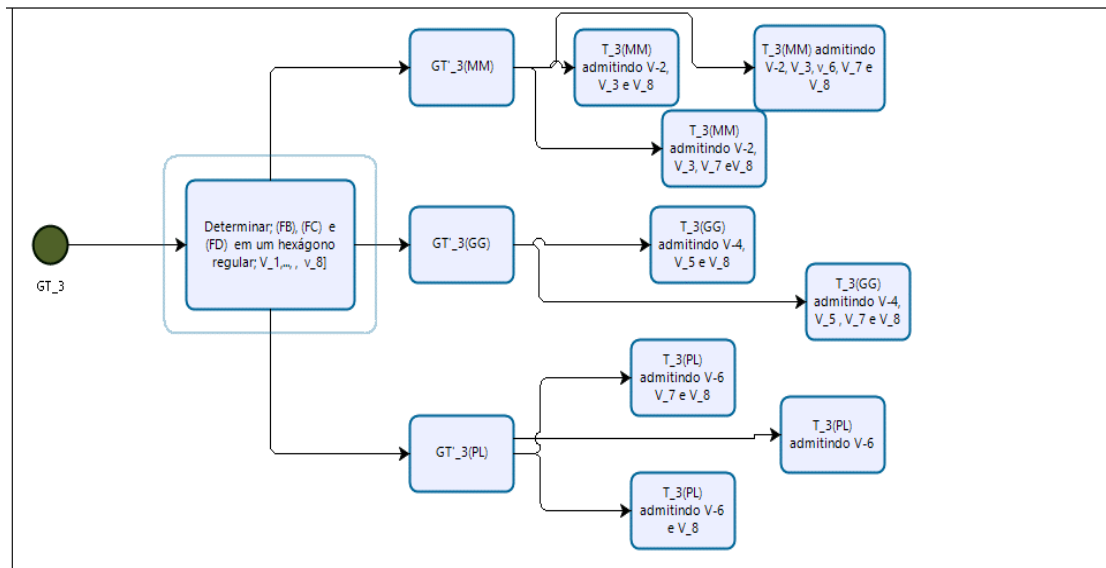
quando trabalhamos atividades sobre provas e demonstrações matemáticas com o uso do aplicativo GeoGebra, proporciona-se uma alternativa ao incentivo de se conjecturar, argumentar, provocar raciocínio hipotético-dedutivo e articular níveis de pensamento geométrico. (LIMA, LINS e PEREIRA, 2018, p. 201)

À luz deste cenário, em meio à flexibilidade dos dispositivos que se integram às resoluções das questões, rompe-se com a limitação do uso de uma única técnica envolvendo a representação dos conceitos e propriedades vetoriais. As produções dos estudantes sinalizam como as praxeologias pessoais (CROSET, CHAACHOUA, 2016), em alguns casos, diferem das expectativas institucionais em termos de tipos de tarefas, técnicas ou tecnologias.

7.4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA TAREFA 3

A atividade 3 não se distancia dos elementos vetoriais que foram trabalhados nas duas primeiras tarefas, porém o grau de complexidade se eleva ao sair das figuras planas mais triviais, como quadrado e triângulo, e avança para um trabalho vetorial usando como base um hexágono regular. O Gerador de Tipo de Tarefas que direcionará as análises das produções dos tipos tarefas, regido pelos dispositivos PL, MM e GG, foi descrito por: $GT_{t3} = [\text{Determinar}; \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FC} \text{ e } \overrightarrow{FD} \text{ em um hexágono regular}; V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7]$ notabilizado pelo enunciado da tarefa que advém deste GT. O diagrama ilustra a potencialidade do GT_{t3} .

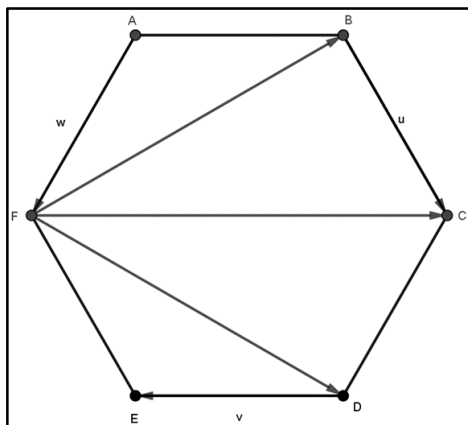
Figura 149 - Ramificações do GT_{t3}



Fonte: acervo da autora (2020)

E uma tarefa que advém deste gerador constitui em: no hexágono regular abaixo: $\overrightarrow{BC} = \vec{u}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{AF} = \vec{w}$. Determine \overrightarrow{FB} , \overrightarrow{FC} e \overrightarrow{FD} .

Figura 150 - Hexágono da atividade 3



Fonte: (CORRÊA, 2006, p.21).

Em continuidade às análises, direciona-se a atenção às realizações dos discentes no âmbito manipulável. Assim, é possível identificar com maior precisão a coordenação do Sub-Gerador de Tipo de Tarefas, $G'T_{t3(MM)} \subset GT_{t3}$, agregado às variáveis como descrito abaixo:

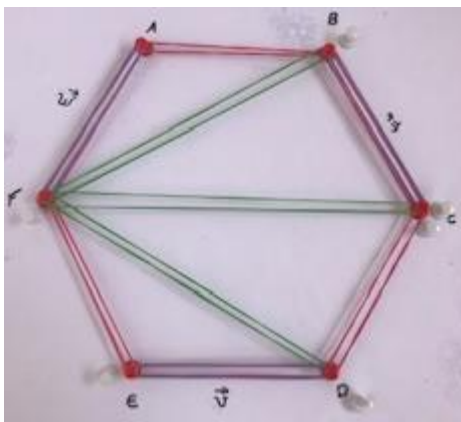
$G'T_{t3(MM)} = [\text{Determinar}; \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FC} \text{ e } \overrightarrow{FD} \text{ no hexágono regular em MM}; V_2, V_3, V_7]$			
V_2 - Natureza de MM (canudos, elásticos, barbantes, EVA, dentre outros).	V_3 - Instrumentos auxiliares agregados a MM (tesoura, cola, tachas, placa de isopor, etc.).	V_6 - Instrumentos disponíveis de PL (régua, esquadros, papel milimetrado, etc.)	V_7 - Configuração (plano, espaço, retangular, triangular, ...).

Fonte: acervo da autora (2020)

Os elásticos, as tachas e a placa de isopor foram os materiais principais utilizados na reprodução da figura 150. É relevante destacar que a régua e o lápis também desempenharam suas funções nas primeiras configurações de medidas e de localização de pontos e segmentos que compõem cada representante dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .

Em termos epistemológicos foram transpostos particularidades de um polígono com seis lados com a mesma medida e ângulos internos congruentes, podendo ser subdividido em triângulos equiláteros. Ponto de vista que possibilita a identificação e associação com \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} em termos de representação. Já a dimensão cognitiva, regida por certa transitividade, integram-se as relações pessoais dos alunos com os vetores, sempre orquestradas por tarefas e técnicas, como exemplificado nas construções dos grupos 3 e 4, nesta sessão de estudo, escolheram trabalhar com MM e realizaram as seguintes construções:

Figura 151 - Construção do Hexágono da atividade 3 em MM (grupo 3)

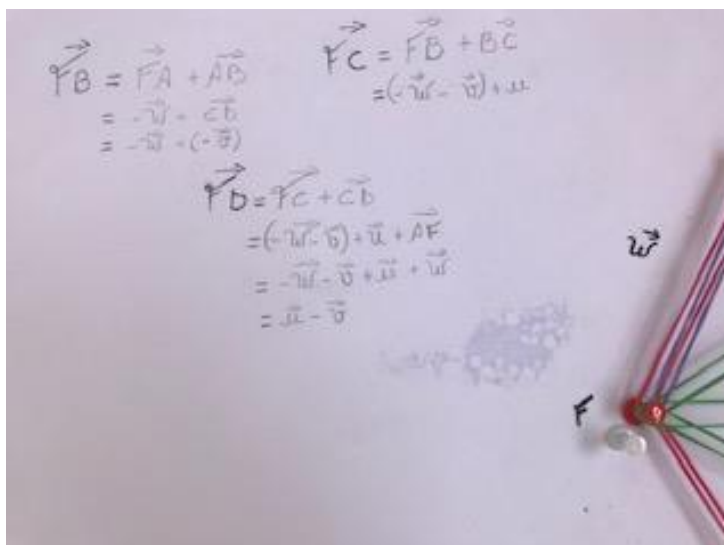


Fonte: acervo da autora (2020)

O primeiro aspecto, digno de nota, é uma pequena deformação provocada na figura 151, oriunda da inclinação indevida do segmento AB, visto que conceitualmente $AB \parallel ED$. Na vertente matemática, isso repercutiria de forma que o hexágono representado acima deixaria de ser um polígono regular. Contudo, esse aspecto não foi um empecilho para o desenvolvimento da atividade. Os alunos prosseguiram e criaram uma técnica para indicar os sentidos dos vetores \overrightarrow{FD} , \overrightarrow{FC} e \overrightarrow{FB} , sinalizado pela tacha na cor branca na extremidade de cada representação destes segmentos. No entanto, essa técnica foi utilizada apenas para os vetores a serem determinado na questão.

Contudo, a recorrência ao dispositivo PL é evidenciada pelo registro ao lado da construção em MM, o que nos leva a reforçar acerca deste fato, tratado anteriormente por meio do potencial inerente ao uso e ao emprego do ambiente Papel/Lápis. Este entendimento é refletido nos registros resolutivos da atividade proposta. Contudo, concebemos que os gestos manipulativos se agregam e integram de forma harmônica ao PL.

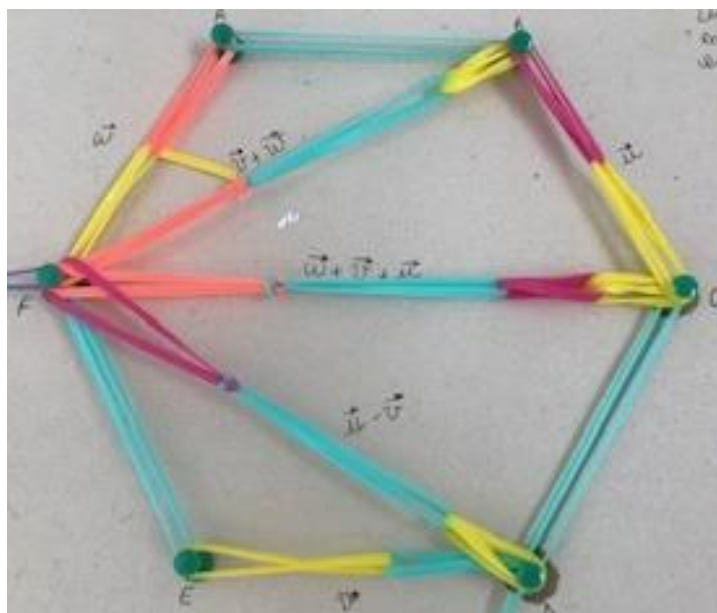
Figura 152 - Resolução PL integrado a MM (grupo 3)



Fonte: acervo da autora (2020)

Os discentes da equipe 4 construíram seu modelo hexagonal utilizando os mesmos recursos que foram disponibilizados e utilizados pela equipe anterior, porém é possível acessar particularidades no que se refere às técnicas, como exposto a seguir:

Figura 153 - Construção do Hexágono da atividade 3 em MM (grupo 4)



Fonte: acervo da autora (2020)

Diferentemente dos membros da equipe 3, as técnicas mobilizadas pelos estudantes se apoiaram, potencialmente, nos elásticos ao indicar o sentido dos vetores e o lápis ou caneta

aparecem como elementos auxiliares na sinalização da representação de cada vetor em função dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} . Nota-se que as cores são elementos que se agregam às técnicas ao diferenciar cada representante dos vetores, porém é relevante pontuar que os estudantes não tiveram o mesmo cuidado ao utilizar o elástico verde água na representação dos segmentos AB, CD e EF, que não são equipolentes dois a dois. Dessa forma, infere-se que a atenção dos componentes deste grupo gravitou apenas na representação dos entes vetoriais caracterizado por meio de uma seta. Na figura 153 identifica-se as seguintes associações às cores dos elásticos, assim pode-se pensar na seguinte legenda:

Quadro 37 - Legenda de cores referente a figura 153

<ul style="list-style-type: none"> - Amarelo indica o sentido de cada vetor; - Verde água corresponde ao vetor \vec{v}; - Rosa escuro corresponde ao vetor \vec{u}; - Laranja corresponde vetor \vec{w}; - $\vec{FB} = \vec{w} + \vec{v}$ (laranja, azul e amarelo); - $\vec{FC} = \vec{w} + \vec{v} + \vec{u}$ (laranja, verde água, rosa escuro e amarelo); - $\vec{FD} = \vec{u} - \vec{v}$ (rosa escuro, verde água e amarelo).

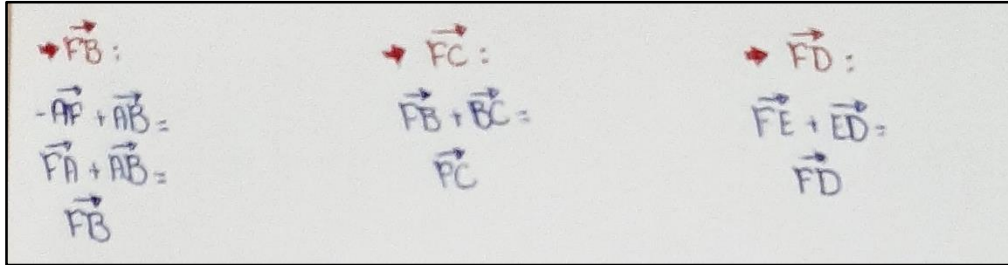
Fonte: acervo da autora (2020)

Como resposta, eles apresentaram as seguintes combinações lineares envolvendo as operações de soma e subtração de vetores: $\vec{FB} = \vec{w} + \vec{v}$; $\vec{FC} = \vec{w} + \vec{v} + \vec{u}$ e $\vec{FD} = \vec{u} - \vec{v}$. É possível notar as proeminências distintivas entre as praxeologias pessoais (CROSET, CHAACHOUA, 2016) que revelam particularidades de caráter individual na produção e na construção de conhecimentos. É notório destacar que os sujeitos institucionais construíram rotas diferenciadas por intermédio de um conjunto de gestos e técnicas que não são prescritos pela instituição, logo situa-se no domínio das praxeologias pessoais, ao direcionar a atenção para o estudo das tarefas provenientes dos Sub-Geradores,

$G'T_{t3(PL)} = [Determinar; \vec{FB}, \vec{FC} \text{ e } \vec{FD} \text{ em um hexágono regular em PL; } V_6, V_7]$	
V_6 - Instrumentos disponíveis de PL (régua, esquadros, papel milimetrado, etc).	V_7 - Configuração (plano, espaço, retangular, triangular, ...).

A partir desses direcionamentos, encontram-se as seguintes realizações advindas dos discentes que fazem parte das equipes 1 e 2.

Figura 154 - Respostas apresentadas por um membro do grupo 1



Fonte: acervo da autora (2020)

Em questões desta natureza, espera-se que o estudante aplique sucessivamente a noção de soma de vetores, multiplicação de um vetor por um escalar e as propriedades relacionadas a estas operações até obter \vec{FB} , \vec{FC} e \vec{FD} como combinação linear dos vetores inicialmente dados. O que significa dizer que, esta seria uma resposta à espera institucional (CHAACHOUA, 2010). No entanto, o estudante se limitou a usar as técnicas que envolvem definição geométrica da adição vetorial e a noção de vetor oposto não apresentado uma solução incompleta em termos dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} . Assim, descrevemos a praxeologia pessoal deste estudante.

Quadro 38 - Praxeologia pessoal de um membro do grupo 1 (continua)

Praxeologia pessoal referente a tarefa 3 em PL	
Tarefa (t) <div style="display: inline-block; vertical-align: middle; margin-left: 10px;"> } <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> t_1 t_2 t_3 </div> </div>	<p>No hexágono regular, $\vec{BC} = \vec{u}$, $\vec{DE} = \vec{v}$ e $\vec{AF} = \vec{w}$. Determine \vec{FB}, \vec{FC} e \vec{FD}.</p> <div style="text-align: center;"> </div>

Fonte: acervo da autora (2020)

Em termos da TAD, trata-se de avaliar as lacunas entre as relações pessoais e as relações de caráter institucional em torno de um objeto estudado, aqui os vetores. Como já sublinhou Chevallard (1989, apud CHAACHOUA, 2010),

<p>Técnica (τ)</p>	<p>$\tau_{1t_1}: \vec{FB} = -\vec{AF} + \vec{AB}$ (Utilizou o vetor oposto de \vec{AF} para efetuar a soma vetorial); $\tau_{2t_1}: \vec{FB} = \vec{FA} + \vec{AB}$ (Igualdades entre vetores, ou seja, $-\vec{AF} = \vec{FA}$);</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <p>Adição de vetores: Extremidade de \vec{FA} coincide com a origem de \vec{AB} resultando em \vec{FB}.</p> </div> <p>$\tau_{1t_2}: \vec{FC} = \vec{FB} + \vec{BC}$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <p>Adição de vetores: Extremidade de \vec{FB} coincide com a origem de \vec{BC} resultando em \vec{FC}.</p> </div> <p>$\tau_{1t_3}: \vec{FC} = \vec{FB} + \vec{BC}$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <p>Adição de vetores: Extremidade de \vec{FB} coincide com a origem de \vec{BC} resultando em \vec{FC}.</p> </div>
<p>Tecnologia (θ)</p>	<p>Vetor oposto e adição de vetores.</p>
<p>Teoria (Θ)</p>	<p>Geometria Analítica</p>

A partir desta relação pessoal surge em particular tudo o que normalmente pensamos que podemos dizer sobre - em termos de "saber", "saber fazer", "concepções", "habilidades", "domínio" e "imagens mentais" ", de "representações ", de " atitudes ", de " fantasias ", etc ... - de X sobre Os. Tudo o que pode ser afirmado - certo ou errado, em conformidade ou não - deve ser considerado (na melhor das hipóteses) para um aspecto do relacionamento pessoal de X com Os. (CHEVALLARD, 1989, apud CHAACHOUA, 2010, p.3, tradução nossa²⁵⁶)

Nesses termos, ao estabelecer um comparativo entre o que foi apresentado na figura 150 e o registro dos cálculos de um componente do grupo 2, figura 155, é viável identificar quais técnicas estão ausentes na produção anterior, ou seja, como vinculou Nguyen (2006):

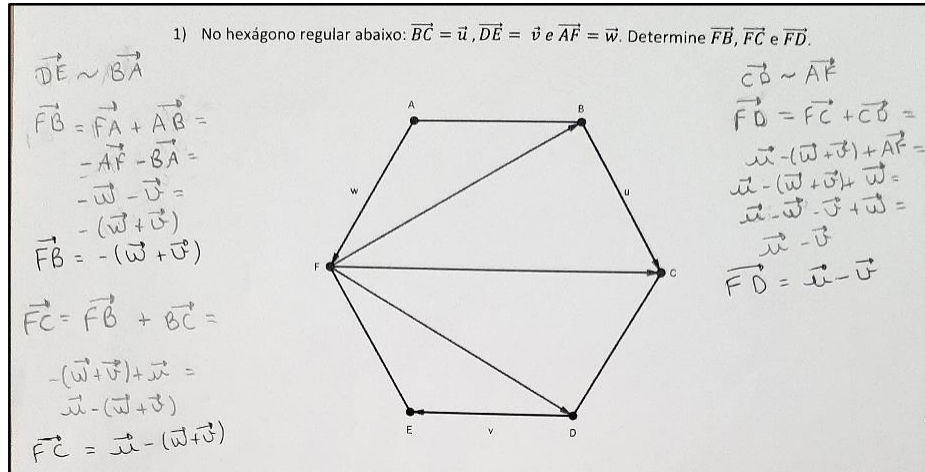
a análise do erro nas praxeologias, destacando os seguintes fenômenos: - O uso de uma técnica cientificamente válida pode levar a erros. - Alguns erros podem ocorrer devido à falta de domínio de técnicas essenciais para a resolução de determinadas tarefas encontradas durante a implementação de uma técnica válida. (NGUYEN, 2006, p. 215, tradução nossa²⁵⁷)

²⁵⁶ De ce rapport personnel relève notamment tout ce qu'on croit ordinairement pouvoir dire - en termes de "savoir", de "savoir-faire", de "conceptions", de "compétences", de "maîtrise", d' "images mentales", de "représentations", d' "attitudes", de "fantasmes", etc...- de X à propos de Os. Tout ce qui peut être énoncé - à tort ou à raison, pertinemment ou non - doit être tenu (au mieux) pour un aspect du rapport personnel de X à Os.

²⁵⁷ l'analyse de l'erreur à des praxéologies en mettant en évidence les phénomènes suivants: - L'utilisation d'une technique scientifiquement valide peut conduire à des erreurs. - Certaines erreurs peuvent être dues à une non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches rencontrées lors de la mise en œuvre d'une technique valide.

Ainda segundo esse autor, o erro é considerado como uma disfunção de uma técnica institucional. Aditado a esse viés, é possível evidenciar a distância entre praxeologias pessoais (CROSET, CHAACHOUA, 2016) e as expectativas institucionais, ou seja, verificar se os conhecimentos dos estudantes estão ou não estão em conformidade com o esperado pela instituição.

Figura 155 - Respostas apresentadas por um membro do grupo 2



Fonte: acervo da autora (2020)

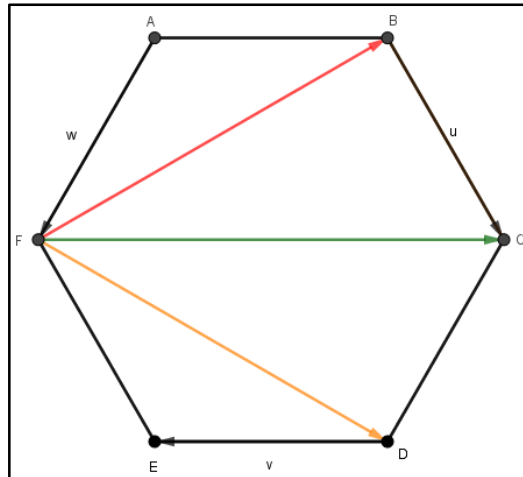
Um dos discentes do grupo 2, seguiu uma sequência de técnicas legitimadas no âmbito epistemológico dos vetores. O primeiro passo foi a identificação de vetores iguais, porém o símbolo (\sim) refere-se aos segmentos equipolentes: $DE \sim BA$ e $CD \sim AF$, fundamentado pela definição: “um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados de E^3 (conjunto dos pontos do espaço tridimensional, isto é, o conjunto dos pontos da Geometria Euclidiana)” (CAMARGO; BOULOS, 1987, p.6). Isto posto, determinou \vec{FB} , \vec{FC} e \vec{FD} como resultante de somas associadas à figura que integra a atividade e, para finalizar, correlacionou cada adição às combinações lineares de \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .

A produção dos estudantes que pertencem aos grupos 5 e 6 foram geridas pelo Sub- Gerador de Tipo de Tarefas,

$G'T_{t3(GG)} = [Determinar; \vec{FB}, \vec{FC} \text{ e } \vec{FD} \text{ em um hexágono regular em } GG; V_4, V_5, V_7, V_8]$			
V_4 - Menu do dispositivo (barra de ferramentas)	V_5 - Dispositivos móveis (notebook, celular, tablets);	V_7 - Configuração (plano, retangular, triangular, ...).	V_8 - existência de restrições proveniente da natureza e limitações dos dispositivos.

A partir de $G'T_{t3(GG)}$ coordenado pelos valores das variáveis V_4, V_5 – computador, V_7 – no plano e V_8 – limitação no domínio do GG, o que resultou na imagem retratada a seguir, assim como exposto no protocolo de construção que fornece informações sobre as ações executadas.

Figura 156 - Produção dos componentes do grupo 5



Fonte: acervo da autora (2020)

Figura 157 - Protocolo de construção tarefa 3

Protocolo de Construção					
N.	Nome	Íco...	Descrição	Definição	Valor
1	Ponto E				E = (2.98, 4.76)
2	Ponto D				D = (6.98, 4.76)
3	Polígono ...		Polígono(E, D, 6)	Polígono(E, D, 6)	pol1 = 41.57
3	Segmento f		Segmento E, D	Segmento(E, D, pol1)	f = 4
3	Segmento g		Segmento D, C	Segmento(D, C, pol1)	g = 4
3	Ponto C		Polígono(E, D, 6)	Polígono(E, D, 6)	C = (8.98, 8.22)
3	Ponto B		Polígono(E, D, 6)	Polígono(E, D, 6)	B = (6.98, 11.69)
3	Ponto A		Polígono(E, D, 6)	Polígono(E, D, 6)	A = (2.98, 11.69)
3	Ponto F		Polígono(E, D, 6)	Polígono(E, D, 6)	F = (0.98, 8.22)
3	Segmento h		Segmento C, B	Segmento(C, B, pol1)	h = 4
3	Segmento i		Segmento B, A	Segmento(B, A, pol1)	i = 4
3	Segmento j		Segmento A, F	Segmento(A, F, pol1)	j = 4
3	Segmento k		Segmento F, E	Segmento(F, E, pol1)	k = 4
4	Vetor w		Vetor(A, F)	Vetor(A, F)	w = (-2, -3.46)
5	Vetor u_1		Vetor(F, B)	Vetor(F, B)	$u_1 = (6, 3.46)$
6	Vetor u		Vetor(B, C)	Vetor(B, C)	u = (2, -3.46)
7	Vetor v_1		Vetor(F, C)	Vetor(F, C)	$v_1 = (8, 0)$
8	Vetor a		Vetor(F, D)	Vetor(F, D)	a = (6, -3.46)
9	Vetor v		Vetor(D, E)	Vetor(D, E)	v = (-4, 0)

Fonte: acervo da autora (2020)

Na construção de polígonos regulares, as ferramentas do software indicam, enquanto primeiro passo, selecionar dois pontos e, depois, entrar com o número de vértices. Nesse caso, determinou-se os pontos E e D e seis vértices como descrito pelo comando Polígono (E, D, 6). Nota-se que após a construção que originou o hexágono regular, o programa decompõe a terceira etapa entre segmentos f, g, h, i, j, k, de igual modo como os pontos C, B, A e F. É

possível observar também que o comprimento de cada segmento corresponde a 4 unidades de comprimento.

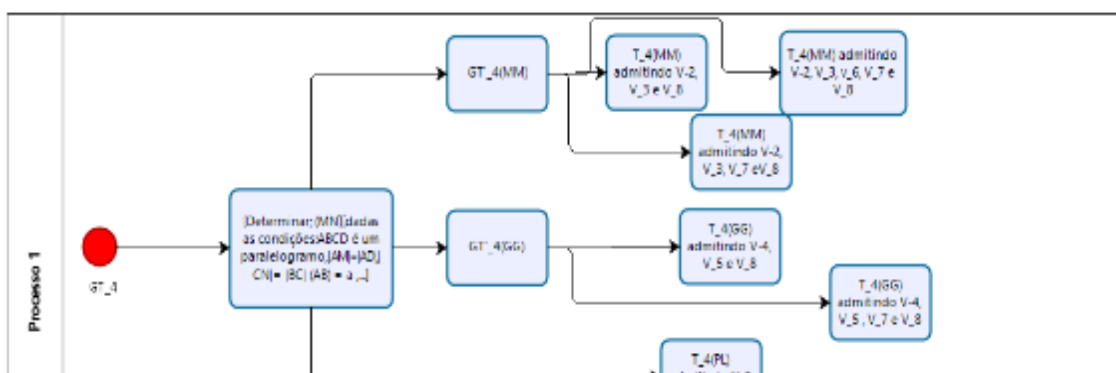
Nos passos de 4 a 9 os discentes definiram os vetores enquanto réplica da figura 150 associada à atividade. É relevante pontuar que as produções realizadas no ambiente do GeoGebra têm como sustentação as coordenadas cartesianas, sejam no plano (\mathbb{R}^2) ou no espaço (\mathbb{R}^3), mesmo ao ocultar malha e eixos. Contudo, os pares ordenados nos fornecem pistas acerca da combinação linear solicitada na tarefa. Assim, é possível identificar as seguintes características: - mesmo valor, em módulo, da ordenada de \vec{w} , \vec{u} , \vec{u}_1 e \vec{a} , assim como $y = 0$ para as ordenadas de \vec{v}_1 e \vec{v} , aditado aos múltiplos das abscissas.

Os elementos postos em evidência poderiam ser ingredientes de estudo ao assimilar os valores constituintes da janela de álgebra à imagem hexagonal presente na janela de visualização, mitigando, assim, o trânsito dos sujeitos para o dispositivo PL. Dessa forma, o uso de variadas cores nas representações dos vetores integra todas as técnicas nos dispositivos MM e GG. A partir dessa perspectiva, poderemos agregar aos materiais que compõem o ambiente PL, lápis de cor. E, de posse desse novo material, os sujeitos validariam ou não a sua utilização, posto a necessidade do trabalho com distintas cores na representação dos diferentes vetores.

7.5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA TAREFA 4

As quatro primeiras atividades apresentadas aos participantes do curso tiveram em suas configurações o tratamento geométrico no plano, sem assimilação com a disposição analítica das coordenadas cartesianas. E como arremate desta abordagem, o $GT_{t4} = [\text{Determinar}; \overline{MN}$ dadas as condições: ABCD é um paralelogramo, $|AM| = |AD|$, $|CN| = |BC|$, $\overline{AB} = \vec{a}$ e $\overline{BC} = \vec{b}$; $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8]$ guiou a produção dos tipos de tarefas de acordo com o valor assumido por cada dispositivo. Como ilustrado a seguir:

Figura 158 - Potencialidades do GT_{t4}



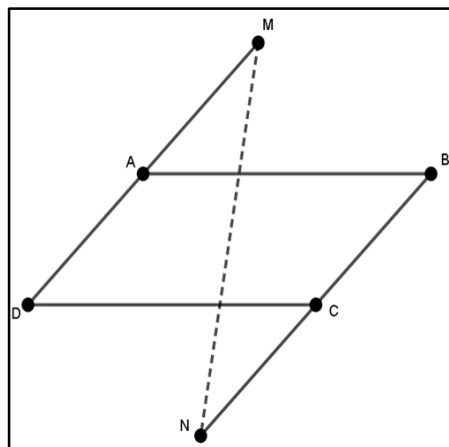
Fonte: acervo da autora (2020)

Para facilitar a escrita dos demais GTs associa-se as seguintes referências: $ABCD$ é um paralelogramo (I); $|AM| = |AD|$ (II); $|CN| = |BC|$ (III); $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ (IV); $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (V). Caracterizando na questão 4 abaixo descrita:

Na figura, $ABCD$ é um paralelogramo e $|AM| = |AD|$, $|CN| = |BC|$. Se $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, então \overrightarrow{MN} será igual a:

- a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $2\vec{a} + \vec{b}$ c) $\vec{a} + 2\vec{b}$ d) $3\vec{a} + \vec{b}$ e) $\vec{a} + 3\vec{b}$

Figura 159 - Paralelogramo agregado a outros elementos atividade 4



Fonte: (CORRÊA, 2006, p.43).

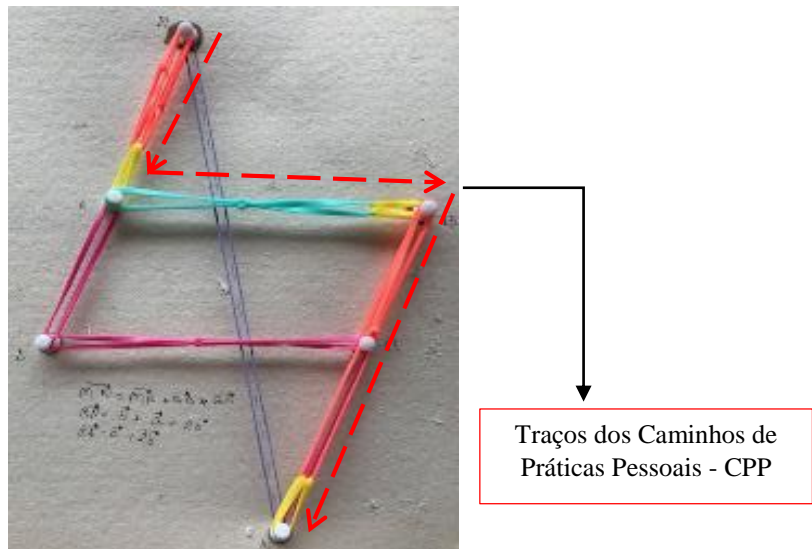
Em sintonia com o cenário delineado por meio das três tarefas analisadas, coloca-se em evidência o Sub - Gerador de Tipo de Tarefas denotado por:

$G'T_{t4(MM)} = [Determinar; \overline{MN}, \text{dadas as condições: (I), (II), (III), (IV), (V) em MM; } V_2, V_3, V_6, V_7]$			
V_2 - Natureza de MM (canudos, elásticos, barbantes, EVA, dentre outros).	V_3 - Instrumentos auxiliares agregados a MM (tesoura, cola, tachas, placa de isopor, etc.).	V_6 - Instrumentos disponíveis de PL (régua, esquadros, papel milimetrado, etc).	V_7 - Configuração (plano, espaço, retangular, triangular, ...).

Fonte: acervo da autora (2020)

Os componentes do grupo 1 retornam ao dispositivo MM. Nestes termos, observa-se um trabalho desenvolvido colaborativamente na elaboração do seguinte modelo:

Figura 160 - Reprodução da figura 159 em MM (grupo 1)



Fonte: acervo da autora (2020)

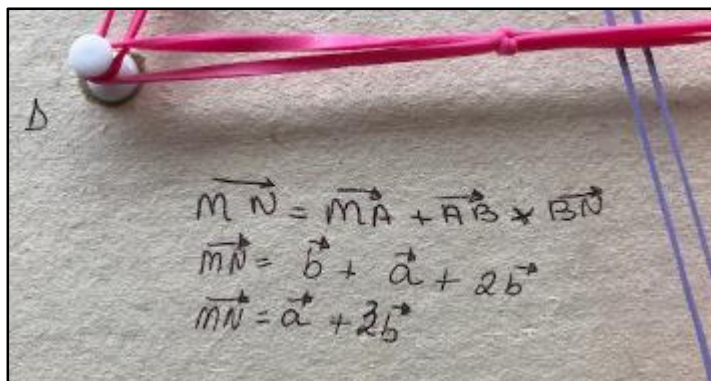
É relevante destacar que as combinações lineares²⁵⁸ integraram todas atividades descritas e estudadas até o momento. Entretanto, esta questão evidencia um novo conceito (módulo dos segmentos) revelado nas condições (II) e (III). Mais explicitamente, por meio das igualdades $|AM| = |AD|$ e $|CN| = |BC|$, o que significa dizer que os pontos A e C, vértices do paralelogramo ABCD, assumem também a função de pontos médios dos segmentos MD e BN, respectivamente.

Amparado na figura 159, nota-se a seguinte falha: o ponto C não foi caracterizado, em sua representação, como ponto médio do segmento BN, assim como o ponto A também não

²⁵⁸ Um vetor v é uma combinação linear de vetores v_1, v_2, \dots, v_k se existirem escalares c_1, c_2, \dots, c_k , tais que $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k$. Os escalares c_1, c_2, \dots, c_k , são chamados coeficientes da combinação linear (POOLE, 2006, p.13)

assumiu a posição de ponto médio no segmento MD. Contudo, existe uma discrepância entre a reprodução da imagem que acompanha a questão e a resolução apresentada pelo grupo.

Figura 161 - Resolução da 4ª atividade com suporte de MM

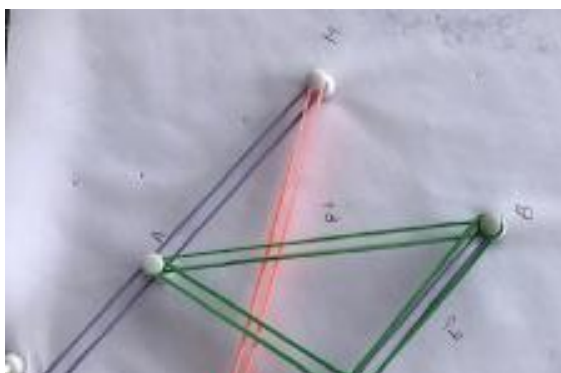


Fonte: acervo da autora (2020)

Nestes termos, é possível notar que, os discentes seguiram as condições e informações complementares da questão, optando pelo CPP, sinalizado na figura 161, concluindo que $\overrightarrow{MN} = \vec{a} + 3\vec{b}$, ou seja, o item d contempla a combinação correta. Destarte, outros caminhos podem ser trilhados na resolução desta atividade, por exemplo: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$, assim também podemos afirmar que, $\overrightarrow{MN} = 2\vec{b} + \vec{a} + \vec{b}$, ou seja, $\overrightarrow{MN} = \vec{a} + 3\vec{b}$.

Ao direcionar a atenção para a produções dos sujeitos que integram o grupo 2, depara-se a seguinte construção:

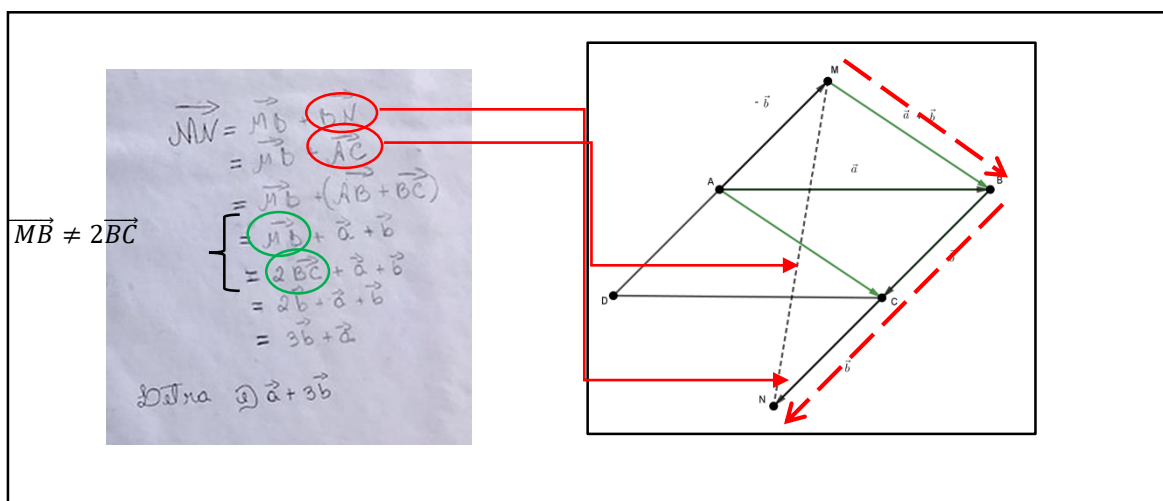
Figura 162 - Resolução da 4ª atividade com suporte de MM (grupo 2)



Fonte: acervo da autora (2020)

Primeiramente, dedica-se atenção para a composição manipulável. O paralelogramo ABCD foi subdividido em dois triângulos, em destaque o triângulo ABC composto por elásticos verdes. Atribui-se tal evidencia aos dados da questão: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, destacados na figura 162. Em termos de praxeologias pessoais (CROSET, CHAACHOUA, 2016), revelamos o seguinte esquema que exibe, de forma detalhada, os passos resolutivos da questão que implicitamente revela traços do Caminho de Práticas Pessoais - CPP.

Figura 163 - CPP trilhado pelo grupo 2



Fonte: acervo da autora (2020)

Entretanto, o registro ao lado do modelo construído pelos estudantes, o qual foi esquematizado no intuito de pontuar as inconsistências relacionadas aos aspectos que se distanciam e destoam da definição de vetor, o que evidencia que os componentes deste grupo não compreenderam as propriedades básicas inerente ao conceito vetorial, em que foram

desprezadas as características: módulo, direção e sentido. Assim, temos ciência da distinção entre as praxeologias pessoais, as quais têm como foco de interesse as praxeologias apreendidas que nem sempre estão em conformidade com as praxeologias institucionais, pois de acordo com Chaachoua e Bessot (2018),


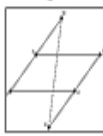
Diante de um tipo de Tarefas T, a instituição espera do estudante o estabelecimento de uma técnica que gere uma organização matemática institucional associada ao tipo de tarefa T. A não conformidade da relação pessoal à T se traduz pela aplicação de uma técnica que seja cientificamente válida, mas não institucionalmente adequada, ou que seja cientificamente inválida (NGUYEN; CHAACHOUA; COMITI, 2007). Estas técnicas se diferem das técnicas institucionais e, em alguns casos, a diferença entre a técnica τ do estudante e a técnica esperada pela instituição pode ser modelada da seguinte forma: diante de uma tarefa T, o aluno a percebe como pertencente a um tipo de tarefa diferente do da instituição, podendo mesmo nem existir nesta instituição. (CHAACHOUA, BESSOT, 2018, p.118)

Na segunda linha, nota-se que \overrightarrow{AC} assume o lugar de \overrightarrow{BN} , o que matematicamente significa dizer que os vetores possuem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento, ou seja, os segmentos BN e AC são equipolentes ou \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BN} são iguais, porém isto não ocorre. A terceira linha, apresenta um passo teoricamente correto se não adviesse da linha anterior, a qual contém o erro sinalizado anteriormente.

Inferimos que, forçosamente, os estudantes induzem o aparecimento de $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ que integram os dados da atividade, aspecto esse concretizado na quarta linha. No quinto passo ou melhor na quinta linha, a técnica empregada também os leva a cometerem mais um erro, ao considerar que $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{BN}$, visto que os vetores não são múltiplos e, portanto, não possuem a mesma direção.

Estranhamente, os componentes deste grupo chegam à resposta esperada pela instituição. Observa-se esforços guiados pelos assujeitamentos que se vinculam diretamente ao topos do estudante ocupado na instituição, os quais conduzem a se comportarem enquanto bons sujeitos institucionais. Visto que, “quando os indivíduos passam a ocupar tais posições, eles se tornam sujeitos das instituições - sujeitos ativos que contribuem para dar vida às instituições pelo próprio fato de estar assujeitados a elas.” (CHEVALLARD, 1999, p. 4). Nos moldes descritos anteriormente, podemos estabelecer comparações entre os dois Caminhos de Práticas Pessoais – CPP descritos pelas setas pontilhadas ilustradas nas figuras 160 e 163. Como descrito no quadro,

Quadro 39 - Um zoom entre as duas resoluções

Foram expostos as mesmas condições a priori	Percurso Praxeológico de Resolução (Grupo 1)		Percurso Praxeológico de Resolução (Grupo 2)	
	Tarefa (t)	Na figura, ABCD é um paralelogramo e $ AM = AD $, $ CN = BC $. Se $\vec{AB} = \vec{a}$ e $\vec{BC} = \vec{b}$, então \vec{MN} será igual a:  <p>a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $2\vec{a} + \vec{b}$ c) $\vec{a} + 2\vec{b}$ d) $3\vec{a} + \vec{b}$ e) $\vec{a} + 3\vec{b}$</p>	Tarefa (t)	Na figura, ABCD é um paralelogramo e $ AM = AD $, $ CN = BC $. Se $\vec{AB} = \vec{a}$ e $\vec{BC} = \vec{b}$, então \vec{MN} será igual a:  <p>a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $2\vec{a} + \vec{b}$ c) $\vec{a} + 2\vec{b}$ d) $3\vec{a} + \vec{b}$ e) $\vec{a} + 3\vec{b}$</p>
	Técnica (tr)	<ol style="list-style-type: none"> Utilizaram régua e lápis para determinar a localização dos pontos A, B, C, D, M e N; Colocaram as tachas em cada ponto; Escolheram as cores dos elásticos que representaria cada vetor: roxo (\vec{MN}), amarelo (sentido), verde (\vec{a}) e laranja (\vec{b}) e rosa (representa o que falta para integralizar a figura); Ampliação do comprimento dos elásticos por meio de amarrações e conexões entre os elásticos; Registro no papel paraná, que forra a placa de Isopor, da soma vetorial. 	Pontos divergentes	<ol style="list-style-type: none"> Utilizaram régua e lápis para determinar a localização dos pontos A, B, C, D, M e N; Colocaram as tachas em cada ponto; Escolheram as cores dos elásticos que representaria os vetores: laranja (\vec{MN}), verde (triângulo ABC assim como representação do vetor \vec{a}), roxo (representa o que falta para integralizar a figura); Construção do triângulo ABC; Registro na cartolina, que forra a placa de Isopor, da soma vetorial.
	Tecnologia (θ)	Soma de vetores e propriedades (comutativa e associativa), igualdade entre vetores, combinação linear.	Tecnologia (θ)	Congruência de triângulos, Soma de vetores e propriedades (comutativa e associativa), igualdade entre vetores, combinação linear.
	Teoria (θ)	Geometria Analítica e Álgebra Linear.	Teoria (θ)	Geometria Plana, Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Fonte: acervo da autora (2020)

Como mais um parâmetro, direcionamos o nosso olhar para as produções desenvolvidas em PL, as quais se apoiaram nos desenhos das tarefas provenientes do Sub-Gerador de Tipo de Tarefas $G'T_{t4(PL)}$, como descrito a seguir,

$G'T_{t4(PL)} = [Determinar; \vec{MN}, \text{dadas as condições: (I), (II), (III), (IV), (V) em PL; } V_6, V_7]$	
V_6 - Instrumentos disponíveis de PL (régua, esquadros, papel milimetrado, etc).	V_7 - Configuração (plano, espaço, retangular, triangular, ...).

Fonte: acervo da autora (2020)

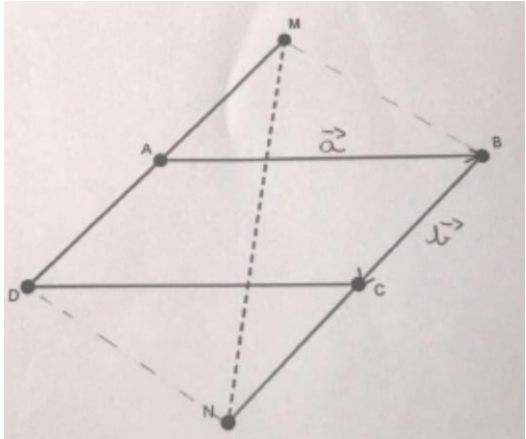
O registro ostensivo, figura 159, que acompanha a descrição da quarta tarefa serviu como suporte para externar os Caminhos de Práticas Pessoais – CPP como evidenciados no quadro,

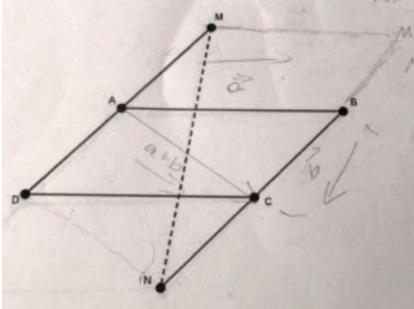
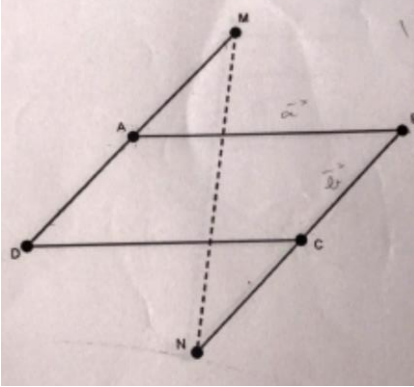
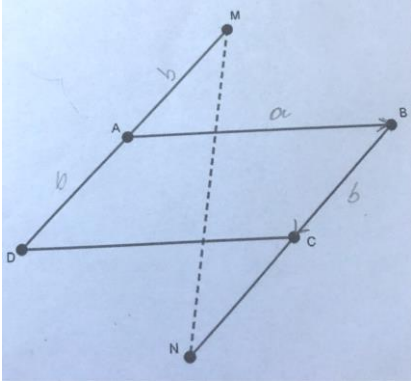
Quadro 40 - CPP dos grupos 5 e 6 da tarefa 4 em PL (continua)

Traços de Algumas Práticas Pessoais no trabalho com PL (grupos 5 e 6)	
(I)	$\vec{AM} = -\vec{AD} = -\vec{BC}$



	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MB}$ $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{MB}$ $\overrightarrow{BN} = 2\vec{b}$ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + 2\vec{b}$ $\overrightarrow{MN} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{b}$ $\overrightarrow{MN} = \vec{a} + 3\vec{b}$
--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>(II)</p> 	<p><i>Hipóteses:</i></p> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{DA}$ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ $\overrightarrow{MA} = \vec{b}$ $\overrightarrow{MB} \sim \overrightarrow{DN}$ </div> <p><i>Resolução:</i></p> <div style="border: 1px solid blue; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}$ $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA}$ $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \vec{a}$ $\overrightarrow{MB} = \vec{b} + \vec{a}$ </div> <div style="border: 1px solid blue; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$ $\overrightarrow{MN} = (\vec{b} + \vec{a}) + 2\vec{b}$ $\overrightarrow{MN} = \vec{b} + \vec{a} + 2\vec{b}$ $\overrightarrow{MN} = \vec{a} + 3\vec{b}$ </div>
-------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>(III)</p> 	$\overrightarrow{MD} = 2\vec{b}; \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN}$ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \vec{a} + \vec{b}$ $\overrightarrow{MN} = 2\vec{b} + \vec{a} + \vec{b}$ $\overrightarrow{MN} = 3\vec{b} + \vec{a}$
<p>(IV)</p> 	$ AM + AD + DN = MN$
<p>(V)</p> 	$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ $\overrightarrow{MN} = \vec{b} + \vec{a} + 2\vec{b}$ $\overrightarrow{MN} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{b}$ $\overrightarrow{MN} = \vec{a} + 3\vec{b}$

Fonte: acervo da autora (2020)

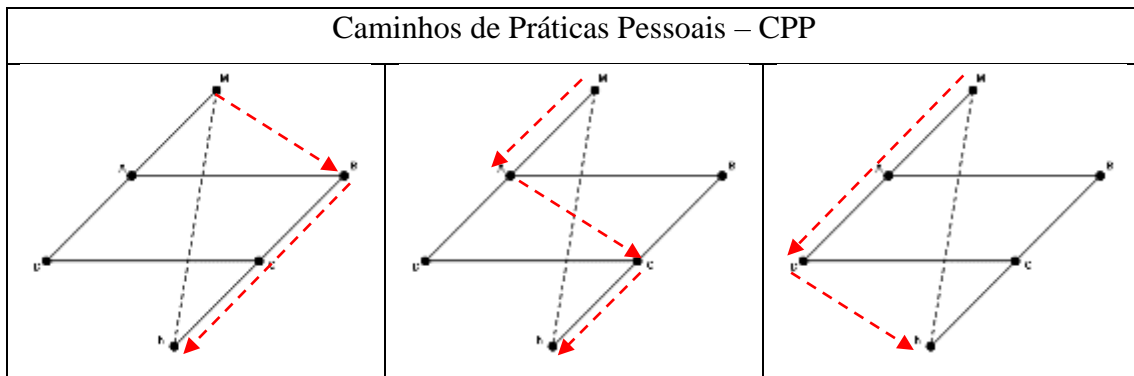
Os exemplos elencados evidenciam peculiaridades das interpretações e dos caminhos trilhados por cada discente na resolução dessa tarefa, ou seja, emerge a construção de rotas diferenciadas. Como destaca, Saglam (2004, p. 44, tradução nossa²⁵⁹) “as relações pessoais dos sujeitos, neste caso os estudantes, são construídas sob o efeito de várias interações existentes (cursos seguidos, trabalhos estudados, práticas realizadas, etc.)”. Vertente essa que pode ser

²⁵⁹ les rapports personnels des sujets, en l'occurrence des étudiants, se construisent sous l'effet de plusieurs interactions existantes (cours suivis, ouvrages étudiés, pratiques réalisées etc.)

refletida na resolução (I), em que é destacada a congruência entre os segmentos que compõem a figura, apontando todos os representantes dos vetores \vec{a} e \vec{b} . Assim, colhe-se informações do registro ostensivo, os quais são transpostos para a Organização Matemática – OM que foi desenhada primeiramente destacando alguns representantes do vetor \overrightarrow{AM} , prosseguindo com as operações vetoriais que culminou com a constatação que $\overrightarrow{MN} = \vec{a} + 3\vec{b}$.

O esboço resolutivo (II) traz características distintas do que foi revelado em (I) no que se refere ao que foi indicado na figura, em relação às interligações entre as extremidades dos segmentos DN e MB. Contudo, nota-se que os argumentos empregados no processo praxeológico assumem aspectos similares. No entanto, ao olhar para (III), as diferenças emergem com mais força, no que se refere aos elementos ostensivos traçados na imagem, quando ao contexto praxeológico que se integra ao caminho resolutivo. Já em (IV), percebemos equívocos em relação a uma soma de módulos igualados a um segmento. Assim, supomos que, possivelmente, o discente desejava expressar uma soma vetorial a qual poderia ser expressa por: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{MN}$.

Quadro 41 - Trajetórias trilhadas na resolução da quarta tarefa



Fonte: acervo da autora (2020)

A quinta (V) resolução apresenta técnicas com um caráter mais econômico dentre as que foram descritas, pois parte-se da soma dos três vetores ao invés da subdivisão em duas ou três etapas, para só então obter o resultado. Aspecto esse, que dialoga com a concepção de Brousseau (1997) acerca de algumas ideias fundadoras,

Esses modelos devem ter variantes e variáveis. Podemos então pesquisar, por meios matemáticos e experimentais, quais os valores dessas variáveis que podem determinar as condições ótimas para a difusão de determinado conhecimento, ou explicar aquelas que aparecem como a resposta (teoricamente) ótima às condições propostas ao aluno. Para dados valores dessas variáveis existe pelo menos uma estratégia ótima (do ponto de vista de seu custo de implementação, sua confiabilidade, seu custo de

aprendizagem ...) e um ou mais conhecimentos que lhe correspondem. Chamamos de variável cognitiva uma variável da situação tal que, ao escolher valores diferentes, pode-se provocar mudanças no conhecimento ótimo. As variáveis didáticas estarão entre as variáveis cognitivas aquelas que podem ser definidas pelo professor. (BROUSSEAU, 1997, pp. 3-4, tradução nossa²⁶⁰)

Frente a esse escopo variacional, as trajetórias que presidem a disseminação e a aquisição de conhecimentos apontam para o aspecto pujante das recombinações praxeológicas, um dos casos de praxeologia transposta em que um logos é mantido, mas uma praxis é modificada $(\Pi^*) \oplus \Lambda$ (CHEVALLARD, 2018), as quais se articulam com a dinâmica da organização do estudo apoiada nas interações entre os distintos dispositivos. Assim, também nos parece útil conceber que,

- o estudo de padrões localiza o olhar sobre o sujeito em ação, o estudo de técnicas localiza o olhar sobre o assunto e sua relação com a instituição, as tarefas e os gestos que propõe;
- o estudo de padrões é uma construção, a partir da observação de sujeito e regularidade de sua ação, o estudo de técnicas é um estudo de gestos e a diferença entre gestos e gestos prescritos é feita dentro de uma organização praxeológica. (TROUCHE, 2003, pp. 15-16)

Na trilha de análise das técnicas e, por consequência, das produções oriundas do Sub-Generador de Tipo de Tarefas, $G'T_{t_4(GG)}$, o qual estruturou e direcionou o trabalho com o software GeoGebra, como ilustrado a seguir,

$G'T_{t_4(GG)} = [Determinar; \overline{MN}, \text{dadas as condições: (I), (II), (III), (IV), (V) em GG; } V_4, V_5, V_7]$		
V_4 - Menu do dispositivo (barra de ferramentas)	V_5 - Dispositivos móveis (notebook, celular, tablets);	V_7 - Configuração (plano, espaço, retangular, triangular, ...).

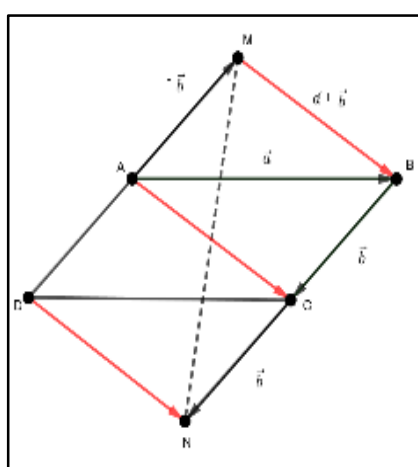
Alguns discentes que integravam os grupos 3 e 4 não compareceram ao encontro. Assim, os remanescentes se reuniram e deram origem a um novo grupo.

As produções foram desenvolvidas de forma colaborativa, configurado por um coletivo que se esforçou para obter uma resposta para t_4 , se aproximando do ideário inerente à Dialética do Individual e do Coletivo, vertente essa que propicia ao “Sistema Didático – SD sair da

²⁶⁰ Ces modèles doivent présenter des variantes et des variables. On peut alors chercher par des moyens mathématiques et expérimentaux, quelles valeurs de ces variables peuvent déterminer les conditions optimales de diffusion de connaissances déterminées, ou expliquer celles qui apparaissent comme réponse (théoriquement) optimale aux conditions proposées à l'élève. Pour des valeurs données de ces variables il existe au moins une stratégie optimale (du point de vue de son coût de mise en œuvre, de sa fiabilité, de son coût d'apprentissage...) et une ou des connaissances qui lui correspondent. Nous appelons variable cognitive, une variable de la situation telle que par le choix de valeurs différentes on peut provoquer des changements de la connaissance optimale. Les variables didactiques seront parmi les variables cognitives celles qui peuvent être fixées par l'enseignant.

autonomia (individual, sob a direção de Y) para a construção de uma sinonímia (coletivo, em cooperação com Y)” (CHEVALLARD, 2018, p. 47). Esse aspecto é evidenciado por meio das relações e aproximações entre os discentes, ao desenvolverem um trabalho colaborativo ao construírem os modelos utilizados como suporte para solucionar as questões. De acordo com Chevallard (2018, p. 47), significa dizer que “[...]um coletivo que se esforça a estudar Q e produzir solidariamente uma resposta R, ao invés de alcançá-la individualmente, como é em uma classe ‘ordinária’.”

Figura 164 - Produção resolutiva da quarta tarefa em GG



Fonte: acervo da autora

O protocolo de construção nos revela traços das técnicas que foram empregadas com o intuito de obter o que foi solicitado na quarta tarefa, como evidenciado por meio de vinte ações apresentadas a seguir,

Figura 165 - Protocolo de Construção da tarefa 4 em GG (a)

N.	Nome	Íco.	Definição	Valor	Legenda
1	Ponto D			D = (2,04, 2,04)	
2	Ponto A			A = (4, 4)	
3	Ponto B			B = (9, 4)	
4	Ponto C			C = (7, 2)	
5	Quadrilat.		Polígono(D, A, B, C)	q1 = 9,9	
5	Segment...		Segmento(D, A, q1)	a = 2,77	
5	Segment...		Segmento(A, B, q1)	b = 5	
5	Segment...		Segmento(B, C, q1)	c = 2,83	
5	Segment...		Segmento(C, D, q1)	d = 4,96	
6	Ponto M			M = (6, 6)	
7	Segment...		Segmento(A, M)	f = 2,83	
8	Ponto N		Ponto(EixoX)	N = (5, 0)	
9	Segment...		Segmento(C, N)	g = 2,83	

Fonte: acervo da autora (2020)

Figura 166 - Protocolo de Construção da tarefa 4 em GG (b)

N.	Nome	Íco.	Definição	Valor	Legenda
10	Segment...		Segmento(M, N)	h = 6.08	
11	Texto text...	ABC		"\$vec{b}\$"	
12	Texto text...	ABC		"\$vec{a}\$"	
13	Vetor u		Vetor(A, B)	u = (5, 0)	
14	Vetor v		Vetor(B, C)	v = (-2, -2)	
15	Vetor w		Vetor(A, C)	w = (3, -2)	
16	Vetor e		Vetor(M, B)	e = (3, -2)	
17	Texto text...	ABC		"\$vec{a}\$"	
18	Texto text...	ABC		"\$vec{b}\$"	
19	Texto text...	ABC		"+"	
20	Texto text...	ABC		"-"	
21	Texto text...	ABC		"\$vec{b}\$"	
22	Vetor i		Vetor(A, M)	i = (2, 2)	
23	Vetor j		Vetor(C, N)	j = (-2, -2)	
24	Texto text...	ABC		"\$vec{b}\$"	
25	Texto texto ₃ ₁	ABC		"\$vec{a}\$"	
26	Texto texto ₃ ₂	ABC		"\$vec{a}\$"	
27	Vetor k		Vetor(D, N)	k = (2.96, -2.04)	

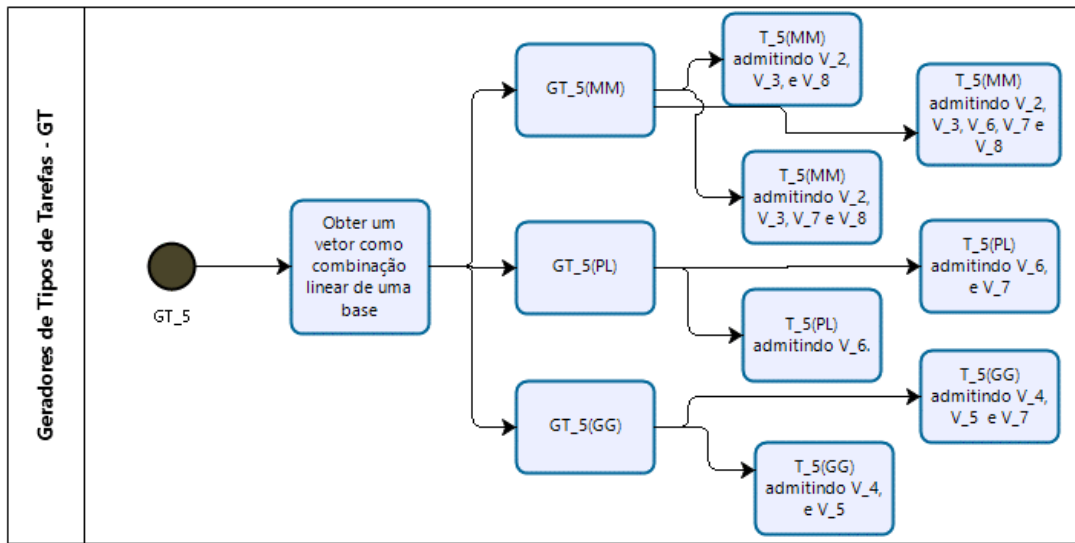
Fonte: acervo da autora (2020)

O conjunto de comandos que deram origem a figura 166, nos permitiu observar que os discentes, em um primeiro momento, mobilizaram algumas técnicas: determinaram os pontos, os quais serviram de base para o uso da ferramenta polígono na criação do quadrilátero DABC. Assim, a partir do paralelogramo determinou-se os segmentos AM e CN e, por fim, o segmento MN. Nestes termos, observou-se que a imagem que acompanha a questão foi concluída. No entanto, os estudantes não se limitaram a esse aspecto e avançaram nomeando e determinando os vetores que integram o enunciado da tarefa, assim como seus representantes, a fim de revelar que, $\overrightarrow{MN} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{b} + \vec{b}$, ou seja, $\overrightarrow{MN} = \vec{a} + 3\vec{b}$.

7.6 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA TAREFA 5

A quinta tarefa apresenta em sua abordagem vetores no espaço, geralmente denotado por R^3 . Por questões de encadeamento de ideias, seguimos a mesma ordem descrita anteriormente, ou seja, trataremos das produções realizadas no âmbito dos Dispositivos Didáticos {MM, PL, GG} respectivamente. Assim, GT_{t5} pode ser esquematizado,

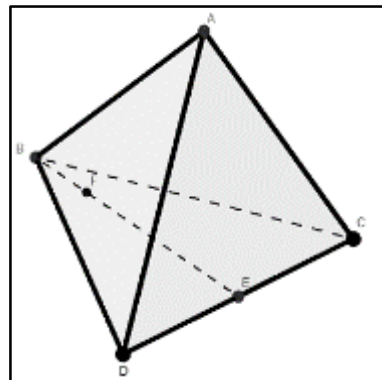
Figura 167 - Potencialidades do GTt5



Fonte: acervo da autora (2020)

Um dos tipos de tarefas que advém deste gerador tem o seguinte enunciado: No tetraedro ABCD, E é o ponto médio do segmento DC e F satisfaz $\vec{BF} = \frac{1}{4}\vec{BE}$. Suponha $\vec{a} = \vec{AB}$; $\vec{b} = \vec{AC}$ e $\vec{c} = \vec{AD}$. Obtenha \vec{AF} como combinação linear de \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} .

Figura 168 - Tetraedro que integra o enunciado da quinta questão



Fonte: acervo da autora (2020)

Para situar, com maior precisão o direcionamento das análises, recorremos ao $GT_{t5} = [Obter; um\ vetor\ como\ combinação\ linear\ de\ uma\ base; V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7]$, o qual guiou a produção das tarefas de acordo com o valor assumido por cada variável, em consonância com os dispositivos. Assim, sendo desmembrado de acordo com o grau de granularidade, por

intermédio de Sub-Geradores de Tipo de Tarefas, dentre os quais descrevemos, primeiramente, o $G'T_{t5(MM)}$.

$G'T_{t5(MM)} = [Obter; \text{um vetor como combinação linear de uma base em MM}; V_2, V_3, V_6, V_7]$			
V_2 - Natureza de MM (canudos, elásticos, barbantes, EVA, dentre outros).	V_3 - Instrumentos auxiliares agregados a MM (tesoura, cola, tachas, placa de isopor, etc.).	V_6 - Instrumentos disponíveis de PL (régua, esquadros, papel milimetrado, etc).	V_7 - Configuração (plano, espaço, retangular, triangular, ...).

Fonte: acervo da autora (2020)

Os grupos 3 e 4, nessa etapa, retornam para o ambiente tangível, porém com um diferencial, as produções deveriam reproduzir um sólido geométrico, nesse caso um tetraedro, para então obter o vetor solicitado, o que altera a instanciação material deste objeto geométrico. Nestes termos, nota-se que a variável V_7 assume outro valor, pois temos uma mudança na configuração. Saímos do plano e agora a produção foi operacionalizada no espaço. Revelamos, sob alguns ângulos, as construções do grupo 3.

Figura 169 - Protótipo de Tetraedro em MM (Grupo 3)



Fonte: acervo da autora (2020)

Os canudos e barbantes se integram a V_2 , sob a natureza de MM, assumindo valores que ditaram a reprodução representativa do protótipo. Em V_3 , faz-se referência aos instrumentos auxiliares agregados a MM, o uso da tesoura ou estilete configuraram a ferramenta de corte, auxiliado pela régua que integra V_6 . Nesse contexto, afloram interlocuções com a materialização de objetos nos moldes tangíveis, os quais se apresentam como candidatos

promissores para a ocorrência de rompimento com as limitações representacionais dos entes geométricos espaciais, pois como sinalizou Chaachoua (1998),

Um desenho muitas vezes resulta em perda de informações, uma vez que muitas propriedades do objeto geométrico não podem ser traduzidas em relações espaciais em uma folha de papel, a menos que envolva códigos e convenções de representação como por exemplo, para a perpendicularidade de dois planos. Da mesma forma, as propriedades espaciais do desenho nem sempre podem se referir às propriedades geométricas retidas no problema. Por exemplo, a posição do desenho em uma folha de papel não é pertinente para o problema geométrico. (CHAACHOUA, 1998, p.38, tradução nossa²⁶¹)

Para além da evidenciação do domínio operacional desse modelo, decorre em concordância com autor, a possibilidade de distinguir em duas categorias de realidades: as de natureza teórica e as do mundo sensível. Essa vertente dialoga diretamente com as produções realizadas em MM, as quais estabelecem conexões com as projeções, conforme enfatiza Chaachoua (1998),

A representação de objetos geométricos do espaço, de dimensão 3, por desenhos em folha de papel, de dimensão dois, é feita por uma ou mais projeções. Portanto, no caso de uma única projeção, há necessariamente uma perda de informação. Daí a necessidade de utilização de códigos para a leitura e escrita dessas representações. (...) (Ibid, p.38, tradução nossa²⁶²)

Nessa perspectiva, retomamos o que já foi tratado por Lehmann (1991) acerca da “projeção paralela”, em que elementos que possuem três dimensões (largura, comprimento e altura) são projetados em representações planificadas. Dito de outra forma, na concepção de Bkouche (1983, apud CHAACHOUA, 1998, p. 39, tradução nossa²⁶³) “(...) não se pode mais raciocinar sobre uma figura que já é distinta da realidade que supostamente representa, isto requer o desenvolvimento de métodos mais complexos de raciocínio...”. Esse aspecto fundamenta uma das funções que respaldam o funcionamento do Ambiente Híbrido de Aprendizagem – AHA ao ofertar caminhos, em que se almeja o equilíbrio na transferência de propriedades, mobilizando padrões de comparação e pistas que orientam a resolução do problema.

²⁶¹ Un dessin se traduit souvent par une perte d'informations puisque plusieurs propriétés de l'objet géométrique ne peuvent pas être traduites par des relations spatiales sur une feuille de papier, à moins de faire appel à des codes et à des conventions de représentations comme par exemple pour la perpendicularité de deux plans. De même, les propriétés spatiales du dessin ne peuvent pas toujours renvoyer à des propriétés géométriques retenues pour le problème. Par exemple la position du dessin sur une feuille de papier n'est pas pertinente pour le problème géométrique.

²⁶² La représentation des objets géométriques de l'espace, de dimension 3, par des dessins sur une feuille de papier, de dimension deux, se fait par une ou plusieurs projections. De ce fait, dans le cas d'une seule projection, il y a forcément perte d'informations. D'où la nécessité de faire appel à des codes pour la lecture et l'écriture de ces représentations.

²⁶³ (...) on ne peut plus raisonner sur une figure qui est déjà distincte de la réalité qu'elle est censée représenter, ceci nécessite donc la mise au point de méthodes de raisonnement plus complexes...

Os elementos presentes no protótipo do tetraedro construído pelo grupo 3 seguiu as orientações do enunciado da tarefa 5. Todavia, a ordenação praxeológica, ou seja, o encadeamento de técnicas que integram a resolução da tarefa, foi registrada na superfície da placa de isopor, a qual serviu de sustentação do modelo manipulável, como revelado a seguir,

Figura 170 - Cálculos que acompanham o protótipo de tetraedro em MM (Grupo 3)

The image shows a piece of paper with handwritten mathematical work. The work consists of several lines of vector equations. The final line is:

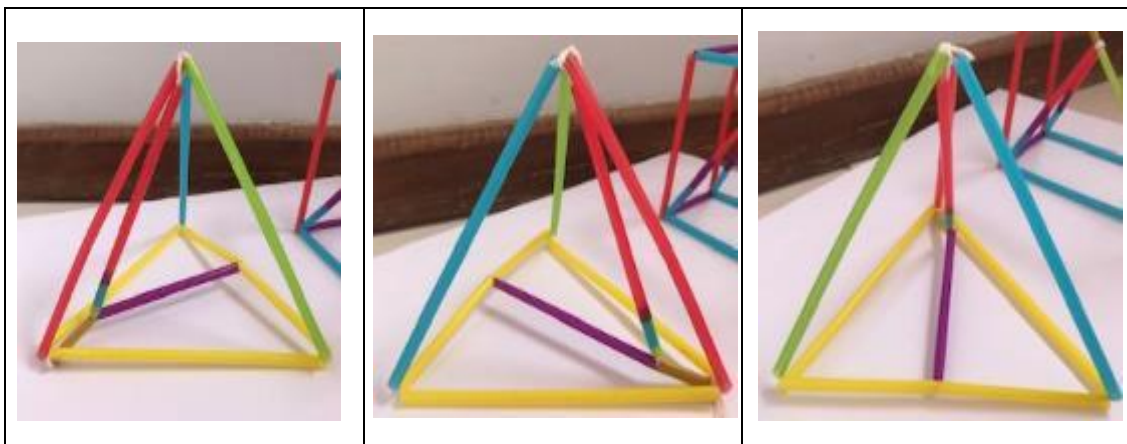
$$\vec{m} = \frac{3}{4} \vec{a} + \frac{1}{8} \vec{b} + \frac{1}{8} \vec{c}$$

Fonte: acervo da autora (2020)

Nestes termos, ratificam-se os vínculos com o ambiente Papel Lápis – PL. Dessa forma, MM pode ser configurado por uma das “vigas” de sustentação na resolução da questão. Em termos da organização praxeológica, os estudantes demonstram maior segurança ao descrever: $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF}$ e prosseguir realizando associações com outros representantes desses vetores. Assim, a combinação linear se expõe também por meio da multiplicação de vetores por escalares.

Os componentes do grupo 4, também trilharam caminhos análogos ao grupo 3, como evidenciado nas figuras,

Figura 171 - Cálculos que acompanham o protótipo de tetraedro em MM (Grupo 3)



Fonte: acervo da autora (2020)

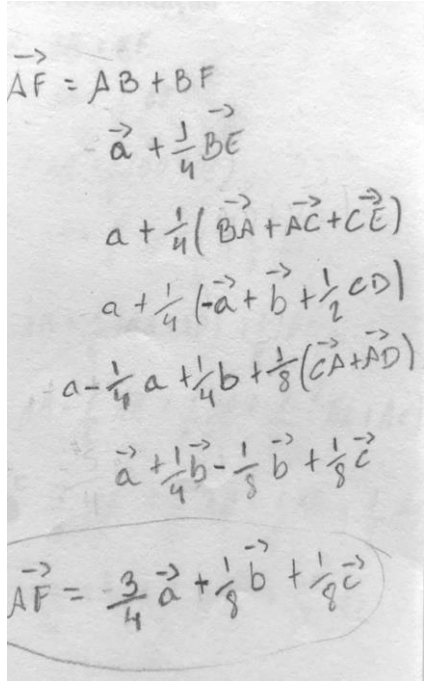
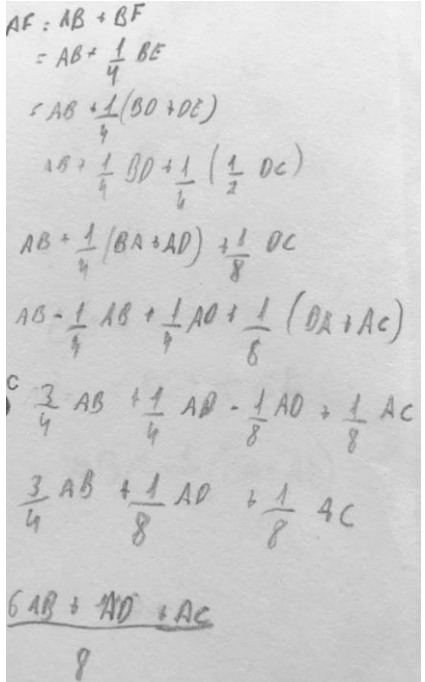
A partir das diferenças, nota-se apenas as dimensões e escolhas das cores. Os discentes desse grupo, assim como da equipe anterior, optaram pelo uso de uma única cor para a base triangular do tetraedro. Esses estudantes também estabeleceram uma legenda que serviu como suporte para identificação de cada vetor: - vermelho: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; - azul: $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ e verde para $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

Ao focar nas construções dos grupos 1 e 2, os quais ficaram encarregados em desenvolver suas produções no contexto do ambiente PL, respaldado pela configuração do $G'T_{t5(PL)}$, o qual pode ser verificado a seguir,

$G'T_{t5(MM)} = [Obter; \text{um vetor como combinação linear de uma base em PL}; V_6, V_7]$	
V_6 - Instrumentos disponíveis de PL (régua, esquadros, papel milimetrado, etc).	V_7 - Configuração (plano, espaço, retangular, triangular, ...).

Nesta etapa, mesmo mantendo um aspecto individual, observado nas resoluções das tarefas em PL, os grupos decidiram apresentar uma construção enquanto resposta. O que nos induz a pensar que questões que demandam um repertório maior de técnicas incentivam o aspecto colaborativo. Assim, elencamos duas produções:

Figura 172 - Caminhos de Práticas Pessoais - CPP em PL (tarefa 5)

<p>(I)</p> 	<p>(II)</p> 
-----------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: acervo da autora (2020)

Nota-se que o ponto de partida é o mesmo: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$. Contudo, a partir da segunda linha, os caminhos desenvolvidos apresentam nuances díspares. Em CPP (I) elegem efetuar as substituições à medida em que aparecem os vetores: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$. Na terceira linha de ambos, o foco centra-se em \overrightarrow{BE} , descrito como a soma de três vetores em (I) ao explorar as características espaciais do sólido ou a soma de dois vetores em (II), tendo como suporte uma das faces do tetraedro. Na quarta linha, os autores de (I) retomam as substituições, já em (II) aplica-se a propriedade distributiva. O quinto passo, (I) faz-se uso da propriedade distributiva acrescida da soma vetorial: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$, culminando com as substituições $\overrightarrow{CA} = -\vec{b}$ e $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, porém em (II) \overrightarrow{BD} e \overrightarrow{DC} são vistos como $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$, respectivamente. Nas etapas subsequentes, atenta-se para as seguintes operações: soma, subtração e multiplicação de escalar por vetores, com o diferencial de que (I) opta por desenvolver a questão sem um retorno ao que foi previamente solicitado no enunciado, enquanto (II) não levou esse aspecto em consideração.

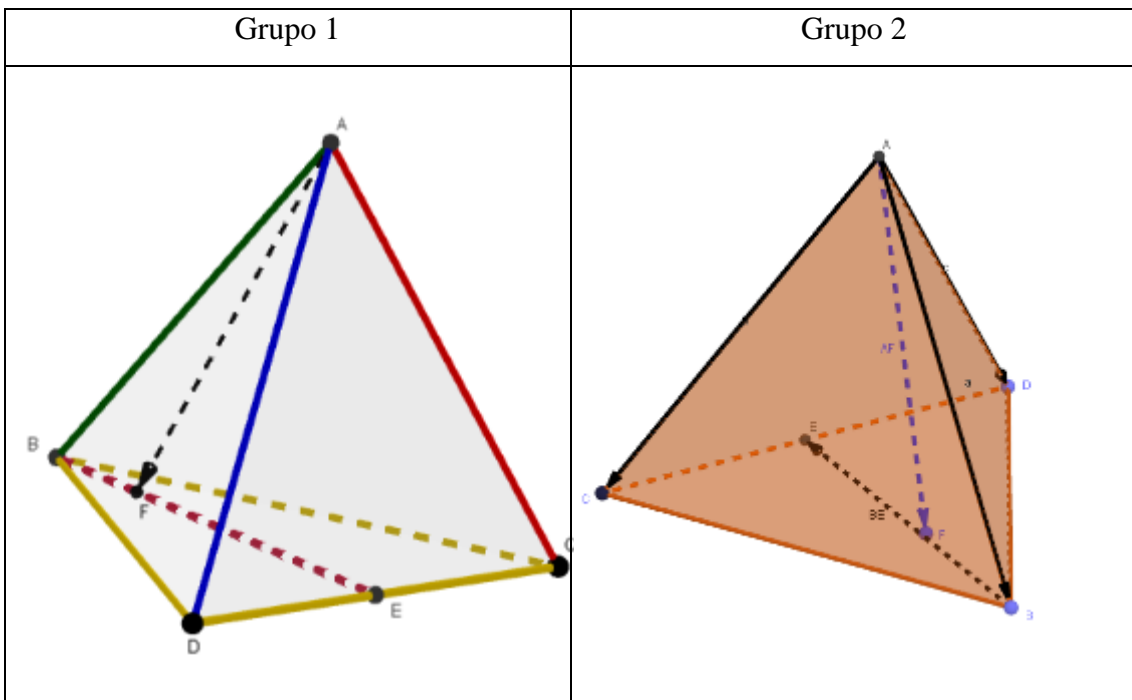
Já os estudantes que se envolveram no processo resolutivo de t_5 , nos moldes de GG, tiveram como direcionamento $G'T_{t_5(GG)}$.

$G'T_{t5(GG)} = [Obter; \text{um vetor como combinação linear de uma base em } GG; V_4, V_5, V_7]$		
V_4 - Menu do dispositivo (barra de ferramentas)	V_5 - Dispositivos móveis (notebook, celular, tablets);	V_7 - Configuração (plano, espaço, retangular, triangular, ...).

Fonte: acervo da autora (2020)

Com base neste Sub-Gerador de Tipo de Tarefas no contexto do GeoGebra em operação com os Tipos de Tarefas que dele advém amplia-se o leque de possibilidades com o uso da janela de visualização em 3D, possibilitando, assim, rotacionar o sólido gerado em função dos eixos coordenados OX, OY e OZ. Nestes termos, revelamos as construções dos grupos 1 e 2, respectivamente.

Figura 173 - Caminhos de Práticas Pessoais - CPP em GG (tarefa 5)



Fonte: acervo da autora (2020)

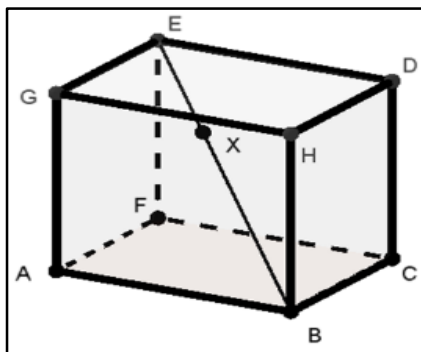
Ao estabelecermos um comparativo entre as duas produções, é possível perceber que na construção do grupo 2 existiu uma preocupação na especificação dos vetores ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}$ e \overrightarrow{BF}) envolvidos no contexto da questão. No entanto, o grupo 1 optou pela caracterização identificada por meio das cores. Contudo, ambas as resoluções apresentam um caráter incompleto, visto que não foi identificado de forma explícita o que foi solicitado na tarefa, ou seja, a obtenção de \overrightarrow{AF} como combinação linear de \vec{a}, \vec{b} e \vec{c} , o que nos induz a pensar

que o dispositivo GeoGebra foi utilizado, pelos discentes, como sustentação resolutiva. Inferimos que essa limitação está associada à falta de um contato prévio com o software. Contudo, não podemos negar que a dinamicidade de GG é um fator preponderante no que se refere às construções geométricas. Em ambas, as ferramentas que constituem os protocolos de construções são: pontos, tetraedro, segmentos, polígonos, ponto médio e vetores, dentre outros.

7.7 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA TAREFA 6

A sexta tarefa procede do Gerador de Tipo de Tarefas que deu origem ao Tipo de Tarefa analisada anteriormente, ou seja, $GT_{t5,6} = [Obter; \text{um vetor como combinação linear de uma base}; V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7]$, o que reforça a potencialidade dos GTs. Dessa forma, o enunciado da questão demanda, a determinação de vetores em função de outros vetores, como também foi descrito na sexta tarefa: Dados $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ e $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$, determine, em função de \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , os vetores \overrightarrow{AX} e \overrightarrow{FX} , sabendo que $\overrightarrow{EX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EB}$.

Figura 174 - Paralelepípedo que integra o enunciado da sexta questão

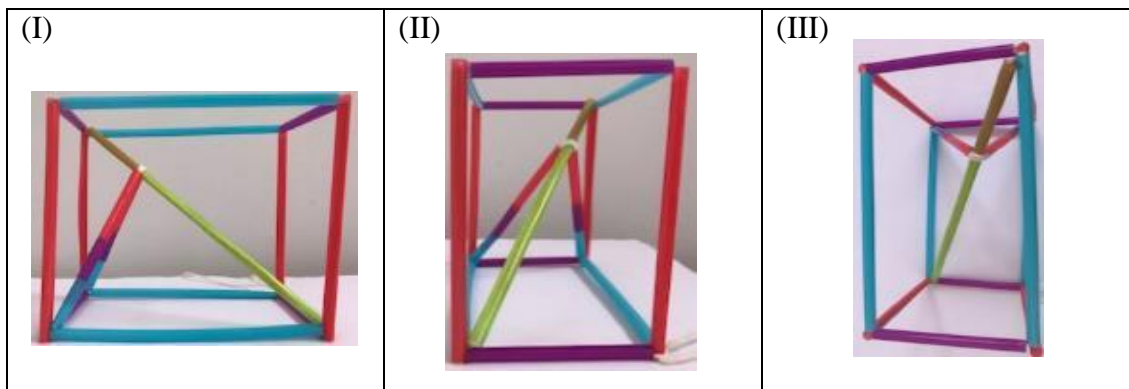


Fonte: acervo da autora (2020)

Para além da evidenciação de uma abordagem espacial, existe a vinculação direta com a definição de base de um espaço vetorial V , inerente a Álgebra Linear, denotado como um conjunto \mathcal{B} que: (i) gera V e (ii) é linearmente independente. De forma análoga, mantemos a mesma ordem descrita anteriormente, ou seja, trataremos das produções realizadas no âmbito dos Dispositivos Didáticos $\{MM, PL, GG\}$, respectivamente. Nesse sentido, o $GT_{t5,6}$ nos direcionou para um viés estrutural pautado na intencionalidade operacional regido por diferentes níveis de granularidade.

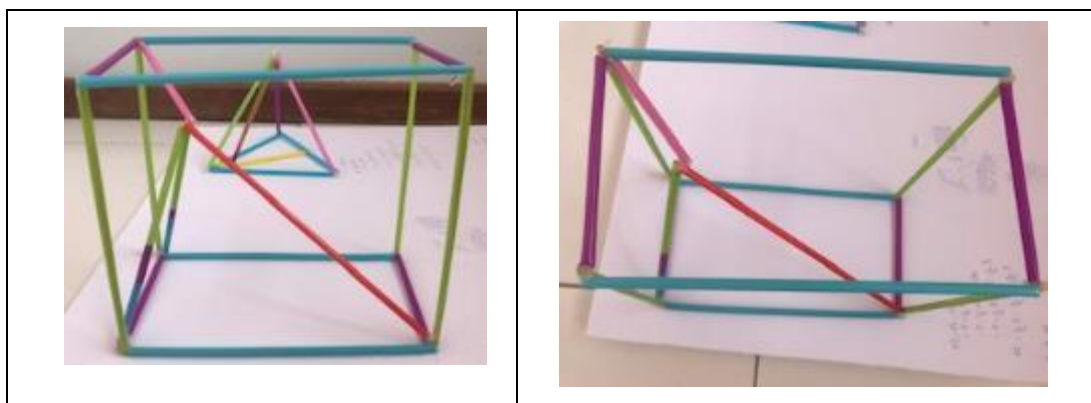
As configurações dos Sub-Geradores de Tipo de Tarefas $G'T_{t5,6(MM)}$ $G'T_{t5,6(PL)}$ e $G'T_{t5,6(GG)}$ seguem o mesmo direcionamento da tarefa anterior. Dessa forma, focaremos diretamente nas construções dos estudantes. Por exemplo, os grupos 1 e 2 retomam o trabalho com MM, materializando as representações dos modelos de paralelepípedos.

Figura 175 - Representação do Paralelepípedo em MM (grupo 1)



Fonte: acervo da autora (2020)

Figura 176 - Representação do Paralelepípedo em MM (grupo 2)



Fonte: acervo da autora (2020)

Algumas irregularidades são perceptíveis e se vinculam às técnicas empregadas pelos estudantes, visto que o grupo usou recursos estruturais distintos. O grupo 1 utilizou os seguintes materiais: canudos, barbantes, palitos, tesoura e a placa de isopor. Já o grupo 2 preferiu realizar a construção do modelo apenas com canudos, cola, tesoura e a placa de isopor, o que gerou distorções relacionadas a perpendicularidades das arestas do sólido. Contudo, essa restrição não torna menor ou diminui o suporte propiciados por MM, pois o “passo a passo” no processo construtivo e resolutivo ultrapassam essa vertente, visto que,

Metaforicamente, atua como uma lupa, permitindo-nos focar nos detalhes, ou recuar e nos concentrar na estrutura geral, como Skemp (1979) teorizou em sua teoria de aprendizagem varifocal. Prevemos que o mundo corporificado cresça em sofisticação de maneira consistente com a teoria do crescimento geométrico de Van Hiele (1986). Objetos do mundo real são vistos, manipulados e sentidos de várias maneiras e as percepções são refinadas através da experiência e comunicação com os outros. (WATSON, SPYROU e TALL, 2003, p.10, tradução nossa²⁶⁴)

Compactuamos com os autores ao destacar a necessidade de estudos que vinculem as várias formas perceptuais, sem perder de vista as argumentações matemáticas que imprimem fundamentações que fortalecem a coativação da perceptibilidade dos diálogos entre objetos ostensivos e não ostensivos, já que envolvem a caracterização do fato de poderem ser “manipulados” pelo ser humano (pessoa, indivíduo ou sujeito), direcionando que qualquer objeto tangível podem ser concretamente manuseado de várias maneiras.

Destarte, não estão integradas ao nosso leque de intenções as substituições dos métodos que são hordienamente empregados no ensino dos vetores, mas como já identificado nesta investigação existem incompletudes e lacunas que enfraquecem o processo de aprendizagem. Assim, acreditamos que o trânsito entre tarefas realizadas no domínio de distintos Dispositivos Didáticos, podem apontar direções que se apresentam como suporte na construção de pilares de fortalecimento, projetado um AHA pelo qual os estudantes possam entender a complexidade das ideias vetoriais, com base em sua interação física com o mundo em conexões com o uso do simbolismo matemático.

Essa vertente é ratificada no uso feito pelos componentes do grupo, pois utilizaram os modelos manipuláveis como suporte para os cálculos registrados, imediatamente ao lado das suas construções como ilustrado no quadro,

Quadro 42 - Resoluções da tarefa 6 com o suporte em MM

$\begin{aligned}\overrightarrow{FX} &= \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EX} \quad (\tau_1) \\ &= \vec{c} + \frac{1}{4}\overrightarrow{EB} \quad (\tau_2/\tau_3) \\ &= \vec{c} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) \quad (\tau_4) \\ &= \vec{c} + \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{b} \quad (\tau_5) \\ \overrightarrow{FX} &= \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c} \quad (\tau_6)\end{aligned}$	$\begin{aligned}\overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX} \quad (\tau_1) \\ &= \vec{a} - \frac{3}{4}\overrightarrow{EB} \quad (\tau_2/\tau_3) \\ &= \vec{a} - \frac{3}{4}(\vec{a} - \vec{c} - \vec{b}) \quad (\tau_4) \\ &= \vec{a} - \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{c} + \frac{3}{4}\vec{b} \quad (\tau_5) \\ \overrightarrow{AX} &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}(\vec{b} + \vec{c}) \quad (\tau_6)\end{aligned}$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

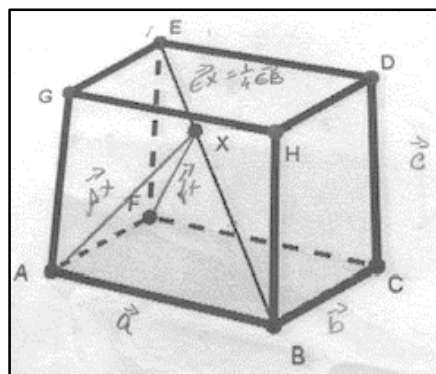
Fonte: acervo da autora (2020)

²⁶⁴ Metaphorically it acts as a magnifying glass, allowing us to focus on detail, or to stand back and focus on the overall structure, as Skemp (1979) has theorised in his varifocal learning theory. We envision the embodied world growing in sophistication in a way that is consistent with Van Hiele's (1986) theory of geometrical growth. Real world objects are seen, manipulated and sensed in various ways and the perceptions are refined through experience and communication with others.

A partir do que foi retratado no quadro, nota-se um sequenciamento de técnicas, enquanto agrupamento de tarefas, que segue o mesmo direcionamento da questão 5, ou seja, soma vetorial (t_1) que decorre da substituição por outros representantes aditado à multiplicação do vetor por escalar (t_2/t_3), a qual é representada, em parte, pelo sequencialmente da soma de três vetores (t_4) acrescido das propriedades distributiva e comutativa (t_5) e (t_6). Pode-se pensar numa vertente que torne mais robusta o conjunto de tarefas que compõe as técnicas, para estudos futuros, como a implementação de tarefas que envolvam conjuntamente dois sólidos.

O $G'T_{t5,6(PL)}$ que guiou a resolução em PL, subsidiado pelo sistema de variáveis, configurou possibilidades de resolução apresentando traços distintos dos observados na tarefa 5, ao recorrer a figura como um suporte que auxiliou o entendimento e consequente resolução da questão. Principalmente no que se refere às especificações de localização dos vetores: \overrightarrow{AX} e \overrightarrow{FX} ou $\overrightarrow{EX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EB}$, assim como a identificação representacional de \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} no paralelepípedo, suporte da tarefa, como exposto abaixo,

Figura 177 - Representação do Paralelepípedo em PL



Fonte: acervo da autora (2020)

As técnicas empregadas são as mesmas que foram expostas no quadro anterior. Contudo, é possível identificar distinções no que diz respeito a não identificação dos vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , o que reflete numa aparente “fuga” do que foi solicitado na questão, assim como um maior detalhamento no que tange às sub-tarefas. Como apresentado no próximo quadro,

Quadro 43 - Registro praxeológico da tarefa 6 com o suporte em PL

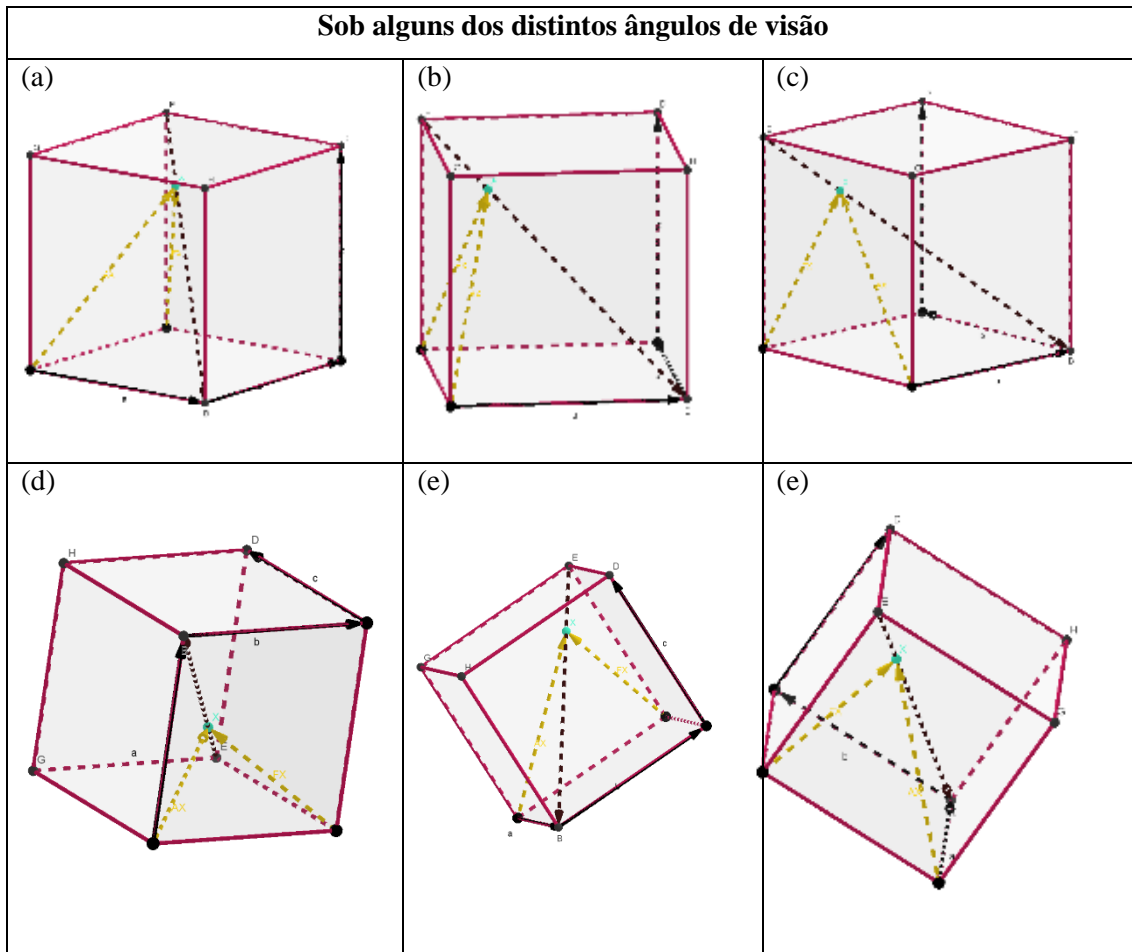
$\begin{aligned}\overrightarrow{FX} &= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AX} (\tau_1) \\ \overrightarrow{FX} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AX} (\tau_1) \\ &= -\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} (\tau_2/\tau_3) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} (\tau_5) \\ \overrightarrow{FX} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} (\tau_1)\end{aligned}$	$\begin{aligned}\overrightarrow{AX} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX} (\tau_1) \\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BE} (\tau_2/\tau_3) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}) (\tau_4) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CE} (\tau_5) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) (\tau_4) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DE} (\tau_5) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} (\tau_2) \\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} (\tau_6) \\ \overrightarrow{AX} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} (\tau_1)\end{aligned}$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: acervo da autora (2020)

Ressalte que o sequenciamento das tarefas/técnicas ilustradas nesse e demais quadros são reproduções, na íntegra, dos CPP de cada grupo vinculados às escolhas das trilhas resolutivas das tarefas. Também é relevante destacar, acerca da existência do bloco tecnológico/teórico ou *logos* (Λ), o qual em essência encontra-se num contexto tácito.

E, por fim e não menos importante que os demais, o Sub-Gerador de Tipo de Tarefas $G'T_{t5,6(GG)}$ possibilitou a movimentação dos chamados objetos livres em associação com os objetos dependentes que conduziram o processo da dinâmica praxeológica. Nesses termos, os estudantes escolheram o ponto B como objeto livre que, ao manipular o paralelepípedo, pode ser observado sob distintos ângulos, elemento esse que se apresenta como um fator que permite imprimir distintas interpretações em termos das características resolutivas que seguem os direcionamentos da tarefa, pois o criar, manipular de algebricamente geometricamente os objetos que se constitui um dos pontos potenciais do software.

Figura 178 - Representações do Paralelepípedo em GG



Fonte: acervo da autora (2020)

As técnicas empregadas na construção do paralelepípedo, o qual pode ser movimentado em torno de um ponto fixo, permitiu imprimir uma dinâmica nos elementos criados, movimentando e analisando suas propriedades geométricas e algébricas que são preservadas. No protocolo de construção, é possível identificar traços dos Caminhos das Práticas Pessoais – CPP em associação direta com os comandos utilizados neste ambiente virtual. Os elementos que foram utilizados de forma preponderante nessa construção são: pontos, segmentos, quadriláteros, polígonos, ponto médio e vetores, como evidenciado no protocolo a seguir, em que é destacado o repertório de tarefas/técnicas que ultrapassam as formas de resoluções empreendidas em MM e PL, aspecto esse que se atrela à falta de confiança e convívio com este recurso, como já destacado anteriormente.

Figura 179 - Protocolo de Construção do Paralelepípedo

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
1	Ponto C	Ponto sobre Eixo X	C = (12.46, 0, 0)	
2	Ponto F		F = (6.3, 8.21, 0)	
3	Ponto A	Ponto sobre Circulo F	A = (-0.57, 3.06, ...)	
4	Cubo a_1	Cubo(C, F, A)	$a_1 = 1080.79$	
4	Ponto B	Cubo(C, F, A)	B = (5.59, -5.15, ...)	
4	Ponto D	Cubo(C, F, A)	D = (7.96, -3.37, ...)	
4	Ponto E	Cubo(C, F, A)	E = (1.8, 4.84, 8.5...)	
4	Ponto G	Cubo(C, F, A)	G = (-5.07, -0.32, ...)	
4	Ponto H	Cubo(C, F, A)	H = (1.09, -8.53, ...)	
4	Segment.	Segmento B, C	arestaBC = 10.26	
4	Segment.	Segmento C, F	arestaCF = 10.26	
4	Segment.	Segmento F, A	arestaFA = 10.26	
4	Segment.	Segmento A, B	arestaAB = 10.26	
4	Quadrilat.	Polígono B, C, F, A	faceABCF = 105...	

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
4	Segment.	Segmento D, C	arestaDC = 10.26	
4	Segment.	Segmento B, H	arestaBH = 10.26	
4	Segment.	Segmento H, D	arestaHD = 10.26	
4	Quadrilat.	Polígono D, C, B, H	faceADHE = 105...	
4	Segment.	Segmento D, E	arestaDE = 10.26	
4	Segment.	Segmento E, F	arestaEF = 10.26	
4	Quadrilat.	Polígono F, C, D, E	faceADFE = 105.32	
4	Segment.	Segmento E, G	arestaEG = 10.26	
4	Segment.	Segmento G, A	arestaGA = 10.26	
4	Quadrilat.	Polígono A, F, E, G	faceBCGF = 105...	
4	Segment.	Segmento G, H	arestaGH = 10.26	
4	Quadrilat.	Polígono B, A, G, H	faceCDHG = 105...	
4	Quadrilat.	Polígono D, H, G, E	faceEFGH = 105...	

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
4	Segment.	Segmento E, G	arestaEG = 10.26	
4	Segment.	Segmento G, A	arestaGA = 10.26	
4	Quadrilat.	Polígono A, F, E, G	faceBCGF = 105...	
4	Segment.	Segmento G, H	arestaGH = 10.26	
4	Quadrilat.	Polígono B, A, G, H	faceCDHG = 105...	
4	Quadrilat.	Polígono D, H, G, E	faceEFGH = 105...	
5	Vetor u	Vetor(E, B)	u = (3.79, -9.99, ...)	
6	Ponto I	Ponto médio de EB	I = (3.69, -0.16, 1...)	
7	Ponto X	Ponto médio de EI	X = (2.75, 2.34, 5...)	
8	Vetor AX	Vetor(A, X)	AX = (3.32, -0.72, ...)	
9	Vetor FX	Vetor(F, X)	FX = (-3.55, -5.87, ...)	
10	Vetor a	Vetor(A, B)	a = (6.16, -8.21, 0)	
11	Vetor b	Vetor(B, C)	b = (6.87, 5.15, 5...)	
12	Vetor c	Vetor(C, D)	c = (-4.5, -3.37, 8...)	

Fonte: acervo da autora (2020)

Nesse sentido, foi observado um fato que acompanhou todas as produções dos estudantes no que se refere às construções realizadas no GeoGebra, revelando uma aparência incompleta em termos resolutivos, pois o sólido foi criado, de igual modo, os vetores foram identificados, porém o que foi solicitado na tarefa não foi alcançado, ou seja, determinar \overrightarrow{AX} e \overrightarrow{FX} em função de \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , sabendo que $\overrightarrow{EX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EB}$. O que nos faz inferir que o software se constituiu, num primeiro momento, como uma ferramenta auxiliar no processo da aprendizagem vetorial, fato este potencializado pela falta de experiência com o mesmo.

Essa nova perspectiva, idealizada por meio do AHA associado aos Geradores de Tipo de Tarefas (CHAACHOUA, 2015; 2018) e Sub Geradores de Tipo de Tarefas (KASPARY, 2020), constitui um primeiro passo em direção aos pressupostos que regem o Paradigma de Questionamento de Mundo (CHEVALLARD, 2009; 2010; 2012), pois tomamos como inspiração esse arcabouço teórico que visa abandonar uma postura apática e despertar o lado proativo dos estudantes no processo de aprendizagem.

Nestes termos, o respaldo do movimento migratório entre paradigmas ganha mais força com a manifestação de algumas dialéticas, dentre elas podemos citar: Dialética Mídia Milleu (CHEVALARD, 2006) e a Dialética do Individual e Coletivo em que o "ator do estudo" passa do indivíduo para a comunidade e, conseqüentemente, "implica na distribuição de responsabilidades e nas atribuições de tarefas" (COSTA, ARLEGO E OTERO, 2015, p. 148). Entretanto, quando o nível de análise se assenta no CPP, inferimos acerca da emergência de uma *Dialética do Indivíduo para com o Indivíduo* que similarmente podemos comparar com a

propriedade reflexiva da relação de equivalência (estudante ~ estudante) e não do indivíduo e coletivo como no diálogo para construção das praxeologias pessoais (CROSET, CHAACHOUA, 2016) e em grupo.

É relevante destacar que utilizamos a Engenharia Didática de forma distinta, pois esse aporte metodológico nos inspirou fortemente, seja pela robustez das análises a priori, evidenciadas no sexto capítulo, ou pela experimentação e análises que a acompanhou e foram reveladas neste capítulo, a qual abriu possibilidades para uma validação do AHA, a partir das concepções dos participantes do minicurso em termos do escopo e alcances das técnicas (KASPARY, CHAACHOUA E BESSOT, 2020) como será exposto no próximo capítulo. Vale pontuar, contudo, que outros direcionamentos poderiam ser adotados.

CAPÍTULO VIII

VALIDAÇÃO DO AMBIENTE HÍBRIDO DE APRENDIZAGEM – AHA: UM RECORTE PONTUAL DE UMA ANÁLISE A POSTERIORI

Ao tomar como suporte metodológico aspectos inerentes às fases da Engenharia Didática – ED (ARTIGUE, 1990), é pertinente destacar que este capítulo tem um caráter mais sintético, pois não revelaremos integralmente as análises a posteriori referentes a cada uma tarefa que integrou o curso “Um Estudo sobre os Vetores”. O principal motivo que subsidiou essa decisão se apoiou no elevado número de páginas, pois seria necessário desmembrar a tese em dois volumes, aspecto incomum no contexto científico brasileiro. Entretanto, é relevante ressaltar que, de igual modo, pode-se construir processos de análises similares apoiadas na exemplificação – tarefa 1 –, aqui revelada, seja para demais tarefas trabalhadas no curso ou para tarefas de diferentes naturezas.

Dessa forma, o recorte dado às análises a posteriori assumem outra função distinta do que é apregoado na ED, ao assumir o papel de validação do AHA. Nestes termos, recorreremos aos relatos dos discentes após experienciarem a utilização dos Dispositivos Didáticos – DD nas resoluções das tarefas, seja como elementos complementares ou basilares, além de evidenciar o alcance das técnicas em termos de seus escopos. Assim, como no sexto capítulo, ressalta-se o potencial dos Geradores de Tipo de Tarefas na organização de uma análise a posteriori, o qual foi denotado por GT_{APOS} . Por fim, expomos um exemplo amostral de como concebemos a análise a partir das respostas dos discentes na resolução da primeira tarefa.

Nestes termos, com base nas evidências empíricas observadas na fase anterior, esta pesquisa visa contrastar e validar as hipóteses que delinearão o desenho e, em particular, os prognósticos formulados acerca dos fenômenos didáticos. “Essa fase pode levar à formulação de novos problemas e/ou novos fenômenos didáticos” (GARCÍA et al, 2019, p.81). Dessa forma, pretende-se relacionar os fatos procedentes da experimentação em conexão com as hipóteses levantadas aprioristicamente, ou seja, a comparação entre os pressupostos definidos preliminarmente, em junção com avaliações das possibilidades de reprodutibilidade deste contexto.

Nesse sentido, a análise a posteriori de uma investigação se apresenta como conjunto de resultados extraídos da exploração dos dados identificados e produzidos que interferiram no âmbito didático em conexão com as condições e restrições no processo de transmissão do saber em jogo, ou seja, envolve o confronto de uma análise a priori com uma análise a posteriori do

que pode ou não existir na instituição CLM-UEFS. A ideia é relacionar as observações com os objetivos definidos a priori e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados. Essa vertente é ratificada por Artigue (1990), ao pontuar que, “a fase dita a posteriori baseia-se em todos os dados coletados durante o experimento (...). Estes dados são muitas vezes complementados por dados obtidos através do uso de metodologias externas (...).” (ARTIGUE, 1990, p.297)

Desse modo, considera-se pertinente retomar as hipóteses, as quais podem ser sintetizadas em: o trabalho com diferentes Dispositivos Didáticos permite construir recombinações praxeológicas, despertando novas relações pessoais dos estudantes com os vetores. E essa vertente foi revelada por intermédio da conceitualização do AHA, teorizado a partir do quadro teórico T4TEL (CHAACHOUA, 2015). Para validar essa suposição, serão destacadas as impressões dos estudantes, pois, após a conclusão do processo experimental, foi solicitado que os discentes revelassem suas opiniões acerca das resoluções das tarefas no contexto do AHA, como apresentado no quadro abaixo:

Quadro 44 - Relatos dos estudantes acerca do trabalho desenvolvido em PL, MM e GG

No curso “*Um Estudo sobre Vetores*” trabalhamos com tarefas vetoriais. Contudo, os caminhos trilhados nas resoluções sofreram variações. Dentre estas variantes, podemos citar: que em momentos distintos, os grupos utilizaram o software GeoGebra – GG, os Materiais Manipuláveis – MM ou recorreram ao Papel Lápis – PL. Para fecharmos esta etapa, gostaria de saber, um pouco, acerca das suas impressões sobre o desenvolvimento do curso.

Nas resoluções das tarefas 1 a 6 foram utilizados os ambientes GG, MM ou PL.

- a) Especifique qual deles você utilizou na resolução de cada questão. Gostaria de ter trabalhado em outro ambiente? Por quê?
- b) Descreva detalhadamente os passos utilizados em cada uma das resoluções, pontuando dificuldades ou facilidades encontradas.
- c) Dentre as questões apresentadas, na sua opinião, quais se adequam às técnicas provenientes dos ambientes MM, GG e PL? Justifique sua resposta.

Fonte: acervo da autora (2019)

Estudante 1

- a) Nas questões: 1 e 6 (MM), 2 e 3 (GG), 4 e 5 (PL);
- b) Utilizamos elásticos de cores diferentes para representar os vetores e os movimentamos para entender como o vetor solicitado estava posicionado na questão. A maior dificuldade foram os vetores \overrightarrow{AG} e \overrightarrow{FB} , pois eles estavam fora das

diagonais e dos lados dos quadrados. Na sexta questão, utilizamos canudos, cordões e palitos de churrasco, para sustentação, na formação do sólido geométrico. A dificuldade foi construir o sólido.

- c) As questões 1, 2, 3 e 4, se adequam mais ao PL por serem mais fáceis de visualizar através da combinação linear. As questões 5 e 6 se adaptam a MM por serem figuras tridimensionais e assim fica mais fácil de observar o que ocorre com os vetores a partir de algo mais palpável.

Estudante 2

- a) Questões 1 e 2: MM
 Questões 3 e 4: PL
 Questões 5 e 6: GG
- b) Nas questões 1 e 2, fizemos uma malha no isopor usando tachinhas e elásticos para representar os vetores. Usamos o elástico verde para representar o vetor \vec{v} e o roxo para representar o vetor \vec{u} . A maior dificuldade foi conseguir representar os vetores com comprimentos diferenciados destes. Então, unimos elásticos para representar as somas, frações e mudança de sentidos dos vetores. Logo após, conseguimos dispor todos os vetores em função de \vec{u} e \vec{v} , deixamos uma legenda mostrando o que significa cada elástico e suas operações.

Nas questões 3 e 4, utilizamos o ambiente papel lápis, por ser o ambiente em que estávamos mais habituados a trabalhar, porém sentimos falta da movimentação dos vetores realizada nas resoluções das questões anteriores.

Nas questões 5 e 6, o ambiente foi o GeoGebra. A facilidade em construir as figuras, ou seja, demandou bem menos tempo que as demais. Porém, por termos utilizado o programa poucas vezes, tivemos algumas dificuldades para trabalhar durante o processo, mas com o material que nos foi entregue e com o passar do tempo conseguimos finalizar o trabalho.

- c) As questões 1, 2 e 3 podem ser feitas no ambiente Materiais Manipuláveis, pois ajuda na parte dos vetores equipolentes, contribuindo na compreensão da “mobilidade” dos vetores. A questão 4, por se tratar de uma questão objetiva com expressões vetoriais, o ambiente Papel Lápis é o mais eficiente. Já as questões 5 e 6 podem ser resolvidas tanto no ambiente de Materiais Manipuláveis quanto no GeoGebra, para ajudar na visualização das figuras em 3D.

Estudante 3

- a) 1 e 2 (GG); 3 e 4 (PL); 5 e 6 (MM), não escolheria trabalhar em outro ambiente, pois não dominava o assunto vetores, mas a partir da segunda aula foi bem mais tranquilo resolver as questões.
- b) Em todas atividades, utilizamos o papel lápis como auxílio para efetuar os cálculos. Apenas os materiais manipuláveis não seriam suficientes para enxergar, logo de cara, as respostas finais. Porém, eles ajudaram a visualizar e compreender melhor a resolução dos problemas.
- c) Todas elas se adequariam às técnicas do ambiente papel lápis, mas as questões 1, 5 e 6 são muito mais interessantes quando são utilizados materiais manipuláveis.

Estudante 4

- a) Nas questões 1 e 2, a equipe utilizou a ferramenta GG para resolução das questões citadas anteriormente. Particularmente, gostaria de ter utilizado, nessas questões, a ferramenta materiais manipuláveis. Nos exercícios 3 e 4 foi utilizado PL e nas questões 5 e 6 utilizou-se os MM na resolução, que por sinal foi uma ótima experiência.
- b) Nas duas primeiras questões, a dificuldade foi usar o GeoGebra, pois não sabia utilizar esse aplicativo, então isso acabou dificultando. Nas questões 3 e 4 foram as mais difíceis, pois não estávamos conseguindo visualizar os vetores e nem encontrar os caminhos para resolvê-las. Nas duas últimas questões foi fácil e difícil, ao mesmo tempo, pois para montar os sólidos foi bastante trabalhoso, mas no final deu certo.
- c) Acredito que em todas as questões sejam possíveis resolver usando as maneiras que foram propostas. No entanto, acho que se as questões 3 e 4 fossem resolvidas no GG seria melhor, assim como as questões 1 e 2 em PL e 5 e 6 em MM.

Estudante 5

- a) Nas questões 1 e 2, o grupo utilizou o GG, em 3 e 4 utilizamos PL e nas questões 5 e 6 MM.

- b) Para a construção das figuras 1 e 2, definimos valores para os segmentos e deslocamos os vetores. Em 3 e 4 foram as questões que mais tivemos dificuldades, pois não estávamos conseguindo visualizar o que foi solicitado na questão. Nas questões 5 e 6, utilizamos cores e manipulamos os objetos, assim foi possível visualizar cada vetor solicitado pela questão. Contudo, a construção foi mais trabalhosa.
- c) Nas questões 3 e 4, a resolução ficaria mais fácil se estivéssemos escolhido trabalhar com GG ou MM. No entanto, como PL é o mais utilizado durante nossos estudos, o uso de outras ferramentas facilitam na compreensão do conteúdo.

Estudante 6

- a) Questões: 1 e 2 (PL); 3 e 4 (MM); 5 e 6 (GG), poderíamos ter trabalhado em outro ambiente, mas tive experiências inovadoras na resolução de cada questão nos respectivos ambientes.
- b) Na questão 1, colocamos em prática os conhecimentos adquiridos em Geometria Analítica, somando vetores, encontrando seus representantes para escrever em função de \vec{u} e \vec{v} como solicitado na questão. Na questão 2, manipulamos os representantes dos vetores para obter a forma apresentada na atividade. Já para 3 e 4, utilizamos uma placa de isopor como suporte para fazer o desenho dos polígonos representando os vetores para sua resolução. O GeoGebra foi usado nas resoluções das atividades 5 e 6 e foi muito interessante, pois foi possível aplicar nosso conhecimento prévio e desenvolver técnicas que ainda não sabíamos. No primeiro dia do curso apresentei certas dificuldades, pois ainda não sabia trabalhar muito bem com vetores. Depois, se tornou ainda mais interessante, pois foi possível manipular e aprender vetores sob outro ponto de vista, usando formas e recursos diferentes.
- c) Eu acredito que acabei resolvendo todas as questões com os materiais que foram, ao final, adequados. Particularmente, as questões 5 e 6 se tornaram mais interessantes no GeoGebra, pois facilitou a visualização por serem figuras tridimensionais.

Ressalte-se que optamos por transcrever as respostas de alguns estudantes. E a escolha esteve pautada nos registros das respostas mais completas, permitindo, assim, a identificação

de elementos relacionados ao alcance das técnicas no contexto de funcionamento de cada Dispositivo Didático, assim como aspectos que foram pontuados na análise a priori como a viabilidade de movimentação dos representantes dos vetores, a necessidade de visualização e a consequente manipulação de figuras tridimensionais. Nestes termos, reportamos ao estudante 1, “fica mais fácil observar o que ocorre com os vetores a partir de algo mais palpável”. Ou na concepção do estudante 2, “as questões 1, 2 e 3 podem ser feitas no ambiente Materiais Manipuláveis, pois ajuda na parte dos vetores equipolentes, contribuindo na compreensão da “mobilidade” dos vetores. E complementa: “Já as questões 5 e 6 podem ser resolvidas tanto no ambiente de Materiais Manipuláveis quanto no GeoGebra, para ajudar na visualização das figuras em 3D.” Restando à quarta tarefa o ambiente papel lápis.

Todavia, os discentes perceberam o aspecto incompleto dos dispositivos didáticos MM e GG, ressaltando a constante recorrência ao PL. Como destacou o estudante 3 ao responder o item b, “em todas atividades, utilizamos o papel lápis como auxílio para efetuar os cálculos. Apenas os materiais manipuláveis não seriam suficientes para enxergar, logo de cara, as respostas finais. Porém, eles ajudaram a visualizar e compreender melhor a resolução dos problemas.” O quarto estudante também sinalizou a vinculação com PL, pois segundo ele: “como PL é o mais utilizado durante nossos estudos, o uso de outras ferramentas facilita na compreensão do conteúdo”.

Dito isso, podemos interpretar que os estudantes identificaram aspectos limitadores concernentes ao ambiente Papel Lápis como único dispositivo utilizado no cerne do ensino vetorial. Contudo, concebemos que MM e GG são dispositivos complementares aos trabalhos desenvolvidos no domínio de PL e não o contrário como acreditam alguns estudantes. Perspectiva essa identificada no relato do estudante 4: “nas questões 3 e 4 foram as mais difíceis, pois não estávamos conseguindo visualizar os vetores e nem encontrar os caminhos para resolvê-las.” Ou seja, nota-se a ausência de um dispositivo que subsidie a visualização e a manipulação dos representantes dos vetores. Assim como observa-se dificuldades em solucionar a tarefa, o que nos remete às percepções acerca de limitações, que se referem às incompletudes vinculadas a uma carência que se une ao emprego de conceitos vetoriais.

Nesse sentido, os relatos dos discentes também revelaram aspectos relacionados às condições e às restrições de natureza didática e matemática, como descrito pelo estudante 4: “a dificuldade foi usar o GeoGebra, pois não sabia utilizar esse aplicativo, então isso acabou dificultando.” O estudante 2 também pontuou elementos desta natureza: “A facilidade em construir as figuras, ou seja, demandou bem menos tempo que as demais. Porém, por termos utilizado o programa poucas vezes, tivemos algumas dificuldades para trabalhar durante o

processo, mas com o material que nos foi entregue e com o passar do tempo conseguimos finalizar o trabalho.” Todavia, o estudante 6 declarou que: “no primeiro dia do curso apresentei certas dificuldades, pois ainda não sabia trabalhar muito bem com vetores.”

Outros aspectos foram destacados pelos sujeitos da pesquisa que se acoplam à função didática cronogênese no processo de construções do dispositivo manipulável, como sinalizado pelo estudante 5: “nas questões 5 e 6, utilizamos cores e manipulamos os objetos, assim foi possível visualizar cada vetor solicitado pela questão. Contudo, a construção foi mais trabalhosa.” Aspecto este que se contrapõe ao que já foi relatado no parágrafo anterior pelo estudante 2 em relação ao GeoGebra. As demais funções didáticas (mesogêneses e topogêneses) também sofreram significativas alterações, seja pela configuração do desenho do meio ou pela postura dos discentes que assumiram características proativas no processo construtivo da resolução das tarefas e consequente Caminhos de Práticas Pessoais – CPP.

8.1 ANÁLISE DO ALCANCE E ESCOPO DAS TÉCNICAS UTILIZADAS NO CURSO “*UM ESTUDO SOBRE VETORES*”

No desenvolvimento do processo experimental, foi possível observar os escopos e alcances das técnicas, seguindo as interpretações do T4TEL (CHAACHOUA, 2018), empregadas pelos discentes nas resoluções das tarefas. Esse aspecto foi evidenciado no trânsito entre as suposições que permearam o terreno das análises a priori, delimitando um campo de possibilidades, como sinalizado no sexto capítulo. O prognóstico se confirmou parcialmente, pois alguns elementos ultrapassaram a órbita das conjecturas e foram decompostos e revelados pelo contexto circunstancial da prática, estruturado no seio da práxis (tarefa/técnica). Tendência essa reforçada pelas concepções de Kaspary, Chaachoua e Bessot (2020) em relação ao enfoque empreendido acerca das noções de alcance das técnicas (teóricas, pragmáticas e institucionais) e das competições entre técnicas.

Nesse sentido, a abordagem experimental colocou em primeiro plano a modelagem das atividades vetoriais no âmbito do AHA, resultando numa amalgamação de técnicas advindas de distintos Dispositivos Didáticos (PL, MM e GG) que foram incorporados às praxeologias dos estudantes, ou seja, agregou-se novos elementos às bagagens praxeológicas dos protagonistas imersos neste processo, promotor de desequilíbrios constantes no campo dos Sistemas Didáticos que entraram em funcionamento no curso. Perspectiva esta já sinalizada por Chevallard (1999),

Pode-se imaginar um mundo institucional no qual as atividades humanas são regidas por praxeologias bem adaptadas, permitindo que todas as tarefas desejadas sejam realizadas de maneira ao mesmo tempo eficiente, segura e inteligível. Mas tal mundo não existe: como foi sugerido, as instituições estão repletas de toda uma dinâmica praxeológica [...]. (CHEVALLARD, 1999, p.230, tradução nossa²⁶⁵)

As adaptações de novas técnicas provenientes das resoluções das tarefas, no contexto dos Dispositivos Didáticos, revelaram traços inerentes às funções didáticas (cronogênese, mesogênese e topogêneses), as quais repercutiram na abrangência das técnicas à medida que foram implementadas e integradas ao complexo praxeológico que perfaz os Sistemas Didáticos do CLM-UEFS no domínio vetorial. Sob essa ótica, emergiu o seguinte questionamento: Quais técnicas mobilizadas nos Dispositivos Didáticos foram mais ou menos adequadas no âmbito dos escopos: teórico, pragmático ou institucional, para resoluções das tarefas? Antes de apresentar respostas, faz-se necessário revelar como são definidos os escopos,

O escopo teórico de uma técnica é o conjunto de tarefas onde a técnica permite realizar qualquer tarefa deste conjunto sem nenhuma consideração das condições de sua execução. Ou seja, examinamos esta técnica de um ponto de vista epistemológico sem levar em conta o cognitivo e, portanto, o domínio de sua realização por um sujeito. Será denotado por $PTh(\tau)$. O escopo pragmático de uma técnica é o conjunto de tarefas onde a técnica é confiável no sentido de que permite realizar essas tarefas com pouco risco de fracasso e a um custo razoável. A técnica tende a ter sucesso dentro deste escopo e tende a falhar fora dele. Será denotado por $P(\tau)$. O escopo institucional de uma técnica relacionada a um tipo de tarefa T é o conjunto de tarefas onde esta técnica é esperada por uma instituição. Este escopo é uma consequência das condições e restrições da vida de τ em uma instituição. Será denotado por $PI(\tau)$. (KASPARY, CHAACHOUA, BESSOT, 2020, p. 246, tradução nossa²⁶⁶)

Nota-se interligações entre os escopos (teórico e institucional) das técnicas e a classificação das variáveis, do ponto de vista epistemológico, institucional, que alimentam um Gerador de Tipo de Tarefas – GT (CHAACHOUA e BESSOT, 2016). Dessa forma, pode-se inferir que tanto o escopo teórico de uma técnica quanto o aspecto epistemológico das variáveis

²⁶⁵ On peut imaginer un monde institutionnel dans lequel les activités humaines seraient régies par des praxéologies bien adaptées permettant d'accomplir toutes les tâches voulues d'une manière à la fois efficace, sûre et intelligible. Mais un tel monde n'existe pas: comme on l'a suggéré, les institutions sont parcourues par toute une dynamique praxéologique (...)

²⁶⁶ La portée théorique d'une technique est l'ensemble des tâches où la technique permet d'accomplir une tâche quelconque de cet ensemble en dehors de toute considération des conditions de son exécution. C'est-à-dire qu'on examine cette technique d'un point de vue épistémologique sans prendre en compte le cognitif et donc la maîtrise de sa réalisation par un sujet. Elle sera notée $PTh(\tau)$. La portée pragmatique d'une technique est l'ensemble des tâches où la technique est fiable dans le sens où elle permet d'accomplir ces tâches avec peu de risque d'échec et à un coût raisonnable. La technique tend à réussir sur cette portée et tend à échouer en dehors. Elle sera notée $P(\tau)$. La portée institutionnelle d'une technique relative à un type de tâches T est l'ensemble des tâches où cette technique est attendue par une institution. Cette portée est une conséquence des conditions et des contraintes de la vie de τ dans une institution. Elle sera notée $PI(\tau)$.

podem ser analisadas no âmbito de um Modelo Praxeológico de Referência – MPR. De igual modo, é viável agrupar análises que envolvam os escopos das técnicas e das variáveis que contemplam o âmbito institucional em termos de condições e restrições.

Agrega-se a essa vertente que uma técnica tida como uma “maneira de fazer” nem sempre alcança plenamente sua função, ou seja, só tem sucesso em uma parte do jogo. Como sublinhou Chevallard (1999),

$P(\tau)$ das tarefas do tipo T a que se refere, relativo a parte denominada escopo da técnica: ela tende a falhar em $T \setminus P(\tau)$, de modo que podemos dizer que não sabemos, em geral, como realizar tarefas do tipo T . Isso é óbvio, mas muitas vezes esquecido, em matemática. Assim, qualquer técnica de cálculo em N falha acima de um determinado número. Da mesma forma, o fato de que geralmente não podemos considerar um determinado número inteiro é uma das razões de certas técnicas de criptografia. (CHEVALLARD, 1999, 225)

A partir destas designações categorizaremos em termos dos Dispositivos Didáticos os alcances das técnicas, observados nos registros e relatos dos estudantes acerca das resoluções das tarefas, em estreitas ligações com o escopo teórico - $PTh(\tau)$, escopo pragmático $P(\tau)$ e escopo institucional - $PI(\tau)$. A partir desse viés, foi elaborada a tabela 7 que evidencia as limitações e abrangências das técnicas alternativas que têm como suporte esses dispositivos.

Tabela 7 - Controle de realizações das tarefas a partir dos escopos das técnicas alternativas

Condições de execuções (dispositivos/tarefas)			
Dispositivo Tarefas	PL	MM	GG
1	$PTh(\tau)$, $P(\tau)$ e $PI(\tau)$	$PTh(\tau)$ e $P(\tau)$	$PTh(\tau)$ e $P(\tau)$
2	$PTh(\tau)$, $P(\tau)$ e $PI(\tau)$	$PTh(\tau)$ e $P(\tau)$	$PTh(\tau)$ e $P(\tau)$
3	$PTh(\tau)$, $P(\tau)$ e $PI(\tau)$	$PTh(\tau)$ e $P(\tau)$	$PTh(\tau)$ e $P(\tau)$
4	$PTh(\tau)$ e $PI(\tau)$	$PTh(\tau)$ e $P(\tau)$	$PTh(\tau)$ e $P(\tau)$
5	$PTh(\tau)$ e $PI(\tau)$	$PTh(\tau)$ e $P(\tau)$	$PTh(\tau)$ e $P(\tau)$
6	$PTh(\tau)$ e $PI(\tau)$	$PTh(\tau)$ e $P(\tau)$	$PTh(\tau)$ e $P(\tau)$

Fonte: acervo da autora (2019)

As coexistências e os intercâmbios entre as técnicas provenientes de PL, MM e GG, revelam predisposições que fornecem peculiaridades dos escopos das técnicas. Melhor dizendo, fora de seu alcance, uma técnica tende a falhar. Essa tendência ao fracasso foi interpretada por

(KASPARY, CHAACHOUA e BESSOT, 2020, p. 247, tradução nossa²⁶⁷) sob duas vertentes: “(1) uma técnica pode não ser aplicável além de seu escopo; (2) uma técnica pode ser aplicada além de seu escopo, mas com altas taxas de falhas.” Nesse sentido, PL se enfraquece nas resoluções das tarefas 5 e 6, pois os relatos dos discentes apontam para uma carência em termos de visualização dos vetores no espaço. De igual modo, na tarefa 4, os participantes do curso revelaram a necessidade da mobilidade dos representantes dos vetores.

Concebemos que os dispositivos GG e MM não pertencem ao escopo institucional $PI(\tau)$, por não serem recursos que nutrem e alimentam a vida de τ em Geometria Analítica e Álgebra Linear I – EXA 180 ou em Geometria Analítica – EXA 374, como já sinalizado, anteriormente, pelos estudantes que não possuíam domínio das ferramentas do software GeoGebra e isso foi ratificado ao visitarmos a organização curricular do CLM-UEFS e ao observar que os estudos de softwares educativos serão contemplados na disciplina Softwares Matemáticos EXA – 892, componente que compõe a grade curricular do sexto semestre deste curso.

Kaspary, Chaachoua e Bessot (2020) não omitem o aspecto cognitivo, denotado como âmbito pessoal, dependente tanto do âmbito pragmático como do institucional, porém essa vertente não foi detalhada pelos autores. Contudo, entendemos que as praxeologias pessoais (CROSET e CHAACHOUA, 2016) em associação com os Caminhos de Práticas Pessoais – CPP podem estabelecer diálogos entre o escopo cognitivo em associação ao viés didático das variáveis (CHAACHOUA e BESSOT, 2016), visto que o CPP oportuniza ao pesquisador gerar aproximações mais finas acerca dos elementos que integram cada praxeologia pessoal. Dito de outra forma, é como se observássemos as microunidades que compõe cada momento como praxeologia pessoal.

Isto posto, direcionamos também especial atenção para informações resultantes da observação e gestão das produções realizadas neste cenário, as quais se apresentaram como uma espécie de “metamorfose” das condições de aprendizagem do saber em jogo. Assim, concebemos que a integração entre distintos dispositivos desencadeou alterações em alguns aspectos dos Sistemas Didáticos, seja pelas alterações das funções didáticas ou pelas técnicas mobilizadas na dinâmica praxeológica delineada.

Nestes termos, o campo experimental se apresentou como um meio de construções de técnicas que transportaram, mesmo que implicitamente, o intuito de romper com as formas tradicionais, focadas apenas na transmissão e na aplicação direta das técnicas (BARQUERO, BOSCH e GASCÓN, 2013). A organização sugerida aos estudantes, os quais aceitaram o

²⁶⁷ 1) une technique peut ne pas s’appliquer hors de as portée; 2) une technique peut ne pas s’appliquer hors de as portée, mais avec um risque élevé d’échec.

convite para participar do minicurso, se estruturou por meio de mudanças no contrato didático próprio do ensino tradicional que, de acordo com Barquero, Bosch e Gascón (2010), pode ser resumido num processo que,

(...), se ensinam os conhecimentos elementares que como tais, se dão aos estudantes como instrumentos “já construídos” sem especificar com clareza nem sua origem, nem sua razão de ser, nem seu âmbito de aplicações para que, posteriormente, estes possam aprender a utilizá-los melhor e aplicá-los a situações problemáticas com os quais possam encontrá-los. Essa primeira resposta espontânea do ensino tradicional universitário cria serias dificuldades ligadas a perda de sentido e a desarticulação dos conteúdos matemáticos escolares. (BARQUERO, BOSCH E GASCÓN, 2010, p.236)

Dito isto, a Organização Didática – OD delineada e posta em funcionamento dentro do escopo do minicurso se apresentou como um fator propício para romper com o aspecto rígido e estático do ensino tradicional. Esse contexto, se insere nos sistemas dinâmicos, idealizado por Kaspar, Chaachoua e Bessot (2020), ao considerar que as instituições educacionais são sistemas dinâmicos em que as praxeologias existem apenas como resultado da dinâmica praxeológica. Ou seja, a instituição é caracterizada por um conjunto de objetos e suas relações entre eles. Dito de outra forma, a ideia é, ao tirarmos uma fotografia de uma instituição em um dado momento, essa imagem é o resultado de um processo dinâmico que podemos tentar modelar.

Neste sentido, podemos traçar um paralelo com os Caminhos de Práticas Pessoais - CPP. O que significa que para modelar a dinâmica praxeológica de um estudante, por exemplo, relacionado a determinado assunto, tema ou sector, no sentido do nível de codeterminação (CHEVALLARD, 2002). E assim, a cronogênese, a qual se encarrega da “gênese do tempo didático, ou seja, o tempo da construção praxeológica.” (CHEVALLARD, 2009, p.79) tem uma função relevante para estudo do objeto e das relações institucionais que mudam ao longo do tempo didático.

De igual modo, as relações com os vetores em meio ao trânsito entre os Dispositivos Didáticos em ação para resolução das tarefas sofreram alterações e desencadearam transformações que afetaram as funções didáticas, ou seja, as intervenções entre professora (pesquisadora) e estudantes foram alteradas, já que, os discentes assumiram outras responsabilidades que são normalmente atribuídas ao professor, desencadeando modificações na gestão do saber em jogo demandando maior investimento de tempo. Agrega-se a esse aspecto, que variadas práticas passam a compor o elenco de ações, como por exemplo: discutir diferentes maneiras de procurar uma resposta, escolher os Dispositivos Didáticos que melhor se adequam à situação, planejar o trabalho a ser realizado, dentre outros. Em outras palavras,

trata-se de pensar em valores das variáveis sob os vieses epistemológico, institucional e didático.

Com efeito, essa perspectiva evidencia a relevância da natureza dos valores assumidos pelas variáveis, uma vez que, segundo Chaachoua e Bessot (2018, p. 124), “a alteração de um valor modifica a gama de possíveis técnicas” no que se refere ao campo epistemológico.” Além disso, os autores destacam que “os valores institucionais modelam as condições e restrições explícitas ou implícitas dos níveis da escala de codeterminação sob as quais uma praxeologia existe ou pode existir institucionalmente.” (Ibid, 2018, p. 124). Desta forma, eles sinalizam que a situação pode ser enriquecida, *a posteriori* por meio dos,

valores das variáveis didáticas de valores suplementares para explicar as praxeologias pessoais dos alunos, sejam elas válidas ou não. Esta é a terceira função do conceito de variável, particularmente importante para o diagnóstico e a inclusão de praxeologias pessoais dos estudantes de uma determinada instituição. (CHAACHOUA; BESSOT, 2018, p.125)

Neste sentido, o gerenciamento de recursos (variáveis) e o design do cenário de aprendizagem foram prescritos. O que significa dizer que, fitamos o olhar para cada um dos Sistemas Didáticos Periféricos²⁶⁸ que emergiram, protagonizados pelos sujeitos de cada grupo de trabalho nas resoluções das tarefas provenientes dos Geradores de Tipo de Tarefas – GTs, os quais assumiram o papel articulador nos diferentes momentos desse processo. Assim, associa-se a construção das técnicas oriundas do AHA, espaço constitutivo de uma variedade de recursos (mídias) denotado a partir dos Dispositivos Didáticos {PL, MM e GG}, os quais foram descritos metaforicamente como o “combustível” que alimentou o sistema de variáveis que integrou cada GT.

Assim, retomamos um dos elementos de base da análise a priori que subsidiou de igual modo a análise a posteriori.

Quadro 45 - Gerador de Tipo de Tarefas direcionado às análises a posteriori

$GT_{APOS_t} = [\textit{Analisar}; \textit{as técnicas utilizadas na resolução de tarefas vetoriais}; V_{1_{AP_t}}, V_{2_{AP_t}}, V_{3_{AP_t}}]$

$V_{1_{APOS_t}}$ – Natureza dos ostensivos: {geométrica, algébrica ou numérica};

$V_{2_{APOS_t}}$ – Dispositivos: {PL, MM, GG};

$V_{3_{APOS_t}}$ – Elementos auxiliares de $V_{2_{AP_t}}$

Fonte: acervo da autora (2020)

²⁶⁸ Os Sistemas Didáticos Periféricos são compostos pelos Sistema Didáticos Auxiliares – SDA, Sistema Didático Induzidos – SDI e os Sistemas Didáticos Furtivos – SDF que gravitam em torno dos Sistemas Didáticos Principais – SDP. (CHEVALLARD, 2011)

O GT_{APOS_t} – Gerador de Tipo de Tarefas para análise a posteriori estruturou as análises das técnicas mobilizadas no processo de resolução das tarefas vetoriais no contexto de minicursos dirigidos aos discentes do CLM-UEFS. O sistema de variáveis foi mantido segundo o que foi estabelecido em GT_{AP_t} , o que possibilitou estabelecer diálogos comparativos entre o que foi suposto aprioristicamente, em termos de recombinações praxeológicas (CHEVALLARD, 2018), e o que efetivamente ocorreu durante a fase de experimentação. As análises foram pautadas nos Caminhos de Práticas Pessoais – CPP trilhados pelos discentes, ao se depararem e interagirem com tarefas que demandam soluções na observância da existência ou não das relações pessoais em conformidade com esperas institucionais.

Destarte, um primeiro aspecto que se atrela aos valores assumidos pelas variáveis em associação às posturas diferenciadas no uso de cada dispositivo, mesmo mantendo a dinâmica de atividades em grupos, a variação do dispositivo provocou mudanças comportamentais identificadas no contexto comparativo entre PL e MM, ao detectar que os discentes assumiram posturas diferenciadas. A exemplo no trabalho em PL, nota-se que os discentes assumiram atitudes diferenciadas no que se refere ao emprego dos dispositivos, sobrepondo um aspecto individualizado, ressaltando que, mesmo próximos, os estudantes trabalharam individualmente, no primeiro momento, para só então socializar as conclusões acerca do que foi solicitado na tarefa 1. As figuras 180 e 181 retratam esta vertente.

Figura 180 - Grupo 5 no processo de resolução da tarefa 1



Fonte: acervo da autora (2019)

Figura 181 - Grupo 6 no processo de resolução da tarefa 1



Fonte: acervo da autora (2019)

No entanto, no trabalho com Materiais Manipuláveis – MM, foi identificado perspectiva oposta, visto que o emprego desse dispositivo ativou atitudes cooperativas e colaborativas entre os estudantes no processo de resolução da tarefa, emergindo, assim, um caráter de coletividade em detrimento do aspecto individualizado exposto em PL, como evidenciado na figura 182, em um dos momentos da produção do modelo.

Figura 182 - Processo de Produções em MM dos grupos 1 e 2

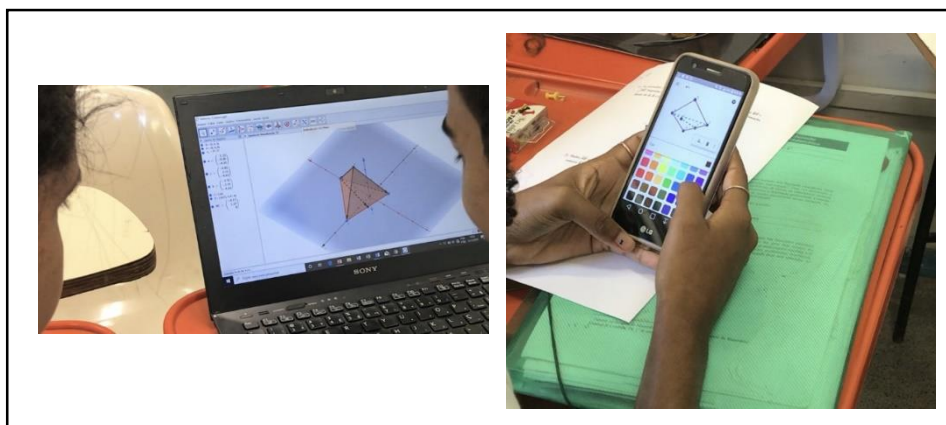


Fonte: acervo da autora (2019)

O emprego de técnicas colaborativas foi um dos diferenciais no uso de MM, caracterizados ostensivamente no campo das representações geométricas. Nota-se, de acordo com a figura 182, a ocorrência de diálogos entre os estudantes em prol da elaboração e planejamento prévio do que deveria ser feito para alcançar uma forma de solucionar as demandas das tarefas, se apresentando como uma estratégia que não foi prevista na análise a priori.

Com algumas similaridades, porém em níveis mais tímidos no que tange a nuance colaborativa, as construções realizadas em GG são ilustradas a seguir:

Figura 183 - Exemplo de Processo de Produções em GG dos grupos 3 e 4



Fonte: acervo da autora (2020)

As versões de GG disponibilizadas para computadores são mais completas, enquanto que os aplicativos para smartphones são mais limitados e se apresentam com algumas restrições no que se refere aos atributos do programa. Por exemplo, a visualização simultânea das janelas de álgebra, visualização e o protocolo de construção é um recurso disponível nos computadores que são suprimidos nos aparelhos celulares. Outro aspecto que merece destaque é que o uso dos smartphones aponta para um carácter mais individualizado como ilustrado nas imagens que integram a figura 183.

No entanto, em termos epistemológicos, tomamos das análises a priori um elemento que se atrelou ao carácter de mobilidade dos representantes dos vetores. Dessa forma, pode-se constatar que as produções realizadas em MM ou GG assumem com maior expressividade o perfil ostensivo no domínio das representações geométricas. Essas estruturações podem ser descritas com maior nitidez a partir de um GT que contemple os anseios de uma análise a posteriori, sem perder de vista que,

a organização praxeológica institucional raramente coincide com as praxeologias apreendidas (transposição interna). Em particular existem tipos de tarefas pessoais, distintos de tipos de tarefas institucionais e, portanto, praxeologias pessoais distintas de praxeologias institucionais. (CHAACHOUA; BESSOT, 2018, p.127)

Ciente da existência da espera institucional que, ao ofertar tipos de tarefas, acredita-se que os estudantes apresentem como devolutiva um repertório de técnicas que produzam uma Organização Matemática – OM em conformidade com o tipo de tarefa (T) prescrita, particularmente, no CLM-UEFS. Pautados nessa estrutura heterogênea, apresentada pelo AHA, o processo de estudo dos vetores gerou articulações entre os Dispositivos Didáticos {PL, MM, GG}, possibilitando o aparecimento de distintas técnicas, as quais podem ser interpretadas como sublinham Chevallard, Bosch e Gascón (2001),

A necessidade de interpretá-la, justificá-la e relacioná-la com as técnicas já existente. Com a criação da nova técnica, surge a necessidade de analisar seu alcance (os tipos de problemas aos quais podem ser aplicados e suas limitações (os subtipos de problemas que apresentam dificuldades para a utilização da técnica. (CHEVALLARD, BOSCH e GASCÓN, 2001, p. 280)

O aumento no número de técnicas empregadas nas resoluções das tarefas se deu por meio da função atribuída a cada Dispositivo Didático – DD. Em termos do alcance foram detectados limitações no que tange aos materiais manipuláveis, pois os estudantes fizeram uso de resoluções aproximadas das tarefas propostas no curso. Neste sentido, inferimos que MM serviu como um suporte ostensivo que evocou não-ostensivos no processo demandado por t_1 , t_2 , ..., t_6 .

8.2 UMA AMOSTRA DE DIFERENTES ABORDAGENS E RESPOSTAS VINCULADAS A TAREFA 1

Adotamos como exemplo a primeira tarefa e as resoluções a ela associadas, a título amostral, pois já foram aludidos detalhamentos das tarefas/técnicas que seriam supostamente empregadas e que foram efetivamente utilizadas nas resoluções. Todavia, temos ciência que análises dessa natureza podem ser desenvolvidas com enfoque para todas as tarefas propostas no minicurso “*um estudo sobre vetores*”, promovendo reflexões sobre as consequências e características do ensino e aprendizagem vetorial pautadas nas escolhas didáticas que se vincularam aos dispositivos.

Também não podemos perder de vista que o desenho investigativo se apoiou no comportamento do AHA a partir do funcionamento dos Geradores de Tipo de Tarefas (CHAACHOUA;2015) e Sub Geradores de Tipo de Tarefas (KASPARY, 2020). Esse viés

conduziu a investigação e se apresentou como um dos pilares centrais do estudo, pois os sistemas de variáveis, em associação aos Dispositivos Didáticos – DD, ganharam funcionalidade por intermédio dos elementos inerentes ao T4TEL (CHAACHOUA, 2018), assim como, a consonância entre as hipóteses que acompanharam a investigação.

A partir dessas elaborações e concepções, foi possível reconhecer as técnicas e seus ingredientes, pois não podemos olvidar que técnicas também são tarefas. Além disso, o que é tarefa em um momento pode ser técnica posteriormente. Assim como, o logos fundamentou cada técnica mobilizada na resolução de tarefas desse tipo, como exemplificado a seguir, tomado como base a tarefa 1. Neste sentido, o fracionamento praxeológico torna-se um aliado importante do pesquisador uma vez que, no T4TEL (CHAACHOUA, 2018) uma técnica é descrita por um conjunto de tipos de tarefas, cada uma das quais caracterizada por um tipo de tarefa sendo denominada de ingrediente da técnica, que em geral revela traços das escolhas realizadas pelos estudantes.

Tabela 8 - Identificação de técnicas vinculadas a tarefa 1 em MM (grupo 1)

Sequência de técnicas empregadas na elaboração do modelo		Suporte tecnológico teórico [θ/Θ]	
Ingredientes das técnicas		θ	Θ
t_1	Identificação dos pontos A, B, C, D, E, F, G, H e O com uso de PL.	Noções primitivas	Geometria Euclidiana
t_2	Marcação do pontos A, ..., O com tachas.	Noções Primitivas	Geometria Euclidiana
t_3	Delimitação dos quadrados com elásticos.	Conceituação de polígonos	Geometria Euclidiana plana
t_4	Sentidos dos vetores \vec{u} e \vec{v} associados aos elásticos na cor branca.	Definição de vetores	Geometria Analítica
t_5	“Encadeamento” entre elásticos para conceber o vetor \vec{AH} .	Operações de vetores/ Combinação Linear	Geometria Analítica/ Álgebra Linear

Fonte: acervo da autora (2020)

Deve ser enfatizado que não temos como objetivo destacar um dispositivo em detrimento de outro, mas parafraseando Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 82) imprimimos modificações no contrato didático, por meio da produção de situações vetoriais de ensino imersas em AHA, com a intenção de “fazer algo para provocar um agrupamento de encontros ou reencontros²⁶⁹ o que equivale em criar condições.” (CHEVALLARD, 2013, p.6). Logo, observamos que, ao transitar por distintos Dispositivos Didáticos – DD, foi possível delegar

²⁶⁹ Em vez de aprender, dizemos com mais modéstia que nos encontrarmos; em vez de aprender, falaremos de encontro, para não esquecer a indeterminação irredutível do que uso do "aprendizado" mascara (CHEVALLARD, 2013, p.5)

aos estudantes maior envolvimento e oportunizar distintas formas de encontros com o objeto de estudo nas excursões das tarefas, assumindo uma postura procognitiva. Nestes termos, revelamos a análise de mais uma produção que pode ser seccionada, como na tabela 9,

Tabela 9 - Identificação de técnicas vinculadas a tarefa 1 em MM (grupo 2)

Sequência de técnicas empregadas na elaboração do modelo		Suporte tecnológico teórico [θ/Θ]	
Ingredientes da técnica		θ	Θ
t_1	Identificação dos pontos A, B, C, D, E, F, G, H e O com uso de PL.	Noções primitivas	Geometria Euclidiana
t_2	Marcação do pontos A, ..., O com tachas.	Noções primitivas	Geometria Euclidiana
t_3	Identificação dos vetores.	Conceito de vetores	Geometria Analítica
t_4	Cortes nos elásticos para representar múltiplos de um vetor.	Operações vetoriais/ Combinação linear	Geometria Analítica/ Álgebra Linear
t_5	Uso da cor roxa para representar vetores opostos	Operações vetoriais	Geometria Analítica
t_6	Emprego de mais de um elástico corresponde a soma vetorial	Operações vetoriais	Geometria Analítica

Fonte: acervo da autora (2020)

Ao detalhar as técnicas, além dos conceitos e propriedades matemáticas que envolvem as tarefas vetoriais, identifica-se também gestos didáticos, enquanto ingredientes da técnica (CHAACHOUA, 2018), próprios do dispositivo MM, os quais surgem do leque de experiências ostensivas dependentes da natureza de que são compostas estes materiais, propiciando significados sensoriais muito diferentes, por exemplo, fixar as tachas, prender, cortar, relacionar as cores dos elásticos em associação às representações dos vetores, dialoga diretamente com os conceitos teóricos que fundamentam as construções.

No âmbito da resolução apresentada pela equipe 4, ao fazer uso de GG, identificamos traços dos escopos das técnicas evidenciados no protocolo de construção. Com efeito, a tabela 10, traz traços das técnicas e seus ingredientes associados.

Tabela 10 - Identificação de técnicas vinculadas a tarefa 1 em PL (grupo 4)

Sequência de técnicas empregadas na elaboração do modelo		Suporte tecnológico teórico [θ/Θ]	
Ingredientes da técnica		θ	Θ
t_1	Marcação de pontos.	Noções primitivas	Geometria Euclidiana
t_2	Identificação dos vetores.	Conceito de vetores	Geometria Analítica
t_3	Identificação de segmentos.	Advém das Noções primitivas	Geometria Euclidiana

Fonte: acervo da autora (2020)

As demais técnicas seguem o mesmo sequenciamento evidenciado na tabela acima, aspecto este que se diferencia quando direcionamos atenção para a produção realizada no ambiente papel lápis.

Tabela 11 - Identificação de técnicas vinculadas a tarefa 1 em PL (grupos 5 e 6)

Sequência de técnicas empregadas na elaboração do modelo		Suporte tecnológico teórico [θ/Θ]	
Ingredientes da técnica		θ	Θ
t_1	Identificação dos vetores.	Conceito de vetores	Geometria Analítica
t_2	Escrever estas somas em função de \vec{u} e \vec{v} .	Operações vetoriais/ Combinação linear	Geometria Analítica/ Álgebra Linear.
t_3	Efetuar a multiplicação de vetor por um escalar.	Operações vetoriais	Geometria Analítica
t_4	Agrupar e operar os termos vetoriais semelhantes usufruindo das propriedades.	Operações vetoriais/ propriedades associativa, comutativa, elemento neutro, elemento oposto e distributiva.	Geometria Analítica/ Álgebra Linear
t_5	Considerar \vec{FB} , \vec{AG} e \vec{AH} como resultantes de somas vetoriais	Operações vetoriais/ Combinação Linear	Geometria Analítica/ Álgebra Linear

Fonte: acervo da autora (2020)

As reflexões aqui tecidas, nos direcionaram a determinar os reflexos das escolhas realizadas pelos estudantes e os sentidos e significados atribuídos, por eles, a cada construção realizada nas resoluções das tarefas propostas. Contudo, as funções dos Dispositivos Didáticos – DD interferiram e provocaram variações que, por consequência, não cumpriram integralmente suas funções. A título de exemplificação, podemos nos distanciar um pouco do universo da primeira tarefa e tomar como suporte a segunda, que apresentou como enunciado, mostrar que $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$. Nessa perspectiva, notou-se a força do ambiente PL, em detrimento de MM e GG, os quais tiveram a incumbência de auxiliar o processo resolutivo, pois como destacado por Lima, Lins e Pereira (2018):

Quando trabalhamos atividades sobre provas e demonstrações matemáticas com o uso do aplicativo GeoGebra, proporciona-se uma alternativa ao incentivo de se conjecturar, argumentar, provocar raciocínio hipotético-dedutivo e articular níveis de pensamento geométrico. (LIMA, LINS e PEREIRA, 2018, p.201)

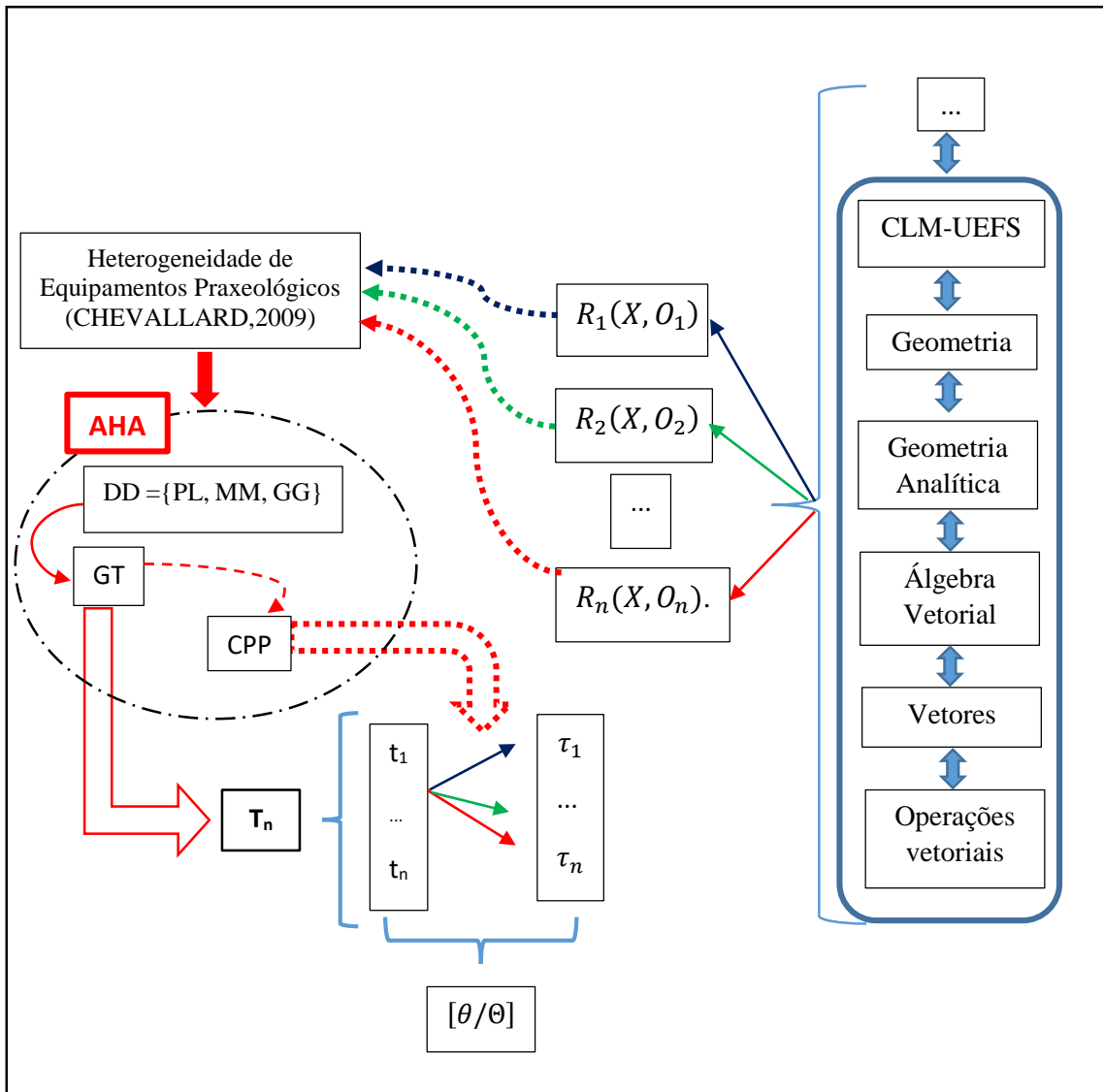
Assim, reforçando o enfoque complementar deste dispositivo no âmbito resolutivo de tarefas que envolvem o campo formal das demonstrações matemáticas. Assim, sob a perspectiva da gênese artificial que se esboçou nesta investigação, imbricados aos Dispositivos Didáticos – DD que assumiram a função do sistema de variáveis nos GTs, compactuamos com a concepção de Netz (1999, p.35) ao pontuar que, “as propriedades que a percepção extrai do

diagrama formam um verdadeiro subconjunto das propriedades reais do objeto matemático.” Dessarte, interpretamos que a pragmática do texto (o enunciado de uma tarefa), por exemplo, é dado pelo diagrama, os quais estabelecem conexões com o contexto, enquanto conjunto de pressupostos que governam o discurso.

De igual modo, é possível realizar análises semelhantes para as demais tarefas descrevendo a sequência praxeológica empregada nas resoluções, tendo em vista que o trânsito entre os dispositivos provocam recombinações praxeológicas, modificando o bloco prático e mantido o logos $(\Pi^*) \oplus \Lambda$ (Chevallard, 2018). Nestes termos, retomamos ao desenho do Caminhos de Práticas Pessoais – CPP em conexão como os elementos que integraram o Ambiente Híbrido de Aprendizagem - AHA, que se revelaram por intermédio das condições e restrições explícitas e implícitas que refletiram no meio estruturado por um ambiente de estudo, que conteve os Dispositivos Didáticos utilizados na construção de cada resposta. Assim, rompe-se com o aparente equilíbrio estrutural que se formou em torno da análise do funcionamento do ensino habitual, cujo funcionamento se apresentou pouco satisfatório por razões de naturezas diversas (epistemológicas, didáticas e cognitivas) e novos laços foram construídos entre luzes que focalizaram a abordagem vetorial no âmbito de uma prática melhorada.

Como já aludido por Kaspary, Chaachoua e Bessot (2020), as instituições educacionais podem ser comparadas aos sistemas dinâmicos que, no contexto matemático, são caracterizados como sistemas fora do equilíbrio, determinados por estados que mudam com o tempo. Significa dizer que se constroem um modelo que evoluem segundo regras que interligam o estado atual ao estado inicial, ou seja, abandonou-se praxeologias estáveis e provocou-se desequilíbrios nos arranjos formados no contexto do minicurso, designado por um conjunto de objetos e relações entre eles. Para cada objeto, a relação institucional muda ao longo do tempo didático, assim como as relações. Como ilustrado na figura 183.

Figura 184 - Interligações entre o AHA e o CPP



Fonte: acervo da autora (2020)

O esquema retratado na imagem mostra o agrupamento de relações institucionais e pessoais que advém dos níveis inferiores da escala de codeterminação didática no contexto do CLM-UEFS. O que exhibe um corpus heterogêneo de equipamentos praxeológicos direcionados ao Ambiente Híbrido de Aprendizagem – AHA, descrito pelos Dispositivos Didáticos – DD, os quais alimentaram o sistema de variáveis dos Geradores de Tipo de Tarefas e Sub geradores de Tipo de Tarefas, produzindo e reunindo um repertório de praxeologias pessoais e institucionais, que foram mobilizadas pelos sujeitos nas resoluções das tarefas vetoriais, promovendo recombinações praxeológicas, o que se apresentou como a implementação de estratégias didáticas para o ensino e aprendizagem dos vetores.

9 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta seção, nosso intuito consiste em retomar alguns pontos relevantes referentes ao *corpus* do estudo, estabelecendo paralelos entre a tese guiada pelas hipóteses e objetivos e algumas reflexões teóricas no seio das Organizações Didáticas - OD e Organizações Matemáticas – OM, a partir dos pressupostos da TAD que fundamentaram a concepção do AHA, o qual alimentou o funcionamento dos Geradores de Tipo de Tarefas (CHAACHOUA, 2015) e Sub Geradores de Tipo de Tarefas (KASPARY, 2020), por meio dos Dispositivos Didáticos – DD que assumiram a função de variáveis em associação ao contexto do ensino e aprendizagem vetorial. Desse modo, apresentaremos três eixos norteadores da pesquisa: o saber de referência no âmbito histórico institucional, as fundamentações teóricas e seus vínculos com as intenções didáticas e as contribuições para didática.

9.1 O SABER DE REFERÊNCIA NO ÂMBITO HISTÓRICO INSTITUCIONAL

O delineamento histórico e epistemológico foi revelado no primeiro capítulo, aspecto este, que abriu um leque de possibilidades na condução do estudo. Já que possibilitou visitas às razões de ser (BOSCH; GASCÓN, 2010) do objeto vetorial nos níveis do setor e do domínio, segundo os níveis de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2002)), caracterizando o Modelo Epistemológico de Referência – MER (GASCÓN, 2001). A partir dessa perspectiva, foi possível rastrear elementos inerentes à gênese vetorial, além de evidenciar ingredientes que integram o ensino e a aprendizagem dos mesmos. Contudo, como já aludido, não foi almejado contemplar, em sua totalidade, a história dos vetores, mas tecer considerações em torno do assunto associado às nuances e às particularidades desse elemento, por meio de uma análise ecológica transpositiva. Significa dizer que, a partir da vertente histórica-epistemológica é possível identificar o porquê de alguns decursos e rastreios dos distintos habitats, além de identificar seus nichos.

Segundo Dorier (2000) existem três habitats ecológicos: o vetor geométrico, o vetor algébrico e o vetor físico, com distintas especificidades. Todavia, ao atentarmos para etimologia da palavra, foi identificado que provém do verbo *vehere*, que significa transportar, levar (VENTURI, 2015), que dialoga com a ideia de Dorier (1995) em que deve-se pensar na ideia de movimento. Sob uma perspectiva mais moderna, a conceituação se aproxima ao que nos

deparamos nos livros textos de Geometria Analítica, isto é, enquanto diferença entre dois pontos no espaço, como destacou Crowe (1994) acerca do trabalho de Hamilton (1805-1865) com os quaternions (generalização dos números complexos),

(...) é construído por uma linha reta com direção no espaço, e com x , y , z para suas componentes retangulares, ou projeções sobre os três eixos retangulares, ele tem sido induzido a chamar a expressão trinomial, assim como a linha que representa, um VETOR. Um quaternion deve consistir assim de uma parte real e um *vetor*. (CROWE, 1994, p. 31, grifos do autor, tradução nossa²⁷⁰)

Contudo, essa conceituação ainda era incipiente para a criação e o desenvolvimento da estrutura de espaços vetoriais, pois eram fortes os apelos geométrico e intuitivo que subsidiavam os problemas físicos. Também foi identificado que o primeiro contato com vetores ocorreu, geralmente, por intermédio de uma representação que os caracteriza geométrica e/ou algebricamente. Desse modo, as representações geométricas dos vetores partem da associação às grandezas que necessitam de *módulo*, *direção* e *sentido* para serem completamente caracterizados. Nesse sentido, um vetor é geometricamente representado por uma seta, com comprimento revelado pelo módulo, o que é intuitivo. As diferentes formas de representação dos vetores transportam, intrinsecamente em sua formação, “feições” numéricas, algébricas e geométricas, fatos esses que emergiram da trajetória histórica que envolve o tema.

A partir dessa trajetória histórica-epistemológica, cuja promulgação do saber²⁷¹ muitas vezes não é um objeto puro e livre de interferências, está atrelada as disputas, as quais são nutridas por interesses difusos que acompanham as tradições dos grupos de matemáticos, é possível enxergar com mais clareza o que salientou Lima (2012) acerca de um dos certames vivenciados na primeira metade do sec. XX,

um confronto entre a abordagem geométrica e a algébrica, delineado, principalmente, entre as escolas de matemática italiana e a bourbakista circunscrito no campo da geometria algébrica, por outro, esse confronto também foi marcado pelas disputas políticas internacionais do período, envolvendo inclusive questões que estavam relacionadas ao fascismo, nazismo e matemáticos de nacionalidade judia. (LIMA, 2012, p. 234)

Enfoque como este nos fizeram inferir que as formas de organização do saber matemático também influenciam as práticas e articulações que advém da estruturação dos atributos curriculares inerentes aos Cursos de Licenciatura em Matemática. Nessa linha de

²⁷⁰ (...) is constructed by a right line having direction in space, and having x , y , z for its three rectangular components, or projections on three rectangular axes, he has been induced to call the trinomial expression. Itself, as well as the line which it represents, a VECTOR. A quaternion may thus be said to consist generally of a real part and a vector.

²⁷¹ Em Conne (1996, p.222) apresenta-se a concepção de que o saber deve ser descontextualizado, despersonalizado, e mesmo sócio-culturalmente instituído.

raciocínio, foi pertinente considerar que, para tratarmos do contexto no domínio vetorial, fez-se necessário atentarmos para os caminhos de institucionalização da geometria e da álgebra linear no Brasil. Dito de outra forma, faremos incidir uma luz acerca do Saber a Ensinar – SaE difundido no período em se inauguram os cursos de licenciatura em matemática no cenário brasileiro e para tanto os estudos de Ziccardi (2009) nos auxiliam nesse aspecto, ressaltando que no Curso Matemático na FFCL²⁷² destinado à formação de professores as disciplinas Geometria analítica, Geometria projetiva e o cálculo vetorial compunham a organização curricular do curso.

Nestes termos Ziccardi (2009, p. 140) sublinhou que “utiliza-se da Geometria Descritiva para melhor ampliar o conhecimento do espaço. *O cálculo Vetorial e Hemográfico* permite um preparo sólido que os alunos devem possuir para enfrentar o estudo da Física da Mecânica Racional”. Assim, foi possível perceber que, para além da geometria, ressaltava-se a imprescindibilidade de uma componente curricular destinada unicamente para o estudo dos vetores.

Entretanto, o caráter essencialmente geométrico foi enfraquecido pelas concepções advindas do Movimento da Matemática Moderna - MMM no Brasil, no contexto da segunda metade do séc. XX, influenciando o campo das ideias matemáticas, ao desencadear significativas mudanças nos programas curriculares, os quais repercutiram nas práticas escolares. A partir desse cenário, o que mais se aproxima do nosso foco de interesse refere-se ao movimento de algebrização da geometria que, de acordo com Camargo (2009, p.25), (...) “Segundo documentos da época a algebrização, poderia ser realizada por três linhas: via modificações dos axiomas de Euclides, por meio dos grupos das transformações geométricas ou via espaços vetoriais.”

Desse modo, especificamente, a introdução da abordagem vetorial era apresentada aos alunos desde o final do ginasial (contemporaneamente Ensino Fundamental II séries finais), tornando-se gradualmente mais rebuscada no secundário e nível universitário. Aspecto esse, evidenciado no trecho do prefácio do livro 3 de Catunda e colaboradores,

No terceiro ano ginasial, estudam-se, primeiramente, as transformações geométricas na reta. Em seguida, partindo da observação e tomando por base propriedades bastante intuitivas, introduz-se a *estrutura de espaço vetorial do conjunto das translações no plano*. O conjunto dos pontos do plano é, então, o *espaço afim bi-dimensional associado ao espaço vetorial assim definido*. Desta maneira se apresentam, naturalmente, as coordenadas cartesianas ligadas a um sistema de referência constituído por um ponto O e *dois vetores não paralelos u e v* (sistema Ouv). (CATUNDA, 1971, p. VII, apud CAMARGO, 2009, p. 84, grifos nossos).

²⁷² Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da USP.

A partir desse contexto, foi viável constatar discrepâncias entre o ensino vetorial difundido na segunda metade do século XX e o que é veiculado no âmbito do ensino vetorial contemporâneo. Em outras palavras, espontaneamente incorporava-se a ideia de espaço vetorial em associação com as transformações do plano. Por outro lado, ao fitar a atenção para os estudantes do CLM-UEFS foi viável observar que eles não possuíam uma bagagem praxeológica prévia (Ensino Fundamental e Médio) com a abordagem vetorial, o que reduziu o alcance em projetar um trabalho no âmbito dos espaços vetoriais. Essa vertente foi ratificada por pesquisadores da área de Matemática Pura e Educação Matemática, como Lima *et al* (2001), Rodrigues (2015), Reis (2016) e Vaz e Ferreira (2016) ao destacar a ausência dos vetores nos currículos e livros destinados a este nível de ensino. Aspecto este sublinhado nas palavras de Vaz, Ferreira e Nasser (2017),

Observando as dificuldades apresentadas por alunos ao chegar à universidade, o grupo começou a questionar o que se ensina de vetores e retas no EM. Para nossa surpresa, verificou-se que “vetores” é um tópico que, em geral, não faz parte dos currículos de EM de Matemática. Em alguns casos, aparece no currículo de Física, mas, não está claro se os alunos conseguem aplicar esse conhecimento para usar vetores em Matemática. (VAZ, FERREIRA e NASSER, 2017, p. 57)

Essa perspectiva se une à preocupação sinalizada pelo professor Elon Lages Lima *et al* (2001) ao declarar de maneira enfática suas inquietações, após ter analisado diversos livros de matemática para o Ensino Médio, e o descontentamento ao fazer referência à exiguidade dos vetores, expondo estas sensações em vários trechos da obra em foco: “Por alguma obscura razão, ou por nenhuma em especial, o importante conceito matemático de vetor [...], é personagem ausente deste e dos demais compêndios brasileiros, sendo usado apenas pelos professores de Física.” (LIMA *et al*, 2001, p. 62).

Fato este que se confirma por meio da análise de outra obra:

O livro consegue vencer muito bem a dificuldade gerada pelo fato dos programas da maioria das escolas não incluírem vetores, construindo, disfarçadamente, um “cálculo vetorialzinho” de soma e produto por número para ser usado nesse contexto. [...] um dos defeitos deste livro e de todos os livros de Matemática para Ensino Médio existentes no mercado é a completa omissão de vetores. Estranhamente, vetores são ensinados nos livros de Física, não nos de Matemática (LIMA *et al*, 2001, p. 130).

As constatações neste sentido, hodiernamente, não apresentam significativas mudanças. Esse fato é evidenciado ao consultarmos o Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de Matemática (2017) e encontrarmos no tópico que contempla a distribuição de conteúdo apenas uma ocorrência que faz alusão aos vetores: “(...) é importante que o estudo dos complexos seja uma oportunidade privilegiada de articulação com tópicos como vetores e

geometria no plano, com trigonometria e com as equações algébricas” (BRASIL, 2017, p. 24, grifos nossos).

Em mesmo direcionamento, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (2017) apresenta implicitamente a temática vetorial na área destinada à matemática e suas tecnologias, ao abordar movimento e posição:

(...) estão presentes na localização de números em retas, de figuras ou configurações no plano cartesiano e no espaço tridimensional; direção e sentido, ângulos, paralelismo e perpendicularidade, transformações geométricas isométricas (que preservam as medidas) e homotéticas (que preservam as formas) e padrões das distribuições de dados (BRASIL, 2017, p. 521).

Sob esse ponto de vista, foi possível reconhecer a existência e abordar a problemática ecológica, identificada por membros da noosfera, já que, de acordo com Bosch e Chevallard (1999, p. 4, tradução nossa),²⁷³ “o problema ecológico expandirá o campo de análise e abordará as restrições criadas entre os diferentes objetos de conhecimento a serem ensinados”. Em outras palavras, os vetores não possuem um sólido *habitat* no currículo de matemática pertencente ao Ensino Médio.

Neste sentido, emerge a necessidade de propormos estudos que adentrem na esfera do Saber a Ensinar - SaE, particularmente, no que tange ao desenho curricular esboçado nos Cursos de Licenciatura em Matemática no cenário brasileiro, em especial o CLM-UEFS, para então sugerir alterações, em termos das Organizações Matemáticas e Didáticas, no âmbito da Geometria Analítica e da Álgebra Linear que venham contribuir para o abandono do engessamento oriundo do Paradigma de Visitas as Obras (CHEVALLARD, 2012) e promover aproximações com uma abordagem flexível (DREYFUS, 1991), em contraposição à rigidez matemática (SILVA *et al*, 1999), dando origem a uma rede de diálogos que gere aproximações com os pressupostos do Paradigma de Questionamento de Mundo (CHEVALLARD, 2009; 2010; 2012).

Essa vertente abre possibilidades para que professores e estudantes possam mergulhar em um contrato didático distinto daquele que historicamente moldou as escolhas e práticas dominantes amplamente cristalizadas, pois na concepção de Chevallard (2018) deve-se abandonar o paradigma escolar do inventário dos saberes e substituí-lo por um novo paradigma escolar do questionamento do mundo: “em vez de uma leitura inventariante do universo dos saberes, então, uma leitura questionadora do Mundo (incluindo o mundo dos saberes).” (CHEVALLARD, 2018, p.44)

²⁷³ “Le problème écologique élargira le champ d'analyse et traitera les contraintes créées entre les différents objets de connaissance à enseigner”.

Estes elementos corroboram com o que foi constatado por um grupo de pesquisadores da matemática pura há quase duas décadas. Dito de outra forma, os vetores permanecem ausentes dos níveis que precedem o Ensino Superior, ou seja, delega-se aos cursos universitários, pertencentes às ciências exatas, a missão de apresentar a abordagem e por constituir, na maioria das vezes, o primeiro contato que os estudantes terão com esse objeto. Neste diapasão, torna-se patente a necessidade de implementarmos ações didáticas que considerem o caráter incompleto e/ou inexistente dos vetores no nível superior de ensino e o trabalho com distintos dispositivos didáticos se revelou promissor no auxílio à compreensão deste saber.

9.2 FUNDAMENTAÇÕES TEÓRICAS E SEUS VÍNCULOS COM AS INTENÇÕES DIDÁTICAS PRÓPRIAS DESTE ESTUDO

Ao direcionar atenção para os pressupostos teóricos da Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1998; 1999), foi possível destacar encadeamentos entre os objetos que guiaram a investigação, em princípio pela própria estruturação teórica, sob o fito da premissa: “tudo é objeto”. E para Chevallard (1996), quando existem modificações na relação pessoal para com o objeto O , por consequência, existe aprendizagem. Esse constituiu um dos pilares dessa pesquisa, ou seja, as relações pessoais em interação com o objeto do saber produzem modificações na bagagem praxeológica dos sujeitos. Sem deixar de admitir que existem elementos que intermediaram esse processo relacional, sejam eles ostensivos ou não ostensivos (BOSCH; CHEVALLARD, 1999). Como destacou Casabò (2001, p. 20, tradução nossa²⁷⁴): “toda manipulação de ostensivos é controlada pela ‘ativação’ ou ‘evocação’ de objetos não ostensivos cujas características podem ser modificadas durante toda a atividade”. Assim, frente aos aspectos oriundos da epistemologia vetorial, sumarizado no item anterior, concebemos que as “raízes” do que se apegou em aulas sobre vetores estão plantadas num terreno ilusório do Paradigma de Visitas as Obras (CHEVALLARD, 2012). E para tanto, mapeamos e descrevemos o Modelo Praxeológico Dominante – MPD, tido para Gascón (1994) como um sistema de condições e restrições das práticas de sujeitos institucionais, alunos e professores, que foi caracterizado por nós por meio de uma análise de livros textos, currículo e

²⁷⁴ “toda manipulación de ostensivos viene controlada por la ‘activación’ o ‘evocación’ de objetos no-ostensivos cuyas características pueden verse modificadas a lo largo de la actividad”.

observação de aulas direcionada aos discursos dos protagonistas dos Sistemas Didáticos no âmbito vetorial.

Os diálogos produzidos pelos professores e estudantes possibilitou descrever a crônica da classe (COMITI; FARIAS, 2019), assim como o traçado das tramas praxeológicas (FARIAS; PIRES, 2011), que conduziram os direcionamentos para sintetizar e expor os diversos elementos que delinearão cada sessão de estudo em associação aos contrastes detectados em nossas análises.

Com base neste delineamento, foi dedicada particular atenção para o saber ensinado e o saber apreendido, o que reporta, conseqüentemente, à conjuntura das salas de aula de Geometria Analítica, as quais encontram-se no âmago de um Sistema Didático – SD, conforme sublinha Chevallard (2011, não paginado): “o Sistema Didático encontra-se no coração da Teoria Antropológica do Didático – TAD.” Os direcionamentos deste campo teórico, em essência, fundamentam enquanto determinante crucial para a compreensão das diferentes ecologias desse conceito. Aditado a isso, Chacón (2008, p. 51, tradução nossa)²⁷⁵ ressalta que “o processo de transposição didática sublinha, portanto, a relatividade institucional do conhecimento”, influenciado pelas submissões ou assujeitamentos institucionais, a exemplo do uso regular de um livro didático ou emprego recorrente do ambiente Papel Lápis no processo de ensino e aprendizagem.

A partir dos mapeamentos dos elementos apontados no MPD, esboçou-se traços de um cenário tradicional vivenciado pelos sujeitos no funcionamento dos Sistemas Didáticos no contexto do CLM-UEFS. Ou seja, foram raros os momentos em que os discentes assumiam o protagonismo no desenvolvimento das aulas e, quando ocorriam, estavam sempre vinculados às perguntas que buscavam esclarecimentos relacionados ao tema ou questão abordada. Essa perspectiva expõe uma postura estática e coadjuvante proveniente do modelo tradicional²⁷⁶ de ensino respaldado pelo Paradigma de Visitas a Obras ou Visitas aos Monumentos,²⁷⁷ que, na acepção de Chevallard (2012), resume-se a ouvir um relato ou narrativa recitada pelo professor sobre o monumento visitado.

Isto posto, recorreremos aos momentos de estudos (CHEVALLARD *et al.*, 2001), que possibilitou revelar as variantes inerentes ao corpus de duas aulas, o que significa dizer que as tramas praxeológicas (FARIAS; PIRES, 2011) foram categorizadas a partir deste entendimento.

²⁷⁵ “Le processus de transposition didactique souligne donc la relativité institutionnelle des savoirs”.

²⁷⁶ O ensino tradicional apresenta como características “ensinar e praticar”.

²⁷⁷ In the framework of the anthropological theory of the didactic, this paradigm is known as the paradigm of “visiting works” or – according to a metaphor used in ATD – “of visiting monuments”, for each of those pieces of knowledge. (CHEVALLARD, 2012)

Ou seja, diferentes momentos integraram o processo de estudo, dentre eles Chevallard, Bosch e Gascón (2001) destacam: o momento do primeiro encontro com um novo tipo de problema: o do trabalho da técnica, o tecnológico-teórico, o exploratório e o da avaliação. Neste conjunto, os autores também ressaltam que a noção de “momento” não é uma concepção estritamente cronológica, pois os momentos podem ser retomados e revividos em distintos instantes do estudo.

As ausências dos momentos exploratório e de avaliação foram identificados no processo de desenvolvimento da primeira aula. Já no que tange à segunda aula, os constantes diálogos entre docente e discentes evidenciaram participações mais ativas dos atores que protagonizaram essa aula cujo tema central foram os vetores. No entanto, foi revelado a inexistência do momento de avaliação.

A título de ilustração, diante do que foi recapitulado, traduzimos nossa intenção de pesquisa em sintonia com o que sublinha Chevallard (1985) ao apresentar equivalências entre uma música executada por múltiplos instrumentos e a transposição. Aspecto este, que dialogou com a figura 77 que ilustrou o desenho da tese. Em termos dessa investigação, no nível das praxeologias, constituiu em apresentar tarefas, apoiada na declaração de Bessot e Chaachoua (2016, p. 3) “que um dos objetos de observação do pesquisador são tarefas e que um tipo de tarefa é definido por um verbo de ação e um complemento fixo”. Assim, foi possível promover uma análise ecológica para distintos “timbres” e, conseqüentemente, como o estudo dessa “sonoridade” repercute no entendimento da melodia executada regida pelo maestro (professor) e os instrumentistas (alunos) na execução de tarefas com o objetivo comum da aprendizagem vetorial.

E para entoar essa música os Geradores de Tipo de Tarefas - GT, determinados por um tipo de tarefa e por um sistema de variáveis, assumiram uma relevante função, pois para os autores ora referidos, esse novo objeto permite estruturar um conjunto de tipos de tarefas para fins de pesquisa. Nesta perspectiva, um GT tem a seguinte configuração: GT = [Verbo de Ação; Complemento Fixo; Sistema de Variáveis] (CHAACHOUA; BESSOT, 2016).

Os Geradores de Tipo de Tarefas em conjunto com o Sistema de Variáveis foram alimentados pelas distintas combinações provenientes do AHA. Assim, ratificamos a interpretação, metafórica, de que os geradores atuaram como uma “máquina” produtora de tarefas, no qual o Ambiente Híbrido de Aprendizagem - AHA forneceu “combustível” para o funcionamento operacional em interação com as mídias, nos moldes da Dialética Media Milieu (CHEVALLARD, 2007), regulados pelos valores das variáveis inerentes à natureza de cada Dispositivo Didático - DD. O que nos permitiu conceber a viabilidade do trabalho com

diferentes dispositivos didáticos e, por consequência, promoveu possibilidades de construções das recombinações praxeológicas (CHEVALLARD, 2018), despertando novas relações pessoais dos estudantes para com os vetores.

O processo de experimentação foi subdividido em três estágios: O primeiro objetivou adentrar no cenário do ensino e da aprendizagem vetorial, ao utilizarmos a estratégia de submissão de um minicurso a XVIII SEMAT²⁷⁸, cujo título foi denotado por “Articulações entre o GeoGebra e a Álgebra Vetorial”²⁷⁹, tido também como uma primeira preparação do Modelo Praxeológico de Referência – MPR. A segunda imersão ocorreu de forma mais robusta, seja pela ampliação da carga horária ou pela própria estruturação, que introduz e propõe o trabalho com Materiais Manipuláveis – MM, além do emprego dos Geradores de Tipo de Tarefas. É relevante destacar que na etapa experimental, foi possível identificar fenômenos didáticos que envolveram uma abordagem flexível (DREYFUS, 1991), em contraposição à rigidez matemática (SILVA *et al*, 1999).

Essa junção provocou alterações no meio que desencadearam modificações nas relações pessoais com o objeto vetor. Nestes termos, foi possível nos afastarmos do Sistema Didático Principal (SDP), $S(X, Y, O)$, e nos aproximarmos de Sistemas Didáticos Auxiliares (SDA), como por exemplo: Sistemas Didáticos Auxiliares - SDA $S(X; \emptyset; O)$ ou de Sistemas Didáticos Induzidos – SDI²⁸⁰ $S(X_1, X_2; \emptyset; O)$. O que propiciou alterações nas funções didáticas inerentes ao funcionamento dos Sistemas Didáticos – SD no âmbito vetorial do CLM-UEFS, o que coincide com o momento em que o MPR questiona o que está posto no MPD.

Por fim, porém não menos importante, o minicurso denominado: “Um estudo sobre os vetores”, o qual foi idealizado e organizado a partir das experiências que o antecedem. Essa análise *in vivo*, incluiu a implementação em sala de aula do processo de estudo desenhado, a sua observação e recolha de dados, por meio das produções dos discentes, em termos dos Caminhos de Práticas Pessoais - CPP das tarefas vetoriais a partir de um Ambiente Híbrido de Aprendizagem – AHA, sob o âmbito de desenvolvimento estruturado no quadro de referência didática T4TEL (CHAACHOUA, 2018), abastecendo o processo de confrontação entre as análises a priori e a posteriori.

²⁷⁸ Evento realizado anualmente na Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS, sob a coordenação de estudantes do Diretório Acadêmico - DA e pelo Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática – COLMAT.

²⁷⁹ Uma síntese deste primeiro contato com os estudantes do CLM-UEFS originou o artigo intitulado: Uma proposta de articulações entre Álgebra Vetorial e GeoGebra publicado no periódico Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT v.15 n.1 (2020).

²⁸⁰ Ver Chevallard (2011)

Assim, a nuance conclusiva deste estudo aponta para a ratificação de algumas hipóteses, em especial, no que se refere à necessidade de um repertório de Dispositivos Didáticos-DD direcionado ao ensino e aprendizagem no âmbito vetorial, pois, por intermédio da análise institucional foram identificadas recorrências, quase que exclusivas, ao ambiente Papel Lápis - PL. Contudo, o processo experimental revelou que a mobilização de outros DD no trato com os vetores ofertam maior grau de compreensão, seja por intermédio da viabilidade de movimentação dos representantes dos vetores ou por meio da necessidade de visualização e consequente materialização e manipulação em figuras tridimensionais. Nestes termos, as análises das tarefas e do alcance das técnicas foi observado seguindo os direcionamentos de (CHEVALLARD, 1999) e Kaspary, Chaachoua e Bessot (2020), o que permitiu uma atenção mais apurada acerca das condições e restrições em termos de tendência ao fracasso.

Nesta perspectiva, regressamos às hipóteses, as quais podem ser condensadas em: o trabalho com diferentes Dispositivos Didáticos - DD possibilita a construção de recombinações praxeológicas e estimula novas relações pessoais dos estudantes com os vetores. Para validar essa suposição, destacamos impressões dos estudantes, pois, após a conclusão do processo experimental, foi solicitado que os discentes revelassem suas opiniões acerca das resoluções das tarefas no contexto do AHA.

A partir das impressões reveladas pelos participantes do curso identificamos alterações nas relações pessoais com os vetores. Adita-se a essa perspectiva, traços das condições e restrições em associação com o alcance das técnicas, advinda do trabalho desenvolvido no ambiente de cada dispositivo. A exemplo, como já aludido anteriormente, a viabilidade de movimentação dos representantes dos vetores, além da necessidade de visualização e consequente manipulação de figuras tridimensionais. Todavia, em termos restritivos, os discentes perceberam o aspecto incompleto dos Dispositivos Didáticos MM e GG, ressaltando a constante recorrência ao PL. Assim, os diálogos entre DD se apresentaram como um aspecto promissor a ser proposto, e possivelmente, implementado no CLM-UEFS com subsídio ao ensino e aprendizagem vetorial.

9.3 CONTRIBUIÇÕES PARA O CAMPO DA DIDÁTICA

As contribuições ao campo da Didática da Matemática, a qual julgamos de grande valia na conclusão deste estudo, se desdobram a partir de três enfoques. O primeiro deles, diz respeito ao Ambiente Híbrido de Aprendizagem, caracterizado como a integração entre Dispositivos

Didáticos - DD que impulsionou operacionalizar os Geradores de Tipos de Tarefas (CHAACHOUA, 2015) e Sub-Geradores de Tipo de Tarefas (KASPARY, 2020). Nestes termos, é relevante sublinhar que o AHA foi teorizado a partir do T4TEL (CHAACHOUA, 2018), o que viabilizou conceber os DD enquanto variáveis. Fato este que oportunizou questionar melhor as técnicas, visto que as técnicas não existem sem essa “materialidade” advinda dos ostensivos. Em outras palavras, a junção entre ostensivos e DD fortalece e torna mais consistente a vivência dos ostensivos (esquecendo a oralidade) nos cenários dos SD.

O segundo aspecto, consistiu um desdobramento do primeiro, já que ampliou as potencialidades dos Geradores de Tipo de Tarefas por meio de possíveis filiações entre praxeologias, o que nos permitiu inferir que um GT oportuniza, analogamente, estudar o "**DNA matemático**" de T, na medida em que podemos construir geradores que armazene a gênese e nos informe a natureza de T_1, T_2, \dots, T_n , advindas de GT. Neste sentido, vislumbramos que novas frentes de pesquisas se abrem e, conseqüentemente, podem gerar oportunidades para questionar futuros Percursos de Estudo e Pesquisa – PEP (CHEVALLARD, 2009) ou modelar os CPP. Assim, o CPP se apresentou como uma ferramenta teórica, que possibilitou ordenar a compreensão estrutural das relações pessoais em consonância com as recombinações praxeológicas (CHAVALLARD, 2018).

E o terceiro enfoque soma-se às concepções elencadas anteriormente ao dispor o delineamento do CPP, oriundo de concepções provenientes das Praxeologias Pessoais (CROSET; CHAACHOUA, 2016) e do repertório das relações pessoais, o qual pode fornecer pistas que contribuam para idealização, elaboração e desenvolvimento de Percursos de Estudos e Pesquisas Pessoais – PEPP, centrados em uma nova dialética do individual ao individual (em que o nível de produção de conhecimento individual do estudante será um dos objetos de estudo a partir de uma questão Q_0).

Isso significa que nos reportaremos ao Paradigma de Questionamento de Mundo (CHEVALLARD, 2009; 2010; 2012) de forma mais consistente, visto que o primeiro passo foi dado a partir desta tese, mesmo que o Paradigma de base tenha sido o de Visitas às Obras (CHEVALLARD, 2012), pois a investigação foi pautada nos estudos de questões que geralmente integraram avaliações das componentes curriculares EXA180 e EXA 374 no contexto do CLM – UEFS. Contudo, a recorrência às dialéticas: Dialética Media Milieu (CHEVALLARD, 2007) e do individual e coletivo (COSTA, ARLEGO E OTERO, 2015) e a busca e incentivo pelo maior protagonismo dos estudantes apontam traços do paradigma que almejamos.

A partir dessa perspectiva, as representações dos Sistemas Didáticos, em associação às funções didáticas (CHEVALLARD, 1985; 2009) ilustrados no sexto capítulo, sofrerão significativas modificações, em especial no vértice do triângulo didático que contém o Saber, o qual será substituído por uma Questão – Q_0 com potencial para gerar questões derivadas. Nestes termos, é viável pensar acerca da possibilidade de inserir ao meio, que integra os Sistemas Herbatianos Desenvolvidos, os Geradores de Tipo de Tarefas – GT ou Sub-Geradores de Tipo de Tarefas – SGT.

De igual modo, é relevante destacar que vislumbramos remodelações e consequentes expansões do alcance do Ambiente Híbrido de Aprendizagem – AHA, enquanto Modelo Praxeológico de Referência Alternativo – MPRA no âmbito de outros saberes, comungando com a reprodutibilidade deste contexto, prevista no âmbito da Engenharia Didática.

Promover a comunicação de elementos que advém da epistemologia do objeto e que favorecem a união da razão de ser (BOSCH; GASCÓN, 2010) desse saber com a prática vivenciada nos funcionamentos dos Sistemas Didáticos – SD. Neste sentido, este estudo vem reforçar que a TAD se apresenta como uma teoria em pleno desenvolvimento, a qual almeja, por intermédio das noções difundidas por Yves Chevallard e seus colaboradores, trazer mais contribuições para a justificativa de fenômenos no ensino. Além de revelar o potencial comunicacional dessa teoria com quadros teóricos como o T4TEL (CHAACHOUA, 2018) na busca por compreensões mais amplas dos fenômenos didáticos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A. Prova e Demonstração em Matemática: Problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: 30ª Reunião Anual da Anped, 2007, Caxambu. **Anais Anped** Caxambu, 2007. Disponível em: <http://www.anped.org.br/sites/default/files/gt19-2957-int.pdf>. Acesso em: 11 de mar. 2020.

ALMOULOUD, S. A. As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo. **Educar em Revista**, n. Especial 1, p. 191-210, 2011. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/er/nse1/13.pdf>. Acesso em: 04 jul. 2019.

AMADO, Nélia; SANCHEZ, Juan; PINTO, Jorge. A Utilização do Geogebra na Demonstração Matemática em Sala de Aula: o estudo da reta de Euler. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 637-657, Aug. 2015. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2015000200012&lng=en&nrm=iso. Acesso: on 23 Set. 2020.

ANTIBI, A.; BROUSSEAU, G. Vers l'ingénierie de la dé-transposition. **Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologiques**: concepts et méthodes. n. 8, 2002. Disponível em: https://www.persee.fr/doc/AsPDF/dsedu_1296-2104_2002_num_8_1_1009.pdf. Acesso em: 03 jul. 2019.

ARAÚJO, R. E. G. Elaboração de objetos de aprendizagem com o software GeoGebra para o ensino de geometria. **Boletim online de Educação Matemática – BoEM**, 2018, Disponível em: <http://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/13828>. Acesso: 20 de abr. 2020.

ARSAC, G.; DEVELAY, M.; TIBERGHIE, A. **La transposition didactique en mathématiques, en physique et biologie**. Lyon: 1989. p. 3-36.

ARSAC, G. Variations et variables de la démonstration géométrique. **Recherches En Didactique Des Mathématiques**, 19(3), 357–390, 1999. Disponível em: <https://revue-rdm.com/1999/variations-et-variables-de-la/>. Acesso: 03 de abr. 2020.

ARTAUD, M. Introduction à L'Aproche écologique Du didactique, L'écologie dès organization mathématiques ET didactique. **Actes [...] de La neuvième École d'été de didactique dès Mathématiques**. Hougate, Bailleul, p. 101-139. 1998.

ARTAUD, M. **La TAD comme théorie pour la formation des professeurs. Structures et fonctions**. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éds), Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (pp. 241-259). Jaén, Espagne: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007.

ARTAUD, M. **Teoria antropológica do didático – Observar, analisar, avaliar e desenvolver uma organização matemática e uma organização de estudo.** Praxeologias para o professor, praxeologias para o pesquisador e sua ecologia. Aix-Marseille Univ. Marselha, França. Curso na Universidade de Salvador da Bahia, Brasil de 10 a 20 de outubro de 2017.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. *In*: BRUN, J. **Didática das Matemáticas.** Tradução Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ARTIGUE, M. Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? **Educación Matemática**, 2004, Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516302>. Acesso em: 05 fev. 2019.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique: quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ?. *In*: **Les dossiers des sciences de l'éducation**, n. 8. Didactique des disciplines scientifiques et technologiques: concepts et méthodes. p. 59-72, 2002. Disponível em: https://www.persee.fr/doc/dsedu_1296-2104_2002_num_8_1_1010 Acesso em: 05 jan. 2019.

ARZARELLO, F. *et al.* The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches. **ZDM Mathematics Education**. n. 40, p. 179-188, 2008. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/225589006>. Acesso em: 25 mar. 2018.

ASSEMANY, D. O Ensino e a Aprendizagem de Vetores no 1º Ano do Ensino Médio: uma Reestruturação Curricular. *In*: COLÓQUIO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2011, Juiz de Fora. **Actas [...]**. Juiz de Fora: 2011.

ASSEMANY, D. *et al.* A influência de uma Abordagem Vetorial para o Ensino Médio na Aprendizagem de Cálculo I. *In*: CIBEM, 7., 2013, Montevideo. **Actas [...]**. Montevideo: 2013. Disponível em: <http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/633.pdf>. Acesso em: 17 nov. 2018.

ASSEMANY, D. HARAB. Potencializando o Ensino de Números Complexos a partir da Abordagem Vetorial. *In*: CIBEM, 7., 2013, Montevideo. **Actas [...]**. Montevideo: 2013. Disponível em: <http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/363.pdf>. Acesso em: 13 fev. 2019.

ASSUDE, T. **Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique, écologie de l'objet "racine carré" et analyse du curriculum.** Thèse de Doctorat, Grenoble: Université Joseph Fourier, France, 1992.

AZCÁRATE GIMÉNEZ, C. Y CAMACHO MACHÍN, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. **Boletín de la Asociación Matemática Venezolana**, 10 (2), 135.

AZEVEDO, C. A. M. **A Contribuição dos Vetores na Reestruturação Curricular do Ensino Médio**: um estudo de caso. 2013. Monografia de Conclusão do Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

BA, C.; DORIER, J. Aperçu historique de l'évolution de l'enseignement des vecteurs en France depuis la fin du XIX^{ème} siècle. **L'Ouvert**, n. 113, p. 17-30, 2006. Disponível em: <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:16628>. Acesso em: 18 mar. 2017.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução Esteia dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. Disponível em: <http://astro.if.ufrgs.br/fis2008/Bachelard1996.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2018.

BALACHEFF, N. La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique, *In*: ARTIGUE M. *et al.* (ed.). **Vingt ans de didactique des mathématiques en France**. Paris: Hal archives – ouvertes, 1994. p. 364-370. Disponível em: <https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190646/document>. Acesso em: 24 maio 2019.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. una empresa docente**, pp.200, 2000. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133/document>. Acesso em: 04 de mar. 2020.

BALACHEFF N. Conception, propriété du système sujet / milieu, **Actes** de la 8^{ème} Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques, 215-229, Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand, 1995.

BALDIN, Y.Y.; FURUYA, Y. K. S. **Geometria Analítica para Todos e Atividades com Octave e GeoGebra** / Yuriko Yamamoto Baldin, Yolanda Kioko Saito Furuya. São Carlos; EdUFSCar, 2011.

BARQUERO, B.; BOSCH, M; GASCÓN, J. Génesis y desarrollo de um problema didáctico: el papel de la modelización matemática em la enseñanza universitaria de las CCEE. *In*: M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, Eds. **Investigación en Educación Matemática XIV** (pp. 235-244). Lleida: SEIEM. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/41586723.pdf>. Acesso: 03 de agosto de 2020.

BARQUERO, B., BOSCH, M., GASCÓN, J. The Ecological Dimension in the Teaching of Mathematical Modelling at University. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, 33(3), 307-338, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/283572625_The_ecological_dimension_in_the_teaching_of_modelling_at_university_level. Acesso em: 06 de out. 2020.

BESSOT, A.; CHAACHOUA, H. Une introduction à la théorie des situations didactiques. **Laboratoire Leibniz**, IMAG, Grenoble, France, n. 91, out. 2003. Disponível em: http://gric.univlyon2.fr/Equipe2/master/data/cours_A3S/Bessot_Theorie_situations.pdf. Acesso em: 18 dez. 2017.

BITTAR M. Les vecteurs dans l'enseignement secondaire - aspects outil et objet dans les manuels - étude de difficultés d'élèves dans deux environnements: papier crayon et cabri-géomètre II, **Thèse de doctorat** – Université Joseph Fourier – Grenoble 1, 1998.

BITTAR, M. Les vecteurs à l'issue de la seconde. Une analyse des manuels et de quelques difficultés d'élèves. English title: Vectors in grade 10. An analysis of textbooks and students' problems. **Petit X**. N° 53. p. 49-68. (ZDM/Mathdi), Editora: IREM de Grenoble, Grenoble, 2000. Disponível em: https://irem.univgrenoblealpes.fr/medias/fichier/53x5_1561106416540-pdf. Acesso: 14 de dez.2020.

BITTAR, M. O Ensino de Vetores e os Registros de Representação Semiótica. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. 8. ed. 1. reimpr. São Paulo: Ed. Papyrus, 2013. p. 71-94.

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 25, n. 3, set./dez. 2017, p. 364-387.

BISHOP, A. Implicaciones didacticas de la investigacion sobre la visualizacion. *In*: NÚÑEZ, R. C.; SÁNCHEZ, E. A.; S, BADILLO, G. Z. **Antologia en educacion matematica**. México: CINVESTAV-IPN, 1992.

BITTENCOURT, T. **Combinação Linear de Vetores no Plano**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/material/show/id/sjyv4t2v>, 2019. Acesso em: 03 de mar. 2020.

BKOUICHE R., SOUFFLET M. Axiomatique, formalisme, théorie. **Bulletin Inter-Irem** "Enseignement de la géométrie" (23) 3-24, 1983.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. 25 years of the didactic transposition. **ICMI Bulletin**, n. 58, p. 51-65, 2006. Disponível em: <https://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx?feltid=233272>. Acesso em: 15 out. 2017.

BOSH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.19, n° 1, p. 77 – 124, 1999. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=35> Acesso em: 04 de jan. 2019, p. 1- 37.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”. *In*: BRONNER, A.; LARGUIER, M.; ARTAUD, M.; BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y.; CIRADE G.; LADAGE, C. (Eds.) **Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action**. Montpellier: IUFM de l'Académie de Montpellier, 2010. p. 49 – 85.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Fundamentación antropológica de las organizaciones didáctica**: de los talleres de prácticas matemáticas a los recorridos de estudio e investigación. *In*: Difusor Les Mathématiques (Et Les Autres Savoirs) Connaissance Outils Et Comme D'action Ii Congrès Internacional Sur La Tad. p. 55-91, 2010. Disponível em: <http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/mariannaJosep-CITAD-II-2010.pdf>. Acesso: 10 fev. 2018.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. *In: MERCIER, A.; MARGOLINAS, C. (Coord.). Balises en Didactique des Mathématiques*. La Pensée Sauvage: Grenoble. 2005.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y.; GASCÓN, J. **Science Or Magic? The Use Of Models And Theories In Didactics Of Mathematics**, 2006. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/285916043_Science_or_magic_The_use_of_models_and_theories_in_didactics_of_mathematics. Acesso: 16 de abr. 2017.

BOSCH, M. C. **La dimensión ostensiva en la actividad matemática**. El caso de la proporcionalidad. 1994. 532 f. Tesis (Doctoral en?) – Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 1994. Disponível em: <http://www.atd-tad.org/documentos/la-dimension-ostensiva-en-la-actividad-matematica-el-caso-de-la-proporcionalidad/>. Acesso em: 05 jan. 2019.

BOSCH, M. C. Los Recorridos de Estudio y Investigación en la Enseñanza y en la Formación del Profesorado. *In: Seminários de Educação Matemática da PUC-SP*, 2018, São Paulo. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=wU-ws77BwQ4>. Acesso em: 17 maio. 2019.

BOSCH, M. C. Un Punto de Vista Antropológico: La Evolución de los “Instrumentos de Representación” en la Actividad Matemática. Universidad Ramon Llull. *In: Simposio de La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 4., 2001, Huelva. p. 15-28. Disponível em: <http://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/47884/01120093000019.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 02 jan. 2019.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 19, n. 1, p. 77-124, 1999. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf. Acesso em: 15 nov. 2018.

BOSCH, M.; WINSLØW, C. The external didactic transposition of mathematics at the university level: dilemmas and challenges
La transposition didactique externe des mathématiques au niveau universitaire: dilemmes et défis. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 22, n. 4, p. 373-386, set. 2020. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/49188>. Acesso em: 15 set. 2020.

BOYER, C. B.; GOMIDE, E. F. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2018: matemática – guia de livros didáticos – Ensino Médio/Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2017. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/guia-do-livro-didatico>. Acesso em: 18 nov. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>. Acesso em: 28 maio 2018.

BRASIL. Parecer CNE/CP 9/2001. Diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da educação básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. **Diário Oficial da União**, Brasília, 18 jan. 2002, Seção 1, p. 31. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf. Acesso em: 16 abr. 2017.

BRASIL. Resolução CNE/CP 1/2002. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. **Diário Oficial da União**, Brasília, 18 fev. 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf. Acesso em: 05 jun. 2017.

BRASIL. Resolução CNE/CP 2/2015. Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. **Diário Oficial da União**, Brasília, 01 jul. 2015. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=17719-res-cne-cp-002-03072015&category_slug=julho-2015-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 05 jun. 2017.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio** – Linguagens, códigos e suas tecnologias. Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 09 de set. 2020.

BROUSSEAU, G. **Le Rôle Central du Contrat Didactique dans L'analyse et la Construction des Situations D'enseignement et D'apprentissage des Mathématiques**. 1984. Disponível em: <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/02/84-Le-r%C3%B4le-central-du-contrat.pdf>. Acesso em: 27 fev. 2019.

BROUSSEAU, G. **La Théorie des Situations Didactiques**, 2002. Disponível em: <http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/Brousseau.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2018.

BROUSSEAU, G. La théorie des situations didactiques: **Le cours de Montréal**, 1997. Disponível em: <http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/>. Acesso em: 09 de nov. 2020.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. *In*: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Willy Vanhamme et Jacqueline Vanhamme. La problématique et l'enseignement de la mathématique. *Comptes Rendus de La XXVIII Rencontre Organisée par La Commission Internationale Pour L'étude Et L'amélioration de L'enseignement des Mathématiques. Actes [...]*. Louvain-la-neuve, p. 101-117, 1976. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516569v2/document>. Acesso em: 23 maio 2018.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Nadine Bednarz, Catherine Garnier. **Construction des savoirs Obstacles et Conflits**, CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc., p. 41-63, 1989. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/516581/filename/Les_obstacles_epistemologiques_et_la_didactique_des_mathematiques89.pdf. Acesso em: 23 maio 2018.

BROUSSEAU, G. **La Théorie des Situations Didactiques**. 2002. Disponível em: <http://perso.wanadoo.fr/daest/Pages%20perso/Brousseau.htm#ligne>. Acesso em: 10 mar. 2018.

BROUSSEAU, G. **Estudos Experimentais e Teóricos de Situações Didáticas em Matemática**. In: Curso da Escola de Altos Estudos – EAE. Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN, 2009. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=BQp-dY1P4OM&t=295s. Acesso em: 05 abr. 2018.

BROUSSEAU, G. **Introduction à l'ingénierie didactique**. 2013. Disponível em: <http://guybrousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/Introduction-%C3%A0-ling%C3%A9nieriedidactique3.pdf>. Acesso em: 26 jan. 2019.

BROUSSEAU, G. D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. Université Bordeaux 1, 1982, France. **Actes de la deuxième école d'été de Didactique des mathématiques (IREM d'Orléans)**. Disponível em: <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/03/82-3-Dun-probl%C3%A8me-%C3%A0-l%C3%A9tude-a-priori.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2018.

BROUSSEAU, G. L'enseignant dans la théorie des situations didactiques: 1. Structure et fonctionnement du système didactique. In: NOIRFALISE R.; PERRIN-GLORIAN M.-J. (ed.). **Actes de la VIII^e Ecole d'été de didactique des mathématiques St-Sauves d'Auvergne. CLERMONT-FERRAND. IREM de Clermont-Ferrand**. 1995. Disponível em: <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/02/LENSEIGNANTdans-la-TSDM.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2018.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, 1998. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516595v1/document>. Acesso em: 23 out. 2018.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino**, São Paulo; Ática, 2008.

CAMARGO, I. de; BOULOS, P. **Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

CAMARGO, I. de; BOULOS, P. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial**. 2. ed. São Paulo: MacGraw-Hill, 1987

CAMARERA, G. P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. **Innovación educativa**, 9 (48), 15-25. (Disponível em: <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=179414894003#> Acesso em: 04 de fev. 2020.

CAMARGO, K. C. **O Ensino da Geometria nas Coleções Didáticas em Tempos do Movimento da Matemática Moderna na Capital da Bahia**. 2009. 168f. Dissertação (Mestrado em Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo – SP, 2009. Disponível em:

<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/186655/K%c3%81TIA%20CAMARGO.pdf?sequence=1&isAllowed=y> . Acesso em: 22 de julho de 2020.

CARNEIRO, P. S.; GRAVINA, M. A. Geometria Vetorial no Ensino de Sistema de Equações. *In: BÚRIGO, E. Z. et al (org.). A Matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012. Disponível em:

http://www.ufrgs.br/espmat/livros/livro1-matematica_escola.pdf. Acesso em: 23 mar. 2019.

CASABÒ, M. B. Un Punto de Vista Antropológico: la Evolución de los “Instrumentos de Representación” en la Actividad Matemática. *In: Simposio de La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 4, 2001. Huelva, p. 15-28, 2001. Disponível em: <http://redined.mecd.gob.es/xmlui/handle/11162/47884>. Acesso em: 30 maio 2019.

CASABÒ, M. B. Study and Research Parths: a Model for Inquiry. *In: Proceedings of the International Congresso of Mathematicians – ICM*, vol. 4, pp. 4033-4054, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <https://eta.impa.br/dl/121.pdf>. Acesso em: 04 abr 2019.

CATUNDA, O. et al. **As transformações Geométricas e o Ensino da Geometria**. Centro Editorial da Universidade Federal da Bahia – UFBA, Salvador, 1988.

CATUNDA, O. et al. **Matemática 1: segundo ciclo ensino atualizado**. Ao Livro Técnico S. A. Rio de Janeiro, 1971.

CELESTINO, M. R. **Ensino- Aprendizagem da Álgebra Linear: As pesquisas Brasileiras na Década de 90**. Dissertação (Mestrado em Educação em Matemática), Pontifícia Universidade de São Paulo, 114 f. (2000)

CHAACHOUA, H. Géométrie dans l’espace. Le point sur la lecture des dessins pour les élèves en fin de collège. **Petit x**, (48), 37–68, 1998.

CHAACHOUA, H. **Desenvolvimento do modelo praxeológico: T4TEL**. *In: Escola de Altos Estudos, Grupo de Estudos em Didática da Matemática – DDMAT, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul*, 2019. Disponível em: <https://youtu.be/FHYFD5K51Uw>. Acesso em: 03 mar. 2019.

CHAACHOUA H. **La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas: la modélisation des élèves**, Habilitation à diriger des recherches, Université Joseph Fourier, Grenoble, France. 2010. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01282325/document>. Acesso em: 18 de mar. 2020.

CHAACHOUA, H. La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas: la modélisation des connaissances des élèves. **Présentation au séminaire national de didactique des mathématiques**. 2011. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01282325/document>. Acesso em: 13 nov. 2018.

CHAACHOUA, H. T4TEL un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. *In: SÉMINAIRE DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES DE L'ARDM*. 2018. **Atas** [...]. Paris: 2018, p. 5-22. Disponível em: <https://ardm.eu/wp-content/uploads/2018/10/Préactes-ARDM-fevrier2018>. Acesso em: 05 fev. 2019

CHAACHOUA, H. La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas: la modélisation des connaissances des élèves. *SÉMINAIRE NATIONAL DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES*, 2010, **Atas** Paris, France. p.82. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01282325/documen>. Acesso em: 03 maio 2019.

CHAACHOUA, H. Etude comparative des recherches sur l'apprentissage de l'algèbre élémentaire: rapports croisés, bilan et perspectives. *In: BULTEN, D. et al. (Ed.). 17ème école d'Eté de Didactique des Mathématiques*, France, 2015.

CHAACHOUA, H. **Le Role de L'analyse des Manuels dans la Theorie Anthropologique du Didactique**, 2014. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01519339>. Acesso: 12 de abr. 2021.

CHAACHOUA, H. T4TEL: Un cadre de référence pour la formalisation et l'extension du modèle praxéologique. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 22 n. 4, pp. 103-118, 2020. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/49182>. Acesso: 04 de abr. 2019.

CHAACHOUA, H.; BESSOT, A. Introduction de la notion de variable dans le modele praxéologique. *CONGRÈS POUR LA THÉORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE*, 5. 2016, Espagne. **Atas** [...]. Castro-Urdiales, Espagne, 2016.

CHAACHOUA, H.; BESSOT, A.; ROMO, A; CASTELA, C. **Developments and functionalities in the praxeological model**. In Bosch M.; Chevillard Y.; Garcia J.; Monaghan J. Working with the anthropological theory of the didactic: A comprehensive casebook, In press, 2019.

CHAACHOUA, H.; BESSOT, A. A noção de variável no modelo praxeológico. *In: A Teoria Antropológica do Didático: princípios e fundamentos*. ALMOULOU, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (org.). Curitiba: CVR, 2018. p. 119-133.

CHAACHOUA, H.; BESSOT, A. **Curso I: Análise do Saber em uma Instituição**. Escola De Altos Estudos, 2019.

CHAACHOUA, H.; BITTAR, M. A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da Educação Matemática**, Sergipe, v. 9, n. 1, 2019. Disponível em: https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/297. Acesso em: 05 fev. 2019.

CHAACHOUA, H.; BITTAR, M. A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas. *SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA*, 1, 2016, Bonito. **Anais** [...]. Bonito: 1., 2016. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/0B2LI8_nb3rfaNUFTNTRjV4Zlk/view. Acesso em: 06 dez. 2018.

CHAACHOUA, H.; FERRATON, G.; DESMOULINS, C. Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. *In: CONGRÈS POUR LA THÉORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE*, 4. 2013, Toulouse. **Atas** [...]. Toulouse, 2013, 4, p. 303-324. Disponível em: <https://citad4.sciencesconf.org/data/pages/ActesCITAD4.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2018.

CHACÓN, A. M. A. **La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques: Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica**. 2008. 360 f. Tese (Doutorado em Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologiques Spécialité: Didactique Des Mathématiques) – L'université De Toulouse Délivré par l'Université Toulouse III – Paul Sabatier, Toulouse, 2008. Disponível em: <http://repositorio.conicit.go.cr:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/195/Th%C3%A8se%20ARAYA%20CHACON.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 09 nov. 2017.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée: raisons d'être, fonctions, devenir Communication aux **Journées de la commission inter-IREM Didactique**. Paru dans les actes correspondants, IREM, Dijon, p.1-26, 2002.

CHEVALLARD, Y. **Condições**. *In: Curso da Escola de Altos Estudos – EAE. Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN*, 2011. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=gwf5xCetWTM>. Acesso em: 08 jul. 2018.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. *In: Actes de l'université d'été de la Rochelle*, Juillet 1998. p. 91-118. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27. Acesso em: 10 de mar. 2020.

CHEVALLARD, Y. **Passé et Présent de la Théorie Anthropologique du Didactique**. En L. Ruiz- Higuera, A. Estepa y F. J. García (eds.), Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico (pp. 705-746). Universidad de Jaén, 2007. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=134. Acesso: 05 abr. 2018.

CHEVALLARD, Y. **Journal du Seminaire TAD/IDD**. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement, 2013. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2012-2013-5.pdf>. Acesso: 14 de jun. 2019.

CHEVALLARD, Y. **Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement**. *In: Journal du Seminaire TAD/IDD – 3*; pp. 1-39, 2009. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2009-2010-3.pdf>. Acesso em: 06 jul.2019.

CHEVALLARD, Y. **Éléments de théorie anthropologique du didactique (TAD) Une initiation à la didactique fondamentale.** Université d'Aix-Marseille Département des sciences de l'éducation, 2013. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Journee_de_didactique_du_9-01-2013.pdf. Acesso em: 18 de fev. 2020.

CHEVALLARD, Y. El Análisis de las Prácticas Docentes en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. **Recherches en Didactique dès Mathématiques**, 19 (2), 221-266, 1999. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/118315/mod_resource/content/1/articulo_chevallard_TAD_1999.pdf. Acesso: 26 de jan. 2021.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In: L'UNIVERSITE D'ETE, 1998, p. 91-118. **Actes [...]**. Clermont-Ferrand, France: IREM, 1998. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf. Acesso em: 25 out. 2017.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions, v. 19, n. 2, p. 221-226, 1999. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf. Acesso em: 02 set. 2017

CHEVALLARD, Y. *et al.* **Estudar Matemática:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

CHEVALLARD, Y. UMR ADEF **La notion de PER:** problèmes et avancées Toulouse, le 28 avril 2009 Texte d'un exposé présenté à l'IUFM de Toulouse. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161. Acesso em: 15 ago. 2017.

CHEVALLARD, Y. **Enquêter pour connaître.** L'émergence d'un nouveau paradigme scolaire et culturel à l'âge de l'Internet. 2010 à l'Institut de mathématiques de l'université de Liège. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=178. Acesso em: 02 set. 2017.

CHEVALLARD, Y. **Teaching Mathematics in Tomorrow's Society:** a Case for an Oncoming Counterparadigm. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12, 2012, COEX, Seoul, Korea. Seoul: 2012. Disponível em: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-12688-3_13.pdf. Acesso em: 10 out. 2017.

CHEVALLARD, Y. Pourquoi la Transposition Didactique? *In:* SÉMINAIRE DE DIDACTIQUE ET DE PÉDAGOGIE DES MATHÉMATIQUES DE L'IMAG. **Atas [...]** de L'année. Université Scientifique et Médicale de Grenoble. 1982. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Pourquoi_la_transposition_didactique.pdf. Acesso em: 20 nov. 2017.

CHEVALLARD, Y. Un concept en émergence: la dialectique des médias et des milieux. Communication au Séminaire national de didactique des mathématiques. Paru in G. Guedet

& Y. Matheron (Eds), **Actes du séminaire national de didactique des mathématiques**, ARDM et IREM de Paris 7, Paris, pp. 344-366, 2007. Disponible em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=147. Acesso: 02 fev. 2019.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, **Recherches en didactique des mathématiques**, Grenoble, v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Y. **Organiser l'étude**: 3. Ecologie & régulation. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2002. Disponible em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53. Acesso em: 17 fev. 2018.

CHEVALLARD, Y. **La théorie anthropologique des faits didactiques devant l'enseignement de l'altérité culturelle et linguistique. Le point de vue d'un outsider**. Conférence plénière donnée le 24 mars 2006 au colloque Construction identitaire et altérité: Créations curriculaires et didactique des langues, Université de Cergy-Pontoise, 2006. Disponible: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=70. Acesso: 11 jun. 2019.

CHEVALLARD, Y. Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In: ARSAC, G. *et al* (ed.). **La transposition didactique à l'épreuve**. Grenoble: La Pensée sauvage, 1994. Disponible em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les_processus_de_transposition.pdf. Acesso em: 12 jul. 2019.

CHEVALLARD, Y. Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CHEVALLARD, Y. **Organiser l'étude**: 1. Structures & fonctions. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2002. Disponible em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_1_etude_1.pdf. Acesso em: 21 jan. 2019.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

CHEVALLARD, Y. Quelques représentations touchant le concept de représentation. In: RENCONTRE NATIONALE SUR LA DIDACTIQUE DE L'HISTOIRE, DE LA GÉOGRAPHIE ET DES SCIENCES SOCIALES. 2, 1987, Paris. **Actes [...]**. Paris, 1987.

CHEVALLARD, Y. Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission: un point de vue didactique. Colloque international Savoirs scolaires, interactions didactiques et formation des enseignants. **Actes [...]**. Marseille, 1997.

CHEVALLARD, Y. La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. 1995.

CHEVALLARD, Y. **Le sujet apprenant entre espace et dispositif**. Commentaires depuis la théorie anthropologique du didactique, aux journées du Lisec tenues à Gérardmer, 2010.

Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=206. Acesso em: 23 de abr. 2020.

CHEVALLARD, Y.; JOSHUA, M. Un exemple d'analyse de la transposition didactique – La notion de distance. **Recherches em didactique des mathématiques**, Liege, v. 3, n. 2, p. 157-239, 1982. Disponível em: <https://revue-rdm.com/2005/un-exemple-d-analyse-de-la/>. Acesso em: 10 maio 2018.

CHEVALLARD, Y.; JOSHUA, M. **La transposition didactique**. Du savoir savant au savoir enseigné. 2. ed. rev. augment. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M; GASCÓN, J. **Estudar Matemática**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

CHEVALLARD, Y. A Teoria Antropológica do Didático Face ao Professor de Matemática. In: ALMOULOUD et al. **A Teoria Antropológica do Didático: princípios e fundamentos**. Curitiba, Editora: CRV, 2018. 1ª Edição. Curitiba, PR: CRV, 2018. p. 31-49.

CISSÉ BA. **Etude épistémologique et didactique de l'utilisation du vecteur en mathématiques et en physique – lien entre mouvement de translation et translation mathématique**. Education. Université Claude Bernard - Lyon I; Université Cheikh Anta DIOP, 2007. Français. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00192241/document>. Acesso em: 04 de jun. 2020.

CIRADE, G.; MATHERON, Y. Equation du premier degré et modélisation algébrique. Dans R. Noirefalise (Ed.), **Actes de l'École d'été de la Rochelle**. Clermont- Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand, p. 199-250, 1998.

COMITI, C.; FARIAS, L. M. S. Importance et Méthodologie de L'observation de Classe Pour les Recherches en Didactique et Rôle de la Problématique de Recherche pour la Modélisation Nécessaire Lors de L'analyse des Observations. **Caminhos da Educação Matemática em Revista – CEMeR**, Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática – IFS, p. 83-104, 2019. Disponível em: https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/artic le/view/299/203. Acesso em: 28 jun. 2019.

CONDE, A. **Geometria Analítica**. São Paulo: Atlas, 2004.

CONNE F. Saber e Conhecimento na Perspectiva da Transposição Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CORRÊA, P. S. Q. **Álgebra Linear e Geometria**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

COSTA, V. A.; ARLEGO, M.; OTERO, M.R. Las dialécticas en un Recorrido de Estudio e Investigación para la enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad. **Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria**. Editora; Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria Vol. 8, nº 3, p. 146-161, 2015. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/280294126_Las_dialecticas_en_un_Recorrido_de_

Estudio_e_Investigacion_para_la_ensenanza_del_Calculo_Vectorial_en_la_Universidad.
Acesso: 21 de jan. 2020.

CROSET, M. C.; CHAACHOUA, H. Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD: la praxéologie personnelle. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, 36-2, 2016.

CÔTÉ, B. Analyse Épistemologique des Concepts Vectoriels Élémentaires, **Bulletim AMQ**, Volume 42, n.02, 2002. Disponível em: <https://www.amq.math.ca/bulletin/articles/vol-42-no-2-part-7/> . Acesso em: 02 de abr. 2020.

CROWE, M. J. **A History of Vector Analysis**. New York: Dover Publishers, Inc., 1994.

CROWE, M. J. **The Extraterrestrial Life Debate 1750-1900: The Idea of a Plurality of Worlds from Kant to Lowell**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

DANTAS, M. M. S. **Ensino da Matemática: um processo entre a exposição e a descoberta** / Martha Maria de Souza Dantas. Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1987.

DANTAS, S. C. Pressupostos para Formação de Professores de Matemática em um Curso via WEB. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, n. 17, p. 308-331, Campo Grande, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1069>. Acesso: 03 de jun. 2018.

DHIEB M. **Contribution à l'introduction des probabilités au collège: rapports d'élèves à quelques notions probabilistes**. Mathématiques [math]. Université de Tunis; Université Paris Descartes, 2009. Français. Tese de Doutorado, 461 páginas. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00507751/document>. Acesso: 05 de mar. 2020.

DIAS, André L. Mattedi. **Uma crítica aos fundamentos do ensino autoritário e reprodutivo da matemática**. 1994. 79 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, UFBA, Salvador, 1994.

DIAS, André Luis Mattedi. **Engenheiros, mulheres, matemáticos: interesses e disputas na profissionalização da matemática na Bahia, 1896-1968**. (Tese de Doutorado em História Social). USP, 2002.

DIENES, Z. P. **Exploração do espaço e prática da medição**. São Paulo: Editora pedagógica e Universitária, 1974.

DI PINTO, M. A. **Ensino e Aprendizagem da Geometria Analítica: as pesquisas brasileiras da década de 90**. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

DIEUDONNÉ, J. **Algèbre Linéaire et Géométrie Élémentaire**. Enseignement des Sciences. Hermann, 1964.

DORIER, J. L. A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory. **História da Mathematica**, v. 22, p. 227-261, 1995. Disponível em: https://ac.elsa.com/S0315086085710245/1-s2.0-S0315086085710245-main.pdf?_tid=b7ad07fa

8eb04c25ba032d9a011395dd&acdnat=1542463632_88ce12604858a27659a52b759754b6f8.
Acesso em: 17 nov. 2018.

DORIER, J. L. **Recherches en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur L'algebre Lineaire - Perspective Theorique sur Leurs Interactions.** Domain_other. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1997. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338400/document>. Acesso em: 21 de agos. 2020.

DORIER, J. L. Epistemological Analysis of the Genesis of the Theory of Vector Spaces. In: Dorier JL. (eds) **On the Teaching of Linear Algebra.** Mathematics Education Library, vol 23. Springer, 2000, Dordrecht. Disponível em: https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_1. Acesso: 05 de ago. 2019.

DOUADY, R. **Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.** 1986. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Universidade de Paris VII, France, 1986. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250665/document>. Acesso em: 02 abr. 2019.

DOUADY, R. Rapport enseignement apprentissage: Dialectique outil-objet, jeux de cadres. Cahier de didactiques, n. 3, 1987.

DOUADY, R. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. In: ARTIGUE, M. *et al.* **Ingeniería didáctica en educación matemática** Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Bogotá: Editorial Iberoamérica, 1996. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf>. Acesso em: 05 jul. 2018.

DOUADY, R. Evolução da relação com o saber em matemática na escola primária: uma crônica sobre cálculo mental. **Em aberto.** Tendências na educação matemática. v. 14 n. 62, 1994. Disponível em: <http://www.emaberto.inep.gov.br/ojs3/index.php/emaberto/article/view/2269>. Acesso: 11 de fev. 2019.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (ed.). **Advanced mathematical thinking.** Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 25-41.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.** p. 37-64. Strasbourg: IREM - ULP, 1993. Disponível em: <http://numerisation.univ-irem.fr/ST/IST93004/IST93004.pdf>. Acesso em: 02 abr. 2019.

DUNN, J. W. Y BARBANEL, J. (2000). One model for an integrated math/physics course focusing on electricity and magnetism and related calculus topics. **American Journal of Physics,** 68 (8), 749-757. American Association of Physics Teachers.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Campinas: Universidade de Campinas, 2004.

ESTEVAM, E., BASNIAK, M. I., Paulek, C. M., SCALDELAI, D., FELIPE, N. Ensino Exploratório de Matemática e Tecnologias Digitais: a elaboração da lei dos senos mediada pelo software GeoGebra, 2018. **Acta Scientiae**. Disponível em : <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/3186> Acesso em: 20 de abr. 2020.

FARIAS, L. M. S. **Étude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire**: une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde. 2010. Tese (Doutorado) – Universidade de Montpellier 2, France, 2010.

FARIAS, L. M. S.; PIRES M. A. L. M. Um Olhar da Didática Francesa: as interrelações entre os Domínios Numérico, Algébrico e Geométrico. *In*: COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO, 9., 2011, Vitória da Conquista. **Anais [...]**. Vitória da Conquista: UESC, 2011, 9., p. 3205-3224. Disponível em: <http://periodicos.uesb.br/index.php/cmp/article/viewFile/2745/2410>. Acesso: 28 jun. 2019.

FARIAS, L. M. S.; CARVALHO, E. F.; TEIXEIRA, B. F. O trabalho com funções à luz da incompletude do trabalho institucional: uma análise teórica. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 20, n. 3, jan. 2019. ISSN 1983-3156. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/40112> Acesso em: 12 fev. 2020.

FARRAS, B. B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [S.l.], v. 15, n. 1, 2013. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12757>. Acesso em: 08 jul. 2018.

GASCÓN, J. Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. **Recherches en didactique des mathématiques**, n. 13, v. 3, p. 295-332, 1993.

GASCON, J. Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à "l'arithmétique généralisée". **Petit x**, 37, 43-63, 1994.

GASCÓN, J. Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, n. 18, v. 1, p. 7-34, 1998.

GASCÓN, J. La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. **Educación Matemática**, n. 11, v. 1, p. 77-88, 1999.

GASCÓN, J. Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)**, n. 4, v. 2, p. 129-159, 2001.

GASCÓN, J. Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato ¿Dos mundos completamente separados? **Suma**, 39, 13-25. 2002. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/39220619_Geometria_sintetica_en_la_ESO_y_analitica_en_el_Bachillerato_dos_mundos_completamente_separados Acesso: 14 de agos. 2020.

GASCÓN, J. La necessidade de utilizar modelos em didáctica de la matemáticas. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 5, n. 2, pp. 11 – 37, 2003.

GASCÓN, J. Os Modelos Epistemológicos de Referencia como Instrumentos de Emancipação da Didática e da História da Matemática. In: ALMOULOUD et al. **A Teoria Antropológica do Didático: princípios e fundamentos**. Curitiba, Editora: CRV, 2018.1ª Edição. Curitiba, PR: CRV, 2018. p. 51-76.

GIBBS, J. W. **Vetor Analysis**. United States of America: New Haven Yale University Press, 1901.

GOULART, J. S. S.; FARIAS, L. M. S. Um diálogo sobre a Teoria Antropológica do Didático – TAD intermediado por um curso introdutório sobre os vetores. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [S.l.], v. 20, n. 3, jan. 2019. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/emp/article/view/40111>. Acesso em: 05 jul. 2019.

GRASSMANN, H. G. **A New Branch of Mathematics**: The Ausdehnungslehre of 1844, and Others Works. Chicago: Open Court, 1995.

GRASSMANN, H. G. **Teoría de La Extensión**: Nueva disciplina matemática expuesta y aclarada mediante aplicaciones. Historia y Filosofía de la Ciencia. Traductor: Ing. Emilio Oscar Roxin, ESPASA – CALPE Argentina, S.A. Buenos Aires, 1947

GRAY, E.M. & TALL, D.O. Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. In Marja van den Heuvel-Panhuizen (Ed.) Proceedings of the **25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 3**, p. 65–72, 2001. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001i-pme25-gray-tall.pdf>. Acesso em: 21 de fev.2020.

GRAY, E.M. & TALL, D.O. Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. In Marja van den Heuvel-Panhuizen (Ed.) Proceedings of the **25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 3**, p. 65–72, 2001. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001i-pme25-gray-tall.pdf>. Acesso em: 21 de fev.2020.

GÓMEZ, L.A.O. Ambientes híbridos de aprendizaje. **Actualidades Pedagógicas** n°. 58 pp. 29-44. 2011, Disponível em: <https://ciencia.lasalle.edu.co/cgi/viewcontent.cgi?article=1014&context=ap>. Acesso em: 18 de jun. 2021.

GUERRA, R. B.; ANDRADE, R. C. D. Tarefas Fundamentais no Fazer Matemático Escolar: Organização Matemática para o Ensino da Geometria Analítica. **Revista Margens Interdisciplinar**, v. 7, n. 8, 2013. Disponível em: <http://www.periodicos.ufpa.br/index.php/revistamargens/article/view/2750/2876>. Acesso em: 12 nov. 2017.

HAYFA, N. **L’enseignement de la notion de vecteur au Liban après la réforme de 1998**. Analyse anthropologique et conceptuelle sur un échantillon de manuels et d’élèves

francophones. These Didactique des mathématiques. Faculté des sciences de l'Université Saint-Joseph de Beyrouth. 2006, 376p. Disponível em: https://www.academia.edu/27615717/These_de_doctorat_Nina_Hayfa.pdf?email_work_card=view-paper. Acesso em: 04 de jun. 2020.

HECKLER, A. F.; SCAIFE, T. M. Adding and subtracting vectors: the problem with the arrow representation. **Physical Review Special Topics - Physics Education Research**, n. 11, 2015. Disponível em: <https://www.asc.ohio-state.edu/heckler.6/Published%20papers/Heckler.Scaife.2015.PRST.pdf>. Acesso em: 26 fev. 2019.

JANZEN, E. A. **O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de Geometria Dinâmica**. 194f. Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011. Disponível em: <http://www.ppgge.ufpr.br/teses/teses/D11%20Elen%20Andrea%20Janzen.pdf>. Acesso em: 11 de mar. 2020.

JOLIVET, S. Articuler les dimensions épistémologiques, didactiques et institutionnelles d'un exercice pour une indexation dans un EIAH. **6èmes Rencontres Jeunes Chercheurs en Modélisation d'exercices de mathématiques pour indexation dans un EIAH**, 2016, p. 1-6. Disponível: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02064692/document>. Acesso: 13 de mar. 2020.

JOLY, M. **Introdução à Análise da Imagem**. Tradução Marina Appenzeller. 9. ed. Campinas: Papirus, 2005.

KASPARY, D. **La noosphère, un lieu de tension pour le curriculum: étude didactique de la mise en place d'un système d'évaluation de manuels scolaires sur l'étude du champ additif à l'école primaire**. Mathématiques générales [math.GM]. Université Grenoble Alpes; Thèse de doctorat. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2020. Français. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-03100691/>. Acesso: 12 de jun. 2021.

KASPARY, D; CHAACHOUA. H.; BESSOT, A. Qu'apporte la Notion de Portée d'une Technique à L'étude de la Dynamique Praxéologique? **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, vol. 25, pp. 243-264, IREM de STRASBOURG, 2020. Disponível: https://www.researchgate.net/publication/346564736_Qu'apporte_la_notion_de_portee_d'une_techinique_a_l'etude_de_la_dynamique_praxeologique. Acesso: 04 de jan. 2021.

KIM, S. **Les Besoins Mathématiques des non-Mathématiciens quel Destin Institutionnel et Social?** Études d'écologie et d'économie didactiques des connaissances mathématiques. 2015. 764 f. Tese (Doutorado em: Cognition, Langage, Éducation. Spécialité: Apprentissage, Didactique, Évaluation, Formation) – Universidade D'aix-Marseille, França, 2015. Disponível em: <http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2016/02/SKim-These.pdf>. Acesso em: 14 fev. 2019.

KLEIN, F. **Elementary Mathematics: from na advanced standpoint – Geometry**. Translated from the German By E. R. Hedrick and C. A. Noble. Dover Publications, Inc. New York, 1939

KLEIN, F. **Elementary Mathematics from a higher standpoint**, vol. 3: Precision mathematics and approximation mathematics. Berlin: Springer, 1908/2016.

LADAGE C.; CHEVALLARD Y. Enquêter avec l'internet: études pour une didactique de l'enquête, **Éducation et Didactique** [En ligne], 5-2 | 2011. Disponível em: <https://journals.openedition.org/educationdidactique/1266>. Acesso: 15 de jun. 2021.

LAGRANGE, J. L. **Oeuvres de Lagrange** / publiées par les soins de M. J.-A. Serret, sous les auspices du ministre de l'instruction publique. Paris: Gauthier-Villars, 1795. Disponível em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2299428/f1.item#>. Acesso: 03 de abril de 2020.

LAUBÉ, S. et al. Scénarios intégrant les TICE: les méthodologies et les cadres théoriques à l'oeuvre dans la recherche MODALES. In: Pernin J-P. et Godinet H. (dir.). **Atas** électroniques du colloque Scénarios, 2006, p. 45-50. Disponível em: <http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/br056.pdf>. Acesso em: 17 abr. 2019.

LÊ THI H. C. **Etude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions: la classe de dixième au Viêt-nam et la classe de seconde en France**
Thèse de doctorat – Université Joseph Fourier – Grenoble I. (1997)

LÊ THI H. C. (1997-1998): Une étude institutionnelle sur l'enseignement des vecteurs au niveau secondaire au Viêt-Nam et en France **Petit x**, n° 46, pp: 19 – 52.

LEMKE, R., SILVEIRA, R. F., ZUCHI S. (2016). GeoGebra: uma tendência no Ensino de Matemática. In **Anais Colóquio Luso Brasileiro de Educação - II Colbeduca. 2016**. Disponível em: <http://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/view/8413>. Acesso em: 20 de abr. 2020.

LIMA, M.L.S.; LINS A. F.; PEREIRA, P. S. Provas e Demonstrações Matemáticas e o Aplicativo Geogebra: incentivo à visualização para alunos do 2º ano do ensino médio. **VIDYA**, v. 38, n. 1, p. 199-221, jan./jun., 2018 - Santa Maria, 2018.

LIMA, M. L. S; LINS, A. F.; PEREIRA, P.S. Provas e Demonstrações Matemáticas e o Aplicativo Geogebra: incentivo à visualização para alunos do 2º ano do ensino médio. **VIDYA**, v. 38, n. 1, p. 199-221, Santa Maria, 2018. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/330112607>. Acesso em: 11 de mar. 2020.

LLANOS, V.; OTERO, M. Caractérisation des fonctions didactiques Topogénèse, Mésogénèse et Chronogénèse dans un Parcours d'Étude et Recherche (PER) monodisciplinaire dans l'École Secondaire. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 10, n. 3, p. 220-227, 2018.

LIMA, E. L. *et al.* **Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

LOBATSCHESKI, N. **Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien**. In: Gaub und die Anfänge der nicht-euklidischen Geometrie. Teubner-Archiv zur Mathematik,

vol 4. Springer, Vienna, 1995. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-7091-9511-6_4. Acesso em: 15 jul. 2019.

LOPES JÚNIOR, W. A. A. **Construções geométricas com auxílio de geometria dinâmica**. (Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Matemática). Universidade Federal do Amazonas, Amazonas. 2019.

LORETO, A. C. da C.; LORETO JUNIOR, A. P. L. **Vetores e Geometria Analítica: teoria e exercícios**. 4. ed. São Paulo: LCTE Editora, 2014.

LUCAS, C. et al. O Fenômeno Didático Institucional da Rigidez e a Atomização das Organizações Matemáticas Escolares. **Boletim de Educação Matemática**, n. 28, 2014. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291232906017>. Acesso em: 4 nov. 2018.

MATHÉ, A.C. Jeux et enjeux du langage dans la construction de références partagées en géométrie. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 32(2), 195–227, 2012. Disponível em: <https://revue-rdm.com/2012/jeux-et-enjeux-du-langage-dans-la/>. Acesso em: 04 de abr. 2020.

MATHERON Y. Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations mathématiques. **IREM d'Aix-Marseille, Petit X**, n. 54, p. 51-78, 2000. Disponível em: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/54x5_1561104383704-pdf. Acesso em: 21 mar. 2018.

MATOS, M. **Séries e Equações Diferenciais**. São Paulo: Prentice Hall, 2001.

MELLO, D.; WATANABE, G. R. **Vetores e uma Iniciação à Geometria Analítica**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2011.

MENON, M. J. Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial. **Revista Brasileira do Ensino de Física**. São Paulo, v. 31, n. 2, p. 2305.1-2305. 11, 2009. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172009000200006. Acesso: 05 jun. 2018.

MERCIER, A. **Les Temps des Systèmes Didactiques**. IREM Aix Marseille, 1985.

Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/309277087_Le_temps_des_systemes_didactiques.

Acesso: 12 de jun. 2021.

MERCIER, A. **Identifier et satisfaire les besoins en mathématiques des élèves professeurs**. 1994. Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/309350564_Identifier_et_satisfaire_les_besoins_en_mathematiques_des_eleves_professeurs. Acesso em: 25 jan. 2019.

MERCIER, A. **Le Temps Didactique**, Collectif, 2001. Petit vocabulaire à l'usage des enseignants débutants. IUFM Université de Provence. Disponível em:

<https://hchicoine.files.wordpress.com/2008/05/mercier-2001-temps-didactique.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2019.

MERCIER, A. Pour un programme anthropologique en didactique: le retour de la notion de *situation didactique*, *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, in: **Apports de la théorie anthropologique du didactique**. Org. Alain Bronner Mirène Larguier Michèle Artaud Marianna Bosch Yves Chevallard Gisèle Cirade Caroline Ladage. IUFM de l'Académie de Montpellier, 2010.

MERCIER, A.; SALIN M.H. L'analyse a Priori, Outil pour L'observation. **Atelier à l'Université d'Été, Olivet**, 1988 (16) (PDF) L'analyse a priori, un outil pour l'observation. Available from: https://www.researchgate.net/publication/309386333_L'analyse_a_priori_un_outil_pour_l'observation [accessed Dec 07 2020].

MIRANDA, D.; GRISI, R.; LODOVICI, S. **Geometria Analítica e Vetorial**. Santo André: Universidade Federal do ABC, 2015. Disponível em: <http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/listas/ga/notasdeaulas/geometriaanaliticaevetorial-SGD.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2018.

NAJAR, R. Analyse de la Conception de Vecteur Emergente d'un Manuel Scolaire. Université de Tunis et Didirem, Université Paris 7, **Petit x** 72, 52-81, 2006. Disponível em: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/72x3_1560959070862-pdf. Acesso em: 05 de mar. 2020.

NETZ R. **The shaping of deduction in greek mathematics, a study in cognitive history**, Cambridge, 1999.

NGUYEN, A. **Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Vietnam et en France**. Thèse de Doctorat em Didactique des mathématiques. 2006, 427p. Grenoble: Université Joseph Fourier. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00182779/document>. Acesso em: 19 de mar de 2020.

PASSOS, F. G. *et al.* **Análise dos Índices de Reprovações nas Disciplinas Cálculo I e Geometria Analítica nos Cursos de Engenharia da Univasf**. XXXV CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA – COBENGE, 2007. Disponível em: <http://www.abenge.org.br/cobenge/arquivos/12/artigos/199-Fabiana%20dos%20Passos.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2017.

PEREIRA JR, J.; BERTOL, D. O Software GeoGebra no Ensino da Matemática: Relatos a partir de Teses e Dissertações. **Anais dos Workshops do Congresso Brasileiro de Informática na Educação**, 8(1), 586. 2019. doi:<http://dx.doi.org/10.5753/cbie.wcbie.2019.586> Acesso: 23 de abr. 2018

PRESSIAT, A. **Aspects épistemologiques et didactiques de la liaison points-vecteurs: histoire et perspectives sur les mathématiques**. 1999. Tese (Doutorado em Sciences de l'éducation) – Universidade de Denis Diderot Paris 7, França, 1999. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01253624/document>. Acesso em: 18 mar. 2017.

PAVLOPOULOU K. **Propédeutique de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation sémiotique.** Thèse de doctorat de l'université Louis Pasteur (Strasbourg 1), prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée. 241 p. 1994.

POOLE, D. **Álgebra Linear.** Tradução Martha S. Monteiro. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

REIS, A. F. **Ensinando operações com grandezas físicas vetoriais no ensino médio através de uma unidade de ensino potencialmente significativa.** São Carlos: UFSCar, 2016. Disponível em:
<https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/8305/DissAFR.pdf?sequence=1>. Acesso em: 03 out. 2018.

REVUZ, A. **On the Teaching of Linear Algebra.** In: Dorier J. L. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers. Volume 23. Monash University Melbourne, Australia, 2000 (Prefácio).

RICHIT, A. **Projetos em Geometria Analítica usando software de Geometria Dinâmica: repensando a formação inicial docente em matemática.** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Rio Claro, São Paulo, 2005.

RODRIGUES, J. M. **Geometria analítica com enfoque vetorial no ensino médio.** 2015. 146 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Campinas, 2015. Disponível em:
<http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/306436>. Acesso em: 27 ago. 2018.

ROGALSKI, J. Y a-t-il un pilote dans la classe? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. **Rech. Did. Math.**, n. 23, v. 3, p. 343-388, 2003.

SALAS, M. I. T. La enseñanza tradicional de las ciencias versus las nuevas tendencias educativas. **Revista Electrónica Educare**, jan./jun. 2010, XIV. Disponível em:
<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194114419012>. Acesso em: 9 fev. 2018.

SAGLAM A. **Les équations différentielles en mathématiques et en physique: étude des conditions de leur enseignement et caractérisation des rapports personnels des étudiants de première année d'université à cet objet de savoir.** Thèse de doctorat Mathématiques et Informatique- Sciences de Technologies de l'Information, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 2004, 265p. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00271402/document>. Acesso: 05 de mar. 2020.

SALGADO, Diana Patricia; OTERO, María Rita. Enseñanza por investigación en un curso de matemática de nivel universitario: los gestos didácticos esenciales
 Research based Teaching in a mathematic course at university level: The fundamental didactic gestures. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 22, n. 1, jan. 2020. ISSN 1983-3156. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/45267>>. Acesso em: 08 fev. 2020. doi:<https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i1p532-557>.

SALINAS, P. Y ALANÍS, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, 12.

<http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33511859004>.

SANTOS, A. T. C. dos. **O estado da Arte das pesquisas brasileiras sobre geometria analítica no período de 1991 a 2014**. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em:
<https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/19047/3/Adriana%20Tiago%20Castro%20dos%20Santos.pdf>. Acesso em: 02 mar. 2017.

SANTOS, N. M. dos. **Vetores e Matrizes**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, Coleção Elementos de Matemática, Rio de Janeiro-RJ. Livros Técnicos e Científicos, 1979.

SANTOS JUNIOR, V. B. dos; DIAS, M. A.; BOSCH, M. **Um Percorso de Estudo e Pesquisa para o Estudo das Noções de Juros Simples e Compostos**. *Bolema* [online]. 2019, vol.33, n.63, pp.327-347. ISSN 0103-636X. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a16>.

SANTALÓ, L. A. Situación de la enseñanza de la Geometría frente a las nuevas tendencias de la educación matemática, **Revista de Bachillerato**, suplemento del n.º 13, pp. 23-28, 1980. Disponível em:
<https://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/73117/00820073007983.pdf?sequence=1&isAllowed=y> . Acesso: 17 de agos. 2020.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011). **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 138-155, jul. 2013. Disponível em:
<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/26905>. Acesso em: 02 mar. 2017.

SILVA, A. *et al.* O Currículo de Matemática e as Atividades de Investigação. In: ABRANTES, P.; PONTE, H. FONSECA; L. BRUNHEIRA (org.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM e Projeto MPT, 1999. p. 69-85.

SILVA *et al.* **Análise dos Índices de Reprovação nas Disciplinas de Cálculo I E AVGA do Curso de Engenharia Elétrica do Instituto Federal da Bahia de Vitória da Conquista**. XIV INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING AND TECHNOLOGY EDUCATION, 2016. Disponível em: <http://copec.eu/intertech2016/proc/works/55.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2018.

SILVA, C. C. **Da força ao tensor: evolução do conceito físico e da representação matemática do campo eletromagnético**. 250 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin, Campinas, 2002. Disponível em:
<http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/277072>. Acesso em: 29 abr. 2019.

SILVA, G. M. **Um Estudo sobre o uso do Geogebra na Aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio** (Dissertação de Mestrado em Educação). Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, 2016.

SMITH, D. E. **A Source Book in Mathematics**. New York: Dover, 1959.

STEEN, L. **Mathematics and Democracy**. The Case for Quantitative Literacy, The National Council on Education and the Disciplines, 2002.

STEINBERG, M. **Os elementos não-verbais da conversação**. São Paulo: Atual, 1988.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

SAUSSURE, F. **Curso de Linguística Geral**; organizado por Charles Bally, Albert Sechehaye; com a colaboração de Albert Riedlinger; prefácio e edição brasileira Isaac Nicolau Salum; tradução de Antônio Chelini, José Paulo Paes e Izidoro Blikstein, 27ª edição. São Paulo, Cultrix, 2006.

TÁBOAS, P. Z. Um Estudo sobre as Origens dos Espaços Vetoriais. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 10, n. 19, p.1-38, 2010. Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática. Disponível em:
[http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.10,%20no19,%20abril%20\(2010\)/1%20-%20PI%C3%ADnio%20-%20final.pdf](http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.10,%20no19,%20abril%20(2010)/1%20-%20PI%C3%ADnio%20-%20final.pdf). Acesso em: 15 jul. 2019.

TALL, D. O. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Dordrecht, Kluwer Academic, 2002.

TETCHUENG, J. L.; GARLATTI, S.; LAUBÉ, S. Un modèle informatique de scénario fondé sur des pratiques réelles d'enseignement et une théorie didactique, **INRP**, 2007. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00161469/document>. Acesso em: 17 abr. 2019.

TROYER, R. J. **Na approach to vector geometry**. In: The Mathematics Teacher. Vol. 56, nº 5, pp.290, 297. National Council of Teachers of Mathematics, 1953.

VAZ, R. F. N.; FERREIRA, M. L. Vetores no Ensino Médio: investigando contribuições à Matemática e à Física. In: **Semana de Matemática da Universidade Federal Fluminense – UFF**, 2016. Disponível em:
<http://semanamatematicauff2016.weebly.com/uploads/7/6/1/2/7612866/sabt-05.pdf>. Acesso em: 09 de set. 2020.

VAZ, R. F. N.; FERREIRA, M. L.; NASSER, L. A compreensão matemática de vetores adquirida por estudantes nas aulas de Física. **BOLETIM GEPEN**, Nº 79 p. 56- 69 2017. Disponível em: <http://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2017.021>. Acesso em: 09 de set. 2020.

VENTURA, K.; ALMOULOU, S. Análise de Conteúdos de Geometria Analítica em Livros Didáticos de Ensino Médio. In: VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática, 2013, Canoas. **Atas do VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática**. Canoas, RS, Brasil, 2013

VENTURI, J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. 10. ed. Curitiba: editora Unificado, 2015. Disponível em: www.geometriaanaltica.com.br. Acesso em: 20 mar. 2018.

VERRET. **Le temps des études**. Paris: Honoré Champion, 1975.

VILLIERS, M. D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*. In: **Revista Educação e Matemática**. Tradução de Eduardo Veloso, nº 62. p. 31-36, 2001 Disponível em: <http://www.apm.pt/apm/revista/educ63/Para-este-numero.pdf>. Acesso em 10 de mar 2020.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

YANG, K. Structures of Cognitive and Metacognitive Reading Strategy Use for Reading Comprehension of Geometry Proof. **Educational Studies in Mathematics**, Heidelberg, Germany, v. 80, n.º 3, p. 307-326, Setembro, 2011.

ZICCARDI, L. R. N. **O curso de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: uma história de sua construção/desenvolvimento/legitimação**. 2009. 408f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11421/1/Lydia%20Rossana%20Nocchi%20Ziccardi.pdf>. Acesso em: 20 de jul. 2020.

ZUÑIGA, S. L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, 10 (1), 145-155. <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33500107>

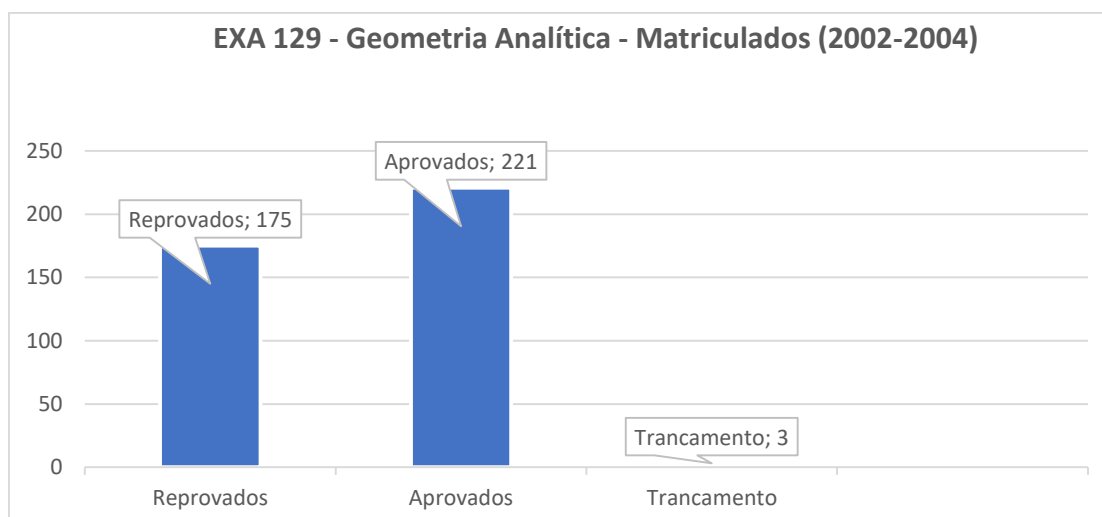
ANEXOS – TABELAS E GRÁFICOS REFERENCIADOS NA INTRODUÇÃO

Tabela 12 - EXA 129 – Geometria Analítica

Semestre/Turma	Matriculados	Aprovados (%)	Reprovados (%)	Trancamentos(%)
2004.2 / T01	24	15 (62,5%)	09 (37,5%)	-
2004.1 / T01	40	23(57,5%)	17(42,5%)	-
2004.1 / T02	24	13(54,2%)	11(45,8%)	-
2003.2 / T01	44	23(52,3%)	19(43,2%)	02 (4,5%)
2003.2 / T02	29	16 (55,2%)	13(44,8%)	-
2003.1 / T01	40	19 (47,5%)	20(50,0%)	01 (2,5%)
2003.1 / T02	24	12(50,0%)	12(50,0%)	-
2003.1 / T03	03	03(100%)	0(0%)	-
2002.2 / T01	39	19(48,7%)	20(51,3%)	-
2002.2 / T02	42	22(52,4%)	20(47,6%)	-
2002.2 / T03	23	14(60,8%)	9(39,2%)	-
2002.1 / T01	45	30(66,7%)	15(33,3%)	-
2002.1 / T02	22	12(54,5%)	9(45,5%)	-

Fonte: tabulação realizada pela autora com base em dados fornecidos pelo setor de Divisão de Assuntos Acadêmicos (DAA) (UEFS).

Gráfico 1– Comparativo entre aprovações, reprovações e trancamentos da disciplina EXA 129.



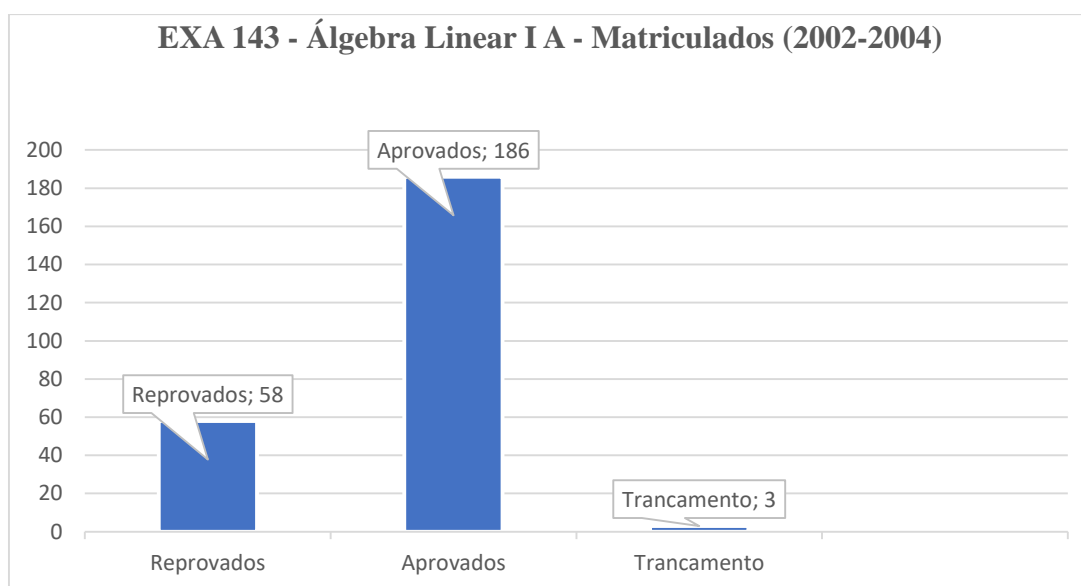
Fonte: representação gráfica elaborada pela autora (2019) com base na tabela 1.

Tabela 13 - EXA 143 Álgebra Linear I A.

Semestre / Turma	Matriculados	Aprovados (%)	Reprovados (%)	Trancamentos(%)
2004.2 / T01	37	23 (62,2%)	11(37,8%)	-
2004.2 / T02	6	5(83,3%)	1(16,7%)	-
2004.1 / T02	36	29(80,5%)	7(19,5%)	-
2003.2 / T01	37	34(91,9%)	3(8,1%)	-
2003.2 / T02	6	2(33,3%)	4(66,7%)	-
2003.1 / T01	26	21(80,7%)	5(19,3%)	-
2003.1 / T02	8	5(62,5%)	3(37,5%)	-
2002.2 / T01	42	36(85,7%)	4(9,5%)	2(4,7%)
2002.2 / T02	10	0 (0%)	9(90%)	1(10%)
2002.1 / T01	28	25 (89,3%)	3(10,7%)	-
2002.1 / T02	11	6(54,5%)	5(45,5%)	-

Fonte: tabulação realizada pela autora com base em dados fornecidos pelo setor de Divisão de Assuntos Acadêmicos (DAA) (UEFS).

Gráfico 2– Comparativo entre aprovações, reprovações e trancamentos da disciplina EXA 143.



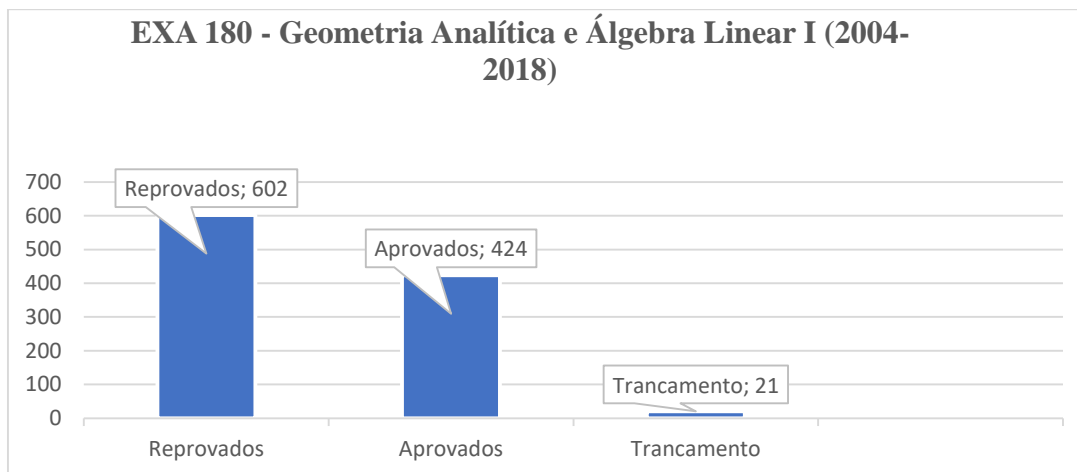
Fonte: representação gráfica elaborada pela autora (2019) com base na tabela 2 em anexo

Tabela 14– EXA 180 – Geometria Analítica e Álgebra Linear I.

Semestre / Turma	Matriculados	Aprovados		Reprovados		Trancamentos	
		Nº de alunos	(%)	Nº de alunos	(%)	Nº de alunos	(%)
2004.1 / T01	44	38	(86,4%)	06	(13,6%)	-	
2004.2 / T01	35	17	(50,0 %)	17	(50%)	-	
2004.2 / T02	04	03	(75,0%)	01	(25%)	-	
2005.2 / T01	42	21	(50,0%)	20	(47,6)	01	(2,4%)
2006.1 / T01	45	13	(28,9%)	28	(71,1%)	-	
2006.2 / T01	39	12	(30,7%)	26	(66,7%)	01	(2,6%)
2007.1 / T01	40	18	(45,0%)	22	(55%)	-	
2007.2 / T01	30	07	(23,3%)	22	(76,7%)	-	
2008.1 / T01	37	12	(40,0%)	24	(60,0%)	-	
2008.2 / T01	37	15	(40,5%)	22	(59,5%)	-	
2009.1 / T01	46	14	(30,4%)	31	(67,4%)	01	(2,2%)
2009.2 / T01	37	20	(54,0%)	15	(40,5%)	02	(5,4%)
2010.1 / T01	46	14	(30,4%)	31	(67,4%)	01	(2,2%)
2010.2 / T01	38	12	(31,6%)	24	(63,2%)	04	(5,2%)
2010.2 / T02	19	03	(15,8%)	14	(73,7%)	03	(10,5%)
2011.1 / TP01	38	14	(36,8%)	23	(60,5%)	01	(2,7%)
2011.1 / TP02	12	01	(8,3%)	10	(83,3%)	01	(8,4%)
2011.2 / TP01	35	10	(28,6%)	25	(71,4%)	-	
2012.1 / TP01	42	24	(57,1%)	17	(40,5%)	01	(2,4%)
2012.2 / TP01	33	06	(18,2%)	27	(81,8%)	-	
2013.1 / TP01	33	07	(21,2%)	26	(78,8%)	-	
2013.2 / TP01	48	11	(22,9%)	37	(77,1%)	-	
2014.1 / TP01	42	11	(26,2%)	31	(73,8%)	-	
2014.2 / TP01	41	14	(34,1%)	27	(68,9%)	-	
2015.1 / TP01	44	17	(38,6%)	26	(61,4%)	-	
2015.2 / TP01	45	16	(35,5%)	29	(64,5%)	-	
2016.1 / TP01	38	13	(34,2%)	25	(65,8%)	-	
2017.1 / TP01	45	16	(35,5%)	27	(64,5%)	-	
2017.2 / TP01	46	20	(43,5%)	24	(52,2%)	2	(4,3%)
2017.2 / TP02	36	13	(36,1%)	23	(63,9%)	-	
2018.1 / TP01	45	11	(24,4%)	31	(68,9%)	3	(6,7%)

Fonte: tabulação realizada pela autora com base em dados fornecidos pelo setor de Divisão de Assuntos Acadêmicos (DAA) (UEFS).

Gráfico 3– Comparativo entre aprovações, reprovações e trancamentos da disciplina EXA 180.



Fonte: representação gráfica elaborada pela autora (2019) com base na tabela 3 em anexo.