



HAL
open science

Les métriques sous-Finslériennes en dimension 3

Fazia Harrache

► **To cite this version:**

Fazia Harrache. Les métriques sous-Finslériennes en dimension 3. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université de Toulon, 2022. Français. NNT : . tel-03723279

HAL Id: tel-03723279

<https://hal.science/tel-03723279v1>

Submitted on 14 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE 548 « Mer et Sciences »

Laboratoire LIS

THÈSE présentée par :

Fazia Harrache

soutenue le : **18 Mai 2022**

pour obtenir le grade de Docteur en Mathématiques

Spécialité : Théorie du Contrôle

Les métriques sous-Finlériennes en dimension 3

THÈSE dirigée par :
Francesca Carlotta Chittaro
Jean-Paul Gauthier
Mohamed Aidène

Maître de Conférence HDR, Université de Toulon
Professeur, Université de Toulon
Professeur, Université de Tizi-Ouzou

JURY :

M. AIDENE Mohamed
M. BUSVELLE Eric
Mme CHITTARO Francesca
M. DJENNOUNE Said
Mme GHEZZI Roberta
M. MERAKEB Abdelkader
Mme POGGIOLINI Laura
M. SACCHELLI Ludovic

Professeur, Université de Tizi-Ouzou (codirecteur)
Professeur, Université de Toulon (examineur)
MCF, Université de Toulon (directeur)
Professeur, Université de Tizi-Ouzou (rapporteur)
MCF, Université de Roma Tor Vergata (examineur)
Professeur, Université de Tizi-Ouzou (examineur)
Professeure, Université de Florence (rapporteur)
CR, INRIA, Sophia Antipolis (examineur)

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je désire remercier Monsieur Jean-Paul André GAUTHIER, mon directeur de thèse, de m'avoir proposer ce sujet et de me donner la chance d'être membre du laboratoire LIS. Je tiens aussi à le remercier de m'avoir accorder sa confiance et d'être toujours disponible.

Il m'est très agréable de remercier ma co-encadrante, Madame Francesca Carlotta CHITTARO, pour le soutien permanent qu'elle m'a accordé tout au long de ces années, je lui suis très reconnaissante pour sa disponibilité, sa patience et son aide précieuse, ainsi pour tous les bons moments partagés

Je désire remercier mon co-directeur de thèse, Monsieur Mohamed Aidene, pour ces conseils et ses encouragements.

Je remercie également Messieurs Grégoire CHARLOT et Thierry CHAMPION, membres de mon comité de suivi de thèse, pour leurs conseils et leur soutien.

Mes remerciements s'adressent à Monsieur Abdelkader MERAKEB qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance. Je tiens également à remercier Monsieur Saïd DJENNOUNE et Madame Laura POGGIOLINI qui ont accepté le rôle de rapporteurs de mes travaux. Je tiens très vivement à exprimer ma reconnaissance à Monsieur Eric BUSVELLE, Madame Roberta GHEZZI et Monsieur Ludovic SACCHELLI d'avoir consacré une partie de leur temps afin d'examiner ma thèse.

Je remercie chacun et chacune de mes professeurs qui se sont succédés, dès mes premiers pas à la maternelle jusqu'au magister, pour m'éduquer et m'apprendre la science et les bonnes manières. C'est grâce à eux et à leurs encouragements que j'ai pu poursuivre avec réussite mes études.

Je remercie chaleureusement Monsieur Nicolat BOISOT et Monsieur Eric BUSVELLE pour leur gentillesse et leur conseils précieux. Je tiens à remercier tous les membres de LIS en particulier mes amies Ouazna, Assia et Aida.

J'aimerais remercier toute ma famille et ma belle famille pour leur constant soutien. Merci à ma belle-sœur Horia pour m'avoir encourager sans cesse pour aller toujours plus loin.

Un grand merci à ma très chère copine Nora, elle était la seconde maman

pour ma fille lors de mes séjours en France.

J'exprime enfin un geste modeste de remerciement et de reconnaissance à mon mari pour son infinie patience et sa compréhension et j'adresse toute ma tendresse maternelle à mes enfants Lila et Ilyan.

Table des matières

Introduction	3
1 Le problème sous-Finslérien L^1 en dimension 3	7
1.1 Le problème sous-Finslérien comme un problème de contrôle optimal	8
1.1.1 Le Principe de Maximum du Pontryagin	10
1.1.2 Optimalité globale et optimalité locale	13
1.2 Le système de Heisenberg	19
1.3 La forme normale	26
1.3.1 Propriétés de symétrie de la forme normale	30
2 Les jets des extrémales de type bang-bang avec $\Theta > 0$	33
2.1 Les jets des extrémales de type bang-bang	33
2.1.1 Développement local de la dynamique	33
2.1.2 Intégration des jets de la dynamique	37
2.2 Premières considérations sur l'optimalité des géodésiques	40
2.2.1 Réduction aux géodésiques avec au plus 5 arcs de type bang	40
2.2.2 Calcul des temps conjugués	43
2.3 Calculs des fronts des géodésiques avec 4 ou 5 arcs	46
2.3.1 Auto-intersections du front des géodésiques d'une même classe	53
2.4 Une brève discussion sur la généricité des cas étudiés	55
3 Le lieu de coupure dans le cas générique ($C_1 C_2 \neq 0$)	57
3.1 Les principes de la méthode	57
3.1.1 Exemple de calcul des points de Maxwell	58
3.2 Le lieu de coupure dans le cas $C_1 < 0$ et $C_2 < 0$	61
3.3 $C_1 > 0$ and $C_2 < 0$	65
3.3.1 $C_1 < 0$ et $C_2 > 0$	69
3.4 $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$	70
4 Le lieu de coupure pour $C_1 = 0$	78
4.1 $E_1 < - D_1 $ (cas \mathbf{A}_-)	79
4.1.1 $C_2 < 0$	79
4.1.2 $C_2 > 0$	81
4.2 $0 < E_1 < D_1$ (case \mathbf{B}_+)	89
4.2.1 $C_2 < 0$	89
4.2.2 $C_2 > 0$	94

4.3	$-D_1 < E_1 < 0$ (cas \mathbf{B}_-)	102
4.3.1	$C_2 < 0$	102
4.3.2	$C_2 > 0$	105
4.4	Les cas \mathbf{A}_+ , \mathbf{C}_- et \mathbf{C}_+	108
5	Conclusions	109
5.1	Questions ouvertes	109
5.1.1	Les petites sphères	109
5.1.2	Stabilité du lieu de coupure	113
5.2	Relaxation de l'hypothèse sur la forme normale	113
A	Formules utiles	116
A.1	Hamiltoniens	116
A.2	Permutations des invariants	117
A.3	Jets des géodésiques de la classe Γ_f	118
A.4	Temps de commutation d'une géodésique de la classe Γ_f	121
B	Calcul des intersections des fronts	123
C	Codes Mathematica	130
	Notations	144

Introduction

Considérons deux champs de vecteurs f, g de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 , tels que f, g et leurs crochets de Lie $[f, g]$ sont linéairement indépendants en tout point de \mathbb{R}^3 . Pour chaque $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, définissons, sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $f(\mathbf{q})$ et $g(\mathbf{q})$, une norme $h_{\mathbf{q}}$, où la fonction $\mathbf{q} \mapsto h_{\mathbf{q}}$ est assumée C^∞ . Cette norme munit l'espace \mathbb{R}^3 d'une distance, de la manière suivante : étant donnés deux points $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^3$, leur distance est définie comme

$$\inf \left\{ \int_0^1 h_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt : \left\{ \begin{array}{l} \gamma \in AC([0, 1], \mathbb{R}^3) \\ \dot{\gamma}(t) \in \text{span}\{f(\gamma(t)), g(\gamma(t))\} \text{ p.p. } t \\ \gamma(0) = \mathbf{q}_0, \gamma(1) = \mathbf{q}_1. \end{array} \right. \right\}. \quad (1)$$

Si la norme $h_{\mathbf{q}}$ est la restriction à $\text{span}\{f(\mathbf{q}), g(\mathbf{q})\}$ d'une certaine norme Riemannienne définie sur \mathbb{R}^3 , le problème variationnel (1) est le très célèbre problème sous-Riemannien (les livres [7, 27] sont des références classiques sur ce problème). Si au contraire $h_{\mathbf{q}}$ n'est pas donnée par un produit scalaire sur l'espace vectoriel engendré par f et g , alors le problème (1) est appelé problème *sous-Finslérien* [10, 11, 12, 14, 16, 19, 20, 26].

La première question à laquelle répondre, en géométrie sous-Riemannienne comme en géométrie sous-Finslérienne, est celui de calculer la distance entre tout couple de points de \mathbb{R}^3 . Une approche à ce problème est de s'appuyer sur les techniques du contrôle géométrique : en effet, pour toute courbe $\gamma \in AC([0, 1], \mathbb{R}^3)$ telle que $\dot{\gamma}(t) \in \text{span}\{f(\gamma(t)), g(\gamma(t))\}$ pour presque tout $t \in [0, 1]$, nous pouvons introduire une commande mesurable et intégrable $\mathbf{u} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\dot{\gamma}(t) = u_1(t)f(\gamma(t)) + u_2(t)g(\gamma(t))$, p.p. $t \in [0, 1]$. En définissant un coût $\varphi(\mathbf{q}, u_1, u_2) = h_{\mathbf{q}}(u_1f + u_2g)$, le problème (1) devient le problème de contrôle optimal :

$$\text{minimiser } \int_0^1 \varphi(\gamma(t), u_1(t), u_2(t)) dt \quad (2)$$

sur toutes les courbes $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ solutions du système de contrôle

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma}(t) = u_1(t)f(\gamma(t)) + u_2(t)g(\gamma(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0, 1] \\ \gamma(0) = \mathbf{q}_0, \gamma(1) = \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{u} \in L^1([0, 1], \mathbb{R}^2). \end{array} \right. \quad (3)$$

Celle-ci est l'approche au problème sous-Finslérien adoptée dans les articles [10, 11, 12, 14, 26] ; en particulier, grâce à un reparamétrage adapté du temps, le problème (2)-(3) peut être reformulé comme un problème du temps minimal, dans lequel les contrôles varient dans un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^2 , dont la forme est déterminée par $h_{\mathbf{q}}$.

Le Principe du Maximum de Pontryagin ([6]), souvent abrégé en PMP, fournit une série de conditions nécessaires pour qu'une trajectoire admissible (c'est-à-dire, une solution du système (3)) soit optimale, c'est-à-dire, elle soit de longueur minimale). Plus précisément, le PMP associe au problème de contrôle optimal étudié un système Hamiltonien, défini sur \mathbb{R}^6 , et établit que les trajectoires optimales doivent être cherchées parmi les solutions du système Hamiltonien (plus précisément, elles doivent être les projections sur \mathbb{R}^3 de certaines trajectoires du système Hamiltonien). Dans le cas spécifique du problème sous-Finslérien et sous-Riemannien, les trajectoires admissibles qui satisfont les conditions données par le PMP s'appellent *géodésiques*.

Malheureusement, le PMP n'est qu'une (liste de) conditions nécessaires, et il n'est pas garanti que toutes les trajectoires pointées par le PMP soient effectivement optimales. Pour cela, plusieurs conditions d'optimalité, qui vont s'ajouter au PMP, ont été étudiées : c'est notamment les cas des conditions du deuxième ordre basées sur la variation seconde (voir par exemple [5, 32]) ou l'étude des points conjugués.

Dans cette thèse, nous étudions les métriques sous-Finslériennes L^1 sur \mathbb{R}^3 . Ceci correspond au cas où la fonction h_q est juste la norme L^1 du contrôle. Plus précisément, nous sommes intéressés à "dessiner" les sphères, c'est-à-dire, à trouver tous les points qui se trouvent à une certaine distance fixée (par exemple, ρ) d'un point d'origine ; ceci revient à isoler les trajectoires optimales de longueur plus grande ou égale à ρ : la sphère de rayon ρ est constituée des points de ces trajectoires qui se trouvent à la distance ρ de l'origine.

Le cas le plus simple de ce problème correspond au système de Heisenberg, dans lequel les champs de vecteurs ont l'expression

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}.$$

Ces cas ont été étudiés dans l'article [14] ; nous allons rappeler les résultats dans la Section 1.2.

Le cas dit *générique* est celui dans lequel les deux vecteurs f et g sont génériques (c'est-à-dire, ils appartiennent à un ensemble résiduel dans la topologie C^∞ de Whitney, comme expliqué dans la Section 2.4). Ce cas peut vite devenir très compliqué : avant toute chose, si les champs de vecteurs sont non-linéaires, l'existence d'une solution du système (3) sur tout l'intervalle $[0, 1]$ n'est pas garantie ; ensuite, le problème d'intégrer des systèmes non-linéaires est très difficile ; enfin, il est irréalisable de traiter le cas en toute généralité : chaque choix différent des champs f et g donne lieu à un problème différent (ne serait-ce que par le fait que les trajectoires admissibles sont complètement différentes).

Toutefois, si nous considérons les sphères de petit rayon (*petites sphères*), nous pouvons toujours assumer que les solutions du système (3) sont bien définies sur l'intervalle $[0, 1]$, et nous pouvons écrire les trajectoires du système comme des perturbations des trajectoires du système de Heisenberg. En effet, pour des petits rayons, les parties non-linéaires des champs de vecteurs f et g seront plus petites que les composantes linéaires, et elles pourront être traitées comme des perturbations du système nilpotent associé (qui revient à être le système de Heisenberg).

Cette approche a déjà été utilisée dans les articles [4, 15, 17] pour étudier les petites sphères du problème sous-Riemannien dimension 3, dans les articles [8, 18] pour le problème sous-Riemannien dans le cas de contact et de quasi-contact, dans l'article [30] pour le problème sous-Riemannien en dimension 5, et, enfin, dans les articles [10, 11] pour le problème sous-Finslérien, en dimension 2 et 3. En particulier, dans [11] les auteurs considèrent une distribution générique de rang au plus 2 dans \mathbb{R}^3 , munie d'une norme de type L^∞ (c'est-à-dire, la fonction φ correspond à la norme L^∞ de la fonction \mathbf{u} , qui est d'ailleurs choisie dans $L^\infty([0, 1], \mathbb{R}^2)$) et étudient le problème du temps minimal équivalent au problème L^∞ sous-Finslérien ; en particulier, ils s'intéressent à la synthèse optimale locale, c'est-à-dire à la compréhension de la synthèse optimale pour de petits temps (ou des petites distances), dans un voisinage des points génériques (c'est-à-dire, où la distribution est de rang 2 et de *step* 2).

Dans l'article cité, les auteurs identifient deux invariants de la distribution (appelés respectivement C_1 et C_2) qui apparaissent dans le développement de la matrice Jacobienne de l'application exponentielle ; s'ils sont tous les deux non nuls, leurs signes déterminent complètement le lieu conjugué des géodésiques courtes. De plus, les auteurs fournissent une caractérisation complète du lieu de coupure des géodésiques courtes, sous les hypothèses génériques que $C_1 C_2 \neq 0$.

Le but de cette thèse est de poursuivre le travail accompli dans l'article en question : étudier la synthèse locale optimale dans des cas moins génériques, notamment, lorsque au moins un des invariant C_1 et C_2 est nul.

Néanmoins, par rapport à la classe des systèmes étudiés dans l'article [11], il a deux différences. Tout d'abord, nous rétrécissons légèrement l'ensemble de systèmes sous-Finslériens que nous étudions : nous considérons seulement les structures sous-Finsler L^1 compatibles avec une métrique sous-Riemannienne (selon la Définition 9) ; grosso modo, nous exigeons que la variété sur laquelle le système est défini soit munie d'une structure Riemannienne, et que les champs de vecteurs f et g soient obtenus à partir d'un repère orthonormé, en appliquant une transformation linéaire non singulière *constante*. Ensuite, nous considérons le problème sous-Finslérien L^1 , c'est-à-dire, notre but est de minimiser la norme L^1 du contrôle. Néanmoins, comme déjà remarqué dans [11, 14], les problèmes sous-Finslérien L^1 et sous-Finslérien L^∞ sont tout à fait équivalents, à un changement de variable près.

Grâce au choix d'étudier des structures sous-Finslériennes compatibles avec une métrique sous-Riemannienne, nous pouvons profiter du travail de Agrachev, El-Aloui, Gauthier et Kupka, et utiliser la forme normale d'Agrachev-Gauthier des champs de vecteurs f et g (voir [9, 17]), ce qui nous permet de simplifier considérablement les calculs. Le choix de se focaliser sur de telles structures a aussi d'autres avantages : tout d'abord, grâce aux symétries des champs de vecteurs, il suffit de calculer l'expression analytique d'un nombre assez réduit de trajectoires, et de récupérer les autres en appliquant les coordonnées appropriées changements et permutations dans les invariants ; la même chose peut être faite pour plusieurs autres calculs (tels que le calcul des temps de commutation, des points de Maxwell et des fronts d'onde). En plus, comme nous allons montrer dans le Chapitre 3, même en se restreignant à la classe des structures sous-Finsler L^1 compatibles avec une métrique sous-Riemannienne, dans le cas générique $C_1 C_2 \neq 0$ nous retrouvons les résultats de l'article [11] (du moins, pour ce qui concerne la partie de la sphère vérifiant $z \geq |xy|/2$).

Dans le Chapitre 4, nous faisons l'hypothèse que l'invariant C_1 est nul. Ceci

nous oblige à développer les calculs des géodésiques à des ordres supérieur par rapport à ceux qui suffisait pour décrire les cas étudiés dans le Chapitre 3; en particulier, nous voyons paraître deux invariants, appelés E_1 et D_1 , dont les valeurs déterminent le lieu conjugué des géodésiques courtes de type *bang-bang* dont la vitesse initiale est donné par le champ de vecteurs f (ou $-f$). Nous avons ainsi détecté six invariants principaux de la distribution (appelés A, C_1, C_2, D_1, E_1); nous fournissons une caractérisation complète de la partie supérieure du lieu de coupure, en fonctions des valeurs de ces invariants. En particulier, nous avons repéré 22 (réduits à 12, par symétrie) sous-cas dans le cas générique et 60 sous-cas (réduits à 30, par symétrie) dans le cas où $C_1 = 0$ et les invariants C_2, E_1 et D_1 sont non nuls.

En adaptant les mêmes techniques de [17], il est possible de prouver que la condition $C_1 \neq 0$ est génériquement vraie (au sens spécifié à la Section 2.4); en particulier, pour une structure sous-Finsler générique L^1 compatible avec une structure sous-Riemannienne, l'ensemble des points $\mathbf{q} \in M$ tel que $C_1 = 0$ a codimension 1 dans M . On peut aussi montrer que le sous-ensemble caractérisé par $D_1 = E_1 = 0$ a codimension 2 dans l'ensemble des points pour lesquels $C_1 = 0$. L'hypothèse $D_1 E_1 \neq 0$ est donc génériquement vraie dans le sous-ensemble des cas dégénérés.

Le manuscrit est structuré de la façon suivante : dans le Chapitre 1, nous donnons toutes les informations préliminaires : nous définissons la notion de métrique sous-Finslerienne L^1 , nous énonçons le problème et nous rappelons les outils fondamentaux que nous allons utiliser, comme le PMP et la notion de point conjugué; nous faisons une première discussions sur les notions d'optimalité considérées dans ce manuscrit; nous rappelons brièvement les résultats qui concernent le système de Heisenberg; enfin, nous allons aussi construire une forme normale pour les champs de vecteurs f et g .

Dans le Chapitre 2, nous allons calculer les jets (par rapport à un petit paramètre ρ_0 , dont le sens sera discuté dans le chapitre en question) des géodésiques de type *bang-bang*; dans le chapitre, nous allons aussi donner l'expression des fronts d'onde des géodésiques.

Le Chapitre 3 est dédié au cas dans lequel les deux invariants C_1 et C_2 sont non-nuls. Nous allons ainsi retrouver les résultats de l'article [11].

Le coeur de notre travail se trouve dans le Chapitre 4, dans lequel nous décrivons la "partie haute" des petites sphères, dans le cas non-générique dans lequel $C_1 = 0$ et $C_2 \neq 0$.

Enfin, dans le Chapitre 5 nous discutons les questions encore ouvertes et donnons des perspectives de recherche futures.

Chapitre 1

Le problème sous-Finslérien L^1 en dimension 3

Considérons le triplet (M, \mathcal{D}, h) , où M est une variété différentielle de dimension 3, $\mathcal{D} \subset TM$ une distribution régulière de dimension 2, et $h_{\mathbf{q}}$ une norme lisse définie sur \mathcal{D} , soit :

- pour tout $\mathbf{q} \in M$, $h_{\mathbf{q}}$ est une fonction de $\mathcal{D}_{\mathbf{q}} = \mathcal{D} \cap T_{\mathbf{q}}M$ à valeurs en $[0, +\infty)$, et $h_{\mathbf{q}}$ dépend de façon régulière (C^∞) par rapport à \mathbf{q}
- $h_{\mathbf{q}}(V) \geq 0$ pour tout $V \in \mathcal{D}_{\mathbf{q}}$, et $h_{\mathbf{q}}(V) = 0$ si et seulement si $V = 0$
- $h_{\mathbf{q}}(\lambda V) = |\lambda| h_{\mathbf{q}}(V)$ pour tout $V \in \mathcal{D}_{\mathbf{q}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- $h_{\mathbf{q}}(V_1 + V_2) \leq h_{\mathbf{q}}(V_1) + h_{\mathbf{q}}(V_2)$ pour tout $V_1, V_2 \in \mathcal{D}_{\mathbf{q}}$.

La norme définie par $h_{\mathbf{q}}$ sur \mathcal{D} munit la variété M d'une *distance*, définie comme il suit : pour tout couple de points $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1 \in M$, leur distance est donnée par

$$d(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) = \inf \left\{ \int_0^1 h_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt : \begin{cases} \gamma \in AC([0, 1], \mathbb{R}^3) \\ \dot{\gamma}(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)} \text{ p.p. } t \\ \gamma(0) = \mathbf{q}_0, \gamma(1) = \mathbf{q}_1. \end{cases} \right\}. \quad (1.1)$$

Si l'infimum dans l'équation (1.1) n'existe pas, nous posons $d(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) = +\infty$.

Si la fonction $h_{\mathbf{q}}$ est la restriction à la distribution \mathcal{D} d'une norme Riemannienne définie sur M , le problème (1.1) est le très célèbre *problème sous-Riemannien* (bien traité, par exemple, dans les monographies [7, 27] et leurs références).

Au contraire, si $h_{\mathbf{q}}$ n'est pas issue d'un produit scalaire sur \mathcal{D} , le problème (1.1) rentre dans le cas plus-général des *problèmes sous-Finslériens*.

Une définition rigoureuse du problème sous-Finslérien se trouve dans [14]. Nous allons la rappeler ci-dessous, adaptée à notre contexte.

Définition 1 Une variété sous-Finslérienne (trivialisée et de rang constant 2) est un triplet $(M, \varphi, \|\cdot\|)$

- M est une variété différentielle
- $\varphi : M \times \mathbb{R}^2 \rightarrow TM$ est un morphisme de classe C^∞ entre fibrés vectoriels, tel que $\varphi(\{\mathbf{q}\} \times \mathbb{R}^2) \subseteq T_{\mathbf{q}}M$ pour tout $\mathbf{q} \in M$

— $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^2

Dans ce contexte, la distribution \mathcal{D} est simplement l'image du morphisme φ et la fonction $h_{\mathbf{q}}$ est définie par

$$h_{\mathbf{q}}(X) = \inf\{\|v\| : \varphi(\mathbf{q}, v) = X\}$$

Nous remarquons que, étant donnée une base orthonormale $\{e_1, e_2\}$ de \mathbb{R}^2 , le morphisme φ permet d'identifier 2 champs de vecteurs f, g définis par $f(\mathbf{q}) = \varphi(\mathbf{q}, e_1)$, $g(\mathbf{q}) = \varphi(\mathbf{q}, e_2)$. Grâce à ce fait, la norme induite sur \mathcal{D} peut être écrite comme il suit

$$h_{\mathbf{q}}(X) = \|(\alpha, \beta)\| \quad \text{pour } X = \alpha f(\mathbf{q}) + \beta g(\mathbf{q}).$$

En utilisant la Définition 1, nous pouvons définir la notion de métrique sous-Finslérienne L^1 .

Définition 2 Soit M une variété différentielle de dimension 3. Une métrique sous-Finslérienne L^1 de rang 2 est une structure sous-Finslérienne $(M, \varphi, \|\cdot\|)$ telle que $\|(v_1, v_2)\| = \|(v_1, v_2)\|_1 = |v_1| + |v_2| \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque 1 Soit $(M, \varphi, \|\cdot\|_1)$ une structure sous-Finslérienne de rang 2, munie d'une métrique SF L^1 . Soient $f(\cdot) = \varphi(\cdot, e_1)$, $g(\cdot) = \varphi(\cdot, e_2)$, où $\{e_1, e_2\}$ sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 . Nous avons que

$$\begin{aligned} h_{\mathbf{q}}(f(\mathbf{q})) &= h_{\mathbf{q}}(g(\mathbf{q})) = 1 \quad \forall \mathbf{q} \in M \\ h_{\mathbf{q}}(X) &= |\alpha| + |\beta| \quad \text{pour } X = \alpha f(\mathbf{q}) + \beta g(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

1.1 Le problème sous-Finslérien comme un problème de contrôle optimal

Dans la suite, M sera munie d'une structure sous-Finslérienne L^1 de rang 2, et f, g sont les champs de vecteurs définis comme dans la Remarque 1. Au vu des notions définies ci-dessus, nous pouvons reformuler le problème de trouver la distance entre deux points $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$ comme le problème de minimisation de la fonctionnelle

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^1 |u_1(t)| + |u_2(t)| dt \quad (1.2)$$

sur tout les fonctions $\mathbf{u} = (u_1, u_2) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mesurables et L^1 telles que les trajectoires du système de contrôle

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = (u_1(t)f + u_2(t)g) \circ \boldsymbol{\xi}(t) \quad (1.3)$$

satisfont les conditions aux limites $\boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{q}_0$ et $\boldsymbol{\xi}(1) = \mathbf{q}_1$.

Tout d'abord, il faut vérifier si, pour chaque couple de points $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)$, le minimum du problème (1.2)-(1.3) est atteint. Pour cela faire, deux conditions doivent être vérifiées :

- (a) il existe au moins une trajectoire solution de (1.3) qui satisfait aux conditions au bord.

(b) le minimum existe et il est atteint.

La condition (a) peut être reformulée dans le langage de la théorie du contrôle en disant que \mathbf{q}_1 appartient à l'ensemble atteignable de (1.3) à partir de \mathbf{q}_0 . En particulier, si le système est contrôlable, c'est-à-dire, si, pour tout $\mathbf{q}_0 \in M$, l'ensemble atteignable à partir de \mathbf{q}_0 est égal à M , alors la condition (a) est automatiquement vérifiée pour tout couple $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)$ (pour une exposition détaillée des notions d'ensemble atteignable et de contrôlabilité, nous nous référons à la monographie [6]).

Nous allons introduire la condition suivante :

Hypothèse 1 Pour tout $\mathbf{q} \in M$, $\text{span}\{f(\mathbf{q}), g(\mathbf{q}), [f, g](\mathbf{q})\} = T_{\mathbf{q}}M$.

L'Hypothèse 1 peut être aussi formulée comme il suit : l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs f et g est de rang maximal (c'est-à-dire, en tout point elle coïncide avec $T_{\mathbf{q}}M$; cette condition est aussi connue comme *Lie Algebraic Rank Condition (LARC)* ; *condition de Hormander* ; *condition de non-holonomie*) et de step 2 (voir par exemple la monographie [24]). Le résultat suivant est une simple réécriture du célèbre Théorème de Rashevski-Chow ([6, 7, 24]).

Proposition 1 Sous l'Hypothèse 1, pour tout point $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1 \in M$ il existe une trajectoire admissible $\xi : [0, 1] \rightarrow M$ du système (1.3) telle que $\xi(0) = \mathbf{q}_0$ et $\xi(1) = \mathbf{q}_1$.

De plus, le problème est localement contrôlable en temps petit (STLC).

Pour ce qui concerne la condition (b), un façon classique d'établir l'existence du minimum est appliquer le Théorème de Filippov (tel qu'il est formulé dans [6]). Toutefois, dans ce cas ceci n'est pas possible, à cause du fait que les contrôles ne sont pas bornés et qu'on n'a pas des bornes uniformes sur les trajectoires. Ce deuxième problème n'en est plus en si nous nous concentrons seulement sur des points finaux \mathbf{q}_1 qui appartiennent à un voisinage de \mathbf{q}_0 . Pour remédier au premier, nous allons appliquer un reparamétrage par longueur d'arc et transformer le problème en problème de temps minimal. En effet, soit $\xi : [0, 1] \rightarrow M$ une trajectoire du système de contrôle (1.3), et soit (u_1, u_2) sa commande. Définissons

$$\tau(t) = \int_0^t |u_1(s)| + |u_2(s)| ds, \quad t \in [0, 1].$$

Nous avons que

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{u_1(t(\tau))}{|u_1(t(\tau))| + |u_2(t(\tau))|} f(\xi(t(\tau))) + \frac{u_2(t(\tau))}{|u_1(t(\tau))| + |u_2(t(\tau))|} g(\xi(t(\tau)))$$

et

$$\tau(1) = \int_0^1 |u_1(s)| + |u_2(s)| ds.$$

Remarque 2 Ci-dessus, nous avons supposé, sans perte de généralité, que $|u_1(s)| + |u_2(s)| \neq 0$ pour tout $s \in [0, 1]$. Ceci est possible, grâce au fait que le système est linéaire par rapport au contrôle.

Le problème de contrôle optimal (1.2)-(1.3) devient ainsi

$$\text{minimiser } T \text{ sujet à} \quad (1.4a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = u_1(t)f(\boldsymbol{\xi}(t)) + u_2(t)g(\boldsymbol{\xi}(t)), \quad (1.4b)$$

$$\boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \boldsymbol{\xi}(T) = \mathbf{q}_1, \quad (1.4c)$$

$$\mathbf{u}(\cdot) : [0, T] \rightarrow Q \quad \text{mesurable}, \quad (1.4d)$$

où $Q = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : |u_1| + |u_2| \leq 1\}$ et le temps final T est libre. Nous remarquons que l'ensemble Q est compact et convexe.

1.1.1 Le Principe de Maximum du Pontryagin

Dans cette section, nous allons supposer que le minimum (1.4a) du problème (1.4) est atteint, au moins pour un couple de points $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$.

Le célèbre Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) (voir par exemple [6, 7]) constitue une condition nécessaire pour l'optimalité d'une trajectoire admissible du système (1.4b)-(1.4c)-(1.4d). Nous n'allons pas l'énoncer dans sa formulation plus générale, mais dans celle plus adaptée à notre problème.

Soit $\boldsymbol{\ell} \in T^*M$; nous définissons le pre-Hamiltonien (ou Hamiltonien dépendant du contrôle) $h : T^*M \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ comme il suit :

$$h(\boldsymbol{\ell}, \mathbf{u}) = u_1 F(\boldsymbol{\ell}) + u_2 G(\boldsymbol{\ell}),$$

où $F(\boldsymbol{\ell}) = \langle \boldsymbol{\ell}, f(\mathbf{q}) \rangle$ et $G(\boldsymbol{\ell}) = \langle \boldsymbol{\ell}, g(\mathbf{q}) \rangle$ et $\pi(\boldsymbol{\ell}) = \mathbf{q}$.

Soit σ la structure symplectique canonique sur T^*M (voir par exemple [1, 25]). Pour tout $\mathbf{u} \in Q$ fixé, le champ Hamiltonien associé au pré-Hamiltonien $h(\cdot, \mathbf{u})$, noté par $\vec{h}(\mathbf{u}, \cdot)$, est le champ de vecteurs sur $T(T^*M)$ défini par l'identité

$$\sigma(X, \vec{h}(\boldsymbol{\ell}, \mathbf{u})) = \langle dh(\boldsymbol{\ell}, \mathbf{u}), X \rangle \quad \forall X \in T_{\boldsymbol{\ell}}(T^*M), \quad \boldsymbol{\ell} \in T^*M.$$

Remarque 3 Soient (\mathbf{p}, \mathbf{x}) des coordonnées canoniques sur T^*M . Alors $\sigma = \sum_{i=1}^3 dp_i \wedge dx_i$ et

$$\vec{h}(\boldsymbol{\ell}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h(\boldsymbol{\ell}, \mathbf{u})}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial h(\boldsymbol{\ell}, \mathbf{u})}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Nous sommes prêts à énoncer le Principe du Maximum de Pontryagin :

Théorème 1 (PMP) Soit $\hat{\boldsymbol{\xi}} : [0, T] \rightarrow M$ la solution du problème (1.4), et soit $\hat{\mathbf{u}}$ la commande associée à $\hat{\boldsymbol{\xi}}$. Alors ils existent une courbe Lipschitzienne $\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t) : [0, T] \rightarrow T^*M$ et une constante $\nu \in \{0, 1\}$ telles que

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t) \in T_{\hat{\boldsymbol{\xi}}(t)}^* M \quad \forall t \in [0, T]$$

$$(\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t), \nu) \neq (0, 0) \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.5a)$$

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \vec{h}(\hat{\mathbf{u}}(t), \hat{\boldsymbol{\lambda}}(t)) \quad p.p. t \in [0, T] \quad (1.5b)$$

$$h(\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) = \max_{\mathbf{v} \in Q} h(\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t), \mathbf{v}) \quad p.p. t \in [0, T] \quad (1.5c)$$

$$h(\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) \equiv \nu \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.5d)$$

Définition 3 Une courbe Lipschitzienne $\lambda : [0, T] \rightarrow T^*M$ qui satisfait les équations (1.5) est dite une extrémale du problème (1.4).

Si $\nu = 1$, λ est dite extrémale normale ; sinon, λ est dite extrémale anormale.

Définition 4 Les trajectoires qui satisfont le PMP (c'est-à-dire, les projections des extrémales) sont appelées géodésiques du problème.

En géométrie sous-Riemannienne et, plus en général, en contrôle optimal, l'existence et l'optimalité des trajectoires issues d'extrémales anormales est un problème délicat. Néanmoins, grâce à l'Hypothèse 1, nous pouvons démontrer que tous les extrémales sont normales.

Lemme 1 Soit $\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{q}_1$. Sous l'Hypothèse 1, le problème (1.4) n'admet pas d'extrémales anormales.

Preuve. Par l'absurde, nous supposons que $\lambda : [0, T] \rightarrow T^*M$ est une extrémale anormale pour le problème (1.4), et qu'elle soit associée à la commande \mathbf{u} .

Grâce à l'équation (1.5d), nous avons que $u_1(t)F(\lambda(t)) + u_2(t)G(\lambda(t)) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$. L'équation (1.5c) nous implique alors que $F(\lambda(t)) = G(\lambda(t)) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Soit (\mathbf{p}, \mathbf{x}) un système de coordonnées canoniques sur T^*M . Alors, en utilisant (1.5b), nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(\lambda(t)) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial p_i} \left(-u_1 \frac{\partial F}{\partial x_i} - u_2 \frac{\partial G}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial x_i} \left(u_1 \frac{\partial F}{\partial p_i} + u_2 \frac{\partial G}{\partial p_i} \right) \\ &= u_2 \sum_{i,j=1}^3 p_j \frac{\partial(f)_j}{\partial x_i} (g)_i - p_j \frac{\partial(g)_j}{\partial x_i} (f)_i, \end{aligned} \quad (1.6)$$

où $(f)_i$ et $(g)_i$ dénotent, respectivement, la i -ème composante des vecteurs f et g . L'équation (1.6) est l'expression en coordonnées de la quantité $u_2(t)\langle \lambda(t), [f, g](\pi(\lambda(t))) \rangle$.

Comme $F(\lambda(t)) \equiv 0$, sa dérivée temporelle doit être nulle aussi, ce qui implique que $\langle \lambda(t), [f, g](\pi(\lambda(t))) \rangle \equiv 0$.

Comme f, g et $[f, g]$ constituent une base de l'espace tangent à M (en tout point), et à cause de l'équation (1.5a), ceci impose $u_2 \equiv 0$.

En répétant le même raisonnement pour la condition $G(\lambda(t)) \equiv 0$, nous trouvons que $u_1 \equiv 0$. Alors la trajectoire associée à λ est identiquement égale à \mathbf{q}_0 , donc elle ne satisfait pas aux conditions au bord du problème de contrôle. \square

Corollaire 1 Soit $\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{q}_1$. Soit l'Hypothèse 1. Soit $\lambda : [0, T] \rightarrow T^*M$ une extrémale du problème (1.4), et soit \mathbf{u} un contrôle associé. Alors pour presque tout $t \in [0, T]$, $|u_1(t)| + |u_2(t)| = 1$.

Autrement dit, pour presque tout $t \in [0, T]$, $\mathbf{u}(t)$ appartient à la frontière de Q .

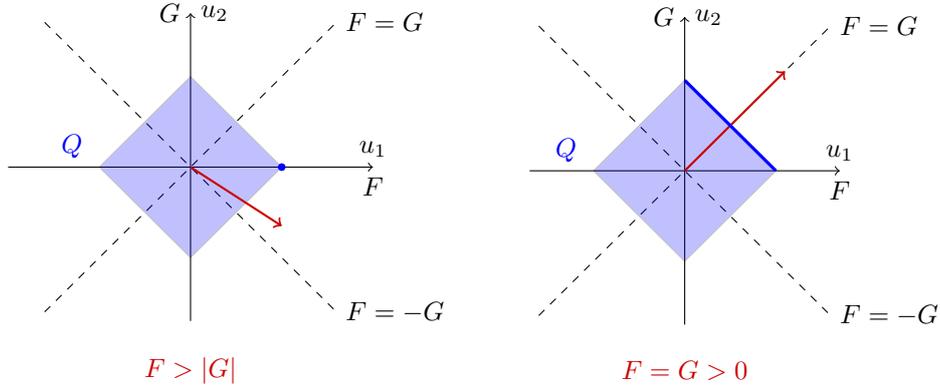


FIGURE 1.1 – Contrôles bang (à gauche) et singuliers (à droite). En rouge nous affichons le vecteur de composantes (F, G) , en bleu, la valeur de $\mathbf{u} \in Q$ qui maximise le produit $u_1 F + u_2 G$.

Preuve. Grâce au Lemme 1, nous avons que, pour tout $t \in [0, T]$, $(F(\boldsymbol{\lambda}(t)), G(\boldsymbol{\lambda}(t))) \neq (0, 0)$. Supposons que $|u_1(t)| + |u_2(t)| = c < 1$ pour un certain t . Alors il existe $\alpha > 1$ tel que $\alpha(|u_1(t)| + |u_2(t)|) \leq 1$, et $\alpha u_1(t)F(\boldsymbol{\lambda}(t)) + \alpha u_2(t)G(\boldsymbol{\lambda}(t)) > u_1(t)F(\boldsymbol{\lambda}(t)) + u_2(t)G(\boldsymbol{\lambda}(t))$, ce qui contredit la condition (1.5c). \square

Le PMP nous dit que la valeur du contrôle associé à une extrémale est déterminée par les valeurs relatives des fonction F et G , le long de l'extrémale même (une illustration du mécanisme est donnée à la Figure 1.1). En effet, soit $I \subset [0, T]$ un intervalle (non trivial), et $\boldsymbol{\lambda} : I \rightarrow T^*M$ une extrémale du problème (1.4); le PMP impose que

- si $|F(\boldsymbol{\lambda}(t))| \neq |G(\boldsymbol{\lambda}(t))| \forall t \in I$, alors, sur l'intervalle I , le contrôle prend des valeurs sur les “sommets” de Q (c'est-à-dire, les points $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$). Par exemple, si $F(\boldsymbol{\lambda}(t)) > |G(\boldsymbol{\lambda}(t))|$, alors $\mathbf{u} = (1, 0)$. Dans ce cas, $\boldsymbol{\lambda}|_I$ est dit un *arc de type bang régulier*.
- si $|F(\boldsymbol{\lambda}(t))| = |G(\boldsymbol{\lambda}(t))| \forall t \in I$, alors, sur l'intervalle I , le contrôle prend des valeurs sur les “cotés” de Q ; en particulier, il n'est pas déterminé de façon unique. En effet, imaginons que $F(\boldsymbol{\lambda}(t)) = G(\boldsymbol{\lambda}(t)) > 0 \forall t \in I$: alors tout contrôle de la forme $(\alpha, 1 - \alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$, réalise un maximum de l'équation (1.5c). Dans ce cas, $\boldsymbol{\lambda}|_I$ est dit *arc singulier*.

Une extrémale est souvent donnée par la concaténation des plusieurs arcs. En effet, nous considérons les deux sous-ensembles du fibré cotangent

$$\begin{aligned} \Sigma_+ &= \{\boldsymbol{\ell} \in T^*M : F(\boldsymbol{\ell}) - G(\boldsymbol{\ell}) = 0\} \\ \Sigma_- &= \{\boldsymbol{\ell} \in T^*M : F(\boldsymbol{\ell}) + G(\boldsymbol{\ell}) = 0\}. \end{aligned}$$

En appliquant, par exemple, [25, Theorem 5.22], il est possible de montrer que Σ_+ et Σ_- sont deux sous-variétés différentielles de codimension 1 et $\Sigma_- \cap \Sigma_+$ est une sous-variété différentielle de codimension 2 de T^*M .

En particulier, pour tout $\boldsymbol{\ell} \in \Sigma_-$ (respectivement, $\boldsymbol{\ell} \in \Sigma_+$), nous avons que

$$\begin{aligned} T_{\boldsymbol{\ell}}\Sigma_+ &= \{X \in T_{\boldsymbol{\ell}}(T^*M) : \langle d(F - G)(\boldsymbol{\ell}), X \rangle = 0\} \\ T_{\boldsymbol{\ell}}\Sigma_- &= \{X \in T_{\boldsymbol{\ell}}(T^*M) : \langle d(F + G)(\boldsymbol{\ell}), X \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

Soit $\lambda : [0, T] \rightarrow T^*M$ une extrémale du problème (1.4) telle que $\lambda(t) \in T^*M \setminus (\Sigma_+ \cup \Sigma_-)$ pour tout t . Il en suit que le contrôle associé à λ est constant et prend valeurs sur un “sommets” de Q (c’est-à-dire, λ est un arc bang). D’autre part, une extrémale totalement singulière est contenue dans Σ_+ ou Σ_- (aucune extrémale peut passer par $\Sigma_+ \cap \Sigma_-$: ceci entraînerait $F = G = 0$, soit une violation du PMP).

Les deux situations ci décrites n’épuisent pas tous les cas possibles, car les fonctions $F - G$ et $F + G$ peuvent changer de signe le long d’une extrémale. Imaginons par exemple qu’une extrémale traverse la variété Σ_+ , c’est-à-dire, ils existent $t_0 \in (0, T)$ et $\epsilon > 0$ tels que $F(\lambda(t_0)) = G(\lambda(t_0))$ et

$$((F - G)(\lambda(t)))((F - G)(\lambda(t'))) < 0 \quad \forall t \in (t_0 - \epsilon, t_0), t' \in (t_0, t_0 + \epsilon).$$

Clairement, le contrôle associé à l’extrémale est bien défini sur les deux sous-intervalles $(t_0 - \epsilon, t_0)$ et $(t_0, t_0 + \epsilon)$, et prend valeurs sur deux “sommets” de Q . En particulier, on ne peut pas avoir $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{u}(t')$, car ceci impliquerait que $F(\lambda(t_0)) = G(\lambda(t_0)) = 0$, ce qui est interdit par le PMP. Dans le langage de la théorie du contrôle, on dit que *le contrôle commute (switch)*. Le temps t_0 est alors dit *temps de commutation (switching time)*. Pour cela, Σ_+ et Σ_- sont dites les *surfaces de commutation* et F, G (ou $F - G$ et $F + G$) les *fonctions de commutation*.

Les dérivées par rapport au temps des fonctions de commutation (le long d’une extrémale) sont données par les équations suivantes :

$$\frac{d}{dt}F(\lambda(t)) = -u_2(t)\Theta(\lambda(t)), \quad \frac{d}{dt}G(\lambda(t)) = u_1(t)\Theta(\lambda(t)), \quad (1.7)$$

où

$$\Theta(\ell) = \{F, G\}(\ell) = \langle \ell, [f, g](\pi(\ell)) \rangle.$$

Nous terminons la section avec le résultat suivant.

Lemme 2 *Soit $\lambda : [0, T] \rightarrow T^*M$ une extrémale associé au problème (1.4), et soit $I = [t_1, t_2] \subset [0, T]$ tel que $\lambda|_I$ est un arc singulier. Alors $\Theta(\lambda(t)) = 0$ pour tout $t \in I$.*

Preuve. Sans perte de généralité, nous allons supposer que $F(\lambda(t)) = G(\lambda(t)) > 0$ pour tout $t \in I$. Les autres cas peuvent être prouvés de façon équivalente.

En utilisant les équations (1.7), nous obtenons que

$$0 = \frac{d}{dt}(F - G)(\lambda(t)) = -(u_1(t) + u_2(t))\Theta(\lambda(t)).$$

Assumons par l’absurde qu’il existe $t' \in (t_0, t_1)$ tel que $\Theta(\lambda(t')) \neq 0$, ce qui implique, par la continuité de l’extrémale, qu’il existe un $\epsilon > 0$ tel que $\Theta(\lambda(t)) \neq 0$ pour tout $t \in (t' - \epsilon, t' + \epsilon)$. Alors il faut que $u_1(t) + u_2(t) = 0$ pour tout $t \in (t' - \epsilon, t' + \epsilon)$, ce qui contredit le PMP, qui impose $u_1(t) + u_2(t) = 1$ pour $t \in I$. \square

1.1.2 Optimalité globale et optimalité locale

Soit $\xi : [0, T] \rightarrow M$ une trajectoire temps-minimisante entre les points $\mathbf{q}_0 = \xi(0)$ et $\mathbf{q}_1 = \xi(T)$. Il est évident que, pour tout couple $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b \in \{\xi(t) : t \in [0, T]\}$,

ξ est temps-minimisante entre \mathbf{q}_a et \mathbf{q}_b . Le contraire n'est pas toujours vrai : il se peut qu'une trajectoire ξ définie sur un intervalle $[0, T]$ soit temps-minimisante entre $\xi(0)$ et $\xi(t)$ pour $t \leq t^* < T$. Les deux exemples ci-dessus (issus de la géométrie Riemannienne) illustrent le phénomène.

Exemple 1 Nous considérons la sphère unitaire $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ et la courbe $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow S^2$ définie par $\gamma(t) = (0, \sin t, \cos t)$. Il est évident que γ minimise la longueur entre $\gamma(0)$ (le pôle nord) et $\gamma(t)$ pour tout $t \in [0, \pi]$. Il est aussi possible aussi de vérifier que, si $t < \pi$, γ est la *seule* courbe qui minimise la longueur entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$, alors que toutes les courbes $\xi_\alpha = (\cos \alpha \sin t, \sin \alpha \sin t, \cos t)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, minimisent la longueur entre les points $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$.

D'autre part, si $t > \pi$, γ n'est pas minimisante entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$: en effet, la longueur de γ entre ces deux points est t , alors que leur distance est $2\pi - t$.

Exemple 2 Considérons maintenant le cylindre (infini) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ et la courbe $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow C$ définie par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Il est évident que γ minimise la longueur entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$ pour tout $t \in [0, \pi]$ et que, si $t < \pi$, γ est l'unique courbe qui minimise la longueur entre les deux points. Les courbes qui minimisent la distance entre $(1, 0, 0)$ et $(-1, 0, 0)$ sont deux, c'est-à-dire, γ et η , définie par $\eta(t) = (\cos t, -\sin t, 0)$. Comme dans l'exemple précédent, γ n'est plus minimisante entre $(1, 0, 0)$ et tout point du type $\gamma(t)$, $t > \pi$.

Les deux exemples ci-dessus nous montrent deux types différents de perte d'optimalité. Dans l'Exemple 2, la courbe γ cesse d'être optimale au temps $t = \pi$ lorsqu'elle elle croise une autre courbe (η), de la même longueur, qui relie $(1, 0, 0)$ et $(-1, 0, 0)$. Considérons, par exemple, le point $\mathbf{q}_\epsilon = (\cos(\pi + \epsilon), \sin(\pi + \epsilon), 0)$, pour un certain $0 < \epsilon \ll \pi$; clairement, γ n'est pas optimale entre \mathbf{q}_0 et \mathbf{q}_ϵ (η l'est), mais, si l'on se restreint aux courbes qui sont "proches" de γ , alors γ est optimale. Plus précisément : il existe un voisinage \mathcal{U} du graphe de γ dans la topologie uniforme tel que γ est la courbe qui minimise la distance entre \mathbf{q}_0 et \mathbf{q}_ϵ parmi toutes les courbes dont le graphe est contenu en \mathcal{U} . En théorie du contrôle optimal, on dit que γ est *globalement optimale* entre \mathbf{q}_0 et $(-1, 0, 0)$ et *localement optimale* entre \mathbf{q}_0 et \mathbf{q}_ϵ .

Le point où une géodésique cesse d'être (globalement) optimal s'appelle *point de coupure* (*cut point*). Plus précisément, en suivant la terminologie adoptée dans [7, 11], nous définissons le point et le temps de coupure comme il suit :

Définition 5 Soit ξ une courbe admissible du système (1.4b). Nous définissons

$$t_{\text{cut}}(\xi) = \sup \{t > 0 : \xi|_{[0,t]} \text{ est temps-minimisante}\}.$$

Si $t_{\text{cut}}(\xi) < +\infty$, nous disons que $\xi(t_{\text{cut}})$ est le point de coupure (cut point) associé à $\xi(0)$ le long de ξ .

Nous appelons lieu de coupure (cut locus) (du point \mathbf{q}_0) l'ensemble de tous les points de coupure des géodésiques qui démarrent de $\mathbf{q}_0 \in M$.

Définition 6 D'après la terminologie de Arnold ([13]), nous appelons points de Maxwell les points qui sont atteint au même temps par plusieurs géodésiques (qui partagent la même condition initiale).

L'ensemble de tous les points de Maxwell associés à la même condition initiale $\mathbf{q}_0 \in M$ est appelé lieu de Maxwell associé au point \mathbf{q}_0 .

Dans l'Exemple 2, $(-1, 0, 0)$ est un point de Maxwell associé au point $(1, 0, 0)$ et un point de coupure de la géodésique γ . Pareil, dans l'Exemple 1, $(0, 0, -1)$ est un point de Maxwell associé au point $(0, 0, 1)$ et un point de coupure de la géodésique γ .

Comme en optimisation, en contrôle optimal aussi la notion d'optimalité locale est aussi très intéressante et digne d'être investiguée. Tout d'abord, il faut préciser dans quelle topologie on souhaite regarder l'optimalité : en effet, en littérature, plusieurs notions d'optimalité locale sont considérées (voir par exemple [7, 28]). Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'optimalité locale *forte*, définie comme il suit.

Définition 7 Soit $\xi : [0, T] \rightarrow M$ une trajectoire admissible du système (1.3). Nous disons que ξ est localement optimal dans la topologie forte s'il existe un voisinage \mathcal{U} de son graphe en $[0, T] \times M$ dans la topologie $C^0([0, T], M)$ tel que ξ est temps-minimisante par rapport à toutes les trajectoires admissibles dont le graphe est contenu en \mathcal{U} .

En géométrie sous-Riemannienne et pour certains problèmes de contrôle optimal, la méthode usuelle pour détecter la perte d'optimalité locale (forte) est d'étudier l'inversibilité de l'application exponentielle (voir par exemple [3, 4, 6, 7, 9, 17]). En particulier, les *points conjugués* sont définis comme les points où la différentielle de l'application exponentielle est singulière.

Ci-dessous, nous rappelons brièvement la notion d'application exponentielle pour un problème de contrôle assez régulier (pour une définition plus rigoureuse, nous nous référons à [9, Équation 2.6]). Considérons un problème de contrôle optimal pour lequel le Hamiltonien maximisé H_{\max} (voir [6]) est de classe C^2 , et notons par \vec{H}_{\max} son champ Hamiltonien associé. Comme le Hamiltonien est constant le long des extrémales, nous pouvons nous restreindre à une surface de niveau du Hamiltonien, c'est-à-dire $H_{\max}^{-1}(c)$, pour un certain c .

L'application exponentielle à partir du point \mathbf{q}_0 et au temps $t > 0$ est la fonction

$$\begin{aligned} \text{Exp} : T_{\mathbf{q}_0}^* M \cap \{H_{\max}^{-1}(c)\} &\rightarrow M \\ \ell_0 &\mapsto \pi(\exp(t\vec{H}_{\max})(\ell_0)), \end{aligned}$$

où $\exp(t\vec{H}_{\max})(\ell_0)$ est la solution au temps t du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\ell} = \vec{H}_{\max}(\ell) \\ \ell(0) = \ell_0. \end{cases}$$

Malheureusement, dans les cas que nous sommes en train de considérer, l'application exponentielle n'est pas bien définie sur tout T^*M , et, en généralité, elle est lisse par morceaux.

En effet, considérons une extrémale $\lambda : [0, T] \rightarrow T^*M$ du problème (1.4) composée par $m + 1$ arcs de type bang ($m > 1$) réguliers. Plus précisément, nous supposons qu'ils existent m temps $0 < t_1 < \dots < t_m < T$ tels que

$$\begin{aligned} |F(\lambda(t))| &\neq |G(\lambda(t))| & \forall t \in [0, t], \quad t \neq t_k \quad \forall k \leq m, \\ |F(\lambda(t_k))| &= |G(\lambda(t_k))| & \forall k \leq m. \end{aligned}$$

Nous supposons aussi que les intersections soient *transverses*, c'est-à-dire, $\frac{d}{dt}(F - G)(\boldsymbol{\lambda}(t_k)) \neq 0$ lorsque $F(\boldsymbol{\lambda}(t_k)) = G(\boldsymbol{\lambda}(t_k))$ (respectivement, $\frac{d}{dt}(F + G)(\boldsymbol{\lambda}(t_k)) \neq 0$ lorsque $F(\boldsymbol{\lambda}(t_k)) = -G(\boldsymbol{\lambda}(t_k))$).

Soient $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{m+1}$ les contrôles associés à $\boldsymbol{\lambda}$ dans les sous-intervalles $(0, t_1), \dots, (t_m, T)$, c'est-à-dire,

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}(t)}{dt} = \vec{h}(\mathbf{u}^k, \boldsymbol{\lambda}(t)) \quad \forall t \in (t_{k-1}, t_k) \quad \forall k.$$

Nous rappelons que, comme il s'agit d'une extrémale de type bang-bang, nous avons que $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{m+1} \in \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$.

Choisissons maintenant $\epsilon \in (0, t_1)$ et un ouvert $\mathcal{V} \subset T^*M$ qui contient les points de la forme $\{\boldsymbol{\lambda}(t) : t \in [0, t_1 - \epsilon]\}$. Si \mathcal{V} est assez petit, nous avons que le Hamiltonien maximisé est bien défini sur \mathcal{V} , en effet :

$$h(\boldsymbol{\ell}, \mathbf{u}^1) = \max_{\mathbf{v} \in Q} h(\boldsymbol{\ell}, \mathbf{v}) \quad \forall \boldsymbol{\ell} \in \mathcal{V}.$$

Au contraire, n'importe quel voisinage de l'ensemble $\{\boldsymbol{\lambda}(t) : t \in [0, t_1 + \epsilon]\}$ intersecte une des surfaces de commutation, sur laquelle le Hamiltonien maximisé est bien défini, mais son flot ne l'est pas; en effet, imaginons, sans perte de généralité, que $F(\boldsymbol{\lambda}(t_1)) = G(\boldsymbol{\lambda}(t_1)) > 0$, c'est-à-dire, $\boldsymbol{\lambda}$ traverse la surface Σ_+ . Pour tout point $\boldsymbol{\ell} \in \Sigma_+$, nous avons que

$$\max_{\mathbf{v} \in Q} h(\boldsymbol{\ell}, \mathbf{v}) = \alpha F(\boldsymbol{\ell}) + (1 - \alpha)G(\boldsymbol{\ell}) = F(\boldsymbol{\ell}) = G(\boldsymbol{\ell}) \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Par contre, le champ de vecteurs $\alpha \vec{F}(\boldsymbol{\ell}) + (1 - \alpha)\vec{G}(\boldsymbol{\ell})$ n'est pas constant par rapport à α ; le champ associé à $\max_{\mathbf{v} \in Q} h(\boldsymbol{\ell}, \mathbf{v})$ n'est pas bien défini.

Afin de pouvoir définir un flot Hamiltonien autour de l'extrémale $\boldsymbol{\lambda}$, nous allons prouver le résultat suivant.

Lemme 3 *Soient $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{\lambda}(0)$ et $\mathbf{q}_0 = \pi(\boldsymbol{\ell}_0)$. Ils existent un voisinage \mathcal{U} de $\boldsymbol{\ell}_0$ dans $T_{\mathbf{q}_0}^*M$ et m fonctions t_k , $k = 1, \dots, m$, $t_k \in C^\infty(\mathcal{U}, [0, T])$, tels que $t_k(\boldsymbol{\ell}_0) = t_k$ et, pour tout $\boldsymbol{\ell} \in \mathcal{U}$, il existe une extrémale de type bang-bang $\boldsymbol{\lambda}_\boldsymbol{\ell} : [0, T] \rightarrow T^*M$ avec $\boldsymbol{\lambda}_\boldsymbol{\ell}(0) = \boldsymbol{\ell}$ et telle que*

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}_\boldsymbol{\ell}(t)}{dt} = \vec{h}(\mathbf{u}^k, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_\boldsymbol{\ell}(t)) \quad \forall t \in (t_{k-1}(\boldsymbol{\ell}), t_k(\boldsymbol{\ell})).$$

Preuve. Sans perte de généralité, nous supposons que $F(\boldsymbol{\ell}_0) > |G(\boldsymbol{\ell}_0)|$. Soit $\varphi_1 : T_{\mathbf{q}_0}^*M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_1(\boldsymbol{\ell}, t) = (F - G) \circ \exp(t\vec{F})(\boldsymbol{\ell}).$$

Par hypothèse, $\varphi_1(\boldsymbol{\ell}_0, t_1) = 0$ et $\frac{d}{dt}\varphi_1(\boldsymbol{\ell}_0, t_1) \neq 0$. Nous pouvons appliquer le Théorème de la fonction implicite et conclure qu'ils existent un voisinage \mathcal{U} et une fonction $t_1 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ comme dans l'énoncé du Lemme.

Sans perte de généralité, supposons que $\frac{d}{dt}\varphi_1(\boldsymbol{\ell}_0, t_1)$ soit négative; ceci implique que $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \vec{G}(\boldsymbol{\lambda}(t))$ pour $t \in (t_1, t_2)$. Définissons la fonction $\varphi_2 : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ comme il suit

$$\varphi_2(\boldsymbol{\ell}, t) = (F + G) \circ \exp((t - t_1(\boldsymbol{\ell}))\vec{G}) \circ \exp(t_1(\boldsymbol{\ell})\vec{F})(\boldsymbol{\ell}).$$

Par hypothèse sur λ , nous avons que $\varphi_2(\ell_0, t_2) = 0$ et $\frac{d}{dt}\varphi_2(\ell_0, t_2) \neq 0$; nous pouvons appliquer à nouveau le Théorème de la fonction implicite et déduire qu'il existent un voisinage \mathcal{U}' de ℓ_0 contenu en \mathcal{U} et une fonction $t_2 : \mathcal{U}' \rightarrow \mathbb{R}$ comme dans la thèse du Lemme.

Nous procédons de la même façon pour tous les autres t_k . Le Lemme est prouvé. \square

Éventuellement rétrécissant \mathcal{U} et prenant un T plus petit, nous pouvons définir l'application exponentielle sur l'ensemble $\mathcal{U} \times [0, T]$, comme il suit

$$\text{Exp}(\ell, t) = \begin{cases} \exp((u_1^1 f + u_2^1 g)t)(\mathbf{q}_0) & \text{si } t \in [0, t_1(\ell)] \\ \exp((u_1^k f + u_2^k g)(t - t_{k-1}(\ell))) \circ \text{Exp}(\ell, t_{k-1}(\ell))(\mathbf{q}_0) & \text{sit } t \in [t_{k-1}(\ell), t_k(\ell)], \\ & 2 \leq k \leq m. \end{cases} \quad (1.8)$$

L'application (1.8) est C^∞ sur $\mathcal{U} \times [0, T]$, sauf au points de la forme $(\ell, t_k(\ell))$, $k = 1, \dots, m$. En effet, pour tout (ℓ, t) de cette forme, l'espace $\{(\delta p, \delta t) \in T_\ell(T_{\pi(\ell)}^* M) \times \mathbb{R}\}$ est divisé, par l'hyperplan $\{\delta t = \langle dt_k(\ell), \delta p \rangle\}$, en deux demi-espaces, sur lesquels l'application différentielle de la fonction (1.8) assume des expressions analytiques différentes (sur l'hyperplan, les deux applications coïncident). Donc, afin de détecter les temps pour lesquels l'application exponentielle perd son inversibilité, il faut traiter les cas séparément.

Remarque 4 *Avant de poursuivre, nous remarquons que la condition (1.5d) nous impose de nous restreindre à l'ensemble $h(\ell, \mathbf{u}) = 1$, c'est-à-dire, à l'ensemble $\mathcal{H}_1 = \{\ell \in T^*M : |F(\ell)| = 1\} \cup \{\ell \in T^*M : |G(\ell)| = 1\}$. Par construction, l'ensemble \mathcal{U} sur lequel l'application exponentielle est définie n'intersecte pas $\{\ell \in T^*M : F(\ell) = G(\ell) = 1\}$. Dans l'ensemble $\mathcal{U} \cap \mathcal{H}_1$, l'espace tangent à \mathcal{H}_1 est soit l'espace tangent à $\{\ell \in T^*M : F(\ell) = 1\}$ (si $F = 1$), soit l'espace tangent à $\{\ell \in T^*M : G(\ell) = 1\}$ (si $G = 1$).*

Lemme 4 *Soit $\lambda : [0, T] \rightarrow T^*M$ une extrémale de type bang-bang régulière. Soit \mathcal{U} un voisinage de $\lambda(0)$ en $T_{\lambda(0)}\mathcal{H}_1$ telle que l'application exponentielle (1.8) est bien définie sur $\mathcal{U} \times [0, T]$.*

Pour tout $(\ell, t) : t \leq t_2(\ell)$, $D\text{Exp}(\ell, t)$ est singulière.

Preuve. Soient $\ell_0 = \lambda(0)$ et $\mathbf{q}_0 = \pi(\ell_0)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $F(\ell_0) > |G(\ell_0)|$. En particulier,

$$T_{\ell_0}\mathcal{H}_1 = \{\delta p \in T_{\ell_0}(T_{\mathbf{q}_0}^* M) : \langle dF(\ell_0), \delta p \rangle = 0\}.$$

Pour $t \leq t_1(\ell)$, $\text{Exp}(\ell, t)$ ne dépend pas explicitement de ℓ , et la thèse du Lemme est prouvée.

D'autre part, si $t \in (t_1(\ell), t_2(\ell)]$, nous avons que

$$\begin{aligned} D\text{Exp}_{(\ell, t)}[\delta t, \delta p] &= g(\text{Exp}(\ell, t))\delta t \\ &\quad + \langle dt_1(\ell), \delta p \rangle (-g(\text{Exp}(\ell, t)) + \exp((t - t_1(\ell)g)_* f(\exp(t_1(\ell))))(\mathbf{q}_0)). \end{aligned}$$

Soit $\delta p \in T_{\ell_0}\mathcal{H}_1$, $\delta p \neq 0$, tel que $\langle dt_1(\ell), \delta p \rangle = 0$, $\delta p \neq 0$; tous les vecteurs de $T_{\ell_0}\mathcal{H}_1 \times [0, T]$ de la forme $(\delta p, 0)$, appartiennent au noyau de $D\text{Exp}_{(\ell, t)}$, comme il est possible de montrer par calcul. \square

Le Lemme 4 semblerait dire qu'aucune géodésique est optimale, ce qui n'est clairement pas vrai : la singularité de $\text{DExp}_{(\ell,t)}$ pour $t < t_2(\ell)$ ne reflète pas une réelle perte d'optimalité ; en effet, en dérivant la fonction φ_1 définie dans la preuve du Lemme 4, nous trouvons

$$\langle dt_1(\ell_0), \delta \mathbf{p} \rangle = - \frac{\langle dG(\boldsymbol{\lambda}(t_1)), \delta \mathbf{p} \rangle}{\Theta(\boldsymbol{\lambda}(t_1))} \quad \forall \delta \mathbf{p} \in \Pi_{\ell_0}.$$

L'Hypothèse 1 implique que $dF \neq dG$, de sorte que $dt_1(\ell_0)$ n'est pas identiquement nul sur $T_{\ell_0} \mathcal{H}_1$. On peut alors choisir des coordonnées locales (p_1, p_2) sur $\mathcal{U} \cap \mathcal{H}_1$ et, en appliquant le théorème de la fonction implicite, prouver qu'il existe une fonction $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , définie localement, telle que $t_1(\ell)$ est constant pour tout ℓ dans un voisinage de ℓ_0 tel que $\ell = (p_1, \eta(p_1))$. Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{U} \cap \mathcal{H}_1$ (éventuellement rétréci) est feuilleté par des courbes de niveau de t_1 . Alors, toutes les géodésiques associées aux extrémals issus des covecteurs appartenant à l'une de ces courbes coïncident jusqu'au deuxième point de commutation. Autrement dit, plusieurs extrémals sont associés à une même géodésique : la singularité de l'application exponentielle ne révèle pas une perte d'optimalité locale des géodésiques.

Ce raisonnement (qui trouvera sa confirmation dans la Section 2.2.1) nous suggère que, pour détecter la perte d'optimalité locale, il vaut mieux se concentrer sur la différentielle de l'application exponentielle *après* le deuxième temps de commutation. Il est bien connu que l'optimalité locale ne peut pas être perdue le long d'un arc bang (voir [28]). Alors, nous nous concentrons sur les temps de commutation, pour lesquels, comme nous avons vu ci-dessus, la différentielle DExp est bien définie seulement sur des demi-plans. Pour étudier l'inversibilité de l'application exponentielle en ces points, nous utilisons le résultat suivant.

Lemme 5 *Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$, et soient A_+, A_- deux matrices carrées de dimension n telles que $A_+ \mathbf{w} = A_- \mathbf{w}$ pour tout \mathbf{w} tel que $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$.*

Soit $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application donnée par

$$A\mathbf{w} = \begin{cases} A_+ \mathbf{w} & \text{si } \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \\ A_- \mathbf{w} & \text{si } \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \leq 0. \end{cases}$$

Alors A est inversible si et seulement si $(\det A_+)(\det A_-) > 0$.

Preuve. Définissons d'abord les deux demi-espaces

$$\begin{aligned} \Pi_+ &= \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \geq 0\} \\ \Pi_- &= \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \leq 0\}. \end{aligned}$$

Supposons que $\det A_+ = 0$; alors A n'est pas injective : en effet, il existe au moins un vecteur $\mathbf{u} \in \Pi_+$ non nul tel que $A_+ \mathbf{u} = 0$, donc, pour tout autre $\mathbf{u}' \in \Pi_+$ nous avons que $A(\mathbf{u}' + \mathbf{u}) = A\mathbf{u}'$. Le même raisonnement s'applique dans le cas où $\det A_- = 0$.

Supposons maintenant que $(\det A_+)(\det A_-) < 0$; tout d'abord, nous observons que les deux matrices A_+ et A_- sont inversibles. Comme $\det A_-^{-1} A_+ = \det(A_+)/\det(A_-) < 0$, la matrice $A_-^{-1} A_+$ a au moins une valeur propre négative μ ; soit \mathbf{w}_μ son vecteur propre correspondant. Nous notons que

$$(A_- - \mu^{-1} A_+) \mathbf{w}_\mu = A_- (\text{id} - \mu^{-1} A_-^{-1} A_+) \mathbf{w}_\mu = 0,$$

soit, $A_- \mathbf{w} = \mu^{-1} A_+ \mathbf{w}$.

Le vecteur \mathbf{w}_μ ne peut pas être orthogonale à \mathbf{v} , car dans ce cas μ devrait être égal à 1. Donc, seulement deux cas sont possibles : soit $\mathbf{w}_\mu \cdot \mathbf{v} < 0$, soit $\mathbf{w}_\mu \cdot \mathbf{v} > 0$. Dans le premier cas, $\mu \mathbf{w}_\mu \cdot \mathbf{v} > 0$. Nous avons trouvé un vecteur $\mathbf{u}_- = \mathbf{w}_\mu \in \Pi_-$ et un vecteur $\mathbf{u}_+ = \mu \mathbf{w}_\mu \in \Pi_+$ tels que $\mathbf{u}_- \neq \mathbf{u}_+$ et $A_- \mathbf{u}_- = A_+ \mathbf{u}_+$, ce qui implique que A n'est pas injective. Dans le deuxième cas, nous posons $\mathbf{u}_- = -\mathbf{w}$ et $\mathbf{u}_+ = -\mu \mathbf{u}_+$, et nous concluons de la même façon.

Supposons maintenant que $(\det A_+)(\det A_-) > 0$ et, par l'absurde, que A ne soit pas inversible, c'est à dire, il existent deux vecteurs non nuls $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{w}_2$ tels que $A \mathbf{w}_1 = A \mathbf{w}_2$. Comme les déterminants de A_+ et A_- sont non nuls, nécessairement $(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}) < 0$. Sans perte de généralité, nous supposons que $\mathbf{w}_1 \in \Pi_+$ et $\mathbf{w}_2 \in \Pi_-$.

Nous remarquons que, pour tout \mathbf{w} orthogonale à \mathbf{v} , $A_-^{-1} A_+ \mathbf{w} = \mathbf{w}$. Nous choisissons sur \mathbb{R}^n la base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{v}\}$ telle que $\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v} = 0$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$, et nous écrivons

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \beta_1 \mathbf{v} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathbf{u}_i \\ \mathbf{w}_2 &= \beta_2 \mathbf{v} + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \mathbf{u}_i, \end{aligned}$$

et nous avons que $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 < 0$.

Dans la base choisie, la matrice $A_-^{-1} A_+$ s'écrit

$$A_-^{-1} A_+ = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_{n-1} & \mathbf{a} \\ \hline 0 & \alpha \end{array} \right)$$

où $\mathbf{1}_{n-1}$ est la matrice identité de taille $n-1$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\alpha > 0$. Or,

$$\beta_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{v} \cdot (A_-^{-1} A_+ \mathbf{w}_1) = \alpha \beta_1,$$

ce qui est impossible. \square

Motivés par ce Lemme, nous adoptons la notion suivante de temps conjugué (en effet, il s'agit de la même notion proposée dans [11]).

Définition 8 Soit $\boldsymbol{\lambda}$ une extrémale pour le problème (1.4), de type bang-bang et régulière. Soit $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{\lambda}(0)$. Le premier temps conjugué le long de l'extrémale $\boldsymbol{\lambda}$ est défini par

$$t_{\text{conj}}(\boldsymbol{\lambda}) = \inf \{t > 0 : \exists t_1 < t < t_2 \text{ tel que } \text{JExp}(\boldsymbol{\ell}_0, t_1) \text{JExp}(\boldsymbol{\ell}_0, t_2) < 0\},$$

où $\text{JExp}(\boldsymbol{\ell}_0, t)$ dénote la Jacobienne de $\text{Exp}(\boldsymbol{\ell}_0, t)$.

Le point $\pi(\boldsymbol{\lambda}(t_{\text{conj}}(\boldsymbol{\lambda})))$ est appelé premier point conjugué le long de $\boldsymbol{\lambda}$. L'ensemble de tous les points conjugués associés aux extrémales telles que $\pi(\boldsymbol{\lambda}(0)) = \mathbf{q}_0$ s'appelle premier lieux conjugué du point \mathbf{q}_0 .

1.2 Le système de Heisenberg

Dans cette Section, nous allons illustrer la solution du problème (1.4) dans le cas du système de Heisenberg, c'est-à-dire, le cas où les champs de vecteurs

sont

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Nous rappelons que la synthèse optimal de ce problème a été montrée dans l'article [14].

Les Hamiltoniens F et G sont définies par

$$F = p_x - p_z \frac{y}{2}, \quad G = p_y + p_z \frac{x}{2},$$

ce qui donne le système Hamiltonien suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = u_1 \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial q} = u_2 \\ \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{2}(u_2 x - u_1 y) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{p_z}{2} u_2 \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{p_z}{2} u_1 \\ \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

De plus, $\Theta = p_z$, ce qui nous dit que Θ est constant le long de chaque extrémale.

Nous pouvons aussi montrer que le système de Heisenberg (1.10) possède une symétrie discrète, comme le Lemme suivant prouve.

Lemme 6 Soit $\theta = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, et soient $\hat{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ la matrice de rotation d'angle θ dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^2 et $R_\theta = \begin{pmatrix} \hat{R}_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de rotation d'angle θ autour de l'axe vertical en \mathbb{R}^3 .

Considérons le système de contrôle (1.4b), où f et g sont donnés par les formules (1.9). Soit $\xi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la solution du système (1.4b) associée au contrôle $\mathbf{u}(\cdot)$ et telle que $\xi(0) = (0, 0, 0)$.

Alors la courbe $\tilde{\xi} = R_\theta \xi$ est la trajectoire admissible du système (1.4b), avec f et g définis par (1.9), associée au contrôle

$$\tilde{\mathbf{u}} = \hat{R}_\theta \mathbf{u}.$$

Preuve. La preuve du Lemme se base sur des calculs directs. Tout d'abord, nous posons

$$\tilde{\xi}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \cos \theta - y(t) \sin \theta \\ x(t) \sin \theta + y(t) \cos \theta \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

En particulier

$$\dot{\tilde{\xi}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta \\ \dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta \\ u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta \\ \frac{u_2 x - u_1 y}{2} \end{pmatrix}.$$

En posant $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \hat{R}_\theta \mathbf{u}$ et en remarquant que

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2 \tilde{x} - \tilde{u}_1 \tilde{y} &= (u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta)(x \cos \theta - y \sin \theta) - (u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta)(x \sin \theta + y \cos \theta) \\ &= u_2 x - u_1 y, \end{aligned}$$

le Lemme est prouvé. \square

Cette symétrie se répercute au niveau des extrémales, comme montre le Lemme suivant.

Lemme 7 *Soit $(\mathbf{p}(t), \boldsymbol{\xi}(t))$ une extrémale du problème de contrôle optimal (1.4), associée au contrôle $\mathbf{u}(t)$.*

Le couple $(\tilde{\mathbf{p}}(t), \tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)) = (R_\theta \mathbf{p}(t), R_\theta \boldsymbol{\xi}(t))$ satisfait le PMP pour le problème du temps minimum associé au système de contrôle (1.4b), avec f et g définis par (1.9).

Nous rappelons que le système n'admet pas d'extrémales anormales. En plus, le Lemme 2 et le fait que Θ soit constant le long de chaque extrémale restreignent énormément la classe des extrémales possibles ; nous avons, en effet, seulement deux cas :

- $\Theta \neq 0$: dans ce cas, l'extrémale est de type bang-bang, l'intervalle entre deux temps de commutation est constant, et le contrôle commute d'un sommet de l'ensemble Q à son proche, toujours en tournant dans le même sens ;
- $\Theta = 0$: dans ce cas, l'extrémale est singulière.

Nous allons d'abord nous concentrer sur les géodésiques de type bang-bang. Grâce aux Lemmes 6-7, nous pouvons nous restreindre aux géodésiques pour lesquelles $p_x^0 = 1$, les autres cas pouvant être retrouvés juste en appliquant une rotation opportune.

Soit donc $\boldsymbol{\lambda}$ une extrémale telle que $\boldsymbol{\lambda}(0) = (1, p_y^0, p_z^0, 0, 0, 0)$, avec $p_z^0 > 0$ et $|p_y^0| < 1$; dans ce cas, il est clair que $F(\boldsymbol{\lambda}(0)) > |G(\boldsymbol{\lambda}(0))|$, donc il existe $\mathbb{T}_1 > 0$ (a priori, \mathbb{T}_1 pourrait être infini) tel quel le contrôle associé à $\boldsymbol{\lambda}$ sur l'intervalle $[0, \mathbb{T}_1]$ est $(1, 0)$; le temps \mathbb{T}_1 est caractérisé par $|F(\boldsymbol{\lambda}(\mathbb{T}_1))| = |G(\boldsymbol{\lambda}(\mathbb{T}_1))|$. Pour le déterminer, nous remarquons que, sur $[0, \mathbb{T}_1]$, $F(\boldsymbol{\lambda}(t))$ reste constante, et $G(\boldsymbol{\lambda}(t)) = p_y^0 + p_z^0 t$; le temps \mathbb{T}_1 est donc donné par $\frac{1-p_y^0}{p_z^0}$. Sur l'intervalle $[0, \mathbb{T}_1]$, la trajectoire $\boldsymbol{\xi}$ est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Dans le cas où $p_y^0 = -1$, a priori tous les contrôles de la forme $\mathbf{u}(t) = (\alpha(t), \alpha(t) - 1)$, $\alpha(t) \in [0, 1]$, sont admissibles ; par contre, comme $\Theta > 0$, nous avons que, quelque soit le choix de α , nous pouvons trouver $\epsilon > 0$ tel que $F(\boldsymbol{\lambda}(t)) > |G(\boldsymbol{\lambda}(t))|$ pour $t \in (0, \epsilon)$; la condition (1.5c) nous impose que $\mathbf{u} = (1, 0)$ sur $(0, \epsilon)$. Ce cas est donc assimilable au cas où $p_x^0 = 1$, $|p_y^0| < 1$.

Pour t dans un petit intervalle droit de \mathbb{T}_1 , le contrôle ne peut être que $(0, 1)$: en effet, comme F et G sont tous les deux positifs, la condition (1.5c)

impose $u_1, u_2 \geq 0$. Si \mathbf{u} restait $(1, 0)$, F resterait constant et G continuerait à croître, ce qui contredirait (1.5c); d'autre part, l'extrémale n'est pas singulière par hypothèse, ce qui exclut tous les valeurs de \mathbf{u} du type $(\alpha, 1 - \alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$; il ne reste que $\mathbf{u} = (0, 1)$. Dans ce cas, les équations (1.10) nous disent que $G(\boldsymbol{\lambda}(t))$ reste constant est égal à 1, alors que $F(\boldsymbol{\lambda}(t))$ est décroissant; au temps $\mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_1 + \frac{2}{p_z^0}$, nous avons que $F(\boldsymbol{\lambda}(\mathbb{T}_2)) = -1$. Sur l'intervalle $[\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2]$, la trajectoire $\boldsymbol{\xi}$ est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = \mathbb{T}_1 \\ y(t) = t - \mathbb{T}_1 \\ z(t) = \frac{1}{2}\mathbb{T}_1(t - \mathbb{T}_1). \end{cases} \quad (1.12)$$

En raisonnant comme ci-dessus, nous pouvons prouver que, pour t dans un intervalle droit de \mathbb{T}_2 , le contrôle associé à $\boldsymbol{\lambda}$ est $(-1, 0)$. Le raisonnement peut être réitéré; en posant $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}_1 + (k - 1)\Delta T$, $\Delta T = \frac{2}{p_z^0}$, nous pouvons montrer que le contrôle associé à $\boldsymbol{\lambda}$ est constant sur tous les intervalles $(\mathbb{T}_k, \mathbb{T}_{k+1})$ et que ses valeurs suivent les sommets de Q en sens anti-horaire. Nous trouvons ainsi que

$$\begin{cases} x(t) = \mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2 - t \\ y(t) = \mathbb{T}_2 - \mathbb{T}_1 = \Delta T \\ z(t) = \frac{\Delta T}{2}(t - \Delta T), \end{cases} \quad t \in [\mathbb{T}_2, \mathbb{T}_3] \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} x(t) = \mathbb{T}_1 - \Delta t \\ y(t) = \mathbb{T}_4 - t \\ z(t) = \frac{\Delta T}{2}\mathbb{T}_2 + \frac{(\Delta T - \mathbb{T}_1)}{2}(t - \mathbb{T}_3). \end{cases} \quad t \in [\mathbb{T}_3, \mathbb{T}_2] \quad (1.14)$$

$$\begin{cases} x(t) = t - 4\Delta T \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \Delta T^2. \end{cases} \quad t \in [\mathbb{T}_4, \mathbb{T}_5] \quad (1.15)$$

Un exemple d'une géodésique de ce type est montré dans la Figure 1.2.

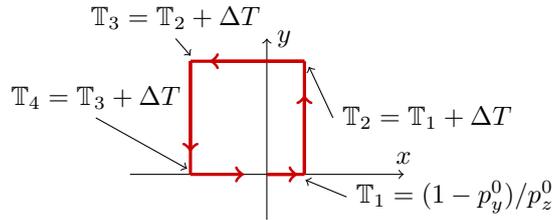


FIGURE 1.2 – Projection sur le plan xy d'une géodésique du système de Heisenberg, associée au vecteur adjoint \mathbf{p} , tel que $\mathbf{p}(0) = (1, p_y^0, p_z^0)$, avec $p_y^0 \in [-1, 0)$ et $p_z^0 > 0$.

Considérons maintenant l'extrémale $(\widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}})$, telle que $\widehat{\mathbf{p}}(0) = (1, \widehat{p}_y^0, \widehat{p}_z^0)$, avec $\widehat{p}_y^0 \in [-1, 0)$ et $\widehat{p}_z^0 > 0$; en utilisant l'équation (1.14), il est facile de montrer

que, au temps $t = \mathbb{T}_4 = \frac{7-\widehat{p}_y^0}{\widehat{p}_z}$, $\widehat{\xi}$ croise toutes les géodésiques dont le vecteur adjoint associé \mathbf{p} satisfait $\mathbf{p}(0) = (1, p_y^0, \widehat{p}_z)$, avec $\widehat{p}_y^0 < p_y^0 \leq 1$; d'autre part, l'équation (1.15) montre que le graphes de ces géodésiques coïncident, du temps de croisement jusqu'au temps $8/\widehat{p}_z$.

En plus, pour tout $\epsilon > 0$, nous pouvons toujours trouver $p_y^0 > \widehat{p}_y^0$ tel que le graphe de la géodésique associée est contenu dans un voisinage de taille ϵ du graphe de $\widehat{\xi}$. Ceci prouve que, au temps $t = \mathbb{T}_4$, la géodésique $\widehat{\xi}$ perd son optimalité locale.

Pour vérifier si une géodésique perd son optimalité globale avant \mathbb{T}_4 , il faut chercher des intersections de la trajectoire étudiée avec des géodésiques "lointaines", c'est-à-dire, dont le graphe n'appartient pas à un voisinage du graphe de la géodésique étudiée; autrement dit, on regarde les géodésiques dont le contrôle initial n'est pas $(1, 0)$. En intégrant les trajectoires, nous pouvons prouver que de telles intersections se produisent soit au quatrième temps de commutation, soit au temps $8/p_z$, où toutes les géodésiques avec le même p_z^0 atteignent le point $(0, 0, 8/(p_z^0)^2)$ (voir la Figure 1.3). Par conséquent, pour chaque trajectoire, le temps de coupure coïncide avec le quatrième temps de commutation.

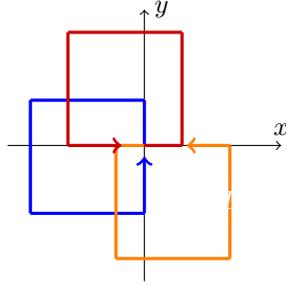


FIGURE 1.3 – Projection sur le plan xy des géodésiques du système de Heisenberg.

Remarque 5 *Nous notons que, pour $t \in (\mathbb{T}_2, \mathbb{T}_5]$, nous avons que $z > \frac{|xy|}{2}$*

Lorsque $\Theta < 0$, nous allons avoir un comportement très similaire; dans ce cas, les valeurs du contrôle suivent les sommets de Q en sens horaire, et les valeurs atteints de z sont négatifs (ou nuls).

Concentrons nous sur les extrémales singulières. Nous allons toujours maintenant assumer que $p_x^0 = p_y^0 = 1$ et $p_z^0 = 0$.

Dans ce cas, le système peut être écrit comme

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \\ \dot{y} = 1 - u_1 \\ \dot{z} = \frac{1}{2}(x - u_1(x + y)). \end{cases}$$

ce qui nous donne les solutions

$$x(t) = \int_0^t u_1(t) dt$$

$$y(t) = \int_0^t (1 - u_1(t)) dt = t - x(t),$$

d'où nous déduisons que $t = x(t) + y(t)$. Pour estimer $z(t)$, nous remarquons que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} xy = \frac{1}{2} (u_1 y + u_2 x) \geq \frac{1}{2} (-u_1 y + u_2 x),$$

car $u_1(t)y(t) \geq 0$; il en suit que $z(t) \leq \frac{x(t)y(t)}{2}$. Pareil, comme

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} xy = -\frac{1}{2} (u_1 y + u_2 x) \leq \frac{1}{2} (-u_1 y + u_2 x)$$

(car $u_2(t)x(t) \geq 0$), nous avons que $z(t) \geq -\frac{x(t)y(t)}{2}$.

Le même raisonnement peut être adapté dans le cas des autres géodésiques associées à des extrémales singulières; nous déduisons que l'estimation suivante

$$|z(t)| \leq \frac{|x(t)y(t)|}{2}$$

est vérifiée le long de toute extrémale singulière. Nous obtenons ainsi les Lemmes suivants.

Lemme 8 Soit $(x_T, y_T, z_T) \in \mathbb{R}^3$ tel que $|z_T| > \frac{|x_T y_T|}{2}$. Alors la trajectoire du système de Heisenberg que relie $(0, 0, 0)$ à (x_T, y_T, z_T) en temps minimal n'est pas singulière.

Lemme 9 Soit $(x_T, y_T, z_T) \in \mathbb{R}^3$ tel que $|z_T| < \frac{|x_T y_T|}{2}$. Alors le temps minimal pour atteindre (x_T, y_T, z_T) est $T = |x_T| + |y_T|$.

Nois pouvons donc conclure avec ce résultat, qui donne la synthèse optimale sur le demi-espace $\{z \geq 0\}$.

Le lieu conjugué (pour les géodésiques avec $z \geq 0$) est illustré dans la Figure 1.4. La sphère est illustrée dans les Figures 1.5 et 1.6.

À cause des propriétés de symétrie du système, la synthèse sur le demi-espace $\{z \leq 0\}$ est complètement équivalente. En effet, les géodésiques bang-bang qui atteignent les points de ce demi-espace peuvent être obtenues à partir de la géodésique-type étudiée ci-dessous, juste en appliquant aux équations (1.11)-(1.12)-(1.13)-(1.14)-(1.15) une parmi les transformations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

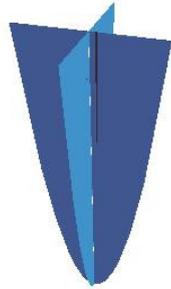


FIGURE 1.4 – Le lieu conjugué pour le système de Heisenberg.

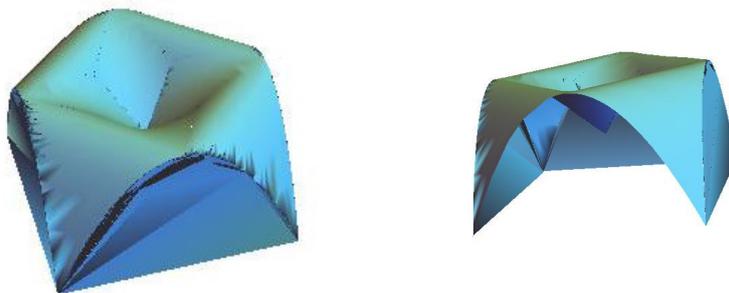


FIGURE 1.5 – La partie supérieure de la sphère du système de Heisenberg. Dans la figure de droite, une “paroi” de la sphère a été coupée, pour mieux voir l’intérieur.

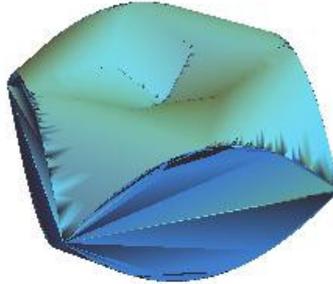


FIGURE 1.6 – La sphère du système de Heisenberg.

1.3 La forme normale

Considérons le problème (1.4) sur $M = \mathbb{R}^3$, pour les champs de vecteurs

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Opérons le suivant changement de coordonnées sur \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} \tilde{x} = x \\ \tilde{y} = y \\ \tilde{z} = z - \frac{xy}{2}. \end{cases}$$

En faisant les calculs, il est possible de voir que, dans le nouveau système de coordonnées, les champs de vecteurs (1.16) deviennent $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \end{pmatrix}$ et $g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire, exactement les champs dans l'équation (1.9).

Il semble donc inutile d'étudier la sphère unitaire pour la métrique SF- L^1 associée aux champs de vecteurs (1.16), car on obtiendrait, à un changement de variable près, la même sphère trouvée dans la Section 1.2 (nous remarquons d'ailleurs que le système de Heisenberg est connu en littérature sous les deux formes (1.9) et (1.16)).

Cette observation nous pousse à chercher une *forme normale*, c'est-à-dire, une classe d'équivalence des champs de vecteurs f, g sur M , satisfaisant à l'Hypothèse 1, qui sont égales entre eux, à un changement de variables près.

Dans le cas sous-Riemannien, ce problème est crucial, et a été étudié, par exemple, dans les travaux [3, 4, 9, 17].

Pour le cas sous-Finslérien en dimension 3, dans l'article [11] une forme normale basée sur la rectification du champ f (qui correspond, dans le système de Heisenberg, au choix de la forme (1.16)) a été proposée. Nous allons brièvement rappeler sa construction.

Soit $\mathbf{q}_0 \in M$. Nous construisons un système de coordonnées locales centré autour de \mathbf{q}_0 , comme il suit : soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow M$ l'application définie par

$$\Phi(x, y, z) = \exp(xf) \circ \exp(yg) \circ \exp(z[f, g])(\mathbf{q}_0).$$

En particulier, nous remarquons que $\Phi(0, 0, 0) = \mathbf{q}_0$. Grâce à l'Hypothèse 1, Φ est un difféomorphisme locale autour de l'origine, c'est-à-dire, il existent un voisinage U de l'origine en \mathbb{R}^3 et un voisinage \mathcal{U} de \mathbf{q}_0 en M tels que $\Phi : U \rightarrow \mathcal{U}$ est une fonction inversible de classe C^1 , et Φ^{-1} est de classe C^1 , aussi.

Pour tout $\mathbf{q} \in \mathcal{U}$, les coordonnées de \mathbf{q} sont définies comme le seule triplet $(x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}}, z_{\mathbf{q}}) \in U$ tel que $\Phi(x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}}, z_{\mathbf{q}}) = \mathbf{q}$.

Il est possible de montrer que, dans ce système de coordonnées, les champs f et g peuvent être écrits comme

$$f = \frac{\partial}{\partial x} \quad g = \frac{\partial}{\partial y} + xV(x, y, z),$$

pour un certain vecteur V tel que $V(0, 0, 0) = \frac{\partial}{\partial z}$.

Une autre choix possible, qui ne rectifie pas f , mais privilégie une symétrie entre f et g , se base sur le changement de coordonnées locales

$$\Phi(x, y, z) = \exp(xf + yg) \circ \exp(z[f, g])(\mathbf{q}_0).$$

Dans cette thèse, nous allons nous intéresser à une classe particulière des problèmes SF- L^1 en dimension 3 : la classe des métriques SF- L^1 compatibles avec une structure sous-Riemannienne (voir Définition 9 ci-dessous). La raison principale de ce choix est que, ainsi faisant, il est possible d'exploiter les résultats de Chakir et al. ([17]) sur la construction d'une forme normale pour les métriques sous-Riemannienne en dimension 3. Ceci comporte deux avantages : tout d'abord, la forme normale pour les champs f et g a des symétries évidentes (qui permettent de réduire la môle de calculs) et une structure beaucoup plus simple de celle trouvée en [11]; ensuite, les invariants de la forme normale sont directement liés à des propriétés géométriques de la variété M .

Il est claire que la classe de problèmes que nous allons investiguer est moins générale que celle étudiée dans l'article [11]. Néanmoins, comme nous allons voir dans le Chapitre 3, le lieux de coupures trouvés dans le deux cas ont la même structure (au moins, pour ce qui concerne la partie de la sphère avec $z > \frac{\pi y}{2}$).

Nous allons brièvement rappeler la construction d'une forme normale pour les structures sous-Riemannienne en dimension 3 proposée dans l'article [17].

Soit (g, \mathcal{D}, M) une variété sous-Riemannienne de dimension 3 : $\mathcal{D} \subset TM$ est une distribution régulière de dimension 2 et de rang non-holonomique 2 (voir [7, 24]); $g : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique définie positive, lisse par rapport à $\mathbf{q} \in M$, qui définit un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{D}_{\mathbf{q}}$ pour tout $\mathbf{q} \in M$.

Comme prouvé dans [17, Theorem 3.1], ils existent, pour tout $\mathbf{q} \in M$, des coordonnées locales (x, y, z) centrées en \mathbf{q} (c'est-à-dire, en coordonnées locales

le point \mathbf{q} correspond à l'origine) et une base \mathcal{f}, \mathcal{g} de $\mathcal{D}_{\mathbf{q}}$, orthonormale par rapport au produit scalaire $g_{\mathbf{q}}$, de la forme

$$\mathcal{f} = \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{y}^2 \beta(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ -x\mathbf{y} \beta(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ -\frac{\mathbf{z}}{2}(1 + \gamma(x, \mathbf{y}, \mathbf{z})) \end{pmatrix} \quad \mathcal{g} = \begin{pmatrix} -x\mathbf{y} \beta(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ 1 + x^2 \beta(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ \frac{x}{2}(1 + \gamma(x, \mathbf{y}, \mathbf{z})) \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

où $\beta, \gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe C^∞ telles que

$$\beta(0, 0, \mathbf{z}) = \gamma(0, 0, \mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R} \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x}(0, 0, \mathbf{z}) = \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{y}}(0, 0, \mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}. \quad (1.19)$$

Remarque 6 Les jets des fonctions β et γ sont étroitement liées à certains invariants géométriques (comme la courbure) de la variété sous-Riemannienne (g, \mathcal{D}, M) ([9, 17]).

Nous sommes prêts à donner la définition de *métrique SF compatible avec une structure sous-Riemannienne*.

Définition 9 Considérons le problème (1.2)-(1.3). Nous disons que la métrique L^1 définie par (1.2)-(1.3) est compatible avec $g_{\mathbf{q}}$ s'il existe une matrice carrée \mathbf{M} de dimension 2, inversible, telle que

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \mathcal{f} \\ \mathcal{g} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Nous pouvons toujours faire l'hypothèse que $\det \mathbf{M} = 1$ (par exemple, en réabsorbant $\det \mathbf{M}$ dans $h_{\mathbf{q}}$).

Dans la suite, nous allons faire l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2 La métrique L^1 définie par (1.2)-(1.3) est compatible avec une métrique sous-Riemannienne (g, \mathcal{D}, M) sur M .

Il est possible de simplifier ultérieurement la structure des champs f, g , comme démontré dans la Proposition suivante.

Proposition 2 Sous l'Hypothèse 2, soient $(x, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ les coordonnées normales dans lesquelles les champs de vecteurs \mathcal{f} and \mathcal{g} ont la structure (1.17). Il existe un changement de coordonnées $\Phi : (x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \mapsto (x, y, z)$ tel que $\mathbf{z} = z$ et

$$f = \frac{\partial}{\partial x} + yW \quad g = \frac{\partial}{\partial y} - xW, \quad (1.21)$$

où W est un champ de vecteurs de classe C^∞ de la forme

$$\begin{pmatrix} L_{11}x + L_{12}y \\ L_{21}x + L_{22}y \\ -\frac{1}{2} + \mathcal{L}_3 \end{pmatrix},$$

$L_{ij} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions C^∞ telles que $L_{ij}(0, 0, z) = 0$ pour tout z et $\mathcal{L}_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ telle que $\mathcal{L}_3(0, 0, z) = \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial x}(0, 0, z) = \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial y}(0, 0, z) = 0$ pour tout z .

Preuve. Soit \mathbf{M} la matrice qui relie f, g et ℓ, \mathcal{L} dans l'équation (1.20). Sans perte de généralité, nous supposons que $\det \mathbf{M} = 1$ et nous écrivons

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Nous définissons le suivant changement de coordonnées sur \mathbb{R}^3 (et donc sur l'ouvert sur lequel les coordonnées (x, y, z) sont définies)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_4 & -\mu_2 \\ -\mu_3 & \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{x} \\ \mathcal{y} \end{pmatrix} \quad z = \mathcal{z}.$$

Il est facile de voir que

$$f = \frac{\partial}{\partial x} + yW(\Phi^{-1}(x, y, z)) \quad g = \frac{\partial}{\partial y} - xW(\Phi^{-1}(x, y, z)),$$

pour $W(x, y, z) = \beta(x, y, z) \left(\mathcal{y} \frac{\partial}{\partial \mathcal{x}} - x \frac{\partial}{\partial \mathcal{y}} \right) - \frac{1}{2}(1 + \gamma(x, y, z)) \frac{\partial}{\partial \mathcal{z}}$.

Nous remarquons que

$$\begin{aligned} \mathcal{y} \frac{\partial}{\partial \mathcal{x}} - x \frac{\partial}{\partial \mathcal{y}} &= (\mu_3 x + \mu_4 y) \left(\mu_4 \frac{\partial}{\partial x} - \mu_3 \frac{\partial}{\partial y} \right) - (\mu_1 x + \mu_2 y) \left(\mu_1 \frac{\partial}{\partial y} - \mu_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &= (\mu_1 \mu_2 + \mu_3 \mu_4) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) - (\mu_1^2 + \mu_3^2) x \frac{\partial}{\partial y} + (\mu_4^2 + \mu_2^2) y \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} L_{11}(x, y, z) &= (\mu_1 \mu_2 + \mu_3 \mu_4) \beta(\Phi^{-1}(x, y, z)) \\ L_{12}(x, y, z) &= (\mu_2^2 + \mu_4^2) \beta(\Phi^{-1}(x, y, z)) \\ L_{21}(x, y, z) &= -(\mu_1^2 + \mu_3^2) \beta(\Phi^{-1}(x, y, z)) \\ L_{22}(x, y, z) &= (\mu_1 \mu_2 + \mu_3 \mu_4) \beta(\Phi^{-1}(x, y, z)) \\ \mathcal{L}_3(x, y, z) &= \gamma(\Phi^{-1}(x, y, z)), \end{aligned}$$

Grâce aux équations (1.18) et (1.19), nous pouvons prouver que

$$\begin{aligned} \beta(\Phi^{-1}(0, 0, z)) &= \gamma(\Phi^{-1}(0, 0, z)) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial(\gamma \circ \Phi^{-1})}{\partial x}(0, 0, z) &= \frac{\partial(\gamma \circ \Phi^{-1})}{\partial y}(0, 0, z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

d'où la thèse. \square

Les fonctions L_{ij} , $i, j = 1, 2$, peuvent être développées en série de Taylor autour de l'origine :

$$L_{ij}(x, y, z) = ax_{ij}x + ay_{ij}y + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{xxij} & \omega_{xyij} & \omega_{xzij} \\ \omega_{yxij} & \omega_{yyij} & \omega_{yzij} \\ \omega_{zxij} & \omega_{zyij} & \omega_{zzij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \phi_{ij}(x, y, z),$$

où ϕ_{ij} ont des fonctions de classe C^∞ qui s'annulent en tous point $(0, 0, z)$, comme toute leurs dérivées partielles du premier et du deuxième ordre.

Par analogie, nous allons développer aussi \mathcal{L}_3 en série de Taylor :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3(x, y, z) &= ax_{31}x^2 + ax_{32}xy + ay_{31}xy + ax_{32}y^2 \\ &+ \frac{x}{2} (x \ y \ z) \begin{pmatrix} \omega_{xx31} & \omega_{xy31} & \omega_{xz31} \\ \omega_{yx31} & \omega_{yy31} & \omega_{yz31} \\ \omega_{zx31} & \omega_{zy31} & \omega_{zz31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &+ \frac{y}{2} (x \ y \ z) \begin{pmatrix} \omega_{xx32} & \omega_{xy32} & \omega_{xz32} \\ \omega_{yx32} & \omega_{yy32} & \omega_{yz32} \\ \omega_{zx32} & \omega_{zy32} & \omega_{zz32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \phi_3(x, y, z), \end{aligned}$$

où ϕ_3 est une fonction de classe C^∞ qui s'annule en tous point $(0, 0, z)$, comme toute ses dérivées partielles du premier et du deuxième ordre.

Pour $j = 1, 2$, nous posons aussi

$$L_{3j}(x, y, z) = ax_{3j}x + ay_{3j}y + \frac{1}{2} (x \ y \ z) \begin{pmatrix} \omega_{xx3j} & \omega_{xy3j} & \omega_{xz3j} \\ \omega_{yx3j} & \omega_{yy3j} & \omega_{yz3j} \\ \omega_{zx3j} & \omega_{zy3j} & \omega_{zz3j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \phi_{3j}(x, y, z),$$

où ϕ_{31} et ϕ_{32} sont choisies de telle sorte que $\phi_{31} + \phi_{32} = \phi_3$, $\phi_{31}(0, 0, z) = \phi_{32}(0, 0, z) = 0$, ainsi que toutes leur dérivées du premier et deuxième ordre.

Définition 10 Les constantes $ax_{ij}, ay_{ij}, \omega_{\dots ij}$ sont appelées les invariants de la métrique.

Remarque 7 Sans perte de généralité, dans l'équation (1.22) nous pouvons choisir $\mu_2 = 0$, de telle façon que $\mu_1 = \frac{1}{\mu_4} \neq 0$. Ceci correspond à appliquer une rotation autour de l'axe z , ce qui rend f parallèle à \mathcal{L} . C'est opération ne change pas la structure des sphère de rayon assez petit.

Notation. Dorénavant, nous travaillerons toujours dans les coordonnées (x, y, z) définies dans la Proposition 2.

Dans ce système de coordonnées, les points seront notés avec la lettre \mathbf{x} . Les coordonnées canoniquement associées à \mathbf{x} sur T_q^*M seront notées $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$.

1.3.1 Propriétés de symétrie de la forme normale

Comme nous l'avons déjà remarqué, le système de Heisenberg est invariant par rapport aux rotations d'angle $k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, autour de l'axe z ; comme déjà observé, ceci implique qu'il n'est pas nécessaire de calculer toutes les géodésiques, mais qu'on peut se limiter à celle dont le contrôle initiale est $\mathbf{u} = (1, 0)$ (ou $\mathbf{u} = (\alpha, 1 - \alpha)$, $\alpha \in (0, 1]$ pour le singulières).

Bien entendu, ceci n'est plus vrai dans le cas générique. Néanmoins, le choix particulier de la forme normale permet de mettre en valeur certaines propriétés de symétrie résiduelles : comme les résultats suivantes le montrent, il est encore possible de se limiter au calcul des géodésiques des trajectoires dont le premier arc est un arc bang associé au contrôle $\mathbf{u} = (1, 0)$, et retrouver les autres en appliquant une rotation et une permutation des invariants.

Lemme 10 Soient $\theta = \frac{k\pi}{2}$, $k \in 1, 2, 3$ et \hat{R}_θ (respectivement, R_θ) la matrice de rotation (en sens anti-horaire) de l'angle θ dans l'espace Euclidien de dimension 2 (respectivement, autour de l'axe z dans l'espace Euclidien de dimension 3). Soient les champs de vecteurs

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} 1 + y(x\tilde{L}_{11}(\mathbf{x}) + y\tilde{L}_{12}(\mathbf{x})y) \\ y(x\tilde{L}_{21}(\mathbf{x}) + y\tilde{L}_{22}(\mathbf{x})y) \\ -\frac{y}{2} + y(x\tilde{L}_{31}(\mathbf{x}) + y\tilde{L}_{32}(\mathbf{x})y) \end{pmatrix} \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} -x(x\tilde{L}_{11}(\mathbf{x}) + y\tilde{L}_{12}(\mathbf{x})y) \\ 1 - x(x\tilde{L}_{21}(\mathbf{x}) + y\tilde{L}_{22}(\mathbf{x})y) \\ \frac{x}{2} - x(x\tilde{L}_{31}(\mathbf{x}) + y\tilde{L}_{32}(\mathbf{x})y) \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

où

$$\begin{pmatrix} \tilde{L}_{11}(\mathbf{x}) & \tilde{L}_{12}(\mathbf{x}) \\ \tilde{L}_{21}(\mathbf{x}) & \tilde{L}_{22}(\mathbf{x}) \\ \tilde{L}_{31}(\mathbf{x}) & \tilde{L}_{32}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = R_\theta^{-1} \begin{pmatrix} L_{11}(R_\theta \mathbf{x}) & L_{11}(R_\theta \mathbf{x}) \\ L_{21}(R_\theta \mathbf{x}) & L_{22}(R_\theta \mathbf{x}) \\ L_{31}(R_\theta \mathbf{x}) & L_{32}(R_\theta \mathbf{x}) \end{pmatrix} \hat{R}_\theta. \quad (1.24)$$

Soit une fonction mesurable $\tilde{\mathbf{u}} : [0, T] \rightarrow Q$; nous notons avec $\tilde{\xi}(\cdot)$ la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}(t) = (\tilde{u}_1 \tilde{f} + \tilde{u}_2 \tilde{g}) \circ \tilde{\xi}(t), \\ \tilde{\xi}(0) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Alors $R_\theta \tilde{\xi}(t)$ est la solution du problème de Cauchy (1.4b) associée au contrôle $\mathbf{u}(t) = R_\theta \tilde{\mathbf{u}}(t)$ avec condition initiale $(0, 0, 0)$.

Preuve. Soient $(x(t), y(t), z(t))$ les coordonnées de $R_\theta \tilde{\xi}(t)$ et $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$ les coordonnées de $\tilde{\xi}(t)$. Tout d'abord, nous remarquons que

$$\begin{aligned} u_2 x - u_1 y &= (\tilde{u}_1 \sin \theta + \tilde{u}_2 \cos \theta) (\tilde{x} \cos \theta - \tilde{y} \sin \theta) - (\tilde{u}_1 \cos \theta - \tilde{u}_2 \sin \theta) (\tilde{x} \sin \theta + \tilde{y} \cos \theta) \\ &= \tilde{u}_2 \tilde{x} - \tilde{u}_1 \tilde{y}. \end{aligned}$$

Nous avons que

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \cos \theta \dot{\tilde{x}} - \sin \theta \dot{\tilde{y}} \\
&= \left(\tilde{u}_1 + (\tilde{u}_1 \tilde{y} - \tilde{u}_2 \tilde{x})(\tilde{L}_{11} \tilde{x} + \tilde{L}_{12} \tilde{y}) \right) \cos \theta - \left(\tilde{u}_2 + (\tilde{u}_1 \tilde{y} - \tilde{u}_2 \tilde{x})(\tilde{L}_{21} \tilde{x} + \tilde{L}_{22} \tilde{y}) \right) \sin \theta \\
&= u_1 + (u_2 x - u_1 y) \left(x(\tilde{L}_{11} \cos^2 \theta - (\tilde{L}_{12} + \tilde{L}_{21}) \cos \theta \sin \theta + \tilde{L}_{22} \sin^2 \theta) \right. \\
&\quad \left. + y(\tilde{L}_{12} \cos \theta^2 + (\tilde{L}_{11} - \tilde{L}_{22}) \cos \theta \sin \theta - \tilde{L}_{21} \sin \theta^2) \right) \\
\dot{y} &= \sin \theta \dot{\tilde{x}} + \cos \theta \dot{\tilde{y}} \\
&= \left(\tilde{u}_1 + (\tilde{u}_1 \tilde{y} - \tilde{u}_2 \tilde{x})(\tilde{L}_{11} \tilde{x} + \tilde{L}_{12} \tilde{y}) \right) \sin \theta + \left(\tilde{u}_2 + (\tilde{u}_1 \tilde{y} - \tilde{u}_2 \tilde{x})(\tilde{L}_{21} \tilde{x} + \tilde{L}_{22} \tilde{y}) \right) \cos \theta \\
&= u_2 + (u_2 x - u_1 y) \left(x(\tilde{L}_{21} \cos^2 \theta + (\tilde{L}_{11} - \tilde{L}_{22}) \cos \theta \sin \theta - \tilde{L}_{12} \sin^2 \theta) \right. \\
&\quad \left. + y(\tilde{L}_{22} \cos \theta^2 + (\tilde{L}_{12} + \tilde{L}_{21}) \cos \theta \sin \theta + \tilde{L}_{11} \sin \theta^2) \right) \\
\dot{z} &= \dot{\tilde{z}} \\
&= (\tilde{u}_1 \tilde{y} - \tilde{u}_2 \tilde{x}) \left(-\frac{1}{2} + \tilde{L}_{31} \tilde{x} + \tilde{L}_{32} \tilde{y} \right) \\
&= (u_2 x - u_1 y) \left(x(\tilde{L}_{31} \cos \theta - \tilde{L}_{32} \sin \theta) + y(\tilde{L}_{31} \sin \theta + \tilde{L}_{32} \cos \theta) \right).
\end{aligned}$$

où nous avons omis d'expliciter que les fonctions \tilde{L}_{ij} sont calculées en $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)$. Un simple calcul démontre l'équation (1.24). \square

L'action sur les invariants principaux de la métrique des permutations (1.24) est explicitée dans l'Annexe A.2.

Lemme 11 Soit $(\mathbf{p}(t), \boldsymbol{\xi}(t))$ une extrémale du problème de contrôle optimal (1.4), associée au contrôle $\mathbf{u}(t)$.

Le couple $(\tilde{\mathbf{p}}(t), \tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)) = (R_\theta^{-1} \mathbf{p}(t), R_\theta^{-1} \boldsymbol{\xi}(t))$ satisfait au PMP pour le problème du temps minimum associé au système contrôlé

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}(t) = (\tilde{u}_1 \tilde{f} + \tilde{u}_2 \tilde{g}) \circ \tilde{\boldsymbol{\xi}}(t),$$

où \tilde{f} et \tilde{g} sont les champs de vecteurs définis dans l'équation (1.23) et $\tilde{\mathbf{u}}(t) = \hat{R}_\theta^{-1} \mathbf{u}(t)$.

Preuve. La preuve du Lemme est très similaire de la précédente, et se base sur des simples calculs. Nous allons l'omettre. \square

Nous terminons le chapitre en fournissant l'expression du champ de vecteurs $[f, g]$, dans les coordonnées définies à la Proposition 2.

$$[f, g] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\mathbf{L} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - x \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - y \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (y - x \ 0) \mathbf{L} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \mathbf{L} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

où nous avons utilisé l'abréviation

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \\ L_{31} & L_{32} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 2

Les jets des extrémales de type bang-bang avec $\Theta > 0$

2.1 Les jets des extrémales de type bang-bang

2.1.1 Développement local de la dynamique

Résoudre le problème (1.4) en toute généralité est une tâche très difficile. D'ailleurs, nous rappelons que nous ne sommes même pas sûrs que le temps minimale soit atteint, à cause du fait que les champs f, g sont non-linéaires donc, en générale, il n'est pas possible de trouver des bornes uniformes sur les trajectoires et ainsi appliquer le Théorème de Filippov ([6]). Enfin, nous rappelons aussi que la forme normale est bien définie seulement sur des petits ouverts de M .

D'autre part, dans le cas sous-Riemannien (dans lequel le même problème se pose) des études des *petites sphères* ont été menées (voir par exemple [4, 9, 15, 17, 30]). En effet, si l'on considère des *petits rayons* (après reparamétrage, des *temps petits*), la partie non-linéaire des champs f, g peut être gardée "sous-contrôle", et le problème peut être traité comme une perturbation du cas nilpotent. Il est un problème très intéressant de voir comment des petites perturbation vont changer la forme du lieu conjugué et du lieu de coupure. Dans les papiers [4, 17, 30] une analyse de stabilité des singularités, qui amène à une classification des formes du lieu conjugué, a été conduite.

Des questions de ce type ont été étudiées aussi dans le cas sous-Finslérien : par exemple, dans le papier [11] les auteurs étudient le lieu de coupure des géodésiques courtes, pour une métrique SF- L^∞ en dimension 3 générique.¹

Comme dans l'article [11], nous allons étudier la synthèse optimale à partir d'un certain point q_0 (qui sera choisi comme le centre des coordonnées locales) pour *temps petits*.

Nous commençons par des résultats qui nous permettent de prouver que le problème local est bien posé.

1. comme déjà remarqué dans l'article [14], les métriques SF- L^∞ et SF- L^1 en dimension 3 sont équivalentes, à une rotation près autour de l'axe z .

Lemme 12 *Il existe $T > 0$ (éventuellement dépendant de \mathbf{q}_0) tel que toute trajectoire admissible $\boldsymbol{\xi}$ du système (1.3) avec contrôles en Q satisfait les deux conditions suivantes :*

- i) pour tout $t \in [0, T]$, $\boldsymbol{\xi}(t)$ appartient au voisinage sur lequel les coordonnées (x, y, z) de la Proposition 2 sont bien définies ;*
- ii) $|x(t)|, |y(t)|, |z(t)| < 1$, $t \in [0, T]$.*

Preuve. La preuve est une application directe du Lemme de Gronwall ([6]). \square

Théorème 2 *Il existe un voisinage \mathcal{U} de \mathbf{q}_0 en M tel que le minimum du problème (1.4) est atteint pour tout $\mathbf{q}_1 \in \mathcal{U}$.*

Preuve. Soit T comme dans le Lemme précédent, et soit $\mathcal{A}_{\leq T}(\mathbf{q}_0)$ l'ensemble atteignable en temps plus petit ou égale que T à partir du point \mathbf{q}_0 , c'est-à-dire,

$$\mathcal{A}_{\leq T}(\mathbf{q}_0) = \{\mathbf{q} \in M : \exists \boldsymbol{\xi} : [0, T] \rightarrow M \text{ solution de (1.3), } t \leq T \text{ telle que } \boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{q}\}.$$

Grâce au Lemme 12, nous savons qu'il existe $C > 0$ tel que $|(x, y, z)| < C$, pour tout coordonnées de $\mathbf{q} = (x, y, z) \in \mathcal{A}_{\leq T}(\mathbf{q}_0)$. En particulier, il existe $M > 0$ tel que

$$\|u_1 f(\mathbf{q}) + u_2 g(\mathbf{q})\|_{C^1} \leq M \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{A}_{\leq T}(\mathbf{q}_0), \quad \forall \mathbf{u} \in Q.$$

(Avec un petit abus de notation, ici nous considérons l'expression de f et g en coordonnées, et les normes ci-dessus sont à considérer comme les normes Euclidiennes sur \mathbb{R}^3).

Nous pouvons restreindre le problème (1.4) aux points $\mathbf{q}_1 \in \mathcal{A}_{\leq T}(\mathbf{q}_0)$.

Le problème restreint satisfait les hypothèses du Théorème de Filippov, donc le minimum est atteint pour tout point final $\mathbf{q}_1 \in \mathcal{A}_{\leq T}(\mathbf{q}_0)$.

Comme le système est contrôlable localement en temps petit (grâce à l'Hypothèse 1 et au Théorème de Rashevski-Chow), $\mathcal{A}_{\leq T}(\mathbf{q}_0)$ contient un voisinage de \mathbf{q}_0 , et le Théorème est prouvé. \square

Nous pouvons donc appliquer le PMP pour calculer les trajectoires extrémales. Différemment du cas étudié dans la Section 1.2, dont la structure des extrémales était très rigide, dans le cas générique les extrémales peuvent montrer beaucoup de comportement possibles : en général, nous pouvons avoir des extrémales dont le contrôle commute plusieurs fois entre les mêmes deux sommets de Q (par exemple, ils ont été trouvés dans [11]) ou de concaténations de plusieurs arcs singuliers et bang.

Néanmoins, pour un certain $T \ll 1$ qui satisfait les conditions du Lemme 12, la partie "nilpotente" dans les champs f et g domine, et nous pouvons nous attendre que les géodésiques du problèmes soient proches de celles vues dans la Section 1.2.

En effet, en utilisant la formule (A.1), nous voyons que

$$\Theta(\boldsymbol{\lambda}(t)) = p_z(t)(1 + \mathcal{O}(x(t)^2, y(t)^2, z(t))) + \|(p_x(t), p_y(t))\| \mathcal{O}(x(t)^2, y(t)^2, z(t)),$$

ce qui implique que le signe de Θ est constant sur l'intervalle $[0, T]$, à moins que $p_z^0 = \mathcal{O}(T^2)$. Dans le premier cas, c'est-à-dire, si le signe de $\Theta(\boldsymbol{\lambda}(t))$ est constante sur $[0, T]$, le contrôle associé à $\boldsymbol{\lambda}$ commute d'un sommet de Q à son successif, toujours dans le même sens (déterminé par le signe de Θ), exactement comme dans le cas du système de Heisenberg. Au contraire, si $p_z^0 = \mathcal{O}(T^2)$,

nous avons que $\Theta = \mathcal{O}(T^2)$ et son signe peut changer le long de λ ; si c'est le cas, F et G varient très lentement et le contrôle associé à l'extrémale peut être constant, ou peut commuter plusieurs fois entre deux sommets de Q qui partagent le même coté (par exemple, si F et G sont tous les deux positifs le long de λ , mais $F - G$ change de signe plusieurs fois, nous avons que \mathbf{u} commute entre les valeurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ à tout changement de signe de $(F - G)$.

En répétant le même raisonnement de la page 24, nous pouvons vérifier que géodésiques associées à un extrémale $\hat{\lambda}$ tel que $\Theta(\lambda(0)) \sim \mathcal{O}(T^2)$ atteignent seulement les points de la région $|z(t)| \leq \frac{|x(t)y(t)|}{2} + \mathcal{O}(x(t)^4, y(t)^4)$.

Dans cette thèse, nous allons nous intéresser seulement aux points de la sphère tels que $|z(t)| > \frac{|x(t)y(t)|}{2}$.

Soit $\lambda(t) = (\mathbf{p}(t), \boldsymbol{\xi}(t))$ une extrémale du problème (1.4) telle que $|p_z(0)| \gg 1$; soit $\mathbf{u}(t)$ le contrôle associé à $\lambda(t)$. Comme déjà fait dans les articles [4, 11, 17], nous effectuons un reparamétrage de l'intervalle $[0, T]$, en définissant le nouveau temps

$$\tau_\lambda(t) = \int_0^t |p_z(s)| ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.1)$$

Comme par hypothèse $|p_z(0)| \gg 1$ et $T \ll 1$, grâce au Lemme 12 nous avons que $p_z(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, donc (2.1) définit un bon reparamétrage du temps. Nous remarquons aussi que $\tau(0) = 0$.

Remarque 8 *Nous soulignons que le reparamétrage du temps définie dans l'équation (2.1) a du sens seulement le long de l'extrémale λ .*

Pour alléger la notation, dans la suite nous allons supprimer l'indice λ et nous allons toujours sous-entendre que le reparamétrage du temps est associé à une extrémale.

Notation. Dans cette thèse, nous travaillons avec deux échelles de temps : le "vrai temps" t et le temps reparamétré τ , qui sont liés entre eux par l'équation (2.1). En particulier, les hypothèses $T \ll 1$ et $|p_z(0)| \gg 1$ impliquent que τ est très "rapide" par rapport à t , c'est-à-dire, $\tau = 1$ est équivalent à $T \gg 1$.

Pour éviter toute ambiguïté et confusion, dans la suite nous allons utiliser la police habituelle (t, T, \mathbf{T}, \dots) pour noter le "vrai temps", et le cursive ou l'alphabet grec ($\tau, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{T}, \boldsymbol{\mathcal{T}}, \mathcal{T}$) pour le temps reparamétré. En particulier, le symbole \mathbb{T}_k et \mathcal{T}_k dénotent, respectivement, le k -ème temps de commutation son reparamétrage.

Remarque 9 *Comme la relation (2.1) est inversible, nous allons aussi écrire t comme une fonction de τ . Clairement, nous avons que $t(\tau) = \int_0^\tau \frac{1}{|p_z(s)|} ds$.*

Nous définissons les nouvelles variables

$$\hat{p}_x = \frac{p_x}{p_z} \quad \hat{p}_y = \frac{p_y}{p_z} \quad \varrho = \frac{1}{p_z} \quad \hat{\Theta} = \frac{\Theta}{p_z}.$$

Pour calculer les jets des extrémales, nous allons écrire $(\mathbf{p}(\tau), \boldsymbol{\xi}(\tau))$ comme

une série de puissances² du paramètre $\rho_0 = \varrho(0)$.

$$\begin{cases} x(\tau) = \rho_0 x_1(\tau) + \rho_0^2 x_2(\tau) + \rho_0^3 x_3(\tau) + \rho_0^4 x_4(\tau) + \rho_0^5 x_5(\tau) + \mathcal{O}(\rho_0^6) \\ y(\tau) = \rho_0 y_1(\tau) + \rho_0^2 y_2(\tau) + \rho_0^3 y_3(\tau) + \rho_0^4 y_4(\tau) + \rho_0^5 y_5(\tau) + \mathcal{O}(\rho_0^6) \\ z(\tau) = \rho_0 z_1(\tau) + \rho_0^2 z_2(\tau) + \rho_0^3 z_3(\tau) + \rho_0^4 z_4(\tau) + \rho_0^5 z_5(\tau) + \mathcal{O}(\rho_0^6) \\ \widehat{p}_x(\tau) = \rho_0 \widehat{p}_{x1}(\tau) + \rho_0^2 \widehat{p}_{x2}(\tau) + \rho_0^3 \widehat{p}_{x3}(\tau) + \rho_0^4 \widehat{p}_{x4}(\tau) + \rho_0^5 \widehat{p}_{x5}(\tau) + \mathcal{O}(\rho_0^6) \\ \widehat{p}_y(\tau) = \rho_0 \widehat{p}_{y1}(\tau) + \rho_0^2 \widehat{p}_{y2}(\tau) + \rho_0^3 \widehat{p}_{y3}(\tau) + \rho_0^4 \widehat{p}_{y4}(\tau) + \rho_0^5 \widehat{p}_{y5}(\tau) + \mathcal{O}(\rho_0^6) \\ \varrho(\tau) = \rho_0 + \rho_0 \varrho_1(\tau) + \rho_0^2 \varrho_2(\tau) + \rho_0^3 \varrho_3(\tau) + \rho_0^4 \varrho_4(\tau) + \rho_0^5 \varrho_5(\tau) + \mathcal{O}(\rho_0^6). \end{cases} \quad (2.2)$$

Injectant les expressions ci-dessus dans (1.5b), nous obtenons que $\frac{d\varrho}{d\tau} = \mathcal{O}(\rho_0^5)$, ce qui implique que $\varrho(\tau) = \rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0^5)$. Le système dynamique (1.3) devient donc

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= u_1 \rho_0 + (u_2 x_1 - u_1 y_2)(ax_{11} x_1^2 + (ax_{12} + ay_{11})x_1 y_1 + ay_{12} y_1^2) \rho_0^4 \\ &\quad + \left(u_1 \rho_5 + \frac{1}{2}(u_2 x_1 - u_1 y_2)(\omega_{xx11} x_1^3 + (\omega_{xx12} + \omega_{xy11} + \omega_{yx11})x_1^2 y_1 \right. \\ &\quad \left. + (\omega_{xy12} + \omega_{yx12} + \omega_{yy11})x_1 y_1^2 + \omega_{yy12} y_1^3) \right) \rho_0^5 + \mathcal{O}(\rho_0^6) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= u_2 \rho_0 + (u_2 x_1 - u_1 y_2)(ax_{21} x_1^2 + (ax_{22} + ay_{21})x_1 y_1 + ay_{22} y_1^2) \rho_0^4 \\ &\quad + \left(u_2 \rho_5 + \frac{1}{2}(u_2 x_1 - u_1 y_2)(\omega_{xx21} x_1^3 + (\omega_{xx22} + \omega_{xy21} + \omega_{yx21})x_1^2 y_1 \right. \\ &\quad \left. + (\omega_{xy22} + \omega_{yx22} + \omega_{yy21})x_1 y_1^2 + \omega_{yy22} y_1^3) \right) \rho_0^5 + \mathcal{O}(\rho_0^6) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= \frac{1}{2}(u_2 x_1 - u_1 y_2) \rho_0^2 \\ &\quad + (u_2 x_1 - u_1 y_1)(ax_{31} x_1^2 + (ax_{32} + ay_{31})x_1 y_1 + ay_{32} y_1^2) \rho_0^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left((u_2 x_4 - u_1 y_4) + (u_2 x_1 - u_1 y_2)(\omega_{xx31} x_1^3 + (\omega_{xx32} + \omega_{xy31} + \omega_{yx31})x_1^2 y_1 \right. \\ &\quad \left. + (\omega_{xy32} + \omega_{yx32} + \omega_{yy31})x_1 y_1^2 + \omega_{yy32} y_1^3) \right) \rho_0^5 + \mathcal{O}(\rho_0^6). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pareil, en injectant (2.2) dans les équations pour \widehat{p}_x et \widehat{p}_y , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{p}_x}{d\tau} &= -\frac{u_2}{2} \rho_0 + \left(3u_2 ax_{31} x_1^2 + 2u_2(ax_{32} + ay_{31})x_1 y_1 + u_2 ay_{32} y_1^2 \right. \\ &\quad \left. - 2u_1 ax_{31} x_1 y_1 - u_1(ax_{32} + ay_{31})y_1^2 \right) \rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{p}_y}{d\tau} &= \frac{u_1}{2} \rho_0 + \left(-3u_1 ax_{32} y_1^2 - 2u_1(ax_{32} + ay_{31})x_1 y_1 - u_1 ax_{31} x_1^2 \right. \\ &\quad \left. + 2u_2 ay_{32} x_1 y_1 + u_2(ax_{32} + ay_{31})x_1^2 \right) \rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4). \end{aligned} \quad (2.7)$$

2. le choix de s'arrêter à l'ordre 4 pour les composantes x et y et à l'ordre 5 pour la composante z est motivé par le fait que ceux-ci sont les ordres maximales qui interviennent dans la détermination du lieu conjugué et dans la construction du lieu de coupure, comme on verra dans les chapitres qui suivent.

2.1.2 Intégration des jets de la dynamique

Pour intégrer les équations (2.2), nous allons procéder de façon itérative : d'abord, nous écrivons les équations qui régissent la dynamique des coefficients d'ordre k par rapport à ρ_0 (c'est-à-dire, les termes du type $x_k(\tau), y_k(\tau), \dots$), pour tout k ; nous faisons cela en isolant les termes d'ordre k dans les équations (2.3)-(2.4)-(2.5)-(2.6)-(2.7). Nous trouvons notamment

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= u_1 & \frac{d\widehat{p}_{x1}}{d\tau} &= -\frac{u_2}{2} \\ \frac{dy_1}{d\tau} &= u_2 & \frac{d\widehat{p}_{y1}}{d\tau} &= \frac{u_1}{2} \\ \frac{dz_1}{d\tau} &= 0 & \frac{d\varrho_1}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{d\tau} &= 0 & \frac{d\widehat{p}_{x2}}{d\tau} &= 0 \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= 0 & \frac{d\widehat{p}_{y2}}{d\tau} &= 0 \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= \frac{1}{2}(u_2x_1 - u_1y_1) & \frac{d\varrho_2}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ensuite, nous allons intégrer les groupes d'équations ci-dessus, en utilisant les résultats de l'ordre k pour calculer les ordres $k + 1$. Avant de procéder, nous devons considérer encore des questions : tout d'abord, quel type de fonctions de contrôle choisir ; ensuite, comment prendre en compte les commutations.

Pour répondre à ces questions, nous allons rappeler que, dans le cas générique, on peut s'attendre à trois comportements différents : extrémales de type bang-bang avec le signe de Θ constant pour tout $t \in [0, T]$; extrémales de type bang-bang pour lesquels Θ change de signe une ou plusieurs fois dans l'intervalle $t \in [0, T]$; extrémales qui peuvent contenir un ou plusieurs arcs singuliers. D'autre part, nous avons aussi vu que seulement les trajectoires correspondantes à des extrémales de la première catégorie peuvent atteindre des points (x, y, z) tels que $|z| \geq \frac{|xy|}{2} + \mathcal{O}(x^4, y^4)$. Comme nous sommes intéressés par cette région, nous allons nous concentrer sur le premier cas.

Pour ce qui concerne les commutations, nous nous attendons au fait que le temps de commutation, eux aussi, soient des petites perturbations des ceux trouvés dans la Section 1.2 ; pour prendre en compte ce fait, nous allons développer les temps de commutation en série de puissance de ρ_0 .

Nous soulignons que, grâce aux Lemmes 10-11, nous pouvons nous restreindre à l'étude des extrémales telles que

$$F(\boldsymbol{\lambda}(0)) > |G(\boldsymbol{\lambda}(0))| \quad \text{et} \quad \Theta(\boldsymbol{\lambda}(t)) > 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.10)$$

Nous allons enfin esquisser le pseudo-algorithme de calculs des trajectoires qui satisfont la condition (2.10).³

3. Dans le pseudo-algorithme ci-dessus, si Σ est une série de puissances dans la variable ρ_0 , $[\Sigma]_k$ dénote son coefficient d'ordre ρ_0^k , pour tout k .

1. poser les conditions initiales

$$\begin{aligned}x_k^1(0) &= 0 & y_k^1(0) &= 0 & z_k^1(0) &= 0 & \forall k \geq 1 \\p_{x1}^1 &= 1 & p_{xk}^1(0) &= 0 & \forall k \geq 2 \\p_{y1}^1 &= p_y^0 \in (-1, 1) & p_{xk}^1(0) &= 0 & \forall k \geq 2 \\ \rho_1^1 &= \rho_0 & \rho_k^1(0) &= 0 & \forall k \geq 2.\end{aligned}$$

2. en posant $u_1 = 1, u_2 = 0$

(i) intégrer l'équation (2.8) pour $\tau \geq 0$

(ii) injecter les résultats de l'étape précédente, et intégrer l'équation (2.9) pour $\tau \geq 0$

(iii) procéder ainsi jusqu'à l'ordre souhaité.

3. poser $x(\tau) = \sum_{k \geq 1} x_k^1(\tau) \rho_0^k$ (pareil pour les autres variables)

4. Définir $\mathcal{T}_1 = \sum_{k \geq 1} \mathcal{T}_1^k \rho_0^{k^4}$; poser les conditions initiales

$$\begin{aligned}x_k^2(0) &= [x(\mathcal{T}_1)]_k & y_k^2(0) &= [y(\mathcal{T}_1)]_k & z_k^2(0) &= [z(\mathcal{T}_1)]_k & \forall k \geq 1 \\p_{xk}^2 &= [p_x(\mathcal{T}_1)]_k & p_{yk}^2(0) &= [p_y(\mathcal{T}_1)]_k & \forall k \geq 1 \\ \rho_1^2 &= \rho_0 & \rho_k^2(0) &= [\varrho(\mathcal{T}_1)]_k & \forall k \geq 2.\end{aligned}$$

5. en posant $u_1 = 0, u_2 = 1$

(i) intégrer l'équation (2.8) pour $\tau \geq 0$

(ii) injecter les résultats de l'étape précédente, et intégrer l'équation (2.9) pour $\tau \geq 0$

(iii) procéder ainsi jusqu'à l'ordre souhaité.

6. poser $x(\tau) = \sum_{k \geq 1} x_k^2(\tau) \rho_0^k$ (pareil pour les autres variables).

7. Définir $\Delta\tau_2 = \sum_{k \geq 1} \delta\tau_k^2 \rho_0^k$; poser les conditions initiales

$$\begin{aligned}x_k^3(0) &= [x(\Delta\tau_2)]_k & y_k^3(0) &= [y(\Delta\tau_2)]_k & z_k^3(0) &= [z(\Delta\tau_2)]_k & \forall k \geq 1 \\p_{xk}^3 &= [p_x(\Delta\tau_2)]_k & p_{yk}^3(0) &= [p_y(\Delta\tau_2)]_k & \forall k \geq 1 \\ \rho_1^3 &= \rho_0 & \rho_k^3(0) &= [\varrho(\Delta\tau_2)]_k & \forall k \geq 2.\end{aligned}$$

8. poser $u_1 = -1, u_2 = 0$, et répéter les étapes (i)-(ii)-(iii).

9. continuer ainsi jusqu'au nombre d'arcs souhaités.

Le calcul des trajectoires a été mené à terme grâce au logiciel de calcul symbolique Mathematica. Les algorithmes utilisés se trouvent dans l'Annexe C. En particulier, pour intégrer les jets des équations de Hamilton nous avons utilisé le code `integration-sys.nb`.

Les jets d'un géodésique bang-bang avec $\Theta > 0$ et dont le premier contrôle est $\mathbf{u} = (1, 0)$ sont disponibles dans l'Annexe A.3.

Nous allons procéder de façon analogue pour calculer les coefficients du développement des temps de commutation. Nous allons toujours illustrer la procédure pour les extrémales de type bang-bang qui satisfont la condition (2.10).

Le temps (reparamétré) de commutation \mathcal{T}_1 est déterminé par la condition

$$F(t(\mathcal{T}_1)) = G(t(\mathcal{T}_1)) = 1$$

4. les termes \mathcal{T}_1^k sont juste des coefficients qui resteront implicites dans cette partie de l'algorithme, tout comme les coefficients $\delta\tau_k$ ci-dessous

(plus précisément : il est le plus petit $\mathcal{T}_1 > 0$ pour lequel l'équation ci-dessus est vérifiée).

Nous rappelons que, le long du premier arc, F est constant et $\frac{d}{dt}(G(\boldsymbol{\lambda}(t))) = \Theta(\boldsymbol{\lambda}(t))$. Nous injectons les développements pour $(\mathbf{p}(\tau), \boldsymbol{\xi}(\tau))$ dans l'expression (A.2), nous obtenons

$$\begin{aligned}\widehat{\Theta} &= 1 + \widehat{\Theta}_1 \rho_0 + \widehat{\Theta}_2 \rho_0^2 + \widehat{\Theta}_3 \rho_0^3 + \dots \\ &= 1 - 4(ax_{31}x_1^2 + ay_{32}y_1^2 + (ax_{32} + ay_{31})x_1y_1)\rho_0^2 + \dots\end{aligned}$$

(nous remarquons, en particulier, que $\widehat{\Theta}_1 = 0$). Pour déterminer les coefficients dans la série qui définit \mathcal{T}_1 , nous imposons que l'équation suivante soit vérifiée à tout ordre en ρ_0 :

$$\begin{aligned}1 &= G(\boldsymbol{\lambda}(t(\mathcal{T}_1))) = G(\boldsymbol{\lambda}(0)) + \int_0^{t(\mathcal{T}_1)} \Theta(\mathbf{p}(\tau), \mathbf{x}(\tau)) dt \\ &= p_y(0) + \int_0^{\mathcal{T}_1} \widehat{\Theta}(\mathbf{p}(\tau), \mathbf{x}(\tau)) d\tau \\ &= p_y(0) + \int_0^{\mathcal{T}_1^0} (1 + \rho_0^2 \widehat{\Theta}_2 + \dots) d\tau + \int_{\mathcal{T}_1^0}^{\mathcal{T}_1^0 + \rho_0 \mathcal{T}_1^1} (1 + \rho_0^2 \Theta_2 + \dots) d\tau + \dots,\end{aligned}$$

où, nous rappelons, $(\mathbf{p}(\tau), \boldsymbol{\xi}(\tau))$ correspondent aux fonctions calculées à l'étape 3 de l'algorithme à la page précédente. Nous allons obtenir l'expression (A.9).

Le deuxième temps (reparamétré) de commutation $\mathcal{T}_2 = \sum_{k \geq 0} \mathcal{T}_2^k \rho_0^k$ est caractérisé par l'équation $F(\boldsymbol{\lambda}(t(\mathcal{T}_2))) = -G(\boldsymbol{\lambda}(t(\mathcal{T}_2))) = -11$. Comme $F(\boldsymbol{\lambda}(t(\mathcal{T}_1))) = 1$, ceci impose

$$\begin{aligned}2 &= F(\boldsymbol{\lambda}(t(\mathcal{T}_1))) - F(\boldsymbol{\lambda}(t(\mathcal{T}_2))) = \int_{\mathcal{T}_1}^{\mathcal{T}_2} \widehat{\Theta}(\mathbf{p}(\tau), \mathbf{x}(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^{\Delta\tau_2} \widehat{\Theta}(p_x(\tau), p_y(\tau), \rho(\tau)x(\tau), y(\tau), z(\tau)) d\tau,\end{aligned}$$

où $(p_x(\tau), p_y(\tau), \rho(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ sont les fonctions calculées à l'étape 6 de l'algorithme à la page précédente. Un fois trouvé les coefficients de $\Delta\tau_2$, nous posons

$$\mathcal{T}_2^k = \mathcal{T}_1^k + \delta\tau_2^k, \quad k \geq 0.$$

Nous allons procéder de la même façon pour trouver les temps de commutation.

Tous ces calculs ont été réalisés en utilisant le code `switching-times.nb` (en Annexe).

Remarque 10 *Grâce aux Lemmes 10-11, il n'y a pas besoin de calculer les temps de commutations pour toutes les trajectoires bang-bang le long desquelles $\Theta > 0$: en effet, il suffit d'appliquer la bonne permutation des invariants (équation (1.24)) aux résultats que nous venons d'obtenir pour les extrémales qui satisfont la conditions (2.10).*

Nous terminons la section en introduisant une notation pour les trajectoires que nous allons étudier dans la suite de cette thèse. Ceci nous permettra

d'éviter de répéter des longues caractérisations comme “géodésique associé à une extrémale de type bang-bang régulière, satisfaisant la condition (2.10) (ou autre) avec $p_z(0) \gg 1$ ”. Pour tout $\rho_0 > 0$ assez petit, nous définissons la classe

$$\Gamma_f^{\rho_0} = \left\{ \xi : [0, 10\rho_0] \rightarrow \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{l} \lambda = (\mathbf{p}, \xi) \text{ extrémale du problème (1.4)} \\ \xi(0) = (0, 0, 0) \\ \mathbf{p}(0) = (1, p_y^0, p_z^0) \text{ avec } p_y^0 \in [-1, 1) \text{ et } p_z^0 \geq \frac{1}{\rho_0} - 1 \\ \exists 0 < \mathcal{T}_1 < \dots < \mathcal{T}_5 \leq 10\rho_0 \text{ t.q.} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}|_{(0, \mathcal{T}_1)} = \mathbf{u}|_{(\mathcal{T}_4, \mathcal{T}_5)} = (1, 0) \\ \mathbf{u}|_{(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)} = (0, 1) \\ \mathbf{u}|_{(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)} = (-1, 0) \\ \mathbf{u}|_{(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4)} = (0, -1) \end{array} \right. \end{array} \right\} .$$

Les géodésiques contenues dans $\Gamma_f^{\rho_0}$ sont du type bang-bang, sont associées à un $p_z(0)$ assez grand, et se comportent qualitativement comme les géodésiques bang-bang du système de Heisenberg qui démarrent avec vitesse f , et dont le contrôle commute au moins 5 fois dans l'intervalle $[0, 10\rho_0]$.

Nous définissons (de façon analogue) $\Gamma_{-f}^{\rho_0}$, $\Gamma_g^{\rho_0}$ and $\Gamma_{-g}^{\rho_0}$. Nous définissons aussi

$$\Gamma^\rho = \Gamma_f^{\rho_0} \cup \Gamma_{-f}^{\rho_0} \cup \Gamma_g^{\rho_0} \cup \Gamma_{-g}^{\rho_0}.$$

Dans la suite, comme ρ_0 sera toujours fixé à l'avance, nous allons abandonner l'indice ρ_0 dans la définition des classes Γ .

Notation. Dans les sections suivantes, nous aurons à comparer plusieurs géodésiques appartenant à des ensembles différents (parfois, appartenant également au même ensemble, comme dans la Section 2.3.1). Nous rappelons que la première composante p_x^0 du vecteur adjoint à l'instant 0 associé à une géodésique de l'ensemble Γ_f (Γ_{-f}) vaut 1 (respectivement, -1); de manière analogue, la seconde composante p_y^0 du vecteur adjoint à l'instant 0 associé à une géodésique de l'ensemble Γ_g (Γ_{-g}) vaut 1 (respectivement, -1). Afin d'éviter toute confusion lors de la comparaison des vecteurs adjoints associés à différentes géodésiques, dans la suite, nous chercherons de nous tenir à la notation suivante :

- $(p_x^0, p_y^0) = (1, \gamma)$ pour les géodésiques de l'ensemble Γ_f ;
- $(p_x^0, p_y^0) = (-1, \nu)$ pour les géodésiques de l'ensemble Γ_{-f} ;
- $(p_x^0, p_y^0) = (\beta, 1)$ pour les géodésiques de l'ensemble Γ_g ;
- $(p_x^0, p_y^0) = (\chi, -1)$ pour les géodésiques de l'ensemble Γ_{-g} .

2.2 Premières considérations sur l'optimalité des géodésiques

2.2.1 Réduction aux géodésiques avec au plus 5 arcs de type bang

La littérature sur les conditions (nécessaires et suffisantes) pour l'optimalité locale des extrémales de type bang-bang est très vaste. Nous allons juste citer les papiers [2, 5, 28, 31], qui partagent la même approche, basée sur les techniques

du contrôle géométrique et sur les méthodes Hamiltoniens (voir [32] pour une revue sur ces méthodes).

En particulier, dans l'article [31], l'auteur a utilisé ces méthodes pour trouver des bornes sur le nombre maximal d'arcs contenus dans une géodésique optimale (en temps petit). Plus précisément, nous pouvons appliquer [31, Lemma 1] et conclure que, si $T > 0$ est assez petit et $\gamma : [0, T'] \rightarrow M$, $T \leq T'$, est une géodésique optimale du problème (1.4) de type bang-bang, alors γ est composé par *au plus cinq arcs bang*.

Nous allons ici rappeler en grandes lignes les étapes de la méthode. En effet, les critères dans [5, 28, 31] se basent tous les trois sur l'étude du signe d'une forme quadratique.

Nous allons effectuer notre analyse sur une trajectoire de type Γ_f , mais nous pouvons appliquer les résultats aux autres géodésiques de la classe Γ , grâce aux Lemmes 10-11.

Soit $T \ll 1$, et soit $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ une trajectoire admissible pour le système (1.3), associée à une extrémale λ tel que $p_z(0) \gg 1$. Nous supposons aussi λ satisfait la condition (2.10), et que γ est composé par 6 arcs de type bang. Tout ça implique qu'ils existent 5 temps $\tau_i \in (0, T)$, $\tau_{i-1} < \tau_i$, tels que

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{cases} h_1(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) & t \in [0, \tau_1) \\ h_2(\gamma(t)) = g(\gamma(t)) & t \in [\tau_1, \tau_2) \\ h_3(\gamma(t)) = -f(\gamma(t)) & t \in [\tau_2, \tau_3) \\ h_4(\gamma(t)) = -g(\gamma(t)) & t \in [\tau_3, \tau_4) \\ h_5(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) & t \in [\tau_4, \tau_5) \\ h_6(\gamma(t)) = g(\gamma(t)) & t \in [\tau_5, T]. \end{cases}$$

Lemme 13 *L'extrémale λ satisfait les Assumptions (2.1)–(2.5) dans l'article [28].*

Preuve. Dans l'article en question, **Assumption (2.1)** est juste le PMP, et **Assumption (2.4)** est juste le fait que Θ soit positif le long de l'extrémale.

Assumption (2.2) requiert que le contrôle associé à la trajectoire est le seul qui maximise le Hamiltonien (équation (1.5c)), sauf au points de commutation τ_i ; elle est vérifiée parce que $\Theta(\lambda(\tau))$ est positif sur tout $[0, \tau(T)]$, ce qui implique que les fonctions de commutation peuvent être nulles seulement au temps de commutation. **Assumption (2.3)** est vérifiée par le fait que les deux fonctions de commutation ne peuvent pas être toute les deux nulles le long d'une extrémale.

Enfin, **Assumption (2.5)**, qui demande que la géodésique n'ait pas d'auto-intersections, est banalement vérifiée. \square

En suivant [28], nous définissons $g_1 = h_1$ et, pour $k \geq 2$,

$$g_k = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \exp(-(\tau_i - \tau_{i-1})h_i)_* \right) h_k \circ \exp((\tau_{k-1} - \tau_{k-2})h_{k-1}) \circ \dots \circ \exp(\tau_1 h_1)$$

où $\tau_0 = 0$.

Pour calculer les champs g_k , nous allons utiliser la formule suivante, valable pour tout champ de vecteurs X, Y de classe C^∞ :

$$\frac{d}{dt} \exp(-tX)_* Y \circ \exp(tX) = \exp(-tX)_* [X, Y] \circ \exp(tX).$$

En effet, cette formule nous permet d'écrire les champs g_k sous forme de série de puissances :

$$\begin{aligned} g_2 &= \sum_{j \geq 0} \frac{\tau_1^j}{j!} \text{ad}_f^j g \\ &= g + \tau_1 [f, g] + \mathcal{O}(\tau_1^2) \\ g_3 &= \sum_{j, k \geq 0} \frac{\tau_1^j}{j!} \frac{(\tau_2 - \tau_1)^k}{k!} \text{ad}_f^j \text{ad}_g^k (-f) \\ &= -f + (\tau_2 - \tau_1) [f, g] + \mathcal{O}(\tau^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_4 &= \sum_{j, k, l \geq 0} \frac{\tau_1^j}{j!} \frac{(\tau_2 - \tau_1)^k}{k!} \frac{(\tau_3 - \tau_2)^l}{l!} \text{ad}_f^j \text{ad}_g^k \text{ad}_{-f}^l (-g) \\ &= -g + (\tau_3 - \tau_2 - \tau_1) [f, g] + \mathcal{O}(\tau^3) \\ g_5 &= \sum_{j, k, l, m \geq 0} \frac{\tau_1^j}{j!} \frac{(\tau_2 - \tau_1)^k}{k!} \frac{(\tau_3 - \tau_2)^l}{l!} \frac{(\tau_4 - \tau_3)^m}{m!} \text{ad}_f^j \text{ad}_g^k \text{ad}_{-f}^l \text{ad}_{-g}^m f \\ &= f - (\tau_3 - \tau_4 + \tau_2 - \tau_1) [f, g] + \mathcal{O}(\tau^2) \\ g_6 &= \sum_{j, k, l, m, n \geq 0} \frac{\tau_1^j}{j!} \frac{(\tau_2 - \tau_1)^k}{k!} \frac{(\tau_3 - \tau_2)^l}{l!} \frac{(\tau_4 - \tau_3)^m}{m!} \frac{(\tau_5 - \tau_4)^n}{n!} \text{ad}_f^j \text{ad}_g^k \text{ad}_{-f}^l \text{ad}_{-g}^m \text{ad}_f^n g \\ &= g + (\tau_5 - \tau_4 - \tau_3 + \tau_2 + \tau_1) [f, g] + \mathcal{O}(\tau^2), \end{aligned}$$

où dans les formules ci-dessus nous avons exploité le fait que $\tau_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{p_z(0)}\right)$ pour tout k pour écrire, avec un petit abus de notation, le reste sous forme $\mathcal{O}(\tau^2)$.

Pour étudier l'optimalité d'une trajectoire composée par $r + 1$ arcs bangs (dans notre cas, $r \leq 5$), nous devons étudier le signe de la forme quadratique⁵

$$J''[\epsilon^2] = - \sum_{1 \leq i < j \leq r+1} \epsilon_i \epsilon_j \langle \lambda(0), [g_i, g_j](\xi(0)) \rangle \quad (2.11)$$

sur l'espace

$$\mathcal{W} = \left\{ \epsilon \in \mathbb{R}^{r+1} : \sum_{j=1}^{r+1} \epsilon_j g_j(\xi(0)) = 0 \right\}.$$

Pour étudier \mathcal{W} , nous allons utiliser le fait que f, g et $[f, g]$ constituent (en tout point) une base de \mathbb{R}^3 . Comme il s'agit d'un espace vectoriel, nous allons considérer les variation de norme 1.

$r \leq 2$ Si $r \leq 2$, il est immédiat de voir que l'espace \mathcal{W} est vide. Par définition, J'' est coercive, donc la trajectoire est localement optimale.

5. les formes quadratique définies dans les articles [5, 28] sont égales, à moins d'un signe : en effet, [5] requiert que la forme quadratique soit *non-positive* (et fournit une condition *nécessaire* pour l'optimalité), alors que [28] requiert que la forme quadratique soit *positive* (et fournit une condition *suffisante* pour l'optimalité. Nous allons adopter la définition de [28])

$r = 3$ l'équation $\sum_{k=1}^4 \epsilon_i g_i = 0$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} 0 &= ((\epsilon_1 - \epsilon_3 + \mathcal{O}(\tau^2))f(0) \\ &\quad + (\epsilon_2 - \epsilon_4 + \mathcal{O}(\tau^2))g(0) \\ &\quad + (\epsilon_2\tau_1 + \epsilon_3(\tau_2 - \tau_1) + \epsilon_4(\tau_3 - \tau_2 - \tau_1) + \mathcal{O}(\tau^2))[f, g](0), \end{aligned}$$

d'où $\epsilon_3 = \epsilon_1 + \mathcal{O}(\tau^2)$, $\epsilon_2 = \epsilon_4 + \mathcal{O}(\tau^2)$ et $\epsilon_4(\tau_3 - \tau_2) + \epsilon_1(\tau_2 - \tau_1) = \mathcal{O}(\tau^2)$. D'autre part, il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} J''[\epsilon^2] &= -p_z^0(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_3\epsilon_4 + \epsilon_3\epsilon_3 - \epsilon_1\epsilon_4) + \mathcal{O}(\tau) \\ &= 2p_z^0\epsilon_1^2 + \mathcal{O}(\tau). \end{aligned}$$

Nous observons qu'une variation ϵ de norme 1 avec $\epsilon_1 = 0$ n'est pas admissible. En effet, $\epsilon_1 = 0$ implique $|\epsilon| = \mathcal{O}(\tau^2)$. Donc nous pouvons toujours choisir $\epsilon_1 = 1$, qui montre $J''|_{\mathcal{W}} = 2p_z^0 + \mathcal{O}(\tau) > 0$. Les trajectoires avec 4 arcs de type bang sont toujours localement optimales.

$r = 4$ nous allons répéter la même procédure. De l'analyse de l'espace des variations \mathcal{W} , nous pouvons déduire les contraintes

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= \epsilon_4 + \mathcal{O}(\tau^2) \\ \epsilon_3 &= \epsilon_1 + \epsilon_5 + \mathcal{O}(\tau^2) \\ \epsilon_1(\tau_2 - \tau_1) + \epsilon_4(\tau_3 - \tau_2) + \epsilon_5(\tau_4 - \tau_3) &= \mathcal{O}(\tau^2). \end{aligned}$$

Restreinte à l'espace \mathcal{W} , la forme quadratique (2.11) a la forme $J''[\epsilon^2] = 2p_z^0\epsilon_4^2 + \mathcal{O}(\tau)$. Toutefois, dans \mathcal{W} existent des variations non triviales ϵ telles que $\epsilon_4 = 0$ (il suffit de choisir, par exemple, $\epsilon_4, \epsilon_2, \epsilon_3 = \mathcal{O}(\tau^2)$, $\epsilon_1 = 1$ et $\epsilon_5 = -1 + \mathcal{O}(\tau^2)$). Le signe de J'' évaluée sur cette variation dépend des termes qu'on a négligés : il n'est donc pas possible de conclure sur l'optimalité des trajectoires (une analyse plus fine est nécessaire).

$r = 5$ dans ce cas, les variations $\epsilon \in \mathcal{W}$ satisfont aux contraintes suivantes

$$\begin{aligned} \epsilon_4 &= \epsilon_2 + \epsilon_6 + \mathcal{O}(\tau^2) \\ \epsilon_3 &= \epsilon_1 + \epsilon_5 + \mathcal{O}(\tau^2) \\ \epsilon_2\tau_1 + \epsilon_3(\tau_2 - \tau_1) + \epsilon_4(\tau_3 - \tau_2 - \tau_1) + \epsilon_5(\tau_4 - \tau_3 - \tau_2 + \tau_1) \\ &\quad + \epsilon_6(\tau_5 - \tau_4 - \tau_3 + \tau_2 + \tau_1) = \mathcal{O}(\tau^2). \end{aligned}$$

La forme quadratique (2.11), restreinte à \mathcal{W} , a la forme

$$J''[\epsilon^2] = 2p_z^0(\epsilon_2^2 + \epsilon_2\epsilon_6 - \epsilon_5\epsilon_6) + \mathcal{O}(\tau), \quad (\epsilon_2, \epsilon_5, \epsilon_6) \in \mathbb{R}^3. \quad (2.12)$$

Il est possible de vérifier numériquement que (2.12) possède une valeur propre positive et deux négatives (respectivement, arrondies au deuxième décimal, -2.48, 1.17, -0.69). Donc la condition nécessaire n'est pas vérifiée, et une trajectoire avec 6 arcs bang n'est sûrement pas optimale.

2.2.2 Calcul des temps conjugués

L'analyse menée dans la Section 2.2.1 nous permet de nous concentrer seulement sur les géodésiques composées par 4 ou 5 arcs de type bang. En effet, celles

qui sont composées par au plus 3 arcs de type bang sont sûrement localement optimales ; celles qui contiennent plus que 5 arcs bang peuvent être écartées, car sûrement pas optimales.

Pour investiguer l'optimalité des géodésiques composées pas 4 ou 5 arcs de type bang, plutôt que répéter la procédure de la section précédente en tenant en compte des ordres supérieurs, nous préférons calculer le déterminant de l'application exponentiel, et chercher ses changements de signe, afin d'appliquer le Lemme 5. Grâce au soutien du logiciel de calcul symbolique Mathematica, il est possible de calculer l'expansion en puissances de ρ_0 de la Jacobienne de l'application exponentielle. Il s'avère que la Jacobienne est constante (par rapport au temps) sur chaque arc, au moins, jusqu'à l'ordre que nous avons calculé.

La Jacobienne de l'application exponentielle associée à des géodésiques dans les classes $\Gamma_{\pm f}$, est donnée par

$$\text{JExp}|_{(p_y^0, p_z^0, \tau)} = \begin{cases} 0 & \tau \in [0, \mathcal{T}_2(p_y^0, p_z^0)) \\ 4\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4) & \tau \in (\mathcal{T}_2(p_y^0, p_z^0), \mathcal{T}_3(p_y^0, p_z^0)) \\ 8\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4) & \tau \in (\mathcal{T}_3(p_y^0, p_z^0), \mathcal{T}_4(p_y^0, p_z^0)) \\ 256\text{ax}_{31}\rho_0^5 + 32(D_1 p_y^0 \pm E_1)\rho_0^6 + \mathcal{O}(\rho_0^7) & \tau \in (\mathcal{T}_4(p_y^0, p_z^0), \mathcal{T}_5(p_y^0, p_z^0)) \\ -8\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4) & \tau \in (\mathcal{T}_5(p_y^0, p_z^0), \mathcal{T}_6(p_y^0, p_z^0)), \end{cases}$$

où nous avons introduit les notation suivantes

$$D_1 = 9\text{ax}_{21} - 15\omega_{xx31} \quad E_1 = 3\text{ax}_{11} - 3\text{ax}_{22} - 3\text{ay}_{21} + 5\omega_{xx32} + 5\omega_{xy31} + 5\omega_{yx31}. \quad (2.13)$$

Pareil, la Jacobienne de l'application exponentielle associée à des géodésiques dans les classes $\Gamma_{\pm g}$, est donnée par

$$\text{JExp}|_{(p_x^0, p_z^0, \tau)} = \begin{cases} 0 & \tau \in [0, \mathcal{T}_2(p_x^0, p_z^0)) \\ 4\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4) & \tau \in (\mathcal{T}_2(p_x^0, p_z^0), \mathcal{T}_3(p_x^0, p_z^0)) \\ 8\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4) & \tau \in (\mathcal{T}_3(p_x^0, p_z^0), \mathcal{T}_4(p_x^0, p_z^0)) \\ 256\text{ay}_{32}\rho_0^5 - 32(D_2 p_x^0 \mp E_2)\rho_0^6 + \mathcal{O}(\rho_0^7) & \tau \in (\mathcal{T}_4(p_x^0, p_z^0), \mathcal{T}_5(p_x^0, p_z^0)) \\ -8\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4) & \tau \in (\mathcal{T}_5(p_x^0, p_z^0), \mathcal{T}_6(p_x^0, p_z^0)), \end{cases}$$

où

$$D_2 = -9\text{ay}_{12} - 15\omega_{yy32} \quad E_2 = -3\text{ax}_{12} - 3\text{ay}_{11} - 3\text{ay}_{22} - 5\omega_{xy32} - 5\omega_{yx32} - 5\omega_{yy31}.$$

Les valeurs de la Jacobienne (interprétées au vu du Lemme 5) confirment les résultats de l'analyse menée dans la Section 2.2.1 : en effet, si nous négligeons les premiers deux arcs, le long desquels le déterminant est identiquement nul (nous avons déjà discuté le sens de cela dans le Lemme 4), nous constatons que le premier ordre non nul dans le développement du déterminant est l'ordre 3, sauf le long du cinquième arc, où l'ordre dominant est au moins l'ordre 5. En plus, nous remarquons que, pour n'importe quelle géodésique (de celles en étude), le JExp est positif le long du troisième et quatrième arc, négative le long du sixième. Ceci nous dit que

- toute géodésique (de ce type) avec au plus 4 arcs de type bang est (localement) optimale
- toute géodésique (de ce type) avec plus que 5 arcs de type bang n'est pas optimale

— pour statuer où se situe la perte d'optimalité locale, l'ordre 3 ne suffit pas.

En particulier, l'information recherchée est contenue dans les invariants de la métrique, plus précisément l'invariant ax_{31} (ay_{32} pour les trajectoires des classes $\Gamma_{\pm g}$) ou, si ceci est nul, dans la quantité $D_1 p_y^0 \pm E_1$ (respectivement, $D_2 p_x^0 \mp E_2$).

Ces observations sont résumées dans les Propositions suivantes :

Proposition 3 *Si $ax_{31} < 0$, \mathcal{T}_4 est le temps conjugué pour toutes les extrémales qui correspondent aux géodésiques des classes $\Gamma_{\pm f}$; en particulier, ces géodésiques cessent d'être localement optimales au passage du quatrième au cinquième arc. Si $ax_{31} > 0$, le temps conjugué pour ces extrémales coïncide avec \mathcal{T}_5 , et les géodésiques perdent l'optimalité locale au cinquième point de commutation.*

De même, le temps conjugué pour toutes les extrémales qui correspondent aux géodésiques des classes $\Gamma_{\pm g}$ coïncide avec \mathcal{T}_4 lorsque $ay_{32} < 0$ et avec \mathcal{T}_5 lorsque $ay_{32} > 0$.

Proposition 4 *Supposons que $ax_{31} = 0$ et que $|E_1| \neq |D_1|$. Si $E_1 < -|D_1|$ (respectivement, $E_1 > |D_1|$), alors le quatrième (respectivement, cinquième) temps de commutation est le temps conjugué pour toute géodésique de la classe Γ_f . D'autre part, si $|E_1| < |D_1|$, alors le temps conjugué pour toute géodésique de la classe Γ_f telle que $D_1 p_y^0 + E_1 < 0$ (respectivement, $D_1 p_y^0 + E_1 > 0$) est donné par son quatrième (respectivement, cinquième) temps de commutation.*

Pour les géodésiques des classes Γ_{-f} et $\Gamma_{\pm g}$ dans les cas dégénères où $ax_{31} = 0$ et $ay_{32} = 0$ sont valables.

Remarque 11 *Si $ax_{31} = 0$ et $0 < |E_1| < |D_1|$, pour trouver les temps conjugués de la géodésique pour laquelle $p_y^0 = -\frac{E_1}{D_1}$, une analyse à l'ordre supérieure (c'est-à-dire, le calcul - au moins - du terme de $JExp$ d'ordre 7 en ρ_0 , le long du cinquième arc) est nécessaire ; ce calcul implique les fonctions ϕ_{ij} dans la forme normale des champs de vecteurs f et g . Comme il s'agit d'une seule géodésique, et nous sommes intéressés à trouver la forme des lieux de coupure et conjugué, nous négligeons ce cas.*

Nous introduisons les notations suivantes

$$\begin{aligned} C_1 &= 8ax_{31} & C_2 &= 8ay_{32}, \\ A &= 4ax_{32} + 4ay_{31}. \end{aligned}$$

Avec E_1, E_2, D_1 et D_2 , ce sont les invariants qui nous fournissent une classification complète du lieu de coupure. Pour faciliter les calculs futurs, nous définissons aussi les constantes

$$c_1 = 4ax_{12} + 7ax_{21} + 4ay_{11} - 12ay_{22} + 15\omega_{xx31} + 20\omega_{xy32} + 20\omega_{yx32} + 20\omega_{yy31}$$

$$d_1 = 4ax_{22} + ay_{12} + 4ay_{21} + 15\omega_{yy32}$$

$$c_2 = 12ax_{11} - 4ax_{22} - 7ay_{12} - 4ay_{21} + 20\omega_{xx32} + 20\omega_{xy31} + 20\omega_{yx31} + 15\omega_{yy32}$$

$$d_2 = 4ax_{12} + ax_{21} + 4ay_{11} - 15\omega_{xx31}.$$

Différemment de $C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$, elles ne participent pas à la classification du lieu de coupure.

2.3 Calculs des fronts des géodésiques avec 4 ou 5 arcs

Nous avons déjà noté qu'une trajectoire peut perdre son optimalité globale sans perdre son optimalité locale. Dans le cas étudié dans la Section 1.2, qui nous inspire le long de toute cette thèse, nous avons en effet constaté que, au quatrième temps de commutation \mathbb{T}_4 , toute géodésique de type bang-bang croise des géodésiques (bang-bang) "lointaines", c'est-à-dire, dont le contrôle initial est différent.

Pour déterminer les points de coupure, il faut donc chercher les points de Maxwell ; pour cela faire, nous allons examiner les auto-intersection du front d'onde à un certain temps fixé \mathbf{T} . Nous rappelons la définition ci-dessus.

Définition 11 *Le front d'onde au temps \mathbf{T} est l'ensemble*

$$\mathscr{W}_{\mathbf{T}} = \left\{ \xi(\mathbf{T}) : \begin{array}{l} \xi : [0, T'] \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ est une géodésique du problème (1.4)} \\ \mathbf{T} \leq T' \end{array} \right\}.$$

Nous définissons aussi le sous-ensemble de $\mathscr{W}_{\mathbf{T}}$ formé seulement par les valeurs au temps \mathbf{T} des géodésiques contenues dans la classe Γ :

$$\mathscr{W}_{\mathbf{T}}^{\Gamma} = \left\{ \xi(\mathbf{T}) : \begin{array}{l} \xi : [0, T'] \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ est une géodésique du problème (1.4)} \\ \mathbf{T} \leq T' \\ \xi \in \Gamma \end{array} \right\}.$$

Dans le cas générique, nous n'avons pas une expression analytique trop lisible des trajectoires (en particulier, il n'est pas vrai que, le long de chaque arc, au moins une coordonnée entre x et y est constante). Pour pouvoir trouver plus aisément les auto-intersections de $\mathscr{W}_{\mathbf{T}}^{\Gamma}$, nous nous restreignons à la *suspension du front*, c'est-à-dire aux intersections de $\mathscr{W}_{\mathbf{T}}^{\Gamma}$ avec le plan de coordonnée verticale z constante, ce qui nous permet de bloquer la valeur d'au moins une coordonnée ; dans la suite, nous allons toujours fixer la valeur de cette constante à $4\zeta^2$, où ζ est une constante positive du même ordre de grandeur que ρ_0 .

Ci dessous, nous allons détailler le calcul de la suspension des fronts des géodésiques de la classe Γ_f , les autres pouvant être retrouvées en appliquant les rotations et les permutations convenables, comme expliqué dans les Lemmes 10-11.

Tout d'abord, nous fixons une constante ζ , petite et positive, et un temps $\mathbf{T} = T_1\zeta + T_2\zeta^2 + T_3\zeta^3 + T_4\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5)$.

Nous rappelons que les géodésiques que nous considérons sont définies par morceaux, leur expression analytique comme fonctions du temps changeant à chaque temps de commutation ; d'ailleurs, dans l'Annexe A.3, nous donnons l'expression pour tous les arcs bang, jusqu'au cinquième. Donc, pour calculer le front, nous devons distinguer entre les trajectoires qui au temps \mathbf{T} n'ont jamais commuté, ont commuté une fois, deux fois, etc.

D'un autre coté, l'analyse du système de Heisenberg nous suggère que les auto-intersections du front qui peuvent causer une perte d'optimalité arrivent soit autour du quatrième point de commutation, soit entre le quatrième et le cinquième point de commutation : nous allons donc restreindre notre attention à ces géodésiques. Pour cela faire, nous imposons $T_1 \in (6, 10)$ et nous prenons

en considération seulement les géodésiques projections d'extrémales telles que $p_z^0 \sim \zeta^{-1}$; plus précisément, telles que $p_z^0 = 1/\rho_0$, pour $\rho_0 = \zeta + \mathcal{O}(\zeta^2)$: en effet, un tel \mathbf{T} se trouve entre le troisième et le cinquième temps de commutation de ces géodésiques.

“Cinquième front bang”. Premièrement, nous allons considérer la suspension du front des géodésiques qui au temps \mathbf{T} ont déjà dépassé leur quatrième temps de commutation. Ceci revient à fixer $\mathbf{p} = (1, p_y^0, p_z^0)$ et à restreindre p_y^0 aux valeurs contenues en $[-1, 1)$ telles que $\mathbb{T}_4(p_y^0, p_z^0) \leq \mathbf{T}$ (ici, $\mathbb{T}_4(p_y^0, p_z^0)$ dénote le quatrième temps de commutation de la géodésique associée à l'extrémale $\lambda(0) = (1, p_y^0, p_z^0, 0, 0, 0)$). Nous posons aussi $\rho_0 = 1/p_z^0$.

L'ensemble $\text{Exp}(\mathbf{p}, \mathbf{T})$ est appelé *cinquième front bang*; son sous-ensemble $\text{Exp}(\mathbf{p}, \mathbf{T}) \cap \{z = 4\zeta^2\}$ est appelé *suspension* (au plan $\{z = 4\zeta^2\}$) du cinquième front bang.

Le temps reparamétré $\mathbf{T}(\tau)$ le long de l'extrémale λ est donné par l'équation

$$\mathbf{T} = \rho_0 \tau + \int_0^\tau \rho_4(\varsigma) \rho_0^4 + \rho_5(\varsigma) \rho_0^5 d\varsigma + \mathcal{O}(\rho_0^6), \quad (2.14)$$

(voir l'équation (2.1)). Nous écrivons $\tau = \mathcal{T}_4 + \sum_{k \geq 0} \delta_k \rho_0^k$, où \mathcal{T}_4 est le quatrième temps (reparamétré) de commutation de λ , et les coefficients δ_k sont des fonctions de classe C^∞ de p_y^0 ; pour les déterminer, nous écrivons ρ_0 comme une série de puissances de ζ , comme il suit

$$\rho_0 = \zeta + r_2 \zeta^2 + r_3 \zeta^3 + \dots, \quad (2.15)$$

nous injectons (2.15) dans (2.14), et nous imposons que l'égalité soit vérifiée à toute ordre en ζ . Nous avons obtenu les δ_k comme des fonctions des temps de commutation \mathcal{T}_k (et donc, de p_y^0) et des termes $T_2, T_3, r_2, r_3, \dots$. Nous soulignons que, à cette étape, les coefficients T_k sont fixés, les coefficients r_k sont libres.

Dans l'équation (A.8) (qui donne l'expression de $z(\tau)$ pour une géodésique qui se trouve dans son cinquième arc bang), nous substituons ρ_0 avec (2.15); ensuite, nous imposons que l'égalité $z(\tau) = 4\zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^6)$ soit vérifiée. Nous avons ainsi obtenu les expressions des coefficients r_k , $k \geq 2$.

Finalement, la suspension du front est obtenue en substituant ρ_0 dans les formules pour $x(\tau)$ and $y(\tau)$ (respectivement, (A.6) et (A.7)) avec le développement (2.15), où les r_k ont la forme qui vient d'être déterminée.

Nous trouvons l'expression suivante :

$$\begin{cases} x(\mathbf{T}) &= (T_1 - 8)\zeta + T_2 \zeta^2 \\ &+ \left(T_3 + (2(p_y^0)^2 + 2(T_1 - 8)p_y^0 - \frac{2}{3})C_1 - \frac{8}{3}C_2 - 2(T_1 - 8)A \right) \zeta^3 \\ &+ \left(T_4 + \frac{4}{3}D_1(p_y^0)^3 + 2E_1(p_y^0)^2 + 2T_2C_1p_y^0 - 2AT_2 \right. \\ &+ \left. (T_1 - 8)(D_1(p_y^0)^2 + 2E_1p_y^0 - \frac{1}{3}c_1) - \frac{2}{3}(E_1 + 2A_1) \right) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5) \\ y(\mathbf{T}) &= 4(A - C_1p_y^0)\zeta^3 + \left(\frac{2}{3}c_1 - 2D_1(p_y^0)^2 - 4E_1p_y^0 \right) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5). \end{cases} \quad (2.16)$$

Nous nous intéressons au graphe de la courbe (2.16), paramétrée par $p_y^0 \in [-1, 1]$.

Lorsque $C_1 \neq 0$, le terme dominant (dans le sens qu'il est le terme de degré plus petit parmi ceux qui ne sont pas constants par rapport à p_y^0) est le coefficient

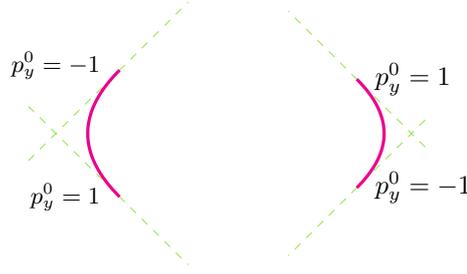


FIGURE 2.1 – Cinquième front des géodésiques du type Γ_f au temps $\mathbf{T} = 8\zeta + \mathcal{O}(\zeta^2)$, pour $C_1 > 0$ (à gauche) et $C_1 < 0$ (à droite). En verte : les tangents pour les valeurs $p_y^0 = 1, -1$.

d'ordre 3. Comme déjà observé dans le papier [11], le front est un arc de parabole, tournée vers la droite si $C_1 > 0$, vers la gauche si $C_1 < 0$.

Considérons maintenant le cas où $C_1 = 0$; nous supposons aussi que $D_1 \neq 0$ et $E_1 \neq 0$. Dans cette condition, le terme d'ordre plus bas dans (2.16) qui n'est pas constant par rapport à p_y^0 est le coefficient d'ordre 4. Pour $y(\mathbf{T})$, ce terme décrit un arc de parabole avec foyer au point $p_y^0 = -\frac{E_1}{D_1}$. En particulier, si $|\frac{E_1}{D_1}| \geq 1$, alors la dérivée $\frac{\partial y(\mathbf{T})}{\partial p_y^0}$ ne s'annule jamais dans l'intervalle $[-1, 1]$, donc il est possible d'effectuer un changement de variable et écrire $x(\mathbf{T})$ comme une fonction lisse de $y(\mathbf{T})$; il en suit que la suspension du front est une courbe lisse.

D'autre part, si $|\frac{E_1}{D_1}| < 1$, alors $y(\mathbf{T})$ (dans lequel nous négligeons les termes d'ordre $\mathcal{O}(\zeta^5)$) n'est pas une fonction monotone de p_y^0 sur l'intervalle $[-1, 1]$. Il est possible de démontrer que la suspension du front présente un *point de rebroussement* (*cusps*) pour $p_y^0 = -\frac{E_1}{D_1}$; en effet, nous avons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(\mathbf{T})}{\partial p_y^0} \Big|_{p_y^0 = -\frac{E_1}{D_1}} &= \frac{\partial y(\mathbf{T})}{\partial p_y^0} \Big|_{p_y^0 = -\frac{E_1}{D_1}} = 0 \\ \frac{\partial^2 x(\mathbf{T})}{\partial (p_y^0)^2} \Big|_{p_y^0 = -\frac{E_1}{D_1}} &= -4E_1 + 2(T_1 - 8) \quad \frac{\partial^2 y(\mathbf{T})}{\partial (p_y^0)^2} \Big|_{p_y^0 = -\frac{E_1}{D_1}} = -4D_1. \end{aligned}$$

Comme $D_1 \neq 0$, ce point satisfait à la définition de point de rebroussement qu'on trouve, par exemple, dans le livre [29].

Pour tout $p_y^0 \in [-1, 1]$, $p_y^0 \neq -\frac{E_1}{D_1}$, nous avons que

$$\frac{dx}{dy} = -p_y^0 + \frac{1}{2}(T_1 - 8) \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{4(D_1 p_y^0 + E_1)}.$$

Nous notons aussi que

$$\lim_{p_y^0 \rightarrow \pm 1} \frac{dx}{dy} = \mp 1.$$

Sous l'hypothèse que $D_1 E_1 \neq 0$, nous pouvons classer six cas différents.

A_± Ce sont les cas où $|E_1| > |D_1|$ et $E_1 > 0$ (respectivement, $E_1 < 0$). Comme remarqué ci-dessous, dans l'intervalle $[-1, 1]$ la fonction $p_y^0 \mapsto y(\mathbf{T})$ est inversible, donc le cinquième front est une courbe lisse. En particulier, la dérivée seconde $\frac{d^2x}{dy^2}$ a signe constant (égal au signe de E_1) pour $p_y^0 \in [-1, 1]$.

\mathbf{B}_\pm Nous appelons \mathbf{B}_\pm les cas où $D_1 > |E_1|$ et $E_1 > 0$ (respectivement, $E_1 < 0$). La fonction $p_y^0 \mapsto y(\mathbf{T})$ est croissante pour $p_y^0 \in [-1, -E_1/D_1)$ et décroissante pour $p_y^0 \in (-E_1/D_1, 1]$. Nous avons aussi que $\frac{d^2x}{dy^2}$ est négatif pour $p_y^0 \in [-1, -E_1/D_1)$ et positif pour $p_y^0 \in (-E_1/D_1, 1]$ (c'est-à-dire, dans le premier intervalle la concavité de la courbe est tournée vers la gauche, dans le deuxième intervalle est tournée vers la droite).

Un exemple de ce type de front (au temps $T_1 = 8$) est affiché dans la Figure 2.3.

\mathbf{C}_\pm Ce sont les cas pour lesquels $D_1 < -|E_1|$ et $E_1 > 0$ (respectivement, $E_1 < 0$). Les signes des dérivées $\frac{\partial y(\mathbf{T})}{\partial p_y^0}$ et $\frac{d^2x}{dy^2}$ sont opposés par rapport à ceux des cas \mathbf{B}_\pm : en effet, $\frac{\partial y(\mathbf{T})}{\partial p_y^0}$ est négatif en $[-1, -E_1/D_1)$ et positif en $(-E_1/D_1, 1]$, alors que $\frac{d^2x}{dy^2}$ est positif dans le premier intervalle et négative dans le deuxième. Un exemple de ce type de front (au temps $T_1 = 8$) est affiché dans la Figure 2.4.

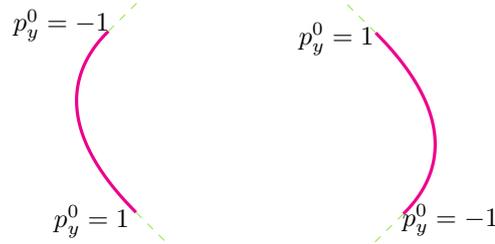


FIGURE 2.2 – Cinquième bang front du type \mathbf{A}_+ (à gauche) et \mathbf{A}_- (à droite). En vert, les tangentes à la courbe pour $p_y^0 = 1, -1$.

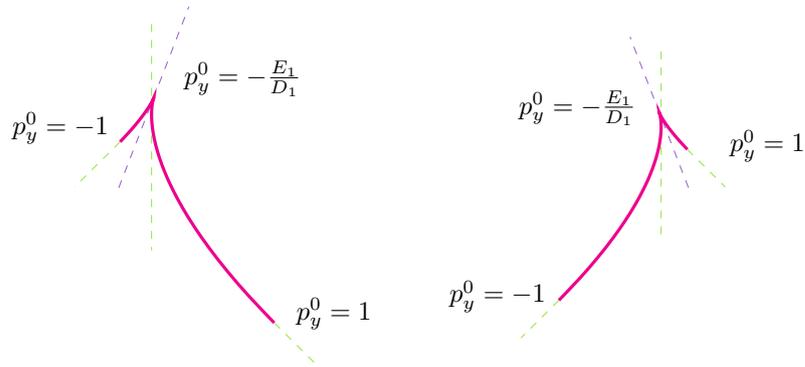


FIGURE 2.3 – Cinquième bang front du type \mathbf{B}_+ (à gauche) et \mathbf{B}_- (à droite). En vert, les tangentes à la courbe pour $p_y^0 = 1, -1$. En violet, la tangente au point $p_y^0 = -\frac{E_1}{D_1}$ (le point de rebroussement).

Comme déjà maintes fois rappelé, il est inutile de répéter les mêmes calculs pour calculer le front des trajectoires de la classe Γ_{-f} : il suffit d'appliquer une

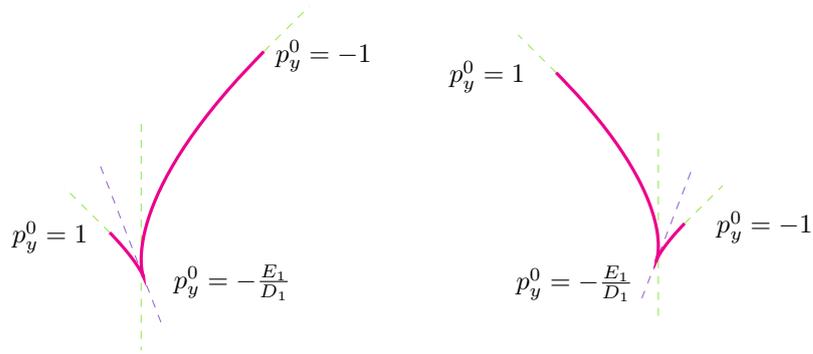


FIGURE 2.4 – Cinquième bang front du type C_+ (à gauche) et C_- (à droite). En vert, les tangentes à la courbe pour $p_y^0 = 1, -1$. En violet, la tangente pour $p_y^0 = -\frac{E_1}{D_1}$ (le point de rebroussement).

rotation d'angle π autour de l'axe z et la permutation \blacklozenge (voir l'Annexe A.2). Cette permutation laisse A, C_1 et C_2 inchangés, transforme D_1 en $-D_1$ et E_1 en $-E_1$. La suspension du cinquième front est ainsi

$$\begin{cases} x(\mathbf{T}) &= -(T_1 - 8)\zeta - T_2\zeta^2 \\ &- \left(T_3 + (2(p_y^0)^2 - 2(T_1 - 8)p_y^0 - \frac{2}{3})C_1 - \frac{8}{3}C_2 - 2(T_1 - 8)A \right)\zeta^3 \\ &+ \left(-T_4 - \frac{4}{3}D_1(p_y^0)^3 + 2E_1(p_y^0)^2 + 2T_2C_1p_y^0 \right. \\ &+ \left. (T_1 - 8)(D_1(p_y^0)^2 - 2E_1p_y^0 - \frac{2}{3}c_1) + 2AT_2 - \frac{2}{3}(E_1 + d_1) \right)\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5) \\ y(\mathbf{T}) &= -4(A + C_1p_y^0)\zeta^3 + \left(\frac{2}{3}c_1 - 2D_1(p_y^0)^2 + 4E_1p_y^0 \right)\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5). \end{cases} \quad (2.17)$$

En comparant les expressions (2.16) et (2.17), nous remarquons les propriétés suivantes. Si $C_1 \neq 0$, il y a une symétrie entre le comportement des trajectoires de la classe Γ_f et celle de la classe Γ_{-f} , comme d'ailleurs déjà remarqué dans la Proposition 3 : le temps conjugué des géodésiques de la classe Γ_f est égal au quatrième temps de commutation si et seulement le temps conjugué des géodésiques de la classe Γ_{-f} est le quatrième temps de commutation, aussi. De plus, le cinquième front associés aux trajectoires de Γ_{-f} est, tout simplement, le cinquième front associés aux trajectoires de Γ_f , tourné de l'angle π autour de l'origine (car on s'est arrêtés au troisième ordre).

Par contre, lorsque $C_1 = 0$, cette symétrie est brisée : supposons par exemple que $E_1 > |D_1|$. Dans ce cas, pour les géodésiques de la classe Γ_f , JExp ne change pas de signe au temps \mathcal{T}_4 , chose qui arrive, au contraire, pour la Jacobienne de l'application exponentielle calculée le long des trajectoires de la classe Γ_{-f} : pour elles, le quatrième temps de commutation est le temps conjugué.

Cette brisure de symétrie se reflète aussi dans la forme des cinquièmes fronts : si par exemple nous sommes dans le cas A_+ , cet à dire, les invariants satisfont à la relation $E_1 > |D_1|$, le cinquième front des géodésiques de la classe Γ_{-f} est donné par la rotation d'angle π d'un front de la forme A_- .

Nous terminons en donnant les expressions pour les suspensions des cinquièmes fronts bang des géodésiques appartenant aux classes $\Gamma_{\pm g}$.

Pour les géodésiques de la classe Γ_g , nous appliquons aux expressions (2.16) une rotation de $\pi/2$ autour de l'axe verticale et la permutation \clubsuit (voir l'An-

nexe A.2); nous obtenons :

$$\begin{cases} x(\mathbf{T}) &= 4(A - \beta C_2)\zeta^3 + (2D_2\beta^2 - 4E_2\beta - \frac{2}{3}c_2)\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5) \\ y(\mathbf{T}) &= (T_1 - 8)\zeta + T_2\zeta^2 \\ &+ (T_3 - \frac{2}{3}C_2 + 2C_2\beta^2 + 2(T_1 - 8)(A - C_2\beta) - \frac{8}{3}C_1)\zeta^3 \\ &+ (T_4 - \frac{4}{3}D_2\beta^3 + 2E_2\beta^2 + 2T_2(A - C_2\beta) \\ &- \frac{1}{3}(T_1 - 8)(6E_2\beta - 3D_2\beta^2 + c_2) - \frac{2}{3}(E_2 + 2d_2))\zeta^4, \end{cases} \quad (2.18)$$

Ici, β dénote la première composante du vecteur \mathbf{p} au temps $t = 0$ (i.e, $\beta = p_x^0$). Pour obtenir le cinquième front bang des géodésiques de la classe Γ_{-g} , nous appliquons aux expressions 2.16 une rotation de $3\pi/2$ autour de l'axe verticale et la permutation \spadesuit . Nous obtenons :

$$\begin{cases} x(\mathbf{T}) &= -4(A + \chi C_2)\zeta^3 + (2D_2\chi^2 + 4E_2\chi - \frac{2}{3}c_2)\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5) \\ y(\mathbf{T}) &= -(T_1 - 8)\zeta \pm T_2\zeta^2 \\ &\pm (T_3 - \frac{2}{3}C_2 + 2C_2\chi^2 + 2(T_1 - 8)(A + C_2\chi) - \frac{8}{3}C_1)\zeta^3 \\ &+ (-T_4 + \frac{4}{3}D_2\chi^3 + 2E_2\chi^2 - 2T_2(A + C_2\chi) \\ &- \frac{1}{3}(T_1 - 8)(-6E_2\chi - 3D_2\chi^2 + c_2) - \frac{2}{3}(E_2 + 2d_2))\zeta^4, \end{cases} \quad (2.19)$$

Pareil, χ dénote la première composante du vecteur \mathbf{p} au temps $t = 0$.

“Quatrième front bang”. Nous allons maintenant nous dédier aux géodésiques pour lesquelles \mathbf{T} est plus petit de leur quatrième temps de commutation, ce qui revient à nous restreindre aux valeurs de p_y^0 contenues en $[-1, 7 - T_1]$. De façon analogue au cas précédent, l'ensemble $\text{Exp}(\mathbf{p}, \mathbf{T}) \cap \{z = \zeta^2\}$ est appelé le *quatrième front bang*.

Tout d'abord, nous calculons le temps reparamétré $\tau(\mathbf{T})$; la formule (2.1) donne $\tau(\mathbf{T}) = T_1\rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0^2)$.

Un simple calcul permet de voir que la suspension du quatrième front bang est une courbe de longueur $\mathcal{O}(\zeta)$; pour cela, nous en calculons seulement l'ordre dominant, et nous trouvons la courbe

$$\{(s\zeta, (-3s + 2\sqrt{2s^2 + 2sT_1 + 16 - T_1})\zeta) : s \in [T_1 - 8, 0]\}. \quad (2.20)$$

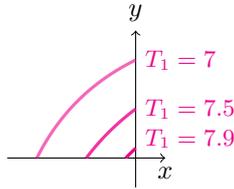


FIGURE 2.5 – Suspension du quatrième front bang des géodésiques du type Γ_f au temps $\mathbf{T} = T_1\zeta + \mathcal{O}(\zeta^2)$.

Néanmoins, pour détecter les points de Maxwell, la partie intéressante du quatrième front bang est celle avec coordonnée y proche de 0, c'est-à-dire, d'après la formule (2.20), celle qui correspond à $s \sim T_1 - 8$ (ou $p_y^0 \sim 7 - T_1$).

D'un autre coté, dans la suite nous utiliserons surtout la suspension du quatrième front bang qui est proche de l'origine (dans le plan affine $z = 4\zeta^2$); ceci revient à choisir $T_1 \sim 8$ et $p_y^0 \sim -1$.

Pour étudier cette courbe plus en détails, nous posons $T_1 = 8$ et $p_y^0 = -1 + \sum_{k \geq 1} \gamma_k \rho_0^k$, pour certaines constantes γ_k , $k \geq 1$; ensuite, nous répétons la procédure effectuée pour le cinquième front bang : d'abord, nous posons $\tau = \mathcal{T}_3 + \sum_{k \geq 0} \delta_k \rho_0^k$ et, grâce à l'équation (2.14), nous trouvons les coefficients δ_k en fonction des γ_k (nous remarquons que $\delta_0 = 2$); ensuite, en utilisant l'équation 2.15, nous écrivons les δ_k comme des fonctions de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, T_2, T_3, r_3, r_3 \dots$; ensuite, en imposant $z(\tau) = 4\zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^6)$, nous trouvons le paramètres r_k , $k \geq 2$. En substituant ces développements dans les équations (A.3)-(A.4), nous trouvons

$$\begin{cases} x(\mathbf{T}) &= -\gamma_1 \zeta^2 - (4C_2 + 4A + \gamma_2) \zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y(\mathbf{T}) &= -(T_2 + \gamma_1) \zeta^2 - (T_3 + \frac{1}{6}(8C_2 - 16C_1 + 3(T_2\gamma_1 + \gamma_1^2 \\ &\quad + 2\gamma_2))) \zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4). \end{cases} \quad (2.21)$$

Nous remarquons que, à l'ordre dominant, cette courbe est un segment de pente +1.

Pour obtenir l'expression du quatrième front bang des géodésiques de la classe Γ_{-f} , nous appliquons à l'équation (2.21) une rotation d'angle π autour de l'axe z (et autour de l'axe p_z) et la permutation \blacklozenge . En particulier, nous considérons les géodésiques associée au vecteur adjoint au temps initial $\mathbf{p}(0) = (-1, p_y^0, \rho_0)$, où $\rho_0 = \zeta + \mathcal{O}(\zeta)$ et $p_y^0 = 1 + \sum_{k \geq 1} \nu_k \rho_0^k$. Nous obtenons

$$\begin{cases} x(\mathbf{T}) &= -\nu_1 \zeta^2 + (4C_2 + 4A - \nu_2) \zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y(\mathbf{T}) &= (T_2 - \nu_1) \zeta^2 + (T_3 + \frac{1}{6}(8C_2 - 16C_1 - 3(T_2\nu_1 - \nu_1^2 \\ &\quad + 2\nu_2))) \zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4). \end{cases} \quad (2.22)$$

Pour plus de complétude, nous fournissons, ci-dessus, l'expression des suspension au plan $\{z = 4\zeta^2\}$ des fronts des trajectoires qui appartiennent aux classes $\Gamma_{\pm g}$. Elles aussi ont été trouvées à partir des équations (2.21), en suivant les dispositions données par les Lemmes 10-11.

La suspension du quatrième front bang associé aux géodésiques de la classe Γ_g , avec vecteur adjoint au temps zéro égal à $(p_x^0, 1, 1/\rho_0)$, où $\rho_0 = \zeta + \mathcal{O}(\zeta^2)$ et $p_x^0 = -1 + \sum_{k \geq 1} \beta_k \rho_0^k$ est donnée par

$$\begin{cases} x(\mathbf{T}) &= (T_2 - \beta_1) \zeta^2 + (T_3 + \frac{1}{6}(8C_1 - 16C_2 + 3(-T_2\beta_1 + \beta_1^2 \\ &\quad - 2\beta_2))) \zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y(\mathbf{T}) &= \beta_1 \zeta^2 + (4A + \beta_2 - 4C_1) \zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4). \end{cases} \quad (2.23)$$

Pareil, la suspension du quatrième front bang associé aux géodésiques de la classe Γ_{-g} , avec vecteur adjoint au temps zéro égal à $(p_x^0, -1, 1/\rho_0)$, où $\rho_0 = \zeta + \mathcal{O}(\zeta^2)$ et $p_x^0 = 1 + \sum_{k \geq 1} \chi_k \rho_0^k$ est donnée par

$$\begin{cases} x(\mathbf{T}) &= -(T_2 + \chi_1) \zeta^2 - (T_3 + \frac{1}{6}(8C_1 - 16C_2 + 3(T_2\chi_1 + \chi_1^2 \\ &\quad + 2\chi_2))) \zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y(\mathbf{T}) &= \chi_1 \zeta^2 - (4A - \chi_2 - 4C_1) \zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4). \end{cases} \quad (2.24)$$

Notation. Nous introduisons les notations suivantes :

- $\mathcal{F}_4(\mathbf{T})$ (respectivement, $\bar{\mathcal{F}}_4(\mathbf{T}), \mathcal{G}_4(\mathbf{T}), \bar{\mathcal{G}}_4(\mathbf{T})$) dénote le quatrième front bang, au temps \mathbf{T} , des trajectoires de la classe Γ_f (respectivement, $\Gamma_{-f}, \Gamma_g, \Gamma_{-g}$). Plus précisément

$$\mathcal{F}_4(\mathbf{T}) = \left\{ \xi(\mathbf{T}) : \begin{array}{l} \xi(\cdot) \in \Gamma_f \\ \mathbb{T}_3(\xi) \leq \mathbf{T} \leq \mathbb{T}_4(\xi) \end{array} \right\},$$

où $\mathbb{T}_3(\xi)$ et $\mathbb{T}_4(\xi)$ sont, respectivement, les troisième et le quatrième temps de commutation de la géodésique ξ .

- $\mathcal{F}_5(\mathbf{T})$ (respectivement, $\bar{\mathcal{F}}_5(\mathbf{T}), \mathcal{G}_5(\mathbf{T}), \bar{\mathcal{G}}_5(\mathbf{T})$) dénote le cinquième front bang, au temps \mathbf{T} , des trajectoires de la classe Γ_f (respectivement, $\Gamma_{-f}, \Gamma_g, \Gamma_{-g}$).

Pour éviter des notations trop lourdes, dans la suite nous allons omettre d'expliciter la dépendance de \mathbf{T} dans les symboles des fronts.

2.3.1 Auto-intersections du front des géodésiques d'une même classe

Pour un temps $\mathbf{T} = T_1\zeta + \mathcal{O}(\zeta^2)$ fixé, avec $T_1 \in (6, 8)$, le front des géodésiques appartenant à la classe Γ_f est composé par l'union $\mathcal{F}_4(\mathbf{T}) \cup \mathcal{F}_5(\mathbf{T})$ (pour les autres classes, c'est pareil).

Dans le cas où $C_1 \neq 0$ ou $C_1 = 0$ et $|E_1| > |D_1|$ (ce dernier, appelé cas \mathbf{A}_\pm), les deux fronts $\mathcal{F}_4(\mathbf{T}) \cup \mathcal{F}_5(\mathbf{T})$ ont un seul point en commun, donné par la valeur au temps \mathbf{T} de la géodésique dont le quatrième temps de commutation coïncide avec \mathbf{T} . Au contraire, dans les cas \mathbf{B}_\pm et \mathbf{C}_\pm , qui correspondent aux formes normales dans lesquelles l'invariant ax_{31} est nul et $|E_1| < |D_1|$, un phénomène assez particulier se produit : il y a aussi une intersection entre les front \mathcal{F}_4 et le front \mathcal{F}_5 qui ne correspond pas à la jonction entre les deux fronts.

Nous allons expliquer en détail le cas nommé \mathbf{B}_+ , correspondant à la situation $0 < E_1 < D_1$. Ce cas est affiché aux Figures 2.6-2.7⁶.

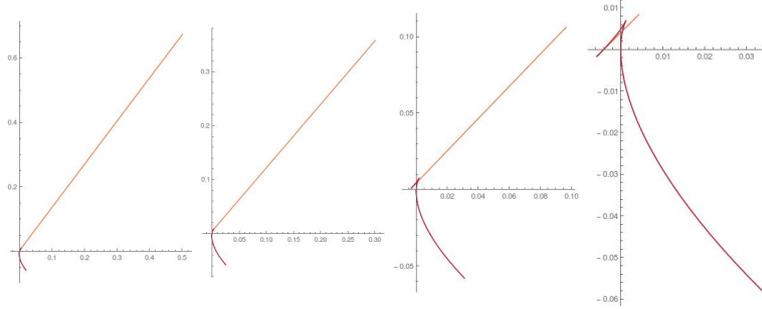


FIGURE 2.6 – Suspension du front des géodésiques de la classe Γ_f , pour les valeurs $C_1 = 0$, $D_1 > E_1 > 0$. En orange, le quatrième front bang (\mathcal{F}_4); en rouge, le cinquième front bang (\mathcal{F}_5). De gauche à droite : $T = 7.5\zeta$, $T = 7.7\zeta$, $T = 7.9\zeta$ et $T = 7.99\zeta$.

Soient ξ_f et $\tilde{\xi}_f$ deux géodésiques contenues dans la classe Γ_f ; nous appelons respectivement $(1, \gamma, 1/\rho_0)$ et $(1, \eta, 1/\tilde{\rho}_0)$ les vecteurs adjoints correspondants,

6. Nous souhaitons souligner que ces Figures, ainsi que les suivantes, sont assez approximatives et ont pour but d'illustrer de façon seulement qualitative les phénomènes; en effet, pour des soucis de lisibilité, les proportions entre les longueurs des arcs ne sont pas respectées.

évalués au temps $t = 0$. Nous supposons que $\gamma = \gamma_0 + \sum_{k \geq 1} \gamma_k \rho_0^k$, $\eta = \eta_0 + \sum_{k \geq 1} \eta_k \rho_0^k$ et $\tilde{\rho}_0 = \rho_0 + \sum_{k \geq 1} \alpha_k \rho_0^k$.

Nous évaluons les deux géodésiques à un certain temps \mathbf{T} proche du quatrième temps de commutation de la géodésique ξ_f ; en particulier, nous supposons que \mathbf{T} soit *plus petit* du quatrième temps de commutation de la trajectoire ξ et *plus grand* du quatrième temps de commutation de la trajectoire $\tilde{\xi}$. Pour que cette assumption soit vraie, nous imposons $\gamma_0 \leq \eta_0$. En effet, si $\gamma_0 < \eta_0$ et $\mathbf{T} = (7 - \gamma_0)\rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0^2)$, nous pouvons toujours choisir les ordres supérieurs dans le développement de \mathbf{T} et ρ_0 assez petit de telle sorte que notre hypothèse soit vérifiée.

Nous allons maintenant résoudre l'équation $\xi_f(\mathbf{T}) = \tilde{\xi}_f(\mathbf{T})$ de telle sorte qu'elle soit vérifiée à tous les ordres en ρ_0 . La procédure sera bien détaillée à la page 60, dans laquelle nous étudions l'intersection entre les fronts \mathcal{F}_4 et \mathcal{G}_4 . Nous trouvons que γ_0 et η_0 sont liés par une de ces deux conditions :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \eta_0 \\ \gamma_0 + 2\eta_0 &= -3 \frac{E_1}{D_1} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Si $\gamma_0 = \eta_0$, la résolution de l'équation $\xi_f(\mathbf{T}) = \tilde{\xi}_f(\mathbf{T})$ à tous les ordres impose $\alpha_k = 0 \ \forall k \leq 3$ et \mathbf{T} égal au temps de commutation (à des ordres de degrés supérieurs à 3 en ρ_0 près; néanmoins, les ordres supérieurs ne sont pas investigués) : en effet, ξ_f et $\tilde{\xi}_f$ sont *la même trajectoire* : nous sommes en trains de l'évaluer au temps de commutation entre le quatrième et le cinquième arc. Si par contre $\gamma_0 + 2\eta_0 = -3 \frac{E_1}{D_1}$, en imposant aussi les contraintes $\eta_0, \gamma_0 \in [-1, 1]$ et $\gamma_0 \leq \eta_0$, nous trouvons que l'intersection entre les deux trajectoires peut avoir lieu seulement si $\gamma_0 \in [-1, -\frac{E_1}{D_1}]$ et $\eta_0 \in [-\frac{E_1}{D_1}, \frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}]$. En particulier, nous trouvons aussi

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= (7 - \gamma_0)\rho_0 - \gamma_1 \rho_0^2 + \left(\frac{20}{3} C_2 - 8A\gamma_0 \right) \rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4) \\ \tilde{\rho}_0 &= \rho_0 - \frac{9}{4} A \left(\gamma_0 + \frac{E_1}{D_1} \right) \rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4). \end{aligned} \quad (2.26)$$

La suspension (sur le plan $z = 4\zeta^2$) de cette intersection est décrite par l'équation

$$\begin{cases} x = -(1 + \gamma_0)\zeta - \gamma_1 \zeta^2 + ((\gamma_0 - 3)C_2 + (1 + 12\gamma_0 - 5\gamma_0^2) \frac{A}{4} - \gamma_2)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y = 4A\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4), \end{cases}$$

avec $\gamma_0 \in [-1, -\frac{E_1}{D_1}]$; à moins de négliger des termes du quatrième ordre en ζ , il s'agit d'un segment horizontal de longueur $(1 - \frac{E_1}{D_1})\zeta + \mathcal{O}(\zeta^2)$.

Nous considérons maintenant les géodésiques appartenant à la classe Γ_{-f} . Dans ce cas, il n'y a pas d'auto-intersections entre $\tilde{\mathcal{F}}_4(\mathbf{T})$ et $\tilde{\mathcal{F}}_5(\mathbf{T})$, comme on peut voir à la Figure 2.7.

Les mêmes calculs sont valables aussi pour le cas \mathbf{B}_- (la seule chose qui change est le dessin; en effet, dans ce cas l'intervalle $[-1, -\frac{E_1}{D_1}]$ est plus long que l'intervalle $[-\frac{E_1}{D_1}, 1]$).

Les cas \mathbf{C}_\pm sont analogues (en particulier, le cas \mathbf{C}_+ correspond au cas \mathbf{B}_- , à une rotation d'angle π autour de l'axe z et à une permutation des invariants près. Pareil pour le cas \mathbf{C}_- par rapport au cas \mathbf{B}_+).

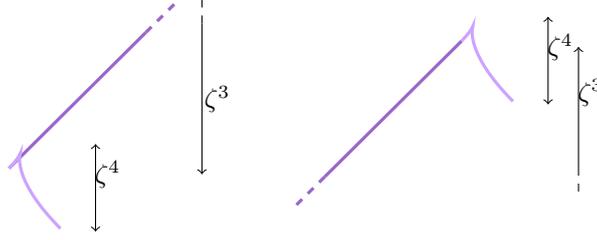


FIGURE 2.7 – À gauche (droite) : la suspension de l’auto-intersection du front des géodésiques de la classe Γ_f (Γ_{-f}). Nous avons coloré en violet le front \mathcal{F}_4 et en lavande le front \mathcal{F}_5 .

2.4 Une brève discussion sur la généricité des cas étudiés

Nous terminons le chapitre par une discussion, dont le but est d’éclaircir pourquoi nous nous référons au cas étudiés dans le Chapitre 3 (ou l’article [11]) comme “génériques”, ceux du Chapitre 4 comme “moins génériques” et le cas du système de Heisenberg comme “non générique”.

Cette section est entièrement basée sur les notions développées dans l’article [17].

Suivant l’article cité, nous appelons $\text{SubR}(M)$ l’ensemble de toutes les structures sous-Riemanniennes sur la variété M , muni de la topologie de Whitney ([21]). L’ensemble de toutes les structures sous-Finslériennes L^1 compatibles avec une structure sous-Riemannienne sur M , noté $\overline{\text{SF}}_1(M)$, peut être identifié avec l’ensemble $\mathbb{R}^2 \times \text{SubR}(M)$, que nous munissons de la topologie produit. En effet, une structure sous-Finslérienne L^1 compatible avec une structure sous-Riemannienne correspond à la donnée d’une matrice $\mathbf{M} \in GL(\mathbb{R}^2)$ et d’une structure sous-Riemannienne ; d’autre part, comme déjà observé dans la Remarque 7, nous pouvons toujours choisir $\mu_2 = 0$ et imposer $\det \mathbf{M} = 1$, ce qui nous réduit le nombre de paramètres libres (dans M) à 2.

D’après [17, Theorem 1.3, Corollary 1.4, Corollary 2.8], nous écrivons la fonction γ dans la formule (1.17) comme $\gamma(x, y, z) = c_1 x^2 + c_2 y^2 + 2c_3 xy + V(x, y) + \varphi(x, y, z)$, où V est une fonction cubique et φ est nulle dans tous les points $(0, 0, z)$, ainsi que toutes ses dérivées partielles par rapport à x, y d’ordre plus petit que 4. Des calculs simples montrent que

$$\begin{aligned} ax_{31} &= \frac{c_1}{\mu_1^2}, & ay_{32} &= c_1 \mu_3^2 + \frac{c_2}{\mu_1^2} - 2c_3 \mu_1 \mu_3 \\ ax_{32} &= ay_{31} = -c_1 \mu_1 \mu_3 + c_3. \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons adapter la preuve du Théorème 1.5 de l’article [17] pour conclure que l’ensemble des points $\mathbf{q} \in M$, pour lesquels l’invariant ax_{31} (ou, respectivement, ay_{32}) de la forme normale (1.21) d’une métrique sous-Finslérienne L^1 compatible avec une structure sous-Riemannienne est nul, forme une sous-variété de dimension 2 de M . En conséquence, la propriété $C_1 C_2 \neq 0$ (équivalente à $ax_{31} ay_{32} \neq 0$) est génériquement vérifiée.

Pareil, demander que $|C_1| \neq |C_2|$ correspond à demander

$$c_1 \left(\frac{1}{\mu_1^2} \pm \mu_3^2 \right) \pm \frac{c_1}{\mu_1^2} \mp 2c_3\mu_1\mu_3 \neq 0.$$

En suivant le même raisonnement que toute à l'heure, nous montrons que ces propriétés sont génériquement vérifiées.

Les mêmes arguments prouvent la généricité des conditions $|A| \neq |C_1|$ et $|A| \neq |C_2|$.

Dans le Chapitre 4, nous considérons les structures sous-Finslériennes pour lesquelles

$$C_1 = 0 \quad \text{et} \quad D_1 E_1 \neq 0.$$

Des simples calculs montrent que E_1 et D_1 sont des combinaisons linéaires des invariants qui apparaissent dans la métrique sous-Riemannienne d'origine (plus précisément, des termes appelés V et l dans l'article [17]). À nouveau, nous pouvons adapter la preuve du Théorème 1.5 en [17]; nous allons conclure que l'ensemble des points $\mathbf{q} \in M$ pour lesquels les invariants C_1, D_1 et E_1 (ou, respectivement, C_2, D_2 et E_2) de la forme normale (1.21) d'une métrique sous-Finslérienne L^1 compatible avec une structure sous-Riemannienne est nul forme une sous-variété de codimension 3 de M . En particulier, l'hypothèse que $C_1 = 0$ et $D_1 E_1 \neq 0$ est génériquement vérifiée si nous nous restreignons à l'ensemble (non-générique) des points \mathbf{q} pour lesquels l'invariant ax_{31} de la forme normale est nul.

À nouveau, en répétant la même procédure nous pouvons vérifier que la conditions $|E_1| \neq |D_1|$ est, elle aussi, générique.

Il va de soi que le système de Heisenberg, dans lequel *tous* les invariants sont nuls, est non-générique.

Chapitre 3

Le lieu de coupure dans le cas générique ($C_1 C_2 \neq 0$)

3.1 Les principes de la méthode

Dans ce chapitre, nous allons étudier la partie supérieure (c'est-à-dire, celle relative aux points (x, y, z) tels que $z > \frac{xy}{2}$) du lieu de coupure des géodésiques (en temps petit), pour des métriques sous-Finslériennes génériques, c'est-à-dire, dont la forme normale satisfait l'Hypothèse suivante :

Hypothèse 3 *Les invariants A , C_1 et C_2 sont non nuls.*

En plus, nous supposons que $|A| \neq |C_2|$, $|C_1| \neq |C_2|$ et $|A| \neq |C_1|$.

Nous soulignons que les résultats contenus dans ce chapitre sont équivalents à ces qui ont été obtenus par E. A. L. Ali et G. Charlot dans l'article [11].

Nous commençons notre étude en rappelant que, sous l'Hypothèse 3, le lieu conjugué est complètement déterminé par la valeur de C_1 et C_2 .

Pour détecter les points de Maxwell, nécessaires pour décrire le lieu de coupure, nous regardons les intersections entre des géodésiques dont le contrôle associé au premier arc bang est différent (dans notre notation, entre géodésiques qui appartient à des différentes sous-classes de Γ). Pour réduire la quantité d'intersections inspectées, nous nous laissons guider par les résultats de la Section 1.2 : ils nous suggèrent que, dans le cas générique, les géodésiques de la classe Γ_f pourraient perdre l'optimalité, autour de leur quatrième temps de commutation, à cause d'une intersection avec une géodésique de la classe Γ_g , ou encore, autour du temps $8/p_z(0)$, à cause de l'intersection avec une géodésique des autres classes.

Afin de réduire ultérieurement le nombre d'intersections à étudier, nous nous appuyerons sur les faits suivants. Tout d'abord, nous allons négliger les (éventuelles) intersections impliquant des arcs qui sûrement ne sont pas optimales (par exemple, parce qu'ils arrivent après un point conjugué). Ensuite, nous exploitons l'information qui nous est fournie par les invariants A , C_1 et C_2 pour localiser les cinquièmes fronts bang : en effet, en observant les équations (2.16)-(2.17)-(2.18), nous remarquons que le front \mathcal{F}_5 (respectivement, $\bar{\mathcal{F}}_5$) est contenu dans une bande horizontale d'épaisseur $4C_1\zeta^3$, centrée autour du point $y = 4A\zeta^3$

(respectivement, $-4A\zeta^3$); pareil, le front \mathcal{G}_5 (respectivement, $\bar{\mathcal{G}}_5$) est contenu dans une bande verticale de largeur $4C_2\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4)$ centrée autour du point $x = 4A\zeta^3$ (respectivement, $-4A\zeta^3$).

Si par exemple $A > |C_2|$, alors l'intersection entre \mathcal{G}_5 et $\bar{\mathcal{G}}_5$ ne se produise pas.

Lorsque nous avons trouvé tous les points de Maxwell, il faut identifier, pour chaque géodésique, celui qui arrive avant (au sens temporel) les autres; ce point constitue le point de coupure de la géodésique. Pour déterminer quelle intersection arrive avant les autres, soit nous allons calculer explicitement les temps d'intersection, soit nous allons nous appuyer sur des considérations de type géométrique.

Notation. Afin d'éviter des lourdeurs excessives, dans la suite nous éviterons, parfois, de spécifier que nous sommes en train d'écrire seulement les termes plus important d'un développement (en puissances de ζ), en négligeant les autres; ceci arrivera, surtout, en deux situations: quand nous donnerons les coordonnées des points d'intersection (par exemple, dans l'équation (3.11) nous omettons d'écrire " $+\mathcal{O}(\zeta^5)$ "); quand nous décrirons le comportement d'une géodésique en fonction de la valeur du covecteur associé au temps 0 (par exemple, quand nous dirons que les géodésiques telles que $p_y^0 \in [-1, -1 + c\zeta^2]$ se comportent d'une certaine façon, nous entendrons $p_y^0 \in [-1, -1 + c\zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3)]$).

3.1.1 Exemple de calcul des points de Maxwell

Dans cette section, nous décrivons la méthode utilisée pour détecter une intersection entre deux géodésiques "lointaines", c'est-à-dire, appartenant à deux classes différentes. Comme modèle, nous considérons les intersections entre les géodésiques de la classe Γ_f et celle de la classe Γ_g , pour un temps \mathbf{T} proche du temps de coupure de la première.

D'abord, nous fixons $\rho_0 > 0$ assez petit, $\gamma \in [-1, 1)$ et un temps $\mathbf{T} > 0$. Soit ξ_f la géodésique associée à l'extrémale (\mathbf{p}_f, ξ_f) telle que $\mathbf{p}_f(0) = (1, \gamma, 1/\rho_0)$, et ξ_g une géodésique (de la classe Γ_g) associée une extrémale (\mathbf{p}_g, ξ_g) telle que $\mathbf{p}_g(0) = (\beta, 1, 1/\hat{\rho}_0)$. Nous supposons que $\hat{\rho}_0$ soit très proche de ρ_0 , en imposant $\hat{\rho}_0 = \rho_0 + \sum_{k \geq 2} \alpha_k \rho_0^k$, et nous développons β en série de puissances de ρ_0 : $\beta = \beta_0 + \sum_{k \geq 1} \beta_k \rho_0^k$.

Maintenant, nous devons définir les temps reparamétré le long des deux extrémales. Ces deux temps, que nous appelons \mathcal{T} et $\widehat{\mathcal{T}}$, doivent satisfaire les équations

$$\mathbf{T} = \int_0^{\mathcal{T}} \rho(s) ds = \int_0^{\widehat{\mathcal{T}}} \widehat{\rho}(s) ds. \quad (3.1)$$

Pour les déterminer, nous posons d'abord

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_3 + \delta_0 + \delta_1 \rho_0 + \delta_2 \rho_0^2 + \dots \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{T}} = \widehat{\mathcal{T}}_3 + \widehat{\delta}_0 + \widehat{\delta}_1 \rho_0 + \widehat{\delta}_2 \rho_0^2 + \dots \quad (3.2)$$

\mathcal{T}_3 et $\widehat{\mathcal{T}}_3$ étant, respectivement, le troisième temps de commutation (reparamétré) de ξ_f et de ξ_g . La contrainte que \mathbf{T} soit proche du quatrième temps de commutation de ξ_f fixe la valeur de δ_0 à 2. Comme nous avons déjà fait, nous injectons l'expansion de $\hat{\rho}_0$ en puissances de ρ_0 et les formules (3.2) dans l'équation (3.1); en imposant que l'égalité soit satisfaite à tout ordre en ρ_0 , nous

obtenons les expressions des coefficients $\widehat{\delta}_k$ en fonction des coefficients δ_k et α_k , pour $k \geq 1$. Par exemple, nous obtenons

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}_0 &= 2 - \gamma - \beta_0 \\ \widehat{\delta}_1 &= (\gamma - 7)\alpha_2 - \beta_1 + \delta_1 \\ \widehat{\delta}_2 &= -\frac{4}{3}(\gamma^3 - 15\gamma^2 + 15\gamma + 23)\text{ax}_{31} - 8\text{ax}_{32}(3\gamma - 3\beta_0 - 2) - \frac{4}{3}\text{ay}_{32}\beta_0^3 \\ &\quad - 20\beta_0^2\text{ay}_{32} + 24\text{ay}_{31}\beta_0 - 20\text{ay}_{32}\beta_0 - 24\gamma\text{ay}_{31} + 16\text{ay}_{31} + \frac{92}{3}\text{ay}_{32} + \alpha_2\beta_1 \\ &\quad - 2\alpha_2\delta_1 + 14\alpha_2^2 - 7\alpha_3 - \beta_2 + \delta_2 - 2\alpha_2^2\gamma + \alpha_3\gamma.\end{aligned}$$

À l'aide des équations (A.3)-(A.4)-(A.5), nous calculons les jets des trajectoires ξ_f et ξ_g , respectivement aux temps (reparamétré) \mathcal{T} et $\widehat{\mathcal{T}}$; à nouveau, nous imposons l'égalité des coordonnées à tout ordre en ρ_0 (nous nous arrêtons à l'ordre 4 pour x et y et à l'ordre 5 pour z). À titre d'exemple, nous détaillons ci dessous la procédure jusqu'à l'ordre 3.

1. (ordre ρ_0 pour x et y , ordre ρ_0^2 pour z) nous trouvons $x_f - x_g = \beta_0 - 1$, qui implique $\beta_0 = 1$. Les équation $y_f - y_g$ et $z_f - z_g$ sont automatiquement satisfaites.
2. (ordre ρ_0^2 pour x et y , ρ_0^3 pour z) le système

$$\begin{cases} x_f - x_g = 8\alpha_2 - \beta_1 - \delta_1 \\ y_f - y_g = \beta_1 - \delta_1 \\ z_f - z_g = -8\alpha_2 + \frac{1+\gamma}{2}(\beta_1 + \delta_1) \end{cases}$$

nous donne $\alpha_2 = \beta_1 = \delta_1 = 0$ (nous cherchons une intersection pour plusieurs géodésiques, ce qui correspond à plusieurs valeurs de γ).

3. (ordre ρ_0^3 pour x et y , ρ_0^4 pour z) le système

$$\left\{ \begin{array}{l} x_f - x_g = \frac{4}{3}(-18\gamma^2 + 12\gamma + 30)\text{ax}_{31} - 8(7 - 5\gamma)\text{ax}_{32} \\ \quad + 40\gamma\text{ay}_{31} - 56\text{ay}_{31} + \frac{32}{3}\text{ay}_{32} + 8\alpha_3 + \beta_2 - \delta_2 \\ y_f - y_g = -4(2\gamma(2\text{ax}_{31} + \text{ax}_{32} + \text{ay}_{31}) + 4\text{ax}_{32} + 4\text{ay}_{31} + \text{ay}_{32}) \\ \quad + 4(10\text{ax}_{31} + 2\text{ax}_{32} + 2\text{ay}_{31} + 3\text{ay}_{32}) + 8\gamma^2\text{ax}_{31} \\ \quad + \frac{8}{3}\text{ay}_{32} - \beta_2 - \delta_2 \\ z_f - z_g = \frac{1}{6}(3(-2\gamma^2 + 2(5\gamma^2 + 4\gamma - 17) - 88\gamma + 138)\text{ax}_{32} \\ \quad - 2(12\gamma^3 - 6(10\gamma^2 + 3\gamma - 3) + 54\gamma + 90)\text{ax}_{31} \\ \quad + 24\gamma^2\text{ay}_{31} - 240\gamma\text{ay}_{31} - 32\gamma\text{ay}_{32} + 312\text{ay}_{31} - 32\text{ay}_{32} \\ \quad - 48\alpha_3 - 3\beta_2 + 3\delta_2 - 3\beta_2\gamma + 3\delta_2\gamma) \end{array} \right.$$

nous donne

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \frac{1}{2}(\gamma - 1)(A + (1 + \gamma)C_1) \\ \beta_2 &= 2(1 - \gamma)C_1 \\ \delta_2 &= (3 + \gamma^2)C_1 - 2(1 + \gamma)A + \frac{4}{3}C_2.\end{aligned}$$

Remarque 12 L'étape 3 nous fournit déjà une condition d'existence de l'intersection : en effet, la contrainte $|\beta| \leq 1$ est respectée seulement si $C_1 \leq 0$. Ceci signifie que, si l'invariant C_1 est strictement positif, il n'y a pas d'intersections entre les fronts \mathcal{F}_4 et \mathcal{G}_4 .

Nous notons que les valeurs précises des coefficients α_k sont nécessaires pour aboutir le calcul, mais ne donnent pas des conditions d'existence, car on n'a pas de contraintes sur la valeur de $\widehat{\rho}_0$. Au contraire, les coefficients β_k et δ_k sont fondamentales, afin d'établir si les intersections cherchées se produisent et donnent lieu à une perte d'optimalité. Justement, en poursuivant l'analyse, nous obtenons

$$\beta = 1 + 2(1 - \gamma)C_1\rho_0^2 + 2(1 - \gamma)\left(E_1 + \frac{\gamma + 2}{3}D_1\right)\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4) \quad (3.3)$$

$$\mathcal{T}_4 - \mathcal{T} = 2(\gamma - 1)C_1\rho_0^2 + 2(\gamma - 1)\left(E_1 + \frac{1 + 2\gamma}{3}D_1\right)\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4). \quad (3.4)$$

Les deux équations ci-dessus mettent en lumière l'importance de l'invariant C_1 , comme d'ailleurs déjà observé à la Remarque 12. En effet, par définition, le temps de coupure doit être inférieur (ou égal) au temps conjugué. \mathcal{T} peut donc être un temps de coupure seulement si $C_1 \leq 0$ et, si $C_1 = 0$, lorsque

$$E_1 + \frac{1 + 2\gamma}{3}D_1 \leq 0. \quad (3.5)$$

Pareil, l'équation (3.3), avec la contrainte sur les valeurs du vecteur adjoint, impose $C_1 \leq 0$ et, si $C_1 = 0$, aussi

$$E_1 + \frac{\gamma + 2}{3}D_1 \leq 0. \quad (3.6)$$

Finalement, nous allons calculer la suspension de l'intersection sur le plan $\{z = 4\zeta^2\}$, pour un certain $\zeta \sim \rho_0$ fixé. Tout d'abord, nous substituons les valeurs trouvés par δ_k dans l'équation (3.2), et nous calculons les valeurs correspondants pour $x(\mathcal{T})$, $y(\mathcal{T})$ et $z(\mathcal{T})$. Ensuite, comme fait dans la Section 2.3, nous allons développer ρ_0 en série de puissances de ζ , et ajuster les coefficients du développement de telle sorte que $z(\mathcal{T}) = 4\zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^6)$. Nous trouvons

$$\begin{cases} x &= -(1 + \gamma)\zeta \\ &+ ((5 - 9\gamma - 9\gamma^2 + 5\gamma^3)\frac{C_1}{24} + (1 + 12\gamma - 5\gamma^2)\frac{A}{4} + (\gamma - 3)C_2)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y &= (4A + 2(1 + \gamma)C_1)\zeta^3 - \frac{2}{3}(D_1\gamma^2 + (3E_1 + D_1)(1 + \gamma) - c_1)\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5). \end{cases} \quad (3.7)$$

À des erreurs d'ordre $\mathcal{O}(\zeta^3)$ près, il s'agit d'un segment horizontal de longueur $\sim 2\zeta$.

Les intersections $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ (autour du quatrième point de commutation de la géodésique de la classe Γ_g), $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ (autour du quatrième point de commutation de la géodésique de la classe Γ_{-f}) et $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$ (autour du quatrième point de commutation de la géodésique de la classe Γ_{-g}), ainsi que leur conditions d'existence, peuvent être aisément retrouvées à partir des résultats que nous venons d'obtenir, en appliquant une permutation des invariants et une rotation opportune. Nous donnerons plus de détails dans l'Annexe B. Par complétude, nous donnons ici l'expression des suspensions des intersections $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$

$$\begin{cases} x &= (4A + 2(1 - \beta)C_2)\zeta^3 + \frac{2}{3}(D_2\beta^2 + (3E_2 + D_2)(1 - \beta) - c_1)\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5) \\ y &= -(1 - \beta)\zeta \\ &- ((1 - 12\beta - 5\beta^2)\frac{A}{4} + (\beta + 3)C_1 - \frac{1}{24}(5 + 9\beta - 9\beta^2 - 5\beta^3)C_2)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4), \end{cases} \quad (3.8)$$

et $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$

$$\begin{cases} x &= -(4A + 2(1 + \chi)C_2)\zeta^3 + \frac{2}{3}(D_2\chi^2 + (3E_2 + D_2)(1 + \chi) - c_1)\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5) \\ y &= (1 + \chi)\zeta \\ &+ ((1 + 12\chi - 5\chi^2)\frac{A}{4} - (\chi - 3)C_1 - \frac{1}{24}(5 - 9\chi - 9\chi^2 + 5\chi^3)C_2)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4). \end{cases} \quad (3.9)$$

Ici β (respectivement, χ) dénote la première composante du vecteur adjoint associé au temps zéro à la géodésique de la classe Γ_g (respectivement, Γ_{-g}) impliquée dans l'intersection.

Nous donnons maintenant un autre exemple, celui qui concerne l'intersection de deux quatrièmes fronts de stratégies "opposées" (par exemple, celui relatif aux géodésiques de la classe Γ_g avec celui relatif aux géodésiques de la classe Γ_{-g}). Un coup d'oeil à la Section 1.2 nous suggère que ce type d'intersections peuvent avoir lieu proche de l'origine (dans le plan xy).

Considérons une géodésique de la classe Γ_g , associée à une extrémale de valeur initiale $(\beta, 1, 1/\rho_0, 0, 0, 0)$, et une géodésique de la classe Γ_{-g} , associée à une extrémale de valeur initiale $(\chi, -1, 1/\tilde{\rho}_0, 0, 0, 0)$, où nous posons $\chi = \sum_{k \geq 0} \chi_k \rho_0^k$ et $\tilde{\rho}_0 = \rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0^2)$; le fait que nous nous plaçons près de l'origine nous impose $\mathbf{T} = 8\rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0^2)$. En plus, il est probable que β soit très proche de 1 (à différence du γ de l'exemple précédent, qui peut bouger - presque - sur tout l'intervalle $[-1, 1]$); pour tenir en compte de ce fait nous développons aussi β en série de puissances de ρ_0 : $\beta = \sum_{k \geq 0} \beta_k \rho_0^k$.

Nous procédons exactement comme tout à l'heure : tout d'abord, il faut s'assurer que les deux temps reparamétrés correspondent au même temps "vrai" \mathbf{T} . Ensuite, en imposant l'égalité entre les jets des deux géodésiques, nous trouvons

$$\begin{aligned} \chi_0 &= -1 & \beta_0 &= 1 \\ \chi_1 &= \beta_1 & &= 0 \\ \chi_2 - \beta_2 &= 8(A - C_1) \end{aligned}$$

ce qui implique que cette intersection peut avoir lieu seulement si $A \geq C_1$. La suspension (sur le plan $\{z = 4\zeta^2\}$) de l'intersection est la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x &= (4A - 4C_1 + \chi_2)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y &= -(4A - 4C_1 + \chi_2)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4). \end{cases} \quad (3.10)$$

avec $\chi_2 \in [0, 8(A - C_2)]$.

3.2 Le lieu de coupure dans le cas $C_1 < 0$ et $C_2 < 0$

Dans cette section nous ferons l'hypothèse que C_1 et C_2 sont tous les deux négatifs. Nous commençons par rappeler que, dans ce cas, aucune géodésique n'est optimale après son quatrième temps de commutation ; pour chercher le lieu de coupure nous devons nous restreindre aux intersections entre les quatrièmes arcs de type bang.

Guidés par l'analyse effectuée dans la Section 1.2, nous nous intéressons d'abord aux intersections $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$, $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$, $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ et $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$.

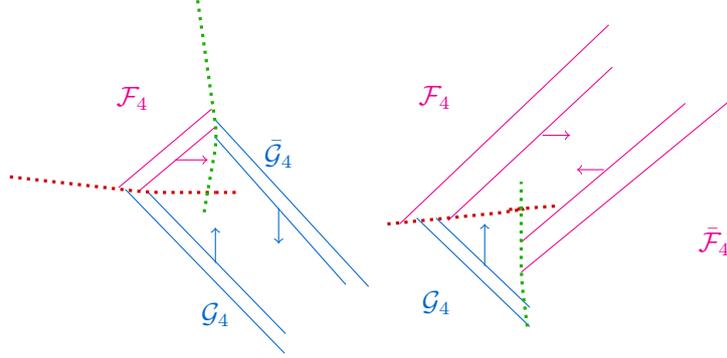


FIGURE 3.1 – Intersections entre les fronts (suspension). Les flèches indiquent les directions d'évolution des fronts dans le temps.

Considérons les limites des équations (3.7)-(3.9)-(B.3) et (3.8) pour $\gamma, \chi \rightarrow -1$ et $\beta, \nu \rightarrow 1$, respectivement ; pour les équations (3.7)-(B.3), nous trouvons

$$\begin{cases} x = \mp 4(A + C_2)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y = \pm 4A\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4), \end{cases}$$

pour les équations (3.9)-(3.8),

$$\begin{cases} x = \pm 4A\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y = \pm 4(A - C_1)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4). \end{cases}$$

Nous remarquons que la position réciproque des intersections dépend de la valeur de l'invariant A : en effet, en comparant simplement ces expressions, on voit que la courbe décrite par l'équation (3.7) croise celle décrite par (3.9) si $A > 0$, et la courbe décrite par (3.8) si $A < 0$. Dans le premier cas, les intersections $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$ et $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$ "bornent" le front \mathcal{F}_4 (donc, nous pouvons supposer que le lieu de coupure des géodésiques de l'ensemble Γ_f est contenu dans l'union de ces deux surfaces) ; dans le deuxième cas, c'est le front \mathcal{G}_4 à être borné (voir Figure 3.1).

Ces observations nous amènent à étudier les cas séparément.

$A > 0$. Lorsque $A > 0$, comme $A > -(A - C_1)$ et $-(A + C_2) > -A$, les suspensions des intersections $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$ et $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$ se croisent, ainsi que celles de $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$. Plus précisément, les suspensions des trois fronts $\mathcal{F}_4, \bar{\mathcal{G}}_4$ et \mathcal{G}_4 se croisent au point

$$Q_f^+ = \left(-4A\zeta^3 - \frac{4}{3}(2E_1 + d_1)\zeta^4, 4A\zeta^3 - \frac{4}{3}(2E_2 + d_2)\zeta^4 \right). \quad (3.11)$$

Pour démontrer cela, nous comparons les expressions (2.21)-(2.24) et (2.23). Nous trouvons que, au temps

$$T = 8\zeta + \left(\frac{8}{3}(C_1 + C_2) - 4A \right) \zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^5)$$

ces trois géodésiques se croisent : la géodésique de la classe Γ_f avec vecteur adjoint initial égal à $(1, \gamma, 1/\rho_0)$, la géodésique de la classe Γ_g avec vecteur

adjoint initial égal à $(\beta, 1, 1/\tilde{\rho}_0)$ et la géodésique de la classe Γ_{-g} avec vecteur adjoint initial égal à $(\chi, -1, 1/\hat{\rho}_0)$, où

$$\begin{aligned}
\gamma &= -1 - 4C_2\zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
\beta &= 1 + 4C_1\zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
\chi &= -1 + (8A - 4C_1)\zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^3) \\
\rho_0 &= \zeta - (C_1 + C_2 + \frac{3}{2}A)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\
\tilde{\rho}_0 &= \zeta - (C_1 + C_2 - \frac{3}{2}A)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\
\hat{\rho}_0 &= \zeta - (C_1 + C_2 - \frac{3}{2}A)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Pareil, les trois fronts $\bar{\mathcal{F}}_4, \bar{\mathcal{G}}_4$ et \mathcal{G}_4 se croisent au point

$$Q_f^- = \left(4A\zeta^3 - \frac{4}{3}(2E_1 + \mathcal{d}_1)\zeta^4, -4A\zeta^3 - \frac{4}{3}(2E_2 + \mathcal{d}_2)\zeta^4 \right).$$

Ces observations nous suggèrent que, proche de l'origine (du plan affine $z = 4\zeta^2$), le lieu de coupure est formé par les intersections entre des géodésiques de la classe Γ_g et des géodésiques de la classe Γ_{-g} ; nous rappelons que cette intersection a été calculée en détail dans la Section 3.1.1.

Pour résumer :

- toutes les géodésiques perdent leur optimalité avant leur quatrième temps de commutation.
- les géodésiques de la classe Γ_f avec $p_y^0 \in [-1, -1 - 4C_2\rho_0^2]$ perdent leur optimalité en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-g} ; les autres, en croisant les géodésiques de la classe Γ_g .
- pareil, les géodésiques de la classe Γ_{-f} avec $p_y^0 \in [1 + 4C_2\rho_0^2, 1]$ perdent leur optimalité en croisant les géodésiques de la classe Γ_g ; les autres, en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-g} .
- les géodésiques de la classe Γ_g avec $p_x^0 \in [1 + 4C_1\rho_0^2, 1]$ perdent leur optimalité en croisant les géodésiques de la classe Γ_f ; celles avec $p_x^0 \in [1 - 8(A - C_1)\rho_0^2, 1 + 4C_1\rho_0^2]$, en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-g} ; les autres, en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-f} .
- enfin, les géodésiques de la classe Γ_{-g} avec $p_x^0 \in [-1, -1 - 4C_1\rho_0^2]$ perdent leur optimalité en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-f} ; celles avec $p_x^0 \in [-1 - 4C_1\rho_0^2, -1 + 8(A - C_1)\rho_0^2]$, en croisant les géodésiques de la classe Γ_g ; les autres, en croisant les géodésiques de la classe Γ_f .

La suspension du lieu de coupure est composée par cinq branches lisses (au moins, jusqu'à l'ordre que nous avons calculé); elle est illustrée dans la Figure 3.2.

$A < 0$. Lorsque $A < 0$, nous avons que $-(A + C_2) > A$ et $A < A - C_1$. En particulier, nous cherchons l'intersection entre les fronts $\mathcal{F}_4, \bar{\mathcal{G}}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_4$ et celle entre les fronts $\mathcal{F}_4, \mathcal{G}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_4$. La première a lieu au point

$$\tilde{Q}_f^+ = \left(4A\zeta^3 - \frac{4}{3}(2E_1 + \mathcal{d}_1)\zeta^4, 4A\zeta^3 - \frac{4}{3}(2E_2 + \mathcal{d}_2)\zeta^4 \right), \tag{3.13}$$

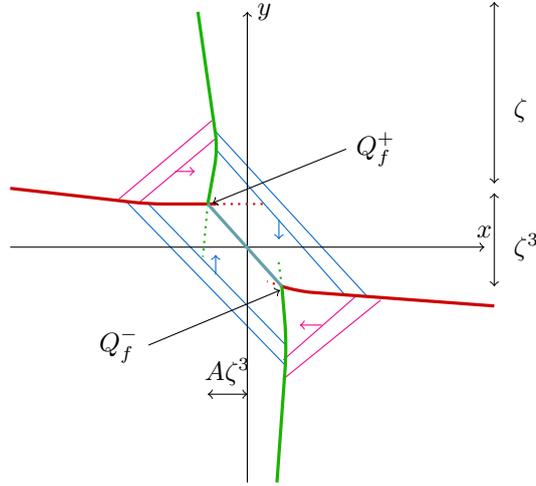


FIGURE 3.2 – Suspension du lieu de coupeure et des fronts pour $A > 0$. Rouge : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; vert : $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$ et $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$; givré : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$. En magenta, les fronts \mathcal{F}_4 et $\bar{\mathcal{F}}_4$, en azur, les fronts \mathcal{G}_4 et $\bar{\mathcal{G}}_4$.

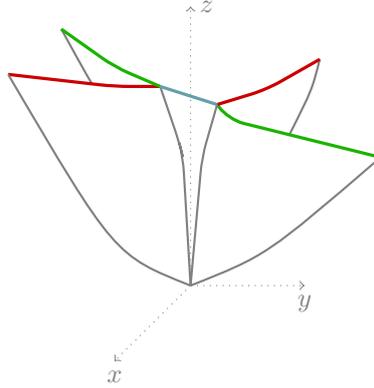


FIGURE 3.3 – Lieu de coupeure pour $C_1 < 0, C_2 < 0$ et $A > 0$.

la deuxième au point

$$\tilde{Q}_f^- = \left(-4A\zeta^3 - \frac{4}{3}(2E_1 + \mathcal{d}_1)\zeta^4, -4A\zeta^3 - \frac{4}{3}(2E_2 + \mathcal{d}_2)\zeta^4 \right).$$

Nous pouvons répéter les mêmes calculs du cas précédent, et nous obtenons que

- toutes les géodésiques perdent leur optimalité avant leur quatrième temps de commutation.
- les géodésiques de la classe Γ_g avec $p_x^0 \in [1 + 4C_1\rho_0^2, 1]$ (respectivement, de la classe Γ_{-g} avec $p_x^0 \in [-1, -1 - 4C_1\rho_0^2]$) perdent leur optimalité en rencontrant les géodésiques de la classe Γ_f (resp. Γ_{-f}); les autres, en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-f} (resp., Γ_f).

- les géodésiques de la classe Γ_f avec $p_y^0 \in [-1, -1 - 4C_2\rho_0^2]$ (respectivement, de la classe Γ_{-f} avec $p_y^0 \in [1 + 4C_2\rho_0^2, 1]$) perdent leur optimalité en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-g} (resp. Γ_g); celles avec $p_y^0 \in [-1 - 4C_2\rho_0^2, -1 - 8(A + C_2)\rho_0^2]$ (resp. $p_y^0 \in [1 + 8(A + C_2)\rho_0^2, 1 + 4C_2\rho_0^2]$), en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-f} (resp. Γ_f); les autres, en croisant les géodésiques de la classe Γ_g (resp. Γ_{-g}).

La suspension du lieu de coupe est illustrée dans la Figure 3.4.

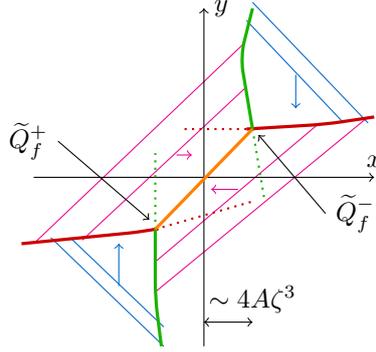


FIGURE 3.4 – Suspension du lieu de coupe et des fronts pour $A < 0$. Rouge : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; vert : $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$ et $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$; orange : $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$. En magenta, les fronts \mathcal{F}_4 et $\bar{\mathcal{F}}_4$, en azur, les fronts \mathcal{G}_4 et $\bar{\mathcal{G}}_4$.

3.3 $C_1 > 0$ and $C_2 < 0$

Nous commençons cette section en remarquant deux faits : tout d’abord, les géodésiques des classes $\Gamma_{\pm f}$ sont localement optimales jusqu’au cinquième temps de commutation, ce qui implique que les cinquièmes fronts bang peuvent participer au lieu de coupe ; par contre, le temps conjugué de toute géodésique appartenant à la classe Γ_g (ou Γ_{-g}) coïncide avec le quatrième temps de commutation, donc les fronts \mathcal{G}_5 et $\bar{\mathcal{G}}_5$ ne sont pas optimales. Ensuite, les intersections $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ n’ont pas lieu (à cause des équations (3.3)-(3.4)).

Nous rappelons aussi que la suspension du front \mathcal{F}_5 (respectivement, $\bar{\mathcal{F}}_5$) est contenue (à des ordres supérieurs près) dans la bande horizontale d’épaisseur $4C_1\zeta^3$, centrée autour de l’ordonnée $y = 4A\zeta^3$ (respectivement, $-4A\zeta^3$) ; la position relative des deux fronts (et par conséquent la possibilité d’intersection entre eux) est donc déterminée, entre autre, par la valeur relative de A par rapport à C_1 et $-C_1$. Nous allons discuter les 4 cas possibles (en excluant les cas non-génériques $A = \pm C_1$).

$A > C_1$. Nous allons commencer par étudier les géodésiques de la classe Γ_f . Tout d’abord, nous pouvons exploiter les résultats de la Section 3.2 et déduire que les géodésiques avec $p_y^0 \sim 1$ perdent leur optimalité avant leur quatrième temps de commutation, quand elles intersectent le front $\bar{\mathcal{G}}_4$ (car cette intersection est encore possible). Ensuite, nous remarquons que, comme $A > C_1$ (et donc, $A - C_1 > -A + C_1$), le front \mathcal{F}_5 n’intersecte pas le front $\bar{\mathcal{F}}_5$.

L'analyse dans l'Annexe B- λ) nous dit que les intersections $\mathcal{F}_5 \cap \mathcal{G}_4$ ne sont pas intéressantes. Il ne nous reste qu'à chercher les intersections du type $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$: les détails sont donnés dans l'Annexe B- θ). Les conditions (B.11)-(B.12) sont satisfaites pour tout $p_y^0 \in [-1, 1]$. En effet, la première est une conséquence de l'hypothèse $A > C_1$, la deuxième du fait que $C_1 > C_2$.

La suspension de cette intersection est un arc de parabole (tournée vers la droite) qui relie les points $(-4A\zeta^3, 4(A+C_1)\zeta^3)$ et $(-4(A-C_1)\zeta^3, 4(A-C_1)\zeta^3)$. En particulier, en dérivant l'expression (B.13) par rapport à p_y^0 , nous remarquons que, au point $(-4(A-C_1)\zeta^3, 4(A-C_1)\zeta^3)$, la pente de la tangente à la courbe est -1 .

Nous pouvons répéter les mêmes arguments pour étudier la perte d'optimalité des géodésiques de la classe Γ_{-f} .

En résumant, nous pouvons conclure que

- toutes les géodésiques de la classe Γ_f perdent leur optimalité en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-g} . Celles avec $p_y^0 \in [-1, -1 - 4C_2\rho_0^2]$ perdent leur optimalité avant leur quatrième temps de commutation, les autres, après leur quatrième temps de commutation.
- pareil, toutes les géodésiques de la classe Γ_{-f} perdent leur optimalité en croisant les géodésiques de la classe Γ_g . Celles avec $p_y^0 \in [1 + 4C_2\rho_0^2, 1]$ perdent leur optimalité avant leur quatrième temps de commutation, les autres, après leur quatrième temps de commutation.
- les géodésiques de la classe Γ_{-g} (respectivement, Γ_g) avec $p_x^0 \in [-1 + 8(A-C_1)\rho_0^2, 1]$ (respectivement, $p_x^0 \in [-1, 1 - 8(A-C_1)\rho_0^2]$) perdent leur optimalité en croisant les géodésiques de la classe Γ_f (Γ_{-f}) ; les autres, en croisant les géodésiques de la classe Γ_g (Γ_{-g}).

La suspension du lieu de coupure est une courbe C^1 (au moins, jusqu'à l'ordre que nous avons calculé), composée par une seule branche ; elle est illustrée dans la Figure 3.5. Quant au lieu de coupure, il est illustré à la Figure 3.6.

$C_1 > A > 0$. Ce cas est très proche du précédent ; néanmoins, il y a trois différences majeures :

- comme $A < C_1$, l'intersection $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ n'a pas lieu ;
- par contre, on peut avoir l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$, étudiée dans l'Annexe B- μ) ;
- l'intersection entre \mathcal{F}_5 et $\bar{\mathcal{G}}_4$ (respectivement, $\bar{\mathcal{F}}_5$ et \mathcal{G}_4) peut avoir lieu seulement si $p_y^0 \leq \frac{2A}{C_1} - 1$, où p_y^0 est, comme d'habitude, la deuxième composante du vecteur adjoint au temps zéro associé à la géodésique de la classe Γ_f (respectivement, $p_y^0 \geq 1 - \frac{2A}{C_1}$, où p_y^0 est la deuxième composante du vecteur adjoint associé à la géodésique de la classe Γ_{-f}).

Nous pouvons donc conclure que

- les géodésiques de la classe Γ_{-g} (respectivement, Γ_g) perdent leur optimalité en croisant les géodésiques de la classe Γ_f (Γ_{-f}) ; en particulier, celles dont la première composante du vecteur adjoint au temps zéro est comprise entre $-1 + 8A\rho_0^2$ et 1 intersectent le front \mathcal{F}_4 (respectivement, pour $p_x^0 \in [1, 1 - 8A\rho_0^3]$ intersectent $\bar{\mathcal{F}}_4$), les autres intersectent le front \mathcal{F}_5 (respectivement, $\bar{\mathcal{F}}_5$).

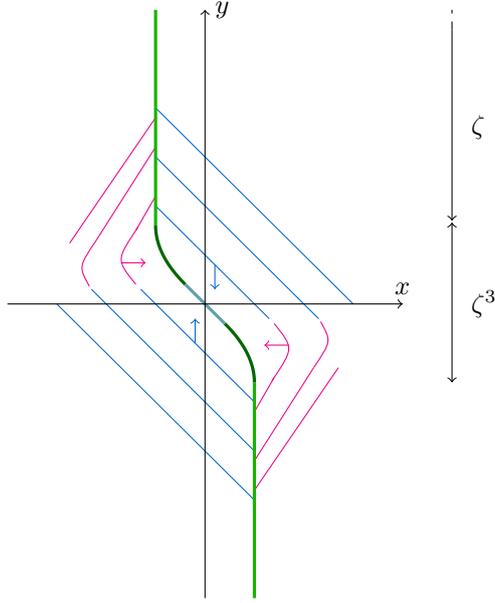


FIGURE 3.5 – Suspension du lieu de coupure et des fronts dans le cas où $A > C_1 > 0$. Vert : $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$ et $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$; vert foncé : $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_5$ et $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$; givré : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$. En magenta, les fronts $\mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$ et $\bar{\mathcal{F}}_4, \bar{\mathcal{F}}_5$, en azur, les fronts \mathcal{G}_4 et $\bar{\mathcal{G}}_4$. Les flèches indiquent le directions dans lesquelles les fronts évoluent avec le temps.

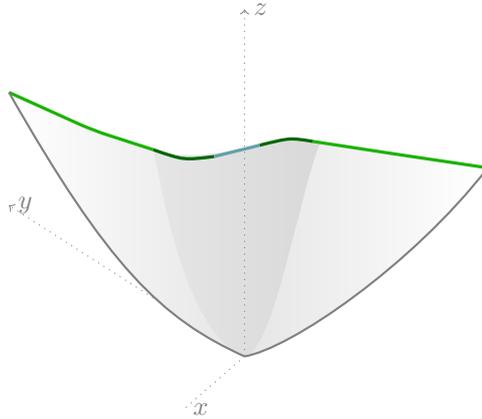


FIGURE 3.6 – Lieu de coupure pour $C_2 < 0$ et $A > C_1 > 0$.

- les géodésiques de la classe Γ_f avec $p_y^0 \in \left[-1, \frac{2A}{C_1} - 1\right]$ perdent leur optimalité en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-g} ; les autres, perdent leur optimalité à cause de l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$. En particulier, nous remarquons que, pour $p_y^0 = \frac{2A}{C_1} - 1$, la pente de la tangente à l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ est l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$ est de classe C^1 (jusqu'à l'ordre considéré).

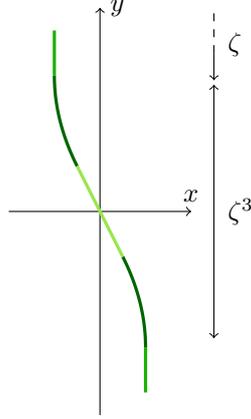


FIGURE 3.7 – Suspension du lieu de coupure et des fronts pour $C_1 > A > 0$. Vert : $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$ et $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$; vert foncé : $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_5$ et $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$; vert clair : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$.

- la perte d’optimalité des géodésiques de la classe Γ_{-f} est complètement analogue.

La suspension du lieu de coupure est une courbe C^1 , composée par une seule branche, et elle est illustrée dans la Figure 3.7.

– $-C_1 < A < 0$. Comme A est négatif et C_1 positif, les intersection entre le cinquième front bang des géodésiques des classes $\Gamma_{\mp f}$ avec celles appartenant aux classes $\Gamma_{\mp g}$ ne peuvent pas avoir lieu (la condition (B.11) est en effet violée). Par contre, comme $A - C_1 < -A - C_1$, nous pouvons avoir des intersections entre le cinquième front bang \mathcal{F}_5 ($\bar{\mathcal{F}}_5$) et le quatrième front bang $\bar{\mathcal{F}}_4$ (\mathcal{F}_4) (voir Annexe B-ε)).

Regardons maintenant l’intersection $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$. D’après l’équation (B.6), la suspension de cette intersection est une parabole tournée vers la droite, et sa tangente au point $p_y^0 = \frac{2A}{C_1} + 1$ est égale à $-C_1/A$; en particulier, l’intersection est toujours à droite de la ligne $y = -\frac{C_1}{A}x$. Ceci nous suggère que, pour $p_y^0 < \frac{2A}{C_1} + 1$, le front \mathcal{F}_5 croise le front $\bar{\mathcal{F}}_5$ avant croiser le front $\bar{\mathcal{F}}_4$.

En résumant

- les géodésiques de la classe Γ_f avec $p_y^0 \in [-1, -1 - 4(C_2 - A^2/C_1)\rho_0^2]$ perdent leur optimalité avant le quatrième temps de commutation, en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-g} si $p_y^0 \in [-1, -1 - 4C_2\rho_0^2]$, et en croisant le $\bar{\mathcal{F}}_5$; sinon. Les autres, perdent l’optimalité après le quatrième temps de commutation : celles avec $p_y^0 \in [-1 - 4(C_2 - A^2/C_1)\rho_0^2, 1 + \frac{2A}{C_1}]$ en intersectant $\bar{\mathcal{F}}_5$, les autres en croisant $\bar{\mathcal{F}}_4$. En particulier, les jonctions entre ces intersections sont de classe C^1 (jusqu’à l’ordre considéré).
- le même raisonnement décrit la perte d’optimalité des géodésiques de la classe Γ_{-f} .
- les géodésiques des classes Γ_g et Γ_{-g} perdent leur optimalité en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-f} et Γ_f , respectivement.

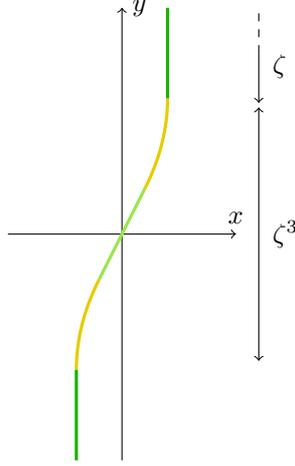


FIGURE 3.8 – Suspension du lieu de coupure et des fronts pour $-C_1 < A < 0$. Vert : $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$ et $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$; jaune : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ et $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$; vert clair : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$.

La suspension du lieu de coupure est une courbe C^1 , composée par une seule branche, et elle est illustrée dans la Figure 3.8.

$A < -C_1 < 0$. Le fait que $|A| > C_1$ détermine deux différences par rapport au cas qu'on vient d'étudier : tout d'abord, les conditions (B.4) et (B.7) sont vérifiées pour tous les $p_y^0 \in [-1, 1]$; ensuite, l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$ n'a pas lieu (voir l'Annexe 2.1.2- μ). D'autre part, l'intersection $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ a lieu.

Nous pouvons conclure que :

- les géodésiques de la classe Γ_f associées au vecteur adjoint $\mathbf{p}(0) = (1, p_y^0, 1/\rho_0)$, avec $p_y^0 \in [-1, -1 - 8(A + C_2)\rho_0^2]$, perdent leur optimalité avant le quatrième temps de commutation; plus précisément, celles avec $p_y^0 \leq -1 - 4C_2\rho_0^2$ coupent les géodésiques de la classe Γ_{-g} ; celles pour lesquelles $p_y^0 \in [-1 - 4C_2\rho_0^2, 1 - 4(2A + C_2)\rho_0^2]$ croisent le front $\bar{\mathcal{F}}_5$; enfin, celles avec $p_y^0 \in [-1 - 4(2A + C_2)\rho_0^2, -1 - 8(A + C_2)\rho_0^2]$, à cause de l'intersection $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$. Les autres, perdent l'optimalité après le quatrième temps de commutation, en intersectant le front $\bar{\mathcal{F}}_4$.
- le même raisonnement décrit la perte d'optimalité des géodésiques de la classe Γ_{-f} .
- les géodésiques des classes Γ_g et Γ_{-g} perdent leur optimalité en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-f} et Γ_f , respectivement.

La suspension du lieu de coupure est une courbe C^1 , illustrée dans la Figure 3.9.

3.3.1 $C_1 < 0$ et $C_2 > 0$

Les rôles de C_1 et C_2 sont complètement échangeables. Pour cela, l'analyse menée dans la Section 3.3 peut être adaptée au cas $C_1 < 0 < C_2$, en exploitant, comme d'habitude, les symétries trouvées dans les Lemmes 10-11.

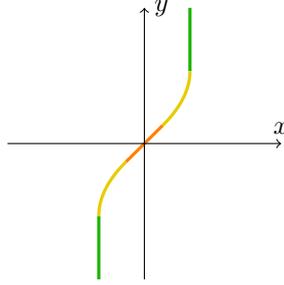


FIGURE 3.9 – Suspension du lieu de coupeure et des fronts pour $-C_1 < A < 0$.
Vert : $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$ et $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$; jaune : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ et $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$; orange : $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$.

Le dessin du lieu de coupeure sera donc une "version horizontale" des Figures 3.5–3.7–3.8–3.9.

3.4 $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$

Lorsque C_1 et C_2 sont tous les deux positifs, le temps conjugué des géodésiques des classes Γ coïncide toujours avec le cinquième temps de commutation.

Dans cette section, sans perte de généralité, nous allons supposer que $C_1 > C_2$; en effet, comme déjà remarqué dans la Section 3.3.1, le cas $C_2 > C_1$ est complètement analogue et peut être déduit aisément.

Avant de poursuivre l'analyse, nous observons les faits suivants :

- les seules intersections entre quatrièmes fronts bang possibles sont $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ et $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$, car les conditions d'existence pour les autres intersections ne sont pas vérifiées.
- les intersections entre cinquième fronts comme $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ peuvent participer au lieu de coupeure.
- comme on peut voir dans l'Annexe B, toutes les intersections qui peuvent participer au lieu de coupeure ont longueur $\mathcal{O}(\zeta^3)$.

Nous remarquons (pour plus de détails, voir l'Annexe B) que l'intersection entre \mathcal{F}_5 et $\bar{\mathcal{G}}_5$ a lieu seulement si la deuxième composante du vecteur adjoint associé à la géodésique Γ_f satisfait $p_y^0 \in [-1, 2\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} - 1]$; d'autre part, l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$ impose $p_y^0 \in [\frac{2A}{C_1} - 1, \frac{2A}{C_1} + 1]$ (et $|A| < C_1$). Lorsque $A > 0$, les deux intervalles sont disjoint si $A > \sqrt{C_1 C_2}$.

Pour cela, nous allons distinguer six cas, correspondants aux valeurs relatifs des invariants A, C_1 et $\sqrt{C_1 C_2}$.

$A > C_1$. Comme d'habitude, nous commençons par étudier la classe Γ_f . Les conditions d'existence dans l'Annexe B nous suggèrent que les morceaux du lieu de Maxwell dans lesquels les géodésiques peuvent perdre l'optimalité sont

$$\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_4, \quad \mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_5 \cap \mathcal{G}_5.$$

Néanmoins, le front \mathcal{G}_5 est contenu (à moins d'ordres supérieurs) dans la bande verticale de largeur $4C_2\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4)$ centrée autour du point $x = 4A\zeta^3$, donc, à droite de l'origine ; il est peu probable que le front \mathcal{F}_5 passe à droite de l'origine tout en conservant son optimalité. Nous allons donc nous concentrer sur les autres deux candidats.

Tout d'abord, nous rappelons que \mathcal{F}_5 et $\bar{\mathcal{G}}_5$ s'intersectent seulement pour $p_y^0 \leq 2\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} - 1$ (p_y^0 étant la deuxième composante du vecteur adjoint associé à la géodésique Γ_f), et que la suspension de l'intersection est un segment de pente $-\sqrt{C_1/C_2}$. D'autre part, la condition (B.12) est vérifiée justement pour $p_y^0 \geq 2\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} - 1$, donc l'intersection entre les fronts \mathcal{F}_5 et $\bar{\mathcal{G}}_4$ peut participer au lieu de coupure. En égalisant les suspensions de ces deux intersections, nous trouvons que, en effet, elle se joignent pour $p_y^0 = 2\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} - 1$ (voir la Figure 3.10).

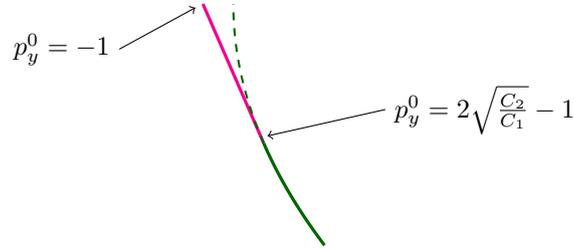


FIGURE 3.10 – Les intersections $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ (magenta) et $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ (vert foncé).

Considérons maintenant les trajectoires de la classe Γ_{-g} , avec vecteur adjoint initial $\mathbf{p}_{-g}(0) = (\beta, -1, \tilde{\rho}_0)$, $\tilde{\rho}_0 = \rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0)$. Si $\beta \in [-1 + 8(A - C_1)\rho_0^2, 1]$, elles perdent l'optimalité en croisant le front \mathcal{F}_5 . Pour $\beta \in [-1, -1 + 8(A - C_1)\rho_0^2]$, la perte d'optimalité est due à l'intersection des fronts \mathcal{G}_4 et $\bar{\mathcal{G}}_4$. En comparant les tangentes aux courbes, nous pouvons vérifier que, à l'ordre ζ^3 , la jonction entre ces deux suspensions est de classe C^1 .

Par symétrie, nous pouvons retrouver la suspension du lieu de coupure des géodésiques des classes Γ_{-f} et Γ_g . Elle est illustrée à la Figure 3.11.

$C_1 > A > \sqrt{C_1 C_2}$. Tous les éléments nécessaires pour comprendre ce cas ont déjà été dévoilés dans les sections précédentes, plus précisément quand nous avons étudié le cas $C_1 > A > 0 > C_2$ et le cas $A > C_1 > C_2 > 0$. En effet, par rapport au cas que nous venons d'étudier, nous avons que les géodésiques de la classe Γ_f peuvent intersecter $\bar{\mathcal{G}}_4$ seulement pour $p_y^0 \leq \frac{2A}{C_1} - 1$; d'autre part, pour $p_y^0 \geq \frac{2A}{C_1} - 1$, elle peuvent croiser le front $\bar{\mathcal{F}}_5$.

Pour cela, la suspension du lieu de coupure ne présente pas trop de différences par rapport au cas précédent : il s'agit d'une courbe C^1 , illustrée à la Figure 3.12.

$\sqrt{C_1 C_2} > A > 0$. Comme nous avons déjà observé dans le début de la Section 3.4, l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ a lieu pour les géodésiques Γ_f avec $p_y^0 \in [-1, 2\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} - 1]$, et l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$ pour $p_y^0 \in [\frac{2A}{C_1} - 1, \frac{2A}{C_1} + 1]$. Comme $0 < A < \sqrt{C_1 C_2}$, nous avons que $\frac{2A}{C_1} - 1 < 2\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} - 1$: il faut donc comprendre si les géodésiques de

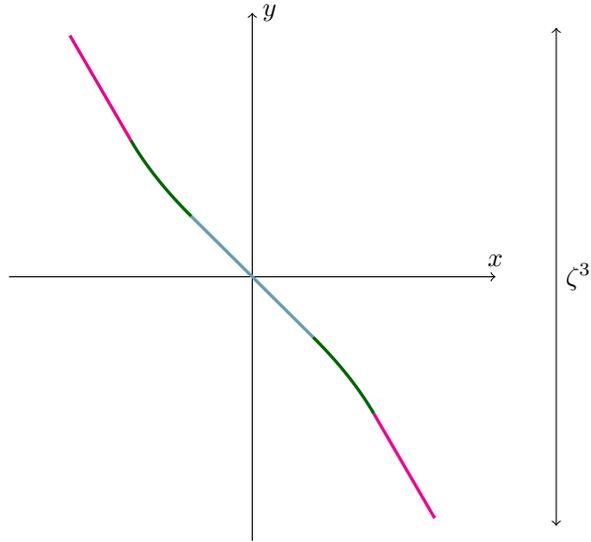


FIGURE 3.11 – Suspension du lieu de coupure et des fronts pour $A > C_1 > C_2 > 0$. Magenta : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; vert foncé : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; givré : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$.

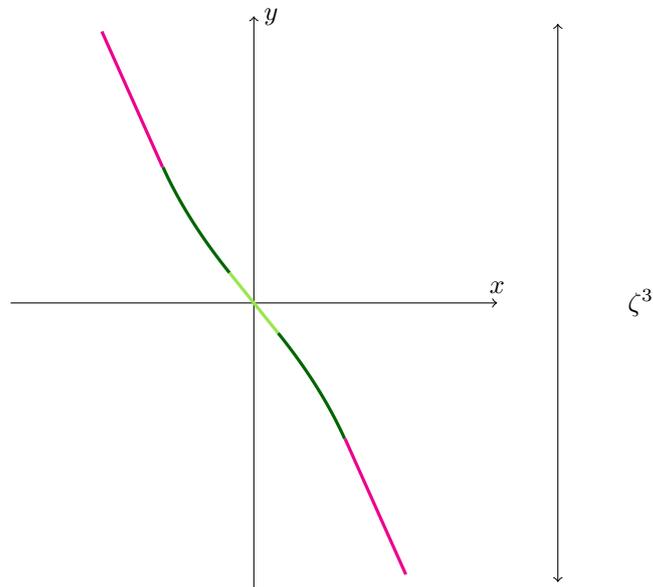


FIGURE 3.12 – Suspension du lieu de coupure et des fronts pour $C_1 > A > \sqrt{C_1 C_2}$. Magenta : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; vert foncé : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; vert clair : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$.

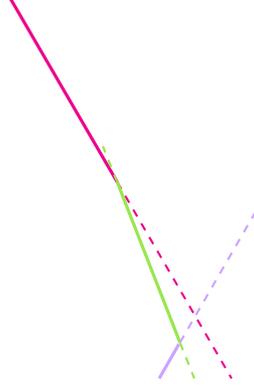


FIGURE 3.13 – Les intersections $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ (magenta) et $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$ (vert clair) et $\mathcal{F}_5 \cap \mathcal{G}_5$ (lilas).

la classe Γ_f avec $p_y^0 \in \left[\frac{2A}{C_1} - 1, 2\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} - 1 \right]$ perdent leur optimalité en intersectant le front $\bar{\mathcal{G}}_5$ ou le front $\bar{\mathcal{F}}_5$. Comme nous avons déjà fait précédemment, pour comprendre cela nous allons étudier plus en détails le graphe des intersections concernées (voir Figure 3.13). En effet, d'après les équations (B.19)-(B.17), la suspension de $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ est un segment de pente $-\sqrt{C_1/C_2}$ et celle de $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$ est un segment de pente $-C_1/A$, et les deux se croisent pour $p_y^0 = -1 + \frac{A}{C_1} + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$, c'est-à-dire, au point

$$\left(-4A\left(1 - \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\right)\zeta^3, 4C_1\left(1 - \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\zeta^3\right) \right).$$

D'autre part, d'après l'Annexe ξ), $\mathcal{F}_5 \cap \mathcal{G}_5$ est permise pour $p_y^0 \geq 1 - 2\sqrt{C_2}C_1$ et sa suspension est un segment de pente $\sqrt{C_1/C_2}$; $\mathcal{F}_5 \cap \mathcal{G}_5$ et $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$ et $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$ est un segment de pente $-C_1/A$. Les suspensions des trois fronts \mathcal{F}_5 , $\bar{\mathcal{F}}_5$ et \mathcal{G}_5 se rencontrent au point

$$\left(4A\left(1 - \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\right)\zeta^3, -4C_1\left(1 - \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\zeta^3\right) \right).$$

D'après calcul, la géodésique de la classe Γ_f qui croise en ce point les fronts \mathcal{G}_5 et $\bar{\mathcal{G}}_5$ est associée au vecteur adjoint $p_y^0 = 1 + \frac{A}{C_1} - \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$.

Ces calculs nous permettent de prouver que toutes les géodésiques de la classe Γ perdent leur optimalité après leur quatrième temps de commutation et, plus précisément :

- les géodésiques de la classe Γ_f associées au vecteur adjoint $p_y^0 \leq -1 + \frac{A}{C_1} + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$ perdent leur optimalité croisant les géodésiques de la classe Γ_{-g} ; celles avec $p_y^0 \in \left[-1 + \frac{A}{C_1} + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}, 1 + \frac{A}{C_1} - \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \right]$ en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-f} ; les autres, en croisant les géodésiques de la classe Γ_g .

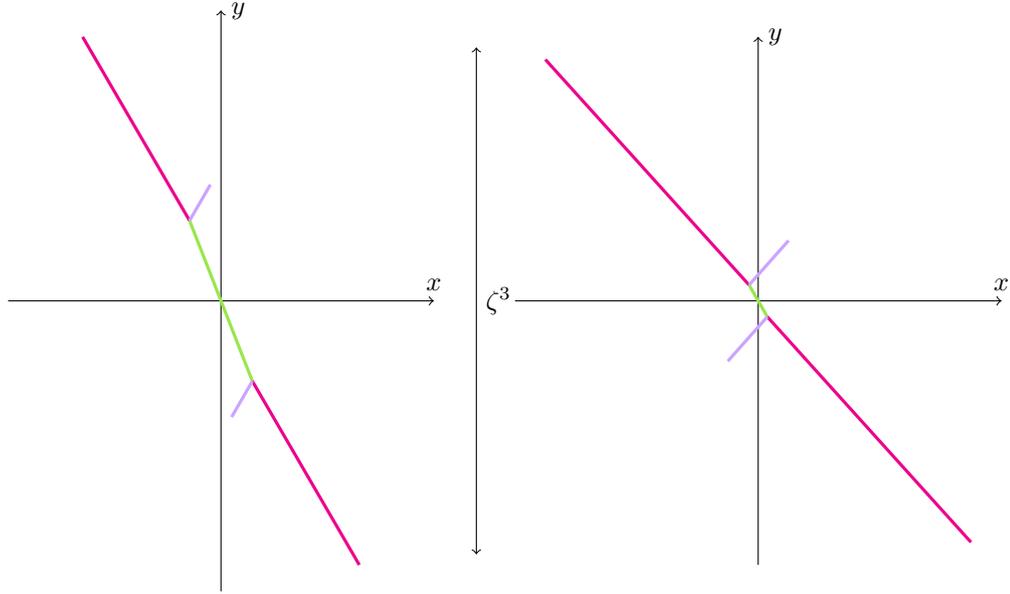


FIGURE 3.14 – Suspension du lieu de coupure pour $C_1 > A > \sqrt{C_1 C_2}$; à gauche, $C_2 < A$; à droite, $A < C_2$. Magenta : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ et $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_5$; lilas : $\mathcal{F}_5 \cap \mathcal{G}_5$ et $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; vert clair : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$.

- pareil, les géodésiques de la classe Γ_{-f} associées au vecteur adjoint $p_y^0 \geq 1 - \frac{A}{C_1} - \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$ perdent leur optimalité croisant les géodésiques de la classe Γ_g ; celles avec $p_y^0 \in \left[-1 - \frac{A}{C_1} + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}, 1 - \frac{A}{C_1} - \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\right]$ en croisant les géodésiques de la classe Γ_f ; les autres, en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-g} .
- en utilisant les relations pour β dans l'Annexe B- ξ), nous voyons que les géodésiques des classes Γ_g (Γ_{-g}) avec $\beta \leq \frac{A}{\sqrt{C_1 C_2}}$ ($\beta \geq -\frac{A}{\sqrt{C_1 C_2}}$) perdent leur optimalité en croisant les géodésiques de la classe Γ_f (Γ_{-f}); les autres, en en croisant les géodésiques de la classe Γ_{-f} (Γ_f).

La suspension du lieu de coupure est composée par cinq branches; elle est illustrée dans la Figure 3.14.

$-\sqrt{C_1 C_2} < A < 0$ Ce cas est complètement analogue à celui qu'on vient d'analyser, la seule différence étant donnée par le fait que l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$ a pente positive.

La suspension du lieu de coupure est montrée dans la Figure 3.15.

$-C_1 < A < -\sqrt{C_1 C_2}$ Lorsque $A < \sqrt{C_1 C_2}$, la valeur $-1 + \frac{A}{C_1} + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$ n'est plus admissible pour la composante p_y^0 du vecteur adjoint, ce qui suggère que l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ ne participe plus au lieu de coupure. En effet, d'après l'Annexe B- ε), nous pouvons vérifier que les géodésiques de la classe Γ_f avec vecteur adjoint $p_y^0 \in [-1, -1 + 4(\frac{A}{C_1^2} - C_2)\rho_0^2]$ coupent le front $\bar{\mathcal{F}}_5$ avant leur

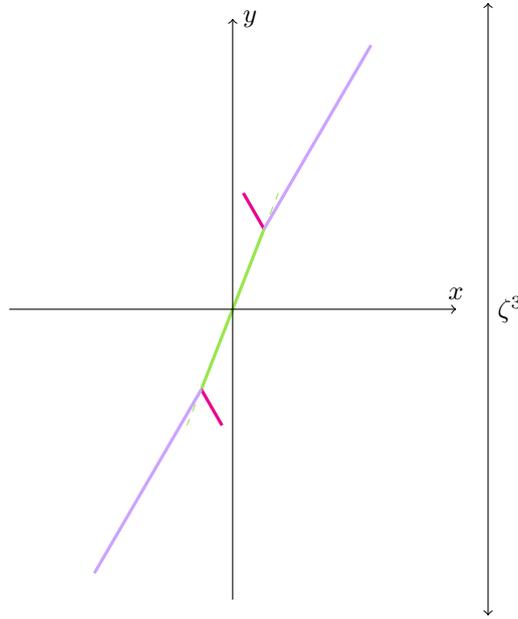


FIGURE 3.15 – Suspension du lieu de coupure pour $-\sqrt{C_1 C_2} < A < 0$. Magenta : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ et $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_5$; lilas : $\mathcal{F}_5 \cap \mathcal{G}_5$ et $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; vert clair : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$.

quatrième temps de commutation ; nous rappelons que, d’après l’équation (B.6), cette intersection est un arc de parabole. D’autre part, celles avec vecteur adjoint $p_y^0 \in [-1 + 4(\frac{A}{C_1^2} - C_2)\rho_0^2, 1 + 2\frac{A}{C_1}]$ perdent leur optimalité toujours en croisant le front $\bar{\mathcal{F}}_5$, mais seulement après leur quatrième temps de commutation.

Les géodésiques de la classe Γ_f avec $p_y^0 \geq 1 + 2\frac{A}{C_1}$ perdent elles aussi leur optimalité après le quatrième temps de commutation ; pour $p_y^0 \in [1 + 2\frac{A}{C_1}, 1 - 2\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}]$, en croisant le quatrième front bang des trajectoires Γ_{-f} , pour $p_y^0 \geq 1 - 2\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$ en intersectant le front \mathcal{G}_5 .

La perte d’optimalité des géodésiques de la classe Γ_{-f} est complètement analogue ; pour trouver les intervalles des valeurs du vecteur adjoint qui donnent lieu à des “morceaux” différents du lieu de coupure, il suffit d’appliquer le Lemme 11.

Toutes les trajectoires de la classe Γ_g (Γ_{-g}) perdent leur optimalité après leur quatrième temps de commutation, en croisant le front \mathcal{F}_5 ($\bar{\mathcal{F}}_5$).

En calculant la tangente à la courbe aux points où les différents morceaux se joignent, nous vérifions que le lieu de coupure est de classe C^1 . Sa suspension est illustrée dans la Figure 3.16.

$A < -C_1$ Lorsque $A < -C_1$, le comportement des géodésiques est très similaire de celui qu’on a pour $A > C_1$. La suspension du lieu de coupure est une courbe C^1 composée par la concaténation de cinq morceaux lisses (toujours, la régularité est assurée jusqu’à l’ordre que nous considérons). Plus précisément :

- les géodésiques de la classe Γ_f avec vecteur adjoint $p_y^0 \in [-1, -1 - 8(A + C_2)\rho_0^2]$ croisent le front $\bar{\mathcal{F}}_4$ avant leur quatrième temps de commutation ;

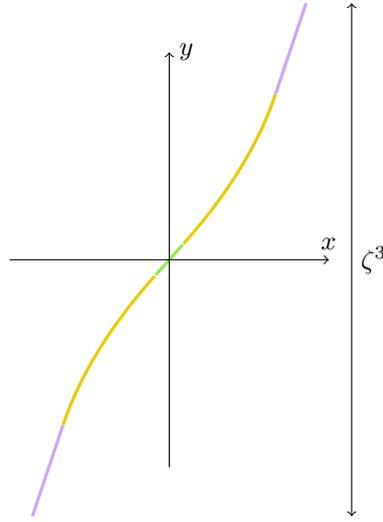


FIGURE 3.16 – Suspension du lieu de coupure pour $-C_1 < A < -\sqrt{C_1 C_2}$. Vert clair : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$; lilas : $\mathcal{F}_5 \cap \mathcal{G}_5$ et $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; jaune : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{F}_4$.

celles avec vecteur adjoint $p_y^0 \in [-1 - 8(A + C_2)\rho_0^2, 1 - 2\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}]$ perdent l'optimalité globale après leur quatrième temps de commutation, en croisant le front $\bar{\mathcal{F}}_5$. Enfin, pour $p_y^0 \geq 1 - 2\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$, la perte d'optimalité est due à l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \mathcal{G}_5$.

- La perte d'optimalité des géodésiques de la classe Γ_{-f} est complètement analogue (il suffit d'appliquer le Lemme 11).
- toutes les géodésiques de classe Γ_g (Γ_{-g}) perdent leur optimalité à cause de l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \mathcal{G}_5$ ($\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$).

Le lieu de coupure est C^1 , et sa suspension est montrée dans la Figure 3.17.

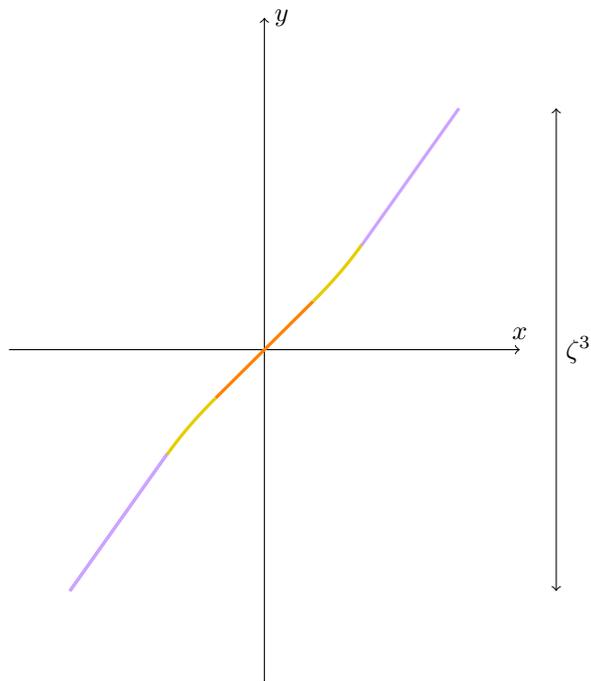


FIGURE 3.17 – Suspension du lieu de coupure pour $A < -C_1$. Orange : $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$; lilas : $\mathcal{F}_5 \cap \mathcal{G}_5$ et $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; jaune : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{F}_4$.

Chapitre 4

Le lieu de coupure pour $C_1 = 0$

Ce chapitre contient la majorité des résultats originaux du manuscrit. Le résultats ont été présentés dans la contribution [23] et font l'objet de la pré-publication [22].

Comme déjà anticipé dans l'Introduction, nous allons considérer la situation (non-générique) des structures sous-Finslériennes telles que l'invariant C_1 est nul. Comme nous verrons dans ce Chapitre, même si on suppose que les invariants A et C_2 soit non-nuls, ceci va changer énormément la structure du lieu de coupure, qui, dans ce cas, sera déterminée aussi par les valeurs des deux invariants D_1, E_1 , définis dans l'équation (2.13). Autrement dit, nous allons faire l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4 *Les invariants A, C_2, D_1 et E_1 sont non-nuls. En plus, nous assumons que $|A| \neq |C_2|$ et $|D_1| \neq |E_1|$.*

L'invariant C_1 est nul.

Nous pouvons déjà anticiper les principales différences par rapport aux résultats du Chapitre 3 :

- comme déjà remarqué dans la Section 2.2.2, lorsque $|D_1| > |E_1|$, le temps conjugué des géodésiques de la classe Γ_f (Γ_{-f}) correspond au quatrième temps de commutation pour certaines trajectoires, au cinquième pour les autres; lorsque $|E_1| > |D_1|$, si le temps conjugué des géodésiques de la classe Γ_f coïncide avec le quatrième temps de commutation, alors, pour les géodésiques de la classe Γ_{-f} , il coïncide avec le cinquième temps de commutation (et vice-versa).
- d'après les équations (2.16)-(2.17), les suspensions des cinquièmes fronts bang \mathcal{F}_5 et $\bar{\mathcal{F}}_5$ sont des courbes de longueur $\mathcal{O}(\zeta^4)$. En plus, à l'ordre ζ^4 la symétrie entre les deux fronts n'est pas préservée.
- si nous considérons les jets des géodésiques jusqu'à l'ordre ζ^4 , nous nous apercevons que la suspension du lieu de coupure n'est plus C^1 (mais elle l'est par morceaux);
- la suspension du lieu de coupure pourrait être non-connexe.

Dans la suite, nous allons analyser en détails les cas : $E_1 < -|D_1|$ (cas \mathbf{A}_-), $D_1 > E_1 > 0$ (cas \mathbf{B}_+) et $-D_1 < E_1 < 0$ (case \mathbf{B}_-). En effet, comme désormais il est clair, les autres cas peuvent être retrouvés à partir de ceux là, juste en échangeant entre eux le comportement des fronts des géodésiques de la classe Γ_f avec celui des fronts des géodésiques de la classe Γ_{-f} .

4.1 $E_1 < -|D_1|$ (cas \mathbf{A}_-)

D'après la Proposition 4, les temps conjugué des géodésiques de la classe Γ_f coïncide avec leur quatrième temps de commutation, alors que celui des géodésiques de la classe Γ_{-f} coïncide avec leur cinquième temps de commutation. Pour ce qui concerne les géodésiques des classes $\Gamma_{\pm g}$, ceci dépend du signe de C_2 . Nous allons analyser tous les cas séparément.

4.1.1 $C_2 < 0$

Tout d'abord, nous observons que les seuls cinquièmes front qui peuvent être optimaux sont ceux des trajectoires de la classe Γ_{-f} . Dans la Figure 4.1, nous voyons le comportement des suspension du fronts dans le cas où $A > 0$.

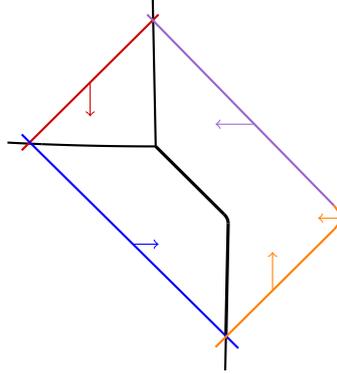


FIGURE 4.1 – Formation du lieu de coupe dans les cas A_- avec $C_2 < 0$ et $A > 0$ à gauche. En rouge (respectivement, bleu, orange, violet) le front \mathcal{F} (respectivement, \mathcal{G} , $\bar{\mathcal{F}}$, $\bar{\mathcal{G}}$)

Comme d'habitude, nous commençons par analyser le comportement des trajectoires de la classe Γ_f ; dans cette section, nous pouvons largement nous appuyer sur l'analyse menée dans la Section 3.2. En effet, les conditions (3.5)-(3.6) sont satisfaites pour tout $\gamma \in [-1, 1]$, et le fait que C_2 soit négatif rend possible l'intersection $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$.

Si nous calculons les limites des équations (3.7)-(3.8)-(3.9) pour $\gamma \rightarrow -1$ (c'est-à-dire, proche de l'origine dans le plan de coordonnée verticale $z = 4\zeta^2$), nous remarquons que, même lorsque C_1 est nul, la position réciproque de ces intersections dépend du signe de l'invariant A . En effet, nous avons toujours que, si $A < 0$, les suspensions des trois fronts \mathcal{F}_4 , \mathcal{G}_4 et $\bar{\mathcal{G}}_4$ se croisent au point Q_f^+ (défini dans (3.11)). Ceci nous permet d'établir que les géodésiques de la classe Γ_f avec $p_y^0 \in [-1, -1 - 4C_2\rho_0^2]$ perdent leur optimalité en intersectant le

(quatrième front des) géodésiques de la classe Γ_{-g} , les autres en intersectant le (quatrième front des) géodésiques de la classe Γ_g .

Nous allons maintenant nous intéresser à la classe Γ_{-f} . Nous ne considérons pas les intersections des géodésiques de cette classe avec celles de la classe Γ_f (car nous avons vu que ces dernières ont déjà perdu l'optimalité locale), et les équations (B.1)-(B.2) interdisent les intersections avec les fronts des trajectoires de Γ_{-g} , il ne nous reste qu'à considérer les trajectoires de la classe Γ_g : plus précisément, nous regardons aux intersections du type $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ et $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$ (détails dans les Annexes B- β) et ι). L'intersection $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ concerne seulement les trajectoires de la classe Γ_{-f} avec $p_y^0 \in [1 + 4C_2\rho_0^2, 1]$; les autres géodésiques perdent leur optimalité après le quatrième temps de commutation, toujours à cause de l'intersection avec le front \mathcal{G}_4 . En particulier, la tangente à la suspension $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ (équation B.14) est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(p_y^0)}{x'(p_y^0)} = -\frac{2}{1 - p_y^0} + \mathcal{O}(\zeta).$$

La limite de cette expression pour $p_y^0 \rightarrow \pm 1$ nous montre que la jonction de ce morceau du lieu de coupure avec le reste est de classe C^1 .

Nous pouvons résumer le comportement des géodésiques de la classe Γ comme il suit :

- les géodésiques de la classe Γ_g perdent leur optimalité en intersectant les géodésiques Γ_f (si $p_x^0 \in [1 + 4(E_1 + \frac{D_1}{3})\rho_0^2, 1]$), Γ_{-g} (si $p_x^0 \in [1 - 8A\rho_0^2, 1 + 4(E_1 + \frac{D_1}{3})\rho_0^2, 1]$) et Γ_{-f}
- les géodésiques de la classe Γ_{-g} perdent leur optimalité à cause des intersections avec Γ_f and Γ_g .
- finalement, toutes les géodésiques de la classe Γ_{-f} perdent leur optimalité en intersectant le front \mathcal{G}_4 , comme expliqué ci-dessus.

La suspension du lieu de coupure est composée par trois branches de classe C^1 . Elle est illustrée dans les Figures 4.1-4.2. Le lieu de coupure est affiché dans la Figure 4.3.

Lorsque $A < 0$, l'intersection entre les quatrièmes fronts des trajectoires des classes Γ_g et Γ_{-g} est interdite (voir à la page 61); d'autre part, comme nous avons déjà fait dans la Section 3.2, nous pouvons prouver que les suspensions des fronts \mathcal{F}_4 , $\bar{\mathcal{G}}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_5$ se croisent au point \tilde{Q}_f^+ défini dans l'équation (3.13). Nous pouvons déjà conclure pour les géodésiques de la classe Γ_g : elles perdent l'optimalité avant leur quatrième temps de commutation, en intersectant le front \mathcal{F}_4 si elles sont associées à un vecteur adjoint $\mathbf{p}_g(0) = (p_x^0, 1, 1/\rho_0)$ avec $p_x^0 \geq 1 + 4(E_1 + \frac{D_1}{3})\rho_0^2$, en intersectant le front $\bar{\mathcal{F}}_4$ les autres.

Par contre, l'intersection des trois fronts au point \tilde{Q}_f^- n'a plus lieu; en effet, les fronts $\bar{\mathcal{F}}_4$ et $\bar{\mathcal{G}}_4$ n'ont pas de points en commun. Nous allons donc regarder s'il y a une intersection entre le front $\bar{\mathcal{G}}_4$ et le front $\bar{\mathcal{F}}_5$.

En imposant l'égalité entre les jets des expressions (2.21), (2.24) et (2.17), on peut prouver que les trois fronts \mathcal{F}_4 , $\bar{\mathcal{G}}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_5$ se rencontrent au point

$$\left(-4A\zeta^3 - \frac{4}{3}(2E_1 + \mathcal{d}_1)\zeta^4, -4A\zeta^3 - 2(2E_1 + D_1 - \frac{1}{3}c_1)\zeta^4 \right),$$

au temps $\mathbf{T} = 8\zeta + (4A + \frac{8}{3}C_2)\zeta^3$.

Nous concluons que

- les géodésiques de la classe Γ_f associées au vecteur adjoint $(1, p_y^0, \rho_0)$, avec $p_y^0 \in [-1, -1 - 4C_2\rho_0^2 + 4(E_2 + D_2/3)\rho_0^3]$, perdent l'optimalité en coupant le front $\bar{\mathcal{G}}_4$; celles avec $p_y^0 \in [-1 - 4(C_2 + 2A)\rho_0^2 + 4(E_2 + D_2/3)\rho_0^3, 1]$, en coupant le front \mathcal{G}_4 ; les autres, lorsqu'elles rencontrent les géodésiques de l'ensemble Γ_{-f} .
- les géodésiques de l'ensemble Γ_{-f} associées au vecteur adjoint $(-1, p_y^0, \rho_0)$ perdent leur optimalité de la manière suivante : pour $p_y^0 \in [1 + 4(E_1 + \frac{1}{3}D_1)\rho_0^2, 1]$, en coupant, avant le quatrième temps de commutation, les géodésiques de l'ensemble Γ_g . Les autres, en coupant les géodésiques de l'ensemble Γ_f , après leur quatrième instant de commutation si $p_y^0 \geq 1 + (8A + 4C_2)\rho_0^2$, avant sinon.

Comme dans le cas précédent, nous pouvons conclure que le lieu de coupure est composé par trois branches C^1 . La suspension du lieu de coupure est illustrée dans la Figure 4.2.

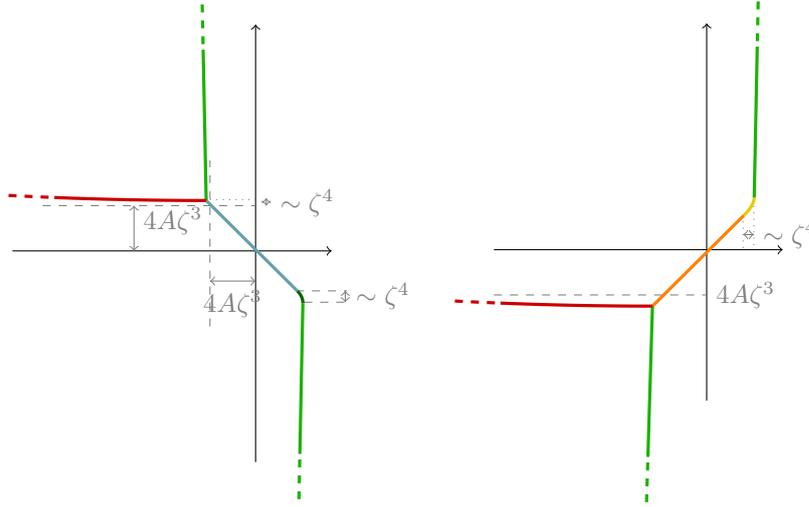


FIGURE 4.2 – Suspension du lieu de coupure dans le cas A_- , avec $C_2 < 0$. À gauche, $A > 0$, à droite, $A < 0$. Rouge : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$; vert : $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$ et $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$; givré : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; vert foncé : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$; orange : $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$; jaune : $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$.

4.1.2 $C_2 > 0$

Nous rappelons que, lorsque $C_2 > 0$, les intersections du type $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ et $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$ ne sont plus présentes; en plus, les cinquièmes fronts bang des trajectoires des classes $\Gamma_{\pm g}$ sont localement optimaux. Un aperçu de la suspension du front, lorsque nous considérons $A > 0$, se trouve dans la Figure 4.4.

Comme nous avons déjà remarqué, la suspension du front \mathcal{G}_5 est contrainte dans la bande comprise entre les lignes verticales $\{x = (A - C_2)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4)\}$ et $\{x = (A + C_2)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4)\}$ (voir l'équation (2.18)) : ceci nous dit qu'on doit distinguer 4 cas, suivant les valeurs relatives de A et C_2 .

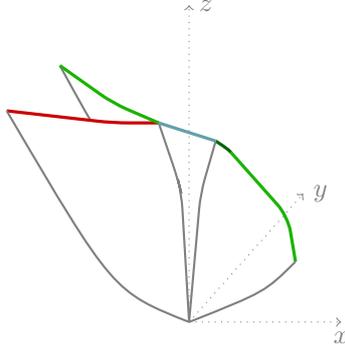


FIGURE 4.3 – Lieu de coupure dans le cas A_- , pour $C_2 < 0$ et $A > 0$.

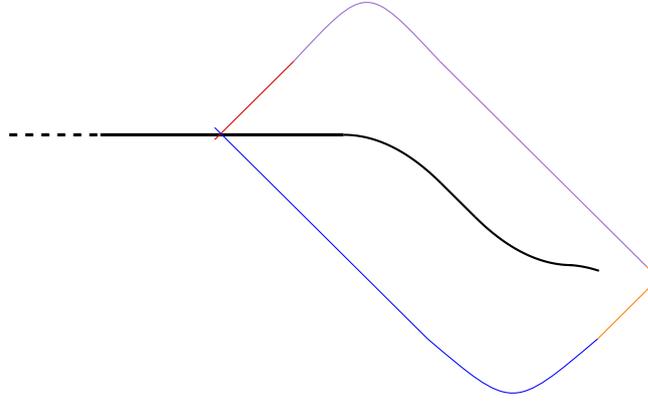


FIGURE 4.4 – Formation du lieu de coupure dans les cas A_- avec A_- avec $A > C_2 > 0$. En rouge (respectivement, bleu, orange, violet) le front \mathcal{F} (respectivement, $\mathcal{G}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}}$)

$A > C_2$ La suspension du lieu de coupure est une courbe composée par la concaténation de morceaux des intersections suivantes :

$$\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4, \quad \mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4, \quad \bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{G}_5, \quad \bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_5.$$

En effet, nous commençons par remarquer que les géodésiques de la classe Γ_f peuvent perdre leur optimalité seulement par intersection avec les géodésiques de la classe Γ_g , car le fait que $C_2 > 0$ interdit les intersections avec le front $\bar{\mathcal{G}}_4$ et $A > 0$ interdit celles avec les fronts $\bar{\mathcal{F}}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_5$.

Regardons maintenant les géodésiques de la classe Γ_{-f} : les intersections du front $\bar{\mathcal{F}}_4$ avec les fronts $\mathcal{F}_4, \mathcal{G}_4$ et $\bar{\mathcal{G}}_4$ n'ont pas lieu ; de même, l'intersection $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_4$ n'a pas lieu (à cause de la condition (B.12)). Il ne nous restent que les intersections $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_5$ et $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$, mais nous allons étudier la première, car, lorsque $A > C_2$, le front \mathcal{G}_5 se trouve plus “à droite” du front $\bar{\mathcal{G}}_5$.

Posons $\mathbf{T} = T_1\zeta + T_2\zeta^2 + T_3\zeta^3 + T_4\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5)$, et considérons les fronts

concernés, au temps \mathbf{T} (équations (2.17) et (2.18)). Si nous procédons comme nous l'avons toujours fait, c'est-à-dire, si nous imposons l'égalité des jets des deux fronts (jusqu'à l'ordre 4 en ζ), nous allons trouver les contraintes suivantes

$$T_1 = 8, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = -4A - \frac{4}{3}C_2, \quad \beta = -1$$

ainsi que les deux paires de solutions pour p_y^0 et T_4 :

$$\begin{aligned} p_y^0 &= 1, & T_4 &= 4(E_1 - E_2) - \frac{4}{3}(D_1 + D_2) \\ p_y^0 &= -\frac{1}{2} + \frac{3E_1}{2D_1}, & T_4 &= \frac{3}{2D_1}\left(E_1 + \frac{D_1}{3}\right)^2 - 4\left(E_2 + \frac{D_2}{3}\right). \end{aligned}$$

Le premier couple n'est pas surprenant : en effet, considérons la géodésique de la classe Γ_g associée au vecteur adjoint $\mathbf{p}_g(0) = (p_x^0, 1, 1/\rho_0)$, et évaluons-la à son cinquième temps de commutation $(9 + p_x^0)\rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0)$. Sa limite pour $p_x^0 \rightarrow -1$ est effectivement la géodésique de la classe Γ_{-f} (associée au vecteur adjoint, au temps zéro, $(-1, 1, 1/\rho_0)$), évaluée à son quatrième temps de commutation $7 + p_y^0$. Ceci nous dit que, en posant $\beta = -1$, $p_y^0 = 1$ et T_k tel que \mathbf{T} est égal au cinquième temps de commutation de la de la première trajectoire (ou le quatrième de la deuxième trajectoire), alors le système (2.17)=(2.18) est vérifié à tout ordre en ζ .

Comme les solutions ne sont que deux, il semblerait qu'il n'y avait que deux points d'intersection entre les fronts concernés (c'est-à-dire, seulement deux paires de géodésiques s'intersectent); en particulier, ceci impliquerait que les géodésiques de la classe Γ_{-f} n'ont pas de points de Maxwell avant le point conjugué (car les autres intersections sont interdites).

Nous allons tenter une stratégie un peu plus fine que la simple égalisations des jets : posons $\beta = -1 + \eta(p_y^0, \zeta)$ et $\mathbf{T} = 8\zeta - (4A + \frac{4}{3}C_2)\zeta^3 + T_r(p_y^0, \zeta)$, où η et T_r sont des fonctions, que nous allons supposer continues lorsque $p_y^0 \in [-1, 1]$ et ζ est assez petit ; nous substituons ces expressions dans \mathcal{G}_5 . Le système (2.17)=(2.18) devient alors

$$\begin{cases} 4C_2(1 + \beta) - T_r(p_y^0, \zeta) + \left(-\frac{4}{3}D_1(p_y^0)^3 + 2E_1(p_y^0)^2 + 2E_1 - 2D_2\beta^2 + 4E_2\beta + \frac{2}{3}D_2\right)\zeta = o(\zeta) \\ 2C_2(1 - \beta^2) - T_r(p_y^0, \zeta) + \left(\frac{4}{3}D_2\beta^3 - 2E_2\beta^2 - 2E_2 - 2D_1(p_y^0)^2 + 4E_1p_y^0 + \frac{2}{3}D_1\right)\zeta = o(\zeta), \end{cases} \quad (4.1)$$

où les termes nommées $o(\zeta)$ dépendent aussi de η, p_y^0 and T . En sommant les deux équations et en factorisant le résultat, nous trouvons

$$\eta(p_y^0, \zeta)^2(3C_2 + (3D_2 + 3E_2 + 2D_2\eta(p_y^0, \zeta))\zeta) + (1 - p_y^0)^2(-2D_1p_y^0 + 3E_1 - D_1)\zeta - R(\eta, T, p_y^0, \zeta) = 0, \quad (4.2)$$

où le reste $R(\eta, T, p_y^0, \zeta)$ est une fonction telle que

$$R\left(0, \mathbb{T}_4 - 8\zeta + \left(4A + \frac{4}{3}C_2\right)\zeta^3, -1, \zeta\right) = 0 \quad \forall \zeta,$$

(ici, \mathbb{T}_4 dénote le quatrième temps de commutation de la géodésique appartenant à la classe Γ_g) et qui va à zéro plus vite que ζ , lorsque ζ approche 0.

En négligeant les termes d'ordre supérieur en ζ , l'équation (4.2) devient

$$\eta^2(3C_2 + (3D_2 + 3E_2 + 2D_2\eta)\zeta) + (1 - p_y^0)^2(-2D_1p_y^0 + 3E_1 - D_1)\zeta = 0, \quad (4.3)$$

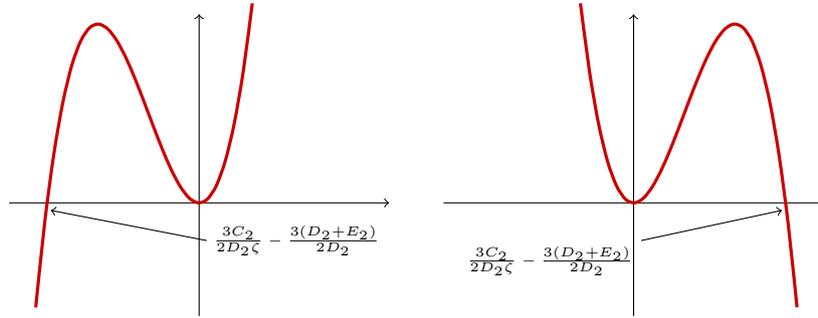


FIGURE 4.5 – Le graphe de la fonction $\eta^2(3C_2 + (3D_2 + 3E_2 - 2D_2\eta)\zeta)$, à gauche pour $D_2 > 0$, à droite pour $D_2 < 0$.

qui est une équation cubique en η . Pour $p_y^0 = 1$, elle a la racine double $\{\eta = 0\}$ et la racine simple $\{\eta = -\frac{3}{2} - \frac{3E_2}{2D_2} - \frac{3C_2}{2D_1}\frac{1}{\zeta}\}$; cette dernière n'est pas admissible, car elle sort de l'intervalle $[-1, 1]$ si ζ est assez petit. Lorsque la valeur de p_y^0 bouge (dans l'intervalle $[-1, 1]$), le seul terme affecté dans l'équation (4.3) est l'ordonnée à l'origine; comme $(-2D_1p_y^0 - D_1 + 3E_1) < 0$ pour tout $p_y^0 \in [-1, 1]$ et $(1 - p_y^0)^2 > 0$ pour $p_y^0 \neq 0$, en bougeant p_y^0 nous allons juste déplacer le graphe du polynôme vers le bas; autrement dit, la racine constante de (4.3) se sépare en deux racines distinctes, l'une positive, l'autre négative; elle sont des fonctions continues de p_y^0 et, pour ζ assez petit, la plus grande est toujours plus petite que 2, donc admissible (voir Figure 4.1.2).

Le même raisonnement s'applique aussi à l'équation (4.2) : en effet, R vaut zéro pour $\beta = -1$, $p_y^0 = 1$ et T égal au temps de commutation; par continuité et grâce au fait que R va à zéro plus vite que ζ , il existe un certain $\bar{\zeta} > 0$ tel que, pour tout $p_y^0 \in [-1, 1)$ et tout $\zeta < \bar{\zeta}$,

$$(1 - p_y^0)^2(-2D_1p_y^0 + 3E_1 - D_1) - R(\eta, T, p_y^0, \zeta) > 0,$$

si $|\eta| < 1/2$ et T est assez proche du temps de commutation. Par conséquence, le graphe de la fonction définie dans le terme de gauche de l'équation (4.2) est proche du graphe de la fonction définie dans le terme de gauche de l'équation (4.3).

L'équation (4.3) suggère que la solution recherchée va à zéro comme $\sqrt{\zeta}$, lorsque $\zeta = 0$; nous allons donc chercher une racine de la forme $\eta(p_y^0, \zeta) = \sqrt{\zeta}\eta_1(p_y^0) + \zeta\eta_2(p_y^0) + \sqrt{\zeta^3}\eta_3(p_y^0) + \mathcal{O}(\zeta^2)$, où les fonctions η_i sont continues en p_y^0 . En substituant ce développement dans (4.2), nous trouvons

$$\eta(p_y^0, \zeta) = (1 - p_y^0)\sqrt{\frac{-2D_1p_y^0 + D_1 - 3E_1}{3C_2}}\sqrt{\zeta} + \mathcal{O}(\zeta).$$

Nous remarquons que la dérivée

$$\frac{\partial \eta}{\partial p_y^0}(p_y^0, \zeta) = \sqrt{\frac{3\zeta}{(3E_1 - 2D_1p_y^0 - D_1)C_2}}(D_1p_y^0 - E_1)$$

a signe constant pour $p_y^0 \in [-1, 1]$, ce qui implique que η est strictement monotone par rapport à $p_y^0 \in [-1, 1]$ (plus précisément, elle est croissante).

En substituant $\beta = -1 + \eta(p_y^0, \zeta)$ dans la première équation du système (4.1), nous obtenons

$$T_r(p_y^0, \zeta) = 4(1 - p_y^0) \sqrt{\frac{C_2(2D_1 p_y^0 + D_1 - 3E_1)\zeta}{3}} + \mathcal{O}(\zeta) \quad (4.4)$$

Enfin, la suspension de l'intersection entre les fronts \mathcal{G}_5 et $\bar{\mathcal{F}}_5$ est obtenue en remplaçant \mathbf{T} avec (4.4) dans l'équation (2.17), et nous donne la courbe

$$\begin{cases} x(\mathbf{T}) &= 4(A + C_2)\zeta^3 + 4\sqrt{\frac{(D_1 + 2D_1 p_y^0 - 3E_1)C_2}{3}}(1 - p_y^0)\zeta^{7/2} + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y(\mathbf{T}) &= -4A\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4), \end{cases}$$

paramétrée par $p_y^0 \in [-1, 1]$.

Nous concluons enfin que les géodésiques appartenant à la classe Γ_{-f} perdent leur optimalité après leur quatrième temps de commutation, en intersectant le cinquième front bang des trajectoires de la classe Γ_g

Nous pouvons passer à l'étude du lieu de coupure des géodésiques de la classe Γ_g . Nous rappelons que, pour p_x^0 proche de 1 (plus précisément, $p_x^0 \geq 1 - 4(E_1 + \frac{D_1}{3})\rho_0^3$), les géodésiques de la classe Γ_g perdent leur optimalité par intersection avec le front \mathcal{F}_4 . En faisant la limite pour $\gamma \rightarrow -1$ (qui correspond à $p_x^0 \rightarrow 1 - 4(E_1 + \frac{D_1}{3})\rho_0^3$) de l'équation (3.7) nous voyons que l'extrémité de la suspension de l'intersection entre les deux fronts se trouve autour du point $(-4(A + C_2)\zeta^3, 4A\zeta^3)$; cette région est d'ailleurs balayée par le front $\bar{\mathcal{G}}_5$: nous allons donc étudier l'intersection $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; les détails se trouvent dans l'Annexe B- η), dans laquelle nous montrons que l'intersection la suspension de l'intersection est un arc de parabole qui relie les points $(-4(A + C_2)\zeta^3, 4A\zeta^3)$ et $(-4(A - C_2)\zeta^3, 4(A - C_2)\zeta^3)$.

Comme d'habitude, la suspension de l'intersection $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{G}_5$ peut être déduite de l'expression de l'intersection $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$, juste en appliquant une rotation d'angle π et la permutation \diamond . En particulier, il s'agit d'un arc de parabole avec concavité C_2 , reliant l'intersection $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ au point $(4(A + C_2)\zeta^3, -4A\zeta^3)$. Nous rappelons que $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ est un segment de pente -1 (voir l'équation (3.10)); nous avons ainsi prouvé que, à cet ordre, les jonctions des différents morceaux du lieu de coupure au points $(-4(A + C_2)\zeta^3, 4A\zeta^3)$ et $(-4(A - C_2)\zeta^3, 4(A - C_2)\zeta^3)$ sont C^1 .

Nous pouvons conclure que les géodésiques de la classe Γ_g perdent ainsi leur optimalité

- si $p_x^0 \geq 1 + 4(E_1 + 1/3D_1)\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4)$, en intersectant \mathcal{F}_4 .
- si $1 - 4C_2\rho_0^2 \leq p_x^0 \leq 1 + 4(E_1 + 1/3D_1)\rho_0^3$, en intersectant $\bar{\mathcal{G}}_5$ (voir l'équation (B.10)).
- si $1 - 8A\rho_0^2 \leq p_x^0 \leq 1 - 4C_2\rho_0^2$, elles perdent leur optimalité le long du cinquième arc, en intersectant $\bar{\mathcal{G}}_4$ (voir l'équation (3.10)).
- les géodésiques dont $-1 + 2\sqrt{\rho_0} \sqrt{\frac{-D_1 - 3E_1}{3C_2}} + \mathcal{O}(\rho_0) \leq p_x^0 \leq 1 - 8A\rho_0^2 + \mathcal{O}(\rho_0^3)$ perdent ainsi leur optimalité le long du cinquième arc, en intersectant le quatrième front bang des géodésiques de la classe Γ_{-g} .
- enfin, celles avec $p_x^0 \leq -1 + 2\sqrt{\rho_0} \sqrt{\frac{-D_1 - 3E_1}{3C_2}} + \mathcal{O}(\rho_0)$ perdent leur optimalité le long du cinquième arc, en intersectant le front $\bar{\mathcal{F}}_5$.

Nous remarquons aussi que, différemment des cas jusqu'ici analysés, la jonction de ce morceaux avec le reste du lieu de coupure n'est pas C^1 .

Les trajectoires de la classe Γ_{-g} perdent leur optimalité de façon assez similaire que les trajectoires de la classe Γ_g (avec la seule différence qu'elles ne rencontrent que les trajectoires de la classe Γ_g).

La suspension du lieu de coupure est montrée dans la Figure 4.6 ; le lieu de coupure, dans la Figure 4.7.

$0 < A < C_2$ Comme déjà vu dans la Section 3.3, ce cas est très similaire au précédente, sauf en deux aspects : tout d'abord, l'intersection entre les quatrième fronts des géodésiques appartenant aux classes $\Gamma_{\pm g}$ n'appartient pas au lieu de coupure (même partiellement) ; ensuite, seulement un morceaux de l'intersection $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ est issu d'une intersection entre géodésiques optimales (c'est-à-dire, il appartient au lieu de coupure) : autrement dit, une partie des géodésiques impliquées ont déjà perdu l'optimalité lors de l'intersection.

Prenons en effet une géodésique la classe Γ_g , associée au vecteur adjoint $(p_x^0, 1, 1/\rho_0)$; elle coupe (avant son quatrième temps de commutation) une géodésique de la classe Γ_{-g} seulement si $p_x^0 \leq \frac{2A}{C_2} - 1$ (condition (B.9)) ; pour $p_x^0 \geq \frac{2A}{C_2} - 1$, l'intersection a lieu après le quatrième temps de commutation (voir les Annexes B- η)- ν) pour plus de détails). En résumant, le morceaux de l'arc de parabole qui appartient au lieu de coupure est celui qui relie les points $(-4(A + C_2)\zeta^3, 4A\zeta^3)$ et $(4(A - C_2)\zeta^3, (-4A^2/C_2 + 4A)\zeta^3)$. De façon similaire, l'arc de parabole issu de l'intersection $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{G}_5$ et reliant les points $(4(A + C_2)\zeta^3, -4A\zeta^3)$ et $(-4(A - C_2)\zeta^3, (4A^2/C_2 - 4A)\zeta^3)$ appartient lui aussi au lieu de coupure.

Les points $(4(A - C_2)\zeta^3, (-4A^2/C_2 + 4A)\zeta^3)$ et $(-4(A - C_2)\zeta^3, (4A^2/C_2 - 4A)\zeta^3)$, quant à eux, sont joints par l'intersection $\mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$, qui est un segment de pente $-A/C_2$ (voir l'Annexe B - ν)).

En résumant, le lieu de coupure est composé par la concaténation des intersections suivantes :

$$\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4, \quad \mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{G}_5, \quad \bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_5.$$

Il est assez facile de vérifier que toutes les jonctions entre différents morceaux sont C^1 , à exception de celle qui implique $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_5$.

$-C_2 < A < 0$ Ci-dessous, nous allons prouver que, dans ce cas, le lieu de coupure est composé par la suivante concaténation de morceaux des intersections de fronts :

$$\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4, \quad \mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_5, \quad \mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \bar{\mathcal{F}}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5.$$

Tout d'abord, nous rappelons que le fait que A soit négatif implique que les géodésiques appartenant aux classes Γ_g and Γ_{-g} peuvent (éventuellement) s'intersecter seulement après leurs cinquièmes temps de commutation. D'autre part, nous remarquons que l'intersection $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$, toujours existant et candidate à la formation du lieu de coupure, est contenue dans une bande de largeur $\mathcal{O}(\zeta^4)$ centrée autour de l'ordonnée $y = 4A\zeta^3$, alors que le front $\bar{\mathcal{F}}_5$ est contenu dans une bande de largeur $\mathcal{O}(\zeta^4)$ centrée autour de l'ordonnée $y = -4A\zeta^3$; comme en plus $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ n'a pas lieu, il semble plus prometteur d'étudier l'intersection $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$. En exploitant les calculs menés dans l'Annexe B- κ), nous pouvons

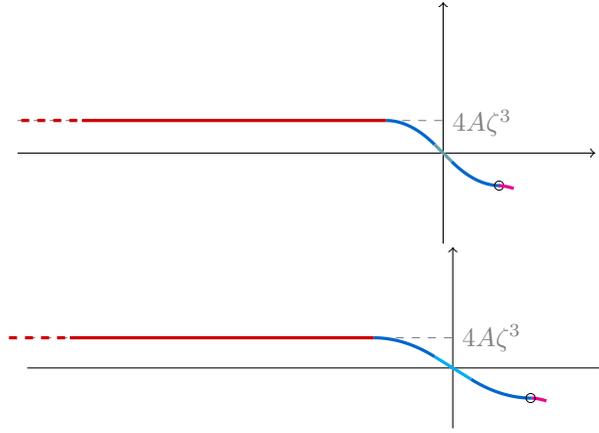


FIGURE 4.6 – Suspension du lieu de coupure dans le cas A_- , avec $C_2 > 0$ et $A > 0$. En haut, le cas où $A > C_2$, en bas, celui où $0 < A < C_2$; rouge : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$; bleue : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ et $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{G}_5$; givré : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; magenta $\mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$; cyan : $\mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$. Les petits cercles montrent les points où la jonction n'est pas C^1 .

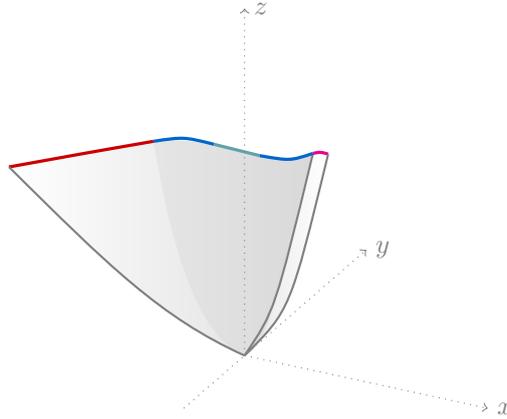


FIGURE 4.7 – Lieu de coupure dans le cas A_- , pour $A > C_2 > 0$.

conclure que, étant donnée une géodésique de la classe Γ_g associée au vecteur adjoint (au temps zéro) égal à $(p_x^0, 1, 1/\rho_0)$, alors

- si $p_x^0 \geq 1 + 4(E_1 + D_1/3)\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4)$, la géodésique perd l'optimalité avant son quatrième temps de commutation, en intersectant une géodésique de la classe Γ_f .
- si $p_x^0 \in [1 + \frac{2A}{C_2}, 1 + 4(E_1 + D_1/3)\rho_0^3]$, perd l'optimalité après son quatrième temps de commutation, en intersectant une géodésique de la classe Γ_f dont le vecteur adjoint au temps zéro est égal à $(1, \tilde{p}_y^0, 1/\tilde{\rho}_0)$, avec $\tilde{p}_y^0 \leq -1 - 8A\rho_0^3$ et $\tilde{\rho}_0 = \rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0^2)$; l'équation (B.16) nous dit que la suspension de cette intersection est un arc de parabole; en particulier, la partie qui appartient au lieu de coupure est celle qui relie les points

$(4(A - C_2)\zeta^3, 4A\zeta^3)$ et $(-4(A + C_2)\zeta^3, 4(A + A^2/C_2)\zeta^3)$ (nous rappelons que $\zeta \sim \rho_0$).

- enfin les géodésiques telles que $p_x^0 \in [-1, 1 + \frac{2A}{C_2}]$ perdent leur optimalité en intersectant le front $\bar{\mathcal{G}}_5$.

En répétant le même argument, nous pouvons montrer que l'arc de parabole donné par la suspension de l'intersection $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ et reliant les points $(-4(A - C_2)\zeta^3, -4A\zeta^3)$ et $(4(A + C_2)\zeta^3, -4(A + A^2/C_2)\zeta^3)$ appartient, lui aussi, au lieu de coupure.

Il ne nous reste qu'à comprendre comment les géodésiques de la classe Γ_{-f} avec vecteur adjoint au temps zéro égal à $(-1, p_y^0, \rho_0)$, pour $p_y^0 \leq 1 + 8A\rho_0^3$, perdent l'optimalité. Comme d'habitude, nous allons tout d'abord observer la position des fronts : elle nous suggère que le seul lieu de Maxwell qui pourrait être optimal est donné par l'intersection du front $\bar{\mathcal{F}}_5$ avec le front $\bar{\mathcal{G}}_5$.

Pour trouver une telle intersection, nous procédons exactement comme nous avons fait pour étudier le cas $A > C_2$. En imposant l'égalité des coordonnées des deux fronts, nous trouvons

$$\begin{cases} (1 + \chi)^2(3C_2 - (3E_2 + (2\chi - 1)D_2)\zeta) + (p_y^0 + 1)^2(-2D_1p_y^0 + 3E_1 + D_1) = o(\zeta) \\ T(p_y^0, \zeta) + 2(\chi^2 - 1)C_2 - 2(D_1(p_y^0)^2 + (1 + \chi^2)E_2 + \frac{2}{3}D_2\chi^3 - 2E_1p_y^0 - \frac{1}{3}D_1)\zeta = o(\zeta), \end{cases} \quad (4.5)$$

où p_y^0 dénote la deuxième composante du vecteur adjoint associé au temps zéro à la géodésique Γ_{-f} et χ la première composante du vecteur adjoint associé au temps zéro à la géodésique Γ_{-g} . En négligeant les termes d'ordre supérieur en ζ , nous remarquons que la première équation possède une solution évidente pour $\chi = p_y^0 = -1$. Nous allons donc substituer $\chi = -1 + \eta(p_y^0, \zeta)$ dans l'équation, ainsi obtenant une équation cubique pour η , avec terme constant égal à $(p_y^0 + 1)^2(-2D_1p_y^0 + 3E_1 + D_1)$. Ce dernier étant négatif pour tout $p_y^0 \in (-1, 1]$, la racine double $\{\eta = 0\}$ se sépare en deux, dont une est toujours positive et plus petite que 2, pour $p_y^0 \in [-1, 1)$ et ζ assez petit.

Pour ζ assez petit, nous obtenons l'estimation suivante

$$\eta(p_y^0, \zeta) = \sqrt{\zeta} \sqrt{\frac{2D_1p_y^0 - D_1 - 3E_1}{3C_2}}(1 + p_y^0) + \mathcal{O}(\zeta).$$

Nous remarquons que la dérivée partielle $\frac{\partial \eta}{\partial p_y^0}(p_y^0, \zeta)$ est positive pour tout $p_y^0 \in [-1, 1]$. En substituant $\chi = -1 + \eta(p_y^0, \zeta)$ dans la deuxième équation du système (4.5), nous obtenons

$$T_r(p_y^0, \zeta) = 4A - \frac{4}{3}C_2 + 4\sqrt{\zeta} \sqrt{\frac{(2D_1p_y^0 - D_1 - 3E_1)C_2}{3}}(1 + p_y^0) + \mathcal{O}(\zeta),$$

ce qui nous permet d'écrire la suspension de l'intersection étudiée :

$$\begin{cases} x = -4(A - C_2)\zeta^3 - 4(p_y^0 + 1)\sqrt{\frac{(2D_1p_y^0 - D_1 - 3E_1)C_2}{3}}\zeta^{7/2} + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y = -4A\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4). \end{cases} \quad (4.6)$$

Nous pouvons montrer que toutes les jonctions, à exception de celle qui implique (4.6), sont C^1 (à moins de terme d'ordre supérieurs). La suspension du lieu de coupure est montrée dans la Figure 4.8.



FIGURE 4.8 – Suspension du lieu de coupe dans le cas A_- , pour $-C_2 < A < 0$. Rouge : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$; violet : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_5$ et $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; cyan : $\mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; bleu : $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$. Les petits cercles montrent les points où la jonction n'est pas C^1 .

$A < -C_2 < 0$ Ce cas est très proche du précédent, à deux différences près : tout d'abord, la contrainte $p_x^0 \geq 1 + \frac{2A}{C_2}$ (voir l'Annexe B- κ) est satisfaite pour tout $p_x^0 \in [-1, 1]$, ce qui nous dit que l'arc de parabole (B.16) (ainsi que son symétrique) appartient à la suspension du lieu de coupe pour tout $p_x^0 \in (-1, 1)$ (à des ordres $\mathcal{O}(\zeta^2)$ près); ensuite, la partie du lieu de coupe plus proche de l'origine dans le plan $\{z = 4\eta^2\}$ est donnée par l'intersection $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$, étudiée dans l'Annexe B- δ).

Le lieu de coupe est la concaténation des intersections suivantes

$$\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4, \quad \mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_5, \quad \mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4, \quad \bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \bar{\mathcal{F}}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5.$$

Nous pouvons montrer que toutes les jonctions, à exception de celle qui implique (4.6), sont C^1 (à moins de termes d'ordre supérieurs). Le lieu de coupe est montré dans la Figure 4.9.



FIGURE 4.9 – Suspension du lieu de coupe dans le cas A_- , pour $A < -C_2 < 0$. Rouge : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$; violet : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_5$ et $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; orange : $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$; bleu : $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$. Les petits cercles montrent les points où la jonction n'est pas C^1 .

4.2 $0 < E_1 < D_1$ (case B_+)

Lorsque $\frac{|E_1|}{|D_1|} < 1$, les formes possibles du lieu de coupe ne sont pas déterminées seulement par les valeurs des invariants C_2 et A , mais la valeur du rapport $\frac{3E_1}{D_1}$ rentre aussi en jeu.

Regardons notamment les conditions d'existence pour l'intersection entre les fronts $\bar{\mathcal{F}}_4$ et $\bar{\mathcal{G}}_4$; si $D_1 > E_1 > 0$, la condition (B.1) est vérifiée pour tout $p_y^0 \in [-1, 1]$, alors que la condition (B.2) est vérifiée seulement si $p_y^0 \leq \frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2}$: si $3\frac{E_1}{D_1} < 1$, alors $\frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2} < 1$, ce qui implique que seulement un sous-ensemble des géodésiques de la classe Γ_{-f} intersectent une géodésique de l'ensemble Γ_{-g} avant leur quatrième temps de commutation. Le lieu de coupe dépend donc aussi de la valeur de $\frac{3E_1}{D_1}$. Ceci donne lieu à plusieurs sous-cas, qui seront étudiés en détails ci-dessous.

4.2.1 $C_2 < 0$

Tout d'abord, nous considérons le cas $C_2 < 0$, dans lequel les géodésiques qui appartiennent à la classe $\Gamma_{\pm g}$, qui ont déjà commuté de contrôle quatre fois, ne

sont plus optimales ; donc, dans cette section nous allons considérer seulement les fronts \mathcal{G}_4 et $\bar{\mathcal{G}}_4$.

$A > 0$ La Figure 4.10 montre les suspensions des fronts dans les cas où $A > 0$.

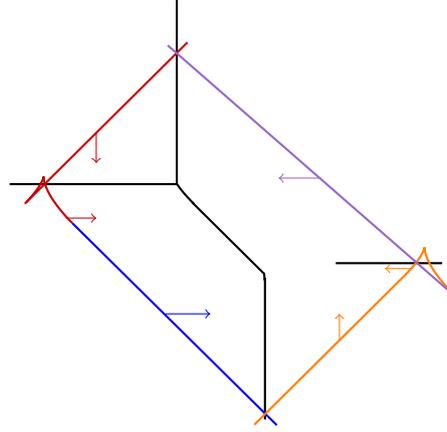


FIGURE 4.10 – Mécanisme de formation du lieu de coupure dans le cas B_+ , pour $C_2 < 0$, $A > 0$ et $\frac{3E_1}{D_1} < 1$. Les flèches montrent la direction de déplacement des fronts, quand le temps augmente.

Nous commençons par nous concentrer sur les géodésiques de la classe Γ_f . Ceci est le premier cas, que nous rencontrons, dans lequel le temps conjugué des géodésiques de la classe Γ_f coïncide avec leur quatrième temps de commutation, mais l'intersection entre les fronts \mathcal{F}_4 et \mathcal{G}_4 n'apparaît pas.

D'autre part, dans la Section 2.3.1 nous avons vu que le front \mathcal{F}_4 peut intersecter le front \mathcal{F}_5 : considérons en effet une géodésique de la classe Γ_f , associée au vecteur adjoint $\mathbf{p}_f(0) = (1, p_y^0, 1/\rho_0)$, $p_y^0 \in [-1, -\frac{E_1}{D_1}]$; au temps (reparamétrisé) $\mathcal{T}_{int} = 7 - \frac{1}{2}p_y^0 + \frac{3E_1}{2D_1} + \mathcal{O}(\rho_0)$, cette géodésique croise la géodésique, appartenant elle aussi à la classe Γ_f , associée au vecteur adjoint $\tilde{\mathbf{p}}_f(0) = (1, -\frac{3E_1}{2D_1} - \frac{1}{2}p_y^0, 1/\tilde{\rho}_0)$, où $\tilde{\rho}_0 = \rho_0 + \frac{9}{4}A(p_y^0 + E_1D_1)\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4)$.

Les géodésiques de la classe Γ_f avec p_y^0 proche de -1, quant à elles, intersectent le front $\bar{\mathcal{G}}_4$, comme nous avons vu dans la Section 3.1.1; l'intersection entre les fronts \mathcal{F}_5 et $\bar{\mathcal{G}}_4$ est aussi permise (voir l'Annexe B- θ). Il faut donc comprendre quelles parties de ces intersections appartiennent effectivement au lieu de coupure. Pour cela faire, nous cherchons une intersection entre les trois fronts ; nous fixons $\zeta > 0$ et un temps $\mathbf{T} = 8\zeta + \mathcal{O}(\zeta^2)$, et nous considérons : les deux géodésiques de la classe Γ_f , associées respectivement, au temps zéro, aux vecteurs adjoints $(1, \gamma, 1/\rho_0)$ et $(1, \tilde{\gamma}, 1/\tilde{\rho}_0)$ et la géodésique de la classe Γ_{-g} associée au vecteur adjoint $(\chi, -1, 1/\hat{\rho}_0)$, où $\rho_0, \tilde{\rho}_0$ et $\hat{\rho}_0$ sont choisis de telle sorte que les troisièmes coordonnées (z) de ces trajectoires valent $4\zeta^2 + \mathcal{O}(\zeta^6)$. Nous imposons aussi l'égalité entre les autres deux coordonnées, à tout ordre des jets (jusqu'au quatrième). Nous trouvons que le temps auquel les trois trajectoires

s'intersectent est

$$\mathbf{T} = 8\zeta + \left(\frac{8}{3}C_2 - 4A\right)\zeta^3 - \frac{3(E_1 + D_1/3)^2}{2D_1}\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5)$$

et les valeurs des vecteurs adjoints sont

$$\gamma = -1 - 4C_2\zeta^2 + 4(E_2 + D_2/3)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \quad \rho_0 = \zeta - \left(C_2 + \frac{3}{2}A\right)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4)$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1} + \mathcal{O}(\zeta) \quad \tilde{\rho}_0 = \zeta - \left(C_2 - \frac{3}{2}A\tilde{\gamma}\right)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4)$$

$$\chi = -1 + 8A\zeta^2 + \left(5E_1 + \frac{3E_1^2}{2D_1} + \frac{3D_1}{2}\right)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \quad \hat{\rho}_0 = \zeta - \left(C_2 - \frac{3}{2}A\right)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4).$$

De ce calcul, nous pouvons déduire que

- les géodésiques de la classe Γ_f avec $p_y^0 \in [-1, -1 - 4C_2\rho_0^2]$ perdent leur optimalité à cause de l'intersection $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$.
- celles dont p_y^0 est compris entre $-1 - 4C_2\rho_0^2$ et $\frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}$ perdent leur optimalité à cause de l'intersection entre les fronts \mathcal{F}_4 et \mathcal{F}_5 , comme décrit dans la Section 2.3.1.
- enfin, celles avec $p_y^0 \in (\frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}, 1]$ perdent leur optimalité après leur quatrième temps de commutation, en intersectant le front $\bar{\mathcal{G}}_4$; les détails du calcul de cette intersection se trouvent dans l'Annexe B- θ).

Nous soulignons que nous avons considéré le cinquième front bang seulement pour les géodésiques avec $p_y^0 \geq -\frac{E_1}{D_1}$; pour les autres, le cinquième arc bang n'est pas optimal.

Considérons maintenant les géodésiques de la classe Γ_{-f} , et soit $(-1, p_y^0, 1/\rho_0)$ le vecteur adjoint leur associé au temps zéro; si $\frac{3E_1}{D_1} \geq 1$, l'équation (B.2) est satisfaite pour tout $p_y^0 \in [-1, 1]$; ceci signifie que toutes les géodésiques de la classe Γ_{-f} intersectent le front $\bar{\mathcal{G}}_4$, au temps (reparamétré) $\mathcal{T} = 7 + p_y^0 + \mathcal{O}(\rho_0^2)$. Nous pouvons conclure que toutes les géodésiques de la classe Γ_g perdent leur optimalité le long du quatrième arc bang : si $p_y^0 \in [-1, 1 + 4C_2\rho_0^2]$, en intersectant $\bar{\mathcal{G}}_4$, les autres en intersectant \mathcal{G}_4 .

Pour étudier les géodésiques de la classe $\Gamma_{\pm g}$, nous pouvons nous appuyer sur les arguments développés dans les Sections 3.2 et 4.1.1 : les géodésiques de la classe Γ_{-g} perdent leur optimalité lorsqu'elles intersectent les fronts $\bar{\mathcal{F}}_4$ ou $\bar{\mathcal{G}}_4$. Nous pouvons ainsi conclure que les géodésiques de la classe Γ_{-g} perdent leur optimalité lorsqu'elles intersectent les géodésiques de la classe Γ_f (équations (3.9) et (B.13)), celles de la classe Γ_g et celles de la classe Γ_{-f} (équation (3.7)).

Nous rappelons que la suspension de l'intersection $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ est, à l'ordre dominant, un segment de pente -1. D'autre part, en dérivant l'équation (B.13) par rapport à p_y^0 , nous trouvons que la tangente à la suspension $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ est donnée par

$$\frac{y'(p_y^0)}{x'(p_y^0)} = \frac{-4(D_1 p_y^0 + E_1) + \mathcal{O}(\zeta)}{2(D_1 p_y^0 + E_1)(p_y^0 + 1) + \mathcal{O}(\zeta)},$$

qui vaut $-1 + \mathcal{O}(\zeta)$ pour $p_y^0 = 1$: nous en déduisons que la jonction entre les deux intersections est C^1 .

La suspension du lieu de coupure est illustrée dans la Figure 4.11, à droite.

Si $\frac{3E_1}{D_1} < 1$, l'équation (B.2) est satisfaite seulement si $p_y^0 \leq \frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2}$ qui est inférieur à 1 ; il reste donc à comprendre comment une géodésique associée au vecteur adjoint $\mathbf{p}_{-f}(0) = (-1, p_y^0, 1/\rho_0)$, $p_y^0 \geq \frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2}$, perd son optimalité ; si $p_y^0 \geq 1 + 4C_2\rho_0^2$, nous avons déjà vu que ceci arrive à cause de l'intersection entre les fronts \mathcal{G}_4 et $\bar{\mathcal{F}}_4$.

Le front $\bar{\mathcal{F}}_4$ ne peut pas intersecter le fronts \mathcal{F}_4 ot/ou \mathcal{F}_5 , car $A > 0$, et les (éventuelles) intersections avec les fronts \mathcal{G}_5 et $\bar{\mathcal{G}}_5$ ne sont pas intéressantes, car ces derniers ne sont pas optimaux ; il ne reste qu'à considérer le front $\bar{\mathcal{F}}_5$.

Grâce à l'équation (2.17), nous voyons que la suspension du front $\bar{\mathcal{F}}_5$ est contenue dans une bande horizontale de largeur $\mathcal{O}(\zeta^4)$, centré autour de l'ordonnée $\{y = -4A\zeta^3\}$. Ceci nous suggère de vérifier si ce front peut croiser le front \mathcal{G}_4 : ce calcul est fait dans l'Annexe B- ι). En particulier, la suspension de cette intersection est une courbe de longueur $\mathcal{O}(\zeta^4)$ qui relie les intersections $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_4$.

Pour étudier la régularité du lieu de coupure, nous allons calculer les tangentes des branches différentes, aux points de jonction ; nous pouvons ainsi vérifier que la suspension du lieu de coupure est C^1 (jusqu'à l'ordre ζ^3) au croisement entre les fronts $\bar{\mathcal{F}}_5$, \mathcal{G}_4 et $\bar{\mathcal{F}}_4$, mais elle ne l'est pas au croisement entre les fronts $\bar{\mathcal{F}}_5$, \mathcal{G}_4 et $\bar{\mathcal{G}}_4$.

En résumant, différemment du cas où $\frac{3E_1}{D_1} \geq 1$, la suspension du lieu de coupure *n'est pas connexe* ; une des ces composantes connexes est composée par seulement une branche, l'autre par trois branches, dont une qui n'est pas C^1 . La suspension est montré dans la Figure 4.11 (à droite).

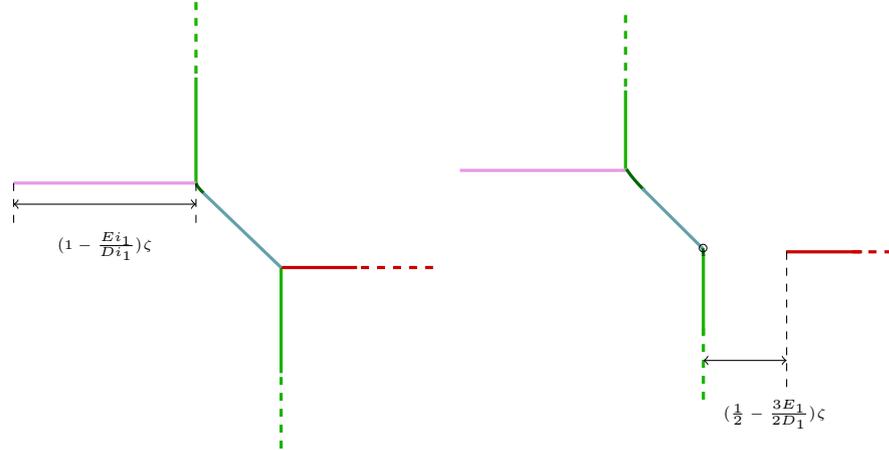


FIGURE 4.11 – Suspension du lieu de coupure dans le cas \mathbf{B}_+ , pour $C_2 < 0$ et $A > 0$. À gauche, $\frac{3E_1}{D_1} \geq 1$, à droite $\frac{3E_1}{D_1} < 1$. Rose : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$; rouge : $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; vert : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ et $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$; givré : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; vert foncé : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_4$. Les cercles indiquent les points où la suspension n'est pas C^1 .

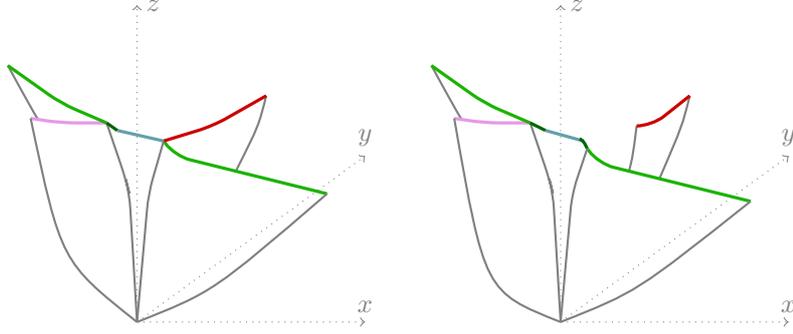


FIGURE 4.12 – Lieu de coupure dans le cas \mathbf{B}_+ , avec $C_2 < 0$ and $A > 0$. À gauche, $\frac{3E_1}{D_1} \geq 1$, à droite $\frac{3E_1}{D_1} < 1$.

$A < 0$ Tout d'abord, nous rappelons que, lorsque $A < 0$, l'intersection entre les fronts \mathcal{F}_5 et $\bar{\mathcal{G}}_4$ n'a pas lieu (voir l'Annexe B- θ) pour plus de détails); ainsi, nous nous demandons comment les géodésiques qui appartiennent à la classe Γ_f et telles que $p_y^0 \geq \frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}$ perdent leur optimalité. Nous nous rappelons que, dans le cas \mathbf{A}_- où C_2 et A sont, tous les deux, négatifs, une partie du lieu de coupure est donnée par l'intersection entre les fronts \mathcal{F}_4 et $\bar{\mathcal{F}}_4$; nous allons donc chercher une intersection entre les trois fronts \mathcal{F}_4 , \mathcal{F}_5 et $\bar{\mathcal{F}}_4$. En comparant les équations (2.16)-(2.21) et (2.22), nous voyons que les trois géodésiques suivantes se croisent : les deux géodésiques de la classe Γ_f , associées respectivement aux vecteurs adjoints $\hat{\mathbf{p}}_f(0) = (1, \gamma, 1/\hat{\rho}_0)$ et $\mathbf{p}_f(0) = (1, p_y^0, 1/\rho_0)$ et la géodésique de la classe Γ_{-f} , associée au vecteur adjoint initial $\mathbf{p}_{-f}(0) = (-1, \nu, 1/\hat{\rho}_0)$, où

$$\gamma = -1 - (4C_2 + 8A)\zeta^2 - \left(\frac{3}{2}\frac{E_1^2}{D_1} + E_1 - 4E_2 + \frac{1}{6}D_1 - \frac{4}{3}D_2\right)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4)$$

$$p_y^0 = \frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1} + \mathcal{O}(\zeta^2)$$

$$\nu = 1 + 4C_2\zeta^2 + \left(\frac{3}{2}\frac{E_1^2}{D_1} + E_1 - 4E_2 + \frac{1}{6}D_1 - \frac{4}{3}D_2\right)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4)$$

$$\rho_0 = \zeta - (C_1 + C_2 + \frac{3}{2}A)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4)$$

$$\tilde{\rho}_0 = \hat{\rho}_0 = \zeta - (C_2 + \frac{3}{2}A)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4).$$

Le temps d'intersection est donné par

$$\mathbf{T} = 8\zeta + \left(\frac{8}{3}C_2 + 4A\right)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^5).$$

Nous remarquons d'ailleurs que, au temps \mathbf{T} , la deuxième géodésique a déjà dépassé son quatrième temps de commutation, égal à $T = (7.5 + \frac{3E_1}{2D_1})\rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0^2)$, contrairement aux autres deux.

Ce calcul nous suggère d'explorer les intersections du front \mathcal{F}_5 avec le front $\bar{\mathcal{F}}_4$ (pour plus de détails, voir l'Annexe B- ε); en effet, Grâce à l'équation (B.8), nous voyons que cette intersection a lieu au temps $\mathbf{T} = 8\rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0^2)$; d'autre part,

l'intersection entre les fronts \mathcal{F}_4 et \mathcal{F}_5 a lieu au temps $T = (7-\gamma)\rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0^2)$ (voir l'équation (2.26)), pour $\gamma \geq -1$; ceci nous dit que, lorsque $\gamma_0 \in [-\frac{E_1}{D_1}, \frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}]$, l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \mathcal{F}_4$ arrive *avant* l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$: donc, c'est la première qui constitue une partie du lieu de coupure (pour ces valeurs de p_y^0).

En résumant, nous pouvons distinguer deux cas; si $\frac{3E_1}{D_1} \geq 1$, la suspension du lieu de coupure est connexe, et composée par cinq branches de classe C^1 . En particulier :

- les géodésiques appartenant à la classe Γ_f et associées au vecteur adjoint $\mathbf{p}_f(0) = (1, p_y^0, 1/\rho_0)$, avec $p_y^0 \in [-1, -1 - 4(2A + C_2)\zeta^2]$, perdent leur optimalité avant le quatrième temps de commutation, par intersection avec le front $\bar{\mathcal{F}}_4$; celles pour qui $p_y^0 \in (-1 - (4C_2 + 8A)\zeta^2, \frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1})$ perdent leur optimalité à cause de l'intersection $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5$; enfin, celles avec $p_y^0 \in (\frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}, 1]$, perdent leur optimalité après le quatrième temps de coupure, en intersectant les géodésiques de la classe Γ_{-f} .
- les géodésiques appartenant à la classe Γ_{-f} associées au vecteur adjoint $\mathbf{p}_{-f}(0) = (-1, p_y^0, 1/\rho_0)$, avec $p_y^0 \in (1 + 4C_2\zeta^2 + 4(E_2 + D_2/3)\zeta^3, 1]$, perdent leur optimalité en intersectant $\bar{\mathcal{G}}_4$; celles pour qui $p_y^0 \in (1 + 4C_2\zeta^2 + 4(E_2 + D_2/3)\zeta^3, 1]$, en intersectant \mathcal{F}_5 ; celles avec $p_y^0 \in (1 + 4(2A + C_2)\zeta^2, 1 + 4C_2\zeta^2)$, en intersectant \mathcal{F}_4 ; enfin, celles pour qui $p_y^0 \in [-1, 1 + 4(2A + C_2)\zeta^2]$, en intersectant le front $\bar{\mathcal{G}}_4$.
- les géodésiques appartenant à la classe $\Gamma_{\pm g}$ perdent leur optimalité le long du quatrième arc bang, à cause de l'intersection avec le front $\bar{\mathcal{F}}_4$, le front $\bar{\mathcal{F}}_4$ ou le front \mathcal{F}_4 .

La suspension du lieu de coupure est illustrée à la Figure 4.13, à gauche.

Si par contre $\frac{3E_1}{D_1} < 1$, la suspension du lieu de coupure est formée par deux composantes connexes. La différence plus évidente par rapport au cas précédent ($\frac{3E_1}{D_1} \geq 1$) est donnée par le fait que les géodésiques de la classe Γ_{-f} pour lesquelles $p_y^0 \in (\frac{1}{2} + \frac{3E_1}{2D_1}, 1 + 4(2A + C_2)\zeta^2)$ n'intersectent pas le front $\bar{\mathcal{G}}_4$. Comme le front $\bar{\mathcal{F}}_4$ peut croiser les fronts \mathcal{G}_4 , \mathcal{F}_4 ou \mathcal{F}_5 seulement lorsque p_y^0 est proche de -1 , la seule option qui reste, aux géodésiques de la classe Γ_f , pour avoir un point de Maxwell, est donnée par l'intersection $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{F}_4$; celle-ci est étudiée dans l'Annexe B- ε). En dérivant l'équation (B.5) par rapport à p_y^0 , nous voyons que la pente de la tangente à la suspension de cette intersection est donnée par

$$\frac{dy(p_y^0)}{dx(p_y^0)} = \frac{2}{(p_y^0 - 1)} + \mathcal{O}(\zeta);$$

en particulier, pour $p_y^0 = \frac{1}{2} + \frac{3E_1}{2D_1}$ la pente vaut $-\frac{2D_1}{3(E_1 + D_1)} + \mathcal{O}(\zeta)$, ce qui montre que la jonction avec $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ n'est pas C^1 .

La suspension du lieu de coupure est montrée à la Figure 4.13, à droite.

4.2.2 $C_2 > 0$

Comme nous avons déjà vu (par exemple, dans les Sections 3.3 et 4.1.2), lorsque $C_2 > 0$, nous avons 4 sous-cas différents, suivant la valeur de A par rapport à C_2 et $-C_2$. En plus, dans ce cas, la forme du lieu de coupure dépend aussi de la valeur de $\frac{3E_1}{D_1}$. Nous allons étudier tous les sous-cas.

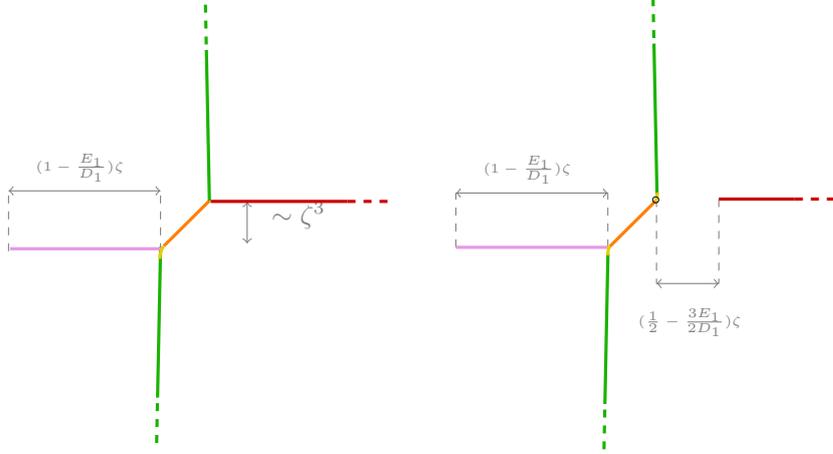


FIGURE 4.13 – Suspension du lieu de coupure dans le cas \mathbf{B}_+ avec $C_2 < 0$ et $A < 0$. À gauche nous illustrons le cas où $\frac{3E_1}{D_1} \geq 0$, à droite, celui où $\frac{3E_1}{D_1} < 0$. Rose : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5$; jaune : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{F}_4$; rouge : $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; vert : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ et $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$; orange : $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$. As before, the circle indicates non-smooth junctions.

$A > C_2$ Commençons, comme d’habitude, par analyser la classe Γ_f ; nous avons déjà vu dans la Section 4.2.1 que les géodésiques associée au covecteur $\mathbf{p}_f(0) = (1, p_y^0, 1/\rho_0)$, avec $p_y^0 \in [-1, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{E_1}{D_1}]$, sont sujettes à l’intersection entre les fronts \mathcal{F}_4 et \mathcal{F}_5 ; il faut maintenant regarder ce qui se passe pour celles pour lesquelles $p_y^0 \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{E_1}{D_1}$. Tout d’abord, nous rappelons que l’intersection $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$ ne se produit pas (car $C_2 > 0$); ensuite, nous observons que le front $\bar{\mathcal{G}}_5$ reste toujours “à gauche” du front \mathcal{G}_5 (car $A > 0$); enfin, nous remarquons que l’intersection $\bar{\mathcal{G}}_5 \cap \mathcal{G}_4$ a lieu et qu’elle est une bonne candidate pour faire partie du lieu de coupure : nous allons donc examiner l’intersection entre les fronts $\bar{\mathcal{G}}_5$ et \mathcal{F}_5 . Pour cela faire, nous imposons l’égalité entre les équations (2.16) et (2.19); nous obtenons le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(4A + 4\chi C_2 + T_3 - \frac{8}{3}C_2 \right) \zeta^3 - \left(2D_2\chi^2 + 4E_2\chi \right. \\ \quad \left. - \frac{4}{3}D_1(p_y^0)^3 - 2E_1(p_y^0)^2 - 2E_1 - \frac{2}{3}D_2 - T_4 \right) \zeta^4 = o(\zeta^4) \\ \left(T_3 - \frac{2}{3}C_2 + 2C_2\chi^2 + 4A \right) \zeta^3 - \left(\frac{4}{3}D_2\chi^3 + 2E_2\chi^2 \right. \\ \quad \left. + 2D_1(p_y^0)^2 + 4E_1(p_y^0) + 2E_2 - \frac{2}{3}D_1 - T_4 \right) \zeta^4 = o(\zeta^4). \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Comme nous avons déjà vu lorsque nous avons étudié l’intersection entre les fronts $\mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$ et $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$, si nous imposons tout simplement que tous les coefficients des puissances ζ^3 et ζ^4 soient nuls, nous obtenons : $\chi = 1$, $T_3 = -4A - \frac{4}{3}C_2$, et les deux paires de solutions

$$\begin{aligned} p_y^0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{E_1}{D_1} & \quad T_4 = -\frac{3}{2}\left(E_1 + \frac{D_1}{3}\right)^2 + 4E_2 + \frac{4}{3}D_2 \\ p_y^0 = -1 & \quad T_4 = 4(E_2 - E_1) + \frac{4}{3}(D_1 + D_2). \end{aligned}$$

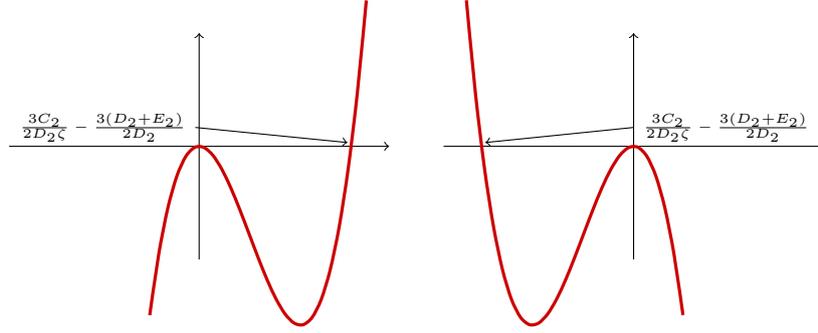


FIGURE 4.14 – Le graphe de la fonction $\eta^2(-3C_2 + (3D_2 + 3E_2 + 2D_2\eta)\zeta)$, à gauche pour $D_2 > 0$, à droite pour $D_2 < 0$.

Autrement dit, les deux (suspensions des) fronts se croisent seulement en deux points et, en conséquence, les géodésiques de la classe Γ_f avec $p_y^0 > \frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}$ perdent l'optimalité globale seulement au lieu conjugué.

Nous allons faire comme déjà fait : nous posons $\chi = 1 + \eta(p_y^0, \zeta)$ and $\mathbf{T} = 8\zeta - (4A + \frac{4}{3}C_2 + T_r(p_y^0, \zeta))\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4)$ dans le système (4.7) ; en soustrayant les deux équations entre elles, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \eta(p_y^0, \zeta)^2(-3C_2 + (3D_2 + 3E_2 + 2D_2\eta(p_y^0, \zeta))\zeta) \\ & + \zeta(1 + p_y^0)^2(3E_1 + D_1(2p_y^0 - 1)) + R(p_y^0, \chi, T, \zeta) = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

où R est une fonction continue des variables χ, p_y^0, T_r et ζ , telle que

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0^+} \frac{R(p_y^0, \chi, T, \zeta)}{\zeta} = 0.$$

Pour $p_y^0 = \frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}$, et en négligeant le reste R , l'équation (4.8) devient $\eta^2(-3C_2 + (3D_2 + 3E_2 + 2D_2\eta)\zeta) = 0$; ce polynôme (dont le graphe est schématisé à la Figure 4.2.2) a une racine double pour $\eta = 0$ et une racine simple en $\eta = \frac{3C_2}{2D_2\zeta} - \frac{3}{2} - \frac{3E_2}{2D_2}$; pour ζ assez petit, cette dernière est trop grande et le χ qui lui correspond n'est pas contenu dans l'intervalle $[-1, 1]$.

La fonction $\zeta(1 + p_y^0)^2(3E_1 + D_1(2p_y^0 - 1))$ est croissante par rapport à p_y^0 , si $p_y^0 \geq -\frac{E_1}{D_1}$; donc, pour $p_y^0 > \frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}$, la double racine du polynôme (4.8) (dans lequel nous négligeons le terme R) se sépare en deux ; pour ζ assez petit, une de ces deux racines est négative et plus grande que -2 , donc la valeur de χ correspondante est admissible.

Par continuité de R , nous pouvons conclure que le même mécanisme se produit aussi si nous prenons en compte aussi les termes d'ordre supérieur en ζ ; nous pouvons ainsi conclure qu'il existe $\bar{\zeta} > 0$ tel que, si $\zeta < \bar{\zeta}$, pour tout $p_y^0 \in [\frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}, 1]$, l'équation (4.8) a une solution $\eta(p_y^0, \zeta) \in (-2, 0)$. Nous trouvons

aussi une expression pour η , de laquelle les expansions pour χ et T découlent :

$$\chi = 1 - \sqrt{\zeta} \sqrt{\frac{3E_1 + 2D_1p_y^0 - D_1}{3C_2}} (1 + p_y^0) + \mathcal{O}(\zeta) \quad (4.9)$$

$$T = -4C_2(1 + p_y^0) \sqrt{\frac{3E_1 + 2D_1p_y^0 - D_1}{3C_2}} \sqrt{\zeta} + \mathcal{O}(\zeta). \quad (4.10)$$

Nous remarquons que l'argument de la racine carrée est non-négatif pour les valeurs de p_y^0 qui nous intéressent ($p_y^0 \in [\frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}, 1]$); en substituant les expressions (4.9)-(4.10) dans l'équation (2.19), nous trouvons la suspension de l'intersection :

$$\begin{cases} x &= -4(A + C_2)\zeta^3 + 4(1 + p_y^0) \sqrt{\frac{3E_1 + 2D_1p_y^0 - D_1}{3C_2}} \zeta^{7/2} + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y &= 4A\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4). \end{cases}$$

Nous concluons ainsi que les géodésiques de la classe Γ_f avec $p_y^0 \in (\frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}, 1]$ perdent leur optimalité après le quatrième temps de commutation, par intersection avec le front $\bar{\mathcal{G}}_5$.

Nous nous concentrons maintenant sur les géodésiques de la classe Γ_{-f} : nous avons deux sous-cas, selon la valeur de $\frac{3E_1}{D_1}$.

Soit $\frac{3E_1}{D_1} \geq 1$; alors, toutes les géodésiques de la classe Γ_{-f} perdent leur optimalité avant le quatrième temps de commutation, en croisant le quatrième front bang des géodésiques de la classe Γ_{-g} .

Au contraire, si $\frac{3E_1}{D_1} < 1$, alors seulement les géodésiques avec $p_y^0 \in [-1, \frac{1}{2} + \frac{3E_1}{2D_1}]$ sont impliquées dans l'intersection avec le quatrième front bang des géodésiques de la classe Γ_{-g} ; celles avec $p_y^0 \in (\frac{1}{2} + \frac{3E_1}{2D_1}, 1]$ perdent leur optimalité après le quatrième temps de commutation, en intersectant les géodésiques de la classe Γ_g , comme d'ailleurs déjà vu dans la Section 4.2.1.

Nous n'allons pas répéter l'analyse du lieu de coupure des géodésiques des classes $\Gamma_{\pm g}$, car il est similaire à celui trouvé dans la Section 4.1.2.

Nous pouvons conclure que, si $\frac{3E_1}{D_1} \geq 1$, la suspension du lieu de coupure est connexe et composée par une seule branche; si $\frac{3E_1}{D_1} < 1$, elle est constituée de deux composantes connexes. Dans le deux cas, elle est C^1 par morceaux. La suspension du lieu de coupure est montrée dans la Figure 4.15.

$0 < A < C_2$ Ce cas est très similaire au précédent, la seule différence étant donnée par le fait que les fronts \mathcal{G}_4 et $\bar{\mathcal{G}}_4$ ne s'intersectent pas; la partie "centrale" de la suspension du lieu de coupure est en effet donnée par l'intersection entre les fronts \mathcal{G}_5 et $\bar{\mathcal{G}}_5$ (voir la Section 4.1.2).

D'ailleurs, comme dans tous les cas de cette Section, nous avons deux possibilités, suivant le fait que $\frac{3E_1}{D_1}$ soit plus grand ou plus petit que 1. Dans les deux cas, la suspension du lieu de coupure est montrée à la Figure 4.16.

En particulier, si $\frac{3E_1}{D_1} \geq 1$, la suspension du lieu de coupure est composé par la concaténation de morceaux des intersections

$$\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5 \quad \mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5 \quad \mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5 \quad \mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5 \quad \bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{G}_5 \quad \bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4,$$

et il est C^1 par morceaux.

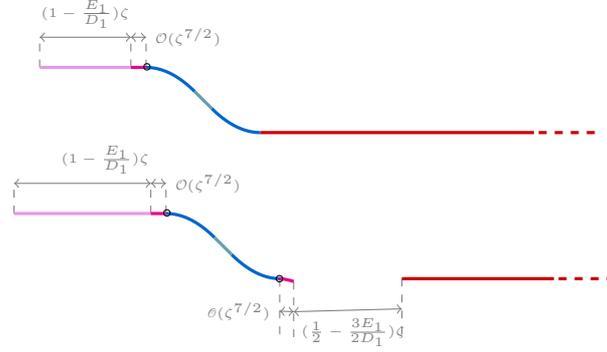


FIGURE 4.15 – Suspension du lieu de coupure dans le cas \mathbf{B}_+ , pour $C_2 > 0$ et $A > C_2$. Le graphe en haut montre le cas $\frac{3E_1}{E_1} \geq 1$, celui en bas le cas $\frac{3E_1}{E_1} < 1$: rose : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5$; magenta : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ et $\mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$; rouge : $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; bleu : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ et $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{G}_5$; givré : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$. Les cercles indiquent les points où le raccordement n'est pas C^1 .

Si par contre $\frac{3E_1}{D_1} < 1$, la suspension du lieu de coupure n'est pas connexe ; une de ses composantes connexe est constituée par la concaténation de morceaux des intersections

$$\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5 \quad \mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5 \quad \mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5 \quad \mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5 \quad \bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{G}_5 \quad \bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_5,$$

et est lisse par morceaux ; l'autre composante connexe est constituée par l'intersection $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$.

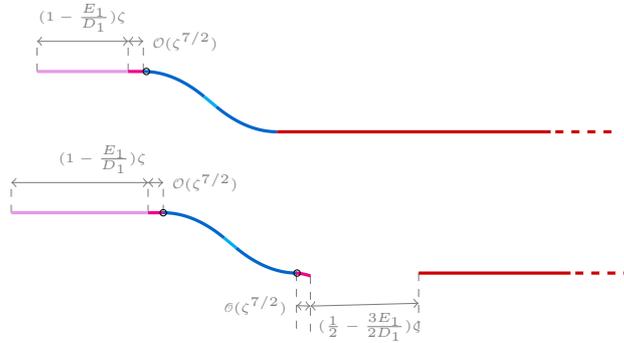


FIGURE 4.16 – Suspension du lieu de coupure dans le cas \mathbf{B}_+ , pour $C_2 > 0$ et $A > C_2$. Le graphe en haut montre le cas $\frac{3E_1}{E_1} \geq 1$, celui en bas le cas $\frac{3E_1}{E_1} < 1$: rose $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5$; magenta : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ et $\mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$; rouge : $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; bleu : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ and $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{G}_5$; cyan : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$. Comme d'habitude, les cercles indiquent les points où la jonction n'est pas C^1 .

$-C_2 < A < 0$ Comme d'habitude, nous commençons par étudier les géodésiques de la classe Γ_f . De la Section 4.1.2, nous rappelons que les géodésiques de la classe Γ_f associées au vecteur adjoint $\mathbf{p}_f(0) = (1, p_y^0, 1/\rho_0)$, avec $p_y^0 \leq -1 - 4A\rho_0^2$,

rencontrent le front \mathcal{G}_5 (les détails des calculs se trouvent dans l'Annexe B- κ); d'autre part, les géodésiques (de la classe Γ_f) avec $p_y^0 \in [-1, \frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}]$ sont impliquées dans l'intersection $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5$. Nous devons maintenant comprendre ce qui se passe pour les géodésiques de la classe Γ_f dont $p_y^0 \geq \frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}$.

Nous rappelons que, lorsque $A < 0$, le front \mathcal{G}_5 est toujours "plus à gauche" du front $\bar{\mathcal{G}}_5$: il est donc probable que le front \mathcal{F}_5 intersecte le front \mathcal{G}_5 , plutôt que le front $\bar{\mathcal{G}}_5$. Nous allons donc calculer l'intersection \mathcal{F}_5 et \mathcal{G}_5 ; les calculs en Annexe B- ξ) sont valables sous l'hypothèse $C_1 > 0$ et ne peuvent pas être généralisés. En effet, comme nous avons déjà vu dans les sections précédentes, en imposant juste l'égalité entre les équations (2.16) et (2.18), nous trouvons seulement deux points d'intersection : le premier, au temps $\mathbf{T} = 8\zeta + 4(A - \frac{1}{3}C_2)\zeta^3 + 4(\frac{1}{3}(D_2 - D_1) - E_1 - E_2)\zeta^4$, pour $\beta = p_y^0 = 1$; le deuxième, au temps $\mathbf{T} = 8\zeta + 4(A - \frac{1}{3}C_2)\zeta^3 + (\frac{3E_2^2}{2D_1} + \frac{1}{6}D_1 + \frac{4}{3}D_2 - E_1 - 4E_2)\zeta^4$, pour $\beta = 1$ et $p_y^0 = -\frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}$; cette deuxième solution n'est d'ailleurs pas intéressante, car nous cherchons des intersections pour $p_y^0 \geq \frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}$.

Nous allons donc poser $\beta = 1 - \eta(p_y^0, \zeta)$ et $\mathbf{T} = 8\zeta + 4(A - \frac{1}{3}C_2)\zeta^3 + T_r(p_y^0, \zeta)$, pour certains fonctions continues η et T_r , et nous allons substituer ces valeurs dans les formules (2.16) et (2.18). Nous obtenons :

$$\begin{cases} 0 = (4C_2\eta + T_r)\zeta^3 + \left(\frac{4}{3}D_1(p_y^0)^3 + 2E_1(p_y^0)^2 + 2E_1 - 2D_2\eta^2 - 4D_2\eta \right. \\ \quad \left. + 4E_2\eta + 4E_2 - \frac{4}{3}D_2\right)\zeta^4 + o(\zeta^4) \\ 0 = (4C_2\eta + 2C_2\eta^2 + T_r)\zeta^3 + \left(\frac{4}{3}D_2(1 - \eta)^3 + 2E_2\eta^2 + 4E_2 \right. \\ \quad \left. + 4E_2\eta + 2D_1(p_y^0)^2 + 4E_1(p_y^0) - \frac{2}{3}D_1\right)\zeta^4 + o(\zeta^4). \end{cases} \quad (4.11)$$

En sommant les deux équations et en le multipliant par $\frac{3}{2\zeta^2}$, nous obtenons

$$\eta^2(-3C_2 + \zeta(3D_2 - 3E_2 + 2D_2\eta)) + \zeta(1 - p_y^0)^2(2D_1p_y^0 + 3E_1 + D_1) + R = o(\zeta), \quad (4.12)$$

où, comme d'habitude, R est une fonction continue des variables p_y^0, η, T_r et ζ , qui va à zéro plus vite que ζ , uniformément par rapport aux autres variables (dans un compact).

Il est facile de prouver que l'équation (4.12) a une solution admissible (c'est-à-dire, comprise entre 0 et 2) pour tout $p_y^0 \in [-\frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}, 1]$ et ζ assez petit. En effet, si nous posons $p_y^0 = 1$ et nous négligeons les termes d'ordre supérieur à ζ , résoudre l'équation (4.12) revient à trouver les racines du polynôme $\eta^2(-3C_2 + \zeta(3D_2 - 3E_2 - 2D_2\eta))$, qui sont $\eta = 0$ (racine double) et $\eta = \frac{3}{2} - \frac{3E_2}{2D_2} - \frac{C_2}{2\zeta}$. Comme le terme $\zeta(1 - p_y^0)^2(2D_1p_y^0 + 3E_1 + D_1)$ est non-négatif pour $p_y^0 \in [-\frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}, 1]$, si ζ est assez petit, le polynôme $\eta^2(-3C_2 + \zeta(3D_2 - 3E_2 - 2D_2\eta)) + \zeta(1 - p_y^0)^2(2D_1p_y^0 + 3E_1 + D_1)$ possède trois racines réelles, dont une est positive est inférieure à 2. Pour ζ assez petit, la même chose peut être dite pour les solutions de l'équation (4.12). En particulier, la solution pour η qui nous intéresse est donnée par

$$\eta(p_y^0, \zeta) = \sqrt{\frac{3E_1 + D_1 + 2D_1p_y^0}{3C_2}(1 - p_y^0)}\sqrt{\zeta} + \mathcal{O}(\zeta). \quad (4.13)$$

Nous remarquons que la dérivée

$$\frac{\partial \eta}{\partial p_y^0} = -\sqrt{\frac{3\zeta}{(3E_1 + D_1 + 2D_1 p_y^0)C_2}}(D_1 p_y^0 + E_1)$$

est négative pour $p_y^0 \geq \frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}$ (donc, dans l'intervalle où ça nous intéresse). En substituant (4.13) dans une des équations du système (4.11), nous trouvons

$$T_r(p_y^0, \zeta) = -4C_2\eta + \mathcal{O}(\zeta),$$

ce qui nous permet de donner l'expression (comme courbe paramétrée de paramètre $p_y^0 \in [\frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}, 1]$) de la suspension de l'intersection étudiée :

$$\begin{cases} x = 4(A - C_2)\zeta^3 - 4\sqrt{\frac{(3E_1 + D_1 + 2D_1 p_y^0)C_2}{3}}(1 - p_y^0)\zeta^{7/2} + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y = 4A\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4). \end{cases}$$

Pour ce qui concerne les géodésiques appartenant à la classe Γ_{-f} , nous devons à nouveau distinguer le cas où $\frac{3E_1}{D_1} \geq 1$ du cas où $\frac{3E_1}{D_1} < 1$. Dans le premier cas, toutes les géodésiques perdent leur optimalité avant le quatrième temps de commutation, en intersectant les front $\bar{\mathcal{G}}_4$ (celles avec $p_y^0 \in [-1, 1 + 8A\rho_0^2]$) ou le front $\bar{\mathcal{G}}_5$ (celles avec $p_y^0 \in [1 + 8A\rho_0^2, 1]$, voir l'Annexe B- β).

Dans le cas où $\frac{3E_1}{D_1} < 1$, l'intersection $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ implique seulement les géodésiques (de la classe Γ_{-f}) associées au vecteur adjoint $\mathbf{p}_{-f}(0) = (-1, p_y^0, 1/\rho_0)$ avec $p_y^0 \leq \frac{1}{2} + \frac{3E_1}{2D_1}$; celles-ci perdent l'optimalité le long du quatrième arc bang, à cause de cette intersection. Sinon, l'intersection du front $\bar{\mathcal{F}}_4$ avec le front $\bar{\mathcal{G}}_5$ est toujours présente, et constitue le lieu de coupure pour les géodésiques de la classe Γ_{-f} avec $p_y^0 \in [1 + 8A\rho_0^2, 1]$.

Pour comprendre ce qui se passe pour les géodésiques de la classe Γ_{-f} avec $p_y^0 \in [\frac{1}{2} + \frac{3E_1}{2D_1}, 1 + 8A\rho_0^2]$, nous considérons l'intersection entre les fronts $\bar{\mathcal{F}}_5$ et $\bar{\mathcal{G}}_5$, déjà étudiée à la page 88 et suivantes. En effet, les autres intersection n'ont pas lieu pas, comme nous pouvons vérifier dans l'Annexe B.

Comme dans le cas \mathbf{A}_- , $-C_2 < A < 0$, la partie centrale de la suspension du lieu de coupure est donnée par l'intersection $\mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$.

En résumant, si $\frac{3E_1}{D_1} \geq 1$, la suspension du lieu de coupure est connexe et formée par trois morceaux de classe C^1 ; si $\frac{3E_1}{D_1} < 1$, la suspension du lieu de coupure est composée par deux composantes connexes. Les deux cas sont montrés dans la Figure 4.17.

$A < -C_2 < 0$ Le dernier sous-cas du cas \mathbf{B}_+ peut être déduit de l'étude menée jusqu'ici, en particulier en comparant le cas étudié à la page 89 (\mathbf{A}_- , $A < -C_2 < 0$) et le cas qu'on vient d'étudier (\mathbf{B}_+ , $-C_2 < A < 0$). En particulier, la seule différence avec ce dernier concerne la "partie centrale" de la suspension du lieu de coupure, qui n'est plus donnée par l'intersection $\mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$, mais par l'intersection $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$. La suspension du lieu de coupure est donc constituée par la concaténation de (morceaux des) intersections $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_5$, $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$. Plus précisément :

- les géodésiques de la classe Γ_f associées au vecteur adjoint $\mathbf{p}_f(0) = (1, p_y^0, 1/\rho_0)$, avec $p_y^0 \in [-1, -1 - 8(A + C_2)\rho_0^2]$, perdent leur optimalité en intersectant

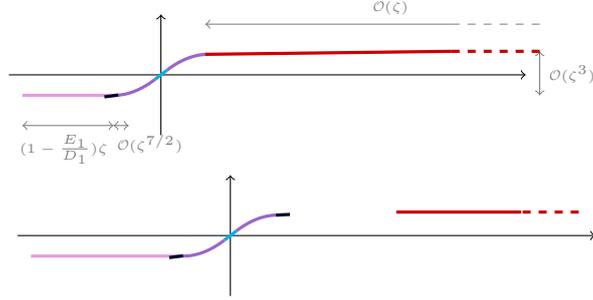


FIGURE 4.17 – La suspension du lieu de coupure dans le cas B_+ , pour $-C_1 < A < 0$. Le graphe d'en haut montre le cas où $\frac{3E_1}{D_1} \geq 1$, celui d'en bas le cas où $\frac{3E_1}{D_1} < 1$: rose : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5$; violet : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_5$ et $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; bleu $\mathcal{F}_5 \cap \mathcal{G}_5$ et $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; rouge : $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; cyan : $\mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$.

le front $\bar{\mathcal{F}}_4$; celles avec $p_y^0 \in [-1 - 8(A + C_2)\rho_0^2, -1 - 8A\rho_0^2]$, en intersectant le front \mathcal{G}_5 ; celles avec $p_y^0 \in [-1 - 8A\rho_0^2, \frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}]$, à cause de l'intersection entre \mathcal{F}_4 et \mathcal{F}_5 ; enfin, celles avec $p_y^0 \in [\frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}, 1]$ perdent leur optimalité après le quatrième temps de commutation, à cause de l'intersection avec le front \mathcal{G}_5 , analysée ci-dessus.

- de même, les géodésiques de la classe Γ_{-f} associées au vecteur adjoint $\mathbf{p}_{-f}(0) = (-1, p_y^0, 1/\rho_0)$, avec $p_y^0 \in [1 + 8(A + C_2)\rho_0^2, 1]$, perdent leur optimalité en intersectant le front \mathcal{F}_4 , et celles avec $p_y^0 \in [1 + 8A\rho_0^2, 1 + 8(A + C_2)\rho_0^2]$ en intersectant le front $\bar{\mathcal{G}}_5$. Pour ce qui concerne les géodésiques avec $p_y^0 \leq 1 + 8A\rho_0^2$, nous devons faire une distinction, selon la valeur de $\frac{3E_1}{D_1}$: si $\frac{3E_1}{D_1} \geq 1$, alors toutes ces géodésiques perdent leur optimalité lorsqu'elles intersectent le front $\bar{\mathcal{G}}_4$; si par contre $\frac{3E_1}{D_1} < 1$, ce type d'intersection implique seulement les géodésiques avec $p_y^0 \leq \frac{1}{2} + \frac{3E_1}{2D_1}$, les autres ($p_y^0 \in [\frac{1}{2} + \frac{3E_1}{2D_1}, 1 + 8A\rho_0^2]$) perdant l'optimalité après le quatrième temps de commutation, en intersectant le front $\bar{\mathcal{G}}_5$ (voir l'équation 4.6).

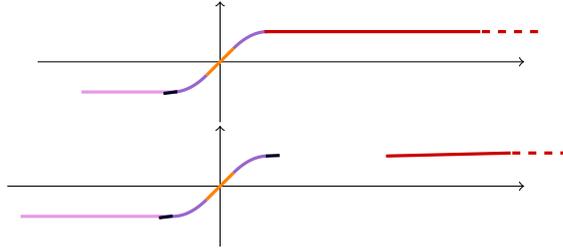


FIGURE 4.18 – La suspension du lieu de coupure dans le cas B_+ , pour $A < -C_1 < 0$. Le graphe d'en haut montre le cas où $\frac{3E_1}{D_1} \geq 1$, celui d'en bas le cas où $\frac{3E_1}{D_1} < 1$: rose : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5$; violet : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_5$ et $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; bleu $\mathcal{F}_5 \cap \mathcal{G}_5$ et $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; rouge : $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; orange : $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$.

4.3 $-D_1 < E_1 < 0$ (cas B_-)

Dans cette section, nous allons étudier un cas dans lequel $|D_1|$ est plus grand que $|E_1|$, mais les deux invariants n'ont pas le même signe. Pour fixer les idées, nous supposons que D_1 est positif et que E_1 est négatif, avec $|E_1| < D_1$; c'est le cas que nous avons appelé B_- .

Nous rappelons aussi que, comme dans les cas étudiés dans la Section 4.2, la localisation du temps conjugué des géodésiques appartenant aux classes Γ_f et Γ_{-f} ne dépend pas seulement des invariants, mais aussi de la valeur du vecteur adjoint associé à la géodésique.

La différence principale entre le cas B_- et le cas B_+ est donnée par le fait que, dans le premier, le rapport entre E_1 et D_1 est négatif. Ceci impacte principalement les géodésiques qui appartiennent aux classes $\Gamma_{\pm f}$. En effet, dans le cas B_+ , la condition (3.5) n'est jamais satisfaite, donc l'intersection entre les fronts \mathcal{F}_4 et \mathcal{G}_4 n'a jamais lieu; au contraire, si $0 < D_1 < -3E_1$, il y a toujours des valeurs de $\gamma \in [-1, 1]$ pour lesquelles les conditions (3.6) et (3.5) sont satisfaites.

D'autre part, seulement les géodésiques dont $p_y^0 \in [-\frac{3E_1}{D_1} - 2, 1]$ sont impliquées dans l'intersection entre les fronts \mathcal{F}_4 et \mathcal{F}_5 ; si $\frac{3E_1}{D_1} < -1$, alors $\frac{3E_1}{D_1} - 2 > -1$, et, pour dresser un portrait du lieu de coupure, il faut comprendre ce qui se passe pour les géodésiques avec $p_y^0 \in [-1, -\frac{3E_1}{D_1} - 2)$.

Pour ce qui concerne les géodésiques de la classe Γ_{-f} , nous rappelons que seulement celles dont le vecteur adjoint $\mathbf{p}_{-f}(0) = (-1, p_y^0, 1/\rho_0)$ satisfait $p_y^0 \leq \frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2}$ peuvent intersecter, avant le quatrième temps de commutation, le front $\bar{\mathcal{G}}_4$; comme $\frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2}$ est inférieur à 1, la suspension du lieu de coupure est toujours disconnexe.

Comme d'habitude, les valeurs des invariants A et C_2 , ainsi que du rapport $\frac{3E_1}{D_1}$, vont déterminer des situations différentes; nous allons les analyser dans la suite.

4.3.1 $C_2 < 0$

Nous rappelons à nouveau que, lorsque $C_2 < 0$, le temps de coupure des géodésiques des classes $\Gamma_{\pm g}$ doit être inférieur ou égal au quatrième temps de commutation; pour cela, les fronts \mathcal{G}_5 et $\bar{\mathcal{G}}_5$ ne sont sûrement pas optimaux, et dont nous n'allons pas les considérer.

D'autre part, nous avons déjà vu (plus de détails dans l'Annexe B- β) que les géodésiques de la classe Γ_g (respectivement, Γ_{-g}) intersectent, avant leur quatrième temps de commutation, les géodésiques de la classe Γ_{-f} (respectivement, Γ_f), et que la suspension sur le plan $\{x = 4\zeta^2\}$ de cette intersection correspond, à moins de termes d'ordre supérieurs en ζ , à un segment vertical d'abscisse $x = 4A\zeta^3$ (respectivement, $x = -4A\zeta^3$).

$A > 0$ Cette fois, nous commençons par étudier les géodésiques de la classe Γ_{-f} . Considérons l'intersection entre les fronts $\bar{\mathcal{F}}_4$ et $\bar{\mathcal{G}}_4$; lorsque l'équation (B.2) est satisfaite, aussi l'équation (B.1) l'est; comme déjà observé, (B.2) est satisfaite pour tout $p_y^0 \in [-1, \frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2}]$, et nous rappelons que $\frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2} < 1$. Nous

rappelons aussi que la suspension de cette intersection est (à moins de corrections d'ordre supérieur à ζ) un segment horizontal dont le point plus "à gauche" est $x = \left(\frac{1}{2} - \frac{3E_1}{2D_1}\right)\zeta + \mathcal{O}(\zeta^3)$ (voir l'équation (B.3)). Nous pouvons conclure que, étant donnée une géodésique de la classe Γ_{-f} , associée au vecteur adjoint \mathbf{p}_{-f} tel que $\mathbf{p}_{-f}(0) = (-1, p_y^0, 1/\rho_0)$ et $p_y^0 \in [-1, \frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2}]$, elle perd l'optimalité globale lorsqu'elle intersecte, avant son quatrième temps de commutation, le front $\bar{\mathcal{G}}_4$.

Que pouvons-nous dire lorsque $p_y^0 \geq \frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2}$? tout d'abord, nous remarquons que, comme $\frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2} > \frac{E_1}{2D_1}$, nous pouvons aussi considérer des temps supérieurs au quatrième temps de commutation. D'ailleurs, les intersections du front $\bar{\mathcal{F}}_4$ avec les fronts \mathcal{F}_4 ou \mathcal{G}_4 impliquent seulement des géodésiques avec p_y^0 très proche de 1, et l'intersection $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \mathcal{F}_5$ n'a pas lieu (à cause de la contrainte (B.8)). Il ne nous reste qu'à considérer les intersections du front $\bar{\mathcal{F}}_5$, celle avec le front \mathcal{G}_4 en particulier : elle est étudiée en détail dans l'Annexe B- ι). Nous pouvons ainsi conclure que les géodésiques avec $p_y^0 \geq \frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2}$ perdent leur optimalité en intersectant le front \mathcal{G}_4 ; plus précisément :

- si $p_y^0 \in [1 + 4C_2\rho_0^2, 1]$, l'intersection entre $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ au lieu au temps $\mathbf{T} = (7 - \beta)\rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0^2)$, $\beta \in (-1, 1]$, donc *avant* l'intersection $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$; elle fait donc partie du lieu de coupure;
- si $p_y^0 \in [\frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2}, 1 + 4C_2\rho_0^2]$, l'intersection entre $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ n'a pas lieu; les géodésiques de l'ensemble Γ_{-f} perdent donc leur optimalité après le cinquième lieu de coupure.
- l'équation (B.15) montre que la jonction entre ces deux morceaux du lieu de coupure est de classe C^1 (au moins, jusqu'à l'ordre du développement que nous considérons).

Concentrons nous sur les géodésiques de la classe Γ_f ; comme déjà observé dans les premières lignes de cette section, la valeur du rapport $\frac{3E_1}{D_1}$ a une influence sur les intersections des géodésiques de cette classe.

En effet, si $\frac{3E_1}{D_1} \geq -1$, nous avons une situation très similaire à celle de la Section 4.13 : les géodésiques associées au vecteur adjoint $\mathbf{p}_f(0) = (1, p_y^0, 1/\rho_0)$ avec $p_y^0 \in [-1, -1 - 4C_2\rho_0^2]$ perdent l'optimalité globale en intersectant le front $\bar{\mathcal{G}}_4$; celles avec $p_y^0 \in [-1 - 4C_2\rho_0^2, -\frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2}]$ perdent l'optimalité à cause de l'intersection $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5$, celles avec $p_y^0 \in [-\frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2}, 1]$ intersectent le front $\bar{\mathcal{G}}_4$, après leur quatrième temps de coupure (voir B- θ)).

Supposons maintenant que $\frac{3E_1}{D_1} < -1$; dans ce cas, seulement les géodésiques avec $p_y^0 \in [-\frac{3E_1}{D_1} - 2, 1]$ sont impliquées dans l'intersection $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5$, dont la suspension est donné par le segment reliant le point $\left(\left(1 - \frac{E_1}{D_1}\right)\zeta, 4A\zeta^3\right)$ au point $\left(-\left(1 + \frac{E_1}{D_1}\right)\zeta, 4A\zeta^3\right)$: en effet, la relation (2.25) plus la contrainte $\gamma_0 \leq \eta_0$ implique $\gamma_0 \geq -\frac{3E_1}{D_1} - 2$ (nous rappelons que, dans la Section 2.3.1, γ_0 dénote ce que ici nous appelons p_y^0). D'autre part, pour $p_y^0 \leq -\frac{3E_1}{D_1} - 2$, les deux conditions (3.6) et (3.5) sont satisfaites; aussi, nous avons observé que les trois fronts \mathcal{F}_4 , $\bar{\mathcal{G}}_4$ et \mathcal{G}_4 se croisent au point Q_f^+ (3.12). Nous pouvons donc conclure que les géodésiques avec $p_y^0 \in [-1 - 4C_2\rho_0^2, -\frac{3E_1}{D_1} - 2]$ perdent leur optimalité en intersectant le front \mathcal{G}_4 , celles avec $p_y^0 \in [-1, -1 - 4C_2\rho_0^2]$ en intersectant le front $\bar{\mathcal{G}}_4$.

Enfin, toutes les géodésiques des classes $\Gamma_{\pm g}$ perdent l'optimalité le long de leur quatrième arc bang. La suspension du lieu de coupure est montrée dans la Figure 4.19, à gauche dans le cas où $-\frac{3E_1}{D_1} \leq 1$, à droite dans le cas où $-\frac{3E_1}{D_1} > 1$.

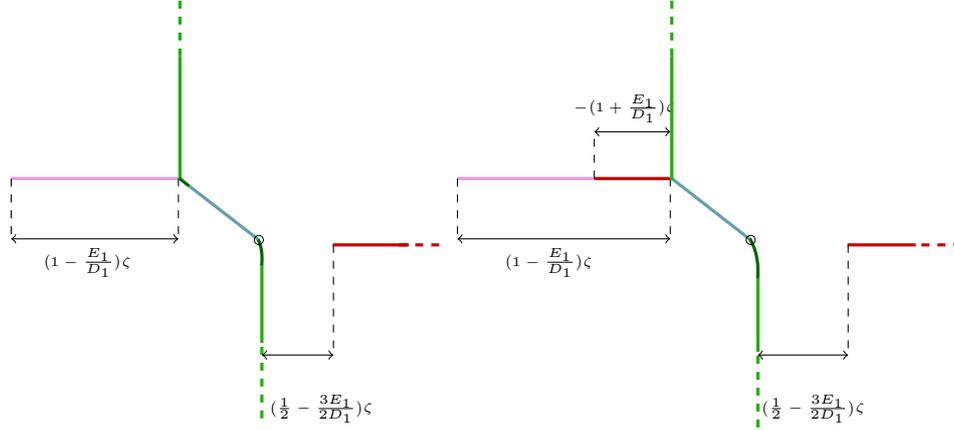


FIGURE 4.19 – Suspension du lieu de coupure dans le cas B_- , avec $C_2 < 0$ et $A > 0$. À gauche, $-\frac{3E_1}{D_1} \leq 1$, à droite, $-\frac{3E_1}{D_1} > 1$: rose : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$; rouge : $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ et $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$; vert : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ et $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$; givré : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; vert foncé : $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_4$. Le cercles indiquent les points où les branches ne sont pas C^1 .

$A < 0$ Si $\frac{3E_1}{D_1} \geq -1$, le comportement des géodésiques est le même que celui étudié dans la Section 4.2.1, et la suspension du lieu de coupure est illustrée dans la Figure 4.13.

Nous allons donc détailler seulement le cas $\frac{3E_1}{D_1} < -1$. Soit, comme ci-dessus, une géodésique de la classe Γ_f , associée au vecteur adjoint $\mathbf{p}_f(0) = (1, p_y^0, 1/\rho_0)$; nous avons que

- pour $p_y^0 \leq -1 - 4(2A + C_2)\rho_0^2$, le comportement est analogue à celui étudié dans la Section 4.2.1 (pour $A < 0$) : en particulier, les géodésiques associées perdent leur optimalité avant le quatrième temps de commutation, lorsqu'elles rencontrent les fronts $\bar{\mathcal{G}}_4$, $\bar{\mathcal{F}}_4$, et $\bar{\mathcal{F}}_5$.
- si $p_y^0 \in [-1 - 4(2A + C_2)\rho_0^2, -\frac{3E_1}{D_1} - 2]$, la géodésique perd son optimalité, lorsqu'elle croise le front \mathcal{G}_4 ;
- si $p_y^0 \in [-\frac{3E_1}{D_1} - 2, 1]$, la géodésique perd son optimalité à cause de l'intersection du front \mathcal{F}_4 avec le front \mathcal{F}_5 .

Les géodésiques de la classe Γ_{-f} perdent l'optimalité de la façon suivante, selon la valeur du vecteur adjoint $(-1, p_y^0, 1/\rho_0)$ auquel elles sont associées :

- si $p_y^0 \in [-1, \frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2}]$, le long du cinquième arc bang, par intersection avec le front $\bar{\mathcal{G}}_4$;
- pour $p_y^0 \in [\frac{3E_1}{2D_1} + \frac{1}{2}, 1 + 4(2A + C_2)\rho_0^2]$, le long du cinquième arc bang, par intersection avec le front \mathcal{F}_4 ;
- pour $p_y^0 \in [1 + 4(2A + C_2)\rho_0^2, 1 + 4C_2\rho_0^2]$, toujours par intersection avec \mathcal{F}_4 , mais avant leur quatrième temps de commutation ;

- enfin, pour $p_y^0 \geq 1 + 4C_2\rho_0^2$, par intersection avec le front \mathcal{G}_4 , avant leur quatrième temps de commutation.

Les géodésiques des classes $\Gamma_{\pm g}$ perdent leur optimalité le long du quatrième front bang, comme déjà vu, par exemple, dans les Sections 3.2-4.1.1-4.2.1.

La suspension du lieu de coupure est illustrée dans la Figure 4.20.

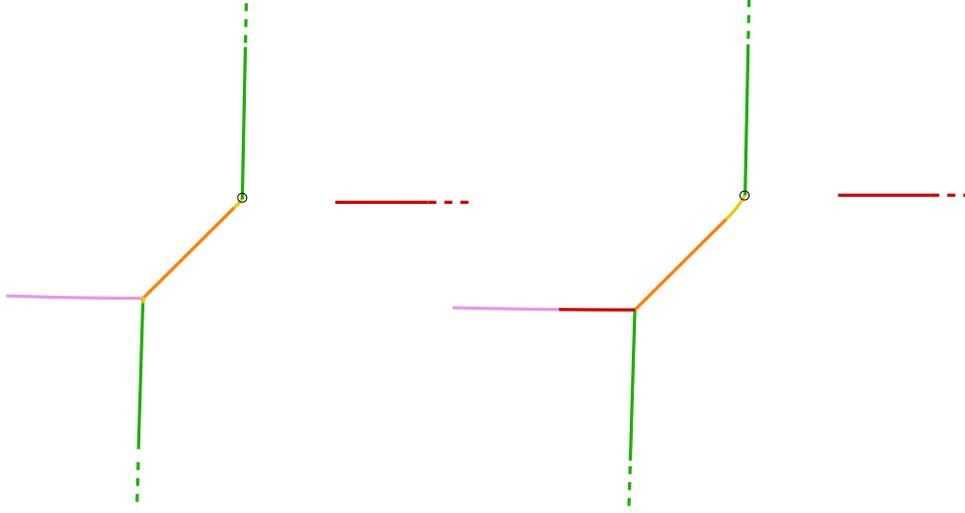


FIGURE 4.20 – Suspension du lieu de coupure dans le cas B_- , avec $C_2 < 0$ et $A < 0$. À gauche, nous montrons le cas où $-\frac{3E_1}{E_1} \leq 1$; à droite, le cas où $-\frac{3E_1}{D_1} > 1$; rouge : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; rose : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5$; vert : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ et $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$; orange : $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$; jaune : $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$ et $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$. Les cercles, comme d’habitude, indiquent les points où la branche du lieu de coupure n’est pas C^1 .

4.3.2 $C_2 > 0$

La structure du lieu de coupure, dans les quatre sous-cas de cette Section, peut aisément être déduite de l’étude menée jusqu’ici, en particulier en utilisant le matériel des Sections 4.1.2, 4.2.2 et 4.3.1. Notamment, nous pouvons déjà remarquer les faits suivants :

- la suspension du lieu de coupure est toujours disconnexe ; une composante connexe est donnée par l’intersection entre les fronts $\bar{\mathcal{F}}_4$ et $\bar{\mathcal{G}}_4$; l’autre composante est constituée par une seule branche, obtenue par concaténation d’intersections entre différents fronts ;
- la valeur de $\frac{3E_1}{D_1}$ (en particulier, le fait qu’elle soit strictement inférieure ou supérieure ou égale à 1) influence le lieu de coupure des géodésiques de la classe Γ_f ;
- comme toujours lorsque $C_2 > 0$, son rapport avec A influence la partie “centrale” de la suspension du lieu de coupure.

Nous allons ci-dessous décrire les quatre sous-cas.

$A > C_2$ Si $\frac{3E_1}{D_1} \geq -1$ la suspension du lieu de coupure est pareil à celle montrée dans la Figure 4.15 (en bas), et elle est donnée par la concaténation de (morceaux des) intersections suivantes :

$$\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5, \quad \mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4, \quad \bar{\mathcal{G}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_5$$

plus la composante connexe $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$.

Si par contre $\frac{3E_1}{D_1} < -1$, alors l'intersection entre les fronts \mathcal{F}_5 et $\bar{\mathcal{G}}_5$ n'a pas lieu : en effet, elle concerne seulement les géodésiques de la classe Γ_f pour lesquelles la deuxième composante du vecteur adjoint associé au temps zéro (p_y^0) est inférieure ou égale à $-\frac{1}{2} + \frac{3E_1}{2D_1}$, qui, à son tour, est inférieur à -1 : ceux ne sont pas des valeurs admissibles. Néanmoins, les conditions (3.6)-(3.5) sont satisfaites pour $p_y^0 \leq -\frac{3E_1}{D_1} - 2$; nous pouvons donc conclure que les géodésiques de la classe Γ_f associées à $p_y^0 \in [-\frac{3E_1}{D_1} - 2, 1]$ perdent leur optimalité à cause de l'auto-intersection entre les fronts \mathcal{F}_4 et \mathcal{F}_5 , celles avec $p_y^0 \in [-1, -\frac{3E_1}{D_1} - 2]$ en intersectant le front \mathcal{G}_4 .

Les géodésiques des autres classes perdent leur optimalité comme décrit pour le cas \mathbf{B}_+ , lorsque $A > C_2 > 0$ et $\frac{3E_1}{D_1} < -1$. En résumant, la suspension sur le plan $\{z = 4\zeta^2\}$ du lieu de coupure est donnée par la concaténation des morceaux d'intersection

$$\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_5, \quad \mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4, \quad \mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4, \quad \bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{G}_5, \quad \bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_5,$$

plus la composante connexe $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$. Elle est illustrée dans la Figure 4.21, en haut.

$0 < A < C_2$ Comme nous avons vu dans les Sections 4.1, 4.2, les cas $A > C_2 > 0$ et $C_2 > A > 0$ sont très proches, la seule différence étant donnée par la partie "centrale" de la suspension du lieu de coupure, celle qui connecte le morceaux des (suspensions des) intersections $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ et $\bar{\mathcal{G}}_5 \cap \mathcal{G}_4$ (et aussi du fait que ces deux morceaux sont moins "longs", à cause du fait que la condition (B.9) n'est pas satisfaite par tous les $p_x^0 \in [-1, 1]$). En effet, lorsque $C_2 > A > 0$, l'intersection $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ ne participe pas au lieu de coupure, son rôle étant joué par l'intersection $\mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$.

Donc, si $\frac{3E_1}{D_1} \geq -1$, la suspension du lieu de coupure est comparable à celle illustrée dans la Figure 4.16, en bas, donnée par la concaténation de (morceaux des) intersections

$$\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5, \quad \mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{G}_5, \quad \mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5,$$

plus la composante connexe $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$.

Si par contre $\frac{3E_1}{D_1} < -1$, alors les géodésiques de la classe Γ_f associée au vecteur adjoint $p_y^0 \in [-\frac{3E_1}{D_1} - 2, 1]$ perdent leur optimalité à cause de l'auto-intersection $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5$ et celles avec $p_y^0 \in [-1, -\frac{3E_1}{D_1} - 2]$ perdent leur optimalité lorsqu'elle croisent le front \mathcal{G}_4 . La suspension du lieu de coupure est donné par la concaténation de (morceaux des) intersections

$$\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5, \quad \mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4, \quad \mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{G}_5, \quad \bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_5,$$

plus la composante connexe $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$. La suspension du lieu de coupure, dans ce cas, est illustrée à la Figure 4.21 (en bas).

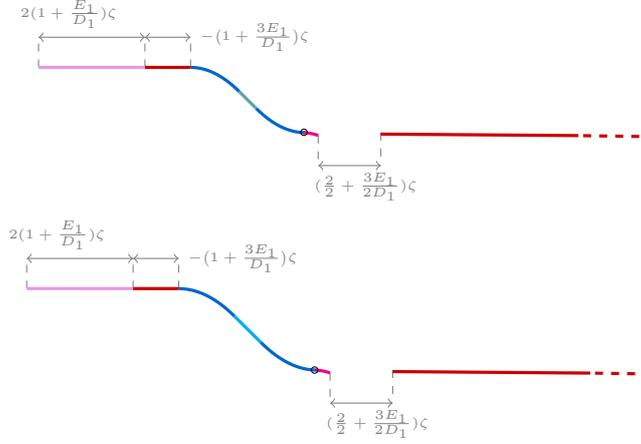


FIGURE 4.21 – Suspension du lieu de coupure dans le cas B_- , pour $C_2 > 0$, $A > 0$ et $\frac{3E_1}{E_1} < -1$. En haut, nous montrons le cas où $A > C_2$, en bas, celui où $A < C_2$: rose : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5$; magenta : $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_5$; rouge : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; bleu : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ et $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{G}_5$; givré : $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$; cyan : $\mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$. Comme toujours, les cercles montrent les points où la suspension n'est pas C^1 .

$-C_2 < A < 0$ Si $\frac{3E_1}{D_1} \geq -1$, le comportement des géodésiques est le même que dans le cas B_+ (toujours avec $-C_2 < A < 0$ et $\frac{3E_1}{D_1} \geq -1$), et la suspension du lieu de coupure est illustrée dans la Figure 4.17.

Si $\frac{3E_1}{D_1} < -1$, la suspension du lieu de coupure est illustrée dans la Figure 4.22, en haut. Par rapport au cas où $\frac{3E_1}{D_1} \geq -1$, la seule différence concerne la partie du lieu de coupure qui concerne les géodésiques de la classe Γ_f ; en effet

- celles associées à un vecteur adjoint $\mathbf{p}_f(0) = (1, p_y^0, 1/\rho_0)$ tel que $p_y^0 \in [-\frac{3E_1}{D_1} - 2, 1]$ perdent leur optimalité à cause de l'intersection entre les fronts \mathcal{F}_4 et \mathcal{F}_5 ;
- celles pour lesquelles $p_y^0 \in [-1, -\frac{3E_1}{D_1} - 2]$, perdent l'optimalité avant le quatrième temps de commutation, en rencontrant le front \mathcal{G}_4 si $p_y \geq -1 - 8A\rho_0^2$, le front \mathcal{G}_5 sinon.

$A < -C_2 < 0$ Lorsque $\frac{3E_1}{D_1} \geq -1$, la suspension du lieu de coupure est complètement analogue à celle du cas B_+ , avec $-A < -C_2 < 0$, qui est montrée dans la Figure 4.18 (en bas).

Si $\frac{3E_1}{D_1} < -1$, comme déjà vu dans les Sections 4.1.2 et 4.2.2, les cas $A < -C_2 < 0$ et $-C_2 < A < 0$ sont très proches ; la seule différence est que (un morceau de) l'intersection $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ participe au lieu de coupure. Il en suit que la suspension du lieu de coupure est composée par deux composantes connexes : la suspension de l'intersection $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ et la concaténation des (morceaux des) intersections

$$\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_5, \quad \mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4, \quad \mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_5, \quad \mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4, \quad \bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5, \quad \bar{\mathcal{F}}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5.$$

Cette suspension est montré dans la Figure 4.22, en bas.

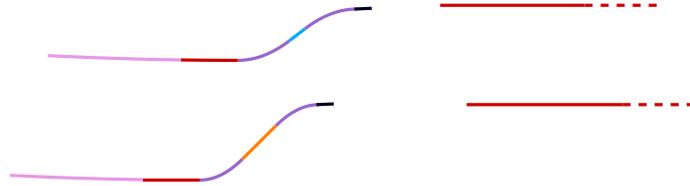


FIGURE 4.22 – La suspension du lieu de coupure dans le cas B_- , pour $C_2 > 0$, $A < 0$ et $\frac{3E_1}{D_1} < -1$. Le cas $-C_2 < A$ est illustré en haut, le cas $A < -C_2$ en bas ; rose : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{F}_5$; rouge : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_4$ et $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ violet : $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_5$ et $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; bleu $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; cyan : $\mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$; orange : $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$.

4.4 Les cas A_+ , C_- et C_+

Imaginons d'avoir déjà étudié l'optimalité globale et locale des géodésiques bang-bang (de la classe Γ), sous l'hypothèse que $C_1 = 0$, $AC_2D_1 \neq 0$, $|A/C_2| \neq 1$ et $E_1 > |D_1| > 0$ (le cas que nous avons appelé A_+). Appliquons, dans l'espace des positions et dans l'espace des vecteur adjoints, une rotation d'angle π autour de l'axe verticale.

Les Lemmes 10-11 nous disent que le lieu de coupure que nous avons obtenu après rotation correspond au lieu de coupure correspondant à la structure SF à laquelle nous avons appliqué la suivante permutation des invariants : A, C_1 et C_2 reste inchangés, alors que E_i, D_i, c_i, d_i , pour $i = 1, 2$, on changé de signe. En particulier, il s'agit d'un système qui satisfait l'hypothèse A_- .

Nous pouvons aussi déduire que, pour obtenir une analyse détaillée de l'optimalité des géodésiques (courte) bang-bang dans le cas A_+ , il suffit d'appliquer une rotation de π (autour des axes z, p_z) aux géodésiques du cas A_- .

Le même raisonnement peut être fait pour obtenir une analyse du cas C_+ , à partir du cas B_- , et du cas C_- , partir du cas B_+ .

Chapitre 5

Conclusions

5.1 Questions ouvertes

5.1.1 Les petites sphères

Dans les chapitres précédents, nous avons calculé la “calotte sphérique” qui correspond aux points (x_T, y_T, z_T) pour lesquels $z_T > \frac{|x_T y_T|}{2}$, sous certaines hypothèses sur la valeur des invariants. Pour avoir une description complète du lieu de coupure, et donc, de la sphère, ils nous restent à calculer la “calotte” symétrique ($z_T < -\frac{|x_T y_T|}{2}$) et la partie centrale de la sphère $|z_T| < \frac{|x_T y_T|}{2}$.

Pour ce qui concerne la “calotte” symétrique, nous sommes convaincus que le problème peut être résolu simplement en trouvant la symétrie propre du système, c’est-à-dire, l’ensemble des transformations et des permutations d’invariants qui permettent de calculer les géodésiques atteignant des points tels que $z_T < -\frac{|x_T y_T|}{2}$, à partir des géodésiques que nous avons déjà calculées dans les chapitres précédents. Ensuite, il sera nécessaire de comprendre quelle combinaison entre la “calotte supérieure” et la “calotte inférieure” sont permises, en suivant, par exemple, l’article [15].

La deuxième question est plus compliquée, comme montre, par exemple, l’article [11], dans lequel le problème a été étudié (dans le cas générique).

Nous commençons par rappeler que, pour le système d’Heisenberg, tout point (x_T, y_T, z_T) avec $z_T < |x_T y_T|/2$ peut être atteint en temps optimal $|x_T| + |y_T|$ par une trajectoire singulière : par conséquent, toute trajectoire qui permet d’atteindre un point (x_T, y_T, z_T) avec $z_T \leq |x_T y_T|/2$ en temps $|x_T| + |y_T|$ est optimale. En général, telle trajectoire n’est pas unique.

Dans le cas générique, la situation peut être très différente. Tout d’abord, nous remarquons que, en générale, il n’y a pas d’extrémales singulières ; en effet, les extrémales singulières sont caractérisées par la contrainte $|F(\lambda(t))| \equiv |G(\lambda(t))|$ le long de tout l’intervalle singulier. Cela implique notamment que $\Theta(\lambda(t)) \equiv 0$ et que toutes les dérivées temporelles de Θ le long de l’extrémale sont nulles sur l’intervalle, c’est-à-dire

$$\langle \lambda(t), \text{ad}_{u_1(t)f+u_2(t)g}^k [f, g](\xi(t)) \rangle = 0 \quad \forall t \in I, \forall k \geq 1. \quad (5.1)$$

En particulier, (5.1) fournit une liste de contraintes d’orthogonalité que l’extrémale singulier et son contrôle associé doivent satisfaire ; pour un couple

générique de vecteurs f, g , ces contraintes sont de rang maximal et imposent donc que le covecteur soit nul, ce qui est interdit par le PMP.

D'autre part, contrairement au cas nilpotent, le signe de Θ peut changer le long d'un extrémale, ce qui peut déterminer des commandes qui commutent plusieurs fois entre les deux sommets qui partagent le même côté de Q (voir [11]). Considérons par exemple le cas montré dans la Figure 5.1 : au temps $t = 0$, $p_x^0 = 1$, $p_y^0 < 1$ et $\Theta(\lambda(0)) > 0$, de sorte que le premier contrôle imposée par le PMP est $\mathbf{u} = (1, 0)$, et G est croissant ; imaginons qu'il existe un temps $T_1 > 0$ tel que $F(\lambda(T_1)) = G(\lambda(T_1)) = 1$ et $\Theta(\lambda(T_1)) > 0$ (il suffit juste que Θ n'aille pas à zéro trop vite) ; pour $t > T_1$, le contrôle passe à $\mathbf{u} = (0, 1)$ et F commence à diminuer, tandis que G reste constamment égal à 1. Supposons qu'il y existe un temps $T_2 > T_1$ auquel Θ traverse l'axe horizontal, et tel que $F(\lambda(t)) > -1$ pour tout $t \in [T_1, T_2]$: alors, pour $t > T_2$, F est croissant et, si Θ reste négatif, F atteint la valeurs de G ; dans ce cas, la commande repasse à $(1, 0)$ (et G commence à décroître). On a ainsi la concaténation $(1, 0) - (0, 1) - (1, 0)$, qui dans le cas nilpotent peut être associée seulement à des extrémales singulières.

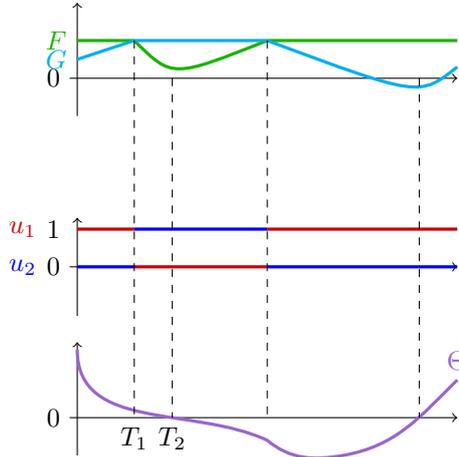


FIGURE 5.1 – Exemple d'une géodésique dont le contrôle commute plusieurs fois entre deux valeurs.

Afin d'avoir un tel comportement en temps petit, il est nécessaire que $|\Theta(\lambda(0))| \ll 1$. En effet, si $|\Theta(\lambda(0))| \sim 1$, alors Θ ne peut pas changer de signe en temps petit, car $\dot{\Theta}$ est borné (et proche de 0 au temps initial).

Cela montre en particulier que les extrémales bang-bang, avec beaucoup de commutations dans un petit laps de temps, peuvent avoir seulement deux comportements :

- soit la commande bascule de sommet en sommet de Q , toujours en suivant le même sens (ce qui correspond à Θ de signe constant le long l'extrémale) ; celle-ci est la situation que nous avons analysée tout au long de ce manuscrit.
- soit la commande bascule plusieurs fois entre deux sommets de Q partageant le même côté (ce qui correspond au fait que $|F|$ et $|G|$ restent proches de 1).

Dans ce qui suit, nous faisons une première analyse du comportement des géodésiques qui ont le deuxième comportement. Comme d'habitude, nous pouvons nous concentrer sur un sous-ensemble de trajectoires, puis récupérer toutes les autres par symétrie; en particulier, on considère des extrémales bang-bang associées à des commandes appartenant au même côté de Q , avec le point final (x_T, y_T, z_T) satisfaisant $x_T \geq 0$, $y_T \geq 0$ et $0 \leq z_T \leq |x_T y_T|/2$. De tels points peuvent être atteints par des trajectoires bang-bang avec le contrôle commutant entre $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

5.1.1.1 Lieu de Maxwell pour les géodésiques avec 2 commutations

Fixons un temps $\mathbf{T} > 0$ et un point final (x_T, y_T, z_T) tel que $x_T + y_T = \mathbf{T} + \mathcal{O}(\mathbf{T}^2)$; fixons aussi $\mathbf{S} = \mathcal{O}(\mathbf{T})$.

Considérons les deux géodésiques $\xi : [0, \mathbf{T}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\tilde{\xi} : [0, \mathbf{S}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ telles que $\xi(0) = \tilde{\xi}(0) = (0, 0, 0)$ et

$$\dot{\xi}(t) = \begin{cases} f(\xi(t)) & \text{si } t \in [0, t_1) \\ g(\xi(t)) & \text{si } t \in (t_1, t_2) \\ f(\xi(t)) & \text{si } t \in (t_2, \mathbf{T}] \end{cases} \quad \dot{\tilde{\xi}}(t) = \begin{cases} g(\tilde{\xi}(t)) & \text{si } t \in [0, s_1) \\ f(\tilde{\xi}(t)) & \text{si } t \in (s_1, s_2) \\ g(\tilde{\xi}(t)) & \text{si } t \in (s_2, \mathbf{S}] \end{cases},$$

pour $0 < t_1 < t_2 < \mathbf{T}$ et $0 < s_1 < s_2 < \mathbf{S}$. Assumons aussi que

$$\xi(\mathbf{T}) = \tilde{\xi}(\mathbf{S}) = (x_T, y_T, z_T).$$

Soit

$$\tau_1 = t_1 \quad \sigma_1 = s_1 \quad \tau_2 = t_2 - t_1 \quad \tau_3 = \mathbf{T} - t_2 \quad \sigma_2 = t_2 - t_1 \quad \sigma_3 = \mathbf{T} - t_2.$$

En intégrant le système et en prenant en compte que \mathbf{T} et \mathbf{S} sont petits, nous obtenons que

$$\begin{aligned} x(\mathbf{T}) = & \tau_1 + \tau_3 + \frac{1}{6}\tau_2 \left(\tau_2((-3\tau_1^2 + 6\tau_3\tau_1 + 3\tau_3^2)\text{ax}_{12} - 2\tau_2(\tau_1 - 3\tau_3)\text{ay}_{12}) \right. \\ & \left. + (-3\tau_1^2 + 6\tau_3\tau_1 + 3\tau_3^2)\text{ay}_{11} \right) + (-6\tau_1^3 + 6\tau_3\tau_1^2 + 6\tau_3^2\tau_1 + 2\tau_3^3)\text{ax}_{11} \Big) + \mathcal{O}(\mathbf{T}^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(\mathbf{T}) = & \tau_2 + \frac{1}{6}\tau_2 \left(\tau_2((-3\tau_1^2 + 6\tau_3\tau_1 + 3\tau_3^2)\text{ax}_{22} - 2\tau_2(\tau_1 - 3\tau_3)\text{ay}_{22}) \right. \\ & \left. + (-3\tau_1^2 + 6\tau_3\tau_1 + 3\tau_3^2)\text{ay}_{21} \right) + (-6\tau_1^3 + 6\tau_3\tau_1^2 + 6\tau_3^2\tau_1 + 2\tau_3^3)\text{ax}_{21} \Big) + \mathcal{O}(\mathbf{T}^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(\mathbf{T}) = & \frac{\tau_2}{2}(\tau_1 - \tau_3) + \frac{1}{6}\tau_2 \left(\tau_2((-3\tau_1^2 + 6\tau_3\tau_1 + 3\tau_3^2)\text{ax}_{32} - 2\tau_2(\tau_1 - 3\tau_3)\text{ay}_{32}) \right. \\ & \left. + (-3\tau_1^2 + 6\tau_3\tau_1 + 3\tau_3^2)\text{ay}_{31} \right) + (-6\tau_1^3 + 6\tau_3\tau_1^2 + 6\tau_3^2\tau_1 + 2\tau_3^3)\text{ax}_{31} \Big) + \mathcal{O}(\mathbf{T}^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\mathbf{S}) &= \sigma_2 + \frac{1}{6}\sigma_2\left(\sigma_2(2\sigma_2(\sigma_1 - 3\sigma_3)\text{ax}_{11} + 3(\sigma_1^2 - 2\sigma_3\sigma_1 - \sigma_3^2)\text{ax}_{12})\right. \\ &\quad \left.+ 3(\sigma_1^2 - 2\sigma_3\sigma_1 - \sigma_3^2)\text{ay}_{11}\right) + (6\sigma_1^3 - 6\sigma_3\sigma_1^2 - 6\sigma_3^2\sigma_1 - 2\sigma_3^3)\text{ay}_{12}) + \mathcal{O}(\mathbf{S}^5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}(\mathbf{S}) &= \sigma_1 + \sigma_3 + \frac{1}{6}\sigma_2\left(\sigma_2(2\sigma_2(\sigma_1 - 3\sigma_3)\text{ax}(2, 1) + 3(\sigma_1^2 - 2\sigma_3\sigma_1 - \sigma_3^2)\text{ax}(2, 2))\right. \\ &\quad \left.+ 3(\sigma_1^2 - 2\sigma_3\sigma_1 - \sigma_3^2)\text{ay}(2, 1)\right) + (6\sigma_1^3 - 6\sigma_3\sigma_1^2 - 6\sigma_3^2\sigma_1 - 2\sigma_3^3)\text{ay}_{22}) + \mathcal{O}(\mathbf{S}^5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}(\mathbf{S}) &= \frac{\sigma_2}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{1}{6}\sigma_2\left(\sigma_2(2\sigma_2(\sigma_1 - 3\sigma_3)\text{ax}_{31} + 3(\sigma_1^2 - 2\sigma_3\sigma_1 - \sigma_3^2)\text{ax}_{32})\right. \\ &\quad \left.+ 3(\sigma_1^2 - 2\sigma_3\sigma_1 - \sigma_3^2)\text{ay}_{31}\right) + (6\sigma_1^3 - 6\sigma_3\sigma_1^2 - 6\sigma_3^2\sigma_1 - 2\sigma_3^3)\text{ay}_{32}) + \mathcal{O}(\mathbf{S}^5).\end{aligned}$$

Nous obtenons les estimation suivantes :

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{x_T y_T + 2z_T}{2y_T} + \mathcal{O}(\mathbf{T}^3) & \sigma_1 &= \frac{x_T y_T + 2z_T}{2x_T} + \mathcal{O}(\mathbf{T}^3) \\ \tau_2 &= y_T + \mathcal{O}(\mathbf{T}^3) & \sigma_2 &= x_T + \mathcal{O}(\mathbf{T}^3) \\ \tau_3 &= \frac{x_T y_T + 2z_T}{2y_T} + \mathcal{O}(\mathbf{T}^3) & \sigma_3 &= \frac{x_T y_T - 2z_T}{2x_T} + \mathcal{O}(\mathbf{T}^3).\end{aligned}$$

En particulier

$$\begin{aligned}\mathbf{S} - \mathbf{T} &= \tilde{x}(\mathbf{S}) + \tilde{y}(\mathbf{S}) - x(\mathbf{T}) - y(\mathbf{T}) \\ &\quad + \frac{1}{6x_T^2 y_T^2}(x_T^2 y_T^2 - 4z_T^2)\left(3x_T^3 y_T(\text{ax}_{11} + \text{ax}_{21}) + x_T^2(2z_T(\text{ax}_{11} + \text{ax}_{21})\right. \\ &\quad \left.+ 3y_T^2(\text{ax}_{12} + \text{ax}_{22} + \text{ay}_{11} + \text{ay}_{21}) + 3x_T y_T^3(\text{ay}_{12} + \text{ay}_{22}) - 2y_T^2 z_T(\text{ay}_{12} + \text{ay}_{22}))\right) \\ &\quad + \mathcal{O}(\mathbf{T}^5).\end{aligned}$$

La fonction (plus précisément, l'ensemble de ses zéros)

$$\begin{aligned}\varphi(x_T, y_T, z_T) &= 3x_T^3 y_T(\text{ax}_{11} + \text{ax}_{21}) + x_T^2(2z_T(\text{ax}_{11} + \text{ax}_{21}) + 3y_T^2(\text{ax}_{12} + \text{ax}_{22} + \text{ay}_{11} + \text{ay}_{21}) \\ &\quad + 3x_T y_T^3(\text{ay}_{12} + \text{ay}_{22}) - 2y_T^2 z_T(\text{ay}_{12} + \text{ay}_{22}))\end{aligned}$$

sépare l'ensemble $\{(x, y, z) : |z| \leq \frac{|xy|}{2}\}$ en deux parties. À moins d'un erreur d'ordre $\mathcal{O}(\mathbf{T}^5) = \mathcal{O}(|x_T|^5, |y_T|^5)$, ces deux régions correspondent aux points finaux pour lesquels la géodésiques ξ est optimale de ceux pour lesquels la géodésique $\tilde{\xi}$ est optimale.

Nous remarquons que, à cette ordre d'approximation, seulement les invariants du type ax_{ij} , $i, j = 1, 2$, déterminent l'optimalité d'une géodésique ou d'une autre. Il semble en particulier que les invariants $A, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$ ne jouent pas de rôle dans la structure de la "partie centrale" du lieu de coupure. En conséquence, nous imaginons qu'il n'y ait pas de corrélation entre la

“calotte” et la “partie centrale” de la sphère, mais que toutes les combinaisons soient possibles.

L’étude de cette partie centrale de la sphère semble donc être un problème déconnecté de celui étudié dans cette thèse, et de complexité comparable. Il pourrait faire l’objet de recherches futures.

5.1.2 Stabilité du lieu de coupure

Les résultats contenus dans ce manuscrit sont vrais pour les jets des géodésiques par rapport au petit paramètre ρ_0 , jusqu’au quatrième ordre pour les coordonnées x, y et au cinquième ordre pour la coordonnée z . Une fois le lieu de coupure pour les jets de la dynamique décrit, la question naturelle à laquelle il faut répondre concerne la forme du lieu de coupure pour les vraies géodésiques du système. Comme déjà observé dans [11] pour le cas générique ($C_1 \neq 0$), tous les points de coupure des géodésiques de covecteur initial (p_x^0, p_y^0, p_z^0) avec $|p_x^0| \neq |p_y^0|$ correspondent à des auto-intersections transversales du front d’onde (dans le cas du lieu coupé) ou à des lieux de commutation transversaux aux fronts d’onde (pour le lieu conjugué), et sont donc stables. Dans le cas considéré dans le présent article, ce fait est toujours vrai pour toutes les géodésiques avec $|p_x^0| \neq |p_y^0|$ et pour celles avec $|p_x^0| = 1$ et $p_y^0 \neq -\frac{E_1}{D_1}$: pour ces dernières valeurs du vecteur adjoint, en effet, le front du jet de la dynamique présente un point de rebroussement, de sorte qu’il faut en prouver la stabilité.

Par conséquent, les lieux de coupure calculés ci-dessus représentent une bonne approximation pour les lieux de coupure de la vraie dynamique, sauf pour les extrémales avec ces valeurs particulières du covecteur initial. Pour comprendre ce qui se passe dans ces cas, une analyse de stabilité doit être effectuée. La question est particulièrement délicate, car la classe dans laquelle on doit étudier la stabilité de ces singularités n’est pas tout à fait claire, comme c’est par exemple le cas pour les caustiques en géométrie sous-Riemannienne, qui sont stables dans la classe des applications lagrangiennes (voir [4, 17, 30]).

5.2 Relaxation de l’hypothèse sur la forme normale

Dans cette section, nous allons montrer comment définir une forme normale lorsque la structure sous-Finslérienne étudiée n’est pas forcément compatible avec une structure sous-Riemannienne. Cette forme normale est valable dans des voisinages des points $\mathbf{q} \in M$ sur lesquels les champs de vecteurs $\{f, g, [f, g]\}$ sont linéairement indépendants.

Fixons un point $\mathbf{q}_0 \in M$, et considérons l’application $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow M$ définie par

$$\Phi(x, y, z) = \exp(xf + yg) \circ \exp(z[f, g])(\mathbf{q}_0).$$

Grâce à la condition de rang, Φ est un difféomorphisme local dont l’image est un voisinage de \mathbf{q}_0 , donc nous pouvons l’utiliser pour définir des coordonnées locales, dans lesquelles le point \mathbf{q}_0 est représenté par l’origine de \mathbb{R}^3 .

Pour trouver l’expression des champs f et g dans les nouvelles coordonnées, nous prenons une quelconque fonction $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , et nous posons

$\tilde{\varphi} = \varphi \circ \Phi$. Pour tout $(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3$, nous avons que

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}|_{(x,0,z)} = \langle d\varphi, \frac{\partial \Phi}{\partial x} \rangle|_{\Phi(x,0,z)} = \langle d\varphi, f \rangle|_{\Phi(x,0,z)}.$$

Pour un point quelconque \mathbb{R}^3 , en appliquant [6, equation 2.33], nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x}|_{\mathbf{x}} &= \int_{-1}^0 e^{\text{sad}(xf+yg)} f|_{\Phi(\mathbf{x})} ds \\ &= \int_{-1}^0 (f + sy[g, f] + \frac{s^2}{2}(xy[f, [g, f]] + y^2[g, [g, f]]) + \mathcal{O}(s^3))|_{\Phi(\mathbf{x})} ds \\ &= (f + \frac{1}{2}y[f, g] + \frac{1}{3!}(-xy[f, [f, g]] - y^2[g, [f, g]]) + \mathcal{O}(s^4))|_{\Phi(\mathbf{x})} ds \end{aligned}$$

Pareil, pour tous point de \mathbb{R}^3 nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y}|_{\mathbf{x}} &= \int_{-1}^0 e^{\text{sad}(xf+yg)} g|_{\Phi(\mathbf{x})} ds \\ &= \int_{-1}^0 (g + sx[f, g] + \frac{s^2}{2}(x^2[f, [f, g]] + xy[g, [f, g]]) + \mathcal{O}(s^3))|_{\Phi(\mathbf{x})} ds \\ &= (g - \frac{1}{2}x[f, g] + \frac{1}{3!}(x^2[f, [f, g]] + xy[g, [f, g]]) + \mathcal{O}(s^4))|_{\Phi(\mathbf{x})} ds. \end{aligned}$$

En particulier, si nous définissons le champ de vecteurs

$$W(\mathbf{x}) = ([f, g] + \frac{1}{6}(x[f, [f, g]] + y[g, [f, g]]) + \dots) \circ \Phi(\mathbf{x}),$$

nous pouvons écrire f et g comme il suit :

$$f = \frac{\partial}{\partial x} - yW \quad g = \frac{\partial}{\partial y} + xW.$$

D'autre part, comme pour tout $(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3$ nous avons que

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} = \langle d\varphi, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \rangle = \langle \varphi, [f, g] \rangle|_{\Phi(0,0,z)},$$

nous pouvons écrire l'expression du champ $[f, g]$ comme il suit

$$[f, g](\Phi(x, y, z)) = \frac{\partial}{\partial z} + xV_1 + yV_2,$$

où V_1, V_2 sont deux champs de vecteurs. En particulier, nous pouvons écrire :

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{11}x + L_{12}y \\ L_{21}x + L_{22}y \\ L_{31}x + L_{32}y \end{pmatrix}$$

où L_{ij} sont deux fonctions lisses.

Comme d'ailleurs fait dans la Section 1.3, nous pouvons développer les fonctions L_{ij} en série de Taylor, autour de l'origine :

$$L_{ij}(x, y, z) = c_{ij} + ax_{ij}x + ay_{ij}y + az_{ij}z + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{xxij} & \omega_{xyij} & \omega_{xzij} \\ \omega_{yxij} & \omega_{yyij} & \omega_{yzij} \\ \omega_{zxij} & \omega_{zyij} & \omega_{zzij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$+ R(x, y, z).$$

Par rapport au cas analysé dans ce manuscrit, nous pouvons remarquer une différence fondamentale : à l'origine, les fonctions L_{ij} ne sont pas nulles.

Certains des résultats prouvés dans cette thèse sont encore valables si l'on utilise la forme normale (5.2). Par exemple, la Jacobienne de l'application exponentielle associée à des géodésiques dans les classes Γ_f , est donnée par

$$\text{JExp}|_{(p_y^0, p_z^0, \tau)} = \begin{cases} 0 & \tau \in [0, \mathcal{T}_2(p_y^0, p_z^0)) \\ 4\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4) & \tau \in (\mathcal{T}_2(p_y^0, p_z^0), \mathcal{T}_3(p_y^0, p_z^0)) \\ 8\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4) & \tau \in (\mathcal{T}_3(p_y^0, p_z^0), \mathcal{T}_4(p_y^0, p_z^0)) \\ 32C_1\rho_0^5 + 32(D_1p_y^0 + E_1)\rho_0^6 + \mathcal{O}(\rho_0^7) & \tau \in (\mathcal{T}_4(p_y^0, p_z^0), \mathcal{T}_5(p_y^0, p_z^0)) \\ -8\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4) & \tau \in (\mathcal{T}_5(p_y^0, p_z^0), \mathcal{T}_6(p_y^0, p_z^0)), \end{cases}$$

où les invariants C_1, D_1 et E_1 sont définis comme il suit :

$$C_1 = 8ax_{31} - 2c_{21} + 9c_{31}$$

$$D_1 = 9ax_{21} - 15\omega_{xx31} - 168ax_{31}c_{31} + 39c_{21}c_{31} - 162c_{31}^3$$

$$E_1 = 12ax_{32}c_{31} + 144ax_{31}c_{32} + 3ax_{11} - 3ax_{22} + 12ay_{31}c_{31} - 3ay_{21} + az_{31} + 162c_{32}c_{31}^2$$

$$+ 2c_{11}c_{31} + c_{22}c_{31} - 38c_{21}c_{32} + 5\omega_{xx32} + 5\omega_{xy31} + 5\omega_{yx31}$$

En posant aussi

$$C_2 = 8ay_{32} + 2c_{12} + 9c_{32}$$

$$A = 4ax_{32} + 4ay_{31} + c_{11} - c_{22} + 9c_{31}c_{32},$$

nous pouvons retrouver les résultats du Chapitre 3.

Annexe A

Formules utiles

A.1 Hamiltoniens

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = p_x - p_z \frac{y}{2} + yp_x(L_{11}x + L_{12}y) + yp_y(L_{21}x + L_{22}y) + yp_z(L_{31}x + L_{32}y)$$

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = p_y + p_z \frac{x}{2} - xp_x(L_{11}x + L_{12}y) - xp_y(L_{21}x + L_{22}y) - xp_z(L_{31}x + L_{32}y)$$

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) &= u_1 F(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + u_2 G(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \\ &= (u_2 x - u_1 y) \left(\frac{1}{2} - (p_x L_{11} + p_y L_{21} + p_z L_{31}) \left(\frac{x}{y} \right) \right) + u_1 p_x + u_2 p_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{p}, \mathbf{x}) &= \{F, G\}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \tag{A.1} \\ &= p_z - 3(p_x(L_{11}x + L_{12}y) + p_y(L_{21}x + L_{22}y) + p_z(L_{31}x + L_{32}y)) \\ &\quad - p_x \left(x^2 \frac{\partial L_{11}}{\partial x} + xy \left(\frac{\partial L_{12}}{\partial x} + \frac{\partial L_{11}}{\partial y} \right) + y^2 \frac{\partial L_{12}}{\partial y} \right) \\ &\quad - p_y \left(x^2 \frac{\partial L_{21}}{\partial x} + xy \left(\frac{\partial L_{22}}{\partial x} + \frac{\partial L_{21}}{\partial y} \right) + y^2 \frac{\partial L_{22}}{\partial y} \right) \\ &\quad - p_z \left(x^2 \frac{\partial L_{31}}{\partial x} + xy \left(\frac{\partial L_{32}}{\partial x} + \frac{\partial L_{31}}{\partial y} \right) + y^2 \frac{\partial L_{32}}{\partial y} \right) \\ &\quad + \left(xy(L_{11} - L_{22}) - x^2 L_{21} + y^2 L_{12} \right) \left(\frac{p_z}{2} - (p_x(L_{11}x + L_{12}y) \right. \\ &\quad \left. + p_y(L_{21}x + L_{22}y) + p_z(L_{31}x + L_{32}y)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\Theta}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) &= \frac{\{F, G\}}{p_z}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) & (A.2) \\
&= 1 \\
&- 3(L_{31}x + L_{32}y) \\
&- 3\left(\frac{p_x}{p_z}(L_{11}x + L_{12}y) + \frac{p_y}{p_z}(L_{21}x + L_{22}y)\right) \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{L} - \left(x^2\frac{\partial L_{31}}{\partial x} + xy\left(\frac{\partial L_{32}}{\partial x} + \frac{\partial L_{31}}{\partial y}\right) + y^2\frac{\partial L_{32}}{\partial y}\right) \\
&- \frac{p_x}{p_z}\left(x^2\frac{\partial L_{11}}{\partial x} + xy\left(\frac{\partial L_{12}}{\partial x} + \frac{\partial L_{11}}{\partial y}\right) + y^2\frac{\partial L_{12}}{\partial y}\right) \\
&- \frac{p_y}{p_z}\left(x^2\frac{\partial L_{21}}{\partial x} + xy\left(\frac{\partial L_{22}}{\partial x} + \frac{\partial L_{21}}{\partial y}\right) + y^2\frac{\partial L_{22}}{\partial y}\right) \\
&- \mathbb{L}(L_{31}x + L_{32}y) \\
&- \mathbb{L}\left(\frac{p_x}{p_z}(L_{11}x + L_{12}y) + \frac{p_y}{p_z}(L_{21}x + L_{22}y)\right).
\end{aligned}$$

où nous avons posé

$$\mathbb{L}(x, y, z) = xy(L_{11} - L_{22}) - x^2L_{21} + y^2L_{12}.$$

A.2 Permutations des invariants

Le Lemme 10 prouve qu'il est possible de retrouver les expressions des géodésiques des classes Γ_{-f} , Γ_g et Γ_{-g} juste en appliquant une rotation convenable autour de l'axe z , et une permutation des invariants. D'autre part, le Lemme 11 garantit que ceci est possible aussi pour les extrémales et les quantités qui en dépendent, comme les temps de commutation et le déterminant de la Jacobienne de l'application exponentielle.

Par un souci de clarté, dans cette section nous allons écrire explicitement le résultat de ces permutations (pour les invariants principaux).

- ♣ pour obtenir une géodésique de la classe Γ_g étant donnée une géodésique de la classe Γ_f , nous devons effectuer une rotation d'angle $\pi/2$ autour de l'axe z , est appliquer les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}
&A \mapsto -A \\
&C_1 \mapsto C_2 \quad C_2 \mapsto C_1 \\
D_1 \mapsto D_2 \quad D_2 \mapsto -D_1 \quad E_1 \mapsto E_2 \quad E_2 \mapsto -E_1 \\
&c_1 \mapsto c_2 \quad d_1 \mapsto d_2 \\
&c_2 \mapsto -c_1 \quad d_2 \mapsto -d_1
\end{aligned}$$

- ♦ pour obtenir une géodésique de la classe Γ_{-f} étant donnée une géodésique de la classe Γ_f , nous devons effectuer une rotation d'angle π autour de l'axe z , est appliquer les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}
D_1 \mapsto -D_1 \quad D_2 \mapsto -D_2 \quad E_1 \mapsto -E_1 \quad E_2 \mapsto -E_2 \\
c_1 \mapsto -c_1 \quad d_1 \mapsto -d_1 \\
c_2 \mapsto -c_2 \quad d_2 \mapsto -d_2
\end{aligned}$$

♠ pour obtenir une géodésique de la classe Γ_{-g} étant donnée une géodésique de la classe Γ_f , nous devons effectuer une rotation d'angle $3\pi/2$ autour de l'axe z , est appliquer les transformations suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & A \mapsto -A & & \\
& & & & C_1 \mapsto C_2 & C_2 \mapsto C_1 & \\
D_1 \mapsto -D_2 & D_2 \mapsto D_1 & E_1 \mapsto -E_2 & E_2 \mapsto E_1 & & & \\
c_1 \mapsto -c_2 & c_2 \mapsto c_1 & d_1 \mapsto -d_2 & d_2 \mapsto d_1 & & &
\end{array}$$

Remarque 13 Nous remarquons que ♠ = ♣ ◊ ♦ = ♦ ◊ ♣.

A.3 Jets des géodésiques de la classe Γ_f

Soit ξ une géodésique de la classe Γ_f , associée au vecteur adjoint \mathbf{p} tel que $\mathbf{p}(0) = (p_x^0, p_y^0, 1/\rho_0)$ (pour ce type de trajectoires, $p_x^0 = 1$, mais nous le laissons explicite, afin de pouvoir appliquer les rotations et trouver les autres géodésiques). Soient τ et \mathcal{T}_3 respectivement le temps reparamétré et le troisième temps de commutation reparamétré, et posons $\hat{\tau} = \tau - \mathcal{T}_3$. Alors les jets de ξ , en fonction du temps $\hat{\tau}$, qui varie entre 0 et $\mathcal{T}_4 - \mathcal{T}_3$, ont l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
x(\mathcal{T}_3 + \hat{\tau}) = & -(p_x^0 + p_y^0)\rho_0 + \left(4Ap_x^0p_y^0 - \frac{1}{6}C_1(p_x^0 + p_y^0)^3 - 4C_2(p_x^0)^3\right)\rho_0^3 & (A.3) \\
& + \frac{1}{24} \left(-p_y^0(24(p_y^0)^2\hat{\tau}ax_{11} + 12p_y^0\hat{\tau}^2(ax_{12} + ay_{11}) + 8\hat{\tau}^3ay_{12} + (p_y^0)^3(17ax_{21} - 15\omega_{xx31})) \right. \\
& + 4p_x^0(-6(p_y^0)^2\hat{\tau}(3ax_{11} - 2(ax_{12} + ay_{11})) - 6p_y^0\hat{\tau}^2(ax_{12} + ay_{11} - 2ay_{12}) - 2\hat{\tau}^3ay_{12} \\
& + (p_y^0)^3(4ax_{11} - 9ax_{21} + 15\omega_{xx31})) - 6(p_x^0)^2(4p_y^0\hat{\tau}(3ax_{11} - 4(ax_{12} + ay_{11} - ay_{12})) \\
& + 2\hat{\tau}^2(ax_{12} + ay_{11} - 4ay_{12}) + (p_y^0)^2(16ax_{11} + 8ax_{12} + ax_{21} - 24ax_{22} + 8ay_{11} - 24ay_{21} - 15\omega_{xx31} \\
& + 40\omega_{xx32} + 40\omega_{xy31} + 40\omega_{yy31})) + 4(p_x^0)^3(-6\hat{\tau}(ax_{11} - 2(ax_{12} + ay_{11} - 2ay_{12})) \\
& + p_y^0(12ax_{11} + 48ax_{12} + 7ax_{21} + 48ay_{11} + 16ay_{12} - 72ay_{22} + 15\omega_{xx31} + 120\omega_{xy32} \\
& + 120\omega_{yx32} + 120\omega_{yy31})) - (p_x^0)^4(32ax_{11} + 48ax_{12} - 15ax_{21} + 80ax_{22} + 48ay_{11} + 256ay_{12} \\
& \left. + 80ay_{21} - 15\omega_{xx31} + 80\omega_{xx32} + 80\omega_{xy31} + 80\omega_{yx31} + 960\omega_{yy32}) \right) \rho_0^4 + \mathcal{O}(\rho_0^5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(\mathcal{F}_3 + \hat{\tau}) &= (2p_x^0 - \hat{\tau})\rho_0 + \left(C_1 p_x^0 (p_y^0 - p_x^0)^2 - 2A(p_x^0)^2 (p_y^0 - p_x^0) + \frac{4}{3} C_2 (p_x^0)^3 \right) \rho_0^3 \quad (\text{A.4}) \\
&+ \frac{1}{6} \left(-p_y^0 \hat{\tau} (6(p_y^0)^2 \text{ax}_{21} + 3p_y^0 \hat{\tau} (\text{ax}_{22} + \text{ay}_{21}) + 2\hat{\tau}^2 \text{ay}_{22}) \right. \\
&+ 2p_x^0 ((p_y^0)^2 \hat{\tau} (-9\text{ax}_{21} + 6(\text{ax}_{22} + \text{ay}_{21})) - 3p_y^0 \hat{\tau}^2 (\text{ax}_{22} + \text{ay}_{21} - 2\text{ay}_{22}) - \hat{\tau}^3 \text{ay}_{22} \\
&+ 15(p_y^0)^3 (\text{ax}_{21} - \omega_{xx31})) + 3(p_x^0)^2 (2p_y^0 \hat{\tau} (-3\text{ax}_{21} + 4(\text{ax}_{22} + \text{ay}_{21} - \text{ay}_{22})) \\
&- \hat{\tau}^2 (\text{ax}_{22} + \text{ay}_{21} - 4\text{ay}_{22}) + 2(p_y^0)^2 (3\text{ax}_{11} - 11\text{ax}_{21} + 5(-\text{ax}_{22} - \text{ay}_{21} + 3\omega_{xx31} \\
&+ \omega_{xx32} + \omega_{xy31} + \omega_{yx31}))) - 2(p_x^0)^3 (3\hat{\tau} (\text{ax}_{21} - 2(\text{ax}_{22} + \text{ay}_{21} - 2\text{ay}_{22})) \\
&+ p_y^0 (18\text{ax}_{11} + 4\text{ax}_{12} + 3\text{ax}_{21} - 30\text{ax}_{22} + 4\text{ay}_{11} - 30\text{ay}_{21} - 20\text{ay}_{22} + 45\omega_{xx31} \\
&+ 30\omega_{xx32} + 30\omega_{xy31} + 20\omega_{xy32} + 30\omega_{yx31} + 20\omega_{yx32} + 20\omega_{yy31})) \\
&+ 2(p_x^0)^4 (9\text{ax}_{11} + 4\text{ax}_{12} + 5\text{ax}_{21} + 9\text{ax}_{22} + 4\text{ay}_{11} + 2\text{ay}_{12} + 9\text{ay}_{21} - 36\text{ay}_{22} \\
&+ 15\omega_{xx31} + 15\omega_{xx32} + 15\omega_{xy31} + 20\omega_{xy32} + 15\omega_{yx31} + 20\omega_{yx32} + 20\omega_{yy31} + 30\omega_{yy32}) \left. \right) \rho_0^4 + \mathcal{O}(\rho_0^5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z(\mathcal{F}_3 + \hat{\tau}) &= \frac{1}{2}(6(p_x^0)^2 + p_y^0(\hat{\tau} - 2p_x^0) + \hat{\tau}p_x^0)\rho_0^2 & (A.5) \\
&+ \frac{1}{6}\left(4(p_x^0)^4(19ax_{31} + 15ax_{32} + 15ay_{31} + 44ay_{32}) - p_y^0\hat{\tau}(2(p_y^0)^2ax_{31} + 3(p_y^0)\hat{\tau}(ax_{32} + ay_{31})) \right. \\
&+ 2\hat{\tau}^2ay_{32}) - 2p_x^0(10(p_y^0)^3ax_{31} + 3(p_y^0)^2\hat{\tau}(ax_{31} - 2(ax_{32} + ay_{31})) \\
&+ 3p_y^0\hat{\tau}^2(ax_{32} + ay_{31} - 2ay_{32}) + \hat{\tau}^3ay_{32}) + 3(p_x^0)^2(4(p_y^0)^2(11ax_{31} + ax_{32} + ay_{31}) \\
&- \hat{\tau}^2(ax_{32} + ay_{31} - 4ay_{32}) - 2p_y^0\hat{\tau}(ax_{31} + 4(ax_{32} + ay_{31} + ay_{32}))) \\
&- 2(p_x^0)^3(p_y^0(78ax_{31} + 60ax_{32} + 60ay_{31} + 8ay_{32}) + \hat{\tau}(ax_{31} - 6(ax_{32} + ay_{31} + 6ay_{32}))))\rho_0^4 \\
&+ \frac{1}{48}\left(2(p_x^0)^5(100ax_{11} + 32ax_{12} + 131ax_{21} + 180ax_{22} + 32ay_{11} - 184ay_{12} + 180ay_{21} \right. \\
&- 16ay_{22} + 171\omega_{xx31} + 204\omega_{xx32} + 204\omega_{xy31} + 208\omega_{xy32} + 204\omega_{yx31} + 208\omega_{yx32} \\
&+ 208\omega_{yy31} + 888\omega_{yy32}) + p_y^0\hat{\tau}((p_y^0)^3(17ax_{21} + 9\omega_{xx31}) \\
&+ 12(p_y^0)^2\hat{\tau}(ax_{11} + \omega_{xx32} + \omega_{xy31} + \omega_{yx31}) + 4p_y^0\hat{\tau}^2(ax_{12} + ay_{11} + 2(\omega_{xy32} + \omega_{yx32} + \omega_{yy31})) \\
&+ 2\hat{\tau}^3(ay_{12} + 3\omega_{yy32})) - 2p_x^0((p_y^0)^4(53ax_{21} - 51\omega_{xx31}) + 2(p_y^0)^3\hat{\tau}(4ax_{11} + 3(-3ax_{21} \\
&- 3\omega_{xx31} + 4\omega_{xx32} + 4\omega_{xy31} + 4\omega_{yx31})) - 6(p_y^0)^2\hat{\tau}^2(3ax_{11} - 2ax_{12} - 2ay_{11} + 3\omega_{xx32} \\
&+ 3\omega_{xy31} - 4\omega_{xy32} + 3\omega_{yx31} - 4\omega_{yx32} - 4\omega_{yy31}) - 4p_y^0\hat{\tau}^3(ax_{12} + ay_{11} + 2(-ay_{12} \\
&+ \omega_{xy32} + \omega_{yx32} + \omega_{yy31} - 3\omega_{yy32})) - \hat{\tau}^4(ay_{12} + 3\omega_{yy32})) + 2(p_x^0)^2(-4(p_y^0)^3(11ax_{11} \\
&- 69ax_{21} + 9(-ax_{22} - ay_{21} + 11\omega_{xx31} + \omega_{xx32} + \omega_{xy31} + \omega_{yx31})) + 3(p_y^0)^2\hat{\tau}(16ax_{11} \\
&+ 8ax_{12} + ax_{21} - 24ax_{22} + 8ay_{11} - 24ay_{21} + 9\omega_{xx31} + 16\omega_{xx32} + 16\omega_{xy31} + 16\omega_{xy32} + 16\omega_{yx31} \\
&+ 16\omega_{yx32} + 16\omega_{yy31}) + 2\hat{\tau}^3(ax_{12} + ay_{11} + 2(-2ay_{12} + \omega_{xy32} + \omega_{yx32} + \omega_{yy31} - 6\omega_{yy32})) \\
&+ 6p_y^0\hat{\tau}^2(3ax_{11} - 4ax_{12} - 4ay_{11} + 4ay_{12} + 3\omega_{xx32} + 3\omega_{xy31} - 8\omega_{xy32} + 3\omega_{yx31} \\
&- 8\omega_{yx32} - 8\omega_{yy31} + 12\omega_{yy32})) + 4(p_x^0)^3(3(p_y^0)^2(26ax_{11} - 25ax_{21} - 46ax_{22} - 46ay_{21} - 8ay_{22} \\
&+ 111\omega_{xx31} + 62\omega_{xx32} + 62\omega_{xy31} + 8\omega_{xy32} + 62\omega_{yx31} + 8\omega_{yx32} + 8\omega_{yy31}) \\
&+ 3\hat{\tau}^2(ax_{11} - 2ax_{12} - 2ay_{11} + 4ay_{12} + \omega_{xx32} + \omega_{xy31} - 4\omega_{xy32} + \omega_{yx31} \\
&- 4\omega_{yx32} - 4\omega_{yy31} + 12\omega_{yy32}) - p_y^0\hat{\tau}(12ax_{11} + 48ax_{12} + 7ax_{21} + 48ay_{11} + 16ay_{12} \\
&- 72ay_{22} - 9\omega_{xx31} + 36\omega_{xx32} + 36\omega_{xy31} + 72\omega_{xy32} + 36\omega_{yx31} + 72\omega_{yx32} + 72\omega_{yy31} + 48\omega_{yy32})) \\
&+ (p_x^0)^4(-8(p_y^0)(69ax_{11} - 16ax_{12} + 55ax_{21} - 15ax_{22} - 16ay_{11} - 2ay_{12} - 15ay_{21} - 104ay_{22} \\
&+ 159\omega_{xx31} + 87\omega_{xx32} + 87\omega_{xy31} + 136\omega_{xy32} + 87\omega_{yx31} + 136\omega_{yx32} + 136\omega_{yy31} + 18\omega_{yy32}) \\
&+ \hat{\tau}(32ax_{11} + 48ax_{12} - 15ax_{21} + 80ax_{22} + 48ay_{11} + 256ay_{12} + 80ay_{21} + 9\omega_{xx31} + 32\omega_{xx32} \\
&+ 32\omega_{xy31} + 96\omega_{xy32} + 32\omega_{yx31} + 96\omega_{yx32} + 96\omega_{yy31} + 768\omega_{yy32}))\rho_0^5
\end{aligned}$$

Posons maintenant $\hat{\tau} = \tau - \mathcal{T}_4$, où \mathcal{T}_4 dénote le quatrième temps de commutation de la géodésique ξ . Nous avons que

$$x(\mathcal{T}_4 + \hat{\tau}) = x(\mathcal{T}_4) + \hat{\tau}\rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0^5) \quad (\text{A.6})$$

$$y(\mathcal{T}_4 + \hat{\tau}) = y(\mathcal{T}_4) + \mathcal{O}(\rho_0^5) \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} z(\mathcal{T}_4 + \hat{\tau}) &= z(\mathcal{T}_4) + 2(p_x^0)^2 \hat{\tau}(C_1 p_y^0 - A p_x^0) \rho_0^4 \\ &\quad + \hat{\tau}((p_y^0)^2 D_1 + 2E_2 p_y^0 p_x^0 - \frac{1}{3} c_1 (p_x^0)^2) (p_x^0)^2 \rho_0^5 + \mathcal{O}(\rho_0^6), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

pour $\hat{\tau} \in [0, \mathcal{T}_5 - \mathcal{T}_4]$.

A.4 Temps de commutation d'une géodésique de la classe Γ_f

$$\mathcal{T}_1 = (p_x^0 - p_y^0) + \frac{4}{3} \text{ax}_{31} (p_x^0 - p_y^0)^3 \rho_0^2 \quad (\text{A.9})$$

$$+ \frac{1}{24} \rho_0^3 (15 \text{ax}_{21} (p_x^0 - p_y^0)^4 + 32 p_x^0 \text{ax}_{11} (p_x^0 - p_y^0)^3 + 32 p_y^0 \text{ax}_{21} (p_x^0 - p_y^0)^3 + 15 \omega_{xx31} (p_x^0 - p_y^0)^4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2 &= \mathcal{T}_1 + 2p_x^0 + \frac{2}{3} (12(p_x^0)^2 \text{ax}_{32} (p_x^0 - p_y^0) + 12p_x^0 \text{ax}_{31} (p_x^0 - p_y^0)^2 + 16(p_x^0)^3 \text{ay}_{32} + 12(p_x^0)^2 \text{ay}_{31} (p_x^0 - p_y^0)) \rho_0^2 \\ &\quad + \frac{1}{24} (32(p_x^0)^3 \text{ax}_{12} (p_x^0 - p_y^0) + 72(p_x^0)^2 \text{ax}_{11} (p_x^0 - p_y^0)^2 + 120(p_x^0)^2 \text{ax}_{22} (p_x^0 - p_y^0)^2 \\ &\quad + 192(p_x^0)^2 p_y^0 \text{ax}_{22} (p_x^0 - p_y^0) + 120p_x^0 \text{ax}_{21} (p_x^0 - p_y^0)^3 + 192p_x^0 p_y^0 \text{ax}_{21} (p_x^0 - p_y^0)^2 + 16(p_x^0)^4 \text{ay}_{12} \\ &\quad + 32(p_x^0)^3 \text{ay}_{11} (p_x^0 - p_y^0) + 160(p_x^0)^3 \text{ay}_{22} (p_x^0 - p_y^0) + 256(p_x^0)^3 p_y^0 \text{ay}_{22} + 120(p_x^0)^2 \text{ay}_{21} (p_x^0 - p_y^0)^2 \\ &\quad + 192(p_x^0)^2 p_y^0 \text{ay}_{21} (p_x^0 - p_y^0) + 240(p_x^0)^4 \omega_{yy32} + 160(p_x^0)^3 \omega_{xy32} (p_x^0 - p_y^0) \\ &\quad + 160(p_x^0)^3 \omega_{yx32} (p_x^0 - p_y^0) + 160(p_x^0)^3 \omega_{yy31} (p_x^0 - p_y^0) + 120(p_x^0)^2 \omega_{xx32} (p_x^0 - p_y^0)^2 + 120(p_x^0)^2 \omega_{xy31} (p_x^0 - p_y^0)^2 \\ &\quad + 120(p_x^0)^2 \omega_{yx31} (p_x^0 - p_y^0)^2 + 120p_x^0 \omega_{xx31} (p_x^0 - p_y^0)^3) \rho_0^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_3 &= \mathcal{T}_2 + 2p_x^0 + \left(\frac{8}{3} (p_x^0)^3 \text{ax}_{31} - 16(p_x^0)^2 p_y^0 \text{ax}_{32} + 8p_x^0 (p_y^0)^2 \text{ax}_{31} + 32(p_x^0)^3 \text{ay}_{32} - 16(p_x^0)^2 p_y^0 \text{ay}_{31} \right) \rho_0^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} \rho_0^3 \left(-2(p_x^0)^4 \text{ax}_{11} + 10(p_x^0)^4 \text{ax}_{22} + 12(p_x^0)^3 (p_y^0) \text{ax}_{12} - 7(p_x^0)^3 p_y^0 \text{ax}_{21} - 6(p_x^0)^2 (p_y^0)^2 \text{ax}_{11} \right. \\ &\quad - 18(p_x^0)^2 (p_y^0)^2 \text{ax}_{22} + 9(p_x^0)^3 (p_y^0)^3 \text{ax}_{21} - 24(p_x^0)^4 \text{ay}_{12} + 10(p_x^0)^4 \text{ay}_{21} + 12(p_x^0)^3 (p_y^0) \text{ay}_{11} + 36(p_x^0)^3 (p_y^0) \text{ay}_{22} \\ &\quad - 18(p_x^0)^2 (p_y^0)^2 \text{ay}_{21} + 10(p_x^0)^4 \omega_{xx32} + 10(p_x^0)^4 \omega_{xy31} + 10(p_x^0)^4 \omega_{yx31} + 120(p_x^0)^4 \omega_{yy32} - 15(p_x^0)^3 p_y^0 \omega_{xx31} \\ &\quad - 60(p_x^0)^3 p_y^0 \omega_{xy32} - 60(p_x^0)^3 p_y^0 \omega_{yx32} - 60(p_x^0)^3 p_y^0 \omega_{yy31} + 30(p_x^0)^2 (p_y^0)^2 \omega_{xx32} + 30(p_x^0)^2 (p_y^0)^2 \omega_{xy31} \\ &\quad \left. + 30(p_x^0)^2 (p_y^0)^2 \omega_{yx31} - 15p_x^0 (p_y^0)^3 \omega_{xx31} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_4 = & \mathcal{T}_3 + 2p_x^0 + \left(8(p_x^0)^3 ax_{31} - 8(p_x^0)^3 ax_{32} + 16(p_x^0)^2 p_y^0 ax_{31} - 8(p_x^0)^2 p_y^0 ax_{32} + 8p_x^0 (p_y^0)^2 ax_{31} - 8(p_x^0)^3 ay_{31} \right. \\
& + \frac{32}{3} (p_x^0)^3 ay_{32} - 8(p_x^0)^2 p_y^0 ay_{31} \left. \right) \rho_0^2 \\
& + \frac{1}{3} \left(9(p_x^0)^4 ax_{11} - 4(p_x^0)^4 ax_{12} - 15(p_x^0)^4 ax_{21} + 15(p_x^0)^4 ax_{22} + 18(p_x^0)^3 (p_y^0) ax_{11} - 4(p_x^0)^3 p_y^0 ax_{12} \right. \\
& - 21(p_x^0)^3 p_y^0 ax_{21} + 6(p_x^0)^3 p_y^0 ax_{22} + 9(p_x^0)^2 (p_y^0)^2 ax_{11} + 3(p_x^0)^2 (p_y^0)^2 ax_{21} - 9(p_x^0)^2 (p_y^0)^2 ax_{22} \\
& + 9p_x^0 (p_y^0)^3 ax_{21} - 4(p_x^0)^4 ay_{11} + 2(p_x^0)^4 ay_{12} + 15(p_x^0)^4 ay_{21} - 20(p_x^0)^4 ay_{22} - 4(p_x^0)^3 p_y^0 ay_{11} \\
& + 6(p_x^0)^3 (p_y^0) ay_{21} + 12(p_x^0)^3 p_y^0 ay_{22} - 9(p_x^0)^2 (p_y^0)^2 ay_{21} - 15(p_x^0)^4 \omega_{xx31} + 15(p_x^0)^4 \omega_{xx32} + 15(p_x^0)^4 \omega_{xy31} \\
& - 20(p_x^0)^4 \omega_{xy32} + 15(p_x^0)^4 \omega_{yx31} - 20(p_x^0)^4 \omega_{yx32} - 20(p_x^0)^4 \omega_{yy31} \\
& + 30(p_x^0)^4 \omega_{yy32} - 45(p_x^0)^3 (p_y^0) \omega_{xx31} + 30(p_x^0)^3 (p_y^0) \omega_{xx32} + 30(p_x^0)^3 p_y^0 \omega_{xy31} - 20(p_x^0)^3 p_y^0 \omega_{xy32} \\
& + 30(p_x^0)^3 p_y^0 \omega_{yx31} - 20(p_x^0)^3 p_y^0 \omega_{yx32} - 20(p_x^0)^3 p_y^0 \omega_{yy31} - 45(p_x^0)^2 (p_y^0)^2 \omega_{xx31} + 15(p_x^0)^2 (p_y^0)^2 \omega_{xx32} \\
& \left. + 15(p_x^0)^2 (p_y^0)^2 \omega_{xy31} + 15(p_x^0)^2 (p_y^0)^2 \omega_{yx31} - 15p_x^0 (p_y^0)^3 \omega_{xx31} \right) \rho_0^3
\end{aligned}$$

Annexe B

Calcul des intersections des fronts

Dans cette Section, nous allons examiner les conditions d'existence, les temps d'intersections et les expressions des suspensions sur le plan $\{z = 4\zeta^2\}$ des intersections entre les fronts des géodésiques de la classe Γ .

Ces résultats ont été obtenus en suivant la même méthode expliquée dans la Section 3.1.1, à l'aide du logiciel de calcul symbolique Mathematica, et en exploitant les symétries décrites par les Lemmes 10-11.

- $\alpha)$ $\bar{\mathcal{F}}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ les propriétés de cette intersection peuvent être facilement trouvées à partir des calculs faits à la page page 60, auxquels on applique les Lemmes 10-11; en particulier, nous effectuons une rotation de π autour de l'axe vertical z et nous appliquons la permutation \blacklozenge . En particulier, nous déduisons que ces intersections ont lieu seulement si $C_1 \leq 0$ et, au cas où $C_1 = 0$, si

$$E_1 + \frac{2 - p_y^0}{3} D_1 \geq 0 \quad (\text{B.1})$$

$$E_1 + \frac{1 - 2p_y^0}{3} D_1 \geq 0, \quad (\text{B.2})$$

où p_y^0 dénote la deuxième composant du vecteur adjoint (au temps zéro) associé à la trajectoire avec vitesse initiale égale à $-f$. L'intersection arrive au temps (reparamétré) \mathcal{T} tel que

$$\mathcal{T}_4 - \mathcal{T} = -2(1 + p_y^0)C_1\rho_0^2 - 2(1 + p_y^0)\left(E_1 + \frac{1 - 2p_y^0}{3}D_1\right)\rho_0^3\mathcal{O}(\rho_0^4),$$

et sa suspension sur le plan $z = 4\zeta^2$ est donnée par

$$\begin{cases} x = (1 - p_y^0)\zeta - ((1 - 12p_y^0 - 5(p_y^0)^2)\frac{A}{4} - (p_y^0 + 3)C_2)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y = -4A\zeta^3 + (\frac{2}{3}D_1(p_y^0)^2 - 2(E_1 + \frac{D_1}{3})p_y^0 + c_1)\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5). \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

- $\beta)$ $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ Ce cas aussi peut être obtenu à partir des calculs faits à la page page 60, en appliquant une rotation d'angle $\pi/2$ autour l'axe des z et la permutation \clubsuit . Considérons une géodésique de la classe Γ_g avec covecteur initial $(p_x^0, 1, 1/\rho_0)$, et une géodésique de la classe Γ_{-f} avec covecteur initial $(-1, \nu, 1/\tilde{\rho}_0)$, où ν et

$\tilde{\rho}_0$ sont exprimés comme des séries de puissances de ρ_0 . Nous fixons un temps $\mathbf{T} = (7 + p_x^0)\rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0^2)$ et nous cherchons l'intersection des deux géodésiques au temps \mathbf{T} . Nous trouvons que

$$\mathbf{v} = 1 + 2(p_x^0 + 1)C_2\rho_0^2 + \mathcal{O}(\rho_0^3),$$

donc cette intersection peut apparaître seulement si $C_2 \leq 0$. Elle arrive au temps (reparamétré) $\mathcal{T} = \mathcal{T}_4 + 2(1 - p_x^0)C_2\rho_0^2 + \mathcal{O}(\rho_0^3)$. L'expression de la suspension a été donnée à la page 60.

γ) $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{F}_4$ Comme nous avons fait ci-dessous, nous pouvons obtenir la conditions d'existence de ce type d'intersection en appliquant la transformation \spadesuit aux conditions (3.3)-(3.4), e la suspension à partir de (3.7), grâce à une rotation de $3\pi/2$ autour de l'axe verticale et à la transformation \spadesuit .

En particulier, la condition d'existence devient $C_2 \leq 0$ (comme $C_2 \neq 0$, il n'y a pas besoin de creuser davantage), et la suspension est donnée par l'équation (3.9).

δ) $\mathcal{F}_4 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$ Comme déjà remarqué dans la Section 3.1.1, en général l'intersection entre des géodésiques qui ont une vitesse initiale "opposée" peuvent arriver seulement près de l'axe vertical, c'est-à-dire pour $\mathbf{T} \sim 8/p_z(0)$; comme, dans ce cas, nous sommes en train de considérer des quatrièmes arcs, ceci implique que la deuxième composante du vecteur adjoint au temps zéro doit être près de ± 1 . Ainsi, nous posons $p_y^0 = -1 + \sum_{k \geq 1} \gamma_k \rho_0^k$ pour la trajectoire de la classe Γ_f , $p_y^0 = 1 + \sum_{k \geq 1} \mathbf{v}_k \rho_0^k$ pour la trajectoire de la classe Γ_{-f} . En imposant l'égalité des jets, comme d'habitude, nous trouvons que l'intersection arrive pour $\gamma_1 = \mathbf{v}_1 = 0$ et $\mathbf{v}_2 - \gamma_2 = 8(A + C_2)$; ces valeurs sont admissibles seulement si $A + C_2 \leq 0$.

Le temps (reparamétré) de l'intersection est

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_4 + (4C_2 + 4C_1 + 8A + \mu_2)\rho_0^2$$

où \mathcal{T}_4 dénote, comme d'habitude, le quatrième temps (reparamétré) de commutation de la première trajectoire. Comme nous supposons que aucune de deux trajectoires ait commuté quatre fois, ceci impose $\mu_2 \leq 4(C_2 + 2A)$. La suspension est donnée par

$$\begin{cases} x = -(4A + 4C_2 + \mu_2)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y = -(4A + 4C_2 + \mu_2)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4). \end{cases}$$

ε) $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{F}_4$ Fixons ρ_0 et \mathbf{T} , et considérons une géodésique de la classe Γ_{-f} de vecteur adjoint au temps zéro égal à $(-1, p_y^0, 1/\rho_0)$ et une géodésique de la classe Γ_f de vecteur adjoint au temps zéro égal à $(1, \gamma, 1/\tilde{\rho}_0)$, où $\gamma = \sum_{k \geq 0} \gamma_k \rho_0^k$ et $\tilde{\rho}_0 = \rho_0 + \sum_{k \geq 2} \alpha_k \rho_0^k$. Nous assumons que \mathbf{T} est *plus grand* du quatrième temps de commutation de la première trajectoire et *plus petit* du quatrième temps de commutation de la deuxième.

En imposant l'égalité des jets, nous trouvons

$$\begin{aligned} \gamma_0 = -1, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = (p_y^0 + 1)^2 C_1 - 4C_2, \\ \mathbb{T}_4 - \mathbf{T} = -4((p_y^0 + 1)C_1 + 2A)\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^3). \end{aligned}$$

où nous rappelons que \mathbb{T}_4 est le quatrième temps de commutation de la trajectoire de la classe Γ_f . En particulier, cette intersection a lieu seulement si

$$\begin{aligned} (p_y^0 + 1)^2 C_1 &\geq 4C_2 \\ 2A + (1 + p_y^0)C_1 &\leq 0. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

La suspension de l'intersection au plan $\{z = 4\zeta^2\}$ est donnée par

$$\begin{cases} x &= -(p_y^0 + 1)^2 C_1 + 4A) \zeta^3 + \left(-\frac{2}{3} D_1 (p_y^0)^3 \right. \\ &+ (E_1 - D_1) (p_y^0)^2 + 2E_1 p_y^0 + \frac{1}{3} (D_1 - 5E_1 - 4d_1)) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5) \\ y &= -4(A + p_y^0 C_1) \zeta^3 - (2D_1 (p_y^0)^2 - 4E_1 p_y^0 - \frac{2}{3} c_1) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5). \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

ζ) $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$

En faisant une rotation d'angle π autour l'axe z (et de l'axe p_z dans l'espace des covecteurs) et en appliquant la permutation \blacklozenge , nous obtenons l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_4$:

$$\begin{cases} x &= ((p_y^0 - 1)^2 C_1 + 4A) \zeta^3 + \left(\frac{2}{3} D_1 (p_y^0)^3 \right. \\ &+ (E_1 - D_1) (p_y^0)^2 - 2E_1 p_y^0 + \frac{1}{3} (D_1 - 5E_1 - 4d_1)) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5) \\ y &= 4(A - p_y^0 C_1) \zeta^3 - (2D_1 (p_y^0)^2 + 4E_1 p_y^0 - \frac{2}{3} c_1) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5), \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

où p_y^0 dénote la deuxième composant du vecteur adjoint associé la géodésique de Γ_f . Les conditions d'existence deviennent

$$\begin{aligned} (1 - p_y^0)^2 C_1 &\geq 4C_2 \\ 2A + (1 - p_y^0)C_1 &\leq 0. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

et le temps d'intersection est donné par

$$\mathbb{T}_4 - \mathbf{T} = -(4(1 - p_y^0)C + 8A)\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4), \quad (\text{B.8})$$

où \mathbb{T}_4 dénote le quatrième temps de commutation de la géodésique qui appartient à la classe Γ_{-f} .

η) $\mathcal{G}_4 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ Fixons ρ_0 et \mathbf{T} , et considérons une géodésique de la classe Γ_{-g} de vecteur adjoint au temps zéro égal à $\mathbf{p}_{-g}(0) = (p_x^0, -1, 1/\rho_0)$ et une géodésique de la classe Γ_g de vecteur adjoint au temps zéro égal à $\mathbf{p}_g(0) = (\beta, 1, 1/\hat{\rho}_0)$, où $\beta = \sum_{k \geq 0} \beta_k \rho_0^k$. Nous assumons que \mathbf{T} est *plus grand* du quatrième temps de commutation de la première trajectoire et *plus petit* du quatrième temps de commutation de la deuxième (appelé \mathbb{T}_4 dans la suite).

En imposant l'égalité des jets, nous trouvons les contraintes

$$\chi_0 = 1, \quad \chi_1 = 0, \quad \chi_2 = 4C_1 - (1 - p_x^0)^2 C_2,$$

ce qui impose la contrainte $4C_1 - (1 - p_x^0)^2 C_2 \leq 0$. D'autre part, comme $\mathbb{T}_4 - \mathbf{T} = (8A - 4(1 - p_x^0)C_2)\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4)$, telle intersection peut avoir lieu seulement pour

$$p_x^0 \geq 1 - \frac{2A}{C_2}, \quad (\text{B.9})$$

ce qui, en particulier, impose $A \geq 0$.

La suspension est donnée par

$$\begin{cases} x = -4(A + p_x^0 C_2)\zeta^3 + (2D_2(p_x^0)^2 + 4E_2 p_x^0 + \frac{2}{3}c)\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5) \\ y = (4A - (1 - p_x^0)^2 C_2)\zeta^3 + (\frac{2}{3}D_2(p_x^0)^3 + (E_2 - D_2)(p_x^0)^2 - 2E_2 p_x^0 + c')\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5), \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Nous remarquons que le terme principale ($\mathcal{O}(\zeta^3)$), interprété comme une courbe paramétrée de paramètre p_x^0 , dessine un arc de parabole avec foyer en $p_x^0 = 1$. La tangente à cette courbe est donnée par

$$\frac{y'(p_x^0)}{x'(p_x^0)} = \frac{p_x^0 - 1}{2}.$$

L'intersection $\bar{\mathcal{G}}_4 \cap \mathcal{G}_5$ peut être aisément déduite de celle qu'on vient de calculer, en changeant les signes dans les coordonnées de la suspensions et en la permutation \blacklozenge .

- θ) $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$ Pour ρ_0 et \mathbf{T} fixés, nous considérons une trajectoire appartenant à la classe Γ_f , de vecteur adjoint au temps zéro égal à $(1, p_y^0, 1/\rho_0)$, et une trajectoire appartenant à la classe Γ_{-g} associée au vecteur adjoint au temps zéro égal à $(\chi, -1, 1/\tilde{\rho}_0)$, avec $\chi = \sum_{k \geq 0} \chi_k \rho_0^k$ et $\tilde{\rho}_0 = \rho_0 + \sum_{k \geq 2} \alpha_k \rho_0^k$. Nous assumons que \mathbf{T} est *plus grand* du quatrième temps de commutation de la première trajectoire et *plus petit* du quatrième temps de commutation de la deuxième (appelé \mathbb{T}_4 dans la suite). L'imposition de l'égalité des jets nous donne

$$\begin{aligned} \chi_0 = -1, \quad \chi_1 = 0, \quad \chi_2 = 8A - 4(1 + p_y^0)C_1, \\ \mathbb{T}_4 - \mathbf{T} = ((1 + p_y^0)^2 C_1 - 4C_2)\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4). \end{aligned}$$

Donc, cette intersection peut se produire seulement si

$$2A \geq (1 + p_y^0)C_1 \quad (\text{B.11})$$

$$(1 + p_y^0)^2 C_1 - 4C_2 \geq 0. \quad (\text{B.12})$$

Comme nous sommes en train de considérer le cinquième arc bang de la trajectoire de la classe Γ_f , cette intersection nous intéresse seulement lorsque $C_1 \geq 0$, ce qui impose $A \geq 0$; lorsque $C_1 = 0$, ceci impose aussi $C_2 \leq 0$.

La suspension de cette intersection avec le plan $\{z = 4\zeta^2\}$ est donnée par

$$\begin{cases} x = ((1 + p_y^0)^2 C_1 - 4A)\zeta^3 \\ \quad + (\frac{2}{3}D_1(p_y^0)^3 + (E_1 + D_1)(p_y^0)^2 + 2E_1 p_y^0 - \frac{1}{3}(D_1 + 5E_1 + 4d_1))\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5) \\ y = 4(A - p_y^0 C_1)\zeta^3 - (2D_1(p_y^0)^2 + 4E_1 p_y^0 - \frac{2}{3}c_1)\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5). \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

- ι) $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \mathcal{G}_4$ Les conditions d'existence, les temps d'intersection et la suspension de l'intersection au plan $z = 4\zeta^2$ peuvent être trouvés de façons analogue au cas précédent. En particulier, les conditions d'existence restent (B.11)-(B.12) et la suspension est donnée par

$$\begin{cases} x = (4A - (1 - p_y^0)^2 C_1)\zeta^3 \\ \quad + (-\frac{2}{3}D_1(p_y^0)^3 + (E_1 + D_1)(p_y^0)^2 - 2E_1 p_y^0 - \frac{1}{3}(D_1 + 5E_1 + 4d_1))\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5) \\ y = -4(A + p_y^0 C_1)\zeta^3 - (2D_1(p_y^0)^2 - 4E_1 p_y^0 - \frac{2}{3}c_1)\zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5) \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

(p_y^0 dénote la seconde composante du vecteur adjoint associé à la géodésique Γ_{-f} , au temps zéro).

La pente à la courbe (B.14) est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1-p_y^0} + \mathcal{O}(\zeta). \quad (\text{B.15})$$

$\kappa)$ $\mathcal{F}_4 \cap \mathcal{G}_5$ Considérons une trajectoire appartenant à la classe Γ_g , de vecteur adjoint au temps zéro égal à $(p_x^0, 1, 1/\rho_0)$, et nous en cherchons les intersections avec une trajectoire appartenant à la classe Γ_f , de vecteur adjoint au temps zéro égal à $(1, \beta, 1/\tilde{\rho}_0)$, où $\gamma = \sum_{k \geq 0} \gamma_k \rho_0^k$ and $\tilde{\rho}_0 = \rho_0 + \sum_{k \geq 2} \alpha_k \rho_0^k$.

Les conditions d'existence, les temps d'intersection et la suspension de l'intersection sur le plan $\{z = 4\zeta^2\}$ peuvent être trouvés en appliquant aux résultats du point θ) une rotation d'angle $\pi/2$ autour les axes des z et des p_z et la permutation \clubsuit . En particulier, ce type d'intersection peut se produire seulement si $p_x^0 \geq 1 + \frac{2A}{C_2}$.

La suspension est donnée par l'équation suivante

$$\begin{cases} x &= 4(A - p_x^0 C_2) \zeta^3 + (2D_2(p_x^0)^2 - 4E_2 p_x^0 - \frac{2}{3} d_2) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5) \\ y &= (4A + (1 - p_x^0)^2 C_2) \zeta^3 \\ &+ (-\frac{2}{3} D_2 (p_x^0)^3 + (E_2 - D_2)(p_x^0)^2 - 2E_2 p_x^0 + \frac{1}{3}(D_2 + 5E_2 + 4d_2)) \zeta^4 + \mathcal{O}(\zeta^5) \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

$\lambda)$ $\mathcal{F}_5 \cap \mathcal{G}_4$ Pour ρ_0 et \mathbf{T} fixés, nous considérons une trajectoire appartenant à la classe Γ_f , de vecteur adjoint au temps zéro égal à $(1, p_y^0, 1/\rho_0)$, et une trajectoire appartenant à la classe Γ_g de vecteur adjoint au temps zéro égal à $(\beta, 1, 1/\tilde{\rho}_0)$, avec $\beta = \sum_{k \geq 0} \beta_k \rho_0^k$ et $\tilde{\rho}_0 = \rho_0 + \sum_{k \geq 2} \alpha_k \rho_0^k$. L'imposition de l'égalité des jets nous donne

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 4(1 - p_y^0)C_1.$$

Comme β_2 doit être non-positif, l'intersection peut se produire seulement si $C_1 \leq 0$; par contre, il a du sens de considérer le front \mathcal{F}_5 seulement si $C_1 \geq 0$. Si $C_1 > 0$, ceci impose pour $p_y^0 = 1$, $\beta = 1 + \mathcal{O}(\rho_0^3)$.

Si $C_1 = 0$, en poursuivant le calcul nous trouvons les contraintes

$$\begin{aligned} \beta_3 &= 2(1 - p_y^0)(2E_1 + (1 + p_y^0)D_1) \\ (1 - p_y^0)^2 \left(E_1 + \frac{1 + 2p_y^0}{3} D_1 \right) &= 0 \end{aligned}$$

La deuxième contrainte impose soit $p_y^0 = 1$ soit $p_y^0 = -\frac{3E_1}{2D_1} - \frac{1}{2}$, mais ceci est une valeur admissible seulement si $E_1 D_1 < 0$ et $|D_1| > |E_1|$. Comme β_3 doit être non-positif, il faut que $p_y^0 = 1$ ou $2E_1 + (1 + p_y^0)D_1 \leq 0$; dans le cas où $p_y^0 = -\frac{3E_1}{2D_1} - \frac{1}{2}$, ceci impose que D_1 soit négatif. Cette intersection peut arriver seulement dans le cas \mathbf{C}_+ , qui n'a pas été étudié dans cette mémoire.

Par contre, nous pouvons répéter les mêmes calculs pour étudier l'intersection des fronts $\bar{\mathcal{F}}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_4$. Nous trouvons que l'intersection est permise seulement dans le cas \mathbf{B}_- .

$\mu)$ $\mathcal{F}_5 \cap \bar{\mathcal{F}}_5$ Pour ρ_0 et \mathbf{T} fixés, nous considérons une trajectoire appartenant à la classe Γ_f , dont le vecteur adjoint associé, au temps zéro, est égal à $(1, p_y^0, 1/\rho_0)$, et une trajectoire appartenant à la classe Γ_{-f} de vecteur adjoint au temps zéro égal à $(-1, \nu, 1/\tilde{\rho}_0)$, avec $\nu = \sum_{k \geq 0} \nu_k \rho_0^k$.

En imposant l'égalité entre les jets des trajectoires, nous obtenons $\nu_0 = p_y^0 - \frac{2A}{C_1}$. Comme $\nu \in [-1, 1]$, si $C_1 > 0$ ceci impose $p_y^0 \in \left[\frac{2A}{C_1} - 1, \frac{2A}{C_1} + 1 \right]$. Cet intervalle a intersection non vide avec l'intervalle $[-1, 1]$ seulement si $|A| \leq C_1$. La suspension de l'intersection est donnée par

$$\begin{cases} x = -4\frac{A}{C_1}(A - C_1 p_y^0)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y = 4(A - C_1 p_y^0)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4). \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Le terme dominant, interprété comme une courbe paramétrée par p_y^0 , est un segment de pente $-C_1/A$.

- ν) $\mathcal{G}_5 \cap \bar{\mathcal{G}}_5$ Pour ρ_0 et \mathbf{T} fixés, nous considérons une trajectoire appartenant à la classe Γ_g , de vecteur adjoint au temps zéro égal à $(p_x^0, 1, 1/\rho_0)$, et une trajectoire appartenant à la classe Γ_{-g} de vecteur adjoint au temps zéro égal à $(\chi, -1, 1/\hat{\rho}_0)$, avec $\chi = \sum_{k \geq 0} \beta_k \rho_0^k$.

Les deux trajectoires s'intersectent pour $C_2 p_x^0 - \beta_0 = 2A$. En particulier, si $C_2 \neq 0$, nous avons que $p_x^0 - \beta_0 = \frac{2A}{C_2}$, ce qui impose $|A| < C_2$. L'intersection a lieu au temps $\mathbf{T} = 8\rho_0 + \frac{4}{C_2} \left(C_2^2 (p_x^0)^2 - 2AC_2 p_x^0 - A^2 + \frac{2}{3}C_2^2 \right) \rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4)$, et sa suspension est

$$\begin{cases} x = 4(A - C_2 p_x^0)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y = -4\frac{A}{C_2}(A - C_2 p_x^0)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4). \end{cases}$$

Le terme dominant, interprété comme une courbe paramétrée par p_x^0 , est un segment de pente $-A/C_2$.

- ξ) $\mathcal{F}_5 \cap \mathcal{G}_5$ Pour ρ_0 et \mathbf{T} fixés, nous considérons une trajectoire appartenant à la classe Γ_f , dont le vecteur adjoint associé, au temps zéro, est égal à $(1, p_y^0, 1/\rho_0)$, et une trajectoire appartenant à la classe Γ_g de vecteur adjoint au temps zéro égal à $(\beta, 1, 1/\hat{\rho}_0)$, avec $\beta = \sum_{k \geq 0} \beta_k \rho_0^k$. Nous supposons aussi que \mathbf{T} soit plus grand des quatrièmes temps de commutations des deux trajectoires.

En imposant l'égalité entre les jets des trajectoires, nous trouvons les relations $\beta_0 = 1 \pm \sqrt{(1 - p_y^0)^2 \frac{C_1}{C_2}}$ (bien entendu, une des deux solutions est admissible seulement pour $p_y^0 = 1$) et $\mathbf{T} = 8\rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0^2)$.

Si C_1 et C_2 sont tous les deux positifs (en effet, comme nous sommes en train de considérer des cinquièmes fronts, ce calcul est intéressant seulement lorsque $C_1 \geq 0$ et $C_2 \geq 0$), β assume une valeur admissible seulement si $p_y^0 \geq 1 - 2\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$.

La suspension de l'intersection est donnée par

$$\begin{cases} x = 4(A - C_2 + (1 - p_y^0)\sqrt{C_1 C_2})\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y = 4(A - C_1 p_y^0)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4). \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Si nous négligeons les termes d'ordre supérieur en ζ , la courbe paramétrée (par le paramètre p_y^0) (B.18) dessine d'un segment de pente $\sqrt{C_1/C_2}$ de longueur $\mathcal{O}(\zeta^3)$.

Dans le Chapitre 4, nous avons besoin d'étudier cette intersection sous l'hypothèse $C_1 = 0$. Dans ce cas, la procédure usuelle ne donne pas de résultats concluants : nous devons développer une méthode adaptée (voir à la page 99) pour évaluer ce type d'intersections.

En appliquant les Lemmes 10-11, nous pouvons facilement étudier les intersections similaires. Par exemple, pour l'intersection $\mathcal{F}_5 \cap \overline{\mathcal{G}}_5$, nous trouvons la relation $\beta_0 = 1 - \sqrt{(1 + p_y^0)^2 \frac{C_1}{C_2}}$ (les vecteurs adjoints initiales des géodésiques de la classe Γ_f et Γ_{-g} sont, respectivement, $(1, p_y^0, \rho_0)$ et $(\beta, -1, \hat{\rho}_0)$, avec $\hat{\rho}_0 = \rho_0 + \mathcal{O}(\rho_0^2)$ et $\beta = \beta_0 + \mathcal{O}(\rho_0)$). Ceci nous implique que cette intersection peut avoir lieu seulement pour

$$p_y^0 \leq -1 + 2\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}.$$

La suspension de l'intersection est donnée par

$$\begin{cases} x = -4(A + C_2 - (1 + p_y^0)\sqrt{C_1 C_2})\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4) \\ y = 4(A - C_1 p_y^0)\zeta^3 + \mathcal{O}(\zeta^4). \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

Annexe C

Codes Mathematica

Code integration-sys.nb

Ce programme intègre les équations de Hamilton et trouve les jets des variables

$$x, y, z, \widehat{p}_y, \widehat{p}_y, \varrho,$$

selon la procédure expliquée dans la Section 2.1.2.

```
ClearAll["Global`*"]

For[i = 1, i <= 3, i++,
  For[j = 1, j <= 2, j++,
    L[i, j][x_, y_, z_] = {ax[i, j] ,
      ay[i, j] }.{x, y} +
      1/2 {x, y,
        z}.{{\[Omega]xx[i, j], \[Omega]xy[i, j], \[Omega]xz[i,
          j]}, {\[Omega]yx[i, j], \[Omega]yy[i, j], \[Omega]yz[i,
            j]}, {\[Omega]zx[i, j], \[Omega]zy[i, j], \[Omega]zz[i,
              j]}}.{x, y, z} +
      1/6 (x {x, y,
        z}.{{Vxxx[i, j], Vxxy[i, j], Vxxz[i, j]}, {Vyx[i, j],
          Vxyy[i, j], Vxyz[i, j]}, {Vxzx[i, j], Vxzy[i, j],
            Vxzz[i, j]}}.{x, y, z} +
        y {x, y,
          z}.{{Vyxx[i, j], Vxyy[i, j], Vyxz[i, j]}, {Vyyx[i, j],
            Vyyy[i, j], Vyyz[i, j]}, {Vyzx[i, j], Vyzy[i, j],
              Vyzz[i, j]}}.{x, y, z} +
        z {x, y,
          z}.{{Vzxx[i, j], Vzxy[i, j], Vzxz[i, j]}, {Vzyx[i, j],
            Vzyy[i, j], Vzyz[i, j]}, {Vzxx[i, j], Vzzy[i, j],
              Vzzz[i, j]}}.{x, y, z})]
  ]

(*symmetrisation*)

(*For[i=1,i\[LessEqual]3,i++,
```

```

For[j=1,j\[LessEqual]2,j++,{
\[Omega]yx[i,j]=\[Omega]xy[i,j],\[Omega]zx[i,j]=\[Omega]xz[i,j],\
\[Omega]zy[i,j]=\[Omega]yz[i,j],Vyxx[i,j]=
Vxxy[i,j],Vxyx[i,j]=Vxxy[i,j],Vzxx[i,j]=Vxxz[i,j],Vxzx[i,j]=
Vxxx[i,j],Vxyy[i,j]=Vyyx[i,j],Vyxy[i,j]=
Vyyx[i,j],Vzyy[i,j]=Vyyz[i,j],Vyzy[i,j]=
Vyyz[i,j],Vxzz[i,j]=Vzzx[i,j],Vzxx[i,j]=
Vzzx[i,j],Vyzz[i,j]=Vzzy[i,j],Vzyz[i,j]=
Vzzy[i,j],Vyxz[i,j]=Vxyz[i,j],Vxzy[i,j]=
Vxyz[i,j],Vzyx[i,j]=Vxyz[i,j],Vyzx[i,j]=
Vxyz[i,j],Vzxy[i,j]=Vxyz[i,j]
}]]*)

NN = 5;

roar = {rho ->
rho0 + Sum[
rho0^j rhor[j], {j, 4,
NN}]};(*to change rho0 in the development of other variables*)

xyztoR = {x -> Sum[xr[j] rho0^j, {j, 1, NN}],
y -> Sum[yr[j] rho0^j, {j, 1, NN}],
z -> Sum[zr[j] rho0^j, {j, 1, NN + 1}]};
pqrtor = {p -> Sum[pcr[j] rho0^j, {j, 1, NN}],
q -> Sum[qcr[j] rho0^j, {j, 1, NN}], Rho -> rho};

(*the variables are developed IN SERIES OF rho0, not of rho - which \
is a variable itself*)
(*Rho is going to be sent to rho0+ordres by roar*)

(*Xdot is a function of x,y,z, and rho. All these four variables are \
developed in series of rho0, which is the small constant parameter.*)

For[j = 1, j <= NN, j++,
{Xdot[s_][j] =
Coefficient[
rho (u1 + (u1 y - u2 x) (L[1, 1][x, y, z] x +
L[1, 2][x, y, z] y)) /. xyztoR /. roar, rho0^j],
Ydot[s_][j] =
Coefficient[
rho (u2 + (u1 y - u2 x) (L[2, 1][x, y, z] x +
L[2, 2][x, y, z] y)) /. xyztoR /. roar, rho0^j],
Zdot[s_][j] =
Coefficient[
rho ((u1 y - u2 x) (-1/2 + L[3, 1][x, y, z] x +
L[3, 2][x, y, z] y)) /. xyztoR /. roar, rho0^j]
}
]
Zdot[s_][NN + 1] =
Coefficient[
rho ((u1 y - u2 x) (-1/2 + L[3, 1][x, y, z] x +
L[3, 2][x, y, z] y)) /. xyztoR /. roar, rho0^(NN + 1)];

```

(*Recall: we consider $pc=p/r$ and $qc=q/r$, that is why they are order 1*)
 \
 (*moreover, if we consider rho non constant (high orders), then \
 $dp_c/d\tau = 1/r dp/d\tau - 1/r^2 p dr/d\tau = \rho dp/d\tau + p d\rho/d\tau$ *)

```

For[j = 1, j <= NN, j++,
{
  Pdot[s_][j] =
  Coefficient[-u1 Rho y (p L[1, 1][x, y, z] + q L[2, 1][x, y, z] +
    L[3, 1][x, y, z] +
    p (D[L[1, 1][x, y, z], x] x + D[L[1, 2][x, y, z], x] y) +
    q (D[L[2, 1][x, y, z], x] x +
      D[L[2, 2][x, y, z], x] y) + (D[L[3, 1][x, y, z], x] x +
      D[L[3, 2][x, y, z], x] y)) -
  u2 Rho (1/
    2 - (p (L[1, 1][x, y, z] x + L[1, 2][x, y, z] y) +
      q (L[2, 1][x, y, z] x +
        L[2, 2][x, y, z] y) + (L[3, 1][x, y, z] x +
        L[3, 2][x, y, z] y))
  -
  x (p L[1, 1][x, y, z] + q L[2, 1][x, y, z] +
    L[3, 1][x, y, z] +
    p (D[L[1, 1][x, y, z], x] x +
      D[L[1, 2][x, y, z], x] y) +
    q (D[L[2, 1][x, y, z], x] x +
      D[L[2, 2][x, y, z], x] y) + (D[L[3, 1][x, y, z],
      x] x + D[L[3, 2][x, y, z], x] y))) -
  p Rho (u2 x - u1 y) (x D[L[3, 1][x, y, z], z] +
    y D[L[3, 2][x, y, z], z] +
    p (D[L[1, 1][x, y, z], z] x + D[L[1, 2][x, y, z], z] y) +
    q (D[L[2, 1][x, y, z], z] x +
      D[L[2, 2][x, y, z], z] y)) /. xyztoR /. pqrtoR /. roar,
  rho0^j],
  Qdot[s_][j] =
  Coefficient[-u1 Rho (-1/
    2 + (p (L[1, 1][x, y, z] x + L[1, 2][x, y, z] y) +
      q (L[2, 1][x, y, z] x +
        L[2, 2][x, y, z] y) + (L[3, 1][x, y, z] x +
        L[3, 2][x, y, z] y)) +
  y (p L[1, 2][x, y, z] + q L[2, 2][x, y, z] +
    L[3, 2][x, y, z] +
    p (D[L[1, 1][x, y, z], y] x +
      D[L[1, 2][x, y, z], y] y) +
    q (D[L[2, 1][x, y, z], y] x +
      D[L[2, 2][x, y, z], y] y) + (D[L[3, 1][x, y, z],
      y] x + D[L[3, 2][x, y, z], y] y))) -
  u2 Rho (-
    x (p L[1, 2][x, y, z] + q L[2, 2][x, y, z] +
      L[3, 2][x, y, z] +
      p (D[L[1, 1][x, y, z], y] x + D[L[1, 2][x, y, z], y] y) +
      q (D[L[2, 1][x, y, z], y] x +
        D[L[2, 2][x, y, z], y] y) + (D[L[3, 1][x, y, z],
        y] y) + (D[L[3, 2][x, y, z], y] y))
  )
}

```

```

        y] x + D[L[3, 2][x, y, z], y] y))) -
q Rho (u2 x - u1 y) (x D[L[3, 1][x, y, z], z] +
  y D[L[3, 2][x, y, z], z] +
  p (x D[L[1, 1][x, y, z], z] + y D[L[1, 2][x, y, z], z]) +
  q (x D[L[2, 1][x, y, z], z] +
    y D[L[2, 2][x, y, z], z])) /. xyztoR /. pqrtoR /. roar,
rho0^j],
Rhodot[s_][j] =
Coefficient[-Rho^2 (u2 x - u1 y) (x D[L[3, 1][x, y, z], z] +
  y D[L[3, 2][x, y, z], z] +
  p (D[L[1, 1][x, y, z], z] x + D[L[1, 2][x, y, z], z] y) +
  q (D[L[2, 1][x, y, z], z] x + D[L[2, 2][x, y, z], z] y)) /.
  xyztoR /. pqrtoR /. roar, rho0^j]
}
]

```

U = {{1, 0}, {0, 1}, {-1, 0}, {0, -1}, {1, 0}, {0, 1}};

```

For[k = 1, k <= 5, k++,
  Ttau[k] = Sum[tau[k][j] rho0^j, {j, 0, NN + 1}]
]

```

```

(*For[k=1,k\[LessEqual]3,k++,
{x0[1][k]=0,
y0[1][k]=0,
z0[1][k+1]=0,
pp0[1][k]=rho0 p0,
qq0[1][k]=rho0 q0}*) (*???)

```

(*need to integrate rho before the x,y, since the fourth order of x,y \ depends on rho4 - same for phat and qhat*)

```

For[Nt = 1, Nt <= 5, Nt++,
  (*Nt=6;*)
  x[t_][Nt] = If[Nt == 1, 0, x[Ttau[Nt - 1]][Nt - 1]];
  y[t_][Nt] = If[Nt == 1, 0, y[Ttau[Nt - 1]][Nt - 1]];
  z[t_][Nt] = If[Nt == 1, 0, z[Ttau[Nt - 1]][Nt - 1]];
  pc[t_][Nt] = If[Nt == 1, rho0 p0, pc[Ttau[Nt - 1]][Nt - 1]];
  qc[t_][Nt] = If[Nt == 1, rho0 q0, qc[Ttau[Nt - 1]][Nt - 1]];
  rhoo[t_][Nt] = If[Nt == 1, rho0, rhoo[Ttau[Nt - 1]][Nt - 1]];
  {For[k = 1, k <= NN, k++,
    {For[j = 1, j <= k, j++,
      {xr[j] = Coefficient[x[s][Nt], rho0^j],
      yr[j] = Coefficient[y[s][Nt], rho0^j],
      zr[j] = Coefficient[z[s][Nt], rho0^(j)],
      pcr[j] = Coefficient[pc[s][Nt], rho0^(j)],
      qcr[j] = Coefficient[qc[s][Nt], rho0^(j)],
      rhor[j] = Coefficient[rhoo[s][Nt], rho0^j]
      }];
    rhoi[t_][Nt, k] =
      Integrate[

```

```

    Rhodot[s][k] /. {u1 -> U[[Nt, 1]], u2 -> U[[Nt, 2]]}, {s, 0,
    t}];
rhoo[t_][Nt] = rhoo[t][Nt] + rho0^k rhoi[t][Nt, k];
For[j = 1, j <= k, j++,
    rhor[j] = Coefficient[rhoo[s][Nt], rho0^j]
]; (*must reinitialize rhor, as x depends on it, same orders*)

    xi[t_][Nt, k] =
    Integrate[
    Xdot[s][k] /. {u1 -> U[[Nt, 1]], u2 -> U[[Nt, 2]]}, {s, 0,
    t}],
yi[t_][Nt, k] =
    Integrate[
    Ydot[s][k] /. {u1 -> U[[Nt, 1]], u2 -> U[[Nt, 2]]}, {s, 0,
    t}],
zi[t_][Nt, k] =
    Integrate[
    Zdot[s][k] /. {u1 -> U[[Nt, 1]], u2 -> U[[Nt, 2]]}, {s, 0,
    t}],
pci[t_][Nt, k] =
    Integrate[
    Pdot[s][k] /. {u1 -> U[[Nt, 1]], u2 -> U[[Nt, 2]]}, {s, 0,
    t}],
qci[t_][Nt, k] =
    Integrate[
    Qdot[s][k] /. {u1 -> U[[Nt, 1]], u2 -> U[[Nt, 2]]}, {s, 0,
    t}],
x[t_][Nt] = x[t][Nt] + rho0^k xi[t][Nt, k],
y[t_][Nt] = y[t][Nt] + rho0^k yi[t][Nt, k],
z[t_][Nt] = z[t][Nt] + rho0^(k) zi[t][Nt, k],
pc[t_][Nt] = pc[t][Nt] + rho0^k pci[t][Nt, k],
qc[t_][Nt] = qc[t][Nt] + rho0^k qci[t][Nt, k]
}
];
{For[j = 1, j <= NN, j++,
    {xr[j] = Coefficient[x[s][Nt], rho0^j],
    yr[j] = Coefficient[y[s][Nt], rho0^j],
    zr[j] = Coefficient[z[s][Nt], rho0^(j)],
    pcr[j] = Coefficient[pc[s][Nt], rho0^(j)],
    qcr[j] = Coefficient[qc[s][Nt], rho0^(j)],
    rhor[j] = Coefficient[rhoo[s][Nt], rho0^j]
}],
zi[t_][Nt, 6] =
    Integrate[
    Zdot[s][6] /. {u1 -> U[[Nt, 1]], u2 -> U[[Nt, 2]]}, {s, 0,
    t}], (*warning, here we put NN+1\[Equal]6*)

    z[t_][Nt] = z[t][Nt] + rho0^(6) zi[t][Nt, 6];
};
ClearAll[xr, yr, zr, pcr, qcr, rhor];
];
(*****)

SetDirectory[$UserDocumentsDirectory]; \

```

```

SetDirectory["C:\Documents\These\Programmes"]

"C:\Documents\These\Programmes"

{x[t][1], x[t][2], x[t][3], x[t][4], x[t][5],
 x[t][6]} >> xxHOSR; {y[t][1], y[t][2], y[t][3], y[t][4], y[t][5],
 y[t][6]} >> yyHOSR; {z[t][1], z[t][2], z[t][3], z[t][4], z[t][5],
 z[t][6]} >> zzHOSR;

(*FilePrint["C:\Documents\These\Programmes\xxHOSR"] ; \
FilePrint["C:\Documents\These\Programmes\yyHOSR"] \
;FilePrint["C:\Documents\These\Programmes\zzHOSR"] ;*)

{pc[t][1], pc[t][2], pc[t][3], pc[t][4], pc[t][5],
 pc[t][6]} >> ppcHOSR; {qc[t][1], qc[t][2], qc[t][3], qc[t][4],
 qc[t][5], qc[t][6]} >> qqcHOSR; {rhoo[t][1], rhoo[t][2], rhoo[t][3],
 rhoo[t][4], rhoo[t][5], rhoo[t][6]} >> rhooHOSR;

SetDirectory[$UserDocumentsDirectory]; \
SetDirectory["C:\Documents\These\Programmes"]

"C:\Documents\These\Programmes"

(*FilePrint["C:\Documents\These\Programmes\ppcHOSR"] ; \
FilePrint["C:\Documents\These\Programmes\qqcHOSR"] \
;FilePrint["C:\Documents\These\Programmes\rhooHOSR"] ;*)

```

Code Switching-times.nb

Ce programme calcule les jets des temps de commutations pour une géodésique de la classe Γ_f , suivant la procédure expliquée à la page 39.

```

(**computes switching times
requires the output of integration-sys.nb
**)


$$\theta[p_-, q_-, x_-, y_-, z_-] =$$


$$1 - 3 (L[3, 1][x, y, z] x + L[3, 2][x, y, z] y) -$$


$$3 (p (L[1, 1][x, y, z] x + L[1, 2][x, y, z] y) +$$


$$q (L[2, 1][x, y, z] x + L[2, 2][x, y, z] y)) +$$


$$1/2 (x y (L[1, 1][x, y, z] - L[2, 2][x, y, z]) -$$


$$x^2 L[2, 1][x, y, z] + y^2 L[1, 2][x, y, z]) (*1/2 LL*) -$$


$$x (D[L[3, 1][x, y, z], x] x + D[L[3, 2][x, y, z], x] y) -$$


$$y (D[L[3, 1][x, y, z], y] x + D[L[3, 2][x, y, z], y] y) -$$


$$p (x^2 D[L[1, 1][x, y, z], x] + x y D[L[1, 2][x, y, z], x] +$$


$$x y D[L[1, 1][x, y, z], y] + y^2 D[L[1, 2][x, y, z], y]) -$$


$$q (x^2 D[L[2, 1][x, y, z], x] + x y D[L[2, 2][x, y, z], x] +$$


$$x y D[L[2, 1][x, y, z], y] +$$


$$y^2 D[L[2, 2][x, y, z],$$


$$y]) - (x y (L[1, 1][x, y, z] - L[2, 2][x, y, z]) -$$


$$x^2 L[2, 1][x, y, z] +$$


```

```

y^2 L[1, 2][x, y, z]) (L[3, 1][x, y, z] x +
L[3, 2][x, y, z] y) (*LL (L31 x +
L32 y)*)- (x y (L[1, 1][x, y, z] - L[2, 2][x, y, z]) -
x^2 L[2, 1][x, y, z] +
y^2 L[1, 2][x, y,
z]) (p (L[1, 1][x, y, z] x + L[1, 2][x, y, z] y) +
q (L[2, 1][x, y, z] x +
L[2, 2][x, y,
z] y)); (*LL (p/r (L11 x + L12 y)+q/r(L21 x+L22y))*

F1 = Integrate[
Normal[Series[θ[pc[t][1], qc[t][1], x[t][1], y[t][1],
z[t][1]], {rho0, 0, NN}], {t, 0, Ttau[1]}] - (p0 - q0);

τ[1, 0] = p0 - q0;

For[k = 1, k <= NN, k++,
τ[1, k] =
Flatten[tau[1][k] /.
Solve[Coefficient[F1, rho0^k] == 0, tau[1][k]]][[1]]
]

τ[1, 1] = τ[1, 1] /. tau[1][0] -> τ[1, 0];
τ[1, 2] = τ[1, 2] /. tau[1][0] -> τ[1, 0] /.
tau[1][1] -> τ[1, 1];
τ[1, 3] = τ[1, 3] /. tau[1][0] -> τ[1, 0] /.
tau[1][1] -> τ[1, 1] /. tau[1][2] -> τ[1, 2];
τ[1,4] = τ[1, 4] /. tau[1][0] -> τ[1, 0] /.
tau[1][1] -> τ[1, 1] /. tau[1][2] -> τ[1, 2] /.
tau[1][3] -> τ[1, 3];
τ[1,5] = τ[1, 5] /. tau[1][0] -> τ[1, 0] /.
tau[1][1] -> τ[1, 1] /. tau[1][2] -> τ[1, 2] /.
tau[1][3] -> τ[1, 3] /. tau[1][4] -> τ[1, 4];

te1 = {tau[1][0] -> τ[1, 0], tau[1][1] -> τ[1, 1],
tau[1][2] -> τ[1, 2], tau[1][3] -> τ[1, 3],
tau[1][4] -> τ[1, 4], tau[1][5] -> τ[1, 5]}

{tau[1][0] -> p0 - q0, tau[1][1] -> 0,
tau[1][2] -> 4/3 (p0 - q0)^3 ax[3, 1],
tau[1][3] ->
1/24 (32 p0 (p0 - q0)^3 ax[1, 1] + 15 (p0 - q0)^4 ax[2, 1] +
32 (p0 - q0)^3 q0 ax[2, 1] + 15 (p0 - q0)^4 \[Omega]xx[3, 1]),
tau[1][4] ->
1/40 (640/3 (p0 - q0)^5 ax[3, 1]^2 + 8 (p0 - q0)^5 Vxxx[3, 1] +
25 p0 (p0 - q0)^4 \[Omega]xx[1, 1] +
12 (p0 - q0)^5 \[Omega]xx[2, 1] +
25 (p0 - q0)^4 q0 \[Omega]xx[2, 1]),
tau[1][5] ->
1/360 (1920 p0 (p0 - q0)^5 ax[1, 1] ax[3, 1] +
1060 (p0 - q0)^6 ax[2, 1] ax[3, 1] +
1920 (p0 - q0)^5 q0 ax[2, 1] ax[3, 1] +

```

```

72 p0 (p0 - q0)^5 Vxxx[1, 1] + 35 (p0 - q0)^6 Vxxx[2, 1] +
72 (p0 - q0)^5 q0 Vxxx[2, 1] +
1200 (p0 - q0)^6 ax[3, 1] \[Omega]xx[3, 1] +
60 (p0 - q0)^2 ax[3,
1] (32 p0 (p0 - q0)^3 ax[1, 1] + 15 (p0 - q0)^4 ax[2, 1] +
32 (p0 - q0)^3 q0 ax[2, 1] + 15 (p0 - q0)^4 \[Omega]xx[3, 1]))}

```

(*****)

```

τ[2, 0] = 2 p0;

```

```

F2 = Integrate[
Normal[Series[θ[pc[t][2], qc[t][2], x[t][2], y[t][2],
z[t][2]], {rho0, 0, NN}], {t, 0, Ttau[2]}] - 2 p0;

```

```

For[k = 1, k <= NN, k++,
τ[2, k] =
Flatten[tau[2][k] /.
Solve[Coefficient[F2, rho0^k] == 0, tau[2][k]]][[1]]
]
τ[2, 1] = τ[2, 1] /. tau[2][0] -> τ[2, 0] /. te1;
τ[2, 2] = τ[2, 2] /. tau[2][0] -> τ[2, 0] /.
tau[2][1] -> τ[2, 1] /. te1;
τ[2,
3] = τ[2, 3] /. tau[2][0] -> τ[2, 0] /.
tau[2][1] -> τ[2, 1] /. tau[2][2] -> τ[2, 2] /. te1;
τ[2,4] = τ[2, 4] /. tau[2][0] -> τ[2, 0] /.
tau[2][1] -> τ[2, 1] /. tau[2][2] -> τ[2, 2] /.
tau[2][3] -> τ[2, 3] /. te1;
τ[2,5] = τ[2, 5] /. tau[2][0] -> τ[2, 0] /.
tau[2][1] -> τ[2, 1] /. tau[2][2] -> τ[2, 2] /.
tau[2][3] -> τ[2, 3] /. tau[2][4] -> τ[2, 4] /. te1;

te2 = {tau[2][0] -> τ[2, 0], tau[2][1] -> τ[2, 1],
tau[2][2] -> τ[2, 2], tau[2][3] -> τ[2, 3],
tau[2][4] -> τ[1, 4], tau[2][5] -> τ[1, 5]};

```

(*****)

```

τ[3, 0] = 2 p0;

```

```

F3 = Integrate[
Normal[Series[θ[pc[t][3], qc[t][3], x[t][3], y[t][3],
z[t][3]], {rho0, 0, NN}], {t, 0, Ttau[3]}] - 2 p0;

```

```

For[k = 1, k <= NN, k++,
  τ[3, k] =
    Flatten[tau[3][k] /.
      Solve[Coefficient[F3, rho0^k] == 0, tau[3][k]]][[1]]
]
τ[3, 1] = τ[3, 1] /. tau[3][0] -> τ[3, 0] /. te1 /. te2;
τ[3,
  2] = τ[3, 2] /. tau[3][0] -> τ[3, 0] /.
  tau[3][1] -> τ[3, 1] /. te1 /. te2;
τ[3, 3] = τ[3, 3] /. tau[3][0] -> τ[3, 0] /.
  tau[3][1] -> τ[3, 1] /. tau[3][2] -> τ[3, 2] /.
  te1 /. te2;
τ[3, 4] = τ[3, 4] /. tau[3][0] -> τ[3, 0] /.
  tau[3][1] -> τ[3, 1] /. tau[3][2] -> τ[3, 2] /.
  tau[3][3] -> τ[3, 3] /. te1 /. te2;
τ[3, 5] = τ[3, 5] /. tau[3][0] -> τ[3, 0] /.
  tau[3][1] -> τ[3, 1] /. tau[3][2] -> τ[3, 2] /.
  tau[3][3] -> τ[3, 3] /. tau[3][4] -> τ[3, 4] /.
  te1 /. te2;

te3 = {tau[3][0] -> τ[3, 0], tau[3][1] -> τ[3, 1],
  tau[3][2] -> τ[3, 2], tau[3][3] -> τ[3, 3],
  tau[3][4] -> τ[3, 4], tau[3][5] -> τ[3, 5]};

```

(*****)

```

τ[4, 0] = 2 p0;

F4 = Integrate[
  Normal[Series[θ[pc[t][4], qc[t][4], x[t][4], y[t][4],
    z[t][4]], {rho0, 0, NN}], {t, 0, Ttau[4]}] - 2 p0;

For[k = 1, k <= NN, k++,
  τ[4, k] =
    Flatten[tau[4][k] /.
      Solve[Coefficient[F4, rho0^k] == 0, tau[4][k]]][[1]]
]
τ[4, 1] = τ[4, 1] /. tau[4][0] -> τ[4, 0] /. te1 /. te2 /. te3;
τ[4, 2] = τ[4, 2] /. tau[4][0] -> τ[4, 0] /.
  tau[4][1] -> τ[4, 1] /. te1 /. te2 /. te3;
τ[4, 3] = τ[4, 3] /. tau[4][0] -> τ[4, 0] /.
  tau[4][1] -> τ[4, 1] /. tau[4][2] -> τ[4, 2] /.
  te1 /. te2 /. te3;
τ[4, 4] = τ[4, 4] /. tau[4][0] -> τ[4, 0] /.
  tau[4][1] -> τ[4, 1] /. tau[4][2] -> τ[4, 2] /.
  tau[4][3] -> τ[4, 3] /. te1 /. te2 /. te3;
τ[4, 5] = τ[4, 5] /. tau[4][0] -> τ[4, 0] /.
  tau[4][1] -> τ[4, 1] /. tau[4][2] -> τ[4, 2] /.
  tau[4][3] -> τ[4, 3] /. tau[4][4] -> τ[4, 4] /.
  te1 /. te2 /. te3;

```

```

te4 = {tau[4][0] -> τ[4, 0], tau[4][1] -> τ[4, 1],
      tau[4][2] -> τ[4, 2], tau[4][3] -> τ[4, 3],
      tau[4][4] -> τ[4, 4], tau[4][5] -> τ[4, 5]};

(*****)

τ[5, 0] = 2 p0;

xtrunc[t_][5] =
  Normal[Series[
    x[t][5], {rho0, 0,
    5}]]; (*computation is too long; need to truncate some useless \
parts in order to be able to integrate Theta*)

ytrunc[t_][5] = Normal[Series[y[t][5], {rho0, 0, 5}]];
ztrunc[t_][5] = Normal[Series[z[t][5], {rho0, 0, 5}]];
ptrunc[t_][5] = Normal[Series[pc[t][5], {rho0, 0, 5}]];
qtrunc[t_][5] = Normal[Series[qc[t][5], {rho0, 0, 5}]];

θ5tru = θ[ptrunc[t][5], qtrunc[t][5], xtrunc[t][5],
  ytrunc[t][5], ztrunc[t][5]];

Coefficient[θ5tru*rho0, rho0]

1

Ff5[1] = Integrate[%, {t, 0, Ttau[5]}] - 2 p0

-2 p0 + tau[5][0] + rho0 tau[5][1] + rho0^2 tau[5][2] +
rho0^3 tau[5][3] + rho0^4 tau[5][4] + rho0^5 tau[5][5] +
rho0^6 tau[5][6]

Coefficient[θ5tru, rho0];

Ff5[2] = Integrate[%, {t, 0, Ttau[5]}];

Coefficient[θ5tru, rho0^2];

Ff5[3] = Integrate[%, {t, 0, Ttau[5]}];

Coefficient[θ5tru, rho0^3];

Ff5[4] = Integrate[%, {t, 0, Ttau[5]}];

Coefficient[θ5tru, rho0^4];

```

```

Ff5[5] = Integrate[%, {t, 0, Ttau[5]};

Coefficient[05tru, rho0^5];

Ff5[6] = Integrate[%, {t, 0, tau[5][0]};

(*F5=Integrate[Normal[Series[05tru,{rho0,0,NN}],{t,0,Ttau[5]}\
-2p0;*)
F5 = Sum[Ff5[j] rho0^(j - 1), {j, 1, 6}];

For[k = 1, k <= NN, k++,
  tau[5, k] =
    Flatten[tau[5][k] /.
      Solve[Coefficient[F5, rho0^k] == 0, tau[5][k]]][[1]]
]
tau[5, 1] = tau[5, 1] /. tau[5][0] -> tau[5, 0] /. te1 /. te2 /.
  te3 /. te4;
tau[5, 2] = tau[5, 2] /. tau[5][0] -> tau[5, 0] /.
  tau[5][1] -> tau[5, 1] /. te1 /. te2 /. te3 /. te4;
tau[5, 3] = tau[5, 3] /. tau[5][0] -> tau[5, 0] /.
  tau[5][1] -> tau[5, 1] /. tau[5][2] -> tau[5, 2] /.
  te1 /. te2 /. te3 /. te4;
tau[5, 4] = tau[5, 4] /. tau[5][0] -> tau[5, 0] /.
  tau[5][1] -> tau[5, 1] /. tau[5][2] -> tau[5, 2] /.
  tau[5][3] -> tau[5, 3] /. te1 /. te2 /. te3 /. te4;
tau[5, 5] = tau[5, 5] /. tau[5][0] -> tau[5, 0] /.
  tau[5][1] -> tau[5, 1] /. tau[5][2] -> tau[5, 2] /.
  tau[5][3] -> tau[5, 3] /. tau[5][4] -> tau[5, 4] /.
  te1 /. te2 /. te3 /. te4;

te5 = {tau[5][0] -> tau[5, 0], tau[5][1] -> tau[5, 1],
  tau[5][2] -> tau[5, 2], tau[5][3] -> tau[5, 3],
  tau[5][4] -> tau[5, 4], tau[5][5] -> tau[5, 5]};

(*****)

SetDirectory[$UserDocumentsDirectory]; \
SetDirectory["C:\Documents\These\Programmes"]

"C:\Documents\These\Programmes"

{Sum[rho0^k tau[1, k], {k, 0, NN}],
  Sum[rho0^k tau[2, k], {k, 0, NN}],
  Sum[rho0^k tau[3, k], {k, 0, NN}],
  Sum[rho0^k tau[4, k], {k, 0, NN}],
  Sum[rho0^k tau[5, k], {k, 0, NN}]} >> swtimHOSR

```

```
Table[τ[i, k], {i, 1, 5}, {k, 1, NN}] >> TabtimeHOSR

(*FilePrint["C:\Documents\These\Programmes\TabtimeHOSR"] *)
```

Code susp5.nb

Ce programme calcule la suspension sur le plan $\{z = 4\zeta^2\}$ du front \mathcal{F}_5 .

```
(*COMPUTES THE FIFTH FRONTS*)
(*STOCKS THE RESULTS IN Fro5f*)

nb = NotebookOpen["C:\Documents\These\Programmes\INIT.nb"];
SelectionMove[nb, All, Notebook]
SelectionEvaluate[nb]

(*Time reparametrisation*)

Pro = {rho0 -> ζ + r25 ζ^2 + r35 ζ^3 + r45 ζ^4 +
      r55 ζ^5}; (*knowing already that z[5]=4 rho0^2+0(rho0^3), fixing \
r15=1*)
Treal4 =
  TRe[Ttau[1]][1] + TRe[Ttau[2]][2] + TRe[Ttau[3]][3] + TRe[Ttau[4]][4] +
  TRe[Sum[δ[k] rho0^k, {k, 0, NN}]] [5] /. Tem;
(*the functions TRe contain already rho0 inside, they indeed give the REAL \
time *)
Sw5 =
  Treal4 /. p0 -> 1 /.
  Pro;(*we put the time equal to T1ζ+T2 ζ^2+T3 ζ^3+T4 \
ζ^4+T5 ζ^5*)

Coefficient[Sw5, ζ]

7 - q0 + δ[0]

Solve[% == T1, δ[0]]

Coefficient[Sw5 /. r15 -> 1 /. δ[0] -> -7 + q0 + T1, ζ^2]

6 r25 + (1 - q0) r25 + r25 (-7 + q0 + T1) + δ[1]

DT1 = Flatten[Solve[% == T2, δ[1]]]

Coefficient[Sw5 /. DT1 /. r15 -> 1 /. δ[0] -> -7 + q0 + T1, ζ^3];
```

```

DT2 = Flatten[Solve[% == T3, δ[2]]];

Coefficient[
  Sw5 /. DT1 /. DT2 /. r15 -> 1 /. δ[0] -> -7 + q0 + T1, ζ^4];

DT3 = Flatten[Solve[% == T4, δ[3]]];

Coefficient[
  Sw5 /. DT1 /. DT2 /. DT3 /.
  r15 -> 1 /. δ[0] -> -7 + q0 + T1, ζ^5];

DT4 = Flatten[Solve[% == T5, δ[4]]];

Time5 = {δ[0] -> -7 + q0 + T1, DT1[[1]], DT2[[1]], DT3[[1]], DT4[[1]]};

(*fifth switch*)

(*Suspension*)

Coefficient[z[t][5], rho0^2] rho0^2 + Coefficient[z[t][5], rho0^3] rho0^3 +
  Coefficient[z[t][5], rho0^4] rho0^4 + Coefficient[z[t][5], rho0^5] rho0^5 +
  Coefficient[z[t][5],
    rho0^6] rho0^6; (*avoiding higher orders that in any case are not \
reliable*)

ZZ5 = % /.
  t -> Sum[δ[j] rho0^j, {j, 0,
    5}]; (*evaluating at some perturbation of the time*)

% /. Tem;

% /. Time5;

Zfro5 = % /. Pro /. p0 -> 1;

Coefficient[Zfro5, ζ^2]

4

Coefficient[Zfro5, ζ^3];

Solve[% == 0, r25];

Coefficient[Zfro5 /. r25 -> 0, ζ^4];

R35 = Flatten[Solve[% == 0, r35]];

Coefficient[Zfro5, ζ^5] /. r25 -> 0 /. R35;

```

```

R45 = Flatten[Solve[% == 0, r45]];

Coefficient[Zfro5, ζ^6] /. r25 -> 0 /. R35 /. R45;

R55 = Flatten[Solve[% == 0, r55]];

Prog5 = {r15 -> 1, r25 -> 0, R35[[1]], R45[[1]], R55[[1]]};

Zfro5 = Sum[Coefficient[z[t][5], rho0^k] rho0^k, {k, 1, NN + 1}] /.
  t -> Sum[δ[j] rho0^j, {j, 0, 5}] /. Time5 /. Tem /. Pro /.
  Prog5 /. p0 -> 1;

Xfro5 = Coefficient[x[t][5], rho0] rho0 +
  Coefficient[x[t][5], rho0^2] rho0^2 +
  Coefficient[x[t][5], rho0^3] rho0^3 +
  Coefficient[x[t][5], rho0^4] rho0^4 +
  Coefficient[x[t][5], rho0^5] rho0^5 /.
  t -> Sum[δ[j] rho0^j, {j, 0, 5}] /. Tem /. Time5 /. Pro /.
  Prog5 /. p0 -> 1;

Yfro5 = Coefficient[y[t][5], rho0] rho0 +
  Coefficient[y[t][5], rho0^2] rho0^2 +
  Coefficient[y[t][5], rho0^3] rho0^3 +
  Coefficient[y[t][5], rho0^4] rho0^4 +
  Coefficient[y[t][5], rho0^5] rho0^5 /.
  t -> Sum[δ[j] rho0^j, {j, 0, 5}] /. Tem /. Time5 /. Pro /.
  Prog5 /. p0 -> 1;

```

Notations

M	variété différentielle
TM	fibré tangent à la variété M
T^*M	fibré cotangent à la variété M
π	projection canonique de T^*M à M
φ_*	application différentielle (<i>push-forward</i>) de l'application φ
$[X, Y]$	crochets de Lie entre les champs de vecteurs X, Y sur M
$\{F, G\}$	paranthèses de Poissons des fonctions $F, G : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$
$\exp(tf)$	flot du champ de vecteurs f du temps 0 au temps t
$\mathcal{O}(t)$	“grands ordres” de t
$o(t)$	“petits ordres” de t
$[\Sigma]_k$	coefficient d'ordre k (si Σ est une série de puissances)
$\mathbb{T}_k(\mathbf{p})$	k -ème temps de commutation de la géodésique associée à l'extremale $\lambda(0) = (\mathbf{p}, 0, 0, 0)$
Γ	classe de géodésiques, définie à la page 40
$\mathcal{F}_k(\mathbf{T}), \bar{\mathcal{F}}_k(\mathbf{T})$	“ k -ème front bang” (au temps \mathbf{T}) des géodésiques de la classe Γ_f, Γ_{-f} (voir page 52)
$\mathcal{G}_k(\mathbf{T}), \bar{\mathcal{G}}_k(\mathbf{T})$	“ k -ème front bang” (au temps \mathbf{T}) des géodésiques de la classe Γ_g (voir page 52)

Bibliographie

- [1] R. Abraham and J.E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. AMS Chelsea publishing. AMS Chelsea Pub./American Mathematical Society, 2008.
- [2] A. Agrachev, G. Stefani, and P. Zezza. Strong optimality for a bang-bang trajectory. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(4) :991–1014, 2002.
- [3] A. A. Agrachev, El-H. Chakir El-A., and J.-P. Gauthier. Sub-Riemannian metric on \mathbb{R}^3 . In *Canadian Mathematical Society*, volume 25, 1998.
- [4] A. A. Agrachev, El-H. Chakir EL-Alaoui, J.-P. Gauthier, and I. Kupka. Generic singularities of sub-Riemannian metrics on \mathbb{R}^3 . *Comptes-Rendus de l'Académie Sci., Paris*, pages 377–384, 1996.
- [5] A. A. Agrachev and R. V. Gamkrelidze. *NonLinear Controllability and Optimal Control*, chapter Symplectic Geometry for Optimal Control. Routledge, 2017.
- [6] A. A. Agrachev and Yu. L. Sachkov. *Control Theory from the Geometric Viewpoint*. Springer-Verlag, 2004.
- [7] A.A. Agrachev, D. Barilari, and U. Boscain. *A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry*. Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2019.
- [8] A.A. Agrachev, G. Charlot, J.-P. Gauthier, and V. M. Zakalyukin. On subriemannian caustics and wave fronts, for contact distributions in the three-space. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 6(3) :365–395.
- [9] A.A. Agrachev and J.P. Gauthier. On the Dido Problem and plane isoperimetric problems. *Acta Applicandae Mathematicae*, 57 :287–338, 1999.
- [10] E. A.L. Ali and G. Charlot. Local (sub)-Finslerian geometry for the maximum norms in dimension 2. *J. Dyn. Control. Syst.*, (25) :457–490, 2019.
- [11] E. A.L. Ali and G. Charlot. Local contact sub-Finslerian geometry for maximum norms in dimension 3. *Mathematical Control & Related Fields*, 0, 2020.
- [12] A.A. Ardentov, E. Le Donne, and Y.L. Sachkov. A sub-Finsler problem on the Cartan group. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 304 :42–59, 2019.
- [13] V. Arnold. *Singularities of Caustics and Wave Fronts*. Mathematics and its Applications. Springer Netherlands, 1990.
- [14] D. Barilari, U. Boscain, E. Le Donne, and M. Sigalotti. Sub-Finsler geometry from the time-optimal control viewpoint for some nilpotent distributions. *J. Dyn. Control Syst.*, 3(3) :547–575, 2017.
- [15] B. Bonnet, J.-P. Gauthier, and F. Rossi. Generic singularities of the 3D-contact sub-Riemannian conjugate locus. *Comptes Rendus Mathématique*, 357(6) :520–527, 2019.
- [16] E. Breuillard and E. Le Donne. On the rate of convergence to the asymptotic cone for nilpotent groups and subfinsler geometry. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 110(48) :19220–19226, 2013.

- [17] El-H. Chakir E-Alaoui, J.-P. Gauthier, and I. Kupka. Small sub-Riemannian balls on R^3 . *Journal of dynamical and control systems*, 2(3) :359–421.
- [18] G. Charlot. Quasi-contact S-R metrics : normal form in R^{2n} , wave front and caustic in R^4 . *Acta Applicandae Mathematicae*, 74(3) :217–263.
- [19] J. N. Clelland and C. G. Moseley. Sub-Finsler geometry in dimension three. *Differential Geometry and its Applications*, 24(6) :628 – 651, 2006.
- [20] J. N. Clelland, C. G. Moseley, and G. R. Wilkens. Geometry of sub-Finsler Engel manifolds. *Asian J. Math*, 11(4) :699 – 726, 2007.
- [21] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential Topology*. AMS Chelsea Publishing. AMS Chelsea Pub., 2010.
- [22] F. Harrache, F.C. Chittaro, and M. Aidène. Local L^1 sub-Finsler geometry in dimension 3 : non-generic cases. 2021.
- [23] F. Harrache, F.C. Chittaro, J.-P. Gauthier, and M. Aidène. Cut locus of L^1 sub-Finsler problems in R^3 : two case studies. In *5th International Conference on Mathematics “An Istanbul Meeting for World Mathematicians”*, 2021.
- [24] F. Jean. *Control of Nonholonomic Systems : from Sub-Riemannian Geometry to Motion Planning*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, 2014.
- [25] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, 2006.
- [26] L. V. Lokutsievskiy. Convex trigonometry with applications to sub-Finsler geometry. *Sbornik : Mathematics*, 210(8) :1179–1205, 2019.
- [27] R. Montgomery. *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*. American Mathematical Society, 2006.
- [28] L. Poggiolini and G. Stefani. State-local optimality of a bang-bang trajectory : a Hamiltonian approach. *System and Control Letters*, 53, 2004.
- [29] J.W. Rutter. *Geometry of Curves*. Chapman Hall/CRC Mathematics Series. CRC Press, 2018.
- [30] L. Sacchelli. Short geodesics losing optimality in contact sub-Riemannian manifolds and stability of the 5-dimensional caustic. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 57(4) :2362–2391, 2019.
- [31] M. Sigalotti. Bounds on time-optimal concatenations of arcs for two-input driftless 3D systems. In *Proceedings of the 21st IFAC Control Conference*, 2020.
- [32] G. Stefani and P. Zezza. *Variational Methods in Imaging and Geometric Control*, chapter A Hamiltonian approach to sufficiency in optimal control with minimal regularity conditions : Part I. De Gruyter, 2016.

Lés métriques sous-Finslériennes en dimension 3**Résumé en français**

Dans cette thèse, nous étudions la géométrie locale des structures sous-Finslériennes de type L^1 en dimension 3. Localement, ce problème peut être formulé comme un problème du temps minimum pour le système de contrôle

$$\dot{\xi}(t) = u_1(t) f(\xi(t)) + u_2(t) g(\xi(t))$$

où (f, g) sont des champs de vecteurs, tels que $\{f, g, [f, g]\}$ est une base de \mathbf{R}^3 autour d'un point q_0 , et les contrôles u_1, u_2 sont des fonctions mesurables telles que $|u_1(t)| + |u_2(t)| \leq 1$ pour tout t . Nous étudions les objets géométriques suivants : *petites sphères, géodésiques courtes, lieu conjugué, lieu de coupure*.

Sous l'hypothèse que la métrique sous-Finslérienne soit compatible avec une métrique sous-Riemannienne, nous pouvons écrire une forme normale pour les champs de vecteurs f, g et définir sept invariants de la métrique, nommés $A, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$, et donner une description de la « calotte supérieure » des petites sphères, dans le cas non-générique où $C_1=0$, les autres invariants non-nuls.

Mot clés : Lieu de coupure, temps conjugué, optimalité locale et globale

Sub-Finsler metrics in dimension 3**Résumé en anglais**

In this thesis, we study the local geometry of L^1 sub-Finsler structures in dimension 3. Locally, this problem can be formulated as a minimum time problem for the control system

$$\dot{\xi}(t) = u_1(t) f(\xi(t)) + u_2(t) g(\xi(t))$$

where (f, g) are vector fields, such that $\{f, g, [f, g]\}$ is a basis of \mathbf{R}^3 around a point q_0 , and the controls u_1, u_2 are measurable functions such as $|u_1(t)| + |u_2(t)| \leq 1$ for all t . We study the following geometric objects: *small spheres, short geodesics, conjugate locus, cut locus*. Under the assumption that the sub-Finsler metric is compatible with a sub-Riemannian metric, we can write a normal form for the vector fields f, g and define seven invariants of the metric, called $A, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$, and give a description of the "upper cap" of the small spheres, in the non-generic case where $C_1=0$, the other invariants are non-zero.

Keywords : Cut locus, conjugate time, local and global optimality.