HAL open science

Façonnage d'ondes de matière dans un réseau optique dépendant du temps : du chaos quantique au contrôle quantique

Gabriel Chatelain

▶ **To cite this version:**

Gabriel Chatelain. Façonnage d'ondes de matière dans un réseau optique dépendant du temps : du chaos quantique au contrôle quantique. Gaz Quantiques [cond-mat.quant-gas]. Université Toulouse 3 - Paul Sabatier, 2021. Français. NNT : . tel-03700049v1

HAL Id: tel-03700049

https://hal.science/tel-03700049v1

Submitted on 1 Jul 2022 (v1), last revised 20 Jun 2022 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse 3 - Paul Sabatier

Présentée et soutenue par

Gabriel CHATELAIN

Le 15 octobre 2021

Façonnage d'ondes de matière dans un réseau optique dépendant du temps : du chaos quantique au contrôle quantique

---

Ecole doctorale : **SDM - SCIENCES DE LA MATIERE - Toulouse**

Spécialité : **Physique de la Matière**

Unité de recherche :
LCAR-IRSAMC - Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité

Thèse dirigée par
David GUERY-ODELIN

Jury
Mme Mathilde Hugbart, Rapporteure
M. Denis Boiron, Rapporteur
M. Sylvain Capponi, Examinateur
M. Romain Dubessy, Examinateur
M. David GUERY-ODELIN, Directeur de thèse

À mon frère.
À mes parents.

Remerciements

Ça y est... Je suis de l'autre côté !

Le manuscrit est écrit, la soutenance est passée : toutes les échéances sont derrière moi. Je peux enfin prendre le temps de remercier tous ceux que j'ai rencontré lors ces trois dernières années, presque quatre à vrai dire, et qui ont contribué à rendre agréable cette "aventure humaine" qu'est la thèse.

Tout d'abord, je souhaite remercier mon jury de thèse d'avoir pris le temps d'évaluer mon travail avec attention. Je remercie mes rapporteurs, plus précisément Mathilde Hugbart, auprès de qui je tiens à m'excuser d'ajouter ces quelques pages aux nombreuses déjà présentes dans ce manuscrit, et Denis Boiron : merci à vous pour vos lectures attentives et tous vos commentaires constructifs ! Je remercie également mes examinateurs, Sylvain Capponi et Romain Dubessy pour leur investissement dans l'examen de mon travail.

Merci ensuite à l'équipe Atomes Froids du LCAR, ceux qui étaient là avant moi et ceux que j'ai pu voir arriver !

Merci David ! Depuis ce premier contact en fin de master et jusqu'à aujourd'hui, tu n'as cessé de m'impressionner par tes incroyables raisonnements de physique et ta capacité à donner de la motivation aux personnes qui t'entourent. Plusieurs fois au cours de ces trois ans, quelques minutes te suffisaient pour nous redonner le moral et nous convaincre que nous avancions dans la bonne direction. Tu as le recul nécessaire pour savoir "qu'il y a peut-être une carte à jouer" ou que tel sujet "ne sera pas pertinent pour un article... mais pour une thèse par contre...". J'ai l'impression que ton enthousiasme pour la physique est resté le même depuis toujours, par ton goût des effets et des phénomènes "rigolos" que l'on peut observer lorsque l'on étudie les atomes froids. Tu as toujours pris le temps de nous écouter quand nous avions des questions et ton encadrement a été exemplaire tout au long de cette thèse. Merci encore !

Merci Juliette pour ton encadrement qui, de même, a été si précieux tout au long de ces trois dernières années ! Merci d'avoir pris le temps de gérer le doctorant parfois un peu trop tumultueux que j'ai été et de m'avoir doucement remis sur le chemin quand c'était nécessaire. Merci pour toutes ces anecdotes que tu nous as partagées, pour toutes ces discussions, autour du travail comme de la vie en général, et pour ton sens de l'organisation du travail en équipe. Merci pour les innombrables fois où tes conseils nous ont débloqués d'une situation difficile en salle de manip et merci d'avoir pris tout ce temps pour m'encourager et me corriger dans ma rédaction.

Bruno, tu es arrivé à la fin de ma première année de thèse et j'ai été surpris par la rapidité avec laquelle tu t'es approprié tous les sujets de nos travaux. De n'importe quel problème en salle de manip à n'importe quel sujet de théorie, on a l'impression que rien ne te résiste bien longtemps. Ton sens de la rigueur et du travail bien fait m'ont beaucoup inspiré et j'espère un jour réussir

à avoir le quart du tiers d'un esprit critique aussi aiguisé. Aussi, tu as compris que j'avais une manière très visuelle de comprendre les choses et que j'aimais me faire des images simples des systèmes que nous étudions. La preuve en est que la plupart des schémas que tu m'as dessiné au tableau se sont retrouvés dans ce manuscrit. Je te suis reconnaissant d'avoir pris tout ce temps pour m'encourager, me corriger, me faire répéter ma soutenance (en français et en anglais) ! Mille mercis encore !

À ce trio de choc, je ne peux qu'envisager un avenir rempli de belle physique, surtout avec ce magnifique nouveau bâtiment qui se termine au moment où j'écris ces mots !

Merci ensuite à tous nos collaborateurs qui nous ont épaulés dans nos recherches pendant ces dernières années ! Merci à Gabriel Lemarié et Bertrand Georgeot pour leur travaux théoriques préliminaires sur l'effet tunnel assisté par le chaos avec qui nous avons énormément échangé. Spécial remerciement à Bertrand pour toutes les anecdotes que tu nous racontais lors d'un repas ou d'une pause café. Celles-ci sont devenues de véritables légendes parmi les doctorants. Merci à Olivier Giraud et Denis Ullmo qui complètent ce duo de chaos quantique et sans qui toute cette étude sur le CAT aurait beaucoup moins bien fonctionné. Merci beaucoup à vous ! Merci à Dominique Sugny pour son travail remarquable sur le contrôle optimal. J'ai été impressionné par la légèreté ressentie lors de nos réunions, la rapidité à identifier le contexte de notre expérience et les outils de contrôle si puissants que tu nous as fourni. Enfin, merci à Peter Schlageck avec qui nous avons collaboré sur tellement de sujets pendant toute ma thèse. La rigueur avec laquelle tu les abordes m'aura fasciné dès la première réunion que j'ai faite avec toi. Merci pour toute cette belle physique !

Je remercie à présent le nerf de la guerre : tous les doctorants et postdocs avec qui j'ai pu passer tellement de temps lors cet épisode toulousain et qui m'ont réellement, lentement mais sûrement, transformé en quelqu'un d'autre.

Maxime Arnal, tu m'as tout appris sur notre dispositif expérimental et tu as toujours su répondre à mes très (très) nombreuses questions que j'ai pu avoir en arrivant. La passion que tu as pour le domaine des atomes froids est vraiment contagieuse et m'a donné envie de m'investir tout au long des années que nous avons passé côte à côte. La rigueur et le sérieux que tu as dans ton travail sont de grosses sources d'inspiration pour moi ! Merci pour tous les bons moments qu'on a passé au labo (les prises de données/pizzas) et en dehors (en camping le long du canal du midi, au ski dans les Pyrénées...). Merci !

Nathan, tu es sans doute l'une des personnalités les plus créatives que j'ai rencontré. Ta manière d'aborder un problème, peu importe le domaine, avec calme et patience, tes raisonnements, au-

tant sur nos recherches que sur des questions plus éloignées et ton authenticité m'ont beaucoup apporté. Ton humour aiguisé a aussi définitivement trouvé un bon public : il n'y a pas un jour que j'ai pu passer avec toi sans rire et je ne soulignerai jamais assez l'importance que ça représente pour moi. Merci pour ta vivacité d'esprit, ta bonne humeur et tous les moments partagés en dehors du labo. Merci !

Maxime Martinez, je pense que sans toi, aujourd'hui encore nous serrions en train d'errer entre des résonances CAT, exténués par la prise de données... C'est dire de l'impact que tu as eu sur ce projet. Merci pour toutes ces discussions de physique, sur la recherche et sur la vie (devant le tutti pizza). Merci pour l'initiation à la course à pied, pour les innombrables après-midis et soirées jeux de société/Koh Lanta ainsi que pour la soirée d'intégration dans le Tarn (qui reste un souvenir mémorable !) ! Ça a été un vrai un plaisir de travailler avec toi ! Merci !

Eric, merci de m'avoir accueilli dans l'équipe lors de mon stage. Je garde un super souvenir des après-midis d'été, rédaction pour toi et bibliographie pour moi, côte à côte dans le bureau, où l'expression "lourd de ouf" est définitivement entrée dans mon vocabulaire quotidien !

Lucas, tu t'es adapté à notre équipe comme un poisson dans l'eau. Je garde un très bon souvenir des prises de données pour le "BEC printer" qu'on a pu faire et merci pour toutes les musiques que tu nous as fait découvrir en salle de manip.

Et tous mes encouragements à Floriane qui a rejoint l'équipe au début de la rédaction de ce manuscrit. Tu vas tout déchirer !

Ensuite, je remercie tous les autres doctorants et postdocs du bâtiment 3R1.

Hugo, quel chemin parcouru depuis cette discussion dans la cantine du CNRS. Je ne compte plus les heures d'escalade faites ensemble (dire que tu avais le vertige au début... et qu'aujourd'hui les voies de 35 mètres sont devenues banales pour toi !), les soirées passées ensemble, à discuter de la vie ou dans le son, et toutes les aventures qu'on a vécu ! Merci d'avoir été là pendant cette thèse, dans les moments difficiles comme dans les meilleurs. L'expérience aurait été vraiment différente sans toi ! Mille mercis encore !

Romain, tu incarnes vraiment la phrase "avoir le goût de l'effort" ! J'admire ton positivisme, ta bonne humeur permanente, ta motivation et ton authenticité. J'ai adoré aller courir avec toi, sur les collines de Peche-David comme dans les canyons de l'Aveyron (un grand merci pour ce trail mémorable), et pour l'envie que tu m'as transmis d'éventuellement, peut être un jour, me mettre à la musique... Il me reste encore du chemin à parcourir sur cette voie. Merci encore pour tout !

Ashley et Tanguy, merci de nous avoir dépanné tout ce matériel... qu'on est venu vous piquer ! Merci pour les discussions d'atomes froids qu'on a eu et pour cette superbe session de squash qui m'a véritablement lessivé.

Faedi, je remercie tout d'abord le premier Faedi, celui du labo, pour ton envie de partager ta passion de la physique et des mathématiques, les cours que tu as échafaudés pour nous et pour toutes les pauses-café qu'on a partagées. Je remercie aussi le deuxième Faedi, celui qui met des gants de boxe, de m'avoir fait découvrir le monde des sports de combat et pour tous les entrainements faits ensemble, du jardin des plantes à la salle de Saint-Michel ! Merci Faedi !

Qi, merci de m'avoir appris et corrigé ma prononciation du Chinois ! Tu as été une véritable source de motivation pour apprendre cette langue. Merci pour ta bonne humeur permanente et d'avoir supporté les très (très) nombreux moments de déconne que l'on t'a fait subir dans le bureau avec Nathan ! Merci pour tout !

Et merci à tous les autres : Olivier Torresin en particulier pour les "pied-bouche" criés dans les couloirs du labo, Olivier Gauthé en particulier pour les débats sur le glyphosate, Julien en particulier pour les débats avec Olivier Gauthé, Julie pour Scientilivre et aussi Ulysse, Vincent, Mickael, Adrien, Jordan, Claire, Yassir, Juraj, Nicolas et tous ceux que j'ai peut-être oublié... Merci à vous ! Merci aux stagiaires, Sébastien en M1 et M2, Jérémy en M2 et Maxime en L2, qui sont passés par notre équipe ! Travailler avec vous a été un vrai plaisir !

Et qu'aurait été cette thèse sans tous ceux que j'ai rencontrés par-delà le labo ? Sans toute la multitude de rencontres qui se sont transformées en de véritables amitiés ? Sans ceux qui m'ont aidés dans les moments difficiles ? Dans les moments où le moral n'était tout simplement plus au rendez-vous ? Sans ceux avec qui j'ai pu partager tellement de beaux moments à rire, à grimper, à courir, à faire la fête de jour comme de nuit ? Qu'auraient été tous ces mois sans le soutient de ces personnes ? Qu'aurait été le souvenir que je garderai de cette période sans toutes ces rencontres ? L'histoire aurait été drastiquement différente. Seulement, avec des "si" on coupe du bois mais on ne refait pas le monde... Alors d'une traite je remercie Alice, Ambre, Antoine, Aurélien, Axel, Baloo, Chloé, Claire, Elia, Florent, Guillaume, Guiquon, Hugo mon copain l'informaticien, Jean, Jean-Jean, Justine, Karl, Kévin, Maher, Marine, Marion, Marjo, Podio, Robin, Thibaud, Xiména... Et tous ceux que j'ai peut-être oublié.

Ma famille reçoit aussi un immense lot de remerciements et de gratitude pour m'avoir encouragé toutes ces années et d'avoir été présente dans les moments où j'en avais besoin. Mille mercis à vous d'avoir été là !

Enfin, mes ultimes remerciements vont à celle sans qui tout cela n'aurait simplement jamais eu lieu. Merci Célia !

Table des matières

Table des matières 9

Table des figures 14

Liste des tableaux 18

Légende des schémas optiques 19

1 Introduction générale 21

I Dispositif expérimental 27

2 Production de condensats de Bose-Einstein 29

2.1 Introduction 30

2.2 Rappel sur la condensation de Bose-Einstein 32

2.2.1 Description de Bose et Einstein : le gaz idéal 32

2.2.1.1 Description du modèle 32

2.2.1.2 Densité dans l'espace des phases 34

2.2.2 Description de Gross et Pitaevskii : le gaz en interaction 38

2.2.2.1 Description du modèle 39

2.2.2.2 Gaz en interaction dans un piège harmonique 40

2.3 Dispositif expérimental 43

2.3.1 Piège magnéto-optique et refroidissement Doppler 46

2.3.1.1 Principe de fonctionnement 46

2.3.1.2 Mise en œuvre expérimentale 51

2.3.1.3 Le piège magnéto-optique 2D 53

2.3.1.4 Le piège magnéto-optique 3D 54

2.3.2 Pièges conservatifs et refroidissement par évaporation 56

2.3.2.1 Refroidissement par évaporation dans le piège magnétique 56

2.3.2.2 Refroidissement par évaporation dans le piège hybride 60

2.3.3 Système d'imagerie 64

2.3.3.1 Principe de l'imagerie par absorption 64
2.3.3.2 Mise en œuvre expérimentale 65
2.4 Conclusion 67

3 Réseau optique 69
3.1 Introduction 70
3.2 Théorie des réseaux optiques 72
3.2.1 Mouvement d'une particule classique dans un réseau optique 72
3.2.1.1 Equations d'Hamilton 72
3.2.1.2 L'espace des phases 73
3.2.2 Evolution d'une fonction d'onde dans un réseau optique 76
3.2.2.1 Le théorème de Bloch 77
3.2.2.2 Structure de bande 77
3.3 Mise en œuvre expérimentale et utilisation du réseau optique 81
3.3.1 Présentation du montage expérimental 81
3.3.2 Chargement du réseau 83
3.3.3 Mesure de l'état préparé 84
3.3.4 Calibration de la profondeur du réseau optique 86
3.3.4.1 Calibration préliminaire : diffraction de Kapitza-Dirac dans l'approximation de Raman Nath 86
3.3.4.2 Calibration par micro-oscillations 88
3.4 Modulation périodique du réseau 91
3.4.1 Transfert d'énergie 91
3.4.1.1 Transitions verticales 91
3.4.1.2 Règles de sélection pour la modulation d'amplitude en $k = 0$ 92
3.4.1.3 Règles de sélection pour la modulation de phase en $k = 0$ 95
3.4.1.4 Terme de couplage en $k \neq 0$ 98
3.4.1.5 Intermezzo : Refroidissement d'un nuage d'atomes 101
3.5 Accélération du réseau 106
3.5.1 Condition d'adiabadicité 106
3.5.2 Oscillation de Bloch 109
3.6 Conclusion 111

II Contrôle du réseau en phase 113

4 Observation et contrôle d'halos de diffusion 115
4.1 Introduction 116
4.2 Théorie quantique de la diffusion 118

4.2.1 Description quantique d'une collision 118
4.2.1.1 Amplitude de diffusion 119
4.2.1.2 Section efficace de diffusion 120
4.2.2 Potentiel central à basse énergie - longueur de diffusion 121
4.2.2.1 Décomposition en ondes partielles 122
4.2.2.2 Limite de basse énergie 124
4.2.2.3 Potentiel de contact 125
4.2.2.4 Particules identiques 126
4.3 Historique et modélisation des expériences de collisions avec des atomes froids . . . 127
4.3.1 Contexte expérimental 128
4.3.1.1 L'expérience du MIT [1] 128
4.3.1.2 Les expériences d'Amsterdam [2] et Dunedin [3] 131
4.3.1.3 L'expérience de l'Institut d'optique [4] 132
4.3.2 Modélisation théorique 134
4.3.2.1 Présentation du modèle 135
4.3.2.2 Distribution en impulsion entre les ordres de diffraction 137
4.4 Un nouveau protocole pour contrôler les halos de diffusion 140
4.4.1 Protocole expérimental et optimisation des paramètres 140
4.4.2 Résultats expérimentaux 147
4.4.2.1 Contrôle en impulsion moyenne (centre de masse) 147
4.4.2.2 Contrôle en impulsion relative 150
4.4.2.3 Quantification de la vitesse relative des atomes diffusés 152
4.4.2.4 Contrôle mixte des impulsions moyenne et relative 154
4.4.2.5 Fraction d'atomes diffusés 155
4.5 Discussion 157
4.6 Conclusion 159

5 Contrôle optimal de la phase du réseau optique 163
5.1 Introduction 164
5.2 Introduction théorique 165
5.2.1 Le contrôle optimal classique 166
5.2.1.1 Le problème du contrôle optimal 166
5.2.1.2 Le principe du maximum de Pontryagin 168
5.2.2 Application du contrôle optimal à un système d'atomes froids 169
5.2.2.1 Principe du maximum de Pontryagin pour un système quantique . 170
5.2.3 Méthode numérique 172
5.2.3.1 Méthode du gradient 174
5.2.3.2 Application de l'algorithme GRAPE 175

5.3 Résultats expérimentaux 178
5.3.1 Contrôle des populations de la distribution en impulsion 178
5.3.1.1 Préparation de monômes d'impulsion 178
5.3.1.2 Préparation de binômes d'impulsion 183
5.3.1.3 Réversibilité d'un protocole de contrôle optimal 185
5.3.1.4 Influence du temps de contrôle 186
5.3.1.5 Limite en fréquence des champs de contrôle 188
5.3.1.6 Préparation d'états d'impulsion de population arbitraire 189
5.3.2 Contrôle des phases relatives de la distribution en impulsion 191
5.3.2.1 Contrôle de la phase relative entre deux ordres de diffraction . . . 191
5.3.2.2 Contrôle de la phase relative entre plusieurs ordres de diffraction . 196
5.3.3 Préparation d'états de la structure de bande du réseau 198
5.3.3.1 Préparation d'états propres du réseau 198
5.3.3.2 Préparation de superpositions contrôlées d'états propres du réseau 201
5.4 Conclusion 203

III Contrôle du réseau en amplitude 205

6 Résonances dans l'effet tunnel assisté par le chaos 207
6.1 Introduction 208
6.2 Introduction théorique 210
6.2.1 Espace des phases stroboscopique 210
6.2.1.1 Adimensionnement de l'hamiltonien du réseau modulé 210
6.2.1.2 Portrait de phases stroboscopique 212
6.2.2 Effet tunnel dans un espace des phases stroboscopique 216
6.2.2.1 Représentation de Husimi 216
6.2.2.2 Rappel et analogie avec le double de puits de potentiel 217
6.2.2.3 Théorème de Floquet-Bloch 219
6.2.2.4 Effet tunnel régulier 220
6.2.2.5 Effet tunnel assisté par le chaos 222
6.2.2.6 Influence du quasi-moment k 225
6.3 Expériences pionnières 226
6.3.1 L'expérience de Gaithersburg [5] 226
6.3.2 L'expérience d'Austin [6] 228
6.3.3 Récapitulatif et comparaison des expériences 230
6.4 Résultats expérimentaux 232
6.4.1 Bifurcation des zones de stabilité dynamiques 232
6.4.1.1 Origine de la bifurcation 232

6.4.1.2 Observation de la bifurcation des zones de stabilité 233
6.4.2 Résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos 238
6.4.2.1 Protocole expérimental 238
6.4.2.2 Observation expérimentale de l'effet tunnel régulier 241
6.4.2.3 Observation expérimentale de l'effet tunnel assisté par le chaos . . 242
6.5 Conclusion 246

7 Conclusion générale 249

IV Annexes 258

A Schéma du montage optique de la table refroidisseur. Tiré de [7]. 259

B Schéma du montage optique de la table repompeur. Tiré de [7]. 261

C Tableau récapitulatif de la production des condensats 263

D Monômes d'impulsions 265

E Binômes d'impulsions 267

F Autres résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos observées 269

Bibliographie 271

Table des figures

2.1 **Photo de notre dispositif expérimental** 31
2.2 **Contribution des états excités et de l'état fondamental au nombre d'atomes total pour différents rapports** V/λ_T^3 35
2.3 **Fraction d'atomes dans l'état fondamental en fonction du rapport de la température sur la température critique.** 36
2.4 **Illustration du phénomène de condenstation de Bose-Einstein.** 38
2.5 **Profil de Thomas-Fermi.** 42
2.6 **Illustration des processus de ralentissement, refroidissement et de piégeage des atomes**. 44
2.7 **Principe du refroidissement Doppler.** 47
2.8 **Principe du piégeage dans un piège magnéto-optique (PMO).** 50
2.9 **Spectre du rubidium** ^{87}Rb. 52
2.10 **Schéma de montage du PMO-2D**. 53
2.11 **Schéma représentatif du piège magnéto-optique.** 54
2.12 **Séquence expérimentale de refroidissement dans le PMO-3D** 56
2.13 **Principe du refroidissement par évaporation dans un piège magnétique.** 58
2.14 **Schéma représentatif du piège magnétique.** 59
2.15 **Séquence expérimentale d'évaporation dans le piège magnétique.** 60
2.16 **Schéma représentatif du piège hybride.** 62
2.17 **Séquence expérimentale du refroidissement par évaporation dans le piège hybride.** 63
2.18 **Principe de l'imagerie par absorption**. 65
2.19 **Schéma du montage optique pour l'imagerie du nuage d'atomes** 66

3.1 **Schéma représentant des atomes dans un réseau optique de période spatiale** d. . . . 71
3.2 **Espaces des phases** (x, p) **statiques pour différentes profondeurs** s. 75
3.3 **Structure de bandes du réseau pour différentes profondeurs** 80
3.4 **Schéma du montage du réseau optique.** 82
3.5 **Chargement adiabatique du réseau et mesure de l'état obtenu.** 85
3.6 **Image expérimentale d'un condensat après diffraction par le réseau**. 86
3.7 **Protocole de calibration par micro-oscillations.** 88

3.8 **Calibration de la profondeur du réseau optique par micro-oscillation.** 89
3.9 **Schéma représentant la modulation du réseau.** 92
3.10 **Observation expérimentale des règles de sélection en modulation d'amplitude.** . . . 94
3.11 **Observation expérimentale des règles de sélection en modulation de phase.** 97
3.12 **Protocole de modulation d'amplitude du réseau optique par vobulation de fréquence.** 99
3.13 **Termes de couplages en $k \neq 0$.** 100
3.14 **Refroidissement d'un nuage partiellement condensé par modulation du réseau optique.** 102
3.15 **Condensation d'un nuage thermique par modulation du réseau optique.** 104
3.16 **Protocole d'accélération du réseau par une phase quadratique.** 108
3.17 **Distribution en impulsion du nuage d'atomes dans un réseau accéléré dans différents référentiels.** 110
3.18 **Oscillations de Bloch dans un réseau accéléré.** 111

4.1 **Image d'absorption présentant des halos de collision.** 117
4.2 **Représentation des ondes incidente et diffusée.** 120
4.3 **Représentation schématique de la section efficace de collision.** 121
4.4 **Potentiel total pour différentes valeurs du moment cinétique.** 125
4.5 **Processus de diffusion menant au même état final pour des particules indiscernables.** 127
4.6 **Observation du seuil du superfluidité.** 129
4.7 **Observation d'halos de diffusion en ondes d.** 131
4.8 **Observation de halos de diffusion produit par un condensat diffracté par un réseau optique 3D.** 133
4.9 **Protocole utilisé pour contrôler les halos de diffusion.** 141
4.10 **Génération des cartes de visibilité à partir de l'évolution de la distribution en impulsion obtenue numériquement.** 143
4.11 **Visibilité V pour des halos de diffusion d'impulsion relative $\hbar k_L$ et d'impulsion moyenne variable.** 144
4.12 **Représentation compacte de l'étude en visibilité présentée sur la figure 4.11.** 147
4.13 **Variation de l'impulsion moyenne de halos de collision de diamètre $\hbar k_L$.** 148
4.14 **Variation de l'impulsion relative de halos de collision d'impulsion moyenne nulle.** . 151
4.15 **Quantification du rayon du halo de diffusion.** 153
4.16 **Halo de collision d'impulsion relative $2 \times \hbar k_L$ et d'impulsion moyenne $\hbar k_L$.** 154
4.17 **Méthode expérimentale pour déterminer la fraction d'atomes dans les halos de collisions.** 156
4.18 **Impact des collisions sur les distributions renormalisées.** 158
4.19 **Démonstration de l'apparition des halos de collisions durant le temps de vol.** 160

5.1 **Exemple d'image obtenue par une "imprimante à condensats de Bose-Einstein".** . . 165

5.2 **Illustration de la méthode du gradient.** . . . 174
5.3 **Schéma de principe de l'algorithme GRAPE.** . . . 177
5.4 **Préparation de monômes d'impulsion.** . . . 179
5.5 **Préparation de binômes d'impulsion.** . . . 184
5.6 **Exemple de la réversiblité des champs de contrôle.** . . . 186
5.7 **Influence du temps de protocole sur la fidélité à l'état cible** . . . 187
5.8 **Bande passante du dispositif expérimental.** . . . 188
5.9 **Illustration d'une imprimante à atomes** . . . 189
5.10 **Exemple de distribution en impulsion avec des populations non équiprobables.** . . . 190
5.11 **Préparation de superpositions symétrique et anti-symétrique des états d'impulsion** $|\pm 1\hbar k_{\mathrm{L}}\rangle$ . . . 193
5.12 **Contrôle de la phase entre les états d'impulsion** $|\pm 1\hbar k_{\mathrm{L}}\rangle$**.** . . . 194
5.13 **Mesure de la phase entre les états d'impulsion** $|\pm 1\hbar k_{\mathrm{L}}\rangle$**.** . . . 195
5.14 **Phase relative mesurée** $\Delta\phi_{\mathrm{mes}}$ **en fonction de la phase relative préparée** $\Delta\phi_{\mathrm{prep}}$ . . . 196
5.15 **Préparation de superpositions de trois états d'impulsions avec un contrôle de la phase relative entre composantes d'impulsion.** . . . 197
5.16 **Préparation d'états propres du réseau.** . . . 199
5.17 **Etude de la stabilité des bandes** . . . 201
5.18 **Superposition d'états de la structure de bande.** . . . 202

6.1 **Schéma de principe de l'effet tunnel assisté par le chaos.** . . . 209
6.2 **Schéma de principe de la construction d'un espace des phases stroboscopique.** . . . 213
6.3 **Schéma explicatif du mouvement sub-période de modulation dans l'espace des phases stroboscopique.** . . . 215
6.4 **Analogie avec un double puits de potentiel.** . . . 218
6.5 **Principe de l'effet tunnel assisté par le chaos.** . . . 222
6.6 **Résultats de l'expérience de Gaithersburg.** . . . 227
6.7 **Résultats de l'expérience d'Austin.** . . . 229
6.8 **Protocole pour sonder un portrait de phase stroboscopique.** . . . 234
6.9 **Etude expérimentale du portrait de phases stroboscopique généré par les paramètres de modulation** ($\gamma = 0.348, \varepsilon = 0.27$). . . . 235
6.10 **Bifurcation des zones de stabilité dans l'espace des phases.** . . . 236
6.11 **Protocole pour l'observation des résonances dans l'effet tunnel assisté par le chaos.** . . . 239
6.12 **Mesure des populations des îlots gauche et droite du portrait de phase.** . . . 240
6.13 **Comparaison du contraste des oscillations tunnel assistées par le chaos pour deux nombres d'atomes différents.** . . . 241
6.14 **Résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos.** . . . 244
6.15 **Mécanisme tunnel de la résonance présentée sur la figure 6.14.** . . . 246

7.1 **Contrôle de l'état quantique du condensat dans l'espace des phases.** 251
7.2 **Comparaison numérique d'oscillations tunnel assistées par le chaos avec un chargement des îlots par un décalage abrupt de la phase du réseau et par contrôle optimal.** 252
7.3 **Figure de principe du couplage à longue portée dans un réseau modulé.** 253

D.1 **Monômes en impulsion obtenus par contrôle optimal.** 265

E.1 **Binômes en impulsion obtenus par contrôle optimal.** 268

F.1 **Deux autres résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos.** 269
F.2 **Mécanisme tunnel des résonances présentées sur la figure F.1.** 270

Liste des tableaux

5.1 **Tableau de comparaison des temps des protocoles de contrôle optimal et d'accélération du réseau pour préparer un monôme d'impulsion donnée $|n\hbar k_{\mathrm{L}}\rangle$.** 182

6.1 **Comparaison des conditions expérimentales et des résultats obtenus dans les équipes de Gaithersburg, d'Austin et de Toulouse.** 231

C.1 **Tableau récapitulatif de la séquence expérimentale.** 264

Légende des schémas optiques

Diode laser

Amplificateur optique (*Tapered Amplifier*)

Miroir

Miroir dichroïque

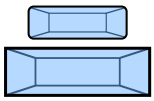
Lame demi-onde

Lame quart d'onde

Cube à séparation de polarisation

Lentilles

Isolateur optique


Cellules en verre

Collimateur de fibre optique

Lame de verre

Modulateur acousto-optique

Caméra CCD

Photodiode

Diaphragme mécanique

Platine de translation

Ascenseur optique

1 Introduction générale

If you wish to make an apple pie from scratch, you must first invent the universe.

Carl Sagan (1934 – 1996) - Astronome

En complète rupture avec les théories plus anciennes de la physique classique, la théorie quantique a profondément modifié notre compréhension du monde. Depuis sa première formulation au début du siècle dernier, elle a entre autres mis en évidence les subtilités du comportement de la matière, de la lumière ainsi que de leur interaction au niveau fondamental. Des propriétés et phénomènes contre-intuitifs à notre échelle macroscopique, auparavant inexpliqués et inexplicables, ont été compris : on pense par exemple aux sauts quantiques, à l'effet tunnel ou au spin des particules. Un grand nombre d'applications et d'innovations sont nées à partir de ces concepts et ont radicalement changé notre vie de tous les jours. Les transistors, et plus tard les circuits intégrés, ont permis de décupler la puissance de calcul disponible pour traiter et stocker l'information. Les lasers et LEDs ont ensuite permis de transporter cette information à haut débit par fibre optique à l'échelle planétaire. Sans cette recherche fondamentale pionnière, le monde de l'information que nous connaissons aujourd'hui n'existerait tout simplement pas. Mais les découvertes ne se sont pas arrêtées là. L'imagerie par résonance magnétique a permis d'imager l'intérieur du corps humain de manière non-invasive et a, par conséquent, révolutionné la médecine. La microscopie électronique et par rayons X a permis de sonder la matière. L'énergie nucléaire, certes avec toutes les polémiques qui l'accompagnent, a été maîtrisée et mise à profit. Ce bouillonnement d'inventions n'a jamais cessé depuis et beaucoup considèrent la physique quantique comme l'une des théories physiques les plus fécondes de l'histoire autant d'un point de vue fondamental qu'appliqué. Depuis environ une décennie, plusieurs pays mettent même en place des plans de développement des technologies quantiques, véritables feuilles de route pour l'établissement d'une nouvelle ère technologique tentant d'exploiter des phénomènes parmi les plus complexes de la physique quantique comme la superposition d'états et l'intrication entre particules. On divise usuellement ces innovations en quatre catégories qui sont la métrologie, les communications, le calcul et les simulations quantiques. Ces nouvelles technologies quantiques

sont d'ores et déjà d'actualité et ont commencé à montrer une partie de leur potentiel.

Le travail présenté dans cette thèse porte sur les simulations quantiques. Dans ce champ de recherche, des travaux ont été consacrés à l'ordinateur quantique universel, un dispositif permettant de résoudre des problèmes d'une classe de complexité inatteignable par nos ordinateurs actuels. Des problèmes de chimie [8], de cryptographie [9], de science des données [10] et plus généralement d'optimisation [11] peuvent bénéficier des promesses de cette nouvelle avancée. Plusieurs acteurs de ce domaine ont effectué des avancées considérables ces dernières années mais il y en a une qui a été particulièrement médiatisée : Google a proclamé en octobre 2019 avoir construit un circuit quantique capable de résoudre en quelques minutes un problème que le meilleur ordinateur classique résoudrait en des milliers d'années [12] [1]. Cet exemple illustre bien le problème de l'ordinateur quantique universel : comme l'énonce cette célèbre citation de Richard Feynman du début des années 1980 [15],

> *Nature isn't classical, dammit, and if you want to make a simulation of nature, you'd better make it quantum mechanical, and by golly it's a wonderful problem, because it doesn't look so easy,*

réaliser un ordinateur quantique s'avère être une tâche incroyablement compliquée [16].

L'objectif actuel est plutôt d'arriver à une version simplifiée de l'ordinateur quantique que l'on nomme un *simulateur* quantique [17]. L'idée est de concevoir un système respectant les mêmes lois physiques qu'un système d'intérêt mais sur lequel le degré de contrôle est meilleur (on parle également d'approche *analogique* des simulations). Les équations décrivant l'évolution des deux systèmes étant les mêmes, les solutions de ces équations le sont également. Par conséquent, il devient possible sur le simulateur d'implémenter proprement les éléments d'un modèle physique, une version idéalisée du système complexe, et d'en étudier l'évolution. Il existe deux approches pour réaliser ce type de dispositifs quantiques. L'approche utilisée par Google pour construire son dispositif est dite *bottom-up*, c'est-à-dire qu'on essaie de mettre en interaction un nombre croissant de composants sur lesquels on a un très bon degré de contrôle à l'échelle individuelle (on parle également d'approche *digitale*).

L'autre approche, dite *top-down*, consiste à mettre en interaction un nombre important de particules et d'essayer de raffiner le degré de contrôle sur l'ensemble. Depuis les années 2000, un fort axe de recherche s'est développé sur une implémentation de cette approche dans le domaine des

1. Ce résultat fait néanmoins encore débat. Un groupe de recherche d'IBM, principal concurrent de Google, a montré que le temps de calcul nécessaire pour reproduire les résultats est de quelques jours avec le meilleur superordinateur mondial [13]. Un autre groupe de recherche a montré qu'en optimisant les algorithmes de simulation, le même résultat pouvait être obtenu sur un ordinateur de bureau en quelques heures [14].

atomes ultra-froids [18] [2] : des ensembles atomiques portés à très basse température, régime dans lequel l'aspect ondulatoire de la matière devient dominant. Pour des températures suffisamment basses, on assiste au phénomène de condensation de Bose-Einstein où toutes les particules du nuage partagent la même fonction d'onde. Les intérêts de ces gaz quantiques sont multiples :

— L'évolution de ces gaz dans des potentiels conservatifs est pratiquement parfaite : à l'inverse d'autres systèmes physiques, il y a peu d'impuretés dans l'environnement proche des atomes qui peuvent perturber leur dynamique et on a alors accès à un système quasiment idéal.
— Pour certaines espèces atomiques, il est possible de modifier les interactions entre atomes par l'application de champs magnétiques. Ce phénomène permet donc d'étudier des phénomènes de physique à N corps dont certains aspects sont encore aujourd'hui mal compris théoriquement.
— Si un nombre suffisant d'atomes partagent le même état quantique, il suffit d'une seule mesure pour échantillonner toute la fonction d'onde. Il devient littéralement possible de photographier des objets du monde quantique afin de les étudier et essayer de les mettre à profit dans des perspectives de simulations quantiques.

Presque immédiatement après avoir réussi l'exploit d'atteindre la dégénérescence quantique, la communauté des atomes froids a cherché à façonner de nouveaux potentiels pour contrôler ces fonctions d'ondes macroscopiques. L'un d'entre eux s'est particulièrement imposé : les réseaux optiques [22]. Il s'agit de l'interférence de plusieurs faisceaux laser formant un potentiel périodique. L'une des raisons de ce succès tient dans l'analogie qu'il y a entre ce dispositif et un cristal que l'on pourrait étudier dans le domaine de la matière condensée : le potentiel lumineux joue le rôle de la structure ionique du cristal alors que les atomes miment le mouvement des électrons. On appelle communément *cristaux de lumière* ces systèmes de réseaux optiques.

En d'autres termes, les expérimentateurs ont accès à un grand degré de contrôle sur les fonctions d'onde qu'ils manipulent. De plus, ces réseaux optiques peuvent être agencés en géométrie complexe comme des réseaux cubiques 1D [23], 2D [24], 3D [25] ou encore en structures de nid-d'abeilles [26]. Ils peuvent être rendus spin-dépendants [27]. Il est également possible de les utiliser afin de réaliser des dimensions synthétiques : sur chaque site du réseau se trouve une échelle de niveaux d'énergie. Les atomes peuvent donc évoluer sur une dimension d'espace et une dimension d'énergie, réalisant ainsi un système à $1+1$ dimensions. Ces échelles d'énergies peuvent être constituées des niveaux de la structure interne des atomes [28] et plus récemment il a été proposé d'utiliser les niveaux d'énergie externes du réseau [29]. Il est également possible d'étudier des systèmes analogues à des systèmes magnétiques en effectuant un mouvement de ro-

2. Il faut cependant préciser que l'approche *bottom-up* est aussi explorée dans le domaine des atomes froids, en particulier avec des atomes de Rydberg [19, 20, 21]

tation périodique de ces réseaux [30] ou bien en produisant des champs magnétiques synthétiques à base de phase de Peierls [31]. En d'autres termes, un grand nombre d'hamiltoniens provenant de divers champs de la physique peuvent être réalisés grâce à la dynamique d'atomes dans les potentiels lumineux formés par ces réseaux.

Cependant, à la différence des cristaux réels, des nouvelles possibilités sont envisageables avec ce type de dispositifs. On peut par exemple éteindre subitement la structure ionique du cristal, la déplacer, la moduler etc. Il suffit pour cela de changer l'intensité lumineuse des lasers formant le potentiel. La modulation temporelle de paramètres du réseau a récemment connu un fort intérêt. Il a en effet été démontré qu'une telle modulation peut mener à la réalisation d'hamiltoniens effectifs pour les atomes [32] : la modulation à haute fréquence permet de façonner des hamiltoniens de champ moyen. D'autre part, la modulation de forte amplitude permet d'étudier des systèmes au delà du régime perturbatif par exemple. L'avantage de ce type de méthode est que l'hamiltonien ainsi réalisé peut être ajusté en modifiant les paramètres de la modulation (la fréquence, l'amplitude, le nombre d'harmoniques etc), c'est-à-dire facilement et avec une grande précision. En particulier, l'effet tunnel entre les sites du réseau et les interactions sur site entre atomes peuvent être modifiés de cette manière [33]. Ainsi, des problèmes de localisation, de topologie, de dynamique chaotique ou encore de magnétisme artificiel peuvent être étudiés avec ce type de dispositif. La modulation temporelle de paramètres du réseau offre donc de nombreux nouveaux degrés de liberté pour manipuler ces atomes.

Les gaz quantiques dans des réseaux optiques forment ainsi de véritables simulateurs quantiques aux capacités étendues [3]. Cependant, il existe plusieurs facteurs qui peuvent limiter la qualité des mesures des systèmes de simulations quantiques. Les principaux sont

— La température trop élevée du nuage d'atomes dans le réseau.
— La préparation de l'état initial du système [34, 35].
— Le micro-mouvement résiduel des atomes dans des réseaux modulés dans le temps.

C'est dans ce contexte que viennent s'insérer les travaux présentés dans cette thèse. L'équipe Atomes Froids du Laboratoire Collision Agrégats Réactivité (LCAR) a construit un dispositif expérimental en 2013 permettant de réaliser des simulations quantiques à l'aide de condensats de Bose-Einstein manipulés par un réseau optique unidimensionnel. Ce réseau optique est formé par l'interférence de deux faisceaux lasers contra-propageants dont l'amplitude et la phase sont contrôlés de façon continue et arbitraire au cours du temps. Avec ces deux degrés de liberté fine-

3. Cette année voit d'ailleurs les travaux de deux chercheurs travaillant sur la manipulation d'atomes récompensés : Jean Dalibard, chercheur au collège de France, récompensé par la médaille d'or du CNRS, et Antoine Browaeys, chercheur à l'université Paris-Saclay, récompensé par la médaille d'argent du CNRS.

ment contrôlables, un nombre important de problèmes peuvent être traités et je présenterai dans ce manuscrit ceux auxquels j'ai contribué durant ma thèse.

Ce manuscrit est organisé en trois parties. Dans une première partie, je présente notre dispositif expérimental, en particulier comment nous produisons des condensats de Bose-Einstein et comment nous les manipulons grâce à un réseau optique. Je présente également les schémas classiques de contrôle d'un nuage d'atomes dans un réseau optique, à savoir une modulation périodique d'un paramètre du réseau (sa phase ou son amplitude) et une accélération du réseau. A cette occasion je présenterai les travaux de spectroscopie de bande que nous avons réalisés et comment ils nous ont permis de proposer une nouvelle technique de refroidissement d'un nuage d'atomes dans un réseau optique.

La seconde partie est exclusivement dédiée aux travaux portant sur le contrôle en phase du réseau optique. Dans cette partie, je présente la démarche scientifique qui nous a permis d'établir un nouveau type de protocole permettant de transférer complètement le nuage d'atomes dans un état quantique donné : une étude sur la formation de halo de diffusion durant le temps de vol des atomes nous a fourni un cadre bien défini afin d'appliquer ensuite la théorie du contrôle optimal en vue de façonner l'état du condensat dans le réseau. Ce nouveau type de protocole permet donc de préparer avec une grande précision l'état initial d'un problème de simulation quantique.

La troisième partie porte sur le contrôle combiné de la phase et de l'amplitude du réseau optique. Dans cette partie, je présente un problème de simulation quantique issue de la théorie du chaos. Il s'agit de la caractérisation des propriétés d'un effet tunnel, apparaissant dans les systèmes modulés périodiquement dans le temps au delà du régime perturbatif, nommé *l'effet tunnel assisté par le chaos*. De par leur haut degré de contrôle, les atomes froids dans des réseaux optiques offrent un cadre idéal pour l'étude de ce problème.

Le but des travaux présentés dans cette thèse est donc de proposer des solutions à certains problèmes connus des simulateurs quantiques utilisant des atomes froids dans des réseaux optiques afin d'étendre leurs capacités. Le plan de ce manuscrit est le suivant

— **Chapitre 2 :** Le premier chapitre est dédié au dispositif expérimental permettant de produire des condensats de Bose-Einstein. Je présente la séquence expérimentale que nous utilisons pour produire des condensats avec un nombre d'atomes le plus stable possible en une durée la plus courte possible.
— **Chapitre 3 :** Je présente ensuite le réseau optique unidimensionnel que nous utilisons pour manipuler les condensats de Bose-Einstein. Je présente par la suite des travaux que nous avons effectués sur la spectroscopie des bandes d'énergie du réseau optique afin de mettre

en évidence des règles de sélection lorsque le réseau est modulé en phase ou en amplitude [36]. Ces travaux sont indispensables pour les travaux ultérieurs utilisant la modulation d'un des degrés de liberté du réseau. Ces résultats nous ont notamment permis de mettre en place une nouvelle technique de refroidissement d'un nuage d'atomes [37].

— **Chapitre 4 :** Dans le troisième chapitre, nous exploitons le contrôle que nous avons sur la phase du réseau afin d'étudier les interactions entre atomes durant leur temps de vol menant à la formation de halo de diffusion [38]. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Peter Schlagheck, chercheur à l'université de Liège. Je présente le protocole très simple que nous avons établi, basé uniquement sur un décalage abrupt du réseau optique et l'évolution libre des atomes dans le réseau maintenu ensuite statique. Ce protocole est conçu afin d'augmenter les évènements de collision dans un mode d'impulsion donné.

— **Chapitre 5 :** L'étude des halos de diffusion mène assez naturellement à la question suivante : est-il possible de façonner la distribution en impulsion du nuage d'atomes par une variation adéquate de la phase du réseau optique au cours du temps ? Grâce à une collaboration avec Dominique Sugny, professeur à l'université de Dijon, nous avons eu recours à la théorie du contrôle optimal pour répondre à cette question [39]. Nous montrons que le contrôle optimal ouvre la possibilité de complètement transférer le condensat dans un état désiré du réseau optique. Cette technique de manipulation peut servir à préparer de manière optimale des états initiaux pour les simulations quantiques.

— **Chapitre 6 :** Dans le dernier chapitre de cette thèse, je présente un de ces phénomènes, provenant du domaine du chaos quantique : l'observation et la caractérisation de l'effet tunnel assisté par le chaos [40]. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Bertrand Georgeot, Gabriel Lemarié et Maxime Martinez de l'université de Toulouse ainsi que Denis Ullmo et Olivier Giraud de l'université de Paris-Saclay. Nous montrons que, par modulation d'amplitude du réseau optique au delà du régime perturbatif, nous pouvons modifier les caractéristiques de cet effet tunnel assisté par le chaos et démontrer l'apparition de résonances, signature de cet effet tunnel. Ce travail ouvre entre autres la perspective d'étudier le caractère à longue portée de cet effet tunnel assisté par le chaos.

Première partie

Dispositif expérimental

2 Production de condensats de Bose-Einstein

Sommaire

2.1 Introduction 30
2.2 Rappel sur la condensation de Bose-Einstein 32
2.2.1 Description de Bose et Einstein : le gaz idéal 32
2.2.1.1 Description du modèle 32
2.2.1.2 Densité dans l'espace des phases 34
2.2.2 Description de Gross et Pitaevskii : le gaz en interaction 38
2.2.2.1 Description du modèle 39
2.2.2.2 Gaz en interaction dans un piège harmonique 40
2.3 Dispositif expérimental 43
2.3.1 Piège magnéto-optique et refroidissement Doppler 46
2.3.1.1 Principe de fonctionnement 46
2.3.1.2 Mise en œuvre expérimentale 51
2.3.1.3 Le piège magnéto-optique 2D 53
2.3.1.4 Le piège magnéto-optique 3D 54
2.3.2 Pièges conservatifs et refroidissement par évaporation 56
2.3.2.1 Refroidissement par évaporation dans le piège magnétique 56
2.3.2.2 Refroidissement par évaporation dans le piège hybride 60
2.3.3 Système d'imagerie 64
2.3.3.1 Principe de l'imagerie par absorption 64
2.3.3.2 Mise en œuvre expérimentale 65
2.4 Conclusion 67

Rick : *We need to find shelter before the sunset, Morty. Venzenulon Nine has a night temperature of 300 below ! We'll freeze, Morty ! W-We'll be dead in seconds !*
Morty : *I – I think I saw a cave over there.*
Rick : *You've seen too many movies, Morty. A cave isn't gonna cut it. We're gonna have to use Beebo.*
Morty : *Beebo led us to water ! He's our friend !*
Rick : *He won't even feel it !*
Morty : *Oh, no, no !*
Rick : *You wanna die, Morty ? Get in Beebo ! ... Brace for the ice limit. Here it comes ! ... Wait, are we on Venzenulon Nine or Venzenulon Seven ?*

Rick and morty - Morty's Mind Blowers

2.1 Introduction

Depuis l'établissement de la théorie quantique, de nombreuses applications technologiques ont été développées et ont eu des impacts considérables sur notre vie de tous les jours. On peut par exemple citer le transistor qui a permis de développer l'électronique moderne ou encore l'imagerie par résonance magnétique qui a révolutionné la médecine. Mais, l'invention qui va particulièrement nous intéresser ici est celle du laser. Reposant sur le principe de l'émission stimulée, ce phénomène est théorisé en 1917 par Albert Einstein [41] ouvrant ainsi la voie vers une mise en œuvre expérimentale. Alfred Kastler, lauréat du prix Nobel de physique en 1966, propose le procédé de pompage optique en 1950, qu'il démontre expérimentalement deux ans plus tard avec Jean Brossel. En se basant sur ces travaux, Charles Townes, Nikolaï Bassov et Alexandre Prokhorov, tout trois lauréats du prix Nobel de physique de 1964, construisent des oscillateurs et amplificateurs exploitant le principe du maser-laser. En 1960, la première émission laser cohérente est obtenue par Théodore Maiman grâce à un cristal de rubis. Outre ses applications en usinage industriel ou en télécommunications, le laser a d'abord permis de sonder puis de contrôler les atomes qui constituent la matière. Il a été montré que les degrés de liberté internes des atomes pouvaient être modifiés par le champ électrique cohérent d'un laser [42]. Plus tard, cette technologie s'est tellement perfectionnée qu'il est devenu possible de modifier les degrés de liberté externes d'ensembles atomiques [43]. Il est devenu possible de ralentir et piéger des atomes pour pouvoir les étudier et mieux les comprendre. Claude Cohen-Tannoudji, Steven Chu et William Phillips sont lauréats du Prix Nobel de physique de 1997 « pour le développement de méthodes servant à refroidir et à confiner des atomes à l'aide de la lumière laser ». Un nouveau domaine de la physique a alors vu le jour : le domaine de la matière froide. Les premières idées autour de ce

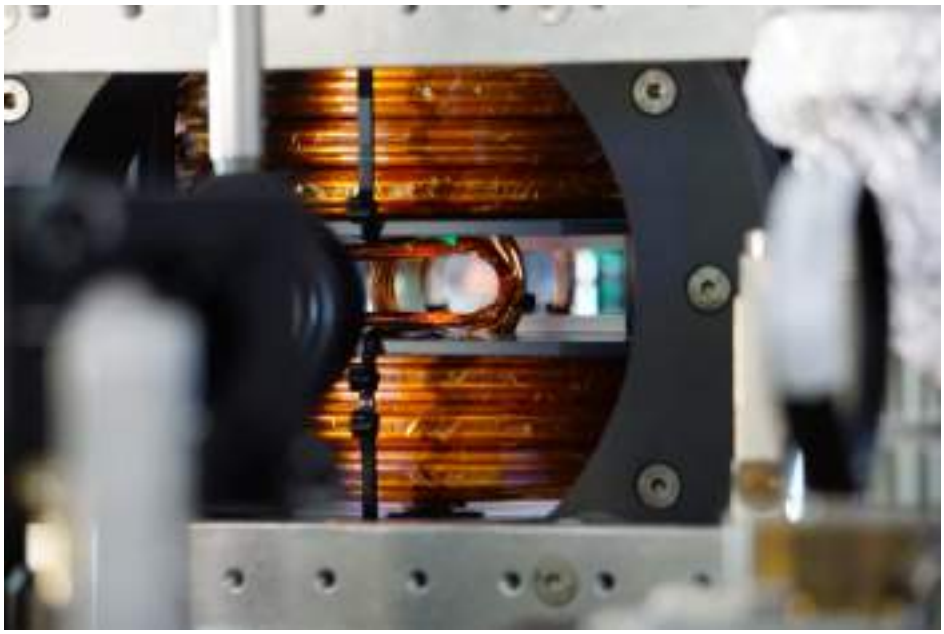


Figure 2.1 – Photo de notre dispositif expérimental. Entre deux bobines de champs magnétiques, on aperçoit la cellule à vide dans laquelle on peut voir la lumière émise par fluorescence par un gaz d'atomes froids piégé dans le piège magnéto-optique. Photo prise par Maxime Arnal.

domaine de la physique ont émergées lorsque Satyendra Nath Bose envoya un article qu'il avait rédigé à Albert Einstein en 1924 [44]. Bose considéra que les photons composant la lumière pouvait être modélisées comme un gaz de particules indiscernables. Einstein saisit immédiatement l'importance de cette nouvelle formulation, aida Bose à publier son article en le traduisant en Allemand et généralisa ce concept aux particules matérielles [45]. Einstein montra qu'en atteignant des températures toujours plus basses, les ensembles atomiques exhibent des propriétés quantiques contre-intuitives et inattendues, allant jusqu'à former un nouvel état de la matière, le condensat de Bose-Einstein. Près de soixante-dix ans plus tard, des techniques de refroidissement perfectionnées permettent enfin d'observer cet état de la matière pour la première fois en 1995. Cette découverte a valu à Eric Cornell, Carl Wieman et Wolfgang Ketterle le prix Nobel de physique de 2001, seulement six ans après leur observation. Ce délai très court entre la découverte et le prix Nobel témoigne de l'importance qu'attribue la communauté des physiciens aux gaz quantiques. En effet, ce nouvel état de la matière peut être utilisé entre autres comme un système modèle permettant de mieux comprendre la théorie quantique : combinés avec des potentiels hautement contrôlables, ces gaz d'atomes peuvent être utilisés comme simulateurs quantiques.

Dans la première partie de ce chapitre nous verrons le formalisme théorique permettant de décrire le phénomène de condensation de Bose-Einstein. Nous aborderons ensuite l'équation de Gross-

Pitaevskii, équation pour la fonction d'onde du condensat qui prend en compte les interactions entre atomes au sein du nuage. Cette description du gaz en interaction est plus réaliste qu'une description du condensat de Bose-Einstein en terme de gaz idéal et est très répandue dans la communauté des atomes froids lorsque l'on néglige les phénomènes de fluctuations quantiques ou de corrélations quantiques.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, je présenterai notre montage expérimental permettant de produire des condensats de Bose-Eintein dont une photo est présentée sur la figure 2.1. Pour cela, nous décrirons deux techniques de refroidissement largement utilisées : le refroidissement par effet Doppler et le refroidissement par évaporation. Nous décrirons également les différents pièges qui permettent de mettre en œuvre ces techniques.

2.2 Rappel sur la condensation de Bose-Einstein

Un condensat de Bose-Einstein est un état de la matière dans lequel un nombre macroscopique de particules bosoniques partagent le même état quantique. Cet état de la matière n'apparait pas naturellement : Il n'est observé qu'en laboratoire, où l'environnement du gaz peut être contrôlé avec une grande précision. Le but de cette partie est de donner un aperçu du formalisme théorique permettant de décrire ces gaz quantiques.

2.2.1 Description de Bose et Einstein : le gaz idéal

Dans les prochains paragraphes, nous allons introduire un paramètre qui détermine si le gaz d'atomes que nous considérons doit être décrit par la physique quantique plutôt que par la physique classique. Il s'agit de la *densité dans l'espace des phases* $\mathcal{D}$ qui compare la distance entre deux particules avec la longueur d'onde thermique de de Broglie λ_T.

2.2.1.1 Description du modèle

En 1924, Satyendra Nath Bose propose une nouvelle manière de considérer le rayonnement du corps noir [44] : il considère ce rayonnement comme un gaz de particules indiscernables. Il envoya son article à Albert Einstein qui le généralisa à toutes les particules bosoniques, en particulier les atomes [45]. Les particules sont considérées comme un gaz idéal contenu dans une boite en trois dimensions de côté L. L'hamiltonien de ce système est donc simplement la somme des énergies cinétiques de chacune des particules de masse m et du potentiel du piège (la boîte de côté L)

$$\hat{H} = \sum_i \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{r}}_i) \right]. \tag{2.1}$$

En utilisant les conditions aux limites périodiques, les états propres de l'hamiltonien (2.1), sont les ondes planes

$$\langle \mathbf{r} | \varphi_{\mathbf{k}} \rangle = \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{L^{3/2}} \quad \text{avec} \quad k_{x,y,z} = \frac{2\pi}{L} n_{x,y,z}, \tag{2.2}$$

où les n_i sont des entiers positifs ou négatifs. L'énergie correspondant à un état est

$$E_i = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2). \tag{2.3}$$

Le résultat principal de ce modèle est que, pour des bosons, le nombre de particules moyen N_i dans un niveau d'énergie E_i est donné par

$$\boxed{N_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu)} - 1},} \tag{2.4}$$

où μ est le potentiel chimique et $\beta = 1/k_B T$ avec k_B la constante de Boltzmann et T la température du gaz. Cette équation est connue sous le nom de *statistique de Bose-Einstein*.

À partir de cette description du gaz, le nombre total moyen de particules est donc la somme des particules de tous les niveaux d'énergie i qui peuvent être dégénérés g_i fois

$$N_{\text{tot}} = \sum_{i=0}^{\infty} g_i N_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g_i}{e^{\beta(E_i - \mu)} - 1}. \tag{2.5}$$

Nous allons étudier un chemin qui conduit à la condensation de Bose-Einstein en analysant comment le gaz se comporte lorsque la température T diminue à nombre de particules N_{tot} et volume V fixé. C'est un chemin "proche" de ce qui est réalisé en pratique : expérimentalement, nous diminuons la température et le nombre de particules mais avec des lois d'échelle différentes, la température du nuage diminue "plus rapidement" que le nombre de particules.

Un chemin alternatif vers la condensation serait d'augmenter N_{tot} à T, V fixés mais ce procédé rencontre des limitations expérimentales. D'une part, pour des pressions trop élevées le gaz devient liquide ou solide [1] mais on s'affranchit de ce problème en utilisant des pièges magnétique et/ou optique avec des parois non matérielles : aucune gouttelette ne peut se former sur celles-ci ce qui empêche le gaz de devenir liquide puis solide. D'autre part, les volumes de capture de ces pièges ne sont malheureusement pas assez grands pour envisager d'augmenter suffisamment la

1. Cette remarque est également vraie quand la température diminue.

densité de particules pour atteindre la condensation de Bose-Einstein.

2.2.1.2 Densité dans l'espace des phases

Nous allons étudier comment les particules qui composent le gaz se répartissent sur les niveaux d'énergie lorsque la température du nuage diminue. Pour cela, nous allons considérer la contribution de l'état fondamental séparément des autres niveaux d'énergie. Prenons comme origine des énergies l'énergie de l'état fondamental $E_0 = 0$, supposé non dégénéré, c'est-à-dire avec $g_0 = 1$. Les nombres d'atomes dans l'état fondamental et les états excités sont alors respectivement

$$N_0 = \frac{e^{\beta\mu}}{1 - e^{\beta\mu}}, \quad N_{i>0} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i e^{\beta\mu}}{e^{\beta E_i} - e^{\beta\mu}}. \tag{2.6}$$

Le nombre de particules total étant fixé, nous avons la relation $N_{\text{tot}} = N_0 + N_{i>0}$. L'idée du raisonnement est de déterminer une expression de la population des états excités pour en déduire la fraction de la population dans l'état fondamental au fur et à mesure que la température du nuage diminue. Pour cela, évaluons l'équation (2.6) en remplaçant la somme sur les niveaux d'énergie par une intégrale sur la densité d'états [2] [46]

$$N_{i>0} \simeq \int_0^{\infty} 4\pi^2 k^2 \rho(k) \frac{e^{\beta\mu}}{e^{\beta E(k)} - e^{\beta\mu}} dk \quad \text{avec} \quad \rho(k) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3. \tag{2.7}$$

Avec le changement de variable $x = \beta E$, la densité d'états est donnée par [46]

$$\rho(x) = \frac{V}{\lambda_T^3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}, \tag{2.8}$$

où on a introduit λ_T la *longueur d'onde thermique de de Broglie*

$$\boxed{\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}}.} \tag{2.9}$$

C'est une quantité essentielle à la physique des atomes froids : la longueur d'onde thermique est une grandeur statistique qui représente la longueur d'onde de de Broglie moyenne des particules qui composent le gaz à une température T. Elle caractérise donc l'étalement spatial moyen d'une particule [3]. Elle est inversement proportionnelle à la racine carré de la température : plus le nuage

2. Remplacer la somme sur les niveaux d'énergie par l'intégrale sur la densité d'état est justifié par le fait que l'écart entre deux niveaux d'énergie $\delta E = 2\pi^2\hbar^2/mL^2$ est très inférieur devant $k_B T_c$ avec T_c la température crtitique définie à l'équation (2.14) [46].

3. Pour le voir, on peut utiliser le théorème d'équipartition pour remplacer $k_B T$ par l'énergie cinétique des particules $(\Delta p)^2/m$ et il vient que $\lambda_T \Delta p = \sqrt{2\pi}\hbar$: on retrouve alors le principe d'incertitude de Heisenberg à un facteur près. On identifie alors que la longueur d'onde de de Broglie est proportionnelle à la distribution spatiale du gaz Δx.

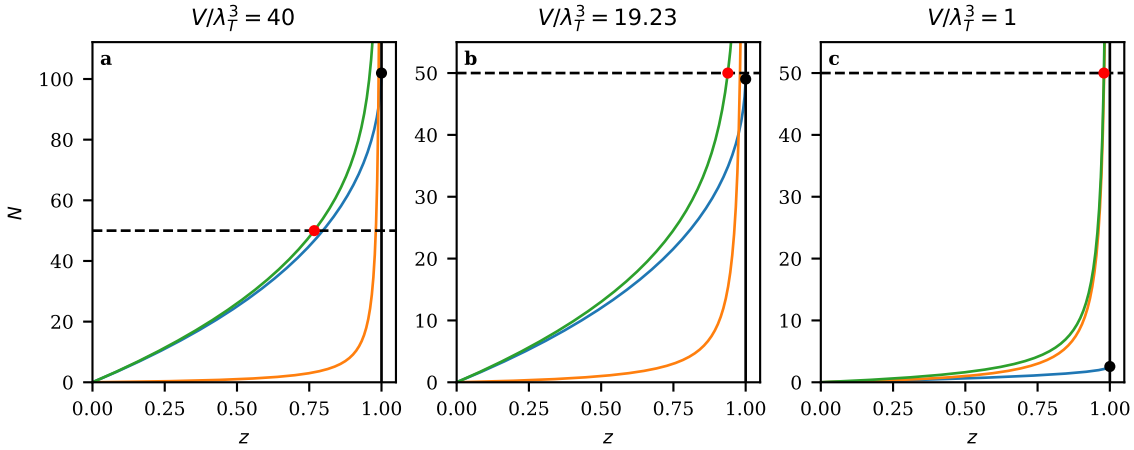


Figure 2.2 – Contribution des états excités et de l'état fondamental au nombre d'atomes total pour différents rapports V/λ_T^3. Pour un condensat de $N = 50$ atomes (pointillés noirs), le nombre d'atomes dans l'état fondamental (orange), le nombre d'atomes dans les états excités (bleu) et leur somme (vert) sont représentés en fonction de la fugacité z pour trois longueurs d'ondes de de Broglie (et donc températures) différentes. **a** : $\lambda_T^3 = V/40$ correspondant au cas $T \gg T_c$ où T_c est la température critique définie en (2.14). Le nombre d'atomes total est principalement composé d'atomes dans les états excités. **b** : $\lambda_T^3 = V/19.23$ correspondant au cas $T = T_c$. Le nombre d'atomes dans l'état fondamental n'est plus négligeable. **c** : $\lambda_T^3 = V$ correspondant au cas $T \ll T_c$. Le nombre d'atomes total est principalement composé d'atomes dans l'état fondamental. La fugacité du système (point rouge) est donnée par l'intersection de la somme des atomes dans l'état fondamental et dans les états excités avec le nombre d'atomes total.

devient froid, plus elle augmente et donc plus l'aspect ondulatoire des particules devient dominant.

Avec cette expression, on arrive alors à l'équation suivante pour la population des états excités

$$N_{i>0} \simeq \frac{V}{\lambda_T^3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{z\sqrt{x}e^{-x}}{1 - ze^{-x}} dx, \tag{2.10}$$

où on a introduit la fugacité $z = e^{\beta\mu}$, quantité bornée entre 0 et 1 : en effet, la population de l'état fondamental s'écrit comme

$$N_0 = \frac{z}{1-z}, \tag{2.11}$$

et N_0 ne peut être négatif. On peut évaluer le terme intégral de l'équation (2.10). Il vient que [46]

$$N_{i>0} = \frac{V}{\lambda_T^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{3/2}}. \tag{2.12}$$

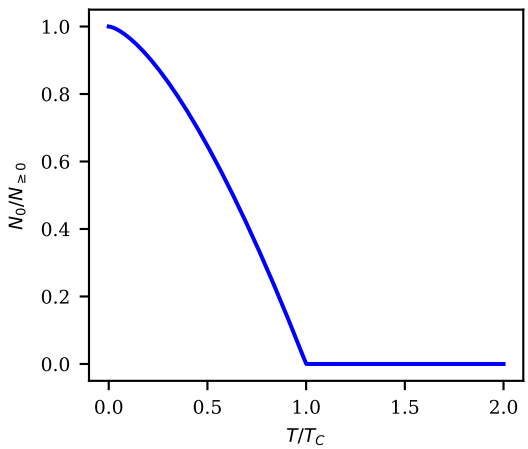


Figure 2.3 – Fraction d'atomes dans l'état fondamental en fonction du rapport de la température sur la température critique.

Or, comme $N_{i>0}$ atteint son maximum pour $z = 1$, on peut déterminer le nombre maximal de particules que les états excités peuvent accueillir

$$N_{i>0}^{\max} = \frac{V}{\lambda_T^3}\zeta(3/2), \tag{2.13}$$

où $\zeta(x)$ est la fonction zêta de Riemann [4], dont la valeur en $x = 3/2$ est $\zeta(3/2) \simeq 2.6124$. On notera que la dépendance en énergie de la densité d'état joue un rôle important dans le raisonnement. Par conséquent, la dimensionalité et le confinement sont susceptibles de changer nos conclusions : par exemple, il n'existe pas de condensation à une dimension car $N_{i>0}$ n'est pas borné dans ce cas.

L'équation (2.13) nous montre que lorsque la température diminue, et donc que la longueur d'onde de de Broglie augmente, le nombre maximum de particules dans les états excités diminue. Si $N_{\text{tot}} > N_{i>0}^{\max}$, il y a une saturation des états excités et un nombre macroscopique N_0 de particules dans l'état fondamental : c'est le phénomène de condensation de Bose-Einstein. L'évolution du nombre de particules dans l'état fondamental et les états excités en fonction de la fugacité pour différents rapports V/λ_T^3 est représentée sur la figure 2.2. On observe que lorsque le volume moyen occupé par une particule, donné par λ_T^3, est faible devant le volume du système V, les particules occupent majoritairement les états excités mais ce comportement s'inverse lorsque la longueur d'onde de de Broglie augmente. En d'autres termes, tant que la température est supérieure à une température critique T_c, les états excités contiennent la majorité des particules et la population de l'état fondamental est négligeable. En revanche, le nombre de particules dans l'état fondamental augmente quand la température diminue en dessous d'une température critique

4. $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

$$T_c = \left(\frac{N}{V\zeta(3/2)}\right)^{2/3} \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B}, \tag{2.14}$$

jusqu'à contenir la totalité de la population lorsque $T = 0$. On peut alors obtenir la fraction de population dans l'état fondamental en fonction de la température du nuage dans une boîte en trois dimensions de côté L

$$\frac{N_0}{N_{\text{tot}}} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} & \text{quand } T < T_c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.15}$$

dont l'évolution en fonction du rapport T/T_c est représentée sur la figure 2.3. Dans la limite thermodynamique, le changement abrupt du rapport N_0/N_{tot} au voisinage de $T = T_c$ apparaît comme une transition de phase.

Il est également plus commode de ré-écrire l'équation (2.13) sous la forme

$$n\lambda_T^3 \simeq 2.6 \quad \text{quand} \quad T = T_c, \tag{2.16}$$

où $n = N_{\text{tot}}/V$ est la densité de particules. On peut finalement introduire la *densité dans l'espace des phases*

$$\boxed{\mathcal{D} = n\lambda_T^3,} \tag{2.17}$$

qui mesure la compétition entre deux longueurs caractéristiques du système : d'une part la distance moyenne entre deux particules $n^{-1/3}$ et d'autre part l'extension du paquet d'onde du gaz λ_T. Nous pouvons donc dire que si $\mathcal{D} \ll 1$, les atomes peuplent les états excités (voir la figure 2.2) et la physique classique décrira correctement les particules mais que, dans le cas contraire [5] $\mathcal{D} \simeq 1$, une fraction macroscopique des atomes est dans l'état fondamental et le système est fortement quantique : un nouveau formalisme est alors nécessaire. Cette compétition entre distance interparticules et longueur d'onde de de Broglie est représentée schématiquement sur la figure 2.4. La densité dans l'espace des phases est alors le paramètre à faire croître jusqu'à sa valeur seuil pour obtenir des condensats de Bose-Einstein.

5. Plus rigoureusement si $\mathcal{D} = \zeta(3/2)$

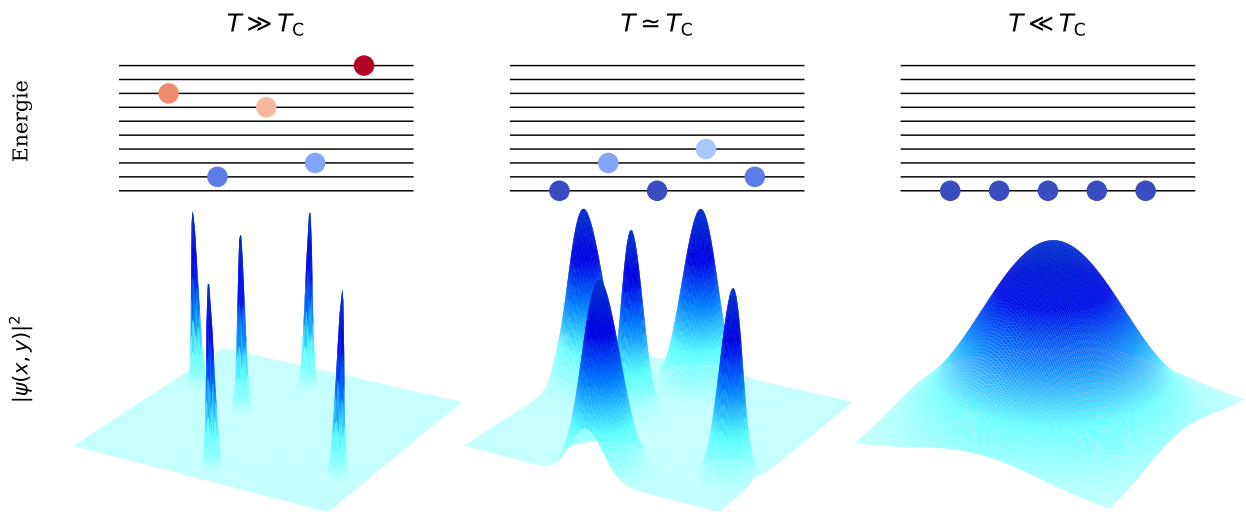


Figure 2.4 – Illustration du phénomène de condenstation de Bose-Einstein. Pour $T \gg T_C$, les particules peuplent tous les états d'énergie du système et leur probabilité de présence peuvent être considérées comme des delta de Dirac. Pour $T \simeq T_C$, les particules peuplent des niveaux d'énergie plus basse et leur longueur d'onde de de Broglie est comparable à la distance entre deux particules. Pour $T \ll T_C$, le niveau fondamental est peuplé de façon macroscopique et toutes les particules partagent la même fonction d'onde.

Récapitulatif

En résumé, nous avons vu que si la température d'un gaz de bosons idéals contenu dans une boîte en trois dimensions diminue sous une température critique à densité constante, la fraction de particules dans les états excités diminue. On en déduit que les particules s'accumulent nécessairement dans l'état fondamental qui devient peuplé macroscopiquement : c'est le phénomène de condensation de Bose-Einstein. Dans ce régime, le gaz ne peut plus être décrit comme un ensemble de particules ponctuelles.

Néanmoins, considérer un gaz idéal ne reflète pas la réalité pour des particules en interaction. En effet, les atomes entrent sans arrêt en collision et interagissent les uns avec les autres. Nous allons voir dans la prochaine partie comment il est possible de prendre en compte les interactions dans un gaz ultra-froid.

2.2.2 Description de Gross et Pitaevskii : le gaz en interaction

Dans cette partie, nous allons voir comment il est possible de prendre en compte les interactions entre atomes via un potentiel de champ moyen. Cette description décrit bien la plupart des expériences d'atomes froids, même s'il faut parfois faire appel à des descriptions plus so-

phistiquées comme cela peut être le cas lorsqu'il devient nécessaire de prendre en compte des fluctuations quantiques, thermiques ou des corrélations au sein du nuage.

2.2.2.1 Description du modèle

Pour prendre en compte ces interactions, il faut ajouter dans l'hamiltonien (2.1) un terme de potentiel $V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j)$ couplant le mouvement de deux particules i et j

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{r}}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j). \tag{2.18}$$

Il est en pratique impossible de résoudre cet hamiltonien tant les équations se compliquent pour un nombre élevé de particules. Gross et Pitaevskii, de manière indépendante, proposent alors deux approximations pour simplifier le problème qui s'avèrent être très utiles dans la plupart des cas.

— Dans un premier temps, ils considèrent que toutes les particules partagent la même fonction d'onde, approximation communément appelée approximation de Hartree-Fock. Cette approximation est légitime pour des gaz de bosons dilués : d'après ce que nous venons de voir sur la description du gaz par Bose et Einstein, on peut en effet considérer que toutes les particules sont dans le même état fondamental. Formellement, cela revient à dire que la fonction d'onde du gaz Ψ s'écrit comme le produit tensoriel des fonctions d'onde individuelles ψ des N atomes qui composent le gaz

$$|\Psi(\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2, ...\hat{\mathbf{r}}_N)\rangle = \prod_{i=1}^{N} |\psi(\hat{\mathbf{r}}_i)\rangle. \tag{2.19}$$

Il s'agit donc d'une théorie de champ moyen.

— Dans un second temps, ils approximent le potentiel d'interaction ressenti par une particule i produit par les $N-1$ autres particules du gaz par un potentiel de contact

$$V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j) \simeq g\delta(\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j), \tag{2.20}$$

où $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ et a est la longueur de diffusion en onde s, quantité qui décrit à elle seule les processus de collisions dans le domaine des énergies ultra-basses. Nous supposerons $a > 0$, ce qui correspond à des interactions répulsives comme dans le cas de notre condensat de rubidium 87, où $a = 5.23$ nm.

En utilisant l'ansatzt (2.19) et l'approximation du potentiel de contact, le résultat principal de la recherche de Gross et Pitaevskii est qu'en minimisant l'énergie du système par une méthode variationelle [46], la fonction d'onde à une particule doit satisfaire l'équation

$$\left(\frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{r}}) + g|\psi(\hat{\mathbf{r}})|^2\right)\psi(\hat{\mathbf{r}}) = \mu\psi(\hat{\mathbf{r}}), \tag{2.21}$$

avec comme condition de normalisation $\int |\psi|^2 dV = N$. Cette équation est connue sous le nom d'équation de Gross-Pitaevskii ou encore d'équation de Schrödinger non-linéaire. Elle est valable sous l'hypothèse d'un gaz dilué $na^3 \ll 1$. Pour les problèmes dépendant du temps, l'équation devient

$$\left(\frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{r}}) + g|\psi(\hat{\mathbf{r}},t)|^2\right)\psi(\hat{\mathbf{r}},t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\hat{\mathbf{r}},t)}{\partial t}. \tag{2.22}$$

Ces équations vont nous permettre de modéliser l'état obtenu en fin de séquence expérimentale. L'équation stationnaire va nous permettre de décrire la distribution spatiale du condensat dans le piège final de notre dispositif, présenté à la section 2.3.2.2, tandis que l'équation dépendante du temps va nous permettre de décrire l'évolution de ce dernier lorsqu'il entre en chute libre : comme nous le verrons à la section 2.3.3.2, pour que le nuage atteigne une taille suffisamment grande pour être imagé, nous devons le laisser tomber afin qu'il puisse entrer en expansion.

2.2.2.2 Gaz en interaction dans un piège harmonique

Nous allons à présent utiliser le formalisme de Gross-Pitaevskii pour modéliser un condensat dans un potentiel harmonique. Comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre, nous pouvons approximer le piège tenant le nuage d'atomes en fin de séquence expérimentale par un tel potentiel.

Pour un condensat en interaction dans un potentiel harmonique isotrope de fréquence de piégeage ω dont la taille du mode fondamental est $a_{\text{oh}} = \sqrt{\hbar/m\omega}$, on peut considérer que l'énergie cinétique des atomes [6] est négligeable devant le terme d'interaction lorsque

$$Na \gg a_{\text{oh}}, \tag{2.23}$$

et lorsque l'on considère une région proche du centre du piège. C'est en effet au centre du piège que la densité atomique est importante et que, par conséquent, les interactions entre atomes le sont également. À l'inverse, cette condition n'est plus vérifiée stricto sensu sur les bords du piège, là où la densité atomique diminue. Lorsque l'on peut négliger l'énergie cinétique des atomes, nous obtenons une équation algébrique pour la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$

6. C'est-à-dire le terme proportionnel au Laplacien dans l'équation (2.21).

$$\left(\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + g|\psi(\mathbf{r})|^2\right)\psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}). \tag{2.24}$$

Elle se résout facilement et on trouve pour l'expression du profil de la fonction d'onde dans l'approximation de Thomas-Fermi

$$\Rightarrow \quad \psi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{g}\left(\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right)} & \text{si} \quad \mu > \frac{1}{2}m\omega^2 r^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.25}$$

Cette forme de $\psi(\mathbf{r})$ est ce qu'on appelle le profil de Thomas-Fermi, représenté sur la figure 2.5. Il s'agit d'une parabole inversée qui atteint son maximum au centre du piège. Le rayon du condensat R, appelé rayon de Thomas-Fermi, est la distance pour laquelle la densité s'annule $n(R) = |\psi(R)|^2 = 0$:

$$R = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}}. \tag{2.26}$$

Pour avoir une meilleure intuition du comportement de ce rayon en fonction des paramètres du système, on peut trouver une expression du potentiel chimique grâce à la condition de normalisation de la fonction d'onde. En intégrant la densité sur tout l'espace, on obtient

$$\int |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} = N \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\hbar\omega}{2}\left(15N\frac{a}{a_{\text{oh}}}\right)^{2/5}, \tag{2.27}$$

Avec cette expression, le rayon de Thomas-Fermi devient

$$R = a_{\text{oh}}\left(15\frac{Na}{a_{\text{oh}}}\right)^{1/5}. \tag{2.28}$$

On voit alors que le rayon du condensat est la taille du mode fondamental du piège harmonique a_{oh} renormalisé par un terme en Na/a_{oh}. C'est en effet ce rapport qui régit l'impact de l'énergie d'interaction du système, comme présenté au début de cette partie par la condition (2.23). L'effet des interactions répulsives est donc clair : elles élargissent le rayon du nuage au delà de ce que prédirait un modèle à un corps. Cela rend la distribution du nuage plus homogène et minimise l'énergie d'interaction du système.

On peut maintenant s'intéresser au résultat d'une expérience de temps de vol. C'est une méthode très répandue dans la communauté des atomes froids que nous utilisons sur notre dispositif pour imager l'état du condensat. Cela revient à éteindre le potentiel harmonique et laisser le condensat entrer en chute libre. De manière similaire au cas stationnaire, les interactions vont déterminer la géométrie du condensat au cours de son évolution en espace libre. Pour cela, il

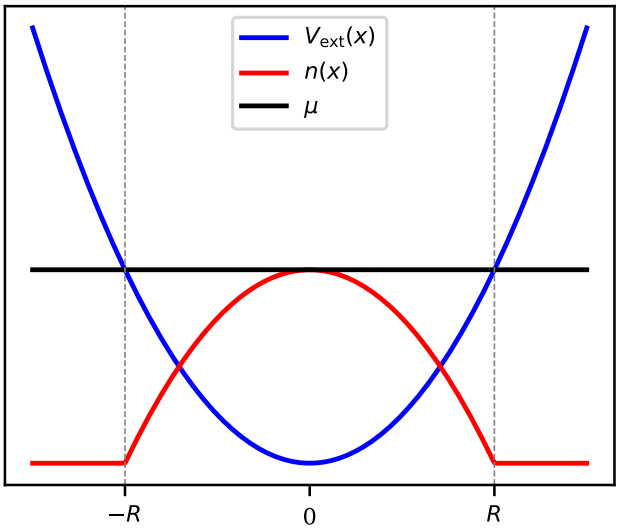


Figure 2.5 – Profil de Thomas-Fermi. Le potentiel confinant est représenté en bleu et la distribution spatiale des atomes est représentée en rouge. Tant que le potentiel chimique, représenté en noir, est supérieur au potentiel harmonique, la densité d'atomes est non nulle et adopte un profil de parabole inversée. Le rayon R du condensat correspond à l'intersection du potentiel chimique et du potentiel harmonique.

convient de résoudre l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps. Il est possible de le faire numériquement [47] ou analytiquement [48]. Dans ce cas, on trouve que la densité du condensat est dilatée au cours de la chute libre [48]

$$|\psi(\mathbf{r},t)|^2 = \frac{1}{g\lambda_x(t)\lambda_y(t)\lambda_z(t)}\left(\mu - \frac{m}{2}\sum_{j=x,y,z}\frac{\omega_j(0)^2 r_j^2}{\lambda_j^2(t)}\right), \tag{2.29}$$

où les $\lambda_j(t)$ sont des coefficients de dilatation [7] satisfaisant les équations différentielles

$$\frac{d^2\lambda_j}{dt^2} = \frac{\omega_j^2(0)}{\lambda_j\lambda_x\lambda_y\lambda_z} - \omega_j^2(t)\lambda_j. \tag{2.30}$$

Le profil parabolique est conservé durant le temps de vol des atomes avec un changement du rapport d'aspect du condensat, signature expérimentale caractéristique de ces nuages ultra-froids.

7. On notera que ce résultat est donné pour un piège harmonique anisotrope

Récapitulatif

Pour récapituler, prendre en compte les interactions entre atomes au sein d'un condensat est difficile mais il est possible de les modéliser en faisant plusieurs approximations : la première est que tous les atomes partagent la même fonction d'onde à un corps (valable dans le cas des gaz dilués qui nous concerne) et la deuxième est qu'ils interagissent via un potentiel de contact, potentiel le plus simple décrivant asymptotiquement les interactions. En minimisant l'énergie du nuage d'atomes, on aboutit à une équation pour cette fonction d'onde : l'équation de Gross-Pitaevskii. Cette équation n'est autre qu'une équation de Schrödinger non linéaire. Pour un condensat dominé par des interactions répulsives dans un piège harmonique, la densité adopte un profil de parabole inversée, appelé profil de Thomas-Fermi, caractéristique des gaz ultra-froids et ce profil est conservé lors d'une expérience de temps de vol.

Cependant, cette modélisation des interactions reste une approximation et il est parfois nécessaire de se tourner vers des descriptions plus sophistiquées pour comprendre les mécanismes de certains phénomènes. L'exemple le plus immédiat est la prise en compte du phénomène d'intrication dans le condensat qui ne peut être décrite par cette théorie (le condensat est décrit comme un produit tensoriel de fonctions d'onde à un corps, ce qui est exactement l'inverse de l'intrication). Comme théorie allant au-delà de cette approximation en champ moyen, on peut notamment citer la description de Bogoliubov-De Gennes [49] qui autorise qu'un ensemble d'atomes, dit atomes thermiques, quittent l'état fondamental vers des niveaux excités. De manière contre-intuitive, ce dépeuplement du niveau fondamental prédit par le modèle de Gross-Pitaevskii diminue davantage l'énergie du système et un nouvel état fondamental plus réaliste est obtenu. Cette description permet notamment d'aborder des effets de superfluidité.

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour se faire une intuition du comportement des condensats de Bose-Einstein et nous allons alors voir comment nous préparons cet état en pratique.

2.3 Dispositif expérimental

Réussir à produire et observer un condensat de Bose-Einstein représente un défi technique de taille : comme nous allons le voir, la production, la manipulation et l'observation d'un condensat requiert un environnement extrêmement contrôlé et implique diverses méthodes expérimentales non triviales à mettre en place. Dans la suite je présenterai le dispositif expérimental que nous utilisons permettant de produire des condensats de Bose-Einstein peuplés d'un nombre d'atomes

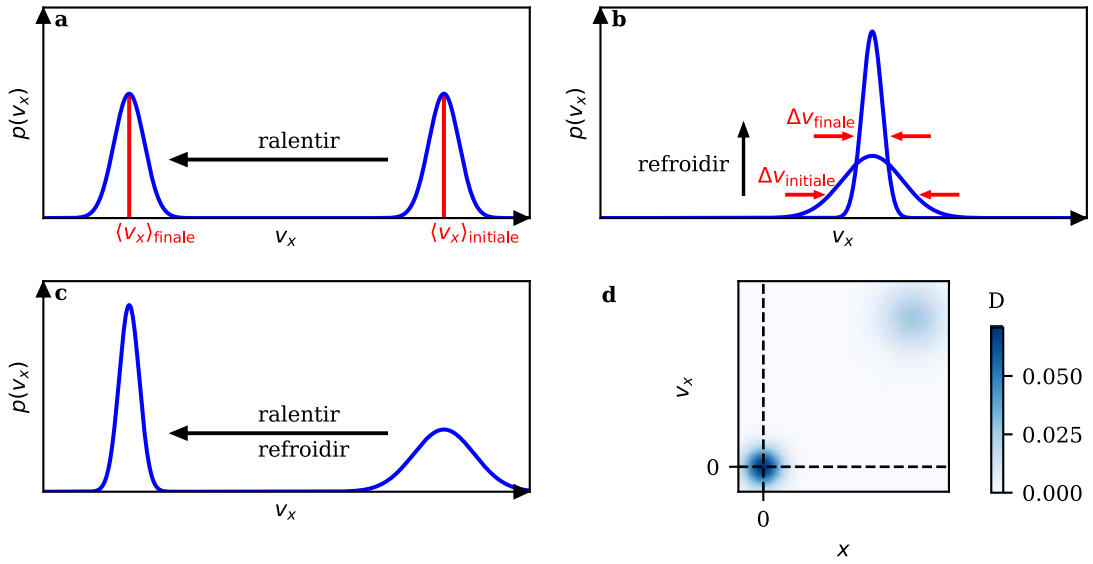


Figure 2.6 – Illustration des processus de ralentissement, refroidissement et de piégeage des atomes.

élevé et stable dans le temps avec une cadence respectable [50, 51].

Avant de commencer, il est important de rappeler succinctement ce que l'on entend par refroidir et ralentir un nuage d'atomes. Si la distribution de vitesses $p(v_x)$ d'un nuage d'atomes se déplaçant sur un axe x peut être modélisée par une fonction gaussienne avec une certaine valeur moyenne $\langle v_x \rangle$ et une certaine dispersion Δv_x, ralentir un nuage d'atomes revient à diminuer la valeur moyenne de cette distribution tandis que le refroidir revient à diminuer sa dispersion. Ces deux différents processus sont représentés sur les figures 2.6 **a** ainsi que 2.6 **b** et leur effet combiné est représenté sur la figure 2.6 **c**. Piéger le nuage d'atomes revient à fixer sa position moyenne et l'effet combiné du ralentissement, du refroidissement et du piégeage sont représentés sur la figure 2.6 **d** : il s'agit d'une représentation dans l'espace des phases (x, v_x) où la densité dans l'espace des phases est représentée par le code couleur. L'état initial, en haut à droite, est étalé dans l'espace des phases et, au fur et à mesure du refroidissement, la densité augmente jusqu'à l'état final. Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, si cette densité dépasse une certaine valeur seuil, alors le gaz d'atomes subira la transition de phase de condensation de Bose-Einstein. Nous allons expliciter ce chemin dans l'espace des phases dans les paragraphes suivants.

Je présenterai deux techniques expérimentales largement utilisées dans la communauté des atomes froids pour refroidir un nuage d'atomes. La première méthode est le piégeage et refroidissement d'atomes dans un piège magnéto-optique (PMO). Elle fut proposée originellement par Jean Dalibard [52] et mise en place pour la première fois par Steven Chu [53]. Il s'agit d'une méthode

extrêmement efficace qui diminue la dispersion en vitesse d'un nuage d'atomes grâce à de la lumière quasi-résonante avec une transition atomique tout en permettant de piéger le nuage d'atomes suivant deux ou trois dimensions d'espace.

La deuxième méthode est le refroidissement par évaporation qui fut proposé par Harald Hess [54] et mis en place par Eric Cornell et Carl Wieman [55] pour atteindre la condensation de Bose-Einstein. En effet, le piège magnéto-optique permet de refroidir le nuage en dessous d'une température limite [8], appelée température Doppler [56], mais pas suffisamment afin d'atteindre le régime de dégénérescence quantique : la lumière résonante induit une marche aléatoire des atomes dans l'espace des impulsions qui limite la température minimale atteignable dans ce type de dispositif. Pour aboutir à des températures suffisamment basses afin de parvenir au régime de condensation de Bose-Einstein, il convient d'utiliser des pièges conservatifs, c'est-à-dire magnétiques ou, dans le cas de pièges optiques, utilisant une lumière loin de résonance. La technique de refroidissement par évaporation revient à tronquer les classes de vitesses élevées de la distribution de vitesses du nuage d'atomes. Ce sont alors les collisions inter-atomiques qui entrainent la thermalisation du nuage à une température plus basse et diminue sa dispersion en vitesse.

Je présenterai ces méthodes au fur et à mesure que je décrirai la séquence expérimentale qui nous permet de produire un condensat de Bose-Einstein. J'ai choisi de la décomposer en trois parties :

— La première partie concerne nos pièges magnéto-optiques. Brièvement, nous transférons les atomes dans une cellule en verre sous ultra-vide dans laquelle toutes les expériences présentées dans cette thèse seront effectuées. Ce transfert est réalisé à l'aide d'un piège magnéto-optique bidimensionel (PMO-2D). Une fois transférés dans la cellule, les atomes sont piégés et refroidis à l'aide d'un piège magnéto-optique tridimensionel (PMO-3D) jusqu'à la température minimale de l'ordre de 50 μK.
— La deuxième partie présente les pièges conservatifs que nous utilisons. Afin de diminuer encore la température du nuage, les atomes sont chargés dans un piège magnétique. Dans ce piège, un refroidissement par évaporation à l'aide d'un champ micro-onde est effectué. La géométrie du piège magnétique permet d'atteindre des températures de l'ordre de 30 μK avant que la perte d'atomes ne devienne trop importante. La température critique, qui est de l'ordre de la centaine de nanokelvins, est finalement atteinte en continuant le refroidissement par évaporation dans un piège hybride : il s'agit d'une pince optique superposée au piège magnétique.
— La troisième partie détaille notre système d'imagerie. Nous terminons la séquence en me-

8. Initialement, il était estimé que la température la plus basse accessible dans un piège magnéto-optique était la température Doppler [56] mais il fut observé expérimentalement qu'il est était possible d'atteindre des températures plus basses [57]. Le mécanisme permettant d'atteindre ces températures est connu sous le nom *d'effet Sysiphe* [58].

surant l'état obtenu par une technique d'imagerie par absorption après un temps de vol des atomes.

2.3.1 Piège magnéto-optique et refroidissement Doppler

Je résume ici le principe de fonctionnement du piège magnéto-optique. Dans un premier temps, je rappelle les mécanismes de refroidissement puis, dans un second temps, je montre comment le piégeage d'atomes fonctionne au sein d'un PMO.

2.3.1.1 Principe de fonctionnement

Considérons un atome comme un système à deux niveaux dont le niveau excité, possédant un temps de vie $\tau = 1/\Gamma$, est séparé du niveau fondamental par une énergie $E = h\omega_0$. Cet atome est éclairé par un faisceau laser de fréquence ω tel que $\omega < \omega_0$. L'interaction lumière-matière peut être mise sous la forme de deux "forces lumineuses" qui s'appliquent sur l'atome [59] : une force dissipative, aussi appelée force de pression de radiation et une force conservative, aussi appelée force dipolaire. Leur expressions sont données par les équations

$$\mathbf{F}_{\text{dissipative}} = \frac{\hbar\Gamma}{4}\frac{\Omega^2\nabla\phi}{\delta^2+\Gamma^2/4+\Omega^2/2}, \tag{2.31}$$

$$\mathbf{F}_{\text{dipolaire}} = \frac{\hbar\delta}{4}\frac{-\nabla\Omega^2}{\delta^2+\Gamma^2/4+\Omega^2/2}, \tag{2.32}$$

où

- le désaccord par rapport à la transition atomique est $\delta = \omega - \omega_0$. Il est négatif dans notre cas et on parle alors de laser désaccordé vers le rouge,
- la phase du faisceau laser incident est ϕ,
- la pulsation de Rabi est $\Omega = \mathbf{d}\cdot\mathbf{E}/\hbar$ où $\mathbf{d}$ est le dipôle atomique. Elle est proportionnelle à l'amplitude du champ laser $\mathbf{E}$ et donne la force du couplage induit par le champ entre les deux niveaux de l'atome.

La force dissipative est une interaction avec les atomes via un processus d'absorption-émission spontanée tandis que la force dipolaire agit par un mécanisme d'absorption-émission stimulée virtuelle. Il est intéressant de noter que le rapport de ces deux forces varie comme

$$\frac{\|\mathbf{F}_{\text{dissipative}}\|}{\|\mathbf{F}_{\text{dipolaire}}\|} \propto \frac{\Gamma}{\delta}, \tag{2.33}$$

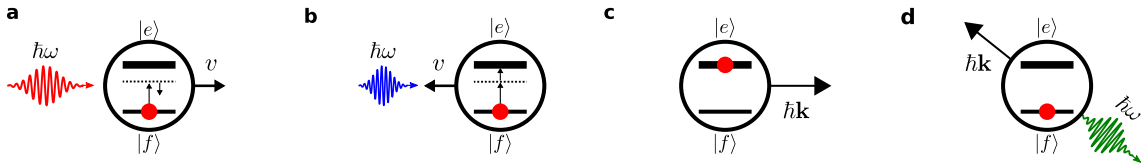


Figure 2.7 – Principe du refroidissement Doppler. a : Un photon désaccordé vers le rouge se propageant dans le même sens que l'atome sera perçu par ce dernier avec une fréquence plus basse et aura moins de chance d'être absorbé. **b** : Si l'atome se propage en sens inverse, la fréquence perçue sera plus élevée et donc plus proche de résonance, ce qui augmente la probabilité d'absorption. **c** : Une fois le photon absorbé, l'atome passe dans l'état excité et y reste pendant une durée de l'ordre du temps de vie $\tau = 1/\Gamma$. Lors de l'absorption, l'atome perd un quantum d'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ dans la direction de propagation du photon. **d** : Au bout du temps de vie typiquement, l'atome ré-émet un photon dans une direction aléatoire et perd un quantum d'impulsion dans cette direction.

ce qui permet de savoir rapidement quelle force domine selon la valeur du désaccord comparée à la largeur de la transition atomique. Dans le cas du piège magnéto-optique, c'est la force dissipative qui est utilisée pour ralentir les atomes et c'est sur cette force que nous allons nous concentrer dans les prochains paragraphes. On parle dans ce cas de refroidissement par effet Doppler. Nous reviendrons sur la force dipolaire lorsque je présenterai le piège hybride.

Principe du refroidissement : Considérons un atome sur un axe x illuminé par un faisceau laser de vecteur d'onde $\mathbf{k}$, parallèle à l'axe x, et de fréquence ω. Dans le cas où l'atome est immobile, la probabilité d'absorption d'un photon est faible à cause du désaccord δ. En revanche, pour un atome en mouvement avec une vitesse $\mathbf{v}$, un photon d'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ aura une fréquence perçue par l'atome modifiée par effet Doppler $\omega' = \omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$. Plus précisément, pour un atome se déplaçant dans le même sens que le photon $v \propto k$ et donc $\omega' = \omega - kv$: la probabilité d'absorption diminue car la fréquence est encore plus abaissée par rapport à celle de la transition atomique. En revanche, si l'atome se déplace dans le sens contraire au photon, alors $v \propto -k$ et la fréquence du photon sera perçue plus proche de la transition atomique $\omega' = \omega + kv$. On voit alors qu'en choisissant un désacord négatif, l'atome aura plus de probabilité d'absorber un photon se propageant dans la direction opposée à sa vitesse qu'un photon se propageant dans la même direction.

Or, lorsqu'il est absorbé, le photon transfère son impulsion $\hbar k$ à l'atome. En d'autres termes, l'atome recule très légèrement dans la direction de propagation du photon à chaque absorption. Après un temps de vie de l'état excité, l'atome peut ré-émettre un photon par émission spontanée. Cependant, le processus d'émission spontanée est isotrope : la direction de l'émission du photon peut se faire dans n'importe quelle direction. En moyenne, la désexcitation ne modifie pas l'impulsion de l'atome. Finalement, en faisant un bilan d'impulsion sur un grand nombre de cycles

d'absorption-émission, l'atome acquiert une vitesse $v - \hbar k/m$. Ces processus d'absorption-émission sont résumés sur la figure 2.7.

En considérant à présent une paire de faisceaux lasers contra-propageants, l'atome ressent une force moyenne qui s'oppose à sa vitesse [9]

$$\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}, \tag{2.34}$$

ou en d'autres termes, une force de frottement visqueux. C'est la raison pour laquelle on parle de mélasse optique quand on mentionne le refroidissement Doppler. Cette technique diminue la vitesse des atomes et combine un effet de ralentissement et refroidissement du nuage. Le refroidissement par effet Doppler est très efficace et permet d'amener un ensemble atomique initialement à température ambiante à une température limite, appelée température Doppler [60]

$$T_{\mathrm{Dop}} = \frac{\hbar \Gamma}{2k_B}, \tag{2.35}$$

qui de l'ordre de 150 μK dans le cas du rubidium (sur notre dispositif, c'est par ce mécanisme que le plus grand saut en ordre de grandeur de température est effectué et il n'y a aucune perte d'atomes [10]). On peut donc déjà imaginer à ce stade une combinaison de six faisceaux permettant de ralentir et refroidir les atomes selon les trois dimensions de l'espace. Néanmoins, la température minimale atteignable dans un PMO n'est pas assez basse pour atteindre la condensation de Bose Einstein et il est nécessaire d'utiliser le refroidissement par évaporation pour réduire la température du nuage sous cette limite.

Le raisonnement que nous venons de faire ne concerne cependant que la vitesse des atomes : les faisceaux lasers seuls ne permettent pas d'influencer leur position. Pour contourner cette limitation, une description de l'atome par un système à deux niveaux ne suffit plus et il faut considérer la dégénérescence de l'état excité. Nous allons voir qu'il est possible de contraindre la position des atomes en ajoutant un gradient de champ magnétique et en exploitant la polarisation de la lumière.

Principe du piégeage : Nous allons à présent voir comment la position des atomes peut être contrainte dans une région de l'espace. Pour cela, nous considérerons que l'état excité possède à présent trois sous-états magnétiques que nous dénommerons par $|F = 1, m_F = -1, 0, 1\rangle$.

En ajoutant un champ magnétique **B** la dégénérescence des sous-niveaux Zeeman de l'atome est levée. Plus l'intensité du champ est grande, plus la levée de dégénérescence l'est également.

9. $\alpha = -\hbar k_L^2 \Omega^2 \delta\Gamma / (\Gamma^2/4 + \Omega^2 + \delta^2)$

10. On vient façonner la distribution en vitesse et non pas filtrer les particules les plus énergétiques comme nous le ferons quand nous verrons le fonctionnement du prochain piège

Un gradient de champ de magnétique lève donc la dégénérescence des sous-niveaux Zeeman linéairement avec la position d'un atome. Pour un champ magnétique quadrupolaire, le champ s'annule en un point, lequel est considéré comme étant le centre du piège, et l'intensité du champ croit linéairement avec la distance par rapport à cette origine : dans ce cas, la levée de dégénérescence des sous-états Zeeman est donc symétrique spatialement par rapport au centre du piège.

Dans le piège magnéto-optique, l'idée du piégeage est de favoriser l'absorption de photons se propageant à l'encontre du mouvement des atomes de manière à les ramener au centre du piège. Le choix de cette direction privilégiée s'effectue par le transfert des atomes vers un sous-état Zeeman choisi en utilisant la polarisation des photons : l'atome est illuminé par deux faisceaux lasers contrapropageants et nommons le vecteur d'onde du faisceau laser se propageant vers les x négatifs k_1 et celui se propageant vers les x positifs k_2 comme représenté sur la figure 2.8. Compte tenu du désaccord négatif, le seul sous-niveau de l'état excité accessible est le sous-niveau $|F = 1, m_F = -1\rangle$. La projection du moment magnétique de l'atome m_F doit donc être anti-alignée par rapport au champ magnétique $\mathbf{B}$. Pour un atome se déplaçant

— vers les x positifs et illuminé par le laser de vecteur d'onde k_1, la polarisation du photon doit être σ^- afin de transférer les atomes vers $|F = 1, m_F = -1\rangle$ [11].
— vers les x négatifs, comme le sens du champ magnétique s'inverse, la polarisation du photon du laser de vecteur d'onde k_2 doit être inversée par rapport au laser de vecteur d'onde k_1 afin de transférer les atomes vers $|F = 1, m_F = -1\rangle$.

C'est la raison pour laquelle il convient d'utiliser deux polarisations opposées σ^- et σ^+ pour chacun des faisceaux contra-propageants formant le PMO : un atome se déplaçant vers les $x > 0$ aura alors plus de chance d'absorber un photon σ^- du laser de vecteur d'onde k_1 et vice versa ce qui tendra à le ramener au point d'équilibre $x = 0$. Plus formellement, le désaccord δ devient alors fonction de la position x des atomes et son expression est donnée par [50]

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(0) + \frac{1}{\hbar} g_F m_F \mu_B |\mathbf{B}(\mathbf{r})| + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}, \tag{2.36}$$

où g_F est le facteur de Landé de l'état excité $|F, m_F\rangle$, que nous avons considéré ici positif, et μ_B est le magnéton de Bohr. Comme $m_F = -1$, on voit que plus les atomes s'écartent du centre du piège, plus le désaccord diminue et donc plus il devient probable d'absorber un photon du laser contrapropageant. En présence du champ magnétique, les atomes ressentent alors une force de rappel en plus de la force de frottement visqueux [12]

11. c'est-à-dire tournant de l'axe z vers l'axe y sur le schéma 2.8 **a**.
12. $\underline{\underline{\kappa}} = \hbar k_L \alpha / g_F m_F \mu_B \nabla \mathbf{B}$

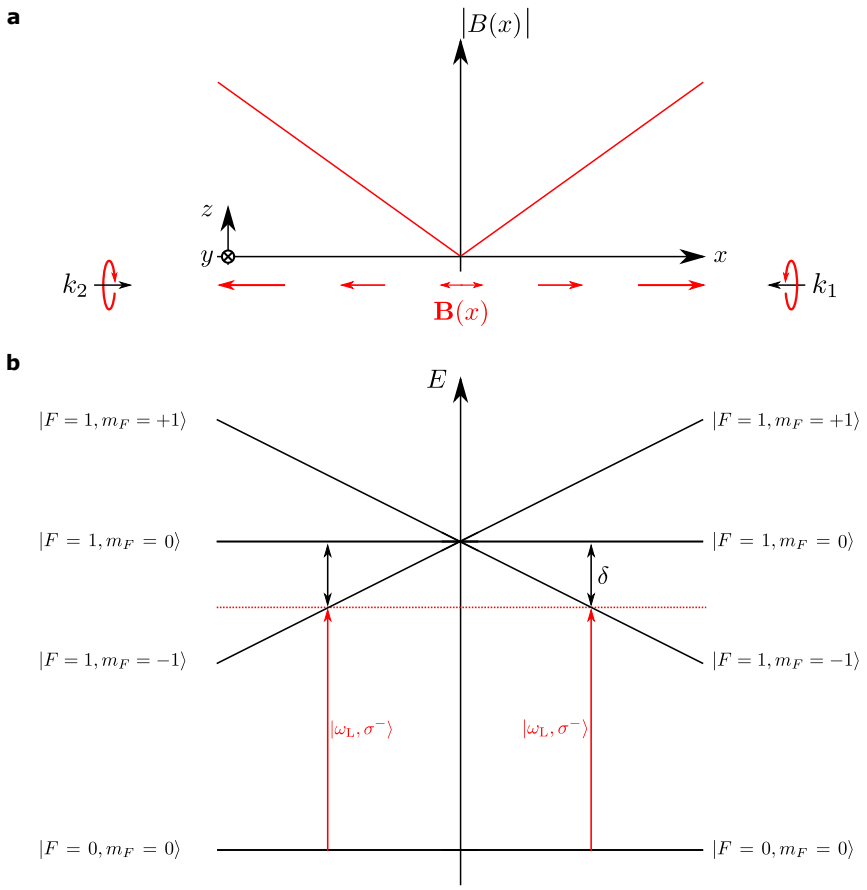


Figure 2.8 – Principe du piégeage dans un piège magnéto-optique (PMO). Les atomes sont immergés dans un champ magnétique quadrupolaire $B(x)$ et soumis à deux ondes lasers de vecteur d'onde k_1 et k_2. **a** : Profil du champ magnétique quadrupolaire. Le sens du champ magnétique et son intensité sont indiqués par les flèches rouges. La polarisation des photons laser est indiquée par la flèche en rotation autour de chacun des vecteurs d'onde. **b** : Levée de dégénérescence des sous-états Zeeman en présence d'un champ magnétique quadrupolaire. L'absorption d'un photon est représentée par les transitions rouges.

$$\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{v} - \underline{\underline{\kappa}}\mathbf{x}, \tag{2.37}$$

où, de part la géométrie du champ magnétique, $\underline{\underline{\kappa}}$ est un tenseur de rang 2.

Récapitulatif

Pour récapituler, lorsqu'un atome en mouvement est soumis à un champ laser, la fréquence du photon perçue par l'atome est modifiée par effet Doppler. Pour un laser désaccordé vers le rouge, un photon se propageant à l'encontre de l'atome sera perçu plus proche de résonance et aura donc une plus grande probabilité d'être absorbé et vice-versa. Dans ce cas, chaque absorption s'accompagne d'un transfert d'impulsion $\hbar k$ dans la direction de propagation du photon et il est en de même pour chaque dé-excitation mais dans une direction aléatoire : en moyenne, l'atome ressent une force de frottement visqueux. En ajoutant un champ magnétique quadrupolaire, la dégénérescence des sous-niveaux Zeeman est levée avec la position de l'atome par rapport au centre du piège, favorisant l'absorption de photons incidents possédant la bonne polarisation. Cela crée alors une force de rappel qui piège les atomes.

Maintenant que nous avons rappelé le principe du refroidissement Doppler, nous allons voir comment il est mis en place expérimentalement.

2.3.1.2 Mise en œuvre expérimentale

Dans la partie précédente, nous avons considéré un système à deux niveaux d'énergie dont l'état excité était dégénéré. Cependant, nous avons en réalité affaire à des atomes qui possèdent une structure de niveaux plus complexe. Nous allons voir comment nous pouvons, en préparant soigneusement la lumière avec laquelle nous allons éclairer les atomes, considérer ces derniers effectivement comme des systèmes à deux niveaux. Pour cela, nous allons succinctement rappeler la structure de niveaux du rubidium et les règles de sélection qui régissent les différentes transitions.

Le spectre du rubidium ^{87}Rb est donné sur la figure 2.9. Nous utilisons la transition entre les états $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2}$ de longueur d'onde 780.24 nm pour ralentir, refroidir, piéger et imager les atomes. On nomme cette transition la raie D_2. L'état fondamental possède deux niveaux hyperfins que je dénommerai par $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ alors que l'état excité de la raie D_2 en possède quatre que je nommerai $|F' = 0, 1, 2, 3\rangle$ dans la suite de cette thèse. Plus précisément, nous transférons les atomes de l'état $|F = 2\rangle$ vers l'état $|F' = 3\rangle$ pour le refroidissement Doppler. Cependant, dans ce système de niveaux, les règles de sélection autorisent les transitions telle que $\Delta F = 0, +1, -1$ et il existe donc plusieurs voies de désexcitation possibles de l'état excité. Nous allons voir par la suite comment il est possible de conserver les atomes dans une seule transition cyclante.

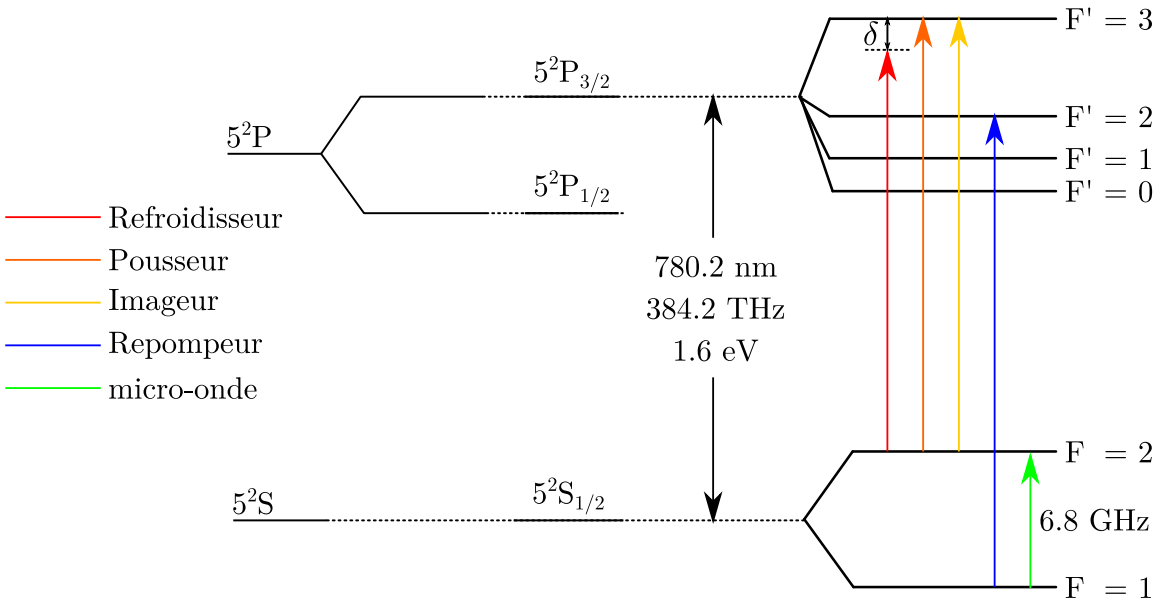


Figure 2.9 – Spectre du rubidium ^{87}Rb. En rouge, la fréquence de transition utilisée pour les faisceaux refroidisseurs des PMO-2D et 3D, en orange celle du faisceau pousseur et en jaune celle du faisceau imageur. En bleu, la transition utilisée pour le faisceau repompeur. En vert, la transition d'évaporation micro-onde.

Les états $|F' = 2\rangle$ et $|F' = 3\rangle$ étant proches en énergie [13], une partie des atomes se retrouve dans l'état $|F' = 2\rangle$ lors du refroidissement par effet Doppler. Or, d'après les règles de sélection que nous venons de donner, les atomes peuvent se dé-exciter de $|F' = 2\rangle \rightarrow |F = 1\rangle$, ce qui les sortirait du cycle d'absorption-émission nécessaire au refroidissement. En pratique, ils sont maintenus dans la transition cyclante par un laser dit "repompeur" : il s'agit d'un faisceau résonant avec la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$. Statistiquement, une partie des atomes transférés dans l'état $|F' = 2\rangle$ via cette transition se désexcite à nouveau dans l'état $|F = 2\rangle$ et se retrouve donc dans le cycle d'absorption-émission : en ajoutant le faisceau repompeur, on peut alors approximer les atomes de rubidium comme des systèmes à deux niveaux $|F = 2\rangle$ et $|F' = 3\rangle$.

Nous allons à présent voir comment ces lasers sont utilisés avec le PMO-2D. Le rubidium, initialement stockés dans un queusot, est chauffé afin de produire une vapeur. La fonction du PMO-2D est de focaliser cette vapeur selon un axe parallèle à la table optique afin de créer un jet atomique lent et colimaté [62].

13. 267 MHz séparent l'état $|F' = 2\rangle$ de l'état $|F' = 3\rangle$ [61] et nous utilisons un désaccord maximal de $|\delta| = 7\Gamma \simeq$ 42 MHz.

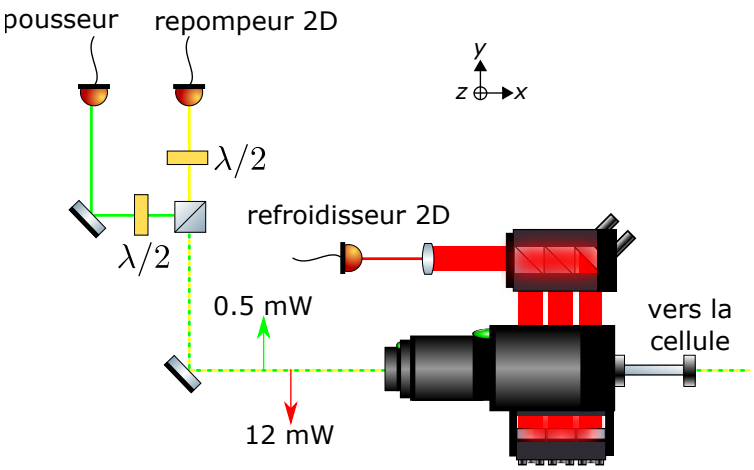


Figure 2.10 – Schéma de montage du PMO-2D. Les faisceaux refroidisseurs (rouges) sont injectées dans le PMO-2D par fibre optique (les deux entrées sont représentées l'une au dessus de l'autre). Les faisceaux repompeur 2D (jaune) et pousseur (vert) sont acheminés sur la table d'expérience par fibre optique, mais injectés dans le PMO-2D en espace libre via un hublot. L'axe de ces faisceaux est l'axe du jet atomique produit par le PMO-2D.

2.3.1.3 Le piège magnéto-optique 2D

La première étape vers la condensation est d'amener les atomes vers une cellule sous ultra-vide. Pour cela, nous utilisons un piège magnéto-optique bidimensionnel construit par le laboratoire du SYRTE à Paris [63]. Ce dispositif produit un jet ralenti et collimaté d'atomes permettant un chargement rapide du piège magnéto-optique 3D qui sera décrit dans la prochaine partie.

Son fonctionnement est le suivant : une vapeur d'atomes est produite en chauffant du rubidium contenu dans un queusot, les atomes s'évaporent alors jusqu'à atteindre une enceinte où un système optique et magnétique permet de les refroidir et de les focaliser pour créer le jet atomique.

Un schéma de montage du PMO-2D est donné sur la figure 2.10. Le PMO-2D dispose de deux entrées de fibre optique pour des lasers de refroidissement, en rouge sur la figure 2.10, que nous injectons chacun avec avec une puissance d'environ 45 mW. Il est équipé de deux paires de bobines de champ magnétique qui, combinées aux faisceaux refroidisseurs, permettent de refroidir les directions transverses à l'axe de focalisation. Il est également équipé d'un hublot qui procure un accès optique supplémentaire dans la direction longitudinale de focalisation du jet atomique. Afin de maintenir les atomes dans la transition cyclante $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$, un faisceau repompeur, en jaune sur la figure 2.10, d'une puissance de 12 mW est injecté par ce hublot. Les atomes peuvent alors se propager le long de l'axe sur lequel ils sont focalisés jusqu'à la cellule sous ultra-

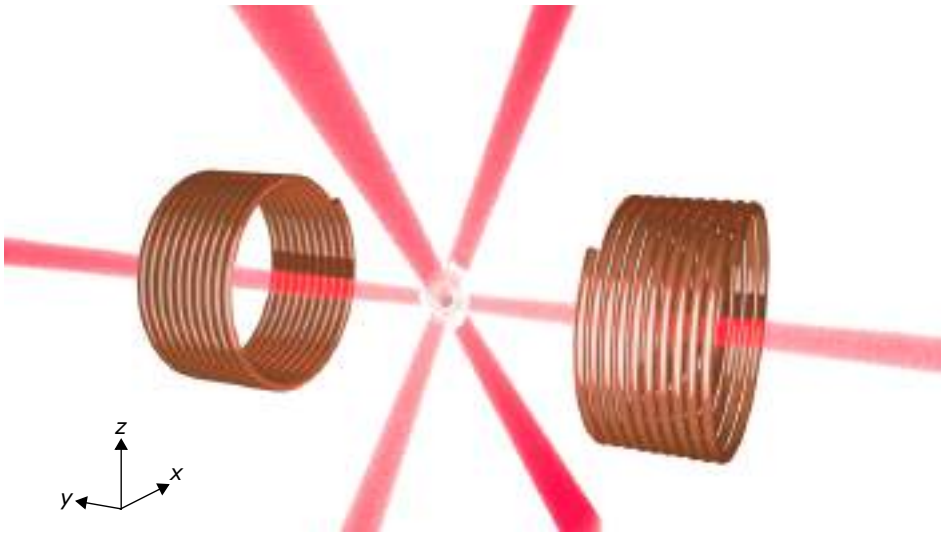


Figure 2.11 – Schéma représentatif du piège magnéto-optique. Six faisceaux à 780 nm et de rayon d'environ 1 cm sont croisés sur le zéro de champ magnétique créé par deux bobines. Deux faisceaux repompeurs sont superposés aux faisceaux refroidisseurs horizontaux. Deux faisceaux contra-propageants ont des polarisations circulaires opposées. Le nuage d'atomes est symbolisé par le halo bleu au niveau du croisement.

vide dans laquelle ils sont capturés par un PMO-3D. Pour forcer les atomes à se propager dans cette direction, un autre faisceau résonant d'une puissance d'environ 500 µW, appelé "pousseur", représenté en vert sur la figure 2.9, est superposé au faisceau repompeur. Ce faisceau pousseur augmente le flux d'atomes d'un facteur 10 environ.

Nous allons à présent voir la mise en œuvre ainsi que la séquence expérimentale du PMO-3D.

2.3.1.4 Le piège magnéto-optique 3D

L'idée du piège magnéto-optique 3D est d'utiliser le refroidissement par effet Doppler non plus pour focaliser les atomes selon un axe mais pour les piéger en un point. En superposant six faisceaux refroidisseurs d'une puissance de 36 mW contrapropageants deux à deux en un point de l'espace, les atomes se trouvent comme englués : c'est l'effet de mélasse optique [64] qui refroidit les atomes. Une paire de bobines de champ magnétique permet alors de créer la force de rappel qui piège les atomes. Un schéma du piège magnéto-optique est présenté sur la Figure 2.11. Les schémas des montages optiques permettant de réaliser les faisceaux refroidisseurs et repompeurs pour les PMO-2D et 3D sont détaillés en annexe A et B.

La séquence expérimentale permettant de refroidir le nuage d'atomes chargé dans le PMO-3D est présentée sur la figure 2.12.

Elle débute par le chargement du PMO-3D. Il s'agit simplement d'une durée pendant laquelle les faisceaux refroidisseurs 2D, repompeur 2D, pousseur et les bobines magnétiques sont allumés. En environ quatre secondes, nous chargeons typiquement $1.5 \cdot 10^9$ atomes dans le PMO-3D à une température d'environ 250 μK [14].

À la fin du chargement, une étape de "phase sombre" est effectuée pour obtenir une meilleure densité atomique [51]. Elle consiste globalement à diminuer drastiquement la puissance du faisceau repompeur pendant environ 20 ms juste après le chargement du PMO-3D. Cela concentre les atomes au centre du piège, ce qui facilite le piégeage et augmente la densité atomique.

Ensuite, une première étape de refroidissement, dite de mélasse dynamique [64], est effectuée. Pour cette étape, nous coupons brutalement le champ magnétique du PMO-3D, diminuons la puissance des faisceaux refroidisseurs et augmentons linéairement la valeur absolue du désaccord des faisceaux pendant 15 ms. De cette manière, la température $T \sim P/\delta$ du nuage est diminuée [50], avec P la puissance des faisceaux de refroidissement. Cela permet d'obtenir un nuage de $1 \cdot 10^9$ atomes à une température d'environ 50 μK. On estime la densité dans l'espace des phases à la fin de cette étape à $\mathcal{D} \sim 10^{-9}$.

La température atteinte n'est pas assez basse aux densités maximales atteignables dans ce type de piège pour atteindre le régime de dégénérescence quantique. On peut se représenter cette limite de la manière suivante : la mélasse optique est limitée en température du fait qu'elle repose sur de l'absorption-émission, entraînant nécessairement une diffusion de l'impulsion des atomes qui garde le nuage "trop chaud". Utiliser de la lumière résonante n'est alors plus possible et, pour poursuivre le refroidissement du nuage, les atomes sont transférés dans un piège magnétique.

Pour effectuer ce transfert, il faut préparer les atomes dans un état piégeant. Le choix de l'état s'est porté sur le sous-niveau $|F = 1, m_F = -1\rangle$. Pour préparer les atomes dans cet état, une étape de dépompage est effectuée. Cela consiste à éteindre le faisceau repompeur pendant 5 ms. Durant ce laps de temps, les atomes sortent peu à peu de la transition cyclante et sont prêts à être capturés par le piège magnétique. Malheureusement, une grande partie des atomes sont perdus pendant cette étape : le niveau $|F = 1\rangle$ possède trois sous-niveaux Zeeman $m_F = -1, 0, 1$ dont seul $m_F = -1$ est piégeant. Or, les atomes se répartissent presque uniformément dans ces trois sous-niveaux ce qui implique que les atomes des sous-niveaux $m_F = 0, 1$ sont perdus, soit environ deux tiers d'entre eux.

14. Le temps de chargement du PMO-3D est un des moyens que nous utilisons pour ajuster le nombre d'atomes dans le condensat en fin de séquence expérimentale : en effet, nous verrons qu'il est parfois nécessaire de diminuer le nombre d'atomes pour limiter les effets des interactions et retrouver une physique à un corps.

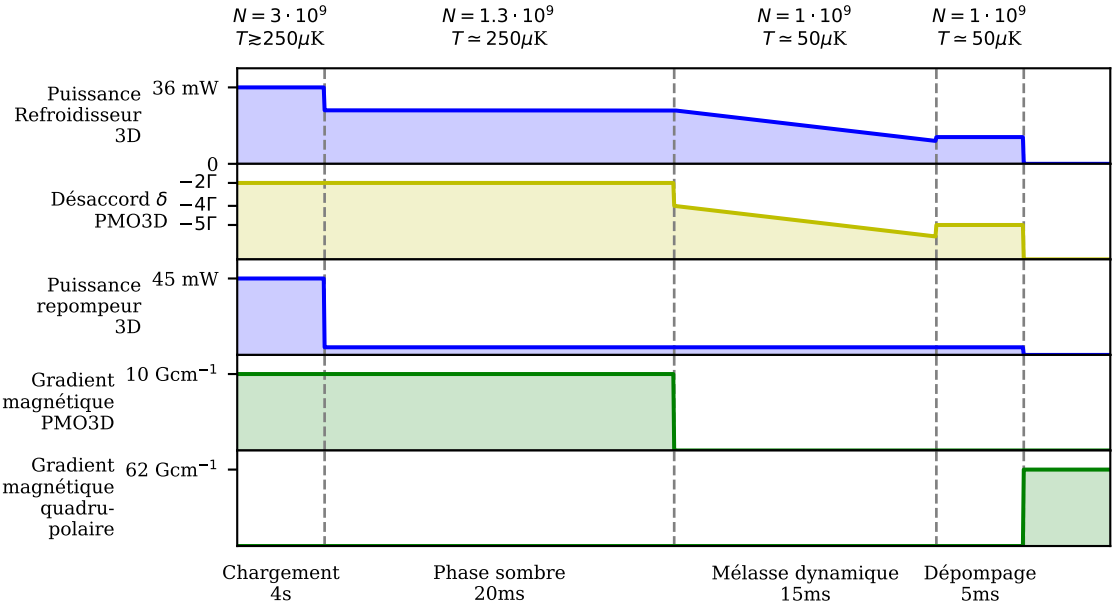


Figure 2.12 – Séquence expérimentale de refroidissement dans le PMO-3D

Une fois le transfert dans le piège magnétique effectué, un refroidissement par évaporation micro-onde continue d'augmenter la densité dans l'espace des phases. Nous allons présenter cette technique dans la partie suivante.

2.3.2 Pièges conservatifs et refroidissement par évaporation

Comme dit précédemment, le piège magnéto-optique seul ne permet pas d'atteindre le régime de condensation de Bose-Einstein [65] et une étape de refroidissement supplémentaire est nécessaire. La technique de refroidissement par évaporation [53] a été reconnue comme très efficace pour diminuer la température en dessous de la température atteignable dans un piège magnéto-optique. L'idée du refroidissement par évaporation est de tronquer le potentiel ressenti par les atomes pour laisser les particules les plus énergétiques s'échapper du piège. Le reste des particules se re-thermalise par collisions élastiques à une température plus basse.

2.3.2.1 Refroidissement par évaporation dans le piège magnétique

Sur notre expérience, le refroidissement par évaporation s'effectue dans deux pièges : un premier purement magnétique puis dans la superposition de ce piège magnétique et d'une pince optique que nous nommons un piège hybride. Dans la prochaine partie, nous allons présenter les mécanismes de l'évaporation dans le piège magnétique puis nous allons expliciter sa mise en

œuvre expérimentale.

Principe du refroidissement par évaporation dans un piège magnétique : Pour aborder le refroidissement par évaporation dans un piège magnétique, considérons un atome dans un état hyperfin donné $|F, m_F\rangle$ évoluant dans un champ magnétique quadrupolaire de gradient b'

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{b'}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Le potentiel ressenti par l'atome résultant de l'interaction de son dipôle et du champ magnétique est représenté pour deux sous-états $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|F = 2, m_F = -1\rangle$ du niveau fondamental sur la figure 2.13 **b**. L'expression de ce potentiel est

$$V_{\text{mag}}(\mathbf{r}) = g_F m_F \mu_B |\mathbf{B}(\mathbf{r})|. \tag{2.39}$$

avec g_F le facteur de Landé. Le caractère piégeant ou anti-piégeant de cette interaction dépend du signe du produit $g_F m_F$ pour l'état dans lequel se trouve l'atome : l'état sera piégeant pour les $g_F m_F$ positif et non piégeant dans le cas contraire. Pour effectuer une étape de refroidissement par évaporation dans le piège magnétique, l'idée est de transférer les atomes les plus énergétiques vers un sous-état magnétique non piégeant pour ne conserver dans le piège magnétique que la population d'atomes la moins énergétique. Une fois ce transfert effectué et après un temps de thermalisation, la température du nuage est diminuée. La fréquence de transition est choisie pour que les atomes éjectés du piège soient ceux qui explorent la périphérie du nuage d'atomes, ceux qui possèdent assez d'énergie pour s'y rendre. On ajuste alors la fréquence de rayonnement pour transférer les atomes se trouvant à un certain rayon du centre du piège magnétique vers un état anti-confinant : la fréquence micro-onde est progressivement augmentée pour évaporer des atomes de plus en plus proches du centre du piège comme représenté sur la figure 2.13 **a**.

Le refroidissement par évaporation repose donc sur un filtrage de la distribution de vitesses des particules à l'inverse du PMO-3D où elle était directement façonnée sans aucune perte. La prochaine partie présente comment ce piège est mis en place et utilisé expérimentalement.

Mise en œuvre expérimentale : Le piège quadrupolaire est obtenu à l'aide de trois paires de bobines magnétiques en configuration anti-Helmholtz autour du PMO-3D comme représenté sur la figure 2.14. Chaque bobine est faite d'un tube de cuivre enroulé et branché à une alimentation pouvant délivrer un courant allant jusqu'à 160 A. Afin d'éviter que ces bobines ne chauffent trop lors de leur utilisation, elles sont refroidies par une circulation d'eau dans les tubes de cuivre. le gradient de champ magnétique ainsi obtenu peut atteindre la valeur maximale de $b' = 300\ \text{Gcm}^{-1}$.

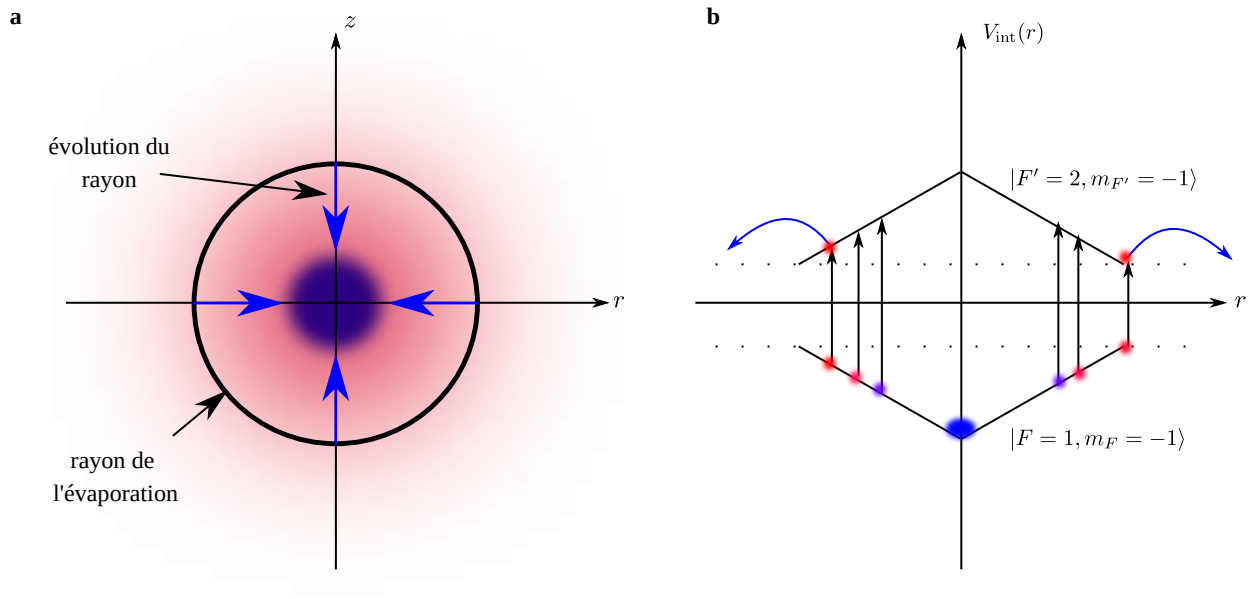


Figure 2.13 – Principe du refroidissement par évaporation dans un piège magnétique. a : Représentation spatiale du processus d'évaporation. Uniquement les classes d'atomes à une distance imposée par la fréquence micro-onde voient leur spin retourné par la fréquence micro-onde. Ils ne sont alors plus maintenus dans le piège et sont évaporés. **b** : Représentation énergétique du processus d'évaporation micro-onde. Les évolutions spatiales des sous-niveaux Zeeman impliqués lors de l'évaporation sont représentées par les lignes noires.

Le zéro du champ magnétique est environ 75 μm au dessus de celui créé par les bobines du PMO-3D. La position horizontale du zéro selon l'axe x peut être ajustée à l'aide d'une bobine de compensation (non représentée sur la figure 2.14).

La séquence expérimentale de refroidissement par évaporation dans ce piège est donnée sur la figure 2.15. Nous commençons par charger les atomes dans le piège magnétique depuis le PMO-3D : pour cela nous éteignons le PMO-3D et allumons le champ magnétique en 500 millisecondes. Seuls les atomes dans le bon sous-niveau piégeant sont gardés et le reste du nuage est perdu. On obtient alors un nuage d'environ $6 \cdot 10^8$ atomes à une température de 140 μK.

Comme le refroidissement par évaporation repose sur la thermalisation du nuage d'atomes, une compression adiabatique du piège est effectuée pour augmenter le taux de collisions. Cela a pour effet indésirable d'augmenter la température du nuage à environ 190 μK mais, le taux de collisions étant élevé, l'évaporation est alors efficace. Le transfert vers un état anti-piégeant est fait via une transition micro-onde entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|F = 2, m_F = -1\rangle$. Les atomes à une certaine distance du centre du piège voient leur spin changer d'état et sont donc éjectés du piège.

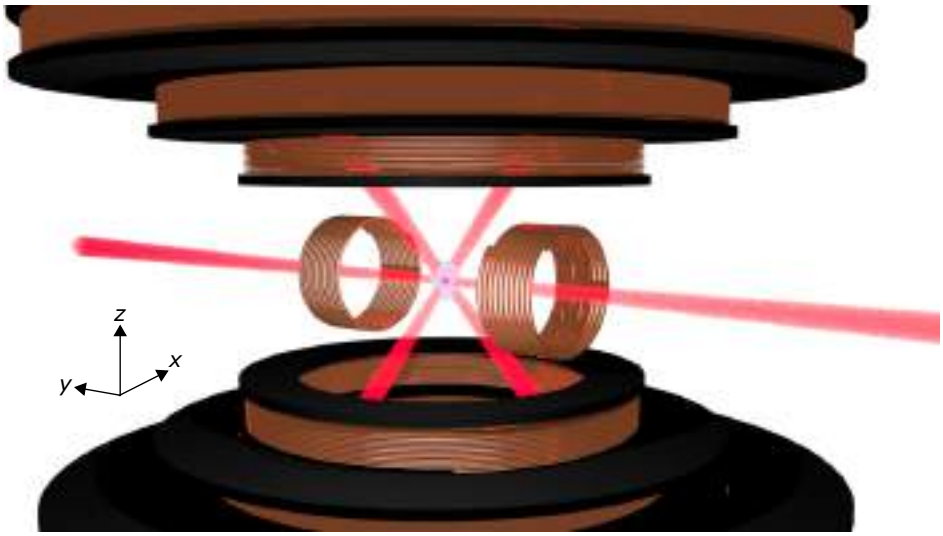


Figure 2.14 – Schéma représentatif du piège magnétique. Trois paires de bobines de champ magnétique en configuration anti-Helmholtz sont ajoutées au dessus et en dessous du PM0-3D (selon l'axe z). Elles forment un champ magnétique quadrupolaire dont le zéro est légèrement au dessus de celui créé par les bobines du PMO-3D (la paire de bobines selon l'axe y). Le nuage d'atomes est symbolisé par le halo bleu au niveau du croisement des faisceaux.

L'évaporation est maintenue jusqu'à ce que les pertes Majorana deviennent trop importantes [50, 51], c'est-à-dire pendant 12 s. Ces pertes désignent la perte du suivi adiabatique de l'orientation du champ magnétique par le moment magnétique atomique à l'endroit où le champ se retourne. Cela entraîne alors les atomes vers un autre sous-niveau anti-confinant et les éjecte du piège. Ce retournement de spin concerne les atomes se trouvant proches du zéro de champ magnétique puisque c'est à cet endroit que le champ magnétique change brutalement de direction. Il s'agit des atomes les moins énergétiques qu'il est indispensable de conserver dans le piège.

Pour palier à ces pertes qui sont d'autant plus importantes que le nuage est dense et froid, on arrête dans un premier temps le rayonnement micro-onde. On obtient alors un nuage d'environ $8 \cdot 10^7$ atomes à 55 μK. La densité dans l'espace des phases à la fin de cette étape est estimée à $\mathcal{D} \sim 10^{-7}$.

Puis, nous transférons les atomes dans le piège hybride. Pour cela, nous superposons au champ magnétique un faisceau laser de longueur d'onde de 1064 nm à 3.5 W en entrée de cellule qui ajoute alors un confinement harmonique au piège quadrupolaire. Le piège magnétique est ensuite décomprimé en deux étapes d'une seconde chacune pour laisser les atomes passer dans la pince optique. Le nuage est alors prêt à être refroidi davantage.

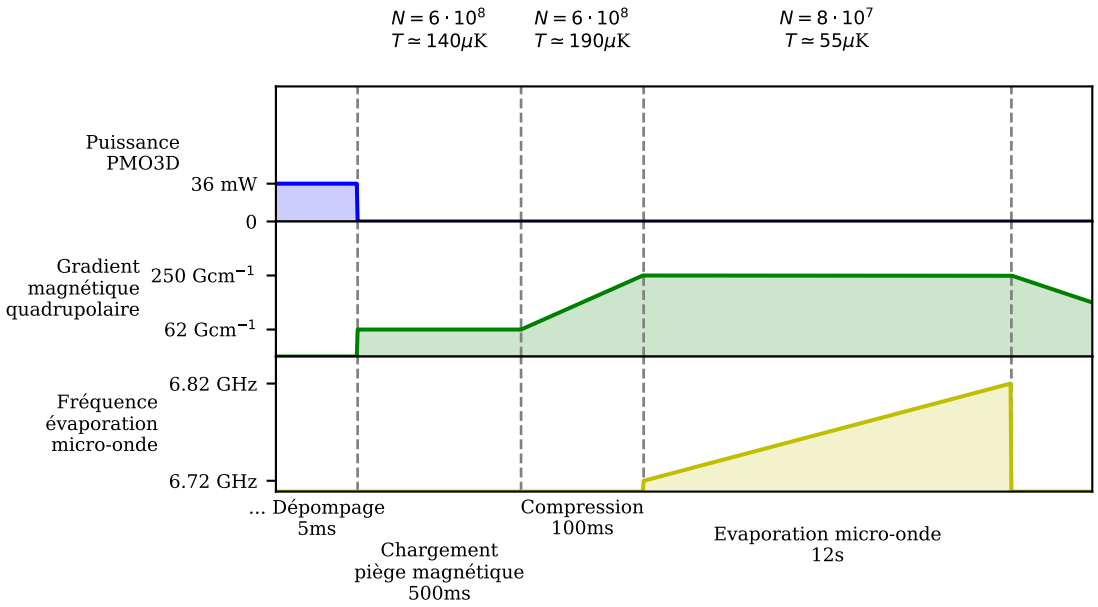


Figure 2.15 – Séquence expérimentale d'évaporation dans le piège magnétique.

2.3.2.2 Refroidissement par évaporation dans le piège hybride

Les atomes se trouvent alors dans une combinaison du piège magnétique et d'une pince optique. On dénomme la superposition de ces deux potentiels le *piège hybride*. L'interaction lumière-matière mise en jeu ici est la force dipolaire que nous avons évoquée précédemment. Nous allons dans un premier temps rappeler les mécanismes de cette interaction avant de présenter comment nous l'utilisons pour atteindre le régime de dégénérescence quantique.

Principe du refroidissement par évaporation dans un piège optique : Pour présenter le mécanisme de l'évaporation dipolaire, considérons à nouveau un atome à deux niveaux illuminé par un faisceau laser. D'après l'équation (2.33), la force dipolaire devient l'interaction dominante entre la lumière et la matière quand le désaccord δ devient grand devant la largeur de l'état excité Γ. Dans ce cas, le potentiel ressenti par les atomes est [46]

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar\delta}{2} \ln\left(1 + \frac{\Omega(\mathbf{r})^2/2}{\delta^2 + (\Gamma/2)^2}\right). \tag{2.40}$$

Pour un désaccord négatif, donc pour un laser désaccordé vers le rouge, le potentiel est piégeant [15] et l'atome est attiré vers les régions de haute intensité laser : nous avons vu avec l'équation (2.32) que la force ressentie par les atomes varie comme $\mathbf{F}_{\text{dip}} \sim \nabla\Omega^2$ où, pour rappel, la fréquence de Rabi $\Omega = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}/\hbar$ est proportionnelle à l'amplitude du champ laser $\mathbf{E}$ (le dipôle atomique est $\mathbf{d}$). La

15. il est anti-piégeant pour des lasers désaccordés vers le bleu

force dipolaire est donc proportionnelle au gradient de l'intensité laser.

Or, une onde plane possède un gradient d'amplitude nul et mène donc à une force dipolaire nulle. Il est donc nécessaire de considérer une superposition d'ondes planes pour que la force dipolaire soit non nulle : nous allons considérer le faisceau laser comme une somme d'ondes planes de mêmes fréquence ω_i mais de vecteur d'onde $\mathbf{k}_i$ différents. À l'inverse de la force de pression de radiation basée sur des processus d'absorption-émission spontanée, le piégeage dû à la force dipolaire se fait via un ensemble de cycles d'absorption-émission stimulée de photons : l'atome peut absorber un photon dans un mode i et ré-émettre ce photon dans un mode $j \neq i$. Comme les fréquences de deux ondes planes sont les mêmes $\omega_i = \omega_j$, il n'y a pas d'échange d'énergie entre l'atome et le laser lors d'un cycle d'absorption-émission mais l'impulsion de l'atome change d'une quantité $\hbar(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j)$. La force dipolaire émerge donc lors de la redistribution de photons entre les différentes ondes planes qui forment le faisceau laser [46].

Pour exploiter la force dipolaire, il convient donc d'utiliser un faisceau laser fortement focalisé afin d'obtenir un fort gradient d'intensité. Dans notre cas, le faisceau laser adopte un profil de faisceau gaussien de waist

$$w(x) = w_0 \sqrt{1 + \frac{x}{x_R}^{2}}, \tag{2.41}$$

où $x_R = \pi w_0^2/\lambda$ est la longueur de Rayleigh w à $1/e^2$ et l'intensité lumineuse est alors de la forme

$$I(\mathbf{r}) = I_0(x) e^{-2(y^2+z^2)/w^2(x)}, \tag{2.42}$$

x étant la direction de propagation. Au voisinage du point de focalisation maximum, le potentiel ressenti par les atomes peut être approximé par un potentiel harmonique

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) \simeq -V_0 + \frac{1}{2} m\omega_\perp^2 (y^2 + z^2) + \frac{1}{2} m\omega_{//}^2 x^2, \tag{2.43}$$

de fréquence de piégeage longitudinale $\omega_{//}$ et transverse $\omega_\perp$. Le piège dipolaire le plus simple à réaliser est donc constitué d'un laser désaccordé vers le rouge fortement focalisé. On nomme ce type de piège des pinces optiques [66].

Le principe du refroidissement par évaporation dans un tel piège est donc le suivant : diminuer la puissance des faisceaux lasers revient à diminuer la profondeur du piège. Les atomes les plus énergétiques qui peuvent explorer les bords de ce potentiel sont alors perdus. Comme dans le cas de l'évaporation micro-onde, les collisions élastiques entre les atomes restant se chargent alors de thermaliser le nuage à une température plus basse.

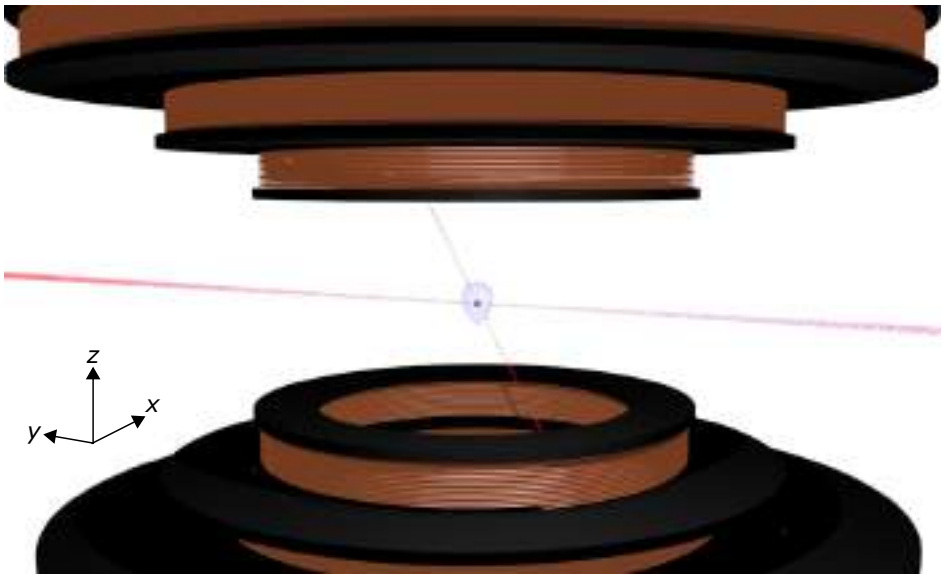


Figure 2.16 – Schéma représentatif du piège hybride. Seule la paire de bobines la plus proche des atomes est utilisée pour créer le potentiel harmonique. Les faisceaux dipolaires sont ajoutés pour créer un potentiel plus confinant. Le croisement du faisceau horizontal et vertical est utilisé pour modifier la fréquence de piégeage. Le nuage d'atomes est symbolisé par le halo bleu au niveau du croisement. Le PMO-3D n'est pas représenté par souci de simplicité.

Mise en œuvre expérimentale : Pour former le piège hybride, le faisceau d'un laser (Azurlight Systems ALS-IR-1064-20-1-SF) à 1064 nm de puissance maximale 20 W est asservi en puissance par un modulateur acousto-optique et focalisé à un waist de $w_h = 75$ μm légèrement en dessous du zéro du piège magnétique, typiquement à un waist de distance. En entrée de cellule, le faisceau laser horizontal a une puissance maximale de 10.3 W. À cette étape, seules les bobines du piège magnétique les plus proches de la cellule sont allumées et le piège magnétique seul ne compense pas tout à fait la gravité. Le nuage atomique a une taille d'environ $\Delta x \simeq 700$ μm selon l'axe horizontal et $\Delta y \simeq 300$ μm selon l'axe horizontal (quantités issues d'un ajustement de la densité optique in-situ du nuage). Les atomes tombent alors petit à petit dans le piège hybride. Afin d'augmenter les fréquences de piégeage pour une évaporation dipolaire plus efficace, le faisceau dipolaire est recyclé une fois qu'il traverse la cellule pour être ré-injecté dans celle-ci. Afin de gérer la puissance de ce faisceau recyclé, il injecte un modulateur acousto-optique avant de re-traverser la cellule le plus verticalement possible (l'angle du faisceau avec la verticale est d'environ $\theta = 30°$) comme représenté sur la figure 2.16. Le waist du faisceau vertical est de $w_v = 45$ μm et sa puissance maximale en entrée de cellule est d'environ 6 W. Le piège ainsi réalisé après croisement a une géométrie dite de *dimple* [67] [16]. De manière plus quantitative, le piège magnétique et le faisceau horizontal seul appliquent sur les atomes un confinement harmonique de fréquence

16. Nous pouvons ajuster la puissance du faisceau vertical afin de modifier le confinement perçu par les atomes ce qui modifie leur énergie d'interaction comme nous l'avons vu dans l'introduction théorique de ce chapitre

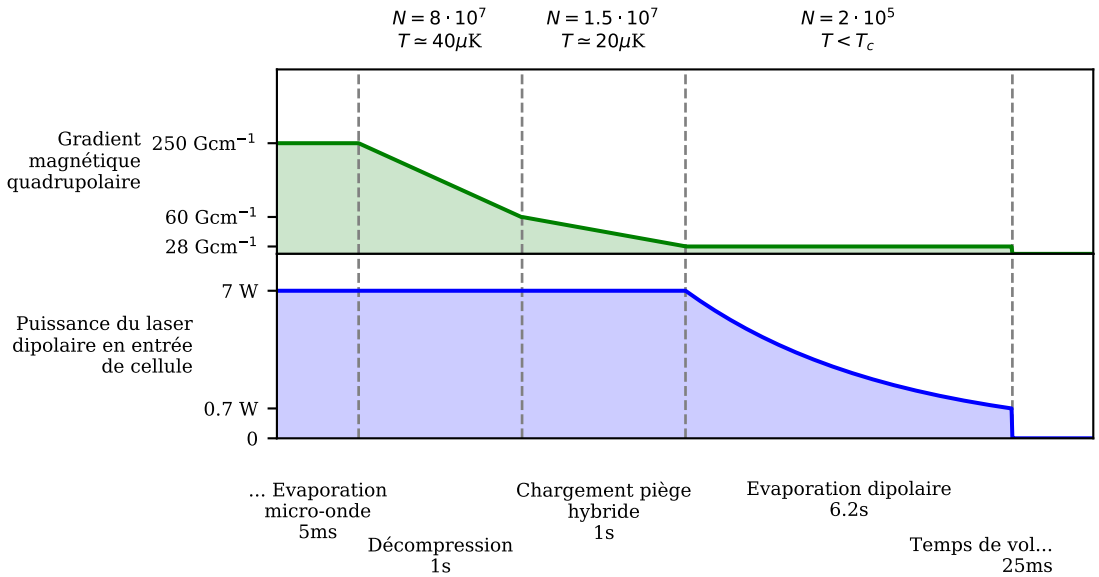


Figure 2.17 – Séquence expérimentale du refroidissement par évaporation dans le piège hybride. Le piège magnétique est décomprimé en deux étapes d'une seconde chacune afin de transférer les atomes dans la pince optique formant le piège hybride. L'intensité lumineuse de cette pince optique est ensuite diminuée afin de continuer le refroidissement par évaporation. À la fin de cette étape, nous obtenons un condensat de Bose-Einstein pur d'environ $2 \cdot 10^5$ atomes.

de piégeage d'environ 5 Hz dans la direction longitudinale. En ajoutant le faisceau vertical, cette fréquence de piégeage passe à environ 50 Hz.

La séquence expérimentale pour finalement atteindre la condensation est présentée sur la figure 2.17. Pour terminer la première étape de refroidissement par évaporation, le piège magnétique est décomprimé en deux étapes d'une seconde chacune. Cela permet de transférer les atomes dans le piège hybride avec une efficacité de transfert d'environ 20%. À la fin de ces deux décompressions nous obtenons un nuage d'environ $1.5 \cdot 10^7$ atomes à 20 μK. Puis, l'intensité du faisceau dipolaire est lentement diminuée pour laisser les atomes les plus énergétiques s'échapper du piège. La puissance des faisceaux horizontal et vertical suit la courbe

$$P(t) = \frac{P_{\max}}{(1 + t/\tau)^{\eta}}, \tag{2.44}$$

où τ et η sont deux paramètres qui permettent d'ajuster l'allure de la diminution de puissance. Actuellement, nous utilisons $\tau = 3.5$ s et $\eta = 4$. Cette dernière étape dure 6.1 s. À la fin de cette évaporation, on compte environ $2 \cdot 10^5$ atomes refroidis à environ 200 nK. Après toutes ces étapes de préparation, la densité dans l'espace des phases est passée au dessus de $\mathcal{D} = 1$ et un condensat de Bose-Einstein d'atomes de rubidium est finalement produit dans le niveau fondamental

$|F = 1, m_F = -1\rangle$ (un récapitulatif de toutes les étapes de production peut être trouvé à l'annexe C).

Récapitulatif

En résumé, le refroidissement par évaporation repose sur des pièges conservatifs dont la profondeur est adiabatiquement tronquée pour filtrer spatialement les particules les plus énergétiques. Pour notre expérience, nous utilisons d'abord un piège magnétique quadrupolaire. La troncature de la profondeur de ce piège est effectuée via excitation des atomes vers un état non piégeant par un champ micro-onde. Ce piège possède un zéro de champ magnétique aux alentours duquel un retournement de spin peut entraîner une perte des atomes. Afin de contourner ce problème, les atomes sont transférés dans un piège hybride, superposition du piège magnétique et d'une pince optique recyclée en configuration de *dimple*. La troncature de la profondeur de ce piège est effectuée en diminuant la puissance laser de la pince optique, ce qui a pour effet d'ouvrir le potentiel harmonique ressenti par les atomes. Ces deux étapes combinées durent environ 18 s et permettent d'atteindre le régime de condensation.

Une fois la séquence expérimentale terminée, il reste à mesurer l'état produit. Pour cela, nous allons détailler dans la prochaine section notre protocole d'imagerie par absorption.

2.3.3 Système d'imagerie

Une étape cruciale du montage expérimental est l'imagerie du nuage d'atomes. Afin de visualiser le résultat d'une expérience, nous utilisons l'imagerie par absorption.

2.3.3.1 Principe de l'imagerie par absorption

Pour effectuer une image par absorption, il est nécessaire de laisser le nuage d'atomes entrer en expansion. Pour cela, le piège qui soutient les atomes est subitement éteint et les atomes entrent alors en chute libre. Le nuage est ensuite illuminé par un faisceau dit "imageur" de faible puissance résonant avec une transition atomique. Ces derniers peuvent alors absorber une partie du rayonnement ce qui laisse une empreinte de la présence du condensat dans le faisceau laser. Le faisceau laser est ensuite recueilli par une caméra CCD sur laquelle on image l'ombre des atomes. Le principe d'imagerie par absorption est présenté sur le schéma de la figure 2.18. Avec cette technique d'imagerie par absorption, l'expérimentateur a alors accès à la densité intégrée selon la direction de propagation de la lumière (par exemple x), c'est-à-dire

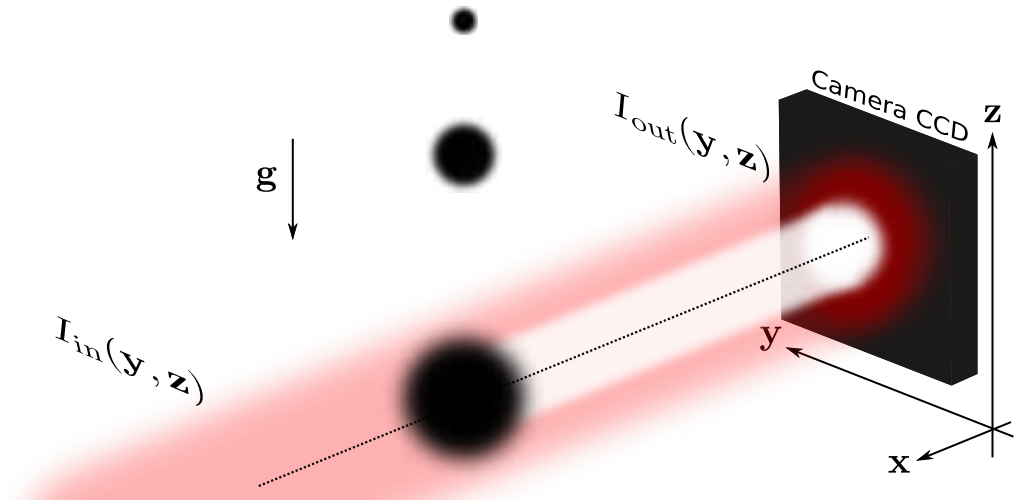


Figure 2.18 – Principe de l'imagerie par absorption. Le nuage d'atomes est relâché du piège dans lequel il est maintenu et entre en chute libre. Au cours de son expansion, il s'étend spatialement jusqu'à atteindre une taille suffisamment grande pour être imagé.

$$n(z,y) = \int n(x,y,z)dx. \tag{2.45}$$

Plus précisément, si l'intensité du laser imageur est faible devant l'intensité de saturation, l'absorption de la lumière par les atomes suit la loi de Beer-Lambert

$$\frac{I_{\text{out}}(z,y)}{I_{\text{in}}(z,y)} = e^{-\sigma_0 n(z,y)}. \tag{2.46}$$

où $I_{\text{out}}(z,y)$ est le flux lumineux transmis par les atomes, $I_{\text{in}}(z,y)$ est le flux lumineux reçu par les atomes et σ_0 est la section efficace d'absorption. Cela permet de trouver la densité comme

$$n(z,y) = -\frac{1}{\sigma_0} \ln\left(\frac{I_{\text{out}}(z,y)}{I_{\text{in}}(z,y)}\right), \tag{2.47}$$

2.3.3.2 Mise en œuvre expérimentale

Un schéma du montage optique du système d'imagerie est donné sur la figure 2.19. Deux trajets optiques permettent d'imager le nuage d'atomes avec des grandissement et des angles différents. Le premier trajet, presque parallèle aux faisceaux refoidisseur horizontaux du PMO-3D, possède un grandissement de 0.3 et sert principalement à imager les atomes au cours de la séquence expérimentale, jusqu'au piège hybride. Le deuxième possède un grandissement de 2.5 et permet d'imager les atomes dans le piège hybride. Il est le plus orthogonal possible au faisceau dipolaire

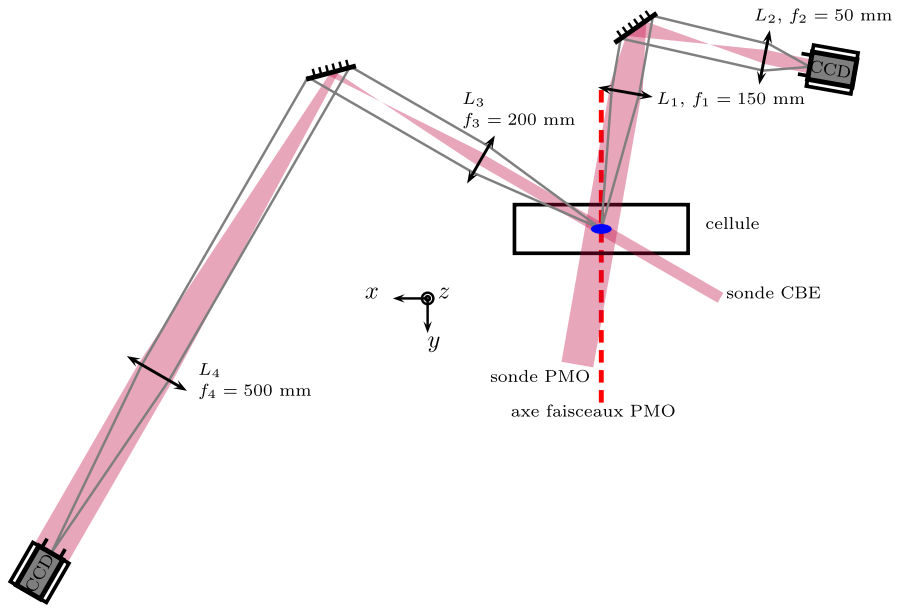


Figure 2.19 – Schéma du montage optique pour l'imagerie du nuage d'atomes. Tiré de [50].

horizontal du piège hybride.

Trois images sont prises pour imager les atomes : la première $I_{\text{out}}(z,y)$ est prise en présence des atomes après un temps de vol de typiquement 25 ms, la seconde $I_{\text{in}}(z,y)$ est prise sans les atomes et la dernière $I_{\text{bkg}}(z,y)$ est prise sans les atomes ni le laser imageur. La dernière image contient le bruit ambiant qui est soustrait aux deux premières pour s'affranchir des imperfections d'imagerie. La densité est donc finalement obtenue par

$$n(z,y) = -\frac{1}{\sigma_0}\ln\left(\frac{I_{\text{out}}(z,y) - I_{\text{bkg}}(z,y)}{I_{\text{in}}(z,y) - I_{\text{bkg}}(z,y)}\right), \tag{2.48}$$

où la section efficace d'absorption est définie comme

$$\sigma_0 = C \times \frac{3\lambda^2}{2\pi}. \tag{2.49}$$

Le coefficient C tient compte de la structure interne des atomes : il dépend de la répartition des atomes dans les sous-niveaux Zeeman et de la polarisation de la lumière du faisceau imageur. Dans notre cas, le faisceau est polarisé linéairement et résonant avec la transition $|F=2\rangle \rightarrow |F'=3\rangle$ (voir la figure 2.9). Nous allumons également le faisceau repompeur du PMO-3D afin de garder les atomes dans la transition d'imagerie. Le faisceau imageur éclaire donc un nuage d'atomes dans l'état $|F=2\rangle$ dont les sous-niveaux Zeeman sont peuplés de manière équiprobables. Dans ce cas [68], le coefficient vaut $C = 7/15$ ce qui donne $\sigma_0 = 0.136\ \mu\text{m}^2$.

Ces trois images sont prises avec un temps d'exposition de 40 μs, la durée entre deux images est de 127 ms et la puissance de faisceau imageur d'environ 750 μW. De plus, les condensats que nous obtenons en fin de séquence sont dans l'état $|F = 1\rangle$ du fondamental. Or, le faisceau imageur est résonant avec la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$. Comme dit précédemment, afin de pouvoir imager le nuage, il est nécessaire de pomper les atomes vers l'état $|F = 2\rangle$. C'est pourquoi, en plus du faisceau imageur, le faisceau repompeur 3D est également allumé pour l'étape d'imagerie. Sans le faisceau repompeur, nous imageons alors les atomes résiduels dans l'état $|F = 2\rangle$, ce qui est un diagnostic du bon déroulé de la séquence expérimentale (à l'étape de dépompage notamment). Les atomes résiduels dans $|F = 2\rangle$ représentent environ 1% de la population d'atomes totale.

Récapitulatif

Pour résumer l'ensemble de la séquence expérimentale, notre dispositif pour produire des condensats de Bose-Einstein est constitué de trois pièges : un PMO-3D qui refroidi le nuage d'atomes via le refroidissement Doppler et suivi d'une étape de mélasses optiques, d'un piège magnétique puis d'un piège hybride dans lesquels le nuage est refroidi par évaporation. En 30 s environ, ce montage permet de produire un condensat de Bose-Eisntein d'environ $2 \cdot 10^5$ atomes que nous imageons avec une technique d'imagerie par absorption.

2.4 Conclusion

En conclusion, dans la première partie de ce chapitre nous avons tout d'abord rappelé le formalisme théorique décrivant le phénomène de condensation de Bose-Einstein, puis nous avons abordé l'équation de Gross-Pitaevskii permettant de prendre en compte les interactions entre atomes. Cette description est plus réaliste qu'une description avec un gaz idéal et est largement utilisée dans la communauté des atomes froids.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons présenté le montage expérimental qui nous permet de produire des condensats de Bose-Eintein. Pour cela, nous avons décrit deux techniques expérimentales couramment utilisées qui sont le refroidissement d'un nuage d'atomes par effet Doppler et par évaporation. Nous avons décrit les pièges qui permettent de mettre en œuvre ces différentes techniques.

Cependant, produire un condensat de Bose-Einstein ne représente que la première étape d'une simulation quantique : l'onde de matière est ensuite transférée dans un potentiel optique mimant

le type de problème que nous voulons étudier. Dans notre cas, il s'agit d'un réseau optique unidimensionnel que nous décrivons dans le prochain chapitre.

3 Réseau optique

Sommaire

3.1 Introduction . . . 70
3.2 Théorie des réseaux optiques . . . 72
3.2.1 Mouvement d'une particule classique dans un réseau optique . . . 72
3.2.1.1 Equations d'Hamilton . . . 72
3.2.1.2 L'espace des phases . . . 73
3.2.2 Evolution d'une fonction d'onde dans un réseau optique . . . 76
3.2.2.1 Le théorème de Bloch . . . 77
3.2.2.2 Structure de bande . . . 77
3.3 Mise en œuvre expérimentale et utilisation du réseau optique . . . 81
3.3.1 Présentation du montage expérimental . . . 81
3.3.2 Chargement du réseau . . . 83
3.3.3 Mesure de l'état préparé . . . 84
3.3.4 Calibration de la profondeur du réseau optique . . . 86
3.3.4.1 Calibration préliminaire : diffraction de Kapitza-Dirac dans l'approximation de Raman Nath . . . 86
3.3.4.2 Calibration par micro-oscillations . . . 88
3.4 Modulation périodique du réseau . . . 91
3.4.1 Transfert d'énergie . . . 91
3.4.1.1 Transitions verticales . . . 91
3.4.1.2 Règles de sélection pour la modulation d'amplitude en $k = 0$ . . . 92
3.4.1.3 Règles de sélection pour la modulation de phase en $k = 0$ . . . 95
3.4.1.4 Terme de couplage en $k \neq 0$ . . . 98
3.4.1.5 Intermezzo : Refroidissement d'un nuage d'atomes . . . 101
3.5 Accélération du réseau . . . 106
3.5.1 Condition d'adiabadicité . . . 106
3.5.2 Oscillation de Bloch . . . 109
3.6 Conclusion . . . 111

Morty : *Oh boy. W-what's wrong Rick, is it the quantum carburettor or something ?*
Rick : *Quantum carburettor ? Jesus Morty... you can't just add a sci-fi word to a car word and hope it means something.*

Rick and morty - The Ricks Must Be Crazy

3.1 Introduction

Un phénomène de la physique qui a particulièrement captivé l'attention des physiciens est celui des interférences. C'est un mécanisme ondulatoire bien connu qui met en jeu deux ou plusieurs ondes de mêmes fréquences qui peuvent s'annuler en un point lorsqu'elles sont en opposition de phase ou, à l'inverse, s'ajouter lorsqu'elles sont en phase. C'est un phénomène très général et ces interférences peuvent se manifester avec tout type d'onde : sonores, lumineuses ou autre. Certains physiciens ont proposé d'utiliser ces interférences afin de manipuler des objets capables d'interagir avec ces ondes. Cela a notamment été fait avec des ondes acoustiques [69, 70, 71] mais, dans ce chapitre, nous allons voir une application de ce phénomène dans le cas d'onde lumineuse [72] : le motif d'interférence d'ondes lasers permet de façonner des potentiels permettant de contrôler les degrés de liberté externes de nuages d'atomes. Ces potentiels optiques peuvent manipuler des ensembles atomiques de différentes manières [73], par exemple en utilisant de la lumière résonante [74, 75, 76] ou hors résonance [77, 78] avec une transition atomique, présentant un profil focalisé [79] ou, à l'inverse, collimaté [80, 81, 82], statique ou dépendant du temps [33], perturbatif [83] ou en forte interaction [84] etc. Chacun de ces régimes de paramètres permet d'optimiser ces potentiels lumineux pour différentes applications comme par exemple pour mettre en place des horloges extrêmement précises [85, 86], des gravimètres [87, 88], des gyroscopes [89, 90], des gradiomètres [91] ou encore pour mesurer des constantes fondamentales de la physique [92, 93] dans une perspective métrologique. L'utilisation d'interférences de faisceaux lasers afin de manipuler des atomes a donc une forte retombée en recherche fondamentale comme appliquée. Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur l'utilisation de ces potentiels dans l'étude et la manipulation de fonctions d'ondes à N corps, les condensats de Bose-Einstein présentés dans le chapitre précédent. Sur notre expérience, nous utilisons l'interférence de deux faisceaux laser contrapropageants et focalisés pour créer un potentiel unidimensionnel, périodique spatialement et qui peut être dépendant du temps. Il est représenté schématiquement sur la figure 3.1. l'utilisation de ce type de potentiel pour manipuler des condensats de Bose-Einstein a mené certains physiciens à nommer ce type de systèmes des *cristaux de lumières* de par l'analogie qu'il existe avec le

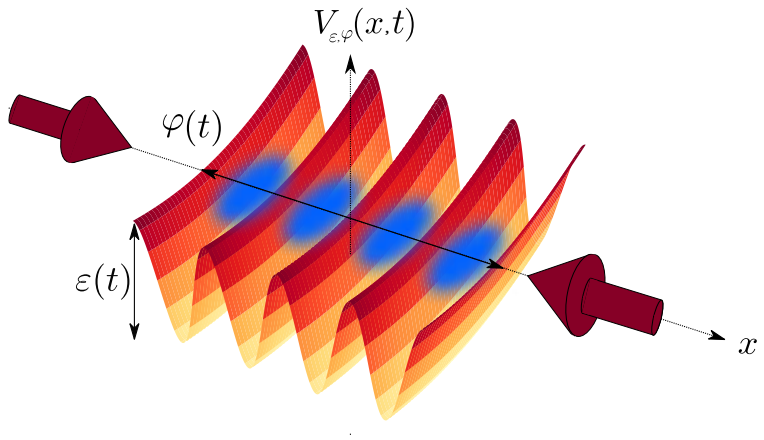


Figure 3.1 – Les flèches rouges indiquent les directions de propagation des lasers. La courbe 3D indique le potentiel $V_{\varepsilon,\varphi}(x,t)$ créé par leur interférence et les taches bleues représentent les atomes. L'amplitude du réseau peut être modulée via le paramètre $\varepsilon(t)$ et sa phase via le paramètre $\varphi(t)$.

potentiel ionique que ressentent des électrons dans un cristal. Les techniques expérimentales que nous développons dans cette thèse pour manipuler ces ondes de matières ouvrent de nouvelles possibilités de contrôle pour les différentes applications citées précédemment.

Ce chapitre a pour vocation de rappeler les éléments théoriques nécessaires pour comprendre les réseaux optiques et de donner les spécificités de notre dispositif expérimental. Dans une première partie, je présenterai un outil permettant de décrire le mouvement des atomes dans un réseau optique de manière classique : l'espace des phases. Nous nous servirons de cet espace des phases afin de définir un ensemble de grandeurs caractéristiques du réseau dont nous nous servirons tout du long de ce manuscrit. Puis, je rappellerai le théorème de Bloch et ses conséquences sur les fonctions d'ondes évoluant dans un potentiel périodique. Ce théorème nous permettra d'obtenir le spectre en énergie du réseau optique, aussi appelé structure de bande.

Dans une seconde partie, je présenterai le montage optique permettant la création du potentiel lumineux et son contrôle. Je présenterai notre méthode pour charger les atomes dans le réseau ainsi que notre méthode de mesure de l'état préparé. Enfin, je présenterai une méthode que nous utilisons quotidiennement afin de calibrer la profondeur de notre réseau optique, calibration indispensable que nous effectuons avant chaque expérience.

Finalement, je présenterai deux manières très répandues dans la communauté des atomes froids pour rendre le potentiel du réseau optique dépendant du temps. La première consiste à moduler l'amplitude ou la phase du réseau optique périodiquement dans le temps. Je présenterai l'interprétation de ce type de modulation dans la structure de bande. Cela nous permettra notamment

d'aborder une technique de refroidissement d'un nuage d'atomes par modulation d'amplitude du réseau optique dont nous avons démontré l'efficacité expérimentalement. La deuxième méthode pour rendre le potentiel dépendant du temps est d'accélérer le réseau. Je présenterai les effets de cette méthode sur un nuage d'atomes et montrerai comment cela le déplace dans la structure de bande.

3.2 Théorie des réseaux optiques

Dans cette partie, nous allons présenter deux formalismes permettant d'aborder le comportement des atomes dans un réseau optique : le premier est basé sur les équations classiques du mouvement en considérant les atomes comme des particules ponctuelles et le second est fondé sur l'équation de Schrödinger et le théorème de Bloch en considérant les atomes comme des fonctions d'ondes.

3.2.1 Mouvement d'une particule classique dans un réseau optique

Avant de prendre en considération le caractère quantique des atomes, il est utile de se faire une intuition de leur dynamique classique dans le potentiel créé par le réseau optique. Pour cela, nous considérons les atomes comme un ensemble de particules ponctuelles de même masse m, chacune ayant une position x et une impulsion p.

3.2.1.1 Equations d'Hamilton

Connaître l'évolution d'une particule dans un potentiel V pour une condition initiale (x_0, p_0) revient à résoudre les équations du mouvement déterminées à partir de l'hamiltonien du système. L'évolution d'une particule soumis à cet hamiltonien est donnée par les équations d'Hamilton

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= \dfrac{\partial H}{\partial p}, \\ \dfrac{dp}{dt} &= -\dfrac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}} \tag{3.1}$$

où l'hamiltonien correspond à l'énergie totale du système et, pour un système fermé, il s'agit de la somme de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle V

$$H = T + V. \tag{3.2}$$

En résolvant ces équations pour une condition initiale (x_0, p_0) on obtient la trajectoire $(x(t), p(t))$ d'une particule dans le potentiel V au cours du temps. L'état de cette particule à un instant t

est alors complètement déterminé par le couple (x, p) et ces deux degrés de liberté définissent un espace que l'on nomme *l'espace des phases*.

3.2.1.2 L'espace des phases

Nous allons à présent utiliser ces équations pour représenter les trajectoires des atomes dans l'espace des phases associé à un site du réseau optique. Dans notre cas, l'hamiltonien est la somme de l'énergie cinétique d'un atome et du potentiel créé par le réseau. Ce dernier est un potentiel sinusoïdal de pas d et d'amplitude V_0 de la forme

$$V(x) = -V_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right). \tag{3.3}$$

L'hamiltonien du système est alors

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} - V_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right). \tag{3.4}$$

Pour étudier ce système, il est commode d'utiliser des grandeurs caractéristiques associées au réseau optique. On définit le vecteur d'onde du réseau optique

$$k_{\mathrm{L}} = \frac{2\pi}{d}, \tag{3.5}$$

à partir duquel on peut définir une énergie caractéristique

$$E_{\mathrm{L}} = \frac{\hbar^2 k_{\mathrm{L}}^2}{2m} = \frac{h^2}{2md^2}, \tag{3.6}$$

où h est la constante de Planck. Nous exprimons l'amplitude V_0 du potentiel (3.3) par un multiple s sans dimension de l'énergie caractéristique, communément appelé la *profondeur* du réseau optique. Pour un réseau statique, l'hamiltonien (3.4) ne dépend donc que de ce paramètre s

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{sE_{\mathrm{L}}}{2}(1 + \cos(k_{\mathrm{L}} x)). \tag{3.7}$$

À partir de cet hamiltoninen, on déduit que les équations d'Hamilton de notre système sont

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m}, \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dfrac{sE_{\mathrm{L}} k_{\mathrm{L}}}{2} \sin(k_{\mathrm{L}} x). \end{cases} \tag{3.8}$$

Le potentiel $V(x)$ étant périodique par une translation d'un pas du réseau d, les trajectoires des atomes le sont également et on peut se restreindre à considérer leur mouvement uniquement sur un site du réseau, c'est-à-dire pour

$$x \in \left[\frac{-d}{2}, \frac{d}{2}\right]. \tag{3.9}$$

L'ensemble des trajectoires sur cet espace est commodément représenté par un *portrait de phase*. Ici, nous considérons un système unidimensionnel et ce portrait de phase est donc de dimension 2. Comme la dynamique de ce système est unidimensionnelle et que l'énergie totale est conservée, le système est dit *intégrable* au sens de Liouville : toutes les trajectoires sont *régulières*, soit telles que pour deux conditions initiales (x_0, p_0) de l'espace des phases infinitésimalement proches, les trajectoires associées resteront proches durant leur évolution. Cela est à contraster avec des trajectoires *chaotiques* que nous aborderons dans la suite de cette thèse. Un exemple d'une telle trajectoire chaotique est donné sur la figure 6.2 du chapitre 6 dédié à l'effet tunnel assisté par le chaos.

Les équations d'évolution (3.8) sont analogues à celles d'un pendule simple. Le portrait de phase associé présente donc des trajectoires elliptiques concentriques fermées pour les faibles impulsions correspondant à un mouvement d'oscillation et des trajectoires ouvertes pour les hautes impulsions correspondant à une rotation complète du pendule autour de son axe de rotation. l'interprétation de ces trajectoires dans notre contexte est qu'un atome placé au fond d'un puits de potentiel avec une impulsion initiale va osciller autour du minimum d'énergie pour une impulsion faible, avec une amplitude d'oscillation de plus en plus grande à mesure que l'impulsion augmente, jusqu'à avoir suffisamment d'énergie pour sortir du puits et passer de site en site. Dans ce cas, la trajectoire est dite ouverte ou non-liée.

Plusieurs exemples de portraits de phases à différentes profondeurs sont représentés sur la figure 3.2. Pour se faire une intuition de l'évolution du portrait de phase associé à un site du réseau en fonction de sa profondeur s, il est utile de considérer deux cas limites : la limite où la profondeur du réseau tends vers zéro et, à l'inverse, quand elle tend vers l'infini.

— $s \to 0$: l'hamiltonien devient celui d'une particule libre et les trajectoires dans l'espace des phases sont alors des lignes droites horizontales d'impulsion p.
— $s \to \infty$: l'hamiltonien devient celui d'un oscillateur harmonique de constante de raideur infinie et les trajectoires fermées sont alors des ellipses d'excentricité de plus en plus grandes.

Pour une profondeur non nulle, un portrait de phase possède trois points stationnaires. Le point central $(x = 0, p = 0)$ est un point stationnaire stable : les atomes placés en ce point sans vitesse initiale y restent indéfiniment. En revanche, les bords du portrait de phase $(x = \pm d/2, p = 0)$ sont des points stationnaires instables : les trajectoires issues du voisinage de ces points correspondent à la limite entre les trajectoires fermées et les trajectoires ouvertes définies précédemment. Ces deux trajectoires sont nommées les trajectoires *séparatrices*. Des atomes placés proche de ces points instables possèdent le maximum d'énergie potentielle. Une légère déviation des atomes au voisinage de ces points va donc entraîner une oscillations des atomes avec une amplitude maximale.

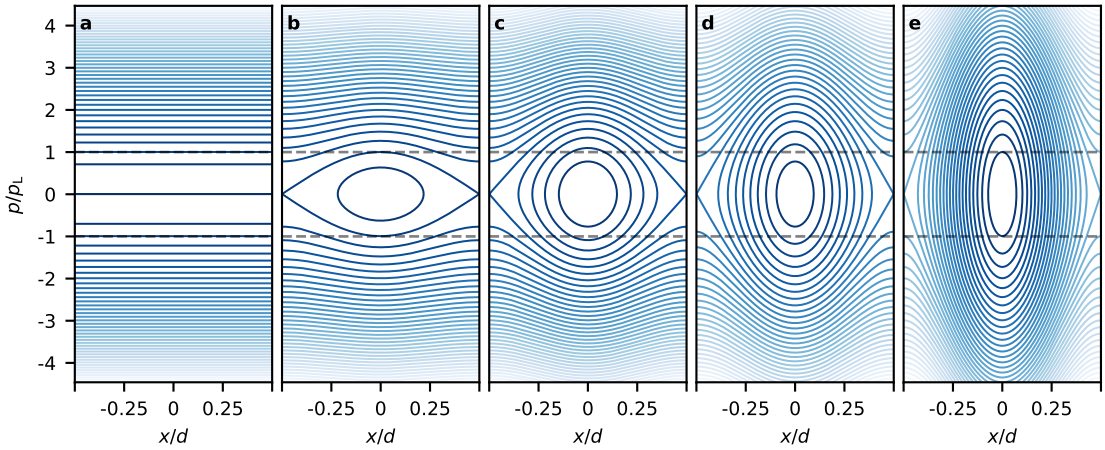


Figure 3.2 – Espaces des phases (x, p) statiques pour différentes profondeurs s. a : $s = 0$. Le portrait de phase est celui d'une particule libre. Les trajectoires sont des droites horizontales. **b** : $s = 1$. Les trajectoires séparatrices (voir texte) de ce portrait de phase permettent de définir l'impulsion caractéristique p_L. **c-e** Les profondeurs sont respectivement $s = 3; 7; 20$. Les trajectoires fermées ont une excentricité qui augmente avec la profondeur. Les lignes pointillées représentent les impulsions caractéristiques $\pm p_L$.

Ces deux trajectoires séparatrices permettent de définir plusieurs autres grandeurs caractéristiques du réseau qui nous seront utiles par la suite. Ainsi, on introduit une impulsion caractéristique du réseau

$$\frac{p_L^2}{2m} = E_L \Rightarrow p_L = \frac{h}{d}, \tag{3.10}$$

qui est l'impulsion acquise par les atomes lorsqu'ils atteignent le fond des puits de potentiel depuis le voisinage des points instable $(x = \pm d/2, p = 0)$ dans un réseau de profondeur $s = 1$. Cette impulsion permet également de définir une vitesse caractéristique

$$v_L = \frac{p_L}{m} = \frac{h}{md}, \tag{3.11}$$

qui est donc la vitesse des atomes au fond des puits de potentiel en $(x = 0, p = \pm p_L)$ après un quart de période d'oscillation lorsqu'ils étaient initialement placés au voisinage d'un point instable du réseau de profondeur $s = 1$. La dernière grandeur caractéristique que nous allons définir est la fréquence d'oscillation caractéristique du réseau. Elle est l'inverse du temps que mettent les atomes à parcourir un aller-retour de distance $2d$ à une vitesse v_L

$$\nu_L = \frac{v_L}{2d} = \frac{h}{2md^2}. \tag{3.12}$$

Nous nous servirons de ces grandeurs caractéristiques tout du long de ce manuscrit de thèse.

Cette description que nous venons de donner du réseau optique n'est valable que pour un réseau statique. Lorsque l'amplitude ou la phase du réseau sont modulées comme nous le verrons par la suite, cette description n'est plus pertinente puisque l'espace des phases évolue au cours du temps. Cependant, nous verrons que dans le cas d'une modulation périodique, il est possible de se ramener à une description dans un espace des phases dit *stroboscopique*.

Récapitulatif

Dans cette partie, nous avons introduit plusieurs grandeurs caractéristique du réseau optique. Je rappelle ici leur expression et donne leur valeur dans le cas qui nous intéressera pour la suite, c'est-à-dire pour des atomes de rubidium de masse $m = 1.45 \cdot 10^{-25}$ kg dans un réseau optique optique de pas $d = 532$ nm. Il s'agit donc :

— d'un vecteur d'onde $k_L = \dfrac{2\pi}{d} = 1.18 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^{-1}$,

— d'une impulsion $p_L = \dfrac{h}{d} = 1.25 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{ms}^{-1}$,

— d'une vitesse $v_L = \dfrac{h}{md} = 8.63\ \mathrm{mm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$,

— d'une fréquence $\nu_L = \dfrac{h}{2md^2} = 8111.25$ Hz,

— d'une énergie $E_L = \dfrac{h^2}{2md^2} = \dfrac{\hbar^2 k_L^2}{2m} = \dfrac{p_L^2}{2m} = \dfrac{1}{2} m v_L^2 = h\nu_L = 5.37 \cdot 10^{-30}$ J.

Le portrait de phase d'un atome évoluant dans un réseau optique statique est uniquement déterminé par la profondeur s et est analogue à celui d'un pendule. Il présente des trajectoires fermées, correspondant à l'oscillation de l'atome au fond d'un puits, et des trajectoires ouvertes, correspondant au passage de l'atome au puits voisin. Toutes ces trajectoires sont des trajectoires régulières.

L'espace des phases classique aide à se forger une intuition corpusculaire de la dynamique des atomes dans le réseau optique. Nous allons voir dans la prochaine partie une description ondulatoire en considérant la relation de dispersion des atomes dans le réseau.

3.2.2 Evolution d'une fonction d'onde dans un réseau optique

La description de particules quantiques dans un potentiel périodique est donnée par la théorie développée par Felix Bloch [94] pour décrire le mouvement des électrons dans un solide. C'est cette même théorie qui est utilisée pour décrire le mouvement d'un condensat de Bose-Einstein

dans un réseau optique. Dans les prochains paragraphes, nous allons tout d'abord rappeler le théorème de Bloch, point de départ de notre description pour des particules quantiques dans un potentiel périodique.

3.2.2.1 Le théorème de Bloch

Considérons donc à présent une fonction d'onde dans un potentiel périodique $\hat{V}(\hat{x})$ à une dimension, de période d, tel que $\hat{V}(\hat{x}+d) = \hat{V}(\hat{x})$. L'hamiltonien auquel est soumis la fonction d'onde est alors

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}). \tag{3.13}$$

Cet hamiltonien étant invariant par translation d'une période d, il commute avec l'opérateur de translation $\hat{T}_d = e^{i\hat{p}d/\hbar}$. Le théorème de Bloch énonce alors qu'il existe une base dans laquelle ces deux opérateurs sont diagonaux et que cette base est constituée des ondes de Bloch $\psi_{n,k}(x)$ qui ont la forme suivante

$$\boxed{\psi_{n,k}(x) = u_{n,k}(x)e^{ikx}.} \tag{3.14}$$

Les ondes de Bloch sont le produit d'une fonction $u(x) = u(x+d)$ possédant la même périodicité que le potentiel $\hat{V}(\hat{x})$ et d'une onde plane de vecteur d'onde, également appelé *quasi-moment*, k.

3.2.2.2 Structure de bande

Nous allons à présent montrer les conséquences de cette périodicité spatiale sur la relation de dispersion des atomes, aussi appelée structure de bande. En effet, une propriété remarquable est que l'énergie accessible aux atomes est un continuum lorsque la profondeur s du réseau optique est nulle mais présente des *gaps* d'énergie de plus en plus grands au fur et à mesure que la profondeur augmente.

Considérons des atomes de masse m dans un réseau optique de période spatiale d. Comme dit précédemment, le potentiel généré par le réseau optique est sinusoïdal et donné par

$$V(x) = \frac{-sE_L}{2}(1+\cos(k_L x)), \tag{3.15}$$

et les fonctions d'ondes des atomes dans un tel potentiel peuvent donc se décomposer sur la base des ondes de Bloch $\psi_{n,k}(x)$. Afin d'étudier ce système, nous pouvons exploiter la périodicité de la fonction $u_{n,k}(x)$ et la décomposer en série de Fourier sur la base des ondes planes

$$u_{n,k}(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^{(n,k)} e^{ilk_L x}. \tag{3.16}$$

La fonction d'onde $\psi_{n,k}(x)$ s'écrit alors

$$\psi_{n,k}(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^{(n,k)} e^{i(lk_L+k)x}. \tag{3.17}$$

La fonction d'onde est donc un peigne d'ondes planes de vecteur d'onde $k + lk_{\mathrm{L}}$ et, dans cette dernière expression, nous remarquons une invariance par translation dans l'espace réciproque $k \to k + k_{\mathrm{L}}$. Afin d'éviter toute redondance des solutions, on restreindra les valeurs accessibles au vecteur d'onde de l'onde plane k dans l'intervalle portant le nom de *première zone de Brillouin*

$$k \in \left[\frac{-k_{\mathrm{L}}}{2}, \frac{k_{\mathrm{L}}}{2}\right] = \left[\frac{-\pi}{d}, \frac{\pi}{d}\right]. \tag{3.18}$$

Déterminer $\psi_{n,k}(x)$ revient donc à trouver les coefficients $c_l^{(n,k)}$ de l'équation (3.17). Pour cela, en injectant la forme (3.17) de la fonction d'onde $\psi_{n,k}(x)$ dans l'équation de Schrödinger (3.19) on obtient une équation portant uniquement sur la partie périodique $u_{n,k}(x)$

$$\hat{H}_k|u_{n,k}\rangle = E(k)|u_{n,k}\rangle \quad \text{avec} \quad H_k = \frac{(p+\hbar k)^2}{2m} - \frac{sE_{\mathrm{L}}}{2}(1+\cos(k_{\mathrm{L}}x)). \tag{3.19}$$

Le potentiel $V(x)$ étant également périodique, nous pouvons aussi le décomposer en série de Fourier. Cette décomposition est simple pour un potentiel sinusoïdal

$$V(x) = \frac{-sE_{\mathrm{L}}}{2} - \frac{sE_{\mathrm{L}}}{4}\left(e^{ik_{\mathrm{L}}x} + e^{-ik_{\mathrm{L}}x}\right). \tag{3.20}$$

En remplaçant $u_{n,k}(x)$ et $V(x)$ par leurs séries de Fourier dans l'équation (3.19), on aboutit à un système d'équations, appelé *l'équation centrale*, à partir duquel il devient possible de déterminer les coefficients $c_l^{(n,k)}$

$$\boxed{\left(\left(l + \frac{k}{k_{\mathrm{L}}}\right)^2 - \frac{s}{2}\right)c_l^{(n,k)} - \frac{s}{4}(c_{l+1}^{(n,k)} + c_{l-1}^{(n,k)}) = \frac{E}{E_{\mathrm{L}}}c_l^{(n,k)}.} \tag{3.21}$$

Cette équation peut se mettre sous forme matricielle

$$M(k)C(k) = \frac{E}{E_{\mathrm{L}}}C(k), \tag{3.22}$$

avec $C(k) = (\ldots, c_{-2}^{(n,k)}, c_{-1}^{(n,k)}, c_0^{(n,k)}, c_1^{(n,k)}, c_2^{(n,k)}, \ldots)$, un vecteur de dimension infinie contenant les coefficients de Fourier de la fonction d'onde. La matrice $M(k)$, également de dimension infinie, possède les éléments diagonaux

$$M_{l,l}(k) = \left(l + \frac{k}{k_{\mathrm{L}}}\right)^2 - \frac{s}{2}, \tag{3.23}$$

et une structure tridiagonale telle que

$$M_{l,l+1}(k) = M_{l,l-1}(k) = -\frac{s}{4}. \tag{3.24}$$

En diagonalisant cette matrice pour un couple de profondeur et de vecteur d'onde, également appelé quasi-moment, (s,k), on détermine les énergies et états propres du système. En répétant l'opération pour l'ensemble des valeurs de $k \in [-k_{\mathrm{L}}/2, k_{\mathrm{L}}/2]$, on peut tracer l'évolution des n énergies propres du système dans cette zone. Ce spectre d'énergie est ce que l'on appelle la *structure de bande* du réseau optique pour une profondeur s. Elle renseigne sur les états accessibles aux atomes dans le réseau optique et constitue un outil indispensable pour toute la suite de ce manuscrit. Les états propres du réseau optique sont donnés par n, l'indice de la bande d'énergie, et k, le quasi-moment, $\psi_{n,k}(x) = \langle x|n,k\rangle$.

Cette procédure de diagonalisation est en pratique faite numériquement et ne prenant en compte qu'un nombre limité de coefficients de Fourier pour modéliser la fonction d'onde [1]. Comme pour le portrait de phases, il est possible de se faire une intuition de la manière dont la structure de bande évolue en fonction de la profondeur du réseau s en étudiant deux cas limite : le premier pour une profondeur tendant vers zéro et le deuxième pour une profondeur tendant vers l'infini.

— $s \to 0$: on peut négliger le potentiel du réseau optique et on retrouve l'hamiltonien de la particule libre. Pour une impulsion $\hbar\kappa$ donnée, les états et énergies propres sont alors connus : $E(\kappa) = \hbar^2\kappa^2/2m$ et $\psi_\kappa(x) = e^{\pm i\kappa x}$. La relation de dispersion est une parabole et les états propres sont des ondes planes. Dans la première zone de Brillouin, la structure de bande est donc une parabole repliée comme représenté sur la figure 3.3 **a**.

— $s \to \infty$: pour des atomes au fond de chacun des puits de potentiels, le potentiel du réseau peut être approximé par un potentiel harmonique dont les états et énergies propres sont également connus : $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$ et les états propres sont les états propres de l'opérateur nombre $\hat{n}$. Les niveaux d'énergies sont donc des bandes d'énergies constantes pour tout quasi-moment de la première zone de Brillouin comme représenté sur la figure 3.3 **e**.

Dans le régime intermédiaire, on observe des bandes d'énergies avec une certaine courbure et des gaps en énergie dépendants de la profondeur. Pour illustrer ce régime, trois structures de bande pour des profondeurs de $s = 1$, $s = 3$ et $s = 7$ où seules les quatre premières bandes d'énergies sont tracées sont représentées sur les figures 3.3 **b**, **c** et **d** respectivement. Comme attendu, les gaps

1. Se limiter à $n_{max} = 20$ dans le nombre de coefficients est une bonne approximation pour les valeurs de s que nous pouvons réaliser en pratique [95], ce qui fait une matrice $M(q)$ de taille $N \times N$ avec $N = 2n_{max} + 1 = 41$.

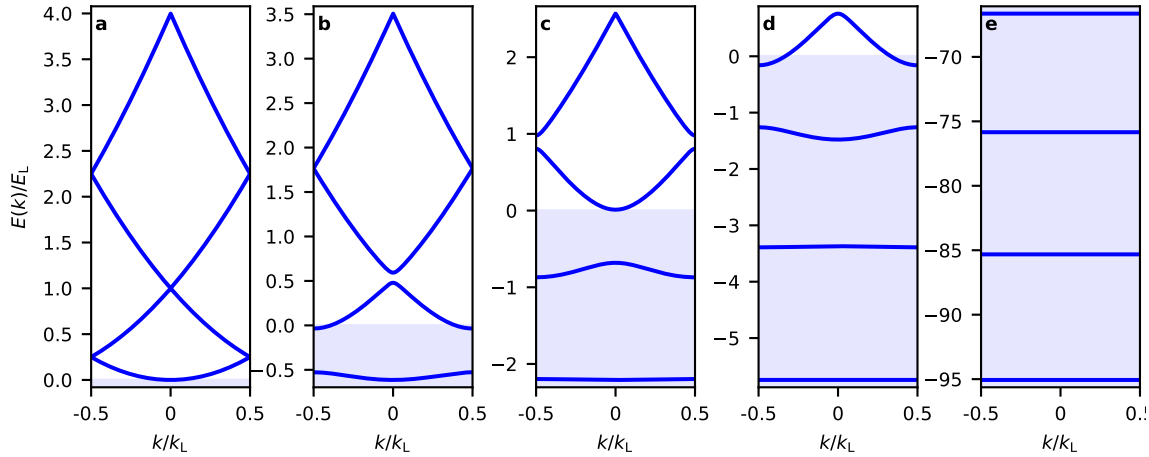


Figure 3.3 – Structure de bandes du réseau pour différentes profondeurs. **a** : $s = 0$. La structure de bande est parabolique et continue. **b** : $s = 1$. Les gaps entre les différentes bandes s'ouvrent. La région bleutée représente la partie liée du spectre et seule la bande fondamentale est complètement liée dans ce cas. Les bandes excitées sont non-liées. **c** : $s = 3$. Les deux premières bandes sont liées. **d** : $s = 7$. Les trois premières bandes sont liées. **e** : $s = 20$. La courbure des bandes devient quasiment plate et on retrouve un spectre proche de celui de l'oscillateur harmonique.

en énergie entre deux bandes consécutives sont de plus en plus grands au fur et à mesure que la profondeur du réseau augmente. La courbure des bandes devient également de plus en faible lorsque la profondeur du réseau augmente. Un aspect important de la physique liée au réseau optique est le signe de l'énergie de la bande sur laquelle se trouvent les atomes. Les atomes sur des bandes d'énergies négatives n'ont pas assez d'énergie pour sortir du réseau : les bandes d'énergies sont dites *liées* dans ce cas. À l'inverse, les atomes sur des bandes d'énergies positives ne ressentent plus que faiblement l'influence du réseau : les bandes d'énergie positives sont donc dites *non-liées*.

Récapitulatif

En considérant les atomes comme des ondes dans un potentiel périodique sinusoïdal, on aboutit à une discrétisation des énergies accessibles aux atomes au fur et à mesure que la profondeur du réseau optique augmente. La représentation de ces énergies en fonction du quasi-moment k des atomes dans la première zone de Brillouin est ce qu'on appelle la structure de bande.

Dans la prochaine partie de ce chapitre, je décrirai la mise en œuvre expérimentale du réseau optique avant de détailler comment il est possible de placer les atomes dans une région de l'espace des phases ou encore à une énergie et quasi-moment donnés $E(k)$ de la structure de bande.

3.3 Mise en œuvre expérimentale et utilisation du réseau optique

Dans notre expérience, le réseau optique est obtenu par l'interférence de deux faisceaux lasers contra-propageants contrôlés en puissance et en phase. Comme pour le piège optique du piège hybride, la réalisation du réseau optique repose sur la force dipolaire pour minimiser les effets de chauffage et, afin d'être dominante, le laser se doit d'avoir une longueur d'onde loin de la transition atomique : comme pour le laser dipolaire utilisé pour effectuer le piège hybride présenté dans le chapitre 2, la longueur d'onde choisie est $\lambda = 1064$ nm. Les deux faisceaux contra-propageants sont des faisceaux gaussiens, d'amplitude E_0, de vecteur d'onde k, de pulsation ω, de polarisation $\mathbf{e}_z$ et possédant respectivement une phase φ_1 et φ_2. Leurs champs électriques s'écrivent alors

$$\mathbf{E}_1(x,t) = E_0 e^{i(k_\mathrm{L} x - \omega t + \varphi_1)}\mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_2(x,t) = E_0 e^{i(-k_\mathrm{L} x - \omega t + \varphi_2)}\mathbf{e}_z. \tag{3.25}$$

Le champ résultant de leur interférence est la superposition de ces deux ondes $\mathbf{E}_\mathrm{tot}(x,t) = \mathbf{E}_1(x,t) + \mathbf{E}_2(x,t)$ et le potentiel correspondant est proportionnel au module carré de ce champ

$$V(x,t) \propto |\mathbf{E}_\mathrm{tot}(x,t)|^2 = V_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda/2}x + \varphi\right)\right), \tag{3.26}$$

où $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ est le déphasage entre les deux faisceaux lasers et $V_0 \propto 2|E_0|^2$ est l'amplitude de l'intensité lumineuse. Ce potentiel est de période $d = \lambda/2 = 532$ nm et en posant $V_0 = -\frac{sE_\mathrm{L}}{2}$, on retrouve le potentiel donné en (3.15). Notre montage expérimental, présenté sur la figure 3.4, nous permet, en contrôlant la phase et l'amplitude de chaque champ, de contrôler la profondeur du réseau s ainsi que sa phase φ au cours du temps comme nous allons le voir dans les prochains paragraphes.

3.3.1 Présentation du montage expérimental

Le montage optique permettant de mettre en place le réseau a été décrit en détails dans les thèses de mes prédécesseurs [7, 51, 96]. Je me contente ici d'en rappeler les éléments essentiels.

Un faisceau laser, d'intensité lumineuse maximale 15 W, produisant le réseau passe par un premier modulateur acousto-optique modulé à 80 MHz. Ce composant permet d'ajuster l'intensité lumineuse en sortie du laser et donc de régler la profondeur s du réseau optique au cours de la séquence expérimentale. Ensuite, le faisceau est divisé en deux bras par un cube polarisant, chacun étant à nouveau diffracté par un modulateur acousto-optique modulé à 160 MHz. La fréquence modulant le cristal de ces deux modulateurs acousto-optiques est contrôlée par des synthétiseurs de fréquence qui impriment leur phase relative sur la lumière en sortie du modulateur. Ces modulateurs acousto-optiques permettent alors de contrôler la phase φ du réseau optique au cours de la séquence expérimentale. Les faisceaux sont ensuite focalisés avec un waist

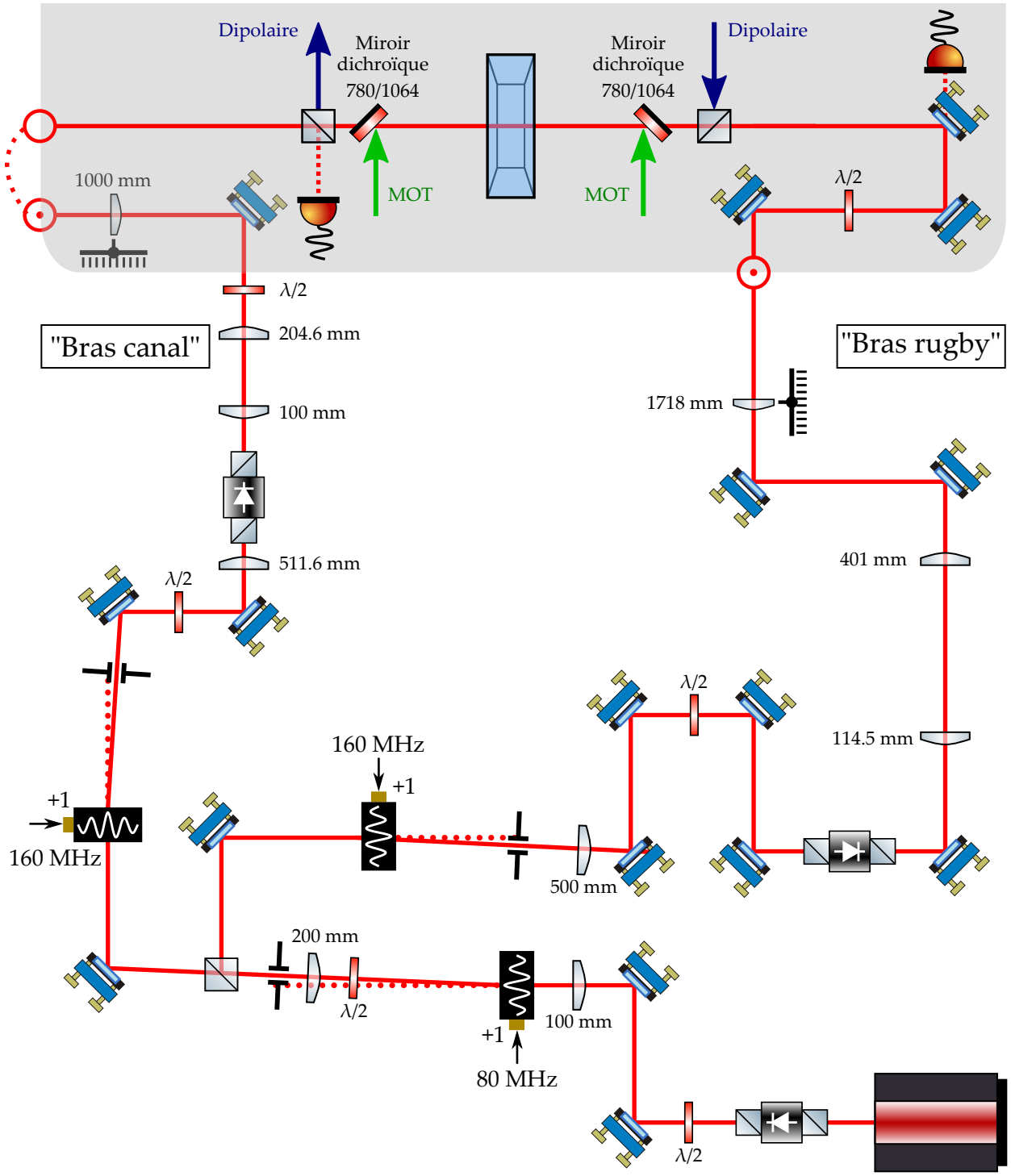


Figure 3.4 – Schéma du montage du réseau optique. Un premier modulateur acousto-optique permet contrôler l'intensité lumineuse formant du faisceau et donc la profondeur du réseau optique formé. Le faisceau est ensuite séparé en deux faisceaux par un cube polarisant. Les modulateurs acousto-optiques placés sur chacun des bras du réseau permettent de contrôler la phase du réseau optique. Tiré de [7].

de 150 μm et superposés au sein de la cellule à vide. La puissance maximale dans chaque bras en entrée de cellule est de 2.3 W. Nous obtenons alors finalement le potentiel du réseau optique suivant

$$\boxed{V_{\text{res}}(x,t) = \frac{-s(t)E_{\text{L}}}{2}[1+\cos(k_{\text{L}}x+\varphi(t))],} \tag{3.27}$$

dont nous pouvons contrôler arbitrairement l'amplitude $s(t)$ et la phase $\varphi(t)$ au cours du temps en modulant les fréquences envoyées aux différents modulateurs acousto-optiques du montage.

Précisons le fait que la phase du réseau optique n'est pas asservie au cours du temps dans notre dispositif à l'heure actuelle. Cependant,

— les horloges des synthétiseurs modulant les modulateurs acousto-optiques imprimant leur phase sur chacun des bras du réseau sont synchronisées entres elles.
— l'origine de phase du réseau est en pratique redéfinie à chaque nouvelle expérience lors du chargement du condensat.
— la durée maximale d'interaction des atomes avec le réseau optique est de l'ordre de la dizaine de millisecondes.

Ces considérations permettent d'affirmer que les éventuelles perturbations extérieures (vibrations mécaniques, dilatations thermiques...), lentes comparées au temps d'interaction avec le réseau, induisent une variation de phase négligeable par rapport à celle imposée au réseau optique par le contrôle au cours d'une expérience.

Dans la prochaine partie nous allons voir comment la profondeur $s(t)$ est ajustée au cours du temps pour charger les atomes adiabatiquement dans le réseau optique.

3.3.2 Chargement du réseau

Je présente ici la rampe de chargement que nous utilisons pour charger les atomes dans l'état fondamental du réseau optique. Dans l'espace des phases, cela correspond à placer les atomes au centre du portrait de phases en $(x = 0, p = 0)$ au point d'équilibre stable. En terme de structure de bande, cet état initial correspond à préparer les atomes dans l'état $|n = 0, k = 0\rangle$ du réseau, c'est-à-dire dans la bande fondamentale et au centre de la première zone de Brillouin. Pour cela, cette rampe de chargement se doit d'être *adiabatique*. L'état initial est un condensat de Bose-Einstein dans l'état fondamental du piège harmonique. En montant suffisamment lentement l'intensité lumineuse du réseau optique, les atomes restent dans l'état fondamental du système et,

par conséquent, une fois le réseau arrivé à une profondeur s, les atomes sont dans l'état fondamental du réseau. Plus formellement, adiabatique signifie dans le contexte d'un réseau optique que la condition [97]

$$\frac{dV(x,t)}{dt} \ll \frac{E_{\mathrm{L}}^2}{\hbar}, \tag{3.28}$$

soit vérifiée [95]. Dans notre cas, il faut que le temps caractéristique de montée de l'intensité lumineuse formant le potentiel soit grand devant $h/E_{\mathrm{L}} \sim 20\ \mu$s. Pour cela, nous utilisons la rampe d'amplitude suivante pour effectuer ce chargement

$$s(t) = \left((\kappa+1)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\kappa} - \kappa\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\kappa+1} \right), \tag{3.29}$$

où τ et κ sont des paramètres que nous pouvons ajuster pour modifier l'allure de cette courbe. Une telle courbe de chargement est présentée sur la figure 3.5 **a**. Actuellement, nous utilisons les paramètres $\tau = 1$ ms et $\kappa = 11$. Pour ces paramètres, le temps de montée effectif est d'environ 300 μs ce qui respecte la condition d'adiabadicité (3.28) [2]. Toutes les expériences que nous effectuons dans le réseau optique, à l'exception des estimations rapides de la profondeur par diffraction dans l'approximation de Raman-Nath que nous aborderons par la suite, sont précédées d'une telle rampe de chargement [3].

Maintenant que nous avons présenté le chargement des atomes dans le réseau optique, nous allons voir comment mesurer l'état préparé par ce chargement.

3.3.3 Mesure de l'état préparé

Pour mesurer l'état du condensat dans le réseau optique, nous coupons abruptement la puissance des lasers qui le forment ainsi que le piège hybride pour laisser les atomes entrer en chute libre durant un temps t_{TOF}. Les nuages d'atomes s'étendent alors durant leur chute et interfèrent les uns avec les autres. Après un temps de vol de typiquement une vingtaine de millisecondes, nous imageons le nuage par la technique d'imagerie par absorption présentée dans le chapitre 2 de

2. Afin de vérifier expérimentalement l'adiabadicité du chargement, nous chargeons les atomes dans le réseau avec la courbe (3.29) et les maintenons dans le réseau statique pendant quelques millisecondes. Lorsque le condensat est chargé dans le réseau, il est alors divisé sur plusieurs sites du réseau formant alors une chaîne de micro-condensats. Puis nous déchargeons le réseau avec la rampe symétrique de (3.29) et le condensat se reforme. L'absence de chauffage durant ce processus nous permet de conclure que la rampe de montée (3.29) est bien adiabatique et qu'aucune excitation n'est fournie au condensat.

3. Au moment de la rédaction de ce manuscrit, des expériences menées par les membres de l'équipe ont montré qu'il est possible de façonner la distribution en impulsion du condensat sans chargement adiabatique mais à partir de l'état du condensat dans le piège harmonique. Le protocole expérimental utilisé sera présenté au chapitre 5 de cette thèse portant sur le contrôle optimal.

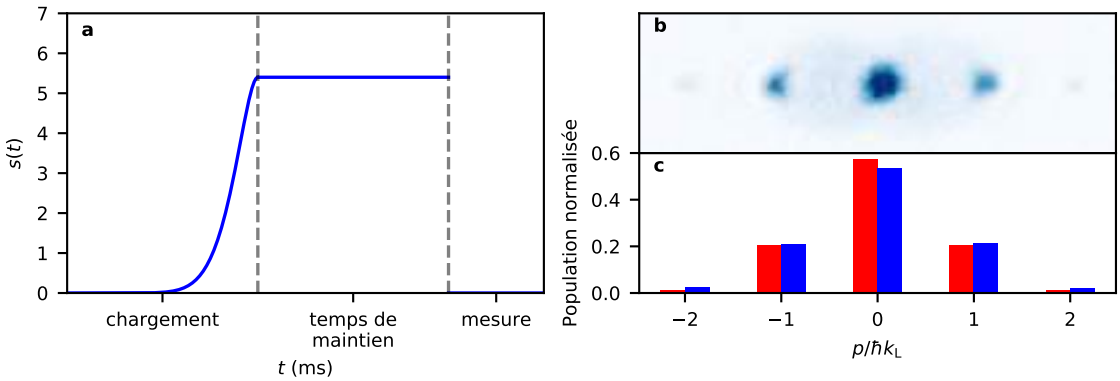


Figure 3.5 – Chargement adiabatique du réseau et mesure de l'état obtenu. a : Rampe de chargement adiabatique des atomes dans un réseau de profondeur de $s = 5.4$ suivie d'un temps de maintien dans le réseau. Le réseau est ensuite éteint pour mesurer l'état obtenu après temps de vol. **b** : Densité optique des atomes diffractés par le réseau optique obtenue par imagerie par absorption après un temps de vol de 24 ms. On observe des pics de diffraction équidistants les uns des autres. **c** : Distribution en impulsion obtenue en intégrant le signal d'absorption de l'image **b** (bleu) et norme au carré des coefficients $c_l^{(n=0,k=0)}$ pour un réseau à la profondeur s (rouge).

cette thèse. À un facteur d'échelle près, la densité spatiale des atomes $n(\mathbf{r})$ après temps de vol reflète alors la distribution initiale en impulsion $\tilde{n}(\mathbf{p})$ des atomes lorsqu'ils étaient dans le réseau

$$n(\mathbf{r}, t_{\mathrm{TOF}}) = \tilde{n}\left(\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{r}}{t_{\mathrm{TOF}}}, t = 0\right). \tag{3.30}$$

La périodicité de la fonction d'onde dans le réseau optique impose une discrétisation de l'impulsion accessible aux atomes $p = np_{\mathrm{L}} + \hbar k$, où n est un entier. À l'instar d'une expérience d'optique ondulatoire classique, la densité spatiale après temps de vol présente des pics équidistants. Ils sont ici séparés d'un intervalle $p_{\mathrm{L}} = h/d$ dans l'espace des impulsions et on nomme ces pics des ordres de diffraction. À partir d'une image d'absorption après temps de vol, il est donc possible de reconstruire expérimentalement la distribution en impulsion du condensat dans le réseau en intégrant le signal d'absorption dans chacun des ordres. Un exemple d'image expérimentale et de la distribution en impulsion associée sont présentés sur la figure 3.5 dans le cas d'un chargement des atomes dans l'état fondamental du réseau de profondeur $s = 5.4$. Sur cette même figure, je présente également la norme au carré des coefficients $c_l^{(n=0,k=0)}$ correspondant à la prédiction théorique calculée numériquement des populations des différents ordres de diffraction. On observe un bon accord entre ces deux distributions ce qui est une confirmation à posteriori que nous avons effectivement chargé les atomes dans l'état fondamental du réseau.

Nous allons à présent voir comment nous mesurons la profondeur du réseau optique. En effet, cette dernière dépend de l'intensité lumineuse des lasers mais également de la superposi-

Figure 3.6 – Image expérimentale d'un condensat après diffraction par le réseau. Le temps de pulse du réseau est assez court pour que l'approximation de Raman-Nath soit valide ($\tau = 18\ \mu$s) et correspond à l'extinction de la population dans l'ordre zéro de diffraction.

tion de ces derniers. Cet alignement n'est pas stabilisé au cours du temps et les fluctuations de température et d'humidité dans la salle d'expérience peuvent significativement modifier le trajet optique des faisceaux lasers formant le réseau optique. La profondeur peut donc être nettement modifiée et il est indispensable de pouvoir la calibrer avant et après la réalisation d'une expérience afin d'avoir une estimation de sa variation au cours de la prise de données.

3.3.4 Calibration de la profondeur du réseau optique

Comme il a été dit précédemment, la profondeur du réseau détermine la structure de bande et l'espace des phases dans lequel évolue le condensat. Il est donc crucial d'avoir à disposition une méthode d'estimation rapide de son ordre de grandeur mais également une méthode pour déterminer la profondeur de manière fiable, reproductible et précise sur une large gamme de profondeur. Je vais tout d'abord présenter la méthode que nous utilisons pour estimer approximativement la profondeur du réseau, puis je présenterai la méthode qui a été mise au point par l'équipe pour la déterminer de manière précise sur une large plage de valeur.

3.3.4.1 Calibration préliminaire : diffraction de Kapitza-Dirac dans l'approximation de Raman Nath

La méthode de calibration par diffraction consiste à *pulser* le réseau sur le condensat pendant une durée τ assez courte pour pouvoir négliger l'énergie cinétique des atomes. La technique du réseau pulsé est nommé diffraction de Kapitza-Dirac [79]. L'approximation qui consiste à négliger l'énergie cinétique des atomes est appelée l'approximation de Raman-Nath.

À l'inverse d'un chargement adiabatique, la durée du pulse est de quelques microsecondes seulement et, pour une telle durée, les atomes n'ont pas le temps de se mettre en mouvement durant leur interaction avec le réseau. Leur énergie cinétique peut donc être négligée. Dans ce cas, leur dynamique est dictée uniquement par l'énergie potentielle du réseau optique et, plus for-

mellement, la résolution de l'équation de Schrödinger avec l'hamiltonien (3.7) aboutit alors à l'opérateur d'évolution suivant [51]

$$\hat{U}(\hat{x},\tau) = e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^\tau \hat{H}(t')dt'} \underset{\tau\to 0}{\sim} e^{-i\frac{V_0\tau}{2\hbar}\left(1+\cos\left(\frac{2\pi\hat{x}}{d}\right)\right)}. \tag{3.31}$$

Dans cette limite, l'opérateur d'évolution réalise une impression de phase. En utilisant la relation

$$e^{iu\cos(\phi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(u)e^{in\phi}, \tag{3.32}$$

on peut décomposer cet opérateur d'évolution sur la base des fonctions de Bessel

$$\hat{U}(\hat{x},\tau) = e^{iV_0\tau/2\hbar} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n\left(\frac{sE_\mathrm{L}\tau}{2\hbar}\right)e^{ikn\hat{x}}. \tag{3.33}$$

Ce développement est similaire à une décomposition en série de Fourier où les $\mathcal{J}_n$ sont les coefficients des différentes harmoniques de la série. Comme après temps de vol nous avons accès au module carré de la transformée de Fourier de la fonction d'onde, le module au carré des coefficients $\mathcal{J}_n$ représentent les populations des différents ordres de diffraction dans l'espace des impulsions. En particulier, la population de l'ordre zéro, π_0, est donnée par $|\mathcal{J}_0(sE_\mathrm{L}\tau/2\hbar)|^2$. Or, la fonction de Bessel d'ordre zéro s'annule pour différentes valeurs de son argument et son premier zéro est atteint lorsque son argument vaut $u \sim 2.4$. Déterminer le temps d'interaction τ pour lequel l'ordre zéro s'annule, comme présenté sur la figure 3.6, permet donc d'estimer la profondeur s du réseau optique via

$$\frac{sE_\mathrm{L}\tau}{2\hbar} \simeq 2.4. \tag{3.34}$$

Pulser le réseau sur le condensat fournit donc une estimation rapide (avec une seule mesure) mais peu précise de la profondeur [4] : nous utilisons cette technique en quelque sorte comme une pré-calibration de la profondeur du réseau pour une méthode plus robuste de calibration, la méthode de calibration par micro-oscillation. Dans la prochaine partie, nous allons présenter cette méthode de calibration par micro-oscillation qui permet de déterminer la profondeur du réseau optique au pourcent près.

4. Il est cependant nécéssaire de préciser qu'il est possible d'utiliser la technique de diffraction de Kapitza-Dirac pour obtenir une valeur précise de la profondeur du réseau optique. Pour cela, il convient de prendre plusieurs images de la figure de diffraction pour différents temps d'interaction τ et d'ajuster l'évolution de chacun des ordres de diffraction par la fonction de Bessel correspondante. Cependant, comme cette méthode repose sur l'approximation de Raman-Nath, elle ne donne une mesure précise de la profondeur que pour des profondeurs suffisamment grande (typiquement $s > 5$ [98]), lorsque l'énergie cinétique des atomes peut effectivement être négligée devant l'énergie potentielle du réseau. Une comparaison de cette méthode de calibration avec la méthode de calibration par micro-oscillation présentée en 3.3.4.2 peut être trouvée dans la référence précédente ainsi que dans les thèses de mes prédécesseurs [7, 51, 96].

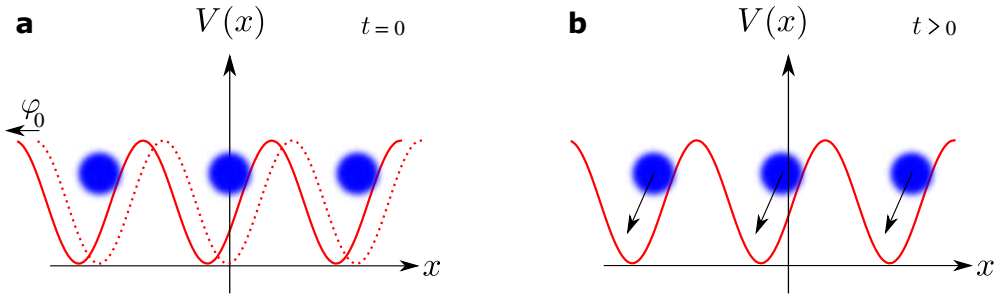


Figure 3.7 – Protocole de calibration par micro-oscillations. a : La phase φ du réseau optique est subitement décalée d'une quantité φ_0. Cela translate spatialement la position du réseau d'une distance δx définie à l'équation (3.35). La position initiale du réseau est représentée par la courbe en pointillés et sa position finale est représentée par la courbe en trait plein. **b** : Après le décalage, les atomes sont mis hors équilibre et oscillent autour des minima de potentiel.

3.3.4.2 Calibration par micro-oscillations

La méthode qui est décrite dans ce paragraphe a été développée par notre équipe [98]. Elle repose sur l'oscillation des atomes au fond des puits de potentiel formés par le réseau optique.

Le protocole expérimental pour réaliser une calibration par micro-oscillation est le suivant : un condensat est chargé adiabatiquement dans le réseau en 1 ms. Le réseau est ensuite subitement décalé par un saut de phase $\varphi \to \varphi + \delta\varphi$ ce qui se traduit par une translation du réseau optique comme représenté sur la figure 3.7. En effet, le potentiel du réseau étant périodique de période d, la relation entre un déphasage $\delta\varphi$ et une translation δx spatiale de ce dernier est

$$\delta x = \frac{\delta\varphi}{360°} d, \tag{3.35}$$

avec $\delta\varphi$ en degrés. Suivant le déphasage, les condensats vont alors être placés plus ou moins haut sur les flancs des puits du réseau pour ensuite commencer à osciller autour du fond du puits. Les condensats sont mis hors d'équilibre par le déphasage et une dynamique d'oscillation, dont l'origine provient d'un peuplement des bandes excitées du réseau, est enclenchée. Nous maintenons les atomes dans le réseau déphasé pendant un temp de maintien variable avant de procéder au temps de vol et de prendre une image de la distribution en impulsion. Au fur et à mesure que le temps de maintien augmente, nous observons une oscillation de l'impulsion moyenne du nuage d'atomes après temps de vol. Une telle oscillation est observée sur la figure 3.8 **a**.

Plus formellement, juste après la translation δx du réseau, la fonction d'onde des atomes dans le référentiel du réseau devient

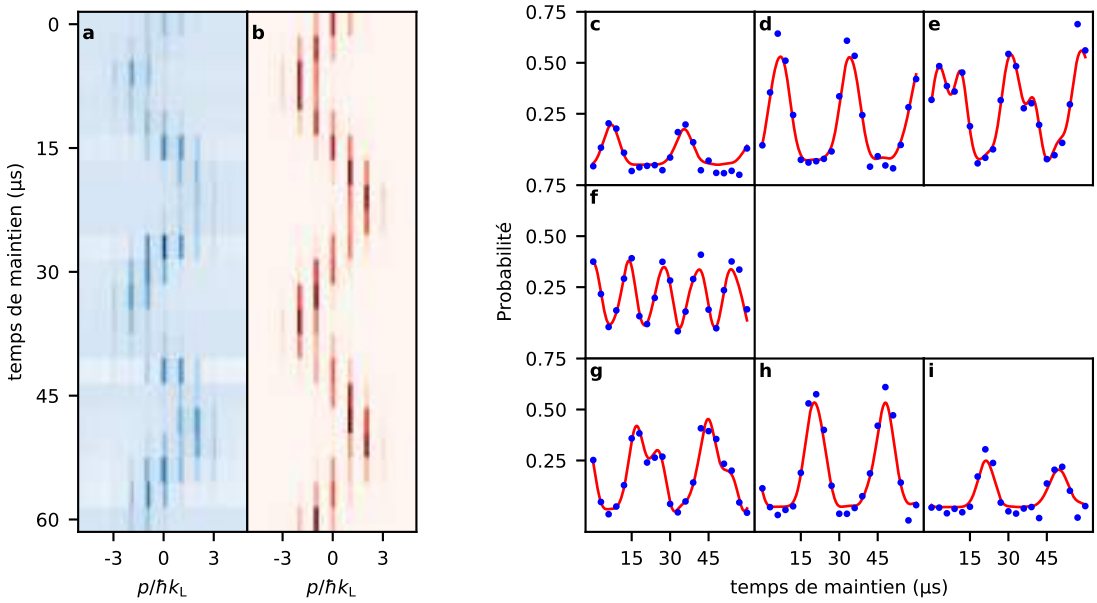


Figure 3.8 – Calibration de la profondeur du réseau optique par micro-oscillation. a : Images expérimentales intégrées selon la direction perpendiculaire au réseau en fonction du temps de maintien dans le réseau décalé de $\delta\varphi = 25°$ et de profondeur $s = 24.5 \pm 0.8$. **b** : Evolution de la norme au carré des coefficients de Fourier $|c_l^{(n,k)}|^2$ de la fonction d'onde dans l'état $|n = 0, k = 0\rangle$ obtenu par diagonalisation de l'équation centrale après un décalage abrupt du réseau de $\delta\varphi = 25°$ à profondeur $s = 24.5$. Cette valeur de la profondeur donne le meilleur accord avec les données expérimentales. **c-f** : Les points bleus correspondent aux populations normalisées dans les ordres $(-3,..,3)$ respectivement mesurées expérimentalement à partir des données présentées en **a**. Les lignes rouges correspondent aux évolutions numériques des coefficients $(|c_{-3}(k = 0)|^2,...,|c_3(k = 0)|^2)$ respectivement présentés en **b**.

$$\psi(x, t = 0^-) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^{(n=0,k=0)} e^{ilk_L x} \quad \rightarrow \quad \psi(x, t = 0^+) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^{(n=0,k=0)} e^{ilk_L(x+\delta x)}. \tag{3.36}$$

La fonction d'onde après translation du réseau est alors une superposition des états propres $|n, k = 0\rangle$ du réseau d'énergie $E^{(n)} = \hbar\omega_n$

$$\psi(x, t > 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(\delta x)\, \psi_{n,k=0}(x)\, e^{i\omega_n t}, \tag{3.37}$$

où les coefficients $\alpha_n(\delta x)$ sont les projections de l'état décalé dans le réseau sur les états propres du réseau

$$\alpha_n(\delta x) = \langle n, k|\psi(t = 0^+)\rangle = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(c_l^{(n,k=0)}\right)^* c_l^{(n=0,k=0)} e^{ilk_L \delta x}. \tag{3.38}$$

On peut alors utiliser la décomposition en série de Fourier des fonctions de Bloch $\psi_{n,k=0}(x)$ pour obtenir l'expression de l'évolution de la fonction d'onde

$$\psi(x, t > 0) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{ilk_L x} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(\delta x)\, c_l^{(n,k=0)}\, e^{i\omega_n t}. \tag{3.39}$$

La population π_l de l'ordre l diffraction au cours du temps est donc donnée par

$$\pi_l = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(\delta x) c_l^{(n,k=0)} e^{i\omega_n t} \right|^2, \tag{3.40}$$

où les c_l, α_n et ω_n peuvent être obtenus par diagonalisation de l'équation centrale. Un exemple d'évolution numérique des populations des ordres de diffraction est donné sur la figure 3.8 **b**.

L'idée de la méthode de calibration est la suivante : en mesurant la distribution des atomes à différents temps de maintien du réseau après déphasage, on observe la dynamique d'oscillation des atomes dans les puits. Or, pour un déphasage $\delta\varphi$ donné, la dynamique de ces oscillations ne dépend que de la profondeur s [98]. En fixant le déphasage $\delta\varphi$, on peut ajuster l'évolution des ordres de diffraction au cours du temps avec la profondeur s comme seul paramètre ajustable. La valeur d'ajustement optimale nous permet alors de remonter à la profondeur du réseau. Sur les figures 3.8 **c-f**, sont présentés en bleu les populations des ordres de diffraction mesurés expérimentalement après un déphasage du réseau de $\delta\varphi = 25°$ en fonction du temps de maintien. Les courbes rouges sont les évolutions numériques optimales données par l'équation (3.40). On observe un bon accord entre les résultats expérimentaux et la prédiction numérique pour une profondeur estimée du réseau de $s = 24.5 \pm 0.8$.

La force de cette méthode vient de sa robustesse sur une large gamme de valeurs, des très faibles profondeur $s < 1$ aux profondeurs maximales approchant $s \simeq 50$ sur notre dispositif. Cette méthode est également peu sensible au confinement harmonique extérieur [5] ainsi qu'au nombre d'atomes [98]. C'est un outil indispensable à nos recherches car nous effectuons systématiquement une calibration avant d'effectuer une expérience mais également après. Cela nous permet d'avoir une estimation de la variation de la profondeur s et si cette variation est faible (typiquement inférieur à 5%), nous conservons les résultats de la prise de données et les rejetons dans le cas contraire.

Maintenant que nous avons présenté la méthode permettant de calibrer la profondeur du réseau, nous allons présenter comment nous pouvons rendre le potentiel ressenti par les atomes dépendant du temps.

5. Tant qu'un certain nombre de puits du réseau, environ entre 6 et 8, sont peuplés [99].

3.4 Modulation périodique du réseau

Dans cette partie nous allons nous intéresser à une modulation périodique de l'amplitude $s(t)$ ou de la phase $\varphi(t)$ du réseau optique comme représenté sur la figure 3.9. Comme nous l'avons vu dans l'introduction générale de cette thèse, les travaux exploitant une modulation périodique d'un réseau optique pour manipuler des atomes froids dans le but de réaliser des simulations quantiques sont extrêmement nombreux [33] et je vais ici présenter une manière d'aborder cette dépendance temporelle basée sur le formalisme de la structure de bande.

3.4.1 Transfert d'énergie

Dans cette partie, nous allons voir qu'il est possible de transférer de l'énergie aux atomes via une modulation du réseau. Ce transfert d'énergie permet de placer les atomes sur les bandes excitées du réseau, c'est-à-dire à les déplacer verticalement dans la structure de bande. Pour ce faire, nous modulons soit l'intensité lumineuse soit la phase des faisceaux lasers qui forment le réseau optique comme représenté sur la figure 3.9. Le réseau se met alors à vibrer et, pour des fréquences de modulation résonantes avec des bandes d'énergie du réseau, il devient possible d'effectuer des transitions assistées par des phonons dans la structure de bande.

3.4.1.1 Transitions verticales

Tout d'abord, il est important de rappeler un résultat sur le transfert vers des bandes excitées par modulation : les transitions effectuées sont verticales et ne permettent pas de changer de sous-espace de quasi-moment k. En effet, considérons comme état initial une onde de Bloch de vecteur d'onde k dans une bande d'énergie n : $\psi_{n,k}(x, t = 0) = u_{n,k}(x, t = 0)e^{ikx}$. L'action de l'opérateur translation sur cet état est

$$\hat{T}_d \psi_{n,k}(x, t = 0) = e^{ikd} \psi_{n,k}(x, t = 0). \tag{3.41}$$

L'évolution de cet état dans le réseau modulé est donnée par l'application de l'opérateur d'évolution $\hat{U}(t)$. Or, l'invariance par translation dans le réseau est conservée à tout temps ce qui impose que l'opérateur de translation et d'évolution commutent $\left[\hat{U}(x,t), \hat{T}_d\right] = 0 \; \forall t$. Il suit donc que

$$\hat{T}_d \psi_{n,k}(x,t) = \hat{T}_d \hat{U}(x,t)\psi_{n,k}(x, t = 0) = \hat{U}(x,t)\hat{T}_d \psi_{n,k}(x, t = 0) = \hat{U}(x,t)e^{ikd}\psi_{n,k}(x, t = 0) = e^{ikd}\psi_{n,k}(x,t). \tag{3.42}$$

Même après évolution dans le réseau modulé, la fonction d'onde reste donc un état propre de l'opérateur translation de même quasi-moment k. La modulation de phase ou d'amplitude ne permettent donc que d'effectuer des transitions verticales dans la structure de bande. Dans la suite,

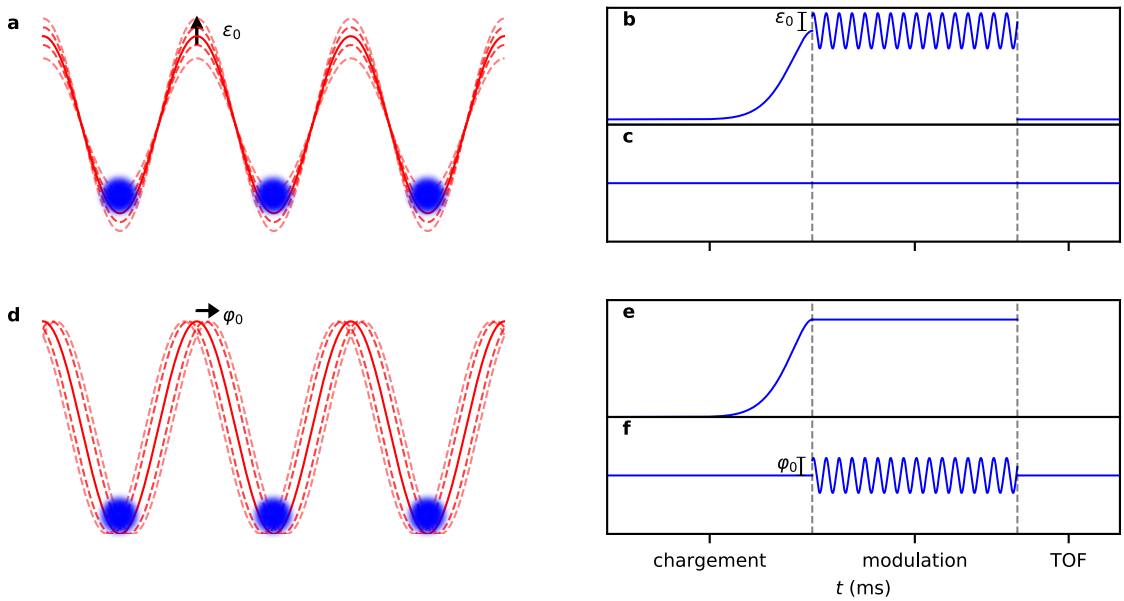


Figure 3.9 – Schéma représentant la modulation du réseau. **a** : Modulation de l'amplitude du réseau optique. L'amplitude de modulation est ε_0. **b-c** : Protocole de la modulation d'amplitude. Après un chargement adiabatique, l'amplitude du réseau est modulée puis abruptement éteinte afin d'effectuer une imagerie par temps de vol. La phase est fixée à zéro durant toute la durée du protocole. **d** : Modulation de la phase du réseau optique. L'amplitude de la modulation est φ_0. **d-f** : Protocole de la modulation de phase. Après un chargement adiabatique, la phase du réseau est modulée puis l'intensité lumineuse des lasers formant le réseau est abruptement éteinte afin d'effectuer une imagerie par temps de vol.

nous allons nous intéresser aux transitions dans le sous-espace $k = 0$ correspondant au sous-espace dans lequel les atomes sont initialement placés après un chargement adiabatique.

3.4.1.2 Règles de sélection pour la modulation d'amplitude en $k = 0$

Moduler le réseau optique permet de fournir de l'énergie aux atomes et de les transférer vers des bandes excitées. Néanmoins, en $k = 0$, toutes les transitions ne sont pas autorisées comme nous allons le voir dans les prochains paragraphes.

Dans le cas de la modulation d'amplitude du réseau, l'intensité des faisceaux lasers formant le réseau est modulée périodiquement dans le temps autour d'une valeur moyenne

$$s(t) = s(1 + \varepsilon_0 \cos(\omega t)). \tag{3.43}$$

Le potentiel ressenti par les atomes au cours du temps est alors

$$V_\varepsilon(x,t) = \frac{-sE_\mathrm{L}}{2}(1+\varepsilon_0\cos(\omega t))(1+\cos(k_\mathrm{L}x)). \tag{3.44}$$

La modulation d'amplitude ne fait apparaître qu'une seule fréquence dans la modulation temporelle. Les transitions par modulation d'amplitude s'effectuent donc uniquement via des processus à un phonon. Pour un quasi-moment k donné, le terme de couplage entre deux bandes n et n' est

$$\delta V_{n,n',k} = \langle n',k|\, V_\varepsilon(x,t)\,|n,k\rangle, \tag{3.45}$$

et la probabilité de transition entre ces deux bandes est donnée par le module carré de ce terme de couplage

$$\mathcal{P}_{n,n',k} = |\delta V_{n,n',k}|^2. \tag{3.46}$$

Les états propres des bandes d'énergies possèdent une certaine parité : dans le sous-espace $k = 0$, les coefficients des états propres des bandes d'indice n pair sont pairs $c_l^{(n,k=0)} = c_{-l}^{(n,k=0)}$ et les coefficients des états propres des bandes d'indice impair sont impairs $c_l^{(n,k=0)} = -c_{-l}^{(n,k=0)}$ [95]. En exploitant cette parité des bandes et des états de Bloch, on peut alors déduire que le terme de couplage entre deux bandes consécutives n et $n+1$ au centre de la première zone de Brillouin est nul

$$\delta V_{n,n+1,k=0} \propto \langle n,k=0|\cos(k_\mathrm{L}x)|n+1,k=0\rangle = 0. \tag{3.47}$$

En effet, la fonction $\cos(x)$ étant paire, le terme de couplage entre deux bandes consécutives, et donc deux bandes de parités différentes, est nul par symétrie. On peut effectuer un raisonnement similaire pour deux bandes n et $n+2$ possédant la même parité

$$\delta V_{n,n+2,k=0} \propto \langle n,k=0|\cos(k_\mathrm{L}x)|n+2,k=0\rangle \neq 0, \tag{3.48}$$

qui donne cette fois-ci un terme de couplage non nul. On en conclut que les règles de sélection pour la modulation d'amplitude en $k = 0$ sont que seules les transitions à un phonon vérifiant $\Delta n = 2p\ \forall p \in \mathbb{N}$ sont autorisées.

Il est possible d'observer expérimentalement la validité de ces règles de sélection. Pour cela, nous chargeons un condensat dans un réseau optique de profondeur s par un chargement adiabatique comme présenté dans la partie 3.3.2. Puis, après un temps de maintien de 2 ms, le réseau est modulé pendant des durées de 3 à 15 ms à une fréquence de modulation ν. Afin de rester dans un régime où la structure de bande n'est pas trop perturbée, les amplitudes de modulation utilisées sont faibles $\varepsilon_0 = 0.06$. Une fois la modulation terminée, tous les potentiels confinants sont éteints et la distribution en impulsion du condensat est mesurée après temps de vol. Ce protocole est répété pour différentes fréquences de modulation ce qui se traduit par un scan des

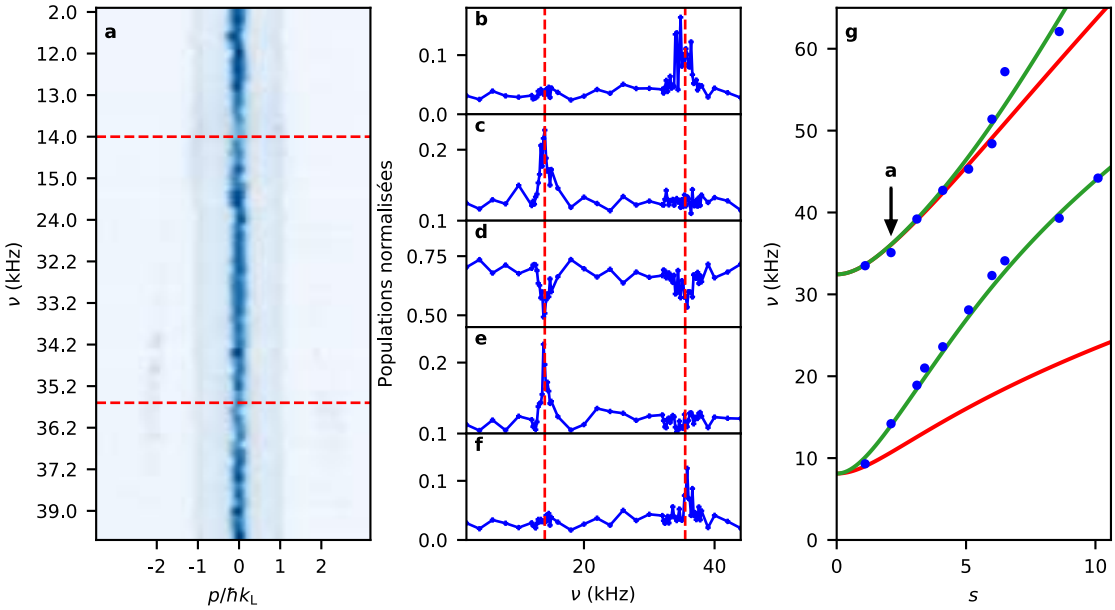


Figure 3.10 – Observation expérimentale des règles de sélection en modulation d'amplitude. **a** : Profils expérimentaux en fonction de la fréquence de modulation de l'amplitude du réseau. Les pointillés rouges indiquent les fréquences de résonance mesurées expérimentalement. **b-f** : Evolutions des populations normalisée dans les ordres de diffraction $(-2,\ldots,2)$ respectivement en fonction de la fréquence de modulation. De même, Les pointillés rouges indiquent les fréquences de résonance. **g** : Evolution des fréquences de transitions entre la bande fondamentales et les premières bandes excitées. Les points bleus correspondent aux fréquences de transitions observées expérimentalement. Les transitions autorisées (respectivement interdites) calculées numériquement sont représentées en vert (respectivement rouge). La flèche indique les données présentées en **a-f**.

bandes d'énergie dans le sous-espace $k = 0$ dont un exemple est représenté sur la figure 3.10 **a** : pour des fréquences de modulation non résonantes avec une bande d'énergie, nous retrouvons le motif d'interférence d'un condensat associé à la structure périodique du réseau de période d et présentant des pics de diffraction séparés de h/d avec une distribution piquée sur l'ordre zéro, caractéristique de l'état fondamental. Pour des excitations résonantes, les atomes acquièrent de l'énergie ce qui se traduit par une déplétion de l'ordre zéro et, par conséquent, l'alimentation de population dans les ordres plus élevés [36] comme on peut l'observer sur la figure 3.10 **b-f**. Les différentes fréquences de résonance sont ensuite déterminées par un ajustement gaussien des évolutions des ordres de diffraction en fonction de la fréquence de modulation.

Ce protocole de spectroscopie de bande est répété pour différentes profondeur du réseau optique dont les résultats sont représentés sur la figure 3.10 **g**. Sur cette figure, les différentes courbes représentent les fréquences entre les bandes excitées et la bande fondamentale

$$\nu_{\text{res}}^{(i)}(s) = \frac{E_{k=0}^{(i)}(s) - E_{k=0}^{(0)}(s)}{h}, \tag{3.49}$$

avec la convention que les lignes vertes représentent les transitions autorisées par les règles de sélection et les lignes rouges celles qui ne le sont pas. On observe que, lorsque que le gap en énergie entre deux bandes est suffisamment grand, les règles de sélection sont clairement visibles comme c'est le cas pour les deux premières transitions vers la première bande excitée en rouge et vers la deuxième bande excitée en vert. En revanche, pour les transitions suivantes, comme le gap en énergie est très faible pour les profondeurs $s < 5$ et il est difficile d'observer le respect des règles de sélection. Néanmoins, comme le gap devient significatif au delà de $s = 5$, on observe que les transitions se font effectivement sur une bande autorisée, ici la bande $n = 4$. En conclusion, nous observons le respect des règles de sélection que nous avons établies.

Maintenant que nous avons énoncé et observé ces règles de sélection pour la modulation d'amplitude, nous allons faire de même pour la modulation de phase dans la prochaine partie.

3.4.1.3 Règles de sélection pour la modulation de phase en $k = 0$

Dans le cas de la modulation de phase du réseau, la phase des faisceaux lasers formant le réseau est modulée périodiquement dans le temps

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t), \tag{3.50}$$

et le potentiel ressenti par les atomes est donc dans ce cas

$$V_\varphi(x,t) = \frac{-sE_{\text{L}}}{2}[1 + \cos(k_{\text{L}}x + \varphi_0 \sin(\omega t))]. \tag{3.51}$$

Afin de pouvoir effectuer un raisonnement similaire à celui de la partie précédente sur la parité de la fonction de modulation, il est nécessaire de décomposer le terme de modulation de l'équation (3.51)

$$V_\varphi(x,t) = \frac{-sE_{\text{L}}}{2} - \frac{sE_{\text{L}}}{2}[\cos(k_{\text{L}}x)\cos(\varphi_0 \sin(\omega t)) - \sin(k_{\text{L}}x)\sin(\varphi_0 \sin(\omega t))]. \tag{3.52}$$

Afin d'obtenir une expression du potentiel en fonction de sommes de sinus et de cosinus, on peut utiliser les propriétés suivantes des fonctions des Bessel

$$\cos(z\sin(\omega t)) = \mathcal{J}_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}_{2n}(z)\cos(2n\omega t), \tag{3.53}$$

$$\sin(z\sin(\omega t)) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}_{2n+1}(z)\cos((2n+1)\omega t). \tag{3.54}$$

où $\mathcal{J}_n(z)$ est la fonction de Bessel d'ordre n. À l'instar des résultats que nous avons présenté dans le cas de la modulation d'amplitude de la partie précédente, nous nous plaçons ici dans un régime perturbatif. L'amplitude de modulation de phase φ_0 que nous utiliserons sera donc proche de zéro. Les fonctions de Bessel suivant la loi d'échelle $\mathcal{J}_n(z) \underset{z\to 0}{\sim} z^n$, on peut donc conclure que seuls les premiers termes des sommes (3.53) et (3.54) vont contribuer de manière significative à la modulation du réseau et les termes suivants peuvent alors être négligés. Le potentiel ressenti par les atomes peut alors être approximé par

$$\begin{aligned} V_\varphi(x,t) \sim & \frac{-sE_\mathrm{L}}{2}\left[1+\mathcal{J}_0(\varphi_0)\cos(k_\mathrm{L}x)\right] - \\ & sE_\mathrm{L}\left[\mathcal{J}_2(\varphi_0)\cos(k_\mathrm{L}x)\cos(2\omega t) - \mathcal{J}_1(\varphi_0)\sin(k_\mathrm{L}x)\sin(\omega t)\right]. \end{aligned} \tag{3.55}$$

On remarque que la modulation de phase ajoute un terme constant qui a pour effet de renormaliser la profondeur du réseau [100, 101] et fait également apparaître deux termes de modulation temporelle : contrairement à la modulation d'amplitude, la modulation de phase fait apparaître plusieurs fréquences dans la modulation du réseau. Le terme en $\sin(\omega t)$ fait apparaître la fréquence de modulation ω qu'on associe à un processus à un phonon comme dans le cas de la modulation d'amplitude. En revanche, le terme en $\cos(2\omega t)$ fait quant à lui apparaître la fréquence 2ω qu'on associe alors à des processus à deux phonons [6]. On s'attend donc à observer des transitions aux fréquences

$$\nu_\mathrm{res}^{(i)}(s) = \frac{2(E_{k=0}^{(i)} - E_{k=0}^{(0)})}{h}, \tag{3.56}$$

qui étaient absentes dans le cas de la modulation d'amplitude. Calculons à présent l'élément de couplage entre deux bandes consécutives n et $n+1$

$$\delta V_{n,n+1,k=0} \propto \langle n,k=0|\, V_\varphi(x,t)\,|n+1,k=0\rangle \propto \langle n,k=0|\sin(k_\mathrm{L}x)|n+1,k=0\rangle \neq 0, \tag{3.57}$$

et entre deux bandes n et $n+2$

$$\delta V_{n,n+2,k=0} \propto \langle n,k=0|\, V_\varphi(x,t)\,|n+2,k=0\rangle \propto \langle n,k=0|\cos(k_\mathrm{L}x)|n+2,k=0\rangle \neq 0. \tag{3.58}$$

On voit que les processus à un phonon vont coupler deux bandes de parité différentes alors que les processus à deux phonons vont coupler deux bandes de même parité.

Le protocole expérimental pour sonder ces règles de sélection est similaire à celui de la modulation d'amplitude : nous chargeons un condensat dans un réseau optique de profondeur s par un chargement adiabatique puis, après un temps de maintien de 2 ms, la phase du réseau est modulée

6. En toute rigueur, on rappelle que la modulation de phase implique des processus à n phonons mais dont les couplages sont de plus en plus faibles avec n.

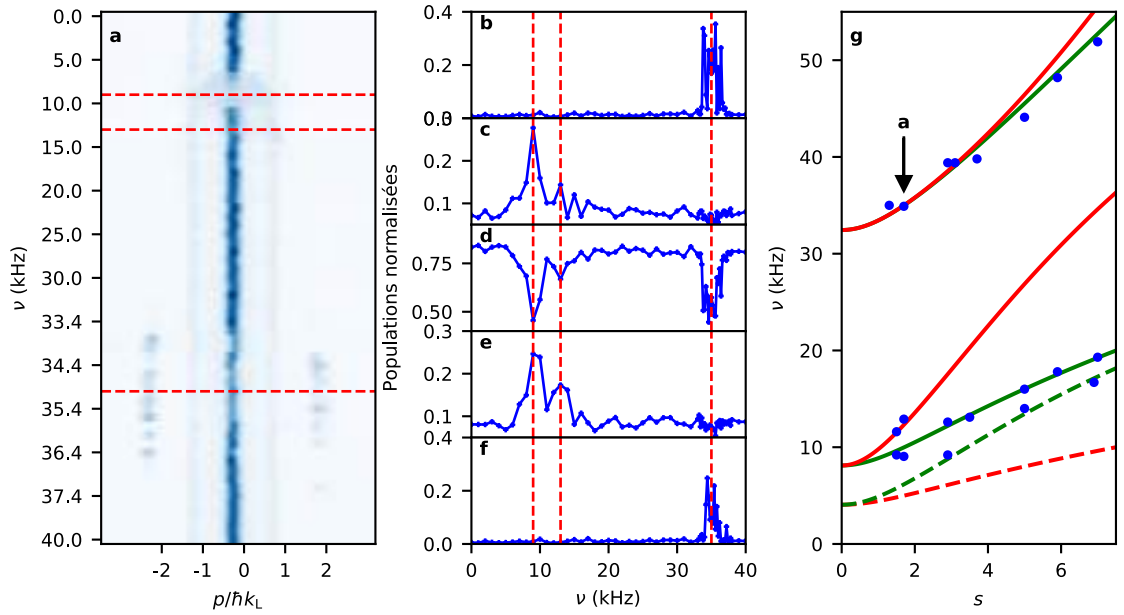


Figure 3.11 – Observation expérimentale des règles de sélection en modulation de phase. **a** : Profils expérimentaux en fonction de la fréquence de modulation de phase du réseau. Les pointillés rouges indiquent les fréquences de résonance mesurées expérimentalement. **b-f** : Evolution des population normalisée dans les ordres de diffraction $(-2,\ldots,2)$ respectivement en fonction de la fréquence de modulation. De même, les pointillés rouges indiquent les fréquences de résonance. **g** : Evolution des fréquences de transitions entre la bande fondamentale et les premières bandes excitées. Les points bleus correspondent aux fréquences de transition observées expérimentalement. Les transitions autorisées (respectivement interdites) calculées numériquement sont représentées en vert (respectivement rouge). Les fréquences de transition en trait plein (respectivement en pointillés) correspondent aux transitions à un phonons (respectivement à deux phonons). La flèche indique les données présentées en **a-f**.

pendant des durées de 1 à 5 ms à une fréquence de modulation ν. De même, afin de rester dans un régime perturbatif les amplitudes de modulation utilisées sont faibles : nous avons utilisé la valeur $\varphi_0 = 10°$, ce qui correspond à un déplacement spatial maximal de $\delta x = 0.03d$. Un exemple de spectroscopie de bande en modulation de phase est représenté sur la figure 3.11 **a**. On repère toujours les transferts d'énergie par une déplétion de l'ordre zéro et une alimentation des autres ordres comme on peut le voir sur la figure 3.11 **b-f**.

Sur le spectre en énergie de la figure 3.11 **g**, la même convention au niveau des couleurs des transitions est adoptée que pour la modulation d'amplitude et les traits pleins représentent les transitions à un phonon alors que les pointillés représentent les transitions à deux phonons. On observe également un respect des règles de sélection même pour les processus multi-phononiques à l'exception de deux résonances sur une bande interdite vers les profondeurs $s = 2$. Ces deux

résonances sont le résultats d'un processus impliquant les interactions entre atomes au sein du nuage et dont on peut expliquer l'origine par des simulations numériques de l'équation de Gross-Pitaevskii [36].

On en conclut que, pour la modulation de phase, les transitions entre deux bandes de parités différentes sont autorisées via un processus à un phonon alors que les transitions entre deux bandes de même parité sont autorisées via un processus à deux phonons.

Récapitulatif

Au centre de la zone de Brillouin, en $k = 0$, les modulations de phase et d'amplitude ne sont pas soumises aux mêmes règles de sélection pour le transfert d'atomes d'une bande d'indice n à une bande d'indice n' : Pour une modulation de phase, les transitions autorisées sont celles entre bandes de parité différente ($n = 1 \rightarrow n' = 2$, $n = 1 \rightarrow n' = 4\ldots$) pour les transitions à un phonon et entre bandes de même parité pour les transitions à deux phonons. Pour la modulation d'amplitude, seules les transitions à un phonon entre les bandes de même parité sont autorisées ($n = 0 \rightarrow n' = 2$).

Ces règles de sélection ne sont valides que pour le sous-espace $k = 0$. Dans la prochaine partie, nous allons voir que nous pouvons effectivement transférer des atomes vers les bandes excitées par modulation d'amplitude entre des bandes de parités différentes pour les $k \neq 0$.

3.4.1.4 Terme de couplage en $k \neq 0$

Les règles de sélection que nous venons d'énoncer ne sont valables que dans le sous-espace $k = 0$. Pour les sous-espaces $k \neq 0$, il est possible de calculer les termes de couplages entre deux bandes n et n' numériquement. Deux exemples, l'un pour le couplage entre la bande fondamentale et la première bande excitée, l'autre pour le couplage entre la bande fondamentale et la deuxième bande excité sont représentés sur la figure 3.13 **c** et **e** respectivement. Sur ces deux figures, nous retrouvons le respect des règles de sélection en $k = 0$. Afin de tester ces termes de couplages, nous pouvons moduler le réseau chargé d'un nuage présentant une structure bi-modale : un nuage contenant une partie d'atomes thermique et une partie d'atomes condensés. En effet, comme énoncé au chapitre 2 de cette thèse, la distribution en vitesse d'un nuage thermique est plus large que celle d'un condensat. Cela se traduit par une largeur en quasi-moment du nuage thermique Δk large et pouvant occuper jusqu'à toute la bande fondamentale de la zone de Brillouin.

Afin d'identifier les atomes transférés dans une bande excitée par la modulation en $k \neq 0$, nous procédons à un déchargement adiabatique du réseau, technique aussi connue sous le nom de *band*

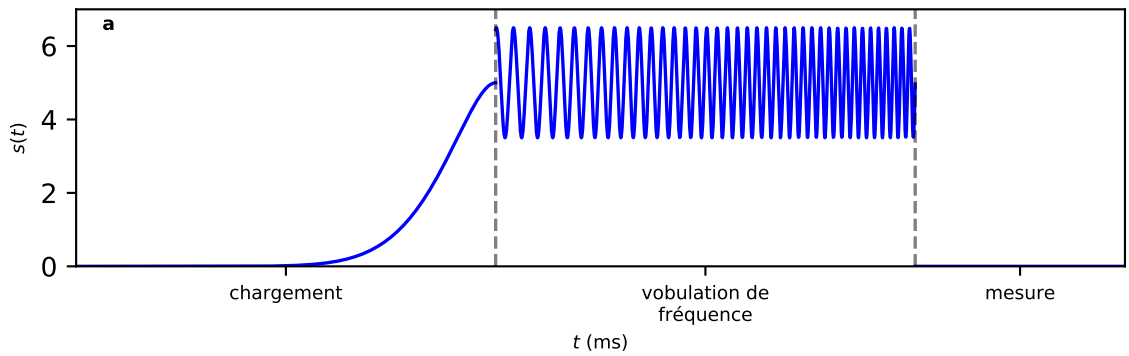


Figure 3.12 – Protocole de modulation d'amplitude du réseau optique par vobulation de fréquence. La fréquence de modulation augmente linéairement au cours du temps.

mapping [95, 102, 103]. Cette re-descente adiabatique du réseau revient à transférer les populations des différentes bandes du réseau sur les différents états d'impulsions de la particule libre à $s = 0$: une fois l'intensité lumineuse du réseau re-descendue, les atomes qui se trouvaient dans les bandes excitées possèdent une impulsion p et vont alors se séparer spatialement du nuage resté dans la bande fondamentale en $k = 0$ possédant une impulsion nulle. En effectuant un temps de vol, il devient alors possible d'identifier les populations occupant les différentes bandes du réseau en fonction de la distance qui les séparent du nuage central d'impulsion nulle.

Pour tester ces termes de couplages sur une plage de quasi-moment, nous procédons à une vobulation de fréquence : l'amplitude du réseau optique adopte le profil temporel suivant

$$s(t) = 1 + \varepsilon_0 \sin(2\pi\nu(t)t), \tag{3.59}$$

où la "fréquence" de modulation varie linéairement au cours du temps

$$\nu(t) = \nu_i + \frac{(\nu_f - \nu_i)t}{2t_{\text{mod}}}, \tag{3.60}$$

comme représenté sur la figure 3.12. On se place dans le cas où la variation de la fréquence instantanée $\nu(t)$ a une durée grande devant $1/\nu(t)$: les temps de modulation utilisés sont de l'ordre de la dizaine de millisecondes alors que les fréquences de modulation sont proches des fréquences de résonance du réseau, soit de l'ordre de la trentaine de kilohertz pour une profondeur du réseau de $s = 2.7$ dans le cas des données représentées sur la figure 3.13. Afin d'augmenter la probabilité de transition vers les bandes excitées, l'amplitude de modulation est plus grande que dans les expériences de spectroscopie de bande ($\varepsilon_0 = 0.3$ pour les données de la figure 3.13). Nous ne pouvons donc plus considérer que l'expérience se passe dans un régime perturbatif mais néanmoins l'interprétation des données en terme de transition interbande reste pertinente.

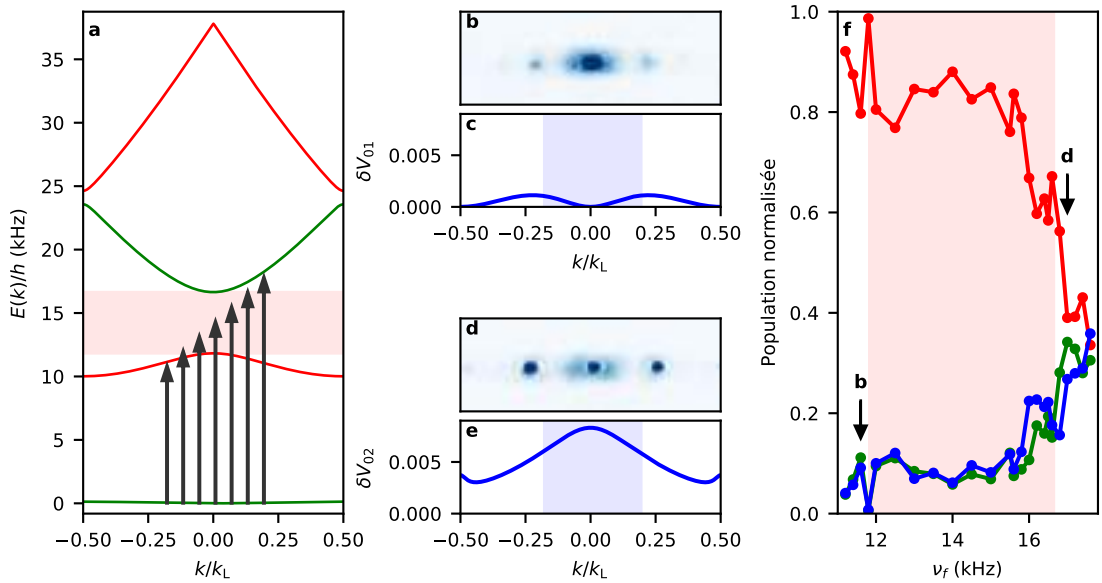


Figure 3.13 – Termes de couplages en $k \neq 0$. **a** : Structure de bande à $s = 2.7$. Les bandes vertes (respectivement rouges) représentent les bandes autorisées (respectivement interdites) par modulation d'amplitude en $k = 0$. Les flèches noires correspondent aux transitions pour les fréquences finales de la vobulation de fréquence. Par soucis de clarté, on ne représente les transitions que pour un des deux quasi-moment k de la zone de Brillouin excité par la modulation. La zone rouge correspond au gap d'énergie entre la première et la deuxième bande excitée. **b** : Images expérimentales obtenues après temps de vol lorsqu'on applique le protocole de vobulation avec une fréquence initiale de modulation de $\nu_i = 11.2$ kHz une fréquence finale de modulation de $\nu_f = 11.7$ kHz. La densité optique a été tronquée pour visualiser le nuage thermique. **c** : Terme de couplage entre la bande fondamentale et la première bande excitée. La zone bleu correspond à la plage de quasi-moment adressée pendant la vobulation de fréquence. **d** : Images expérimentale obtenue après temps de vol lorsqu'on applique le protocole de vobulation avec la même fréquence initiale de vobulation que précédemment et une fréquence finale de modulation de $\nu = 18.2$ kHz. **e** : Terme de couplage entre la bande fondamentale et la deuxième bande excitée. La zone bleue correspond à la plage de quasi-moment adressée pendant la vobulation de fréquence. **f** : Evolution du nombre d'atomes dans le nuage central (rouge), latéral gauche (bleu) et latéral droit (vert) en fonction de la fréquence finale de vobulation. La zone rouge correspond au gap en énergie entre la première et la deuxième bande excitée.

Pour les données présentées sur la figure 3.13, la fréquence initiale de vobulation est $\nu_i = 11.2$ kHz. Pour la figure 3.13 **b**, la fréquence finale de modulation de $\nu_f = 11.7$ kHz est résonante avec la première bande excitée en $k \neq 0$. Comme il n'y a que des atomes thermique en $k \neq 0$ dans la bande fondamentale, c'est eux que l'on transfère dans la bande excitée. Le condensat en $k = 0$ est quant à lui protégé de la modulation par les règles de sélection et le gap en énergie avec la deuxième bande excitée. En effet, même si la fréquence finale de modulation ν_f devient résonante avec la première bande excitée en $k = 0$, on observe après temps de vol qu'il n'y a aucun atome dans la phase condensée dans les nuages latéraux mais uniquement des atomes thermiques. En revanche, lorsque la fréquence de modulation devient résonante avec la deuxième bande excitée, autorisée par modulation d'amplitude comme on peut le voir sur l'élément de couplage de la figure 3.13 **e**, le condensat est dépeuplé. Les nuages latéraux contiennent alors des atomes dans la phase condensée comme représenté sur la figure 3.13 **d** pour une fréquence finale de modulation de $\nu_f = 18.2$ kHz.

Ce résultat est récapitulé sur la figure 3.13 **f** où l'évolution des populations du nuage central (rouge) et des nuages latéraux gauche (bleu) et droite (vert) sont représentées en fonction de la fréquence finale de modulation. La population du nuage central n'est affecté que lorsque la fréquence finale de modulation est résonante avec la deuxième bande excitée, là où les transitions sont autorisées. Des atomes condensées viennent alors peupler les nuages latéraux. Cette expérience permet également de vérifier par une autre méthode la validité des règles de sélection.

Dans la prochaine partie, nous allons voir comment il est possible d'exploiter cette caractéristique intéressante de la modulation du réseau afin de refroidir un nuage d'atomes dans un réseau optique.

3.4.1.5 Intermezzo : Refroidissement d'un nuage d'atomes

Nous avons vu qu'un condensat chargé adiabatiquement dans un réseau optique occupe l'état $|n = 0, k = 0\rangle$ avec une très faible dispersion en quasi-moment. En revanche, un nuage thermique possède une dispersion en quasi-moment Δk plus large que celle d'un condensat et peut occuper jusqu'à toute la bande fondamentale dans la première zone de Brillouin. En se basant sur cette observation, nous avons proposé un protocole permettant de refroidir un nuage d'atomes piégés dans un réseau optique [37].

L'idée est la suivante : en ciblant des transitions vers des bandes d'énergies non liées, interdites par modulation d'amplitude en $k = 0$ mais autorisées par modulation d'amplitude pour des quasi-moments non-nuls, il devient possible de filtrer les atomes thermiques d'un nuage partiellement

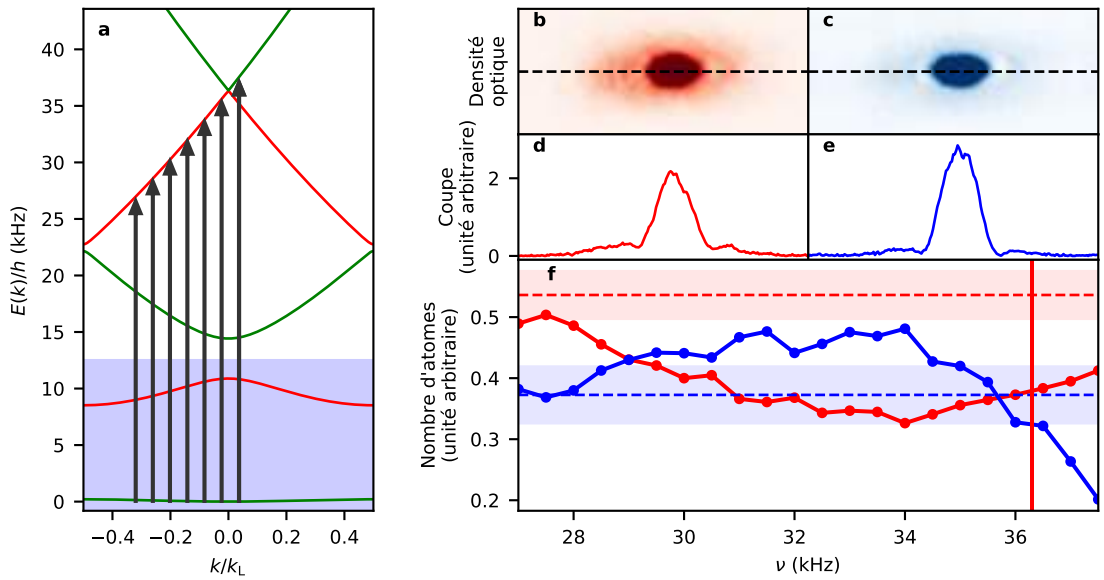


Figure 3.14 – Refroidissement d'un nuage partiellement condensé par modulation du réseau optique. a : Structure de bande à $s = 2.2$. Les bandes vertes (respectivement rouges) représentent les bandes autorisées (respectivement interdites) par modulation d'amplitude en $k = 0$. Les flèches noires correspondent aux transitions pour les fréquences finales de la vobulation de fréquence. Par soucis de clarté, on ne représente les transitions que pour un des deux quasi-moment k de la zone de Brillouin excité par la modulation. La zone bleu délimite les bandes d'énergies liées de la structure de bande. **b** : Densité optique témoin du nuage d'atomes après le protocole sans modulation d'amplitude du réseau. La densité optique à été tronquée pour visualiser le nuage thermique. **c** : Densité optique du nuage d'atomes après le protocole pour une fréquence finale de modulation de $\nu_f = 33$ kHz. **d-e** : Coupe des densités optiques **b-c** selon les pointillés noirs. **f** : Evolution du nombre d'atomes thermiques (trait plein rouge) et condensés (trait plein bleu) en fonction de la fréquence finale de vobulation. Ces résultats sont à comparer aux mêmes quantités (nombres d'atomes thermiques et condensés) en l'absence de modulation dont les valeurs moyennes (pointillés rouges et bleus respectivement) et écart-type (rectangles rouge et bleu respectivement) sont représentés. Le trait vertical rouge représente la fréquence de transition de la bande fondamentale à la quatrième bande excitée en $k = 0$.

condensé. En effet, une fois transférés sur des bandes d'énergies non liées, les atomes acquièrent une vitesse de groupe

$$v_g(k_t) = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E(k)}{\partial k}\bigg|_{k=k_t}, \tag{3.61}$$

dictée par la courbure de la bande adressée par la transition au quasi-moment k_t. Si la bande est non liée, les atomes s'échappent du réseau optique et quittent alors le nuage d'atomes. Pour laisser ces atomes non liés se séparer spatialement du nuage principal, nous décomprimons le piège hybride avant de charger les atomes dans le réseau en diminuant progressivement la puissance du faisceau dipolaire vertical : l'effet dimple est alors diminué pour ne laisser que le potentiel du piège dipolaire horizontal. Puis nous avons recourt à une vobulation de fréquence en suivant le protocole décrit sur la figure 3.12 : nous filtrons ainsi les atomes thermiques sur une plage de quasi-moment de la zone de Brillouin. Les règles de sélection assurent quant à elles de conserver les atomes au centre de la première zone de Brillouin de quasi-moment nul, c'est-à-dire les moins énergétiques. Ce filtrage des atomes thermiques est ensuite suivi d'une rethermalisation du nuage via des collisions élastiques à l'instar du refroidissement par évaporation présenté au chapitre 2 de cette thèse. Afin de diagnostiquer l'état du condensat, une re-descente adiabatique du réseau est effectuée. Cette méthode s'apparente au refroidissement par évaporation mais s'effectue non plus dans l'espace réel, mais dans l'espace réciproque.

Nous avons d'abord testé cette méthode sur un nuage partiellement condensé. Pour préparer un tel état, nous ajustons la rampe finale d'évaporation dans le piège hybride afin d'obtenir un nuage avec une fraction d'atomes thermiques importante, environ 40% du nombre d'atomes total. Le piège hybride est décomprimé en 400 ms et le nuage est ensuite chargé adiabatiquement dans le réseau optique de profondeur $s = 2.2$. Nous procédons alors à la vobulation de fréquence de la fréquence initiale $\nu_i = 25$ kHz à une fréquence finale variable allant de $\nu_f = 27$ kHz à $\nu_f = 37$ kHz afin d'observer l'évolution des fractions thermique et condensée du nuage en fonction de la plage de quasi-moment adressée. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 3.14.

Les figures 3.14 **b-c** représentent deux images d'absorption du nuage d'atomes après ce protocole de refroidissement sans et avec la vobulation de fréquence respectivement : l'effet de la modulation du réseau est clairement visible sur les profils intégrés des figure 3.14 **d-e** où l'on remarque, qu'en présence de modulation, les ailes thermiques du nuage sont diminuées. Afin de rendre cette observation plus quantitative, nous avons procédé à un ajustement bi-modal de ces profils pour déterminer la fraction d'atomes dans les parties thermique et condensée en fonction de la fréquence finale de modulation ν_f. Nous comparons les fractions obtenues en présence de la modulation à celles obtenues en l'absence de la modulation comme représenté sur la figure 3.14 **f**. Sur cette figure, les courbes rouges correspondent au traitement effectué sur la partie thermique alors

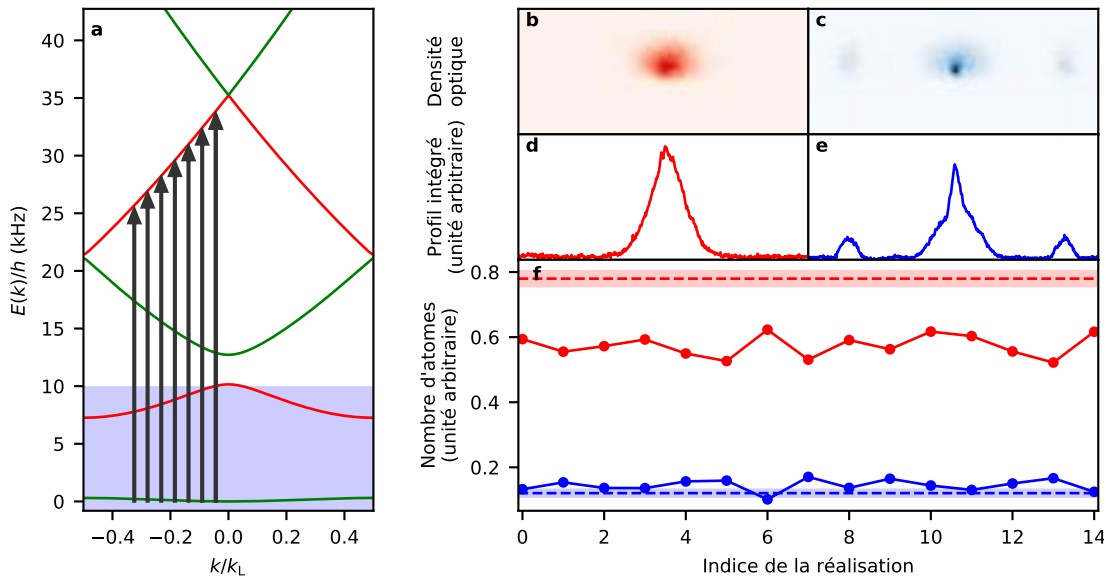


Figure 3.15 – Condensation d'un nuage thermique par modulation du réseau optique. a : Structure de bande à $s = 1.8$. Les bandes vertes (respectivement rouges) représentent les bandes autorisées (respectivement interdites) par modulation d'amplitude en $k = 0$. Les flèches noires correspondent aux transitions pour les fréquences finales de la vobulation de fréquence. Par soucis de clarté, on ne représente les transitions que pour un des deux quasi-moment k de la zone de Brillouin excité par la modulation. La zone bleu délimite les bandes d'énergies liées de la structure de bande. **b** : Densité optique témoin du nuage d'atomes après le protocole sans modulation d'amplitude du réseau. **c** : Densité optique du nuage d'atomes après le protocole pour une fréquence finale de modulation de $\nu_f = 33$ kHz. **d-e** : Profils intégrés verticalement des densités optiques **b-c**. **f** : Nombre d'atomes thermiques (rouge) et condensés (bleu) pour quinze répétitions du protocole. Les pointillés rouges (respectivement bleu) correspondent à la valeur moyenne de la partie thermique (respectivement condensées) en l'absence de modulation. Les rectangles des mêmes couleurs représentent les déviations standards de ces moyennes.

que les courbes bleues correspondent à la partie condensée. On remarque que, comme attendu, la fraction thermique est diminuée et la partie condensée est augmentée en présence de modulation jusqu'à ce que la fréquence finale de modulation atteigne une bande excitée où les transitions par modulation d'amplitude sont autorisées. On observe alors que ce comportement s'inverse.

Ce comportement encourageant des parties thermiques et condensées nous ont alors poussé à procéder au même protocole mais sur un nuage complètement thermique. Pour cela, nous avons diminué le temps d'évaporation davantage et effectué un protocole similaire dans un réseau de profondeur $s = 1.8$. Ces résultats sont présentés sur la figure 3.15. L'efficacité du protocole est démontrée par l'apparition d'une partie condensée, clairement visible par un profil bi-modal,

dans le nuage initialement complètement thermique. Il s'agit d'une signature expérimentale forte d'une diminution de la température de l'ensemble atomique.

Nous avons répété ce protocole sur quinze nuages thermiques et observé le même effet de refroidissement comme présenté sur la figure 3.15 **f**. Sur cette figure, les courbes en rouges correspondent au traitement effectué sur la partie thermique alors que les courbes bleues correspondent à la partie condensée pour les quinze répétitions du protocole. On observe une diminution franche du nombre d'atomes de la partie thermique et une légère augmentation de la fraction condensée par rapport au cas sans modulation. Cette expérience démontre donc la reproductibilité de cette méthode de refroidissement.

Il s'agit donc d'une nouvelle technique de refroidissement de nuage d'atomes dans un réseau optique aux côtés de techniques plus traditionnelles et avancées telle que le refroidissement Raman par bandes latérales [104] dont l'efficacité a été démontrée en 2017 en permettant d'atteindre la condensation de Bose-Einstein directement après une étape de mélasse dynamique [105]. Un avantage du protocole de refroidissement que nous avons développé est que cette technique est indépendante de l'espèce atomique considérée : en effet nous n'utilisons pas de degrés de liberté internes des atomes mais uniquement les degrés de liberté externes via le réseau optique. Cette méthode est donc théoriquement facilement transposable à différents montages expérimentaux. Cependant, en pratique cette méthode présente pour le moment une limitation expérimentale sur notre dispositif.

L'idée de la méthode serait d'effectuer plusieurs cycles de filtrage-thermalisation mais ceci est difficile sur notre dispositif : la principale limitation sur notre expérience réside dans le fait que les atomes excités sont toujours piégés par le potentiel du piège hybride qu'il nous est impossible d'éteindre sous peine de perdre l'ensemble des atomes. Au bout d'une période d'oscillation dans ce piège, les atomes excités finissent par re-traverser le nuage principal entraînant alors un chauffage. Cette méthode trouve cependant un intérêt pour des montages où les atomes sont uniquement piégés dans le réseau optique. Les résultats que nous présentons ici constituent cependant une preuve de principe de l'efficacité de cette méthode.

Dans cette partie de chapitre, nous avons présenté nos résultats sur l'observation de transfert d'énergie en modulant la phase ou l'amplitude du réseau optique. Nous avons exploité ces transferts d'énergie pour proposer une nouvelle méthode de refroidissement d'un nuage d'atomes dans un réseau optique. Dans la prochaine partie, nous allons voir comment il est possible de modifier le quasi-moment des atomes, c'est-à-dire déplacer le nuage le long d'une bande d'énergie.

3.5 Accélération du réseau

Dans la partie précédente nous avons vu l'effet d'une modulation périodique de phase ou d'amplitude du réseau optique sur les atomes. Nous allons à présent voir l'effet d'une accélération de ce dernier. En accélérant le réseau optique, les atomes ressentent dans le référentiel du réseau une force F d'inertie d'entrainement spatiale et uniforme, telle que l'hamiltonien auquel ils sont soumis est de la forme

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{sE_{\mathrm{L}}}{2}(1 + \cos(k_{\mathrm{L}}x)) - F(t)x. \tag{3.62}$$

Au cours de cette accélération, la forme des états de Bloch est préservée [95]. En effet

— un état initial $\psi(x, t = 0) = e^{ik(0)x}u_{k(0)}(x, 0)$, avec $u_{k(0)}(x, 0)$ une fonction périodique spatialement, conservera sa forme à un instant t ultérieur $\psi(x, t) = e^{ik(t)x}u_{k(t)}(x, t)$, avec $u_{k(t)}(x, t)$ une fonction également périodique spatialement. On notera que l'état peut être décomposé sur plusieurs bandes d'énergie. Le quasi-moment évolue alors selon

$$k(t) = k(0) + \int_0^t \frac{F(t')}{\hbar} dt'. \tag{3.63}$$

— si la dynamique sous l'action de F est adiabatique (nous préciserons ce critère plus bas), un état initial dans une bande d'énergie donnée $\psi(x, t = 0) = e^{ik(0)x}u_{n,k(0)}(x, 0)$ évoluera vers un état de la même bande avec le quasi-moment modifié $\psi(x, t) = e^{ik(t)x}u_{n,k(t)}(x, t)$.

Une remarque importante est que ce défilement du quasi-moment s'obtient en ajoutant une force à l'hamiltonien, peut importe son origine : une autre manière d'ajouter une telle force est par exemple de rajouter un gradient de champ magnétique, ou tout simplement d'utiliser la force de gravité dans le cas d'un réseau vertical [106].

3.5.1 Condition d'adiabadicité

Dans cette partie, nous allons détailler la condition d'adiabadicité énoncée précédemment dans le cas particulier où le nuage d'atomes est chargé initialement dans la bande fondamentale au centre de la première zone de Brillouin.

Intuitivement, on peut comprendre cette condition d'adiabadicité de la manière suivante : pour que le nuage reste dans la bande fondamentale, il faut que le passage des atomes au voisinage des croisement évités en bord de zone de Brillouin en $k = \pm k_{\mathrm{L}}/2$ soit assez lent pour éviter qu'une partie de la fonction d'onde effectue une transition vers la première bande excitée. Plus formel-

lement, rappelons que l'hamiltonien initial, dans le cas d'une force nulle, peut se mettre sous la forme

$$H_k = \frac{(p+\hbar k)^2}{2m} - \frac{sE_\mathrm{L}}{2}(1+\cos(k_\mathrm{L}x)), \tag{3.64}$$

dont les états propres sont les fonctions $|u_{n,k}\rangle$. On cherche à quelle condition le nuage d'atomes, initialement dans l'état $|u_{n=0,k=0}\rangle$, reste dans la bande fondamentale au cours de l'accélération. C'est le cas si la condition [95]

$$\hbar\left|\langle u_{n=1,k(t)}|\frac{d}{dt}|u_{n=0,k(t)}\rangle\right| \ll \Delta E_k. \tag{3.65}$$

est respectée, où $\Delta E_k = E_k^{(n=1)} - E_k^{(n=0)}$ est l'écart entre l'énergie de la bande fondamentale et de la première bande excitée au quasi-moment k. Dans le cas d'un réseau uniformément accéléré, la force d'inertie d'entrainement que ressentent les atomes dans le référentiel du réseau est

$$F = -ma = -m\frac{d^2x_0(t)}{dt^2}, \tag{3.66}$$

où a est l'accélération du réseau et $x_0(t)$ la position de l'origine du réseau au cours du temps. Comme le déplacement du réseau est quadratique, la force d'inertie d'entrainement ressenti par les atomes est constante au cours du temps et le défilement du quasi-moment est alors simplement

$$k(t) = k(0) + \int_0^t \frac{F(t')}{\hbar}dt' = k(0) + \frac{Ft}{\hbar}. \tag{3.67}$$

Connaissant l'évolution du quasi-moment au cours du temps, on peut ré-écrire la condition (3.65) comme

$$F\left|\langle u_{n=1,k(t)}|\frac{d}{dk}|u_{n=0,k(t)}\rangle\right| \ll \Delta E_k. \tag{3.68}$$

Pour avoir une forme plus simple de cette équation, on peut exprimer l'élément de couplage du membre de gauche de l'expression (3.68) comme un élément de couplage de l'opérateur impulsion $\hat{p}$. On a en effet l'égalité [7] :

$$\Delta E_k\left|\langle u_{n=1,k(t)}|\frac{d}{dk}|u_{n=0,k(t)}\rangle\right| = \frac{\hbar}{m}\left|\langle u_{n=1,k(t)}|\hat{p}|u_{n=0,k(t)}\rangle\right|. \tag{3.69}$$

Cela nous permet d'obtenir le critère d'adiabaticité suivant

$$\frac{F\hbar}{m}\left|\langle u_{n=1,k(t)}|\hat{p}|u_{n=0,k(t)}\rangle\right| \ll (\Delta E_k)^2. \tag{3.70}$$

7. On obtient cette expression en dérivant l'équation aux valeurs propres de l'hamiltonien (3.64) par rapport au quasi-moment k.

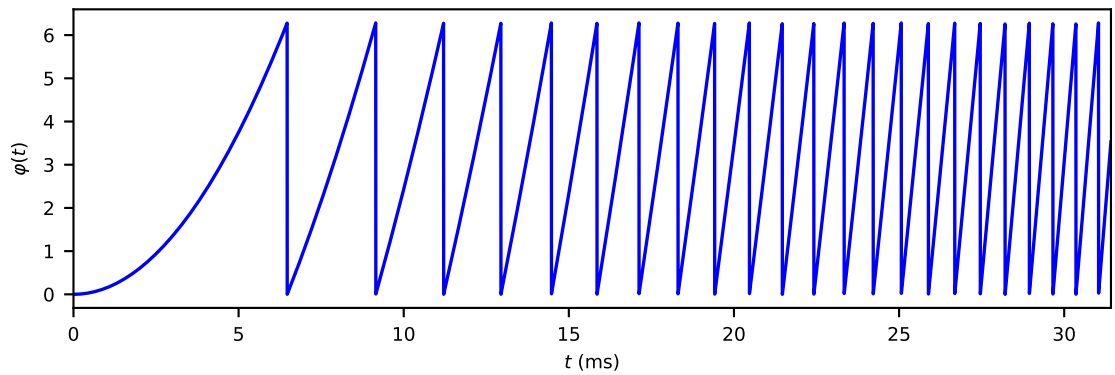


Figure 3.16 – Protocole d'accélération du réseau par une évolution de phase quadratique.

Pour la suite de ce manuscrit, nous n'aurons besoin d'évaluer ce critère uniquement dans un régime des faibles profondeurs. Le quasi-moment où le gap en énergie entre la bande fondamentale et la première bande excitée est le plus faible est $k = k_{\mathrm{L}}/2$ et vaut dans le régime des liaisons faibles $\Delta E = \frac{sE_{\mathrm{L}}}{2}$. À ce quasi-moment, l'élément de matrice de l'opérateur impulsion vaut approximativement $\pm\hbar k$ dans le régime des liaisons faibles. On obtient alors

$$\frac{F\hbar^2 k}{m} \ll \frac{s^2 E_{\mathrm{L}}^2}{4}. \tag{3.71}$$

Il est commode à ce stade d'introduire quelques grandeurs caractéristiques des réseaux accélérés. La première est le temps nécessaire pour que le quasi-moment parcourt toute la première zone de Brillouin pour une force F fixée

$$\tau_B = \frac{\hbar k_{\mathrm{L}}}{F} = \frac{h}{mad}. \tag{3.72}$$

Ce temps caractéristique est appelé le *temps de Bloch*. À ce temps, on peut associer une pulsation de Bloch

$$\omega_B = \frac{2\pi}{\tau_B}, \tag{3.73}$$

qui permet finalement de définir une énergie caractéristique de Bloch

$$E_B = \hbar\omega_B = mad, \tag{3.74}$$

où d est le pas du réseau. Cette énergie correspond au travail de la force F sur une distance d. La condition d'adiabaticité peut alors se ré-écrire comme une condition sur le temps de Bloch

$$\boxed{\tau_B \gg \frac{2}{s^2 \nu_{\mathrm{L}}} = \tau_{\mathrm{adiab}}.} \tag{3.75}$$

On retrouve l'idée que le temps caractéristique de l'accélération doit être suffisamment grand pour que la fonction d'onde reste sur la bande fondamentale, tendant vers l'infini quand la profondeur s tend vers zéro, cas de figure où les gaps en énergie sont infinitésimalement faibles, afin de rester adiabatique.

Dans la prochaine partie, nous allons aborder le phénomène surprenant qui intervient dans un réseau accéléré de faible profondeur lorsque cette condition est respectée : les oscillations de Bloch.

3.5.2 Oscillation de Bloch

L'accélération du réseau est une méthode très répandue pour déplacer des atomes chargés dans un réseau optique dans la structure de bande dont un exemple est présenté sur la figure 3.18. L'accélération est réalisée dans notre cas par une variation quadratique de la phase du réseau au cours du temps comme représenté sur la figure 3.16. On se place dans le régime adiabatique défini dans la partie précédente. On notera que la phase étant 2π périodique, les sauts abrupts que l'on peut observer ne perturbent pas les atomes à condition qu'il aient lieu sur une échelle de temps courte devant l'échelle caractéristique de la dynamique atomique : ils sont abruptement décalés dans un site voisin avant d'être à nouveau accélérés. Comme la phase du réseau varie, le motif d'interférence formant le potentiel n'est alors plus statique mais il défile à une vitesse $v_{\mathrm{res}}(t)$ comme représenté schématiquement sur la figure 3.17 **a**. Cela applique une force d'inertie d'entrainement sur les atomes qui fait défiler leur quasi-moment comme expliqué précédemment et représenté schématiquement sur la figure 3.17 **b**. Sur cette figure est représenté la distribution en impulsion des atomes dans le référentiel du réseau. Le quasi-moment des atomes défile alors jusqu'à parcourir $1k_{\mathrm{L}}$, $2k_{\mathrm{L}}$, puis $3k_{\mathrm{L}}$ etc. Dans le référentiel du laboratoire, cela s'observe donc par un décalage de la population maximale sur les ordres $+1\hbar k_{\mathrm{L}}$, $+2\hbar k_{\mathrm{L}}$, puis $+3\hbar k_{\mathrm{L}}$ de diffraction comme représenté sur la figure 3.17 **c**.

Sur la figure 3.18, on peut observer ce comportement expérimentalement. Dans cette expérience des atomes sont chargés adiabatiquement dans un réseau à une profondeur de $s = 1.2$ puis le réseau est accéléré à une accélération de $a = 2.13\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Cette accélération correspond à un temps de Bloch de $\tau_B \sim 4$ ms, qui est grand devant le temps d'adiabadicité $\tau_{\mathrm{adiab}} \sim 170\ \mu$s à cette profondeur. Le déplacement des atomes dans la structure de bande est donc adiabatique et il est représenté sur la figure 3.18 **a** : le quasi-moment des atomes est translaté de deux k_{L}. Nous observons ce défilement du quasi-moment dans le référentiel du laboratoire, comme cela est représenté sur la figure 3.17 **c**. Comme attendu, nous observons une translation de la probabilité maximale en impulsion au cours du temps de l'accélération.

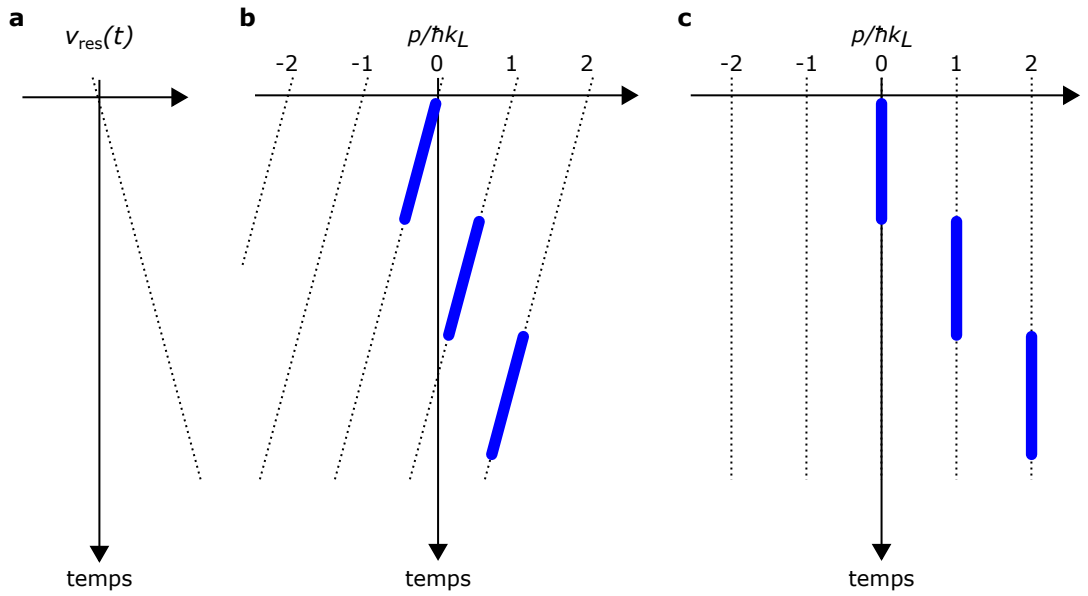


Figure 3.17 – Distribution en impulsion du nuage d'atomes dans un réseau accéléré dans différents référentiels. a : Vitesse du réseau dans le référentiel du laboratoire au cours du temps. **b** : Distribution en impulsion du nuage d'atomes dans le référentiel du réseau. **c** : Distribution en impulsion du nuage d'atomes dans le référentiel du laboratoire.

L'ajout de cette force mène également à l'observation d'un phénomène connu sous le nom d'oscillations de Bloch [107, 108, 109, 110] dont l'idée à été émise pour la première fois dans le contexte de la matière condensée. Pour des réseaux peu profonds, typiquement pour des profondeur $s < 5$, la courbure des bandes est grande et entraine une oscillation de l'impulsion moyenne des atomes autour de l'impulsion moyenne du réseau. On peut observer ce phénomène sur la figure 3.18 **c** où l'impulsion moyenne des atomes mesurée expérimentalement est représentée en bleue et la courbe rouge correspond à l'impulsion théorique acquise par l'accélération du réseau. On voit que l'impulsion des atomes oscille autour de cette impulsion théorique. Ce phénomène d'oscillation est encore plus visible si on l'observe dans le référentiel du réseau en retranchant l'impulsion théorique fournie par le réseau à l'impulsion moyenne des atomes comme représenté sur la figure 3.18 **d**. On observe une oscillation de l'impulsion moyenne des atomes qui est directement proportionnelle à la vitesse de groupe de la bande sondée. Sur cette même figure, la courbe rouge est le résultat de l'équation (3.61) en prenant en compte le défilement du quasi-moment. On observe un bon accord entre les résultats expérimentaux et la prédiction en terme de vitesse de groupe. On en conclut donc que les oscillations de Bloch permettent de sonder la courbure de la structure de la bande fondamentale du réseau.

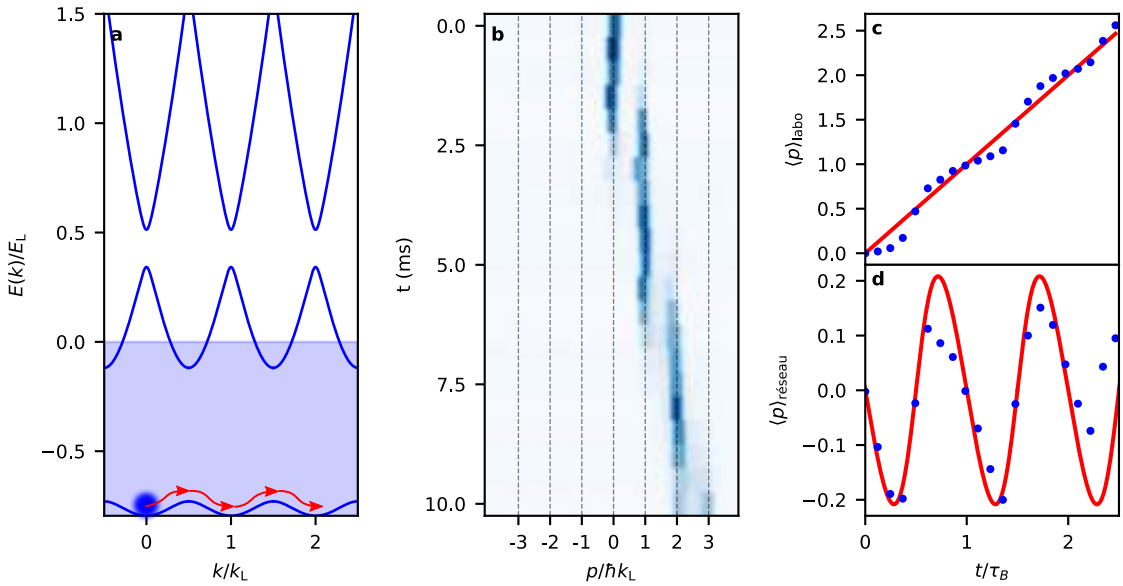


Figure 3.18 – Oscillations de Bloch dans un réseau accéléré. a : Première, deuxième et troisième zones de Brillouin à $s = 1.2$. La zone bleue correspond à la partie liée du spectre. Le déplacement des atomes, représentés par le disque flouté bleu, est symbolisé par les flèches rouges. **b** : Profils intégrés expérimentaux en fonction du temps de maintien dans le réseau accéléré à une accélération de $a = 2.13\,\mathrm{ms}^{-2}$ dans le référentiel du laboratoire. Le temps de Bloch est $\tau_B \sim 4$ ms. **c** : Impulsion moyenne des atomes dans le référentiel du laboratoire. Les points bleus correspondent à l'impulsion moyenne mesurée expérimentalement et la ligne rouge correspond à l'impulsion moyenne du réseau accéléré. Les oscillations autour de l'impulsion moyenne sont clairement visibles. **d** : Impulsion moyenne des atomes dans le référentiel du réseau.

3.6 Conclusion

Comme nous pouvons à présent le comprendre, les réseaux optiques sont donc devenus un outil incontournables pour manipuler les gaz d'atomes ultrafroids tant ils permettent d'obtenir un haut degré de contrôle sur ces ondes de matières macroscopiques.

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons présenté différents formalismes permettant d'aborder ces interférences de lumière. Dans un premier temps, nous avons donné une image classique de la dynamique des atomes dans un réseau optique à l'aide de l'outil théorique venant de l'étude des systèmes dynamiques : l'espace des phases. Puis, dans la perspective d'une dynamique quantique, nous avons exploité le théorème de Bloch afin de déterminer la relation de dispersion des atomes dans un réseau optique, ou aussi appelée la structure de bande. Cette relation de dispersion ne dépend que d'un seul paramètre la profondeur du réseau.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous avons présenté comment notre équipe a conçu son réseau optique et le montage expérimental permettant d'atteindre un haut degré de contrôle. Nous avons présenté comment l'amplitude et la phase du réseau peuvent être contrôlées au cours du temps et ce de manière arbitraire. Nous avons enfin présenté la méthode que nous utilisons quotidiennement afin de calibrer précisément la profondeur du réseau : la méthode de calibration par micro-oscillation.

Dans la dernière partie, nous avons vu deux manières dont le réseau peut être rendu dépendant du temps. La première est la modulation du réseau en phase ou en amplitude. Dans une vision en terme de structure de bande, la modulation périodique à une fréquence correspondant à l'écart en énergie entre deux bandes permet d'effectuer des transitions interbandes assistées par des phonons. Nous avons montré qu'il existe des règles de sélection dues à la parités de bandes entre la bande fondamentale et les bandes excitées dans le sous-espace de quasi-moment nul $k = 0$. Nous avons alors présenté un protocole expérimental permettant de refroidir un nuage d'atomes thermique dans un réseau optique en tirant avantage des transitions interbandes et des règles de sélection. Une deuxième manière de rendre le réseau dépendant du temps est de l'accélérer. Nous avons vu que cela revient à appliquer une force sur les atomes qui permet de modifier le quasi-moment de ces derniers. Pour des profondeurs assez faibles, nous avons observé le phénomène bien connu d'oscillations de Bloch dans le réseau.

Ce chapitre clôt la première partie de ce manuscrit dédiée à la présentation de notre dispositif expérimental. Dans la prochaine partie, nous allons nous concentrer sur le contrôle en phase que nous avons sur notre réseau pour, dans un premier temps, étudier les collisions entre les composantes d'impulsions de la distribution du condensat après temps de vol. Nous verrons ensuite comment ces expériences de collisions ont permises de formaliser un problème sur le façonnage des distributions en impulsion du condensat facilement solvable par des techniques de contrôle optimal.

Publications reliés à ce chapitre

— C. Cabrera-Gutierrez, E. Michon, M. Arnal, G. Chatelain, V. Brunaud, T. Kawalec, J. Billy, and D. Guéry-Odelin, "Resonant excitations of a bose einstein condensate in an optical lattice", *The European Physical Journal D*, vol. **73**, no. 8, pp. 1–8, 2019. .
— M. Arnal, V. Brunaud, G. Chatelain, C. Cabrera-Gutiérrez, E. Michon, P. Cheiney, J. Billy, and D. Guéry-Odelin, "Evidence for cooling in an optical lattice by amplitude modulation", *Physical Review A*, vol. **100**, no. 1, p. 013416, 2019. .

Deuxième partie

Contrôle du réseau en phase

4 Observation et contrôle d'halos de diffusion

Sommaire

4.1 Introduction . . . 116
4.2 Théorie quantique de la diffusion . . . 118
4.2.1 Description quantique d'une collision . . . 118
4.2.1.1 Amplitude de diffusion . . . 119
4.2.1.2 Section efficace de diffusion . . . 120
4.2.2 Potentiel central à basse énergie - longueur de diffusion . . . 121
4.2.2.1 Décomposition en ondes partielles . . . 122
4.2.2.2 Limite de basse énergie . . . 124
4.2.2.3 Potentiel de contact . . . 125
4.2.2.4 Particules identiques . . . 126
4.3 Historique et modélisation des expériences de collisions avec des atomes froids . . . 127
4.3.1 Contexte expérimental . . . 128
4.3.1.1 L'expérience du MIT [1] . . . 128
4.3.1.2 Les expériences d'Amsterdam [2] et Dunedin [3] . . . 131
4.3.1.3 L'expérience de l'Institut d'optique [4] . . . 132
4.3.2 Modélisation théorique . . . 134
4.3.2.1 Présentation du modèle . . . 135
4.3.2.2 Distribution en impulsion entre les ordres de diffraction . . . 137
4.4 Un nouveau protocole pour contrôler les halos de diffusion . . . 140
4.4.1 Protocole expérimental et optimisation des paramètres . . . 140
4.4.2 Résultats expérimentaux . . . 147
4.4.2.1 Contrôle en impulsion moyenne (centre de masse) . . . 147
4.4.2.2 Contrôle en impulsion relative . . . 150
4.4.2.3 Quantification de la vitesse relative des atomes diffusés . . . 152
4.4.2.4 Contrôle mixte des impulsions moyenne et relative . . . 154
4.4.2.5 Fraction d'atomes diffusés . . . 155
4.5 Discussion . . . 157
4.6 Conclusion . . . 159

On fait la science avec des faits, comme on fait une maison avec des pierres. mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierre n'est une maison

Henri Poincaré (1854 – 1912) - Physicien / Mathématicien

4.1 Introduction

Les collisions entre particules sont un moyen extrêmement riche d'obtenir des informations de systèmes microscopiques à une échelle macroscopique. On peut par exemple citer plusieurs découvertes emblématiques de la physique comme celle des particules α [111], ou plus récemment celle du Boson de Higgs [112]. De manière générale, elles ont permis d'étudier les interactions entre les atomes et les molécules dans de nombreux types de systèmes. Dans le cas des atomes froids, elles occupent une place centrale du développement de ce domaine puisque c'est sur elles que reposent la technique de refroidissement par évaporation présentée dans le chapitre 2 qui permet d'atteindre la condensation de Bose-Einstein. Dans ce chapitre nous étudierons les collisions en vol libre entre les composantes d'impulsions d'un nuage d'atomes chargé initialement dans un réseau optique et à l'origine d'halos de diffusion comme ceux que l'on observe sur la figure 4.1. Nous expliquerons les origines de ces halos et démontrerons notre aptitude à contrôler leurs caractéristiques : leur impulsion moyenne et relative.

Nous rappellerons tout d'abord quelques éléments de la théorie de la diffusion qui permettent de décrire les collisions entre deux nuages d'atomes ultra-froids. Nous verrons que la collision entre deux atomes peut être vue comme la diffusion d'une particule fictive par un potentiel. Nous allons également donner deux grandeurs caractéristiques des collisions : il s'agit de l'amplitude de diffusion et la section efficace de collision. Nous verrons que ces deux quantités prennent une expression simple dans le cas d'un potentiel d'interaction à symétrie centrale. Dans le cas des bosons en régime ultrafroid, elles ne dépendent plus que d'une seule grandeur a, la longueur de diffusion en onde s. C'est dans ce régime que nous avons effectué toutes nos expériences.

Pour contextualiser notre étude, nous allons présenter quatre expériences de collisions réalisées avec des atomes froids dont les résultats explorent différentes propriétés des collisions élastiques. La première montre qu'en dessous d'une énergie de collision, deux condensats *ne se voient pas* : ils sont devenus superfluides et la section efficace de collision est nulle. Les deux expériences suivantes montrent qu'à l'inverse, au dessus d'une certaine énergie de collision, des effets d'in-

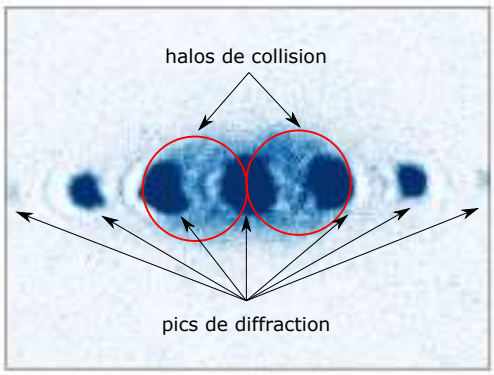


Figure 4.1 – Image d'absorption présentant des halos de collision. Les zones foncées sont les ordres de diffraction dûs à la quantification de l'impulsion du réseau optique. Entre ces pics de diffraction, on observe des halos de collisions (indiqués par des cercles rouges)

terférences dû au composantes supérieures du moment cinétique rendent la section efficace anisotrope : les ondes d deviennent majoritaires dans le processus de collision. La dernière expérience que nous allons présenter nous apprend quant à elle que, pour des atomes diffractés par un réseau optique, le nombre de collisions entre deux composantes d'impulsion est proportionnel au produit des populations d'atomes dans ces modes d'impulsions. Notre collaborateur de l'université de Liège, Peter Schlageck, a modélisé les processus de diffusion d'atomes relâchés d'un réseau optique unidimensionnel comme dans notre expérience grâce à une méthode perturbative. Cela lui a permis d'estimer quantitativement la fraction du nombre d'atomes diffusés dans les halos de collisions.

Finalement, nous présenterons notre protocole expérimental permettant de créer des halos de collision à partir de nuages d'atomes ultra-froids diffractés par un réseau optique. En étudiant la dynamique du condensat dans un réseau translaté soudainement, nous pouvons obtenir une distribution en impulsion favorisant les collisions entre des modes donnés d'impulsion. Nous montrerons que nous pouvons peupler sélectivement des pics de diffraction pour fournir soit une grande impulsion moyenne soit une grande impulsion relative aux atomes diffusés. Les paramètres expérimentaux ont été trouvés en définissant un paramètre de visibilité V des halos de collision que nous expliciterons. Nous vérifierons que les énergies impliquées dans les collisions ne sont pas continues mais quantifiées par l'impulsion caractéristique du réseau.

4.2 Théorie quantique de la diffusion

La théorie quantique de la diffusion permet d'aborder un très vaste éventail de domaines allant de la physique des hautes énergies en passant par la chimie, le comportement de l'hélium liquide jusqu'à la condensation de Bose-Einstein. Il convient donc dès à présent de préciser le contexte dans lequel nous allons utiliser cette théorie.

Dans ce qui suit, nous allons aborder les collisions entre des particules bosoniques dans un gaz d'atomes dilué de basse énergie et contenu dans une boite en trois dimensions. Dans ce système les interactions à deux corps dominent. Pour simplifier le problème, nous nous intéressons uniquement aux processus de collisions élastiques. De manière remarquable, nous allons voir que seulement quelques paramètres suffisent pour décrire toute la physique des processus de collision.

4.2.1 Description quantique d'une collision

Dans cette partie, nous allons décrire la collision entre deux particules comme la diffusion d'une onde plane par un potentiel d'interaction V [46]. Nous verrons qu'en champ lointain l'onde résultante est alors la superposition de l'onde plane transmise et d'une onde sphérique diffusée par le potentiel.

Commençons par donner l'hamiltonien qui décrit une collision entre deux particules 1 et 2 aux positions $\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2$ et d'impulsions $\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2$ de même masse m via un potentiel d'interaction $V(\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2)$:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2). \tag{4.1}$$

Appréhender cet hamiltonien directement est compliqué du fait que le potentiel d'interaction couple le mouvement des deux particules. En revanche, il prend une forme simplifiée en utilisant les variables du centre de masse (CDM) et du mouvement relatif des deux particules :

$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{cdm}} = \frac{\hat{\mathbf{r}}_1 + \hat{\mathbf{r}}_2}{2}, \qquad \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2, \tag{4.2}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{cdm}} = \hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2, \qquad \hat{\mathbf{p}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1 - \hat{\mathbf{p}}_2}{2}. \tag{4.3}$$

$$\tag{4.4}$$

En effet, avec ces nouvelles variables, l'hamiltonien $\hat{H}$ s'écrit comme la somme de deux hamiltoniens : l'hamiltonien du centre de masse $\hat{H}_{\text{cdm}}$ et l'hamiltonien du mouvement relatif $\hat{H}_r$

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\hat{\mathbf{P}}_{\text{cdm}}^2}{2M}}_{\hat{H}_{\text{cdm}}} + \underbrace{\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(\hat{\mathbf{r}})}_{\hat{H}_r}, \tag{4.5}$$

où $M = 2m$ est la masse totale et $\mu = m/2$ est la masse réduite. Ce changement de variable découple le mouvement du centre de masse du mouvement relatif des particules et la solution du problème peut alors être cherchée sous la forme

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_{\text{cdm}}(\mathbf{R}_{\text{cdm}}, \mathbf{P}_{\text{cdm}})\psi_{\text{rel}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \tag{4.6}$$

D'après l'équation (4.5), le centre de masse du système évolue comme une particule libre de masse M. Sa fonction d'onde est donc connue et s'écrit $\psi_{\text{cdm}} = e^{i\mathbf{P}_{\text{cdm}}\cdot\mathbf{R}_{\text{cdm}}/\hbar}/(2\pi\hbar)^{3/2}$. Toute la complexité de l'interaction entre les deux particules est alors contenue dans la fonction d'onde du mouvement relatif des particules $\psi_{\text{rel}}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ dans le référentiel du centre de masse. C'est à cette quantité que nous allons donc nous intéresser dans les prochains paragraphes.

4.2.1.1 Amplitude de diffusion

On modélise le mouvement relatif comme une particule de vecteur d'onde k. Connaître la fonction d'onde du mouvement relatif des particules $\psi_{\text{rel}}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ revient à déterminer les états propres de l'hamiltonien du mouvement relatif $\hat{H}_r$ pour une certaine énergie $E = \hbar^2 k^2/2\mu$. Pour cela, il faut résoudre l'équation

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(\mathbf{r})\right)\psi_{\text{rel}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = E\psi_{\text{rel}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \tag{4.7}$$

Expérimentalement, il est impossible de remonter aux détails des interactions entre les deux particules sur le lieu de la collision. Nous n'avons accès qu'aux résultats de la collision en champ lointain. C'est pourquoi, nous nous intéressons uniquement aux solutions asymptotiques de l'équation (4.7). Nous cherchons la solution sous la forme d'une superposition d'une onde plane incidente ψ_{inc} et d'une onde sphérique diffusée lors de la collision ψ_{diff}

$$\boxed{\psi_{\text{rel}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \underset{|\mathbf{r}|\to\infty}{\sim} \underbrace{e^{ik\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_i}}_{\psi_{\text{inc}}} + \underbrace{f(k, \mathbf{n}_i, \mathbf{n}_f)\frac{e^{ikr}}{r}}_{\psi_{\text{diff}}}.} \tag{4.8}$$

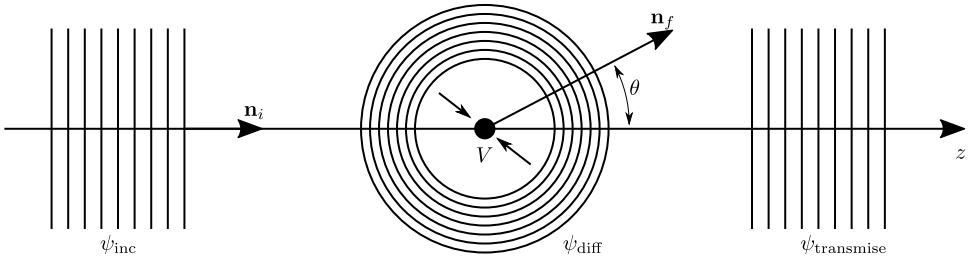


Figure 4.2 – Représentation des ondes incidente et diffusée. L'onde incidente ψ_{inc} est une onde plane avec un vecteur d'onde parallèle au vecteur unitaire $\mathbf{n}_i$. L'onde diffusée ψ_{diff} est une onde sphérique observée dans la direction $\mathbf{n}_f$ faisant un angle θ avec la direction de propagation de l'onde incidente.

On nomme le terme $f(k, \mathbf{n}_i, \mathbf{n}_f)$ amplitude de diffusion. Cette quantité a la dimension d'une distance et ne dépend que de l'énergie de la collision (via la norme du vecteur d'onde k), de la direction de propagation de l'onde incidente $\mathbf{n}_i$ et de la direction dans laquelle la collision est observée $\mathbf{n}_f$. Une représentation des ondes ψ_{inc} et ψ_{diff} qui composent la fonction d'onde du mouvement relatif $\psi_{\text{rel}}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ en champ lointain est donnée sur la figure 4.2.

Interpréter l'amplitude de diffusion en terme de probabilité de diffusion n'est pas direct car c'est une quantité qui agit sur la fonction d'onde et peut à priori prendre des valeurs complexes. Il est donc nécéssaire de définir une quantité que l'on peut interpréter en terme de probabilité et c'est ce que nous allons voir dans la prochaine partie.

4.2.1.2 Section efficace de diffusion

Pour connaître la probabilité d'observer un processus de collision dans une direction $\mathbf{n}_f$, il faut évaluer le courant de probabilité porté par ψ_{diff}, comparé à celui de l'onde incidente [46]. Ceci amène alors à la définition de la section efficace différentielle de collision

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k, \mathbf{n}_i, \mathbf{n}_f)|^2. \tag{4.9}$$

C'est une quantité qui a la dimension d'une surface. On peut interpréter $d\sigma$ comme étant la probabilité que l'onde incidente soit diffusée par le potentiel V vers un élément de surface $r^2 d\Omega$ dans la direction $\mathbf{n}_f$. On définit également la section efficace totale de diffusion comme

$$\boxed{\sigma_{\text{tot}} = \int |f(k, \mathbf{n}_i, \mathbf{n}_f)|^2 d\Omega.} \tag{4.10}$$

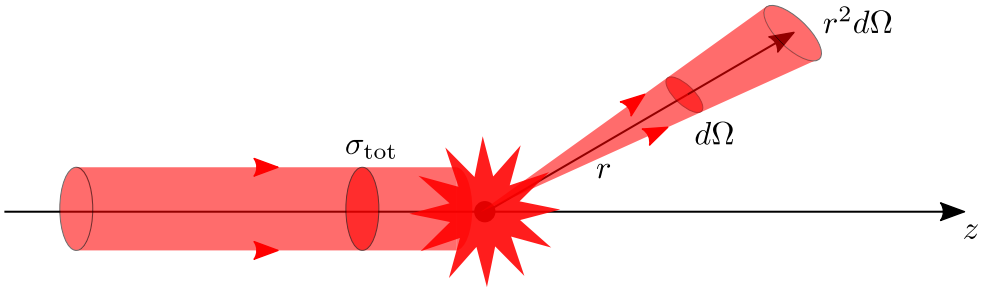


Figure 4.3 – Représentation schématique de la section efficace de collision. Une onde incidente est diffusée par un potentiel diffuseur de surface σ_{tot}. Une partie de l'onde est diffusée vers l'élément de surface $r^2 d\Omega$.

Cette grandeur s'interprète comme le fait que le potentiel V agit comme un objet diffuseur de surface σ_{tot} comme présenté sur la figure 4.3. Plus la section efficace totale est grande, plus la probabilité que l'onde incidente soit diffusée est grande.

Récapitulatif

En résumé, étudier une collision entre deux particules revient à étudier la diffusion d'une particule fictive, le mouvement relatif, par un potentiel diffuseur de surface effective σ_{tot}. Dans la limite du champ lointain, la solution de ce problème est la somme d'une onde plane, l'onde qui n'a pas été perturbée par le potentiel, et d'une onde sphérique, l'onde diffusée. Tout le contenu physique est inclus dans l'amplitude de diffusion, à partir de laquelle on peut notamment définir une section efficace totale de diffusion.

Il reste encore à déterminer une expression de l'amplitude de diffusion, et nous allons voir que ceci est possible dans le cas d'un potentiel d'interaction à symétrie centrale. Nous verrons que dans le régime des basses énergies, son expression prend une forme extrêmement simple.

4.2.2 Potentiel central à basse énergie - longueur de diffusion

Pour déterminer une expression de l'amplitude de diffusion, nous allons restreindre le problème uniquement à des potentiels à symétrie centrale $V(\mathbf{r}) = V(r)$ et de courte portée $V(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$ de telle manière à ce que la particule diffusée se comporte comme une particule libre en champ lointain. Nous nous placerons également dans la limite des basses énergies. Nous allons alors voir que, dans ce cas, toute la collision peut être caractérisée par un seul et unique paramètre : la longueur de diffusion.

4.2.2.1 Décomposition en ondes partielles

Sans perte de généralité, on peut choisir un repère de coordonnées dans lequel l'axe z est aligné avec la direction de propagation de l'onde incidente $\mathbf{n}_i$ comme représenté sur la figure 4.2. Dans le cas d'un potentiel central, la fonction d'onde du mouvement relatif ne dépend pas de ϕ, l'angle azimutal autour de l'axe z. Par décomposition sur les harmoniques sphériques [113], les solutions générales à l'équation (4.7) en coordonnées sphériques sont alors

$$\psi_{\text{rel}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos(\theta)) \frac{u_l(r)}{r}, \tag{4.11}$$

où dans cette équation,

- les $P_l(x)$ sont les polynômes de Legendre,
- les fonctions $u_l(r)$ sont les fonctions radiales,
- l'angle entre la direction de propagation de l'onde incidente et la direction d'observation de l'onde diffusée est $\cos(\theta) = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_f$,
- les indices l parcourent les composantes du moment cinétique.

On peut également ré-écrire l'équation (4.8) dans ce système de coordonnées

$$\psi_{\text{rel}}(r,\theta) = e^{ikz} + f(k,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}. \tag{4.12}$$

La fonction d'onde du mouvement relatif est la somme d'une onde plane et d'une onde sphérique sortante. La décomposition en ondes partielles de l'onde incidente s'écrit [114]

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos(\theta)), \tag{4.13}$$

où les $j_l(kr)$ sont les fonctions de Bessel sphériques. En champ lointain, cette expression devient

$$e^{ikz} \underset{r\to\infty}{\to} \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)((-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{ikr}) P_l(\cos(\theta)). \tag{4.14}$$

L'onde plane incidente est donc la superposition d'ondes sphériques entrantes $P_l(\cos(\theta))e^{-ikr}/r$ et d'ondes sphériques sortantes $P_l(\cos(\theta))e^{ikr}/r$. On peut alors combiner les équations (4.12) et (4.14) pour obtenir une expression de la fonction d'onde du mouvement relatif en champ lointain

$$\psi_{\text{rel}}(r,\theta) \underset{r\to\infty}{\to} \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos(\theta)) \underbrace{((-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{2i\delta_l} e^{ikr})}_{\propto u_l(r)}, \tag{4.15}$$

où les δ_l sont les déphasages de l'onde sortante de composante l de moment cinétique acquis au cours du processus de diffusion et donc dû à l'amplitude de diffusion $f(k,\theta)$. Il s'agit bien d'une phase accumulée lors de la collision car, étant donné la symétrie sphérique, il y a conservation du

flux de particule entre ondes sortante et entrante pour chaque onde partielle [113], ce qui impose un nombre de module 1 devant le terme e^{ikr} de l'onde sortante. Ces déphasages portent toute l'information sur le processus collisionnel et, plus précisément, décriront la déformation qu'a subi l'onde dû au potentiel d'interaction. Il découle de cette écriture que l'amplitude de diffusion vaut

$$f(k,\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(e^{2i\delta_l}-1)P_l(\cos(\theta)), \tag{4.16}$$

et que la section efficace est

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2(\delta_l), \tag{4.17}$$

où, pour rappel, les indices l parcourent les composantes du moment cinétique des ondes. Par convention, on nomme ondes s les ondes dues au moment cinétique nul $l = 0$, puis p celles correspondant au moment cinétique $l = 1$, d celles au moment cinétique $l = 2$ etc [1]. Ainsi, déterminer le résultat du processus de diffusion en champ lointain se résume à présent à trouver une expression pour les déphasages δ_l. On voit d'après l'équation (4.15) que cela revient à déterminer les fonctions radiales $u_l(r) \propto (-1)^{l+1}e^{-ikr} + e^{2i\delta_l}e^{ikr}$. En utilisant la forme (4.11) de la fonction d'onde du mouvement relatif, l'équation (4.7) devient

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r)\right]u_l(r) = Eu_l(r). \tag{4.18}$$

Il devient possible de déterminer les fonctions $u_l(r)$ en résolvant cette équation pour un potentiel d'interaction modélisant bien le processus de collision.

Récapitulatif

On peut dire que l'onde incidente se décompose comme la somme d'ondes sphériques entrantes et sortantes. Or, l'onde diffusée est une onde sortante uniquement. Cela revient à considérer un déphasage δ_l sur les ondes sortantes de la fonction d'onde du mouvement relatif. Toute la collision peut alors être décrite en connaissant ce déphasage puisque c'est le seul paramètre dont dépend l'amplitude de diffusion et donc de la section efficace de collision. Pour déterminer ce déphasage, il faut déterminer les fonctions d'onde radiales $u_l(r)$ pour un certain potentiel d'interaction $V(r)$.

1. Les ondes f correspondent au moment cinétique $l = 3$, puis on associe les lettres suivantes dans l'ordre de l'alphabet à chaque valeur de moment cinétique supérieure.

Dans la prochaine partie, nous allons étudier le potentiel à symétrie centrale le plus simple que l'on puisse considérer : le potentiel de contact. Dans la limite des basses énergies, régime caractéristique des atomes ultra-froids, nous verrons qu'il suffit de prendre en compte un nombre très restreint de composantes du moment cinétique pour décrire les collisions. Pour ce potentiel dans ce régime d'énergie, les déphasages δ_l prennent alors une forme très simple.

4.2.2.2 Limite de basse énergie

Les énergies de collision entre atomes ultra-froids sont très faibles. Pour aborder cette limite en énergie, il est d'usage d'introduire le potentiel total où le potentiel d'interaction $V(r)$ est habillé par une barrière centrifuge due au moment cinétique

$$V_{\text{tot}}(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r). \tag{4.19}$$

Pour $l \neq 0$, la barrière centrifuge dans l'équation (4.19) s'avère être extrêmement élevée en comparaison des énergies caractéristiques des collisions entre atomes ultra-froids [46, 113, 114]. Cela a pour effet que seuls les atomes possédant un moment cinétique nul pourront entrer en collision, les autres seront repoussés par cette barrière de potentiel et "ne se verront même pas". Cela est illustré sur la figure 4.4. Dans ce cas, on obtient une expression simplifiée pour les déphasages [113]

$$\delta_l \underset{k\to 0}{\propto} k^{2l+1}. \tag{4.20}$$

Ainsi, dans la limite des basses énergies, la section efficace tends vers zéro pour les moments cinétiques supérieurs à 0, $\sigma_{l\geq 0} \underset{k\to 0}{\sim} 0$. On en conclut donc que seules les ondes s contribuent aux collisions. Dans ce cas, l'amplitude de diffusion devient [2]

$$f(k,\theta) = \frac{e^{2i\delta_0} - 1}{2ik} \simeq \frac{\delta_0}{k} = a, \tag{4.21}$$

où on introduit a, la longueur de diffusion en onde s

$$a = -\lim_{k\to 0} \frac{\tan(\delta_0)}{k}. \tag{4.22}$$

On voit alors que dans la limite des basses énergies, les collisions sont indépendantes de θ et sont donc isotropes. On s'attend donc à observer des halos sphériques de diffusion. La section efficace de collision est [3]

$$\sigma_{\text{tot}} = 4\pi a^2. \tag{4.23}$$

2. On a utilisé le fait que le polynôme de Legendre $P_0(x) = 1$
3. Pour des particules discernables.

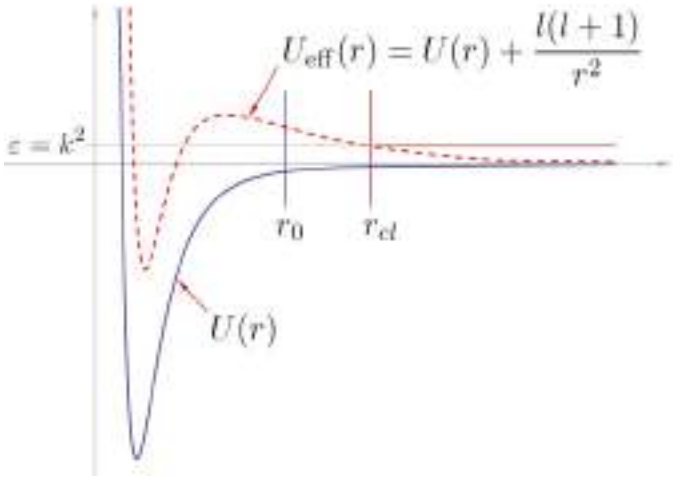


Figure 4.4 – Potentiel total pour différentes valeurs du moment cinétique. En bleu, le potentiel d'interaction pour $l = 0$ et en rouge pour $l = 1$. On voit que pour $l > 0$, une barrière centrifuge repousse les particules de basse énergie ε en r_{cl} et les empêche de "voir" la partie attractive du potentiel d'interaction qui devient importante en dessous de r_0. Seules les ondes de moment cinétique nul pourront donc interagir. C'est ce qu'on appelle le régime des ondes s. Images tirée de [114].

On comprend alors l'importance de la longueur de diffusion en onde s : elle caractérise toute la physique des collisions à elle seule. La section efficace de collision est celle qu'on obtiendrait classiquement pour des sphères dures de rayon a. Toute la complexité de la collision revient alors à déterminer la valeur de a que l'on peut mesurer expérimentalement (voir par exemple [2] et les références données dans cet article). Elle vaut $a = 5.23$ nm pour le rubidium 87 dans l'état fondamental à champ magnétique nul.

Nous allons maintenant présenter un potentiel d'interaction largement utilisé pour modéliser les collisions entre atomes froids de par sa simplicité d'utilisation.

4.2.2.3 Potentiel de contact

Nous introduisons ici une forme particulière du potentiel d'interaction, qui a les bonnes propriétés de diffusion à longue distance, et est très simple mathématiquement. Il s'agit du potentiel dit de *contact*. Nous nous servirons d'ailleurs de ce potentiel pour modéliser les processus de diffusion dans notre expérience comme nous allons le voir dans la prochaine partie. Qualitativement, ce potentiel modélise la situation où une particule est libre de se déplacer dans deux régions de l'espace séparées par une barrière de potentiel : le potentiel est nul partout excepté en un point

où il prend une valeur infinie. Plus formellement, un tel potentiel est

$$\boxed{V(r) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\delta(r),} \tag{4.24}$$

où $\delta(r)$ est la fonction de delta de Dirac. Ce potentiel de contact est un cas limite d'un potentiel d'interaction à profondeur finie. Il reproduit bien asymptotiquement les états propres de diffusion en onde s. C'est pourquoi il est très répandu dans l'étude de particules en interaction dans le régime des énergies ultra-basses caractéristiques des atomes froids.

Cependant, l'expression de la section efficace de collision (4.17) doit être légèrement modifiée car nous considérons en réalité des collisions entre des bosons identiques et non entre deux particules discernables. En effet, considérer des particules discernables ou indiscernables n'aboutit pas aux mêmes comportements de collision comme nous allons le voir dans la prochaine partie.

4.2.2.4 Particules identiques

Jusqu'à présent, nous avons considéré deux particules discernables 1 et 2. Or, il est en réalité impossible de faire la différence entre les états finaux de collisions correspondant à des amplitudes de diffusion de $f(k,\theta)$ et $f(k,\pi-\theta)$ comme représenté sur la figure 4.5. Pour des particules bosoniques, il faut prendre en compte le fait que la fonction d'onde doit être symétrique sous l'échange de deux particules $\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \Psi(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)$. En utilisant l'expression de la fonction d'onde totale

$$\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \frac{e^{i\mathbf{P}_{\text{cdm}}\cdot\mathbf{R}_{\text{cdm}}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\psi_{\text{rel}}(r,\theta), \tag{4.25}$$

il vient que la fonction d'onde du mouvement relatif en champ lointain pour des particules bosoniques est

$$\psi_{\text{rel}}(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{ikz} + e^{-ikz} + f(k,\theta)\frac{e^{ikr}}{r} + f(k,\pi-\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right). \tag{4.26}$$

Cela amène à l'expression suivante pour la section efficace de collision [4]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k,\theta) + f(k,\pi-\theta)|^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{8\pi}{k^2}\sum_{l\ \text{pair}}(2l+1)\sin^2(\delta_l). \tag{4.27}$$

On voit donc que pour des particules bosoniques, les composantes du moment cinétique qui vont contribuer au processus de diffusion sont uniquement les composantes paires. Il s'agit donc en

4. On a utilisé la propriété des polynômes de Legendre $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$.

Figure 4.5 – Processus de diffusion menant au même état final pour des particules indiscernables. **a** : dans le cas d'une amplitude de diffusion $f(k,\theta)$ et **b** : dans le cas d'une amplitude de diffusion $f(k,\pi-\theta)$.

premier des ondes s, à basse énergie, puis aux ondes d à plus haute énergie. En particulier, pour des ondes s la section efficace de collision s'écrit alors

$$\boxed{\sigma_{\text{tot}} = 8\pi a^2.} \tag{4.28}$$

Les collisions à basse énergie entre des bosons identiques sont donc plus probables que pour des particules discernables. Dans la prochaine partie nous allons présenter deux expériences qui permettent de préciser les limites dans lesquelles l'expression de la section efficace que nous venons d'obtenir est valide. En dessous d'un seuil d'énergie de collision, on observe le caractère superfluide du condensat : les collisions sont alors inexistantes [1] et la section efficace de collision devient nulle. Pour des énergies de collision plus élevées, la contribution des ondes partielles suivantes devient importante et l'on peut alors observer la diffusion en ondes d, pour laquelle l'amplitude de diffusion n'est plus isotrope [2, 3]. Nous donnerons un ordre de grandeur des énergies de collision pour lesquelles ces différents processus sont dominants.

4.3 Historique et modélisation des expériences de collisions avec des atomes froids

L'étude des collisions occupe un rôle central en physique et en particulier dans le domaine des atomes froids : ce sont les collisions entre atomes qui assurent la thermalisation d'un gaz d'atomes piégé [115], et qui constituent l'ingrédient essentiel au succès du refroidissement par évaporation qui a permis d'atteindre la dégénérescence quantique. Les collisions entre atomes déterminent également la forme de la fonction d'onde du condensat une fois formé [116]. Enfin, les collisions limitent les densités spatiales atteignables, du fait de processus inélastiques, le rapport entre le taux de collisions élastiques et inélastiques détermine si une espèce atomique peut être condensée

ou non par évaporation [117].

Par la suite, l'étude des collisions ultra-froides a révélé des phénomènes plus subtiles : des résonances, appelées résonances de Feshbach, en présence d'un champ magnétique ont été découvertes [118, 119] et il a été montré que le signe des interactions entre les atomes (plus précisément de la longueur de diffusion définie plus haut) peut ainsi être modifié. Cela a ouvert la possibilité d'étudier le crossover BEC-BCS [120] ou encore l'apparition des supersolides avec des gaz dipolaires [121, 122]. Il a également été montré que les collisions entre atomes peuvent intriquer leur fonction d'onde [123]. Ceci ouvre des perspectives intéressantes comme par exemple vérifier la violation des inégalités de Bell avec des particules massiques [124] et, plus généralement, revisiter des expériences d'optique quantique reposant sur le phénomène d'intrication [125].

Dans la suite, je présente quatre expériences qui vont nous permettre de cadrer le contexte dans lequel vient s'insérer notre travail. Puis, je présenterai un modèle développé par notre collaborateur Peter Schalgeck de l'Université de Liège pour décrire nos expériences.

4.3.1 Contexte expérimental

4.3.1.1 L'expérience du MIT [1]

La première expérience étudie ce qui advient des collisions pour des énergies de collision particulièrement basses. En dessous d'une énergie E_{SF}, les collisions entre deux condensats disparaissent : c'est le régime de superfluidité. Dans cette expérience du début des années 2000, le groupe de Wolfgang Ketterle au MIT publie un article dans la revue Physical Review Letters sur la suppression de la diffusion d'atomes en dessous de la vitesse du son d'un condensat [1]. Ceci est une conséquence du modèle de Bogoliubov des excitations dans le condensat [126], qui va au delà de la description en champ moyen que nous avons vue dans la première partie de ce chapitre. Les auteurs donnent notamment une valeur expérimentale pour la vitesse relative minimale en dessous de laquelle on pourra considérer les condensats comme étant superfluides.

Pour effectuer cette expérience, les auteurs produisent des condensats de sodium de 10^7 atomes dans un piège magnétique. Les atomes sont initialement dans un état piégeant $|F = 1, m_F = -1\rangle$ de l'état fondamental et une partie d'entre eux est transférée dans un état non piégé $|F = 1, m_F = 0\rangle$. Ce transfert est effectué via une transition Raman produite par deux faisceaux lasers contrapropageants, légèrement désaccordés en fréquence et pulsés pendant 10 μs. Du fait de l'agencement géométrique de la paire de faisceaux Raman, les atomes transférés dans l'état non piégeant acquièrent une vitesse et peuvent être considérés comme des impuretés mobiles venant sonder la superfluidité du condensat statique. Plus précisément, le transfert d'impulsion de la lumière

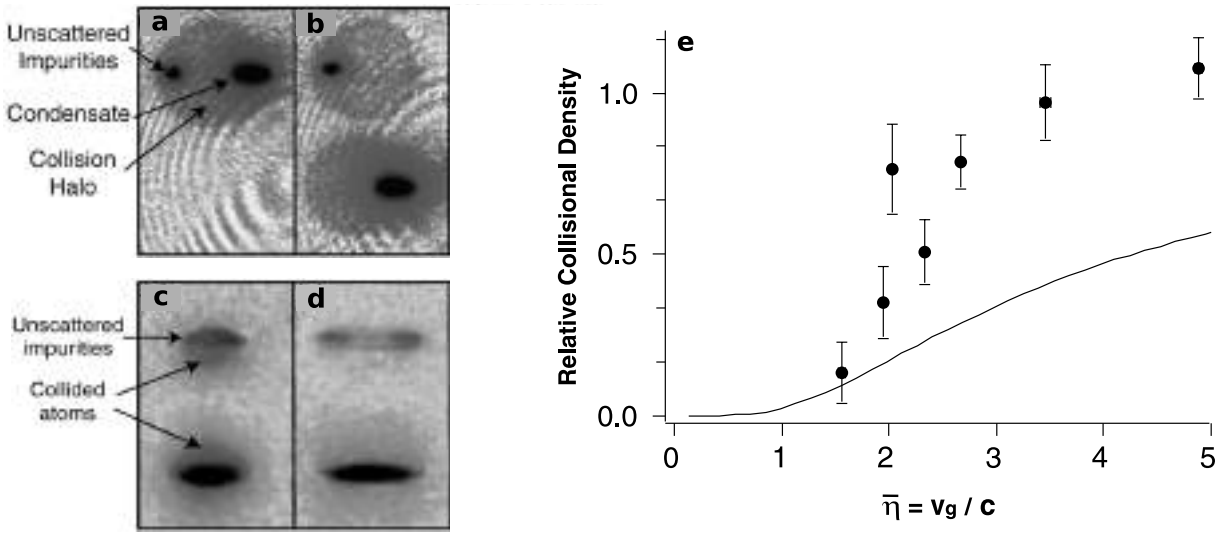


Figure 4.6 – Observation du seuil du superfluidité. Collisions entre les impuretés possédant une vitesse au delà de la vitesse du son dans le condensat avec ce dernier. **a** : Sans gradient de champ magnétique. **b** : Avec un gradient de champ magnétique vertical, à l'instar d'une expérience de Stern et Gerlach. Les halos de collision sont clairement visibles. Collision avec des impuretés à une vitesse proche de la vitesse du son dans le condensat. **c**, **d** : Les impuretés ont respectivement une vitesse de $v = 2.7c$ et de $v = 1.6c$. Les halos de collisions sont largement dépeuplés par rapport au cas **b**. **e** : Densité des halos de collision en fonction du rapport de la vitesse des impuretés sur la vitesse du son dans le condensat. Images adaptées de [1].

aux atomes est $\hbar q = 2\hbar k \sin(\theta/2)$ où k est le vecteur d'onde des lasers et θ l'angle entre les deux faisceaux. Quelques millisecondes après ce pulse Raman, après que les impuretés aient traversé le condensat, un gradient de champ magnétique est allumé pour séparer spatialement les populations dans les différents niveaux Zeeman impliqués dans la collision à l'instar d'une expérience de Stern et Gerlach. Ainsi, les auteurs remontent à la population d'atomes entrés en collision. Les halos de diffusion dû aux collisions entre les impuretés et le condensat sont représentés sur la figure 4.6**a**-**b**. En comprimant le piège magnétique, les auteurs changent la densité du condensat ce qui modifie la valeur de la vitesse critique en dessous de laquelle les effets de superfluidité deviennent importants. Ainsi, à vitesse des impuretés constante, comprimer le condensat revient à fournir aux impuretés des vitesses allant de $v = 1.5c$ à $v = 5c$ où c est la vitesse du son dans le condensat définie comme

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{gn}{m}},} \tag{4.29}$$

avec n la densité et $g = 4\pi\hbar^2 a/m$. En comptant le nombre d'atomes dans les halos de collision, ils

observent que celui-ci diminue au fur et à mesure que la vitesse des impuretés diminue, signature de la superfluidité du condensat. La section efficace devient alors nulle lorsque $v < c$. La disparition des halos de diffusion ainsi que l'évolution de la densité d'atomes dans ces derniers sont représentées sur la figure 4.6**c**-**d** et 4.6**e** respectivement.

Finalement, nous pouvons retirer de cette expérience qu'il faudra comparer la vitesse relative de collision fournie aux atomes à la vitesse du son typique afin de déterminer si nous devons prendre en compte ou non le comportement superfluide du nuage d'atomes. En pratique nous verrons que ce n'est pas le cas pour nos expériences.

On peut cependant d'ores et déjà donner une expression de la vitesse du son dans un condensat de N atomes dans un piège harmonique isotrope. On modélise la distribution spatiale du condensat par l'enveloppe de Thomas-Fermi que nous avons déjà présentée dans la première partie de cette thèse

$$n(\mathbf{r}) = \frac{15N}{8\pi R^3}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \tag{4.30}$$

où R est le rayon de Thomas-Fermi. Pour rappel, son expression est $R = (15Na(\hbar/m\omega)^2)^{1/5}$, avec ω la fréquence du piège harmonique. Nous cherchons la vitesse en dessous de laquelle les effets de superfluidité seront importants, nous cherchons donc une borne supérieure de la vitesse du son. On évalue alors la vitesse du son c pour la densité maximale, c'est-à-dire au centre du condensat, en $\mathbf{r} = 0$

$$n_{\max} = \frac{15N}{8\pi R^3}. \tag{4.31}$$

avec les expressions de g et $n_{\max}$, la vitesse du son maximale s'écrit alors

$$c_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{15a\hbar^2}{m^2}\right)^{1/5}(N\omega^3)^{1/5}. \tag{4.32}$$

On peut faire l'application numérique pour les paramètres de notre expérience : pour un condensat de $N = 2 \cdot 10^5$ atomes dans un piège harmonique de fréquence $\omega = 2\pi \times 50$ Hz, on trouve une vitesse du son maximale de $c = 2.1$ mms^{-1}. Or la vitesse la plus faible que nous pouvons transmettre aux atomes dans notre réseau optique est $v_{\mathrm{L}} = 8.63$ mms$^{-1} > c$. Nous pouvons donc conclure que nous ne sommes pas dans un régime de superfluidité lorsque nous chargeons les atomes dans le réseau.

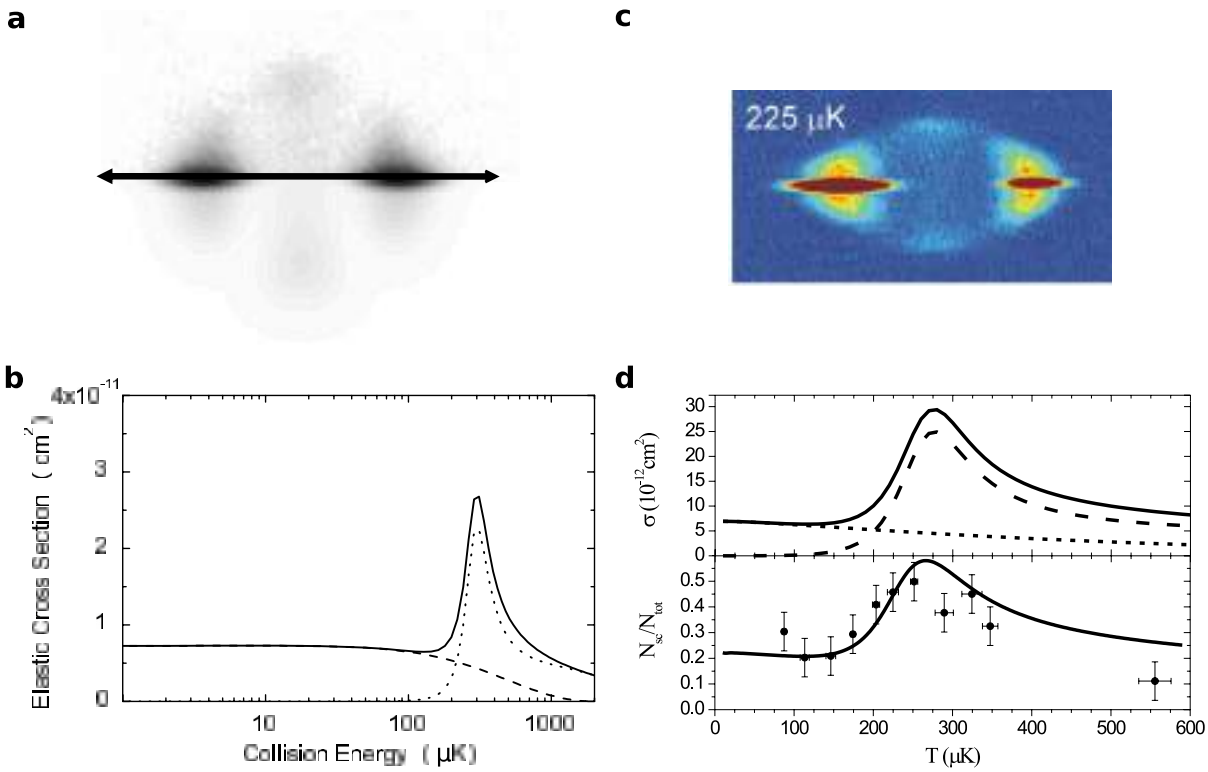


Figure 4.7 – Observation d'halos de diffusion en ondes d. **a** : Halo de diffusion en onde d observé par l'équipe d'Amsterdam à une énergie de collision de 1230 μK. **b** Evolution de la section efficace totale (trait plein), en onde s (pointillé large) et en onde d (pointillé fin) en fonction de l'énergie de collision. Ces courbes sont obtenues grâce aux mesures des déphasages δ_l effectuées par l'équipe d'Amsterdam. Images adaptées de [2]. **c** : Halo de diffusion observé par l'équipe de Dunedin à une énergie de collision de 225 μK. **d** (Haut) Evolution de la section efficace totale (trait plein), en onde s (pointillé fin) et en onde d (pointillé large) en fonction de l'énergie de collision. (Bas) Fraction d'atomes dans les halos de diffusion en fonction de l'énergie de collision. Images adaptées de [3].

4.3.1.2 Les expériences d'Amsterdam [2] et Dunedin [3]

Dans cette partie, je décris deux expériences très similaires entre elles qui montrent qu'à l'inverse, pour des énergies de collisions plus élevées, on observe la contribution des ondes s et d dans les halos de diffusion lors de la collision de deux condensats de Bose-Einstein. En 2004, un groupe de recherche de l'université d'Amsterdam et un groupe de recherche de l'université de Dunedin publient en *back-to-back* dans la revue Physical Review Letters sur l'observation d'halos de diffusion en onde s et d lors de la collision de nuages de rubidium ultra-froids[2, 3]. En particulier, dans chaque article les auteurs sondent la résonance dues aux ondes d et donnent une valeur expérimentale de l'énergie de collision au delà de laquelle la contribution des ondes d devient importante.

Dans ces deux expériences, les auteurs produisent un nuage d'atomes de rubidium refroidi jusqu'à quelques dizaines de micro Kelvin dans un piège magnétique. Ce nuage est ensuite séparé en deux nuages en augmentant progressivement la hauteur d'une barrière de potentiel au milieu du piège. Les deux nuages sont alors refroidis davantage par évaporation radio-fréquence jusqu'à des températures de l'ordre de la centaine de nano Kelvin, atteignant ainsi la condensation de Bose-Einstein. La barrière de potentiel est ensuite subitement redescendue pour accélérer les condensats vers le centre du piège. Quelques millisecondes après l'impact, un temps de vol des atomes est effectué et une image d'absorption permet de remonter à la distribution en impulsion du nuage d'atomes. On peut voir les halos de diffusion des deux équipes sur les figures 4.7 **a** et **c**. Pour des énergies de collision de l'ordre la dizaine de micro Kelvin, un halo de collision sphérique est observé mais au delà d'une certaine énergie, d'environ 200 μK (en unité de la constante de Boltzamnn k_B), le halo de collision devient anisotrope, signature de l'apparition d'interférences d'ondes partielles de moment cinétique $l > 0$. Les formes des halos sont retrouvées numériquement, confirmant que celles-ci sont principalement dues aux ondes d.

L'évolution de la section efficace de collision en fonction de l'énergie des collisions trouvé par les deux groupes est donné sur les figures 4.7 **b** et **d**. Le message important de ces deux études est qu'au delà d'une certaine énergie de collision $E_{\text{onde-d}} = 200\ \mu$K, la section efficace de collision devient anisotrope.

4.3.1.3 L'expérience de l'Institut d'optique [4]

Dans la gamme d'énergie $E_{\text{SF}} < E < E_{\text{onde-d}}$, on peut donc légitimement conclure que la section efficace de collision est constante et isotrope ($\sigma = 8\pi a^2$). On s'attend donc à observer des halos de collision sphériques centrés sur le centre de masse en impulsion des paquets d'atomes qui sont entrés en collision. Une dernière information reste encore manquante à ce stade : le nombre d'atomes peuplant ces halos de diffusion pour une géométrie de piège non plus harmonique comme dans les trois expériences précédentes [1, 2, 3] mais dans un réseau optique. La dernière expérience que je présente ici a lieu dans un réseau optique, comme les expériences que nous avons effectuées. En 2020, un groupe de recherche de l'Institut d'optique publie dans la revue Physical Review Research un article portant sur les halos de diffusion d'atomes d'helium métastable [4]. Plus précisément, il s'agit de l'étude de halos de diffusion en onde s de condensats d'Hélium diffractés par un réseau optique 3D. Cette expérience donne notamment la fraction des atomes qui peuple les halos de diffusion et propose un modèle pour expliquer cette fraction.

Dans cette expérience, des condensats d'Hélium peuplés jusqu'à $6 \cdot 10^5$ atomes sont chargés dans un réseau optique 3D et sont ensuite relâchés pour être étudié après un temps de vol d'envi-

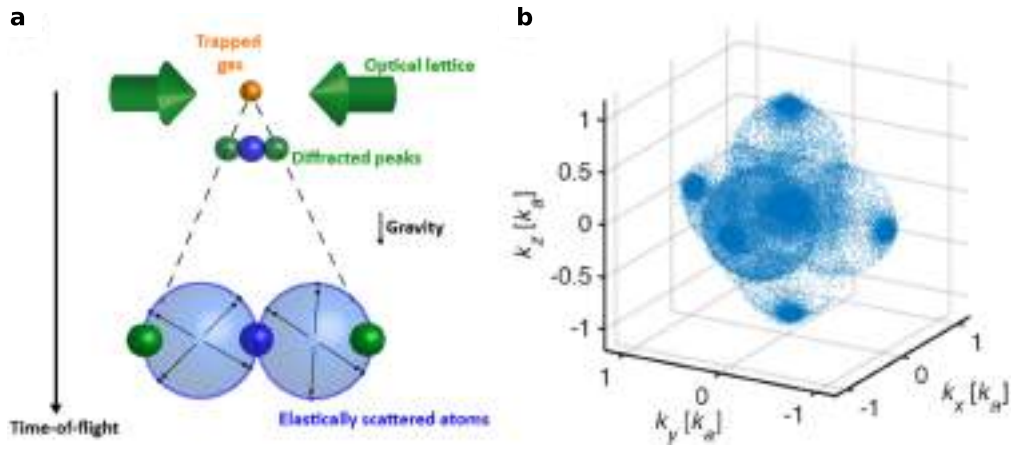


Figure 4.8 – Observation de halos de diffusion produit par un condensat diffracté par un réseau optique 3D. **a** : Schéma de principe de l'expérience. **b** : Reconstruction de la distribution en impulsion du nuage d'atomes après temps de vol à l'aide d'un détecteur d'helium. Images tirées de [4].

ron 300 ms comme présenté sur la figure 4.8 **a**. En plus d'une imagerie par absorption, le montage expérimental est équipé d'un détecteur d'ions *He ce qui permet la reconstruction à l'atome unique de la distribution en impulsion du gaz lorsqu'il était dans le réseau. Cette technique de mesure montre très clairement la présence d'halos de diffusion sphériques entre les pics de diffraction du gaz comme présenté sur la figure 4.8 **b**, signature de collisions à deux corps en onde s ayant lieu pendant le temps de vol des atomes. Les auteurs se concentrent sur l'étude des halos présent entre l'ordre $p = 0$ et $p = \pm 1$ dans les trois directions d'impulsions $p_{x,y,z}$ et proposent un modèle pour estimer le nombre de collisions ayant lieu durant le temps le vol entre ces composantes d'impulsion. Comme attendu pour une collision à deux corps, les auteurs ont vérifié que le nombre de collisions entre deux pics de diffraction i et j d'un condensat diffracté par un réseau optique est proportionnel aux populations d'atomes π_i et π_j dans les pics. En d'autres termes, dans une image d'absorption prise après temps de vol reflétant la distribution en impulsion du condensat dans le réseau, on s'attend à observer les halos de diffusion les plus peuplés entre les pics de diffraction les plus peuplés. Nous avons retrouvé par une méthode perturbative un résultat similaire (voir section 4.3.2.1).

Récapitulatif

En conclusion des quatre expériences qui ont été présentées, nous déduisons pour notre expérience que la plage d'énergie de collision (qu'on peut également exprimer en terme de température de nuage et de vitesse relative) pour laquelle la section efficace de collision est constante est

$$\begin{array}{ccccc} 3\cdot 10^{-31}\,\mathrm{J} & \lesssim & E_{\mathrm{coll}} & \lesssim & 3\cdot 10^{-27}\,\mathrm{J} \\ 0.2\,\mu\mathrm{K} & \lesssim & T & \lesssim & 200\,\mu\mathrm{K} \\ 2\,\mathrm{mms}^{-1} & \lesssim & v_{\mathrm{rel}} & \lesssim & 200\,\mathrm{mms}^{-1} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \sigma = 8\pi a^2. \tag{4.33}$$

De plus, pour des expériences de collisions réalisées dans un réseau optique, on s'attend, sur une image prise après temps de vol, à trouver les halos de diffusion entre les pics de diffraction n et n' de population π_n et $\pi_{n'}$ les plus peuplés

$$N_{\mathrm{coll}} \propto \pi_n \pi_{n'}. \tag{4.34}$$

Or, nous avons vu dans le chapitre 3 dédié au réseau qu'il y a une quantification de l'impulsion pour des atomes chargés dans un réseau optique. Cela signifie que la vitesse relative des atomes entrant en collision entre deux ordres de diffraction n et n' est également quantifiée. La plus petite vitesse relative que l'on peut transmettre aux atomes est donc la vitesse caractéristique du réseau $v_{\mathrm{L}} = 8.6\ \mathrm{mms}^{-1}$ introduite au chapitre précédent. Nous verrons dans la prochaine partie que la plus grande vitesse relative que nous pouvons fournir aux atomes avec le protocole que nous avons développé est de $12v_{\mathrm{L}} = 103.2\ \mathrm{mms}^{-1}$. Nous pouvons donc conclure que la section efficace de collision est constante pour toutes les expériences de collision que nous allons présenter dans la suite de ce chapitre [5].

Basé sur ces remarques, je vais présenter dans la prochaine partie de ce chapitre une approche perturbative visant à déterminer quantitativement la fraction d'atomes étant entrée en collision $N_{\mathrm{coll}}/N_{\mathrm{tot}}$.

4.3.2 Modélisation théorique

Dans cette partie, je vais présenter le raisonnement qui a permis à Peter Schlageck de déterminer l'ordre de grandeur de la fraction d'atomes dans les halos de collisions dans nos expériences.

5. $\frac{mv_{\mathrm{L}}^2}{2k_B} = 0.4\ \mu\mathrm{K}$ et $\frac{m(12v_{\mathrm{L}})^2}{2k_B} = 56\ \mu\mathrm{K}$

4.3.2.1 Présentation du modèle

Nous considérons un condensat chargé dans un réseau optique unidimensionnel orienté selon un axe x. On peut décrire les états accessibles aux atomes sur la base des fonctions d'ondes à un corps décrivant le condensat en interaction $\varphi_0(\mathbf{r}), \varphi_1(\mathbf{r}), \varphi_2(\mathbf{r})$... associées aux états d'énergie du système. Sur cette base, on modélise le condensat par une fonction d'onde macroscopique $|\Psi_N\rangle$ où un ensemble de N atomes partagent la même fonction d'onde du niveau fondamental $\varphi_0(\mathbf{r})$

$$|\Psi_N\rangle = \prod_{i=1}^{N} |\varphi_0\rangle \quad \text{avec} \quad \varphi_0(\mathbf{r}) = \langle r|\varphi_0\rangle = \phi(\mathbf{r}) \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{ilk_L x}, \tag{4.35}$$

où les c_l sont les composantes de Fourier de la fonction d'onde du réseau avec la condition de normalisation

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} |c_l|^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi_l = 1, \tag{4.36}$$

et les $\pi_l = |c_l|^2$ sont les populations d'atomes normalisées dans chacune des composantes d'impulsion du condensat. Nous verrons dans la partie 4.4 ainsi que dans le chapitre 5 comment il est possible de façonner expérimentalement les coefficients c_l de la fonction d'onde du réseau.

La fonction $\phi(\mathbf{r})$ est l'enveloppe de l'état fondamental que l'on peut modéliser par un profil de Thomas-Fermi comme établi au chapitre 2

$$\phi(\mathbf{r}) = \left[\frac{15}{8\pi R^3}\left(1 - \frac{\omega_\perp^2}{\bar{\omega}^2}\frac{z^2+y^2}{R^2} - \frac{\omega_\parallel^2}{\bar{\omega}^2}\frac{x^2}{R^2}\right)\right]^{1/2}. \tag{4.37}$$

Cette enveloppe de rayon de Thomas-Fermi [6] R est due au confinement harmonique, superposé au réseau, de fréquence de piégeage longitudinale $\omega_\parallel$, transverse $\omega_\perp$ et moyenne $\bar{\omega} = (\omega_\perp^2\omega_\parallel)^{1/3}$ (je renvoie le lecteur au chapitre 2 de cette thèse pour plus de détails).

Aux fonctions d'ondes des états d'énergies sont associés un ensemble d'opérateurs de création $\hat{a}_i^\dagger$ et d'annihilation $\hat{a}_i$ qui créent et détruisent un atome dans la fonction d'onde $\varphi_i(\mathbf{r})$. Pour l'état du condensat, l'action de ces opérateurs est

$$\begin{aligned} \hat{a}_0|\Psi_N\rangle &= \sqrt{N}|\Psi_{N-1}\rangle, & \hat{a}_{i\neq 0}|\Psi_N\rangle &= 0, \\ \hat{a}_0^\dagger|\Psi_N\rangle &= \sqrt{N+1}|\Psi_{N+1}\rangle, & \hat{a}_{i\neq 0}^\dagger|\Psi_N\rangle &= |\Psi_N\rangle|\varphi_{i\neq 0}\rangle. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Pour prendre une image du condensat en champ lointain, après un temps de vol t_{TOF}, il faut éteindre le réseau et le confinement harmonique pour laisser entrer le condensat en chute libre.

6. $R = (15N\bar{a}^4 a)^{1/5}$ où $\bar{a} = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$. On fait ici l'approximation (discutable) que l'enveloppe du condensat n'est pas modifiée lors du chargement du réseau.

Les nuages sur chaque site n'étant plus confinés, il s'étendent spatialement et interfèrent au cours de leur chute. Si les interactions entre atomes étaient nulles durant le temps de vol, les atomes ne seraient soumis qu'à leur énergie cinétique et la distribution en impulsion du condensat serait simplement donnée par le module carré de la transformée de Fourier de la fonction d'onde in-situ du condensat

$$n(\mathbf{p}, t_{\mathrm{TOF}}) = N|\tilde{\varphi}_0(\mathbf{p})|^2. \tag{4.39}$$

Cette hypothèse ne ferait donc apparaître que les pics de diffraction dans la distribution en impulsion du condensat. Cependant, les interactions entre atomes durant la phase d'expansion du condensat viennent modifier cette distribution en impulsion. Pour prendre cet effet d'interaction en compte d'une manière plus formelle, on peut modéliser ce potentiel d'interaction par le potentiel de contact introduit dans la partie précédente à l'équation (4.24)

$$\hat{V}_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2(2\pi\hbar)^3} \int d^3p_1^3 p_2^3 p_1'^3 p_2' \, \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_2') \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{p}_2) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{p}_2') \hat{\psi}(\mathbf{p}_1') \hat{\psi}(\mathbf{p}_1). \tag{4.40}$$

où les opérateurs $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{p})$ et $\hat{\psi}(\mathbf{p})$ sont les opérateurs de création et d'annihilation d'un atome dans un mode d'impulsion $\mathbf{p}$ satisfaisant la relation de commutation $\left[\hat{\psi}(\mathbf{p}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{p}')\right] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. On peut les exprimer en fonction des opérateurs de création et d'annihilation d'un atome dans les fonctions d'onde associées aux états d'énergie

$$\hat{\psi}(\mathbf{p}) = \sum_i \langle p|\varphi_i\rangle \hat{a}_i = \sum_i \tilde{\varphi}_i(\mathbf{p}) \hat{a}_i, \tag{4.41}$$

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{p}) = \sum_i \langle \varphi_i|p\rangle \hat{a}_i^\dagger = \sum_i \tilde{\varphi}_i^*(\mathbf{p}) \hat{a}_i^\dagger, \tag{4.42}$$

où $\tilde{\varphi}_i(\mathbf{p})$ est la transformée de Fourier de la fonction d'onde $\varphi_i(\mathbf{r})$. L'action de ces opérateurs sur l'état macroscopique du condensat est alors

$$\hat{\psi}(\mathbf{p})|\Psi_N\rangle = \sum_i \tilde{\varphi}_i(\mathbf{p}) \hat{a}_i |\Psi_N\rangle = \tilde{\varphi}_0(\mathbf{p}) \hat{a}_0 |\Psi_N\rangle, \tag{4.43}$$

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{p})|\Psi^N\rangle = \sum_i \tilde{\varphi}_i^*(\mathbf{p}) \hat{a}_i^\dagger |\Psi_N\rangle. \tag{4.44}$$

La somme de l'équation (4.43) se résume à un unique terme : en effet, tous les atomes sont dans la fonction d'onde de l'état fondamental $\varphi_0(\mathbf{r})$ et l'action des opérateurs annihilation $\hat{a}_{i\neq 0}$ donnent donc une valeur propre nulle (les autres états sont vides).

L'état d'évolution du condensat durant le temps de vol peut alors être obtenu en résolvant l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_t^N\rangle = \hat{V}_{\text{int}}(t)|\Psi_t^N\rangle, \tag{4.45}$$

où $|\Psi_t^N\rangle$ est la fonction d'onde du condensat perturbée par le potentiel d'interaction. L'idée du traitement est de considérer que l'énergie fournie par les collisions est faible devant l'énergie cinétique acquise par les atomes pendant leur chute et donc de traiter le potentiel d'interaction comme une perturbation. Au premier ordre en a, on peut approximer l'état du condensat au temps t par

$$|\Psi_t^N\rangle \simeq |\Psi_0^N\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_0^{t'} dt'\hat{V}_{\text{int}}(t')|\Psi_0^N\rangle, \tag{4.46}$$

avec $|\Psi_0^N\rangle$ la fonction d'onde du condensat en l'absence d'interactions durant la phase d'expansion du temps de vol des atomes.

À partir de cette description du condensat après un temps de vol, il est possible d'évaluer la densité d'atomes dans un mode d'impulsion donné. Nous allons en particulier nous intéresser à l'expression de cette densité entre les pics de diffraction, là où se trouvent les halos de diffusion.

4.3.2.2 Distribution en impulsion entre les ordres de diffraction

Dans ce formalisme, on peut obtenir la distribution en impulsion $n(\mathbf{p}, t)$ en évaluant la quantité

$$\langle\Psi_t^N|\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{p})\hat{\psi}(\mathbf{p})|\Psi_t^N\rangle, \tag{4.47}$$

pour toutes les impulsions $\mathbf{p}$ à l'aide de la relation (4.43). Pour la suite du raisonnement, on peut séparer les impulsions en deux catégories

— Les impulsions *proche* de $p = l\hbar k_{\text{L}}$, où on retrouve les pics de diffraction usuels obtenus sans prendre en compte les interactions. Ces impulsions sont celles pour lesquelles la fonction $\tilde{\varphi}_0(\mathbf{p})$ prend des valeurs non négligeables.
— Les impulsions *loin* de $p = l\hbar k_{\text{L}}$, où on s'attend à retrouver les halos de diffusion dû aux collisions. À l'inverse, ces impulsions sont celles pour lesquelles la fonction $\tilde{\varphi}_0(\mathbf{p}) \simeq 0$, là où les effets des interactions dominent.

Nous allons donc nous concentrer uniquement sur la deuxième catégorie d'impulsions pour remonter au nombre d'atomes peuplant les halos de diffusion. Pour ces impulsions, la contribution du terme non perturbé $|\Psi_0^N\rangle$ est négligeable et la distribution en impulsion peut être obtenue par l'approximation

$$n(\mathbf{p},t) \simeq \langle \Pi_t(\mathbf{p}) | \Pi_t(\mathbf{p}) \rangle, \tag{4.48}$$

où on a introduit [7]

$$|\Pi_t(\mathbf{p})\rangle = \int_0^t dt' \left[\hat{\psi}(\mathbf{p}), \hat{V}_{\text{int}}(t') \right] |\Psi_0\rangle. \tag{4.49}$$

En évaluant l'équation (4.48), on obtient l'expression suivante pour la distribution en impulsion loin des pics de diffraction [38]

$$n(\mathbf{p},t) \simeq \sum_{l,l'=-\infty}^{\infty} |c_l|^2 |c_{l'}|^2 n\left(\mathbf{p} - \frac{l+l'}{2} \hbar k_{\text{L}} \mathbf{e}_x, \frac{l-l'}{2} \hbar k_{\text{L}} \mathbf{e}_x, t \right), \tag{4.50}$$

avec (dans la limite $t \to \infty$)

$$n(\mathbf{p},\mathbf{p}_0) = \frac{8N^2a^2}{\pi p_0 R^2} \int_0^\infty d\tau \frac{\sin\left(\frac{\tau R(p^2-p_0^2)}{\hbar p_0} \right)}{p^2 - p_0^2} \int d^3\rho \, \varphi^2(\rho - \tau \mathbf{e}_x) \varphi^2(\rho + \tau \mathbf{e}_x), \tag{4.51}$$

où

- l'impulsion relative entre deux pics de diffraction l et l' est $\mathbf{p}_0 = \hbar k_{\text{L}} \mathbf{e}_x (l - l')/2$,
- les normes des impulsions sont $p = |\mathbf{p}|$ et $p_0 = |\mathbf{p}_0|$,
- la variable de temps adimensionnée est $\tau = tp/mR$,
- la variable d'espace adimensionnée est $\rho = \mathbf{r}/R$,
- l'enveloppe de Thomas-Fermi adimensionnée est $\varphi(\rho) = \sqrt{R^3}\phi(\mathbf{r})$.

Cette expression correspond à une distribution non nulle proche de la sphère de rayon $\mathbf{p}_0$, l'impulsion relative de collision de deux ordres. Finalement, le nombre d'atomes dans les halos de diffusion entre deux pics de diffraction n et n' peut être évalué

$$N_{\text{coll}} = 2|c_l|^2|c_{l'}|^2 \mathcal{N} \quad \text{avec} \quad \mathcal{N} = \int n(\mathbf{p},\mathbf{p}_0) d^3p, \tag{4.52}$$

ce qui donne [8]

7. L'apparition de ce commutateur est une astuce mathématique : on peut utiliser les règles de commutation des opérateurs création et annihilation pour supprimer les termes négligeables. On a le droit de faire apparaître ce commutateur car $\hat{\psi}(\mathbf{p})|\Psi_0\rangle \propto \tilde{\varphi}(\mathbf{p})|\Psi_0\rangle$ avec $\varphi(\mathbf{p}) \simeq 0$ pour les impulsions que l'on considère ici.

8. Notons que ce résultat redonne la prédiction, issue d'un modèle semi-classique perturbatif, du nombre d'atomes dans les halos de diffusion de [4] : dans le cas d'un piège harmonique isotrope et en considérant uniquement l'état fondamental du réseau, l'expression du nombre de collisions entre deux composantes d'impulsion est $N_{\text{coll}} = \alpha \pi_0 \pi_1 (Na/R)^2$ où N est le nombre d'atomes dans le condensat, a est la longueur de diffusion en onde s, R est le rayon de Thomas-Fermi et α est un pré-facteur numérique. La valeur de ce pré-facteur déterminée dans [4] est de $\alpha = 1080/189$ alors que la valeur déterminée par le modèle quantique perturbatif de Peter Schlageck est de $\alpha = 25/4$. L'écart entre ces deux modèles est d'environ 10%.

$$\boxed{N_{\text{coll}} = \frac{25\pi_l\pi_{l'}\sigma N^2}{16\pi R^2}\left(\frac{\omega_\perp}{\omega_\parallel}\right)^{2/3},} \tag{4.53}$$

où σ est la section efficace de collision.

Dans notre cas, l'ordre de grandeur de la fraction d'atomes entrant en collision est alors le suivant : pour une fréquence moyenne $\bar{\omega} = 2\pi \times 50$ Hz, un nombre d'atomes égal à $2 \cdot 10^5$ et une collision entre deux pics de diffraction peuplé de manière égale et maximale $\pi_l = \pi_{l'} = 0.5$, on trouve une fraction d'environ 20% des atomes qui entrent en collision. Nous verrons dans la suite de ce chapitre que nous observons des halos de collisions très peuplés et obtenons généralement des fractions d'atomes impliquées dans les collisions de l'ordre de 30%, donc en désaccord apparent avec l'estimation théorique. Pour une fraction aussi élevée que 30%, une approche non perturbative peut être nécessaire pour obtenir un accord quantitatif. Cela contraste notamment avec les résultats de [4] qui ont été bien décrits avec une prédiction similaire mais ces résultats impliquaient généralement quelques pourcents des atomes du condensat dans les collisions entre deux ordres. Cette différence de fraction d'atomes entre les résultats de l'Institut d'optique et les nôtres s'explique entre autres par le fait que

— les travaux de [4] ont été effectués dans un réseau 3D alors que nous chargeons les atomes dans un réseau 1D. Le nombre de composantes d'impulsions entre lesquelles des collisions peuvent avoir lieu est donc inférieur dans notre cas et on s'attend donc à observer des halos de diffusion plus denses,
— les travaux de [4] s'intéressent exclusivement à la distribution en impulsion de l'état fondamental tandis que nous optimisons la distribution en impulsion du nuage dans le réseau afin d'augmenter les processus de collision dans un mode d'impulsion donné.

En outre, les échelles d'énergies d'interaction mise en jeu lors des collisions sont différentes : le nombre d'atomes dans le condensat, la masse atomique et la longueur d'onde du réseau optique ne sont pas les mêmes dans les deux cas.

Récapitulatif

Pour résumer, les grandes lignes de ce modèle sont que les interactions entre atomes sont modélisées par un potentiel de contact et considérées comme une perturbation faible devant l'énergie cinétique acquise durant le temps de vol des atomes. L'état d'évolution du condensat perturbé par ces interactions peut alors être approximé en utilisant l'état d'un condensat idéal, c'est-à-dire un état sans interactions entre les atomes. La densité d'atomes en impulsion est alors évalué entre les ordres de diffraction ce qui permet de remonter au nombre d'atomes entrés en collision. La fraction d'atomes dans les halos est alors estimé à 20 %.

Nous avons à présent tous les éléments de compréhension nécessaires pour aborder le protocole qui nous a permis de contrôler le centre de masse et le diamètre de halos de diffusion dans l'espace des impulsions.

4.4 Un nouveau protocole pour contrôler les halos de diffusion

Après avoir rappelé les éléments de compréhension nécessaires aux collisions entre atomes ultrafroids, je vais présenter un protocole permettant de contrôler les halos de diffusion en onde s apparaissant entre les pics de diffraction d'un condensat relâché d'un réseau optique. Avec un contrôle précis de la phase et de la profondeur du réseau, nous montrons qu'il est possible d'utiliser la dynamique du condensat avant son expansion de manière à augmenter les évènements de collision entre deux composantes d'impulsions choisies préalablement. Ce protocole permet alors de produire des halos de collision avec une impulsion moyenne et une impulsion relative choisie. Nous verrons en revanche que ce protocole présente des limites pour contrôler simultanément les impulsions moyenne et relative des atomes. Nous avons également retrouvé la quantification des impulsions relatives des halos en analysant leur expansion au cours du temps de vol des atomes. Enfin nous présenterons la méthode utilisée pour déterminer le nombre d'atomes dans les halos de collision.

4.4.1 Protocole expérimental et optimisation des paramètres

Le protocole expérimental, présenté sur la figure 4.9, est le suivant : le réseau est chargé adiabatiquement à une profondeur s de telle manière à ce que les atomes soient au fond des puits de potentiel du réseau avec une vitesse nulle. À la fin de ce temps de chargement, la phase du réseau, initialement nulle, passe subitement à une valeur φ_0. Ce décalage de la phase a pour effet de translater le réseau optique. Afin de faire la conversion entre le décalage de phase appliqué

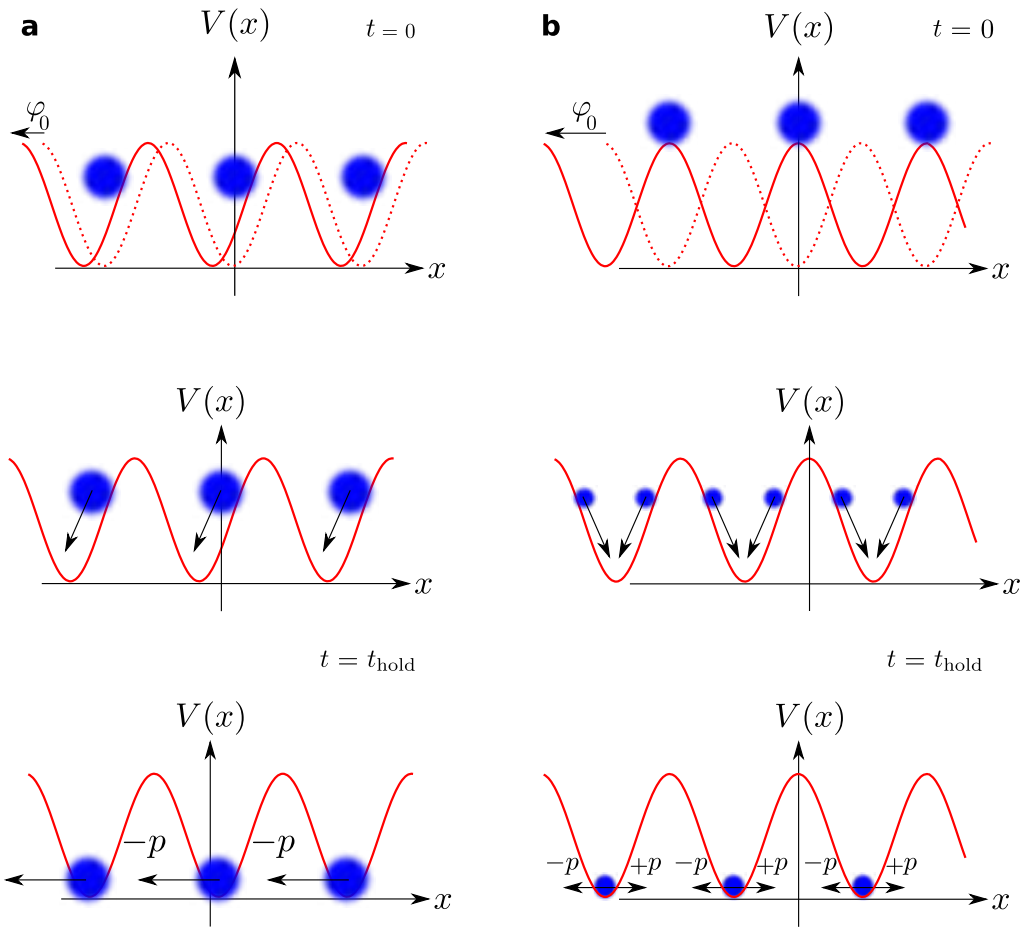


Figure 4.9 – Protocole utilisé pour contrôler les halos de diffusion. L'intensité lumineuse du réseau est montée adiabatiquement de telle manière à ce que les atomes soient chargés au fond des puits de potentiel avec une vitesse moyenne nulle. Le réseau est ensuite subitement translaté d'une distance inférieure au pas du réseau d. **a** : le décalage du réseau est positif et inférieur à $d/2$. Dans un vision classique, les atomes sont alors placés sur la pente des puits de potentiel. Après un temps de maintien t_{hold}, les atomes ont acquis une impulsion négative. Changer le signe du décalage change le signe de l'impulsion fournie aux atomes. **b** : le décalage est de $d/2$ et les atomes sont alors placés au sommet des puits de potentiel. Ce décalage sépare les paquets d'atomes en deux et, après un temps de maintien t_{hold}, une partie des atomes a acquis une impulsion positive et l'autre partie une impulsion négative.

au réseau et la distance de translation, on peut dire que pour un décalage de $\varphi_0 = 180°$, le réseau est translaté d'une distance $d/2$. Cette translation s'effectue en quelques nanosecondes, durée qui est extrêmement courte devant le temps caractéristique d'évolution des atomes dans le réseau optique qui lui est de l'ordre de la dizaine de microsecondes. Les atomes n'ont donc pas le temps de suivre le réseau et se retrouvent alors, suivant la valeur du décalage que nous utilisons, soit sur les pentes des puits de potentiel soit à leur sommet comme illustré sur la figure 4.9 **a** et **b** respectivement. On leur fournit ainsi une énergie potentielle. Cela déclenche alors une dynamique des atomes dans le réseau durant laquelle ils convertissent cette énergie potentielle en énergie cinétique en se rapprochant du centre des puits. Au cours de cette dynamique, leur impulsion augmente et elle atteint un maximum quand les atomes atteignent le fond des puits de potentiel. Plus précisément, si les atomes ont été placés sur les pentes des puits, on augmente leur impulsion moyenne alors que si les atomes ont été placés au sommet des puits, les nuages se séparent en deux et on augmente alors l'impulsion relative des atomes. Lorsque les paquets atomiques atteignent le fond des puits de potentiel, soit après un temps de maintien t_{hold} dans le réseau décalé, nous éteignons les pièges pour laisser les atomes entrer en chute libre pendant un temps de vol t_{TOF} de typiquement une vingtaine de millisecondes. Après ce temps de vol, nous prenons une image d'absorption du nuage pour mesurer sa distribution en impulsion. On précise également que l'on peut changer le signe de l'impulsion fournie aux atomes en changeant le signe du décalage φ_0.

Dans la partie précédente nous avons établi que les halos de diffusion en onde s apparaissent entre les pics de diffraction les plus peuplés. Nous pouvons donc simuler l'évolution d'un condensat sans interactions dans un réseau optique qui a été abruptement translaté pour obtenir les distributions en impulsion au cours de la dynamique et utiliser ces distributions comme guide pour nos expériences. Cette démarche est représentée sur la figure 4.10. En effet, pour savoir où le halo le plus visible apparaîtra, il suffit de repérer dans la distribution d'impulsion où se trouvent les deux pics les plus peuplés. Insistons sur le fait que cette démarche numérique est faite en considérant un condensat idéal, et donc sans interactions, alors qu'elles sont expérimentalement bien présentes. Nous reviendrons sur ce point dans la suite de ce chapitre.

Pour mener cette étude de manière systématique, nous définissons un paramètre de *visibilité* : le halo de diffusion le plus visible apparaîtra entre les deux ordres de diffraction les plus peuplés, nous définissons alors le paramètre de visibilité V comme *la différence entre le deuxième et troisième ordre de diffraction les plus peuplés de la distribution en impulsion*. Ce paramètre caractérise à quel point les deux ordres contribuant au halo de collision principal ressortent de la distribution en impulsion. Pour se faire une intuition du comportement de ce paramètre, on peut raisonner de la manière suivante : si la visibilité est maximisée, on maximise la différence de population entre le second maximum et le troisième maximum de la distribution en impulsion. Cela a pour effet de faire ressortir les deux pics les plus peuplés et d'amoindrir la population du reste de la distribu-

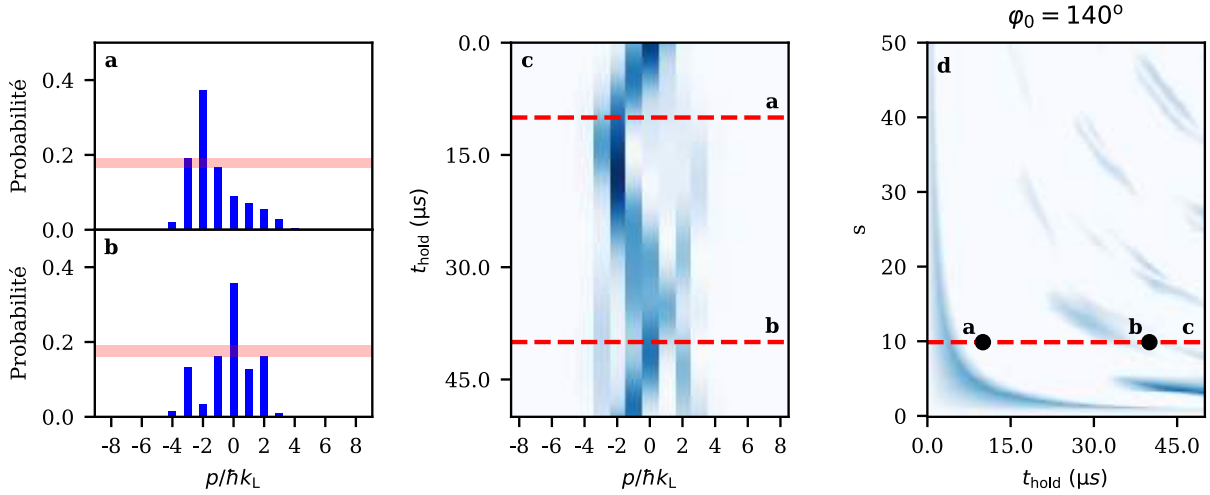


Figure 4.10 – Génération des cartes de visibilité à partir de l'évolution de la distribution en impulsion obtenue numériquement. Simulation de l'évolution des atomes chargés dans un réseau optique à une profondeur de $s = 10$ et décalé de $\varphi_0 = 140°$ avant un temps de maintien t_{hold}. **a-b** : Distributions aux temps de maintien $t_{\text{hold}} = 10$ μs et $t_{\text{hold}} = 40$ μs. La visibilité de chacune des distributions est indiquée par un rectangle rouge. **c** : Collection de toutes les distributions formant l'évolution du condensat pendant le temps de maintien. Les temps des insets **a** et **b** sont indiqués par les pointillés rouges. **d** : Visibilité V sur l'espace des paramètres $\{s, t_{\text{hold}}\}$. Pour chaque distribution à un temps de maintien donné, la visibilité est calculée et une évolution à une profondeur donnée donne alors une ligne de l'espace des paramètres. La droite horizontale en pointillé rouge correspond à l'évolution présentée en **c**. Les points noirs correspondent aux distributions présentées en **a** et **b**.

tion. La visibilité varie donc entre 0, cas de figure où le troisième ordre le plus peuplé est aussi peuplé que le deuxième, et 0.5, cas de figure où uniquement les deux ordres de la distribution contribuant au halo de collision sont peuplés.

Etudions le cas particulier où l'on souhaite trouver un protocole afin de produire des halos de collision avec le plus petit diamètre possible, c'est-à-dire $\hbar k_L$, avec n'importe quelle impulsion moyenne. Pour cela, on calcule la visibilité dans l'espace des paramètres défini par le triplet de degrés de liberté $\{\varphi_0, s, t_{\text{hold}}\}$. On ajoute alors la condition que les deux ordres les plus peuplés doivent être côte à côte afin que le halo ait un diamètre de $\hbar k_L$ (si on avait voulu chercher des halos de diamètre $2\hbar k_L$, la condition aurait été que les deux maxima soient séparés d'un ordre de diffraction, pour $3\hbar k_L$ de deux ordres de diffraction etc). Si cette condition n'est pas satisfaite, on fixe la visibilité à zéro. Pour pouvoir tracer des cartes de visibilité en deux dimensions, il faut fixer un des degrés de liberté. Nous pouvons par exemple fixer la valeur du décalage à $\varphi_0 = +140°$. Cela correspond à une translation du réseau de $0.39d$ (voir l'équation 3.35). Comme

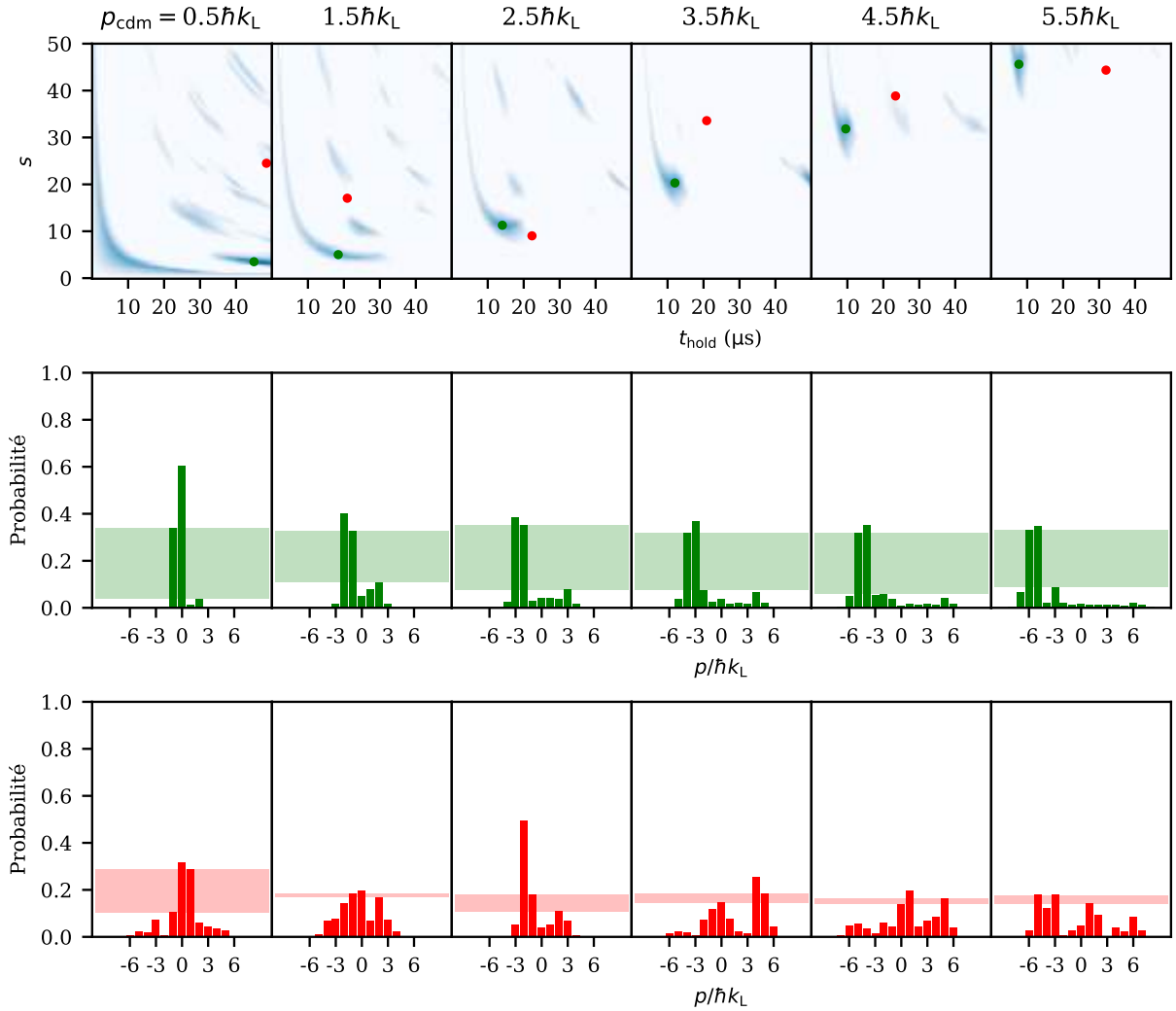


Figure 4.11 – Visibilité V pour des halos de diffusion d'impulsion relative $\hbar k_L$ et d'impulsion moyenne variable. La valeur du décalage est fixée à $\varphi_0 = 140°$. Les points verts correspondent aux jeux de paramètres maximisant la visibilité, les distributions en impulsion correspondantes sont données à la deuxième ligne (les bandes vertes représentent la visibilité des distributions). Les points rouges correspondent aux jeux de paramètres minimisant la visibilité, les distributions en impulsion correspondantes sont données à la troisième ligne (les bandes rouges représentent la visibilité des distributions).

nous n'avons pas spécifié d'impulsion moyenne p_{cdm}, c'est-à-dire le centre du masse du halo de diffusion, nous devons idéalement effectuer cette recherche pour tous les centres de masse possibles pour une impulsion relative de $\hbar k_{\mathrm{L}}$, soit $p_{\mathrm{cdm}} = \pm 0.5\hbar k_{\mathrm{L}}, \pm 1.5\hbar k_{\mathrm{L}}, \pm 2.5\hbar k_{\mathrm{L}}$ etc. Le signe de la phase φ_0 que nous avons choisi étant positif, seuls les centres de masse d'impulsion négative seront peuplés au début de la trajectoire et cela restreint notre recherche aux valeurs pour le centre de masse $p_{\mathrm{cdm}} = -0.5\hbar k_{\mathrm{L}}, -1.5\hbar k_{\mathrm{L}}, -2.5\hbar k_{\mathrm{L}}$ etc. Calculer ces cartes de visibilité jusqu'à une impulsion moyenne arbitrairement grande serait trop couteux en temps de calcul, nous devons donc spécifier des limites pour les degrés de libertés qui sont libres d'évoluer et, une fois ces limites définies, il suffit de calculer les espaces de paramètres pour tous les centres de masse où il y a au moins une valeur de visibilité non nulle. On peut néanmoins déjà donner un ordre de grandeur classique de l'impulsion moyenne maximale atteignable : lorsque les atomes sont placés sur les pentes des puits de potentiels à profondeur maximale après un décalage φ_0, ils acquièrent une énergie potentielle qui est par la suite convertie en énergie cinétique

$$\frac{s_{\max} E_{\mathrm{L}}}{2}\left(1+\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right) = \frac{p_{\mathrm{cdm-max}}^2}{2m}. \tag{4.54}$$

Comme $p_{\mathrm{cdm-max}} = n_{\max}\hbar k_{\mathrm{L}}$, avec $n_{\max}$ ne pouvant prendre dans ce cas que des valeurs demi-entière, on peut dire que le multiple $n_{\max}$ de l'impulsion moyenne maximale est

$$n_{\max} = \sqrt{\frac{s_{\max}}{2}\left(1+\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right)}. \tag{4.55}$$

Avec une profondeur maximale de $s_{\max} = 50$ et un décalage de $\varphi_0 = 140°$, on trouve $n_{\max} \simeq 5.79$, soit un impulsion moyenne maximale de $p_{\mathrm{cdm-max}} = 5.5\hbar k_{\mathrm{L}}$.

Déterminons à présent les limites des paramètres s et t_{hold}. Lorsque j'ai présenté la méthode de calibration du réseau optique au chapitre 3, j'ai donné une borne supérieure de la profondeur de notre réseau optique à environ $s = 50$. De plus, les atomes atteignent leurs impulsions maximales lorsqu'ils arrivent au fond des puits de potentiel, c'est-à-dire après un quart de période d'oscillation dans les puits $T_0/4$. Nous pouvons alors prendre le temps $T_0/4$ le plus long comme borne supérieure du temps de maintien t_{hold}. Le temps $T_0/4$ le plus long étant atteint pour les profondeurs les plus faibles, il nous faut fixer une borne inférieure pour la profondeur. Nous fixons cette borne inférieure [9] à $s = 1$ (même s'il nous est possible d'aller à des profondeurs inférieures expérimentalement). Ce temps $T_0/4$ est d'environ 50 μs pour une profondeur de $s = 1$. Nous pouvons donc finalement dire que nous allons restreindre notre recherche aux bornes

9. Pour estimer le quart de période d'oscillation le plus long, il suffit donc de calculer la structure de bande pour $s = 1$ et de calculer l'inverse de la moitié de la fréquence de transition entre la bande fondamentale et deuxième bande excitée (c'est la fréquence majoritaire de l'oscillation des atomes dans le réseau optique, je renvoie au chapitre 3 de cette thèse pour plus de détails).

$$1 \leq s \leq 50, \tag{4.56}$$

$$0 \leq t_{\text{hold}} \leq 50\mu s, \tag{4.57}$$

$$0.5\hbar k_{\text{L}} \leq p_{\text{cdm}} \leq 5.5\hbar k_{\text{L}}. \tag{4.58}$$

Le résultat de cette analyse préliminaire est représenté sur la figure 4.11. Sur la première ligne de cette figure, je trace la visibilité, lorsqu'elle satisfait la condition que le halo ait un diamètre de $1\hbar k_{\text{L}}$ sur l'espace des paramètres $\{s, t_{\text{hold}}\}$ dans la limite des bornes que nous avons déterminées, pour différentes impulsions moyennes. On peut observer que la répartition de la visibilité n'est pas homogène mais s'agence en cluster autour de certains jeux de paramètres $\{s, t_{\text{hold}}\}$. On remarque aussi que plus on cherche à peupler des impulsions moyennes p_{cdm} élevées, plus la profondeur du réseau doit être grande. Cela se comprend par le fait qu'il faut une énergie cinétique finale plus élevée pour atteindre de grandes impulsions moyennes, et donc une énergie potentielle initiale plus élevée, c'est-à-dire des valeurs de s plus élevées. Nous avons vérifié qu'avec ce protocole, pour une profondeur limité à $s = 50$, il n'est pas possible de peupler des halos d'impulsions relatives $1\hbar k_{\text{L}}$ autour d'une impulsion moyenne supérieure à $5.5\hbar k_{\text{L}}$ et nous pouvons donc en conclure qu'il est inutile de poursuivre la recherche de nouveaux jeux de paramètres pour des impulsions moyennes supérieures.

Sur la deuxième ligne de cette figure, je représente les distributions en impulsion pour les jeux de paramètres qui maximisent la visibilité à une impulsion moyenne données. On observe qu'effectivement, ces distributions présentent deux pics d'impulsions significativement plus peuplés que le reste de la distribution. Les jeux de paramètres qui génèrent ces distributions sont représentés par les points verts sur les espaces des paramètres de la première ligne. Sur la troisième ligne de cette figure, je représente les jeux de paramètres qui minimisent la visibilité. Il s'agit des points rouges des graphiques de la première ligne. Une tendance se remarque : ces distributions en impulsion sont plus homogènes. Pour ces jeux de paramètres, on s'attend donc à observer plusieurs halos de collision faiblement peuplés et donc plus difficiles à détecter expérimentalement.

Il est possible de rassembler les résultats de cette étude préliminaire sur un seul espace des paramètres. Sur la figure 4.12, nous avons encodé la valeur de l'impulsion moyenne p_{cdm} dans le code couleur de la visibilité et superposé tous les espaces des paramètres de la figure 4.11. C'est cette figure finale qui nous a guidé dans le choix de nos paramètres expérimentaux pour observer les halos de collisions de diamètre $1\hbar k_{\text{L}}$. Dans la prochaine partie, nous allons voir l'efficacité de ces prédictions pour observer expérimentalement ces halos de collision.

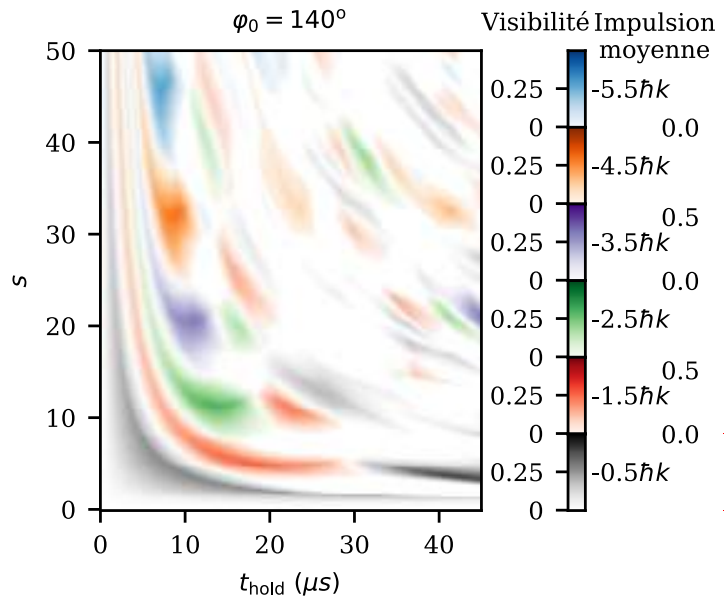


Figure 4.12 – Représentation compacte de l'étude en visibilité présentée sur la figure 4.11. L'impulsion moyenne des nuages est encodée dans le code couleur.

4.4.2 Résultats expérimentaux

Nous allons maintenant présenter les résultats de ce protocole expérimental. Nous avons choisi de démontrer notre aptitude à contrôler les halos de diffusion en changeant indépendamment soit leur impulsion moyenne soit leur impulsion relative.

4.4.2.1 Contrôle en impulsion moyenne (centre de masse)

Dans une première série d'expériences, nous démontrons notre aptitude à contrôler l'impulsion moyenne des halos de diffusion. Pour cela, nous allons tester expérimentalement les jeux de paramètres qui maximisent la visibilité en s'appuyant sur notre étude numérique dont les résultats sont résumés sur la figure 4.12.

Les jeux de paramètres que nous avons utilisé pour tester notre protocole sont représentés par les points noirs sur la figure 4.13 **a**. Sur les encadrés de la figure 4.13 **a-g**, je représente en rouge les distributions en impulsion obtenues numériquement pour les paramètres expérimentaux utilisés. Pour chacune de ces distributions, je représente la visibilité par un rectangle rouge. En bleu, je représente les distribution en impulsions mesurées expérimentalement $\{\pi_j\}$ obtenues à partir des images d'absorption présentées sur la droite.

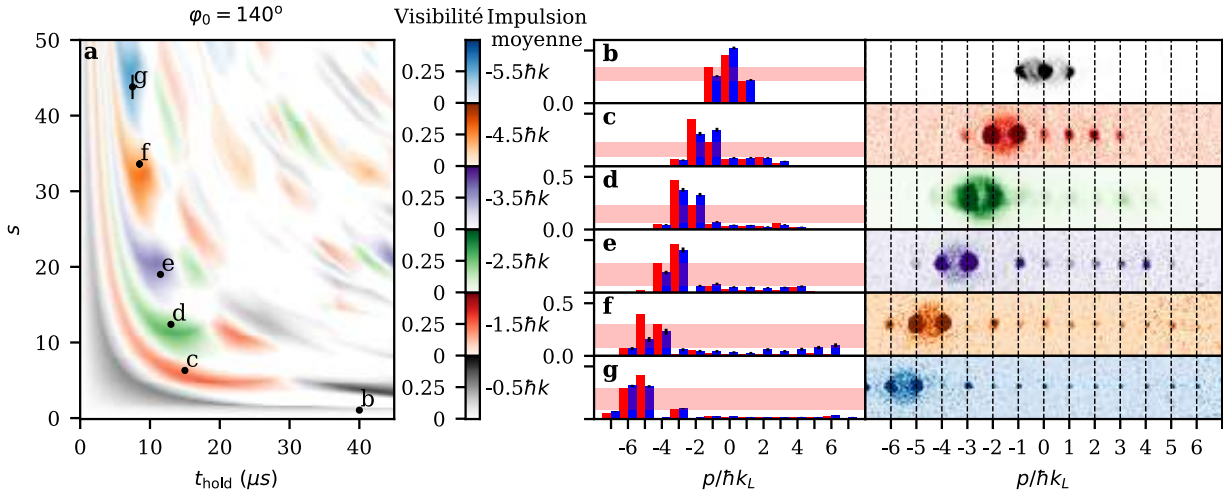


Figure 4.13 – Variation de l'impulsion moyenne de halos de collision de diamètre $\hbar k_L$. a. Visibilité simulée V des ordres de diffraction en fonction de la profondeur du réseau s et du temps de maintien t_{hold}, pour un décalage soudain de la phase $\varphi_0 = 140°$. L'impulsion moyenne du halo de collision dominant attendu est encodée via le code couleur. Les points noirs indiquent les paramètres testés expérimentalement et les barres d'erreurs verticales indiquent l'écart-type de la calibration de la profondeur s. **b-g** Gauche : distributions de probabilité des ordres de diffraction expérimentaux $\{\pi_j\}$ (bleu, décalé vers la droite), où les barres d'erreur noires montrent l'écart-type, et des barres simulées pour les mêmes paramètres φ_0, s, t_{hold} (rouge, décalé vers la gauche). Les bandes horizontales ombrées en rouge représentent les visibilités pour les distributions théoriquement simulées, et s'étendent verticalement entre les probabilités des deuxième et troisième ordres de diffraction les plus peuplés. A droite : images d'absorption expérimentales (non moyennées) dont sont extraites les distributions en impulsion. Le halo de collision entre les deux ordres les plus peuplés est clairement visible. Le code couleur des images d'absorption indique l'impulsion moyenne du halo de diffusion, avec le même code couleur que celui de la Fig. 4.13**a**. Les paramètres utilisés pour les données **b-g** sont $\{s, t_{hold}[\mu s]\} = \{1.01 \pm 0.02, 40\}, \{6.35 \pm 0.23, 15\}, \{12.67 \pm 0.26, 14\}, \{18.67 \pm 0.26, 11.5\}, \{33.15 \pm 0.51, 8.5\}$ et $\{43.50 \pm 1.61, 7.5\}$, respectivement. Les fidélités à l'état cible obtenu numériquement pour les données **b-g** sont dans l'ordre $0.99, 0.97, 0.98, 0.90, 0.84, 0.98$.

On remarque un bon accord entre les distributions en impulsion expérimentales et numériques. Pour quantifier cet accord entre expérience et théorie, on peut introduire le concept de *fidelité* $\mathcal{F}$ qui mesure à quel point deux états sont similaires. On définit cette grandeur pour un état cible ψ_{cible} et un état obtenu ψ_{obt} comme

$$\boxed{\mathcal{F} = \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sqrt{\pi_i^{\text{cible}} \pi_i^{\text{obt}}} \right)^2 ,} \tag{4.59}$$

où π_i^{cible} et π_i^{obt} sont les populations des distributions en impulsions des état cible et obtenu respectivement. La fidélité est une quantité qui varie entre 0 (les deux états sont orthogonaux) et 1 (les deux états sont identiques). Pour chacune des distributions obtenues expérimentalement et présentées sur la figure 4.13, la fidélité à la prédiction numérique est systématiquement supérieure à $\mathcal{F} = 0.84$.

Sur les images d'absorption, les halos de collisions sphériques dûs aux collisions entre les ordres les plus peuplées séparés par $\hbar k_{\text{L}}$ sont clairement visibles et sont également la caractéristique dominante après les ordres de diffraction. Pour chacune de ces mesures, la profondeur du réseau optique a été précisément calibrée indépendamment par la méthode de calibration présentée dans le chapitre 3 de la première partie de cette thèse. On notera que le signe de l'impulsion moyenne peut être facilement modifiée en changeant le signe du décalage φ_0 du réseau.

Récapitulatif

En résumé, pour déterminer un jeu de paramètres qui amplifie la visibilité d'un halo d'impulsion moyenne et relative données, il faut

- Calculer la visibilité pour toutes les valeurs de $\{\varphi_0, s, t_{\text{hold}}\}$.
- Conserver les jeux de paramètres qui satisfont les caractéristiques du halo que l'on souhaite peupler.
- Trouver la valeur maximale de la visibilité sur l'ensemble des jeux de paramètres que l'on a conservé.

Si l'état obtenu expérimentalement est en bon accord avec l'état obtenu numériquement lors de la recherche de paramètres maximisant la visibilité (si la fidélité à cet état est supérieure à un certain seuil), le halo désiré sera peuplé de manière significative.

En conclusion, nous pouvons affirmer qu'une étude en visibilité permet d'obtenir des protocoles efficaces pour observer des halos de collision d'impulsion moyenne variable. Nous allons maintenant présenter les résultats d'une étude similaire mais où nous essayons à l'inverse de faire varier

l'impulsion relative des halos de collision.

4.4.2.2 Contrôle en impulsion relative

Dans cette deuxième série d'expériences, notre objectif est de contrôler spécifiquement l'impulsion relative des collisions. Pour cela, nous effectuons le même type de recherche en visibilité que dans la partie précédente mais avec un décalage de $\varphi_0 = 180°$: un argument classique qu'on peut donner pour ce choix de décalage est que les nuages d'atomes seront alors placés au sommet des puits de potentiel du réseau et se diviseront en deux paquets identiques de part et d'autre des pentes du potentiel (voir figure 4.9). Après un temps de maintien qui permet aux nuages d'atteindre le fond des puits de potentiel, les ordres d'impulsions de signe opposé doivent être peuplés de manière égale, avec une impulsion de centre de masse nulle. Leur valeur typique augmente avec la profondeur du réseau s.

Sur la figure 4.14, je trace les valeurs de la visibilité V sur une gamme de valeurs de profondeurs du réseau s et de temps de maintien t_{hold}, pour $\varphi_0 = 180°$. Ici, je n'impose plus de condition sur la séparation entre les ordres les plus peuplés. On remarque que dans ce cas, les distributions théoriques sont symétriques et les deux pics les plus élevés sont peuplés de manière égale. Le diamètre du halo de collision attendu (avec une impulsion moyenne nulle) est indiqué par un code couleur. Comme attendu, l'impulsion relative de collision augmente avec la profondeur du réseau. La principale caractéristique de cette figure est que l'impulsion relative des ordres les plus peuplés augmente par pas de $2\times\hbar k_{\text{L}}$ au fur et à mesure que la profondeur du réseau augmente, et cela pour des temps de maintien décroissants : les distributions ne pourront qu'être symétriques pour ce déphasage, on gagne donc $2\hbar k_{\text{L}}$ à chaque fois que le halo de collision englobe les ordres de diffraction suivants.

Sur les figures 4.14 **b-g**, je représente des images expérimentales des distributions en impulsion obtenues après temps de vol pour les paramètres qui sont indiqués dans la figure 4.14. Des halos de collision en forme de cercle de diamètres croissants, quantifiés en unités de $2\times\hbar k_{\text{L}}$, sont clairement visibles. À gauche des images d'absorption, je représente les distributions en impulsion π_j extraites des images d'absorption et je les compare avec celles obtenues numériquement pour les mêmes paramètres s et t_{hold}. Nous constatons à nouveau un très bon accord. En effet, les fidélités obtenues sont systématiquement supérieures à $\mathcal{F} = 0,87$. Une précision importante à ce stade : les halos de collision pour des larges impulsions relatives deviennent très dilués aux longs temps de vol, nécessaires à la reconstruction des distributions (quelques dizaines de millisecondes typiquement). Pour chaque image, nous avons donc adapté le temps de vol pour visualiser les halos (généralement quelques millisecondes) suivant la densité d'atomes dans ces derniers.

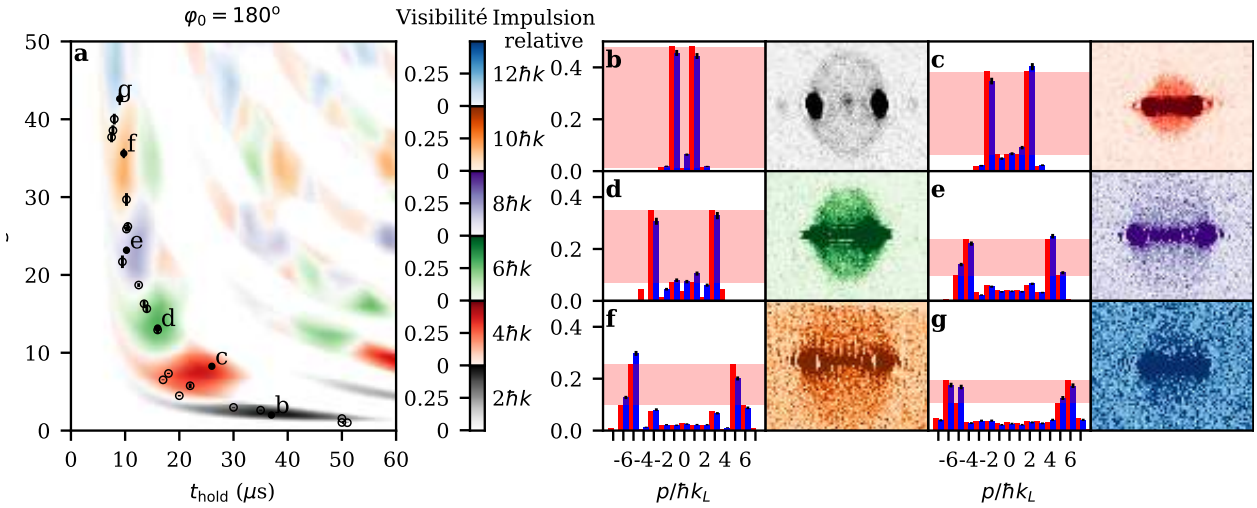


Figure 4.14 – Variation de l'impulsion relative de halos de collision d'impulsion moyenne nulle. a : Visibilité simulée V des ordres de diffraction (voir texte) en fonction de la profondeur du réseau s, et temps de maintien t_{hold}, pour un décalage de $\varphi_0 = 180°$. L'impulsion moyenne de la collision est nulle, et l'impulsion relative est encodée par le code couleur. Les points noirs indiquent les paramètres testés expérimentalement, la barre d'erreur verticale indiquant l'écart-type de la mesure indépendante de s. Les symboles pleins sont les jeux de paramètres des données indiquées dans **b-g**, et tous les points, y compris les vides, se rapportent à la figure 4.15**d**. **b-g** Gauche : distributions en impulsion expérimentales $\{\pi_j\}$ (bleu) avec des barres d'erreur d'un écart-type, et les distributions en impulsion obtenues numériquement pour les mêmes paramètres $\varphi_0, s, t_{\text{hold}}$ (rouge). Les rectangles horizontaux en rouge représentent les visibilités pour les distributions numériques, et s'étendent entre les probabilités des deuxième et troisième ordres de diffraction les plus peuplés. Droite : images d'absorption correspondantes (non moyennées). Les halos de collision entre les deux ordres les plus peuplés sont clairement visibles. Le code couleur des images d'absorption indique le diamètre du halo de diffusion, avec le même code que celui de la figure 4.14**a**. Les paramètres utilisés pour les données **b-g** sont $\{s, t_{\text{hold}}[\mu\text{s}]\} = \{1.99\pm0.03, 37\}, \{8.26\pm0.09, 26\}, \{13.18\pm0.33, 16\}, \{23.17\pm0.45, 10.2\}, \{35.61\pm0.61, 9.8\}$ et $\{40.02 \pm 0.69, 8.0\}$, respectivement. Les fidélités à l'état cible obtenu numériquement pour les données **b-g** sont dans l'ordre $0.98, 0.99, 0.87, 0.98, 0.97, 0.98$.

Un point que nous avons également vérifié sur ces halos de collision est la quantification de leur diamètre.

4.4.2.3 Quantification de la vitesse relative des atomes diffusés

Dans cette partie nous allons étudier le diamètre du halo de collision dominant dans l'espace des impulsions : nous nous attendons à ce qu'il soit quantifié par pas de $2 \times \hbar k_{\mathrm{L}}$ et que des diamètres plus importants peuvent être atteints pour des profondeurs plus importantes.

Pour chacune des valeurs des paramètres $\{s, t_{\mathrm{hold}}\}$ présenté sur la figure 4.14, nous enregistrons une séquence d'images où nous faisons croitre le temps de vol des atomes. Sur chacune de ces images, nous masquons les ordres de diffraction, comme représenté sur la figure 4.15 **a**, pour nous concentrer uniquement sur le halo de diffusion le plus visible. En effectuant une intégration radiale, nous obtenons la densité radiale des halos de collision dont un exemple est présenté sur la figure 4.15 **b**. On voit que la densité d'atomes augmente avec le rayon, atteint un maximum puis chute à une valeur constante : cette densité montre clairement le bord des halos de diffusion. On interprète la valeur finale de la densité radiale comme le bruit de fond de l'image d'absorption. La valeur maximale de la densité correspond à la caustique des halos de collision et donne donc accès au rayon de ces derniers. Nous trouvons la valeur de ce rayon pour un temps de vol donné par un ajustement avec une fonction sigmoïde de la densité radiale. Nous pouvons alors déduire la vitesse d'expansion du halo de diffusion en ajustant la croissance linéaire du rayon avec le temps de vol comme représenté sur la figure 4.15 **c**.

Cette procédure a été répétée pour plusieurs valeurs de s, en choisissant pour chaque profondeur un temps de maintien de telle manière à produire le halo de diffusion donnant le plus fort signal expérimental. Les résultats sont présentés sur la figure 4.15 **d**. Nous constatons qu'en effet, la vitesse d'expansion des halos, mesurée uniquement à partir du halo et sans prendre en considération les ordres de diffraction, montre des sauts importants entre des multiples entiers de $v_L = \hbar k_{\mathrm{L}}/m$, l'échelle de vitesse fixée par le réseau. Plus la profondeur du réseau augmente, plus l'énergie de collision convertie à partir de l'énergie potentielle du réseau augmente, tout comme la vitesse d'expansion du halo. En plus des données expérimentales nous représentons la vitesse de collision attendue classiquement en pointillé rouge. Cette courbe $\sqrt{s}$ correspond simplement à la conversion de l'énergie potentielle en énergie cinétique

$$\frac{1}{2}mv^2 = sE_{\mathrm{L}} = s\frac{1}{2}mv_{\mathrm{L}}^2 \Rightarrow \frac{v}{v_{\mathrm{L}}} = \sqrt{s}. \tag{4.60}$$

On voit que les points expérimentaux sont systématiquement en dessous de cette limite classique. Cependant, la meilleure interprétation de ces données expérimentales est obtenue en considérant

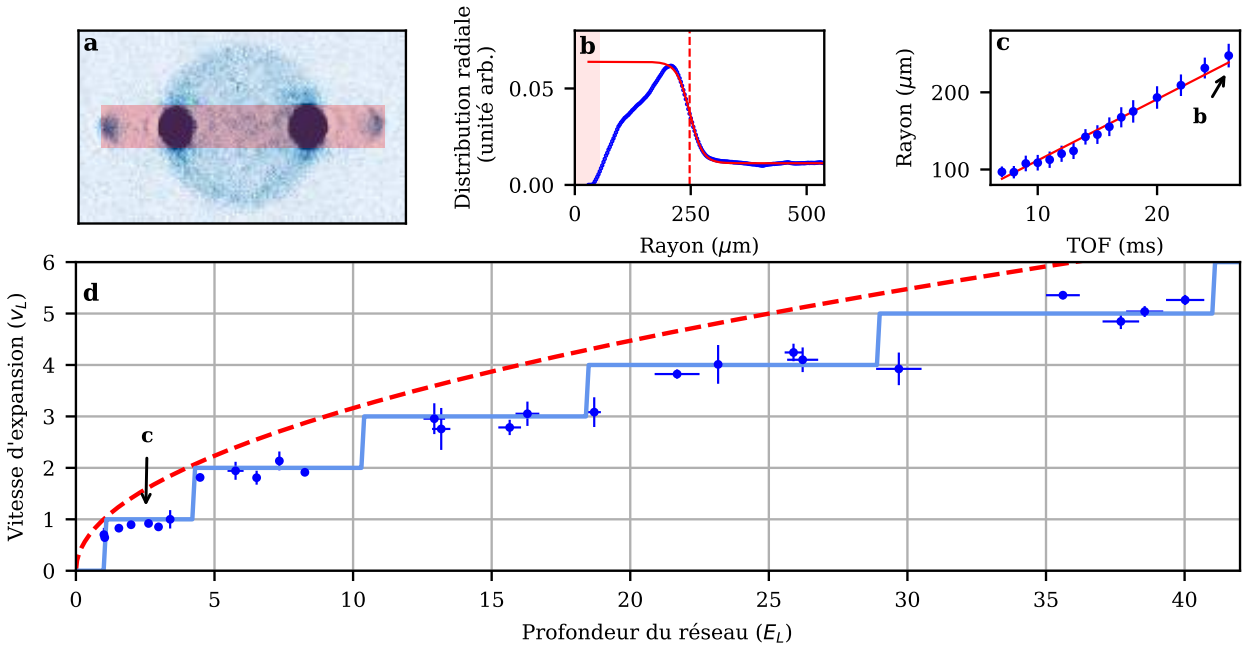


Figure 4.15 – Quantification du rayon du halo de diffusion. **a** Image d'absorption (non moyennée) typique à partir de laquelle le rayon du halo de collision principal est mesuré. Le rectangle rouge indique le masque utilisé pour cacher les ordres de diffraction afin d'extraire les caractéristiques du halo. **b** : À partir de l'image masquée, une moyenne angulaire est réalisée (marqueurs bleus) et un ajustement sigmoïde (ligne rouge) à la distribution radiale résultante nous permet d'extraire le rayon du halo de collision (ligne rouge en pointillés). **c** Cette procédure est répétée pour plusieurs valeurs de TOF (marqueurs bleus). Un ajustement linéaire (ligne rouge continue) donne la vitesse d'expansion du halo de diffusion. **d** Mesure des vitesses d'expansion en fonction de la profondeur du réseau s (marqueurs bleus). Les paramètres $\{s, t_{\text{hold}}\}$ correspondant à ces points de données sont indiqués par les disques de la Fig. 4.14**a**. La quantification de la vitesse d'expansion du halo de diffusion principal en termes de $v_L = \hbar k_{\text{L}}/m$ est apparente. La ligne bleue indique la vitesse d'expansion prévue pour le halo provenant des ordres de diffraction avec la plus grande visibilité à la profondeur s (voir texte). La ligne en pointillé rouge est la vitesse d'expansion en unité de v_{L} des atomes attendue classiquement (voir texte).

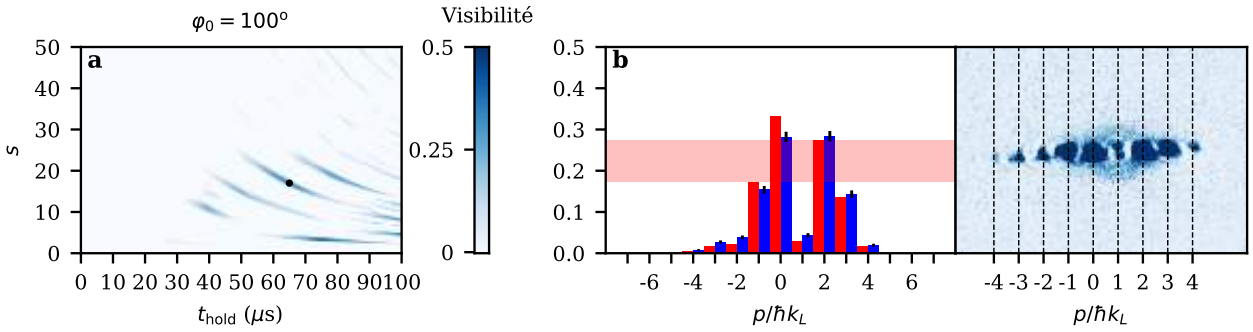


Figure 4.16 – Halo de collision d'impulsion relative $2 \times \hbar k_{\mathrm{L}}$ et d'impulsion moyenne $\hbar k_{\mathrm{L}}$. a. Visibilité V des ordres de diffraction avec la condition supplémentaire que les deux ordres les plus peuplés soient d'impulsions $0 \times \hbar k_{\mathrm{L}}$ et $2 \times \hbar k_{\mathrm{L}}$, en fonction de la profondeur du réseau s, et un temps de maintien t_{hold}, pour un décalage de $\varphi_0 = 100°$. Le point noir indique les paramètres testés expérimentalement, la barre d'erreur verticale indiquant l'écart-type de la mesure indépendante de s. **b** Gauche : distribution en impulsion des ordres de diffraction expérimentaux $\{\pi_j\}$ (bleu), avec des barres d'erreur d'un écart-type, et la distribution en impulsion simulée pour les mêmes paramètres φ_0, s, t_{hold} (rouge). Le rectangle rouge horizontal représente la visibilité de la distribution obtenue numériquement, et s'étend entre les probabilités des deuxièmes et troisièmes ordres de diffraction les plus peuplés. Droite : image d'absorption (non moyennée) expérimentale correspondante. Le halo de collision entre les deux ordres les plus peuplés est clairement visible. Les paramètres utilisés pour les données **b** sont $\{s, t_{\text{hold}}\,[\mu s]\} = \{17.93 \pm 0.27, 65.25\}$. La fidélité à l'état cible obtenu numériquement est de 0.99.

la visibilité : la courbe en bleu sur la figure 4.15 **d** correspond à la vitesse relative du halo maximisant la visibilité en fonction de la profondeur. Nous constatons que les sauts de la vitesse d'expansion des halos observés expérimentalement sont remarquablement en accord avec la prédiction en termes de visibilité des ordres de diffraction. Cette courbe est donc une justification a posteriori de notre étude des halos de collisions en terme de visibilité.

Maintenant que nous avons démontré notre aptitude à contrôler séparément les impulsions moyenne et relative des halos de diffusion, il est naturel de chercher à les contrôler simultanément.

4.4.2.4 Contrôle mixte des impulsions moyenne et relative

Nous abordons dans cette partie les limites de notre protocole. En effet, trouver un jeu de paramètres pour lequel deux pics sont séparés de plus que $\hbar k_{\mathrm{L}}$ avec une impulsion moyenne différente de zéro et significativement peuplés est difficile. Ce cas de figure n'apparaît que rarement dans la dynamique des condensats et pour des temps de maintien longs (plus que le quart de période d'os-

cillation $T_0/4$). De plus, à temps de maintien long, l'état du condensat devient de plus en plus sensible aux fluctuations expérimentales et par conséquent la fidélité à l'état prédit numériquement diminue. De toutes nos recherches, le seul jeu de paramètres qui a fourni une image expérimentale convaincante est celui représenté sur la figure 4.16. Sur l'image d'absorption de cette figure on distingue un halo de collision de diamètre $2\hbar k_L$ centré sur l'impulsion moyenne $\hbar k_L$. On a donc une distribution d'impulsion où l'impulsion moyenne et relative sont modifiées. La fidélité entre la distribution obtenue expérimentalement et celle prédite numériquement est $\mathcal{F} = 0.99$.

Pour un contrôle mixte des impulsions moyenne et relative efficace, un simple décalage de la phase ne suffit plus et il faut se tourner vers des protocoles plus complexes pour contourner ce problème. Nous aborderons ce problème dans le chapitre 5 de cette thèse dédié au contrôle optimal. Dans ce chapitre nous reviendrons notamment sur l'influence de la durée du protocole sur la fidélité à l'état obtenu.

Une caractéristique importante des halos de diffusion reste encore inconnue à ce stade : la fraction d'atomes du condensat qui peuple ces halos et c'est à cette inconnue que nous allons nous intéresser dans la prochaine partie.

4.4.2.5 Fraction d'atomes diffusés

Un point important de cette étude est la fraction des atomes diffusés au cours du temps de vol. Dans cette section, je présente la méthode utilisée pour l'estimer expérimentalement. Nous verrons que la fraction des atomes dans les halos de collision que nous mesurons est en général plus importante que ce que prédit la théorie des perturbations de Peter Schlageck présentée précédemment. Nous discuterons alors de la validité de ce modèle.

Pour mesurer la fraction d'atomes dans les halos de diffusion, nous commençons par identifier le halo de diffusion sur l'image d'absorption de la même manière que ce qui est présenté sur la figure 4.15. Une fois identifié, nous disposons d'un cercle sur l'image qui identifie le bord du halo de diffusion. Ce cercle est découpé en un nombre N de parties égales comme présenté sur la figure 4.17 **a** (dans ce cas de figure $N = 20$). Pour chaque part du cercle, le signal d'absorption est intégré. Si l'intégration du signal d'absorption dépasse un certain seuil, la partie du cercle n'est pas prise en compte pour la suite du traitement car cela signifie qu'elle contient un ordre de diffraction. Ce seuil est manuellement ajusté pour chaque jeu de données de manière à filtrer les parties du halo qui contiennent les ordres de diffraction. Cela permet d'obtenir un masque pour lequel seule la partie de l'image d'absorption qui contient le halo de diffusion est prise en compte comme représenté sur la figure 4.17 **c**. Pour être certain de ne compter que les atomes diffusés et de ne pas prendre en compte les atomes dans l'ordre zéro de diffraction, un masque

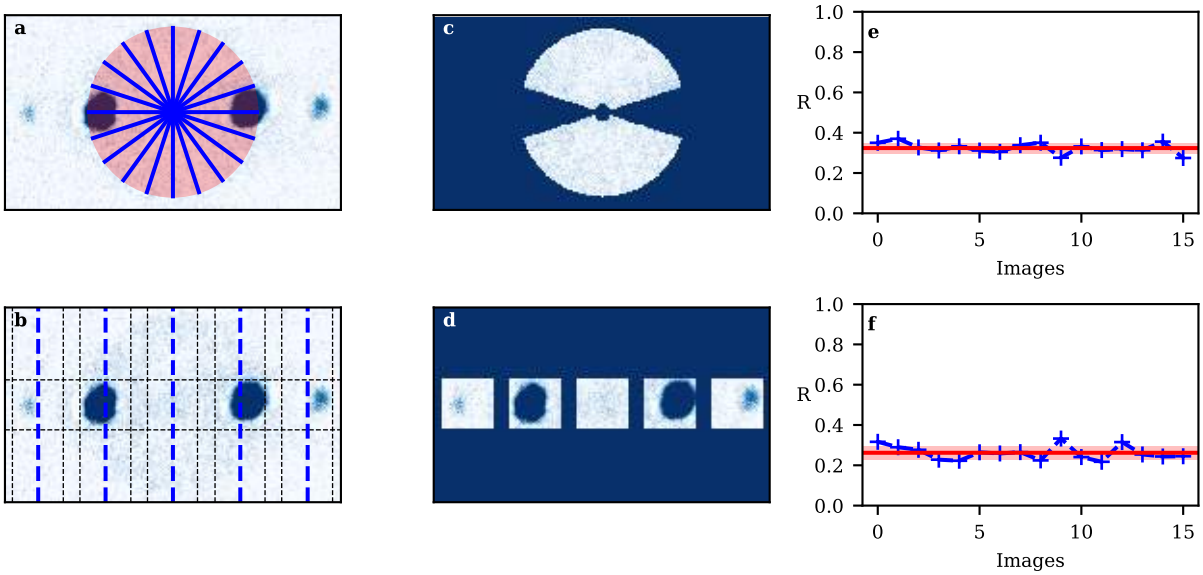


Figure 4.17 – Méthode expérimentale pour déterminer la fraction d'atomes dans les halos de collisions. a : Le halo de diffusion est localisé par la méthode présenté sur la figure 4.15. Sa position est représentée par le disque rouge. Ce disque est divisé en N parts afin d'identifier la position des ordres de diffraction produisant le halo (voir texte). **b** : Les ordres de diffraction sont localisés (pointillés bleus) et des régions rectangulaires sont définies autour de ces derniers (pointillés noirs). **c**-**d** : Deux masques différents sont appliqués sur l'image d'absorption pour ne prendre en compte que les régions d'intérêts identifiées en **a** pour le halo et **b** pour les ordres de diffraction. En intégrant le signal d'absorption de l'image avec les deux masques différents, on remonte au nombre d'atomes dans le halo et dans les ordres de diffraction respectivement, ce qui permet de déduire la fraction d'atomes dans le halo de collision. **e** : La même procédure est répétée pour 15 images différentes dont la fraction d'atomes dans le halo est extraite (croix bleues) pour un temps d'évaporation de 6.3s. La moyenne de ces fractions d'atomes (trait rouge) est de $R = 32 \pm 3\%$ (le rectangle rouge transparent correspond à l'écart type). **f** : similaire à **e** mais pour un temps d'évaporation de 6s. La moyenne de ces fractions d'atomes (trait rouge) est de $R = 26 \pm 3\%$.

circulaire supplémentaire est ajouté entourant cet ordre de diffraction. Finalement, en intégrant le signal d'absorption de l'image masquée, on peut remonter au nombre d'atomes dans le halo de diffusion. Il reste alors à compter le nombre d'atomes dans les les ordres de diffraction. Pour cela, un masque rectangulaire est appliqué autour de chaque ordre de diffraction et en intégrant le signal, on remonte alors au nombre d'atomes dans les ordres de diffraction. La fraction du nombre d'atomes diffusés est donc le rapport du nombre d'atomes dans les halos sur la somme de ces deux quantités.

Nous avons mesuré cette fraction d'atomes dans un cas limite où la visibilité est proche de $V = 0.5$. Dans ce cas, on s'attend à maximiser les collisions et cela donne donc une borne supérieure à la fraction du nombre d'atomes diffusés. Sur la figure 4.17 **e** et **f**, une moyenne statistique des fractions dans 15 images d'absorption est effectuée pour deux valeurs de temps d'évaporation dipolaire différent (je renvoie le lecteur au chapitre 2 de cette thèse pour plus détails sur la séquence expérimentale permettant de produire un condensat). Pour chaque temps d'évaporation, je mesure une fraction d'atomes diffusés autour de 30%. Cela nous assure que ce résultat est valide pour une plage de temps d'évaporation : les fluctuations du nombre d'atomes thermique dans le condensat en fin de séquence expérimentale ne viennent pas modifier cette fraction d'atomes diffusés significativement.

On peut légitimement se demander comment les distributions en impulsion prédites numériquement arrivent alors à donner des résultats en si bon accord avec les résultats expérimentaux si environ un tiers des atomes peuplent les halos de collision. Nous allons voir dans la prochaine partie que la normalisation des distributions expérimentales rend complètement négligeable cette perte d'atomes due à la diffusion dans les halos.

4.5 Discussion

Afin de pouvoir comparer les distributions obtenues expérimentalement à celles prédites numériquement, il est nécéssaire de les normaliser. Or, nous avons vu dans la partie précédente que la fraction d'atomes diffusée peut aller jusqu'à 30% du nombre d'atomes total dans le condensat. Cependant, la concordance entre les distributions simulées (qui n'incluent pas les interactions) et les distributions mesurées expérimentalement (pour lesquelles des collisions se sont produites) est très bonne : on observe des fidélités systématiquement supérieure à $\mathcal{F} = 0.8$. Cela peut sembler surprenant, car les atomes diffusés sont retirés des pics de diffraction lors des collisions. Cependant, dans toute collision entre deux ordres de diffraction, un nombre égal d'atomes est retiré des pics concernés. Deux exemples de distributions en impulsions sont données sur la figure 4.18. Pour chacune des ces distributions, nous comparons les distributions normalisées obtenue d'une part

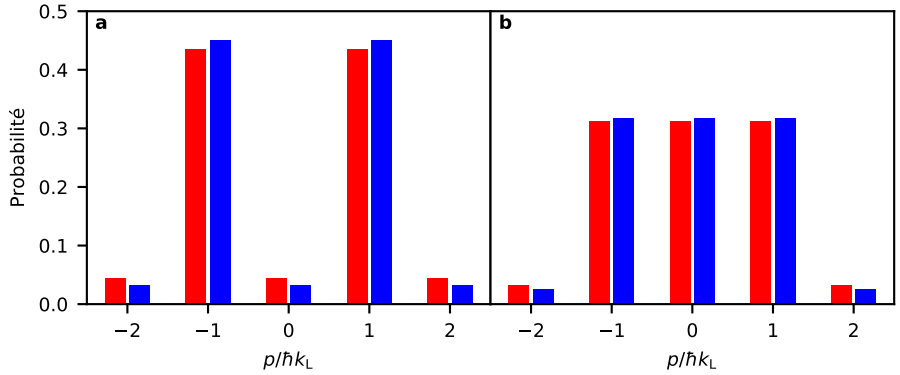


Figure 4.18 – Impact des collisions sur les distributions renormalisées. En rouge, les distributions normalisées en supposant l'absence de perte d'atomes dues aux collisions et en bleu avec pertes. La fraction d'atomes diffusées (et donc retirée des distributions) est de 30%. **a** : Distribution correspondant à une impulsion relative de $2\hbar k_L$ et d'impulsion moyenne nulle. **b** : Exemple de distribution de visibilité nulle. Les pertes d'atomes par diffusion augmentent les populations normalisées dans les ordres de diffractions les plus peuplés, ceux contribuant le plus aux collisions (voir texte).

en supposant l'absence de collisions durant le temps de vol et d'autre part avec 30% d'atomes dans les halos de collision (donc retiré de la distribution).

Pour comprendre comment nous avons obtenu ces figures, considérons une distribution d'impulsion en probabilité $\{p_i\}$ où chaque ordre de diffraction contient initialement un nombre d'atomes $N_i = p_i N_{\text{tot}}$. Dans notre modèle, le nombre d'atomes dans les halos de collision entre deux pics i et j est $N_{\text{coll}}(i,j) = \mathcal{N} p_i p_j$. Or, il y a des collisions entre toutes les paires d'ordres de diffraction, le nombre d'atomes dans l'ordre i sera alors *après* les évènements de collisions donné par

$$N_i' = N_i - \mathcal{N} p_i \sum_{j \neq i} p_j, \tag{4.61}$$

$$= N_i - \mathcal{N} p_i (1 - p_i), \tag{4.62}$$

$$= N_{\text{tot}} \left(p_i - \frac{\mathcal{N}}{N_{\text{tot}}} p_i (1 - p_i) \right). \tag{4.63}$$

On peut donc déduire le nombre d'atomes dans chaque ordre après que les collisions aient eu lieu à partir d'une distribution $\{p_i\}$ et une fraction d'atomes diffusés $\mathcal{N}/N_{\text{tot}}$. Dans la suite nous prendrons une fraction de 30%. Cela donne donc une nouvelle distribution *non-normalisée* $\{\pi_i\}$

$$\pi_i = p_i - \frac{\mathcal{N}}{N_{\text{tot}}} p_i (1 - p_i), \tag{4.64}$$

à partir de laquelle on peut déduire la nouvelle distribution normalisée après les collisions

$$p_i' = \frac{\pi_i}{\sum_i \pi_i}. \tag{4.65}$$

L'effet de la renormalisation est contre intuitif : les ordres qui contiennent initialement le plus d'atomes se retrouvent amplifiés en terme de probabilité après renormalisation. Néanmoins, nous voyons sur la figure 4.18 que même pour une fraction d'atomes diffusée de 30%, l'écart entre les deux distributions reste faible (d'environ 5%). Cela signifie que la simulation de la fonction d'onde à un corps est un guide étonnamment robuste pour l'étude des halos de collision.

Nous avons également vérifié que cette fraction mesurée expérimentalement plus élevée que la prédiction théorique n'est pas due aux collisions qui se produisent dans le réseau pendant la dynamique d'évolution hors équilibre avant temps de vol. La figure 4.19 montre que les halos de collision observés sont déterminés uniquement par la distribution en impulsion à la fin de la dynamique dans le réseau. Sur cette figure, les halos de collision sont représentés pour un déphasage $\varphi_0 = 180°$ et une profondeur du réseau de $s = 1.92 \pm 0.07$ pour différents temps de maintien t_{hold}. Ces temps de maintien sont exprimés comme une fraction de la période T de l'oscillation des atomes dans le réseau (ici $T \simeq 140\mu$s). Dans les deux premières images, on ne voit pas de halo de collision entre les ordres $\pm 1 \times \hbar k_{\text{L}}$, et ce dernier n'apparaît que pour $t_{\text{hold}} = T/4$, lorsque ces ordres sont significativement peuplés. Au fur et à mesure de la dynamique, quand la population dans les ordres $\pm 1 \times \hbar k_{\text{L}}$ diminue à nouveau, le halo disparait. Or, si des collisions se produisaient à l'intérieur du réseau, le halo de collision resterait visible pendant tous les temps de maintien après sa première apparition. Cela démontre donc que les halos sont seulement déterminés par la distribution d'impulsion au moment de l'extinction du réseau, et ne sont pas affectés par la dynamique antérieure. On en conclut que les halos de collisions que nous observons résultent de la dynamique collisionnelle pendant le temps de vol des atomes.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les éléments théoriques pour aborder les collisions entre des nuages d'atomes ultra-froids. Nous avons vu que la collision de deux particules de basse énergie peut être modélisée comme la diffusion d'une particule par un potentiel. Nous avons également défini les grandeurs caractéristiques donnant la probabilité qu'un événement de collision se produise : l'amplitude de diffusion et la section efficace de collision. Ces quantités prennent une expression simple dans le cas d'un potentiel d'interaction à symétrie centrale : elles sont constantes et ne s'expriment plus que par une seule quantité qui caractérise à elle seule toute la physique des collisions ultra-froides, i.e. la longueur de diffusion a.

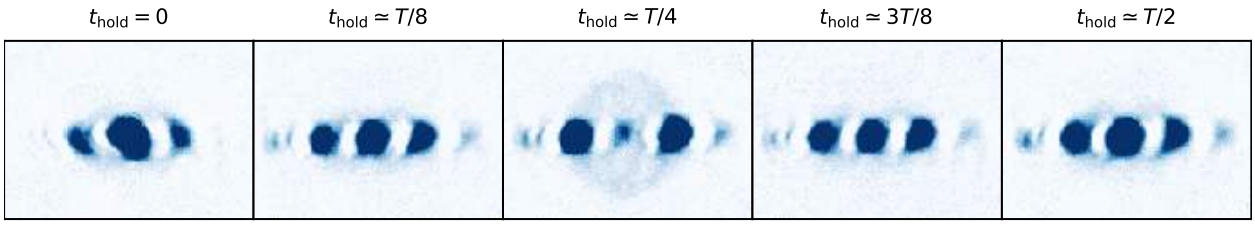


Figure 4.19 – Démonstration de l'apparition des halos de collisions durant le temps de vol. Images (non moyennées) d'ordres de diffraction pour des temps de maintien variables t_{hold} exprimés comme une fraction de la période de mouvement dipolaire T (ici $T \simeq 140\mu$s), pour un décalage de $\varphi_0 = 180°$, et une profondeur de réseau de $s = 1.92 \pm 0.07$. Le halo de collision entre les ordres $\pm 1 \times \hbar k_{\text{L}}$ n'est observé que lorsque ces ordres sont peuplés au moment de l'extinction du réseau, pour $t_{\text{hold}} \simeq T/4$.

Puis, nous avons résumé les résultats de quatre expériences importantes pour notre étude. Les trois premières nous ont informées que la section efficace de collision est constante sur une plage d'énergie qui correspond aux énergies impliquées dans notre travail. En dessous de la limite basse de cette plage en énergie, les condensats sont superfluides et la section efficace de collision devient alors nulle. Au delà de la limite haute, des effets d'interférences dûs au composantes supérieures du moment cinétique rendent la section efficace anisotrope : on sort alors du régime de collision en onde s et les ondes d dominent le processus de collision. La dernière expérience nous a appris que pour des atomes diffractés par un réseau optique, le nombre de collisions entre deux composantes d'impulsion est proportionnel aux populations d'atomes dans ces modes d'impulsion.

Ces expériences ont alors posé un cadre à partir duquel Peter Schalgeck, notre collaborateur de l'université de Liège, a pu modéliser les processus de diffusion grâce à une méthode perturbative. Il nous a notamment fourni une estimation de la fraction du nombre d'atomes diffusés de l'ordre de 20%.

Nous avons ensuite présenté un protocole expérimental et démontré son aptitude à créer des halos de collision à partir d'atomes ultra-froids diffractés par un réseau optique. Ce protocole repose sur la dynamique du condensat dans un réseau optique qui a été translaté de manière abrupte, ce qui permet d'adapter la distribution en impulsion dont les collisions émergent après l'extinction du réseau. Nous avons montré que nous pouvons peupler sélectivement des ordres de diffraction pour donner soit une grande impulsion moyenne soit une grande impulsion relative aux atomes diffusés. La recherche des paramètres expérimentaux a été guidée par une étude numérique préalable de la dynamique d'un condensat idéal (sans interaction) dans le réseau et via l'identification des deux ordres de diffraction les plus peuplés ayant les caractéristiques souhaitées. Cette étude a été faite de manière systématique à l'aide du paramètre de visibilité V.

Nous avons également démontré que les énergies impliquées dans les collisions sont quantifiées en termes de l'impulsion caractéristique du réseau et peuvent être ajustées sur une large gamme de valeurs. Le protocole utilisé ici pour démontrer le contrôle des impulsions moyenne et relative des halos de collisions de manière indépendante permet également un contrôle mixte des deux mais de manière moins efficace.

Dans le prochain chapitre nous allons montrer comment nous pouvons résoudre ce problème à l'aide de protocoles plus élaborés. Nous montrerons qu'il est possible de façonner la distribution en impulsion par une mise en forme optimale de la phase du réseau optique en fonction du temps et de la profondeur du réseau. Nous verrons que cela fournit une technique assez simple et générique à côté de méthodes d'optique atomique plus conventionnelles [127] afin de créer des états désirés.

Publication relié à ce chapitre

— G. Chatelain, N. Dupont, M. Arnal, V. Brunaud, J. Billy, B. Peaudecerf, P. Schlagheck, and D. Guéry-Odelin, "Observation and control of quantized scattering halos", *New Journal of Physics*, vol. **22**, no. 12, p. 123032, 2020.

5 Contrôle optimal de la phase du réseau optique

Sommaire

5.1 Introduction 164
5.2 Introduction théorique 165
5.2.1 Le contrôle optimal classique 166
5.2.1.1 Le problème du contrôle optimal 166
5.2.1.2 Le principe du maximum de Pontryagin 168
5.2.2 Application du contrôle optimal à un système d'atomes froids 169
5.2.2.1 Principe du maximum de Pontryagin pour un système quantique 170
5.2.3 Méthode numérique 172
5.2.3.1 Méthode du gradient 174
5.2.3.2 Application de l'algorithme GRAPE 175
5.3 Résultats expérimentaux 178
5.3.1 Contrôle des populations de la distribution en impulsion 178
5.3.1.1 Préparation de monômes d'impulsion 178
5.3.1.2 Préparation de binômes d'impulsion 183
5.3.1.3 Réversibilité d'un protocole de contrôle optimal 185
5.3.1.4 Influence du temps de contrôle 186
5.3.1.5 Limite en fréquence des champs de contrôle 188
5.3.1.6 Préparation d'états d'impulsion de population arbitraire 189
5.3.2 Contrôle des phases relatives de la distribution en impulsion 191
5.3.2.1 Contrôle de la phase relative entre deux ordres de diffraction . . 191
5.3.2.2 Contrôle de la phase relative entre plusieurs ordres de diffraction 196
5.3.3 Préparation d'états de la structure de bande du réseau 198
5.3.3.1 Préparation d'états propres du réseau 198
5.3.3.2 Préparation de superpositions contrôlées d'états propres du réseau201
5.4 Conclusion 203

Study hard what interests you the most in the most undisciplined, irreverent and original manner possible.

Richard Feynman (1918 – 1988) - Physicien

5.1 Introduction

"Etant donné un point matériel soumis uniquement à la gravité, quelle est la courbe reliant deux points A et B d'un plan vertical qui présente le temps de parcours minimal ?". Tel est le défi proposé par Johanne Bernoulli aux mathématiciens de son époque en 1696. Ce célèbre problème est connu sous le nom de la courbe du brachistochrone et marque pour certains la naissance de la théorie du contrôle optimal [128]. Dès lors, ce domaine des mathématiques s'est développé avec une percée considérable dans les années 1950 dans l'ancienne Union Soviétique avec les travaux de Lev Pontryagin [129] et aux Etats-Unis avec ceux de Richard Bellman [130]. La théorie du contrôle optimal est une théorie mathématique extrêmement puissante qui permet d'optimiser les solutions d'un problème donné et qui a trouvé un large éventail d'applications. On peut par exemple citer la mise en orbite de satellites [131, 132], les mouvements précisément calibrés de robots [133] mais également l'optimisation des flux de données dans certains protocoles informatiques [134, 135]. Depuis quelques années, cette théorie a été adaptée pour contrôler des systèmes quantiques [136, 137]. Il a par exemple été proposé de contrôler les qubits d'ordinateurs quantiques [138], d'augmenter la qualité d'images prises par imagerie par résonance magnétique [139, 140, 141] ou encore de manipuler des réactions chimiques à l'aide de faisceaux lasers [142, 143, 144, 145]. Le contrôle optimal nécessite de pouvoir manipuler précisément certains paramètres du système expérimental et c'est en ça que les atomes froids constituent une plateforme idéale pour l'utilisation de cette théorie. Du point de vue des atomes froids et des simulations quantiques, le contrôle optimal est intéressant car il permet d'atteindre un contrôle encore meilleur sur les états quantiques. Dans le chapitre précédent, nous avons utilisé un saut abrupt de la phase du réseau optique afin que la distribution en impulsion du condensat de Bose-Eintein présente les bonnes caractéristiques pour pouvoir observer des halos de diffusion après temps de vol. Cette étude soulève assez naturellement la question suivante : est-il possible d'optimiser l'évolution de la phase du réseau optique au cours du temps afin de produire une distribution en impulsion désirée ? La théorie du contrôle optimal est tout à fait adaptée pour répondre à cette question et cela fait l'objet de ce chapitre.

Dans un première partie, nous allons brièvement présenter la théorie du contrôle optimal, en particulier le principe du maximum de Pontryagin. Nous allons ensuite voir comment on peut

Figure 5.1 – Exemple d'image obtenue par une "imprimante à condensats de Bose-Einstein". Chaque colonne de points est une image d'absorption de la distribution d'impulsion du condensat après contrôle optimal.

adapter cette théorie à notre système d'atomes froids et nous présenterons l'algorithme GRAPE que Dominique Sugny, chercheur à l'université de Dijon avec qui nous collaborons, a utilisé pour trouver des protocoles optimaux de manipulation de condensats de Bose-Einstein.

Dans une deuxième partie, nous présenterons les résultats expérimentaux que nous avons obtenus. Nous présenterons notre aptitude à contrôler non seulement les populations des différents ordres de diffraction de la distribution en impulsion mais également leurs phases relatives. Un exemple d'application amusant du contrôle des distributions en impulsion est présenté sur la figure 5.1 : le contrôle optimal nous permet d'écrire des lettres et des symboles avec des ondes de matières cohérentes. Nous détaillerons le procédé pour produire ce genre d'images dans la suite de ce chapitre. Outre son caractère divertissant, cette figure démontre le degré de contrôle offert par le contrôle optimal. Nous verrons en particulier que cette technique ouvre la possibilité de contrôler l'état quantique du condensat de Bose-Einstein dans le réseau optique, et nous le démontrerons en préparant des états propres ainsi que des superpositions d'états propres du réseau optique.

5.2 Introduction théorique

Dans cette partie nous présentons les outils mathématiques et numériques nous permettant de déterminer les champs de contrôle optimaux pour façonner à volonté la distribution en impul-

sion d'un condensat de Bose-Einstein.

5.2.1 Le contrôle optimal classique

La théorie du contrôle optimal est une théorie mathématique utilisée pour trouver les contrôles optimaux d'un système afin qu'il effectue les trajectoires dites *optimales*, définies comme minimisant une fonctionnelle donnée. Cette fonctionnelle peut par exemple être l'énergie ou le temps nécessaire pour amener le système dans l'état final désiré. Elle peut présenter un certain nombre de contraintes à respecter : en pratique, les contrôles peuvent être restreints à un intervalle de valeurs possibles.

5.2.1.1 Le problème du contrôle optimal

Le contrôle optimal ne s'applique qu'aux systèmes dits *contrôlés* et de dimension finie, c'est-à-dire dont l'évolution est régie par une équation différentielle de la forme [146]

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \text{avec la condition initiale} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{5.1}$$

reliant l'état du système $\mathbf{x}(t)$ à un temps t aux contrôles disponibles sur ce système $\mathbf{u}(t)$. Pour un problème traitant d'un système classique, l'état du système est modélisé par un vecteur de dimension n

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

dont les composantes $x_i(t) \in \mathbb{R}$ sont des quantités réelles et contiennent toute l'information disponible sur l'état du système au cours du temps. Les contrôles sur le système sont représentés par un vecteur dont les composantes sont également réelles et de dimension m, avec en général $m \neq n$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_{m-1}(t) \\ u_m(t) \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Un système est dit *contrôlable* si pour un état initial du système $\mathbf{x}_0$ au temps t_0, il existe des contrôles $\mathbf{u}(t)$ tels que le système puisse atteindre un état cible $\mathbf{x}_{\text{cible}} = \mathbf{x}(t_f)$ au bout d'un temps

t_f. Pour formaliser les conditions *optimales* du contrôle qui permet d'atteindre l'état cible, il est nécessaire de définir une fonction de coût J à minimiser. Il est également possible de vouloir maximiser une quantité, et on parle dans ce cas de fonction de *fidélité* $\mathcal{F}$. On peut alors définir le problème de contrôle optimal de la manière suivante

Parmi tous les champs de contrôle $\mathbf{u}(t)$ qui réalisent le passage de l'état du système $\mathbf{x}(t_0) \to \mathbf{x}(t_f) \simeq \mathbf{x}_{\text{cible}}$, laquelle minimise la fonction de coût J ?

Il y a trois types de problèmes associés à cette question que l'on nomme les problèmes de

— Lagrange : Dans ce type de problème, on considère que le système est entièrement contrôlable. L'état atteint par minimisation de la fonction de coût est alors exactement l'état cible. La fonction de coût J est donnée par une intégrale sur le temps du transfert vers l'état cible et dépend du chemin suivi

$$J = \int_{t_i}^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt. \tag{5.4}$$

— Mayer : À l'inverse, dans ce type de problème on considère que le système n'est pas entièrement contrôlable et on cherche alors à se rapprocher le plus possible de l'état cible. La fonction de coût J est alors indépendante du chemin suivi et ne dépend que de l'état final du protocole t_f

$$J = \phi(\mathbf{x}(t_f)). \tag{5.5}$$

— Mayer-Lagrange : Il s'agit du cas de figure le plus courant où le problème est une combinaison des deux types de problèmes précédents

$$J = \phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_i}^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt. \tag{5.6}$$

Les fonctions $f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ et $\phi(\mathbf{x}(t_f))$ déterminent la quantité physique J qui est minimisée (l'énergie ou le temps du protocole que nous avions énoncé plus tôt par exemple). Il n'existe pas de méthode universelle pour trouver la "bonne" fonction J et il est de la responsabilité de l'utilisateur de la théorie du contrôle optimal de la définir en fonction du système étudié. Dans notre cas, on cherchera à façonner le plus précisément possible la distribution en impulsion du condensat en modifiant la phase du réseau optique au cours du temps afin d'arriver à une distribution désirée. La phase du réseau est contrôlée à l'aide de synthétiseurs de fréquences qui possèdent une bande passante finie qui impose une certaine contrainte sur notre contrôle du système. On a alors affaire à un problème de type Mayer : la fidélité ne fera intervenir que l'état final du système $\mathbf{x}(t_f)$ duquel on essayera de s'approcher le plus possible. La durée du protocole t_f est un paramètre qu'il est nécessaire de fixer avant la procédure d'optimisation. Dans la suite de ce chapitre, on supposera

que le champ de contrôle est dans la capacité d'atteindre l'état cible (ce n'est pas toujours le cas).

Dans la prochaine partie, nous allons énoncer le principe du maximum de Pontryagin sur lequel est basé le contrôle optimal.

5.2.1.2 Le principe du maximum de Pontryagin

La théorie du contrôle optimal est fondé sur le principe du maximum de Pontryagin qui fut énoncé pour la première fois en 1956 par Lev Pontryagin. Il permet de formaliser un problème de contrôle sous forme hamiltonienne incluant des conditions aux limites ainsi qu'une condition d'extrémalité. Pour parvenir à cette formulation, on cherche à minimiser la fonction de coût par la méthode des multiplicateurs de Lagrange tout en satisfaisant les équation de la dynamique. Dans le cas d'un problème de type Mayer, on arrive alors à une fonction de coût dite *étendue* de la forme suivante

$$\mathcal{F} = \phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) dt, \tag{5.7}$$

où le vecteur $\mathbf{p}$ est un multiplicateur de Lagrange de même dimension que le vecteur $\mathbf{x}$. On nomme ce vecteur le *vecteur adjoint*. Cette expression de la fonction de coût motive alors à définir un hamiltonien, dit *hamiltonien de Pontryagin* H_p, de la manière suivante [146]

$$H_p = \mathbf{p} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \tag{5.8}$$

La minimisation de la fonction de coût J impose une condition finale pour le vecteur adjoint donnée par

$$\mathbf{p}(t_f) = \frac{d\phi(\mathbf{x}(t_f)}{d\mathbf{x}(t_f)}. \tag{5.9}$$

L'hamiltonien H_p n'est pas l'hamiltonien usuel de la mécanique classique mais une construction mathématique qui permet de résoudre le problème d'optimisation considéré. Le principe du maximum de Pontryagin stipule que si le contrôle $\mathbf{u}(t)$ est optimal, alors la trajectoire extrémale $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ correspondante satisfait les équations d'Hamilton

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{\partial H_p}{\partial \mathbf{p}}, \tag{5.10}$$

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -\frac{\partial H_p}{\partial \mathbf{x}}, \tag{5.11}$$

et que les contrôles optimaux $\mathbf{u}_{\text{opt}}(t)$ maximisent l'hamiltonien à chaque instant. Plus formellement, on a

$$H_p(\mathbf{x}_{\text{opt}}, \mathbf{p}_{\text{opt}}, \mathbf{u}) \leq H_p(\mathbf{x}_{\text{opt}}, \mathbf{p}_{\text{opt}}, \mathbf{u}_{\text{opt}}) \, \forall t, \tag{5.12}$$

et, afin de trouver les contrôles optimaux $\mathbf{u}_{\text{opt}}$ en l'absence de contraintes sur les champs de contrôle, on peut résoudre

$$\left.\frac{\partial H_p}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_{\text{opt}}} = 0. \tag{5.13}$$

Récapitulatif

Pour résumer, une condition nécessaire pour déterminer les contrôles optimaux $\mathbf{u}_{\text{opt}}(t)$ et la trajectoire optimale correspondante $\mathbf{x}_{\text{opt}}(t)$ est donné par le système d'équations suivant

$$\frac{\partial H_p}{\partial \mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial H_p}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}, \tag{5.15}$$

$$\left.\frac{\partial H_p}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_{\text{opt}}} = 0, \tag{5.16}$$

avec les conditions aux limites

$$\mathbf{x}(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{p}(t_f) = \frac{d\phi(\mathbf{x}(t_f)}{d\mathbf{x}(\mathbf{t_f})}. \tag{5.17}$$

Les solutions de ce système d'équations sont les contrôles optimaux et la trajectoire optimale du système qui minimisent la fonction de coût.

Le formalisme du principe du maximum de Pontryagin que nous venons de présenter traite de systèmes classiques : les vecteurs d'états sont des vecteurs de composantes réelles. Or, pour un système quantique, les vecteurs d'états ont des composantes complexes. Dans la prochaine partie, nous allons voir comment il est possible d'adapter ce formalisme à des vecteurs complexes.

5.2.2 Application du contrôle optimal à un système d'atomes froids

Dans cette partie nous présentons l'adaptation du principe du maximum de Pontryagin pour un système quantique et plus précisément un condensat de Bose-Einstein dans un réseau optique. Pour rappel, nous avons vu au chapitre 3 que l'état quantique d'un nuage d'atomes dans un réseau optique peut être modélisé par un vecteur de coefficients complexes $|C\rangle = (\ldots, c_{-1}^{(k)}, c_0^{(k)}, c_1^{(k)}, \ldots)$ déterminé par résolution de l'équation centrale

$$M(\varphi)|C\rangle = \frac{E}{E_{\mathrm{L}}}|C\rangle, \tag{5.18}$$

avec $M(\varphi)$, la forme matricielle de l'hamiltonien du réseau optique. Dans notre cas, Le champ de contrôle sur le système est la phase du réseau optique $\varphi(t)$ [1]. L'état initial du nuage atomique est généralement l'état fondamental du réseau, c'est-à-dire l'état $|n = 0, k = 0\rangle$, que nous noterons par la suite $|C_0\rangle$. L'évolution temporelle de ce vecteur est donnée par une forme matricielle de l'équation de Schrödinger dépendante du temps [2]

$$i\frac{\partial}{\partial t}|C\rangle = M(\varphi)|C\rangle. \tag{5.19}$$

Nous allons voir comment, à partir de ce vecteur d'état et de l'équation d'évolution, nous pouvons appliquer le principe du maximum de Pontryagin.

5.2.2.1 Principe du maximum de Pontryagin pour un système quantique

Pour adapter le principe du maximum de Pontryagin à ce vecteur complexe, définissons un vecteur $\mathbf{X}$ réel, tel que

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbb{R}\mathrm{e}\,(C) \\ \mathbb{I}\mathrm{m}\,(C) \end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

où $\mathbb{R}\mathrm{e}\,(C)$ désigne la partie réelle de $|C\rangle$ et $\mathbb{I}\mathrm{m}\,(C)$ sa partie imaginaire. Avec cette nouvelle notation, l'équation d'évolution du vecteur d'état $|C\rangle$ (5.19) peut être ré-écrite comme

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}\mathrm{m}\,(M) & \mathbb{R}\mathrm{e}\,(M) \\ -\mathbb{R}\mathrm{e}\,(M) & \mathbb{I}\mathrm{m}\,(M) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \varphi, t), \tag{5.21}$$

où, par identification, le membre de droite de l'équation (5.21) est la fonction $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ définie dans la partie précédente. L'équation (5.21) est donc l'équivalent de la première équation (5.14) du système d'équations nécessaires pour appliquer le principe du maximum de Pontryagin. Afin de déterminer les deux autres équations de ce système, nous définissons un vecteur adjoint $\mathbf{P}$ afin d'obtenir l'hamiltonien de Pontryagin

$$H_p = \mathbf{P}^T \times \mathbf{f}(\mathbf{X}, \varphi, t), \tag{5.22}$$

où $\mathbf{P}^T$ est le vecteur transposé de $\mathbf{P}$ et $\times$ désigne le produit matriciel. L'équation d'évolution du vecteur adjoint est alors

1. Il est également possible d'utiliser l'amplitude du réseau optique comme champ de contrôle mais nous nous sommes restreint à l'utilisation de la phase pour les travaux que nous présentons dans ce chapitre.

2. Dans laquelle nous avons pris $\hbar = 1$.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{\partial H_p}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{P}^T \begin{pmatrix} -\mathbb{I}\mathrm{m}\,(M) & -\mathbb{R}\mathrm{e}\,(M) \\ \mathbb{R}\mathrm{e}\,(M) & -\mathbb{I}\mathrm{m}\,(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}\mathrm{m}\,(M) & \mathbb{R}\mathrm{e}\,(M) \\ -\mathbb{R}\mathrm{e}\,(M) & \mathbb{I}\mathrm{m}\,(M) \end{pmatrix} \mathbf{P}, \tag{5.23}$$

qui correspond à la deuxième équation (5.15) du système d'équations. De la même manière qu'à $\mathbf{X}$ est associé un état $|C\rangle$, on peut par analogie associer à $\mathbf{P}$ un état $|D\rangle$, que l'on nommera *l'état adjoint*, tel que

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{R}\mathrm{e}\,(D) \\ \mathbb{I}\mathrm{m}\,(D) \end{pmatrix}, \tag{5.24}$$

où $\mathbb{R}\mathrm{e}\,(D)$ et $\mathbb{I}\mathrm{m}\,(D)$ sont les parties réelle et imaginaire de $|D\rangle$ respectivement. L'équation d'évolution du vecteur adjoint $|D\rangle$, à partir de l'équation (5.23), est donc la même que pour le vecteur d'état du système $|C\rangle$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|D\rangle = M(\varphi)|D\rangle. \tag{5.25}$$

Nous pouvons alors ré-exprimer l'hamiltonien de Pontryagin en termes des états quantiques $|C\rangle$ et $|D\rangle$

$$H_p = (\mathbb{R}\mathrm{e}\,(D), \mathbb{I}\mathrm{m}\,(D)) \begin{pmatrix} \mathbb{I}\mathrm{m}\,(M) & \mathbb{R}\mathrm{e}\,(M) \\ -\mathbb{R}\mathrm{e}\,(M) & \mathbb{I}\mathrm{m}\,(M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{R}\mathrm{e}\,(C) \\ \mathbb{I}\mathrm{m}\,(C) \end{pmatrix} = \mathbb{I}\mathrm{m}\,(\langle D|M|C\rangle). \tag{5.26}$$

Maintenant que nous avons cette expression de l'hamiltonien de Pontryagin, nous pouvons alors chercher les contrôles optimaux $\mathbf{u}_{\mathrm{opt}}$ en résolvant

$$\left.\frac{\partial H_p}{\partial \varphi}\right|_{\varphi_{\mathrm{opt}}} = \mathbb{I}\mathrm{m}\left(\langle D| \left.\frac{\partial M(\varphi)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi_{\mathrm{opt}}} |C\rangle\right) = 0. \tag{5.27}$$

Il s'agit de l'équivalent de la troisième équation (5.16) du système d'équations. Nous avons ainsi ré-exprimé le système d'équations associés au principe du maximum de Pontryagin en termes d'états quantique $|C\rangle$ et $|D\rangle$. Il ne manque que la condition finale sur $\mathbf{P}$ exprimée en fonction de l'état adjoint $|D\rangle$. Nous la noterons $|D_{t_f}\rangle$ et elle s'écrit

$$|D_{t_f}\rangle = \frac{\partial J}{\partial \langle C(t_f)|}. \tag{5.28}$$

Récapitulatif

Pour résumer, afin d'adapter le principe du maximum de Pontryagin à un système quantique, nous avons défini deux nouveaux vecteurs d'état **X** et **P**, contenant les parties réelle et imaginaire des états quantiques du système $|C\rangle$ et adjoint $|D\rangle$. Cela nous a alors permis de ré-exprimer le système d'équations du principe du maximum de Pontryagin en fonction de ces états. Le système d'équations à résoudre s'écrit

$$i\frac{\partial}{\partial t}|C\rangle = M(\varphi)|C\rangle, \tag{5.29}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|D\rangle = M(\varphi)|D\rangle, \tag{5.30}$$

$$\mathbb{I}\mathrm{m}\left(\langle D|\left.\frac{\partial M(\varphi)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi_{\mathrm{opt}}}|C\rangle\right) = 0, \tag{5.31}$$

avec les conditions aux limites

$$|C_0\rangle = |n=0, k=0\rangle \quad \text{et} \quad |D_{t_f}\rangle = \frac{\partial J}{\partial \langle C(t_f)|}. \tag{5.32}$$

Des exemples d'application de cette théorie présentés avec une grande pédagogie et dans le détail peuvent être trouvé dans [146].

Trouver les solutions de ce problème peut être compliqué analytiquement et on peut alors se tourner vers des solutions numériques. C'est ce que nous allons voir dans la prochaine partie où nous appliquons la méthode du gradient pour trouver le champs de contrôle optimal et résoudre ce problème.

5.2.3 Méthode numérique

La théorie du contrôle optimal existe principalement sous deux types d'approches : l'une que l'on dénomme comme étant géométrique [139, 147, 140, 148] et l'autre comme étant numérique. La première approche du problème désigne une approche analytique utilisable pour des systèmes de petite taille. Ce type d'approche a l'avantage d'offrir une meilleure compréhension du système et généralement une interprétation simple de l'effet du champ de contrôle sur le système.

L'approche numérique s'impose quant à elle lorsque les systèmes considérés deviennent de grande taille ou que le nombre de degrés de liberté devient trop important. Cette approche a l'avantage d'être applicable à des systèmes plus réalistes et plus communément répandus mais, en revanche,

il devient souvent plus compliqué de donner une interprétation physique à la solution obtenue. Dans la suite, nous allons utiliser cette deuxième approche pour façonner la distribution en impulsion du nuage d'atomes dans le réseau optique. En effet, l'état du nuage est donné par un vecteur $|C\rangle$ contenant les L coefficients de Fourier $c_l(k)$ de la fonction d'onde, L pouvant être arbitrairement grand. Afin de manipuler ce genre d'objet et de trouver un champ de contrôle optimal, une approche numérique est plus appropriée qu'une approche géométrique.

Pour aborder un problème d'optimisation numériquement, on fait la distinction entre les algorithmes d'ordre 0, utilisés dans les cas de figure où l'on ne connait aucune stratégie de contrôle au préalable, et les algorithmes d'ordre 1, utilisés dans les cas de figure où un champ de contrôle doit être fourni en entrée de l'algorithme. Comme algorithme d'ordre 0, on peut par exemple citer des méthodes d'algorithmes génétiques [149], par analogie avec la génétique et la théorie de Darwin, qui vont converger de génération en génération vers des champs de contrôle capables de résoudre le problème. On peut également citer l'apprentissage automatique basé sur des réseaux de neurones [150]. Dans notre cas, nous cherchons à optimiser la distribution en impulsion d'un condensat de Bose-Einstein et les travaux du chapitre précédent sur les halos de diffusion nous fournissent une solution d'ordre 0 de stratégie de contrôle. Nous allons donc dans la suite nous concentrer sur des algorithmes d'ordre 1.

Dans le cas du contrôle quantique, il existe principalement deux types de méthodes numériques d'ordre 1 [151]. La différence entre ces méthodes est la manière de modifier les champs de contrôle au cours de la convergence vers les contrôles optimaux : numériquement, le temps est discrétisé en N pas de durée Δt et les champs de contrôle $\mathbf{u}(t)$ sont, par conséquent, également discrétisés en N morceaux constants. Ces N morceaux deviennent alors N paramètres $u(t_n)$ des champs de contrôle qui seront optimisés. Il y a deux types de méthodes

— Les méthodes de type Krotov qui optimisent les $u(t_n)$ séquentiellement [152],
— Les méthodes de type gradient qui optimisent tous les $u(t_n)$ simultanément [141].

Nous avons collaboré avec Dominique Sugny, chercheur à l'université de Bourgogne, qui est spécialiste des algorithmes de type gradient. Dans la suite, nous allons présenter le principe général de la méthode du gradient, puis son adaptation à un système quantique. Nous présenterons finalement l'algorithme que Dominique Sugny a conçu pour façonner la distribution en impulsion des condensats.

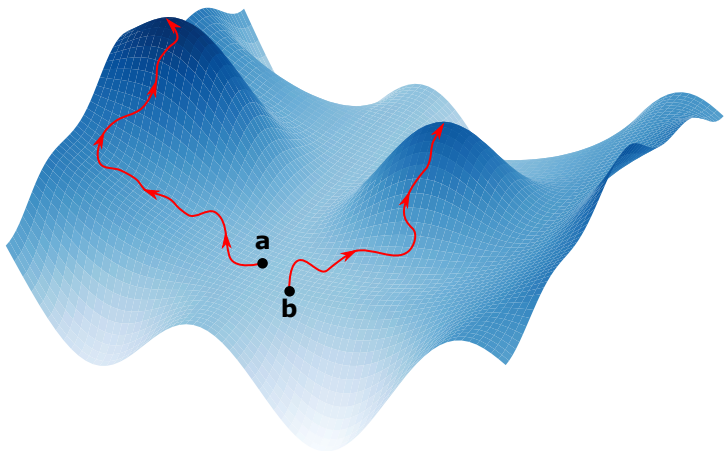


Figure 5.2 – Illustration de la méthode du gradient. Deux initialisations, même proches, ne convergeront pas forcément sur le même maximum. Dans cet exemple, l'initialisation **a** converge sur le maximum global, alors que l'initialisation **b** converge sur un maximum local.

5.2.3.1 Méthode du gradient

La méthode du gradient est utilisée pour trouver le maximum (ou minimum) d'une fonction dépendant d'un ou de plusieurs paramètres. Pour le cas qui nous intéresse, nous cherchons les champs de contrôle $\mathbf{u}(t)$ qui maximisent la ressemblance entre l'état préparé par contrôle optimal et un état cible. On parlera alors dans la suite de ce chapitre de fidélité $\mathcal{F}$ à maximiser. L'algorithme du gradient est le suivant

1. Les $u(t_n) \equiv u_n$ sont initialisés.
2. À chaque itération i, on applique

$$u_n^{(i+1)} = u_n^{(i)} + \epsilon \left.\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}\right|_{u=u_n}. \tag{5.33}$$

En calculant le gradient de la fidélité, on obtient une information sur la pente locale de cette dernière. Pour trouver le maximum de la fidélité, on comprend que si la pente du gradient est positive (respectivement négative), alors les paramètres u_n doivent augmenter (respectivement diminuer). On vient alors ajouter aux contrôles u_n le gradient de la fidélité $\mathcal{F}$ à chaque étape. On multiplie ensuite ce gradient par un paramètre $\epsilon < 0$ qui module la taille du pas entre deux itérations. C'est un paramètre qui peut être ajusté pour optimiser la convergence : si ϵ est trop petit, la fidélité augmente à chaque itération mais en un temps possiblement long et, à l'inverse, s'il est trop grand les paramètres u_n peuvent osciller autour d'un maximum ou même diverger. Afin d'améliorer la convergence de l'algorithme, il est possible d'adapter ce paramètre au fur et à mesure de la recherche du maximum. Cependant le maximum atteint n'est pas forcément le maxi-

mum global : il peut s'agir d'un maximum local [3]. Le maximum atteint par l'algorithme dépend alors de l'initialisation des paramètres comme présenté sur la figure 5.2. Sur cette figure, on a représenté une fidélité dépendante de deux contrôles. Deux conditions initiales, même proches, ne convergent pas forcément vers le même maximum : l'une d'entre, la condition initiale **a**, va converger vers le maximum global et l'autre, la condition initiale **b**, va converger vers un maximum local. Afin de palier à ce problème, il est possible de relancer l'optimisation avec un petit déplacement aléatoire sur les contrôles initiaux $u_n^{(0)}$. En répétant l'opération, l'algorithme peut alors être initialisé avec une condition initiale qui converge sur un meilleur maximum. L'optimisation est arrêtée lorsque

— la fidélité $\mathcal{F}$ atteint un maximum : le gradient devient inférieur à une faible valeur fixée par l'utilisateur et les contrôles sont alors optimaux.
— L'algorithme n'a pas convergé : le nombre d'itérations a dépassé le seuil fixé par l'utilisateur et l'optimisation est alors recommencée à partir d'une nouvelle condition initiale.

Jusqu'à présent nous avons présenté une méthode de l'algorithme du gradient dans le cas de vecteurs d'états $\mathbf{x}(t)$ classiques, c'est-à-dire réels. Nous allons voir dans la prochaine partie comment nous pouvons adapter la méthode du gradient à un vecteur d'états quantiques, c'est-à-dire présentant des composantes complexes.

5.2.3.2 Application de l'algorithme GRAPE

Dans cette partie, nous présentons l'algorithme GRAPE (Gradient Ascent Pulse Engineering) [153, 154] utilisé par Dominique Sugny pour optimiser la phase du réseau optique.

Le champ de contrôle sur le système est la phase du réseau optique $\varphi(t)$. L'optimisation consiste dans un premier temps à discrétiser temporellement la phase du réseau en N morceaux constants $\varphi(t) \to \varphi_n$ chacun correspondant au temps disctrétisé t_n. Par conséquent, sur chaque pas de temps, l'hamiltonien du système est statique. L'opérateur d'évolution sur un pas de temps est donc donné par

$$\hat{U}_n = e^{-i\Delta t M(\varphi_n)}. \tag{5.34}$$

Pour un ensemble de φ_n, on peut donc propager de proche en proche l'état initial du système $|C_0\rangle$ jusqu'à l'état final du système $|C_N\rangle = \hat{U}_N \dots \hat{U}_1 |C_0\rangle$ en passant par tous les états intermédiaires

3. En théorie, le principe du maximum de Pontryagin donne les conditions définissant un maximum absolu mais la solution correspondante est difficile à obtenir. On cherche ici une solution qui s'en approche à un seuil de fidélité fixé par l'utilisateur.

$|C_n\rangle$ correspondant à l'état du système aux différents instants t_n. On souhaite alors optimiser la phase du réseau optique par la méthode du gradient qui actualise les contrôles φ_n en calculant le gradient de la fidélité par l'équation (5.33). De manière générale, on choisit pour la fidélité une grandeur qui atteint 1 quand l'objectif en termes de population ou d'états quantiques est atteint. Dans notre cas, la fidélité ne dépend que de l'état final du système : notre problème est de type Mayer et on cherche à maximiser la ressemblance entre l'état final de la propagation avec un état cible $|C_{\text{cible}}\rangle$ que nous souhaitons atteindre. Pour cela, nous définissons la fidélité comme

$$\mathcal{F} = 1 - \frac{1}{2}\sum_l \left(|c_l|^2 - \pi_l^{\text{cible}}\right)^2. \tag{5.35}$$

où les c_l sont les composantes du vecteur final $|C_N\rangle$ et les π_l^{cible} sont les populations de l'état cible $|C_{\text{cible}}\rangle$: si les deux états ont des populations exactement similaires ($|c_l|^2 = \pi_l^{\text{cible}}$), la fidélité atteint sa valeur maximale $\mathcal{F} = 1$ et, à l'inverse, elle est nulle si les populations sont complètement différentes. Comme la fidélité ne dépend que de l'état final, son gradient par rapport au champ de contrôle vérifie donc

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_n} = \frac{\partial \langle C_N|}{\partial \varphi_n}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \langle C_N|} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial |C_N\rangle}\frac{\partial |C_N\rangle}{\partial \varphi_n}, \tag{5.36}$$

$$= 2\mathbb{R}\text{e}\left(\frac{\partial \langle C_N|}{\partial \varphi_n}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \langle C_N|}\right). \tag{5.37}$$

On remarque alors que le deuxième terme de cette dernière équation correspond à la condition finale de l'état adjoint (5.28) que nous avions énoncée précédemment

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \langle C_N|} = |D_N\rangle. \tag{5.38}$$

De plus, le premier terme de l'équation (5.37) peut se décomposer comme

$$\frac{\partial \langle C_N|}{\partial \varphi_n} = \langle C_0|\hat{U}_1^\dagger \dots \hat{U}_{n-1}^\dagger \frac{\partial \hat{U}_n^\dagger}{\partial \varphi_n}\hat{U}_{n+1}^\dagger \dots \hat{U}_N^\dagger. \tag{5.39}$$

On peut développer l'opérateur d'évolution au premier ordre $\hat{U}_n \simeq \mathbb{I} - i\Delta t M(\varphi_n)$, où $\mathbb{I}$ est la matrice identité. On obtient alors l'approximation suivante

$$\frac{\partial \langle C_N|}{\partial \varphi_n} \simeq -\langle C_0|\hat{U}_1^\dagger \dots \hat{U}_{n-1}^\dagger i\Delta t \frac{\partial M}{\partial \varphi_n}\hat{U}_{n+1}^\dagger \dots \hat{U}_N^\dagger. \tag{5.40}$$

En combinant les deux équations (5.38) et (5.40), on arrive finalement à l'expression suivante du gradient de la fidélité

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_n} \simeq -2\Delta t \mathbb{I}\text{m}\left(\langle C_{n-1}|\frac{\partial M}{\partial \varphi_n}|D_n\rangle\right) = 2\Delta t \mathbb{I}\text{m}\left(\langle D_n|\frac{\partial M}{\partial \varphi_n}|C_{n-1}\rangle\right). \tag{5.41}$$

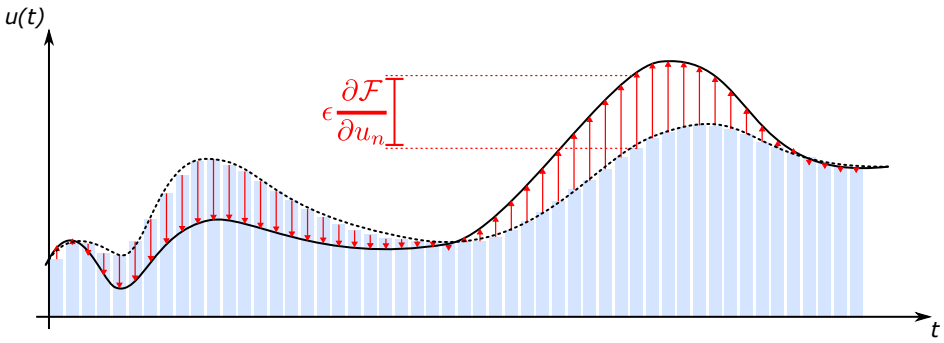


Figure 5.3 – Schéma de principe de l'algorithme GRAPE. La courbe en pointillé représente le champ de contrôle à l'itération i. La courbe en trait plein représente le champ de contrôle à l'itération $i+1$. Les flèches rouges correspondent aux corrections $\epsilon \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_n}$ apportées au champ de contrôle par l'algorithme du gradient.

On voit que le gradient de la fidélité fait intervenir l'état du système $|C_{n-1}\rangle$ à l'instant t_{n-1} et l'état adjoint $|D_n\rangle$ à l'instant t_n. On peut obtenir ces états via respectivement une propagation vers l'avant de la condition initiale $|C_0\rangle$ et une propagation vers l'arrière de la condition finale $|D_N\rangle$. Cette dernière équation (5.41) ressemble beaucoup à la dérivée de l'hamiltonien de Pontryagin (5.27) et nous fournit donc le terme d'optimisation de la phase du réseau optique pour la méthode du gradient

$$\varphi_n^{(i+1)} \to \varphi_n^{(i)} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_n}, \tag{5.42}$$

ou bien

$$\varphi_n^{(i+1)} \to \varphi_n^{(i)} + \varepsilon \frac{\partial H_p(\varphi_n)}{\partial \varphi_n}, \tag{5.43}$$

avec la définition discrète de l'hamiltonien de Pontryagin

$$H_p(\varphi_n) = \mathbb{I}\mathrm{m}\left(\langle D_n | M(\varphi_n) | C_{n+1}\rangle\right). \tag{5.44}$$

La phase du réseau optique est alors optimisée comme présenté sur la figure 5.3.

Nous avons alors tous les éléments nécessaires pour optimiser la phase du réseau optique par l'algorithme GRAPE. L'algorithme est le suivant

1. Initialisation des N morceaux discrétisés de la phase du réseau optique φ_n par une phase constante (voir l'étude du chapitre 4 sur les halos de diffusion) à laquelle on peut éventuellement ajouter une petite composante aléatoire, pour éviter de converger vers un maximum local seulement.

2. Propagation vers l'avant de l'état initial $|C_0\rangle = |n = 0, k = 0\rangle$, correspondant à l'état fondamental du réseau, jusqu'à l'état final $|C_N\rangle$.
3. Propagation vers l'arrière de l'état adjoint $|D_N\rangle$ donné par (5.28).
4. Calcul du gradient de la fidélité via l'équation (5.41).
5. Actualisation du champ de contrôle via l'équation (5.43).
6. Répétition depuis l'étape 2 jusqu'à atteindre une condition d'arrêt :
   — soit la fidélité atteint le seuil désiré.
   — soit le nombre d'itérations dépasse le nombre d'itérations acceptable fixé par l'utilisateur.

Cet algorithme fournit alors des protocoles de contrôle de la phase du réseau permettant d'atteindre une distribution en impulsion désirée comme nous allons le voir dans la prochaine partie.

5.3 Résultats expérimentaux

Dans cette partie nous présentons les résultats expérimentaux que nous avons obtenus en déterminant et utilisant des protocoles de contrôle optimal pour la manipulation des populations et des phases relatives des composantes d'impulsion d'un condensat après temps de vol. Nous verrons qu'avec ce contrôle de la fonction d'onde, nous sommes également capables de préparer le nuage d'atomes dans un état propre ou une superposition d'états propres du réseau.

5.3.1 Contrôle des populations de la distribution en impulsion

Dans un premier temps, nous démontrons notre capacité à contrôler exclusivement les populations des ordres de diffraction d'un condensat de Bose-Einstein après temps de vol. Afin de tester progressivement la versatilité du contrôle optimal, nous avons effectué des expériences où nous peuplons un nombre croissant de composantes d'impulsion.

5.3.1.1 Préparation de monômes d'impulsion

Dans une première série d'expériences, nous avons donc cherché à peupler uniquement la m-ième composante d'impulsion $|m\hbar k_{\mathrm{L}}\rangle$, état que l'on nomme un *monôme*. Les résultats de ces expériences sont présentés sur la figure 5.4. Sur cette figure nous présentons les champs de contrôle optimisés par contrôle optimal ainsi que les images expérimentales correspondantes. Nous indiquons également les fidélités expérimentales obtenues en calculant la fidélité

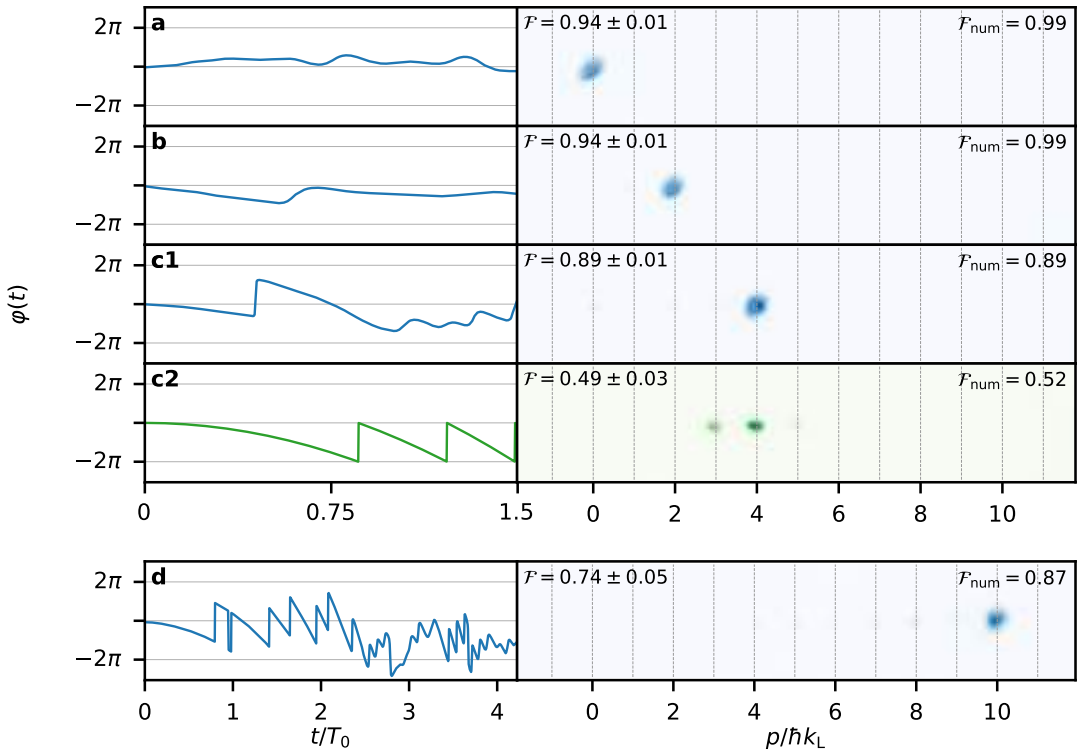


Figure 5.4 – Préparation de monômes d'impulsion. a-d : À gauche, champs de contrôle utilisés pour préparer les états d'impulsion unique de respectivement 0, 2, 4 et $10\hbar k_L$. Le temps du champ de contrôle est donné en multiple du temps caractéristique du réseau $T_0 \simeq 70$ μs aux profondeurs utilisées pour obtenir les densités optiques $s_{\mathbf{a}} = 5.1 \pm 0.2$, $s_{\mathbf{b}} = 5.2 \pm 0.2$, $s_{\mathbf{c1}} = 5.2 \pm 0.2$, $s_{\mathbf{c2}} = 5.0 \pm 0.1$ et $s_{\mathbf{d}} = 5.1 \pm 0.2$ (voir texte). Les champs **a**,**b**,**c1** et **d** ont été obtenus par l'algorithme de contrôle optimal et le champ **c2** correspond à une phase quadratique accélérant le réseau jusqu'à une vitesse $4h/md$ en une durée de $1.5T_0$. A droite, images expérimentales correspondantes obtenues après temps de vol. Les fidélités données sont obtenues par comparaison avec l'état d'impulsion unique idéal. La fidélité $\mathcal{F}$ est la fidélité expérimentale obtenue en moyennant sur dix distributions en impulsions extraites des images expérimentales. Les incertitudes indiquées correspondent à un écart type. La fidélité $\mathcal{F}_{\text{num}}$ est la fidélité obtenue pour l'état final d'une propagation numérique par le champ de contrôle $\varphi(t)$ correspondant.

$$\mathcal{F} = \left(\sum_l \sqrt{\pi_l^{\text{exp}} \pi_l^{\text{cible}}} \right)^2, \tag{5.45}$$

introduite au chapitre précédent où les π_l^{exp} correspondent aux populations normalisées des ordres de diffraction obtenues expérimentalement et les π_l^{cible} correspondent aux populations de l'état cible. Pour ces dernières, il s'agit des populations de l'état idéal : dans le cas du monôme m, il s'agit d'une population normalisée de 1 dans le m-ième état d'impulsion. Afin de mesurer les fidélités expérimentales, nous faisons la moyenne des fidélités obtenues sur dix réalisations expérimentales du protocole. Les incertitudes associées correspondent à un écart-type de cette moyenne. La faible incertitude sur la fidélité expérimentale démontre la robustesse et la répétabilité du résultat expérimental obtenu par contrôle optimal. Nous comparons les fidélités expérimentales aux fidélités numériques calculées à partir de l'état obtenu numériquement par l'algorithme de contrôle optimal.

Nous remarquons que les deux fidélités, expérimentale et numérique, sont proches, indiquant que l'état obtenu expérimentalement est effectivement proche de l'état obtenu numériquement. La durée des protocoles est exprimée en multiple du temps caractéristique du réseau correspondant à l'inverse de la fréquence de transition entre la bande fondamentale et la première bande excitée pour une profondeur donnée s

$$T_0(s) = \frac{h}{E_{k=0}^{(1)}(s) - E_{k=0}^{(0)}(s)}. \tag{5.46}$$

Pour $s \simeq 5$, on trouve $T_0 \simeq 70$ μs. Nous utilisons typiquement une durée de protocole de $1.5T_0$ à $4T_0$. Pour rappel, il est nécessaire de fixer la durée du contrôle au préalable de la procédure d'optimisation. Nous reviendrons dans la suite sur ce point et sur le choix de la durée de contrôle.

Insistons sur le fait qu'un monôme d'impulsion est une distribution en impulsion contre-intuitive pour un condensat dans un réseau : l'effet de la périodicité du réseau est en quelque sorte effacée par le protocole de contrôle optimal. Les expériences de préparation de monômes ont été effectuées dans un réseau de profondeur $s = 5$ et, à cette profondeur, la distribution en impulsion présente usuellement plusieurs ordres de diffraction. La présence d'une seule composante d'impulsion dans la distribution résulte d'un effet non trivial qui s'apparente à la réalisation d'un réseau blazé (aussi connu sous le nom de réseau en échelette) en optique ondulatoire [4].

Une deuxième remarque que nous pouvons faire sur ces résultats est que l'impulsion maximale peuplée est bien supérieure à celle que nous pouvons obtenir par une évolution libre après un

4. Il s'agit d'un type de réseau de diffraction dont le profil est en dents de scie. En ajustant l'angle des dents de scie, il est possible de maximiser la diffraction de la lumière dans un seul ordre de diffraction.

saut abrupt de la phase dans un réseau à une profondeur de $s = 5$. En effet, dans le chapitre précédent, nous avons donné l'ordre de grandeur de l'ordre d'impulsion maximal qu'il est possible de peupler par évolution libre. L'impulsion associée à cet ordre s'écrit

$$p_{\max}^2 = 2msE_{\mathrm{L}} \quad \Rightarrow \quad p_{\max} = \sqrt{s}\hbar k_{\mathrm{L}} \simeq 2.2\hbar k_{\mathrm{L}} \quad \text{pour } s = 5, \tag{5.47}$$

alors que nous sommes capables de peupler jusqu'à la dixième composante d'impulsion en utilisant un protocole de contrôle optimal. Un mouvement adéquat de la phase du réseau optique permet donc de fournir une grande quantité d'énergie cinétique aux atomes.

Comme expliqué dans l'introduction théorique de ce chapitre, il est en général difficile d'interpréter l'effet d'un protocole de contrôle optimal sur le système au cours du temps lorsque l'on a recours à une approche numérique. Cependant, sur la figure 5.4, on remarque que plus l'impulsion du monôme peuplé est grande, plus le champ de contrôle associé présente de grandes variations de phase jusqu'à effectuer des sauts de 2π. Sur les champs de contrôle présentés sur la figure 5.4 $\mathbf{c_1}$ et $\mathbf{d}$, on remarque une évolution rappelant le protocole d'accélération du réseau présenté sur la figure 3.16 au chapitre 3 de cette thèse. Pour rappel, accélérer le réseau revient à adopter un profil quadratique de la phase au cours du temps. Nous avions vu que cela a pour effet de translater l'état fondamental des atomes dans la structure de bande si le transport est effectué de manière adiabatique. Au bout d'un temps de Bloch τ_B, l'état obtenu après chargement du réseau voit son quasi-moment modifié d'une quantité $1\hbar k_{\mathrm{L}}$ dans le référentiel du laboratoire. À titre de comparaison, nous présentons sur la figure 5.4 $\mathbf{c_1}$ et $\mathbf{c_2}$ deux protocoles, le premier préparant le monôme $4\hbar k_{\mathrm{L}}$ par contrôle optimal et le deuxième étant une accélération du réseau sur $4\tau_B$ tel que $4\tau_B = 1.5T_0$. On observe que ces deux champs de contrôle se ressemblent. L'interprétation que nous pouvons alors avoir du champ de contrôle obtenu par contrôle optimal est qu'il effectue dans un premier temps une accélération du réseau afin de translater la population d'atomes autour de l'ordre d'impulsion $m\hbar k_{\mathrm{L}}$ en vue d'atteindre le m-ième monôme, puis effectue une étape de correction afin de peupler uniquement l'ordre désiré. Il est intéressant de noter que l'algorithme converge vers cette solution sans aucune autre indication qu'un décalage soudain de la phase comme solution de départ.

Ce cas de figure offre donc également l'opportunité de comparer les performances offertes par le contrôle optimal à des schémas de contrôle plus classiques et déjà utilisés dans la communauté des atomes froids, en l'occurence une accélération adiabatique du réseau. Afin de peupler un seul état d'impulsion avec une accélération du réseau, il faut nécessairement faire un compromis entre deux paramètres : d'une part la fidélité à l'état cible et d'autre part le temps de protocole. En effet, afin de préparer l'état cible avec une bonne fidélité, il faut charger les atomes dans un réseau de faible profondeur : les populations des ordres ± 1 de l'état initial sont faibles et une fraction proche de 100% de la population se trouve dans l'ordre zéro. On prépare un état proche d'un

Monôme n		2	4	8	10
Fidélité $\mathcal{F}$		0.94 ± 0.01	0.89 ± 0.01	0.76 ± 0.04	0.74 ± 0.05
Contrôle optimal	s (± 0.2)	5.2	5.2	5.1	5.1
	t_f (μs)	91.7	91.7	260	260
Accélération du réseau	s	0.75	1.1	2.1	2.3
	t_f (μs)	$1.7 \cdot 10^3$	$1.7 \cdot 10^3$	$1.2 \cdot 10^3$	$1.4 \cdot 10^3$

Table 5.1 – Tableau de comparaison des temps de protocoles de contrôle optimal et d'accélération du réseau pour préparer un monôme d'impulsion donnée $|n\hbar k_{\mathrm{L}}\rangle$.

monôme dans la composante zéro de l'impulsion. Pour translater cet état en impulsion sans peupler d'autres ordres de diffraction en fin de protocole, le profil de phase du réseau doit entrainer une évolution adiabatique de la fonction d'onde. Le temps nécessaire pour satisfaire la condition d'adiabadicité est d'autant plus long que la profondeur du réseau est faible. Pour rappel, la condition d'adiabadicité dans la limite des liaisons faibles établie au chapitre 3 est

$$\tau_B \gg \frac{2}{s^2 \nu_{\mathrm{L}}}. \tag{5.48}$$

Donc, plus la fidélité à l'état cible souhaitée est élevée, plus la profondeur du réseau doit être faible et donc plus le temps de protocole est long. Pour le cas du monôme $n = 4$ de la figure 5.4 $\mathbf{c_2}$, on peut montrer qu'afin d'avoir une fidélité supérieure à 90%, il est nécessaire d'utiliser un réseau de profondeur $s \simeq 0.7$ menant à un temps de Bloch au moins supérieur à $\tau_B \simeq 425$ μs. Pour amener les atomes dans l'état d'impulsion $|4\hbar k_{\mathrm{L}}\rangle$, il faut donc $t_f = 4 \times 425$ μs $= 1.7$ ms. Sur les images expérimentales de la figure 5.4 $\mathbf{c}_1$ et 5.4 $\mathbf{c}_2$ nous comparons les résultats des deux protocoles, de contrôle optimal et d'accélération du réseau, fournissant aux atomes une impulsion de $4\hbar k_{\mathrm{L}}$ à temps de protocole $1.5T_0 = 105$ μs fixé. Dans le cas de l'accélération du réseau, on voit que la population de l'ordre trois de diffraction est non négligeable indiquant que le processus d'accélération a été non adiabatique. Par conséquent, la fidélité à l'état cible obtenue est moins bonne que celle obtenue par contrôle optimal, $\mathcal{F} = 0.49$ contre $\mathcal{F} = 0.89$. Afin d'avoir une comparaison plus large, nous comparons dans le tableau 5.1 les temps des protocoles obtenus par contrôle optimal et d'une accélération du réseau afin de peupler différents monômes d'impulsion avec la même fidélité. On voit que pour préparer le n-ième monôme d'impulsion avec la même fidélité qu'un protocole optimal, l'accélération du réseau nécessite un temps environ dix fois plus long. Cela se traduit par une distance parcourue par les atomes dans le piège harmonique beaucoup plus grande qui peut être délétère pour le nuage d'atomes. En effet, étant donné que la distance parcourue par les atomes sur un temps de Bloch est $\Delta x = h\tau_B/2md$, on trouve que pour atteindre le quatrième monôme avec un temps d'accélération de $t_f = 1.7$ ms, les atomes parcourent environ $\Delta x = 7$ μm dans la superposition du réseau et du piège harmonique. Or, pour produire un condensat, nous utilisons un piège dipolaire croisé en configuration de *dimple* avec une fréquence de piégeage de $\omega/2\pi = 50$ Hz

(je renvoie le lecteur au chapitre 2 pour plus de détails). On peut comparer la distance de parcours des atomes au mode de l'oscillateur harmonique $a_{\mathrm{oh}} = \sqrt{\hbar/m\omega}$ du piège dipolaire en fin de séquence expérimentale. Dans ce cas, le mode de l'oscillateur harmonique est de $a_{\mathrm{oh}} \simeq 10$ μm. Les effets d'anharmonicité du piège harmonique se font donc ressentir sur le nuage d'atomes. Afin d'obtenir le résultat de la figure 5.4 $\mathbf{c_2}$, nous avons dû décomprimer le piège harmonique, passant d'un confinement extérieur de 50 Hz à 4Hz. Dans ce cas, le mode d'oscillateur harmonique du piège harmonique est de $a_{\mathrm{oh}} \simeq 40$ μm. Les effets de bord du confinement se font alors moins ressentir dans cette géométrie de piège.

Le contrôle optimal propose donc une solution plus efficace et plus rapide que des processus adiabatiques pour préparer des monômes d'impulsion, qui de plus ne nécessite pas de se préoccuper du confinement extérieur. Au total, nous avons obtenu tous les monômes entre les ordres $(-10,\ldots,10)$ avec des fidélités supérieures à 70%. D'autres monômes que ceux présentés sur la figure 5.4 sont présentés en annexe D.

Dans la prochaine partie, nous revisitons la préparation des distributions en impulsion que nous avions cherchées à obtenir par un décalage abrupt de la phase dans le chapitre précédent.

5.3.1.2 Préparation de binômes d'impulsion

Après avoir préparé des monômes d'impulsion, nous avons cherché à préparer des superpositions équiprobables de deux composantes d'impulsions, états que nous nommons des *binômes*. Dans cette partie, nous présentons plusieurs exemples de binômes que nous avons obtenu par un protocole optimal. Nous comparons ces résultats avec ceux que nous avons présentés dans le chapitre 4 sur l'observation des halos de collision.

Dans les expériences que nous présentons dans la suite, nous avons fixé la profondeur du réseau à $s \simeq 5$. Afin de démontrer que le contrôle optimal permet d'aller au delà des résultats obtenus dans le chapitre précédent, nous avons dans un premier temps préparé un binôme dont l'impulsion moyenne est de $-2.5\hbar k_{\mathrm{L}}$ et dont l'impulsion relative est de $1\hbar k_{\mathrm{L}}$ comme représenté sur la figure 5.5 **a**. Sur cette figure, on observe un halo de diffusion entre les deux ordres peuplés. On observe également qu'il n'y a pratiquement aucun atome dans les autres ordres de diffraction. Dans ce cas, la visibilité du halo de collision obtenue par contrôle optimal est proche de la visibilité maximale $V_{\mathrm{opt}} \sim 0.5$. Ceci est à contraster avec les résultats présentés sur la figure 4.13 du chapitre précédent où nous pouvions observer une population non négligeable dans les autres ordres de diffraction. À titre de comparaison, la visibilité théorique maximale atteignable par un décalage de la phase du réseau pour obtenir ce halo de collision est de $V_{\mathrm{libre}} \sim 0.3$. On notera également qu'avec un décalage de la phase du réseau, cette visibilité maximale requiert un réseau

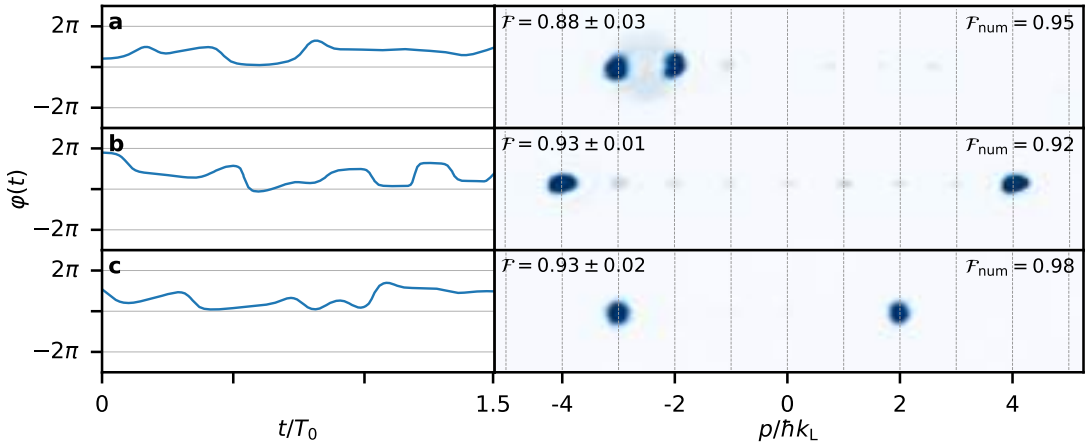


Figure 5.5 – Préparation de binômes d'impulsion. a-c : superposition équiprobable des états d'impulsions $(-3,-2)\hbar k_{\text{L}}$, $(-4,4)\hbar k_{\text{L}}$, $(-3,2)\hbar k_{\text{L}}$ respectivement. Gauche : Champs de contrôle optimal $\varphi(t)$. Le temps est donné en multiple du temps caractéristique du réseau $T_0 \simeq 70\mu$s aux profondeurs utilisées pour obtenir les densités optiques $s_{\mathbf{a}} = 4.6 \pm 0.2$, $s_{\mathbf{b}} = 5.0 \pm 0.1$ et $s_{\mathbf{c}} = 4.6 \pm 0.2$ (voir texte). Droite : Images expérimentales correspondantes des ordres de diffraction obtenues après application du champ de contrôle. La fidélité $\mathcal{F}$ est la fidélité expérimentale obtenue avec une moyenne de dix distributions en impulsion obtenues à partir des images expérimentales. Les erreurs indiquées correspondent à un écart type. La fidélité $\mathcal{F}_{\text{num}}$ est la fidélité obtenue avec l'état final d'une propagation numérique avec le champ de contrôle $\varphi(t)$ correspondant.

d'une profondeur $s = 11.25$ et un temps de protocole de $t_f = 12.7$ μs. Cette première comparaison montre que le contrôle optimal permet, à profondeur fixée, d'accéder à des impulsions moyennes plus élevées et d'observer des halos de diffusion de meilleure visibilité que celle obtenue par une évolution libre dans un réseau translaté.

Sur la figure 5.5 **b**, nous préparons un binôme dont l'impulsion moyenne est nulle mais dont l'impulsion relative est de $8\hbar k_{\text{L}}$. De même que précédemment, la population des autres ordres de diffraction que ceux peuplés pour former le binôme est négligeable. La visibilité du halo de collision est donc proche de $V_{\text{opt}} \sim 0.5$. La visibilité théorique maximale atteignable pour un tel halo de diffusion par un décalage de phase du réseau est $V_{\text{libre}} \sim 0.23$ pour un réseau de profondeur $s = 24.25$ et un temps de maintien $t_f = 58.8$ μs. On arrive donc à la conclusion suivante : à profondeur fixée, l'impulsion moyenne obtenue par contrôle optimal est plus élevée que celle obtenue par un décalage du réseau optique. La visibilité du halo de collision est également plus élevée, proche de la visibilité maximale.

Le contrôle optimal nous a également permis de préparer une distribution en impulsion dont les impulsions moyenne et relative sont différentes de 0 et $1\hbar k_{\text{L}}$ respectivement. Une telle distribu-

tion est présentée sur la figure 5.5 **c**. Nous démontrons ainsi qu'obtenir ce type de distribution en impulsion est facilité par l'utilisation du contrôle optimal : nous l'avons obtenu dès le premier essai. À titre de comparaison, pour la distribution en impulsion que nous avions présenté sur la figure 4.16 à la fin du chapitre précédent, de nombreuses tentatives ont été nécessaires : les fluctuations expérimentales ont un gros impact sur la distribution obtenue à cause de la fenêtre étroite des paramètres permettant d'observer la distribution désirée par un déphasage du réseau. Dans ce cas également, la visibilité obtenue par contrôle optimal est proche de $V_{\text{opt}} \sim 0.5$ alors que la visibilité théorique de la distribution obtenue par un déphasage du réseau est de $V_{\text{libre}} \sim 0.3$.

Plus de résultats sur les binômes sont donnés en annexe E : les 21 combinaisons possibles de deux composantes d'impulsion peuplées entre les ordres $(-3,\ldots,3)\hbar k_{\text{L}}$ y sont présentés.

Ainsi, en comparaison de la méthode utilisant un saut de phase, le contrôle optimal offre une plus grande liberté et une meilleure précision sur le contrôle de la distribution en impulsion du nuage d'atomes : nous avons obtenu de meilleurs résultats en ajustant uniquement la phase du réseau optique au cours du temps, tout en gardant la profondeur et le temps de protocole fixés.

Dans la prochaine partie, nous allons voir qu'un protocole de contrôle optimal est une opération réversible sur le nuage d'atomes.

5.3.1.3 Réversibilité d'un protocole de contrôle optimal

Un protocole de contrôle optimal revient à appliquer un opérateur d'évolution de la forme

$$\hat{U}(t_N) = \hat{U}_N \ldots \hat{U}_1 = \prod_{n=N}^{n=1} e^{-iM(\varphi_n)\Delta t}, \tag{5.49}$$

sur le nuage d'atomes. Or, il s'agit d'un opérateur unitaire respectant théoriquement la relation $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \mathbb{I}$, où $\mathbb{I}$ est la matrice identité. Nous avons vérifié expérimentalement cette propriété. Pour cela, nous avons choisi de préparer un binôme d'impulsion des ordres de diffraction ± 1. Une fois ce binôme préparé, nous appliquons le même protocole mais renversé temporellement comme présenté sur la figure 5.6 **a**. La durée de ce protocole est de $t_f = 90$ μs. Afin de mettre en évidence la réversibilité de ce protocole, nous avons mesuré l'état du condensat aux temps $t = 0$, $t = t_f$ et $t = 2t_f$. On s'attend à observer respectivement l'état fondamental du réseau à $t = 0$, une superposition équiprobable des composantes d'impulsion $|\pm 1\hbar k_{\text{L}}\rangle$ à $t = t_f$ et, si le processus est effectivement réversible, à nouveau l'état fondamental du réseau à $t = 2t_f$. Nous présentons les résultats de ces mesures sur les figures 5.6 **b-d**. Nous voyons effectivement que nous retrouvons l'état fondamental du réseau après l'application du protocole et du même protocole renversé dans le temps. Afin de quantifier cette réversibilité, nous avons mesuré la fidélité

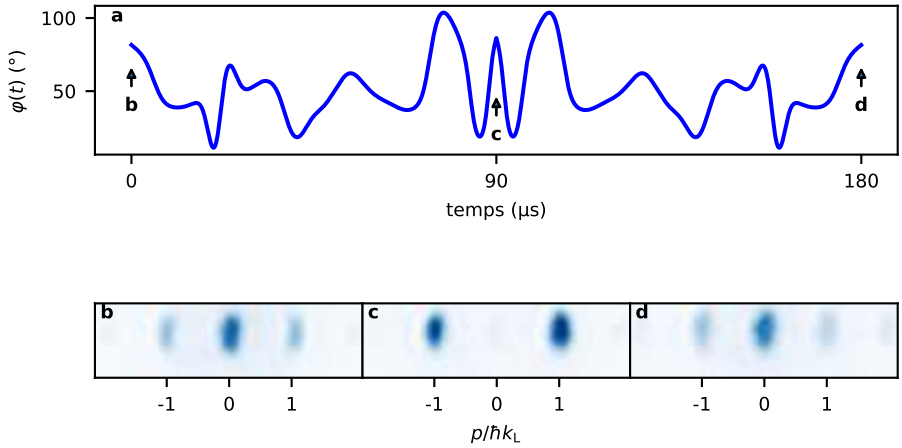


Figure 5.6 – Exemple de la réversiblité des champs de contrôle. a : succession temporelle d'un champ de contrôle produisant une superposition équiprobable des composantes d'impulsion $+1\hbar k_L$ et $-1\hbar k_L$ et son inverse temporel mis bout à bout. **b** : Image expérimentale de l'état fondamental du réseau à une profondeur de $s = 5.99$. **c** : Image expérimentale après le protocole de préparation de la superposition équiprobable des deux composantes $\pm 1\hbar k_L$. **d** : Image expérimentale après le protocole et son inverse temporel. En "défaisant" le protocole, on retrouve bien l'état initial, dans ce cas l'état fondamental du réseau, avec une fidélité de $\mathcal{F} = 0.98$.

de l'état obtenu $\mathcal{F} = 0.98$. Il est possible d'aller encore plus loin en effectuant une re-descente adiabatique de la profondeur du réseau après l'application du protocole et de son renversement temporel : nous avons alors retrouvé un condensant de Bose-Einstein sans excitations (chauffage ou perte d'atomes).

Un point important que nous n'avons abordé que très succinctement jusqu'à présent est le temps de contrôle du protocole qu'il est nécessaire de fournir en entrée de l'algorithme d'optimisation. Dans la prochaine section, nous allons voir comment nous avons choisi ce paramètre et son influence sur la fidélité des états obtenus.

5.3.1.4 Influence du temps de contrôle

Comme nous l'avons vu dans l'introduction théorique de ce chapitre, l'algorithme GRAPE que nous utilisons n'impose pas de contrainte sur la durée du champ de contrôle. C'est un paramètre fixé et il est de la responsabilité de l'utilisateur de le fournir. Dans cette partie, nous présentons une étude de l'impact de la durée du protocole sur les fidélités obtenues expérimentalement.

Pour cela, nous avons préparé une superposition équiprobable des états d'impulsion $|\pm 1\hbar k_L\rangle$. Nous avons alors effectué plusieurs recherches de champs de contrôle pour différents temps de

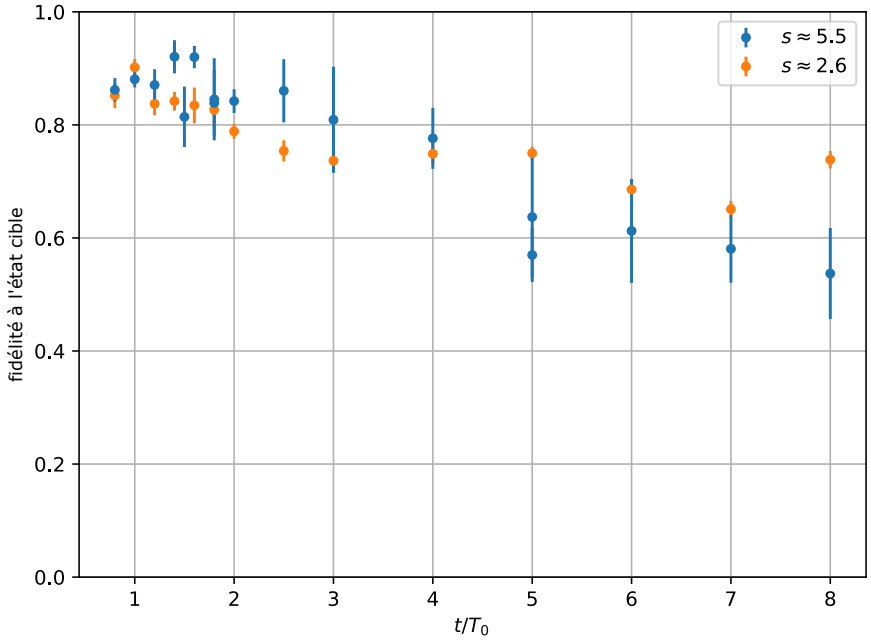


Figure 5.7 – Influence du temps de protocole sur la fidélité à l'état cible. Fidélité expérimentale moyenne (sur dix mesures) à l'état cible $\psi_{\text{cible}} = (|+1\hbar k_{\text{L}}\rangle + |-1\hbar k_{\text{L}}\rangle)/\sqrt{2}$ en fonction du temps de protocole pour les profondeurs $s = 5.5$ (bleu) et $s = 2.6$ (orange). Les barres d'erreur correspondent à un écart-type. Pour $s = 5.5$, le temps caractéristique est de $T_0 \simeq 70$ μs et pour $s = 2.6$ il est de $T_0 \simeq 140$ μs.

protocole allant de $t = 0.5T_0$ jusqu'à $t = 8T_0$. Les résultats de notre étude sur la durée du champ de contrôle sont présentés sur la figure 5.7. Qualitativement, on observe que le choix de la durée du champ de contrôle résulte d'un compromis. D'une part, il faut que le temps de contrôle soit suffisamment long pour que l'algorithme puisse converger sur une solution avec une fidélité satisfaisante. Pour rappel, T_0 est le temps caractéristique d'évolution des atomes dans les sites du réseau optique. Pour des temps de protocole très petit devant T_0, les atomes n'ont donc pas le temps de suivre le réseau. D'autre part il ne faut pas que la durée du contrôle soit trop longue pour que le résultat soit le moins sensible possible aux fluctuations et imperfections expérimentales (dérive de la profondeur, bruit des lasers etc). Nous remarquons une tendance sur la figure 5.7 : la fidélité à l'état cible est maximale pour une durée de champ contrôle proche de $\Delta t = 1.5T_0$.

C'est la raison pour laquelle nous avons opté pour cette durée de protocole pour obtenir les résultats présentés sur les figures 5.4, 5.5 et 5.6. L'exception est le cas du monôme 10 de la figure 5.4 $\mathbf{c}_2$. Nous avons remarqué que l'algorithme convergeait vers des solutions présentant une meilleure fidélité si nous allongions la durée du protocole à $t = 4T_0$: on comprend intuitivement que l'état cible est plus difficile à atteindre et que le champ de contrôle a besoin de plus de temps

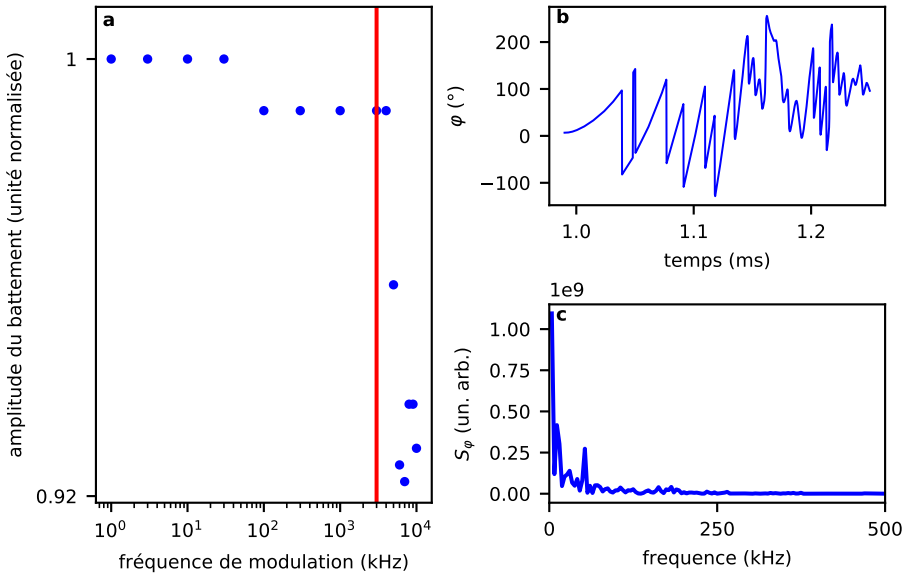


Figure 5.8 – Bande passante du dispositif expérimental. **a** : Bande passante du dispositif expérimental. **b** : Champ de contrôle produisant le monôme $m = 10$. **c** : Densité spectrale du champ de contrôle présenté en **b**.

pour le préparer.

5.3.1.5 Limite en fréquence des champs de contrôle

Dans cette partie, nous vérifions que la bande passante de notre dispositif expérimental est suffisante pour les fréquences impliquées dans les champs de contrôle optimal ne soient pas tronquées. Sur la figure 5.8, nous comparons la bande passante de notre système expérimental, et les fréquences maximales mises en jeux dans un exemple de protocole de contrôle optimal produisant un monôme extrême (en l'occurence le monôme $m = 10$).

La bande passante de notre système est mesurée par le battement des deux fréquences de modulation f_{AOM} à 80MHz utilisées pour moduler les modulateurs acousto-optiques imprimant leur phase sur la phase du réseau optique. L'une de ces deux fréquences voit sa phase modulée par un signal sinusoïdal dont la fréquence f_{mod} est progressivement augmentée. Le signal de sortie est filtré par un filtre passe-bas afin de récupérer uniquement la composante continue du battement. L'amplitude de cette composante continue est tracée en fonction de la fréquence de modulation f_{mod} sur la figure 5.8 **a**. On voit qu'à $f_{\mathrm{c}} = 3$MHz, le signal perd environ 1% de son amplitude.

Afin d'avoir un ordre de grandeur des fréquences impliquées dans un protocole optimal, la den-

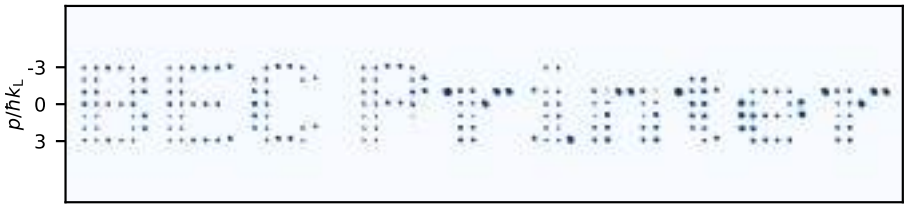


Figure 5.9 – Illustration d'une imprimante à atomes. Chaque colonne de cette image est une image expérimentale d'absorption après temps de vol d'une distribution en impulsion dont certains ordres sont peuplés de manière équiprobable entre les états d'impulsion ($|-3\hbar k_L\rangle, \ldots, |3\hbar k_L\rangle$) par contrôle optimal.

sité spectrale du champ de contrôle produisant le monôme $m = 10$ est donnée sur la figure 5.8 **c**. On voit sur cet exemple que la contribution des fréquences supérieures à 250 kHz est négligeable. On peut comprendre cet ordre de grandeur par le fait que l'algorithme produisant les champs de contrôle prend en compte la dynamique des atomes dans le réseau et, par conséquent, n'inclue pas de fréquences trop élevées pour que les atomes puissent suivre le mouvement du réseau.

On conclut donc que la bande passante de notre dispositif expérimental pour appliquer des protocoles de contrôle optimal n'est pas un facteur limitant.

Après ces deux premiers types d'expériences visant à produire des monômes et des binômes d'impulsion, nous avons réalisé des protocoles permettant de peupler un nombre arbitraire de composantes d'impulsion.

5.3.1.6 Préparation d'états d'impulsion de population arbitraire

Après avoir réalisé des états d'impulsion unique et des superpositions de deux états d'impulsions nous avons cherché à préparer des superpositions équiprobables d'un nombre arbitraire de composantes d'impulsion. Contrairement aux deux types expériences précédentes, il n'existe pas de schéma classique de contrôle du réseau optique permettant de réaliser de telles distributions auquel nous pouvons comparer nos résultats.

Afin de démontrer au mieux les possibilités offertes par le contrôle optimal, nous avons réalisé une *imprimante à atomes*. En effet, une conséquence amusante de contrôler les populations de la distribution en impulsion est la possibilité de pouvoir écrire des lettres et des symboles en utilisant les ordres de diffraction comme une colonne de pixels. Nous avons déjà montré le résultat de notre processus d'impression avec des condensats dans l'introduction de ce chapitre avec la figure 5.1. En se restreignant aux ordres de diffraction $(-3, \ldots, 3)\hbar k_L$ dont nous contrôlons les populations par

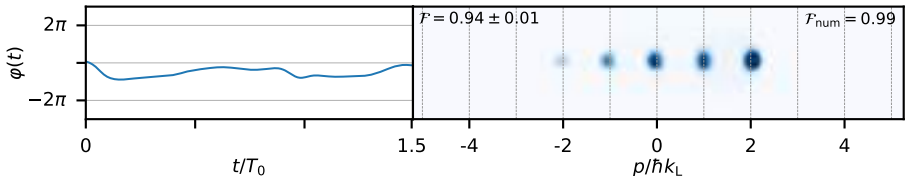


Figure 5.10 – Exemple de distribution en impulsion avec des populations non équiprobables. Superposition des états d'impulsions $(-2,-1,0,1,2)\hbar k_{\mathrm{L}}$ avec les populations $\pi_n = \{1,2,3,4,5\}/15$. Gauche : Champ de contrôle optimal $\varphi(t)$. Le temps est donné en multiple du temps caractéristique du réseau $T_0 \simeq 70$ μs pour la profondeur $s = 5.1 \pm 0.1$ utilisée pour obtenir la densité optique. Droite : Image expérimentale correspondante des ordres de diffraction obtenue après application du champ de contrôle. La fidélité $\mathcal{F}$ est la fidélité expérimentale obtenue sur une moyenne de dix distributions en impulsion extraites de la densité optique présentée. L'incertitude indiquée correspond à un écart type. La fidélité $\mathcal{F}_{\mathrm{num}}$ est la fidélité obtenue sur l'état final d'une propagation numérique par le champ de contrôle $\varphi(t)$ correspondant.

contrôle optimal, nous avons en quelque sorte à disposition une rangée 7 pixels. L'état "allumé" ou "éteint" d'un pixel est représenté par l'ordre de diffraction étant peuplé ou non. Comme nous utilisons 7 ordres de diffraction, nous pouvons réaliser $2^7 = 128$ combinaisons possibles de distribution en impulsion. Nous avons alors cherché un protocole optimal pour chacune d'entre elle et acquit l'image expérimentale correspondante. En les combinant de la bonne manière, nous pouvons les agencer afin de produire des lettres, puis des mots et bien entendu des phrases. Un autre exemple de mots écrits à l'aide de distributions en impulsion de condensats de Bose-Einstein dans un réseau optique est donné sur la figure 5.9. Au delà de leur caractère amusant, ce type d'image démontre l'aptitude du contrôle optimal à façonner les populations de distributions en impulsion de manière arbitraire. Cela démontre également le contrôle et la précision qu'il est possible d'atteindre sur la phase du réseau et, de manière plus générale, sur la manipulation d'atomes froids dans un réseau optique.

Tous ces exemples sont des superpositions *équiprobables* des populations des différentes composantes d'impulsion. Il est également possible d'effectuer une superposition avec des poids différents sur chacune des composantes d'impulsion. Un exemple de distribution "en escalier" est présenté sur la figure 5.5 **d** où les ordres de diffraction $(-2,\ldots,2)\hbar k_{\mathrm{L}}$ sont peuplés avec des populations π_n croissantes avec $\pi_n = \{1,2,3,4,5\}/15$.

Récapitulatif

En résumé, les expériences que nous avons présentées jusqu'ici démontrent que le contrôle optimal offre le contrôle des modules $|c_l|$ des coefficients de Fourier de la fonction d'onde du condensat dans le réseau optique avec une meilleure efficacité qu'avec des schémas de contrôle plus classiques. Nous avons démontré que les protocoles de contrôle optimal sont des processus réversibles. Nous avons également proposé une méthode empirique afin de fixer la durée du protocole à utiliser.

Pour rappel, la fonction d'onde du condensat dans le réseau peut être décrite comme une série de Fourier

$$\psi(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l(k) e^{i(k+lk_{\mathrm{L}})x}, \tag{5.50}$$

et l'état du condensat est donné par l'état des différents coefficients complexes $c_l = |c_l| e^{i\phi_l}$. Nous pouvons conclure des expériences précédentes que le contrôle optimal permet de façonner de manière arbitraire les populations $|c_l|^2$ des différentes composantes en impulsion du nuage d'atomes. En d'autres termes, ces expériences démontrent le contrôle du module $|c_l|$ des différents coefficients. Dans la prochaine partie, nous allons voir que le contrôle optimal permet également de contrôler les phases $e^{i\phi_l}$ des différents coefficients de Fourier de la fonction d'onde, offrant ainsi le contrôle sur la totalité de la fonction d'onde dans le réseau.

5.3.2 Contrôle des phases relatives de la distribution en impulsion

Dans la partie précédente, nous avons démontré notre aptitude à contrôler les populations $\pi_l = |c_l(k)|^2$ des ordres de diffraction. Dans cette partie, nous allons voir que nous sommes également capable de contrôler les phases relatives entre les différentes composantes d'impulsion.

5.3.2.1 Contrôle de la phase relative entre deux ordres de diffraction

La fidélité définie par l'équation (5.35) utilisée jusqu'à présent ne permet pas de prendre en compte les phases relatives des états cibles. Afin de les prendre en compte durant l'optimisation, nous utilisons une nouvelle définition de la fidélité mieux adaptée à notre cible

$$\mathcal{F} = |\langle C(t_f) | C_{\mathrm{cible}} \rangle|^2. \tag{5.51}$$

Il s'agit de la fidélité quantique standard. Dans une deuxième série d'expériences, nous utilisons cette nouvelle fidélité afin de contrôler la phase relative entre les composantes d'impulsions d'une

superposition des ordres $|\pm\hbar k_L\rangle$. Dans un premier temps, nous préparons les superpositions $|+\rangle$ et $|-\rangle$ suivantes

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\hbar k_L\rangle + |-1\hbar k_L\rangle), \tag{5.52}$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\hbar k_L\rangle - |-1\hbar k_L\rangle). \tag{5.53}$$

Afin de déterminer expérimentalement la phase relative entre les deux composantes, nous préparons ces états avec un champ de contrôle optimal, puis nous les laissons évoluer dans le réseau statique. La dynamique des atomes dans le réseau nous sert à définir une référence de phase et à comparer les phases entre elles : suivant la phase relative entre les deux composantes d'impulsion, dans ce cas 0 ou π, les évolutions temporelles des motifs d'interférences obtenus après temps de vol sont radicalement différentes. Ces évolutions expérimentales sont ensuite comparées à la propagation numérique dans un réseau statique de l'état obtenu par contrôle optimal. Les résultat obtenus sont représentés sur la figure 5.11. En terme de population, on observe que les deux états initiaux préparés $|+\rangle$ et $|-\rangle$ sont équivalents. En effet, nous voyons que les premières lignes des évolutions de la figure 5.11 sont les mêmes : les ordres ± 1 sont peuplés de manière équiprobable. Leurs évolutions temporelles sont en revanche différentes : l'état $|-\rangle$ étant un état impair et, comme l'évolution dans le réseau statique conserve la parité, la population de l'ordre 0 est par conséquent nulle ($c_0 = -c_{-0} = -c_0 = 0$). À l'inverse, l'état $|+\rangle$, présente une oscillation de la population de l'ordre zéro.

On note que les champs de contrôle utilisés afin de contrôler les phases relatives ne sont pas plus complexes que ceux utilisés pour contrôler uniquement les populations : les fréquences impliquées dans les champs de contrôle sont comparables à celles présentées dans la partie 5.3.1.5.

Le contrôle optimal permet donc de préparer une phase relative de 0 et π entre deux composantes d'impulsion. Ce sont deux phases diamétralement opposées. Par la suite, nous avons cherché à préparer des superpositions des composantes $|\pm 1\hbar k_L\rangle$ avec différentes phase relatives. Nous avons préparé 16 superpositions des composantes $\pm 1\hbar k_L$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\hbar k_L\rangle + e^{i\Delta\phi_i}|-1\hbar k_L\rangle), \tag{5.54}$$

avec une phase relative $\Delta\phi_i = i\pi/8$. Ces résultats sont présentés sur la figure 5.12. Sur cette représentation, on remarque une évolution progressive de la dynamique temporelle des motifs d'interférences au fur et à mesure que la phase relative passe de 0° à 360°. On voit notamment que l'ordre zéro disparait peu à peu au fur et à mesure que la phase relative s'approche de 180°. Il réapparait lorsque la phase relative s'approche de 360°. On remarque également une oscillation de l'impulsion moyenne de la distribution en impulsion pour les phases entre 22.5° et 112.5°.

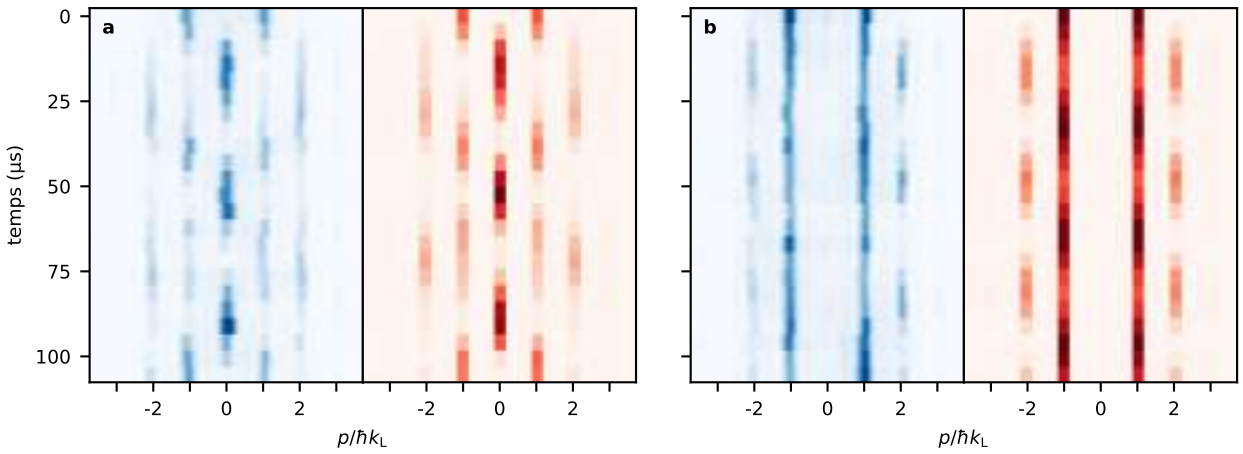


Figure 5.11 – Préparation de superpositions symétrique et anti-symétrique des états d'impulsion $|\pm 1\hbar k_L\rangle$. **a**-**b** : Préparation de la superposition symétrique et anti-symétrique des composantes $|\pm 1\hbar k_L\rangle$ respectivement. Gauche : Profils intégrés expérimentaux montrant l'évolution de la distribution en impulsion pendant 110 μs de temps de maintien dans un réseau statique après un protocole $\varphi(t)$ de contrôle optimal préparant l'état désiré. Droite : Propagations numériques de l'état attendu dans un réseau statique. L'état initial de l'évolution temporelle numérique est l'état obtenu par l'algorithme de contrôle optimal.

Cette oscillation de l'impulsion moyenne est en opposition de phase entre 247.5° et 337.5°. Cette opposition de phase est la plus flagrante aux phases relatives 90° et 270° : les deux évolutions présentent une oscillation de l'impulsion moyenne initialement négative pour la phase relative de 90° alors qu'elle est positive pour la phase relative 270°.

Afin de quantifier l'écart entre la phase relative mesurée et la phase relative préparée par le protocole de contrôle optimal, nous avons procédé à un ajustement de la phase relative par la méthode des moindres carrés. Les résultats de cet ajustement sont présentés sur la figure 5.13. Sur les figures 5.13 **a**-**e**, nous comparons plusieurs résultats expérimentaux obtenus aux propagations numériques d'états superpositions $(|+1\hbar k_L\rangle + \exp(i\Delta\varphi)|-1\hbar k_L\rangle)/\sqrt{2}$ dont la phase $\Delta\varphi$ est ajustée de manière à minimiser l'écart entre les évolutions temporelles expérimentales et numériques des populations des ordres de diffraction. Dans ces figures, le seul paramètre ajustable est la phase relative entre les états $|1\hbar k_L\rangle$ et $|-1\hbar k_L\rangle$ (voir figures 5.12 $\mathbf{c}_{-2}$-$\mathbf{c}_2$). Sur la figure 5.14, nous traçons la phase mesurée lors de l'ajustement $\Delta\phi_{\text{mes}}$ en fonction de la phase préparée par contrôle optimal $\Delta\phi_{\text{prep}}$. La courbe en pointillé est une droite de pente 1 représentant un accord parfait entre la phase préparée et la phase mesurée (il s'agit d'un guide pour les yeux et non d'un ajustement). Nous obtenons un très bon accord entre la phase préparée et la phase mesurée avec au plus un écart de 6° entre les deux.

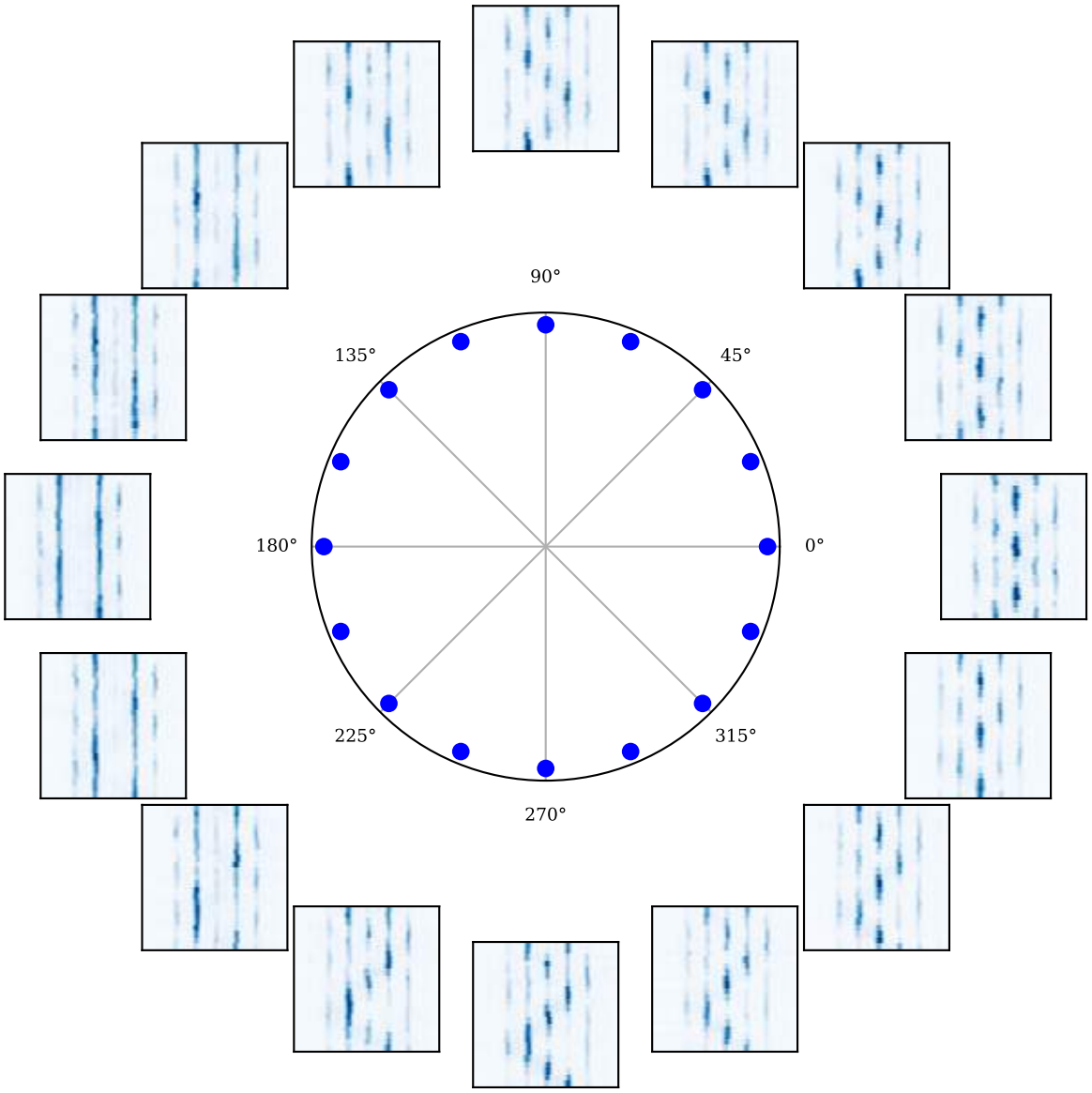


Figure 5.12 – Contrôle de la phase entre les états d'impulsion $|\pm 1\hbar k_L\rangle$. Evolution temporelle des superpositions $(|1\hbar k_L\rangle + \exp i\Delta\phi_i|-1\hbar k_L\rangle)/\sqrt{2}$ pour différents $\Delta\varphi_i$ (obtenues par application de protocoles de contrôle optimal) dans le réseau statique. Chaque ligne correspond à une image expérimentale intégrée dans le direction perpendiculaire au réseau obtenue pour un temps de maintien dans le réseau statique de $t = 110$ μs et à une profondeur de $s \simeq 5$. Le pas de temps entre chaque image est de $\Delta t = 5$ μs. Les points bleus sur le cercle trigonométrique indiquent la phase relative désirée $\Delta\varphi_i$ entre les deux composantes $|\pm 1\hbar k_L\rangle$.

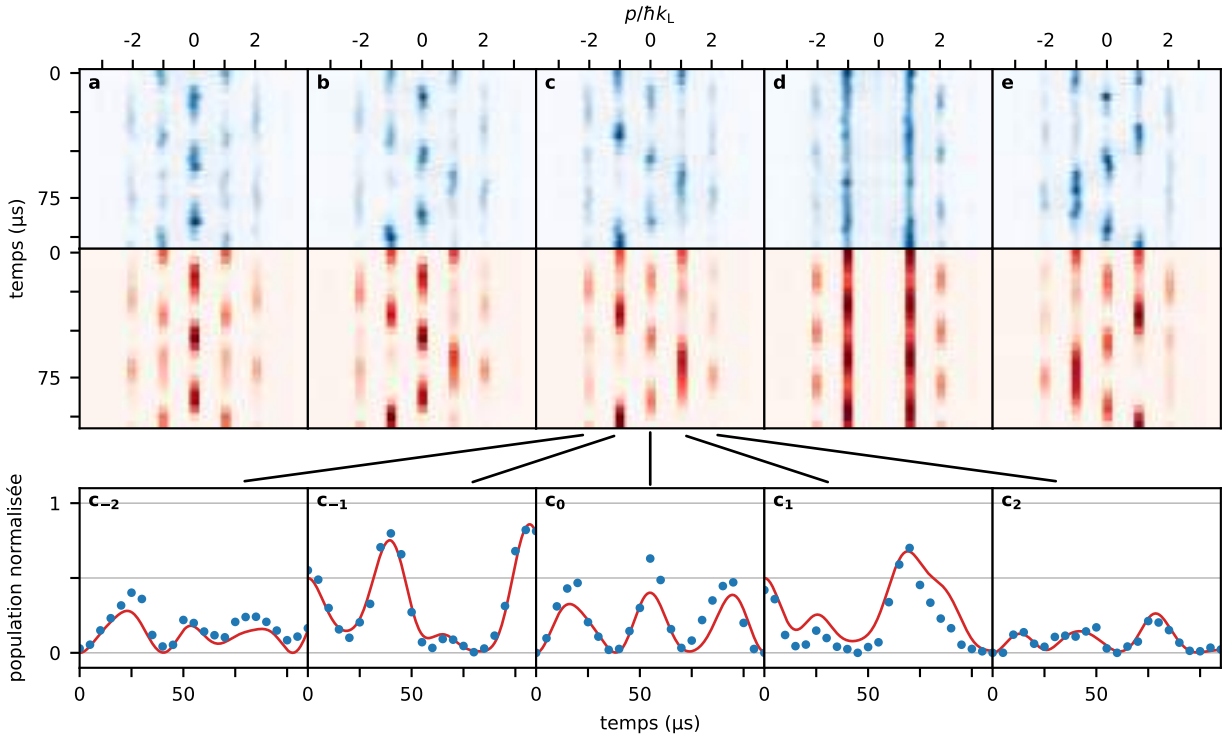


Figure 5.13 – Mesure de la phase entre les états d'impulsion $|\pm 1\hbar k_L\rangle$**. a-e** : En haut sont représentés les profils intégrés expérimentaux (bleu) montrant l'évolution de la distribution en impulsion en fonction du temps de maintien (110 μs au total) dans un réseau statique une fois la superposition $(|+1\hbar k_L\rangle + \exp(i\Delta\phi_{\text{prep}})|-1\hbar k_L\rangle)/\sqrt{2}$ obtenue à l'aide d'un protocole de contrôle optimal, pour $\Delta\varphi_{\text{prep}}$ de $3°, 46°, 96°, 184°$ et $276°$ respectivement. En bas sont représentés les propagations numériques (rouge) dans un réseau statique des mêmes superpositions avec une phase relative mesurée par un ajustement de moindres carrés des données expérimentales (voir texte). Les phases mesurées sont $\Delta\phi_{\text{mes}} = (11\pm6)°, (48\pm7)°, (84\pm6)°, (192\pm7)°, (285\pm6)°$ respectivement. $\mathbf{c_{-2}}$- $\mathbf{c_2}$: Evolution temporelle des différents ordres de diffraction dans le cas **c** présenté ci-dessus : la figure $\mathbf{c_i}$ représente l'évolution de l'ordre i de diffraction. Les points bleus correspondent aux données expérimentales et les courbes rouges correspondent aux propagation des superpositions $|\Psi_{\Delta\phi_{\text{mes}}}\rangle$ de phase relative $\Delta\phi_{\text{mes}}$ déterminée par un ajustement de moindres carrés.

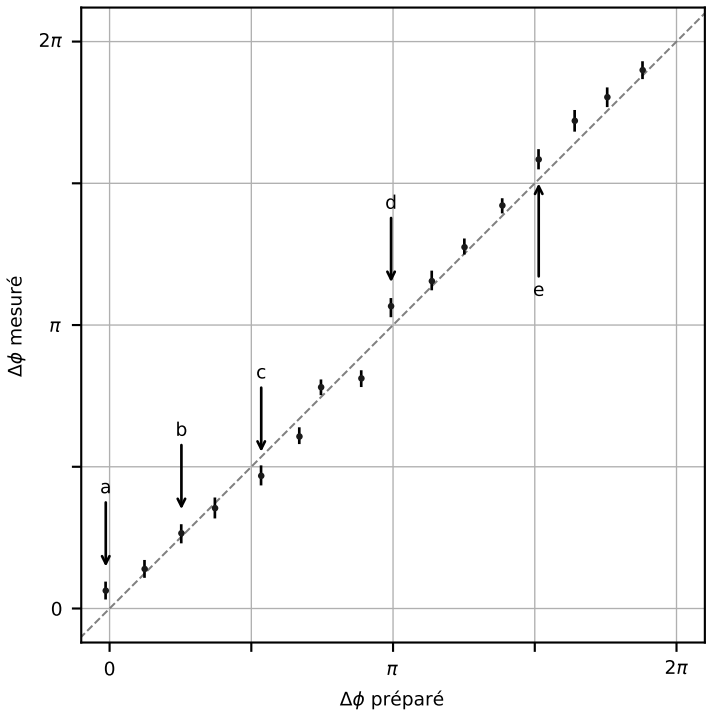


Figure 5.14 – Phase relative mesurée $\Delta\phi_{\text{mes}}$ en fonction de la phase relative préparée $\Delta\phi_{\text{prep}}$. Toutes les données représentées sont données pour une profondeur d'environ $s \simeq 5$. Les barres d'erreurs représentent l'intervalle de confiance à 95% sur la valeur de la phase $\Delta\phi_{\text{mes}}$ déduit à partir d'un maximum de vraisemblance. Les pointillés gris représentent une droite de pente 1. Les flèches et lettres **a**-**e** font référence aux figures de la figure 5.13

Le contrôle optimal permet donc une excellente préparation de la phase relative de superpositions de deux composantes d'impulsion. Dans la prochaine partie, nous montrons que ce contrôle s'applique également à des superpositions plus complexes.

5.3.2.2 Contrôle de la phase relative entre plusieurs ordres de diffraction

Afin de tester davantage les possibilités offertes par le contrôle optimal, nous avons également réalisé des superpositions de trois composantes d'impulsion tout en contrôlant leurs phases relatives. Pour démontrer la versatilité du contrôle de la distribution en impulsion, nous avons choisi de travailler avec les ordres $|0\hbar k_{\text{L}}\rangle$ et $|\pm 2\hbar k_{\text{L}}\rangle$ et non plus $|\pm 1\hbar k_{\text{L}}\rangle$ comme précédemment. Les états que nous avons préparés sont les suivants

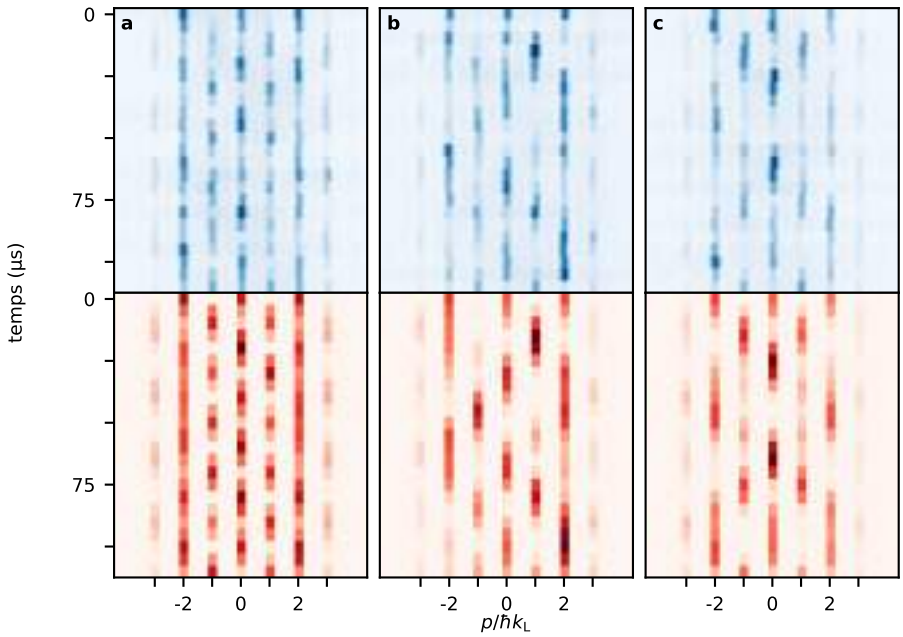


Figure 5.15 – Préparation de superpositions de trois états d'impulsions avec un contrôle de la phase relative entre composantes d'impulsion. a-c : Préparation des états définis respectivement par les équations (5.55), (5.56) et (5.57). Haut : Evolution temporelle des images expérimentales intégrées (bleu) montant l'évolution temporelle dans le réseau statique de l'état désiré préparé par un protocole de contrôle optimal $\varphi(t)$. Chaque ligne correspond à une image expérimentale intégrée dans la direction perpendiculaire au réseau. Le temps de maintien évolue par pas de 5 μs sur une durée totale de 110 μs. Bas : Propagations numériques de l'état attendu dans un réseau statique (rouge). Pour les trois données représentées la profondeur du réseau est de $s = 5.7 \pm 0.2$.

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|-2\hbar k_L\rangle + |0\hbar k_L\rangle + |+2\hbar k_L\rangle\right), \tag{5.55}$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|-2\hbar k_L\rangle + e^{2i\pi/3}|0\hbar k_L\rangle + e^{4i\pi/3}|+2\hbar k_L\rangle\right), \tag{5.56}$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{2i\pi/3}|-2\hbar k_L\rangle + |0\hbar k_L\rangle + e^{2i\pi/3}|+2\hbar k_L\rangle\right). \tag{5.57}$$

Les résultats que nous avons obtenus sont présentés sur la figure 5.15. Comme dans le cas d'une superposition de deux composantes d'impulsion, des phases relatives différentes entre les ordres de diffraction mènent à des évolutions temporelles des motifs d'interférences drastiquement différentes. On note cependant toujours un très bon accord entre l'évolution expérimentale et la prédiction théorique.

Récapitulatif

Pour récapituler, les expériences que nous avons présentées jusqu'ici démontrent que le contrôle optimal offre non seulement le contrôle des modules $|c_l|$ mais également des phases $e^{i\phi}$ des coefficients de Fourier de la fonction d'onde du condensat dans le réseau optique. Pour s'assurer du contrôle des modules, une seule image expérimentale suffit. En revanche, pour s'assurer du contrôle des phases, il est nécessaire de mesurer l'évolution dans le réseau statique de l'état préparé. Avec le contrôle des modules et des phases, le contrôle optimal permet de complètement transférer le condensat vers un état cible (avec une certaine fidélité), et ce, en ajustant un seul paramètre de l'expérience : la phase du réseau optique. Cela diffère significativement des schémas de contrôles plus classiques : une accélération du réseau ou un décalage soudain du réseau par exemple, où il est nécessaire d'ajuster pour chaque état cible le temps du protocole ainsi que la profondeur du réseau.

Dans la prochaine partie, nous allons utiliser ce contrôle afin de préparer des états propres de la structure du bande du réseau.

5.3.3 Préparation d'états de la structure de bande du réseau

Dans cette partie, nous allons, dans un premier temps, utiliser le contrôle optimal pour préparer des états de la structure de bande du réseau, puis, dans un second temps, des superpositions équiprobables de ces états.

5.3.3.1 Préparation d'états propres du réseau

Dans cette série d'expériences, nous préparons les distributions des coefficients $c_l(k)$ qui correspondent aux états propres du réseau. Nous avons préparé les états suivants

$$|\psi_4\rangle = |n = 1, k = 0\rangle, \tag{5.58}$$

$$|\psi_5\rangle = |n = 2, k = 0.25\rangle, \tag{5.59}$$

et leur représentation dans la structure de bande est présenté sur la figure 5.4 **a**. Comme il s'agit d'états propres, une signature expérimentale forte de la bonne préparation de ces états est qu'ils n'évoluent pas au cours du temps. Leurs évolutions expérimentales sont présentées sur les figures 5.16 $\mathbf{b_1}$ et $\mathbf{c_1}$. Afin d'observer la stationnarité de ces états, nous devons les observer dans le sous-espace de quasi-moment dans lequel ils se trouvent : dans le cas de l'état $|\psi_4\rangle$ et plus

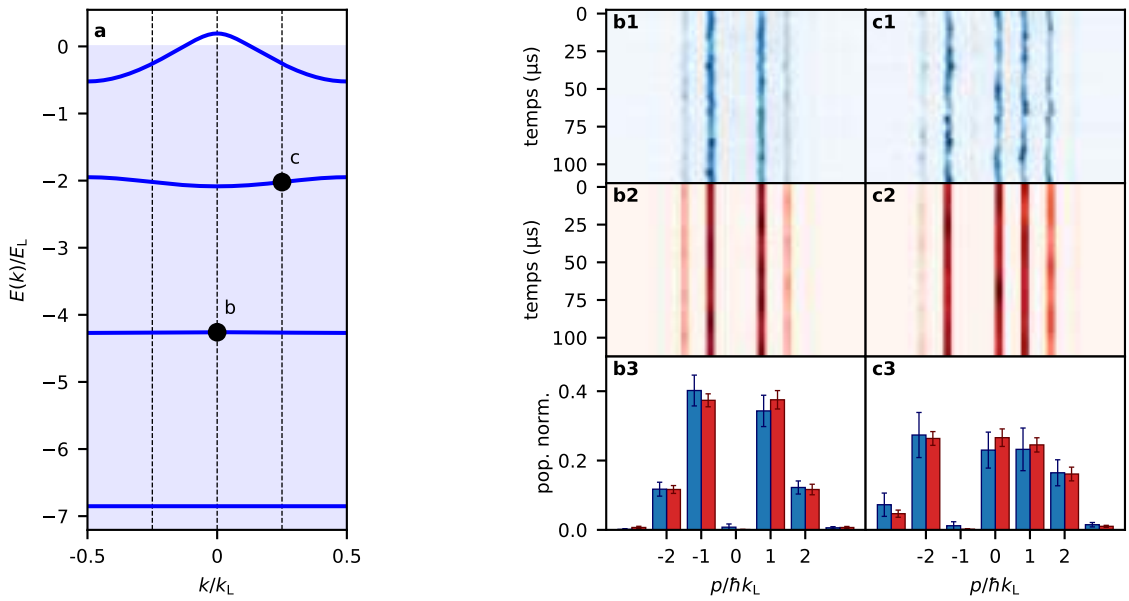


Figure 5.16 – Préparation d'états propres du réseau. a : Structure de bande pour un réseau de profondeur $s = 8.2$. La région bleutée indique la partie liée de la structure de bande. Les points noirs correspondent aux états préparés par contrôle optimal en **b** et **c**. **b** : Préparation de l'état de la première bande excitée en $k = 0$. $\mathbf{b_1}$: Données expérimentales montrant l'évolution temporelle de l'état préparé dans un réseau statique pendant une durée de 110 μs par pas de 5 μs. $\mathbf{b_2}$: Evolution numérique de l'état obtenu par contrôle optimal dans les mêmes conditions. $\mathbf{b_3}$: Moyenne temporelle sur le temps des distributions en impulsion expérimentales (bleues) et numérique (rouges). Les barres d'erreurs correspondent aux écarts types. **c** : Idem que pour **b** mais pour un état dans la deuxième bande excitée en $k = 0.25k_L$.

généralement dans les états du sous-espace $k = 0$, cela implique de se placer dans le réseau statique. Pour des états d'un sous-espace $k \neq 0$, comme par exemple l'état $|\psi_5\rangle$, cela implique de se placer dans le référentiel d'un réseau en mouvement. Pour l'état $|\psi_5\rangle$ placé en $k = 0.25$, les images expérimentales sont alors acquises dans un réseau défilant à une vitesse $v = \hbar k/m$. Nous comparons les résultats obtenus avec des propagations numériques des états obtenus par contrôle optimal comme présenté sur les figures 5.16 $\mathbf{b_2}$ et $\mathbf{c_2}$ correspondant respectivement au cas d'un réseau statique et d'un réseau défilant. Nous observons un excellent accord entre expérience et théorie. Nous observons qualitativement que les états obtenus expérimentalement évoluent très peu au cours du temps et sont très proches de l'état stationnaire ciblé : plus quantitativement, en moyennant les distributions en impulsions obtenues pour les temps de maintien dans le réseau statique, nous déterminons la dispersion des populations des différents ordres de diffraction par rapport à la population moyenne dans chaque ordre. La faible dispersion obtenue pour la population de chacun des ordres confirme la très faible évolution de l'état préparé. Par ailleurs, on remarque que l'état de la première bande excité $|\psi_4\rangle$ ne possède pas de composante zéro d'impul-

sion comme nous l'avions déjà évoqué lorsque nous avions abordé la superposition antisymétrique des états d'impulsion $|\pm\hbar k_L\rangle$ dans la partie précédente.

En réalisant ces expériences, nous avons alors préparé une inversion de population [155] : nous transférons la totalité des atomes de l'état fondamental $|n = 0, k = 0\rangle$ vers un état excité, par exemple $|\psi_4\rangle$ ou $|\psi_5\rangle$. Cela ouvre la perspectives d'étudier la stabilité des états des bandes excitées comme présenté sur la figure 5.17 : en fonction de la parité de l'indice de la bande, cette dernière est paire ou impaire comme nous l'avons énoncé au chapitre 3 de cette thèse dédié au réseau optique. On s'attend à ce que les états de bandes d'indice pair soient moins sensibles aux instabilités liées aux interactions interatomiques que ceux de bandes d'indice impair, du fait de la courbure de la bande occupée [156]. Les bandes paires ont en effet une courbure positive, avec un minimum au centre de la bande. À l'inverse les bandes impaires ont une courbure négative et présentent un maximum au centre de la structure de bande : ce maximum peut être vu comme un point d'équilibre métastable. Aux temps longs, on s'attend alors à observer des évolutions temporelles différentes pour des états préparés dans une bande paire ou impaire. Nous observons effectivement cette tendance sur les figures 5.17 **b-d** : Pour les bandes d'indice pair, on remarque que les évolutions temporelles, celles des figures 5.17 **b** et **d**, conservent un motif d'interférences visible. Le nuage d'atomes est donc à l'équilibre. En revanche, pour la première bande excitée, d'indice impair donc, on remarque que l'évolution temporelle présentée sur la figure 5.17 **c** ne conservent pas de motif d'interférences visible dès 2 ms de temps de maintien : le nuage devient complètement thermique.

Soulignons que préparer une inversion de population par des schémas de contrôles plus classiques s'avère être compliqué : comme nous l'avons présenté au chapitre 3, il est possible d'utiliser une modulation périodique du réseau. Seulement, les règles de sélection imposent d'utiliser soit une modulation de phase soit une modulation d'amplitude pour cibler les bandes paires ou impaires au centre de la première zone de Brillouin. Cela impose donc d'ajuster le protocole suivant la bande ciblée et d'utiliser plusieurs paramètres de contrôle du système (amplitude, fréquence, durée de modulation, etc). Afin de déplacer les atomes dans des sous-espaces $k \neq 0$ de la structure de bande, il est nécessaire d'utiliser une accélération du réseau en plus de la modulation. Pour respecter la condition d'adiabadicité de telle manière à ce que le nuage d'atomes reste dans la bande dans laquelle il se trouve, les protocoles expérimentaux se doivent d'être adiabatiques, impliquant des temps de contrôle potentiellement longs et pouvant induire du chauffage dans le système. Le contrôle optimal est en revanche rapide (les temps de protocole sont de l'ordre de la centaine de μs pour une profondeur de l'ordre de $s = 5$ et décroissants avec la profondeur du réseau), efficace (la fidélité à l'état cible est supérieure à 90%) et repose uniquement sur le contrôle d'un unique paramètre du système : la phase du réseau optique.

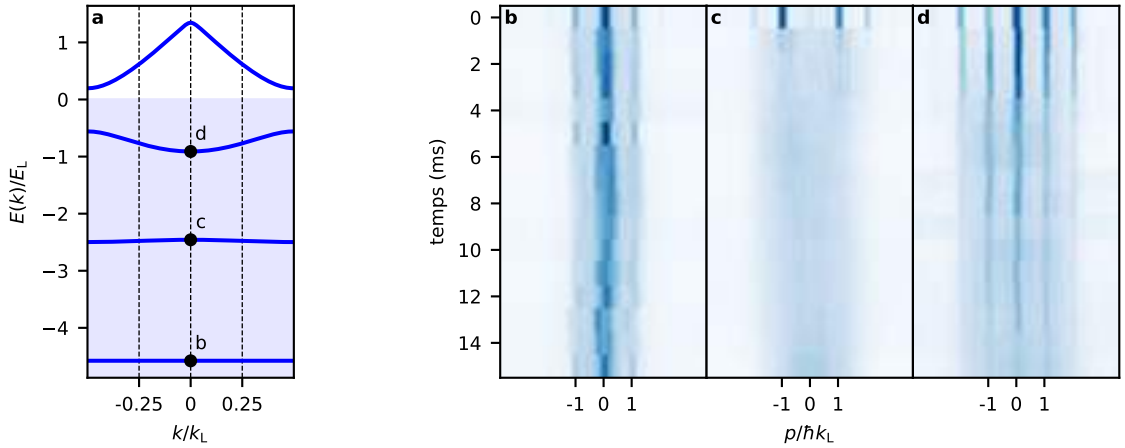


Figure 5.17 – Etude de la stabilité des bandes. Structure de bande pour un réseau de profondeur $s = 8.2$. La région bleutée indique la partie liée de la structure de bande. Les points noirs correspondent aux états préparés par contrôle optimal en **b**, **c** et **d**. **b** : Etat fondamental du réseau. **c-d** : Préparation de l'état de la première et deuxième bande excitée en $k = 0$ respectivement. Les données expérimentales montrent l'évolution temporelle de l'état préparé dans un réseau statique pendant une durée de 15 ms par pas de 1 ms.

Notons qu'un groupe de recherche avait déjà effectué un type de préparation d'états excités et de superpositions similaires dans un réseau optique [157]. Cependant, ils utilisent une manipulation conjointe de l'amplitude et de la phase et se limitent à des contrôles pulsés pour leurs protocoles.

5.3.3.2 Préparation de superpositions contrôlées d'états propres du réseau

Après avoir préparé des états propres du réseau optique, nous avons préparé des superpositions d'états propres. Les états que nous avons préparés sont les suivants

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n=1,k=0\rangle + |n=2,k=0\rangle\right), \tag{5.60}$$

$$|\psi_7\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n=0,k=0.25\rangle + |n=1,k=0.25\rangle\right). \tag{5.61}$$

Leurs représentations dans la structure de bande sont présentées figure 5.18 **a**. Les évolutions temporelles obtenues expérimentalement sont données figures 5.18 $\mathbf{b_1}$ et $\mathbf{c_1}$. Comme dans le cas de la préparation d'états propres du réseau, nous regardons l'évolution temporelle de la superposition préparée par contrôle optimal dans le sous-espace associé (dans le réseau statique pour l'état $|\psi_6\rangle$ et dans le réseau défilant pour $|\psi_7\rangle$). Nous comparons ces résultats expérimentaux aux propagations numériques de l'état obtenu par contrôle optimal présentées sur les figures 5.18 $\mathbf{b_2}$ et $\mathbf{c_2}$ et observons un très bon accord entre théorie et expérience. Sur ces figures, on remarque que

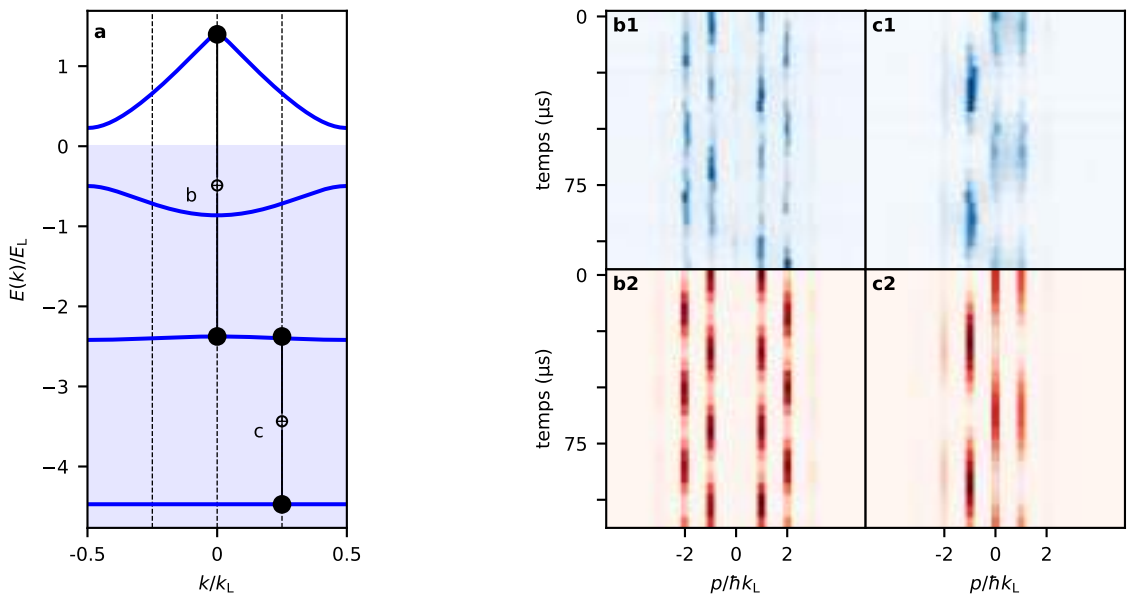


Figure 5.18 – Superposition d'états de la structure de bande. a : Structure de bande pour un réseau de profondeur $s = 5.6$. La région bleutée indique la partie liée de la structure de bande. Les paires de points noirs reliés par un signe $\oplus$ correspondent aux superpositions d'états préparées par contrôle optimal en **b** et **c**. **b** : Préparation d'une superposition équiprobable des états propres de la deuxième et troisième bande excitée en $k = 0$. $\mathbf{b_1}$: Données expérimentales montrant l'évolution de l'état préparé dans un réseau statique pendant une durée de 110 μs. $\mathbf{b_2}$: Evolution numérique temporelle de l'état obtenu par contrôle optimal dans les mêmes conditions. **c** : Idem que pour **b** mais pour une superposition équiprobable d'états propres de la bande fondamentale et la deuxième bande excitée en $k = 0.25k_L$.

tous les ordres de diffraction oscillent à la même fréquence. En effet, comme il s'agit de superpositions d'uniquement deux états de la structure de bande, il n'y a qu'une différence en énergie impliquée dans cette superposition ΔE et, par conséquent, qu'une seule fréquence d'oscillation $\Delta E/\hbar$.

Les limites des schémas classiques deviennent d'autant plus marquantes lorsqu'il s'agit de préparer une superposition d'état propres du réseau. Un protocole exploitant les transitions Zener lors de l'accélération du réseau a mis en évidence la préparation de superpositions entre la bande fondamentale et la première bande excitée [158]. Avec ce protocole, la répartition de population entre les bandes requiert un ajustement de la profondeur du réseau et ne peut donc pas se faire à profondeur fixée. De plus, une superposition entre deux bandes excitées n'a pas été démontrée. Le contrôle du quasi-moment de la superposition est également compliqué à contrôler avec ce type de méthode.

Récapitulatif

Le contrôle optimal permet donc de préparer des états propres ainsi que des superpositions d'états propres de la structure de bande du réseau et ce à n'importe quel quasi-moment k. Les états propres du réseau sont des états stationnaires alors que les superpositions d'états propres oscillent à une fréquence donnée par le gap en énergie entre les deux bandes impliquées $\Delta E/\hbar$. La phase ainsi que les poids de la superposition peuvent être ajustés par contrôle optimal.

Nous voyons donc avec ces travaux la diversité des cibles atteignables par le contrôle optimal. Une remarque que nous pouvons faire à ce stade est que nous n'avons exploité qu'un seul des deux degrés de liberté du réseau optique, à savoir le contrôle en phase. Une question en cours d'investigation au moment de rédiger ce manuscrit est de savoir ce qu'apporterait un contrôle optimal de l'amplitude du réseau optique. Un premier élément de réponse à cette question est que le contrôle en amplitude conserve la symétrie de parité de la distribution en impulsion. Cela restreint donc l'espace des états accessibles avec ce type de contrôle mais offre une robustesse vis-à-vis de la conservation de cette symétrie qui peut être intéressante : si, pour une application donnée, il est nécéssaire de produire une distribution en impulsion symétrique, cela sera assuré dans le cas d'un contrôle en amplitude. Notons qu'il est également possible d'effectuer un contrôle conjoint de la phase et de la profondeur du réseau optique. Le gain en terme de fidélité à l'état cible et d'espace des états accessibles apporté par ce type de contrôle n'a pas encore été étudié.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dans un premier temps donné un aperçu de la théorie du contrôle optimal, développée initialement pour des systèmes classiques. Nous avons présenté le principe du maximum de Pontryagin et l'algorithme du gradient. Puis, nous avons présenté comment ce formalisme peut être adapté au contrôle de systèmes quantiques. Nous avons ensuite présenté l'algorithme qu'a utilisé Dominique Sugny, chercheur à l'université de Dijon avec qui nous collaborons, afin de façonner la distribution en impulsion du nuage d'atomes au sein du réseau optique.

Nous avons ensuite présenté la mise en pratique de cet algorithme et démontré notre capacité à contrôler les populations et les phases relatives des différentes composantes de la distribution en impulsion du nuage d'atomes. Nous avons alors un contrôle sur la totalité de l'état quantique du nuage dans le réseau et nous avons alors préparé différents états propres et superposition d'états propres du réseau optique. Il est à noter que l'algorithme utilisé pour déterminer les champs de contrôle optimaux ne considère qu'une fonction d'onde à un corps dans un réseau infini. Les in-

teractions interatomiques et le confinement harmonique superposé au réseau ne sont pas pris en compte et, malgré cela, l'accord observé entre expérience et théorie est très bon. Cela montre donc la robustesse du contrôle optimal vis-à-vis des interactions et du confinement extérieur.

Ce travail ouvre des perspectives intéressantes : avec ce protocole de préparation nous pouvons étudier la stabilité des bandes du réseau optique comme expliqué précédemment. Des phénomènes liés d'une part aux interactions entre atomes et d'autre part à la courbure des bandes excitées deviennent alors accessibles [96]. Il devient également possible de manipuler le nuage d'atomes dans l'espace des phases du réseau optique. Nous avons en réalité déjà présenté des résultats intéressants dans une interprétation en termes d'espace des phases : un monôme d'impulsion correspond de fait à un état comprimé en impulsion. Il devient alors envisageable de définir l'état cible à atteindre par contrôle optimal comme un état dans l'espace des phases : on peut considérer obtenir des états comprimés en impulsion, en position, selon une direction arbitraire de l'espace des phases, des états chat de Schrödinger etc. Ces différents états peuvent servir à préparer des états initiaux optimisés pour des simulations quantiques de phénomènes physique difficiles à observer. Dans la prochaine partie, nous présentons l'étude que nous avons effectuée (sans contrôle optimal) sur l'effet tunnel assisté par le chaos. Le contrôle optimal pourrait améliorer les résultats que nous avons obtenus.

Publication relié à ce chapitre

— N. Dupont, G. Chatelain, L. Gabardos, M. Arnal, J. Billy, B. Peaudecerf, D. Sugny, D. Guéry-Odelin, "Quantum state control of a Bose-Einstein condensate in an optical lattice", *PRX Quantum*, vol. **2**, no. 4 p. 040303, 2021.

Troisième partie

Contrôle du réseau en amplitude

6 Résonances dans l'effet tunnel assisté par le chaos

Sommaire

6.1 Introduction . . . 208
6.2 Introduction théorique . . . 210
6.2.1 Espace des phases stroboscopique . . . 210
6.2.1.1 Adimensionnement de l'hamiltonien du réseau modulé . . . 210
6.2.1.2 Portrait de phases stroboscopique . . . 212
6.2.2 Effet tunnel dans un espace des phases stroboscopique . . . 216
6.2.2.1 Représentation de Husimi . . . 216
6.2.2.2 Rappel et analogie avec le double de puits de potentiel . . . 217
6.2.2.3 Théorème de Floquet-Bloch . . . 219
6.2.2.4 Effet tunnel régulier . . . 220
6.2.2.5 Effet tunnel assisté par le chaos . . . 222
6.2.2.6 Influence du quasi-moment k . . . 225
6.3 Expériences pionnières . . . 226
6.3.1 L'expérience de Gaithersburg [5] . . . 226
6.3.2 L'expérience d'Austin [6] . . . 228
6.3.3 Récapitulatif et comparaison des expériences . . . 230
6.4 Résultats expérimentaux . . . 232
6.4.1 Bifurcation des zones de stabilité dynamiques . . . 232
6.4.1.1 Origine de la bifurcation . . . 232
6.4.1.2 Observation de la bifurcation des zones de stabilité . . . 233
6.4.2 Résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos . . . 238
6.4.2.1 Protocole expérimental . . . 238
6.4.2.2 Observation expérimentale de l'effet tunnel régulier . . . 241
6.4.2.3 Observation expérimentale de l'effet tunnel assisté par le chaos . 242
6.5 Conclusion . . . 246

Littlefinger : *Chaos isn't a pit. Chaos is a ladder.*

Game of thrones - The Climb

6.1 Introduction

Il existe plusieurs exemples de prédictions en physique qui, suivant qu'un formalisme classique ou quantique est utilisé, donnent des résultats drastiquement différents. L'un des exemples les plus emblématiques est sans doute l'effet tunnel. Le cas de figure le plus connu de ce type de comportement non-classique est le passage d'une particule à travers une barrière d'énergie : dans une vision classique, une particule ne possédant pas assez d'énergie mécanique pour franchir une barrière de potentiel restera indéfiniment du même côté de cette dernière mais la mécanique quantique prédit une probabilité non nulle que la particule parvienne à traverser la barrière. Toutefois, ce type d'effet tunnel impliquant une barrière d'énergie n'est pas le plus général. Au début des années 1980, Eric Heller et Michael Davis proposent qu'une autre constante du mouvement que l'énergie peut interdire un mouvement classique [159, 160] : une particule dans une région stable de l'espace des phases ne peut s'en échapper. La mécanique quantique prévoit quant à elle que la particule peut passer d'une région stable à l'autre de l'espace des phases par effet tunnel. On parle alors d'effet tunnel *dynamique*. Peu de temps après sa prédiction théorique, diverses expériences ont mis en évidence cet effet tunnel, par exemple dans des molécules [161, 162, 163], des cavités supraconductrices [164, 165, 166], des cavités laser [167] ou encore des micro-cavités diélectriques [168, 169]. En 1994, Steven Tomsovic et Denis Ullmo proposent qu'un mécanisme tunnel plus complexe entre deux zones de stabilité peut exister [170], représenté schématiquement sur la figure 6.1. En étudiant un hamiltonien unidimensionel périodiquement modulé dans le temps, ils montrent que le portrait de phase associé peut être *mixte*, c'est-à-dire présenter des régions stables, régions que l'on nomme des *îlots de statbilité* constituées uniquement de trajectoires régulières, séparés par une région chaotique que l'on nomme la *mer chaotique*. L'effet tunnel peut alors être dans ce cas *assisté par le chaos* : une particule initialement dans une région stable de l'espace des phases peut passer par effet tunnel dans la mer chaotique avant de repasser à nouveau par effet tunnel dans une région stable. La signature de cet effet tunnel assisté par le chaos est qu'il conduit à de fortes variations de la fréquence d'oscillation tunnel avec les paramètres du système : on assiste à un phénomène de résonance dû à la participation dans le mécanisme tunnel d'un troisième état délocalisé dans la mer chaotique.

Peu après cette prédiction théorique, deux groupes de recherche américains essaient de prouver expérimentalement l'existence de ce nouveau mécanisme tunnel : le groupe de William Phillips

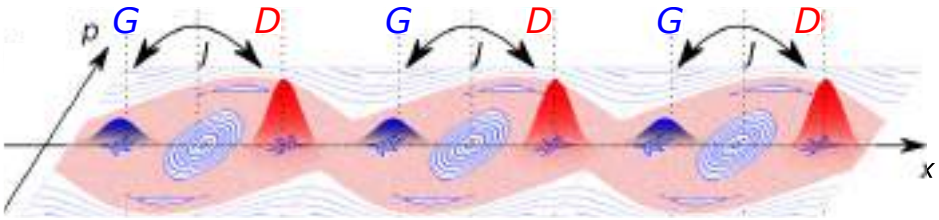


Figure 6.1 – Schéma de principe de l'effet tunnel assisté par le chaos. Une fonction d'onde peut osciller par effet tunnel entre deux îlots de la mer chaotique lorsqu'on module l'amplitude du réseau : ici une partie de la fonction d'onde se trouve sur l'îlot de gauche (en bleu) et une partie sur l'îlot de droire (en rouge).

au NIST et le groupe de Mark Raizen à l'université d'Austin. Sept ans après l'article initial de Tomsovic et Ullmo, ils publient leurs résultats à quelques semaines d'écart proclamant l'observation de l'effet dynamique et suggérant l'observation de l'effet tunnel assisté par le chaos [5, 6]. Cependant, quelques années plus tard un groupe français remet en cause leur observation de l'effet tunnel assisté par le chaos [171, 172] et son existence reste alors à prouver expérimentalement. À partir de 2013, l'équipe Atomes Froids du LCAR, Bertrand Georgeot et Gabriel Lemarié du Laboratoire de Physique Théorique collaborent en vue de mettre en évidence expérimentalement les résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos. Cinq ans de travail sont nécessaires pour monter une nouvelle expérience permettant d'atteindre le niveau de contrôle requis pour un tel projet, caractériser tout le régime de fréquence de modulation [98, 156, 36, 101] et modéliser précisément l'expérience envisagée pour observer l'effet tunnel [173]. En 2018, au début de ma thèse, l'équipe décide qu'elle a toutes les informations nécessaires pour débuter la campagne de prise de données sur ce sujet. Dans ce chapitre, je présenterai les résultats que nous avons obtenus [40].

Dans une première partie, je rappellerai les éléments théoriques permettant de comprendre avec un point de vue quantique les systèmes dynamiques présentant classiquement un espace des phases mixte. Nous verrons comment il est possible d'adapter la notion d'espace des phases pour un système périodiquement modulé dans le temps. Puis, nous verrons qu'il existe une analogie entre l'effet tunnel à travers une barrière d'énergie et l'effet tunnel entre deux îlots de stabilité lorsque qu'aucune trajectoire chaotique ne les sépare. Je présenterai alors le formalisme qui permet d'aborder l'effet tunnel dynamique dans ce contexte ainsi que l'effet tunnel assisté par le chaos : le formalisme de Floquet.

Dans une seconde partie, je présenterai les résultats expérimentaux des groupes du NIST et d'Austin. Nous présenterons notamment les limitations expérimentales de ces deux expériences de l'état de l'art et comment nous nous en sommes affranchis.

Enfin dans une troisième partie, je présenterai nos résultats portant d'une part sur l'observation de la bifurcation des zones de stabilité dans l'espace des phases stroboscopique et d'autre part sur l'observation de résonances dans l'effet tunnel assisté par le chaos.

6.2 Introduction théorique

Dans cette première partie nous allons rappeler les éléments théoriques nécessaires à la compréhension de l'effet tunnel assisté par le chaos. Pour cela nous allons dans un premier temps aborder la notion d'espace des phases stroboscopique. Il s'agit d'une représentation classique des trajectoires de particules dans un potentiel périodiquement modulé dans le temps. Puis, nous présenterons le formalisme de Floquet permettant d'aborder l'évolution de fonctions d'onde dans un système modulé périodiquement dans le temps.

6.2.1 Espace des phases stroboscopique

Nous avons vu au chapitre 3 de cette thèse que le portrait de phase dans lequel évolue un atome est déterminé par le potentiel auquel il est soumis. Nous avons alors expliqué le mouvement des atomes dans l'espace des phases dans le cas où le potentiel du réseau était statique. En revanche, si ce potentiel varie au cours du temps, le portrait de phases n'est plus est un outil pertinent pour l'étude de ce système puisqu'il n'est valide qu'à un instant t. Il est cependant possible d'adapter cet outil dans le cas d'une modulation périodique. En effet, au bout d'une période de modulation T, le potentiel revient à l'identique et est donc le même à tous les instants nT, où n est un entier. En observant ce portrait de phase *stroboscopiquement* toutes les périodes de modulation, il est possible de visualiser le mouvement des atomes dans le potentiel dépendant du temps. Dans cette partie nous allons nous intéresser à la modulation périodique en amplitude du réseau optique et nous allons voir comment aborder ce type de modulation via un adimensionnement de l'hamiltonien correspondant.

6.2.1.1 Adimensionnement de l'hamiltonien du réseau modulé

Afin d'étudier la dynamique des atomes dans un réseau modulé, il est pratique d'utiliser un ensemble de variables adimensionnées que nous allons définir dans cette partie.

Dans le cas d'une modulation périodique, le potentiel revient à l'identique toutes les périodes de modulation T. L'idée est qu'en restreignant l'observation de l'état du système uniquement à chaque période de modulation, on se ramène à un espace des phases statique. On parle alors dans

ce cas *d'espace des phases stroboscopique*.

Considérons l'hamiltonien du réseau de profondeur s périodiquement modulé en amplitude à la fréquence ω et d'amplitude de modulation ε

$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{2m} - \frac{sE_\mathrm{L}}{2}(1+\varepsilon\cos(\omega t))(1+\cos(k_\mathrm{L}x)). \tag{6.1}$$

Afin d'étudier ce système, introduisons le temps et la position adimensionnés qui apparaissent naturellement dans l'hamiltonien (6.1)

$$\tilde{t} = \omega t, \quad \tilde{x} = k_\mathrm{L}x. \tag{6.2}$$

À partir de ces deux variables, on peut définir l'impulsion adimensionnée comme

$$\tilde{p} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{k_\mathrm{L}}{m\omega}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = \frac{k_\mathrm{L}}{m\omega}p. \tag{6.3}$$

Ce trio de variables adimensionnées permet de définir l'hamiltonien adimensionné suivant

$$\boxed{\tilde{H}(\tilde{x},\tilde{p},\tilde{t}) = \frac{\tilde{p}^2}{2} - \gamma(1+\varepsilon\cos(\tilde{t}))(1+\cos(\tilde{x})),} \tag{6.4}$$

où nous avons introduit γ, la profondeur adimensionnée du réseau modulé dont l'expression est

$$\boxed{\gamma = \frac{sE_\mathrm{L}k_\mathrm{L}^2}{m\omega^2} = s\left(\frac{\nu_\mathrm{L}}{\nu}\right)^2.} \tag{6.5}$$

L'hamiltonien (6.4) dépend explicitement de deux paramètres, γ et ε. Nous verrons dans la prochaine partie que ce couple de paramètres (γ,ε) définit l'espace des phases stroboscopique dans lequel vont évoluer les atomes. Ces deux paramètres ont donc une origine et une interprétation classique sur le mouvement des atomes.

Nous pouvons définir un troisième paramètre du système qui va influencer la dynamique des atomes de manière implicite : la constante de Planck effective. En effet, si nous calculons le commutateur des variables de position $\tilde{x}$ et impulsion $\tilde{p}$ adimensionnées, nous obtenons l'expression suivante

$$\boxed{[\tilde{x},\tilde{p}] = \frac{k_\mathrm{L}^2}{m\omega}[x,p] = i\hbar_\mathrm{eff} \quad \Rightarrow \quad \hbar_\mathrm{eff} = 2\frac{\nu_\mathrm{L}}{\nu}.} \tag{6.6}$$

La constante de Planck effective peut ainsi être modifiée expérimentalement en jouant sur la fréquence de modulation. Ce paramètre $\hbar_\mathrm{eff}$ a quant à lui une interprétation quantique : comme

pour la constante de Planck dans un espace des phases statique, il représente la surface typique d'un état gaussien d'aire minimale dans l'espace des phases adimensionné (minimisant l'inégalité de Heisenberg). Nous voyons alors qu'aux trois paramètres expérimentaux (s, ε, ω) correspondent trois paramètres du système adimensionné $(\gamma, \varepsilon, \hbar_{\text{eff}})$.

Dans la suite de ce chapitre, je ferai uniquement référence aux variables adimensionnées que nous venons de définir et je les noterai à partir de maintenant x, p, t pour plus de légèreté dans les notations.

Dans la prochaine partie nous allons présenter la construction des portraits de phases stroboscopiques en fonction des valeurs du couple (γ, ε). Nous verrons que dès lors que ε est différent de zéro, il existe des trajectoires chaotiques et régulières dans l'espace des phases. Ce dernier est alors dans ce cas qualifié de *mixte*.

6.2.1.2 Portrait de phases stroboscopique

Pour obtenir la dynamique classique des atomes dans le réseau modulé, il convient de résoudre les équations du mouvement. À l'instar du réseau statique, on peut obtenir ces dernières à partir des équations d'Hamilton

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= p, \\ \dfrac{dp}{dt} &= -\gamma(1+\varepsilon\cos(t))\sin(x). \end{cases}} \tag{6.7}$$

Contrairement au cas statique présenté au chapitre 3, l'énergie du système n'est plus conservée. Le système n'est alors plus intégrable au sens où l'était son pendant statique car il n'existe plus assez de constantes du mouvement. De plus, le terme proportionnel au $\sin(x)$ induit des non-linéarités dans l'évolution d'une trajectoire du système. Ces deux caractéristiques mènent alors à l'émergence de dynamiques chaotiques : suivant les valeurs des paramètres (γ, ε), une condition initiale dans l'espace des phases (x_0, p_0) pourra mener à une trajectoire régulière ou chaotique. Afin de se faire une intuition, de la différence de comportement entre une trajectoire régulière et chaotique, divisons par la pensée l'espace des phases en un grand nombre de cellules élémentaires $dxdp$. Une trajectoire régulière visitera un faible nombre de cellules lors de son évolution temporelle comparativement à une trajectoire chaotique qui pourra en visiter une grande partie. En complément de cette première différence, on peut également dire que deux trajectoires régulières dont les conditions initiales sont infinitésimalement proches dans l'espace des phases resteront proches tout au long de leur évolution. En revanche, s'il s'agit de trajectoires chaotiques, elles

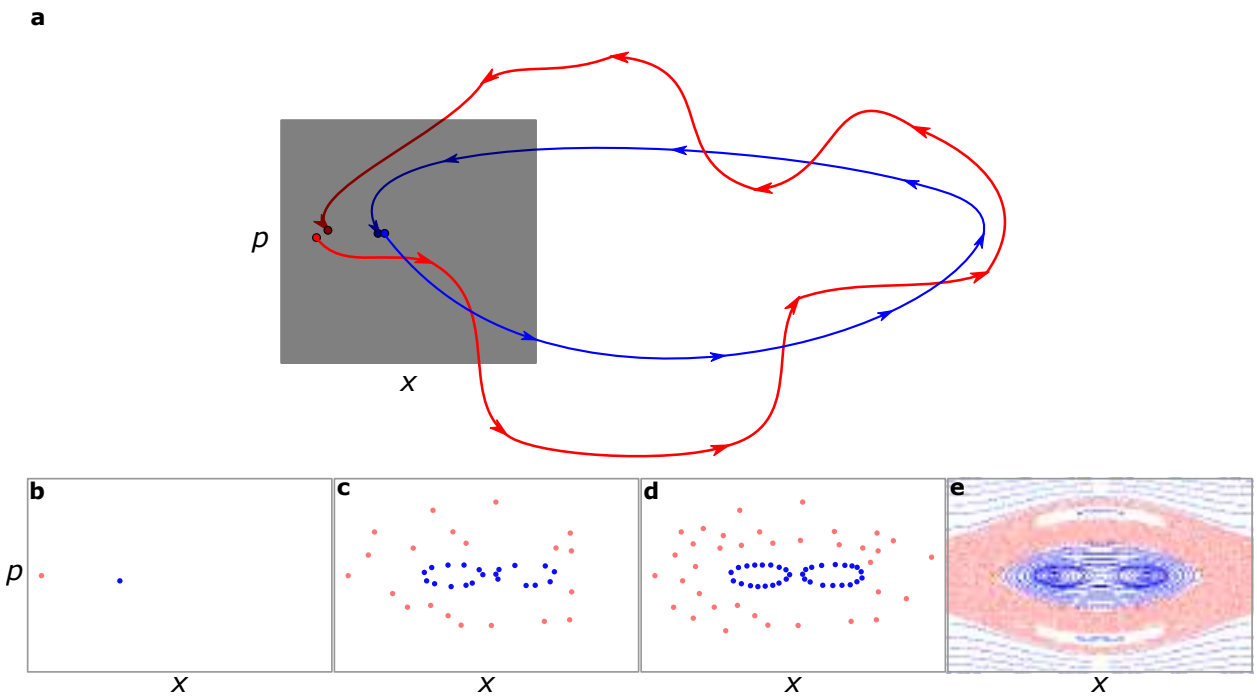


Figure 6.2 – Schéma de principe d'un espace des phases stroboscopique. **a** : L'hamiltonien (6.4) étant unidimensionnel, deux degrés de libertés, la position x et impulsion p, définissent le plan de l'espace des phases. L'évolution temporelle du système fait évoluer ce plan selon une troisième dimension. À cause de la périodicité en x et en t, l'évolution du système est contrainte sur un tore. Le portrait de phase stroboscopique est construit en considérant les intersections des trajectoires, représentées par les flèches bleues et rouges, avec le plan l'espace des phases, représenté par le plan en gris, pour un ensemble de conditions initiales. **b** : Exemple de deux conditions initiales dans l'espace des phases. La condition initiale bleue correspond à une trajectoire régulière alors que la condition initiale rouge correspond à une trajectoire chaotique. Les paramètres de modulation sont ($\gamma = 0.265, \varepsilon = 0.27$) **c-d** : Portaits de phases stroboscopiques obtenus pour les conditions initiales de **b** pour respectivement 20 et 36 périodes de modulation. **e** : Portrait de phases stroboscopique pour un grand nombre de conditions initiales et un grand nombre de périodes de modulation.

s'écarteront d'une distance arbitraire dans l'espace des phases au cours de leur évolution.

Pour étudier cette dépendance de manière systématique, nous utilisons une nouvelle représentation du portrait de phases dite *stroboscopique*. L'hamiltonien (6.4) est unidimensionnel et il dépend donc de la position x et de l'impulsion p d'une particule. Ces deux variables définissent le plan de l'espace des phases qui représente l'état d'une particule. La dépendance temporelle de l'hamiltonien fait évoluer ce plan suivant une troisième dimension : dans ce cas, l'état d'une particule peut alors évoluer dans un volume et la périodicité spatiale et temporelle du système impose que

la topologie de ce volume est torique. Afin d'étudier la dynamique du système pour un couple (γ, ε), on peut tracer l'intersection des trajectoires avec une coupe de ce tore pour un ensemble de conditions initiales (x_0, p_0), comme illustré sur la figure 6.2. Sur cette figure, les flèches rouges et bleues correspondent schématiquement à des trajectoires respectivement chaotique et régulière obtenues par résolution des équations (6.7) pour une condition initiale (x_0, p_0) dans le plan $t = 0$ représenté en gris. Après une période de modulation, la trajectoire passe à nouveau par le plan initial en un autre point de l'espace des phases $(x(t_1), p(t_1))$. En laissant le système évoluer pendant N périodes de modulation, on obtient donc N nouveaux points d'une trajectoire dans l'espace des phases stroboscopique. Deux exemples de trajectoires sont données sur la figure 6.2 : une trajectoire régulière qui explore une faible surface du portait de phases et une trajectoire chaotique, qui elle explore une plus large surface. Afin d'avoir une représentation complète du portrait de phase stroboscopique, il faudrait idéalement répéter cette procédure pour toutes les conditions initiales possibles de l'espace des phases et pendant un nombre infini de périodes de modulation. Cela est en pratique impossible et nous nous restreignons donc à un nombre fini de conditions initiales et de périodes de modulation. Le portrait de phases correspondant aux paramètres de modulation $(\gamma = 0.265, \varepsilon = 0.27)$ pour un grand nombre de conditions initiales et un grand nombre de périodes de modulation est représenté sur la figure 6.2 **e**. Sur ce portrait de phases, on distingue que les trajectoires régulières forment des îlots de stabilité autour de points stables de l'espace des phases. On peut apercevoir deux îlots de stabilité alignés selon l'axe des positions x entourés d'un îlot plus grand au centre de l'espace des phases. On peut également apercevoir deux îlots alignés verticalement selon l'axe des impulsions p. Tous ces îlots sont immergés dans une mer chaotique contrainte en impulsion par les trajectoires des particules libres (les trajectoires ouvertes de grande impulsion initiale $p_0 \gg \sqrt{\gamma}$ qui ne ressentent que faiblement l'effet du potentiel).

Il est ici important de préciser que ces îlots bougent dans l'espace des phases lorsqu'ils ne sont plus observés stroboscopiquement. Pour s'en rendre compte, nous pouvons tracer le portrait de phases stroboscopique mais à des instants décalés par rapport à l'origine des temps $t = (n + \xi)T$ où $n \in \mathbb{N}$ et $\xi \in [0, 1]$. Le portrait de phases de la figure 6.2 est représenté pour différents ξ sur la figure 6.3 **b**-**e**. Comme représenté sur cette figure, considérer un ξ différent de zéro revient à décaler le plan de coupe de l'espace des phases le long du tore de modulation. Il est également important de noter que les îlots alignés selon l'axe des position ou des impulsions lorsque $\xi = 0$ n'ont pas le même comportement sub-période de modulation. En effet, on observe que les îlots alignés le long de l'axe des impulsions pour $\xi = 0$ passent dans le site voisin à chaque période de modulation. En revanche, les îlots alignés selon l'axe des positions effectuent une *rotation dans l'espace des phases au sein du même site* [1] : au bout d'une période de modulation, l'îlot initialement situé à gauche se retrouve à droite et vice versa. Par conséquent, si nous chargeons les atomes

1. Nous verrons dans la suite de ce chapitre que nous exploitons le mouvement sub-période des îlots dans notre protocole de mesure de l'état obtenu après modulation.

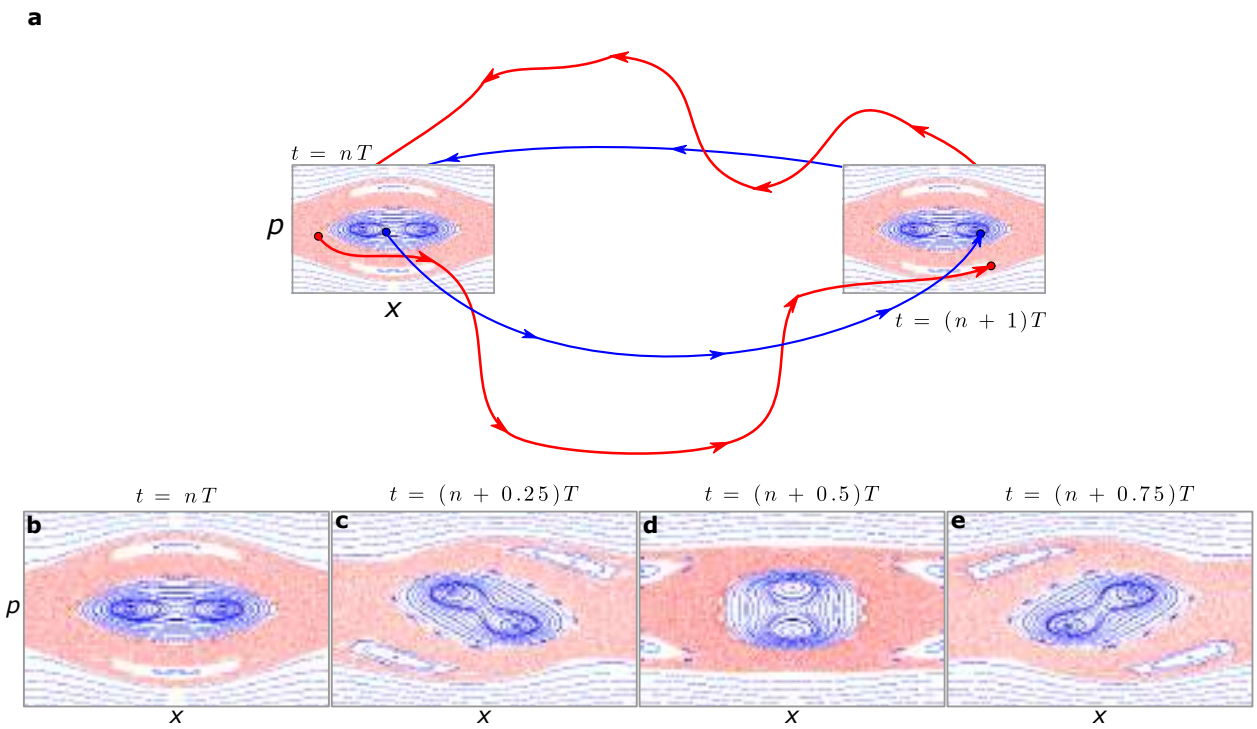


Figure 6.3 – Schéma explicatif du mouvement sub-période de modulation dans l'espace des phases stroboscopique. **a** : Déplacer le plan de coupe pour lequel le portrait de phase est tracé le long des trajectoires revient à considérer stroboscopiquement les instants $t = (n + \xi)T$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\xi \in [0, 1]$. **b** : Portrait de phases stroboscopique généré par les paramètres de modulation $(\gamma = 0.265, \varepsilon = 0.27)$ pour $\xi = 0$. **c** : Pour $\xi = 0.25$. **d** : Pour $\xi = 0.5$. **e** : Pour $\xi = 0.75$.

dans un des deux îlots de stabilité alignés selon l'axe des positions et que nous mesurons l'état du système toutes *les deux périodes de modulation*, nous nous attendons *classiquement* à trouver les atomes toujours du même côté du portrait de phase.

Soulignons à nouveau que les portraits de phases stroboscopiques générés par les équations (6.7) sont dépendants des deux paramètres (γ, ε) là où ils étaient dépendants uniquement de la profondeur s dans le cas du réseau statique. On comprend alors que la diversité de portraits de phases stroboscopiques pouvant être façonnés via une modulation périodique du réseau est beaucoup plus importante que dans le cas statique.

Récapitulatif

En résumé, l'étude temporelle du potentiel créé par le réseau optique est simplifiée dans le cas d'une modulation périodique. On peut adapter la notion de portrait de phases introduite dans le cas statique à une vision stroboscopique du système : les trajectoires évoluent au cours du temps et les intersections de ces trajectoires avec un plan définissent le portrait de phases stroboscopique. La forme de ces portraits de phases stroboscopiques dépend de deux paramètres (γ, ε) et ils peuvent adopter une grande diversité de profils différents : de quasiment intégrable à complètement chaotique.

Dans la prochaine partie nous allons présenter le formalisme de Floquet, équivalent du théorème de Bloch pour une périodicité temporelle, qui va nous permettre de prédire l'évolution de fonctions d'onde dans le réseau modulé.

6.2.2 Effet tunnel dans un espace des phases stroboscopique

Les considérations que nous avons faites jusqu'à présent sur la dynamique des atomes au sein du réseau optique modulé sont classiques. Or, comme nous avons eu l'occasion de le voir plusieurs fois déjà dans ce manuscrit, une description quantique de la dynamique au sein du réseau est nécessaire. Nous allons donc tout d'abord présenter succinctement comment représenter un système quantique dans un espace des phases via la représentation de Husimi.

6.2.2.1 Représentation de Husimi

Afin d'étudier un système quantique, on peut chercher une représentation de ce dernier dans l'espace des phases. Cependant, à cause du principe d'incertitude de Heisenberg, on ne peut pas assigner une probabilité précise à un point de l'espace de phase : on ne peut donc pas attribuer de distribution de probabilité au système dans l'espace des phases comme on pourrait le faire en physique statistique. Au mieux, on peut définir une distribution de quasi-probabilité. Plusieurs formalismes existent pour décrire une fonction d'onde dans un espace des phases dont les deux plus utilisés sont ceux de Wigner [174] et de Husimi [175]. Chacune de ces deux représentations présentent des avantages et des inconvénients pour l'étude de systèmes quantiques. Pour les travaux que nous allons présenter par la suite, nous n'utiliserons que la représentation de Husimi.

La représentation de Husimi $Q(x,p)$ correspond à la projection d'une fonction d'onde ψ sur un état cohérent $|\alpha\rangle$ dans l'espace des phases, d'impulsion moyenne p et de position moyenne x

$$|\alpha\rangle = \left|\frac{x+ip}{\sqrt{2\pi\hbar_{\text{eff}}}}\right\rangle. \tag{6.8}$$

Cet état cohérent possède une distribution gaussienne en position x et impulsion p dont les écarts-types sont $\Delta x = \Delta p = \hbar_{\text{eff}}/\sqrt{2}$. C'est donc un état de surface minimale dans l'espace des phases saturant l'inégalité de Heisenberg. La définition de la fonction de Husimi est alors

$$Q(x,p) = N|\langle\alpha|\psi\rangle|^2. \tag{6.9}$$

où N est une constante de normalisation telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dxdpQ(x,p) = 1. \tag{6.10}$$

C'est cette représentation de la fonction d'onde qui est représentée schématiquement sur la figure 6.1 dans l'introduction de ce chapitre. Cette représentation permet d'évaluer à quel point une fonction d'onde est localisée dans l'espace des phases. Via cette représentation, il est alors possible d'associer des états quantiques à des structures classiques du portrait de phases [171]. Si la surface représentée par $\hbar_{\text{eff}}$ est plus petite que la surface des îlots de stabilité, les états quantiques occupent une faible surface dans l'espace des phases et il devient alors facile de leur attribuer un caractère régulier ou chaotique suivant leur localisation sur le portrait de phases. C'est ce que l'on nomme le *régime semi-classique*. À l'inverse, si la surface représentée par $\hbar_{\text{eff}}$ est trop grande par rapport aux structures classiques du portrait de phase il y a une ambiguïté sur le caractère régulier ou chaotique d'un état. C'est ce que l'on nomme le *régime quantique*.

Pour rappel, $\hbar_{\text{eff}}$ est un paramètre du système que nous pouvons ajuster expérimentalement via la fréquence de modulation. Nous pouvons donc en quelque sorte choisir à quel point nous désirons rendre notre expérience quantique ou classique.

Pour comprendre la dynamique quantique des atomes, on peut remarquer une ressemblance entre le portrait de phase stroboscopique généré par les paramètres ($\gamma = 0.265, \varepsilon = 0.27$) et le portrait de phases statique d'un double puits de potentiel, comme représenté sur la figure 6.4. Le double puits de potentiel est un système déjà largement étudié en mécanique quantique et nous allons voir dans la prochaine partie comment nous pouvons exploiter cette ressemblance pour décrire la dynamique quantique des atomes dans un espace des phases stroboscopique.

6.2.2.2 Rappel et analogie avec le double de puits de potentiel

Rappelons donc les processus mis en jeux lors d'un effet tunnel en présence d'une barrière d'énergie. Considérons pour cela un double puits de potentiel dont l'expression est

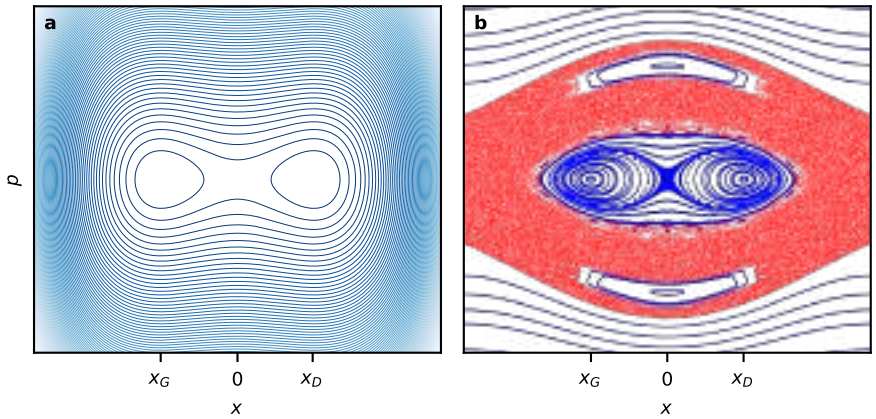


Figure 6.4 – Analogie avec un double puits de potentiel. **a** : Portrait de phases statique d'un double puits de potentiel. **b** : Portrait de phases stroboscopique obtenu pour les paramètres ($\gamma = 0.265, \varepsilon = 0.27$)

$$V(x) = V_0 \left(\frac{x - x_G}{x_G} \right)^2 \left(\frac{x - x_D}{x_D} \right)^2, \tag{6.11}$$

où $x_{G,D}$ sont les positions des deux puits de gauche et de droite et V_0 est la hauteur de la barrière d'énergie séparant les puits. Une particule classique possédant une énergie inférieure à V_0 restera indéfiniment dans le puits où elle se trouve initialement. En revanche la mécanique quantique prédit une probabilité non nulle de trouver la particule dans l'autre puits.

Afin d'aborder ce problème, considérons tout d'abord le cas de figure où la distance $\Delta x = |x_G - x_D|$ tend vers l'infini. Dans ce cas, pour les fonctions d'onde de basse énergie au fond des puits, on peut considérer chacun des deux puits comme étant indépendants l'un de l'autre et donc comme deux oscillateurs harmoniques. Les états et énergies propres de chacun des puits sont donc connus. L'état fondamental de chacun des puits est une gaussienne et l'énergie de ces deux états $E_0 = \hbar\omega$ est dégénérée. On notera $|G\rangle$ la fonction d'onde d'énergie minimale localisée dans le puits de gauche et $|D\rangle$ la fonction d'onde d'énergie minimale localisée dans le puits de droite. Au fur et à mesure que la distance Δx diminue, un couplage δ entre ces deux puits apparaît. Cela a pour effet de lever la dégénérescence des deux niveaux d'énergie fondamentaux de chacun des puits d'une quantité $\hbar\delta$. Dans la base des états $\{|G\rangle, |D\rangle\}$, l'hamiltonien du double puits est alors

$$\hat{H}_{\{|G\rangle,|D\rangle\}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega & -\delta \\ -\delta & \omega \end{pmatrix} \underset{\text{diag.}}{\longrightarrow} \hat{H}_{\{|S\rangle,|AS\rangle\}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega - \delta & 0 \\ 0 & \omega + \delta \end{pmatrix}, \tag{6.12}$$

et, une fois diagonalisé, la base des états propres de cet hamiltonien est donnée par une superposition symétrique et anti-symétrique des états $|G\rangle$ et $|D\rangle$

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|G\rangle + |D\rangle\right), \quad |AS\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|G\rangle - |D\rangle\right). \tag{6.13}$$

L'évolution temporelle d'une fonction d'onde $\psi(x,t)$ initialement localisée sur un des deux puits, par exemple $|G\rangle$, dépend des énergies mises en jeux dans le système

$$|\psi(x,t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i(\omega-\delta)t}|S\rangle + e^{-i(\omega+\delta)t}|AS\rangle\right) = e^{i\frac{\omega}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\delta t}{2}\right)|G\rangle + i\sin\left(\frac{\delta t}{2}\right)|D\rangle\right). \tag{6.14}$$

Par conséquent, la probabilité de présence dans chacun des puits est données par

$$\mathcal{P}_G = \cos^2\left(\frac{\delta t}{2}\right), \quad \mathcal{P}_D = \sin^2\left(\frac{\delta t}{2}\right). \tag{6.15}$$

On remarque que ces deux probabilités évoluent au cours du temps : l'état initial est une superposition des deux états propres du système et va donc osciller entre ces deux états à la fréquence $\delta/2\pi$. Ce transport peut s'effectuer même si l'énergie de la particule est inférieure à la barrière d'énergie. C'est ce que l'on nomme l'effet tunnel.

Maintenant que nous avons rappelé les mécanismes de l'effet tunnel dans un double puits de potentiel, nous allons voir dans la prochaine partie comment nous pouvons adapter cette théorie à un espace des phases stroboscopique présentant deux îlots de stabilité symétriques en position dans l'espace des phases.

6.2.2.3 Théorème de Floquet-Bloch

Dans le cas d'un réseau modulé, nous pouvons faire une analogie entre les îlots de stabilité du portrait de phase stroboscopique et les sites d'un double puits de potentiel. Plus formellement, pour faire cette analogie nous allons utiliser le théorème de Floquet-Bloch que nous rappelons ici.

Le théorème de Floquet-Bloch est le suivant : une fonction d'onde soumise à un hamiltonien présentant une périodicité spatiale et temporelle peut se décomposer sur un ensemble de fonctions appelés états de Floquet-Bloch de la forme

$$\psi_{n,k}(x,t) = e^{-i(\omega_n(k)t+kx)}u_{n,k}(x,t), \tag{6.16}$$

où

- les quasi-pulsations du système sont $\omega_n(k) = \frac{\epsilon_n(k)}{\hbar_{\text{eff}}}$ avec $\epsilon_n(k)$ les quasi-énergies et $\hbar_{\text{eff}}$ la constante de Planck effective définie en (6.6).
- le quasi-moment est k,

— la fonction $u_{n,k}(x,t) = u_{n,k}(x+d, t+T)$ est une fonction possédant la même périodicité spatiale et temporelle que le réseau modulé.

Les états de Floquet-Bloch sont états propres de l'opérateur d'évolution $\hat{U}$ sur une période de modulation

$$\hat{U}(t, t+T)|\psi_{n,k}(x,t)\rangle = e^{-i\omega_n(k)T}|\psi_{n,k}(x,t)\rangle. \tag{6.17}$$

L'équation (6.17) nous indique qu'il existe une invariance par translation dans le spectre du système $\omega_n(k) \to \omega_n(k) + \frac{2\pi}{T}$. Pour éviter toute redondance des solutions, on peut restreindre le spectre de Floquet-Bloch aux intervalles

$$k \in \left[\frac{-k_{\mathrm{L}}}{2}, \frac{k_{\mathrm{L}}}{2}\right], \quad \text{et} \quad \epsilon_n \in \left[\frac{-\pi\hbar_{\mathrm{eff}}}{T}, \frac{\pi\hbar_{\mathrm{eff}}}{T}\right]. \tag{6.18}$$

Maintenant que nous avons énoncé le théorème de Floquet-Bloch, nous allons voir comment nous pouvons utiliser ce formalisme pour décrire la dynamique des atomes dans un espace des phases stroboscopique.

6.2.2.4 Effet tunnel régulier

Dans le cas de l'effet tunnel dynamique que nous considérons, on peut montrer qu'il y a en général deux états de Floquet-Bloch symétrique et antisymétrique qui ont une probabilité de présence maximale sur les îlots classiques. Les états de Floquet-Bloch se comportant sur une période de modulation comme les états propres d'un hamiltonien statique, nous pouvons, à l'instar du double puits de potentiel, construire des états localisés stroboscopiquement sur un îlot de stabilité à la gauche de l'espace des phases $|G\rangle$ ainsi qu'à sa droite $|D\rangle$

$$|G\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi^S_{n,k}\rangle + |\psi^{AS}_{n,k}\rangle\right), \quad |D\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi^S_{n,k}\rangle - |\psi^{AS}_{n,k}\rangle\right), \tag{6.19}$$

où les états $|\psi^S_{n,k}\rangle$ et $|\psi^{AS}_{n,k}\rangle$ sont les états de Floquet-Bloch pour $t = 0\ [T]$, respectivement symétrique et antisymétrique, ayant le plus grand recouvrement avec les îlots de stabilité. Ces états ont respectivement les quasi-énergies ϵ_S et ϵ_{AS} et l'écart en énergie entre ces deux niveaux est

$$|\epsilon_S - \epsilon_{AS}|\,[\omega] = \frac{\omega}{2} + \Delta\epsilon \quad \text{avec} \quad \Delta\epsilon \ll \omega. \tag{6.20}$$

À partir de cet écart en énergie, on peut définir un taux de couplage entre ces deux états

$$\delta = \frac{\Delta\epsilon}{\hbar_{\mathrm{eff}}}. \tag{6.21}$$

Rappelons que les îlots de stabilité évoluent dans l'espace des phases lors de leur mouvement sub-période : au bout d'une période de modulation, ils se retrouvent de l'autre côté de l'espace des

phases comme représenté sur la figure 6.3. À l'échelle d'une période de modulation, on peut dire qu'une fonction d'onde initialement placée sur un îlot à gauche de l'espace des phases évoluera de la manière suivante

$$|\psi(x,t=T)\rangle = \hat{U}(0,T)|G\rangle, \tag{6.22}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{i\epsilon_S T}{\hbar_{\text{eff}}}}|\psi^S_{n,k}\rangle + e^{\frac{i\epsilon_{AS} T}{\hbar_{\text{eff}}}}|\psi^{AS}_{n,k}\rangle\right), \tag{6.23}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\epsilon_S T}{\hbar_{\text{eff}}}}\left(|\psi^S_{n,k}\rangle \;+\; \underbrace{e^{\frac{i\omega T}{2}}}_{-1}\, e^{i\delta T}|\psi^{AS}_{n,k}\rangle\right) \simeq |D\rangle. \tag{6.24}$$

La fonction d'onde est localisée sur l'îlot de droite après une période de modulation à un faible déphasage près. En d'autres termes, la fonction d'onde reste localisée dans l'îlot de stabilité initial mais elle suit son mouvement sub-période de modulation de telle manière à se retrouver de l'autre côté de l'espace des phases après une période de modulation. En continuant ce raisonnement, on voit qu'au bout de deux périodes de modulation, la fonction d'onde est revenue à gauche de l'espace des phases avec un déphasage accumulé plus important. On en conclut qu'afin de mettre en évidence un effet tunnel entre les îlots, il convient de mesurer l'état du système toutes les deux périodes de modulation, cas de figure où l'on s'attend à observer classiquement les atomes toujours du même côté du portrait de phases, et ce sur un grande nombre de périodes de modulation. D'un point de vue quantique, on s'attend de cette manière à ce que le déphasage $e^{i2n\delta T}$ entre les états symétrique et anti-symétrique fasse osciller la fonction d'onde de l'îlot de gauche à l'îlot de droite : c'est l'effet tunnel dynamique.

Plus formellement, sur $2n$ périodes de modulation la fonction d'onde aura l'évolution stroboscopique suivante

$$|\psi(x,2nT)\rangle = \hat{U}(0,2nT)|G\rangle \propto e^{-i\delta nT}|\psi^S_{n,k}\rangle + e^{i\delta nT}|\psi^{AS}_{n,k}\rangle \propto \cos(\delta nT)|G\rangle + i\sin(\delta nT)|D\rangle, \tag{6.25}$$

et les probabilités d'observer les atomes dans un îlot de stabilité sont

$$\mathcal{P}_G = \cos^2(\delta nT), \quad \mathcal{P}_D = \sin^2(\delta nT). \tag{6.26}$$

À l'instar du double puits de potentiel, on s'attend à observer une oscillation tunnel entre les îlots de stabilité de l'espace des phases à la fréquence δ/π. Insistons à nouveau sur le fait que cette prédiction est en désaccord avec l'intuition classique que l'on peut se faire du portrait de phases stroboscopique.

Comme nous l'avons mentionné dans la partie précédente, la diversité de portrait de phases que les paramètres de modulation peuvent générer est vaste et, pour certains paramètres, il se peut

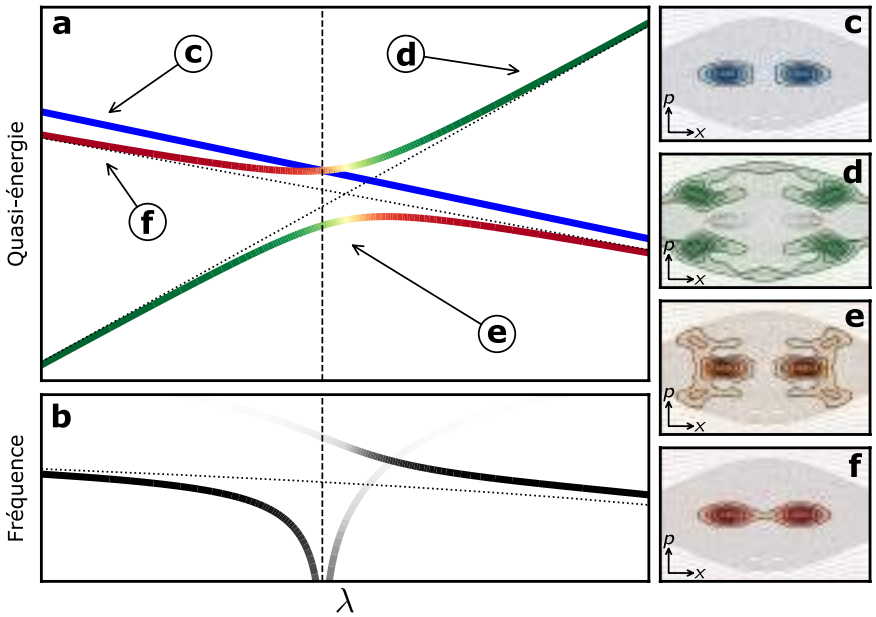


Figure 6.5 – Principe de l'effet tunnel assisté par le chaos. a : Spectre de quasi-énergies d'un doublet d'états réguliers (rouge et bleu) et d'un état chaotique (vert). Un croisement évité apparaît entre l'état chaotique et l'un des états réguliers de même symétrie (ici l'état symétrique). Au fur et à mesure que $\hbar_{\text{eff}}$ est modifié, ces deux états se mélangent puis se repoussent. **b** : La fréquence d'oscillation tunnel résultante est proportionnelle à la différence de quasi-énergies entre les états et présente deux contributions au niveau du croisement et de fortes variations. **c**-**f** : Représentation de Husimi dans l'espace des phases stroboscopique des états impliqués dans le croisement. Les états réguliers antisymétrique (**c**) et symétrique (**f**) sont localisés au voisinage des îlots de stabilité. L'état chaotique (**d**) est quant à lui dispersé dans la mer chaotique. L'état mélangé (**e**) recouvre à la fois les îlots de stabilité et la mer chaotique.

que les deux îlots de stabilité soient séparés par une mer chaotique alors qu'ici les deux îlots étaient protégés du chaos par des trajectoires régulières les entourant comme on peut le voir sur la figure 6.4. Nous allons voir dans la prochaine partie que la présence de chaos entre les îlots de stabilité modifie drastiquement la dynamique des oscillations tunnel entre les deux îlots [176, 177].

6.2.2.5 Effet tunnel assisté par le chaos

Dans le cas où les deux îlots de stabilité sont séparés par une mer chaotique, il se peut qu'un troisième état localisé dans la mer chaotique intervienne dans le transport par effet tunnel. Pour prendre ce mécanisme en compte, la base des états utilisée pour étudier le système est à présent $\left\{|\psi^S_{n,k}\rangle, |\psi^{AS}_{n,k}\rangle, |\psi^C_{n,k}\rangle\right\}$, avec $|\psi^C_{n,k}\rangle$ l'état chaotique : Il s'agit d'un état de Floquet dont la fonction de

Husimi est localisée dans la mer chaotique et possède très peu de recouvrement avec les structures régulières de l'espace des phases. L'hamiltonien du système devient alors [170]

$$\hat{H}(\lambda) = \begin{pmatrix} \epsilon_{AS}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_S(\lambda) & \beta \\ 0 & \beta & \epsilon_C(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{6.27}$$

où l'état chaotique n'interagit qu'avec l'état régulier de même symétrie avec une force de couplage β. Ici nous allons considérer que l'état chaotique est symétrique, mais le raisonnement serait similaire pour un état chaotique anti-symétrique. Comme l'hamiltonien du cas régulier, l'hamiltonien (6.27) décrit un processus de transport par effet tunnel mais comporte une différence fondamentale avec le cas d'un mécanisme à deux états. Dans le cas régulier, si un des paramètres du système, appelons le λ, est modifié au cours de l'expérience, on s'attend à ce que l'écart en énergie entre les états varie de manière monotone en fonction de ce paramètre. Ce n'est en revanche pas le cas pour un système à trois états. Le couplage avec l'état chaotique ne modifie pas l'état symétrique régulier, mais il modifie légèrement son énergie d'une quantité

$$\Delta\varepsilon^{(c)}(\lambda) = \frac{\beta^2}{|\epsilon_S(\lambda) - \epsilon_C(\lambda)|}. \tag{6.28}$$

À partir de cet écart en quasi-énergie, on peut définir un taux de couplage entre l'état chaotique et l'état régulier de même symétrie

$$\delta^{(c)}(\lambda) = \frac{\Delta\epsilon^{(c)}(\lambda)}{\hbar_{\text{eff}}}. \tag{6.29}$$

Ce changement de la quasi-énergie va modifier l'écart entre ϵ_S et ϵ_{AS} et donc modifier la dynamique tunnel : on s'attend à un croisement évité prononcé lorsque les énergies des états chaotique $\epsilon_C(\lambda)$ et symétrique $\epsilon_S(\lambda)$ s'approchent l'une de l'autre. Ce mécanisme est représenté schématique sur la figure 6.5 **a**. Pour mieux comprendre les mécanismes mis en jeux, étudions deux cas limites :

— Dans le cas $\beta^2 \ll |\epsilon_C(\lambda) - \epsilon_S(\lambda)|^2$, donc loin du croisement évité, l'évolution des composantes symétrique et chaotique est celle que nous avons établie dans le cas de l'effet tunnel régulier : il y a un couplage entre deux états du système, $|\psi^C_{n,k}\rangle$ et $|\psi^S_{n,k}\rangle$, et donc une faible oscillation d'amplitude de probabilité entre ces états d'amplitude [170]

$$b \sim \frac{\beta}{\epsilon_C(\lambda) - \epsilon_S(\lambda)}. \tag{6.30}$$

L'état $|\psi^S_{n,k}\rangle$ est inchangé et on a comme évolution pour une fonction d'onde initialement localisée sur l'îlot de gauche de l'espace des phases

$$|\psi(x, 2nT)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{2i\left(\epsilon_S(\lambda)+\Delta\epsilon^{(c)}(\lambda)\right)nT}{\hbar_{\text{eff}}}} |\psi^S_{n,k}\rangle + e^{\frac{2i\epsilon_{AS}(\lambda)nT}{\hbar_{\text{eff}}}} |\psi^{AS}_{n,k}\rangle \right). \tag{6.31}$$

On assiste donc à une modification de la fréquence de l'effet tunnel dynamique $\delta \to \delta + \delta^{(c)}(\lambda)$. L'image que l'on peut se faire de la dynamique d'évolution de la fonction d'onde initialement localisée sur un îlot de l'espace des phases est qu'en plus de la partie de la fonction d'onde qui peut se coupler à l'îlot symétrique par effet tunnel dynamique, une partie de la fonction d'onde peut se coupler d'abord à l'état délocalisé dans la mer chaotique puis à l'îlot symétrique. La combinaison de ces deux effets a pour conséquence d'accélérer ou de ralentir l'oscillation tunnel. Dans les deux cas, au bout d'un certain nombre de périodes de modulation, la totalité de la fonction d'onde est transférée sur l'îlot opposé.

— Dans le cas $\beta^2 \gg |\epsilon_C - \epsilon_S|^2$, donc au niveau du croisement évité, les états assurant le transport par effet tunnel sont alors des superpositions cohérentes des états symétrique et chaotique, dont un exemple de représentation de Husimi est donné sur la figure 6.5 **e**. Comme il y a deux différences d'énergie entre les trois états à considérer, on s'attend donc à observer deux fréquences dans les oscillations tunnel. En d'autres termes, on s'attend à un phénomène de battement dans les oscillations tunnel lorsqu'il y a un couplage fort avec un troisième état chaotique.

Cette dépendance à la variation d'un paramètre du système a pour conséquence une forte augmentation ou, à l'inverse, une forte atténuation du taux tunnel, et parfois la présence de deux fréquences tunnel, comme illustré sur figure 6.5 **b**. On comprend alors que sur une large plage du paramètre λ, le taux tunnel variera de manière erratique et présentera des résonances entrainant la variation de la fréquence d'oscillation tunnel par plusieurs ordres de grandeurs. En pratique, sur la plage de variation du paramètre λ, il y a un grand nombre de croisements évités avec des états de la mer chaotique : on parle dans ce cas *d'échelle d'états chaotiques*. Trois critères caractérisent alors l'effet tunnel assisté par le chaos [178]

— Une grande augmentation ou atténuation de l'écart moyen en énergie entre les différents états impliqués dans la dynamique [173, 179].
— Une sensibilité extrême aux variations d'un paramètre extérieur.
— Une forte dépendance des propriétés de l'effet tunnel vis-à-vis des caractéristiques de la mer chaotique entre les îlots de stabilité.

Récapitulatif

Pour résumer, il existe une forte analogie entre un double puits de potentiel et deux îlots de stabilité dans un portrait de phase stroboscopique. Cette analogie nous a permis de décrire le mécanisme de l'effet tunnel entre deux îlots de stabilité lorsqu'ils étaient protégés de la mer chaotique. Dans ce cas, seuls deux états du système sont impliqués. En revanche, si le portrait de phase présente une mer chaotique séparant les îlots de stabilité, la dynamique tunnel est fortement modifiée : un troisième état délocalisé dans la mer chaotique peut participer au transport. L'interaction de cet état chaotique avec l'un des états réguliers de même symétrie peut engendrer de fortes modifications de la fréquence tunnel entre les îlots de stabilité : on parle dans ce cas de résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos.

Cela nous indique donc les signatures expérimentales attendues en présence d'effet tunnel assisté par le chaos. En pratique, nous verrons que le paramètre λ que nous allons varier est $1/\hbar_{\text{eff}}$, paramètre que nous pouvons précisément ajuster via la fréquence de modulation. Dans la prochaine partie nous allons discuter de l'influence d'un autre paramètre du système sur lequel nous possédons un moins bon contrôle, le quasi-moment k.

6.2.2.6 Influence du quasi-moment k

Comme nous l'avons vu à la section 6.2.2.3, les quasi-énergies du système dépendent du quasi-moment k. C'est donc un paramètre du système et sa variation peut entraîner de fortes variations de la fréquence des oscillations tunnel.

Dans le cas idéal où le condensat occupe un nombre infini de sites du réseau optique, tous les atomes ont le même quasi-moment k et la distribution en quasi-moment du nuage atomique est donc un delta de dirac $f(k) = \delta(k - k_0)$. Pour un condensat chargé adiabatiquement dans un réseau optique, le condensat est dans la bande fondamentale au centre de la première zone de Brillouin et donc $k_0 = 0$. On peut montrer que si l'on change la valeur de k_0, *la fréquence tunnel est principalement modifiée au niveau des résonances* [7], *alors qu'elle reste quasiment la même loin des résonances*.

Dans le cas plus réaliste où on considère un condensat d'extension finie et en présence d'interactions, on peut modéliser la distribution en quasi-moment du condensat par une distribution centrée autour de $k = 0$ et de largeur Δk. Les atomes de l'ensemble atomique n'ont donc pas tous le même quasi-moment k. *Ils n'ont donc pas tous la même fréquence d'oscillation tunnel*. La largeur en quasi-moment Δk induit donc un déphasage des oscillations tunnel au sein du nuage d'atomes. Loin des résonances, l'effet de la largeur en quasi-moment sera négligeable. En revanche, au voi-

sinage des résonances, on s'attend à un brouillage du signal des oscillations tunnel.

On en conclut que plus le système aura une faible dispersion en quasi-moment (et donc plus le nuage atomique occupera un grand nombre de sites du réseau optique), plus le signal des oscillations tunnel sera net, et ce particulièrement au niveau des résonances. On peut également dire que, pour interpréter les signaux expérimentaux d'oscillations tunnel au voisinage des résonances, il faut prendre en compte l'extension finie du condensat.

Dans la prochaine partie, nous allons présenter les résultats des expériences pionnières du NIST et d'Austin en vue de l'observation de l'effet tunnel assisté par le chaos avec des nuages d'atomes ultra-froids. Nous verrons les limitations expérimentales de ces expériences pionnières et nous verrons quelles solutions expérimentales nous avons retenues pour observer les résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos.

6.3 Expériences pionnières

Dans cette partie, nous allons présenter les résultats de deux expériences effectuées au début des années 2000 qui ont observé un effet tunnel dynamique entre deux îlots de stabilité dans un espace des phases stroboscopique mixte.

6.3.1 L'expérience de Gaithersburg [5]

La première expérience à laquelle nous allons nous intéresser a été effectuée dans le groupe de William Phillips au NIST en collaboration avec un groupe de recherche de l'université de Queensland en Nouvelle-Zélande. Elle met en évidence un effet tunnel dynamique entre deux îlots de stabilité dans un espace des phases stroboscopique.

Le protocole utilisé par l'équipe du NIST pour préparer une superposition d'états de Floquet sur un des îlots de stabilité de l'espace des phases stroboscopique, représenté sur la figure 6.6 **a**, est le suivant :

— Un condensat de Bose-Einstein d'atomes de sodium peuplé d'environ $3 \cdot 10^6$ atomes est préparé dans un piège magnétique.
— La profondeur du piège est ensuite diminuée adiabatiquement afin de permettre au condensat de s'étendre spatialement. Cela a pour effet de diminuer l'énergie d'interaction au sein du nuage pour s'approcher au mieux une dynamique proche d'une dynamique à un corps et de diminuer la dispersion en quasi-moment Δk.

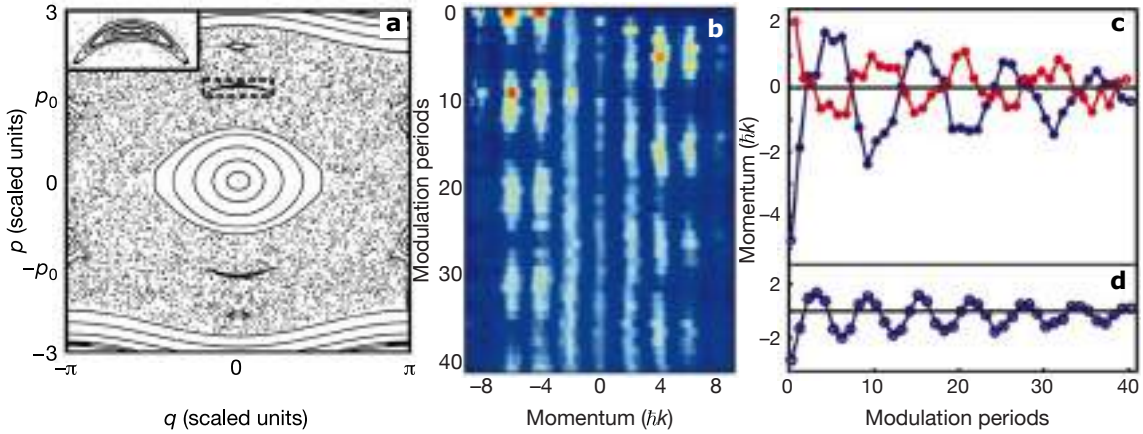


Figure 6.6 – Résultats de l'expérience de Gaithersburg. a : Portrait de phases stroboscopique utilisé par le groupe du NIST. Les paramètres de modulation sont $\gamma = 0.415 \pm 10\%$ et $\varepsilon = 0.29$. L'inset est un zoom de l'îlot de stabilité chargé afin d'observer l'effet tunnel dynamique. **b** : Profils de la distribution en impulsion en fonction du nombre de périodes de modulation. **c** : Population des ordres de diffraction négatifs (rouge) et positifs (bleu) en fonction du nombre de périodes de modulation. **d** : Impulsion moyenne de la distribution en impulsion en fonction du nombre de période de modulation. Figure adaptée de [5].

— Le condensat est ensuite chargé adiabatiquement dans un réseau optique désaccordé de 14 GHz vers le bleu par rapport à la raie $\mathcal{D}_2$ du sodium de longueur d'onde $\lambda = 589$ nm. Les atomes se trouvent alors au centre de la première zone de Brillouin dans la bande fondamentale du réseau [2].
— Le réseau est abruptement translaté en changeant la fréquence de modulation d'un modulateur acousto-optique formant le réseau afin de déplacer le nuage d'atomes. Le décalage est choisi pour que le paquet d'onde se retrouve sur un îlot de stabilité.
— La modulation d'amplitude est allumée avec une fréquence de modulation de $\nu = 220 - 320$ kHz.
— La phase de la modulation est choisie afin que les îlots soient alignés verticalement selon l'axe des impulsions après un certain nombre de périodes de modulation comme représenté sur la figure 6.6 **a**.
— L'état obtenu est mesuré après 1.5 ms de temps de vol.

Les auteurs de cette expérience ajustent la fréquence de modulation de telle manière à optimiser le recouvrement entre le paquet d'onde atomique et l'îlot de stabilité mais également pour rendre l'action typique d'une particule du système assez petite pour que les effets quantiques deviennent

2. La profondeur du réseau est mesurée avant l'expérience via une oscillation dans le réseau combiné à un calcul de la structure de bande. Cela leur permet de connaître la valeur de γ avec une incertitude de 10%.

observables. Les résultats de leurs expériences sont représentés sur la figure 6.6 **b** et **c**.

La figure 6.6 **b** montre les profils de la distribution en impulsion du condensat au fur et à mesure du nombre de période de modulation. Les îlots choisis par le groupe effectuent leur rotation dans l'espace des phases en une seule période de modulation. Le groupe du NIST a donc effectué ses mesures sur l'état du nuage atomique toutes les périodes de modulation. On s'attend classiquement à observer les atomes toujours dans leur état d'impulsion initial. L'oscillation que l'on peut apercevoir entre les impulsions négatives et positives révèle la dynamique d'oscillation tunnel entre les îlots de stabilité de l'espace des phases.

Un groupe français a effectué une étude détaillée de l'expérience du NIST dans la référence [171]. Les auteurs de cette étude ont remarqué que les deux îlots symétriques choisis par le groupe du NIST sont "proches" dans l'espace des phases. Cela permet que l'écart en énergie entre les états symétrique et anti-symétrique soit assez grand pour mesurer une dynamique tunnel. Un autre point important est que ces derniers restent au sein d'un même site du réseau au cours de la modulation. En choisissant ce type d'îlot, la taille finie du nuage d'atome a donc moins d'effet. La période tunnel est donc peu dépendante du quasi-moment k, et l'élargissement inévitable du quasi-moment au cours de l'expérience (dû à la taille finie du système ou encore à la présence d'interactions), ne brouillera donc pas trop fortement le signal afin qu'il puisse être observé. De plus, une analyse numérique du système a montré que la dynamique tunnel entre les îlots de stabilité n'impliquait que deux états et reflétait par conséquent un effet tunnel dynamique. Cette expérience ne mettait donc pas en évidence d'effet tunnel assisté par le chaos.

6.3.2 L'expérience d'Austin [6]

Le protocole utilisé par l'équipe d'Austin pour préparer une superposition d'états de Floquet sur un des îlots de stabilité de l'espace des phases stroboscopique représenté sur la figure 6.7 **a** est le suivant

— Un nuage d'atomes de césium de faible distribution en impulsion est préparé via un processus de refroidissement dans un réseau 3D et une sélection en vitesse par transitions Raman. Durant ce processus, la majeure partie des atomes est filtrée et donc perdue.
— Le nuage d'atomes restants est ensuite chargé adiabatiquement dans un réseau unidimensionnel décalé en fréquence de 50 GHz de la raie $\mathcal{D}_2$ du césium de longueur d'onde λ = 852 nm. Une fois chargés dans le réseau, les atomes se trouvent dans la bande fondamentale au centre de la structure de bande.
— Le réseau est translaté d'un quart de largeur de site à l'aide d'un modulateur électro-optique entraînant une dynamique d'oscillation des atomes. Au bout d'un quart de période

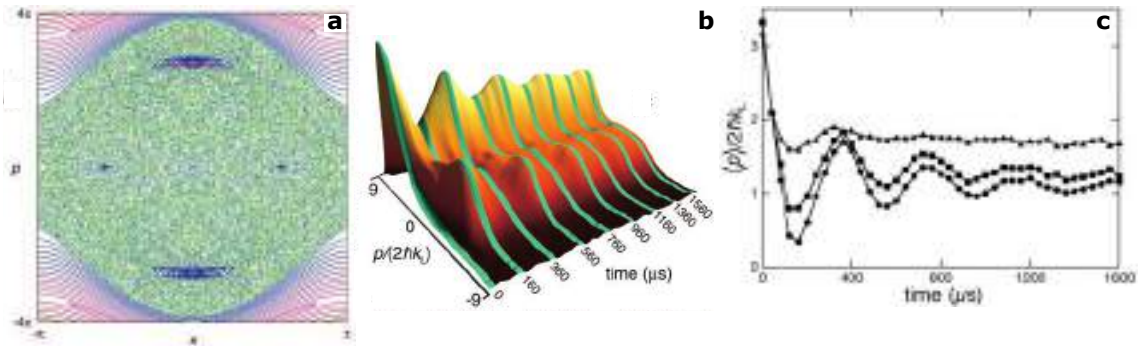


Figure 6.7 – Résultats de l'expérience d'Austin. a : Espace des phases stroboscopique utilisé par le groupe d'Austin. Les paramètres de modulation sont $\gamma = 0.266 \pm 5\%$ et $\varepsilon = 1$. **b** : Visualisation 3D des profils de la distribution en impulsion en fonction du temps de modulation. **c** : Impulsion moyenne de la distribution en impulsion en fonction du nombre de période de modulation. Figure adaptée de [6].

d'oscillation (6 μs pour les paramètres de cette expérience), les atomes arrivent au bas des puits de potentiel en ayant acquis de l'énergie cinétique au cours de leur mouvement. Ils sont alors positionnés sur un des îlots de stabilité selon l'axe des impulsions de la figure 6.7 **a**.

— La modulation d'amplitude est allumée.

— Après un certain nombre de périodes de modulation, un temps de vol de 20 ms est effectué afin d'imager la distribution en impulsion du nuage par fluorescence. Afin de compenser la perte d'atomes durant le processus initial de refroidissement, les données présentées par le groupe sont moyennées sur une vingtaine, voir centaine pour la figure 6.7 **b**, de répétitions.

Sur la distribution en impulsions au cours du temps de modulation présentée sur la figure 6.7 **b**, on observe un mouvement d'oscillation entre les impulsions positives et négatives. De même que pour l'expérience du NIST, il s'agit de la signature d'une oscillation tunnel.

Dans la référence [171], une étude détaillée de l'expérience d'Austin a également été effectuée. Les auteurs de cette étude ont souligné que les îlots de stabilité choisi pour effectuer l'expérience d'Austin changent de site du réseau au cours d'une période de modulation. L'effet de l'extension finie du nuage d'atomes se fera donc sentir de plus en plus au cours de la modulation. Cela requiert donc une distribution en quasi-moment extrêmement faible afin que la dynamique tunnel puissent être observée. Cependant, comme leur protocole de préparation de l'état initial ne produit pas un condensat de Bose-Einstein, nuage atomique possédant une faible dispersion en

quasi-moment, mais un nuage d'atomes froids d'extension en quasi-moment plus large, ce choix d'îlot n'est pas le plus optimal. De plus, l'analyse numérique du système a montré un mécanisme à trois états dans la dynamique tunnel mais la valeur de $\hbar_{\text{eff}}$ utilisée était trop grande pour pouvoir discriminer entre la nature régulière ou chaotique du troisième état impliqué : les états sont trop délocalisés dans l'espace des phases et avaient donc un grand recouvrement avec les îlots de stabilité comme avec la mer chaotique. En d'autres termes, l'expérience se déroulait dans le régime quantique. Il était donc impossible de conclure si l'effet tunnel observé était assisté par le chaos ou non.

6.3.3 Récapitulatif et comparaison des expériences

Ces deux expériences ont permis de poser de solides bases pour l'observation d'un effet tunnel dynamique impliquant plusieurs états mais certaines limitations expérimentales ont empêché ces deux groupes de démontrer l'effet tunnel assisté par le chaos. A la lumière de ces expériences, nous avons modifié le protocole expérimental d'observation de l'effet tunnel assisté par le chaos de manière à nous affranchir des limitations expérimentales de ces expériences pionnières :

— Nous utilisons un condensat de Bose-Einstein (comme le groupe du NIST) afin que la dispersion en quasi-moment du nuage soit faible.

— Nous préparons un état initial comprimé en impulsion (comme le groupe du NIST) et avec un faible nombre d'atomes. Cela diminue davantage la dispersion en quasi-moment du nuage et nous permet de nous affranchir d'une perte de contraste des oscillations tunnel au cours de la modulation (probablement due aux interactions) et de retrouver une physique à un corps.

— Nous chargeons les atomes dans un réseau optique de longueur d'onde $\lambda = 1064$ nm très éloignée de la longueur d'onde de la transition D_2 du rubidium $\lambda = 780$ nm. L'émission spontanée, pouvant entrainer des effets de chauffage du nuage d'atomes au cours de la modulation, est alors négligeable. Nous pouvons alors utiliser plus de puissance pour piéger les atomes et ils ne sont donc plus en chute libre au cours de l'expérience ce qui permet des temps d'observation plus longs.

— Nous chargeons des îlots de stabilité symétriques selon l'axe des positions $x \to -x$ au lieu de l'axe des impulsions $p \to -p$. Il a été démontré que l'effet tunnel entre îlots selon cette symétrie est beaucoup plus robuste contre les imperfections expérimentales [173].

— Nous sommes capables d'atteindre des profondeurs de réseau optique plus grandes et nous pouvons donc atteindre des valeurs de $\hbar_{\text{eff}}$ plus petites. Nos expériences sont donc fortement dans le régime semi-classique. Le nombre ainsi que la nature des états impliqués dans le processus tunnel sont donc plus facilement identifiables.

	Gaithersburg	**Austin**	**Toulouse**
Espèce atomique	Sodium	Césium	Rubidium
Condensat	Oui	Non	Oui
Nombre d'atomes	$3 \cdot 10^6$	$< 10^6$	$3 \cdot 10^4$
Masse atomique (kg)	$3.82 \cdot 10^{-26}$	$2.21 \cdot 10^{-25}$	$1.44 \cdot 10^{-25}$
Longueur d'onde du réseau (nm)	589	852	1064
Désaccord par rapport à la transition atomique (GHz)	14	50	10^5
Fréquence maximale de modulation (kHz)	320	50	80
hbar minimale	0.63	0.33	0.22
$\gamma \pm \Delta\gamma$	$0.415 \pm 10\%$	$0.266 \pm 5\%$	$0.375 \pm 1\%$
ε	0.29	1	0.24
Symétrie des îlots de stabilité	p	p	x
Nombre maximal de période de modulation	40	< 160	300
ν_{tunnel}/ν	7 - 17	3 - 6	0.6 - 6

Table 6.1 – Comparaison des conditions expérimentales et des résultats obtenus dans les équipes de Gaithersburg, d'Austin et de Toulouse.

— Nous calibrons plus précisément la profondeur du réseau optique [98] et estimons donc la valeur de γ avec une plus faible incertitude ($1-2\%$ dans notre cas contre $5-10\%$ pour les expériences pionnières). Cela nous a permis de discriminer les résultats où la variation de γ au cours de la prise de données était trop importante pour pouvoir interpréter clairement les oscillations tunnel.

Un comparatif entre les deux expériences pionnières ainsi que nos résultats est donné dans le tableau 6.1. Les améliorations que nous avons apportées au dispositif expérimental ainsi qu'au protocole d'observation de l'effet tunnel nous ont permis, comme nous allons le voir dans la prochaine partie, d'observer un plus grand nombre d'oscillations du nuage d'atomes entre les îlots de stabilité et avec un meilleur contraste. De plus, une plus grande variation de la fréquence tunnel en fonction de $\hbar_{\text{eff}}$ a été observée, en d'autres termes une résonance, signature forte de l'intervention d'un état chaotique dans le mécanisme de l'effet tunnel.

Récapitulatif

Les deux expériences pionnières que nous venons de présenter ont été de véritables percées dans le domaine des atomes froids et du chaos quantique. Elles ont révélé un grand niveau de contrôle expérimental et une compréhension fine de la dynamique classique sous-jacente. Néanmoins, elles ne sont pas parvenues à convaincre pour l'observation de l'effet tunnel assisté par le chaos en raison des grandes valeurs de $\hbar_{\text{eff}}$ utilisées au cours des expériences[171, 172]. L'effet tunnel assisté par le chaos restait donc encore à observer.

Dans la suite de ce chapitre nous allons présenter les résultats que nous avons obtenus dans l'observation de résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos.

6.4 Résultats expérimentaux

Dans cette partie, je présente comment nous sondons expérimentalement les portraits de phases stroboscopiques, ce qui constitue une étape indispensable au chargement efficace des îlots de stabilité. Je présenterai ensuite l'étude de l'effet tunnel assisté par le chaos entre ces îlots de stabilité.

6.4.1 Bifurcation des zones de stabilité dynamiques

L'observation expérimentale de l'effet tunnel assisté par le chaos a nécessité de s'assurer au préalable que les paramètres de modulation que nous utilisons produisent effectivement le bon espace des phases stroboscopique. Dans un premier temps, je rappelle l'origine théorique de la bifurcation des zones de stabilité dans l'espace des phases : Comme nous allons le voir, lorsqu'un paramètre classique γ ou ε du système est varié, nous assistons à une bifurcation des îlots de stabilité du portrait de phase stroboscopique. Puis, je présente notre aptitude à produire et observer expérimentalement une variété d'espaces des phases stroboscopiques.

6.4.1.1 Origine de la bifurcation

Pour comprendre formellement d'où provient ce phénomène de bifurcation, nous effectuons tout d'abord un développement limité au premier ordre des équations du mouvement de notre système (6.7) au voisinage du centre d'un puits du réseau en $x = 0$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\left(1 + \varepsilon\cos(t)\right)x = 0. \tag{6.32}$$

Cette équation correspond à une équation de Mathieu, équation dont les solutions ont déjà été largement étudiées [176, 7, 51]. Elle présente des instabilités, c'est-à-dire des solutions non bornées, qui rendent le point central de l'espace des phases $(x = 0, p = 0)$ instable. Ces solutions non bornées sont obtenues pour un ensemble de rapports des fréquence caractéristique et de modulation du réseau $\omega_L/\omega \propto \sqrt{\gamma}$. L'origine de la bifurcation, c'est-à-dire l'émergence de nouvelles zones de stabilité pour des positions x décalées par rapport au centre du site, se comprend lorsque l'on pousse le développement limité des équations du mouvement au deuxième ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\,(1 + \varepsilon\cos(t))\left(x - \frac{x^3}{6}\right) = 0, \tag{6.33}$$

En effet, l'équation (6.33), connue sous le nom d'équation de Mathieu-Duffing, possède des non-linéarités qui peuvent déplacer et restaurer les points stables de l'équation de Mathieu standard. Ce sont ces effets qui sont à l'origine de la bifurcation. En suivant le raisonnement analytique de la référence [176], on peut établir que la bifurcation a lieu entre deux valeurs limites de γ (plus de détails sont donnés dans la thèse de mon prédécesseur [7])

$$\gamma_c^{\pm} = \frac{1}{4 \pm 2\varepsilon}. \tag{6.34}$$

Pour une amplitude de modulation ε fixée, le centre de l'espace des phases devient instable lorsque la valeur basse γ_c^+ est atteinte au fur et à mesure que γ augmente. Deux points de stabilité opposés apparaissent alors dont les coordonnées évoluent ensuite comme :

$$\begin{pmatrix} x^* \\ p^* \end{pmatrix} = \pm\sqrt{8\left(1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{4\gamma}\right)}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t)/2 \end{pmatrix}. \tag{6.35}$$

Nous avons choisi de travailler avec une valeur de $\varepsilon = 0.268$. Dans ce cas, la bifurcation apparaît pour $\gamma_c^+ = 0.22$. Dans l'intervalle $\gamma \in [0.22, 0.29]$, le centre du portrait de phase $(x = 0, p = 0)$ est instable. Pour les valeurs $\gamma > \gamma_c^- = 0.29$, le centre du portait de phase est à nouveau stable. C'est ce phénomène que nous avons observé expérimentalement et dont nous allons présenter les résultats dans la prochaine partie.

6.4.1.2 Observation de la bifurcation des zones de stabilité

Le protocole pour observer la bifurcation des zones de stabilité dans l'espace des phases est représenté sur la figure 6.8 : un condensat de Bose-Einstein est chargé adiabitiquement dans un réseau optique de profondeur s en 1 ms. Le réseau est ensuite subitement décalé d'une quantité φ. Au même instant la modulation d'amplitude, d'amplitude ε et de fréquence ν, est allumée. Le trio de paramètre (s, ε, ν) définissent les paramètres (γ, ε) de l'hamiltonien adimensionné et donc de l'espace des phases stroboscopique dans lequel vont évoluer les atomes. Afin que les effets quantiques sur de la dynamique des atomes (comme l'effet tunnel dynamique) restent négligeables, on

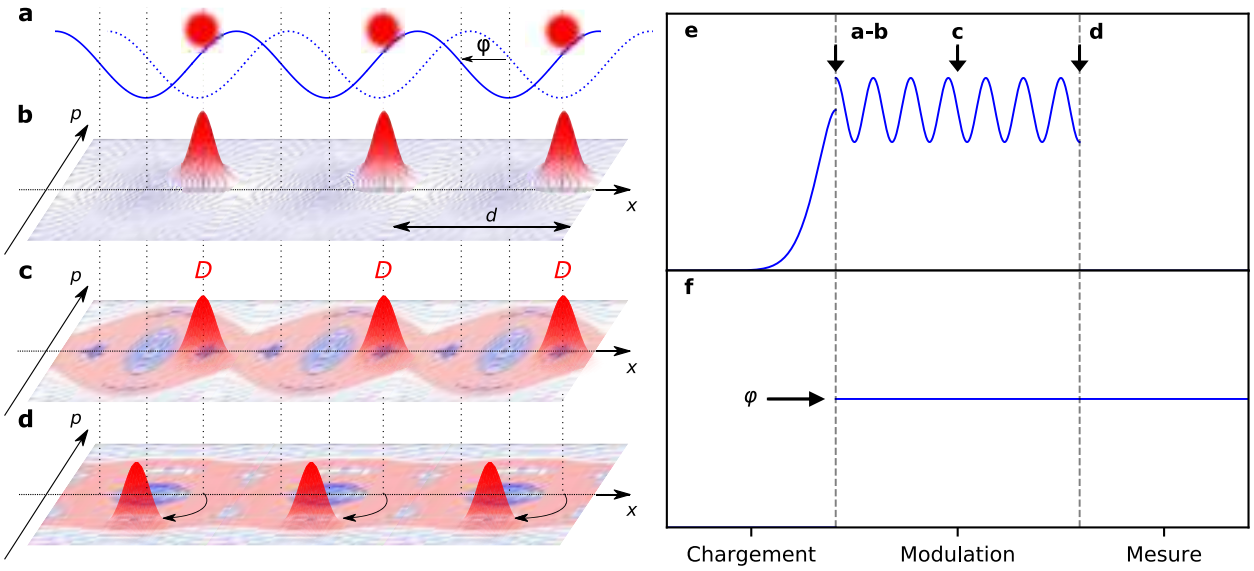


Figure 6.8 – Protocole pour sonder un portrait de phase stroboscopique. a-b : Le réseau est subitement décalé (déphasage φ) afin de déplacer le nuage d'atomes : **a**, représentation in situ, et **b**, représentation dans l'espace des phases. Lors du décalage du réseau, le nuage est déplacé selon l'axe $p = 0$ de l'espace des phases. **c** : La modulation génère le portrait de phases dans lequel vont évoluer les atomes. **d** : À la fin de la modulation, une demi période de modulation est ajoutée afin d'effectuer une rotation dans l'espace des phases. Les îlots initialement situés sur l'axe des positions x se retrouvent situés sur l'axe des impulsions p. Cela permet d'extraire la population des îlots par mesure de la distribution d'impulsion après temps de vol, typiquement $t_{\mathrm{TOF}} = 25$ ms. **e-f** : Evolution respectivement de l'amplitude et de la phase du réseau optique au cours du temps (les différents temps ne sont pas à l'échelle).

se restreint à un faible nombre de périodes de modulation N, typiquement inférieur à dix. Nous avons ainsi accès au caractère classique de l'espace des phases. Insistons sur le fait que l'information à laquelle nous voulons remonter concerne la *position* des atomes dans le réseau optique. Or, un site du réseau est de largeur $d = 532$ nm, largeur inférieur à la longueur d'onde $\lambda = 780$ nm nécessaire pour pouvoir imager les atomes. L'observation de la dynamique spatiale des atomes est donc limité par la diffraction et nous n'y avons pas accès directement. Pour palier à cela, au bout des N périodes de modulation, une demi période de modulation supplémentaire est effectuée afin de réaliser une rotation dans l'espace des phases : au cours du mouvement sub-période de modulation du portrait de phase, les atomes initialement sur l'axe horizontal $p = 0$ de l'espace des phases se retrouvent sur l'axe vertical $x = 0$. Les informations sur la distribution atomique selon l'axe des positions sont alors *transférées selon l'axe des impulsions*. Nous mesurons l'état du système obtenu après un temps de vol par la méthode d'imagerie par absorption, dont plusieurs exemples sont donnés sur la figure 6.9 **a-d**.

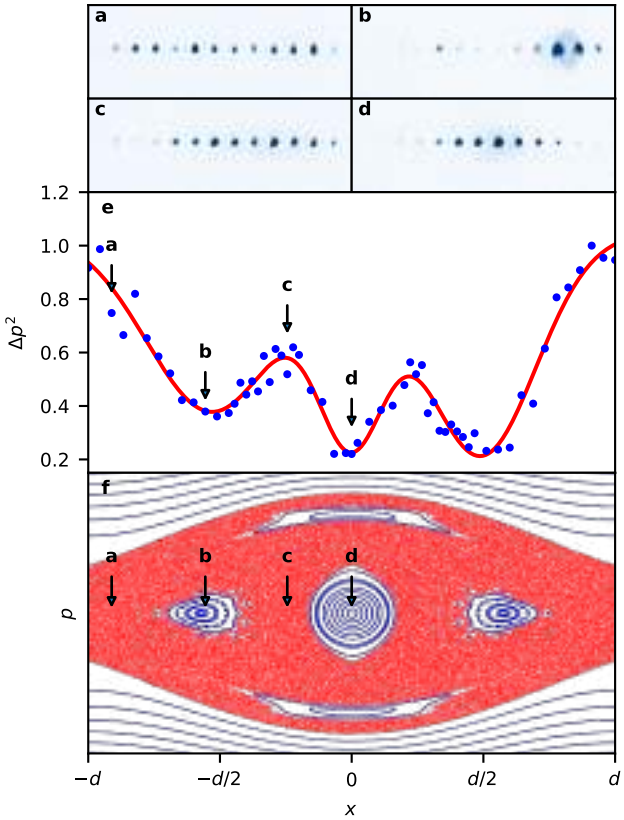


Figure 6.9 – Etude expérimentale du portrait de phases stroboscopique généré par les paramètres de modulation ($\gamma = 0.348, \varepsilon = 0.27$). **a** : Densité optique (distribution en impulsion, mesurée après temps de vol) obtenue après 6 périodes de modulation pour un déphasage de $\varphi = -82°$. **b** : $\varphi = -50°$. **c** : $\varphi = -22°$. **d** : $\varphi = 0°$. **e** : Dispersion en impulsion en fonction du déphasage du réseau optique. **f** : Portrait de phases stroboscopique sondé.

Nous répétons ce protocole pour différents décalages φ dans l'intervalle $[-90°, 90°]$. De cette manière, nous déplaçons le paquet d'onde sur tout un site du réseau optique, c'est-à-dire pour $x \in [-d/2, d/2]$ afin de sonder l'espace des phases en $p = 0$. Pour une valeur de φ donnée, le paquet d'onde est soit dans un îlot de stabilité (région régulière de l'espace des phase) soit dans la mer chaotique. Si ce dernier se trouve dans une région régulière, nous nous attendons à ce qu'il reste localisé dans l'espace des phases. En effet, pour un faible nombre de périodes de modulation, la fonction d'onde n'a pas le temps de passer par effet tunnel dans l'îlot symétrique. À l'inverse, s'il se trouve dans une région chaotique, nous nous attendons à ce qu'il diffuse dans l'espace des phases. La signature expérimentale de ce type de comportement dans la distribution en impulsion est la suivante

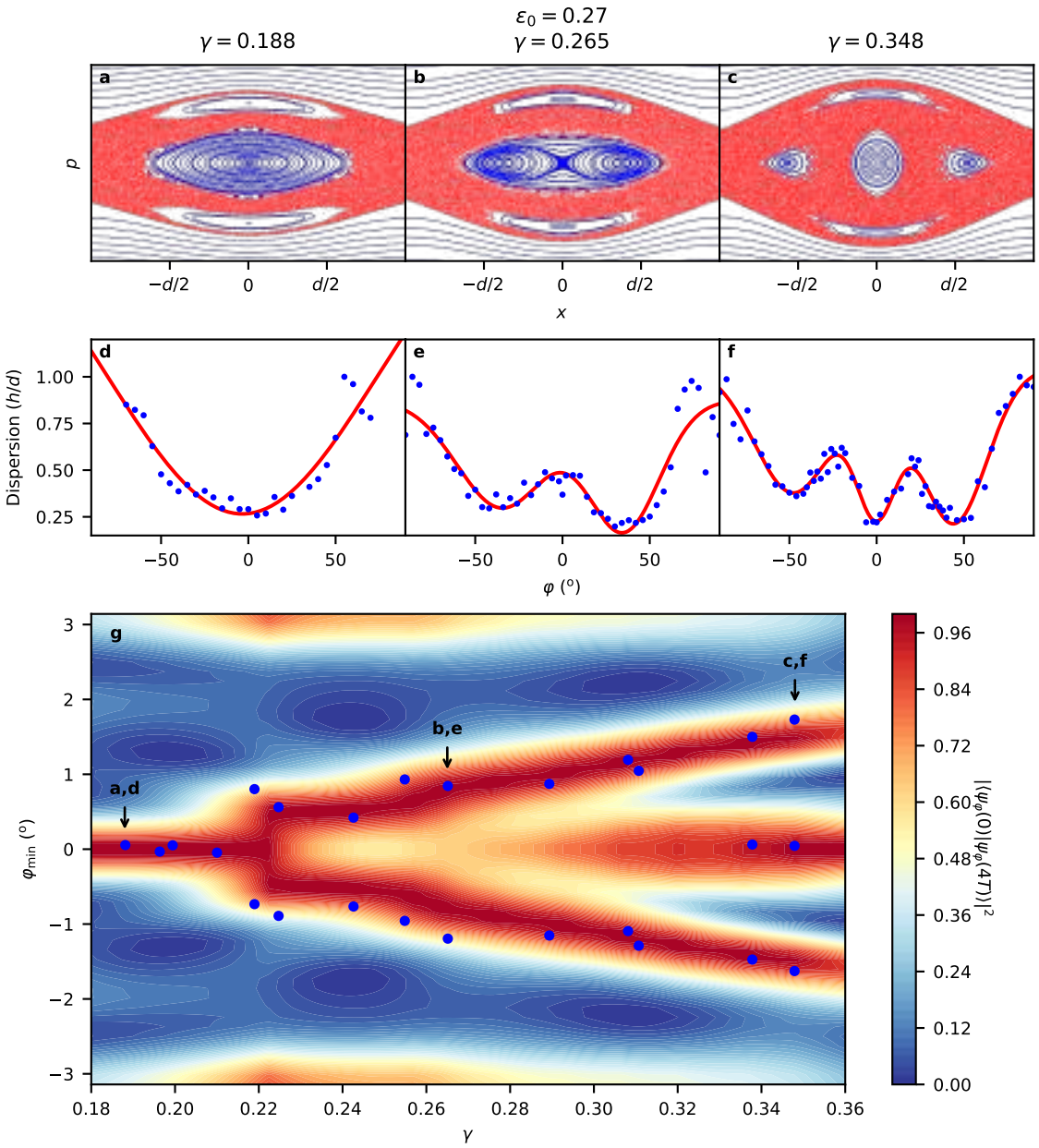


Figure 6.10 – Bifurcation des zones de stabilité dans l'espace des phases. a-c : Espaces des phases stroboscopiques présentant respectivement un, deux et trois îlots de stabilité sondés avec le protocole présenté sur la figure 6.11. **d-f** : Résultats du protocole pour les espaces des phases **a-c**. On observe respectivement un, deux et trois minima de dispersion dans la distribution en impulsion dont on extrait les positions à l'aide d'un ajustement gaussien. **g** : Positions des îlots de stabilité. Nous comparons les positions des îlots extraites à partir des données expérimentales (points bleus) et les résultats de simulations numériques (code couleur) effectuées par Maxime Martinez, doctorant au Laboratoire de Physique Théorique de Toulouse. Le code couleur correspond au recouvrement entre l'état fondamental translaté et l'état fondamental translaté après une propagation sur quatre périodes de modulation.

faible dispersion en impulsion ↔ zone régulière de l'espace des phases.
grande dispersion en impulsion ↔ zone chaotique de l'espace des phases.

La dispersion de la distribution en impulsion du nuage d'atomes est faible si le paquet d'onde est localisé sur un îlot de stabilité de l'espace des phases et elle est grande lorsqu'il est délocalisé dans la mer chaotique. En mesurant la dispersion de la distribution en impulsion du condensat pour différentes valeurs de φ, nous remontons alors au caractère régulier ou chaotique en différents points de l'axe horizontal de l'espace des phases comme présenté sur la figure 6.9 **e**.

Afin d'observer la bifurcation des zones de stabilité, nous sondons un ensemble d'espace des phases pour différentes valeurs du paramètre γ, à ε fixé. Nous observons qu'au fur et à mesure que γ augmente, la dispersion en impulsion mesurée expérimentalement présente un, deux puis trois minima. On associe cette observation à la présence d'un, deux et trois îlots de stabilité dans l'espace des phases stroboscopique. L'ensemble de ces résultats sont présentés sur la figure 6.10 **d-f** [3]. L'ensemble des données expérimentales pour les différents portrait de phases stroboscopique est présenté sur la figure 6.10 **g**. Nous comparons nos résultats expérimentaux à des simulations numériques effectuées par Maxime Martinez, doctorant au Laboratoire de Physique Théorique de Toulouse. Ses simulations numériques consistent à propager un paquet d'onde gaussien sur quatre périodes de modulation pour différentes positions initiales et pour différents γ. L'observable mesurée est le recouvrement entre l'état fondamental translaté (état initial de notre mesure) et l'état en lequel il évolue après une propagation sur quatre périodes de modulation : plus ce recouvrement est élevé, moins le paquet d'onde a changé, et donc plus l'état est resté localisé dans l'espace de phases. Nous constatons un bon accord entre expérience et théorie. Nous remarquons cependant que le début de la bifurcation des zones de stabilité pour $\gamma \simeq 0.22$ est difficile à observer : la séparation progressive des îlots n'est pas observée. En effet, ce protocole ne présente pas la résolution nécessaire pour distinguer deux îlots de stabilité trop proches. On retrouve le même effet pour l'apparition du troisième îlot, observée uniquement à $\gamma \simeq 0.34$ alors qu'on l'attend déjà pour une valeur de $\gamma \simeq 0.27$.

Ces expériences démontrent donc notre capacité à façonner (et à sonder) un portrait de phases stroboscopique. Le fait de pouvoir choisir le nombre d'îlots de stabilité par site du réseau optique et la distance entre ces derniers ouvre des perspectives intéressantes pour les simulations

3. Les expériences pionnières ont également observé ce type de bifurcation des zones de stabilité. Le groupe de recherche de l'université de Queensland s'est notamment attelé à sonder l'espace des phases stroboscopique dans lequel les atomes sont placés [180, 181] : à l'aide d'une distribution d'un nuage d'atomes directement extrait d'un piège magnéto-optique et comprimée en impulsion, les auteurs ont réussi à observer jusqu'à cinq îlots de stabilité de l'espace des phases stroboscopique dans la distribution en impulsion du nuage atomique. Cette première confirmation de leurs paramètres de modulation leur a donc ensuite permis d'étudier l'effet tunnel entre les îlots.

quantiques [4] : nous avons ainsi réalisé un super-réseau, c'est-à-dire un réseau présentant plusieurs périodicités. Ce super-réseau est effectif et présente l'avantage que l'une des deux périodicités est ajustable via les paramètres de modulation. Cependant, pour des raisons de symétrie, le couplage est non nul uniquement entre deux îlots de stabilité symétriques dans l'espace des phases. Par conséquent, le troisième îlots apparaissant pour $\gamma > 0.27$ ne peut être couplé par effet tunnel aux deux autres. Malgré cela, ce type de réseau pourrait servir à implémenter expérimentalement des modèles difficiles à réaliser par d'autres moyens comme par exemple le modèle SSH [183, 184], modèle emblématique d'aspects topologiques en physique, où un couplage tunnel d'un site du réseau n'est pas le même suivant qu'on considère le couplage vers le site voisin situé à gauche ou celui situé à droite.

La confirmation expérimentale de notre aptitude à générer des portraits de phases stroboscopique nous a alors permis de commencer notre étude de l'effet tunnel assisté par le chaos, que je présente dans la partie suivante.

6.4.2 Résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos

Dans cette partie, je présenterai tout d'abord le protocole expérimental que nous avons utilisé afin de mettre en évidence un effet tunnel entre deux îlots de stabilité. Je présenterai notre étude expérimentale de l'effet tunnel régulier entre deux îlots de stabilité en absence de mer chaotique les séparant. Puis, je présenterai les résultats que nous avons obtenu sur l'observation des résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos. Tous les résultats numériques présentés dans cette partie ont été effectué par Maxime Martinez, doctorant dans l'équipe de Bertrand Georgeot et Gabriel Lemarié au Laboratoire de Physique Théorique de Toulouse avec laquelle nous collaborons.

6.4.2.1 Protocole expérimental

Le protocole pour observer les oscillations tunnel entre les îlots de stabilité est similaire à celui utilisé dans la partie précédente pour sonder le portrait de phase stroboscopique à la seule différence que nous fixons à présent le décalage de phase du réseau afin de charger un îlot de stabilité et que nous étudions la dynamique du système sur un grand nombre de périodes de modulation. Cela nous permet d'observer les effet quantiques de l'évolution du système aux temps longs. Ce protocole est représenté sur la figure 6.11.

Afin de mettre en évidence la dynamique due à l'effet tunnel, nous mesurons l'état du système en considérant des évolutions sur un nombre pair de périodes de modulation : en effet les îlots que

4. Cette idée d'exploiter le portrait de phase stroboscopique avait été évoquée par les expériences pionnières [182].

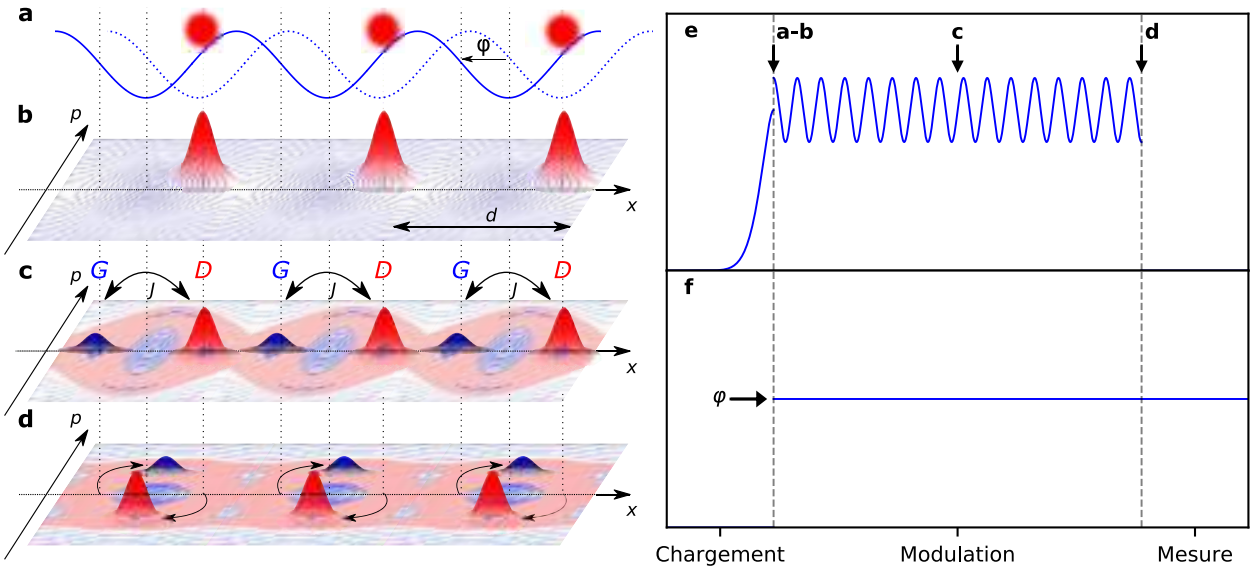


Figure 6.11 – Protocole pour l'observation des résonances dans l'effet tunnel assisté par le chaos. a : Le réseau est subitement décalé d'une quantité φ afin de charger un îlot de stabilité. **b** : Illustration de **a** dans l'espace des phases. **c** : La modulation génère l'espace des phases dans lequel vont évoluer les atomes. Les atomes initialement dans l'îlot de stabilité à droite dans l'espace des phases sont transportés par effet tunnel dans l'îlot symétrique, à gauche dans l'espace des phases. Au cours de la dynamique, ils effectuent des oscillations entre ces deux îlots. **d** : À la fin de la modulation, une demi de période de modulation est ajoutée afin d'effectuer une rotation dans l'espace des phases. Les îlots initialement situés sur l'axe des positions x se retrouvent situés sur l'axe des impulsions p. Cela permet d'extraire la population des îlots par mesure de la distribution d'impulsion après temps de vol, typiquement $t_{\mathrm{TOF}} = 25$ ms. **e-f** : Evolution respectivement de l'amplitude et de la phase du réseau optique au cours du temps (les différents temps ne sont pas à l'échelle).

nous chargeons avec les atomes effectuent une rotation complète dans l'espace des phases en deux périodes de modulation. Quelques exemples de densité optique obtenues expérimentalement sont présentés sur les figures 6.12 **a-d** pour différents nombres de périodes de modulation. Pour déterminer dans quel îlot étaient les atomes lorsqu'ils se trouvaient dans le réseau, nous effectuons une rotation dans l'espace des phases à la fin de la modulation du réseau. Cela consiste simplement à moduler le réseau durant une demi période de modulation supplémentaire : nous exploitons le mouvement sub-période des îlots afin de transformer l'information sur la distribution des atomes dans le réseau dans l'espace des positions en une information dans l'espace des impulsions. Comme représenté sur la figure 6.3, un îlot à gauche du portrait de phase acquiert une impulsion positive après une demi période de modulation alors qu'un îlot à droite acquiert une impulsion négative. Pour rappel, nous imageons l'espace des impulsions après temps de vol.

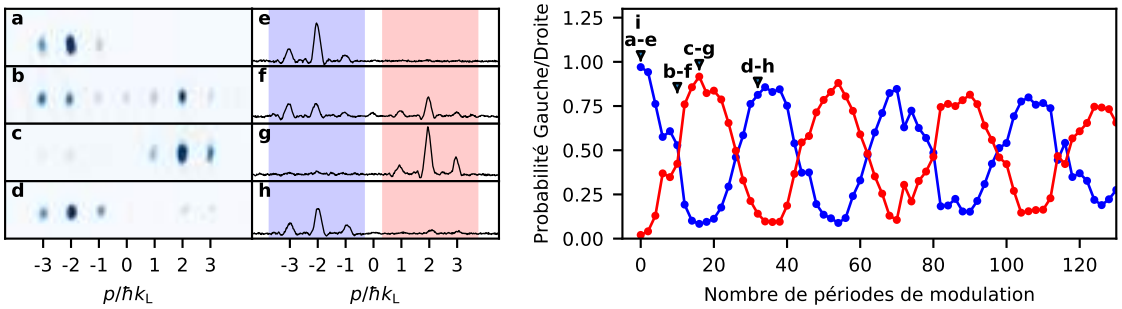


Figure 6.12 – Mesure des populations des îlots gauche et droite du portrait de phase. a-d : Images expérimentales obtenues après temps de vol pour différents nombres de périodes de modulation T : respectivement $0T$, $10T$, $16T$, $32T$. **e-h** : Profils intégrés correspondants : les images expérimentales sont intégrées selon la direction perpendiculaire au réseau. Les zones bleues (respectivement rouges) indiquent les impulsions négatives (respectivement positives) et la population dans ces ordres de diffraction correspond à celle de l'îlot de droite (respectivement gauche). **i** : Evolution des populations des îlots de droite (bleu) et gauche (rouge) en fonction du nombre de périodes de modulation. Les flèches correspondent aux données présentées en **a-h**.

Théoriquement, nous n'avons considéré qu'une cellule de l'espace des phases et la dynamique des atomes dans cette cellule, mais expérimentalement nous avons un nombre fini de sites du réseau qui sont peuplés. Ainsi après temps de vol, nous observons une figure typique de diffraction. Nous pouvons ainsi faire le lien suivant

Ordres de diffraction négatifs ↔ Îlot de droite de l'espace des phases.
Ordres de diffraction positifs ↔ Îlot de gauche de l'espace des phases.

À partir d'images expérimentales prises tout les $2n$ périodes de modulation (avec n entier) et en mesurant pour chacune d'elles les populations des ordres de diffraction d'impulsions négatives (respectivement positives), nous accédons à la dynamique temporelle des populations des îlots de droite (respectivement gauche), comme présenté sur la figure 6.12 **i**. On observe bien une oscillation entre l'îlot de gauche et l'îlot de droite. À partir de telles courbes, la fréquence d'oscillation tunnel est obtenue par transformée de Fourier du signal expérimental.

L'obtention d'un aussi bon contraste des oscillations tunnel que celui des oscillations présentées sur la figure 6.12 **i** a nécessité de diminuer drastiquement le nombre d'atomes dans le condensat. Lorsque nous avons débuté nos expériences, nous chargions le réseau optique avec un condensat peuplé en moyenne entre $1 \cdot 10^5$ et $2 \cdot 10^5$ atomes. Avec un nombre d'atomes aussi élevé, nous observons une diminution drastique du contraste des oscillations au bout de quelques périodes de modulation comme présenté sur la figure 6.13 **a** et ce même loin de résonance. En revanche, si nous réduisons le nombre d'atomes sous les $5 \cdot 10^4$ atomes, nous restaurons des oscillations sur un

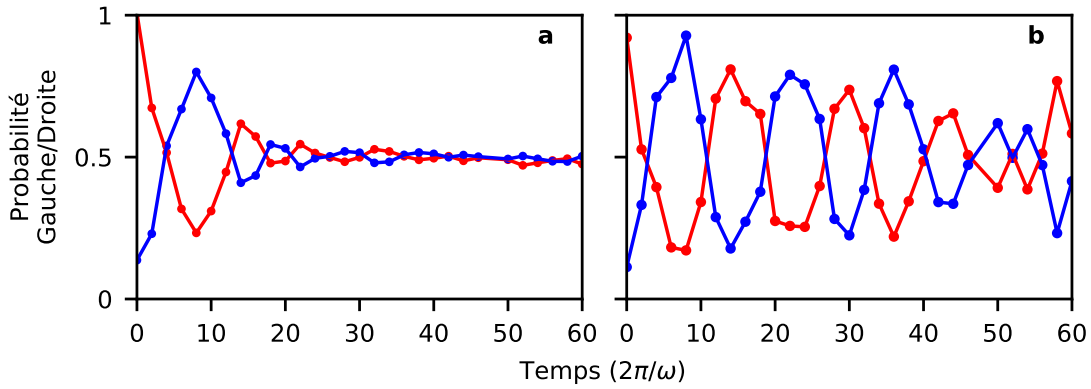


Figure 6.13 – Comparaison du contraste des oscillations tunnel assistées par le chaos pour deux nombres d'atomes différents. **a** : $N = 1.2 \pm 0.2 \cdot 10^5$. **b** : $N = 4 \pm 0.2 \cdot 10^4$. Les portraits de phases stroboscopiques pour ces deux expériences sont générés par les paramètres ($\gamma = 0.225 \pm 0.005, \varepsilon = 0.59 \pm 0.01$).

plus grand nombre de périodes de modulation comme présenté sur la figure 6.13 **b**. Nous attribuons cette diminution du contraste à un effet des interactions entre atomes. En effet, la variation du nombre d'atomes dans chacun des puits du réseau peut mener en présence d'interactions à une variation de la phase de la fonction d'onde de site à site. Cette variation de la phase aurait pour conséquence une compétition entre l'effet tunnel qui est un phénomène cohérent et le déphasage entre les sites du réseau dû aux interactions. L'effet de diminuer le nombre d'atomes permet alors de retrouver une physique à un corps. Afin de diminuer le nombre d'atomes dans le condensat, nous effectuons simplement un temps de chargement du PMO-3D plus court que celui utilisé habituellement, typiquement de 2 s. Tous les résultats présentés par la suite ont étés effectués avec un faible nombre d'atomes.

6.4.2.2 Observation expérimentale de l'effet tunnel régulier

Afin de mettre en exergue les résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos, il est nécessaire d'avoir des éléments de comparaisons d'une dynamique tunnel en l'absence de chaos entre les îlots de stabilité. Ce type d'expérience fait en quelque sorte office d'expérience témoin. Pour rappel, en l'absence de mer chaotique entre les îlots de stabilité, la dynamique tunnel n'est portée que par deux états propres de Floquet : les états symétrique et anti-symétrique définis en 6.2.2.4 dont l'écart en énergie évolue de manière monotone lorsqu'un paramètre du système est varié. Comme nous voulons observer la variation du taux tunnel pour un portrait de phase donné, les paramètres (γ, ε) se doivent d'être fixés. Le troisième paramètre que nous pouvons varier expérimentalement est la constante de Planck effective $\hbar_{\text{eff}}$. Il a été montré que dans le cas où il n'y a aucune mer chaotique entre les îlots de stabilité, la fréquence tunnel varie comme [185]

$$\nu_{G\leftrightarrow D} \propto e^{-S/\hbar_{\text{eff}}}, \tag{6.36}$$

où S est l'action classique du système. Une signature expérimentale de l'effet tunnel régulier entre deux îlots de stabilité est donc cette dépendance exponentielle de la fréquence tunnel avec la constante de Planck effective $\hbar_{\text{eff}}$. Afin de l'observer, nous fixons les paramètres de modulation pour générer un portrait de phases stroboscopique présentant les bonnes caractéristiques, dans ce cas présentant deux îlots sans trajectoires chaotiques entre eux, et nous faisons varier la constante de Planck effective. Pour chaque valeur de $\hbar_{\text{eff}}$, nous mesurons alors la fréquence d'oscillation tunnel entre les îlots de stabilité avec le protocole décrit dans la section précédente.

Si nous traçons alors en échelle semi-logarithmique la fréquence tunnel mesurée en fonction de $1/\hbar_{\text{eff}}$, nous nous attendons donc à une variation linéaire de cette dernière. Nous avons réalisé ces expériences pour le portrait de phases généré par les paramètres de modulation ($\gamma = 0.249 \pm 0.002, \varepsilon = 0.14$) et ces résultats sont présentés sur la figure 6.14 **a**. Les fréquences tunnel sont exprimées en fonction des fréquence de modulation correspondantes. Sur cette figure, nous comparons nos résultats expérimentaux aux résultats de simulations numériques effectuées en considérant un réseau infini où tous les sites du réseau sont également peuplés et prenant en compte l'incertitude sur la calibration expérimentale de la profondeur s du réseau statique qui fixe la valeur de γ. Nous constatons que la fréquence tunnel varie bien de manière monotone avec $1/\hbar_{\text{eff}}$: en échelle semi-logarithmique nous obtenons bien une décroissance linéaire, compatible avec l'équation (6.36). Il faut préciser ici qu'il n'y aucun paramètre ajustable et nous observons que l'accord entre les prédictions et mesures expérimentales est très bon.

Dans la prochaine partie, nous allons observer comment la fréquence tunnel évolue lorsque des trajectoires chaotiques séparent les deux îlots de stabilité.

6.4.2.3 Observation expérimentale de l'effet tunnel assisté par le chaos

Dans cette partie, nous présentons les résultats d'expériences dans lesquelles une mer chaotique sépare les deux îlots deux stabilité. Dans ce cas, la fréquence des oscillations tunnel peut être largement perturbée par un troisième état délocalisé sur la mer chaotique. La signature expérimentale de l'effet tunnel assisté par le chaos est donc une variation non monotone de la fréquence tunnel lorsqu'un paramètre du système est varié, à savoir $\hbar_{\text{eff}}$ comme dans le cas de l'effet tunnel régulier.

Nous avons choisi de travailler avec le portrait de phases correspondant aux paramètres de modulation ($\gamma = 0.375 \pm 0.005, \varepsilon = 0.24$). Trois exemples d'oscillations utilisées pour réaliser cette

courbe sont donnés sur la figure 6.14 **a-c**. Sur ces figures, nous comparons les oscillations tunnel mesurées expérimentalement à celles simulées numériquement pour les mêmes paramètres. Pour les données présentées sur la figure 6.14 **a** et **b**, on remarque que les oscillations sont principalement sinusoïdales. On en conclut qu'il y a donc une seule fréquence tunnel dans le transport, donc uniquement deux niveaux d'énergies impliqués. Sur ces deux graphiques, le couplage avec l'état chaotique est donc faible. Cependant, pour une valeur de $\hbar_{\text{eff}}^{-1} \sim 2.8$, on observe sur la figure 6.14 **c** une dynamique tunnel entre les îlots qui peut paraître erratique au premier abord. Il s'agit en fait du battement attendu lors du couplage fort avec l'état chaotique : lors de l'analyse de Fourier de ce signal, deux fréquences ressortent du bruit.

Les fréquences tunnel mesurées expérimentalement pour différentes valeurs de la constante de Planck effective sont présentés sur la figure 6.14 **e**. Elles sont exprimées en fonction de la fréquence de modulation. Sur cette figure, on remarque que sur une plage de $\hbar_{\text{eff}}^{-1}$ beaucoup plus restreinte que dans le cas de l'effet tunnel régulier, la variation de la fréquence tunnel est plus importante et surtout non monotone. On observe une résonance et on peut donc identifier trois zones en fonction de la valeur de $\hbar_{\text{eff}}^{-1}$

— La première zone correspond à l'intervalle $\hbar_{\text{eff}}^{-1} \in [2.4, 2.8]$. Une seule fréquence tunnel est présente dans les oscillations. Elle diminue sur tout l'intervalle de $\nu_{\text{tunnel}} \sim 5 \cdot 10^{-2} \nu_{\text{mod}}$ à $\nu_{\text{tunnel}} \sim 2 \cdot 10^{-2} \nu_{\text{mod}}$.
— La deuxième zone correspond à l'intervalle $\hbar_{\text{eff}}^{-1} \in [2.8, 3.0]$. Deux fréquences sont présentent dans les oscillations : on a un phénomène de battement dans les oscillations. La fréquence tunnel diminue jusqu'à $\nu_{\text{tunnel}} \sim 1 \cdot 10^{-2} \nu_{\text{mod}}$ avant de sauter à $\nu_{\text{tunnel}} \sim 2.2 \cdot 10^{-2} \nu_{\text{mod}}$.
— Pour l'intervalle $\hbar_{\text{eff}}^{-1} \in [3.0, 3.4]$, il n'y a à nouveau qu'une seule fréquence dans les oscillations. Elle diminue sur tout l'intervalle de $\nu_{\text{tunnel}} \sim 2 \cdot 10^{-2} \nu_{\text{mod}}$ à $\nu_{\text{tunnel}} \sim 1.2 \cdot 10^{-2} \nu_{\text{mod}}$

Cette observation est confirmée par des simulations numériques avec lesquelles nous comparons nos résultats. Dans le premier et dernier intervalle, loin de la résonance, des simulations numériques considérant un réseau infini sont suffisantes pour retrouver les fréquences mesurées expérimentalement. Ceci est dû au fait qu'il y a une faible dépendance en quasi-moment k sur ces intervalles (voir la section 6.2.2.6). En revanche, dans le deuxième intervalle, au voisinage de la résonance, il est nécéssaire de considérer un condensat d'extension fini pour retrouver les fréquences mesurées expérimentalement. En effet, expérimentalement nous mesurons des fréquences intermédiaires qui ne coïncident pas avec les fréquences prédites par un modèle de distribution de dirac du quasi-moment. Il est nécessaire de prendre en considération l'effet de la dispersion en quasi-moment Δk. En considérant un condensat occupant 13 sites du réseau optique [5], on trouve des fréquences tunnel plus proche des résultats expérimentaux. Il s'agit d'une

5. c'est le nombre minimal de sites permettant de retrouver nos résultats, un nombre plus élevé fonctionne

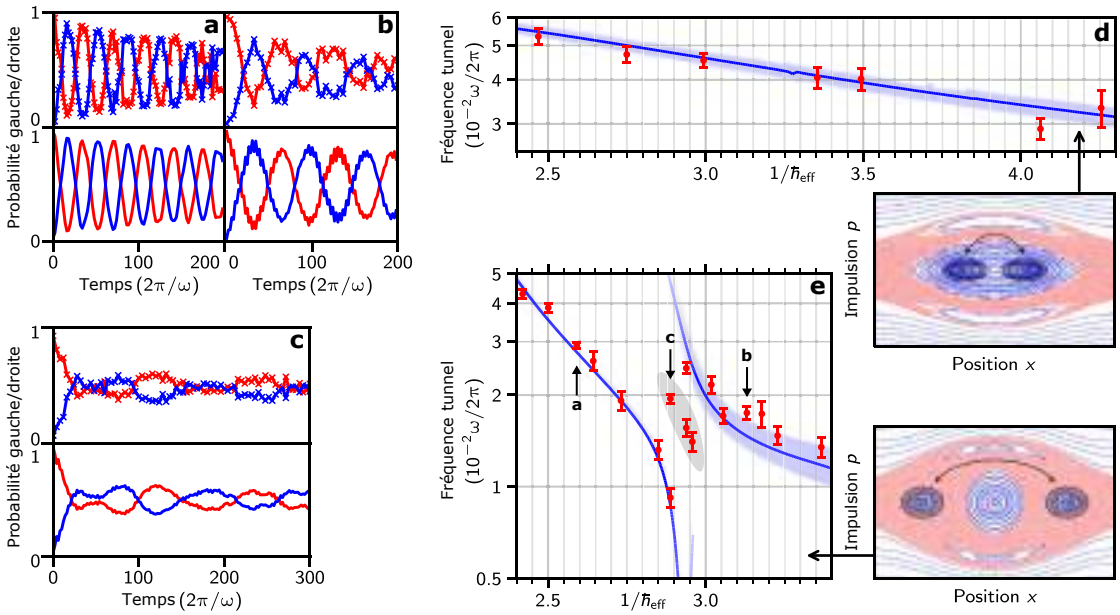


Figure 6.14 – Résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos. a-c : Evolution temporelle des populations dans les îlots gauche (rouge) et droite (bleu) pour différentes valeurs de $\hbar_{\mathrm{eff}}^{-1}$: respectivement $\hbar_{\mathrm{eff}}^{-1} = 2.591$, $\hbar_{\mathrm{eff}}^{-1} = 2.888$, $\hbar_{\mathrm{eff}}^{-1} = 3.131$. Haut : Données expérimentales. Bas : Simulations numériques avec un réseau de 13 sites équipeuplés initialement. **d-e** : Fréquences tunnel mesurées expérimentalement (points rouges) en fonction de $\hbar_{\mathrm{eff}}^{-1}$ comparées à des simulations numériques où tous les sites d'un réseau optique sont équipeuplés, c'est-à-dire un réseau infini, pour les paramètres $\varepsilon = 0.14$, $\gamma = 0.249 \pm 0.002$ pour **d** et $\varepsilon = 0.24$, $\gamma = 0.375 \pm 0.005$ pour **e**. Les fréquences tunnels sont extraites par une transformée de Fourier des oscillations expérimentales ou numériques (voir texte). Les régions bleutées correspondent à la prise en compte de l'incertitude sur γ dans les simulations numériques. La transparence des lignes bleues correspond à l'amplitude de la transformée de Fourier à la fréquence de modulation correspondante. La zone grisée de **e** indique la zone dans laquelle les simulations numériques doivent prendre en compte une taille initiale finie du condensat afin d'avoir un bon accord avec les résultats expérimentaux (voir texte). Les espaces des phases stroboscopiques correspondant sont indiqués par les flèches.

moyenne des fréquences des oscillations tunnel des différents quasi-moment k de la dispersion Δk. Ces fréquences sont indiquées par la zones grisée de la figure 6.14 **e**.

Nous avons donc sondé un croisement évité dans le spectre de Floquet. C'est la signature de l'observation de l'effet tunnel assisté par le chaos. En effet, le croisement évité que nous avons sondé dans cette expérience est représenté sur la figure 6.15 **a**. On remarque que

— Pour l'intervalle $\hbar_{\text{eff}}^{-1} \in [2.4, 2.85]$, le doulet d'états réguliers est fortement séparé en énergie de l'état chaotique. C'est donc un régime de couplage faible : on s'attend à observer une seule fréquence dans les oscillations tunnel.
— Pour l'intervalle $\hbar_{\text{eff}}^{-1} \in [2.85, 2.95]$, l'état chaotique repousse l'état régulier de même symétrie. C'est le régime de couplage fort : on s'attend à observer deux fréquences dans les oscillations tunnel.
— Pour l'intervalle $\hbar_{\text{eff}}^{-1} \in [2.95, 3.4]$, on retrouve la situation de couplage faible.

Cette observation du spectre de Floquet corrobore donc nos observations expérimentales.

Les représentations de Husimi des états impliqués dans la dynamique sont présentées sur les figures 6.15 **b-e** : les états réguliers symétrique et antisymétrique sont représentés en rouge et bleu. On voit qu'ils sont bien localisés sur les îlots de stabilité. L'état chaotique de part et d'autre du croisement évité est représenté en vert. On remarque qu'avant le croisement évité, il est localisé sur les trajectoires ouvertes du portrait de phase stroboscopique et qu'après le croisement évité, il est localisé dans la mer chaotique. L'état après le croisement évité est en quelque sorte le premier état de l'échelle d'états chaotiques du système. Nous avons observé la "première" résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos : en sondant cette résonance, on assiste au passage du système du régime quantique au régime semi-classique, régime dans lequel nous pouvons facilement attribuer une structure de l'espace des phases classique à un état quantique.

Nous avons également effectué le même type d'analyse pour deux autres portraits de phases, donnés en annexe F, afin de démontrer l'aspect général de ce mécanisme tunnel : dès lors qu'une mer chaotique sépare les îlots de stabilité, un état chaotique peut participer au transport et fortement modifier le taux tunnel.

également.

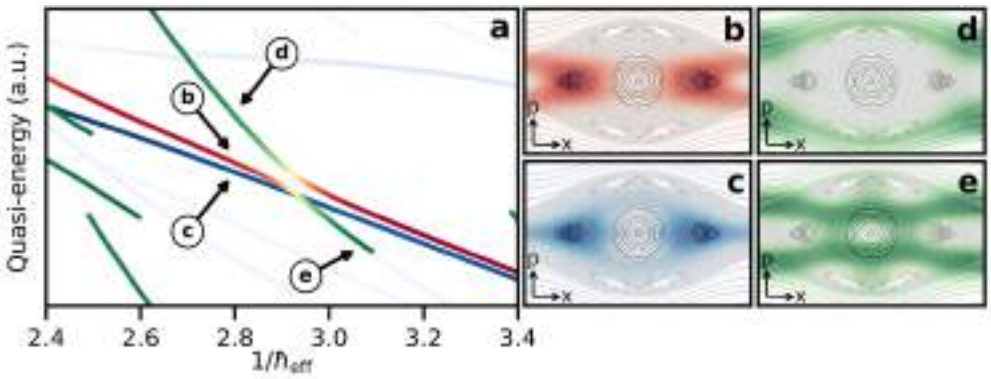


Figure 6.15 – Mécanisme tunnel de la résonance présentée sur la figure 6.14. a : Spectre de Floquet du système. Les états réguliers symétrique et anti-symétrique sont représentés en rouge et bleu respectivement. Les états chaotiques sont représentés en vert. **b-e** : représentation de Husimi des différents états impliqués dans le transport par effet tunnel assisté par le chaos.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dans une première partie présenté une manière d'adapter le formalisme de l'espace des phases aux systèmes modulés périodiquement dans le temps : l'espace des phases stroboscopique. Nous avons expliqué comment il est construit et les mécanismes sub-période de modulation. Nous avons ensuite développé une théorie permettant d'aborder l'évolution de fonctions d'onde dans ce type d'espace des phases via l'analogie qu'il existe entre ce type de système et un double puits de potentiel. Nous avons vu que la mécanique quantique prédit un effet tunnel entre des îlots de stabilité, transport qui est interdit classiquement. À partir du formalisme développé, nous avons étudié comment l'apparition d'une mer chaotique entre les îlots de stabilité peut affecter la dynamique tunnel.

Puis, dans une seconde partie, nous avons récapitulé les premiers résultats obtenus dans ce domaine, à savoir des expériences effectuées au NIST dans le groupe de William Phillips et à Austin dans le groupe de Mark Raizen. Nous avons présenté les avancées et les limitations de ces deux expériences que nous avons prises en compte pour parvenir à observer les résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos.

Enfin dans une troisième partie, nous avons présenté les résultats expérimentaux que nous avons obtenus. Dans un premier temps, nous avons observé une bifurcation des îlots de stabilité en sondant des portraits de phases stroboscopique présentant un, deux et trois zones de stabilité. Le fait de pouvoir ajuster la position ainsi que le nombre de zones de stabilité dans un site du réseau est particulièrement intéressant pour les simulations quantiques. En effet, cela permet de générer un super réseau effectif ajustable. Puis dans un second temps, nous avons étudié l'évolution des

atomes dans ces portraits de phase stroboscopique

— D'abord dans un portrait de phase présentant deux îlots de stabilité sans mer chaotique entre eux. Dans ce cas, nous avons observé une variation monotone de la fréquence d'oscillation tunnel entre les îlots de stabilité, révélant que seuls deux états propres du système participent au transport.
— Puis en présence d'une mer chaotique entre les deux îlots de stabilité. Nous avons observé une forte variation de la fréquence tunnel en présence d'une mer chaotique. Cela démontre qu'un troisième état est impliqué dans la dynamique tunnel, ce qui constitue une signature de l'effet tunnel assisté par le chaos.

Il s'agit de la première observation de résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos. Ces travaux ouvrent des perspectives intéressantes notamment sur la portée de l'effet tunnel : dans tout ce qui précède, nous nous sommes intéressés uniquement à l'effet tunnel entre des îlots de stabilité au sein d'un même site. Or, il existe en réalité des îlots de stabilité dans tous les sites du réseau optique. On peut alors imaginer que l'apparition de la mer chaotique, commune à tous les sites du réseau, peut favoriser le transport à longue portée des atomes : la fonction d'onde s'échappe d'un îlot de stabilité par effet tunnel régulier, puis se propage dans la mer chaotique avant de repasser par effet tunnel dans un autre îlot de stabilité d'un site différent [186]. Ces effets ont été étudiés par Maxime Martinez et seront également étudiés dans les thèses de mes successeurs.

Publication relié à ce chapitre

— M. Arnal, G. Chatelain, M. Martinez, N. Dupont, O. Giraud, D. Ullmo, B. Georgeot, G. Lemarié, J. Billy, and D. Guéry-Odelin, "Chaos-assisted tunneling resonances in a synthetic floquet superlattice", *Science advances*, vol. **6**, no. 38, p. eabc4886, 2020.

7 Conclusion générale

Time is a drug. Too much of it kills you.

Terry Pratchett (1948 – 2015) - Ecrivain

Dans ce manuscrit, j'ai présenté la majorité des résultats obtenus durant ma thèse. J'ai organisé la présentation de ces résultats en trois parties dont je fais ici le bilan

— La première partie vise à présenter notre dispositif expérimental. Dans le premier chapitre, j'ai présenté notre méthode pour produire des condensats de Bose-Einstein. Dans le deuxième chapitre, j'ai présenté le réseau optique avec lequel nous réalisons la totalité de nos expériences. J'ai en particulier présenté des travaux que nous avons effectués pour caractériser la structure de bande du réseau optique et comment ces derniers nous ont permis de proposer un nouveau protocole de refroidissement d'un nuage d'atomes dans un réseau optique.

— La deuxième partie récapitule les résultats obtenus par un contrôle du nuage d'atomes par une variation de la phase du réseau optique. Dans le troisième chapitre, nous avons utilisé un décalage abrupt de la phase du réseau afin de mettre le nuage d'atomes hors équilibre en vue d'amplifier les événements de collision dans un mode d'impulsion donné. En exploitant l'évolution libre du nuage dans le réseau statique, nous amenons le nuage le plus proche possible d'une distribution en impulsion présentant les bonnes caractéristiques pour l'observation d'halos de diffusion. J'ai présenté le critère de visibilité qui permet de quantifier à quel point un halo de diffusion sera visible à partir d'une distribution en impulsion donnée. Ce critère nous a alors permis de réaliser une étude systématique des paramètres du réseau à utiliser (à savoir la profondeur s, l'amplitude du déphasage φ_0 et le temps de maintien t_{hold}) afin d'observer des halos de diffusion avec une visibilité optimale. Dans le quatrième chapitre, nous avons repris cette étude comme point de départ d'un algorithme de contrôle optimal afin de façonner complètement la distribution en impulsion du nuage d'atomes dans le réseau. Nous sommes parvenus à utiliser le contrôle optimal afin de définir non seulement les modules des composantes d'impulsion mais également

leurs phases relatives. Le contrôle sur l'état quantique est alors total et il devient alors possible de préparer n'importe quel état dans le réseau avec une bonne fidélité. Nous avons en l'occurence préparé des états propres de la structure de bande du réseau optique. Cette partie répond donc à une problématique importante pour les simulations quantiques : la préparation de l'état initial.

— La troisième partie présente les travaux effectués par un contrôle conjoint de la phase et de l'amplitude du réseau optique. J'y ai présenté un problème de simulation quantique que nous avons résolu à l'aide de notre dispositif, à savoir l'observation et la caractérisation d'un effet tunnel apparaissant dans des systèmes modulés périodiquement dans le temps au delà du régime perturbatif. J'ai montré que dès lors que l'amplitude du réseau optique est modulée périodiquement dans le temps, le portrait de phase d'un site du réseau devient mixte, c'est-à-dire qu'il présente à la fois des trajectoires régulières et chaotiques. Nous avons montré que nous pouvions choisir le degré de chaos du système. Pour cela nous avons montré notre aptitude à sonder l'espace des phases stroboscopique souhaité selon l'axe des positions avec un paquet d'onde atomique. Cette étude sur les portraits de phases nous alors permis de déterminer les paramètres à utiliser afin de charger un îlot de stabilité en vue d'observer l'effet tunnel assisté par le chaos. En laissant le système évoluer, nous avons observé une oscillation de l'impulsion moyenne du nuage atomique, signature d'une oscillation des atomes entre deux zones classiquement déconnectées l'une de l'autre. Nous avons alors montré que le couplage entre ces deux îlots de stabilité présente des résonances lorsqu'un paramètre du système est varié, signature de la contribution d'un état chaotique. Il s'agit de la première observation de ces résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos avec un système d'atomes froids.

Ces résultats ouvrent des perspectives intéressantes pour des travaux ultérieurs dont je ne présente ici qu'une partie.

Comme nous sommes capables de contrôler l'état quantique du condensat dans le réseau, il devient possible de préparer un état précis dans l'espace des phases associé à un site du réseau. En effet, à un état dans l'espace des phases d'une cellule répétée périodiquement sur le réseau correspond une distribution discrète en impulsion pour les atomes dans le réseau : il suffit alors d'utiliser l'algorithme de contrôle optimal afin de préparer la distribution en impulsion correspondant à l'état dans l'espace des phases désiré. Un exemple d'état préparé dans l'espace des phases est présenté sur la figure 7.1. Afin de vérifier si l'état préparé expérimentalement correspond effectivement à l'état obtenu numériquement par contrôle optimal, nous avons besoin de déterminer les modules et les phases relatives des composantes d'impulsion. Expérimentalement, il est donc nécessaire de laisser l'état évoluer dans le réseau une fois préparé afin de déterminer les phases relatives des composantes d'impulsion comme présenté dans la partie 5.3.2. Une fois

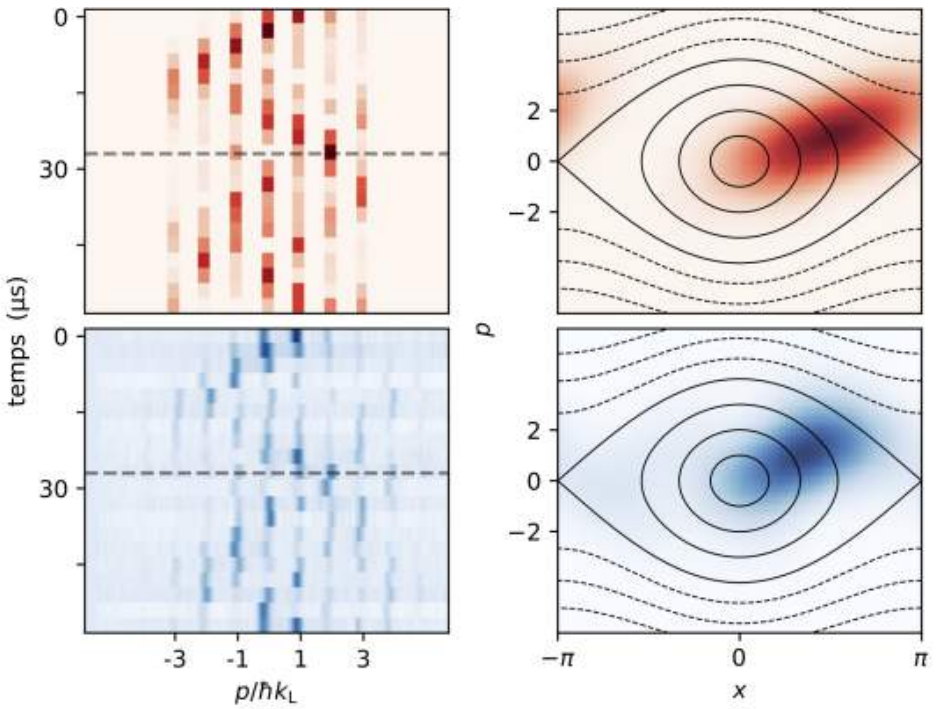


Figure 7.1 – Contrôle de l'état quantique du condensat dans l'espace des phases. Gauche : Evolution numérique (rouge) et expérimentale (bleu) dans un réseau statique de profondeur $s = 16.15$ de l'état préparé par contrôle optimal. La durée de l'évolution est de 110 μs et est échantillonnée par pas de 5 μs. Droite : Représentation de l'état préparé correspondant dans l'espace des phases. Il s'agit d'un état comprimé selon l'axe des positions présentant un angle de 45° par rapport aux axes des impulsions et des positions de l'espace des phases.

les phases relatives déterminées, il devient possible de reconstruire les phases de la distribution en impulsion initiale. À partir de cette distribution en impulsion, nous pouvons alors obtenir une représentation de l'état préparé expérimentalement dans l'espace des phases. Sur cette figure, nous comparons l'évolution numérique de l'état obtenu par contrôle optimal à celle de l'état obtenu expérimentalement. Nous observons un bon accord entre ces deux évolutions. L'évolution expérimentale nous permet d'obtenir la représentation de l'état obtenu expérimentalement dans l'espace des phases. Dans l'exemple donné sur cette figure, il s'agit d'un état comprimé faisant un angle de 45° avec les axes des positions et impulsions de l'espace des phases.

Ce type d'état peut être utilisé comme état initial pour des problèmes de simulation quantique comme par exemple celui de l'observation de l'effet tunnel assisté par le chaos. Des recherches préliminaires ont déjà été entamées dans cette direction. Sur la figure 7.2, nous comparons des oscillations entre les îlots de stabilité de l'espace des phases stroboscopique produit par les paramètres ($\gamma = 0.348, \varepsilon = 0.27$) lorsque les îlots sont chargés par un décalage abrupt de la phase comme présenté dans le chapitre 6 ou par contrôle optimal. On voit que les oscillations sont

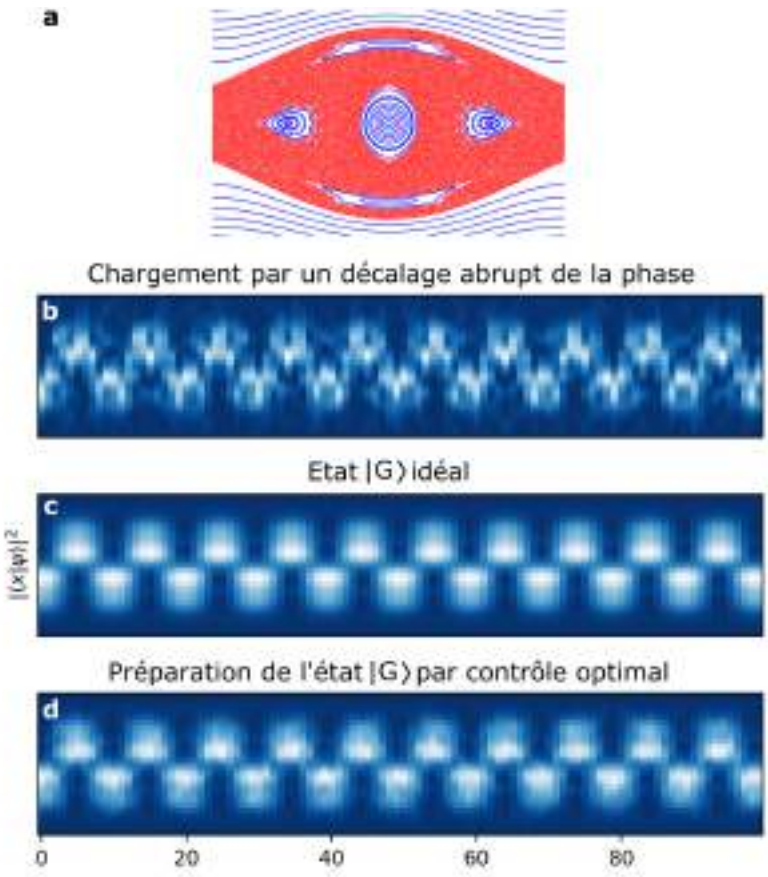


Figure 7.2 – Comparaison numérique d'oscillation tunnel assistées par le chaos avec un chargement des îlots par un décalage abrupt de la phase du réseau et par contrôle optimal. a : Portrait de phase généré par les paramètres de modulation ($\gamma = 0.348, \varepsilon = 0.27$). **b-d** : Oscillations entre les îlots de stabilité à gauche et à droite du portrait de phase stroboscopique présenté en **a** pour trois états initiaux différents. **b** : L'état obtenu par décalage abrupt de la phase du réseau. **c** : L'état idéal $|G\rangle$. **d** : L'état obtenu par contrôle optimal en essayant de préparer l'état idéal $|G\rangle$.

brouillées lorsque le chargement de l'îlot est effectué via un décalage abrupt de la phase du réseau. En effet, l'état fondamental du réseau translaté se superpose également à d'autres états de Floquet oscillant à différentes fréquences. En revanche, l'état cible du contrôle optimal est l'état $|G\rangle$, qui est une superposition des deux états de Floquet ayant le plus grand recouvrement avec les îlots. On observe que les oscillations sont beaucoup plus nettes lorsque l'état initial est préparé par contrôle optimal : le recouvrement avec d'autres états de Floquet est minimal dans ce cas. On en conclut que l'utilisation de contrôle optimal pour charger des îlots de stabilité d'un espace des phases stroboscopique peut améliorer la qualité de l'observation de l'effet tunnel assisté par le chaos.

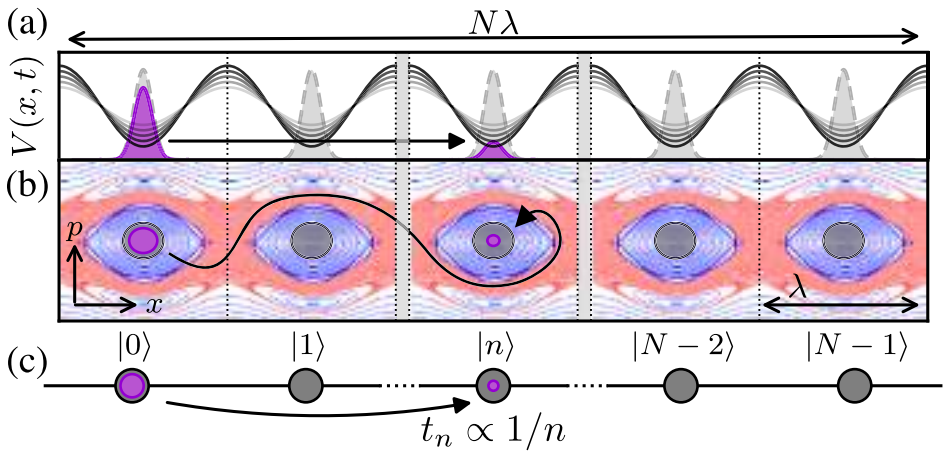


Figure 7.3 – Figure de principe du couplage à longue portée dans un réseau modulé. a : Représentation *in-situ* de la fonction d'onde passant d'un site à l'autre du réseau par effet tunnel. **b** : Représentation dans l'espace des phases de la fonction d'onde passant d'un îlot de stabilité dans la mer chaotique par effet tunnel, se délocalisant dans cette dernière, puis repassant par effet tunnel dans un îlot de stabilité d'un autre site du réseau. **c** : Description du système en termes de liaisons fortes. Le systèmes contient N sites avec des couplages différents entre les i-ème et j-ième sites proportionnels à $1/|i-j|$. Figure tirée de [186]

L'amélioration de la qualité des mesures de l'effet tunnel assisté par le chaos est d'un grand intérêt. En effet, les travaux sur les résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos posent notamment la question de la portée de l'effet tunnel assisté par le chaos. Comme présenté sur la figure 7.3, la mer chaotique est commune à tous les sites du réseau. Les états chaotiques impliqués dans le transport sont délocalisés dans la mer chaotique et donc, par conséquent, potentiellement sur l'ensemble du réseau. L'équipe du laboratoire de physique théorique de Toulouse avec laquelle nous collaborons a montré que la modulation périodique du réseau au delà du régime perturbatif peut être modélisé par un hamiltonien de liaisons fortes présentant un effet tunnel à longue portée entre deux sites $t_n \propto 1/n$, avec n est le nombre de sites les séparants [186]. Ce résultat, au delà d'être une nouvelle observable d'intérêt de chaos quantique, peut être exploité dans des perspectives de simulations quantiques. En effet, des modèles présentant un tel couplage à longue portée ont déjà été largement étudiés théoriquement dans le domaine de la matière condensée. Des phénomènes présentants une physique extrêmement riche découle d'un couplage de ce type : la multifractalité [187], les verres de spin [188] ou encore la supraconductivité à haute température [189] en sont des exemples. L'observation et la caractérisation expérimentale de ce couplage à longue portée dans un système d'atomes froids permettrait donc d'apporter une implémentation de ces modèles avec un haut niveau de contrôle. Les éléments présentés ici sont déjà en cours d'investigation et alimenteront le travail de thèse de mes successeurs.

Je liste ici les articles scientifiques rédigés dans le cadre de cette thèse.

1. C. Cabrera-Gutierrez, E. Michon, M. Arnal, G. Chatelain, V. Brunaud, T. Kawalec, J. Billy, and D. Guéry-Odelin, "Resonant excitations of a bose einstein condensate in an optical lattice", *The European Physical Journal D*, vol. **73**, no. 8, pp. 1–8, 2019.

   Résumé : Nous étudions expérimentalement un condensat de Bose-Einstein placé dans un réseau optique unidimensionnel dont la phase ou l'amplitude est modulée dans une gamme de fréquences résonantes avec les premières bandes excitées de la structure de bande. Plus précisément, nous étudions l'effet d'un faible confinement extérieur supplémentaire superposé au réseau sur les transitions à 1 et 2 phonons. Nous identifions des transitions immunes ou des transitions très sensibles au confinement extérieur malgré plusieurs ordres de grandeur de différence de puissance par rapport au confinement du réseau. Nous interprétons ces caractéristiques et présentons des simulations numériques 1D, prenant en compte les effets des interactions inter-atomiques, qui sont en accord avec les observations expérimentales. En utilisant la technique de re-descente adiabatique, nous obtenons également un accès direct aux populations ayant subi des transitions à n-phonons pour chaque fréquence de modulation, y compris pour un quasi-moment non nul.

2. M. Arnal, V. Brunaud, G. Chatelain, C. Cabrera-Gutiérrez, E. Michon, P. Cheiney, J. Billy, and D. Guéry-Odelin, "Evidence for cooling in an optical lattice by amplitude modulation", *Physical Review A*, vol. **100**, no. 1, p. 013416, 2019.

   Résumé : Nous présentons une technique de refroidissement générique pour un nuage d'atomes piégés dans des réseaux optiques. Elle consiste à moduler la profondeur du réseau avec une vobulation de fréquence appropriée. Cette technique de filtrage retire du nuage les atomes les plus énergétiques et fournit, avec le début de la thermalisation, un mécanisme de refroidissement rappelant le refroidissement par évaporation. Cependant, le filtrage est ici effectué dans l'espace des quasi-moments plutôt que dans l'espace des positions. Des règles de sélection interbande sont utilisées pour protéger la population dont le quasimoment est nul, à savoir le condensat de Bose-Einstein. La condensation directe d'atomes thermiques dans le réseau optique est démontrée avec cette technique. Elle offre un mécanisme de refroidissement complémentaire intéressant pour les simulations quantiques réalisées avec des gaz quantiques piégés dans des réseaux optiques.

3. M. Arnal, G. Chatelain, C. Cabrera-Gutierrez, A. Fortun, E. Michon, J. Billy, P. Schlagheck, and D. Guéry-Odelin, "Beyond effective hamiltonians : Micromotion of bose-einstein conden-

sates in periodically driven optical lattices", *Physical Review A*, vol. **101**, no. 1, p. 013619, 2020.

Résumé : Nous étudions par des moyens statistiques un condensat de Bose-Einstein maintenu dans un réseau optique unidimensionnel dont la phase est modulée rapidement. Le potentiel moyen ressenti par les atomes produit un potentiel périodique de même période spatiale mais de profondeur renormalisée. Cependant, la dynamique atomique contient également un micro-mouvement dont les principales caractéristiques sont révélées par une analyse statistique de Kolmorogov-Smirnov des distributions expérimentales en quasi-moment. De plus, nous discutons l'impact du micro-mouvement sur un processus de trempe (*quench* en anglais) correspondant à un changement soudain de l'amplitude de modulation inversant la courbure du potentiel moyen.

4. M. Arnal, G. Chatelain, M. Martinez, N. Dupont, O. Giraud, D. Ullmo, B. Georgeot, G. Lemarié, J. Billy, and D. Guéry-Odelin, "Chaos-assisted tunneling resonances in a synthetic floquet superlattice", *Science advances*, vol. **6**, no. 38, p. eabc4886, 2020.

   Résumé : Le domaine des simulations quantiques, qui vise à utiliser un système quantique contrôlable pour en simuler un autre, s'est développé rapidement ces dernières années comme une alternative à l'ordinateur quantique universel. Jusqu'à présent, la majorité des efforts dans ce domaine ont été dirigés vers des systèmes entièrement réguliers ou entièrement chaotiques. Ici, nous nous concentrons sur le régime intermédiaire, où les orbites régulières sont entourées d'une mer étendue de trajectoires chaotiques. Nous observons un mécanisme de transport de chaos quantique, appelé effet tunnel assisté par le chaos, qui se traduit par des résonances aiguës du taux de couplage et offre des possibilités de simulation quantique jusqu'alors inexplorées. Plus précisément, en utilisant des condensats de Bose-Einstein dans un réseau optique modulé en amplitude, nous démontrons et caractérisons expérimentalement ces résonances. Nos travaux ouvrent la voie vers des simulations quantiques avec un transport à longue distance et un contrôle quantique par la complexité.

5. G. Chatelain, N. Dupont, M. Arnal, V. Brunaud, J. Billy, B. Peaudecerf, P. Schlagheck, and D. Guéry-Odelin, "Observation and control of quantized scattering halos", *New Journal of Physics*, vol. **22**, no. 12, p. 123032, 2020.

   Résumé : Nous étudions la production d'halos de diffusion en ondes s à partir de collisions entre les composantes d'impulsion d'un condensat de Bose-Einstein diffracté par un réseau optique. La périodicité du réseau se traduit par un peigne d'impulsions responsable de la quantification du rayon des halos. Nous démontrons la manipulation de ces halos par

le contrôle précis de la dynamique des atomes dans le réseau : nous sommes capables d'amplifier les processus de collision dans un mode d'impulsions moyenne et relative donné. En particulier, nous observons des rayons des halos de collision quantifiés entre des composantes d'impulsion opposées d'une magnitude croissante, allant jusqu'à 6 fois l'impulsion caractéristique du réseau.

6. N. Dupont, G. Chatelain, L. Gabardos, M. Arnal, J. Billy, B. Peaudecerf, D. Sugny, D. Guéry-Odelin, "Quantum state control of a Bose-Einstein condensate in an optical lattice", *PRX Quantum*, vol. **2**, no. 4 p. 040303, 2021.

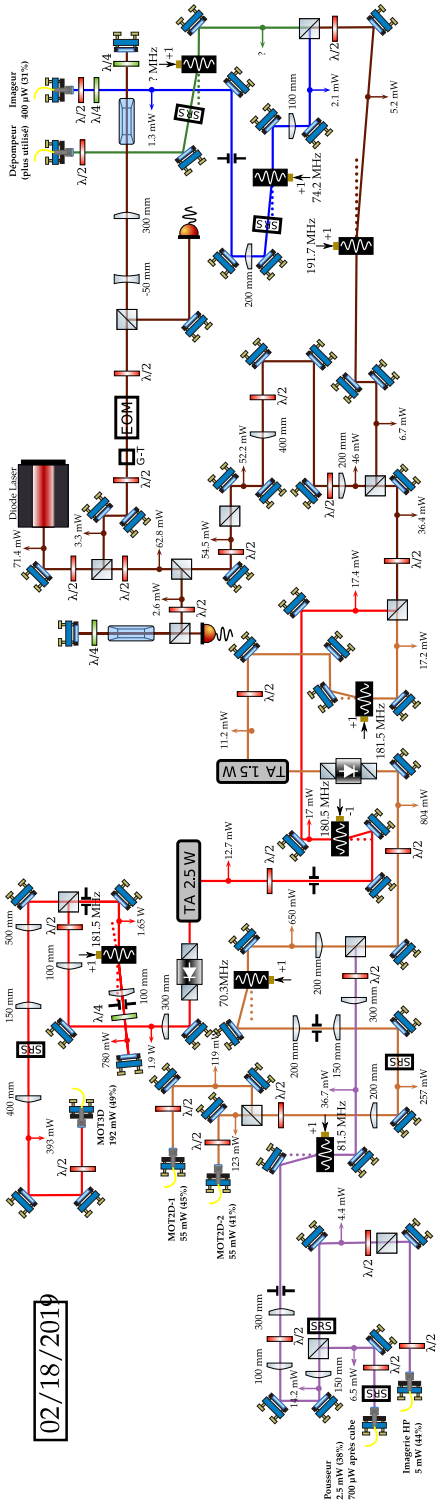
   Résumé : Nous présentons des protocoles de contrôle optimal quantique pour manipuler les états d'impulsion d'un condensat de Bose-Einstein (BEC) dans un réseau optique unidimensionnel. Nos protocoles opèrent sur le peigne d'impulsion associé au réseau optique. Contrairement aux travaux précédents qui traitent également du contrôle de l'état quantique dans des espaces de Hilbert discrets et de grande dimension, nos protocoles de contrôle nous permettent d'atteindre une grande variété de cibles en faisant varier un seul paramètre : la phase du réseau. Avec cette technique, nous démontrons expérimentalement un contrôle précis, robuste et polyvalent : nous optimisons le transfert du condensat vers un ou plusieurs états d'impulsion avec un contrôle total sur les phases relatives entre les différentes composantes d'impulsion. Cela nous permet également de préparer le condensat dans un état propre donné de la structure de bande du réseau, ou une superposition de ceux-ci.

Quatrième partie

Annexes

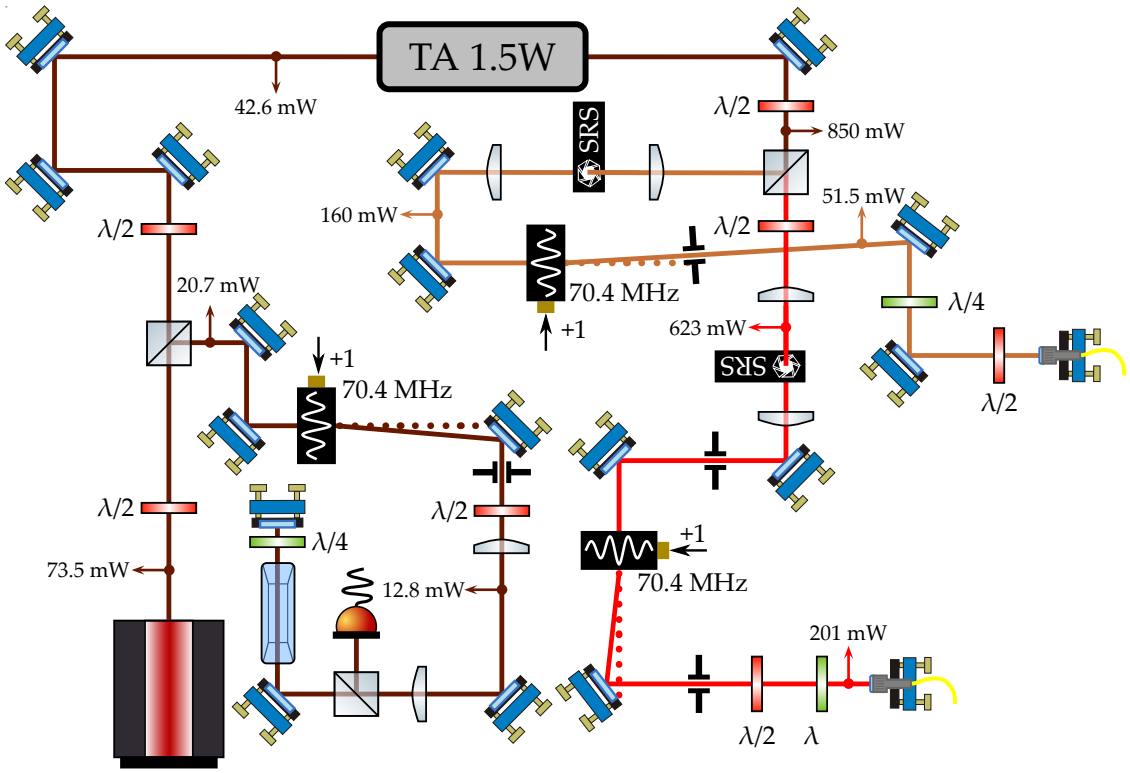
A Schéma du montage optique de la table refroidisseur. Tiré de [7].

La table refroidisseur permet de mettre en forme les faisceaux de refroidissement pour le PMO-2D et 3D. Pour cela, un laser à diode (Toptica DL Pro) émet un faisceau laser à 780nm asservi en fréquence, à l'aide d'un dispositif d'absorption saturée, sur la transition atomique $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$. La fréquence est stabilisée en changeant le courant de la diode, lui-même ajusté par un signal d'erreur obtenu par détection synchrone (SRS Lock-In Amplifier SR830) du signal d'absorption saturée. Le faisceau de la diode est ensuite séparé en deux faisceaux, chacun ayant sa fréquence ajustée par un modulateur acousto-optique, puis amplifié par un amplificateur (Sacher Lasertechnik TEC 400). L'un des deux faisceaux est utilisé pour le PMO-2D et l'autre pour le PMO-3D. Après amplification, les deux faisceaux sont injectés dans deux autres modulateurs acousto-optique qui permettent d'ajuster la puissance et fréquence des lasers au cours de la séquence expérimentale. Finalement, ces faisceaux sont transmis par fibre optique à maintien de polarisation vers la table principale.


02/18/2019
Dépompeur (plus utilisé)
Imageur 400 µW (31%)
Diode Laser
EOM
TA 1.5 W
TA 2.5 W
MOT3D 192 mW (49%)
MOT2D-1 55 mW (45%)
MOT2D-2 55 mW (41%)
Pousseur 2.5 mW (38%) 700 µW après cube
Imagerie HP 5 mW (44%)
SRS

B Schéma du montage optique de la table repompeur. Tiré de [7].

La table repompeur permet quant à elle de préparer les faisceaux repompeurs des PMO-2D et 3D. Sur le même principe que pour la table refroidisseur, elle est composée d'une diode (Toptica DL Pro) émettant un faisceau laser dont la fréquence est asservie par ajustement du courant. De même, un dispositif d'absorption saturée et de détection synchrone permet d'asservir la fréquence sur la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$. Il n'y a qu'un seul amplificateur (Toptica BoosTA Pro) sur cette table, dont la sortie est séparée en deux, une pour le PMO-2D et l'autre pour le PMO-3D. Chaque faisceau est injecté dans un modulateur acousto-optique pour ajuster les paramètres du faisceau avant transport par fibre optique à maintien de polarisation sur la table principale.



C

Tableau récapitulatif de la production des condensats

Étapes principales	PMO-3D				Piège quadrupolaire Magnétique		évaporation Micro-onde	Piège hybride		évaporation dipolaire	Réseau
Sous étapes	Chargement	PMO sombre	Mélasse dynamique	Dépompage	Chargement	Compression adiabatique		Décompression 1	Décompression 2		
Durée s	4	$20 \cdot 10^{-3}$	$15 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$500 \cdot 10^{-3}$	$100 \cdot 10^{-3}$	12	1	1	6.2	
Température (K)			$50 \cdot 10^{-6}$	$50 \cdot 10^{-6}$	$140 \cdot 10^{-6}$	$190 \cdot 10^{-6}$	$55 \cdot 10^{-6}$		$12 \cdot 10^{-6}$	$200 \cdot 10^{-9}$	
Nombre d'atomes	$1.5 \cdot 10^{9}$				$6 \cdot 10^{8}$		$8 \cdot 10^{7}$	$1,5 \cdot 10^{7}$		$2 \cdot 10^{5}$	
Densité dans l'espace des phases	10^{-9}						10^{-7}			1	

Table C.1 – Tableau récapitulatif de la séquence expérimentale.

D Monômes d'impulsions

Dans cette série d'expériences, nous peuplons exclusivement un état d'impulsion entre les ordres $(-5,\ldots,5)\hbar k_{\mathrm{L}}$ par un protocole de contrôle de la phase du réseau optique déterminé par contrôle optimal, une technique présentée au chapitre 5. Les champs de contrôles utilisés, les distributions en impulsions et les images expérimentales sont présentés sur la figure E.1.

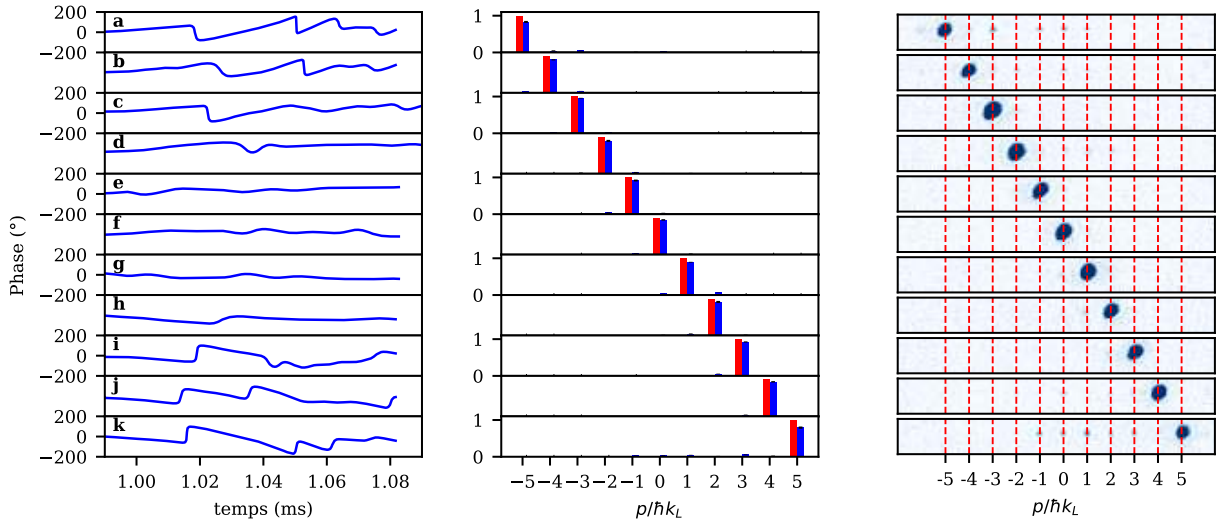


Figure D.1 – Monômes en impulsion obtenus par contrôle optimal. Gauche : champs de contrôle $\varphi(t)$ utilisés pour produire le monôme. Milieu : comparaison des distributions en impulsion idéales (rouge) aux distributions en impulsion obtenues expérimentalement (bleu). Les barres d'erreurs correspondent à une incertitude poissonienne ($\sqrt{N}$ avec N la fraction du nombre d'atomes dans un ordre de diffraction). Droite : Images expérimentales correspondantes.

E Binômes d'impulsions

Dans cette série d'expériences, nous peuplons exclusivement une superposition de deux états d'impulsion entre les ordres $(-3,\ldots,3)\hbar k_{\mathrm{L}}$ par un protocole de contrôle de la phase du réseau optique déterminé par contrôle optimal, une technique présentée au chapitre 5. Toutes les combinaisons possibles de binômes (les champs de contrôles utilisés, les distributions en impulsions et les images expérimentales) sont présentées sur la figure E.1. On remarque des halos de collision lorsque deux ordres côte à côte sont peuplés. Le temps de vol est trop long (supérieur à 20 ms) pour pouvoir apercevoir les halos de collisions entre des ordres séparés de plus que $1\hbar k_{\mathrm{L}}$, ces derniers étant trop dilués à ce temps de vol.

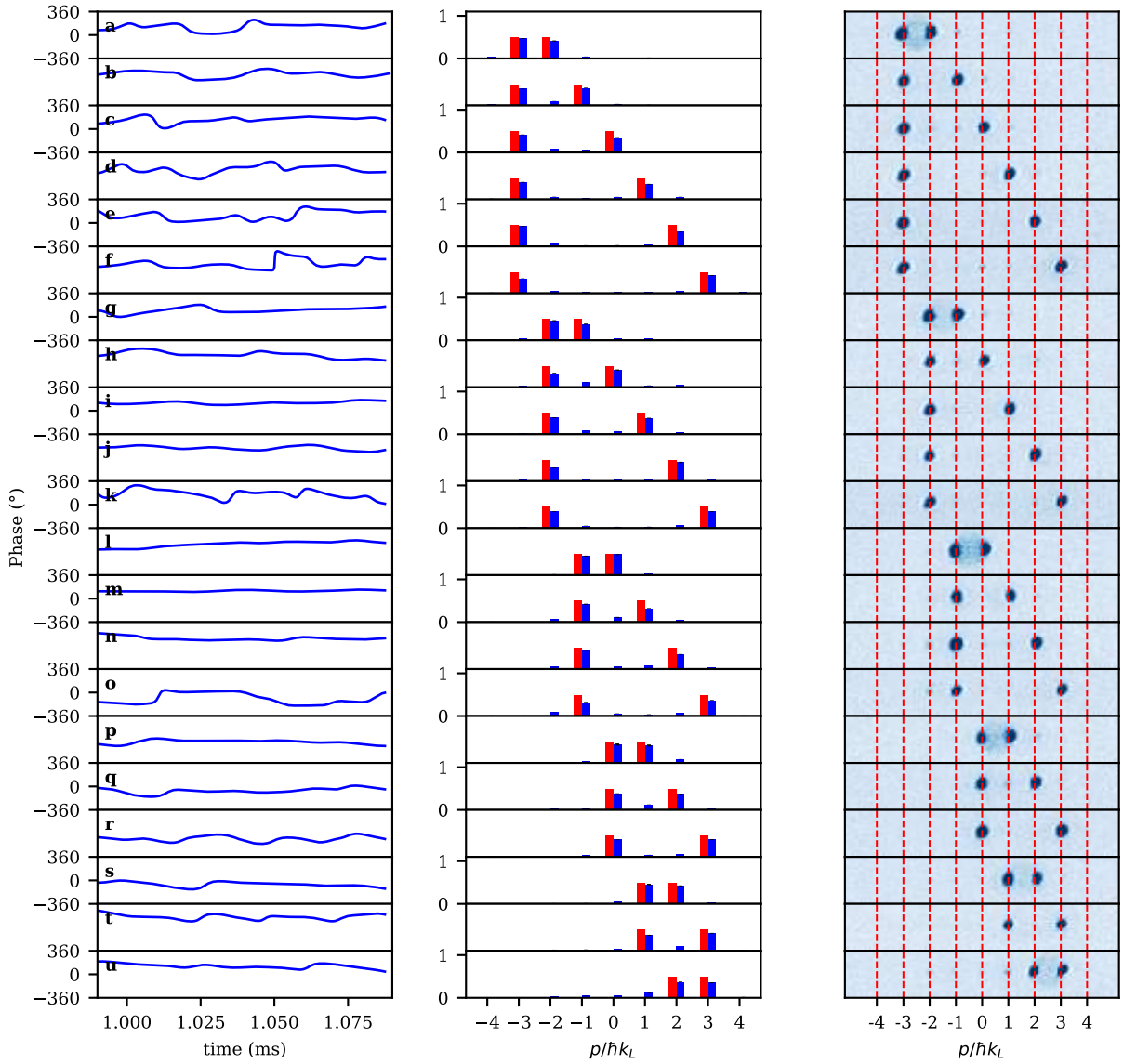


Figure E.1 – Binômes en impulsion obtenus par contrôle optimal. Gauche : champs de contrôle $\varphi(t)$ utilisés pour produire le binôme. Milieu : comparaison des distributions en impulsion idéales (rouge) aux distributions en impulsion obtenues expérimentalement (bleu). Les barres d'erreurs correspondent à une incertitude poissonienne ($\sqrt{N}$ avec N la fraction du nombre d'atomes dans un ordre de diffraction). Droite : Images expérimentales correspondantes.

F Autres résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos observées

Dans cette annexe, nous présentons deux autres résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos que nous avons observées et les spectres de Floquet correspondants.

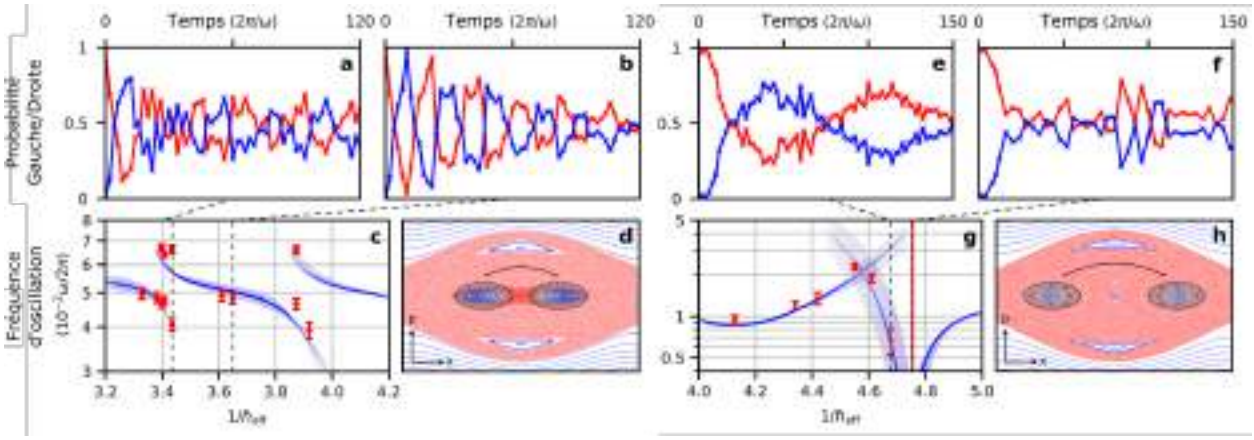


Figure F.1 – Deux autres résonance de l'effet tunnel assisté par le chaos. a-b : Exemples expérimentaux d'oscillation tunnel. **c** : Fréquences tunnels mesurées expérimentalement (points rouges) en fonction de l'inverse de la constante de Planck effective $\hbar_{\text{eff}}$ comparées aux prédictions théoriques/numériques (bleu). Les zones bleutées correspondent à l'incertitude sur γ. **d** : Portrait de phases dans lequel la résonance **c** est observée. Il correspond aux paramètres de modulation ($\gamma = 0.229 \pm 0.001, \varepsilon = 0.6$). **e-h** : Même que pour **a-b** mais pour les paramètres de modulation ($\gamma = 0.315 \pm 0.005, \varepsilon = 0.39$). **g** : La ligne rouge verticale correspond à la position de la résonance où aucune fréquence n'a pu être extraite du signal expérimental.

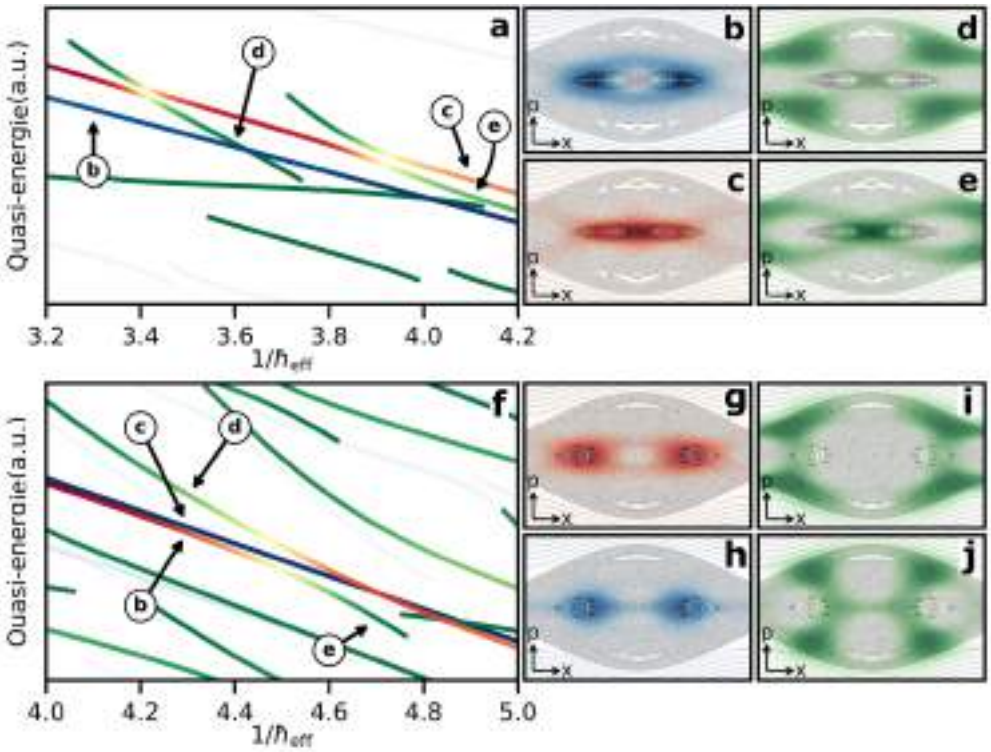


Figure F.2 – Mécanisme tunnel des résonances présenté sur la figure F.1. a : Spectre de Floquet du système ($\gamma = 0.229 \pm 0.001, \varepsilon = 0.6$). Les états réguliers symétrique et anti-symétrique sont représentés en rouge et bleu respectivement. Les états chaotiques sont représentés en vert. **b-e** : Représentation de Husimi des différents états impliqués dans le transport par effet tunnel assisté par le chaos. **f-j** : Même que **a-e** mais pour le système ($\gamma = 0.315 \pm 0.005, \varepsilon = 0.39$).

Bibliographie

[1] A. Chikkatur, A. Görlitz, D. Stamper-Kurn, S. Inouye, S. Gupta, and W. Ketterle, "Suppression and enhancement of impurity scattering in a bose-einstein condensate," *Physical review letters*, vol. 85, no. 3, p. 483, 2000.

[2] C. Buggle, J. Léonard, W. Von Klitzing, and J. Walraven, "Interferometric determination of the s and d-wave scattering amplitudes in rb87," *Physical review letters*, vol. 93, no. 17, p. 173202, 2004.

[3] N. R. Thomas, N. Kjærgaard, P. S. Julienne, and A. C. Wilson, "Imaging of s and d partial-wave interference in quantum scattering of identical bosonic atoms," *Physical review letters*, vol. 93, no. 17, p. 173201, 2004.

[4] A. Tenart, C. Carcy, H. Cayla, T. Bourdel, M. Mancini, and D. Clément, "Two-body collisions in the time-of-flight dynamics of lattice bose superfluids," *Physical Review Research*, vol. 2, no. 1, p. 013017, 2020.

[5] W. K. Hensinger, H. Häffner, A. Browaeys, N. R. Heckenberg, K. Helmerson, C. McKenzie, G. J. Milburn, W. D. Phillips, S. L. Rolston, H. Rubinsztein-Dunlop, *et al.*, "Dynamical tunnelling of ultracold atoms," *Nature*, vol. 412, no. 6842, pp. 52–55, 2001.

[6] D. A. Steck, W. H. Oskay, and M. G. Raizen, "Observation of chaos-assisted tunneling between islands of stability," *Science*, vol. 293, no. 5528, pp. 274–278, 2001.

[7] M. Arnal, *Gaz quantique dans un potentiel périodique dépendant du temps : de la modulation perturbative aux résonances de l'effet tunnel assisté par le chaos*. PhD thesis, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2020.

[8] Y. Cao, J. Romero, J. P. Olson, M. Degroote, P. D. Johnson, M. Kieferová, I. D. Kivlichan, T. Menke, B. Peropadre, N. P. Sawaya, *et al.*, "Quantum chemistry in the age of quantum computing," *Chemical reviews*, vol. 119, no. 19, pp. 10856–10915, 2019.

[9] T. Monz, D. Nigg, E. A. Martinez, M. F. Brandl, P. Schindler, R. Rines, S. X. Wang, I. L. Chuang, and R. Blatt, "Realization of a scalable shor algorithm," *Science*, vol. 351, no. 6277, pp. 1068–1070, 2016.

[10] C. Zalka, "Grover's quantum searching algorithm is optimal," *Physical Review A*, vol. 60, no. 4, p. 2746, 1999.

[11] M. Steffen, W. van Dam, T. Hogg, G. Breyta, and I. Chuang, "Experimental implementation of an adiabatic quantum optimization algorithm," *Physical review letters*, vol. 90, no. 6, p. 067903, 2003.

[12] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, R. Biswas, S. Boixo, F. G. Brandao, D. A. Buell, *et al.*, "Quantum supremacy using a programmable superconducting processor," *Nature*, vol. 574, no. 7779, pp. 505–510, 2019.

[13] E. Pednault, J. A. Gunnels, G. Nannicini, L. Horesh, and R. Wisnieff, "Leveraging secondary storage to simulate deep 54-qubit sycamore circuits," *arXiv preprint arXiv :1910.09534*, 2019.

[14] Y. Zhou, E. M. Stoudenmire, and X. Waintal, "What limits the simulation of quantum computers ?," *Physical Review X*, vol. 10, no. 4, p. 041038, 2020.

[15] R. P. Feynman, "Simulating physics with computers," in *Feynman and computation*, pp. 133–153, CRC Press, 2018.

[16] W. G. Unruh, "Maintaining coherence in quantum computers," *Physical Review A*, vol. 51, no. 2, p. 992, 1995.

[17] E. Altman, K. R. Brown, G. Carleo, L. D. Carr, E. Demler, C. Chin, B. DeMarco, S. E. Economou, M. A. Eriksson, K.-M. C. Fu, *et al.*, "Quantum simulators : Architectures and opportunities," *PRX Quantum*, vol. 2, no. 1, p. 017003, 2021.

[18] I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimbene, "Quantum simulations with ultracold quantum gases," *Nature Physics*, vol. 8, no. 4, pp. 267–276, 2012.

[19] P. Scholl, M. Schuler, H. J. Williams, A. A. Eberharter, D. Barredo, K.-N. Schymik, V. Lienhard, L.-P. Henry, T. C. Lang, T. Lahaye, *et al.*, "Quantum simulation of 2d antiferromagnets with hundreds of rydberg atoms," *Nature*, vol. 595, no. 7866, pp. 233–238, 2021.

[20] S. Ebadi, T. T. Wang, H. Levine, A. Keesling, G. Semeghini, A. Omran, D. Bluvstein, R. Samajdar, H. Pichler, W. W. Ho, *et al.*, "Quantum phases of matter on a 256-atom programmable quantum simulator," *Nature*, vol. 595, no. 7866, pp. 227–232, 2021.

[21] A. Kumar, T.-Y. Wu, F. Giraldo, and D. S. Weiss, "Sorting ultracold atoms in a three-dimensional optical lattice in a realization of maxwell's demon," *Nature*, vol. 561, no. 7721, pp. 83–87, 2018.

[22] C. Gross and I. Bloch, "Quantum simulations with ultracold atoms in optical lattices," *Science*, vol. 357, no. 6355, pp. 995–1001, 2017.

[23] M. Endres, H. Bernien, A. Keesling, H. Levine, E. R. Anschuetz, A. Krajenbrink, C. Senko, V. Vuletic, M. Greiner, and M. D. Lukin, "Atom-by-atom assembly of defect-free one-dimensional cold atom arrays," *Science*, vol. 354, no. 6315, pp. 1024–1027, 2016.

[24] D. Barredo, S. De Léséleuc, V. Lienhard, T. Lahaye, and A. Browaeys, "An atom-by-atom assembler of defect-free arbitrary two-dimensional atomic arrays," *Science*, vol. 354, no. 6315, pp. 1021–1023, 2016.

[25] D. Barredo, V. Lienhard, S. De Leseleuc, T. Lahaye, and A. Browaeys, "Synthetic three-dimensional atomic structures assembled atom by atom," *Nature*, vol. 561, no. 7721, pp. 79–82, 2018.

[26] T. Uehlinger, D. Greif, G. Jotzu, L. Tarruell, T. Esslinger, L. Wang, and M. Troyer, "Double transfer through dirac points in a tunable honeycomb optical lattice," *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 217, no. 1, pp. 121–133, 2013.

[27] O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T. W. Hänsch, and I. Bloch, "Coherent transport of neutral atoms in spin-dependent optical lattice potentials," *Physical review letters*, vol. 91, no. 1, p. 010407, 2003.

[28] T. Chalopin, T. Satoor, A. Evrard, V. Makhalov, J. Dalibard, R. Lopes, and S. Nascimbene, "Probing chiral edge dynamics and bulk topology of a synthetic hall system," *Nature Physics*, vol. 16, no. 10, pp. 1017–1021, 2020.

[29] H. M. Price, T. Ozawa, and N. Goldman, "Synthetic dimensions for cold atoms from shaking a harmonic trap," *Physical Review A*, vol. 95, no. 2, p. 023607, 2017.

[30] J. Struck, M. Weinberg, C. Ölschläger, P. Windpassinger, J. Simonet, K. Sengstock, R. Höppner, P. Hauke, A. Eckardt, M. Lewenstein, *et al.*, "Engineering ising-xy spin-models in a triangular lattice using tunable artificial gauge fields," *Nature Physics*, vol. 9, no. 11, pp. 738–743, 2013.

[31] M. Aidelsburger, "Artificial gauge fields and topology with ultracold atoms in optical lattices," *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 51, no. 19, p. 193001, 2018.

[32] N. Goldman and J. Dalibard, "Periodically driven quantum systems : effective hamiltonians and engineered gauge fields," *Physical review X*, vol. 4, no. 3, p. 031027, 2014.

[33] A. Eckardt, "Colloquium : Atomic quantum gases in periodically driven optical lattices," *Reviews of Modern Physics*, vol. 89, no. 1, p. 011004, 2017.

[34] H. Chen and W. V. Liu, "Intertwined space-time symmetry, orbital magnetism, and dynamical berry connection in a circularly shaken optical lattice," *Physical Review A*, vol. 104, no. 1, p. 013308, 2021.

[35] T. Karpiuk, N. Cherroret, K. Lee, B. Grémaud, C. Müller, and C. Miniatura, "Coherent forward scattering peak induced by anderson localization," *Physical review letters*, vol. 109, no. 19, p. 190601, 2012.

[36] C. Cabrera-Gutiérrez, E. Michon, M. Arnal, G. Chatelain, V. Brunaud, T. Kawalec, J. Billy, and D. Guéry-Odelin, "Resonant excitations of a bose einstein condensate in an optical lattice," *The European Physical Journal D*, vol. 73, no. 8, pp. 1–8, 2019.

[37] M. Arnal, V. Brunaud, G. Chatelain, C. Cabrera-Gutiérrez, E. Michon, P. Cheiney, J. Billy, and D. Guéry-Odelin, "Evidence for cooling in an optical lattice by amplitude modulation," *Physical Review A*, vol. 100, no. 1, p. 013416, 2019.

[38] G. Chatelain, N. Dupont, M. Arnal, V. Brunaud, J. Billy, B. Peaudecerf, P. Schlagheck, and D. Guéry-Odelin, "Observation and control of quantized scattering halos," *New Journal of Physics*, vol. 22, no. 12, p. 123032, 2020.

[39] N. Dupont, G. Chatelain, L. Gabardos, M. Arnal, J. Billy, B. Peaudecerf, D. Sugny, and D. Guéry-Odelin, "Quantum state control of a bose-einstein condensate in an optical lattice," *PRX Quantum*, vol. 2, no. 4, p. 040303, 2021.

[40] M. Arnal, G. Chatelain, M. Martinez, N. Dupont, O. Giraud, D. Ullmo, B. Georgeot, G. Lemarié, J. Billy, and D. Guéry-Odelin, "Chaos-assisted tunneling resonances in a synthetic floquet superlattice," *Science advances*, vol. 6, no. 38, p. eabc4886, 2020.

[41] A. Einstein, "Strahlungs-emission und-absorption nach der quantentheorie, 17 jul 1916," 1916.

[42] C. Cohen-Tannoudji, "Atoms in strong resonant fields spectral distribution of the fluorescence light," in *Laser Spectroscopy*, pp. 324–339, Springer, 1975.

[43] C. Cohen-Tannoudji, "Atomic motion in laser light," *Fundamental systems in quantum optics*, no. 53, pp. 1–164, 1990.

[44] S. N. Bose, "Plancks gesetz und lichtquantenhypothese," 1924.

[45] A. Einstein, "Quantentheorie des einatomigen idealen gases," *SB Preuss. Akad. Wiss. phys.-math. Klasse*, 1924.

[46] C. Cohen-Tannoudji and D. Guéry-Odelin, "Advances in atomic physics : an overview," 2011.

[47] M. Edwards and K. Burnett, "Numerical solution of the nonlinear schrödinger equation for small samples of trapped neutral atoms," *Physical Review A*, vol. 51, no. 2, p. 1382, 1995.

[48] Y. Castin and R. Dum, "Bose-einstein condensates in time dependent traps," *Physical Review Letters*, vol. 77, no. 27, p. 5315, 1996.

[49] J.-X. Zhu, *Bogoliubov-de Gennes method and its applications*, vol. 924. Springer, 2016.

[50] G. Condon, *Condensation de Bose-Einstein : des potentiels périodiques d'extension finie aux manipulations dans l'espace des phases*. PhD thesis, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2015.

[51] A. Fortun, *Dynamique hors équilibre d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau dépendant du temps*. PhD thesis, Université Toulouse 3-Paul Sabatier, 2016.

[52] S. Chu, "Nobel lecture : The manipulation of neutral particles," *Reviews of Modern Physics*, vol. 70, no. 3, p. 685, 1998.

[53] S. Chu, J. Bjorkholm, A. Ashkin, and A. Cable, "Experimental observation of optically trapped atoms," *Physical review letters*, vol. 57, no. 3, p. 314, 1986.

[54] N. Masuhara, J. M. Doyle, J. C. Sandberg, D. Kleppner, T. J. Greytak, H. F. Hess, and G. P. Kochanski, "Evaporative cooling of spin-polarized atomic hydrogen," *Physical Review Letters*, vol. 61, no. 8, p. 935, 1988.

[55] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, "Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor," *science*, vol. 269, no. 5221, pp. 198–201, 1995.

[56] D. J. Wineland and W. M. Itano, "Laser cooling of atoms," *Physical Review A*, vol. 20, no. 4, p. 1521, 1979.

[57] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. L. Gould, and H. J. Metcalf, "Observation of atoms laser cooled below the doppler limit," *Physical review letters*, vol. 61, no. 2, p. 169, 1988.

[58] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, "Dressed-atom approach to atomic motion in laser light : the dipole force revisited," *JOSA B*, vol. 2, no. 11, pp. 1707–1720, 1985.

[59] J. Gordon and A. Ashkin, "Motion of atoms in a radiation trap," *Physical Review A*, vol. 21, no. 5, p. 1606, 1980.

[60] J. Dalibard, "Une brève histoire des atomes froids," *Cours du Collège de France*, vol. 143, 2015.

[61] D. A. Steck, "Rubidium 87 d line data," 2001.

[62] K. Dieckmann, R. Spreeuw, M. Weidemüller, and J. Walraven, "Two-dimensional magneto-optical trap as a source of slow atoms," *Physical Review A*, vol. 58, no. 5, p. 3891, 1998.

[63] D. Holleville and B. Venon, "Piège magnéto-optique à 2 dimensions mot2d," tech. rep., SYRTE – Observatoire de Paris, 61, avenue de l'Observatoire 75014 Paris – France.

[64] P. D. Lett, W. D. Phillips, S. Rolston, C. E. Tanner, R. Watts, and C. Westbrook, "Optical molasses," *JOSA B*, vol. 6, no. 11, pp. 2084–2107, 1989.

[65] Y. Castin, H. Wallis, and J. Dalibard, "Limit of doppler cooling," *JOSA B*, vol. 6, no. 11, pp. 2046–2057, 1989.

[66] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, and S. Chu, "Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles," *Optics letters*, vol. 11, no. 5, pp. 288–290, 1986.

[67] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, "Bose-einstein condensation of cesium," *Science*, vol. 299, no. 5604, pp. 232–235, 2003.

[68] J.-F. Riou, *Etude des propriétés de propagation d'un laser à atomes*. PhD thesis, Université Paris Sud-Paris XI, 2006.

[69] T. Kozuka, K. Yasui, T. Tuziuti, A. Towata, and Y. Iida, "Noncontact acoustic manipulation in air," *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 46, no. 7S, p. 4948, 2007.

[70] D. Foresti, M. Nabavi, M. Klingauf, A. Ferrari, and D. Poulikakos, "Acoustophoretic contactless transport and handling of matter in air," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 110, no. 31, pp. 12549–12554, 2013.

[71] A. Marzo, A. Barnes, and B. W. Drinkwater, "Tinylev : A multi-emitter single-axis acoustic levitator," *Review of Scientific Instruments*, vol. 88, no. 8, p. 085105, 2017.

[72] I. Bloch, "Ultracold quantum gases in optical lattices," *Nature physics*, vol. 1, no. 1, pp. 23–30, 2005.

[73] A. D. Cronin, J. Schmiedmayer, and D. E. Pritchard, "Optics and interferometry with atoms and molecules," *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, no. 3, p. 1051, 2009.

[74] E. M. Rasel, M. K. Oberthaler, H. Batelaan, J. Schmiedmayer, and A. Zeilinger, "Atom wave interferometry with diffraction gratings of light," *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 14, p. 2633, 1995.

[75] K. Johnson, J. Thywissen, N. Dekker, K. Berggren, A. Chu, R. Younkin, and M. Prentiss, "Localization of metastable atom beams with optical standing waves : nanolithography at the heisenberg limit," *Science*, vol. 280, no. 5369, pp. 1583–1586, 1998.

[76] R. Abfalterer, C. Keller, S. Bernet, M. K. Oberthaler, J. Schmiedmayer, and A. Zeilinger, "Nanometer definition of atomic beams with masks of light," *Physical Review A*, vol. 56, no. 6, p. R4365, 1997.

[77] Y. B. Ovchinnikov, J. Müller, M. Doery, E. Vredenbregt, K. Helmerson, S. Rolston, and W. Phillips, "Diffraction of a released bose-einstein condensate by a pulsed standing light wave," *Physical review letters*, vol. 83, no. 2, p. 284, 1999.

[78] S. Wu, Y.-J. Wang, Q. Diot, and M. Prentiss, "Splitting matter waves using an optimized standing-wave light-pulse sequence," *Physical Review A*, vol. 71, no. 4, p. 043602, 2005.

[79] P. L. Gould, G. A. Ruff, and D. E. Pritchard, "Diffraction of atoms by light : The near-resonant kapitza-dirac effect," *Physical review letters*, vol. 56, no. 8, p. 827, 1986.

[80] P. J. Martin, B. G. Oldaker, A. H. Miklich, and D. E. Pritchard, "Bragg scattering of atoms from a standing light wave," *Physical review letters*, vol. 60, no. 6, p. 515, 1988.

[81] D. M. Giltner, R. W. McGowan, and S. A. Lee, "Atom interferometer based on bragg scattering from standing light waves," *Physical review letters*, vol. 75, no. 14, p. 2638, 1995.

[82] A. Koolen, G. Jansen, K. Domen, H. Beijerinck, and K. Van Leeuwen, "Large-angle adjustable coherent atomic beam splitter by bragg scattering," *Physical Review A*, vol. 65, no. 4, p. 041601, 2002.

[83] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch, "Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms," *nature*, vol. 415, no. 6867, pp. 39–44, 2002.

[84] Z. Hadzibabic, S. Stock, B. Battelier, V. Bretin, and J. Dalibard, "Interference of an array of independent bose-einstein condensates," *Physical review letters*, vol. 93, no. 18, p. 180403, 2004.

[85] G. Wilpers, T. Binnewies, C. Degenhardt, U. Sterr, J. Helmcke, and F. Riehle, "Optical clock with ultracold neutral atoms," *Physical review letters*, vol. 89, no. 23, p. 230801, 2002.

[86] J. Keupp, A. Douillet, T. Mehlstäubler, N. Rehbein, E. Rasel, and W. Ertmer, "A high-resolution ramsey-bordé spectrometer for optical clocks based on cold mg atoms," *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, vol. 36, no. 3, pp. 289–294, 2005.

[87] A. Peters, K. Y. Chung, and S. Chu, "High-precision gravity measurements using atom interferometry," *Metrologia*, vol. 38, no. 1, p. 25, 2001.

[88] Y. Bidel, N. Zahzam, C. Blanchard, A. Bonnin, M. Cadoret, A. Bresson, D. Rouxel, and M. Lequentrec-Lalancette, "Absolute marine gravimetry with matter-wave interferometry," *Nature communications*, vol. 9, no. 1, pp. 1–9, 2018.

[89] T. Gustavson, A. Landragin, and M. Kasevich, "Rotation sensing with a dual atom-interferometer sagnac gyroscope," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 17, no. 12, p. 2385, 2000.

[90] M. Altorio, L. Sidorenkov, R. Gautier, D. Savoie, A. Landragin, and R. Geiger, "Accurate trajectory alignment in cold-atom interferometers with separated laser beams," *Physical Review A*, vol. 101, no. 3, p. 033606, 2020.

[91] J. M. Mcguirk, G. Foster, J. Fixler, M. Snadden, and M. Kasevich, "Sensitive absolute-gravity gradiometry using atom interferometry," *Physical Review A*, vol. 65, no. 3, p. 033608, 2002.

[92] R. Battesti, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, B. Grémaud, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben, "Bloch oscillations of ultracold atoms : A tool for a metrological determination of h/m rb," *Physical review letters*, vol. 92, no. 25, p. 253001, 2004.

[93] P. Cladé, E. De Mirandes, M. Cadoret, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben, "Determination of the fine structure constant based on bloch oscillations of ultracold atoms in a vertical optical lattice," *Physical review letters*, vol. 96, no. 3, p. 033001, 2006.

[94] F. Bloch, "Quantum mechanics of electrons in crystal lattices," *Z. Phys*, vol. 52, pp. 555–600, 1928.

[95] J. Dalibard, "Des cages de lumière pour les atomes : la physique des pièges et des réseaux optiques," *Cours du Collège de France*, 2013.

[96] E. Michon, *Dynamique de condensats de Bose Einstein dans un réseau optique modulé en phase ou en amplitude*. PhD thesis, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2018.

[97] J. H. Denschlag, J. Simsarian, H. Häffner, C. McKenzie, A. Browaeys, D. Cho, K. Helmerson, S. Rolston, and W. D. Phillips, "A bose-einstein condensate in an optical lattice," *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 35, no. 14, p. 3095, 2002.

[98] C. Cabrera-Gutiérrez, E. Michon, V. Brunaud, T. Kawalec, A. Fortun, M. Arnal, J. Billy, and D. Guéry-Odelin, "Robust calibration of an optical-lattice depth based on a phase shift," *Physical Review A*, vol. 97, no. 4, p. 043617, 2018.

[99] A. Fortun, C. Cabrera-Gutiérrez, G. Condon, E. Michon, J. Billy, and D. Guéry-Odelin, "Direct tunneling delay time measurement in an optical lattice," *Physical review letters*, vol. 117, no. 1, p. 010401, 2016.

[100] H. Lignier, C. Sias, D. Ciampini, Y. Singh, A. Zenesini, O. Morsch, and E. Arimondo, "Dynamical control of matter-wave tunneling in periodic potentials," *Physical review letters*, vol. 99, no. 22, p. 220403, 2007.

[101] M. Arnal, G. Chatelain, C. Cabrera-Gutiérrez, A. Fortun, E. Michon, J. Billy, P. Schlagheck, and D. Guéry-Odelin, "Beyond effective hamiltonians : Micromotion of bose-einstein condensates in periodically driven optical lattices," *Physical Review A*, vol. 101, no. 1, p. 013619, 2020.

[102] M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T. W. Hänsch, and T. Esslinger, "Exploring phase coherence in a 2d lattice of bose-einstein condensates," *Physical Review Letters*, vol. 87, no. 16, p. 160405, 2001.

[103] M. Köhl, H. Moritz, T. Stöferle, K. Günter, and T. Esslinger, "Fermionic atoms in a three dimensional optical lattice : Observing fermi surfaces, dynamics, and interactions," *Physical review letters*, vol. 94, no. 8, p. 080403, 2005.

[104] A. J. Kerman, V. Vuletić, C. Chin, and S. Chu, "Beyond optical molasses : 3d raman sideband cooling of atomic cesium to high phase-space density," *Physical review letters*, vol. 84, no. 3, p. 439, 2000.

[105] J. Hu, A. Urvoy, Z. Vendeiro, V. Crépel, W. Chen, and V. Vuletić, "Creation of a bose-condensed gas of 87rb by laser cooling," *Science*, vol. 358, no. 6366, pp. 1078–1080, 2017.

[106] G. Ferrari, N. Poli, F. Sorrentino, and G. Tino, "Long-lived bloch oscillations with bosonic sr atoms and application to gravity measurement at the micrometer scale," *Physical Review Letters*, vol. 97, no. 6, p. 060402, 2006.

[107] M. B. Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, "Bloch oscillations of atoms in an optical potential," *Physical Review Letters*, vol. 76, no. 24, p. 4508, 1996.

[108] M. Ben_dahan, *Transport et relaxation d'atomes de césium : oscillations de Bloch et résonance de diffusion*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 1997.

[109] E. Peik, M. B. Dahan, I. Bouchoule, Y. Castin, and C. Salomon, "Bloch oscillations of atoms, adiabatic rapid passage, and monokinetic atomic beams," *Physical Review A*, vol. 55, no. 4, p. 2989, 1997.

[110] K. Madison, M. Fischer, R. Diener, Q. Niu, and M. G. Raizen, "Dynamical bloch band suppression in an optical lattice," *Physical review letters*, vol. 81, no. 23, p. 5093, 1998.

[111] H. Geiger, "On the scattering of the α-particles by matter," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 81, no. 546, pp. 174–177, 1908.

[112] G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott, J. Abdallah, S. A. Khalek, A. A. Abdelalim, R. Aben, B. Abi, M. Abolins, O. AbouZeid, *et al.*, "Observation of a new particle in the search for the standard model higgs boson with the atlas detector at the lhc," *Physics Letters B*, vol. 716, no. 1, pp. 1–29, 2012.

[113] J. Dalibard, "Collisional dynamics of ultra-cold atomic gases," in *Proceedings of the International School of Physics-Enrico Fermi*, vol. 321, p. 14, 1999.

[114] J. Walraven, "Quantum gases," 2019.

[115] M. Anderlini and D. Guery-Odelin, "Thermalization in mixtures of ultracold gases," *Physical Review A*, vol. 73, no. 3, p. 032706, 2006.

[116] E. A. Donley, N. R. Claussen, S. L. Cornish, J. L. Roberts, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, "Dynamics of collapsing and exploding bose–einstein condensates," *Nature*, vol. 412, no. 6844, pp. 295–299, 2001.

[117] W. Ketterle and N. Van Druten, "Evaporative cooling of trapped atoms," *Advances in atomic, molecular, and optical physics*, vol. 37, pp. 181–236, 1996.

[118] H. Feshbach, "Unified theory of nuclear reactions," *Annals of Physics*, vol. 5, no. 4, pp. 357–390, 1958.

[119] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, "Feshbach resonances in ultracold gases," *Reviews of Modern Physics*, vol. 82, no. 2, p. 1225, 2010.

[120] T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. Kokkelmans, and C. Salomon, "Experimental study of the bec-bcs crossover region in lithium 6," *Physical Review Letters*, vol. 93, no. 5, p. 050401, 2004.

[121] M. Guo, F. Böttcher, J. Hertkorn, J.-N. Schmidt, M. Wenzel, H. P. Büchler, T. Langen, and T. Pfau, "The low-energy goldstone mode in a trapped dipolar supersolid," *Nature*, vol. 574, no. 7778, pp. 386–389, 2019.

[122] L. Chomaz, D. Petter, P. Ilzhöfer, G. Natale, A. Trautmann, C. Politi, G. Durastante, R. Van Bijnen, A. Patscheider, M. Sohmen, *et al.*, "Long-lived and transient supersolid behaviors in dipolar quantum gases," *Physical Review X*, vol. 9, no. 2, p. 021012, 2019.

[123] L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, M. Trippenbach, Y. Band, P. S. Julienne, J. Simsarian, K. Helmerson, S. Rolston, and W. D. Phillips, "Four-wave mixing with matter waves," *Nature*, vol. 398, no. 6724, pp. 218–220, 1999.

[124] D. Shin, B. Henson, S. Hodgman, T. Wasak, J. Chwedeńczuk, and A. Truscott, "Bell correlations between spatially separated pairs of atoms," *Nature communications*, vol. 10, no. 1, pp. 1–7, 2019.

[125] A. Perrin, H. Chang, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook, "Observation of atom pairs in spontaneous four-wave mixing of two colliding bose-einstein condensates," *Physical review letters*, vol. 99, no. 15, p. 150405, 2007.

[126] N. Bogoliubov, "On the theory of superfluidity," *J. Phys*, vol. 11, no. 1, p. 23, 1947.

[127] A. Cronin, J. Schmiedmayer, and D. Pritchard, "Optics and interferometry with atoms and molecules," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 81, p. 1051, 2009.

[128] H. J. Sussmann and J. C. Willems, "300 years of optimal control : from the brachystochrone to the maximum principle," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 17, no. 3, pp. 32–44, 1997.

[129] L. S. Pontryagin, *Mathematical theory of optimal processes*. Routledge, 2018.

[130] R. Bellman, "Dynamic programming," *Science*, vol. 153, no. 3731, pp. 34–37, 1966.

[131] I. M. Ross and M. Karpenko, "A review of pseudospectral optimal control : From theory to flight," *Annual Reviews in Control*, vol. 36, no. 2, pp. 182–197, 2012.

[132] D. Miller, "Optimal trajectory planning for the apollo moon landing : Descent, ascent, and aborts," tech. rep., 2014.

[133] J. E. Bobrow, S. Dubowsky, and J. S. Gibson, "Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths," *The international journal of robotics research*, vol. 4, no. 3, pp. 3–17, 1985.

[134] M. Hassan and H. Sirisena, "Optimal control of queues in computer networks," in *ICC 2001. IEEE International Conference on Communications. Conference Record (Cat. No. 01CH37240)*, vol. 2, pp. 637–641, IEEE, 2001.

[135] O. C. Imer, S. Yüksel, and T. Başar, "Optimal control of lti systems over unreliable communication links," *Automatica*, vol. 42, no. 9, pp. 1429–1439, 2006.

[136] S. J. Glaser, U. Boscain, T. Calarco, C. P. Koch, W. Köckenberger, R. Kosloff, I. Kuprov, B. Luy, S. Schirmer, T. Schulte-Herbrüggen, *et al.*, "Training schrödinger's cat : quantum optimal control," *The European Physical Journal D*, vol. 69, no. 12, pp. 1–24, 2015.

[137] U. Boscain, M. Sigalotti, and D. Sugny, "Introduction to the pontryagin maximum principle for quantum optimal control," *PRX Quantum*, vol. 2, no. 3, p. 030203, 2021.

[138] A. Spörl, T. Schulte-Herbrüggen, S. Glaser, V. Bergholm, M. Storcz, J. Ferber, and F. Wilhelm, "Optimal control of coupled josephson qubits," *Physical Review A*, vol. 75, no. 1, p. 012302, 2007.

[139] B. Bonnard, S. J. Glaser, and D. Sugny, "A review of geometric optimal control for quantum systems in nuclear magnetic resonance," *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2012, 2012.

[140] B. Bonnard, O. Cots, S. J. Glaser, M. Lapert, D. Sugny, and Y. Zhang, "Geometric optimal control of the contrast imaging problem in nuclear magnetic resonance," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 57, no. 8, pp. 1957–1969, 2012.

[141] N. Khaneja, T. Reiss, C. Kehlet, T. Schulte-Herbrüggen, and S. J. Glaser, "Optimal control of coupled spin dynamics : design of nmr pulse sequences by gradient ascent algorithms," *Journal of magnetic resonance*, vol. 172, no. 2, pp. 296–305, 2005.

[142] S. Shi, A. Woody, and H. Rabitz, "Optimal control of selective vibrational excitation in harmonic linear chain molecules," *The Journal of chemical physics*, vol. 88, no. 11, pp. 6870–6883, 1988.

[143] C. P. Koch, J. P. Palao, R. Kosloff, and F. Masnou-Seeuws, "Stabilization of ultracold molecules using optimal control theory," *Physical Review A*, vol. 70, no. 1, p. 013402, 2004.

[144] D. Tannor *et al.*, "Laser cooling of internal degrees of freedom of molecules by dynamically trapped states," *Faraday Discussions*, vol. 113, pp. 365–383, 1999.

[145] L. Levin, W. Skomorowski, L. Rybak, R. Kosloff, C. P. Koch, and Z. Amitay, "Coherent control of bond making," *Physical review letters*, vol. 114, no. 23, p. 233003, 2015.

[146] L. Van Damme, *Contrôle optimal de la dynamique des spins : Applications en Résonance Magnétique Nucléaire et en Information Quantique*. PhD thesis, Université de Bourgogne-Franche Compté, 2016.

[147] U. Boscain, G. Charlot, J.-P. Gauthier, S. Guérin, and H.-R. Jauslin, "Optimal control in laser-induced population transfer for two-and three-level quantum systems," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 43, no. 5, pp. 2107–2132, 2002.

[148] N. Khaneja, S. J. Glaser, and R. Brockett, "Sub-riemannian geometry and time optimal control of three spin systems : quantum gates and coherence transfer," *Physical Review A*, vol. 65, no. 3, p. 032301, 2002.

[149] M. Kumar, M. Husain, N. Upreti, and D. Gupta, "Genetic algorithm : Review and application," *Available at SSRN 3529843*, 2010.

[150] R. Hecht-Nielsen, "Theory of the backpropagation neural network," in *Neural networks for perception*, pp. 65–93, Elsevier, 1992.

[151] S. Machnes, U. Sander, S. J. Glaser, P. de Fouquieres, A. Gruslys, S. Schirmer, and T. Schulte-Herbrüggen, "Comparing, optimizing, and benchmarking quantum-control algorithms in a unifying programming framework," *Physical Review A*, vol. 84, no. 2, p. 022305, 2011.

[152] S. G. Schirmer and P. de Fouquieres, "Efficient algorithms for optimal control of quantum dynamics : the krotov method unencumbered," *New Journal of Physics*, vol. 13, no. 7, p. 073029, 2011.

[153] U. Hohenester, P. K. Rekdal, A. Borzì, and J. Schmiedmayer, "Optimal quantum control of bose-einstein condensates in magnetic microtraps," *Physical Review A*, vol. 75, no. 2, p. 023602, 2007.

[154] U. Hohenester, "Octbec—a matlab toolbox for optimal quantum control of bose–einstein condensates," *Computer Physics Communications*, vol. 185, no. 1, pp. 194–216, 2014.

[155] S. Braun, J. P. Ronzheimer, M. Schreiber, S. S. Hodgman, T. Rom, I. Bloch, and U. Schneider, "Negative absolute temperature for motional degrees of freedom," *Science*, vol. 339, no. 6115, pp. 52–55, 2013.

[156] E. Michon, C. Cabrera-Gutiérrez, A. Fortun, M. Berger, M. Arnal, V. Brunaud, J. Billy, C. Petitjean, P. Schlagheck, and D. Guéry-Odelin, "Phase transition kinetics for a bose einstein condensate in a periodically driven band system," *New Journal of Physics*, vol. 20, no. 5, p. 053035, 2018.

[157] X. Zhou, S. Jin, and J. Schmiedmayer, "Shortcut loading a bose–einstein condensate into an optical lattice," *New Journal of Physics*, vol. 20, no. 5, p. 055005, 2018.

[158] S. Kling, T. Salger, C. Grossert, and M. Weitz, "Atomic bloch-zener oscillations and stückelberg interferometry in optical lattices," *Physical review letters*, vol. 105, no. 21, p. 215301, 2010.

[159] M. J. Davis and E. J. Heller, "Quantum dynamical tunneling in bound states," *The Journal of Chemical Physics*, vol. 75, no. 1, pp. 246–254, 1981.

[160] R. Lawton and M. Child, "Local and normal stretching vibrational states of h2o : Classical and semiclassical considerations," *Molecular Physics*, vol. 44, no. 3, pp. 709–723, 1981.

[161] E. J. Heller and M. J. Davis, "Quantum dynamical tunneling in large molecules. a plausible conjecture," *The Journal of Physical Chemistry*, vol. 85, no. 4, pp. 307–309, 1981.

[162] E. Heller, "Dynamic tunneling and molecular spectra," *The Journal of Physical Chemistry*, vol. 99, no. 9, pp. 2625–2634, 1995.

[163] E. J. Heller, "Air juggling and other tricks," *Nature*, vol. 412, no. 6842, pp. 33–34, 2001.

[164] C. Dembowski, H.-D. Gräf, A. Heine, R. Hofferbert, H. Rehfeld, and A. Richter, "First experimental evidence for chaos-assisted tunneling in a microwave annular billiard," *Physical review letters*, vol. 84, no. 5, p. 867, 2000.

[165] R. Hofferbert, H. Alt, C. Dembowski, H.-D. Gräf, H. Harney, A. Heine, H. Rehfeld, and A. Richter, "Experimental investigations of chaos-assisted tunneling in a microwave annular billiard," *Physical Review E*, vol. 71, no. 4, p. 046201, 2005.

[166] B. Dietz, T. Guhr, B. Gutkin, M. Miski-Oglu, and A. Richter, "Spectral properties and dynamical tunneling in constant-width billiards," *Physical Review E*, vol. 90, no. 2, p. 022903, 2014.

[167] M.-W. Kim, S. Rim, C.-H. Yi, and C.-M. Kim, "Chaos-assisted tunneling in a deformed microcavity laser," *Optics express*, vol. 21, no. 26, pp. 32508–32515, 2013.

[168] V. A. Podolskiy and E. E. Narimanov, "Chaos-assisted tunneling in dielectric microcavities," *Optics letters*, vol. 30, no. 5, pp. 474–476, 2005.

[169] A. Bäcker, R. Ketzmerick, S. Löck, M. Robnik, G. Vidmar, R. Höhmann, U. Kuhl, and H.-J. Stöckmann, "Dynamical tunneling in mushroom billiards," *Physical review letters*, vol. 100, no. 17, p. 174103, 2008.

[170] S. Tomsovic and D. Ullmo, "Chaos-assisted tunneling," *Physical Review E*, vol. 50, no. 1, p. 145, 1994.

[171] A. Mouchet and D. Delande, "Signatures of chaotic tunneling," *Physical Review E*, vol. 67, no. 4, p. 046216, 2003.

[172] W. K. Hensinger, A. Mouchet, P. S. Julienne, D. Delande, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop, "Analysis of dynamical tunneling experiments with a bose-einstein condensate," *Physical Review A*, vol. 70, no. 1, p. 013408, 2004.

[173] R. Dubertrand, J. Billy, D. Guéry-Odelin, B. Georgeot, and G. Lemarié, "Routes towards the experimental observation of the large fluctuations due to chaos-assisted tunneling effects with cold atoms," *Physical Review A*, vol. 94, no. 4, p. 043621, 2016.

[174] Tatarskiĭ, "The wigner representation of quantum mechanics,"

[175] K. Takahashi and N. Saitô, "Chaos and husimi distribution function in quantum mechanics," *Physical review letters*, vol. 55, no. 7, p. 645, 1985.

[176] A. Mouchet, C. Miniatura, R. Kaiser, B. Grémaud, and D. Delande, "Chaos-assisted tunneling with cold atoms," *Physical Review E*, vol. 64, no. 1, p. 016221, 2001.

[177] A. Mouchet, C. Eltschka, and P. Schlagheck, "Influence of classical resonances on chaotic tunneling," *Physical Review E*, vol. 74, no. 2, p. 026211, 2006.

[178] F. Leyvraz and D. Ullmo, "The level splitting distribution in chaos-assisted tunnelling," *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 29, no. 10, p. 2529, 1996.

[179] S. Löck, A. Bäcker, R. Ketzmerick, and P. Schlagheck, "Regular-to-chaotic tunneling rates : From the quantum to the semiclassical regime," *Physical review letters*, vol. 104, no. 11, p. 114101, 2010.

[180] W. Hensinger, A. Truscott, B. Upcroft, M. Hug, H. Wiseman, N. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop, "Experimental study of the quantum driven pendulum and its classical analog in atom optics," *Physical Review A*, vol. 64, no. 3, p. 033407, 2001.

[181] W. Hensinger, B. Upcroft, C. Holmes, N. Heckenberg, G. Milburn, and H. Rubinsztein-Dunlop, "Multiple bifurcations in atom optics," *Physical Review A*, vol. 64, no. 6, p. 063408, 2001.

[182] A. Truscott, M. Friese, W. Hensinger, H. Wiseman, H. Rubinsztein-Dunlop, and N. Heckenberg, "Coherent atomic beam splitter using transients of a chaotic system," *Physical review letters*, vol. 84, no. 18, p. 4023, 2000.

[183] W. Su, J. Schrieffer, and A. J. Heeger, "Solitons in polyacetylene," *Physical review letters*, vol. 42, no. 25, p. 1698, 1979.

[184] W.-P. Su, J. Schrieffer, and A. Heeger, "Soliton excitations in polyacetylene," *Physical Review B*, vol. 22, no. 4, p. 2099, 1980.

[185] O. Bohigas, S. Tomsovic, and D. Ullmo, "Manifestations of classical phase space structures in quantum mechanics," *Physics Reports*, vol. 223, no. 2, pp. 43–133, 1993.

[186] M. Martinez, O. Giraud, D. Ullmo, J. Billy, D. Guéry-Odelin, B. Georgeot, and G. Lemarié, "Chaos-assisted long-range tunneling for quantum simulation," *Physical Review Letters*, vol. 126, no. 17, p. 174102, 2021.

[187] F. Evers and A. D. Mirlin, "Anderson transitions," *Reviews of Modern Physics*, vol. 80, no. 4, p. 1355, 2008.

[188] D. Sherrington and S. Kirkpatrick, "Solvable model of a spin-glass," *Physical review letters*, vol. 35, no. 26, p. 1792, 1975.

[189] E. Khatami, A. Macridin, and M. Jarrell, "Effect of long-range hopping on t c in a two-dimensional hubbard-holstein model of the cuprates," *Physical Review B*, vol. 78, no. 6, p. 060502, 2008.

Résumé : En attendant de parvenir à construire un ordinateur quantique universel, les physiciens se sont attelés à développer des simulateurs quantiques : un système capable d'émuler des modèles de divers domaines de la physique sur lequel l'utilisateur possède un grand degré de contrôle. Les travaux présentés dans cette thèse portent sur un tel simulateur réalisé à l'aide condensats de Bose-Einstein manipulés par un réseau optique unidimensionnel. Dans ce manuscrit, nous décrivons plusieurs travaux expérimentaux réalisés en proche collaboration avec des physiciens théoriciens. Le premier d'entre eux porte sur le contrôle d'halos de diffusion. Nous proposons un nouveau protocole de contrôle de ces halos portant sur un décalage abrupt de la phase du réseau optique. Cette première étude soulève une nouvelle question : peut-on, par un variation adéquate de la phase du réseau optique, façonner la distribution en impulsion du condensat ? Cette question est un problème d'optimisation bien posé auquel la théorie du contrôle optimal peut répondre. Grâce à ce formalisme, nous sommes en mesure de contrôler l'état quantique du condensat dans le réseau optique. Ces nouveaux types de protocoles peuvent permettre de préparer des états initiaux permettant d'observer de nouveaux effets physiques. Un de ces effets est le transport d'un nuage d'atomes dans un paysage classiquement chaotique. Nous avons modulé périodiquement l'amplitude du réseau optique de telle manière à générer un espace des phases mixtes dans lequel nous avons mis en évidence un effet tunnel dit "assisté par le chaos".

Abstract : While seeking to build a universal quantum computer, physicists have been working on developing quantum simulators : a system capable of emulating models of others domains of physics over which the user has a large degree of control. The work presented in this thesis concerns such a simulator realized with Bose-Einstein condensates manipulated by a one-dimensional optical lattice. In this manuscript, we describe several experimental works realized in close collaboration with theoretical physicists. The first one is about the control of scattering halos. We propose a new protocol to control these halos by abruptly shifting the phase of the optical lattice. This first study then naturally raises a new question : can we, by an adequate variation of the optical lattice's phase, shape the momentum distribution of the condensate ? This question is an optimization problem that optimal control theory is able to answer. Using this formalism, we are able to control the quantum state of the condensate within the lattice. These new types of protocols open interesting perspectives as the preparation of initial states for the observation of physical effects that are difficult to observe. One of these effects is the the transport of a cloud of atoms in a classically chaotic landscape. We have periodically modulated the amplitude of the optical lattice in such a way as to generate a mixed phase space in which we have demonstrated a so-called "chaos-assisted tunneling".