



HAL
open science

Équations différentielles p-adiques

Andrea Pulita

► **To cite this version:**

Andrea Pulita. Équations différentielles p-adiques. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Montpellier II Sciences et Techniques, 2014. tel-03667006

HAL Id: tel-03667006

<https://hal.science/tel-03667006v1>

Submitted on 13 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier UMR 5149

Université de Montpellier II

Équations différentielles p -adiques

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

Andrea Pulita

Soutenue le 11 Décembre 2014
devant la commission d'examen

André, Yves	(Univ. Paris VI, France)	Rapporteur
Baldassarri, Francesco	(Univ. Padova, Italy)	Examinateur
Chiarellotto, Bruno	(Univ. Padova, Italy)	Examinateur
Kedlaya, Kiran S.	(Univ. of California, San Diego)	Rapporteur
Loeser, François	(Univ. Paris VI, France)	Rapporteur
Toen, Bertrand	(Univ. Montpellier, France)	Examinateur

2000 Mathematics Subject Classification Primary 12h25; Secondary 14G22

Keywords: équations différentielles p -adiques, espaces de Berkovich, Rayon de convergence, polygone de Newton, graphe contrôlant, conducteur de Swan, conducteur de Swan différentiel, Déformation, Confluence, cohomologie de de Rham, ramification, singularités, vecteurs de Witt, ...

Remerciements

Ma vie mathématique a commencé en 2002, quand Gilles Christol a accepté de me prendre en thèse, en codirection avec Bruno Chiarellotto. Ce sont eux que je souhaite remercier en premier lieu, car ils m'ont fortement encouragé pendant et après la thèse. Je les contacte assez régulièrement, encore aujourd'hui, pour me nourrir de leurs connaissances et de leurs points de vue avisés. Je leur suis reconnaissant de m'avoir orienté et instruit pendant mes premiers années, ce qui m'a permis d'entreprendre le parcours pour arriver jusqu'à ce mémoire d'habilitation. Je suis ravi qu'ils soient présents à cette soutenance, même si techniquement Gilles Christol n'a malheureusement pas pu faire partie du Jury.

Ensuite je voudrais exprimer ma gratitude aux rapporteurs Yves André, Kiran S. Kedlaya et François Loeser. Je suis heureux et flatté de l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mes travaux, et pour avoir accepté cette tâche quelque peu ingrate.

J'aimerais adresser un remerciement particulier à Y. André avec qui j'ai gardé des contacts assez réguliers, pendant et après la thèse. Les discussions que j'ai eues avec lui, ses explications, et ses papiers, m'ont inspiré et guidé tout au long de ces années, en particulier par le choix des sujets de mes études. Je suis honoré qu'il ait accepté de faire partie du Jury.

Mes intérêts, mes travaux, et ce mémoire en particulier, ont été aussi certainement influencé par les multiples travaux de K.S. Kedlaya, et plus en particulier par son livre [Ked10], qui a mis un peu d'ordre dans l'univers des équations différentielles p -adiques. Il est clair que sans ce livre aucun de mes travaux récents sur les équations différentielles sur les courbes de Berkovich n'auraient vu le jour. Je le remercie de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être rapporteur de ce mémoire.

Je souhaite associer mes remerciements à François Loeser, avec qui j'ai eu des discussions passionnantes lors de nos rencontres ces dernières années. J'ai suivi son cours de D.E.A. à l'Université de Paris IV en 2001, juste après avoir fini mes études à Padoue. Il a été un de mes premiers contacts avec le monde mathématique français, et je garde un souvenir très limpide de son énergie, de sa lucidité, et de son aimable hilarité. Je le remercie d'avoir fait l'effort d'arranger ses multiples voyages et obligations pour être présent ici. Je suis honoré qu'il ait accepté de faire partie du Jury.

Un remerciement spécial va à F. Baldassarri dont les conjectures ont été pour moi un puissant moteur ces derniers années. Il a été mon enseignant il y a maintenant 15 ans, à Padoue en 1999. Et il a été rapporteur de ma "*Tesi di Laurea*" sur le rayon de convergence des équations différentielles p -adiques, à la fin de mes études à Padoue en 2001. Je garde un souvenir très vif de cette période, de sa passion, et de ses commentaires profonds pour illustrer et essayer d'aller au fond des définitions. Il a su stimuler mon amour pour les mathématiques, et ce n'est certainement pas un hasard si mes intérêts ont fini par coïncider avec les siens ces derniers temps. J'aime beaucoup sa recherche continue de la vérité mathématique, et des fondements. Je suis fort content d'avoir récemment établi avec lui un projet de collaboration, et je suis fier de sa présence dans ce Jury.

Je souhaite associer à ces remerciements B. Toen, avec qui j'ai été en contact cette dernière année. Pendant nos discussions dans les couloirs de l'institut I3M, il a été capable de me donner une vision plus globale des problèmes, en me racontant les solutions des analogues classiques de mes problèmes p -adiques. Le plus souvent il a su rendre élémentaires certains problèmes qui me tracassaient, et ça m'a permis de localiser les différences entre certains phénomènes classiques et leurs analogues p -adiques. Je le remercie beaucoup d'avoir accepté de faire partie du Jury.

La liste des personnes à qui ce mémoire doit quelque chose se fait de plus en plus longue avec les années. Il serait impossible d'en faire une liste détaillée. Ci-dessous j'en rédige une liste assez restreinte.

Je souhaite adresser un remerciement très particulier et chaleureux à Jérôme Poineau. Notre

rapport est quelque peu bizarre, car nous ne communiquons presque exclusivement que par courrier électronique. Cela fait maintenant environ deux ans et demi que nous nous écrivons plusieurs e-mails par jour, avec nos problèmes mathématiques, nos solutions, nos souhaits, nos rêves, nos besoins, nos peurs. Bref notre vie mathématique! Je sais à quel moment il va m'envoyer son premier e-mail le matin, et à quelle heure je dois écrire mon dernier e-mail le soir pour le trouver debout. Je garde encore, avec un sourire, le souvenir de notre premier échange. Ça commençait par "*Cher Gerome, ...*" et la réponse fut "*Cher Andrea, moi, c'est Jérôme :) ...*". Mon e-mail contenait ensuite une quarantaine de questions numérotées, et j'ai reçu exactement autant de réponses, ce qui m'a fait comprendre qu'il était l'homme qu'il me fallait. Je le remercie pour son énergie calme, pour son intégrité, et son courage et sa détermination devant les problèmes difficiles. Et je lui demande pardon, ainsi qu'à Gaëlle, et à Marion, si parfois, à cause de moi, il a dû me consacrer un peu du temps qu'il aurait voulu passer avec elles. Je suis honoré que nos chemins se soient croisés, et j'espère que cela continuera.

Je n'oublierai pas de mentionner Joseph Oesterlé et Daniel Bertrand qui ont contribué fortement à ma formation lors de ma thèse à Chevallerey et par la suite. En particulier je souhaite ici remercier J.Oesterlé notamment pour m'avoir aidé dans un de mes articles en démontrant pour moi un lemme compliqué, que je ne savais démontrer que dans le cas d'un corps de séries formelles à plusieurs variables [CP09, Lemma 7.7].

Un grand remerciement est également dû à Ahmed Abbes qui avait reconnu que les méthodes que j'ai développées dans ma thèse sur les équations de rang un s'appliquaient à une conjecture posée par K.S.Kedlaya sur l'égalité entre conducteurs de Swan différentiel et arithmétique [Ked07]. C'est maintenant un théorème [CP09] et [Xia10]. Je le remercie profondément pour m'avoir indiqué la question, et de m'avoir donné ses impressions lors de la rédaction.

Un chaleureux remerciement va aussi à Daniel Barsky, avec qui j'ai partagé mes derniers mois mathématiques à Chevallerey. Je le remercie d'avoir eu la patience de me raconter les rudiments sur les fonctions L p -adiques, et pour l'intérêt qu'il a manifesté envers mes résultats sur les q -différences.

Je suis également honoré de l'attention que Zoghmann Mebkhout a démontré pour mes papiers récents et pour ses commentaires avisés. Lors de nos rencontres avec G.Christol il a su m'indiquer les choses importantes sur lesquelles il fallait se pencher, et il m'a proposé des nombreux points de réflexion. Mais plus que tout je garde toujours en tête les mots marquants qu'il m'a dit quelque temps après mon doctorat et qui m'ont beaucoup motivé par la suite : "*Tu devrais t'attaquer à un problème important*". Je le remercie d'avoir toujours été direct et franc avec moi.

Je souhaite remercier Adriano Marmora, pour nos discussions, toujours pleines de vie. J'ai connu Adriano en 1996 lors de ma première année d'études à Padoue. Depuis nous nous sommes réciproquement galvanisés et motivés dans l'étude des mathématiques. Je garde un mémorable souvenir de notre premier voyage d'études à Paris en 1999. Grâce à une discussion avec Marco Garuti (que je remercie ici pour ses bons conseils), nous avons reconnu que les livres que nous étudions à Padoue étaient écrits par des enseignants de l'Université de Paris VI, et nous avons saisi l'opportunité d'y aller en profitant d'un voyage d'études ERASMUS en 1999/2000. Notre plan d'études à Paris était celui de suivre les cours de DEA. Adriano a été mon compagnon d'aventures mathématiques, et je me réjouis du fait que notre amitié survive toujours malgré la distance qui nous sépare.

Un remerciement particulier va aussi à mes amis Olivier Brinon, Filippo Nuccio, et Nicola Mazzari, pour les échanges que nous avons eus tout au long de ces années.

Un grand remerciement va à Antoine Chambert-Loir et à Antoine Ducros, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux récents et pour la richesse de nos discussions récentes, mais aussi pour avoir écrit "*Le Livre*" qui m'a ouvert le chemin vers la compréhension des courbes de Berkovich.

Un remerciement chaleureux va à Thomas Zink pour m'avoir accueilli dans son équipe à Bielefeld entre 2006 et 2008, et avoir supporté avec son infinie gentillesse mon mauvais anglais, et mes voyages continus vers la France pour retrouver ma femme et ma petite fille qui venait de naître.

J'aimerais remercier également les autres membres de l'équipe de Bielefeld : Eike Lau, Andreas Langer, Michael Spieß, Vytautas Paskūnas, Mathias Lederer, . . . pour m'avoir aidé dans le moment le plus compliqué de ma vie qui a été mon séjour chez eux. À l'époque j'avais ma femme qui vivait à Antibes, avec ma fille Giulia encore bébé, ce qui m'obligeait à faire des voyages incessants. Je remercie de tout coeur toute l'équipe pour l'aide continue qu'ils m'ont apportée, et pour l'ambiance très chaleureuse qu'ils ont su créer autour de moi. J'en garde un souvenir fort intense.

Je souhaite adresser un remerciement aux membres des groupes ANR auxquels j'ai eu l'opportunité de faire partie. En particulier ceux avec qui j'ai eu le plus de contacts : Lucia Di Vizio, Charlotte Hardouin, Julien Roques, Christine Huyghe, Nathalie Wach, Laurent Berger, Xavier Caruso, Michel Gros, Bernard Le Stum, . . .

Et aussi aux membres de mon laboratoire I3M, et plus particulièrement ceux avec qui j'ai discuté le plus : Ioan Badulescu, Boris Pasquier, Louise Nyssen, Carlos Contou Carrère, Stefano Morra, Philippe Roche, Bertrand Toen, Damien Calaque, Paul-Emile Paradan, Gilles Halbout, Etienne Mann, Daniele Di Pietro, TERENCE Bayen, Sylvain Brochard, Constantin Vernicos, Marc Herzlich, Oana Iosifescu, Pascal Azérad, Pierre-Louis Montgard . . .

Je souhaite signaler aussi que ce mémoire ne contient pas mes deux résultats les plus importants : ce sont mes filles Giulia et Lisa, obtenues en collaboration amoureuse avec ma femme Stefania. Je suis fier d'elles, et de leur intelligence pleine de bonheur. En particulier je remercie Stefania qui s'est occupée de nous sans cesse, avec amour et compréhension. Ce mémoire n'aurait jamais pu voir le jour sans son aide précieuse, ainsi que sa collaboration infinie et inconditionnelle.

Je ne peux pas oublier les membres de ma famille Adriano Maroso (Nonno Ano), Mari Stevanin (Nonna Mari), Giovanni Pulita (Nonno Toni), Elsa Micheletto (Nonna Elsa), Alberto Marcello Pulita (Zio Alberto), Mattia Maroso (Zio Tia). Ils m'ont soutenu, encouragé et aidé de toutes les manières possibles.

Je remercie finalement Boris Pasquier, Claire-Sophie Falchi, ainsi que ma femme Stefania, pour avoir corrigé en partie le français de l'introduction. Je remercie également J.Poineau et G.Christol pour des commentaires utiles. Et M.me Bernadette Lacan sans la quelle la date de soutenance aurait été repoussé indéfiniment par les secrétaires du bureau des thèses et H.D.R. de l'UM2.

Chacune des personnes mentionnées ici a influencé et contribué, chacun à sa manière, à l'évolution de mon esprit, et à ma passion pour les mathématiques. Les mots ne sont pas suffisants pour les remercier tous.

À Giulia et Lisa ... et à celles ou ceux qui viendront ...

Table des matières

BIBLIOGRAPHIE DE L'AUTEUR	x
INTRODUCTION	I
CHAPITRE I : THÉORIE ABÉLIENNE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SOLUBLES SUR UN GERME DE COURONNE	II
LE CONTEXTE DANS LE CAS DE VALUATION TRIVIALE.	II
LE CONTEXTE DANS LE CAS p -ADIQUE.	III
L'EXEMPLE DE DWORK	IV
NOTRE CONTRIBUTION	V
LE CALCUL EXPLICITE DE $H_{\text{cont}}^1(G_{\tilde{K}((T))}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$	VII
RÉSULTATS ET APPLICATIONS ULTÉRIEURS	VII
CHAPITRE II : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SUR LES COURBES DE BERKOVICH	IX
IMAGES DE COURBES QUASI-LISSES DE BERKOVICH	X
TRIANGULATIONS FAIBLES ET PSEUDO-TRIANGULATIONS	XII
RAYON DE CONVERGENCE DES SOLUTIONS	XII
HISTOIRE DU RAYON DE CONVERGENCE	XIV
GRAPHES CONTRÔLANTS	XIV
DÉCOMPOSITION GLOBALE	XVI
SUPER-HARMONICITÉ ET NOMBRE D'ARÊTES DES GRAPHES CONTRÔLANTS	XVIII
THÉORÈMES D'INDICE LOCAUX ET GLOBAUX	XIX
LA DESCENTE DES CONSTANTES	XX
LE THÉORÈME D'INDICE LOCAL DE CHRISTOL-MEBKHOUT	XX
GRAPHES CONTRÔLANTS ET LIEU SINGULIER	XXII
LE THÉORÈME D'INDICE GLOBAL	XXII
ÉQUATIONS FINIMENT CONTRÔLÉES	XXIII
ÉQUATIONS NON FINIMENT CONTRÔLÉES	XXIV
RÉLATIVE COMPACTITÉ VS SURCONVERGENCE	XXVI
CHAPITRE III : DÉFORMATION INFINITÉSIMALE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES SUR LES COURBES DE BERKOVICH	XXVI
DÉFORMATION	XXVII
PLEINE FIDÉLITÉ	XXVIII
ANALYTICITÉ DE L'ACTION DE Σ	XXIX
QUASI-UNIPOTENCE SUR L'ANNEAU DE ROBBA	XXX
ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES	XXX
RACINES DE L'UNITÉ	XXXI
LA FONCTION Γ_p p -ADIQUE DE MORITA ET LES FONCTIONS L p -ADIQUES DE KUBOTA-LEOPOLDT	XXXI
CHAPITRE I : THÉORIE ABÉLIENNE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SOLUBLES SUR UN GERME DE COURONNE	1
1 Vecteurs de Witt	1
1.1 Frobenius et Verschiebung.	2
1.2 Vecteurs de Witt de longueur finie.	2
1.3 Covecteurs (unipotents).	2
1.4 Théorie d'Artin-Schreier-Witt	3

2	Théorie d’Artin-Schreier-Witt et filtration de ramification pour un corps local de caractéristique positive.	4
2.1	La filtration de Kato.	4
2.2	Le calcul explicite de la filtration.	5
3	Exponentiels	6
3.1	Exponentiel d’Artin-Hasse	6
3.2	Groupes de Lubin-Tate sur \mathbb{Z}_p	6
3.3	Noyau du Frobenius.	7
3.4	Exponentielles de Robba	8
3.5	L’exponentielle $e_{p^\infty}(\mathbf{f}^-(T), 1)$	9
3.5.1	Formule du Rayon.	10
3.5.2	Cas des équations différentielles.	11
4	Équations différentielles de rang un sur l’anneau de Robba.	12
4.1	Groupe de Picard	12
4.2	Rayon de convergence, et pente.	12
4.3	Classification, cas du corps contenant les racines de l’unité.	13
4.4	Critère de solubilité.	14
4.5	Classification, cas des corps non ramifiées.	15
5	Une déformation du complexe de Artin-Schreier-Witt dans le complexe de Kummer	15
5.1	Calcul explicite du générateur de Kummer pour les corps \mathcal{E}^\dagger et \mathcal{E}	17
6	Calcul du foncteur de Fontaine-Tsuzuki-Kedlaya et conjecture “Swan Arithmétique = Swan différentiel”.	18
6.1	Contexte.	18
6.2	∇ -modules et (φ, ∇) -modules.	19
6.3	Conducteur de Swan différentiel d’un ∇ -module.	20
6.4	Foncteur de Fontaine-Tsuzuki-Kedlaya.	20
6.5	Calcul du foncteur en rang un.	21
6.5.1	Calcul de la partie modérée.	22
6.5.2	Calcul de la partie sauvage.	22
6.6	Preuve, en rang un, de la conjecture de Kedlaya “Swan différentiel = Swan arithmétique”.	23
CHAPITRE II : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SUR LES COURBES DE BERKOVICH		24
7	Notations	24
7.1	Images topologiques informelles des courbes de Berkovich.	25
8	Courbes lisses de Berkovich	25
8.1	Courbe résiduelle et genre d’un point.	26
8.2	Triangulations	27
8.3	Germes de segments.	29
8.4	Module et pentes.	30
8.5	Genre de Liu et caractéristique d’Euler-Poincaré de X	31
8.5.1	Genre de Liu d’une courbe quasi-lisse, et sa caractéristique d’Euler à support compact.	32
8.6	Caractéristique locale d’un point par rapport à un graphe.	32
9	Les connexions petites sont cycliques [Pul14b]	33
10	Rayons de convergence	34
10.1	Structure de la fibre, disques génériques et maximaux.	34
10.2	Rayons de convergence et leurs propriétés.	35
10.2.1	La preuve sur la droite affine.	39
10.2.2	Cas du Rayon : $i = 1$	39

10.2.3 Cas des hauteurs partielles $H_{S,i}$, $i > 1$.	40
10.2.4 Réduction au cas de la droite affine.	40
10.3 Finitude et théorie du potentiel.	41
11 Théorèmes de décomposition locales et globales	42
11.1 Décomposition de Robba sur $\mathcal{H}(x)$.	42
11.2 Décomposition de Dwork-Robba sur $\mathcal{O}_{X,x}$.	44
11.3 Décomposition augmentée.	45
11.4 Décomposition globale	46
11.5 Conditions pour la somme directe.	46
12 Super-Harmonicité.	48
12.1 Cas de la droite affine.	48
12.2 Cas général.	50
13 Borne globale du nombre d'arêtes de $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$	50
13.1 Cas du premier rayon sur les courbes projectives.	52
14 Théorèmes d'indices locaux	52
14.1 Descente des constantes.	53
14.2 Notations	53
14.3 Indice en un point à la frontière	54
14.4 Indice sur une couronne ouverte (et rayons log-affines)	55
14.5 Indice sur un disque ouvert (et rayons log-affines à la frontière ouverte)	56
14.6 Indice sur un point de type 2	57
14.7 Applications à la super-harmonicité	58
15 Théorème d'indice globaux	58
15.1 La condition de Liouville globale	59
15.2 Formule d'indice global pour les équations finiment contrôlées	60
15.3 Formule d'indice global, cas général	61
15.4 Un exemple d'équation sur un disque, avec graphe contrôlant infini et cohomologie de dimension finie.	62
CHAPITRE III : DÉFORMATION INFINITÉSIMALE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES SUR LES COURBES DE BERKOVICH	64
16 Automorphismes infinitésimaux	64
16.1 Localisation	65
16.2 Continuité et finitude de la fonction $\mathcal{R}_S(-, \sigma)$	65
17 Déformation	66
17.1 Stratifications	66
17.2 Équations différentielles Σ -compatibles	67
17.3 Déformation	68
17.4 Pleine fidélité	69
17.5 Analyticité de l'action de Σ	69
18 Quasi-unipotence des Σ-modules sur l'anneau de Robba	71
18.1 Extensions étales et quasi-unipotence.	71
19 Équations aux différences sur la droite affine et confluence	72
19.1 (q, h) -séries de Taylor.	74
19.2 Image essentielle du foncteur $\text{Def}_{\sigma_{q,h}}$	74
19.3 Analyticité	75
19.4 Racines de l'unité	75

20 Fonction Gamma p-adique et valeurs de fonctions L de Kubota-Leopoldt	76
20.1 Certains valeurs spéciaux des fonctions L de Kubota-Leopoldt	77
20.2 Les sommes $S_\ell(k)$	77
Annexe A. Lettre du 28 Février 2011 à Gilles Christol	80
A.1 Notations	80
A.2 Exemple	80
A.3 Preuve alternative	82
A.3.1 Première étape : réduction à la partie p -typique	82
A.3.2 Deuxième étape : Rayon d'une exponentielle p -typique	83
A.3.3 Conclusion	85
A.4 Remarques sur l'extension au cas d'un affinoïde	86
A.5 Appendice à la lettre : Calcul du rayon de l'exemple	86

BIBLIOGRAPHIE DE L'AUTEUR

Publications :

- 7) [PP12a] *Continuity and finiteness of the radius of convergence of a p -adic differential equation via potential theory* (Avec J.Poineau). 20 pages. À paraître dans le **Journal de Crelle**.
- 6) [Pul13] *An algorithm computing non-solvable spectral radii of p -adic differential equations*. **C.R.A.S.** Vol. 351 - N. 5-6, p.167-171 - Mars 2013.
- 5) [Pul11] *A basic introduction to deformation and confluence of ultrametric differential and difference equations* **Séminaires et Congrès S.M.F.** **23** (2011), 331-366.
- 4) [CP09] *Arithmetic and Differential Swan conductors of rank one representations with finite local monodromy* (en collaboration avec B.Chiarellotto), 38 pages, **American J. of Math.** Vol.131, N.6, p.1743–1794 (2009).
- 3) [Pul08] *p -adic confluence of q -difference equations*. 52 pages, **Compositio Mathematica**, Vol. 144, p.867–919, (2008).
- 2) [Pul07] *Rank one Solvable p -adic Differential Equations and Finite Abelian Characters Via Lubin-Tate groups*. 67 pages, **Math. Annalen** Vol.337 p.489 – 555, (2007).
- 1) [Pul05a] *Frobenius Structure for rank one p -adic differential equations*. In : *Ultrametric functional analysis*, volume 384 of **Contemporary Mathematics**, pages 247-258, AMS, (2005).
- 0) Thèse : 1.– *Équations différentielles de rang un et applications*. 2.– *Confluence p -adique des équations aux q -différences*. Thèse de l'Université de Paris VI.

Prépublications :

- 13) [PP13b] *The convergence Newton polygon of a p -adic differential equation IV : Local and Global Index theorems*, 80 pages, (Avec J.Poineau) <http://arxiv.org/abs/1309.3940>.
- 12) [PP13a] *The convergence Newton polygon of a p -adic differential equation III : Global decomposition and controlling graphs*, 81 pages, (Avec J.Poineau) <http://arxiv.org/abs/1308.0859>.
- 11) [PP12b] *The convergence Newton polygon of a p -adic differential equation II : Continuity and finiteness on Berkovich curves*, 28 pages, (Avec J.Poineau) <http://arxiv.org/abs/1209.3663>.
- 10) [Pul12] *The convergence Newton polygon of a p -adic differential equation I : Affinoid domains of the Berkovich affine line*, 49 pages, <http://arxiv.org/abs/1208.5850>.
- 9) [Pul14a] *Infinitesimal deformation of p -adic differential equations over Berkovich curves*, 39 pages, <http://arxiv.org/abs/0802.1945>.
- 8) [Pul14b] *Small connections are cyclic*, 11 pages, <http://arxiv.org/abs/1407.3761>.

Introduction

La théorie des équations différentielles p -adiques est née en 1960 avec Bernard Dwork et sa preuve de la rationalité de la fonction Zêta d’une variété de caractéristique p , [Dwo60]. Les idées fondamentales et les calculs pionniers de B. Dwork et P. Robba ont été les moteurs de l’évolution de cette théorie pendant les 50 dernières années. Une évolution qui a gagné en ampleur aussi grâce aux liens qui ont été établis avec d’autres univers tels que la théorie de Hodge p -adique, les cohomologies p -adiques, les équations aux q -différences p -adiques, les calculs numériques de fonctions zêtas, les systèmes dynamiques p -adiques, géométrie d’Arakelov, ...

Cette longue démarche est passée à travers plusieurs langages, et en a inspiré parfois les fondateurs. Nous pensons à la cohomologie cristalline [Ber74], la théorie de Monsky-Washnitzer [MW68], le langage de D.Meredith [Mer72], la cohomologie rigide [Ber83], [Ber86], [Ber97], les D -modules arithmétiques [Ber96b], sans oublier les travaux fondateurs de John Tate [Tat71] et Michel Raynaud [Ray74].

Ce n’est que relativement récemment que le langage de Berkovich [Ber90] est apparu comme le plus approprié pour décrire, dans le cas des courbes, certains phénomènes de continuité et finitude topologique concernant la variation du défaut de convergence des solutions des équations différentielles p -adiques. Ce langage a permis de mettre en évidence certains objets *géométriques* attachés à l’équation : des sous-graphes de la courbe qui contrôlent la variation des rayons de convergence des solutions de Taylor. Ces graphes s’appellent *graphes contrôlants*, et ils sont liés à la mesure de l’*irrégularité* de l’équation, ainsi qu’à son indice, au sens global sur la courbe.

L’introduction et l’étude des graphes contrôlants ont conduit de manière naturelle à l’étude systématique des équations différentielles au sens *inconditionnel* du terme. C’est à dire sans devoir ajouter des structures ultérieures (telles que le Frobenius), ou d’hypothèses (telles que la solubilité, ou la surconvergence), qu’on introduit notamment dans la plupart des théories mentionnées. La cohomologie de ces équations n’a pas été étudiée systématiquement ni sur un domaine aussi simple qu’un disque ou une couronne, ni pour des équations de rang un.

Pourtant ces équations sont très naturelles. Par exemple, si l’on ne s’intéresse qu’à la géométrie des courbes de Berkovich, on peut remarquer que si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme fini étale entre courbes quasi-lisses,¹ l’image par push-forward de l’équation triviale sur X (c’est à dire du complexe de de Rham de la courbe) est une équation différentielle sur Y qui est non triviale. Cette équation, et ses invariants, contiennent beaucoup d’informations sur le morphisme, notamment la ramification résiduelle sauvage sur les lignées de [Mat95], [Tsu98b], [Cre00], [And02], [Mar04], [Ked07], [CP09],[Xia10] (...). Dans ce cadre les graphes contrôlants du push-forward sont un invariant *géométrique* naturellement associé au morphisme f . Remarquons que le push-forward n’a pas forcément de propriétés de solubilité (et donc pas non plus de Frobenius). Une étude de ces morphismes doit donc passer à travers l’étude *inconditionnelle* des équations différentielles.

Ce mémoire est composé essentiellement de trois parties, dans lesquelles nous présentons nos contributions dans le domaine des équations différentielles p -adiques :

- Classification complète des équations différentielles solubles d’ordre un sur l’anneau de Robba, et relations avec les représentations Galoisienne abéliennes correspondantes [Pul05a], [Pul07], [CP09];
- Étude inconditionnel des équations différentielles p -adiques sur les courbes quasi-lisses de Berkovich [Chr11], [Pul12], [PP12b], [PP12a], [PP13a], [PP13b], [Pul13], [Pul14b];
- Déformation infinitésimale des équations différentielles p -adiques sur les courbes de Berkovich [Pul08], [Pul11], [Pul14a].

1. La terminologie *quasi-lisse* vient de [Duc], ces courbes sont dites “rig-smooth” dans le langage analytique rigide.

Les papiers [Pul05a], [Pul07], [Pul08], ont été obtenus entre 2001 et 2006 et constituent essentiellement notre thèse de doctorat à Paris sous la direction de Gilles Christol, et co-dirigé par Bruno Chiarellotto.

Ce mémoire s'adresse à un large public, il est donc très informel et il a caractère de vulgarisation. Dans cet esprit nous n'avons inclus dans le texte aucune preuve, mais seulement des idées. Nous avons par contre donné plus de détails dans l'introduction.

Chapitre I : Théorie abélienne des équations différentielles solubles sur un germe de couronne

Dans la première partie de notre thèse de doctorat, nous nous sommes intéressé à la classification des équations de rang un sur l'anneau de Robba, et aux représentations Galoisiennes abéliennes correspondantes [Pul05a], [Pul07]. En collaboration avec B.Chiarellotto, nous avons ensuite poursuivi l'étude dans [CP09], où nous avons démontré, en rang un, une conjecture de K.S.Kedlaya [Ked07], qui a été ensuite démontrée en général par L.Xiao [Xia10]. Les résultats qu'on a obtenu dans [Pul07] ont mené successivement à une formule pour le calcul explicite de la fonction *Rayon de convergence* d'une équation de rang un à coefficients polynomiaux [Chr11], formule dont nous avons contribué à l'obtention (cf. introduction de [Chr11] et la lettre en appendice A).

Nous allons maintenant rappeler le contexte et les résultats principaux que nous avons obtenu. Nous commençons par résumer les résultats classiques, nécessaires pour mieux encadrer la suite.

Soit K un corps de caractéristique 0, valué et complet par rapport à une valeur absolue ultramétrique $|\cdot|$, soit K° son anneau des entiers, et soit \tilde{K} son corps résiduel.

L'anneau de Robba \mathfrak{R} est l'anneau des fonctions analytiques à coefficients dans K sur un germe de couronne ouverte de la forme $C_\varepsilon := \{1 - \varepsilon < |T| < 1\}$, pour $0 < \varepsilon < 1$ non spécifié. En cohomologie rigide \mathfrak{R} est l'analogue d'un corps de séries formelles d'une variable $\tilde{K}((T))$, sur lequel la théorie des équations différentielles marche mal quand la caractéristique de \tilde{K} est positive.

Le contexte dans le cas de valuation triviale.

Si K est trivialement valué, alors $K = \tilde{K}$ et $\mathfrak{R} = K((T))$ est effectivement un corps de séries formelles. Dans ce cas on a de bons théorèmes de classification des équations différentielles sur \mathfrak{R} . Notamment on peut associer un polygone de Newton, dit *formel*, à tout module différentiel M en regardant la valuation T -adique des coefficients de l'opérateur dans une base cyclique. On dispose alors de deux résultats fondamentaux :

- (1) Le *théorème de décomposition par les pentes* du polygone de Newton formel [DMR07, p. 97-107]. Il s'agit d'un théorème de classification qui affirme que si les pentes formelles de M sont $\mu_1 < \dots < \mu_r$ avec multiplicités n_1, \dots, n_r respectivement, alors M est somme directe de modules $M(\mu_i)$ de dimension n_i , ayant chacun une unique pente μ_i avec multiplicité n_i ;
- (2) Le *théorème de Turritin-Levelt-Hukuhara* [Kat70], [Rob80], [Kat87a], [Ked10]. Il s'agit d'un théorème de classification qui affirme que tout module différentiel M sur $K((T))$ devient extension de modules de rang un après pull-back à une extension algébrique $K'((T^{1/n}))/K((T))$ convenable. Les modules de rang un ainsi obtenus sont des invariants de M car leurs classes d'isomorphismes ne se fusionnent (essentiellement) pas par passage à $\cup_n K^{\text{alg}}((T^{1/n}))$.

Grâce à ces résultats on sait que tout module différentiel sur $K((T))$ a une base de solutions de la forme

$$y = f(Z) \cdot Z^a \cdot \exp(Q(Z^{-1})) \cdot \ln(T)^k, \quad (0.1)$$

où $k, n \in \mathbb{N}$, $Z = T^{1/n}$, et $f(Z) \in K((Z))$, $a \in K$, $Q(Z^{-1}) \in Z^{-1}K[Z^{-1}]$.

Ces deux résultats permettent le calcul du groupe de Galois Tannakien G de la catégorie des modules différentiels sur $K((T))$ (cf. par exemple [Kat87a], [vdPS03, 10.3], [Ber04]). Si K est algébriquement clos, G se présente comme extension successive de ses sous-quotients suivants :

- $\widehat{\mathbb{Z}} = \text{Gal}\left(\bigcup_n K^{\text{alg}}((T^{1/n}))/K^{\text{alg}}((T))\right)$;
- un *radical unipotent* isomorphe à \mathbb{G}_a qui est lié à l'existence de logarithmes dans (0.1) ;
- un *pro-tore* qui se compose de deux sous-pro-tores :
 - un pro-tore *exponentiel* \mathbf{T}^{exp} contrôlé par les termes du type $\exp(Q(Z^{-1}))$ dans (0.1) ;
 - un pro-tore *modéré* \mathbf{T}^{mod} contrôlé par les termes du type Z^a , avec $a \in K - \mathbb{Q}$, dans (0.1).

Quitte à ramifier la variable, la partie intéressante de ce groupe est le pro-tore exponentiel qui est contrôlé par les équations de rang un dans le sens suivant.

Les classes d'isomorphisme d'équations de rang un, forment un groupe par produit tensoriel : le groupe de Picard de la catégorie que nous notons $\text{Pic}(K((T)))$. Ce groupe s'identifie au groupe des caractères abéliens $\mathbf{X}(G)$ de G (au sens des groupes linéaires). Il permet donc de reconstruire le *pro-tore*.

Notamment on montre sans peine que toute équation de rang un $\partial(y) = g(T)y$, avec $\partial := T \frac{d}{dT}$, et $g(T) = \sum_{i \geq n_0} a_i T^i \in K((T))$, est isomorphe à l'équation $\partial(y) = (g^-(T) + a_0)y$, où $g^-(T) := \sum_{n_0 \leq i \leq -1} a_i T^i \in K[T^{-1}]$ est la queue négative de $g(T)$. Sa classe d'isomorphisme est complètement déterminée par l'image de $g^-(T) + a_0$ dans le groupe additif

$$\text{Pic}(K((T))) = T^{-1}K[T^{-1}] \oplus (K/\mathbb{Z}). \quad (0.2)$$

Dans cette identification la partie $T^{-1}K[T^{-1}]$ correspond au (dual du) pro-tore exponentiel, et (K/\mathbb{Z}) au pro-tore modéré.

Si la valuation de K n'est pas triviale, et si \tilde{K} est un corps de caractéristique 0, des résultats analogues sont valables [Ked13] (voir aussi [PP13a] pour le théorème de décomposition).

Le contexte dans le cas p -adique.

Supposons maintenant que la valuation de K ne soit pas triviale, et que le corps résiduel soit de caractéristique $p > 0$. Dans ce cas \mathfrak{R} n'est plus un corps. En tant qu'espace vectoriel topologique sur K , \mathfrak{R} est un espace de type \mathcal{LF} : limite des $\mathcal{O}(C_\varepsilon)$.

L'anneau \mathfrak{R} a été introduit dans [Rob85], un papier extrêmement riche d'idées. Robba ne travaillait qu'avec des équations à coefficients méromorphes, tout en se permettant des changements de base à coefficients dans \mathfrak{R} , car il avait compris que cela entraînait des résultats de classification analogues à ceux qu'on avait sur un corps de séries formelles.

Plus tard G.Christol et Z.Mebkhout, ont perfectionné, généralisé, et exploité profondément les idées de Robba. Et ils ont complété le travail initié par Robba en obtenant les analogues des théorèmes de classification valables sur un corps de séries formelles : *exposants p -adiques*, *décomposition par les pentes p -adiques*, et *finitude dimensionnelle de la cohomologie* [CM93], [CM97], [CM00], [CM01].

Ces théorèmes ont abouti finalement à ce qu'on appelle le *théorème de la monodromie locale p -adique*, qui est l'*analogue p -adique du théorème de Turritin*, démontré par Y.André [And02], K.S.Kedlaya [Ked04], et Z.Mebkhout [Meb02] (et conjecturé par R.Crew [Cre98]).

En particulier dans [And02] on obtient une description du groupe de Galois Tannakien de la catégorie des équations différentielles sur \mathfrak{R} avec structure de Frobenius (non spécifiée), pour les

quelles on s'autorise à faire une extension finie non précisée du corps K (supposé de valuation discrète). André montre notamment que ce groupe coïncide avec

$$\mathcal{I}_{G_{\tilde{K}((T))}} \times \mathbb{G}_a, \quad (0.3)$$

où $\mathcal{I}_{G_{\tilde{K}((T))}}$ est le sous-groupe d'inertie du groupe de Galois absolu $G_{\tilde{K}((T))}$ du corps de séries formelles $\tilde{K}((T))$. C'est un groupe pro-fini.

Par rapport à la situation où K a valuation triviale on remarque l'absence du pro-tore. Pourtant il reste vrai que les solutions contiennent des exponentielles du type $\exp(Q(T^{-1}))$, ou des fonctions du type T^a , $a \in K$. L'absence du pro-tore se doit au fait remarquable que les solutions des équations différentielles p -adiques de ce type *sont algébriques sur l'anneau de Robba*.² Quitte à faire une extension finie non spécifiée de K , les solutions engendrent des extensions *étales* de \mathfrak{R} qui sont en bijection avec les extensions *finies séparables* de $\tilde{K}^{\text{alg}}((T))$.

L'inertie se décompose en sa partie sauvage $\mathcal{P}_{G_{\tilde{K}((T))}}$ et sa partie modérée $\mathcal{I}_{G_{\tilde{K}((T))}}^{\text{mod}}$

$$1 \rightarrow \mathcal{P}_{G_{\tilde{K}((T))}} \rightarrow \mathcal{I}_{G_{\tilde{K}((T))}} \rightarrow \mathcal{I}_{G_{\tilde{K}((T))}}^{\text{mod}} \rightarrow 1. \quad (0.4)$$

L'inertie modérée correspond au pro-tore modéré du cas classique, et l'inertie sauvage au pro-tore exponentiel. Cette dernière est contrôlée par la théorie d'Artin-Schreier-Witt de $\tilde{K}((T))$. Notamment

$$\mathbf{X}(\mathcal{P}_{G_{\tilde{K}((T))}}) = \text{Hom}(\mathcal{P}_{G_{\tilde{K}((T))}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \frac{\mathbf{CW}(T^{-1}\tilde{K}[T^{-1}])}{(\bar{\mathbb{F}}-1)\mathbf{CW}(T^{-1}\tilde{K}[T^{-1}])}, \quad (0.5)$$

où \mathbf{CW} dénote le groupe des covecteurs de Witt (unipotents), et $\bar{\mathbb{F}}$ est le Frobenius.

Nous résumons l'analogie dans le tableau suivant

Valuation non triviale, $p > 0$	Valuation triviale, $p = 0$
\mathfrak{R}	$K((T))$
$\mathcal{I}_{G_{\tilde{K}((T))}}^{\text{mod}}$	\mathbf{T}^{mod}
$\mathcal{P}_{G_{\tilde{K}((T))}}$	\mathbf{T}^{exp}
$\mathbf{X}(\mathcal{I}_{G_{\tilde{K}((T))}}^{\text{mod}}) = \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$	$\mathbf{X}(\mathbf{T}^{\text{mod}}) = K/\mathbb{Z}$
$\mathbf{X}(\mathcal{P}_{G_{\tilde{K}((T))}}) = \frac{\mathbf{CW}(T^{-1}\tilde{K}[T^{-1}])}{(\bar{\mathbb{F}}-1)\mathbf{CW}(T^{-1}\tilde{K}[T^{-1}])}$	$\mathbf{X}(\mathbf{T}^{\text{exp}}) = T^{-1}K[T^{-1}]$
$\bigcup_{(n,p)=1} \tilde{K}((T^{1/n}))$	$\bigcup_n K((T^{1/n}))$
Extension d'Artin-Schreier-Witt $K'((Z))/K((T))$	$K'((T))[\exp(Q(T^{-1}))] / K((T))$

L'exemple de Dwork. Nous souhaitons maintenant illustrer le problème de la convergence des solutions avec un exemple historiquement dû à B.Dwork [Dwo60]. Dans sa preuve de la rationalité de la fonction Zeta, Dwork avait montré que si π_0 est une solution non triviale de l'équation $px + x^p = 0$, alors la fonction

$$\theta(T) := \exp(\pi_0(T^p - T)) \quad (0.6)$$

2. Par exemple si $y = \exp(Q(T^{-1}))$, on a $y^{p^n} = \exp(p^n Q(T^{-1}))$ et pour n assez grand cette série converge sur un domaine de la forme $|T| > r$, avec $r < 1$, donc $y^{p^n} \in \mathfrak{R}$.

a un rayon de convergence strictement supérieur à 1. Pourtant si $|T| > 1$ on a $|T^p - T| > 1$, alors que la fonction $\exp(\pi_0 Y)$ converge pour $|Y| < 1$. On appelle ça un phénomène de *surconvergence*. Plus précisément :

- si l'on considère $\exp(\pi_0 Y)$ et $T^p - T$ comme des *fonctions*, leur composée est une fonction convergente dans le disque unité ouvert $|T| < 1$;
- si $\exp(\pi_0 Y)$ et $T^p - T$ sont considérées comme des *séries formelles*, et si on calcule le rayon de convergence de la *composée formelle*, on trouve un rayon > 1 .

Mais pour $|T| \geq 1$, $\theta(T)$ n'est pas la composée des deux fonctions. Par exemple Dwork a montré que $\theta(1)$, n'est pas 1, mais une racine p -ème non triviale de l'unité.

La fonction $\theta(T^{-1})$ appartient donc à \mathfrak{R} . On peut l'interpréter comme la matrice (de taille 1×1) d'un isomorphisme entre les équations différentielles $\partial(y) = -\pi_0 T^{-1}y$, dont la solution est $\exp(\pi_0 T^{-1})$, et son pull-back par Frobenius $\partial(y) = -p\pi_0 T^{-p}y$, dont la solution est $\exp(\pi_0 T^{-p})$. C'est cet exemple qui a donné naissance à l'idée de la *structure de Frobenius* des équations différentielles.

Cet exemple montre que, contrairement au cas de valuation triviale, la fonction $g^-(T)$, qui apparaît dans $\partial(y) = g^-(T)y$, n'est pas invariante par isomorphismes. En particulier sa valuation T -adique (i.e. son *irrégularité formelle*) n'est pas invariante par changements de base dans \mathfrak{R} . Le problème de l'irrégularité a été résolu par Robba [Rob85], qui a été capable, grâce à ses calculs avec les exponentielles, de reconnaître que la bonne notion d'*irrégularité p -adique* est la *pente du rayon de convergence* (dont nous parlerons largement dans quelques pages), et non pas la valuation T -adique du polynôme $g^-(T)$ apparaissant dans $\partial(y) = g^-(T)y$.

Notre contribution.

Nous avons exploité les principales propriétés des théories suivantes

- Groupes de Lubin-Tate,
- Vecteurs de Witt et de l'exponentielle d'Artin-Hasse,
- Exponentielles de Robba,

pour construire des exponentielles de type Artin-Hasse qui interviennent comme solutions des équations différentielles solubles. C'est à l'aide du grand nombre de congruences vérifiées par les coefficients des séries formelles définissant les objets de ces trois théories qu'on a pu *contrôler le rayon de convergence et la surconvergence* de ces exponentielles.

L'aboutissement de ces calculs donne pour tout anneau A contenant $\mathbb{Z}_{(p)}[\cup_n \mu_{p^n}]$ un morphisme de Groupes

$$e_{p^\infty}(-, 1) : \mathbf{CW}(T^{-1}A[[T^{-1}]]) \longrightarrow 1 + T^{-1}A[[T^{-1}]] \quad (0.7)$$

qui associe à tout covecteur (unipotent) de Witt $\mathbf{f}^-(T) := (\dots, 0, 0, 0, f_0^-(T), \dots, f_m^-(T))$ la série

$$e_{p^\infty}(\mathbf{f}^-(T), 1) := \exp\left(\pi_m \phi_0^-(T) + \pi_{m-1} \frac{\phi_1^-(T)}{p} + \dots + \pi_0 \frac{\phi_m^-(T)}{p^m}\right) \quad (0.8)$$

où $\phi_i^- := (f_0^-)^{p^i} + p(f_1^-)^{p^{i-1}} + \dots + p^i f_i^-$ est la i -ème composante fantôme de $(f_0^-(T), \dots, f_m^-(T))$, et $(\pi_m)_{m \geq 0}$ est un générateur topologique du module de Tate d'un groupe de Lubin-Tate isomorphe à \mathbb{G}_m .

THÉORÈME 1 ([Pul07]). *Soit $\partial := T \frac{d}{dT}$. Toute équation différentielle soluble $\partial(y) = g(T)y$, avec $g(T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \in \mathfrak{R}$, est isomorphe à l'équation*

$$\partial(y) = (a_0 + g^-(T)) \cdot y, \quad (0.9)$$

où $a_0 \in \mathbb{Z}_p$ et $g^-(T) = \sum_{i=1}^m a_{-i} T^{-i}$, et m est un entier positif convenable. Si maintenant $\mu_{p^m} \subset K$, alors la solution de cette équation est du type

$$y = T^{a_0} \cdot e_{p^\infty}(\mathbf{f}^-(T), 1) \quad (0.10)$$

pour un $\mathbf{f}^-(T) \in \mathbf{CW}(T^{-1}K^\circ[T^{-1}])$ convenable.

Deux équations sont isomorphes si, et seulement si, les exposants a_0 correspondants diffèrent par un entier, et si les covecteurs $\mathbf{f}^-(T)$ correspondants ont même image dans le quotient

$$\mathbf{CW}(T^{-1}K^\circ[T^{-1}]) \longrightarrow \mathbf{CW}(T^{-1}\tilde{K}[T^{-1}]) \longrightarrow \frac{\mathbf{CW}(T^{-1}\tilde{K}[T^{-1}])}{(\bar{F} - 1)\mathbf{CW}(T^{-1}\tilde{K}[T^{-1}])}, \quad (0.11)$$

où \bar{F} est le Frobenius. Si $\mu_{p^\infty} \subset K$, on a donc

$$\text{Pic}^{\text{sol}}(\mathfrak{A}) = (\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}) \oplus \frac{\mathbf{CW}(T^{-1}\tilde{K}[T^{-1}])}{(\bar{F} - 1)\mathbf{CW}(T^{-1}\tilde{K}[T^{-1}])}. \quad (0.12)$$

Nous avons démontré ces résultats sans nous servir du théorème de Y.André (0.3), on redémontre en effet une version abélienne de (0.3). La preuve se réduit au résultat préalable suivant :

THÉORÈME 2 ([Pul07], [Mat95]). Soit \mathfrak{G} un groupe de Lubin-Tate sur \mathbb{Z}_p , et soit $(\pi_m)_m$ un générateur de son module de Tate $T(\mathfrak{G})$. Alors pour tout $m \geq 0$ la série formelle (dite exponentielle de Robba)

$$\exp\left(\pi_m T + \pi_{m-1} \frac{T^p}{p} + \cdots + \pi_0 \frac{T^{p^m}}{p^m}\right) \quad (0.13)$$

converge avec rayon exact 1. Si $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{W}(K)$ est un vecteur de Witt, de composantes fantômes $\phi_i := \lambda_0^{p^i} + p\lambda_1^{p^{i-1}} + \cdots + p^i \lambda_i$, et si $d = np^m$, avec $n \geq 1$ premier à p , alors la série

$$e_d(\boldsymbol{\lambda}, T) := \exp\left(\pi_m \phi_0 T^n + \pi_{m-1} \phi_1 \frac{T^{np}}{p} + \cdots + \pi_0 \phi_m \frac{T^{np^m}}{p^m}\right) \quad (0.14)$$

converge exactement dans le disque $D^-(0, R)$ de rayon $R = \min_{i=0, \dots, m} |\lambda_i|^{-1/np^i}$.

Si de plus \mathfrak{G} est isomorphe à $\hat{\mathbb{G}}_m$, si $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{W}(K^\circ)$, et si $\varphi : K^\circ \rightarrow K^\circ$ est un Frobenius, alors pour tout $m \geq 0$ la série

$$\theta_{p^m}(\boldsymbol{\lambda}, T) := e_{p^m}(\varphi(\boldsymbol{\lambda}), T^p) / e_{p^m}(\boldsymbol{\lambda}, T) \quad (0.15)$$

est surconvergente (i.e. convergence pour $|T| < 1 + \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$).

Ce théorème est l'aboutissement des résultats préexistants suivants :

- Dwork [Dwo60] l'a démontré pour $m = 0$, en prenant le groupe de Lubin-Tate sur \mathbb{Z}_p le plus simple possible, dont la multiplication par p était $px + x^p$.
- Robba [Rob85] a démontré que (0.13) converge avec rayon 1, et a utilisé ces séries, convenablement combinées, pour produire une vaste classe d'exemples. Ses calculs s'encadrent naturellement dans le langage des Vecteurs de Witt dont il avait deviné le lien [Rob85, 10.12] (probablement inspiré par Dwork [Dwo82a, 13.21.1], qui a aussi proposé plus tard ce sujet à D.Chinellato [Chi02]). Robba avait construit la suite de nombres π_i comme des points d'intersection d'une certaine famille de disques. Pour cela il avait besoin d'un corps sphériquement complet. En particulier il n'avait aucun contrôle sur l'algébricité de ces nombres, ni sur la surconvergence de (0.15).
- C'est Shigeaki Matsuda [Mat95] qui a finalement utilisé les vecteurs de Witt, et a démontré le Théorème 2, sous une forme plus faible (sans précision sur les rayons de convergence), pour

$p \neq 2$, et le groupe de Lubin-Tate \mathbb{G}_m . La preuve de Matsuda est une estimation directe de la valeur absolue des coefficients.

Nos méthodes sont finalement assimilables à ceux de Matsuda, dont nous avons tiré largement inspiration, mais nos techniques sont différentes car nous utilisons de manière essentielle les congruences provenant des théories de Lubin-Tate, Witt, et Artin-Hasse. À aucun moment nous n'évaluons les coefficients des séries qu'on manipule. En particulier nos techniques sont valables aussi pour $p = 2$. L'idée nouvelle par rapport à Matsuda consiste à avoir introduit la série (0.8).

Le Théorème 1 permet de construire des exemples/contre-exemples explicites, car on donne la liste exacte des classes d'isomorphisme. Depuis Robba, ces exponentielles ont fait leur apparition régulièrement dans le domaine des équations différentielles p -adiques, car ils constituent une classe d'exemples sur lesquels une bonne partie des phénomènes importants se lisent explicitement. Nous signalons notamment les papiers suivants dont nous reparlerons par la suite [Cre87, Prop. 4.11], [CR94], [Mat95], [CC96], [Gar97], [Chi02] (et [Chi07]).

Le calcul explicite de $H_{\text{cont}}^1(\mathbb{G}_{\tilde{K}((T))}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

Du côté complètement algébrique ces méthodes nous ont permis, dans [CP09], de décrire le groupe $H_{\text{cont}}^1(\mathbb{G}_{\tilde{K}((T))}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ et sa filtration de ramification. Sans aucune hypothèse sur le corps \tilde{K} de caractéristique $p > 0$, la filtration de ramification a été définie par Kato [Kat89] sur le $H_{\text{cont}}^1(\mathbb{G}_{\tilde{K}((T))}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$, et elle correspond, par dualité de Pontriagyn, à la filtration de ramification de l'abélianisé du groupe de Galois $\mathbb{G}_{\tilde{K}((T))}^{\text{ab}}$ (filtration qui a été étudiée en toute généralité par A.Abbees et T.Saito, [AS02], [AS03], [AS09]). Signalons qu'une description explicite de $\mathbb{G}_{\tilde{K}((T))}$ existe, en termes de générateurs et relations [MS89], mais elle ne décrit pas vraiment la filtration de ramification.

Nous obtenons dans [CP09] une description complète du groupe $H_{\text{cont}}^1(\mathbb{G}_{\tilde{K}((T))}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ et de sa filtration de Kato. En particulier nous avons l'expression explicite suivante du gradué, qui montre la complexité de la ramification lorsque \tilde{K} n'est pas parfait :

THÉORÈME 3 ([CP09]). *Si $d > 0$, le gradué de $H_{\text{cont}}^1(\mathbb{G}_{\tilde{K}((T))}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ par la filtration de Kato est donné par*

$$\text{Gr}_d(H_{\text{cont}}^1(\mathbb{G}_{\tilde{K}((T))}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) = \mathbf{W}_{v_p(d)}(\tilde{K})/p\mathbf{W}_{v_p(d)}(\tilde{K}), \quad (0.16)$$

où $v_p(d)$ est la valuation p -adique de l'entier naturel d . En particulier, si \tilde{K} est parfait, alors $\text{Gr}_d(H_{\text{cont}}^1(\mathbb{G}_{\tilde{K}((T))}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) \cong \tilde{K}$.

Le terme $\mathbf{W}_{v_p(d)}(\tilde{K})/p\mathbf{W}_{v_p(d)}(\tilde{K})$ correspond notamment à des exponentielles de type Robba (cf. (0.14)). La correspondance avec les équations différentielles nous a aidé dans la compréhension de la filtration, même si cette dernière n'a finalement qu'un caractère purement algébrique. Notamment on peut décomposer toute exponentielle de type $e_{p^\infty}(\mathbf{f}^-(T), 1)$ en un produit d'exponentielles de type Robba (0.14), cela correspond à décomposer le vecteur de Witt $\mathbf{f}^-(T)$ en des "comonomes" qui correspondent à la filtration de Kato.

Résultats et applications ultérieurs. Signalons maintenant des résultats ultérieurs qu'on a obtenus en rang un, et que nous ne détaillerons pas dans l'introduction.

- **Conjecture de Dwork en rang un.** La conjecture a été formulée dans [CM01, 7], et

antérieurement par Dwork sous une forme moins précise. Elle dit que toute équation différentielle soluble, dont les exposants sont rationnels, a une *structure de Frobenius*. En rang un cela revient à montrer que l’analogue de la série (0.6) est surconvergente. La conjecture en rang un est donc une conséquence directe de nos calculs.

Cela améliore légèrement le résultat de l’article [CC96] où la conjecture était démontrée pour les équations à coefficients polynomiaux. Les méthodes sont indirectes, et complètement différentes des nôtres. Notamment dans [CC96] les auteurs montrent que quitte à faire un nombre non précisé de fois le pull-back par Frobenius, on retombe sur la classe d’isomorphisme de départ (et on a donc une structure de Frobenius). La classification des classes d’isomorphisme que nous avons donné au Théorème 1 montre en effet que le pull-back par Frobenius stabilise toutes les classes d’isomorphisme. Autrement dit, il suffit de faire un seul pull-back.

- **Critère de solubilité.** Avec des méthodes différentes, faisant intervenir cette fois les vecteurs de Witt de longueur infinie, nous avons obtenu un *critère de solubilité* explicite sur les coefficients de la série $g(T) \in \mathfrak{R}$ de l’équation $\partial(y) = g(T)y$;
- Comme conséquence nous montrons que si $\mu_{p^\infty} \cap K = \{1\}$, et si $p \neq 2$,³ alors

$$\text{Pic}^{\text{sol}}(\mathfrak{R}) = \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}. \quad (0.17)$$

Il n’y a pas d’exponentielles. Cela montre la nécessité d’inclure les racines de l’unité dans K .

- **Calcul du foncteur de Fontaine.** Le calcul explicite en rang un du foncteur de Fontaine (resp. Kedlaya [Ked07] si le corps résiduel est imparfait) associant à toute représentation $\rho_V : \mathbf{G}_{\tilde{K}((T))} \rightarrow (K^\circ)^\times$ à image finie, un (φ, ∇) -module étale sur l’anneau de Robba borné $\mathcal{E}^\dagger \subset \mathfrak{R}$.

Pour calculer explicitement le foncteur il faut connaître un générateur de l’extension dont le groupe de Galois est le noyau de la flèche ρ_V . De manière informelle ce générateur est la solution $e_{p^\infty}(\mathbf{f}^-(T), 1)$ attaché au vecteur de Witt $\mathbf{f}^-(T)$ définissant la (p -partie du) caractère ρ_V . Les coefficients de cette série sont complètement explicites.

- **Conjecture de Kedlaya.** Nous avons donné dans [CP09] une preuve en rang un de la conjecture “*Swan différentiel = Swan arithmétique*” dans le cadre de corps résiduel \tilde{K} imparfait, conjecture qui a été posée dans [Ked07] et démontrée dans le cas général dans [Xia10] avec des méthodes complètement différentes des nôtres. Le cadre ici est similaire à la situation préexistante de Fontaine, mais la différence est que maintenant on a une famille finie de connexions provenant des dérivations sur \tilde{K} . Il s’agit en effet d’une équation différentielle à plusieurs variables.
- **Déformation du complexe d’Artin-Schreier-Witt vers celui de Kummer.** Nous avons construit pour tout $m \geq 0$ une série $\theta_{p^m}((X_0, \dots, X_m), T)$ (0.15), à coefficients dans $\mathbb{Z}_p[\mu_{p^{m+1}}]$, qui pour tout corps valué complet L/\mathbb{Q}_p contenant $\mu_{p^{m+1}}$, et tout choix d’entiers $(x_0, \dots, x_m) \in \mathbf{W}_m(L^\circ)$, est surconvergente en la variable T . De plus, sa valeur en $T = 1$ donne une déformation du complexe de Artin-Schreier-Witt du corps résiduel \tilde{L} vers celui de Kummer de L :

3. Pour $p = 2$, nous avons montré un résultat analogue.

THÉORÈME 4. *Le diagramme suivant est commutatif et fonctoriel en L :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mu_{p^{m+1}} & \longrightarrow & (L)^\times & \xrightarrow{f \mapsto f^{p^{m+1}}} & (L)^\times & \xrightarrow{\delta_{\text{Kum}}} & H^1(G_L, \mu_{p^{m+1}}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow \theta_{p^m}(-, 1) & & \uparrow e_{p^m}(-, 1)^{p^{m+1}} & & \uparrow & & \\
 & & \mathbf{W}_m((L^\circ)^{\varphi=1}) & \xrightarrow{\iota} & \mathbf{W}_m(L^\circ) & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & \mathbf{W}_m(L^\circ) & & \mathbf{W}_m(L^\circ) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbf{W}_m(\tilde{L}) & \xrightarrow{\bar{\mathbb{F}}^{-1}} & \mathbf{W}_m(\tilde{L}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G_{\tilde{L}}, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \iota & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \bar{e} := e_{p^m}(-, 1)^{p^{m+1}} & &
 \end{array} \tag{0.18}$$

où $G_L := \text{Gal}(L^{\text{alg}}/L)$ et $G_{\tilde{L}} := \text{Gal}(\tilde{L}^{\text{alg}}/\tilde{L})$. De plus le caractère d'Artin-Schreier-Witt $\gamma \mapsto \alpha(\gamma) : G_{\tilde{L}} \rightarrow \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}$ est envoyé par \bar{e} dans le caractère de Kummer $\gamma \mapsto \bar{e}(\alpha)(\gamma) = \xi_m^{-\alpha(\gamma)} : G_{\tilde{L}} \rightarrow \mu_{p^{m+1}}$, où ξ_m est la racine de l'unité déterminée par le choix du générateur $(\pi_m)_m$ du module de Tate $T(\mathfrak{G})$.

C'est S.Matsuda qui a découvert, dans [Mat95], pour $p \neq 2$, et pour L égal à l'anneau de Robba borné $\mathcal{E}^\dagger \subseteq \mathfrak{R}$, qu'on avait l'isomorphisme \bar{e} entre les H^1 de Artin-Schreier-Witt et Kummer. Notamment la flèche $\theta_{p^m}(-, 1)$ (appliquée à des Teichmüller) paraît déjà dans sa preuve pour montrer la bonne définition de \bar{e} .

Notre contribution a été de formuler la déformation de manière générale pour tout corps L , pour $p = 2$, et expliciter la flèche $\theta_{p^m}(-, 1)$ en montrant pour $L = \mathcal{E}^\dagger$ qu'elle coïncide avec la fonction $e_{p^\infty}(\mathbf{f}^-(T), 1)$ qui est complètement explicite. Notamment le générateur $\theta_{p^m}(\nu, 1)$ de l'extension de Kummer de \mathcal{E}^\dagger attaché à un caractère sauvage défini par une équation d'Artin-Schreier-Witt $\varphi(\nu) - \nu = \mathbf{f}^-(T)$ est donné par

$$\theta_{p^m}(\nu, 1) = e_{p^\infty}(\mathbf{f}^-(T), 1), \tag{0.19}$$

ce qui rend complètement explicite le générateur. La connaissance de ce générateur est le point essentiel pour le calcul du foncteur de Fontaine.

Mentionnons pour conclure que les valeurs sur les entiers de ces fonctions surconvergentes sont des générateurs d'extensions de Kummer. Ces résultats ont conduit Lara Thomas, Eric Pickett, et Stéphane Viatier à les généraliser, et à les utiliser pour décrire et classifier certains types d'extensions de corps [TP12], [PV11]. Signalons également un papier récent de Rodolphe Richard [Ric14] sur le sujet des exponentielles de Robba et la formule du rayon de convergence.

Chapitre II : Équations différentielles sur les courbes de Berkovich

En 2011, Gilles Christol a obtenu un algorithme itératif *fini* qui calcule le rayon de convergence des équations de rang un de la forme $y' = g(T)y$, avec $g(T) \in K[T]$. L'algorithme est basé sur les méthodes que nous avons développées dans la thèse, et que nous venons d'exposer.

Il s'agit là d'une équation d'ordre un définie sur la droite de Berkovich. Un des souhaits de Christol était celui de démontrer pour ces équations la conjecture de finitude du rayon que F.Baldassarri avait récemment posée [Bal10], à savoir qu'il existe un graphe fini $\Gamma \subseteq \mathbb{A}_K^{1, \text{an}}$ dans la droite affine tel que la fonction rayon de convergence se factorise à travers une rétraction $\mathbb{A}_K^{1, \text{an}} \rightarrow \Gamma$. Nous parlerons plus précisément dans quelque paragraphe de cette conjecture que nous avons démontré en général dans [Pul12], [PP12b], [PP12a].

L'algorithme de Christol, dans sa forme originale, exprime le rayon à l'aide des normes de certaines fonctions analytiques définies chacune sur un certain revêtement de la droite, et cela se prête mal pour décrire le graphe Γ sur la droite.

Nous avons signalé à Christol ce problème et proposé en même temps une formule plus directe, qui exprime le rayon comme l'inverse de la norme des composantes des vecteurs de Witt attachées aux solutions. Cette formule fait maintenant partie de l'article [Chr11].

THÉORÈME 5 ([Chr11]). *Soit $(\pi_m)_m$ un générateur du module de Tate d'un groupe de Lubin-Tate isomorphe à $\widehat{\mathbb{G}}_m$.*

Soit $y' = g(T)y$, une équation différentielle avec $g(T) \in K[T]$. Soit d le degré de $g(T)$. Pour tout entier $n \geq 1$ premier à p , soit $m_n \geq 0$ le plus grand nombre entier tel que $np^{m_n} \leq d + 1$.

Pour tout $1 \leq n \leq d + 1$ premier à p , il existe une unique uple $(\lambda_{n,0}(T), \dots, \lambda_{n,m_n}(T))$ de polynômes dans $K[T]$ déterminée par le système de relations

$$\lambda_{n,0}^{p^j} + p\lambda_{n,1}^{p^{j-1}} + p^2\lambda_{n,2}^{p^{j-2}} + \dots + p^j\lambda_{n,j} = \frac{1}{n \cdot \pi_{m_n-j}} \cdot \frac{g^{(np^j-1)}(T)}{(np^j-1)!}, \quad \forall j = 0, \dots, m_n, \quad (0.20)$$

où $g^{(i)}$ désigne la dérivée i -ème $(d/dT)^i(g)$ de g .⁴ Pour toute extension valuée Ω/K , et toute point rationnel $t \in \mathbb{A}_K^{1,\text{an}}(\Omega)$, soit $y_t = \exp(\sum_{i=1}^{d+1} g^{(i-1)}(t) \frac{(T-t)^i}{i!})$ la solution de Taylor autour de t de l'équation $y' = g(T)y$.

Si $y_t = \sum_{n \geq 0} a_n(T-t)^n$, notons par $\mathcal{R}(t) := \liminf_i \frac{1}{\sqrt[i]{|a_n(t)|}}$ son rayon de convergence. Alors

$$\mathcal{R}(t) = \min_{\substack{1 \leq n \leq d+1, (n,p)=1 \\ 0 \leq j \leq m_n}} |\lambda_{n,j}(t)|^{-\frac{1}{np^j}}. \quad (0.21)$$

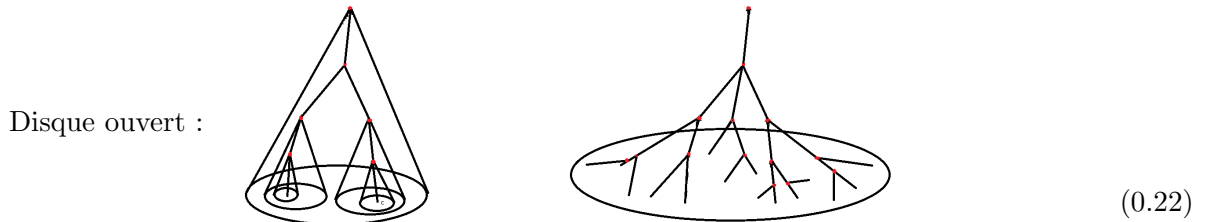
Avec la permission de Christol, nous joignons en appendice A la lettre que nous lui avons envoyé avec la formule, et la preuve de la conjecture de finitude de Baldassarri dans ce contexte.

Toutefois, si l'équation est définie sur un domaine affinoïde de la droite, ou sur un disque, la formule se généralise en une formule *infinie*, car le nombre de dérivée dans (0.20) devient infini. Elle ne démontre donc pas la conjecture de finitude de Baldassarri. C'est en essayant de faire marcher la formule que nous avons commencé à travailler sur le problème de Baldassarri.

Images de courbes quasi-lisses de Berkovich.

Nous allons parler maintenant d'équations différentielles sur les courbes quasi-lisses de Berkovich. Nous souhaitons d'abord raconter de manière informelle la structure de ces courbes, en donnant quelques images, pour mieux encadrer les phénomènes dont on parlera plus tard.

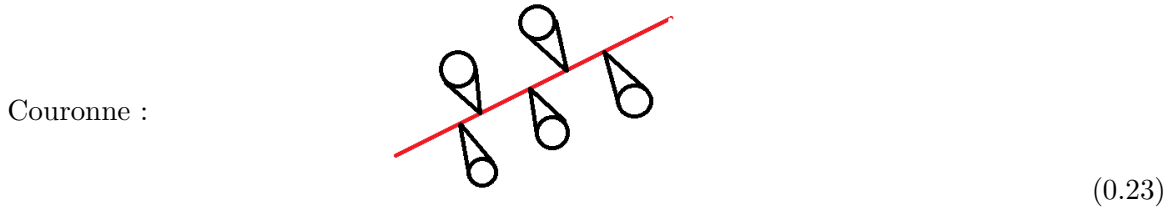
Un disque ouvert de Berkovich est assimilable topologiquement à un arbre, qui a une structure de fractale (pour tout sous-disque ouvert nous avons un sous-arbre) :



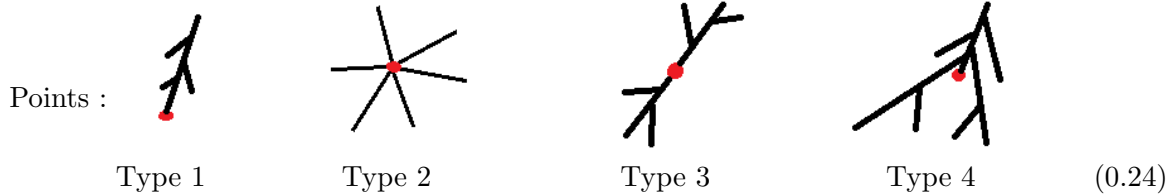
Une couronne ouverte de Berkovich $C = \{|T| \in]r_1, r_2[\}$ se compose topologiquement d'un segment Γ_C tel que $C - \Gamma_C$ est réunion disjointe de disques ouverts de la forme $\{|T - c| < |c|\}$. Le lieu Γ_C s'appelle squelette analytique, et il est caractérisé par le fait d'être le lieu des points qui n'ont pas

4. Les solutions $(\lambda_{n,0}(T), \dots, \lambda_{n,m_n}(T))$ du système (0.20) se calculent facilement par récurrence.

de voisinages isomorphes à un disque virtuel ouvert :

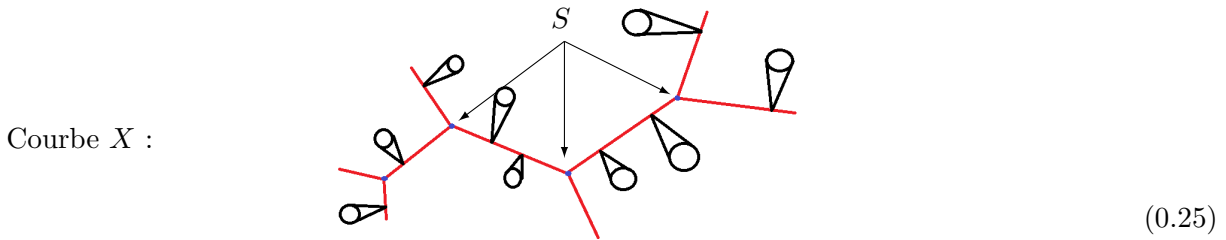


Nous rappelons que les points de Berkovich sont classifiés en 4 typologies, sans rentrer dans les détails nous en montrons ici l'aspect topologique :



Celle ci est une classification qui s'étend à toute courbe X . Les points de type 1 et 4 sont les points finaux du graphe X . Ils ont toujours un voisinage ouvert dans X isomorphe à un disque virtuel. La différence entre les deux est qu'une suite de disques dont l'intersection est un point x de type 1 a des rayons qui tendent vers $r(x) = 0$, alors que pour les points de type 4 ces rayons tendent vers une valeur $r(x) > 0$. La structure de la courbe en un point de type 2 est celle d'un étoile, et en un point de type 3 il n'y a qu'au plus deux directions sortantes (un point de type 3 a toujours un voisinage isomorphe à une couronne virtuelle qui le contient dans son squelette analytique).

D'après A.Ducros [Duc], toute courbe K -analytique quasi lisse X sur K admet une *triangulation*.⁵ Autrement dit, il existe un sous-ensemble localement fini S de X formé par des points de type 2 ou 3, tel que $X - S$ est une réunion disjointe de disques virtuels ouverts et de couronnes virtuelles ouvertes. De plus ces disques et couronnes sont tous relativement compacts dans X . Le squelette analytique des couronnes de $X - S$ est homéomorphe à un intervalle ouvert et relativement compact dans X , dont les extrémités sont des points de S . En joignant ces intervalles avec les points de S on obtient un graphe réel localement fini Γ_S sur lequel la courbe X se rétracte. En effet $X - \Gamma_S$ est une réunion disjointe de disques virtuels ouverts, et la rétraction envoie tous ces disques sur leur frontière relative dans X , qui est un point de Γ_S .



Si K est algébriquement clos, tout point $x \in X$ de type 2, est canoniquement associé à une courbe \mathcal{C}_x projective et lisse sur le corps résiduel \tilde{K} . La courbe \mathcal{C}_x est l'unique courbe dont le corps des fractions est le corps résiduel du corps du point $\mathcal{H}(x)$ (cf. [Duc]), elle ne dépend donc que de x , et pas du plongement de x dans la courbe X . Nous dirons que son genre est le *genre $g(x)$ du point x* .

On a la propriété remarquable suivante : les germes de segments sortants de x sont canonique-

5. Ce résultat est essentiellement le théorème de réduction semi-stable.

ment en bijection avec les points K -rationnels d'un ouvert de Zariski \tilde{V}_x de la courbe \mathcal{C}_x

$$\{\text{germes de segments sortantes de } x \in X\} \longleftrightarrow \{\text{points } \tilde{K}\text{-rationnels de } \tilde{V}_x\}. \quad (0.26)$$

De plus $\tilde{V}_x = \mathcal{C}_x$ si et seulement si x n'est pas un point du bord de X .

Sans vouloir rentrer dans les détails, si la triangulation a des bonnes propriétés, par exemple tout les points de S sont de type 2, alors elle correspond à un modèle formel de X dont la fibre spéciale sur \tilde{K} a pour composantes irréductibles les courbes \tilde{V}_x , $x \in S$. Tout arêtes de Γ_S d'extrémités $x, y \in S$ correspond à un point d'intersection des courbes \tilde{V}_x et \tilde{V}_y . Autrement dit Γ_S est le graphe dual du graphe d'intersection des composantes irréductibles de la fibre spéciale.

De manière informelle, appelons \tilde{X} le fibre spéciale. Ses composantes irréductibles sont les courbes \tilde{V}_x , $x \in S$. La correspondance (0.26) donne alors les bijections suivantes

$$\{\text{Points non singuliers de } \tilde{X}\} \longleftrightarrow \{\text{Disques dans } X - \Gamma_S \text{ branchés sur } S\}, \quad (0.27)$$

$$\{\text{Points singuliers de } \tilde{X}\} \longleftrightarrow \{\text{Arêtes de } \Gamma_S - S\}, \quad (0.28)$$

$$\{\text{Points génériques des } \tilde{V}_x\} \longleftrightarrow \{\text{Points de } S\}. \quad (0.29)$$

Triangulations faibles et pseudo-triangulations. Sur un corps algébriquement clos une *pseudo-couronne* ouverte est une courbe connexe quasi-lisse sans bord et sans point de genre positif, telle que son squelette analytique est un segment. Sur un corps quelconque c'est une courbe connexe quasi-lisse qui dévient une réunion disjointe de pseudo-couronnes après changement de base à la clôture algébrique.

Par la suite nous dirons qu'un sous-ensemble $S \subset X$ est une *pseudo-triangulation* (resp. *triangulation faible*), si $X - S$ est une réunion disjointe de disques virtuels ouverts et de pseudo-couronnes (resp. couronnes virtuelles) ouvertes. Nous ne demandons pas aux composantes connexes de $X - S$ d'être relativement compactes, en particulier l'ensemble vide peut être la triangulation faible d'un disque ouvert, ou d'une couronne ouverte. Nous notons encore par Γ_S la réunion des squelettes analytiques des pseudo-couronnes (resp. couronnes virtuelles) de $X - S$.

Nous avons introduit dans [PP12b] et [PP13a] la notion de triangulation faible essentiellement pour pouvoir travailler avec un disque ouvert avec triangulation vide, ce qui nous permet de ne pas tronquer les rayons de convergence des solutions comme nous le verrons dans un instant.

Ensuite dans [PP13b], nous avons introduit la notion de pseudo-triangulation car elle nous permet d'avoir le plus petit nombre de points de S pour découper X . Cela est important pour des questions liées à la cohomologie.

Dans ce contexte nous avons obtenu dans [PP12b] le théorème de structure suivant :

THÉORÈME 6. *Supposons que K soit algébriquement clos. Soit Ω/K une extension valuée complète arbitraire, et soit $\pi : X_\Omega \rightarrow X$ la projection canonique. Soit $x \in X$, alors $\pi^{-1}(x)$ est connexe et il existe un point $x_\Omega \in \pi^{-1}(x)$ tel que $\pi^{-1}(x) - \{x_\Omega\}$ est une réunion disjointe de disques ouverts dans X_Ω dont la frontière est x_Ω .*

Si Ω/K est sphériquement complet et algébriquement clos, alors ces disques sont tous isomorphes, et forment une unique orbite par l'action de Galois. Nous en notons un par $D(x)$ et un centre de $D(x)$ par t_x . Nous dirons que $D(x)$ est le disque générique de x .

Le même résultat a été obtenu indépendamment par Ducros avec des méthodes différentes [Duc].

Ce résultat entraîne que toute triangulation (resp. faible ou pseudo) S se relève canoniquement en une triangulation S_Ω de X_Ω , et que si K est algébriquement clos, alors la projection canonique $\Gamma_{S_\Omega} \rightarrow \Gamma_S$ est un homéomorphisme.

Rayon de convergence des solutions.

Une équation différentielle sur une courbe X quasi-lisse de Berkovich est un \mathcal{O}_X -module cohérent, muni d'une connexion $\nabla : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \Omega_{X/K}^1$.

Dans le cadre complexe les singularités d'une équation différentielle sont liées au rayon de convergence des solutions de Taylor. Nous allons illustrer cela avec un exemple. Soit $U = \mathbb{C} - \{x_1, \dots, x_n\}$ un ouvert du corps des nombres complexes \mathbb{C} . Soit $L(y) : y^{(d)} + f_{d-1}(T)y^{(d-1)} + \dots + f_1y' + f_0y$ une équation différentielle linéaire homogène à coefficients holomorphes sur U , ayant des pôles en x_1, \dots, x_n . Il est bien connu que si $t \in U$ est un point non singulier, alors le développement de Taylor de toute solution de L en t converge sur le plus grande disque centré en t qui est contenu dans U . Autrement dit : les singularités constituent l'entité *géométrique* qui empêche et contrôle la convergence des solutions.

Dans le monde p -adique, au contraire, on peut avoir des solutions de Taylor en un point rationnel non singulier t ayant des rayons de convergence différents, et essentiellement indépendants de la géométrie de la courbe. Par exemple, l'équation $y(T)' = y(T)$ a pour solution $\exp(T-t)$ au voisinage de tout point rationnel t , et il est bien connu (d'après Dwork) que son rayon n'est pas infini. Les coefficients de l'équation $y' = y$ n'ont pourtant aucun zéro ou pôle.

D'autre part nous savons également qu'on peut avoir des phénomènes subtiles de surconvergence, comme pour la série de Dwork (0.6).

Un problème dans le contexte p -adique a été celui de faire ressortir l'entité *géométrique* qui contrôle la convergence des solutions de Taylor. L'exemple de l'équation $y' = y$ montre que cette obstruction géométrique n'est pas forcément lisible directement sur les coefficients de l'équation.

L'étude du rayon de convergence des solutions a été initiée par B.Dwork [Dwo74], [Dwo73]; ensuite largement exploitée aussi par P.Robba [Rob75a], [Rob85]; puis par Christol-Dwork [CD94] (modules différentielles sur les couronnes). Il est depuis utilisé uniformément dans la théorie des équations différentielles p -adiques, notamment par Christol-Mebkhout [CM93], [CM97], [CM00], [CM01]. Signalons que le lien entre la *mésure de l'irregularité* et les rayons de convergence des solutions a été découvert par Robba [Rob85].

La bonne notion de rayon de convergence sur les courbes de Berkovich est la suivante :

DÉFINITION 1. Soit S une triangulation faible, ou une pseudo-triangulation, de la courbe quasi-lisse X . Soit $x \in X$ et soit t_x un point rationnel de $X_{\mathcal{H}(x)}$ qui relève x . Notons par $D(x, S)$ le plus grand disque ouvert centré en t_x qui est une composante connexe de $X_{\mathcal{H}(x)} - \Gamma_{S_{\mathcal{H}(x)}}$.

Soit \mathcal{F} une équation différentielle sur X , i.e. un \mathcal{O}_X -module cohérent muni d'une connexion $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \Omega_X^1$.

Soit $r := \text{rank}_x(\mathcal{F})$. Pour tout $i = 1, \dots, r$ notons par $D_{S,i}(x, \mathcal{F})$ le plus grand sous-disque ouvert de $D(x, S)$ sur lequel \mathcal{F} a au moins $r - i + 1$ solutions linéairement indépendantes (sur Ω).

Si R et R_i sont les rayons de $D(x, S)$ et $D_{S,i}(x, \mathcal{F})$ dans une coordonnée, on pose

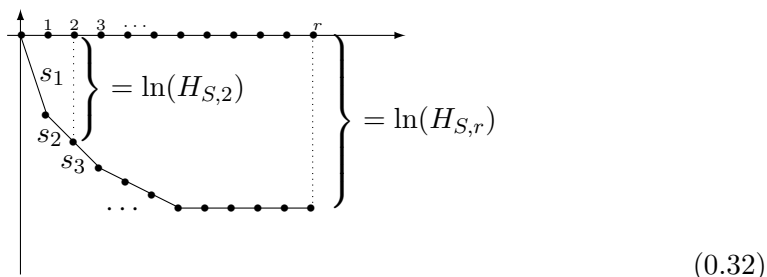
$$\mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}) := R_i/R. \quad (0.30)$$

On montre que la définition ne dépend pas du choix de t_x , et que $\mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F})$ est invariant par automorphismes de X .

Pour fixer les idées dans l'introduction, nous précisons que pour une équation différentielle \mathcal{F} de rang r sur la courbe (connexe) quasi-lisse X , on a r fonctions rayons $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F}) : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Pour tout $x \in X$ elles satisfont l'encadrement

$$\begin{aligned} D_{S,1}(x, \mathcal{F}) \subseteq D_{S,2}(x, \mathcal{F}) \subseteq \dots \subseteq D_{S,r}(x, \mathcal{F}) \subseteq D(x, S), \\ 0 < \mathcal{R}_{S,1}(x, \mathcal{F}) \leq \mathcal{R}_{S,2}(x, \mathcal{F}) \leq \dots \leq \mathcal{R}_{S,r}(x, \mathcal{F}) \leq 1. \end{aligned} \quad (0.31)$$

Avec ces rayons on construit un polygone dont les pentes sont $s_i := \ln(\mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}))$:



Ce polygone s'appelle le *polygone de Newton des convergences* de \mathcal{F} en $x \in X$. Ses hauteurs partielles sont les logarithmes des fonctions $H_{S,i}(x, \mathcal{F}) := \prod_{j=1}^i \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F})$.

Nous dirons aussi que l'indice i ou le rayon $\mathcal{R}_{S,i}$ est :

- *spectral* si $D_{S,i}(x, \mathcal{F}) \subseteq D(x)$;
 - *soluble* si $D_{S,i}(x, \mathcal{F}) = D(x)$;
 - *sur-soluble* si $D_{S,i}(x, \mathcal{F}) \supset D(x)$.
- (0.33)

Histoire du rayon de convergence. La Définition 1 est l'aboutissement d'une suite de définitions intermédiaires, et nous souhaitons signaler maintenant les différents acteurs qui ont contribué à l'étude du rayon de convergence.

Nous avons déjà cité [Dwo74], [Dwo73], [Rob75a], [Rob85]. Ajoutons à cette liste le papier [CD94] de Christol et Dwork, où la *variation* du rayon de convergence des solutions apparaît pour la première fois. Le rayon de convergence est considéré comme fonction sur le squelette analytique⁶ d'une couronne, qui est topologiquement un intervalle réel. Et on montre la continuité sur cet intervalle.

Toutes ces définitions ne parlent que du *plus petit* rayon de convergence $\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F})$ parmi les rayons de toutes les solutions de Taylor.⁷ Ce n'est que relativement récemment qu'on peut trouver dans [Ked10] une définition (provenant à l'origine d'un papier de P.Young [You92]) qui permet de contrôler la variation de *tous* les rayons des solutions, et pas seulement du *plus petit* rayon.

Les définitions précédentes sont liées à la *norme spectrale* de la connexion. Travailler avec la norme spectrale revient topologiquement à tronquer les rayons $\mathcal{R}_{S,i}$ par celui du disque $D(x)$. Autrement dit la correspondance entre les rayons $\mathcal{R}_{S,i}$ et les rayons spectraux n'est valable qu'à l'intérieur du disque générique $D(x)$. Or, la définition spectrale des rayons n'est la "*bonne définition*" que le long du squelette Γ_S , car par exemple elle vaut 0 sur chaque point rationnel (où la dérivation n'est pas continue).

La bonne définition (non normalisée) a été donnée par F.Baldassarri et L.Di Vizio dans [BV07] qui ont introduit les rayons sur-solubles, et qui ont montré la continuité du premier rayon $\mathcal{R}_{S,1}$. Cette définition a été ensuite reprise par F.Baldassarri dans [Bal10] avec la normalisation (0.30) qui permet de la recoller sur une courbe de Berkovich quasi-lisse X , et d'avoir la continuité.

La définition de [Bal10] fait intervenir des modèles formels de la courbe X , qui n'existent que sous des conditions appropriés. Nous avons obtenu dans [PP12b] la Définition 1, qui est essentiellement équivalente à celle de Baldassarri, mais qui remplace le choix du modèle par celui d'une *pseudo-triangulation*, qui est une notion complètement topologique. Cette définition a l'avantage pour nous

6. Le squelette analytique d'une courbe quasi-lisse X est l'ensemble des points n'ayant pas de voisinages isomorphes à un disque ouvert virtuel.

7. Pour travailler avec les rayons non minimaux des solutions il fallait des théorèmes de décomposition pour les exprimer comme "plus petits rayons" d'une sous-équation.

d’être valable pour toute courbe quasi-lisse X , et de ne pas nous faire sortir de la catégorie des courbes de Berkovich.

Graphes contrôlants.

Nous avons vu que le point de vue de Baldassarri [Bal10], combiné avec la bonne définition de Kedlaya-Young pour le contrôle des rayons supérieurs, est le plus approprié dans le cas des courbes. Après avoir montré la continuité du plus petit rayon $\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F})$, Baldassarri conjecture une propriété de continuité plus forte : ce rayon se factorise par un graphe localement fini sur lequel la courbe X se rétracte. Cela signifie “*grosso modo*” qu’il se comporte comme (l’inverse de) la norme d’une fonction analytique sur la courbe. Dans [Bal10], Baldassarri justifie sa conjecture à travers un exemple fourni par G.Christol en utilisant la formule (0.21).⁸

Dans [Pul12] et [PP12b] nous avons démontré que chaque rayon $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F})$ a cette propriété de finitude. Au lieu de montrer l’existence d’un graphe non spécifié, nous avons préféré donner la définition suivante qui nous a guidé :

DÉFINITION 2 ([Pul12],[PP13a]). *Soit \mathcal{T} un ensemble, et soit $f : X \rightarrow \mathcal{T}$ une fonction quelconque. Nous notons par $\Gamma_S(f)$ le complémentaire de la réunion des disques $D \subseteq X - \Gamma_S$ sur lesquels f est constante. Le lieu $\Gamma_S(f)$ s’appelle le graphe contrôlant de f .*

Le lieu $\Gamma_S(f)$ est toujours un graphe dans X , contenant Γ_S , dont l’intersection avec toutes les composantes connexes de X est connexe, et tel que $X - \Gamma_S(f)$ est une réunion disjointe de disques.

On peut voir que les rayons définis à l’aide de la norme spectrale comme dans [CD94] et [Ked10] ont un graphe contrôlant égal à X tout entier. En effet ils sont nuls sur tout point rationnel, et non constant sur un disque contenant le point. Donc ils ne sont constants sur aucun disque.

Notons par $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$ le graphe contrôlant de la fonction $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F})$.

THÉORÈME 7 ([Chr11],[Pul12],[PP12a],[PP12b]). *Soit K un corps complet par rapport à une valeur absolue ultramétrique $|\cdot|$. Soit X une courbe K -analytique de Berkovich qui est quasi-lisse, munie d’une pseudo-triangulation S , et soit \mathcal{F} une équation différentielle sur X .*

Alors les fonctions $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F})$ sont continues sur X , et le graphe $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$ est localement fini.

La continuité des rayons est une conséquence de la finitude locale des graphes $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$. La continuité est un ingrédient clé dans la preuve du théorème de décomposition global [PP13a]. D’autre part la finitude locale du graphe contrôlant représente un des points fondamentaux pour la finitude dimensionnelle de la cohomologie de de Rham [PP13b].

Des ingrédients essentiels pour le Théorème 7 sont le travail de Kedlaya [Ked10], et le travaux de Baldassarri-Di Vizio [BV07] et Baldassarri [Bal10]. Le travail de Kedlaya constitue un raffinement déterminant des idées classiques (ensemble à l’introduction de la notion cruciale de super-harmonicité), alors que le travail de Baldassarri est un changement de perspective qui a ouvert une nouvelle ligne d’investigation.

En plus de ce résultat de finitude nous obtenons également les propriétés suivantes, modelées sur l’exemple de [Ked10, Thm. 11.3.2], que nous ne détaillerons pas dans l’introduction (voir Théorème 10.2.6) :

- Propriété de log-affinité par morceaux des rayons ;
- Propriétés d’intégralité des pentes ;

8. Sous une forme plus implicite car la formule est arrivée plus tard le 28/02/2011 (voir Appendice A).

- Propriétés de super-harmonicité des hauteurs partielles du polygone.

Avec ces propriétés le Théorème 7 entraîne que le polygone de Newton des convergences est déterminé, en tant que fonction sur X , par une *famille localement finie de nombres*.

Nous signalons que les propriétés de *super-harmonicité*, qui jouent un rôle fondamental dans la preuve, ne sont (potentiellement) pas vérifiées en toute généralité, notamment en présence de rayons solubles, même pour des équations sans singularités sur un domaine aussi simples qu'un disque.

Cela représente probablement la difficulté majeure de [Pul12], où on démontre le théorème sur un domaine affinoïde de la droite avec des méthodes spécifiques aux équations différentielles p -adiques.

Dans [PP12b] on généralise le résultat au cas des courbes quasi-lisses, en utilisant des techniques provenant de la géométrie de Berkovich. Notamment on montre comment se réduire au cas de la droite avec des techniques de push-forward par un morphisme bien modéré. Une partie fondamentale de [PP12b] consiste à recréer avec le Théorème 6, dans le contexte des courbes de Berkovich quasi-lisses, la notion de *disque générique*, dans le sens original de Dwork et Robba.

La preuve de continuité du premier rayon $\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F})$ de [BV07] et [Bal10] utilise une technique, déjà utilisée par Christol-Dwork dans [CD94], qui est basée sur un résultat de Dwork-Robba [DR80] qui donne une borne à la croissance logarithmique au bord du disque de convergence de la résolvante :

$$Y(T, t) = \sum_{n \geq 0} G_n(t) \frac{(T - t)^n}{n!}, \quad (0.34)$$

où G_n est la matrice de ∇^n qui est donnée récursivement par $G_0 = \text{Id}$, $G_{n+1} = G'_n + G_n G$, où G est la matrice de la connexion ∇ . Malheureusement cette borne ne se généralise pas aux solutions individuelles de l'équation : elle ne tient compte que de l'ensemble de toutes les solutions. Pour cette raison la preuve de [CD94], [BV07] et [Bal10] ne se généralise pas (en l'état actuel) aux rayons supérieurs.

Dans [PP12a] nous avons donné une autre preuve basée sur la théorie du potentiel de [Thu05], qui montre la finitude seulement du premier rayon $\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F})$, et pour les courbes sans bord. En effet les points au bord se comportent comme s'il leur manquait des directions sortantes, et la théorie du potentiel ne donne rien en ces points. Dans la preuve de [PP12a] nous avons utilisé, comme [BV07] et [Bal10] l'expression explicite (locale) d'Hadamard provenant de (0.34)

$$\mathcal{R}_{S,1}(x, \mathcal{F}) = \liminf_n (|G_n(x)|/|n!|)^{-1/n}. \quad (0.35)$$

Signalons que peu de temps après, Kedlaya [Ked13] a obtenu une autre preuve de la finitude des graphes contrôlants plus courte, avec les mêmes méthodes. Son papier contient également le fait remarquable que les graphes $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$ n'ont pas de point de type 4, et cela demande une classification fine des équations solubles sur l'anneau de Robba à la quelle la première partie de son papier est vouée.

Pour terminer cette section nous souhaitons revenir à la discussion heuristique sur la convergence des solutions des équations sur les nombres complexes. Nous souhaitons préciser que les graphes $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$ ne représentent pas l'*obstruction à la convergence* des solutions, mais c'est plutôt l'objet géométrique qui en *contrôle la variation*. Par exemple l'équation $y' = y$, définie sur un disque D , donne un rayon *constant*, pour lequel le graphe contrôlant est vide (si $S = \emptyset$).

Décomposition globale.

D'après une idée originairement due à Dwork, si une équation différentielle a deux solutions avec des rayons de convergence différents, cela doit correspondre à une factorisation de l'équation en des sous-équations qui contrôlent chacune une des solutions. Les théorèmes de décompositions sont un

outil central dans la classification des équations différentielles. Par exemple ce sont le premier point pour le théorème de monodromie locale p -adique, dont nous avons parlé en (0.3).

Les contributions aux théorèmes de décomposition sont dues à Robba [Rob75a], [Rob75b], [Rob80], Dwork-Robba [DR77], Christol-Mebkhout [CM00], Kedlaya [Ked10], [Ked13]. Signalons aussi la décomposition [DMR07, p. 97-107], [Lev75], et [Ram78], par les pentes formelles d'une équation sur un corps de séries formelles $K((T))$, dont nous avons parlé en (0.1). Et nous conseillons la lecture du papier [And09] pour avoir une approche générale plus Tannakienne.

Il y a très peu d'exemples de théorèmes de décomposition par les rayons de convergence qui soient de nature globale. Principalement on a des résultats sur des disques ou couronnes, et avec des conditions restrictives (par exemple nous signalons [Ked10, Chapitre 12]). Une bonne partie de la littérature est concentrée sur deux situations : les équations différentielles sur un germe de disque épointé, ou sur l'anneau de Robba. Du point de vue de Berkovich cela correspond à un germe de segment sortant d'un point rationnel, ou d'un point de type 2 ou 3.

Dans [PP13a] nous avons obtenu un théorème de décomposition général de nature globale pour les courbes de Berkovich qui marche sans hypothèse particulière (solubilité, Frobenius, exposants, harmonicité ...). Il s'agit d'un résultat de nature pré-cohomologique.

THÉORÈME 8. *Soit \mathcal{F} une équation différentielle de rang r sur une courbe connexe quasi-lisse de Berkovich X . Soit $i \in \{2, \dots, r\}$. Supposons que pour tout $x \in X$ on ait*

$$\mathcal{R}_{S,i-1}(x, \mathcal{F}) < \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}). \quad (0.36)$$

Alors il existe une unique sous-équation $\mathcal{F}_{\geq i} \subseteq \mathcal{F}$ de rang $r - i + 1$, et une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{\geq i} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{< i} \rightarrow 0 \quad (0.37)$$

telle que pour tout $x \in X$ on a

$$\mathcal{R}_{S,j}(x, \mathcal{F}) = \begin{cases} \mathcal{R}_{S,j}(x, \mathcal{F}_{< i}) & \text{if } j = 1, \dots, i-1 \\ \mathcal{R}_{S,j-i+1}(x, \mathcal{F}_{\geq i}) & \text{if } j = i, \dots, r. \end{cases} \quad (0.38)$$

De plus $\mathcal{F}_{\geq i}$ est indépendante de S dans le sens suivant si l'hypothèse (0.36) est vraie aussi pour une autre pseudo-triangulation S' , alors le sous-objet $\mathcal{F}_{\geq i}$ est le même pour les deux pseudo-triangulations.

Les théorèmes de décomposition préexistants de nature locale que nous avons évoqué, donnent tous une décomposition en somme directe. Dans le cas global, la suite (0.37) n'est pas scindée en général, on a des contre-exemples explicites (sur un disque). La raison est liée au fait que les rayons $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F})$ ne sont pas compatibles à la dualité en dehors de Γ_S .

Le théorème suivant donne deux critères pour garantir une décomposition en somme directe, dont le point ii) est complètement topologique.

THÉORÈME 9. *Le terme $\mathcal{F}_{\geq i}$ est un facteur direct dans les situations suivantes :*

- i) *La propriété (0.36) est valable pour l'indice i de \mathcal{F} et de son dual \mathcal{F}^* , et la courbe X n'est pas un disque avec triangulation vide. Soit X est un disque avec triangulation vide mais alors il existe un point x tel que $\mathcal{R}_{S,i-1}(x, \mathcal{F})$ est spectral non soluble en x ;*
- ii) *On a*

$$\left(\Gamma_{S,1}(\mathcal{F}) \cup \dots \cup \Gamma_{S,i-1}(\mathcal{F}) \right) \subseteq \Gamma_{S,i}(\mathcal{F}). \quad (0.39)$$

Dans les deux cas $(\mathcal{F}_{\geq i})^$ est isomorphe à $(\mathcal{F}^*)_{\geq i}$ et c'est un facteur direct de \mathcal{F}^* .*

Un corollaire aux théorèmes précédents est le suivant :

THÉORÈME 10. *Supposons que X soit la courbe de Tate, ou que $p \neq 2$ et que X soit une courbe elliptique avec bonne réduction. Soit S est une triangulation de X formée par un unique point. Alors toute équation différentielle \mathcal{F} sur X vérifie :*

- i) *Pour tout i le rayon $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F})$ est constant sur X . En particulier $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F}) = \Gamma_S$;*
- ii) *Nous avons une décomposition en somme directe*

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{0 < \rho \leq 1} \mathcal{F}^\rho \quad (0.40)$$

où $\mathcal{R}_{S,j}(-, \mathcal{F}^\rho) = \rho$ pour tout $j = 1, \dots, \text{rank}(\mathcal{F}^\rho)$.

La preuve du Théorème 8 consiste à recoller des décompositions locales. Notamment Dwork-Robba ont obtenu un théorème de factorisation par les rayons *spectraux* pour les modules différentiels sur l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_K^{1,\text{an}},x}$ d'un point $x \in \mathbb{A}_K^{1,\text{an}}$ de type 2. La preuve originaire de Dwork-Robba utilise une technique remarquablement sophistiquée de factorisation d'opérateurs différentiels qui permet d'exprimer le facteur relatif à $\mathcal{F}_{\geq i}$ comme un point fixe par rapport à une certaine contraction.

Nous avons repris et généralisé la preuve de Dwork-Robba à tout point 2, 3, ou 4 de la courbe X . Notamment aux points pour lesquels la courbe \mathcal{C}_x a genre positif. Ensuite nous avons *augmenté* cette décomposition, en additionnant les sous-modules triviaux engendrés par les solutions *sursolubles* qu'on ne voit pas avec la décomposition spectrale.

Cette décomposition augmentée se recolle sans obstruction sur X tout entier par *continuité*. On utilise notamment la continuité de chaque $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F})$ qui est conséquence de la finitude locale de $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$.

Super-harmonicité et nombre d'arêtes des graphes contrôlants.

Dans quelques paragraphes on va parler de cohomologie. On verra que :

- i) les graphes $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$ sont assimilables à un lieu singulier pour \mathcal{F} ;
- ii) la super-harmonicité des hauteurs partielles intervient de manière cruciale pour le calcul de la cohomologie.

Dans cet esprit dans la deuxième partie de [PP13a] nous avons cherché à donner des conditions opérationnelles pour décrire les graphes $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$, de manière aussi à tester les conditions des théorèmes précédents.

Avec des méthodes pre-cohomologiques, nous avons localisé le lieu de non super-harmonicité, et ensuite nous sommes parvenus à donner une borne $B_{S,i}(\mathcal{F})$ du nombre global d'arêtes de chaque graphe $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$. Si $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$ est assimilable à un lieu singulier pour \mathcal{F} , cette borne est assimilable à une mesure de la complexité de ce lieu singulier.

La borne est un nombre trop compliqué pour être raconté dans l'introduction, nous signalons seulement qu'elle dépend du nombre de points où la super-harmonicité n'est pas vérifiée. Nous décrivons cela avec l'énoncé simplifié suivant :

THÉORÈME 11. *Le nombre d'arêtes de $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$ est borné par un nombre $B_{S,i}(\mathcal{F})$ qui dépend des quantités suivantes :*

- i) *du nombre d'arêtes de Γ_S ,*
- ii) *du nombre d'arêtes des $\Gamma_{S,j}(\mathcal{F})$ pour $j \leq i - 1$ (si $i = 1$ alors $\Gamma_{S,0} := \Gamma_S$),*
- iii) *du nombre de points n'appartenant pas à l'ensemble des sommets V_j d'un des graphes $\Gamma_{S,j}(\mathcal{F})$, $j \leq i - 1$, où la super-harmonicité de $H_{S,i}(-, \mathcal{F})$ n'est pas vérifiée,*

iv) du Laplacien de $H_{S,i}(x, \mathcal{F})$ en les sommets V_j , pour tout $j \leq i - 1$, et en les points décrits au iii).

Le contrôle du lieu de non super-harmonicité est un ingrédient important de la preuve. Pour cela nous avons démontré le résultat suivant comme conséquence des théorèmes de décomposition locale de Dwork-Robba, et du théorème de Riemann-Hurwitz pour les courbes résiduelles \mathcal{C}_x .

Nous allons utiliser une condition technique (TR) que nous ne détaillerons pas dans l'introduction. Mentionnons seulement qu'elle est automatiquement vérifiée si $p \neq 2$ ou si $g(x) = 0$, en particulier les points de type 1, 3, 4 satisfont toujours l'hypothèse (TR).

Rappelons également que pour tout $x \in X$ le Laplacien $dd^c F(x)$ d'une fonction positive $F : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ est pour nous la somme des pentes $\partial_b F(x)$ de la fonction composée $\log \circ F$ le long de toutes les directions b sortantes de x , orientées vers l'extérieur de x . Si F est continue et si elle se factorise par la rétraction de X sur un sous graphe localement fini, alors ces pentes sont presque toutes nulles et le Laplacien est bien défini. La fonction est super-harmonique en x si $dd^c F(x) \leq 0$.

Finalement, si $x \in S$ et si K est algébriquement clos, nous posons

$$\chi(x, S) := (2 - 2g(x) - N_S(x)) , \quad (0.41)$$

où $N_S(x)$ est le nombre d'arêtes du squelette Γ_S sortants de x . C'est la caractéristique d'Euler à support compact (au sens de la cohomologie étale) d'un certain ouvert de \tilde{V}_x (cf. (0.26)). De manière informelle, on peut l'imaginer comme le plus grand ouvert de \tilde{V}_x qui ne rencontre pas d'autres composantes irréductibles de la réduction \tilde{X} du modèle formel de X associé à S , quand celui ci existe. Cette définition peut se descendre à tout corps.

THÉORÈME 12 (Super-harmonicité). *Pour tout $i = 1, \dots, r$ la hauteur partielle $H_{S,i}$ est super-harmonique en dehors d'un ensemble localement fini de points $S \cup \mathcal{C}_{S,i}(\mathcal{F})$, où $\mathcal{C}_{S,i}(\mathcal{F}) \subset X - \Gamma_S$.*

De plus, si $x \in S$ vérifie la condition (TR), alors on a

$$dd^c H_{S,i}(x, \mathcal{F}) \leq -\chi(x, S) \cdot \max(i, i_x^{\text{sp}}) . \quad (0.42)$$

où $0 \leq i_x^{\text{sp}} \leq \text{rank}_x(\mathcal{F})$ est le plus grand indice spectral non soluble en x .

Finalement si $\mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}) < \mathcal{R}_{S,i+1}(x, \mathcal{F})$, et si aucun indice $j \leq i$ n'est soluble en x , alors $dd^c H_{S,i}(x, \mathcal{F}) = 0$ si $x \notin S$, et on a égalité dans (0.42) si $x \in S$.

Les énoncés de super-harmonicité précédents sont dans [Ked10, Thm. 11.3.2] pour les couronnes et pour des rayons spectraux non solubles, dans [Pul12, Thm. 3.3.4] pour des domaines affinoïdes de la droite affine, et dans [Ked13, Thm. 5.3.6] pour les courbes et pour les rayons spectraux non solubles, avec une preuve différente (notre preuve utilise de manière essentielle la décomposition).

Nous arrivons aussi à donner des propriétés restrictives du lieu $\mathcal{C}_{S,i}(\mathcal{F}) \subset X - \Gamma_S$. Une de ces propriétés est qu'au moins un rayon doit être soluble en les points de $\mathcal{C}_{S,i}(\mathcal{F})$. En particulier nous montrons que le premier rayon est super-harmonique en dehors de S , et pour ce rayon nous avons dégagé un fait remarquable : pour les courbes projectives, lisses, et géométriquement connexes, de genre $g \geq 1$, nous avons une borne *inconditionnelle* du nombre d'arêtes de $\Gamma_{S,1}(\mathcal{F})$ qui ne dépend que de X et du rang de \mathcal{F} .

THÉORÈME 13. *Soit X une courbe projective, lisse, et géométriquement connexe, de genre $g \geq 1$. Soit \mathcal{F} une courbe de rang r sur X . Soit E_S le nombre d'arêtes de Γ_S . Alors le nombre d'arêtes de $\Gamma_{S,1}(\mathcal{F})$ est au plus*

$$E_S + 4r(g - 1) . \quad (0.43)$$

Théorèmes d'indice locaux et globaux.

Sous une condition d'exposants non Liouville, nous avons obtenu dans [PP13b] des critères nécessaires et suffisants pour qu'une équation différentielle \mathcal{F} sur une courbe quasi lisse de genre fini X ait une cohomologie de de Rham de dimension finie. Et nous avons donné des techniques utiles pour traiter le cas de genre infini.

Du point de vue de Berkovich, les résultats de finitude dimensionnelle de l'indice de [CM00] et [CM01] sont de nature *locale*, et sont soumis à une condition de solubilité.

Nous généralisons ces résultats locaux au cas non soluble, grâce au théorèmes de finitude locale 7, et de décomposition locale 8 et 9. Ensuite nous les globalisons à l'aide de la suite de Mayer-Vietoris, et à l'aide d'un théorème (basé sur un principe déjà utilisé par Christol et Mebkhout sur les couronnes) qui permet d'exprimer la cohomologie d'une équation comme limite de ses restrictions à une suite de domaines convenables.

Finalement, pour les courbes de genre fini, on donne un critère nécessaire et suffisant pour que la cohomologie de de Rham soit de dimension finie.

Si de plus le squelette de X est fini (i.e. homéomorphe à une réunion finie de segments), on définit la classe des équations *finiment contrôlées* pour lesquelles on arrive à obtenir une formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevich pour l'indice globale.

Comme corollaire nous appliquons la formule d'indice, dans sa forme locale, à l'harmonicité et, sous certaines conditions techniques, nous montrons que les hauteurs partielles du polygone de Newton sont super-harmoniques en dehors de S .

Signalons que des résultats semblables ont été annoncés récemment aussi par F.Baldassarri et K.S.Kedlaya. Notamment ce programme a été initié par F.Baldassarri qui en a tracé les contours, et qui a indiqué les directions générales d'une stratégie pour obtenir une preuve, dans des exposés entre 2011 et 2013.

REMARQUES 1. *À l'heure actuelle nous avons encore à l'étude les résultats de cette section, car nous cherchons à les généraliser. Il est clair en effet que le cadré présenté dans ce mémoire ne couvre pas complètement le spectre des applications possibles des méthodes que nous avons développées.*

La descente des constantes. Nous souhaitons commencer par un résultat de descente des constantes :

THÉORÈME 14. *Soit L/K est une extension où les deux corps sont complets non trivialement valués. Soit X une courbe quasi-Stein ou compacte, et \mathcal{F} une équation différentielle sur X . Alors on a*

$$H_{\text{dR}}^0(X, \mathcal{F}) \widehat{\otimes}_K L = H_{\text{dR}}^0(X_L, \mathcal{F}_L). \quad (0.44)$$

De plus $H_{\text{dR}}^1(X, \mathcal{F})$ est fini dimensionnel si et seulement si $H_{\text{dR}}^1(X_L, \mathcal{F}_L)$ l'est, et dans ce cas on a aussi

$$H_{\text{dR}}^1(X, \mathcal{F}) \widehat{\otimes}_K L = H_{\text{dR}}^1(X_L, \mathcal{F}_L). \quad (0.45)$$

De plus, si K est trivialement valué, mais pas L , alors, sous l'hypothèse que $H_{\text{dR}}^i(X_L, \mathcal{F}_L)$ est de dimension finie, on a (0.44) et (0.45).

Ce résultat n'est pas immédiat comme en géométrie algébrique, car le produit tensoriel est *complété*, et l'extension des scalaires $-\widehat{\otimes}_K$ n'est pas "plate". Il faut notamment des résultats fins d'analyse sur les espaces de Fréchet ultramétriques [Sch02] qui nous ont conduit à introduire la catégorie des *espaces Banachoides*, et à généraliser les résultats de Gruson [Gru66] sur les espaces de Banach dont nous avons tiré largement profit.

Nous n'avons pas d'exemples de courbes de genre fini qui ne sont ni quasi-Stein, ni compactes. Par ailleurs par un résultat de [Liu87], si K est algébriquement clos, des telles courbes n'existent pas.

Nous supposons donc à partir de maintenant que le corps K est algébriquement clos, sphériquement complet, et de groupe des valeurs égal à $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Cette hypothèse sur K nous permet, entre autre, d'éviter l'étude de la cohomologie locale autour des points de type 4, car ces points disparaissent par extension de scalaires. Notamment une des avancées de [Ked13] a été de démontrer que les points de type 4 n'appartiennent pas aux graphes contrôlants, et F.Baldassarri nous a expliqué que cela était initialement supposé être utile (entre autres) pour éviter de donner des théorèmes d'indice locale autour de ces points.

Le théorème d'indice local de Christol-Mebkhout. Le but de la cohomologie rigide est d'associer une catégorie de coefficients à toute variété de caractéristique positive, de sorte à ce que la théorie cohomologique sur ces coefficients soit une cohomologie de Weil.

Les acteurs qui ont contribué à l'évolution de cette théorie sont nombreux, nous en citons seulement une petite partie : [MW68], [Ado76], [Dwo82a], [Bal87], [CM93], [CM97], [CM00], [CM01], [Rob75a], [Rob76], [Rob84], [Rob85]. Pour les références à la cohomologie rigide (en relation à ce papier) nous mentionnons juste [Cre98] et [Ked06], et nous renvoyons le lecteur à leur bibliographie pour avoir un cadre plus complet.

Dans notre contexte la cohomologie rigide intervient localement sur la courbe de Berkovich X . Notamment le théorème d'indice de Christol-Mebkhout [CM01] est un théorème d'indice local autour d'un point de type 2 de la courbe X . Nous l'avons généralisé dans la forme suivante

THÉORÈME 15 ([CM01], [PP13b]). *Soit x un point de S qui a la propriété (TR). On note $\text{Sing}(x, \mathcal{F})$ l'ensemble des directions sortantes de x appartenant à $\Gamma_S(\mathcal{F}) = \cup_i \Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$. Soit V un domaine affinoïde connexe de X tel que $V - \{x\}$ est une réunion disjointe de disques qui n'intersectent pas $\Gamma_S(\mathcal{F})$. Supposons que \mathcal{F} soit libre de nombres de Liouville le long des germes de segments sortants de x appartenant à $\Gamma_S(\mathcal{F})$. Alors la cohomologie de de Rham surconvergente $H_{\text{dR}}^i(V^\dagger, \mathcal{F})$ est de dimension finie et on a la formule d'indice suivante*

$$\chi_{\text{dR}}(V^\dagger, \mathcal{F}) = \chi_c(V^\dagger) \cdot \text{rang}_x(\mathcal{F}) - \sum_{b \in \text{Sing}(x, V)} \text{Irr}_b(\mathcal{F}), \quad (0.46)$$

où $\chi_c(V^\dagger)$ coïncide avec la caractéristique d'Euler à support compact de la réduction $\tilde{V} \subset \mathcal{C}_x$, et $\text{Irr}_b(\mathcal{F})$ est la pente logarithmique $-\partial_b H_{\emptyset, r}(x, \mathcal{F}|_{C_b})$ de la hauteur totale le long de la direction b (orientée vers l'extérieur de x), après localisation à un germe de couronne C_b de squelette b .

Ce théorème est du à Robba [Rob85] pour des équations de rang un à coefficients rationnels sur la droite affine $X = \mathbb{A}_K^{1, \text{an}}$. C'est notamment Robba qui a découvert que l'irrégularité p -adique se mesure avec les pentes des rayons de convergence dans les directions sortantes de x .

Le résultat de Robba a été précisé et complété par G.Christol et Z.Mebkhout dans le contexte de la cohomologie rigide [CM00], [CM01], sous la condition que tous les rayons sont solubles en x .

C'est finalement F.Baldassarri qui a deviné que l'énoncé de Christol et Mebkhout pouvait s'interpréter dans le contexte de Berkovich.

Notre contribution dans ce cadre a été celle d'enlever l'hypothèse de solubilité.

Nous souhaitons maintenant mettre en évidence certains points. Les *isocristaux surconvergents* sur \tilde{V} de la cohomologie rigide sont des équations différentielles sur V satisfaisants 2 conditions :

- i) elles ont des *coefficients surconvergents*,
- ii) les rayons de ces équations en x sont tous *solubles*.

Parfois ces conditions sont accompagnés d'un Frobenius, qui entraîne la solubilité et qui ne joue aucun rôle dans notre contexte.

L'idée de la surconvergence vient de Dwork, et elle est nécessaire pour la finitude dimensionnelle de la cohomologie. Par exemple l'équation triviale sur un disque fermé a une cohomologie de dimension infinie. Dwork alors propose de remplacer le disque fermé par un disque ouvert non précisé qui le contient.

La notion de solubilité est naturellement satisfaite en présence d'un Frobenius, cette hypothèse est donc utilisé assez uniformément dans la littérature depuis la naissance de cette théorie. Toutefois le concept de solubilité a été isolé, avec toute probabilité, par P.Robba dans [Rob85] où Robba montre qu'une équation de rang un dont le rayon est spectral non soluble a une cohomologie de de Rham locale nulle en tout degré.

La condition i) signifie précisément que les équations de la cohomologie rigide sont définies sur un voisinage ouvert U non spécifié de V dans X . On montre que les groupes de cohomologie de de Rham $H_{\text{dR}}^i(U, \mathcal{F})$ sont indépendants de U , lorsque celui ci est suffisamment proche de V . On note alors $H_{\text{dR}}^i(V^\dagger, \mathcal{F}) := H_{\text{dR}}^i(U, \mathcal{F})$.

La condition ii) entraîne alors, par les propriétés d'harmonicité du premier rayon (cf. Théorème 12), que tous les rayons sont constants sur V de valeur maximale 1. Quitte à rétrécir U , l'ouvert complémentaire $U - V$ est une réunion finie disjointe de couronnes ouvertes, dont les squelettes forment une étoile Γ centrée en x . Les rayons peuvent varier seulement sur ces germes de couronnes. Et donc, par le Théorème de finitude 7, pour tout i on a $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F}) = \Gamma$ autour de x .

Le Théorème 15 généralise l'énoncé de Christol et Mebkhout par le fait qu'on considère des équations différentielles arbitraires, en supprimant l'hypothèse de solubilité en x . La preuve utilise la finitude locale de $\Gamma_S(\mathcal{F})$ (cf. Théorème 7) de manière essentielle. Par la décomposition locale (cf. Théorèmes 8 et 9) on sépare la partie soluble de celle spectrale non soluble, et on utilise le Théorème 12 d'harmonicité pour calculer les contributions des irrégularités de la partie non soluble. Finalement on montre que la partie non soluble n'a pas de cohomologie et on utilise le résultat d'indice de [CM01] pour la partie soluble.

Graphes contrôlants et lieu singulier. La nouveauté du Théorème 15 par rapport à l'énoncé de Christol-Mebkhout est l'apparition de nouvelles *directions singulières*. Plus précisément dans le contexte de la cohomologie rigide on part de l'ouvert $\tilde{V} \subset \mathcal{C}_x$ et les équations qu'on regarde (les isocristaux surconvergents) sont automatiquement définies sur $V \subseteq X$, et leur *directions singulières* sont les directions sortantes de x qui n'appartiennent pas à V . Par la bijection (0.26) on peut les voir comme les points de $\mathcal{C}_x - \tilde{V}$: ce sont les singularités de l'isocristal en cohomologie rigide.

Dans le contexte plus général du Théorème 15 les directions singulières sont les directions sortantes de x appartenant à $\Gamma_S(\mathcal{F})$. Selon ce point de vue la famille des arêtes de $\Gamma_S(\mathcal{F})$ est assimilable à un lieu singulier pour l'équation. Et alors le Théorème 11 donne en quelque sorte une borne supérieure à la taille de ce lieu singulier. Nous avons vu que cette taille est liée à la super-harmonicité.

Motivés par ces considérations nous avons donné dans [PP13b] plusieurs énoncés/critères de super-harmonicité qui utilisent la dualité de Dwork et l'indice généralisé de Robba-Christol-Mebkhout, combinés au Théorème 15. Nous signalons seulement l'énoncé suivant

THÉORÈME 16. *Soit $x \in X - \Gamma_S$ (notamment $x \in \mathcal{C}_{S,r}(\mathcal{F})$). Supposons que \mathcal{F} soit libre de nombres de Liouville le long des germes de segments sortants de x appartenant à $\Gamma_S(\mathcal{F})$.*

Soit D_x le disque fermé de bord x tel que $D_x \cap \Gamma_S = \emptyset$. Si x est un point de type 2 ou 3 supposons de plus qu'il existe un domaine affinoïde connexe $V \subseteq D_x$ tel que

- i) $V - \{x\}$ est une réunion disjointe de disques ouverts qui n'intersectent pas $\Gamma_S(\mathcal{F})$;
- ii) L'inclusion canonique $H_{\text{dR}}^0(D_x^\dagger, \mathcal{F}) \subseteq H_{\text{dR}}^0(V, \mathcal{F})$ est une égalité;
- iii) Pour tout $i = 1, \dots, \text{rank}(\mathcal{F})$, on a $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F}) = \mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F}^*)$ sur D_x .

Alors pour tout i la hauteur partielle $H_{S,i}(x, \mathcal{F})$ est super-harmonique en x .

Le théorème d'indice global. Le résultat principale de [PP13b] est un critère nécessaire et suffisant pour la finitude dimensionnelle de la cohomologie de de Rham globale de \mathcal{F} , et une formule d'indice de nature globale, sans hypothèse de surconvergence ou solubilité.

C'est un résultat qui ne se simplifie pas même pour des équations sur un domaine aussi simple qu'un disque ouvert, et même pour des équations de rang un, dont on connaît totalement les rayons par le Théorème 5.

Le Théorème 15 d'indice locale de Christol-Mebkhout, a conduit F.Baldassarri à conjecturer dans des exposés récents un lien entre la finitude globale des graphes contrôlants et la finitude dimensionnelle de la cohomologie de de Rham.

Cette conjecture a été pour nous un puissant moteur, mais on a montré finalement que ce lien n'est vrai qu'en partie. En effet le critère de finitude dimensionnelle qu'on trouve nous montre qu'il existe des exemples d'équations différentielles sur un *disque ouvert*, dont la cohomologie de de Rham est de dimension finie, et qui ont des graphes contrôlants $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$ avec une infinité de points de bifurcation, et ce pour tout i (cf. Section 15.4). Le fait que les graphes contrôlants soient globalement finis (dans un sens que nous allons préciser ci plus bas), *n'est qu'une condition suffisante*, qui nous semble également moins facile à tester que l'énoncé que nous avons obtenu, lequel ne fait intervenir que des points du squelette Γ_S et uniquement les pentes de la hauteur totale $H_{S,r}(-, \mathcal{F})$ le long de Γ_S (cf. Théorème 19 ci plus bas).

Avant d'en donner l'énoncé, nous avons besoin de préciser certains points.

Un résultat de Q.Liu [Liu87] affirme que si le corps K est algébriquement clos, toute courbe de genre fini est soit projective soit quasi-Stein. Nous nous concentrons sur le cas quasi-Stein car le cas projectif est "*classique*" et peut même se déduire du cas quasi-Stein en utilisant la suite de Mayer-Vietoris.

Par ailleurs, si la courbe est quasi-Stein de genre arbitraire, le théorème suivant nous permet dans des certains contextes de nous réduire au cas quasi-Stein de genre fini.

THÉORÈME 17. *Soit X une courbe connexe quasi-lisse et quasi-Stein. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante admissible de domaines analytiques connexes quasi-Stein qui sont relativement compacts dans X tels que $X = \cup_{n \geq 0} X_n$, la restriction $\mathcal{O}(X_{n+1}) \rightarrow \mathcal{O}(X_n)$ a une image dense, et la cohomologie de de Rham $H_{\text{dR}}^i(X_n, \mathcal{F}|_{X_n})$ est de dimension finie. Alors*

- i) *il existe m tel que $H_{\text{dR}}^0(X, \mathcal{F}) = H_{\text{dR}}^0(X_n, \mathcal{F}|_{X_n})$ pour tout $n \geq m$;*
- ii) *on a*

$$H_{\text{dR}}^1(X, \mathcal{F}) = \varprojlim_n H_{\text{dR}}^1(X_n, \mathcal{F}|_{X_n}) \tag{0.47}$$

et pour tout n la flèche $H_{\text{dR}}^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{dR}}^1(X_n, \mathcal{F}|_{X_n})$ est surjective.

En particulier $H_{\text{dR}}^1(X, \mathcal{F})$ est de dimension finie si et seulement si la suite des dimensions $(h_{\text{dR}}^1(X_n, \mathcal{F}|_{X_n}))_{n \geq 0}$ (ou de manière équivalente la suite d'indices $(\chi_{\text{dR}}(X_n, \mathcal{F}_n))_{n \geq 0}$) est constante pour tout n assez grand.

Le théorème est essentiellement dû à Christol et Mebkhout qui l'ont utilisé dans le cas des couronnes [CM00]. Les techniques sont basées sur deux principes : un passage à la limite qui se trouve dans [Gro61] et qui est dû à Grothendieck [Gro54], et le fait que les espaces de Fréchet jouissent de la propriété de Banach [CM95], à savoir que toute application linéaire continue dont le conoyau est de dimension finie est stricte.

Équations finiment contrôlées. Nous dirons que la pseudo-triangulation S est *adaptée* à \mathcal{F} si Γ_S rencontre toutes les composantes connexes de X , et si les rayons de \mathcal{F} sont *log-affines* sur tout arête de $\Gamma_S - S$. Cette condition ne regarde que les arêtes de Γ_S , et il est clair que toute pseudo-triangulation S se prolonge en une pseudo-triangulation S' adaptée à \mathcal{F} .

DÉFINITION 3 (Condition non Liouville). *Soit S une triangulation de X adaptée à \mathcal{F} . Nous dirons que \mathcal{F} est libre de nombres de Liouville le long de Γ_S si toutes les arêtes de Γ_S et aussi de $\Gamma_S(\mathcal{F})$ sortant d'un point de S contiennent un germe de segments qui est le squelette d'un germe de couronne ouverte (i.e. un anneau de Robba) sur laquelle \mathcal{F} satisfait la condition (NL) de [CM01].*

DÉFINITION 4. *Nous dirons que l'équation \mathcal{F} est finiment contrôlée s'il existe une pseudo-triangulation adaptée à \mathcal{F} qui est finie.*

La condition entraîne en particulier que X n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

Notons par $g(X)$ le genre de Liu de X , et notons par $\partial^\circ X$ la famille des germes de segments non relativement compacts dans X . Par exemple si X est un disque ouvert (resp. une couronne ouverte), alors $\partial^\circ X$ a un élément (resp. deux éléments). Si (après extension à la clôture algébrique) le cardinal de $\partial^\circ X$ est fini, nous le notons par $N(X)$. Dans ce cas nous posons

$$\chi_c(X) := 2 - 2g(X) - N(X). \quad (0.48)$$

Si $b \in \partial^\circ X$ est un germe de segment à l'infini correspondant à un germe de pseudo-couronne C_b , alors on pose

$$\text{Irr}_b(\mathcal{F}) = -\partial_b H_{0,r}(-, \mathcal{F}|_{C_b}) \quad (0.49)$$

où r est le rang de \mathcal{F} , $\partial_b H_{0,r}(-, \mathcal{F}|_{C_b})$ est la pente sur b de la hauteur totale après localisation à C_b , et b est orienté vers l'intérieur de X .

Un premier théorème globale est le suivant, qui constitue l'analogie de la formule d'indice de P.Deligne pour les équations différentielles à coefficients méromorphes sur les courbes [Del70, 6.21] (voir également [Kat90, (2.9.8.2)] et [Mal74]) :

THÉORÈME 18. *Supposons X connexe et soit r le rang de \mathcal{F} . Supposons de plus que*

- i) *tout point de $S - \partial X$ de type 2 satisfait la condition (TR) ;*
- ii) *\mathcal{F} est finiment contrôlée sur X ;*
- iii) *\mathcal{F} est libre de nombres de Liouville le long de Γ_S ;*
- iv) *les rayons $\mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F})$ de \mathcal{F} sont tous spectraux non solubles en chaque point de ∂X .*

Alors la cohomologie de de Rham de \mathcal{F} est de dimension finie et nous avons la formule d'indice suivante

$$\chi_{\text{dR}}(X, \mathcal{F}) = \chi_c(X) \cdot \text{rank}(\mathcal{F}) - \text{Irr}_X(\mathcal{F}), \quad (0.50)$$

où

$$\text{Irr}_X(\mathcal{F}) = \sum_{x \in \partial X} [dd^c H_{S,r}(x, \mathcal{F}) + r \cdot \chi(x, S)] - \sum_{b \in \partial^\circ X} \text{Irr}_b(\mathcal{F}). \quad (0.51)$$

La preuve de ce théorème se réduit par une suite de Mayer-Vietoris aux théorèmes d'indice suivants, qui ont un caractère plus locale :

- i) le Théorème 16 d'indice local de Christol-Mebkhout sur les *points de* $S - \partial X$;
- ii) le Théorème d'indice sur un *disque ouvert, et rayons log-affines au bord* ;
- iii) le Théorème d'indice sur une *couronne ouverte, et rayons log-affines* ;
- iv) Le Théorème d'indice sur un *point à la frontière* ∂X *de* X , *et tous les rayons spectraux non solubles en* x .

Nous ne détaillerons pas ces théorèmes dans l'introduction. Le trois premiers sont dus à Christol et Mebkhout sous une condition de solubilité pour des équations sur l'anneau de Robba. Nous les généralisons grâce au Théorème de finitude locale 7, et au Théorème de décomposition locale 8. Nous mentionnons juste le fait que le Théorème d'indice sur un disque du point ii) se démontre avec des techniques d'*indice généralisé* comme dans [CM00], et il est basé sur des méthodes de perturbations compactes en analyse p -adique.

Équations non finiment contrôlées. Si la courbe X est de genre fini, Γ_S n'est pas forcément *topologiquement fini* (i.e. une réunion finie d'intervalles). Par exemple on peut avoir un disque ouvert privé des zéros d'une fonction analytique non bornée.

L'hypothèse principale du Théorème 18 consiste à demander que \mathcal{F} soit finiment contrôlée. Cela entraîne que X est de genre fini, et aussi que les graphes Γ_S et $\Gamma_S(\mathcal{F}) = \cup_i \Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$ sont topologiquement finis. C'est donc une condition assez restrictive, que nous ne faisons que de manière auxiliaire dans [PP13b]. Notamment cette hypothèse est automatiquement vérifiée sur des ouverts relativement compacts de X obtenus en sectionnant la courbe de manière appropriée le long de Γ_S (i.e. en prenant l'image inverse par la rétraction de certaines partitions de Γ_S). C'est en exprimant X comme réunion croissante de ces ouverts, et en utilisant le Théorème 17, qu'on obtient le théorème plus fin suivant qui donne une condition nécessaire et suffisante pour la finitude dimensionnelle de la cohomologie.

Pour $x \in S - \partial X$ nous posons

$$\chi(x, S, \mathcal{F}) := \chi(x, S) - \sum_b \text{Irr}_b(\mathcal{F}) \in \mathbb{Z}, \quad (0.52)$$

où b parcourt les directions sortantes de x appartenant à Γ_S .

Nous notons par $\mathcal{D}_{\partial X}$ la famille des disques ouverts dans X dont la frontière est un point de ∂X . Nous notons par b_D le germe de segment sortant de ∂X contenu dans D .

THÉORÈME 19. *Soit* X *une courbe de genre fini n'ayant qu'un nombre fini de composantes connexes, et telle que ces dernières soient toutes non propres. Supposons que les rayons de* \mathcal{F} *soient tous spectraux non solubles en les points de la frontière* ∂X . *Soit* S *une pseudo-triangulation non vide adaptée à* \mathcal{F} *telle que* \mathcal{F} *est libre de nombres de Liouville le long de* Γ_S , *et telle que tout point de* $S - \partial X$ *vérifie l'hypothèse (TR). Supposons de plus que* $\chi(x, S) \leq 0$ *pour tout point de* $S - \partial X$. *Alors* \mathcal{F} *a une cohomologie de de Rham de dimension finie si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- i) $\chi(x, S, \mathcal{F}) \neq 0$ *au plus pour un nombre fini de points de* S ;
- ii) $\partial_b H_{\emptyset, b_D}(-, \mathcal{F}|_D) \neq 0$ *au plus pour un nombre fini de disques ouverts* D *dans* $\mathcal{D}_{\partial X}$.

Dans ce cas on a

$$\chi_{\mathrm{dR}}(X, \mathcal{F}) = \sum_{x \in S - \partial X} \chi(x, S, \mathcal{F}) + \sum_{D \in \mathcal{G}_{\partial X}} \chi_{\mathrm{dR}}(D, \mathcal{F}). \quad (0.53)$$

L'hypothèse $\chi(x, S) \leq 0$ n'est pas restrictive. Elle signifie que (après changement de base à un corps algébriquement clos) les points finaux de Γ_S ne sont pas de genre 0. Notamment on peut montrer que si X n'est pas un disque on peut toujours simplifier la triangulation de sorte à satisfaire cette hypothèse.

Remarquons par ailleurs le caractère opérationnel de l'énoncé. Notamment, si une équation \mathcal{F} est donnée, ses rayons sont difficiles à calculer et encore plus le graphe $\Gamma_S(\mathcal{F})$. On peut en mesurer la complexité en regardant les calculs que nous avons développé pour les équations de rang un sur la droite affine qui nécessite toute la machinerie des vecteurs de Witt.

Il semble raisonnable de supposer de connaître au moins la valeur des rayons de \mathcal{F} sur le squelette Γ_S de la courbe. Nous remarquons alors que :

- i) si une triangulation S qui rencontre toutes les composantes connexes de X est donnée, on peut facilement l'augmenter en une triangulation S' adaptée à \mathcal{F} en rajoutant les points de Γ_S où les rayons de \mathcal{F} ont un changement de pente, de sorte que $\Gamma_S = \Gamma_{S'}$;
- ii) ensuite le calcul de $\chi(x, S, \mathcal{F})$, $x \in S$, se fait sans connaître les rayons en dehors de Γ_S ;
- iii) le théorème d'indice sur un disque ouvert (que nous n'avons pas détaillé dans l'introduction) permet de connaître $\chi_{\mathrm{dR}}(D, \mathcal{F})$ en regardant uniquement la pente des rayons à la frontière ouverte de D . Signalons également qu'on peut voir que pour tout i nous avons $H_{\mathrm{dR}}^i(X, \mathcal{F}) = H_{\mathrm{dR}}^i(\mathrm{Int}(X), \mathcal{F}|_{\mathrm{Int}(X)})$, ce qui permet d'éliminer les points à la frontière.

Pour terminer, nous signalons que les conditions du Théorème 19 n'entraînent pas la finitude des graphes contrôlants de \mathcal{F} . En effet les conditions du théorème ne concernent que la hauteur $H_{S,r}(-, \mathcal{F})$ du polygone de Newton des convergences, et non pas les rayons individuellement. Il est facile de se faire un exemple explicite (à l'aide du théorème de Young [You92]) d'une équation sur un disque ouvert qui a une cohomologie de dimension finie, dont tous les graphes sont infinis. Nous donnons un tel exemple dans la section 15.4.

Relative compacité VS surconvergence. Nous avons spécialisé les résultats de finitude cohomologique au cadre d'une courbe qui est *surconvergente dans une autre*, ayant également des singularités méromorphes. Nous ne détaillerons pas ces notions dans l'introduction. Nous souhaitons seulement signaler que la notion de surconvergence inventée par Dwork, et adoptée en cohomologie rigide, donne une cohomologie de dimension finie grâce au fait qu'on est dans un cadre de compacité relative (un voisinage dans l'autre). La raison est que lorsque on est dans un cadre de compacité relative, les équations différentielles sont *automatiquement finiment contrôlées*, et les hypothèses du Théorème 18 sont vérifiées. Plus précisément nous avons l'énoncé suivant que nous souhaitons mettre en évidence

THÉORÈME 20. *Soit $U \subset X$ un domaine analytique relativement compact dans X , dont la frontière est finie, et tel que les points de $U - \partial U$ satisfont la propriété (TR).*

Supposons que les rayons de \mathcal{F} sont tous spectrales non solubles en les points de ∂U .

Supposons de plus que U ait une pseudo-triangulation S_U telle que Γ_{S_U} est topologiquement fini et que \mathcal{F} est libre de nombres de Liouville le long de Γ_{S_U} .

Alors les groupes de cohomologie de de Rham de $\mathcal{F}|_U$ sont de dimension finie, et la formule (0.50) vaut pour $\mathcal{F}|_U$.

Chapitre III : Déformation infinitésimale des équations différentielles p -adiques sur les courbes de Berkovich

Dans [ADV04] Yves André et Lucia Di Vizio ont découvert une équivalence, appelée *déformation*, entre la catégorie des équations différentielles p -adiques, avec structure de Frobenius non spécifiée, sur l'anneau de Robba et la catégorie des équations aux q -différences, avec les mêmes propriétés, sur le même anneau. Cette équivalence est le résultat d'une classification fine des deux catégories : d'une part Y. André avait calculé dans [And02] le groupe Tannakien (0.3) de la catégorie des équations différentielles p -adiques, d'autre part dans [ADV04] on montre que le groupe Tannakien de la catégorie des équations aux q -différences est le même. Par conséquent les deux catégories sont isomorphes à la catégorie des représentations linéaires de ce groupe.

Le foncteur qu'il en résulte préserve par construction les solutions *étales*, c'est à dire les solutions dans une extension étale de l'anneau de Robba provenant de la caractéristique p . Par exemple, on peut voir utilisant (0.19) que la solution étale de l'équation différentielle de Dwork $y' = -\pi_0 T^{-2} y$, peut s'identifier à la série de Taylor à l'infini $y := \exp(\pi_0 T^{-1})$, qui est algébrique sur l'anneau de Robba car $y^p = \exp(p\pi_0 T^{-1})$ converge sur une couronne $s < |T| < 1$. Cette équation est déformée en l'équation aux q -différences

$$y(qT) = A(q, T) \cdot y(T), \quad A(q, T) := \exp(\pi_0(q^{-1} - 1)T^{-1}), \quad (0.54)$$

qui a la même solution étale.

Pendant la thèse de doctorat nous avons approché ces phénomènes à travers les équations de rang un. Ce que nous avons compris est le principe général que les solutions *de Taylor* sont aussi préservées par cette équivalence, et que ce fait *permet de définir la déformation* et avoir l'équivalence sans besoin de classifier les objets de la catégorie. Par exemple la solution de Taylor de l'équation de Dwork ci dessus autour d'un point $t \neq 0$ est $y(T, t) = \exp(\pi_0(T^{-1} - t^{-1}))$ et on voit qu'elle est solution aussi de l'équation (0.54) obtenue par déformation. On peut alors retrouver l'équation déformée (0.54) à partir de la solution de Taylor $y(T, t)$ en posant

$$A(q, T) := y(qT, t) \cdot y(T, t)^{-1} = y(qT, t) \cdot y(t, T) = y(qT, T). \quad (0.55)$$

La dernière égalité vient d'une propriété de cocycle de la série $y(T, t)$ car elle représente la stratification χ attachée à l'équation différentielle, dont nous parlerons dans un instant. La solution $y(T, t)$ converge sur un voisinage de la diagonale de $C \times C$ où C est la couronne sur laquelle est définie l'équation différentielle. Donc, si q est suffisamment proche de 1, $y(qT, T)$ converge et appartient à l'anneau de Robba. Cet exemple se généralise à tout rang et toute équation.

Sur cette base, nous avons donc donné dans [Pul08] une autre définition du foncteur de déformation, ne faisant intervenir que les solutions de Taylor et rien d'autre. Notamment cette construction ne demande aucune hypothèse particulière (solubilité, Frobenius, exposants, ...), mais seulement une certaine compatibilité entre les rayons de l'équation et la taille de $|q - 1|$. Cela nous a permis dans [Pul08] de globaliser l'équivalence de [ADV04] à des domaines affinoïdes de la droite affine et de déduire, par déformation à partir des équations différentielles, les résultats de classification de [ADV04] et [DV04] de la catégorie des q -différences, en particulier l'égalité des groupes Tannakiens et la quasi-unipotence des équations aux q -différences avec structure de Frobenius sur l'anneau de Robba.

Dans un travail ultérieur [Pul14a] nous avons raffiné ces méthodes pour les appliquer à toute courbe quasi-lisse de Berkovich, et à une classe d'automorphismes que nous appelons *infinitésimaux* et qui sont proches de l'identité.

Déformation.

Nous souhaitons maintenant expliquer de manière plus spécifique, mais informelle, la définition du foncteur de déformation dans le cadre des automorphismes infinitésimaux.

Soit X une courbe quasi-lisse de Berkovich, munie d'une pseudo-triangulation S , et soit $\sigma : X \rightarrow X$ un automorphisme de courbes K -analytiques. Nous dirons que σ est S -infinitésimal si pour tout $x \in X$, $\sigma_{\mathcal{H}(x)}$ stabilise globalement le disque maximal $D(x, S)$. Cela entraîne en particulier que σ est l'identité sur Γ_S et qu'il stabilise globalement toutes les composantes connexes de $X - \Gamma_S$ (qui sont nécessairement des disques ouverts).

Maintenant, on peut montrer que, pour tout x , dans le disque ouvert $D(x, S)$ il existe un plus petit disque fermé $D_S^+(x, \sigma)$ (éventuellement réduit à un point) contenant t_x qui est globalement stabilisé par $\sigma_{\mathcal{H}(x)}$. Tout disque intermédiaire est aussi globalement stabilisé. Si R_σ et R sont les rayons de $D_S^+(x, \sigma)$ et $D(x, S)$ respectivement on pose

$$\mathcal{R}_S(x, \sigma) := R_\sigma/R. \tag{0.56}$$

Notons par $\Gamma_S(\sigma)$ graphe contrôlant de la fonction $\mathcal{R}_S(-, \sigma) : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Un premier résultat est le résultat de finitude suivant :

THÉORÈME 21. *La fonction $\mathcal{R}_S(-, \sigma)$ est continue, log-affine par morceaux sur les segments de X , et son graphe contrôlant $\Gamma_S(\sigma)$ est localement fini. De plus si C est une composante connexe de $X - S$, il existe une fonction $f \in \mathcal{O}(C)$, et un $\alpha \in \mathbb{R}$, tels que $\mathcal{R}_S(x, \sigma) = \alpha|f(x)|$ pour tout $x \in C$. En particulier $\mathcal{R}_S(-, \sigma)$ est harmonique en dehors de S , et si $\sigma \neq \text{Id}_X$, alors les points finaux de $\Gamma_S(\sigma)$ qui n'appartiennent pas à Γ_S sont les points rigides de X qui sont fixés par σ .*

La preuve de ce théorème est facile sur un domaine analytique de la droite affine, mais sa globalisation à la courbe X n'est pas évidente, et nécessite la machinerie de [PP12b].

Considérons maintenant une équation différentielle \mathcal{F} sur X . Nous dirons que \mathcal{F} est σ -compatible si ses solutions convergent sur $D_S^+(x, \sigma)$. Cela signifie que pour tout $x \in X$ nous avons

$$\mathcal{R}_{S,1}(x, \mathcal{F}) > \mathcal{R}_S(x, \sigma). \tag{0.57}$$

On montre que demander cette condition pour tout point de X équivaut à la demander pour les points de S et les germes de segments à l'infini $\partial^\circ X$.

Si Σ est une famille d'automorphismes S -infinitésimaux, un Σ -module sur X est un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini \mathcal{F} avec un isomorphisme \mathcal{O}_X -linéaire $\sigma : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \sigma^* \mathcal{F}$, pour tout $\sigma \in \Sigma$.

Nous dirons qu'une équation différentielle (\mathcal{F}, ∇) est Σ -compatible si elle est σ -compatible pour tout $\sigma \in \Sigma$.

THÉORÈME 22. *Si \mathcal{F} est Σ -compatible, alors il existe une structure canonique de Σ -module sur \mathcal{F} , qu'on appelle déformation de (\mathcal{F}, ∇) . Cette structure est caractérisée par le fait que les solutions de Taylor de l'équation différentielle sont aussi solutions du Σ -module obtenu par déformation.*

Tout morphisme entre deux équations différentielles Σ -compatibles commute aussi aux structures de Σ -modules obtenus par déformation.

Le théorème donne un foncteur fidèle

$$\text{Def}_{S,\Sigma} : \{\text{Équations différentielles } \Sigma - \text{compatibles}\}/X \longrightarrow \{\Sigma - \text{modules}\}/X \tag{0.58}$$

La preuve est basée sur la notion de stratification. Notamment si $p_1, p_2 : X \times X \rightarrow X$ sont les projections. La donnée de l'équation différentielle $\nabla : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \Omega_X^1$ équivaut à la donnée d'une stratification sur X , qui est un isomorphisme $\chi : (p_2^* \mathcal{F})|_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\sim} (p_1^* \mathcal{F})|_{\mathcal{T}}$, au dessus d'un voisinage

ouvert \mathcal{T} admissible non spécifié de la diagonale de $X \times X$. Localement sur X , la matrice de χ est une solution de l'équation différentielle \mathcal{F} (comme $y(T, t)$ ci plus haut).

Pour démontrer le Théorème 22 on montre que la condition (0.57) entraîne qu'il existe un voisinage admissible de la diagonale \mathcal{T} sur lequel la stratification converge et tel que l'image du morphisme

$$\Delta_\sigma : X \longrightarrow X \times X, \quad \Delta_\sigma(x) := (\sigma(x), x), \quad (0.59)$$

est contenue dans \mathcal{T} . La structure de Σ -module s'obtient alors par pull-back de χ par Δ_σ :

$$\mathcal{F} = \Delta_{\sigma p_2}^* \mathcal{F} \xrightarrow{\Delta_\sigma^*(\chi)} \Delta_{\sigma p_1}^* \mathcal{F} = \sigma^* \mathcal{F}. \quad (0.60)$$

L'existence de \mathcal{T} est le point clé, et il repose sur les Théorèmes 7 et 21, et le comportement des fonctions $\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F})$ et $\mathcal{R}_S(-, \sigma)$.

Pleine fidélité.

Nous avons montré la pleine fidélité du foncteur de déformation pour certains types de familles d'automorphismes Σ qu'on appelle *non dégénérées*. Si X est connexe, ce sont des familles pour les quelles il existe un point $x \in X$ tel que pour tout disque ouvert D tel que $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} D_S^+(x, \sigma) \subset D \subset D(x, S)$ on a

$$\mathcal{O}(D)^{\Sigma_\Omega} = \Omega. \quad (0.61)$$

Cette condition est facile à tester dans la pratique car si T_x est une coordonnée sur $D(x, S)$, alors il suffit d'avoir une suite $\{\sigma_n\}_n$ dans le groupe $\langle \Sigma \rangle$ engendré par Σ telle que la famille des normes $\{|T_x \circ \sigma_n - T_x|(x)\}_n - \{0\}$ admet 0 comme point d'accumulation. Par exemple si $\Sigma = \{\sigma_q\}$ est la multiplication par q d'un affinoïde de la droite affine, alors σ_q est non dégénérée si et seulement si q n'est pas une racine de l'unité.

THÉORÈME 23. *Si l'action de la famille Σ est non dégénérée, alors le foncteur $\text{Def}_{S,\Sigma}$ est pleinement fidèle.*

Par ailleurs on sait que sans la condition de non dégénérescence la catégorie d'arrivée peut-être R -linéaire par rapport à un anneau strictement plus grande que K , et donc les deux catégories ne peuvent pas être isomorphes. Un exemple est donné par les équations aux q -différences quand q est une racine de l'unité.

La preuve du Théorème 23 est basée sur le fait que les morphismes de l'équation différentielle, et aussi de sa déformation, se plongent dans les morphismes de la restriction $\mathcal{F}|_D$. De plus par hypothèse \mathcal{F} est triviale sur D si D est assez petit. La condition (0.61) revient à demander alors que l'espace des morphismes entre Σ -modules triviaux sur D ait la même dimension sur Ω que l'espace des morphismes entre équations différentielles triviales.

Nous décrivons l'image essentielle du foncteur $\text{Def}_{S,\Sigma}$ dans le cas des équations aux différences sur la droite, c'est à dire $\sigma(T) = qT + h$. Nous en reparlerons plus en détail dans un instant.

Analyticité de l'action de Σ .

Nous avons également obtenu une version *analytique* des résultats précédents. Supposons avoir un groupe K -analytique G agissant sur X par automorphismes infinitésimaux (le formalisme ici est celui de [Mum08, Section 12]), alors le foncteur de déformation fournit une structure de G -module analytique sur \mathcal{F} qui est compatible à l'équation différentielle. Cette structure est connue aussi sous le nom de D -module G -équivariant sur X (cf. [MFK94], [Kas89]). De manière informelle nous obtenons l'énoncé suivant

THÉORÈME 24. *Soit G un groupe K -analytique agissant sur X de manière infinitésimale. Alors il existe un foncteur fidèle qui est l'identité sur les morphismes*

$$\{\text{Équations différentielles } G\text{-compatibles}\}/X \longrightarrow \{G\text{-modules analytiques}\}/X . \quad (0.62)$$

Si de plus l'action de G est non dégénérée, alors le foncteur est aussi pleinement fidèle.

De manière informelle cela revient à demander que G agisse semi-linéairement sur \mathcal{F} (i.e. de manière à relever l'action de G sur \mathcal{O}_X) par matrices dont la dépendance en les éléments de G est analytique.

Si le quotient $[X/G]$ de X par l'action de G existe, le Théorème 22 signifie qu'une équation différentielle G -compatible sur X , donne un fibré sur $[X/G]$. Dans notre contexte le quotient n'existe pas forcément dans la catégorie des espaces K -analytiques, et donc il faut le remplacer par l'objet simplicial attaché à l'action de G sur X (nous renvoyons au texte pour la définition) :

$$G \times G \times X \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_2} \end{array} G \times X \xrightarrow[\mu]{p_X} X . \quad (0.63)$$

c'est-à-dire un Champ comme dans [Tho87].

De ce point de vue, le résultat est similaire au résultat de J.Sauloy [Sau09] où dans la théorie des équations aux q -différences sur les nombres complexes l'auteur montre qu'une certaine classe d'équations aux q -différences est équivalente à une catégorie de fibrés sur la courbe elliptique $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}} = [X/G]$.

Quasi-unipotence sur l'anneau de Robba.

Dans la situation plus locale des équations différentielles sur l'anneau de Robba nous déduisons du Théorème 22 l'analogie suivant du théorème de monodromie locale p -adique que nous écrivons sous une forme informelle :

THÉORÈME 25. *Tout Σ -module sur l'anneau de Robba obtenu par déformation d'une équation différentielle avec structure de Frobenius (non spécifiée) est quasi-unipotent.*

Ce résultat permet d'obtenir une caractérisation de l'image essentielle du foncteur de déformation pour les équations différentielles avec structure de Frobenius sur l'anneau de Robba.

La preuve nécessite le Σ -analogue du théorème d'existence de Katz du foncteur d'extension canonique [Kat87b], [Mat02].

Dans le cas des q -différences, le Théorème 25 est le résultat central de [ADV04]. Comme mentionné nous le déduisons de la déformation, alors que André-Di Vizio le déduit d'une classification des équations aux q -différences sur l'anneau de Robba avec structure de Frobenius.

En particulier, nous souhaitons signaler que le Frobenius ne joue aucun rôle dans notre contexte, ni la solubilité. La déformation est définie sous l'hypothèse de compatibilité (0.57), et ensuite nous restreignons le contexte aux équations différentielles avec structure de Frobenius pour déformer le résultat de classification de [And02].

Équations aux différences.

Le contexte maintenant est celui de la droite affine $\mathbb{A}_K^{1,\text{an}}$. Nous spécialisons les résultats de déformation d'avant au cas d'un automorphisme σ d'un domaine analytique de $\mathbb{A}_K^{1,\text{an}}$ de la forme

$$\sigma_{q,h}(T) = qT + h , \quad q \in K^\times , \quad h \in K . \quad (0.64)$$

Si $h = 0$, nous avons les équations aux q -différences, si $q = 1$ nous parlerons d'équations aux différences finies, et dans le cas général nous parlerons simplement équations aux différences.

Nous commençons par caractériser les domaines analytiques de $\mathbb{P}_K^{1,\text{an}}$ qui sont stables par $\sigma_{q,h}$. Et nous précisons que si $q = 1$ et $h \neq 0$, ou si q n'est pas une racine de l'unité, alors l'action de $\sigma_{q,h}$ est non dégénérée. Ensuite, sous les mêmes hypothèses sur q et h , nous montrons comment obtenir le (q, h) -développement classique de Taylor d'une fonction sur un disque. C'est une écriture du type

$$f(T) = \sum_{n \geq 0} d_{q,h}^n(f)(c) \cdot \frac{(T - c)_{q,h}^{[n]}}{[n]_q!} \quad (0.65)$$

où c est le centre du disque, $d_{q,h}(f) := \frac{\sigma_{q,h}(f) - f}{\sigma_{q,h}(T) - T}$, et $(T - c)_{q,h}^{[n]}/[n]_q!$ sont les symboles usuels dans ce contexte. À l'aide de cette formule, on peut définir une solution de Taylor formelle qui est un symbole qui devient la matrice d'une stratification dès qu'une condition de compatibilité analogue à (0.57) est satisfaite. Cette condition coïncide avec (0.57) *a fortiori* (après avoir montré qu'on a une vraie stratification).

On obtient ainsi une caractérisation de l'image essentielle de la déformation, et au même temps un foncteur inverse nommé *confluence*.

Finalement nous spécialisons le Théorème 24 à ce contexte. Nous définissons sur $\mathcal{G} := \mathbb{G}_m^{\text{an}} \times \mathbb{A}_K^{1,\text{an}}$ une loi de groupe K -analytique et nous montrons que, si X est un domaine affinoïde de $\mathbb{A}_K^{1,\text{an}}$, alors la donnée d'une équation différentielle correspond à celle d'une action infinitésimale d'un sous-groupe ouvert de \mathcal{G} non spécifié (un germe d'action analytique de \mathcal{G}).

Racines de l'unité. Supposons que q soit une racine de l'unité. La déformation d'une équation différentielle $\sigma_{q,h}$ -compatible existe sans obstruction, mais nous ne pouvons pas espérer d'avoir un foncteur pleinement fidèle car, si q est une racine de l'unité la catégorie d'arrivée est R -linéaire par rapport à un anneau R qui contient strictement K .

Si par exemple $(q, h) = (1, 0)$ la catégorie des équations aux $(1, 0)$ -différences est juste la catégorie des \mathcal{O}_X -modules munis d'un automorphisme. Dans ce cas pour retrouver l'information il faut remplacer la catégorie par celle des équations différentielles.

La raison est, comme nous venons de le voir, que si X est un domaine affinoïde de la droite, dès qu'on a une équation différentielle on a automatiquement l'action analytique de tout un sous groupe ouvert de \mathcal{G} suffisamment petit. Et cette action est *non dégénérée*. Ce groupe est du type $\mathcal{G}_{\tau,\nu} := D^-(1, \tau) \times D^-(0, \nu)$, $0 < \tau < 1$, $\nu > 0$, et en faisant tendre (q, h) vers $(1, 0)$ selon la direction tangente (a, b) on retrouve un opérateur qui correspond à l'action de $(aT + b) \frac{d}{dT}$ sur \mathcal{F} . Finalement l'objet déformé se retrouve toujours avec cet *opérateur tangent*, même si on est sur une racine de l'unité.

Guidés par ces considérations nous avons introduit, dans [Pul08], dans le cadre des équations aux q -différences, la catégorie des (σ_q, δ_q) -modules, qui se déforme “*sans pathologies*” pour n'importe quel q .

La fonction Γ_p p -adique de Morita et les fonctions L p -adiques de Kubota-Leopoldt.

Dans [Mor75] Y. Morita a défini la fonction Gamma p -adique Γ_p comme interpolation p -adique de la fonction Gamma classique. Il a montré qu'elle est localement analytique sur \mathbb{Z}_p (cf. voir également [Dia77] et [Rob00, p.376]). Ensuite il a montré que les coefficients de son développement de Taylor à l'origine, sont des valeurs spéciales de certaines fonctions L p -adiques.

Plus tard Dwork [Dwo82b], en appliquant des méthodes non cohomologiques introduite par D. Barsky [Bar80], a été capable de calculer l'exact rayon d'analyticité de la fonction Γ_p sur un voisinage des points $0, \dots, p - 1$ (centres des classes résiduelles de \mathbb{Z}_p).

Nous utilisons ces résultats, et nous montrons, comme conséquence de la déformation, que

le développement analytique $\Gamma_p^0(T)$ à l'origine de Γ_p est la solution de Taylor d'une équation différentielle d'ordre un sur le disque unité ouvert.

THÉORÈME 26. *La fonction $\Gamma_p^0(T)$ est solution d'une équation différentielle $y' = g_0(T) \cdot y$ telle que $g_0(T) \in \mathcal{O}(D^-(0, 1)) \subset \mathbb{Q}_p[[T]]$.*

La preuve se fait en interprétant l'équation fonctionnelle

$$\Gamma_p^0(T + p^n) = A(1, p^n; T) \Gamma_p^0(T), \quad A(1, p^n; T) = - \prod_{i=1, (i,p)=1}^{p^n-1} (T + i) \quad (0.66)$$

comme une équation aux différences finies, et en calculant de proche en proche l'équation différentielle obtenue par confluence.

Le Théorème 26 est écrit sous une autre forme dans [Rob00, p.376], et il n'est donc pas vraiment nouveau. L'aspect nouveau réside dans les méthodes utilisées, qui se réduisent dans notre contexte à un calcul de rayon de convergence.

Plus précisément nous précisons le rayon de convergence de l'équation différentielle sur les points du type $x_{0,\rho}$, $\rho \geq 0$, ainsi que la norme de $g_0(T)$ en ces points. Cette norme est strictement liée à la valuation p -adique de certains valeurs de fonctions L .

Nous obtenons finalement le résultat suivant :

THÉORÈME 27. *Soit ω_p le caractère de Teichmüller Dirichlet correspondant au nombre premier p , et soit $L_p(-, \omega_p)$ la fonction L p -adique de Kubota-Leopoldt correspondante au caractère de Teichmüller Dirichler ω_p correspondant au nombre premier p . Alors pour tout $n \geq 1$ on a*

$$v_p(L_p(1 + p^{n-1}(p-1), \omega_p^{p^{n-1}(p-1)})) = v_p(\zeta_p(1 + p^{n-1}(p-1))) = -n, \quad (0.67)$$

où v_p est la valuation p -adique de \mathbb{Z}_p normalisée par $v_p(p) = 1$. De plus pour tout $m \geq 0$ on a

$$v_p(L_p(1 + 2m, \omega_p^{2m})) \geq \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq 2m \leq (p-1) \\ -n & \text{if } p^{n-1}(p-1) \leq 2m < p^n(p-1), \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (0.68)$$

Le théorème donne en particulier une preuve du fait que la fonction Zeta p -adique ζ_p a un pôle en $T = 1$. Comme déjà mentionné, l'aspect qui nous semble important est le fait que ces estimations sont obtenues avec des méthodes d'équations différentielles et rayon de convergence.

Maintenant, pour $\ell, k \geq 1$, considérons la somme

$$S_\ell(k) = \sum_{i=1, (i,p)=1}^{k-1} \frac{1}{i^\ell}. \quad (0.69)$$

Cette somme, et bien d'autres, a été étudiée par divers auteurs modulo puissances de p [Dic52, pp. 95-103]. Un résultat de L.Washington [Was98] permet de l'exprimer comme somme de valeurs de certaines fonctions L p -adiques de Kubota-Leopoldt en certains entiers positifs. Des résultats similaires ont été trouvés par D.Barsky [Bar83].

Nous donnons également une expression explicite de $S_\ell(p^n)$, basée sur l'équation fonctionnelle et différentielle satisfaite par la fonction $\Gamma_p^0(T)$.

Note. La déformation paraît dans plusieurs processus. Nous en donnons quelques exemples :

- La déformation apparaît in [CM02, 7.1] pour démontrer l'indépendance du choix du Frobenius.
- La $\sigma_{q,0}$ -déformation, avec $q \in \mu_p$ une racine p -ème de l'unité, paraît dans le livre de Kedlaya [Ked10, 10.4.2] sous le nom de "Taylor series" pour démontrer l'existence de l'antécédent par

Frobenius d'une équation différentielle (\mathcal{F}, ∇) . Notamment l'antécédent coïncide naturellement avec le sous-espace de (\mathcal{F}, ∇) des points fixes par l'action de μ_p sur (\mathcal{F}, ∇) obtenue par déformation de ∇ .

- La déformation apparaît aussi dans [Ked13, 3.2.2, 3.2.6] pour montrer l'existence de certains sous-modules de rang un.

Chapitre I : Théorie abélienne des équations différentielles solubles sur un germe de couronne

Ce chapitre concerne les articles [Pul05b], [Pul07], [CP09], [Chr11]. Un complément est donné dans l'appendice A.

Nous signalons également les articles suivants qui sont en relation avec les arguments traités dans ce chapitre (voir aussi l'introduction, pour les localiser dans un contexte plus générale) : [Rob85], [CC96], [Mat95], [Ked07], [Xia10], [TP12], [PV11], [Ric14].

1. Vecteurs de Witt

Nous ferons référence à [Bou06, Chap. IX] pour les questions inhérentes aux vecteurs de Witt.

Soit $p > 1$ un nombre premier. Pour tout $m \geq 0$ posons

$$\phi_m(X_0, \dots, X_m) := X_0^{p^m} + pX_1^{p^{m-1}} + p^2X_2^{p^{m-2}} + \dots + p^mX_m. \quad (1.1)$$

Soit A un anneau commutatif (pas nécessairement avec unité). Notons par $A^{\mathbb{N}}$ l'anneau produit de copies de A indexé sur \mathbb{N} . Notons par $\mathbf{W}(A)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans A . En tant qu'ensemble $\mathbf{W}(A)$ coïncide avec l'ensemble $A^{\mathbb{N}}$. La loi de groupe est définie implicitement, nous allons la décrire en quelque ligne. Notons par

$$\phi : \mathbf{W}(A) \longrightarrow A^{\mathbb{N}}, \quad (1.2)$$

la fonction *fantôme* qui associe à tout $(a_0, a_1, \dots) \in \mathbf{W}(A)$ la suite

$$\phi(a_0, a_1, \dots) := (\phi_0(a_0), \phi_1(a_0, a_1), \phi_2(a_0, a_1, a_2), \dots). \quad (1.3)$$

On montre que les opérations de $A^{\mathbb{N}}$ stabilisent l'image de ϕ de manière fonctorielle en A , et que cela définit “*par transport de structure*” les opérations de $\mathbf{W}(A)$. Autrement dit il existent des opérations uniques dans $\mathbf{W}(A)$ qui rendent $\phi : \mathbf{W}(A) \rightarrow A^{\mathbb{N}}$ un morphisme de foncteurs en anneaux.

Cela ne signifie pas que ϕ soit injective. Notamment si la multiplication par p dans A est l'application nulle, alors $\phi(a_0, a_1, \dots) = (a_0, a_0^p, a_0^{p^2}, \dots)$, et l'image de ϕ ne donne aucune information utile. L'existence des opérations se montre avec les lemmes ci plus bas.

On peut toujours augmenter un anneau sans unité A de manière à avoir un anneau avec unité. À partir de maintenant nous ne travaillerons donc qu'avec des anneaux avec unité, sauf mention explicite du contraire.

Lemme 1.0.1 ([Bou06, Chap. IX, §1, N.2, Prop. 2]). *Soit A un anneau commutatif avec unité. Alors*

- i) *Si p est inversible dans A , ϕ est une bijection ;*
- ii) *Si p n'est pas diviseur de 0 dans A , ϕ est injective.* □

Lemme 1.0.2. *Si A est un anneau commutatif avec unité, il existe un morphisme surjectif d'anneaux $A' \rightarrow A$, où A' est un anneau avec unité, tel que p ne divise pas 0 dans A' .*

Démonstration. Si p n'est pas diviseur de 0, alors on peut prendre $A' = A$. Si p divise 0, alors A est un anneau sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un $n > 1$ convenable. Si $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[\{X_a\}_{a \in A}]$ est l'anneau de polynômes en une famille d'indéterminées $\{X_a\}_{a \in A}$ indexée sur A , il est clair qu'on a un morphisme surjectif d'anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[\{X_a\}_{a \in A}] \rightarrow A$ qui envoie X_a dans a . On peut alors prendre $A' := \mathbb{Z}[\{X_a\}_{a \in A}]$. □

Ces lemmes donnent également une voie opérationnelle pour comprendre le résultat d'une opération dans $\mathbf{W}(A)$. Notamment on relève les termes dans A' , et on regarde le résultat de

l'opération sur les composantes fantôme, où les opérations se font facilement composante par composante. Puis on transporte le résultat en arrière dans $\mathbf{W}(A)$.

1.1. Frobenius et Verschiebung.

Pour tout anneau A , notons par

$$v(\phi_0, \phi_1, \dots) := (0, p\phi_0, p\phi_1, \dots) \quad (1.4)$$

$$f(\phi_0, \phi_1, \dots) := (\phi_1, \phi_2, \dots) \quad (1.5)$$

On peut montrer que f est un endomorphisme de foncteurs en anneaux de $A^{\mathbb{N}}$ qui stabilise l'image de $\mathbf{W}(A)$ par ϕ . Il donne donc lieu à un endomorphisme fonctoriel d'anneaux de $\mathbf{W}(A)$ noté

$$F : \mathbf{W}(A) \rightarrow \mathbf{W}(A), \quad (1.6)$$

dont la description explicite est compliquée. L'endomorphisme F s'appelle le Frobenius de $\mathbf{W}(A)$.

Si $p = 0$ dans A , et si $\bar{F} : A \rightarrow A$ dénote l'endomorphisme $\bar{F}(a) = a^p$, alors \bar{F} définit par functorialité un endomorphisme d'anneaux encore noté par \bar{F}

$$\bar{F} : \mathbf{W}(A) \rightarrow \mathbf{W}(A), \quad \bar{F}(a_0, a_1, \dots) = (a_0^p, a_1^p, \dots). \quad (1.7)$$

On peut montrer que \bar{F} coïncide avec F sur $\mathbf{W}(A)$.

De l'autre côté, on voit facilement que v est un endomorphisme fonctoriel $A^{\mathbb{N}}$ -linéaire de $A^{\mathbb{N}}$ vers $A^{\mathbb{N}}$ qui stabilise l'image de ϕ et qui définit l'opération

$$V : \mathbf{W}(A) \rightarrow \mathbf{W}(A), \quad V(a_0, a_1, \dots) := (0, a_0, a_1, \dots) \quad (1.8)$$

dans $\mathbf{W}(A)$. Alors V est un endomorphisme fonctoriel $\mathbf{W}(A)$ -linéaire de $\mathbf{W}(A)$, qui s'appelle *Verschiebung*, et l'image de V est un idéal de $\mathbf{W}(A)$.

Lemme 1.1.1. *L'endomorphisme FV de $\mathbf{W}(A)$ est la multiplication par p .*

Si de plus $p = 0$ dans A , alors on a $VF = FV = p$, et $p(a_0, a_1, \dots) = (0, a_0^p, a_1^p, \dots)$.

1.2. Vecteurs de Witt de longueur finie.

On note par

$$\mathbf{W}_m(A) := \mathbf{W}(A)/V^{m+1}\mathbf{W}(A). \quad (1.9)$$

On peut identifier les éléments de $\mathbf{W}_m(A)$ avec des suites (a_0, \dots, a_m) d'éléments de A .

L'endomorphisme $V : \mathbf{W}(A) \rightarrow \mathbf{W}(A)$ induit, pour tout $m \geq 0$, une inclusion $\mathbf{W}(A)$ -linéaire

$$V : \mathbf{W}_m(A) \rightarrow \mathbf{W}_{m+1}(A), \quad V(a_0, \dots, a_m) := (0, a_0, \dots, a_m). \quad (1.10)$$

D'autre part, comme $FV = p$, on a $FV^{m+1}\mathbf{W}(A) \subseteq pV^m\mathbf{W}(A) \subseteq V^m\mathbf{W}(A)$. L'endomorphisme $F : \mathbf{W}(A) \rightarrow \mathbf{W}(A)$ induit alors un morphisme d'anneaux

$$F : \mathbf{W}_m(A) \rightarrow \mathbf{W}_{m-1}(A). \quad (1.11)$$

Nous avons encore $FV = p : \mathbf{W}_m(A) \rightarrow \mathbf{W}_m(A)$.

Si $p = 0$ dans A , nous noterons par

$$\bar{F} : \mathbf{W}_m(A) \rightarrow \mathbf{W}_m(A), \quad \bar{F}(a_0, \dots, a_m) := (a_0^p, \dots, a_m^p), \quad (1.12)$$

l'endomorphisme d'anneaux obtenu par functorialité du morphisme de Frobenius $\bar{F} : A \rightarrow A$, $\bar{F}(a) = a^p$. Remarquons alors que $\bar{F} \neq F$, et que $F(a_0, \dots, a_m) = (a_0^p, \dots, a_{m-1}^p)$.

1.3. Covecteurs (unipotents).

On appelle covecteurs (unipotents) la limite inductive

$$\mathbf{CW}(A) := \varinjlim_m (\mathbf{W}_m(A) \xrightarrow{V} \mathbf{W}_{m+1}(A) \cdots) \quad (1.13)$$

C'est un $\mathbf{W}(A)$ -module, réunion des $\mathbf{W}_m(A)$ par les inclusions $V : \mathbf{W}_m(A) \rightarrow \mathbf{W}_{m+1}(A)$, dont les éléments s'identifient à des suites $(\cdots, 0, 0, 0, a_0, a_1, \dots, a_m)$.

Si $p = 0$ dans A , comme $\bar{F}V = V\bar{F}$, le Frobenius $\bar{F} : \mathbf{W}_m(A) \rightarrow \mathbf{W}_m(A)$ induit un endomorphisme de $\mathbf{W}(A)$ -modules de $\mathbf{CW}(A)$:

$$\bar{F} : \mathbf{CW}(A) \rightarrow \mathbf{CW}(A), \quad \bar{F}(\cdots, 0, 0, 0, a_0, \dots, a_m) := (\cdots, 0, 0, 0, a_0^p, \dots, a_m^p). \quad (1.14)$$

Notons par $\bar{F} - 1$ l'endomorphisme différence de \bar{F} et l'identité. Le noyau de $\bar{F} - 1$ s'identifie à $\mathbf{CW}(A^{\bar{F}=1})$, où $A^{\bar{F}=1}$ est le sous-anneau de A formé par les éléments a tels que $a^p = a$.

En particulier, notons \mathbb{F}_p le corps à p éléments. Comme $\mathbf{W}_m(\mathbb{F}_p)$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}$, on peut voir que

$$\mathbf{CW}(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p. \quad (1.15)$$

1.4. Théorie d'Artin-Schreier-Witt

Soit k un corps de caractéristique p , et soit k^{sep} sa clôture séparable. Si $(\cdots, 0, 0, a_0, \dots, a_m) \in \mathbf{CW}(k^{\text{sep}})$, l'équation

$$(\bar{F} - 1)(\cdots, 0, 0, x_0, \dots, x_m) = (\cdots, 0, 0, a_0, \dots, a_m) \quad (1.16)$$

est donné par des équations polynomiales en x_0, \dots, x_m . Elle trouve alors une solution \mathbf{x} dans $\mathbf{CW}(k^{\text{sep}})$. Nous avons donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{CW}(\mathbb{F}_p) \rightarrow \mathbf{CW}(k^{\text{sep}}) \xrightarrow{\bar{F}-1} \mathbf{CW}(k^{\text{sep}}) \rightarrow 0. \quad (1.17)$$

Donc toute autre solution de (1.16) est donnée par $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ où $\mathbf{y} \in \mathbf{CW}(\mathbb{F}_p)$.

Soit $G_k := \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$. Puisque G_k agit par endomorphismes d'anneaux sur k^{sep} , il agit aussi par fonctorialité, composante par composante, sur $\mathbf{CW}(k^{\text{sep}})$, et ses points fixes s'identifient à $\mathbf{CW}(k)$. Regardons les premiers groupes de cohomologie continue de G_k à valeurs dans les termes de la suite (1.17). Rappelons que le mot continue signifie que

$$H_{\text{cont}}^1(G_k, \mathbf{CW}(k^{\text{sep}})) = \varinjlim_m \varinjlim_{L/k} H^1(\text{Gal}(L/k), \mathbf{W}_m(L)), \quad (1.18)$$

$$H_{\text{cont}}^1(G_k, \mathbf{CW}(\mathbb{F}_p)) = \varinjlim_m \varinjlim_{L/k} H^1(\text{Gal}(L/k), \mathbf{W}_m(\mathbb{F}_p)). \quad (1.19)$$

où L/k parcourt les extensions finies séparables de k . L'action de G_k sur $\mathbf{CW}(\mathbb{F}_p)$ est triviale et la cohomologie des groupes nous dit, que dans ce cas on a $H_{\text{cont}}^1(G_k, \mathbf{CW}(\mathbb{F}_p)) = \text{Hom}^{\text{cont}}(G_k, \mathbf{CW}(\mathbb{F}_p))$ (ici le mot continu signifie que tout caractère $\alpha : G_k \rightarrow \mathbf{CW}(\mathbb{F}_p)$ provient par composition d'un morphisme $\text{Hom}(\text{Gal}(L/k), \mathbf{W}_m(\mathbb{F}_p))$, pour une extension finie séparable L/k convenable).

D'autre part on peut montrer qu'on a $H_{\text{cont}}^1(G_k, \mathbf{CW}(k^{\text{sep}})) = 0$ (cf. [Bou06, Ch.IX, §1, Ex.18, p.45])⁹. Par conséquence nous avons une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbf{CW}(k) \xrightarrow{\bar{F}-1} \mathbf{CW}(k) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}^{\text{cont}}(G_k, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \rightarrow 0. \quad (1.20)$$

Cette suite permet de décrire les caractères abéliens de p^m -torsion de G_k , pour tout $m \geq 1$.

9. La preuve peut également se faire en montrant par récurrence sur m (à l'aide des cochaines de [Ser62, VII, §3]) que $H^1(\text{Gal}(L/k), \mathbf{W}_m(L)) = 0$ pour toute extension finie séparable L/k , et tout $m \geq 0$, le cas $m = 0$ étant $H^1(\text{Gal}(L/k), L) = 0$ (cf. [Ser62, X, §1, Prop.1]).

Remarquons que si $\alpha : G_k \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est un tel caractère, son noyau est un sous-groupe H de G_k d'indice fini. Si $\mathbf{a} \in \mathbf{CW}(k)$ relève $\alpha \in \text{Hom}^{\text{cont}}(G_k, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ dans la suite (1.20), et si $\mathbf{x} = (\cdots, 0, 0, x_0, \dots, x_m) \in \mathbf{CW}(k^{\text{sep}})$ est une solution de l'équation

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \mathbf{a}, \quad (1.21)$$

alors

$$k(x_0, \dots, x_m) = (k^{\text{sep}})^H. \quad (1.22)$$

C'est une extension Galoisienne finie de k , de groupe de Galois $G_k/H \cong \alpha(G_k)$.

2. Théorie d'Artin-Schreier-Witt et filtration de ramification pour un corps local de caractéristique positive.

Supposons maintenant que E soit un corps de valuation discrète complet tel que $p = 0$ dans E . Si t est un uniformisant, on sait que

$$E \cong k((t)), \quad (2.1)$$

où k est le corps résiduel de E (cf. [Bou06, Ch. IX, §3, no. 3, Th. 1]).

Soit $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Tout sous-groupe fermé de \mathbb{T} est fini (cf. [RZ00]), donc l'image d'un morphisme continu $\alpha : G_E \rightarrow \mathbb{T}$ est finie. Nous avons alors

$$\text{Hom}^{\text{cont}}(G_E, \mathbb{T}) = \text{Hom}^{\text{cont}}(G_E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \bigcup_{n \geq 1} \text{Hom}(G_E, (n^{-1}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}). \quad (2.2)$$

C'est un groupe abélien discret qui s'appelle le *dual de Pontriagyn* de G_E . En décomposant chaque $n^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en somme directe de groupes du type $\mathbb{Z}/\ell^s\mathbb{Z}$, où ℓ est premier, on obtient un isomorphisme canonique

$$\text{Hom}^{\text{cont}}(G_E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \bigoplus_{\ell=\text{premier}} \text{Hom}^{\text{cont}}(G_E, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell). \quad (2.3)$$

2.1. La filtration de Kato.

K.Kato a défini une filtration sur $\mathbf{CW}(E)$ qui induit une filtration quotient sur $\text{Hom}^{\text{cont}}(G_E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ par la suite d'Artin-Schreier-Witt (1.20). À partir de cette filtration on obtient une filtration sur le dual de Pontriagyn de G_E . Cela permet d'associer un conducteur de Swan à tout caractère fini de G_E qui coïncide avec celui de A.Abbes et T.Saito (cf. [AS02] and [AS09, 9.10]). Dans [CP09] nous avons calculé explicitement cette filtration.

Soit $v_t : k((t)) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, la valuation t -adique de E . Pour tout covecteur $(\cdots, 0, 0, \lambda_0, \dots, \lambda_s) \in \mathbf{CW}(E)$ posons

$$v_t(\cdots, 0, 0, \lambda_0, \dots, \lambda_s) := \min(p^s \cdot v_t(\lambda_0), p^{s-1} \cdot v_t(\lambda_1), \dots, v_t(\lambda_s)). \quad (2.4)$$

C'est une fonction sur $\mathbf{CW}(E)$ qui vérifie $v_t(\mathbf{0}) = +\infty$, $v_t(\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2) \geq \min(v_t(\boldsymbol{\lambda}_1), v_t(\boldsymbol{\lambda}_2))$, $v_t(\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\lambda})) = p \cdot v_t(\boldsymbol{\lambda})$. Elle définit donc une filtration sur $\mathbf{CW}(E)$ par la règle

$$\text{Fil}_d(\mathbf{CW}(E)) := \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{CW}(E) \mid v_t(\boldsymbol{\lambda}) \geq -d\}. \quad (2.5)$$

Soit $\delta : \mathbf{CW}(E) \rightarrow \text{Hom}^{\text{cont}}(G_E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = H_{\text{cont}}^1(G_E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ la projection (1.20) de Artin-Schreier-Witt. On pose

$$\text{Fil}_d(H_{\text{cont}}^1(G_E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) := \delta(\text{Fil}_d(\mathbf{CW}(E))). \quad (2.6)$$

Et si τ_p dénote la projection sur le p -ème facteur de (2.3), alors

$$\text{Fil}_d(\text{Hom}^{\text{cont}}(G_E, \mathbb{T})) := \tau_p^{-1}(\text{Hom}^{\text{cont}}(G_E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)). \quad (2.7)$$

Si $\alpha : G_E \rightarrow \mathbb{T}$ est un caractère continu de G_E , nous définissons la *conducteur de Swan* de α par

$$\text{sw}(\alpha) := \min\{d \geq 0 \mid \alpha \in \text{Fil}_d(\text{Hom}^{\text{cont}}(G_E, \mathbb{T}))\}. \quad (2.8)$$

2.2. Le calcul explicite de la filtration.

Nous souhaitons maintenant calculer cette filtration explicitement. Nous nous bornons dans ce mémoire à indiquer des ingrédients, et nous renvoyons à [CP09] pour une exposition plus exhaustive.

Lemme 2.2.1. *La décomposition $k((t)) = t^{-1}k[t^{-1}] \oplus k \oplus tk[[t]]$ donne lieu à une décomposition*

$$\mathbf{CW}(E) = \mathbf{CW}(t^{-1}k[t^{-1}]) \oplus \mathbf{CW}(k) \oplus \mathbf{CW}(tk[[t]]). \quad \square \quad (2.9)$$

C'est en effet une décomposition en \bar{F} -modules, i.e. chaque terme est stable par \bar{F} . On peut montrer que \bar{F} est bijectif sur $\mathbf{CW}(tk[[t]])$, et donc que l'image par δ de $\mathbf{CW}(tk[[t]])$ est nulle dans (1.20).

Lemme 2.2.2. *Le terme $\mathbf{CW}(k)/(\bar{F} - 1)\mathbf{CW}(k) = H_{\text{cont}}^1(G_k, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ coïncide avec la filtration en degré 0 de $H_{\text{cont}}^1(G_E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$. \square*

Nous nous concentrons donc sur le terme $\mathbf{CW}(t^{-1}k[t^{-1}])$ qui contrôle l'inertie sauvage. Pour cela nous avons généralisé aux covecteurs la décomposition $t^{-1}k[t^{-1}] = \bigoplus_{d>0} k \cdot t^{-d}$ en monômes, et ensuite nous avons calculé comment l'endomorphisme \bar{F} permute les facteurs.

Soit $\mathbb{J}_p := \{n \in \mathbb{Z}, n \geq 1, (n, p) = 1\}$. Soit $d = np^m > 0$, $m \geq 0$, $n \in \mathbb{J}_p$. Pour tout $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{W}_m(k)$, nous posons

$$\lambda t^{-d} := (\dots, 0, \lambda_0 t^{-n}, \lambda_1 t^{-np}, \dots, \lambda_m t^{-np^m}). \quad (2.10)$$

Lemme 2.2.3. *La flèche $\lambda \mapsto \lambda t^{-d}$ de $\mathbf{W}_m(k) \rightarrow \mathbf{CW}(E)$ est un morphisme injectif de groupes. Si $\mathbf{CW}^{(-d)}(k) \cong \mathbf{W}_m(k)$ est l'image de cette flèche, on a*

$$\mathbf{CW}(t^{-1}k[t^{-1}]) = \bigoplus_{d>0} \mathbf{CW}^{(-d)}(k). \quad \square \quad (2.11)$$

Le Frobenius \bar{F} agit sur ces monômes comme $\bar{F}(\lambda t^{-d}) = (p\lambda)t^{-pd}$ où $p = V\bar{F} : \mathbf{W}_m(k) \rightarrow \mathbf{W}_{m+1}(k)$ est l'application $(\lambda_0, \dots, \lambda_m) \mapsto (0, \lambda_0^p, \dots, \lambda_m^p)$. Donc l'inclusion

$$\bar{F} : \mathbf{CW}^{(-d)}(k) \subset \mathbf{CW}^{(-pd)}(k) \quad (2.12)$$

correspond à la multiplication par p

$$p : \mathbf{W}_m(k) \rightarrow \mathbf{W}_{m+1}(k), \quad p(\lambda_0, \dots, \lambda_m) = (0, \lambda_0^p, \dots, \lambda_m^p). \quad (2.13)$$

Définissons le groupe des covecteurs tordus par

$$\widetilde{\mathbf{CW}}(k) := \varinjlim_m (\mathbf{W}_m(k) \xrightarrow{p} \mathbf{W}_{m+1}(k) \xrightarrow{p} \dots). \quad (2.14)$$

Si k est parfait, alors $\mathbf{CW}(k)$ et $\widetilde{\mathbf{CW}}(k)$ sont isomorphes. Tout comme $\mathbf{CW}(k)$, $\widetilde{\mathbf{CW}}(k)$ a une filtration naturelle :

$$\text{Fil}_m(\widetilde{\mathbf{CW}}(k)) := \mathbf{W}_m(k), \quad (2.15)$$

où nous avons identifié $\mathbf{W}_m(k)$ avec son image dans $\widetilde{\mathbf{CW}}(k)$.

En explicitant le quotient par $(\bar{F} - 1)$ nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.2.4 ([CP09]). *Nous avons les descriptions suivantes :*

i) *Nous avons*

$$H_{\text{cont}}^1(G_E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \frac{\mathbf{CW}(E)}{(\overline{F}-1)\mathbf{CW}(E)} \cong \widetilde{\mathbf{CW}}(k)^{(\mathbb{J}_p)} \oplus \frac{\mathbf{CW}(k)}{(\overline{F}-1)\mathbf{CW}(k)}, \quad (2.16)$$

où $\widetilde{\mathbf{CW}}(k)^{(\mathbb{J}_p)}$ est la somme directe de copies de $\widetilde{\mathbf{CW}}(k)$ indexée sur \mathbb{J}_p .

ii) *Pour $d = 0$ on a*

$$\text{Fil}_0(H_{\text{cont}}^1(G_E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) = \frac{\mathbf{CW}(k)}{(\overline{F}-1)\mathbf{CW}(k)}. \quad (2.17)$$

et pour $d \geq 1$ on a

$$\text{Fil}_d(H_{\text{cont}}^1(G_E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) = \bigoplus_{n \in \mathbb{J}_p} \text{Fil}_{m_{n,d}}(\widetilde{\mathbf{CW}}(k)) \oplus \frac{\mathbf{CW}(k)}{(\overline{F}-1)\mathbf{CW}(k)}, \quad (2.18)$$

où $m_{n,d} := \max\{m \geq 0 \mid np^m \leq d\}$. En particulier le d -gradué est donné par

$$\text{Gr}_d(H_{\text{cont}}^1(G_E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) = \begin{cases} \mathbf{W}_{v_p(d)}(k)/p\mathbf{W}_{v_p(d)}(k) & \text{si } d > 0; \\ \frac{\mathbf{CW}(k)}{(\overline{F}-1)\mathbf{CW}(k)} & \text{si } d = 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

où $v_p(d)$ est la valuation p -adique de d .

3. Exponentiels

Soit $\mathbb{J}_p := \{n \in \mathbb{Z}, n \geq 1, (n, p) = 1\}$.

3.1. Exponentiel d'Artin-Hasse

Soit $A \mapsto 1 + TA[[T]]$ le foncteur en groupes abéliens dont la loi de groupe est donnée par la multiplication de séries. Nous avons un morphisme de foncteurs en groupes abéliens

$$E(-, T) : \mathbf{W}(A) \rightarrow 1 + TA[[T]], \quad E((a_0, a_1, \dots), T) := \prod_{n \in \mathbb{J}_p} \prod_{m \geq 0} (1 - a_m^n T^{np^m})^{-\frac{\mu(n)}{n}} \quad (3.1)$$

où

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1; \\ 0 & \text{si } n \text{ a un facteur carré (i.e. si } k^2 \mid n \text{ avec } k \geq 2); \\ (-1)^r & \text{si la factorisation de } n \text{ en nombres premiers est} \\ & n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r, \text{ avec } p_i \neq p_j \text{ pour } i \neq j. \end{cases} \quad (3.2)$$

Supposons que A soit une $\mathbb{Z}[1/p]$ -anneau. Dans ce cas nous avons

$$E((a_0, a_1, \dots), T) = \exp\left(\phi_0 T + \phi_1 \frac{T^p}{p} + \phi_2 \frac{T^{p^2}}{p^2} + \cdots\right) \quad (3.3)$$

où (ϕ_0, ϕ_1, \dots) est le vecteur fantôme associé à (a_0, a_1, \dots) . Le fait que ce soit un morphisme de groupes n'est rien d'autre que l'additivité de l'application ϕ (cf. (1.2)). En effet, pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{W}(A)$ de composantes fantôme $(\phi_m(\mathbf{a}))_{m \geq 0}$ et $(\phi_m(\mathbf{b}))_{m \geq 0}$ nous avons

$$E(\mathbf{a} + \mathbf{b}, T) = E(\mathbf{a}, T) \cdot E(\mathbf{b}, T) = \exp\left(\sum_{m \geq 0} (\phi_m(\mathbf{a}) + \phi_m(\mathbf{b})) \frac{T^{p^m}}{p^m}\right). \quad (3.4)$$

3.2. Groupes de Lubin-Tate sur \mathbb{Z}_p

Dans [LT65], J.Lubin et J.Tate ont montré que si $P(X) \in \mathbb{Z}_p[[T]]$ est une série vérifiant

$$P(0) = 0, \quad P(T) = puT \pmod{T^2 \mathbb{Z}_p[[T]]}, \quad P(T) \equiv T^p \pmod{p \mathbb{Z}_p[[T]]} \quad (3.5)$$

où $u \in \mathbb{Z}_p^\times$, alors il existe un unique loi de Groupe formel $\mathfrak{G}_P(X, Y) \in \mathbb{Z}_p[[X, Y]]$ telle que $P(T)$ soit la multiplication par pu dans \mathfrak{G}_P . Supposons à partir de maintenant que $u = 1$. Cela revient à supposer que $\mathfrak{G}_P \cong \mathbb{G}_m$.

Soit \mathbb{C}_p le complété d'une clôture algébrique de \mathbb{Q}_p . Notons par $\mathfrak{m} := \{x \in \mathbb{C}_p, |x| < 1\}$. Alors \mathfrak{G}_P induit une loi de groupe sur l'ensemble \mathfrak{m} par $x \cdot y := \mathfrak{G}_P(x, y)$. La multiplication par p^{m+1} est donnée par

$$p^{m+1} \cdot x = P^{[m+1]}(x) := \underbrace{P(P(\dots(P(x))\dots))}_{(m+1)\text{-fois}}. \quad (3.6)$$

Son noyau $\Lambda_{P,m} := \text{Ker}(p^{m+1})$ est l'ensemble des $\pi_m \in \mathfrak{m}$ tels que $P^{[m+1]}(\pi_m) = 0$. C'est un sous groupe fini de \mathfrak{m} par la loi \mathfrak{G}_P , qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}$.

Le module de Tate de \mathfrak{G}_P est la limite projective

$$\mathbb{T}(\mathfrak{G}_P) := \varprojlim_m (\dots \xrightarrow{p} \Lambda_{P,m} \xrightarrow{p} \Lambda_{P,m-1}). \quad (3.7)$$

C'est un groupe pro-cyclique dont un générateur topologique est donné par une suite de nombres algébriques $(\pi_m)_{m \geq 0}$ satisfaisants

- i) $|\pi_m| < 1$ pour tout $m \geq 0$;
- ii) $P(\pi_0) = 0$, et $\pi_0 \neq 0$;
- iii) $P(\pi_{m+1}) = \pi_m$ pour tout $m \geq 0$.

Nous ne dirons rien de plus sur les groupes de Lubin-Tate.

3.3. Noyau du Frobenius.

Soit A un anneau commutatif avec unité. Pour $m \geq 1$, nous nous intéressons maintenant à décrire le noyau ${}_m\mathbf{W}(A) := \text{Ker}(F^{m+1})$ du Frobenius

$$0 \rightarrow {}_m\mathbf{W}(A) \rightarrow \mathbf{W}(A) \xrightarrow{F^{m+1}} \mathbf{W}(A) \quad (3.8)$$

qui est un idéal de $\mathbf{W}(A)$. Si p ne divise pas zéro dans A , l'application fantôme (1.3) est injective et les vecteurs λ dans le noyau de F^{m+1} sont ceux dont le vecteur fantôme est de la forme

$$\phi(\lambda) = (\phi_0, \dots, \phi_m, 0, 0, \dots). \quad (3.9)$$

Lemme 3.3.1. *Pour tout anneau A , la multiplication par un élément de $V^{m+1}\mathbf{W}(A)$ est nulle sur l'idéal ${}_m\mathbf{W}(A) \subseteq \mathbf{W}(A)$ qui est donc canoniquement un $\mathbf{W}_m(A)$ -module.*

Démonstration. Le lemme se démontre facilement à l'aide des Lemmes 1.0.1 et 1.0.2 en regardant l'image de l'application fantôme (1.3). \square

Soit \mathfrak{G}_P un groupe de Lubin-Tate sur \mathbb{Z}_p . Soit K/\mathbb{Q}_p une extension de corps valués complets contenant $\Lambda_{P,m}$. Et soit K° l'anneau des entiers de K . Le but de ce paragraphe est de montrer que si $A = K^\circ$ ou $A = K$, alors ${}_m\mathbf{W}(A)$ est un $\mathbf{W}_m(A)$ -module libre de rang un. Pour ce faire nous allons en exhiber un générateur à l'aide de la multiplication par p dans \mathfrak{G}_P .

Grâce à (3.5), l'endomorphisme $h(X) \mapsto h(P(X))$ de $\mathbb{Z}_p[[X]]$ induit le Frobenius de $\mathbb{F}_p[[X]]$. Par [Bou06, Ch.IX, §1, Ex. 14], il existe donc une, et une seule, flèche

$$s_P : \mathbb{Z}_p[[X]] \rightarrow \mathbf{W}(\mathbb{Z}_p[[X]]) \quad (3.10)$$

dont la composition avec l'application fantôme donne

$$\phi(s_P(h(X))) = (h(X), h(P(X)), h(P(P(X))), h(P(P(P(X))))), \dots). \quad (3.11)$$

Soit $(\pi_m)_{\geq 0}$ un générateur topologique de $\mathbf{T}(\mathfrak{G}_P)$ (cf. (3.7)). Pour tout $m \geq 0$, nous avons un unique morphisme continu \mathbb{Z}_p -linéaire d'anneaux $\mathbb{Z}_p[[X]] \rightarrow K^\circ$ qui envoie $X \mapsto \pi_m$. Par functorialité on a une flèche

$$\mathbb{Z}_p[[X]] \xrightarrow{s_P} \mathbf{W}(\mathbb{Z}_p[[X]]) \xrightarrow{X \mapsto \pi_m} \mathbf{W}(K^\circ). \quad (3.12)$$

Il suit de (3.11) que l'image de X par cette flèche est un vecteur, noté $[\pi_m] \in \mathbf{W}(K^\circ)$, qui vérifie

$$\phi([\pi_m]) = (\pi_m, \pi_{m-1}, \dots, \pi_0, 0, 0, \dots). \quad (3.13)$$

Donc $[\pi_m] \in {}_m\mathbf{W}(L^\circ)$.

La proposition suivante a été précisée par R.Richard :

Proposition 3.3.2 ([Pul07, Prop. 2.1], [Ric14, Thm. 1]). *Si $A = L^\circ$ ou $A = K$, alors ${}_m\mathbf{W}(A)$ est un $\mathbf{W}_m(A)$ -module libre engendré par $[\pi_m]$.* \square

3.4. Exponentielles de Robba

Soit K un corps valué complet de caractéristique 0 de corps résiduel \tilde{K} de caractéristique positive $p > 1$. Notons K° son anneau des entiers, et supposons que $\pi_m \in K^\circ$.

Pour $A = K^\circ, K$, on vient de voir que le vecteur $[\pi_m] \in \mathbf{W}(A)$ engendre le noyau du Frobenius ${}_m\mathbf{W}(A)$ qui est un $\mathbf{W}_m(A)$ -module libre de rang un. Tout vecteur dans ${}_m\mathbf{W}(A)$ s'écrit alors de manière unique comme $\lambda[\pi_m] \in {}_m\mathbf{W}(A) \subset \mathbf{W}(A)$, avec $\lambda \in \mathbf{W}_m(A)$. L'exponentielle d'Artin-Hasse d'un tel vecteur est

$$e_{p^m}(\lambda, T) := E(\lambda[\pi_m], T) = \exp\left(\pi_m \phi_0 T + \pi_{m-1} \phi_1 \frac{T^p}{p} + \dots + \pi_0 \phi_m \frac{T^{p^m}}{p^m}\right), \quad (3.14)$$

où (ϕ_0, \dots, ϕ_m) est le vecteur fantôme de λ . Cette exponentielle s'appelle une exponentielle de Robba.

Nous remarquons la ressemblance de cette expression avec un monôme (2.10), dont nous parlerons plus précisément dans un instant. Nous généralisons alors cette construction à tout $d > 0$ comme de suite. Si $d = np^m > 0$, avec $n \in \mathbb{J}_p$ et $m \geq 0$, et si $\lambda \in \mathbf{W}_m(A)$ on pose

$$e_d(\lambda, T) := \exp\left(\pi_m \phi_0 T^n + \pi_{m-1} \phi_1 \frac{T^{np}}{p} + \dots + \pi_0 \phi_m \frac{T^{np^m}}{p^m}\right). \quad (3.15)$$

Par construction $e_d(\lambda, T) \in 1 + TA[[T]]$, en particulier si $\lambda \in \mathbf{W}_m(K^\circ)$, alors les coefficients de la série sont donc bornés et cette série converge dans le disque unité ouvert $D^-(0, 1)$.

Proposition 3.4.1 ([Pul07, Lemma 1.3, Thm. 2.2]). *Pour $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{W}_m(K)$ le disque exact de convergence de $e_d(\lambda, T)$ est $D^-(0, R)$ où*

$$R = \min_{i=0, \dots, m} |\lambda_i|^{-1/np^i}. \quad (3.16)$$

Démonstration. La preuve commence par exprimer $e_d(\lambda, T)$ comme

$$e_d(\lambda, T) = \prod_{i=0}^m e_{p^{m-i}}((1, 0, \dots, 0), \lambda_i T^{np^i}). \quad (3.17)$$

D'abord on montre que pour tout $i = 0, \dots, m$ la série $e_{p^{m-i}}(\mathbf{1}, \lambda_i T^{np^i})$ converge exactement sur le disque $D^-(0, |\lambda_i|^{-1/np^i})$. Cela se réduit facilement au cas d'une exponentielle $e_{p^{m-i}}(\mathbf{1}, T)$ qui (par construction) converge dans le disque $D^-(0, 1)$. Pour montrer que cette dernière ne converge pas plus que ça, on regarde la fonction *rayon de convergence* $\rho \mapsto \mathcal{R}_{\emptyset, 1}(x_{0, \rho}, \mathcal{F})$ de l'équation différentielle \mathcal{F} dont elle est solution (nous reparlerons plus précisément plus loin de la fonction Rayon). On sait calculer $\mathcal{R}_{\emptyset, 1}(x_{0, \rho}, \mathcal{F})$ pour $\rho \gg 0$ par le théorème de Young [You92] et on découvre qu'elle

coïncide à l'infini (en coordonnée logarithmiques) avec une droite qui passe par l'origine des axes. On en déduit que la fonction $\mathcal{R}_{\emptyset,1}(x_{0,\rho}, \mathcal{F})$ ne peut pas être constante à l'origine car elle est continue, concave, et constante en $-\infty$. Donc la solution ne peut pas converger au delà de $D^-(0, 1)$.

Nous avons vu dans l'introduction qu'il peut y avoir des phénomènes de surconvergence. Donc il faut faire attention avec le produit. On peut montrer que si deux exponentielles ont rayons de convergence différents alors leur produit a pour rayon le plus petit rayon des deux.¹⁰ Si les rayons des deux exponentielles sont égaux on regarde alors la *pente des fonctions rayons de convergence* des deux opérateurs correspondants sur un germe de segment sortant du disque de convergence. On montre que les pentes sont toutes différentes, et on en déduit que la fonction rayon est le minimum des deux. \square

Nous considérons maintenant deux vecteurs de Witt $\lambda, \lambda^{(\overline{\mathbb{F}})} \in \mathbf{W}_m(K^\circ)$ tels que leurs images $\overline{\lambda}$ et $\lambda^{(\overline{\mathbb{F}})}$ dans $\mathbf{W}_m(\overline{K})$ vérifient

$$\overline{\mathbb{F}}(\overline{\lambda}) = \overline{\lambda^{(\overline{\mathbb{F}})}}. \quad (3.18)$$

Proposition 3.4.2 ([Pul07, Thm. 2.5]). *La fonction*

$$\frac{e_d(\lambda^{(\overline{\mathbb{F}})}, T^p)}{e_d(\lambda, T)} \quad (3.19)$$

est surconvergente (i.e. converge dans un disque $D^-(0, R)$, avec $R > 1$). \square

La preuve se fait en exprimant la série sous la forme $e_{pd}(\mu, T)$, et en appliquant la Proposition précédente (3.16). Pour ce faire on utilise la série $P(X)$ définissant la multiplication par p dans le groupe de Lubin-Tate \mathfrak{G}_P .

3.5. L'exponentielle $e_{p^\infty}(\mathbf{f}^-(T), 1)$.

Nous souhaitons passer à la limite inductive et définir une application de type exponentielle sur $\mathbf{CW}(K^\circ)$ à l'aide des exponentielles de Robba. On rencontre le problème que les exponentielles de Robba ne sont pas compatibles au Verschiebung :

$$e_{p^{m+1}}(V(\lambda), T) = e_{p^m}(\lambda, T^p). \quad (3.20)$$

L'obstruction à la compatibilité vient du fait que T dévient T^p . On observe que pour avoir compatibilité on est naturellement conduits à spécialiser la variable et poser $T = 1$, mais cela n'a un sens que si la série est surconvergente. L'idée est alors de donner un sens à cette spécialisation et ajoutant une variable formelle.

Soit A un anneau commutatif avec unité. Soit $d > 0$, et soient $n \in \mathbb{J}_p$, $m \geq 0$, l'unique couple de nombres tels que $d = np^m$. Soit $\lambda \in \mathbf{W}_m(A)$. On appelle *co-monôme* de degré d associé à λ le co-vecteur de Witt

$$\lambda T^d := (\dots, 0, 0, \lambda_0 T^m, \lambda_1 T^{np}, \dots, \lambda_m T^{np^m}) \in \mathbf{CW}(TA[T]). \quad (3.21)$$

La flèche $\mathbf{W}_m(A) \rightarrow \mathbf{CW}(TA[T])$ ainsi définie est un morphisme injectif de groupes additifs. Notons son image par $\mathbf{CW}^{(d)}(A)$. Si $A = K^\circ$, ou $A = K$, l'exponentielle d'Artin-Hasse d'un co-monôme est

$$e_{p^m}(\lambda T^d, Y) = E(\lambda T^d[\pi_m], Y) = \exp\left(\pi_m \phi_0 T^n Y + \pi_{m-1} \phi_1 T^{np} \frac{Y^p}{p} + \dots + \pi_0 \phi_m T^{np^m} \frac{Y^{p^m}}{p^m}\right) \quad (3.22)$$

10. Attention car ce n'est pas un fait général, par exemple $(x+1)^{\frac{1}{x+1}}$ converge avec un rayon $+\infty$. C'est une propriété qui ne marche qu'avec les rayons spectrales non solubles des équations différentielles (voir section 10.2).

où (ϕ_0, \dots, ϕ_m) est le vecteur fantôme de λ , et Y est une autre variable. En spécialisant $Y = 1$ on retrouve notre exponentielle de Robba :

$$e_{p^m}(\lambda T^d, 1) = e_d(\lambda, T). \quad (3.23)$$

Les exponentielles de Robba sont alors des valeurs en $Y = 1$ d'exponentielles de vecteurs de Witt à coefficients dans $TA[T]$.

Nous sommes finalement conduits à donner la définition suivante :

Définition 3.5.1. *Soit A un anneau commutatif avec unité contenant $\cup_m \mathbb{Z}[\Lambda_{P,m}]$. Soit $\mathbf{f}^+(T) := (\dots, f_0^+(T), \dots, f_m^+(T)) \in \mathbf{CW}(TA^\circ[T])$. Nous posons*

$$e_{p^\infty}(\mathbf{f}^+(T), 1) := \exp\left(\pi_m \phi_0^+(T) + \pi_{m-1} \frac{\phi_1^+(T)}{p} + \dots + \pi_0 \frac{\phi_m^+(T)}{p^m}\right). \quad (3.24)$$

Cela définit un morphisme de groupes

$$e_{p^\infty}(-, 1) : \mathbf{CW}(TA[T]) \longrightarrow 1 + TA[[T]]. \quad (3.25)$$

Le lien avec les exponentielles de Robba est donné par (3.23), et par la proposition suivante :

Proposition 3.5.2. *On a une décomposition*

$$\mathbf{CW}(TA[T]) \cong \bigoplus_{d>0} \mathbf{CW}^{(d)}(A). \quad (3.26)$$

Autrement dit tout covecteur $\mathbf{f}^+(T) \in \mathbf{CW}(TA[T])$ s'écrit de manière unique comme une somme finie

$$\mathbf{f}^+(T) = \sum_{d>0} \lambda_d \cdot T^d, \quad (3.27)$$

où $\lambda_d \in \mathbf{W}_{v_p(d)}(A)$. Par conséquence toute exponentielle $e_{p^\infty}(\mathbf{f}^+(T), 1)$ se décompose de manière unique en exponentielles de Robba :

$$e_{p^\infty}(\mathbf{f}^+(T), 1) = e_{p^\infty}\left(\sum_{d>0} \lambda_d \cdot T^d, 1\right) = \prod_{d>0} e_{p^\infty}(\lambda_d \cdot T^d, 1) = \prod_{d>0} e_d(\lambda_d, T). \quad \square \quad (3.28)$$

Pour $A = K^\circ$, les propositions précédentes sur les exponentielles de Robba, donnent alors le théorème suivant qui fait le pont entre *surconvergence des exponentielles* et *caractères d'Artin-Schreier-Witt (à l'infini)* :

Théorème 3.5.3. *Soit $\mathbf{f}^+(T) \in \mathbf{CW}(TK^\circ[T])$. La série $e_{p^\infty}(\mathbf{f}^+(T), 1)$ est surconvergence si et seulement si la réduction de $\mathbf{f}^+(T)$ dans $\mathbf{CW}(T\tilde{K}[T])$ appartient à l'image de la flèche*

$$\bar{F} - 1 : \mathbf{CW}(T\tilde{K}[T]) \rightarrow \mathbf{CW}(T\tilde{K}[T]). \quad \square \quad (3.29)$$

3.5.1. Formule du Rayon. Supposons que $A = K$. Si $f := \sum_{k \geq 0} b_k T^k \in K[[T]]$ est une série formelle, posons

$$\mathcal{R}(f) := \liminf_k |b_k|^{-1/k}. \quad (3.30)$$

C'est le rayon du plus grand disque ouvert sur lequel f converge. Nous nous proposons maintenant de donner une formule pour le rayon d'une série de la forme particulière

$$f = \exp\left(\sum_{d=0}^s a_d T^d\right) \in 1 + TK[[T]]. \quad (3.31)$$

Nous commençons par remarquer que toute exponentielle de ce type s'écrit naturellement comme un produit d'exponentielles de Robba. Notamment pour tout $n \in \mathbb{J}_q$, $n \leq s$, soit $m_n := \max\{m \mid np^m \leq s\}$, et soit $\lambda_n \in \mathbf{W}_{m_n}(K)$ le vecteur de Witt de composantes fantôme

$$\phi(\lambda_n) = \left(\frac{a_n}{\pi_{m_n}}, \frac{p \cdot a_{np}}{\pi_{m_n-1}}, \frac{p^2 \cdot a_{np^2}}{\pi_{m_n-2}}, \dots, \frac{p^{m_n} \cdot a_{np^{m_n}}}{\pi_0} \right) \quad (3.32)$$

alors

$$\exp\left(\sum_{d=0}^s a_d T^d\right) = \exp\left(\sum_{n \in \mathbb{J}_p} \sum_m a_{np^m} T^{np^m}\right) \quad (3.33)$$

$$= \prod_{n \in \mathbb{J}_p, n \leq s} \exp\left(\sum_{m=0}^{m_n} a_{np^m} T^{np^m}\right) \quad (3.34)$$

$$= \prod_{n \in \mathbb{J}_p, n \leq s} e_{p^{m_n}}(\lambda_n, T) \quad (3.35)$$

$$= \prod_{n \in \mathbb{J}_p, n \leq s} e_{p^\infty}(\lambda_n \cdot T^{p^{m_n}}, 1) \quad (3.36)$$

$$= e_{p^\infty}\left(\sum_{n \in \mathbb{J}_p, n \leq s} \lambda_n \cdot T^{p^{m_n}}, 1\right). \quad (3.37)$$

Théorème 3.5.4 ([Chr11], Appendice A). *La rayon de convergence de l'exponentielle (3.31) est*

$$\mathcal{R}(f) := \min_{n \in \mathbb{J}_p} \min_{0 \leq m \leq m_n} |\lambda_{n,m}|^{-\frac{1}{np^m}}. \quad (3.38)$$

En particulier une exponentielle de ce type n'a jamais rayon nul. \square

La preuve est analogue à celle de la Proposition 3.4.1, nous renvoyons à l'appendice A pour plus d'explications.

3.5.2. Cas des équations différentielles. Soit $g(T) \in K[T]$ un polynôme de degré s . On considère l'équation différentielle

$$y' = g(T)y. \quad (3.39)$$

Soit $G(T)$ une primitive formelle de $g(T)$. Soit Ω/K un corps valué complet et soit $t \in \Omega$. Alors la solution formelle de l'équation (3.39) au voisinage du point t est donnée par

$$y(T, t) := \exp(G(T) - G(t)) = \exp\left(\sum_{d=1}^{s+1} g^{(d-1)}(t) \frac{(T-t)^d}{d!}\right). \quad (3.40)$$

On peut décomposer cette exponentielle en exponentielles de Robba, et calculer son Rayon à l'aide du Théorème 3.5.4 :

Corollaire 3.5.5 (Formule du Rayon). *Pour tout $n \in \mathbb{J}_p$, $n \leq s+1$, soit $m_n := \max\{m \mid np^m \leq s+1\}$, et soit $\lambda_n(t) = (\lambda_{n,0}(t), \dots, \lambda_{n,m_n}(t)) \in \mathbf{W}_{m_n}(\Omega)$ le vecteur de Witt de composantes fantôme*

$$\phi(\lambda_n(t)) = \left(\frac{g^{(n-1)}(t)}{\pi_{m_n} n!}, \frac{g^{(np-1)}(t)}{n \cdot \pi_{m_n-1} \cdot (np-1)!}, \frac{g^{(np^2-1)}(t)}{n \cdot \pi_{m_n-2} \cdot (np^2-1)!}, \dots, \frac{g^{(np^{m_n}-1)}(t)}{n \cdot \pi_0 \cdot (np^{m_n}-1)!} \right). \quad (3.41)$$

Alors le rayon de convergence de la série $y(T, t)$ est

$$\mathcal{R}(y(T, t)) = \min_{n \in \mathbb{J}_p, n \leq s+1} \min_{m=0, \dots, m_n} |\lambda_{n,m}(t)|^{-\frac{1}{np^m}}. \quad \square \quad (3.42)$$

Dans le langage de Berkovich on voit que le Rayon $\mathcal{R}(y(T, t))$ ne dépend que de la semi-norme sur $K[T]$ définie par le par l'évaluation au point $t \in \Omega$. Cette semi-norme est un point de l'espace de Berkovich $\mathbb{A}_K^{1, \text{an}}$. La formule 3.42 dit alors que la fonction rayon de convergence est continue sur l'espace de Berkovich. Et puisque le nombre de polynômes $\lambda_{n,m}(T) \in K[T]$ intervenant est fini, on voit qu'elle se factorise par la rétraction par un sous-graphe fini Γ de $\mathbb{A}_K^{1, \text{an}}$. Nous verrons dans les chapitre 2 plus en détail ce que cela signifie.

Signalons seulement ici que ce graphe Γ est visiblement contenu dans celui qui a pour sommets la réunion des zéros de tous les polynômes $\lambda_{n,m}$ (et l'infini).

4. Équations différentielles de rang un sur l'anneau de Robba.

Dans cette section nous décrivons les classes d'isomorphisme des équations différentielles de rang un sur l'anneau de Robba. Nous commençons par donner quelque définition.

Soit K un corps valué complet par rapport à une valuation ultramétrique. L'anneau de Robba est défini comme

$$\mathfrak{R} := \bigcup_{0 < s < 1} \mathcal{O}(C(0; s, 1)) \quad (4.1)$$

où $C(0; s, 1) := \{s < |T| < 1\}$ est la couronne ouverte de rayons s et 1 , et

$$\mathcal{O}(C(0; s, 1)) := \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i T^i \mid a_i \in K, \lim_{i \rightarrow \pm\infty} |a_i| \rho^i = 0, \text{ pour tout } \rho \in]s, 1[\right\}. \quad (4.2)$$

Remarquons que si la valuation de K est triviale, alors $\mathfrak{R} = K((T))$.

Dans cette section nous supposons que le corps résiduel \tilde{K} de K a caractéristique positive $p > 0$.

4.1. Groupe de Picard

Notons par $\partial := T \frac{d}{dT}$. Deux équations différentielles $\partial(y) = g_1(T)y$ et $\partial(y) = g_2(T)y$ sont isomorphes si et seulement si il existe une fonction inversible $h \in \mathfrak{R}^\times$ telle que $g_1 = g_2 + \frac{\partial(h)}{h}$. Une équation est triviale si et seulement si elle est isomorphe à l'équation $\partial(y) = 0$. Le produit tensoriel de deux équations est l'équation $\partial(y) = (g_1 + g_2)y$. Le groupe, par produit tensoriel, des classes d'isomorphisme des équations différentielles d'ordre un sera noté $\text{Pic}(\mathfrak{R})$.

4.2. Rayon de convergence, et pente.

Soit

$$L : \partial(y) = g(T)y, \quad g(T) \in \mathfrak{R}, \quad (4.3)$$

une équation différentielle d'ordre un. Supposons que $g(T)$ converge pour $s < |T| < 1$. Soit Ω/K une extension de corps valué, et soit $t \in \Omega$ un point tel que $s < |t| < 1$.

L'expression (3.40) a un sens

$$y(T, t) := \exp(G(T) - G(t)) = \exp\left(\sum_{d>0} g^{(d-1)}(t) \frac{(T-t)^d}{d!}\right), \quad (4.4)$$

mais son rayon de convergence n'est pas invariant par isomorphismes. Écrivons

$$y(T, t) := \sum_{n \geq 0} b_n (T-t)^n, \quad b_n \in \Omega. \quad (4.5)$$

Alors pour rendre invariant par changements de base on doit poser

$$\mathcal{R}(L, t) := \frac{1}{|t|} \min(\liminf_n |b_n|^{-1/n}, |t|). \quad (4.6)$$

Le terme $1/|t|$ est la juste pour une question de normalisation qui sera clarifié dans la prochaine section. Maintenant pour tout $\rho \in]s, 1[$, on peut montrer qu'il existe une extension Ω/K , telle que pour tout extension ultérieure Ω'/Ω , on a $\min_{t \in \Omega, |t|=\rho} \mathcal{R}(L, t) = \min_{t \in \Omega', |t|=\rho} \mathcal{R}(L, t)$. La définition suivante a alors un sens

$$\mathcal{R}(L, \rho) := \min_{\Omega/K} \min_{|t|=\rho, t \in \Omega} \mathcal{R}(L, t) . \quad (4.7)$$

Dans le langage du chapitre II cela revient à poser $\mathcal{R}_{\emptyset,1}(\mathcal{L}, x_{0,\rho})$, où $x_{0,\rho}$ est le point de Berkovich au bord du disque $D^+(0, \rho)$.

On peut montrer que la fonction $\log(\rho) \mapsto \log(\mathcal{R}(L, \rho))$ est

- i) continue,
- ii) affine par morceaux,
- iii) concave sur $] \log(s), 0[$,
- iv) avec des pentes entières.

On peut voir que pour tout L_1, L_2 on a $\mathcal{R}(L_1 \otimes L_2, \rho) \geq \min(\mathcal{R}(L_1, \rho), \mathcal{R}(L_2, \rho))$.

Définition 4.2.1 (Solubilité). *Nous dirons que L est soluble, si*

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \mathcal{R}(L, \rho) = 1 . \quad (4.8)$$

Le produit tensoriel de deux équations solubles est une équation soluble. Le groupe, par produit tensoriel, de classes d'isomorphisme d'équations solubles sera noté par

$$\text{Pic}^{\text{sol}}(\mathfrak{R}) . \quad (4.9)$$

Comme les pentes sont entières, si L est soluble, que quitte à reprocher s à 1 elle a un nombre fini de changement de pente sur $]s, 1[$. La dernière pente en 1^- s'appelle l'irrégularité de l'équation, et on la note $\text{Irr}(L)$. Si L_1 et L_2 sont solubles on a $\text{Irr}(L_1 \otimes L_2) \leq \max(\text{Irr}(L_1), \text{Irr}(L_2))$.

4.3. Classification, cas du corps contenant les racines de l'unité.

Proposition 4.3.1 (Algebricité). *Soit $L : \partial(y) = g(T) \cdot y$, $g(T) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i T^i \in \mathfrak{R}$, une équation soluble. Alors $a_0 \in \mathbb{Z}_p$, et il existe $n > 0$ tel que L est isomorphe à l'équation*

$$L^- : \partial(y) = (g^-(T) + a_0)y , \quad (4.10)$$

où $g^-(T) = \sum_{i=-n}^- 1a_i T^i$. □

La proposition entraine que toute équation soluble est produit tensoriel d'une équation soluble, dite *modérée*, du type $\partial(y) = a_0 \cdot y$, avec $a_0 \in \mathbb{Z}_p$, et d'une équation soluble, dite *sauvage*, du type

$$\partial(y) = g^-(T)y , \quad g^-(T) \in T^{-1}K[T^{-1}] . \quad (4.11)$$

La solution d'une équation modérée est T^{a_0} . Elle est triviale si et seulement si $a_0 \in \mathbb{Z}$. Nous nous concentrons maintenant sur les équations sauvages. Soit $-d$ la valuation T -adique de $g^-(T)$. Soit $m(d) \geq 0$ le plus grand entier tel qu'il existe $n \in \mathbb{J}_p$ avec $n \leq d$ tel que $np^m \leq d$.

Théorème 4.3.2. *Si $\mu_{p^{m(d)}} \subset K$, alors l'équation sauvage (4.11) a une solution à l'infini de la forme*

$$y = e_{p^\infty}(\mathbf{f}^-(T), 1) . \quad (4.12)$$

pour un $\mathbf{f}^-(T) \in \mathbf{CW}(T^{-1}K^\circ[T^{-1}])$ convenable.

Deux équations sont isomorphes si, et seulement si, les covecteurs $\mathbf{f}^-(T)$ correspondants ont même image dans le quotient

$$\mathbf{CW}(T^{-1}K^\circ[T^{-1}]) \longrightarrow \mathbf{CW}(T^{-1}\tilde{K}[T^{-1}]) \longrightarrow \frac{\mathbf{CW}(T^{-1}\tilde{K}[T^{-1}])}{(\bar{\mathbb{F}} - 1)\mathbf{CW}(T^{-1}\tilde{K}[T^{-1}])}. \quad (4.13)$$

Si $\mu_{p^\infty} \subset K$, on a donc

$$\text{Pic}^{\text{sol}}(\mathfrak{R}) = (\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}) \oplus \frac{\mathbf{CW}(T^{-1}\tilde{K}[T^{-1}])}{(\bar{\mathbb{F}} - 1)\mathbf{CW}(T^{-1}\tilde{K}[T^{-1}])}. \quad (4.14)$$

Démonstration. L'hypothèse de solubilité entraîne que la solution de Taylor à l'infini converge avec rayon 1 et par le Corollaire 3.5.5 cela entraîne que le covecteur $\mathbf{f}^-(T)$ a des coefficients entiers. L'équation sauvage est triviale si et seulement si (4.12) appartient à l'anneau de Robba, ce qui signifie qu'elle est surconvergente. Le théorème découle alors du Corollaire 3.5.5. \square

4.4. Critère de solubilité.

Nous obtenons un critère de solubilité pour les équations différentielles de rang un à coefficients dans \mathfrak{R} , sans besoin de passer à $K(\cup_m \Lambda_{P,m})$.

Théorème 4.4.1. *Soit $g(T) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i T^i \in \mathfrak{R}$, avec $a_0 \in \mathbb{Z}_p$. Alors l'équation différentielle $\partial(y) = g(T)y$ est soluble si et seulement si, pour tout entier $n \in \mathbb{J}_p$, les vecteurs*

$$\left(-\frac{a_{-n}}{n}, -\frac{a_{-np}}{n}, -\frac{a_{-np^2}}{n}, \dots \right), \quad \left(\frac{a_n}{n}, \frac{a_{np}}{n}, \frac{a_{np^2}}{n}, \dots \right)$$

sont les vecteurs fantôme de vecteurs de Witt $\lambda_{-n} = (\lambda_{-n,0}, \lambda_{-n,1}, \dots)$ et $\lambda_n = (\lambda_{n,0}, \lambda_{n,1}, \dots)$ qui appartiennent à $\mathbf{W}(K^\circ)$. Notamment $\partial(y) = g(T)y$ est soluble si et seulement si il existe deux familles $\{\lambda_{n,m}\}_{n \in \mathbb{J}_p, m \geq 0}$ et $\{\lambda_{-n,m}\}_{n \in \mathbb{J}_p, m \geq 0}$ dans K° telles que

$$\begin{aligned} a_{-np^m} &= -n \cdot \phi_{-n,m} &:=& -n \cdot (\lambda_{-n,0}^{p^m} + p\lambda_{-n,1}^{p^{m-1}} + \dots + p^m \lambda_{-n,m}), \\ a_{np^m} &= n \cdot \phi_{n,m} &:=& n \cdot (\lambda_{n,0}^{p^m} + p\lambda_{n,1}^{p^{m-1}} + \dots + p^m \lambda_{n,m}). \end{aligned}$$

Remarque 4.4.2. *On remarque que si l'on considère une famille arbitraire de vecteurs $\{\lambda_{-n}, \lambda_n\}_{n \in \mathbb{J}_p}$ dans $\mathbf{W}(K^\circ)$, et si l'on forme la série formelle*

$$g(T) := \sum_{n \in \mathbb{J}_p} \sum_{m \geq 0} n \phi_{-n,m} T^{-np^m} + \sum_{n \in \mathbb{J}_p} \sum_{m \geq 0} n \phi_{n,m} T^{np^m},$$

il n'est pas vrai en général que cette série soit un élément de \mathfrak{R} , car en général elle ne converge nulle part. Nous avons obtenu dans [Pul07] une caractérisation des familles $\{\lambda_{-n}, \lambda_n\}_{(n,p)=1}$ pour lesquelles cette série est bien dans \mathfrak{R} , dont nous ne parlerons pas dans ce mémoire.

La preuve du théorème précédent nécessite l'introduction d'une classe d'exponentielles de longueur infinie du type suivant. Pour tout $\mathbf{f}^- \in \mathbf{W}(T^{-1}K^\circ[[T^{-1}]])$ et $\mathbf{f}^+ \in \mathbf{W}(TK^\circ[[T]])$ nous posons

$$E(\mathbf{f}^-(T), 1) := \exp\left(\phi_0^-(T) + \frac{\phi_1^-(T)}{p} + \frac{\phi_2^-(T)}{p^2} + \dots\right) \quad (4.15)$$

$$E(\mathbf{f}^+(T), 1) := \exp\left(\phi_0^+(T) + \frac{\phi_1^+(T)}{p} + \frac{\phi_2^+(T)}{p^2} + \dots\right) \quad (4.16)$$

Cette écriture n'a un sens que si $\mathbf{f}^-(T)$ et $\mathbf{f}^+(T)$ satisfont certaines conditions de convergence T -adique que nous ne détaillerons pas ici [Pul07].

Nous avons également une définition de *monôme* dans ce contexte, ce sont des vecteurs de la

forme

$$\lambda T^d := (\lambda_0 T^d, \lambda_1 T^{pd}, \lambda_2 T^{p^2 d}, \dots), \quad \lambda \in \mathbf{W}(K^\circ), \quad (4.17)$$

et une décomposition en *monômes* semblable à la décomposition en co-monomes de la Proposition 3.5.2.

Dans ce contexte on montre que les solutions d'une équation différentielle soluble sont de la forme

$$y = T^{a_0} \cdot E(\mathbf{f}^-(T), 1) \cdot E(\mathbf{f}^+(T), 1), \quad (4.18)$$

avec $\mathbf{f}^-(T) \in \mathbf{W}(T^{-1}K^\circ[[T^{-1}]])$, et $\mathbf{f}^+(T) \in \mathbf{W}(TK^\circ[[T]])$.

Inversement, on montre à travers l'utilisation du Frobenius, que si un tel produit est solution d'une équation soluble, alors les vecteurs de Witt apparaissant en une décomposition en monômes ont des composantes entières.

4.5. Classification, cas des corps non ramifiés.

Supposons que K soit un corps absolument non ramifié sur \mathbb{Q}_p . Dans ce cas nous avons montré qu'il n'y a pas d'équations sauvages.

Théorème 4.5.1. *Soit K une extension non ramifiée (arbitrairement grande) de \mathbb{Q}_p . Le groupe de Picard des équations solubles est dans ce cas*

$$\text{Pic}^{\text{sol}}(\mathfrak{R}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z} & \text{si } p \neq 2. \\ \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z} \oplus \frac{\tilde{K}((T))}{(\mathbb{F}_{-1})\tilde{K}((T))} & \text{si } p = 2. \end{cases} \quad (4.19)$$

La preuve utilise le critère de solubilité de la section 4.4. Et le fait que toute équation soluble dont le résidu est rationnel a une structure de Frobenius.

5. Une déformation du complexe de Artin-Schreier-Witt dans le complexe de Kummer

Les théories de Artin-Schreier-Witt et de Kummer produisent des complexes qui calculent la cohomologie galoisienne.

Soit k_L un corps de caractéristique $p > 0$. Le complexe d'Artin-Schreier-Witt de k_L contrôle les extensions cycliques *séparables* dont le degré est une puissance de p . Le complexe de Kummer de k_L par contre fournit des extensions inséparables.

Si maintenant L est un corps de caractéristique 0, alors tout est séparable, et les complexes d'Artin-Schreier-Witt et de Kummer sur L contrôlent les mêmes extensions (notamment les extensions cycliques de L dont le degré est une puissance de p).

Le complexe de Artin-Schreier-Witt en caractéristique 0 est utile car il se spécialise facilement à la caractéristique p , et aussi parce qu'il ne nécessite pas l'hypothèse que $\mu_{p^m} \subset L$, qui est nécessaire au complexe de Kummer. Toutefois le complexe de Kummer en caractéristique 0 est préférable à celui de Artin-Schreier-Witt car les conditions de ce dernier font intervenir le Frobenius qui est une opération implicite et plus complexe.

Dans [Mat95], S.Matsuda obtient une déformation du complexe de Artin-Schreier-Witt dans celui de Kummer, dans le cas du corps $\mathcal{E}^\dagger \subset \mathfrak{R}$ formé par les fonctions bornées. Nous avons montré dans [Pul07] que les techniques de S.Matsuda marchent en général pour tout corps valué complet de caractéristique résiduelle $p > 0$, et pour $p = 2$.

L'idée de cette section est d'obtenir une déformation de complexes

$$\begin{array}{ccccc}
 \boxed{\begin{array}{c} \text{char } 0 \\ \uparrow \text{---} \\ \text{char } p \end{array}} & 0 \longrightarrow \mathbb{G}_m(L) \xrightarrow{x \rightarrow x^{p^{m+1}}} \mathbb{G}_m(L) \longrightarrow 0 & \text{Kummer} \\
 & \uparrow \theta \qquad \qquad \qquad \uparrow e \\
 & 0 \longrightarrow \mathbf{W}_m(k_L) \xrightarrow{\bar{F}-1} \mathbf{W}_m(k_L) \longrightarrow 0 & \text{Artin-Schreier}
 \end{array}$$

Pour le faire nous liftons le complexe de Artin-Schreier-Witt de k_L en caractéristique 0, et nous le déformons dans celui de Kummer par des *valeurs spéciales en $T = 1$* des séries *surconvergentes* $\theta_{p^m}(-, T)$ et $e_{p^m}(-, T)^{p^{m+1}}$.

Ce théorème constitue l'analogie d'une partie de la théorie de Sekigichi-Suwa (cf. [SS94]), dans la quelle les auteurs définissent un schéma dont la fibre spéciale est \mathbb{G}_{a, k_L} et la fibre générique est $\mathbb{G}_{m, L}$. Les auteurs trouvent une application *algébrique* entre les deux fibres. L'approche ici est par contre complètement analytique.

Soit $m \geq 0$ un entier. Soit L un corps valué complet de caractéristique 0, contenant le groupe $\mu_{p^{m+1}}$ des racines p^{m+1} -èmes de l'unité, et dont le corps résiduel k_L est de caractéristique positive $p > 0$. Soit $\varphi : L^\circ \rightarrow L^\circ$ un endomorphisme d'anneaux qui relève le Frobenius $x \mapsto x^p$ de k_L . Nous fixons un groupe de Lubin-Tate isomorphe à $\widehat{\mathbb{G}}_m$, et un générateur $(\pi_m)_{m \geq 0}$ de son module de Tate.

Théorème 5.0.2. *Posons $G_L := \text{Gal}(L^{\text{alg}}/L)$, $G_{k_L} := \text{Gal}(k_L^{\text{sep}}/k_L)$ et $(L^\circ)^{\varphi=1} := \{a \in L^\circ \mid a^\varphi = a\}$. On a un diagramme commutatif et fonctoriel en L*

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mu_{p^{m+1}} & \longrightarrow & L^\times & \xrightarrow{x \rightarrow x^{p^{m+1}}} & L^\times & \xrightarrow{\delta_{\text{Kum}}} & H^1(G_L, \mu_{p^{m+1}}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow \theta_{p^m}(-, 1) & & \uparrow e_{p^m}(-, 1)^{p^{m+1}} & & \uparrow \bar{e} & & \\
 & & \mathbf{W}_m((L^\circ)^{\varphi=1}) & \xrightarrow{\varphi-1} & \mathbf{W}_m(L^\circ) & \xrightarrow{\varphi-1} & \mathbf{W}_m(L^\circ) & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \bar{e} & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbf{W}_m(k_L) & \xrightarrow{\bar{F}-1} & \mathbf{W}_m(k_L) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G_{k_L}, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0
 \end{array} \tag{5.1}$$

où \bar{F} est le Frobenius de $\mathbf{W}_m(k_L)$.

Plus précisément, $\theta_{p^m}(-, 1)$ induit une identification

$$1 \mapsto \xi_m^{-1} : \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_{p^{m+1}}, \tag{5.2}$$

où ξ_m est la racine p^{m+1} -ème primitive de l'unité telle que $|(\xi_m - 1) - \pi_m|$ est minimale. Et la flèche \bar{e} entre les H^1 est la flèche qu'on obtient par le diagramme par

$$\begin{array}{ccc}
 G_{k_L} & \longleftarrow & G_L \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \bar{e}(\alpha) \\
 \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} & \xrightarrow[\sim]{1 \mapsto \xi_m^{-1}} & \mu_{p^{m+1}}.
 \end{array} \tag{5.3}$$

Exemple 5.0.3. *La dernière partie de ce théorème généralise le fait bien connu depuis [Dwo60] que la fonction surconvergente $\theta_1(1, T) = \exp(\pi_0(T^p - T))$ a pour valeur en $T = 1$ l'unique racine p -ème de l'unité ξ_0^{-1} qui vérifie $|\xi_0 - 1 - \pi_0| < |\pi_0|$.*

Ceci permet de donner la description suivante des extensions cycliques *non ramifiées* de L dont l'ordre est une puissance de p :

Corollaire 5.0.4. Soit $\bar{\lambda} \in \mathbf{W}_m(k_L)$. Soit k'/k_L l'extension définie par $\bar{\lambda}$.¹¹ Alors l'extension non ramifiée L' de L correspondante à k' est donnée par

$$L' = L(\theta_{p^m}(\nu, 1)), \quad (5.4)$$

où $\nu \in \mathbf{W}_m(\mathcal{O}_{L'})$ est un relèvement arbitraire d'une solution $\bar{\nu}$, dans $\mathbf{W}_m(k_L^{\text{sep}})$, de l'équation

$$\bar{F}(\bar{\nu}) - \bar{\nu} = \bar{\lambda}. \quad (5.5)$$

Exemple 5.0.5. Si $m = 0$, alors la suite de Artin-Schreier est

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow k_L \xrightarrow{\nu \mapsto \nu^p - \nu} k_L \xrightarrow{\delta} H^1(G_{k_L}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

Si $\bar{\lambda} \in k_L$, alors l'extension k'/k_L définie par $\bar{\lambda}$ est, par définition, le sous-corps de k^{sep} stabilisé par le noyau de $\delta(\lambda)$ et est égale à $k' = k_L(\bar{\nu})$, où $\bar{\nu} \in k^{\text{sep}}$ est une racine de l'équation $\bar{\nu}^p - \bar{\nu} = \bar{\lambda}$. L'extension de L'/L est alors donnée par

$$L' = L(\theta_1(\nu, T)|_{T=1}) = L(\exp(\pi_0(\varphi(\nu)T^p - \nu T))|_{T=1}). \quad (5.7)$$

5.1. Calcul explicite du générateur de Kummer pour les corps \mathcal{E}^\dagger et \mathcal{E} .

Le corollaire 5.0.4 n'est pas entièrement explicite car il nécessite le calcul de $\bar{\nu}$. Nous montrons maintenant que pour le corps $\mathcal{E}^\dagger \subset \mathfrak{R}$

$$\mathcal{E}^\dagger := \{f \in \mathfrak{R} \mid \sup_{\rho \rightarrow 1^-} x_{0,\rho}(f) < \infty\} \quad (5.8)$$

des fonctions bornées, nous avons une description explicite du générateur $\theta(\nu, 1)$.

Le corps \mathcal{E}^\dagger est Henselien. Il a deux topologies, une provenant de l'inclusion $\mathcal{E}^\dagger \subset \mathfrak{R}$, l'autre induite par la norme de Gauss $x_{0,1}$. Son corps résiduel par rapport à la norme $x_{0,1}$ est $\tilde{K}((T))$. Le complété de \mathcal{E}^\dagger par rapport à la norme de Gauss $x_{0,1}$ est l'anneau d'Amice

$$\mathcal{E} := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \mid a_n \in K, \sup_n |a_n| < +\infty, \lim_{n \rightarrow -\infty} |a_n| = 0 \right\}. \quad (5.9)$$

Cet anneau est un corps si K est de valuation discrète, et est parfois appelé l'anneau de Fontaine, car il a été utilisé par Fontaine pour définir les (φ, Γ) -modules.

En utilisant le fait que \mathcal{E}^\dagger est l'intersection des deux anneaux complets \mathfrak{R} et \mathcal{E} on peut montrer que le diagramme (5.1) existe encore si on remplace L par \mathcal{E}^\dagger et k_L par $\tilde{K}((T))$.

La ligne en bas du diagramme est la suite d'Artin-Schreier-Witt de $\tilde{K}((T))$.

Nous souhaitons maintenant calculer le générateur de Kummer $\theta_{p^m}(\nu, 1)$ de l'extension de Kummer $(\mathcal{E}^\dagger)' = \mathcal{E}^\dagger(\theta_{p^m}(\nu, 1))/\mathcal{E}^\dagger$, attachée au caractère de Kummer $\bar{e}(\alpha)$ provenant d'un caractère d'Artin-Schreier-Witt

$$\alpha := \delta(\bar{f}(T)) : G_E \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \quad (5.10)$$

de $\tilde{K}((T))$ qui est défini par une équation

$$\bar{F}(\bar{\nu}) - \bar{\nu} = \bar{f}(T) \in \mathbf{W}_m(\tilde{K}((T))). \quad (5.11)$$

Pour cela nous regardons l'identité

$$\theta_{p^m}(\nu, 1)^{p^{m+1}} = e_{p^m}(\mathbf{f}(T), 1)^{p^{m+1}}, \quad (5.12)$$

où ν est un relèvement de $\bar{\nu}$ dans $\mathbf{W}_m((\mathcal{E}^\dagger)^{\text{sep}})$, et $\mathbf{f}(T) \in \mathbf{W}_m((\mathcal{E}^\dagger)^\circ)$ est le relèvement de $\bar{f}(T)$ qui satisfait $\varphi(\nu) - \nu = \mathbf{f}(T)$.

11. Rappelons que l'extension k' est par définition le corps fixé par le noyau du caractère $\delta(\lambda) : G_{k_L} \rightarrow \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}$, où δ est le morphisme cohomologique de Artin-Schreier-Witt défini dans le diagramme du théorème 5.0.2.

Maintenant si le caractère d'Artin-Schreier-Witt α est *sauvage*, alors on peut choisir $\mathbf{f}(T) = \mathbf{f}^-(T) \in \mathbf{W}_m(T^{-1}K^\circ[T^{-1}])$ et nous savons que la série $e_{p^m}(\mathbf{f}^-(T), 1)$ a un sens. Pour une racine p^{m+1} ème convenable de l'unité $\xi \in \mu_{p^{m+1}}$, nous avons alors

$$\theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu}, 1) = \xi \cdot e_{p^m}(\mathbf{f}^-(T), 1) = e_{p^\infty}(\mathbf{f}^-(T), 1), \quad (5.13)$$

où on a implicitement identifié $\mathbf{f}^-(T) = (f_0^-(T), \dots, f_m^-(T)) \in \mathbf{W}_m(T^{-1}K^\circ[T^{-1}])$ avec son image $(\dots, 0, 0, f_0^-(T), \dots, f_m^-(T)) \in \mathbf{CW}(T^{-1}K^\circ[T^{-1}])$ par l'inclusion canonique de \mathbf{W}_m dans \mathbf{CW} .

Nous avons finalement

$$(\mathcal{E}^\dagger)' = \mathcal{E}^\dagger(e_{p^\infty}(\mathbf{f}^-(T), 1)). \quad (5.14)$$

Nous remarquons que, si $\psi_m : \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_{p^{m+1}}$ est l'isomorphisme $1 \mapsto \xi_m^{-1}$ du diagramme (5.1) l'action d'un élément $\gamma \in \mathbf{G}_E \rightarrow \text{Gal}((\mathcal{E}^\dagger)'/\mathcal{E}^\dagger)$ sur $e_{p^\infty}(\mathbf{f}^-(T), 1)$ est donnée par

$$\gamma(e_{p^\infty}(\mathbf{f}^-(T), 1)) = \gamma(\theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu}, 1)) = \xi_m^{-\alpha(\gamma)} \cdot \theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu}, 1) = \xi_m^{-\alpha(\gamma)} \cdot e_{p^\infty}(\mathbf{f}^-(T), 1). \quad (5.15)$$

6. Calcul du foncteur de Fontaine-Tsuzuki-Kedlaya et conjecture “Swan Arithmétique = Swan différentiel”.

Nous reprenons ici la construction du Foncteur de Fontaine telle qu'elle a été adaptée par N.Tsuzuki en ajoutant de la ramification à l'arrivée dans la machine [Tsu98a], et puis généralisée aux corps non parfaits par K.S.Kedlaya [Ked07]. Dans ce dernier contexte, le fait que le corps résiduel est non parfait, donne lieu à des dérivations du corps des constantes K . Ces dérivations agissent sur les objets qu'on associe aux représentations p -adique qui ne sont plus des simples (φ, ∇) -modules comme dans [Tsu98a], mais ce sont des φ -modules ensemble à l'action d'une famille de connexions.

Dans ce contexte Kedlaya est capable d'associer à ce (φ, ∇) -module “généralisé” un *conducteur de Swan différentiel* : un nombre qui est l'analogie de l'irrégularité de Christol-Mebkhout dans le cas du corps résiduel parfait. Kedlaya conjecture dans [Ked07] que ce conducteur de Swan différentiel doit coïncider avec le *conducteur de Swan arithmétique* défini par Abbes et Saito dans le cadre du corps résiduel non parfait [AS02], [AS03], [AS09].

Dans [CP09] nous avons démontré cette conjecture en rang un, en calculant explicitement le foncteur de Fontaine-Tsuzuki-Kedlaya, et les deux conducteurs de Swan. Le même calcul dans le cadre de [Tsu98a] a été fait dans [Pul07], et les méthodes de [CP09] sont une évolution technique de ceux de [Pul07]. Le point clé est le calcul du générateur (5.14). Les différences essentielles concernent le calcul du foncteur que nous adaptions aux méthodes de Kedlaya, et la définition du conducteur de Swan différentiel, qui est un nombre plus complexe si le corps résiduel est imparfait et que nous avons déjà rencontré (2.8) (cf. Thm. 2.2.4).

Dans ce mémoire, au lieu de présenter deux fois les calculs du foncteur (dans le contexte de [Tsu98a] et de [Ked07]), nous préférons exposer les techniques de [Ked07], qui se spécialisent à celles de [Tsu98a] si le corps résiduel est parfait. Nous renvoyons le lecteur à [Pul07] et [CP09] pour plus de détails.

Signalons que la conjecture de Kedlaya a été finalement démontrée en général par Liang Xiao [Xia10], avec des méthodes différents.

6.1. Contexte.

Un anneau de Cohen pour un corps κ de caractéristique $p > 0$ est un anneau C_κ complet pour une valuation discrète, tel que l'idéal maximal est engendré par p , et dont corps résiduel C_κ/pC_κ est κ . Deux anneaux de Cohen pour κ sont toujours isomorphes, mais si κ n'est pas parfait, l'isomorphisme n'est pas unique. Plus précisément les inclusions de corps de caractéristique p peuvent toujours se relever en des morphismes d'anneaux entre les Cohen respectifs.

Nous nous donnons un corps k de caractéristique positive $p > 0$, tel que

- i) $k = k^p(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r)$,
- ii) Soit $\Lambda := \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \mid \alpha_i \in \mathbb{N}, 0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_r < p\}$. Alors les monômes $\{\bar{u}_1^{\alpha_1} \cdots \bar{u}_r^{\alpha_r}\}_{\alpha \in \Lambda}$ sont tous distincts, n'appartiennent pas à k^p , et forment une base de k sur k^p .

On dit que $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r\}$ est une p -base de k (sur k^p).

Soit $E \cong k((T))$ un corps de valuation discrète de caractéristique positive $p > 0$ à coefficients dans k . On peut considérer des anneaux de Cohen L_0° et \mathcal{E}° de k et E respectivement. On a la description suivante

$$\mathcal{E}^\circ = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \mid a_n \in L_0, |a_n| \leq 1, \lim_{n \rightarrow -\infty} |a_n| = 0 \right\}. \quad (6.1)$$

On peut également ajouter de la ramification par le diagramme suivant, introduit dans [Tsu98a] : Soit K/\mathbb{Q}_p une extension finie, de corps résiduel \mathbb{F}_q . Posons $L := K \widehat{\otimes}_{\mathbf{W}(\mathbb{F}_q)} L_0^\circ$ et $\mathcal{E}_L := K \widehat{\otimes}_{\mathbf{W}(\mathbb{F}_q)} \mathcal{E}^\circ$. La situation est résumé par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & K^\circ & \longrightarrow & L^\circ & \longrightarrow & \mathcal{E}_L^\circ & . \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathbf{W}(\mathbb{F}_q) & \longrightarrow & L_0^\circ & \longrightarrow & \mathcal{E}^\circ & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathbb{F}_p & \longrightarrow & \mathbb{F}_q & \longrightarrow & k & \longrightarrow & E & & & \end{array} \quad (6.2)$$

On peut également définir les anneaux \mathfrak{R}_L et \mathcal{E}_L^\dagger .

Si k est parfait, nous sommes exactement dans le cadre de [Tsu98a], si de plus $K^\circ = \mathbf{W}(\mathbb{F}_q)$, alors nous sommes dans le cadre originaire de Fontaine [Fon90].

6.2. ∇ -modules et (φ, ∇) -modules.

Soit A_L un des anneaux $\mathcal{E}_L^\dagger, \mathcal{E}_L$. Naturellement quand K est égal au corps des fractions de $\mathbf{W}(\mathbb{F}_q)$, nous avons $L = L_0$, et nous retrouvons alors $A_L = \mathcal{E}^\dagger, \mathcal{E}$.

On peut montrer que si $\{u_1, \dots, u_r\} \subset \mathbf{W}(\mathbb{F}_q)$ est un lifting arbitraire de la p -base de k , alors on a

$$\widehat{\Omega}_{A_L^\circ/K^\circ}^1 = A_L^\circ \cdot \frac{d}{dT} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^r A_L^\circ \cdot du_i \right). \quad (6.3)$$

Dans ce contexte un ∇ -module sur A_L° est un A_L° -module libre de type fini M , muni d'une connexion intégrable

$$\nabla : M \longrightarrow M \widehat{\otimes}_{A_L^\circ} \Omega_{A_L^\circ/K^\circ}^1. \quad (6.4)$$

Cela revient à se donner r connexions $\nabla_{u_i} : M \rightarrow M$, et une connexion $\nabla_T : M \rightarrow M$.

Les propriétés des anneaux de Cohen permettent d'avoir un Frobenius $\varphi : A_L^\circ \rightarrow A_L^\circ$ (i.e. une application qui relève $x \mapsto x^q$) tel que $\varphi(T) = T^q$ et $\varphi(u_i) = u_i^q$ pour tout $i = 1, \dots, r$.

Un φ -module (resp. (φ, ∇) -module) sur A_L° est la donnée d'un A_L° -module libre de type fini (resp. un ∇ -module) D avec un isomorphisme A_L° -linéaire (resp. de ∇ -modules)

$$\phi^D : \varphi^*(D) \xrightarrow{\sim} D. \quad (6.5)$$

Si on remplace $K^\circ, (\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ$, et \mathcal{E}_L° par leurs corps des fractions $K, \mathcal{E}_L^\dagger, \mathcal{E}_L$, on trouve des notions analogues.

Nous notons la catégorie des (φ, ∇) -modules (resp. ∇ -modules) par

$$(\varphi, \nabla) - \text{Mod}((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ / K^\circ) \quad (\text{resp. } \nabla - \text{Mod}((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ / K^\circ)) . \quad (6.6)$$

6.3. Conducteur de Swan différentiel d'un ∇ -module.

Pour tout ρ notons par $x_{0,\rho}$ le point de Berkovich qui est le bord du disque $D^+(0, \rho)$.

Soit V un $\mathcal{H}(x_{0,\rho})$ -espace vectoriel, muni d'une norme $|\cdot|_V$ compatible à la norme $x_{0,\rho}$. Si $N : V \rightarrow V$ est une application \mathbb{Z} -linéaire continue, on peut définir sa norme et sa norme spectrale :

$$|N|_V := \sup_{f \in V - \{0\}} \frac{|N(f)|_V}{|f|_V}, \quad |N|_{V, Sp} := \limsup_n |N^n|_V^{1/n}. \quad (6.7)$$

Par exemple on peut montrer que si $\omega := |\rho|^{\frac{1}{p-1}}$, alors

$$|d/dT|_{\mathcal{H}(x_{0,\rho})} = \rho^{-1}, \quad |d/du_i|_{\mathcal{H}(x_{0,\rho})} = 1, \quad (6.8)$$

$$|d/dT|_{\mathcal{H}(x_{0,\rho}), Sp} = \omega \cdot \rho^{-1}, \quad |d/du_i|_{\mathcal{H}(x_{0,\rho}), Sp} = \omega. \quad (6.9)$$

Si $A_L = (\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ$, et si M est un ∇ -module, alors M est défini sur une couronne $|T| \in]s, 1[$. Soit $M_\rho := M \otimes_{(\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ} \mathcal{H}(x_{0,\rho})$ et soit $|\cdot|_{M_\rho}$ une norme sur M_ρ compatible à $x_{0,\rho}$. Dans ce contexte K.S.Kedlaya a défini la notions suivante de *Rayon générique torique*, qui généralise la notion de Rayon de convergence en $x_{0,\rho}$

$$T(M, \rho) := \min \left(\frac{|d/dT|_{\mathcal{H}(x_{0,\rho}), Sp}}{|\nabla_T|_{M_\rho, Sp}}, \frac{|d/du_1|_{\mathcal{H}(x_{0,\rho}), Sp}}{|\nabla_{u_1}|_{M_\rho, Sp}}, \dots, \frac{|d/du_r|_{\mathcal{H}(x_{0,\rho}), Sp}}{|\nabla_{u_r}|_{M_\rho, Sp}} \right). \quad (6.10)$$

Comme dans le cas classique on dit qu'un ∇ -module est *soluble* si

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} T(M, \rho) = 1, \quad (6.11)$$

et on vérifie que le ∇ -module sous-jacent à un (φ, ∇) -module est toujours soluble.

Pour un ∇ -module soluble, la fonction $\log(\rho) \mapsto \log(T(M, \rho))$ est continue sur $]\log(s), 1[$, affine par morceaux, et il existe une dernière pente β pour $\rho \rightarrow 1^-$. Autrement dit $T(M, \rho) = \rho^\beta$, pour tout ρ suffisamment proche de 1.

Si maintenant on considère une suite $0 = M_0 \subset M_1 \subset M_r = M$ de Jordan-Hölder de M (dans la catégorie des ∇ -modules sur $(\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ$), et si β_i est la pente de M_i/M_{i-1} , alors on pose

$$\text{sw}^\nabla(M) := \sum_{i=1}^r \beta_i \cdot \text{rank}(M_i). \quad (6.12)$$

On appelle ce nombre le *conducteur de Swan différentiel* de (M, ∇) .

6.4. Foncteur de Fontaine-Tsuzuki-Kedlaya.

Si $(L^\circ)^{\text{nr}}$ et $((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)^{\text{nr}}$ désignent les extension maximales non ramifiées de L° , et $(\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ$ respectivement. On pose

$$((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)^{\text{NR}} := \widehat{(L^\circ)^{\text{nr}}} \otimes_{(L^\circ)^{\text{nr}}} ((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)^{\text{nr}}. \quad (6.13)$$

Le Frobenius φ , ainsi que les dérivations, $d/dT, d/du_1, \dots, d/du_r$ s'étendent de manière unique à $((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)^{\text{NR}}$.

Soit maintenant G_E le groupe de Galois de E^{sep} sur E . Une représentation avec *monodromie finie* de G_E est la donnée d'un K° -module libre de type fini muni d'un morphisme continu de groupes

$$\rho_V : G_E \longrightarrow GL(V) \quad (6.14)$$

tel que l'image dans $GL(V)$ de l'inertie \mathcal{I}_{G_E} est de un sous-groupe fini de $GL(V)$. Notons la catégorie de ces représentations par

$$\text{Rep}_{K^\circ}^{\text{fin}}(G_E) . \quad (6.15)$$

On peut attacher à une telle représentation un (φ, ∇) -module sur $(\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ$ dans la manière suivante. Soit

$$V \otimes_{K^\circ} ((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)^{\text{NR}} . \quad (6.16)$$

C'est un $((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)^{\text{NR}}$ -module libre de type fini que nous considérons ensemble aux actions suivantes de G_E , φ , et ∇ :

- i) Galois : $\gamma(v \otimes f) := \gamma(v) \otimes \gamma(f)$;
- ii) Frobenius : $\varphi(v \otimes f) := v \otimes \varphi(f)$;
- iii) Connexion : $\nabla_T(v \otimes f) := v \otimes d/dT(f)$, $\nabla_{u_i}(v \otimes f) := v \otimes d/du_i(f)$, for all $i = 1, \dots, r$.

On pose

$$D^\dagger(V) := (V \otimes_{K^\circ} ((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)^{\text{NR}})^{G_E} . \quad (6.17)$$

Comme les actions de φ et ∇ sur $V \otimes_{K^\circ} ((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)^{\text{NR}}$ commutent à celle de G_E , $D^\dagger(V)$ est naturellement un (φ, ∇) -module sur $(\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ$. Cela définit un foncteur

$$D^\dagger : \text{Rep}_{K^\circ}^{\text{fin}}(G_E) \longrightarrow (\varphi, \nabla) - \text{Mod}((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ / K^\circ) . \quad (6.18)$$

Ce foncteur est une équivalence et un quasi-inverse est donné par la construction suivante. Soit D un (φ, ∇) -module sur $(\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ$. On forme le $((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)^{\text{NR}}$ -module

$$D \otimes_{(\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ} ((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)^{\text{NR}} \quad (6.19)$$

et on le muni des actions suivantes de G_E , φ , et ∇ :

- i) Galois : $\gamma(d \otimes f) := d \otimes \gamma(f)$;
- ii) Frobenius : $\varphi(d \otimes f) := \varphi^D(d) \otimes \varphi(f)$;
- iii) Connexion : $\nabla_T(d \otimes f) := \nabla_T(d) \otimes f + d \otimes d/dT(f)$, $\nabla_{u_i}(d \otimes f) := \nabla_{u_i}(d) \otimes f + d \otimes d/du_i(f)$, for all $i = 1, \dots, r$.

On pose alors

$$V^\dagger(D) := (D \otimes_{(\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ} ((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)^{\text{NR}})^{\varphi=1} , \quad (6.20)$$

où $\varphi = 1$ signifie qu'on prends les points fixes par l'action de φ .

6.5. Calcul du foncteur en rang un.

Bien que la définition du foncteur soit bien directe, ce n'est pas vraiment facile de calculer explicitement des exemples car l'extension $((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)^{\text{NR}}$ est compliquée.

Dans [Pul07] et [CP09] nous sommes parvenu à calculer explicitement la partie *sauvage* d'une représentation de rang un, grâce au fait qu'on connaissait un générateur explicite des extensions Kummeriennes (5.14). Nous commençons par le résultat suivant :

Proposition 6.5.1 ([CP09]). *On a*

$$G_E^{\text{ab}} = \mathcal{P}_{G_E^{\text{ab}}} \oplus (\mathcal{I}_{G_E^{\text{ab}}} / \mathcal{P}_{G_E^{\text{ab}}}) \oplus G_k^{\text{ab}} . \quad (6.21)$$

Démonstration. Nous montrons cela se montre à travers la dualité de Pontryagin, en décomposant le dual de G_E qui est donné par la théorie d'Artin-Schreier-Witt. \square

Toute représentation finie $V(\alpha)$ de rang un définie par un caractère $\alpha : G_E \rightarrow K^\circ$ se décompose alors en produit tensoriel de sa partie *résiduelle*, sa partie *modérée*, et sa partie *sauvage* :

$$V(\alpha) = V(\alpha_{\text{wild}}) \otimes V(\alpha_{\text{tame}}) \otimes V(\alpha_k) . \quad (6.22)$$

La représentation résiduelle $V(\alpha_k)$ dépend hautement de la nature de k , nous n'en donnons (essentiellement) aucune description.

6.5.1. Calcul de la partie modérée. La représentation $V(\alpha_{\text{tame}})$ se calcule à travers la théorie de Kummer. Notamment on a $\alpha_{\text{tame}}(G_E) \subset \mu_N$ pour un N première à p convenable. La théorie de Kummer fonctionne alors aussi bien en caractéristique 0 qu'en caractéristique p . Notamment le noyau de α_{tame} dans G_E définit une extension de Kummer $k((T^{1/N}))/k((T))$ et, par Henselianité, une extension $(\mathcal{E}_L^\dagger)'/\mathcal{E}_L^\dagger$ engendrée par $T^{1/N}$. L'action d'un élément $\gamma \in G_E$ sur le générateur de Kummer $T^{1/N}$ est

$$\gamma(T^{1/N}) = \alpha_{\text{tame}}(\gamma) \cdot T^{1/N} . \quad (6.23)$$

Soit $\mathbf{e} \in V(\alpha_{\text{tame}})$ une base telle que l'action de G_E est donnée par

$$\gamma(\mathbf{e}) = \alpha_{\text{tame}}(\gamma) \cdot \mathbf{e} . \quad (6.24)$$

Alors l'élément

$$\mathbf{e}_D := \mathbf{e} \otimes t^{-1/N} \quad (6.25)$$

de $V(\alpha_{\text{tame}}) \otimes_{K^\circ} ((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)^{\text{NR}}$ est stable par G_E et c'est une base de $D := D^\dagger(V(\alpha_{\text{tame}}))$. Dans cette base la connexion et l'actions du Frobenius sont données par

$$\begin{cases} \phi^D(\mathbf{e}_D) & = T^{(1-q)/N} \cdot \mathbf{e}_D , \\ \nabla_T^D(\mathbf{e}_D) & = -\frac{1}{N} T^{-1} \cdot \mathbf{e}_D , \\ \nabla_{u_i}^D(\mathbf{e}_D) & = 0 . \end{cases} \quad (6.26)$$

6.5.2. Calcul de la partie sauvage. Nous souhaitons répéter les calculs de la section précédente à l'aide du générateur de Kummer explicite $e_{p^m}(\mathbf{f}^-(T), 1)$ que nous avons trouvé dans (5.14).

Nous rappelons que nous avons choisi l'identification $\mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_{p^{m+1}}$ qui envoie $1 \mapsto \xi_m^{-1}$, où ξ_m est l'unique racine p^{m+1} -ème de l'unité qui rends la distance $|\xi_m - 1 - \pi_m|$ est minimale. Le noyau de $\alpha_{\text{wild}} : G_E \rightarrow \mu_{p^{m+1}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}$ est le groupe de Galois absolu d'une extension d'Artin-Schreier-Witt E'/E de $E = k((T))$ et une extension de Kummer $((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)' / (\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ$ qui sont liées par le diagramme (5.1). On a

$$((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)' = (\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ(e_{p^\infty}(\mathbf{f}^-(T), 1)) . \quad (6.27)$$

L'action de G_E sur $e_{p^m}(\mathbf{f}^-(T), 1)$ est donnée par $\gamma(e_{p^m}(\mathbf{f}^-(T), 1)) = \xi_m^{-\alpha_{\text{wild}}(\gamma)} \cdot e_{p^m}(\mathbf{f}^-(T), 1)$ (cf. (5.15)).

Maintenant soit $\mathbf{e} \in V(\alpha_{\text{wild}})$ une base dans laquelle l'action de G_E est donnée par

$$\gamma(\mathbf{e}) = \xi_m^{\alpha_{\text{wild}}(\gamma)} \cdot \mathbf{e} . \quad (6.28)$$

Comme dans le cas modéré l'élément

$$\mathbf{e}_D := \mathbf{e} \otimes e_{p^m}(\mathbf{f}^-(T), 1) \quad (6.29)$$

de $V(\alpha_{\text{wild}}) \otimes_{K^\circ} ((\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ)^{\text{NR}}$ est stable par G_E et c'est une base de $D := D^\dagger(V(\alpha_{\text{wild}}))$. Dans cette

base la connexion et l'actions du Frobenius sont données par

$$\begin{cases} \phi^D(\mathbf{e}_D) &= \theta_{p^m}(\mathbf{f}^-(T), 1) \cdot \mathbf{e}_D, \\ \nabla_T^D(\mathbf{e}_D) &= g_0(T) \cdot \mathbf{e}_D, \\ \nabla_{u_i}^D(\mathbf{e}_D) &= g_i(T) \cdot \mathbf{e}_D \end{cases} \quad (6.30)$$

où

$$\theta_{p^m}(\mathbf{f}^-(T), 1) := e_{p^m}(\varphi(\mathbf{f}^-(T)) - \mathbf{f}^-(T), 1) \quad (6.31)$$

$$g_0(T) = \frac{\frac{d}{dT}(e_{p^m}(\mathbf{f}^-(T), 1))}{e_{p^m}(\mathbf{f}^-(T), 1)} \quad (6.32)$$

$$g_i(T) = \frac{\frac{d}{du_i}(e_{p^m}(\mathbf{f}^-(T), 1))}{e_{p^m}(\mathbf{f}^-(T), 1)}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (6.33)$$

$$(6.34)$$

L'expression explicite de ces polynômes est dans [CP09, Section 6.3.3].

6.6. Preuve, en rang un, de la conjecture de Kedlaya “Swan différentiel = Swan arithmétique”.

On démontre le résultat suivant qui a été conjecturé dans [Ked07].

Théorème 6.6.1. *Soit $\alpha : G_E \rightarrow K^\circ$ une représentation finie, et soit $D^\dagger(V(\alpha))$ le (φ, ∇) -module sur $(\mathcal{E}_L^\dagger)^\circ$ qui lui est associé. Soit $M(\alpha)$ le ∇ -module sous-jacent à $D^\dagger(V(\alpha))$. Alors le conducteur de Swan arithmétique de α (2.8) coïncide avec le conducteur de Swan différentiel de $M(\alpha)$ (6.12) :*

$$\text{sw}(\alpha) = \text{sw}^\nabla(M(\alpha)). \quad (6.35)$$

Démonstration. On montre que $\text{sw}(\alpha) = \text{sw}(\alpha_{\text{wild}})$ et $\text{sw}^\nabla(M(\alpha)) = \text{sw}^\nabla(M(\alpha_{\text{wild}}))$. On se réduit alors au cas des représentations sauvages $\alpha = \alpha_{\text{wild}}$.

Ces représentations sont contrôlées par un covecteur de Witt $\mathbf{f}^-(T) \in \mathbf{CW}(T^{-1}k[T^{-1}])$. En le décomposant en co-monômes on se réduit au cas d'un co-monôme $\bar{\lambda} \cdot T^{-np^m}$. Sans changer la classe dans le quotient $\mathbf{CW}(E)/(\bar{F} - 1)\mathbf{CW}(E)$ on peut supposer que $\bar{\lambda} \in \mathbf{W}_m(k) - p\mathbf{W}_m(k)$, de sorte que $\text{sw}(\alpha) = np^m$. Pour montrer qu'on a aussi $\text{sw}^\nabla(\alpha) = np^m$ on raisonne ainsi :

- i) L'équation est définie sur un domaine du type $|T| \in]0, 1[$;
- ii) La fonction $\tau \mapsto \log(T(M(\alpha), e^\tau))$ est continue et concave sur le segment $] - \infty, 0[$, et elle satisfait la condition de solubilité $\lim_{\tau \rightarrow 0^-} \log(T(M(\alpha), e^\tau)) = 0$ (cf. (6.11)) ;
- iii) On arrive à montrer qu'il existe un intervalle $] - \infty, r[$ tel que $\log(T(M(\alpha), e^\tau)) = np^m \cdot \tau$ pour tout $\tau \in] - \infty, r[$;
- iv) Par continuité et log-concavité de la fonction, nous déduisons qu'elle est une droite sur tout l'intervalle $] - \infty, 0[$

$$\log(T(M(\alpha), e^\tau)) = np^m \cdot \tau, \quad \tau \in] - \infty, 0[, \quad (6.36)$$

et donc $\text{sw}^\nabla(M(\alpha)) = np^m$.

Le point difficile de la preuve est le iii). Il faut d'abord avoir un critère pour calculer les rayons petits. Cela est un analogue (à plusieurs variables T, u_1, \dots, u_r) du théorème de P. Young [You92]. Le critère dit grosso-modo que si la norme $x_{0,\rho}$ des fonctions g_0, \dots, g_r du système (6.30) est grande, alors $T(M(\alpha), \rho)$ est petit, et c'est donné par le minimum des inverses des normes des g_i multiplié par $|p|^{1/(p-1)}$.

Pour estimer la norme des g_i on doit passer à travers l'*isomorphisme de Cartier* [Car58]

$$\Omega_{k/\mathbb{F}_p}^1 \xrightarrow{\sim} Z^1(k)/d(k), \quad (6.37)$$

où $Z^1(k) := \text{Ker}(d : \Omega_{k/\mathbb{F}_p}^1 \rightarrow \Omega_{k/\mathbb{F}_p}^2)$ (voir aussi [CP09, Lemma 7.7]). □

Chapitre II : Équations différentielles sur les courbes de Berkovich

Ce chapitre concerne les articles [Pul12], [PP12b], [PP12a], [PP13a], [PP13b], [Pul13], [Pul14b].

Nous signalons également les articles suivants qui sont en relation avec les arguments traités dans ce chapitre (voir aussi l'introduction, pour les localiser dans un contexte plus générale) : [Rob75a], [Rob76], [Rob84], [Rob85], [CD94], [DR77], [Liu87], [Bal87], [Pon00], [CM93], [CM97], [CM00], [CM01], [Ked10], [Ked13].

7. Notations

Nous renvoyons le lecteur au livre de Berkovich [Ber90] pour les terminologies et définitions générales sur les espaces de Berkovich. Par la suite nous considérons [Duc] comme référence plus spécifique pour les notions afférant aux courbes quasi-lisses. Nous fixons dans cette section quelque notation qui sera utilisé dans le reste de ce mémoire. Nous ne souhaitons pas rentrer dans les détails des définitions, mais plutôt donner une idée générale et informelle de l'ensemble. Nous renvoyons aux articles originaires pour des notions plus précises [Pul12], [PP12b], [PP13a], [PP13b].

Si $(A, \|\cdot\|)$ est une algèbre munie d'une norme ultramétrique nous posons $A^\circ := \{x \in A \text{ tel que } \|x\| \leq 1\}$ et $A^{\circ\circ} := \{x \in A \text{ tel que } \|x\| < 1\}$, et $\widetilde{A} := A^\circ/A^{\circ\circ}$.

Par la suite $(K, |\cdot|)$ sera un corps, muni d'une valeur absolue ultramétrique pour laquelle il est complet.

Soient $c \in K$, $R > 0$ un nombre réel, et $I \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ un intervalle tel que $\inf(I) > 0$. Soit T la coordonnée de $\mathbb{A}_K^{1,\text{an}}$. Nous posons

$$D^+(c, R) = \{x \in \mathbb{A}_K^{1,\text{an}}, \text{ tel que } |(T - c)(x)| \leq R\}, \quad (7.1)$$

$$D^-(c, R) = \{x \in \mathbb{A}_K^{1,\text{an}}, \text{ tel que } |(T - c)(x)| < R\}, \quad (7.2)$$

$$C(c, I) = \{x \in \mathbb{A}_K^{1,\text{an}}, \text{ tel que } |(T - c)(x)| \in I\}. \quad (7.3)$$

Les algèbres des fonctions sur ces espaces sont les suivantes :

$$\mathcal{O}(D^+(c, R)) := \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i (T - c)^i, a_i \in K, \lim_i |a_i| R^i = 0 \right\}, \quad (7.4)$$

$$\mathcal{O}(D^-(c, R)) := \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i (T - c)^i, a_i \in K, \lim_i |a_i| \rho^i = 0, \text{ for all } \rho < R \right\}, \quad (7.5)$$

$$\mathcal{O}(C(c, I)) := \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i (T - c)^i, a_i \in K, \lim_{i \rightarrow \pm\infty} |a_i| \rho^i = 0, \text{ for all } \rho \in I \right\}. \quad (7.6)$$

Si K n'est pas algébriquement clos, on appelle disque virtuel fermé (resp. ouvert), tout domaine analytique connexe D de $\mathbb{A}_K^{1,\text{an}}$ tel que $D_{\widehat{K^{\text{alg}}}}$ est une réunion disjointe de disques fermés (resp. ouverts).

On donne la même définition pour définir les couronnes virtuelles, avec la condition ultérieure que $\text{Gal}(\widehat{K^{\text{alg}}}/K)$ préserve l'orientation des couronnes $C_{\widehat{K^{\text{alg}}}}$ (see [Duc, 3.6.32 and 3.6.35]).

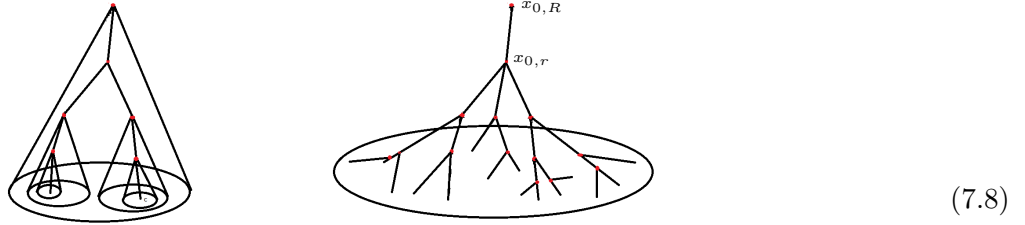
Pour tout $c \in K$ et $r \geq 0$ on dénote par $x_{c,r} \in \mathbb{A}_K^{1,\text{an}}$ la norme-sup sur le disque $D^-(c, r)_{\widehat{K^{\text{alg}}}}$. Si $f = \sum_i a_i (T - c)^i \in K[T]$ est un polynôme, elle est donnée par :

$$x_{0,r}(f) := \max_i |a_i| r^i. \quad (7.7)$$

Si K est algébriquement clos et spériquement complet, tout point de $\mathbb{A}_K^{1,\text{an}}$ est de ce type.

7.1. Images topologiques informelles des courbes de Berkovich.

Il est important de se faire une image de l'espace topologique sous-jacent à un disque ou une couronne. Si K est algébriquement clos et sphériquement complet, tout point x d'un disque ouvert $D^-(0, R)$ est de la forme $x = x_{c,r}$. Et $x_{c,r} = x_{c',r'}$ si et seulement si $r = r'$ et $|c - c'| \leq r$. Autrement dit $x_{c,r} = x_{c',r'}$ si et seulement si les disques fermés $D^+(c, r)$ et $D^+(c', r')$ coïncident. L'illustration suivante montre la structure topologique d'un disque ouvert :



Un disque fermé $D^+(0, R)$ contient un unique point $x_{0,R}$ qui n'a pas de disques ouverts comme voisinages. L'image décrivant un disque fermé est alors la suivante :



où le point rouge est $x_{0,R}$, et les cônes noirs représentent les disques ouverts $D^-(c, R)$, pour tout $c \in K$.

Prenons maintenant une couronne $C := C(0, I)$. Le segment Γ_C formé par les points du type $x_{0,r}$, avec $r \in I$, coïncide avec l'ensemble des points de C n'ayant aucun voisinage isomorphe à un disque ouvert. On montre facilement que $C - \Gamma_C$ est une réunion disjointe de disques ouverts, relativement compacts dans C , dont le bord appartient à Γ_C . La structure topologique de C ressemble donc à l'image suivante :



où le segment rouge est Γ_C et les cônes noirs désignent des disques de la forme $D^-(c, |c|)$.

8. Courbes lisses de Berkovich

Soit X une courbe K -analytique de Berkovich. Si Ω_X^1 est un faisceau localement libre de rang un nous dirons que X est une courbe quasi-lisse.¹² Pour simplifier nous allons supposer partout, sans perte de généralité, que X est connexe.

Nous notons par ∂X sa frontière de X , et par $\text{Int}(X) := X - \partial X$ le complémentaire.

Si $x \in X$, $\mathcal{H}(x)$ dénote son corps résiduel.

12. Une autre terminologie, utilisée notamment par Berkovich, pour désigner le même type de courbes est le mot anglais *rig-smooth K -analytic curve*. La terminologie quasi-lisse arrive du livre de Ducros [Duc].

Comme dans le cas des disques et des couronnes la courbe X a une structure naturelle de graphe réel. Si la valuation de K n'est pas triviale, ce graphe est toujours infini, et il présente une structure de fractale avec une infinité de points de bifurcation, qui peuvent être infiniment proches.

Pour étudier la courbe X , dans la suite, nous allons considérer certains sous-graphes localement finis $\Gamma \subseteq X$ ayant la propriété que $X - \Gamma$ est une réunion disjointe de disques virtuels ouverts. Un tel graphe contient beaucoup d'informations de nature topologique sur X . En effet si ces disques sont tous relativement compacts dans X , leur bord est dans Γ et la courbe X se rétracte sur Γ .

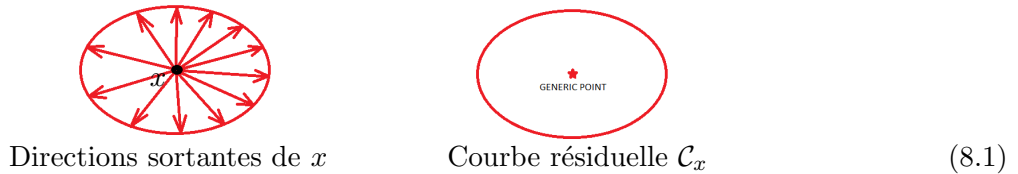
Définition 8.0.1. *Le sous ensemble des points de X n'ayant pas de disques virtuels ouverts comme voisinages s'appelle le squelette analytique de X . C'est un sous-graphe localement fini de X qui sera noté par Γ_X .*

Le graphe Γ_X est parfois vide, notamment si X est un disque virtuel ouvert, $\mathbb{P}_K^{1,\text{an}}$, ou $\mathbb{P}_K^{1,\text{an}} - \{x\}$ où x est un point de type 1 ou 4. Si K est algébriquement clos et sphériquement complet, alors en dehors de ces cas particuliers, Γ_X est non vide.

8.1. Courbe résiduelle et genre d'un point.

Soit x un point de X de type 2. Si K est algébriquement clos, alors le corps $\widetilde{\mathcal{H}}(x)$ de $\mathcal{H}(x)$ est le corps des fonctions d'une unique courbe projective lisse et connexe \mathcal{C}_x sur \widetilde{K} .

Si de plus on a bijection entre l'ensemble des germes de segments sortants de x et les points \widetilde{K} -rationnels d'un ouvert de Zariski \widetilde{V}_x de \mathcal{C}_x (cf. [Duc, 4.2.11.1]). De plus on a $\widetilde{V}_x = \mathcal{C}_x$ si et seulement si $x \in \text{Int}(X)$. Par la suite nous allons identifier ces ensembles.



Pour se faire une image, on peut prendre pour X un disque fermé unité $D^+(0, 1)$. Alors on a $\mathcal{C}_{x_{0,1}} = \mathbb{P}_{\widetilde{K}}^1$ et $\widetilde{V}_{x_{0,1}} = \mathbb{A}_{\widetilde{K}}^1$. En effet les disques qui se branchent en $x_{0,1}$ sont les classes résiduelles de K° .

Le genre g de la courbe \mathcal{C}_x s'appelle le genre du point x et sera noté par $g(x)$.

Si K n'est pas algébriquement clos, et si x_1, \dots, x_n sont les points de $X_{\widetilde{K}^{\text{alg}}}$ au dessus de x , on pose

$$g(x) := \sum_{i=1}^n g(x_i). \quad (8.2)$$

Nous résumons ces notions par le tableau des correspondances suivant :

x	$\eta_x = \text{point générique de } \mathcal{C}_x$
$g(x)$	$g(\mathcal{C}_x) = \text{genre de } \mathcal{C}_x$
$\widetilde{\mathcal{H}}(x) = \text{corps r�sidual de } x$	$\widetilde{K}(\eta_x) = \text{corps des fonctions sur } \mathcal{C}_x$
Directions sortants de x	$\mathcal{C}_x(\widetilde{K}) = \text{points rationnels de } \mathcal{C}_x$
$b = \text{direction sortante de } x$	$b \in \mathcal{C}_x(\widetilde{K}) \text{ point rationnel}$
\mathfrak{A}_b	$\widetilde{K}((T_b)) = \text{complété formel de } \widetilde{K}(\eta_x) \text{ par rapport � } b$

La condition suivante sera utilisé pour avoir la super-harmonicité :

Définition 8.1.1. (TR) Soit $x \in X$ un point de type 2. Si K est algébriquement clos, nous dirons que X vérifie la condition (TR) si s’il existe un morphisme fini

$$f : \mathcal{C}_x \longrightarrow \mathbb{P}_K^1 \tag{8.3}$$

qui est modérément ramifié partout, et non ramifié presque partout (i.e. le degré de f est premier à la caractéristique de \widetilde{K} en un nombre fini de points fermés de \mathcal{C}_x , et il est égal à 1 en tout autre point).

Si K n’est pas algébriquement clos, on dit que X vérifie (TR) en x si $X_{\widehat{K}^{\text{alg}}}$ vérifie (TR) en tout point au dessus de x .

Cette condition n’est pas méchante car si $g(x) = 0$, ou si la caractéristique de \widetilde{K} est différente de 2, la condition (TR) est vérifiée en x .

8.2. Triangulations

Définition 8.2.1 (pseudo-couronne). Si K est un corps algébriquement clos une pseudo-couronne ouverte est une courbe connexe quasi-lisse sans bord et sans points de genre positif telle que son squelette analytique est un segment.

Sur un corps quelconque c’est une courbe connexe quasi-lisse qui dévient une réunion disjointe de pseudo-couronnes après changement de base à la clôture algébrique, et telle que Galois préserve l’orientation des composantes connexes.

On peut montrer que toute pseudo-couronne ouverte est réunion de sous-couronnes virtuelles ouvertes relativement compactes dont les squelettes sont inclus les un dans les autres.

Un résultat de Q.Liu [Liu87, Prop. 3.2] montre que si K est algébriquement clos et sphériquement complet, alors une pseudo-couronne ouverte est soit une couronne ouverte, soit de la forme $Y - \{x\}$ où Y est soit la droite affine soit un disque et $x \in Y$ est un point rationnel.

Définition 8.2.2. Une pseudo-triangulation de X est un sous-ensemble localement fini $S \subseteq X$ formé par des points de type 2 ou 3, tel que $X - S$ est une réunion disjointe de disques virtuels ouverts, et de pseudo-couronnes ouvertes.

La réunion des squelettes de ces pseudo-couronnes et des points de S est un graphe localement fini Γ_S tel que $X - \Gamma_S$ est une réunion disjointe de disques virtuels. On appelle Γ_S le squelette de X par rapport à S .

Si toute pseudo-couronne composante connexe de $X - S$ est isomorphe à une couronne virtuelle ouverte, alors on dit que S est une triangulation faible.

Si S est une triangulation faible et si toute composante connexe de $X - S$ est relativement compacte dans X nous dirons que S est une triangulation.

Théorème 8.2.3 ([Duc]). *Toute courbe quasi-lisse X admet une triangulation.*

Supposons que X soit connexe, et soit S une pseudo-triangulation.

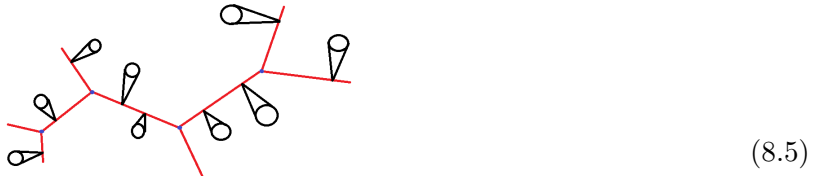
Si S est vide, alors X est soit une pseudo-couronne ouverte, soit un disque ouvert virtuel.

Si Γ_S est vide, alors X est un disque ouvert virtuel.

Si Γ_S n'est pas vide, alors toute composante connexe de $X - \Gamma_S$ est un disque virtuel ouvert qui est relativement compact dans X , et dont la frontière appartient à Γ_S . On a alors une contraction

$$\tau_S : X \rightarrow \Gamma_S \tag{8.4}$$

qui est l'identité sur Γ_S et qui associe au point $x \in X - \Gamma_S$ la frontière de la composante connexe de $X - \Gamma_S$ contenant x . L'image suivante représente la courbe X :



Le graphe Γ_S est indiqué en rouge, et les cônes représentent les composantes connexes de $X - \Gamma_S$.

Supposons toujours X connexe. Le Théorème 8.2.3 entraîne en particulier que si S est une pseudo-triangulation, alors on peut toujours la compléter en une triangulation faible S' contenant S , et aussi en une triangulation S'' contenant S' et S'' .

De plus on peut toujours choisir S' de sorte que $\Gamma_{S'} = \Gamma_S$. Par contre pour qu'il existe une triangulation S'' contenant S' telle que $\Gamma_{S''} = \Gamma_{S'}$, il faut et il suffit, que S' ne soit pas la triangulation faible vide d'un disque virtuel ouvert.

Remarque 8.2.4. *Supposons K algébriquement clos. La donnée d'un modèle semi-stable de X correspond à une triangulation S de X formée par des points de type 2 [Duc]. La fibre spéciale du modèle est la réunion des courbes résiduelles \tilde{V}_x de la section 8.1, et chaque arête de Γ_S joignant les points $x, y \in S$ correspond par la bijection (8.1) à un point d'intersection de \tilde{V}_x et \tilde{V}_y . Autrement dit le graphe Γ_S est le graphe dual du graphe d'intersection de la fibre spéciale.*

Remarque 8.2.5. *La notion de triangulation faible a été introduite dans [PP12b], car elle est plus cohérente avec l'idée de rayons de convergence d'une équation différentielle.*

Nous allons donner les définitions plus précises dans les prochaines sections. Ici nous souhaitons donner un exemple informel pour décrire l'idée qui nous a conduit à la définition de triangulation faible.

Supposons que X soit un disque ouvert, et considérons l'équation triviale $d : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1$. Elle correspond dans une base à l'équation $y' = 0$, qui a pour solution les fonctions constantes, dont le rayon de convergence est infini. Dans une autre base le même module trivial est associé à l'équation $y' = (h'/h) \cdot y$, où h est la section globale de $\mathcal{O}(D)^\times$ qui a servi pour le changement de base. Le rayon des solutions de cette équation peut maintenant ne pas être infini. Mais les solutions sont encore des sections globales sur D . La définition de rayon doit alors "tronquer" le rayon des solutions de manière à le rendre invariant par changement de base. Quelle est la bonne manière de tronquer ?

De manière informelle l'idée fondamentale de Baldassarri (voir également [BV07]) a été de tronquer le rayon de solutions de Taylor en x par la "distance du point x de Γ_S ". Dans son cadre Γ_S était associé à un modèle formel, et c'est donc le graphe d'une triangulation. En particulier, si X est un disque ouvert, le squelette Γ_S associé à un modèle formel n'est jamais vide, et la distance de Γ_S n'est jamais égale au rayon du disque X tout entier. Or, quand X est un disque ouvert, on veut vraiment permettre à Γ_S d'être vide de sorte à ne pas diminuer l'horizon d'existence des solutions, et ainsi préserver un maximum d'information. Nous allons préciser ces notions dans les prochaines sections.

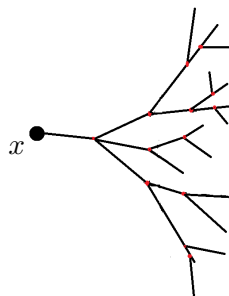
Une dernière remarque pour signaler que la définition des rayons de convergence, ainsi que leur propriétés topologiques fondamentales ne dépendent que de Γ_S et pas de S . Comme le graphe Γ_S d'une pseudo-triangulation est toujours le graphe d'une triangulation faible l'introduction des pseudo-triangulations ne change rien de ce point de vue.

Ce qui change est le nombre de points de S qui est le plus petit possible, et donc la notion de pseudo-triangulation traduit mieux les propriétés de finitude de Γ_S . Ces propriétés de finitude interviendront notamment pour décrire des condition de finitude dimensionnelle de la cohomologie de de Rham globale de \mathcal{F} .

8.3. Germes de segments.

Soit X une courbe quasi-lisse connexe. Un *segment ouvert* I dans X est l'image d'une application continue injective $i :]0, 1[\rightarrow X$. Supposons que $x := \lim_{r \rightarrow 0^+} i(r)$ existe dans X . Dans ce cas nous dirons que I est un segment sortant de x .

On définit une relation équivalence sur la famille des segments sortants de x en imposant que $I \sim I'$ si et seulement si il existe un segment I'' sortant de x tel que $I'' \subseteq I \cap I'$. Une classe d'équivalence est dite une *direction* sortante de x , ou une *branche* sortante de x , ou encore un *germe de segment* sortant de x .



(8.6)

D'après l'existence d'une triangulation (cf. Théorème 8.2.3) tout germe de segment sortant de x admet un représentant I qui est relativement compact dans X , et qui est le squelette analytique d'une couronne ouverte virtuelle dans X .

Il y a également des segments qui ne sont pas relativement compacts, et il est possible de définir une relation d'équivalence entre ces segments. On appelle *germes de segments à l'infini* (ou à la frontière ouverte de X) les classes d'équivalence.

Notamment soient I et I' deux segments non relativement compacts, images des chemins $i :]0, 1[\rightarrow X$ et $i' :]0, 1[\rightarrow X$, tels que $\lim_{r \rightarrow 0^+} i(r)$ et $\lim_{r \rightarrow 0^+} i'(r)$ n'existent pas dans X . Alors $I \sim I'$ si et seulement si il existe une application bijective $\psi :]0, \varepsilon'[\xrightarrow{\sim}]0, \varepsilon'[$ telle que $i|_{]0, \varepsilon'[} = (i')|_{]0, \varepsilon'[} \circ \psi$. L'ensemble des segments dans la frontière ouverte sera noté $\partial^\circ X$.

Hypothèse 8.3.1 (Orientation des germes de segments). *Soit b un germe de segment. Par la suite nous choisirons toujours les orientations suivantes :*

- i) *Si b est un germe de segment relativement compact sortant d'un point x , alors son orientation sera toujours vers l'extérieur de x .*

ii) Si $b \in \partial^\circ X$ est un germe de segment non relativement compact, alors son orientation sera toujours vers l'intérieur de X .

Remarque 8.3.2. Il faut faire attention au fait qu'un germe de segment à l'infini n'est pas toujours le squelette analytique d'une pseudo-couronne ouverte. Un exemple est donné par un disque ouvert $D^-(0,1)$ moins les zéros d'une fonction analytique non bornée. Il y a une infinité de zéros de f , donc le germe de segment représenté par $]x_{0,r}, x_{0,1}[$ n'est contenu dans aucune couronne de X .

On peut facilement démontrer le lemme suivant

Lemme 8.3.3. Si X est connexe, et si elle n'est pas isomorphe à un disque virtuel, alors tout germe de segment à l'infini de X est contenu dans son squelette analytique. En particulier il est contenu dans le squelette de toute triangulations. \square

Cela montre en particulier que si S est une triangulation faible telle que Γ_S est topologiquement fini, alors chaque germe de segment à l'infini est le squelette d'une pseudo-couronne ouverte.

Définition 8.3.4. Soit $x \in X$ un point de type 2 ou 3. Si b est une direction sortante de x , on définit l'anneau de Robba \mathfrak{R}_b comme

$$\mathfrak{R}_b := \bigcup \mathcal{O}(C_b) \quad (8.7)$$

où C_b parcourt l'ensemble des couronnes virtuelles ouvertes dans X dont le squelette analytique appartient à b .

Si K est algébriquement clos on peut toujours identifier C_b à une couronne $C(0,]r', r[$ et nous avons la description explicite classique

$$\mathfrak{R}_b = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i T^i \mid \forall i \ a_i \in K, \text{ il existe } \varepsilon > 0, \text{ tel que } \lim_{i \rightarrow \pm\infty} |a_i| \rho^i = 0, \text{ pour tout } \rho \in]r - \varepsilon, r[\right\} \quad (8.8)$$

8.4. Module et pentes.

Le rapport r'/r est un invariant par isomorphismes de la couronne $C := C(0,]r, r'[$ qui s'appelle *module* et qui sera noté par $\ell(C)$. On peut également descendre cette notion aux couronnes virtuelles car le groupe de Galois agit par isométries.

Nous voulons définir la pente (logarithmique) d'une fonction $F : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ sur un germe de segment dans X . La pente sera invariante par passage à $\widehat{K^{\text{alg}}}$, donc on peut supposer que K est algébriquement clos. Cela simplifie les notations.

Soit $I \subseteq X$ un segment, soit $x \in I$ et soit b un germe de segment sortant de x contenu dans I . Notons par C_b un germe de couronne ouverte de squelette b . On peut identifier C_b avec $C(0,]r, 1[$ de sorte que $\lim_{\rho \rightarrow 1^-} x_{0,\rho} = x$.

On dit que F est log-affine sur $]x_{0,r}, x_{0,1}[$, de pente γ , si pour tout $a < b$ dans $]r, 1[$ on a

$$\ln(F(b)) - \ln(F(a)) = \gamma \cdot \ell(C(0, [a, b])). \quad (8.9)$$

Fixons une orientation de I . On dira que F est log-affine sur I de pente γ si elle est continue sur I , et si elle est log-affine de pente γ sur tout germe de segment dans I orienté comme I .

Si b est un germe de segment orienté sortant d'un point x , et si F est log-affine sur b , on note la pente de F sur b par

$$\partial_b F(x). \quad (8.10)$$

Supposons que F soit log-affine sur tout germe de segment b sortant de x , et que $\partial_b F(x) = 0$ sauf un nombre fini de directions b . On peut alors former la somme

$$dd^c F(x) := \sum_b \partial_b F(x). \quad (8.11)$$

La fonction F est dite *super-harmonique* (resp. *harmonique*, *sous-harmonique*) si

$$dd^c F(x) \leq 0, \quad dd^c F(x) = 0, \quad dd^c F(x) \geq 0. \quad (8.12)$$

Si K n'est pas algébriquement clos, et si $\pi : X_{\widehat{K}^{\text{alg}}} \rightarrow X$ est la projection canonique, nous on pose pour tout $x \in X$:

$$dd^c F(x) := \sum_{\pi(y)=x} dd^c(F \circ \pi)(y). \quad (8.13)$$

8.5. Genre de Liu et caractéristique d'Euler-Poincaré de X

Soit T un espace topologique. Nous notons par $\chi_{top}(T) \leq 1$ la caractéristique d'Euler du complexe d'homologie singulière de T .

Par exemple si T se rétracte en un point on a $\chi_{top}(T) = 1$, et si T se rétracte sur un cercle on a $\chi_{top}(T) = 0$.

Nous dirons que Γ est un *graphe strict*, s'il est connexe, avec un nombre fini de arêtes (et donc aussi de sommets), et si chaque arête est relativement compact dans Γ .

Si T se rétracte sur un graphe strict, et si v et e désignent le nombre de sommets et d'arêtes respectivement, alors

$$\chi_{top}(T) = \chi(\Gamma) = v - e \leq 1. \quad (8.14)$$

Remarque 8.5.1. *Par exemple si Γ est un graphe strict sur une sphère \mathbb{S} , alors le théorème de Descartes-Euler concernant l'étude des polyèdres convexes dit que $\chi_{top}(\Gamma) = 2 - f$ où f est le nombre de composantes connexes de $\mathbb{S} - \Gamma$. La formule est souvent écrite sous la forme $v - e + f = 2$.*

Nous allons maintenant donner un procédé plus opérationnel pour calculer $\chi_{top}(X)$, pour une courbe quasi-lisse connexe X , en utilisant (8.14).

D'abord, lorsque $\Gamma_S \neq \emptyset$, la courbe X se rétracte toujours sur Γ_S , donc $\chi_{top}(X) = \chi_{top}(\Gamma_S)$. Nous rappelons que Γ_S peut être vide seulement si X est un disque virtuel, et dans ce cas $\chi_{top}(X) = 1$. Nous rappelons également que si X est connexe, Γ_S l'est aussi. Sans modifier la classe d'équivalence d'homotopie de Γ_S , on peut supprimer l'intérieur de tous les arêtes de Γ_S qui ne sont pas relativement compacts dans Γ_S . Si $\Gamma_S^{st,\infty} \subseteq \Gamma_S$ est le graphe qu'on obtient ainsi, on a $\chi_{top}(X) = \chi_{top}(\Gamma_S) = \chi_{top}(\Gamma_S^{st,\infty})$.

Maintenant, chaque arête de $\Gamma_S^{st,\infty}$ est relativement compact, mais ce n'est pas un graphe strict car il peut avoir une infinité d'arêtes. En effet $\Gamma_S^{st,\infty}$ est la réunion des sous-graphes strictes $\Gamma \subseteq \Gamma_S$, où le mot sous-graphe ici signifie que tout sommet (resp. arête) de Γ est un sommet (resp. arête) de Γ_S . Comme l'homologie singulière commute à la limite inductive, on peut calculer $\chi_{top}(\Gamma_S^{st,\infty})$ par passage à la limite sur les sous-graphes finis. De manière plus précise on a

$$\chi_{top}(\Gamma_S^{st,\infty}) = \lim_{\Gamma \subseteq \Gamma_S^{st,\infty}} \chi_{top}(\Gamma), \quad (8.15)$$

où Γ parcourt l'ensemble filtrant des sous-graphes stricts de $\Gamma_S^{st,\infty}$. Remarquons que χ_{top} est une fonction décroissante sur cet ensemble (i.e. si $\Gamma \subset \Gamma'$, alors $\chi_{top}(\Gamma) \geq \chi_{top}(\Gamma')$), et donc la limite existe toujours dans $[-\infty, 1]$. Maintenant la fonction χ_{top} de chaque sous-graphe strict $\Gamma \subseteq \Gamma_S$ se calcule avec (8.14).

8.5.1. Genre de Liu d'une courbe quasi-lisse, et sa caractéristique d'Euler à support compact. Soit X une courbe de Berkovich quasi-lisse et connexe, et soit S une triangulation faible de $X_{\widehat{K^{\text{alg}}}}$. On pose

$$\chi_{\text{top}}(\Gamma_S) := \chi_{\text{top}}(\Gamma_{S_{\widehat{K^{\text{alg}}}}}), \quad (8.16)$$

$$\chi_{\text{top}}(X) := \chi_{\text{top}}(X_{\widehat{K^{\text{alg}}}}). \quad (8.17)$$

Nous définissons le genre de X comme l'entier positif éventuellement égal à $+\infty$

$$g(X) = 1 - \chi_{\text{top}}(X) + \sum_{x \in X_{\widehat{K^{\text{alg}}}}} g(x) \geq 0. \quad (8.18)$$

Remarquons que si Y est un domaine analytique de X , alors $g(Y) \leq g(X)$.

La caractéristique d'Euler à support compact de X est définie comme

$$\chi_c(X) = 2 - 2g(X) - N(X) \leq 2, \quad (8.19)$$

où $N(X)$ est le nombre de germes de segments à l'infini de $X_{\widehat{K^{\text{alg}}}}$.

Voici le genre et la caractéristique à support compact dans des exemples simples, où K est algébriquement clos :

X	$\chi_{\text{top}}(X)$	$g(X)$	$\chi_c(X)$
Disque fermé	1	0	2
Couronne fermée	1	0	2
Disque ouvert	1	0	1
Couronne ouverte	1	0	0
$\mathbb{P}_K^{\text{L,an}}$	1	0	2
$\mathbb{A}_K^{\text{L,an}}$	1	0	1
\mathbb{G}_m^{an}	1	0	0
Domaine analytique connexe de $\mathbb{P}_K^{\text{L,an}}$	1	0	$2 - N(X)$
Courbe de Tate	0	1	0
Courbe elliptique avec bonne réduction	1	1	0
Analytifiée d'une courbe algébrique C		genre algébrique de C	

8.6. Caractéristique locale d'un point par rapport à un graphe.

Soit Γ un graphe connexe localement fini de X . Soit $x \in \Gamma$.

Si K est algébriquement clos nous posons

$$N_\Gamma(x) := \text{Nombre d'arêtes de } \Gamma \text{ sortants de } x. \quad (8.20)$$

$$\chi(x, \Gamma) := 2 - 2g(x) - N_\Gamma(x). \quad (8.21)$$

Si K n'est pas algébriquement clos, soient x_1, \dots, x_n les points de $X_{\widehat{K^{\text{alg}}}}$ au dessus de x , et soit $\Gamma_{\widehat{K^{\text{alg}}}} := \pi_{\widehat{K^{\text{alg}}}/K}^{-1}(\Gamma)$. Alors on pose

$$N_\Gamma(x) := \sum_{i=1}^n N_{\Gamma_{\widehat{K^{\text{alg}}}}}(x_i), \quad (8.22)$$

$$\chi(x, \Gamma) := \sum_{i=1}^n \chi(x_i, \Gamma_{\widehat{K^{\text{alg}}}}) = 2n - 2g(x) - N_\Gamma(x). \quad (8.23)$$

Soit S une pseudo-triangulation de X . Alors on pose

$$N_S(x) := N_{\Gamma_S}(x), \quad \chi(x, S) := \chi(x, \Gamma_S). \quad (8.24)$$

Remarque 8.6.1. *Supposons K algébriquement clos, et plaçons nous dans le contexte de la remarque 8.2.4. La bijection (8.1) dit que les germes de segments sortants de x appartenants à Γ_S correspondent aux points singuliers de la fibre spéciale du modèle. Le nombre $\chi(x, S)$ coïncide alors avec la caractéristique d'Euler à support compact de l'ouvert maximale de \tilde{V}_x qui ne contient pas de points singuliers de la fibre spéciale \tilde{X} .*

Le lien entre $\chi_c(X)$ et les différents $\chi(x, S)$ est donné par la proposition suivante :

Proposition 8.6.2. *Soit S une pseudo-triangulation de X . Supposons que X ait un nombre fini de composante connexes et que Γ_S rencontre chacune d'entre elles. De plus supposons que Γ_S est topologiquement fini (i.e. Γ_S est homéomorphe à une réunion finie d'intervalles). Supposons que le nombre de points de genre positif ainsi que le nombre de points à la frontière soient finis. Alors il existe un sous ensemble fini $S_0 \subseteq S$ tel que pour tout sous ensemble fini S' contenant S_0 vérifie*

$$\sum_{x \in S'} \chi(x, S) := \chi_c(X). \quad (8.25)$$

9. Les connexions petites sont cycliques [Pul14b]

Dans [Pul14b] nous avons approché un problème basique concernant un théorème de structure des modules différentiels qui s'appelle le *théorème du vecteur cyclique*.

Soit $d : A \rightarrow A$ une dérivation sur un anneau A . L'anneau des opérateurs différentiels $A\langle d \rangle$ à coefficients dans l'anneau A , est l'anneau des sommes formelles de la forme $P := \sum_{i=0}^n a_i \circ d^i$, $a_i \in A$, où la multiplication \circ est déterminée par la relation $d \circ a = a \circ d + d(a)$, pour tout $a \in A$.

On a une flèche évidente $A\langle d \rangle \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(A)$ qui envoie $A\langle d \rangle$ sur le plus petit anneau de $\text{End}_{\mathbb{Z}}(A)$ contenant d , et les multiplications par les éléments de A .

Un module différentiel n'est rien d'autre que la donnée d'un $A\langle d \rangle$ -module dont le A -module sous-jacent est libre de type fini. Il est donc important d'étudier $A\langle d \rangle$, et ses idéaux.

Si d est la dérivation triviale, $A\langle d \rangle$ est un anneau de polynômes, et si de plus A est un corps, les A -modules différentiels coïncident dans ce cas avec les A -espaces vectoriels de dimension finie munis d'un endomorphisme A -linéaire. Pour ces objets on a le théorème de structure suivant : tout $A\langle d \rangle$ -module est somme directe de modules *cycliques*, i.e. de la forme $A[d]/A[d]P$, pour lesquels la matrice de l'endomorphisme de multiplication par d est en forme compagnon du polynôme P .

Si d n'est pas triviale, $A\langle d \rangle$ n'est pas commutatif. Si de plus A est un corps de caractéristique 0, on sait montrer que $A\langle d \rangle$ est un anneau Euclidien, et en particulier qu'il est à idéaux principaux. Dans ce contexte P. Deligne a montré un théorème de structure plus fort, qui s'appelle le théorème du vecteur cyclique [Del70, Ch.II, Lemme 1.3] : tout module différentiel M sur $A\langle d \rangle$ est *cyclique* (sans besoin de décomposer), c'est à dire qu'il existe un isomorphisme de $A\langle d \rangle$ -modules

$$M \xrightarrow{\sim} A\langle d \rangle / A\langle d \rangle P. \quad (9.1)$$

L'image m de la classe $d + A\langle d \rangle P$ dans M s'appelle un *vecteur cyclique*, et si le rang de M est n , alors $m, d(m), d^2(m), \dots, d^{n-1}(m)$ est une base de M qu'on appelle une *base cyclique*. Trouver l'isomorphisme (9.1) revient à montrer qu'il existe une base cyclique, dans une telle base la matrice de l'action de d (i.e. de la connexion) est en forme compagnon par rapport à l'opérateur P .

Une grande partie des invariants associés à M se lit ou se définit sur une base cyclique, c'est à dire sur l'opérateur P .

Le théorème de Deligne n'est toutefois pas satisfaisant si l'on travaille avec des équations différentielles sur des bases plus générales qu'un corps (par exemple sur des courbes algébriques lisses, ou des courbes quasi-lisses de Berkovich). Dans [Kat70] on rencontre ce problème avec récurrence.

C'est pour cette raison que N.M.Katz a senti le besoin de améliorer le résultat de Deligne, en donnant un algorithme explicite pour le calcul du vecteur cyclique : en partant d'une base quelconque Katz construit un changement de base explicite pour passer à une base cyclique [Kat87c]. Comme conséquence Katz obtient l'existence d'un vecteur cyclique localement sur A par rapport à la topologie de Zariski, en particulier sur tout anneau local.

C'est dans ce contexte qui s'insère notre résultat de [Pul14b]. Supposons que $(A, \|\cdot\|)$ soit une K -algèbre de Banach, par rapport à une norme ultramétrique $\|\cdot\|$. Nous avons montré l'énoncé suivant :

THÉORÈME 28. *Si, dans une base de M , la matrice de la connexion ∇ est de norme suffisamment petite, alors M est cyclique.*

On rend explicite la relation entre la matrice de changement de base de Katz et la matrice de la connexion, et on montre que si la matrice de la connexion est petite, alors le changement de base de Katz est proche de l'identité, donc il est inversible.

Sur les courbes de Berkovich la norme petite de la matrice de la connexion est en relation avec le fait d'avoir un rayon grand rayon de convergence comme montré par le théorème de Young [You92] (voir aussi [CM02, Thm.6.2]). Par ailleurs la non existence de vecteur cyclique est une des obstruction parmi les plus importantes à l'application des méthodes "classiques" aux équations différentielles p -adiques, notamment pour le théorème de monodromie locale p -adique : avoir une base cyclique pour une équation soluble sur l'anneau de Robba entrainerait immédiatement (par [You92]) d'avoir des coefficients bornées. Cela permettrait de travailler sur un sous-corps différentiel de l'anneau de Robba (celui des fonctions bornées) pour lequel on aurait toute la théorie de Galois différentielle classique. Signalons qu'à *posteriori* les équations admettant une structure de Frobenius sur l'anneau de Robba ont une base de coefficients bornés grâce à des corollaires au théorème de la monodromie p -adique (cf. [And02, 7.1.6]).

10. Rayons de convergence

Soit X une courbe quasi lisse. Une équation différentielle sur X est un \mathcal{O}_X -module localement libre de type fini \mathcal{F} muni d'une connexion $\nabla : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \Omega_X^1$.

Un morphisme entre équations est la donnée d'un morphisme de \mathcal{O}_X -modules qui commute à la connexion. On démontre que le rangs du noyau et du conoyau sont des fonctions localement constantes sur X et que la catégorie des équations différentielles sur X est abélienne.

10.1. Structure de la fibre, disques génériques et maximaux.

Nous d'abord définir les disques sur les quels on cherche les solutions.

Soit $x \in X$ un point. Soit Ω une extension algébriquement close et sphériquement complète de $\mathcal{H}(x)$ telle que $|\Omega| = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Notons $\pi_\Omega : X_\Omega \rightarrow X$ la projection canonique. La structure de la fibre $\pi_\Omega^{-1}(x)$ a été étudiée dans [PP12b]. Nous esquissons ici le résultat principal sur sa structure.

Théorème 10.1.1. *Chaque point $x_1, \dots, x_n \in X_{\widehat{K^{\text{alg}}}}$ qui relève x possède un relèvement canonique $\sigma_\Omega(x_i) \in X_\Omega$ avec la propriété que $\pi_\Omega^{-1}(x)$ est formée de n -composantes connexes C_1, \dots, C_n , telles que*

- C_i contient $\sigma_\Omega(x_i)$,
- $C_i - \{\sigma_\Omega(x_i)\}$ est une réunion disjointe de disques ouverts qui sont tous relativement compacts dans X , et dont la frontière est $\sigma_\Omega(x_i)$.

- Plus précisément le groupe des automorphismes continus de Ω/K agit transitivement sur les points Ω -rationnels de $\pi_\Omega^{-1}(x)$, et sur ces disques qui sont donc tous isomorphes.

$$\begin{array}{ccc}
 X_\Omega & \xrightarrow{\quad} & X_{\widehat{K^{\text{alg}}}} \\
 \underbrace{\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \quad \dots \quad \text{Diagram 2} \\ \text{---} \\ \pi_\Omega^{-1}(x) \end{array}} & \xrightarrow{\quad} & x
 \end{array}
 \tag{10.1}$$

Chacun de ces disques s'appelle *disque générique* pour x . Il est noté

$$D(x) . \tag{10.2}$$

Par la suite on fera un choix d'un relèvement $t_x \in \pi_\Omega^{-1}(x)(\Omega)$, et on dira que le disque générique est l'unique composante connexe de $\cup_i C_i - \{\sigma_\Omega(x_i)\}$ qui contient t_x .

Soit S une triangulation faible de X . Son image inverse $S_{\widehat{K^{\text{alg}}}}$ est une triangulation de $X_{\widehat{K^{\text{alg}}}}$.

L'application $\sigma_\Omega : X_{\widehat{K^{\text{alg}}}} \rightarrow X_\Omega$ est une section canonique de la projection canonique $X_\Omega \rightarrow X_{\widehat{K^{\text{alg}}}}$. Le Théorème 10.1.1 montre que $S_\Omega := \sigma_\Omega(S_{\widehat{K^{\text{alg}}}})$ est une triangulation faible de X_Ω dont le graphe est $\sigma_\Omega(\Gamma_{S_{\widehat{K^{\text{alg}}}}})$, et que ce dernier est un graphe homéomorphe à $\Gamma_{S_{\widehat{K^{\text{alg}}}}}$ par la projection.

Maintenant, $X_\Omega - \Gamma_{S_\Omega}$ est une réunion disjointe de disques ouverts, et on donne la définition suivante

Définition 10.1.2 (Disque maximal). *On appelle disque maximal en x , noté*

$$D(x, S) , \tag{10.3}$$

la composante connexe de $X_\Omega - \Gamma_{S_\Omega}$ contenant t_x et $D(x)$.

10.2. Rayons de convergence et leurs propriétés.

Soit \mathcal{F} une équation différentielle sur X de rang r . Pour tout $x \in X$ nous choisissons un isomorphisme $D(x, S) \xrightarrow{\sim} D^-(0, 1)$ envoyant t_x en 0. Notons par

$$\mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}) \tag{10.4}$$

le rayon du plus grand sous-disque ouvert de $D^-(0, 1)$ centré en 0, tel que \mathcal{F} a au moins $r - i + 1$ solutions linéairement indépendantes sur $D^-(0, \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}))$. Ce nombre ne dépend que de $x \in X$ et \mathcal{F} , il est indépendant des choix qu'on a fait. Par définition on a

$$0 < \mathcal{R}_{S,1}(x, \mathcal{F}) \leq \mathcal{R}_{S,2}(x, \mathcal{F}) \leq \dots \leq \mathcal{R}_{S,r}(x, \mathcal{F}) \leq 1 . \tag{10.5}$$

Nous dirons que *l'indice i sépare les rayons en x* si on a $\mathcal{R}_{S,i-1}(x, \mathcal{F}) < \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F})$.

Notons par $D_{S,i}(x, \mathcal{F}) \subseteq D(x, S)$ le disque correspondant à $D^-(0, \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F})) \subseteq D^-(0, 1)$. On a une suite de disques

$$D_{S,1}(x, \mathcal{F}) \subseteq D_{S,2}(x, \mathcal{F}) \subseteq \dots \subseteq D_{S,r}(x, \mathcal{F}) . \tag{10.6}$$

Nous allons utiliser la terminologie suivante :

- Si $D_{S,i}(x, \mathcal{F}) \subset D(x)$, l'indice i est *spectrale non soluble en x* ;
- Si $D_{S,i}(x, \mathcal{F}) = D(x)$, l'indice i est *soluble en x* ;

– Si $D_{S,i}(x, \mathcal{F}) \supset D(x)$, l'indice i est *sur-soluble* en x .

Nous dirons de manière équivalente que le i -ème rayon $\mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F})$ est spectrale non soluble, soluble, sur-soluble.

Remarque 10.2.1. *Il existe une définition spectrale des rayons, liée à la norme spectrale des connexions des sous-quotients de $\mathcal{F}|_{\mathcal{H}(x)}$ (cf. [Ked10, 9.4.4, 9.8.1]). Cela revient à prendre $D_{S,i}(x, \mathcal{F}) \cap D(x)$ à la place de $D_{S,i}(x, \mathcal{F})$. C'est à dire tronquer les rayons $\mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F})$ par celui de $D(x)$. Le correspondance entre les rayons (10.5) et la norme spectrale de la connexion subsiste donc uniquement pour les rayons spectrales non solubles.*

Chacun des rayons donne une fonction

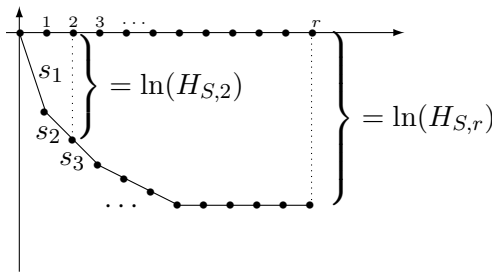
$$\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F}) : X \rightarrow]0, 1] . \quad (10.7)$$

Le nombre $\mathcal{R}_{S,1}(x, \mathcal{F})$ est le rayon du plus grand disque centré en t_x où toutes les solutions de \mathcal{F} convergent.

Théorème 10.2.2 ([BV07],[Bal10]). *La fonction $\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F}) : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ est continue.*

La preuves utilisées par [BV07] et [Bal10] généralisent une plus ancienne preuve due à G.Christol et B.Dwork [CD94], où l'on montrait la continuité sur un segment qui était le squelette d'une couronne. L'ingrédient centrale de toute ces preuves est une estimation de la croissance des solutions au bord du disque $D_{S,1}(x, \mathcal{F})$ [DR80]. Cette estimation tient compte du comportement globale de toutes les solutions, et il semble impossible d'isoler le comportement d'une seule solution. Cela fait qu'on ne peut pas étudier les rayons supérieurs avec cette méthode.

La suite $\ln(\mathcal{R}_{S,1}(x, \mathcal{F})) \leq \dots \leq \ln(\mathcal{R}_{S,r}(x, \mathcal{F}))$ est la suite des pentes d'un polygone qu'on appelle le *polygone de Newton des convergences* de \mathcal{F} en x . C'est l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^2 de l'épigraphe de la fonction qui associe à l'entier $0 \leq i \leq r$ la valeur $h_i := \sum_{k=0}^i \ln(\mathcal{R}_{S,k}(x, \mathcal{F}))$, $h_0 = 0$.



(10.8)

Avec un abus, on dit que les fonctions

$$H_{S,i}(x, \mathcal{F}) := \prod_{k=0}^i \mathcal{R}_{S,k}(x, \mathcal{F}) \quad (10.9)$$

s'appellent les hauteurs partielles du polygone de Newton des convergences. Ces fonctions ont été introduites par Young [You92].

Définition 10.2.3. *Un sommet de ce polygone est par définition un indice $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $i = r$, ou tel que $i + 1$ sépare les rayons en x .*

On dit que l'indice i est libre de solubilité si tout indice $j \leq i$ n'est pas soluble.

La variation sur X de ce polygone va nous permettre de donner des théorèmes de classification (décomposition par les rayons) ainsi que des expressions explicites de la cohomologie de de Rham de \mathcal{F} .

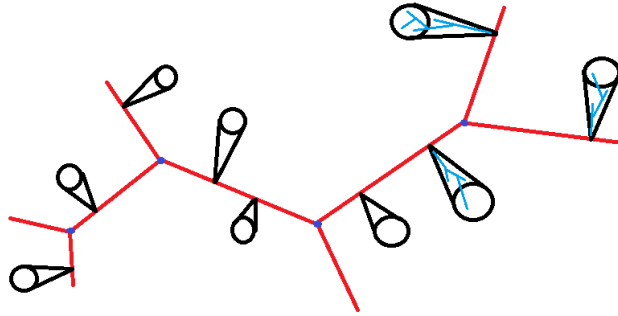
Nous allons montrer que les fonctions $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F})$ et $H_{S,i}(-, \mathcal{F})$ jouissent d'une propriété de continuité beaucoup plus forte : elles se factorisent par un sous-graphe fini de X .

Nous donnons d'abord la définition fondamentale suivante :

Définition 10.2.4. Soit T un espace topologique, et soit $F : X \rightarrow T$ une fonction. Soit S une pseudo-triangulation de X . On appelle S -graphe contrôlant de F le sous ensemble de X formé par les points $x \in X$ qui n'ont aucun voisinage isomorphe à un disque ouvert virtuel D sur le quel F est constant et tel que $D \cap S = \emptyset$. Le graphe contrôlant sera noté par

$$\Gamma_S(F). \quad (10.10)$$

Autrement dit $\Gamma_S(F)$ est le complémentaire de la réunion des disques ouverts virtuels, n'intersectant pas S , sur les quels F est constante. Par construction on a $\Gamma_S \subset \Gamma_S(F)$. On sait que $X - \Gamma_S$ est une réunion disjointe de disques, et on montre que pour tout $x \in \Gamma_S(F) - \Gamma_S$ le segment joignant x avec Γ_S (resp. joignant x à la frontière ouverte, si Γ_S est vide et X est un disque) est contenu dans $\Gamma_S(F)$.



$$\text{—} = \Gamma_S \quad \underline{\text{—}} = \Gamma_S(F) \quad (10.11)$$

Un tel graphe est dit *admissible* dans [Duc]. Cette propriété entraîne que, dès que $\Gamma_S \neq \emptyset$, X admet une rétraction sur $\Gamma_S(F)$.

Remarque 10.2.5. On sait que dès que Γ_S est non vide, la courbe connexe X se rétracte sur Γ_S . D'après ce qu'on vient de dire, elle se rétracte aussi sur $\Gamma_S(F)$. Toutefois cela n'entraîne pas à priori que F soit déterminée par ses valeurs sur $\Gamma_S(F)$. La fonction $\Gamma_S(F)$ peut par exemple être constante sur un disque D dont la frontière est $x \in \Gamma_S(F)$, mais si F n'est pas continue, on peut avoir $F(D) \neq F(x)$.

Par la suite nous notons par

$$\Gamma_{S,i}(\mathcal{F}) := \Gamma_S(\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F})) \quad (10.12)$$

le graphe contrôlant de la fonction $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F})$.

Il n'y a aucune relation d'inclusion évidente entre les graphes $\{\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})\}_i$. Pour cette raison on pose

$$\Gamma'_{S,i}(\mathcal{F}) := \bigcup_{k=1}^i \Gamma_{S,k}(\mathcal{F}). \quad (10.13)$$

C'est un graphe plus maniable. Par exemple on peut voir qu'il coïncide avec la réunion des graphes

contrôlant des hauteurs partielles :

$$\Gamma'_{S,i}(\mathcal{F}) = \bigcup_{k=1}^i \Gamma_S(H_{S,k}(-, \mathcal{F})). \quad (10.14)$$

Dans [Pul12], [PP12b], [PP13a] nous avons étudié ces graphes et nous avons obtenu le résultat suivant

Théorème 10.2.6 ([Pul12],[PP12b]). *Soit \mathcal{F} une équation différentielle de rang r sur une courbe quasi-lisse connexe X .*

Pour tout $i = 1, \dots, r$, les graphes $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$ sont localement-finis. Les fonctions $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F})$ et $H_{S,i}(-, \mathcal{F})$ sont continues et se factorisent par la rétraction de X sur leur graphe contrôlant. De plus nous avons les propriétés suivantes :

- i) *Les fonctions $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F})$ et $H_{S,i}(-, \mathcal{F})$ sont log-affines par morceaux sur tout segments de X , et elles ont un nombre fini de changement de pentes sur tout segment compact dans X ;*
- ii) *Si i est un sommet en un point $x \in X$ du polygone de Newton des convergences, alors pour tout germe de segment b sortant de x la pente $\partial_b H_{S,i}(x, \mathcal{F})$ est entière.*

Pour tout autre indice i nous avons

$$\partial_b H_{S,i}(x, \mathcal{F}) \in \mathbb{Z} \cup \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \dots \cup \frac{1}{r}\mathbb{Z}. \quad (10.15)$$

- iii) *Soit C une composante connexe de $X - S$. Soit $i \in \{1, \dots, r\}$, alors :*

- *Si C est une couronne virtuelle ouverte, alors pour tout i la fonction $H_{S,i}(-, \mathcal{F})$ est log-concave sur le segment Γ_C .*
- *Si C est un disque virtuel ouvert, soit I le segment joignant un point x à la frontière ouverte de C . Alors $H_{S,i}(-, \mathcal{F})$ est log-concave et non croissante sur I au voisinage de tout point $y \in I$ tel que l'indice i est libre de solubilité en y .*

- iv) *Pour tout $i = 1, \dots, r$ il existe une famille localement finie de points $\mathcal{C}_{S,i}(\mathcal{F}) \subset X - \Gamma_S$ telle que*

- *Si $x \notin S \cup \mathcal{C}_{S,i}(\mathcal{F})$, alors $H_{S,i}$ est super-harmonique en x , et elle est harmonique si i est un indice libre de solubilité ;*
- *Si $x \in S - \partial X$ est un point de type 3, ou un point de type 2 vérifiant la condition (TR) (cf. Def. 8.1.1), alors*

$$dd^c H_{S,i}(x) \leq -\chi(x, S) \cdot \min(i, i_x^{\text{SP}}). \quad (10.16)$$

où i_x^{SP} est le plus grand indice tel que tout indice $j \leq i_x^{\text{SP}}$ est spectral non soluble en x .

De plus si i est un sommet du polygone de Newton des convergences en x qui est libre de solubilité, alors (12.1) est une égalité.

On peut préciser le lieu $\mathcal{C}_{S,i}(\mathcal{F}) \subset X - \Gamma_S$. Notamment pour tout $k = 1, \dots, i$ soit A_k l'ensemble des points $x \in X - \Gamma_S$ tels que

- i) L'indice k est soluble en x ;
- ii) x est un point final de $\Gamma_{S,k}(\mathcal{F})$;
- iii) $x \in \Gamma_{S,k}(\mathcal{F}) \cap \Gamma_S(H_{S,k}(-, \mathcal{F})) \cap \Gamma'_{S,k-1}(\mathcal{F})$.

Alors

$$\mathcal{C}_{S,i}(\mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{k=1}^i A_k. \quad (10.17)$$

La preuve de ces énoncés se décompose en deux parties, dont nous allons maintenant esquisser les grandes lignes.

10.2.1. La preuve sur la droite affine. La première partie consiste à montrer le théorème pour un domaine affinoïde de la droite affine.

Nous avons le critère suivant de finitude.

Théorème 10.2.7. *Soit X un domaine affinoïde de la droite affine, et soit S_X sa triangulation minimale. Soit $F : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ une fonction. Soit $\Gamma \subset X$ un graphe connexe fini contenant Γ_{S_X} .*

Si F satisfait les conditions suivantes, alors F est continue et $\Gamma_{S_X}(F)$ est fini :

- (C1) *Pour tout point $x \in X(\widehat{K^{\text{alg}}})$ il existe un disque ouvert virtuel D contenant x sur lequel F est constante (autrement dit $\Gamma_{S_X}(F)$ ne contient pas x);*
- (C2) *F est continue, log-affine par morceaux, avec un nombre fini de changement de pentes sur tout segment de X ;*
- (C3) *Pour tout corps Ω , tout point rationnel $c \in X_\Omega$, la fonction $\log(\rho) \mapsto \log \circ F \circ \pi_{\Omega/K}(x_{c,\rho})$ est concave sur le segment joignant c à $\pi_{\Omega/K}^{-1}(\Gamma)$.*
- (C4) *Les pentes non nulles de F ne peuvent pas être arbitrairement petites. Notamment il existe une constante $\nu_F > 0$ telle que pour tout $x \in X$, et tout germe de segment b sortant de x on a*

$$\partial_b F(x) \in] -\infty, -\nu_F[\cup\{0\}\cup\nu_F, +\infty[. \quad (10.18)$$
- (C5) *Pour tout point de bifurcation x de $\Gamma_{S_X}(F)$ il n'y a qu'un nombre fini de directions b sortantes de x telles que $\partial_b F(x) \neq 0$;*
- (C6) *Il existe un sous ensemble fini $\mathcal{C}(F) \subset X$ tel que pour tout point de bifurcation x de $\Gamma_{S_X}(F)$ n'appartenant pas à $\partial X \cup \mathcal{C}(F)$ on a $dd^c F(x) \leq 0$ (i.e. F est super-harmonique en x).*

La finitude et continuité des rayons $\mathcal{R}_{S,1}, \dots, \mathcal{R}_{S,r}$ équivaut à celle des $H_{S,1}, \dots, H_{S,r}$. La preuve consiste donc à montrer que les hauteurs partielles $H_{S,i}(x, \mathcal{F})$ vérifient ce critère, et cela est fait par récurrence sur l'indice i . Nous ne dirons qu'un mot sur les techniques pour démontrer la finitude et les autres points du théorème 10.2.6.

D'une part on peut lire les rayons spectrales non solubles par un argument bien connu qui consiste à faire des push-forward par Frobenius de manière à diminuer les rayons, et d'autre part à lire explicitement les rayons petits avec le théorème de Young [You92] sur une base cyclique.

Notamment, si i est un indice spectrale, la super-harmonicité de $H_{S,i}(-, \mathcal{F})$ est une conséquence de la super-harmonicité des hauteurs partielles du polygone de Newton classique associé à un opérateur dans une base cyclique (i.e. l'enveloppe convexe des points (n, v_n) où v_n est la valuation de l' n -ème coefficient de l'opérateur).

La difficulté ici est de contrôler les rayons solubles ou sur-solubles qu'on ne peut pas lire sur les coefficients d'un opérateur dans une base cyclique. On est obligé de lire ces rayons par des moyens indirects (arguments de continuité et concavité/super-harmonicité).

Notamment la grande discrépance de comportement entre le premier rayon $\mathcal{R}_{S,1} = H_{S,1}$ et les hauteurs partielles supérieurs $H_{S,i}$, $i \geq 2$, consiste dans le défaut potentiel de super-harmonicité des hauteurs partielles. Cela fait que ces rayons ont un comportement très différent et beaucoup moins prévisible, surtout en correspondance des points où on a solubilité.

Nous avons surmonté ces problème en faisant une récurrence avec une technique qui permet de se réduire au cas du premier rayon $\mathcal{R}_{S,1}$. Le principe de la récurrence est grosso modo le suivant.

10.2.2. Cas du Rayon : $i = 1$. Nous rappelons la propriété suivante de $\mathcal{R}_{S,1}$ connue sous le nom de *principe de transfert*.

- Si D est un disque, qui est composante connexe de $X - \Gamma_S$, et si I est un segment joignant un point $x \in D$ à la frontière ouverte de D orienté vers l'extérieur de D , alors $\mathcal{R}_{S,1}$ est log-décroissante.

Cela est une conséquence de l'expression d'Hadamard (0.34) de $\mathcal{R}_{S,1}$ sur D , et du fait que $\mathcal{R}_{S,1}$ est constant autour des points de type 1. Cela représente la propriété (C3). Les propriétés (C1), (C2), (C4) sont bien connues, il reste à tester (C5) et (C6).

Si le rayon $\mathcal{R}_{S,1}$ est spectrale en x , alors on a dit qu'on peut faire push-forward et lire le rayon dans une base cyclique. Ces propriétés sont alors conséquence des mêmes propriété pour les hauteur partielles d'un opérateur dans une base cyclique.

Si le rayon $\mathcal{R}_{S,1}$ est sursoluble en x , la fonction est localement constante autour de x et il n'y a rien à démontrer.

Si le rayon $\mathcal{R}_{S,1}$ est soluble en x , alors on montre qu'il est constante sur tout disque dont la frontière est égale à x . Car le rayon est maximale au bord du disque, et par *transfert* il est "décroissant" sur le disque.

La réunion des disques dont la frontière est x est un domaine affinoïde $V(x)$ sur lequel le rayon est constant. Ainsi on démontre la propriété (C5) en x . La super-harmonicité (C6) est encore conséquence facile de la solubilité, car les pentes sont bornées par 0 autour de x , toujours grâce au *transfert* sur les disques de $V(x)$.

10.2.3. Cas des hauteurs partielles $H_{S,i}$, $i > 1$. Supposons d'avoir montré le théorème pour $H_{S,1}, \dots, H_{S,i-1}$. En particulier le graphe $\Gamma'_{S,i-1}(\mathcal{F}) = \cup_{j=1}^{i-1} \Gamma_{S,j}(\mathcal{F})$ est fini.

Le point qui permet de faire l'induction pour passer de $H_{S,1}, \dots, H_{S,i-1}$ à $H_{S,i}$ est le fait suivant qui constitue l'analogie pour les rayons supérieurs du *principe de transfert* :

- $X - \Gamma'_{S,i-1}(\mathcal{F})$ est une réunion disjointe de disques D sur les quelles $H_{S,i}$ se comporte comme un premier rayon d'un sous-module de $\mathcal{F}|_D$.

Cela se démontre par un théorème de décomposition sur un disque du à Kedlaya [Ked10].

10.2.4. Réduction au cas de la droite affine. Alors que la preuve de la continuité et de la finitude sur la droite affine utilisent naturellement tous les énoncés du théorème 10.2.6 (et notamment la super-harmonicité en dehors de $\mathcal{C}_{S,r}(\mathcal{F})$), dans [PP12b] nous nous sommes concentré uniquement sur le fait d'éteindre la finitude et continuité au cas des courbes. Les autres énoncés du Théorème 10.2.6 sont démontrés dans [PP13a].

L'extension aux courbes de la continuité et de la finitude utilise certains morphismes, bien choisis, définis sur un voisinage de $x \in S$ vers un domaine affinoïde de $\mathbb{P}_K^{1,\text{an}}$. Il nous suffit en effet de montrer la continuité et la locale finitude de Γ_S en un point de S , car ailleurs la courbe se plonge dans $\mathbb{P}_K^{1,\text{an}}$.

L'instrument principale est le résultat suivant généralisant légèrement un théorème originairement du à A.Ducros

Théorème 10.2.8 ([Duc], [PP12b]). *Soit $x \in X$ un point de type 2. Soient b_1, \dots, b_t, c des directions distinctes sortantes de x . Soit N un entier positif. Alors il existe un voisinage affine Z de x in X , une courbe affinoïde quasi-lisse Y , un domaine affinoïde W de $\mathbb{P}_K^{1,\text{an}}$ et un morphisme fini étale $\psi: Y \rightarrow W$ telle que*

- Z est isomorphe à un domaine affinoïde de Y et x appartient à l'intérieur de Y ;
- le degré de ψ est premier à N ;

- iii) $\psi^{-1}(\psi(x)) = \{x\}$;
- iv) *il n'y a qu'un nombre fini de composantes connexes de $Y \setminus \{x\}$ qui n'est pas isomorphe au disque ouvert unité avec frontière $\{x\}$;*
- v) *il n'y a qu'un nombre fini de composantes connexes de $W \setminus \{\psi(x)\}$ qui n'est pas isomorphe au disque ouvert unité avec frontière $\{\psi(x)\}$;*
- vi) *pour tout composante connexe V de $Y \setminus \{x\}$, le morphisme induit $V \rightarrow \psi(V)$ est un isomorphisme ;*
- vii) *pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, le morphisme ψ induit un isomorphisme entre une couronne de squelette appartenant à la classe b_i et une couronne de squelette appartenant à $\psi(b_i)$ et on a $\psi^{-1}(\psi(b_i)) \subseteq Z$;*
- viii) $\psi^{-1}(\psi(c)) = \{c\}$.

Avec ce théorème on peut construire des morphismes de degré modéré, pour lesquels on peut comparer les rayons de convergence de \mathcal{F} avec ceux de son push-forward sur $\mathbb{P}_K^{1,\text{an}}$.

Notamment le point vi) du théorème précédent nous dit qu'on a un isomorphisme sur presque tout disque dont la frontière est x . Cela permet de construire un domaine affinoïde $Y_x \subseteq X$ tel que $Y_x - \{x\}$ est une réunion de disques, pour lequel on montre que les rayons se transportent bien par push-forward, et en particulier $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F}) \cap Y_x$ est fini pour tout i .

Sur les autres directions (i.e. celles sortantes de x qui n'appartiennent pas à Y_x) on applique les points vii) et viii) du théorème précédent pour construire, direction par direction, des morphismes modérés définis sur un voisinage de x qui sont modérés sur la branche choisie. Pour ces morphismes on sait lire la transformation des rayons par push-forward.

Plus précisément, on montre que si f est un morphisme de degré premier à p en x , alors il induit un revêtement trivial sur le disque $D(x, S)$, et donc le push-forward se calcule facilement.

Remarque 10.2.9. *Pour transporter la super-harmonicité de la droite à la courbe X via le morphisme étale f on doit se servir du théorème Hurwitz entre les courbes résiduelles (pour maîtriser le nombre de directions au dessous d'une direction donnée), et aussi d'un théorème de décomposition locale. Nous allons expliquer ça dans la section 11.*

10.3. Finitude et théorie du potentiel.

Dans cette section nous allons dire juste un mot sur une preuve de la continuité et finitude de la seule fonction $\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F})$ sur les courbes sans bord, que nous avons obtenu dans [PP12a].

La preuve de la finitude, et de la continuité en dehors des points de type 2 de S , se fait essentiellement avec les techniques de [Pul12] et [PP12b].

La finitude autour d'un point de S se fait encore avec le Théorème 10.2.8 comme dans [PP12b].

La différence par rapport à [PP12b] réside en la preuve de la continuité en les points x de type 2 de S . Pour montrer la continuité en x on est réduit à montrer la continuité de la restriction de $\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F})$ sur chaque branche de $\Gamma_S(\mathcal{F})$ qui est un graphe fini.

La stratégie pour montrer la continuité est la suivante :

- i) on peut choisir un morphisme ψ comme dans le Théorème 10.2.8, adapté à toute direction b sortante de x ;
- ii) soit d le pull back par ψ de la dérivation d/dT sur la droite affine, alors sur un voisinage ouvert U de x on peut définir la fonction suivante

$$\mathcal{R}_U^d(y, \mathcal{F}) := \liminf_n \left(\left| \frac{G_n(y)}{n!} \right|^{-1/n} \right) \quad (10.19)$$

où $G_n \in \mathcal{O}(U)$ est la matrice dans une base de \mathcal{F} de l'action de d^n ;

- iii) la fonction $\mathcal{R}_U^d(y, \mathcal{F})$ est continue au voisinage de x ;
- iv) soit b une direction donnée, et choisissons ψ la fonction du Théorème 10.2.8 adaptée à b . Alors il existe une couronne C_b dont le squelette appartient à la classe la direction donnée b sur la quelle les fonctions $\mathcal{R}_{S,1}(y, \mathcal{F})$ et $\mathcal{R}_U^d(y, \mathcal{F})$ coïncident à moins d'une normalisation pour tout y dans la fermeture de C_b en X , en particulier $\mathcal{R}_{S,1}(y, \mathcal{F})$ est continu en x .

Pour montrer la continuité de la fonction $\mathcal{R}_U^d(-, \mathcal{F})$ on utilise, comme ingrédient essentiel dans la preuve, la théorie du potentiel sur les courbes de Berkovich qui a été développée par Amaury Thuillier [Thu05], au quel nous faisons référence.

Notamment d'une part on montre que $\mathcal{R}_U^d(-, \mathcal{F})$ est super-harmonique autour de x , car chaque fonction $G_n \in \mathcal{O}(U)$ est harmonique. C'est la que nous devons supposer que $x \notin \partial X$.

D'autre part la théorie du potentiel nous dit que les fonctions super-harmoniques sont continues autour des points de type 2, 3, 4 de $X - \partial X$.

11. Théorèmes de décomposition locales et globales

Nous avons étudié dans [PP13a] des théorèmes de classification des équations différentielles, connus sous le nom de *théorèmes de décomposition par les rayons de convergence*. Ces théorèmes affirment que en présence de deux solutions avec rayons différents l'équation \mathcal{F} se décompose en deux équations “séparant” ces solutions.

Nous allons parler d'abord des théorèmes de décomposition locales sur un point de Berkovich.

Les premiers théorèmes de décompositions par les rayons ont été démontrés par Robba [Rob75a], pour les équations différentielles sur le corps $\mathcal{H}(x)$ où x est un point de type 2 de la droite affine.

Ensuite Dwork et Robba ont montré dans [DR77] un théorème de décomposition pour les équations définies sur $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_K^{1,\text{an}},x}$.

Dans [PP13a] nous avons généralisé ces théorèmes à tout point d'une courbe quasi-lisse X . Nous allons maintenant rappeler le contexte et les énoncés.

11.1. Décomposition de Robba sur $\mathcal{H}(x)$.

Dans le contexte globale, les rayons $\mathcal{R}_{S,i}$ ne sont pas stables par localisation, principalement à cause du fait que le disque maximal $D(x, S)$ peut diminuer quand on passe de X à un domaine analytique contenant x . Cela n'est pas vrai pour les rayons spectrales, car le disque $D(x)$ ne dépends que de x et pas de la courbe contenant x . Quitte à tenir compte de la normalisation les rayons spectrales sont “stables” par localisation et par changement de triangulation.

Soit $x \in X$ un point de type 2, 3, 4. Nous fixons un corps Ω/K tel que x soit Ω -rationnel. Nous allons considérer alors le disque générique $D(x)$ comme une courbe Ω -analytique quasi-lisse.

Notons par $\mathcal{B}(x)$ l'anneau des fonctions analytiques bornées $D(x)$, muni de la norme sup sur $D(x)$. Les éléments $\mathcal{H}(x)$ donnent par pull-back des fonctions sur la fibre $\pi_{\Omega/K}^{-1}(x)$, et elles se plongent naturellement dans $\mathcal{B}(x)$. L'application

$$\mathcal{H}(x) \rightarrow \mathcal{B}(x), \tag{11.1}$$

est une isométrie. Le lemme suivant utilise le Théorème 10.2.8.

Lemme 11.1.1. *Il existe une coordonnée étale T définie sur un voisinage de x , induisant une immersion de $D(x)$ sur $\mathbb{A}_{\Omega}^{1,\text{an}}$.*

La dérivation d/dT stabilise globalement les anneaux $\mathcal{O}_{X,x}$, $\mathcal{H}(x)$, et $\mathcal{B}(x)$.

Le corps $\mathcal{H}(x)$, muni de la dérivation d/dT , est un corps différentiel, et nous pouvons considérer les modules différentiels sur $\mathcal{H}(x)$. Par changement de base ces modules donnent des équations différentiels sur $D(x)$, qu'on peut considérer comme une variété quasi-lisse sur Ω . Soit \mathcal{F} un module différentiel sur $\mathcal{H}(x)$ de rang r . Maintenant nous fixons la triangulation vide sur $D(x)$ et nous notons par

$$\mathcal{R}_i(x, \mathcal{F}) := \mathcal{R}_{\emptyset, i}(t_x, \mathcal{F} \widehat{\otimes}_{\mathcal{H}(x)} \mathcal{O}(D(x))), \quad i = 1, \dots, r \quad (11.2)$$

les rayons de $\mathcal{F} \widehat{\otimes}_{\mathcal{H}(x)} \mathcal{O}(D(x))$ en t_x . Nous savons que comme cette équation provient de $\mathcal{H}(x)$ ces rayons sont des fonctions constantes sur $D(x)$. Nous avons donc juste une suite de nombres :

$$0 < \mathcal{R}_1(x, \mathcal{F}) \leq \dots \leq \mathcal{R}_r(x, \mathcal{F}). \quad (11.3)$$

Notons par $r(x)$ le rayon de $D(x)$ dans la coordonnée T , et pour tout $0 < \rho \leq 1$ notons par

$$D(x, \rho) \subseteq D(x) \quad (11.4)$$

le sous disque ouvert de rayon $\rho \cdot r(x)$, de sorte que

$$D(x, \mathcal{R}_i(x, \mathcal{F})) = D_{\emptyset, i}(x, \mathcal{F}). \quad (11.5)$$

Théorème 11.1.2 ([Rob75a], [PP13a]). *Soit \mathcal{F} un module différentiel sur le corps $\mathcal{H}(x)$. Alors \mathcal{F} se décompose en somme directe comme*

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{0 < \rho \leq 1} \mathcal{F}^\rho \quad (11.6)$$

en des sous- $\mathcal{H}(x)$ -modules tels que $\mathcal{R}_i(x, \mathcal{F}^\rho) = \rho$, pour tout $i = 1, \dots, \text{rank}(\mathcal{F}^\rho)$.

Les rayons de \mathcal{F} sont la réunion avec multiplicité des rayons des \mathcal{F}^ρ qui sont non nulles dans (11.6). De plus on a compatibilité à la dualité $(\mathcal{F}^\rho)^* \cong (\mathcal{F}^*)^\rho$.

La preuve de Robba, qui est due en partie à Dwork [Dwo73], consiste à munir l'anneau $\mathcal{H}(x)\langle d/dT \rangle$ des topologies \mathcal{T}_ρ induites par les normes d'opérateurs sur $\mathcal{B}(D(x, \rho))$. Ensuite on choisit une présentation $\mathcal{H}(x)\langle d/dT \rangle \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ et on montre que les topologies quotients \mathcal{T}_ρ sur \mathcal{F} sont indépendantes de la présentation choisie.

Ensuite on montre que l'adhérence de 0 de la topologie \mathcal{T}_ρ sur \mathcal{F} est le plus grand sous- $\mathcal{H}(x)$ -module différentiel de \mathcal{F} dont les solutions en t_x coïncident avec les solutions de \mathcal{F} appartenant à $\mathcal{B}(D(x, \rho))$.

Soit $0 < \rho \leq 1$ fixé. L'opération d'adhérence par la topologie \mathcal{T}_ρ n'est pas compatible aux suites exactes. Notamment on peut quotienter par l'adhérence de 0 et chercher à nouveau l'adhérence de zéro du quotient. L'image inverse dans \mathcal{F} sera alors le sous-module qui contrôle les solutions à croissance logarithmique inférieure ou égale à 1.

En continuant de cette manière, on trouve ainsi une tour de sous-modules de \mathcal{F} contrôlant les solutions à croissance logarithmique n , pour les différents valeurs de $n \geq 0$.

Cette tour est finie, car \mathcal{F} a dimension finie, et on montre que l'élément maximale de la tour est le sous-module $\mathcal{F}^{\geq \rho}$ qui contrôle les solutions *analytiques* de \mathcal{F} sur le disque $D(x, \rho)$.

Ce sous-modules jouit de propriétés d'exactitude par rapport aux suites exactes, il est compatible au dual, et notamment il satisfait les axiomes de [And09]. Notamment nous avons l'énoncé suivant

Proposition 11.1.3. *Soit $0 < \rho \leq 1$. Pour tout \mathcal{F} posons $\mathcal{F}^{\geq \rho} := \bigoplus_{\rho' \geq \rho} \mathcal{F}^{\rho'}$. Alors pour toute suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$, la suite $0 \rightarrow \mathcal{F}_1^{\geq \rho} \rightarrow \mathcal{F}_2^{\geq \rho} \rightarrow \mathcal{F}_3^{\geq \rho} \rightarrow 0$ est exacte.*

Notre preuve du Théorème 11.1.2 est essentiellement la même que celle de Robba, plus précisément nous suivons les lignes de la preuve améliorée par Christol [Chr83], [Chr12]. Notre contribution a

été le fait d'avoir montré que les calculs de Robba se généralisent à tout point $x \in X$ de type 2, 3, 4.

11.2. Décomposition de Dwork-Robba sur $\mathcal{O}_{X,x}$.

Soit $x \in X$ un point de type 2, 3, ou 4. Alors l'anneau locale $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps et son complété est $\mathcal{H}(x)$. L'autre théorème de décomposition locale dont on a besoin est du à Dwork et Robba [?] pour les modules différentiels sur $\mathcal{O}_{X,x}$.

L'énoncé est complètement analogue à celui de Robba, mais au lieu d'avoir $\mathcal{H}(x)$ on a $\mathcal{O}_{X,x}$:

Théorème 11.2.1. *Soit \mathcal{F} un module différentiel sur $\mathcal{O}_{X,x}$, alors la décomposition de Robba (11.6) de $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{H}(x)$ se descend à $\mathcal{O}_{X,x}$. et satisfait aux mêmes propriétés de compatibilité au dual, et d'exactitude.*

Dans une base cyclique \mathcal{F} correspond à un opérateur $\mathcal{L} := \sum_{i=0}^r f_i \left(\frac{d}{dT}\right)^i \in \mathcal{O}_{X,x}\langle d/dT \rangle$, et le facteur direct $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{H}(x))^{\geq \rho}$ de $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{H}(x)$ correspond à un facteur $\mathcal{L}^{\geq \rho}$ de \mathcal{L} à l'intérieur de l'anneau factoriel plus grand $\mathcal{H}(x)\langle d/dT \rangle$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\geq \rho} \circ \mathcal{L}^{< \rho}. \quad (11.7)$$

La preuve consiste à montrer que pour tout $0 < \rho \leq 1$ l'opérateur $\mathcal{L}^{\geq \rho}$ appartient à $\mathcal{O}_{X,x}\langle d/dT \rangle$ (i.e. a ses coefficients dans $\mathcal{O}_{X,x}$). Cela entraîne automatiquement que $\mathcal{L}^{< \rho}$ appartient à $\mathcal{O}_{X,x}\langle d/dT \rangle$, et aussi les autres propriétés du théorème.

La preuve est un procédé remarquablement intriqué qui exprime $\mathcal{L}^{\geq \rho}$ comme un point fixe par une certaine contraction. Nous essayons maintenant d'en dire un mot.

Soit Y un voisinage affinoïde de x assez petit, tel que les coefficients de \mathcal{L} appartiennent à $\mathcal{O}(Y)$.

Soit A un des anneaux $\mathcal{O}(Y)$ ou $\mathcal{H}(x)$. Soit $A\langle d/dT \rangle^{\leq n}$ le sous- A -espace vectoriel de $A\langle d/dT \rangle$ formé par les polynômes différentiels $\sum_i f_i (d/dT)^i$ d'ordre $\leq n$.

La dimension de $A\langle d/dT \rangle^{\leq n}$ est $n+1$. Identifions toute uple $(f_0, \dots, f_{n-1}) \in A^n$ avec le polynôme différentiel

$$\mathcal{L}(f_0, \dots, f_{n-1}) := \sum_{i=0}^{n-1} f_i (d/dT)^i + (d/dT)^n \in A\langle d/dT \rangle^{\leq n}. \quad (11.8)$$

Soient n_1, n_2, n les degrés de $\mathcal{L}^{\geq \rho}, \mathcal{L}^{< \rho}, \mathcal{L}$ respectivement, et considérons la flèche $\mathbf{m}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) := \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}$ dans $A\langle d/dT \rangle$:

$$\begin{array}{ccc} A\langle d/dT \rangle^{\leq n_1} \times A\langle d/dT \rangle^{\leq n_2} & \xrightarrow{\mathbf{m}} & A\langle d/dT \rangle^{\leq n} \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ A^n & \xrightarrow{\sim} A^{n_1} \times A^{n_2} \xrightarrow{\quad \quad \quad} & A^n \\ & \searrow G_A & \end{array} \quad (11.9)$$

La flèche composée $G_A : A^n \rightarrow A^n$ est un système non linéaire d'équations différentielles dont le point $\mathbf{u} \in \mathcal{H}(x)^n$ correspondant au couple $(\mathcal{L}^{\geq \rho}, \mathcal{L}^{< \rho}) \in \mathcal{H}(x)\langle d/dT \rangle^{\leq n_1} \times \mathcal{H}(x)\langle d/dT \rangle^{\leq n_2}$ est une solution

$$G_{\mathcal{H}(x)}(\mathbf{u}) = 0. \quad (11.10)$$

Nous devons montrer que cette solution appartient à $\mathcal{O}_{x,X}$.

On part alors d'un point $\mathbf{v} \in \mathcal{O}(Y)^n$, et on linéarise ce problème en décomposant G_A en sa partie linéaire $dG_{A,\mathbf{v}}$ et sa partie non linéaire $N_{\mathbf{v}}$. Pour tout $\boldsymbol{\xi} \in A$ on a alors

$$G_A(\mathbf{v} + \boldsymbol{\xi}) = G_A(\mathbf{v}) + dG_{A,\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) + N_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}). \quad (11.11)$$

en particulier, pour $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\xi}$ on trouve

$$0 = G_{\mathcal{H}(x)}(\mathbf{u}) = G_{\mathcal{H}(x)}(\mathbf{v}) + dG_{A,\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) + N_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}). \quad (11.12)$$

L'idée de la preuve est alors de montrer qu'on peut choisir Y suffisamment petit, et $\mathbf{v} \in \mathcal{O}(Y)^n$ suffisamment proche de $\mathbf{u} \in \mathcal{H}(x)^n$, de sorte que

- i) Pour $A = \mathcal{O}(Y)$, $\mathcal{H}(x)$ l'application linéaire $dG_{A,\mathbf{v}} : A^n \rightarrow A^n$ est un homéomorphisme ;
- ii) Il existe un polydisque fermé $D_A^+(0, q)$ contenant \mathbf{v} et \mathbf{u} tel que l'application définie par

$$\phi_{A,\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) := -dG_{A,\mathbf{v}}^{-1}\left(G_A(\mathbf{v}) + N_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})\right) \quad (11.13)$$

soit une contraction de $D_A^+(0, q)$ à la foi pour $A = \mathcal{O}(Y)$ et $A = \mathcal{H}(x)$.

Par le théorème du point fixe, $\phi_{A,\mathbf{v}}$ a un unique point fixe $\boldsymbol{\xi}_A$ dans A^n à la foi pour $A = \mathcal{O}(Y)$ et $A = \mathcal{H}(x)$. C'est à dire

$$\phi_{A,\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}_A) = \boldsymbol{\xi}_A \iff G_A(\mathbf{v}) + dG_{A,\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}_A) + N_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}_A) = 0 \quad (11.14)$$

Comme $\mathbf{u} \in D_{\mathcal{H}(x)}^+(0, q)$ on a $\boldsymbol{\xi}_{\mathcal{H}(x)} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ (cf. (11.12)).

D'autre part, par l'unicité, le point fixe $\boldsymbol{\xi}_{\mathcal{O}(Y)} \in \mathcal{O}(Y)^n$ doit coïncider avec $\boldsymbol{\xi}_{\mathcal{H}(x)} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Cela montre que $\mathbf{u} \in \mathcal{O}(Y)$ car $\mathbf{v} \in \mathcal{O}(Y)$.

La preuve de i) et ii) demande beaucoup de travail, notamment une estimation relativement fine des normes de tous les opérateurs apparaissant, ainsi que des théorèmes d'existence d'inverse pour les opérateurs sur le disque générique.

11.3. Décomposition augmentée.

Soit maintenant \mathcal{F} une équation différentielle sur une courbe quasi-lisse de Berkovich X , munie d'une pseudo-triangulation S . Les décompositions de Robba de $\mathcal{F}(x)/\mathcal{H}(x)$ et de Dwork-Robba de $\mathcal{F}_x/\mathcal{O}_{X,x}$ sont des décompositions *par les rayons spectrales* en x . L'idée qui est à la base de la décomposition globale est de augmenter cette décomposition en ajoutant les termes correspondants aux rayons sur-solubles.

Pour tout point $x \in X$ notons par

$$\omega_{S,i}(x, \mathcal{F}) \quad (11.15)$$

le Ω -espace vectoriel des solutions de \mathcal{F} convergeant sur le disque $D_{S,i}(x, \mathcal{F}) \subseteq D(x, S)$. Si i est un indice qui sépare les rayons en x , alors la dimension de $\omega_{S,i}(x, \mathcal{F})$ est par définition $r - i + 1$.

Proposition 11.3.1. *Soit r le rang de \mathcal{F} . Soit $x \in X$, et soit $i \in \{1, \dots, r\}$ un indice qui sépare les rayons en x (i.e. $\mathcal{R}_{S,i-1}(x, \mathcal{F}) < \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F})$). Alors il existe un unique sous- $\mathcal{O}_{X,x}$ -module $(\mathcal{F}_x)_{\geq i} \subseteq \mathcal{F}_x$ de rang $r - i + 1$ tel que*

$$\omega(x, (\mathcal{F}_x)_{\geq i}) = \omega_{S,i}(x, \mathcal{F}). \quad (11.16)$$

Soit T une coordonnée locale sur $D(x, S)$, et soient $r(x)$ et R les rayons de $D(x)$ et $D(x, S)$ dans cette coordonnée respectivement.

Si l'indice i est spectrale en x , alors le théorème de Dwork-Robba nous dit qu'on a

$$(\mathcal{F}_x)_{\geq i} := (\mathcal{F}_x)^{\geq \rho}, \quad \rho := \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}) \cdot \frac{R}{r(x)}. \quad (11.17)$$

Si l'indice i est sur-soluble, cela signifie que l'image de $D_{S,i}(x, \mathcal{F}) \subset X_\Omega$ dans X est un disque virtuel ouvert D contenant x sur lequel \mathcal{F} a $r - i + 1$ solutions linéairement indépendantes. Ces solutions engendrent un sous-module de $F|_D$ du même rang : la fibre de ce sous-module en x c'est notre module $(\mathcal{F}_x)_{\geq i}$.

11.4. Décomposition globale

Théorème 11.4.1. *Soit \mathcal{F} une équation différentielle de rang r sur une courbe connexe quasi-lisse de Berkovich X . Soit $i \in \{2, \dots, r\}$. Supposons que pour tout $x \in X$ on ait*

$$\mathcal{R}_{S,i-1}(x, \mathcal{F}) < \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}). \quad (11.18)$$

Alors il existe une unique sous-équation $\mathcal{F}_{\geq i} \subseteq \mathcal{F}$ de rang $r - i + 1$, et une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{\geq i} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{< i} \rightarrow 0 \quad (11.19)$$

telle que pour tout $x \in X$ on a

$$\mathcal{R}_{S,j}(x, \mathcal{F}) = \begin{cases} \mathcal{R}_{S,j}(x, \mathcal{F}_{< i}) & \text{if } j = 1, \dots, i-1 \\ \mathcal{R}_{S,j-i+1}(x, \mathcal{F}_{\geq i}) & \text{if } j = i, \dots, r. \end{cases} \quad (11.20)$$

De plus $\mathcal{F}_{\geq i}$ est indépendante de S dans ce sens que si l'hypothèse (11.18) est vraie aussi pour une autre pseudo-triangulation S' , alors le sous-objet $\mathcal{F}_{\geq i}$ est le même pour les deux pseudo-triangulations.

La preuve se fait en recollant les termes locales $(\mathcal{F}_x)_{\geq i}$. Notamment les termes se recollent sans obstructions grâce à l'unicité du sous module $(\mathcal{F}_x)_{\geq i}$.

11.5. Conditions pour la somme directe.

Les théorèmes de décomposition locaux de Robba et Dwork-Robba donnent une décomposition en somme directe. La décomposition globale par les rayons de convergence par contre ne donne pas toujours une somme directe. Avec l'utilisation de la cohomologie on peut se faire un exemple explicite d'un module \mathcal{F} de rang 2 défini sur un disque avec pseudo-triangulation vide, dont les rayons sont séparé globalement, mais les rayons de son dual \mathcal{F}^* ne le sont pas. Comme le premier rayon est toujours compatible à la dualité

$$\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F}) = \mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F}^*) \quad (11.21)$$

$$\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F}_{\geq 2}) = \mathcal{R}_{S,1}(-, (\mathcal{F}_{\geq 2})^*). \quad (11.22)$$

Cela entraîne qu'on ne peut pas avoir somme directe, notamment car le fait d'avoir une inclusion $(\mathcal{F}_{\geq 2})^* \subset \mathcal{F}^*$ entraîne que les solutions de $(\mathcal{F}_{\geq 2})^*$ sont aussi solutions de \mathcal{F}^* et donc pour tout x on a

$$\mathcal{R}_{\emptyset,1}(x, (\mathcal{F}_{\geq 2})^*) = \mathcal{R}_{\emptyset,2}(x, \mathcal{F}^*) \quad (11.23)$$

Et alors les rayons de \mathcal{F}^* seraient séparés, ce qui est contre notre construction.

Cette exemple montre l'importance de la compatibilité au le dual.

En effet nous avons l'énoncé suivant :

Théorème 11.5.1. *Soit \mathcal{F} une équation différentielle sur une courbe quasi-lisse X . Supposons que l'indice i sépare globalement les rayons de \mathcal{F} et de \mathcal{F}^* . Supposons de plus d'être dans une des situations suivantes*

- i) X n'est pas un disque avec triangulation vide ;
- ii) X est un disque avec triangulation vide et il existe un $x \in X$ tel que $i - 1$ est spectrale non soluble en x pour \mathcal{F} ou pour \mathcal{F}^* .

Alors $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\geq i} \oplus \mathcal{F}_{< i}$ et $\mathcal{F}^ = \mathcal{F}_{\geq i}^* \oplus \mathcal{F}_{< i}^*$.*

Dans la preuve on montre que le morphisme canonique

$$c : (\mathcal{F}^*)_{\geq i} \longrightarrow \mathcal{F}^* \longrightarrow (\mathcal{F}_{\geq i})^* \quad (11.24)$$

est un isomorphisme. On utilise alors une propriété remarquable des morphismes entre équations qui dit que c est un isomorphisme si et seulement si il existe $x \in X$ tel que $c(x)$ est un isomorphisme sur $\mathcal{H}(x)$.

Dans la situation i) Γ_S est non vide et il suffit de prendre un point $x \in \Gamma_S$.

Dans la situation ii) le point x existe par hypothèse, car les rayons spectrales non solubles sont compatibles à la dualité par le théorèmes de décomposition de Dwork et Robba.

Nous souhaitons signaler les liens suivants entre les rayons et les graphes.

Proposition 11.5.2. *On a $\mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}) = \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}^*)$ pour tout $x \in X$ si et seulement si $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F}) = \Gamma_{S,i}(\mathcal{F}^*)$.*

Proposition 11.5.3. *Si l'indice i sépare les rayons de \mathcal{F} et \mathcal{F}^* alors $\mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}) = \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}^*)$ et $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F}) = \Gamma_{S,i}(\mathcal{F}^*)$.*

Proposition 11.5.4. *Pour tout $i = 1, \dots, r$ on a*

$$\Gamma_{S,1}(\mathcal{F}) \cup \dots \cup \Gamma_{S,i}(\mathcal{F}) = \Gamma_{S,1}(\mathcal{F}^*) \cup \dots \cup \Gamma_{S,i}(\mathcal{F}^*). \quad (11.25)$$

Le théorème suivant est critère complètement topologique pour que $\mathcal{F}_{\geq i}$ soit un facteur direct :

Théorème 11.5.5. *Supposons que i sépare les rayons de \mathcal{F} et que*

$$\left(\Gamma_{S,1}(\mathcal{F}) \cup \dots \cup \Gamma_{S,i-1}(\mathcal{F}) \right) \subseteq \Gamma_{S,i}(\mathcal{F}) \quad (11.26)$$

Alors l'indice i sépare les rayons de \mathcal{F}^ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\geq i} \oplus \mathcal{F}_{< i}$ et $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_{\geq i}^* \oplus \mathcal{F}_{< i}^*$. De plus pour tout $j \leq i$ et tout $x \in X$ on a $\mathcal{R}_{S,j}(x, \mathcal{F}) = \mathcal{R}_{S,j}(x, \mathcal{F}^*)$ et $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F}) = \Gamma_{S,i}(\mathcal{F}^*)$.*

Si $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$ est vide, alors X est un disque virtuel ouvert sur lequel tous les rayons de \mathcal{F} sont constants. Dans ce cas le théorème est démontré par Kedlaya [Ked10, 12.4.1].

Supposons maintenant que Γ_S soit non vide. Alors $X - \Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$ est une réunion disjointe de disques sur lesquels les fonctions $\mathcal{R}_{S,1}, \dots, \mathcal{R}_{S,i}$ sont toutes constantes. Sur chacun de ces disques D on a une somme directe $\mathcal{F}|_D = (\mathcal{F}|_D)_{\geq i} \oplus (\mathcal{F}|_D)_{< i}$. Par le théorème de Dwork-Robba on a également une somme directe sur un voisinage de chaque point de Γ_S . Le recollement de ces décompositions locales donne $\mathcal{F}_{\geq i}$.

Pour montrer que $\mathcal{F}_{\geq i}$ est facteur directe on montre la compatibilité à la dualité.

Puisque les disques D qui sont composantes connexes de $X - \Gamma_S$ sont des disques maximaux, la localisation à D préserve les rayons de \mathcal{F} et de \mathcal{F}^* . Une induction montre alors l'assertion sur D .

Sur les points de Γ_S c'est évident car les indices $< i$ sont spectraux non solubles.

Remarque 11.5.6. *On peut montrer que si X est une couronne avec pseudo-triangulation vide, et si les rayons de \mathcal{F} sont tous log-affines sur le squelette Γ_S ,¹³ alors pour tout i on a $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F}) = \Gamma_S$. Donc un indice sépare les rayons sur X si et seulement si il les sépare sur Γ_S .*

Dans ce cas on peut appliquer (11.26) et on a une décomposition en somme directe par les indices qui séparent les rayons. On retrouve ainsi l'énoncé de [Ked10].

13. On peut également autoriser des changement de pente en correspondance des points $x \in \Gamma_S$ sous la condition que les rayons qui changent leur pente soient tous solubles en x .

12. Super-Harmonicité.

La super-harmonicité a été introduite pour la première fois, quelque peu implicitement, par Robba qui l'a montré pour des équations de rang un à coefficients rationnels sur la droite affine. D'abord il a traduit les pentes en terme d'indice [Rob84, Thm. 4.2, p. 201], ensuite il a déduit l'harmonicité de l'additivité de l'indice [Rob84, Prop. 4.5, p. 207]. Notamment Robba a utilisé ce principe dans [Rob85, haut de la p.50] pour construire les exponentielles de Robba.

L'harmonicité est entrée en jeu grâce à K.S.Kedlaya qui l'a introduite dans [Ked10], dans le cadre des équations différentielles sur les couronnes, pour les rayons spectrales non solubles.

Nous avons généralisé, dans [Pul12], l'énoncé de Kedlaya au cas des domaines affinoïdes de la droite affine, et aux rayons quelconque en découvrant un défaut potentiel d'harmonicité sur un ensemble localement fini de points.

Ensuite Kedlaya a démontré un énoncé d'harmonicité pour les points de genre positif de la courbe, pour les rayons spectrales non solubles.

Finalement dans [PP13a] nous avons généralisé son énoncé au cadre des rayons quelconque avec une preuve différente qui utilise le théorèmes de décomposition.

Nous rappelons l'énoncé (cf. Théorème 10.2.6).

Théorème 12.0.7. *Pour tout $i = 1, \dots, r$ il existe une famille localement finie de points $\mathcal{C}_{S,i}(\mathcal{F}) \subset X - \Gamma_S$ telle que*

- *Si $x \notin S \cup \mathcal{C}_{S,i}(\mathcal{F})$, alors $H_{S,i}$ est super-harmonique en x , et elle est harmonique si i est un indice libre de solubilité ;*
- *Si $x \in S - \partial X$ est un point de type 3, ou un point de type 2 vérifiant la condition (TR) (cf. Def. 8.1.1), alors*

$$dd^c H_{S,i}(x) \leq -\chi(x, S) \cdot \min(i, i_x^{\text{sp}}). \quad (12.1)$$

où i_x^{sp} est le plus grand indice tel que tout indice $j \leq i_x^{\text{sp}}$ est spectral non soluble en x .

De plus si i est un sommet du polygone de Newton des convergences en x qui est libre de solubilité, alors (12.1) est une égalité.

On peut préciser le lieu $\mathcal{C}_{S,i}(\mathcal{F}) \subset X - \Gamma_S$. Notamment pour tout $k = 1, \dots, i$ soit A_k l'ensemble des points $x \in X - \Gamma_S$ tels que

- i) L'indice k est soluble en x ;
- ii) x est un point final de $\Gamma_{S,k}(\mathcal{F})$;
- iii) $x \in \Gamma_{S,k}(\mathcal{F}) \cap \Gamma_S(H_{S,k}(-, \mathcal{F})) \cap \Gamma'_{S,k-1}(\mathcal{F})$.

Alors

$$\mathcal{C}_{S,i}(\mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{k=1}^i A_k. \quad (12.2)$$

12.1. Cas de la droite affine.

Supposons que X soit un domaine affinoïde de la droite affine $\mathbb{A}_K^{1,\text{an}}$ muni de la triangulation minimale S_X , dont le squelette Γ_{S_X} coïncide avec le squelette analytique Γ_X de X .

Si aucun rayon n'est spectrale en x , par continuité cela reste vrai sur un voisinage de x . Les rayons sur-solubles étant constants sur un disque contenant x , il ne contribuent pas à l'harmonicité, et on peut supposer que tous les rayons sont spectraux en x . L'assertion se démontre en deux temps. D'abord on fait un push-forward par Frobenius de sorte à diminuer les rayons et à les faire rentrer

dans le domaine de Young. Ensuite les rayons petits peuvent se lire sur une base cyclique à travers le théorème de Young [You92], et cela reste vrai sur tout germe de segment sortant de x . L'énoncé se réduit donc à la super harmonicité des hauteurs partielles d'un opérateur $\mathcal{L} = \sum f_i(d/dT)^i$ ce qui se démontre facilement directement (d'abord pour les vertex et par interpolation sur les autres indices).

Supposons maintenant d'avoir des rayons solubles. Comme avant les rayons sur-solubles ne jouent aucun rôle, et les rayons spectrales donnent une fonction harmonique (car i_x^{sol} est un vertex libre de solubilité). Les rayons solubles peuvent introduire potentiellement un défaut de solubilité et nous devons discuter plusieurs situations.

Situation 1 : $x \in \Gamma_X$. Si i est un indice qui est soluble en x , alors pour toute direction b sortante de x on a $\partial_b \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}) \leq 0$. Cela entraîne par récursion sur i la super-harmonicité de $H_{S,i}(-, \mathcal{F})$ en x .

En effet si la direction b est contenue dans un disque, alors $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F})$ est maximale au bord du disque, et il ne peut que diminuer en s'éloignant de x . Si b n'est pas contenue dans un disque, alors la $b \in \Gamma_S$ et par définition le rayon est borné par 1 sur b et égale à 1 en x : il ne peut que décroître.

Situation 2 : $x \notin \Gamma_X$. Dans ce cas x est contenu dans un disque maximal D , et la localisation à D préserve les rayons. Soit y la frontière de D in X .

Le raisonnement d'avant, change uniquement sur la direction b_∞ sortante de x , définie par le segment $[x, y]$. Si i est soluble en $x \in D$, alors la borne est $\partial_b \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}) \leq 1$.

Toutefois on arrive à localiser le lieu de non super-harmonicité en faisant un raisonnement par récursion sur l'indice i . La preuve de [Pul12] de la super-harmonicité résulte plus complexe car elle est lié à la preuve de la finitude. Ci plus bas nous donnons l'idée de la preuve de la super-harmonicité en admettant la finitude des graphes contrôlants.

On sait que $H_{S,1}(-, \mathcal{F}) = \mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F})$ est super-harmonique en dehors de S_X par l'expression (0.35). Supposons d'avoir démontré l'énoncé concernant $\mathcal{C}_{S,j}(\mathcal{F})$ pour les fonctions $H_{S,1}(-, \mathcal{F}), \dots, H_{S,i-1}(-, \mathcal{F})$. Si l'une des $H_{S,j}(-, \mathcal{F})$ avec $j \leq i$ n'est pas super-harmonique en x , on ne peut rien dire pour $H_{S,i}(-, \mathcal{F})$.

Supposons donc que que $H_{S,1}(-, \mathcal{F}), \dots, H_{S,i-1}(-, \mathcal{F})$ sont super-harmoniques en x , et que l'indice i soit soluble en x . On arrive à montrer que $dd^c H_{S,i}(x, \mathcal{F}) \leq 0$ dans les cas suivantes :

- i) Si $x \notin \Gamma_S(H_{S,i}(-, \mathcal{F}))$;
- ii) Si $x \notin \Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$;
- iii) Si $x \in \Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$, mais x n'est pas un point final de $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$;
- iv) Si $x \notin \Gamma_{S,1}(\mathcal{F}) \cup \dots \cup \Gamma_{S,i-1}$.

Dans le cas i) par définition de $\Gamma_S(H_{S,i}(-, \mathcal{F}))$, la fonction $H_{S,i}(-, \mathcal{F})$ est constante autour de x , donc $dd^c H_{S,i}(x, \mathcal{F}) = 0$.

Dans le cas ii), pour la même raison, on a $dd^c \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}) = 0$. Don par récurrence on a

$$dd^c H_{S,i}(x, \mathcal{F}) = dd^c \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}) + dd^c H_{S,i-1}(x, \mathcal{F}) = dd^c H_{S,i-1}(x, \mathcal{F}) \leq 0 \quad (12.3)$$

Dans le cas iii), x n'est pas un point final de $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$, donc il existe au moins une direction b sortante de x différente de b_∞ telle que $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F})$ n'est pas constante sur le disque D_b de la frontière est x , contenant b . Puisque i est soluble en x on doit forcément avoir $\partial_b \mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F}) = -1$. Cela compense le fait que $\partial_{b_\infty} \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}) = 1$, et on a $dd^c \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}) \leq 0$, donc aussi $dd^c H_{S,i}(x, \mathcal{F}) \leq 0$ par récursion.

Dans le cas iv), pour tout $j \leq i-1$ le rayon $\mathcal{R}_{S,j}(-, \mathcal{F})$ est constante sur un disque D contenant x . Dans cette situation on peut décomposer l'équation et exprimer $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F})$ comme premiers

rayons d'un sous-équation de $\mathcal{F}|_D$. Comme les pentes sont préservées par localisation à D on a $dd^c \mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}) \leq 0$, et donc $dd^c H_{S,i}(x, \mathcal{F}) \leq 0$.

12.2. Cas général.

Si $x \notin \Gamma_S$, la composante connexe de $X - \Gamma_S$ contenant x est un disque maximale D et la localisation à D commute aux rayons. On est donc dans le cadre précédent, et le théorème est valable.

Si $x \in \Gamma_S - S$ il est dans le squelette d'une couronne C , telle que la localisation à C commute aux rayons. Donc on est également dans le cadre précédent.

Supposons $x \in S - \partial X$. On seramène facilement au cas où K est algébriquement clos. Dans ce cas on utilise un morphisme $\mathcal{C}_x \rightarrow \mathbb{P}_{\tilde{K}}^1$ qui est non ramifié presque partout et modérément ramifié partout. Ce morphisme se relève à un morphisme K -analytique $\varphi : Y \rightarrow W$ d'un voisinage de x vers $\mathbb{P}_K^{1,\text{an}}$.

Le fait que le morphisme soit modérément ramifié donne un lien direct entre les rayons du push-forward et ceux de \mathcal{F} . Nous passons sous silence le choix de triangulations convenables S et S' sur Y et W respectivement. Plus précisément, soit b est une branche sortante de x , et soit C_b un germe de couronne de squelette b . L'image de C_b est un germe de couronne sortant de $\varphi(x)$. Alors si p_1, \dots, p_r sont les pentes des rayons de la restriction $\mathcal{F}|_{C_b}$ le long de b , le pentes du push-forward $(\varphi|_{C_b})_*(\mathcal{F}|_{C_b})$ sont

$$\left(\underbrace{\frac{1}{d}p_1, \dots, \frac{1}{d}p_1}_{d\text{-fois}}, \dots, \underbrace{\frac{1}{d}p_r, \dots, \frac{1}{d}p_r}_{d\text{-fois}} \right) \quad (12.4)$$

où d est le degré du morphisme sur b .

Il faut faire attention maintenant au fait que cela ne concerne qu'une branche individuelle, plus précisément si l'on regarde le push-forward globale on peut avoir plusieurs directions b_1, \dots, b_n au dessus d'une direction donnée $\varphi(b_1) = \dots = \varphi(b_n)$ et en faisant le push-forward les pentes de la direction b_i peuvent se mélanger à celles d'une autre direction b_j . L'unique quantité qu'on peut maîtriser est la somme de toutes les pentes : c'est à dire la pente de la hauteur globale $H_{S,r}(-, \mathcal{F})$. On trouve

$$dd^c H_{S,r}(x, \mathcal{F}) = dd^c H_{S',d,r}(\varphi(x), \varphi_*(\mathcal{F})), \quad (12.5)$$

où $d = [\mathcal{H}(x) : \mathcal{H}(\varphi(x))]$ est le degré du morphisme φ en x .

Ensuite pour contrôler le nombre de directions sortantes de x au dessus d'une direction donnée sortante de $\varphi(x)$ on utilise la bijection (8.1) et le théorème de Riemann-Hurwitz appliqué au morphisme $\mathcal{C}_x \rightarrow \mathbb{P}_{\tilde{K}}^1$.

Avec ce procédé on montre l'énoncé pour la seule hauteur partielle $H_{S,r}$.

Dans le cas général on procède en deux temps :

- On décompose le module sur $\mathcal{O}_{X,x}$, par les rayons en x . Alors les sommets du polygone des convergences de \mathcal{F} deviennent les hauteurs totales de ses facteurs.

Ainsi on démontre l'assertion pour les indices i qui sont des sommets du polygone en x .

- Pour les autres indices on déduit l'énoncé par interpolation sur les sommets.

13. Borne globale du nombre d'arêtes de $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$

Nous avons parlé dans l'introduction du fait que les graphes contrôlants sont assimilables à un lieu singulier pour \mathcal{F} du point de vue cohomologique. Il est alors important d'en maîtriser la taille. Dans [PP13a] nous avons donné une estimation du nombre d'arêtes de $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$. Nous supposons

X compacte pour avoir un nombre fini d'arêtes de Γ_S . Il est clair que le cas non compact peut se déduire par passage à la limite, en découpant la courbe de manière appropriée le long de Γ_S .

Plus précisément notons par $\Gamma''_{S,i}(\mathcal{F})$ le graphe qui coïncide topologiquement avec

$$\Gamma'_{S,i}(\mathcal{F}) := \Gamma_{S,1}(\mathcal{F}) \cup \dots \cup \Gamma_{S,i}(\mathcal{F}) \quad (13.1)$$

et qui a pour sommets l'ensemble des points $V''_{S,i}$ tels que

- i) les points de S ,
- ii) les points de bifurcation de $\Gamma'_{S,i}(\mathcal{F})$,
- iii) les points où l'un des rayons $\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F}), \dots, \mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F})$ a un changement de pente.

Si $i = 0$, nous posons $\Gamma''_{S,0}(\mathcal{F}) := \Gamma_S$, et $V''_{S,0} = S$.

Notons le nombre d'arêtes de $\Gamma''_{S_{K^{\text{alg}}},i}(\mathcal{F}_{K^{\text{alg}}})$ par

$$E''_{S,i}. \quad (13.2)$$

Nous notons aussi E_S le nombre d'arêtes de Γ_S . Notons par

$$\mathcal{E}_{S,i} \quad (13.3)$$

le lieu des points $x \in X$ tels que $dd^c H_{S,i}(x, \mathcal{F}) > 0$.

On a est le suivant qui exprime le nombre d'arêtes de $\Gamma''_{S,i}(\mathcal{F})$ en fonction du nombre d'arêtes de $\Gamma''_{S,i-1}(\mathcal{F})$.

Théorème 13.0.1. *Supposons X compacte et connexe. Soit $r = \text{rang}(\mathcal{F})$, et soit $i \in \{1, \dots, r\}$. Soit*

$$\mathcal{E}''_{S,i} := \mathcal{E}_{S,i} - V''_{S,i-1} \quad (13.4)$$

et pour tout $y \in \mathcal{E}''_i$ soit d_y le degré de l'arête de $\Gamma''_{S,i-1}(\mathcal{F})$ contenant y . Alors, si \mathcal{Q} est un ensemble arbitraire tel que

$$\mathcal{E}_{S,i} \subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{E}_{S,i} \cup V''_{S,i-1}, \quad (13.5)$$

le cardinal $\text{Card}(E''_{S,i})$ de $E''_{S,i}$ est au plus

$$\text{Card}(E''_{S,i}) \leq E''_{S,i-1} + \sum_{y \in \mathcal{E}''_i} d_y + 2 \cdot \text{rang}(\mathcal{F}) \cdot \sum_{x \in \mathcal{Q}} dd^c H_{S,j}(x, \mathcal{F}). \quad (13.6)$$

De plus le nombre de points finaux de $\Gamma''_{S_{K^{\text{alg}}},i}(\mathcal{F}_{K^{\text{alg}}})$ qui ne sont pas points finaux de $\Gamma''_{S_{K^{\text{alg}}},i-1}(\mathcal{F}_{K^{\text{alg}}})$ est au plus

$$\text{rang}(\mathcal{F}) \cdot \sum_{x \in \mathcal{Q}} dd^c H_{S,j}(x, \mathcal{F}). \quad (13.7)$$

La preuve est un calcul élémentaire basé essentiellement sur l'énoncé de sur-harmonicité du Théorème 10.2.6. Nous préférons en donner l'idée sur l'exemple du premier rayon $i = 1$ d'une équation définie sur un disque fermé D de triangulation $\{x\} = \partial D$.

Soit b une direction sortante de x . En partant de x le long de la direction b chaque point de bifurcation de $\Gamma''_{S,1}(\mathcal{F})$ correspond, par super-harmonicité, à un changement de pente de $\mathcal{R}_{\{x\},1}(-, \mathcal{F})$. Or les pentes du rayon appartiennent à l'ensemble

$$\mathbb{Z} \cup \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \dots \cup \frac{1}{r}\mathbb{Z}, \quad (13.8)$$

où $r = \text{rang}(\mathcal{F})$. On peut alors borner le nombre de bifurcations par le nombre globale de changements de pente qui sont finis, grâce au fait que le rayon a la propriété de concavité (C3) du théorème 10.2.7.

Dans le cas général on exploite le fait que la hauteur partielle $H_{S,i}(-, \mathcal{F})$ se comporte comme un premier rayon en dehors de $\Gamma''_{S,i-1}(\mathcal{F})$ (cf. Section 10.2.3).

13.1. Cas du premier rayon sur les courbes projectives.

Si $i = 1$, le premier rayon $\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F})$ est bien super-harmonique en dehors de S et la borne (13.6) se simplifie beaucoup, car elle se réduit à une analyse des points de S .

Un corollaire intéressant du Théorème 13.0.1 est le suivant, qui est un cas où la borne est *inconditionnelle* :

Théorème 13.1.1. *Si X est une courbe lisse, projective, géométriquement connexe de genre $g \geq 1$, satisfaisant l'hypothèse (TR). Alors*

$$\text{Card}(E''_{S,1}) \leq E_S + 4r(g - 1). \quad (13.9)$$

En particulier si X est une courbe elliptique on a $\text{Card}(E''_{S,1}) \leq E_S + 4r(g - 1)$, autrement dit

$$\Gamma_{S,1}(\mathcal{F}) = \Gamma_S. \quad (13.10)$$

Les courbes elliptiques ont toujours une triangulation formée par un unique point. Maintenant un raisonnement par récurrence sur i donne le Théorème de classification suivant

Théorème 13.1.2. *Si X est une courbe projective de genre ≤ 1 satisfaisant la condition (TR), et si S est un point, alors $\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F}), \dots, \mathcal{R}_{S,r}(-, \mathcal{F})$ sont constants sur X . En particulier, par les théorèmes de décomposition, l'équation se décompose par les rayons comme*

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{0 < \rho \leq 1} \mathcal{F}^\rho \quad (13.11)$$

où \mathcal{F}^ρ est une équation dont tous les rayons sont égaux à ρ .

On peut voir que le même résultat est vrai pour $\mathbb{P}_K^{1,\text{an}}$ où on montre de plus que $\mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F}) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{P}_K^{1,\text{an}}$, et tout i .

14. Théorèmes d'indices locaux

Nous nous intéressons maintenant aux théorèmes d'indice de la cohomologie de de Rham. Dans cette section nous allons dire un mot sur les théorèmes d'indice de nature plus locale (au sens de Berkovich), qui sont dus essentiellement à Christol et Mebkhout.

Il y a quatre théorèmes d'indice locaux qui vont intervenir pour le calcul de la cohomologie globale :

- i) Indice sur un disque ouvert d'une équation ayant rayons *log*-affines à la frontière ouverte ;
- ii) Indice sur un voisinage ouvert d'un point de Berkovich de type 2 ;
- iii) Indice sur une couronne ouverte d'une équation ayant rayons *log*-affines sur le squelette ;
- iv) Indice sur un voisinage ouvert d'un point de la frontière ∂X .

Les premiers trois théorèmes ont été démontrés par Christol et Mebkhout [CM93], [CM97], [CM00], [CM01], sous des hypothèses de solubilité. Notre contribution a été de les généraliser au cas non soluble.

Signalons que Kedlaya a donné des preuves analogues pour le cas iii) des équations sur les couronnes [Ked10], [Ked13].

14.1. Descente des constantes.

Nous avons démontré l'énoncé suivants de descente des constantes

Théorème 14.1.1. *Soit $K \rightarrow \Omega$ une extension où les deux corps sont non trivialement valués. Soit X une courbe quasi-Stein. Alors $H_{\text{dR}}^0(X, \mathcal{F})$ est fini dimensionnel, et on a*

$$H_{\text{dR}}^0(X, \mathcal{F}) \widehat{\otimes} \Omega = H_{\text{dR}}^0(X_\Omega, \mathcal{F}_\Omega). \quad (14.1)$$

De plus, $H_{\text{dR}}^1(X, \mathcal{F})$ est de dimension finie sur K si et seulement si $H_{\text{dR}}^1(X_\Omega, \mathcal{F}_\Omega)$ est de dimension finie sur Ω , et dans ce cas on a

$$H_{\text{dR}}^1(X, \mathcal{F}) \widehat{\otimes} \Omega = H_{\text{dR}}^1(X_\Omega, \mathcal{F}_\Omega). \quad (14.2)$$

De plus, si K est trivialement valué, mais pas Ω , alors, sous l'hypothèse que $H_{\text{dR}}^i(X_\Omega, \mathcal{F}_\Omega)$ est de dimension finie, on a (0.44) et (0.45).

Grâce à la suite de Mayer-Vietoris, on peut également (essentiellement) maîtriser le cas des courbes qui admettent un recouvrement *fini* par des quasi-Stein avec intersections quasi-Stein.¹⁴ En particulier le cas des courbes compactes.

Il est difficile de rencontrer en nature une courbe de genre fini qui ne soit ni quasi-Stein, ni compacte. Donc nous ferons uniformément l'hypothèse suivante

Hypothèse 14.1.2. *Dans les sections 14 et 15 nous supposons que K est un corps sphériquement complet algébriquement clos, de groupe des valeurs $|K| = \mathbb{R}_{\geq 0}$.*

Sois cette hypothèse un résultat de Q.Liu [Liu87] affirme effectivement que toute courbe de genre fini est soit quasi-Stein soit projective. Le cas projectif se réduit au cas algébrique par un procédé classique. Donc nous nous concentrons sur le cas quasi-Stein.

L'énoncé du Théorème 14.1.1 n'est pas triviale car dans ce contexte le produit tensoriel est *complété*, et l'extension des scalaires n'est pas plate.

Pour maîtriser les propriétés d'exactitude à droite du produit tensoriel, et de passage à la limite inductive, nous avons du introduire un classe d'espaces vectoriels topologiques, que nous appelons *espaces Banachoides*, munis d'une famille (pas nécessairement dénombrable) de semi-normes pour laquelle ils sont complets.

Les espaces Banachoides jouissent de propriétés proches de celles des espaces de Banach de [Gru66] dont nous tirons largement profit. Par exemple on peut montrer que ces espaces sont toujours limite inductif filtrant d'espaces de dimension finie.

14.2. Notations

Soit X une courbe quasi-lisse et soit S une pseudo-triangulation de X . L'indice d'une équation différentielle \mathcal{F} sur X se définit comme la somme alternée des dimensions des espaces d'hypercohomologie de de Rham de \mathcal{F} . Si les espaces de cohomologie ont dimension infinie on dit que l'indice est infini. Nous notons l'indice par

$$\chi_{\text{dR}}(X, \mathcal{F}). \quad (14.3)$$

Si $Y \subset X$ est un domaine analytique, un *voisinage élémentaire* de Y dans X est un ouvert de X contenant Y tel que $U - Y$ est une réunion disjointe de couronnes ouvertes ayant un seul point d'adhérence dans Y , et ce point appartient à la frontière de Shilov ∂Y de Y .

14. Signalons qu'il faut des conditions plus précises que cela ...

Si \mathcal{F} est une équation différentielle sur X , on définit la cohomologie surconvergente sur Y par

$$H_{\text{dR}}^i(Y^\dagger, \mathcal{F}) := \varinjlim_U H_{\text{dR}}^i(U, \mathcal{F}), \quad (14.4)$$

où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de Y in X . Il est clair que cette définition dépend du choix de X (par exemple si $Y = X$ on a $H_{\text{dR}}^i(Y^\dagger, \mathcal{F}) := H_{\text{dR}}^i(Y, \mathcal{F})$). La définition devient intéressante lorsque $Y \subset \text{Int}(X)$.

On peut montrer qu'il existe un voisinage élémentaire U , tel que pour tout voisinage élémentaire $U' \subseteq U$ on a

$$H_{\text{dR}}^i(Y^\dagger, \mathcal{F}) := H_{\text{dR}}^i(U', \mathcal{F}). \quad (14.5)$$

Dans le cas surconvergent on définit alors l'indice comme $\chi_{\text{dR}}(Y^\dagger, \mathcal{F}) := \chi_{\text{dR}}(U', \mathcal{F})$.

Définition 14.2.1. *Si $x \in S$ on pose*

$$V_S(x, \mathcal{F}) \quad (14.6)$$

la réunion de tous les disques ouverts de frontière x ne rencontrant pas $\Gamma_S(\mathcal{F})$. Comme $\Gamma_S(\mathcal{F})$ est localement fini, $V_S(x, \mathcal{F})$ est un domaine analytique de X .

Plus généralement on appelle *tube élémentaire centré en $x \in X$* , tout domaine analytique connexe de X tel que $V - \{x\}$ est une réunion disjointe de disques ouverts (virtuels). on dira que le tube est adapté à \mathcal{F} si $V \cap \Gamma_S(\mathcal{F}) = \emptyset$.

14.3. Indice en un point à la frontière

L'équation triviale sur un disque fermé D a cohomologie de de Rham de dimension infinie en degré 1. En effet, dès que la valuation de K n'est pas triviale, la dérivation $f(T) \mapsto f'(T)dT : \mathcal{O}(D) \rightarrow \Omega_D^1$ a un conoyau de dimension infinie. Notamment on peut facilement se convaincre que la famille des suites $n \mapsto b_n$ telles que $|b_n| \rightarrow 0$ et $|b_n|/p^n \rightarrow \infty$ admet des sous familles infinies et linéairement indépendantes sur K . Donc on trouve un espace de dimension infinie de fonctions $\sum_{n \geq 0} b_n T^{p^n - 1}$ dont la primitive ne converge pas dans D .

Cet exemple montre qu'on ne peut pas espérer d'avoir cohomologie de de Rham de dimension infinie en présence de solubilité en les points de ∂X .

Il faut une hypothèse de non solubilité pour avoir cohomologie finie. En effet l'énoncé suivant montre que la cohomologie est nulle.

Théorème 14.3.1. *Soit X une courbe quasi-lisse, connexe, et quasi-Stein. Supposons d'être dans une des deux situations suivantes :*

Situation 1 :

- i) $\Gamma_S \neq \emptyset$ (i.e. X n'est pas un disque avec pseudo-triangulation vide);
- ii) $\Gamma_S(\mathcal{F}) = \Gamma_S$;
- iii) les rayons de \mathcal{F} sont spectraux non soluble en X .

Situation 2 :

- i) $\Gamma_S = \emptyset$ (i.e. $X = D$ est un disque avec pseudo-triangulation vide);
- ii) les rayons sont tous spectraux non solubles et constants sur un germe de segment à la frontière ouverte de D .

Alors on a

$$H_{\text{dR}}^i(X, \mathcal{F}) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (14.7)$$

La preuve se fait en remarquant d'abord que \mathcal{F} ne peut pas avoir solutions sur D car elles donnent des rayons sursolubles à la frontière ouverte. Donc $H_{\text{dR}}^0(X, \mathcal{F}) = 0$.

Ensuite un résultat général valable dans le cadre quasi-Stein montre que

$$H_{\text{dR}}^1(X, \mathcal{F}) = \text{Ext}^1(\mathcal{F}^*(X), \mathcal{O}_X(X)), \quad (14.8)$$

où Ext^1 est le groupe de Yoneda des extensions $0 \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{F}^*(X) \rightarrow 0$.

Or, les rayons spectrales non solubles sont stables par dualité, donc \mathcal{F}^* a les mêmes propriétés de \mathcal{F} .

Ensuite le rayon de $\mathcal{O}(X)$ est maximale, donc toute suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{F}^*(X) \rightarrow 0$ est telle que, en les points où les rayons de \mathcal{F}^* sont spectrales non solubles, les rayons de E sont la réunion des rayons de $\mathcal{O}(X)$ et de $\mathcal{F}^*(X)$.

Par unicité de la décomposition par les rayons on a $E_{\geq r} = \mathcal{O}(X)$ et $E_{< r} = \mathcal{F}^*(X)$.

Or le critère (11.26) s'applique dans notre cas car $\Gamma_{S,1}(\mathcal{O}_X) = \cup_i \Gamma_{S,i}(\mathcal{F}) = \Gamma_S$. Donc la suite est scindée et $H_{\text{dR}}^1(X, \mathcal{F}) = 1$.

Le corollaire suivant permet de se réduire au cas des courbes sans bord

Corollaire 14.3.2. *Pour tout $x \in \partial X$, soit V_x un tube élémentaire centré en x adapté à \mathcal{F} . Soit $V := \cup_{x \in \partial X} V_x$. Alors pour tout i on a*

$$H_{\text{dR}}^i(X, \mathcal{F}) = H_{\text{dR}}^i(\text{Int}(X), \mathcal{F}|_{\text{Int}(X)}) = H_{\text{dR}}^i(X - V, \mathcal{F}|_{X-V}). \quad (14.9)$$

La preuve est une conséquence du Théorème 14.3.1.

14.4. Indice sur une couronne ouverte (et rayons log-affines)

Le théorème d'indice que nous considérons comme étant *locale* sur une couronne est le suivant.

Rappelons qu'on dit qu'une équation \mathcal{F} sur une couronne est *de type Robba* si tous ses rayons sont solubles sur le squelette analytique de la couronne. Dans ce cas Christol et Mebkhout on attaché à \mathcal{F} un exposant, qui est une classe dans $(\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z})^r$, $r = \text{rang}(\mathcal{F})$, modulo une certaine relation d'équivalence.

D'autre part rappelons que si une équation différentielle sur une couronne a les rayons tous log-affines, elle se décompose en somme directe par les rayons (cf. Remarque 11.5.6). Nous aurons alors un sous module $\mathcal{F}^{\text{Robba}} \subseteq \mathcal{F}$ canonique.

Rappelons que notre corps K est sphériquement complet et algébriquement clos (cf. Hypothèse 14.1.2).

Définition 14.4.1 (Équations libres de Nombres de Liouville). *Soit X une couronne ouverte avec pseudo-triangulation vide $S = \emptyset$, et soit \mathcal{F} une équation avec tous les rayons affines sur le segment Γ_S .*

Nous dirons que \mathcal{F} est libre de nombres de Liouville le long de Γ_S si $\mathcal{F}^{\text{Robba}}$ a la propriété (NL) de [CM97, 4.3.4, 4.4-6], et si de plus $\text{End}(\mathcal{F}^{\text{Robba}})$ a la propriété (NL).

Théorème 14.4.2 ([CM00],[Ked13]). *Soit X une couronne ouverte avec triangulation vide, et soit \mathcal{F} une équation différentielle dont les rayons sont tous log-affines sur le squelette Γ_S . Supposons que \mathcal{F} soit libre de nombres de Liouville. Alors pour $i = 0, 1$ on a $\dim H_{\text{dR}}^i(X, \mathcal{F}) < +\infty$ et on a*

$$\dim H_{\text{dR}}^0(X, \mathcal{F}) = \dim H_{\text{dR}}^1(X, \mathcal{F}). \quad (14.10)$$

De plus si X' est une sous couronne ouverte telle que $\Gamma_{X'} \subseteq \Gamma_X$, alors pour $i = 0, 1$ on a un

isomorphisme

$$H_{\text{dR}}^i(X, \mathcal{F}) = H_{\text{dR}}^i(X', \mathcal{F}|_{X'}) . \quad (14.11)$$

La preuve est dans [CM00] pour les modules de type Robba. La preuve utilise les indices généralisées et les propriétés des perturbations compactes d'opérateurs.

Le cas général s'en suit facilement, d'abord en décomposant l'équation en la partie de Robba et la partie spectrale non soluble (cf. Remarque 11.5.6), et ensuite en appliquant le Théorème 14.3.1 pour montrer que la cohomologie de de Rham de la partie spectrale est nulle. Un diagramme du serpent montre alors que la cohomologie de \mathcal{F} s'identifie à celle de $\mathcal{F}^{\text{Robba}}$.

La contribution de [Ked13] a été surtout d'étendre ce théorème au cas où le corps des constantes est trivialement valué, ou le corps résiduel n'est pas de caractéristique 0.¹⁵

14.5. Indice sur un disque ouvert (et rayons log-affines à la frontière ouverte)

Le prochain énoncé que nous considérons de nature locale est pour un disque. C'est un énoncé très important car il est *indépendant des graphes contrôlants*. C'est l'exemple le plus basique de formule d'indice, et la preuve se base sur les méthodes d'indices généralisées de [CM00].

Nous séparons les germes des segments dans X (cf. section 8.3) en deux typologies : ceux qui sont relativement compacts dans X , et ceux qui ne le sont pas. Un germe de segment relativement compact b admet toujours un point $x \in X$ du quel il est sortant, et il existe toujours une couronne ouverte C_b dont le squelette appartient à la classe b . La même chose n'est pas vraie pour les germes de segment non relativement compacts (cf. Remarque 8.3.2). Nous parlerons alors de germes de couronnes au lieu de germes de segments.

Nous rappelons que l'orientation des germes de segments non relativement compacts est vers l'intérieur de X , alors que les germes de segments relativement compacts sont toujours orientés de manière sortante de leur point de départ (cf. Hypothèse 8.3.1).

Définition 14.5.1 (Irrégularité sur un germe de couronne). *Soit \mathcal{F} une équation différentielle sur une courbe quasi-lisse X . Soit b un germe de segment dans X qui est le squelette d'un germe de couronne C_b . Supposons que les rayons de \mathcal{F} sont tous log-affines sur b . Nous posons alors*

$$\text{Irr}_b(\mathcal{F}) := -\partial_b H_{S,r}(-, \mathcal{F}) , \quad (14.12)$$

où r est le rang de \mathcal{F} sur C_b .

Théorème 14.5.2. *Soit $X = D$ un disque ouvert, et soit \mathcal{F} une équation différentielle sur D dont les rayons sont tous log-affines sur un germe de segment b_∞ à la frontière ouverte $\partial^\circ D$ de D . Supposons de plus que, si C_∞ est une couronne dont le squelette est dans la classe de b_∞ , alors la restriction $\mathcal{F}|_{C_\infty}$ soit libre de nombres de Liouville sur b_∞ . Alors la cohomologie de de Rham de \mathcal{F} est de dimension finie, et on a la formule d'indice*

$$\chi_{\text{dR}}(D, \mathcal{F}) = \chi_c(D) \cdot \text{rang}(\mathcal{F}) + \text{Irr}_{b_\infty}(\mathcal{F}) . \quad (14.13)$$

La preuve de ce théorème repose sur un calcul d'indice généralisé dont nous ne parlerons pas dans ce mémoire.

L'égalité entre indice généralisé et l'irrégularité est fait dans [CM00] dans le cas des équations solubles sur l'anneau de Robba, mais la preuve vaut en général pour les équations non nécessairement

15. Les méthodes de Christol-Mebkhout marchent bien pour n'importe quel corps résiduel.

solubles, modulo un théorème de décomposition (cf. Remarque 11.5.6), et une opération de push-forward.

Ensuite, il suffit de remarquer que si l'équation est la restriction à la couronne C_∞ d'une équation définie sur D , alors son indice généralisé coïncide avec son indice sur le disque D .

14.6. Indice sur un point de type 2

Dans cette section nous allons traduire l'énoncé principale de [CM01] dans le langage de Berkovich. Sous l'hypothèse (TR) (cf. Définition 8.1.1), nous allons l'étendre au cas d'une équation quelconque (non conditionnée par l'hypothèse de solubilité).

Si V est un tube élémentaire centré en $x \in S$ (cf. Section 14.2), nous notons par

$$\text{Sing}(V) \tag{14.14}$$

l'ensemble des directions sortantes de x qui n'appartiennent pas à V .

Théorème 14.6.1. *Soit X une courbe quasi-lisse et soit S une pseudo-triangulation. Soit \mathcal{F} une équation différentielle sur X . Soit $x \in S \cap \text{Int}(X)$, et supposons que X vérifie l'hypothèse (TR) en x . Soit V un tube élémentaire centré en x adapté à \mathcal{F} . Supposons que \mathcal{F} soit libre de nombres de Liouville sur tout germe de segment sortant de x appartenant à $\cup_{i=1}^r \Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$, où $r := \text{rang}(\mathcal{F})$. Alors, pour tout i les espaces de cohomologie surconvergente $H_{\text{dR}}^i(V^\dagger, \mathcal{F})$ sont de dimension finie, et on a la formule d'indice*

$$\chi_{\text{dR}}(V^\dagger, \mathcal{F}) = \chi_c(V) \cdot \text{rang}(\mathcal{F}) - \sum_{b \in \text{Sing}(V)} \text{Irr}_b(\mathcal{F}). \tag{14.15}$$

Remarquons que si $\text{Sing}(\mathcal{F})$ désigne l'ensemble des directions sortantes de x appartenantes à \mathcal{F} , et si $V = V_S(x, \mathcal{F})$ est le plus grand tube élémentaire centre en x compatible à \mathcal{F} , alors on a

$$\text{Sing}(V) = \text{Sing}(\mathcal{F}). \tag{14.16}$$

La preuve se réduit au cas soluble et plusieurs étapes.

Par hypothèse les rayons de \mathcal{F} sont tous constants sur V , la condition (11.26) est alors vérifiée sur tout voisinage élémentaire U de V assez petit, et les rayons de \mathcal{F} qui sont solubles en x restent séparés globalement sur U des autres. Donc on peut décomposer $\mathcal{F}|_U$ en une équation $\mathcal{F}|_U^{\text{sol}}$ dont les rayons sont tous solubles en x , et une équation $\mathcal{F}|_U^{<\text{sol}}$ dont les rayons sont tous spectrales non solubles en x :

$$\mathcal{F}|_U = \mathcal{F}|_U^{\text{sol}} \oplus \mathcal{F}|_U^{<\text{sol}}. \tag{14.17}$$

La cohomologie de $\mathcal{F}|_U^{<\text{sol}}$ est nulle par le Théorème 14.3.1, et donc la cohomologie de \mathcal{F} coïncide avec celle de \mathcal{F} .

L'hypothèse (TR) intervient lorsqu'on applique le Théorème (12.0.7) pour exprimer les rayons de la partie spectrale non soluble en terme de caractéristique $\chi_c(V^\dagger)$.

Remarque 14.6.2. *Soit V n'importe quel tube élémentaire centré en x , muni de la triangulation $S = \{x\}$, et soit \mathcal{F} une équation différentielle définie sur un voisinage élémentaire U de V , dont les rayons sont tous solubles en x . Alors, comme le premier rayon $\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F})$ satisfait par la propriété (C3) du Théorème 10.2.7, les rayons de \mathcal{F} sont tous constants sur V de valeur maximale 1. En particulier on a $\Gamma_S(\mathcal{F}) = \Gamma_U$, où Γ_U dénote la réunion de x avec les squelettes des couronnes ouvertes de $U - V$.*

En d'autres termes la solubilité en x entraîne que les directions singulières de \mathcal{F} sont automatiquement celle ne pas appartenant à V .

Par contre dans le Théorème 14.6.1, on doit faire l'hypothèse $V \cap \Gamma_S(\mathcal{F}) = \{x\}$. Autrement dit pour une équation non soluble on voit paraître d'autres directions singulières : celles de $\Gamma_S(\mathcal{F})$.

14.7. Applications à la super-harmonicité

Le Théorème 13.0.1 donne un contrôle sur la taille du graphe $\Gamma_S(\mathcal{F}) = \cup_i \Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$ sous des conditions de contrôle du lieu de non super-harmonicité des hauteurs partielles. Nous avons vu que cela permet d'obtenir un résultat de classification dans le cas des équations sur les courbes elliptiques (cf. Théorème 13.1.2).

Par ailleurs nous avons vu dans l'introduction que les arêtes des graphes contrôlant sont assimilables à un lieu singulier pour \mathcal{F} , et la borne globale sur leur nombre donne un contrôle de la taille de ce lieu.

Nous souhaitons donc montrer la super-harmonicité en générale, en utilisant s'il le faut la cohomologie. Dans [PP13b] nous donnons un certain nombre d'énoncés qui permettent d'avoir la super-harmonicité sous la condition Non Liouville. Nous en indiquons deux :

Théorème 14.7.1. *Soit $x \in X - \Gamma_S$ (notamment $x \in \mathcal{C}_{S,r}(\mathcal{F})$). Supposons que \mathcal{F} soit libre de nombres de Liouville le long des germes de segments sortants de x appartenant à $\Gamma_S(\mathcal{F})$.*

Soit D_x le disque fermé de bord x tel que $D_x \cap \Gamma_S = \emptyset$. Si x est un point de type 2 ou 3 supposons de plus qu'il existe un domaine affinoïde connexe $V \subseteq D_x$ tel que

- i) $V - \{x\}$ est une réunion disjointe de disques ouverts qui n'intersectent pas $\Gamma_S(\mathcal{F})$;
- ii) L'inclusion canonique $H_{\text{dR}}^0(D_x^\dagger, \mathcal{F}) \subseteq H_{\text{dR}}^0(V, \mathcal{F})$ est une égalité ;
- iii) Pour tout $i = 1, \dots, \text{rank}(\mathcal{F})$, on a $\mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F}) = \mathcal{R}_{S,i}(-, \mathcal{F}^*)$ sur D_x .

Alors pour tout i la hauteur partielle $H_{S,i}(x, \mathcal{F})$ est super-harmonique en x .

La preuve utilise la dualité de Dwork [Cre98], ainsi que les théorèmes de décomposition.

Dans le cas des équations de rang deux, nous avons l'énoncé suivant :

Théorème 14.7.2. *Supposons que \mathcal{F} soit une équation de rang 2, satisfaisant la condition libre de nombres de Liouville dans les directions $b \in \Gamma_S(\mathcal{F})$ sortantes de tout point $x \in \mathcal{C}_{S,2}(\mathcal{F})$. Alors pour tout i , la hauteur partielle $H_{S,i}(-, \mathcal{F})$ est super-harmonique en dehors de S .*

Remarque 14.7.3. *À l'heure actuelle nous avons à l'étude des généralisation de ces énoncés, et nous pensons pouvoir obtenir un énoncé de super-harmonicité plus générale sous une condition Non-Liouville.*

15. Théorème d'indice globaux

Les méthodes que nous avons développées dans [PP13b] permettent d'approcher une classe de courbes qui est suffisamment large pour contenir les courbes de genre fini. À l'heure actuelle nous travaillons pour identifier le cadre maximal d'application.

Dans ce mémoire nous nous bornons principalement au cadre des courbes quasi-Stein de genre fini. À partir de là on peut essentiellement obtenir le cas des courbes compactes, en recouvrant la courbe par un nombre fini d'ouverts quasi-Stein.

Si le corps de base K est algébriquement clos, il n'y a pas d'autres courbes de genre fini. En effet un résultat de Liu [Liu87] dit qu'une courbe de genre fini est toujours projective ou quasi-Stein.

Si maintenant la courbe est de genre arbitraire, mais elle est quasi-Stein, on a le résultat suivant qui permet essentiellement de réduire l'étude au cas des courbes quasi-Stein de genre fini.

C'est un résultat qui est essentiellement dû à Christol et Mebkhout [CM00], qui l'ont appliqué dans le cas des couronnes ouvertes. Le principe général de passage à la limite se trouve dans [Gro61, Ch.0,13.2.4], et l'idée vient de Grothendieck [Gro54].

Théorème 15.0.4. *Soit X une courbe connexe quasi-lisse et quasi-Stein. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante admissible de domaines analytiques connexes quasi-Stein qui sont relativement compacts dans X tels que $X = \cup_{n \geq 0} X_n$, la restriction $\mathcal{O}(X_{n+1}) \rightarrow \mathcal{O}(X_n)$ a image dense, la cohomologie de de Rham $H_{\text{dR}}^i(X_n, \mathcal{F}|_{X_n})$ est de dimension finie. Alors*

- i) *Il existe m tel que $H_{\text{dR}}^0(X, \mathcal{F}) = H_{\text{dR}}^0(X_n, \mathcal{F}|_{X_n})$ pour tout $n \geq m$.*
- ii) *On a*

$$H_{\text{dR}}^1(X, \mathcal{F}) = \varprojlim_n H_{\text{dR}}^1(X_n, \mathcal{F}|_{X_n}) \quad (15.1)$$

et pour tout n la flèche $H_{\text{dR}}^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{dR}}^1(X_n, \mathcal{F}|_{X_n})$ est surjective.

En particulier $H_{\text{dR}}^1(X, \mathcal{F})$ est de dimension finie si et seulement si la suite des dimensions $(h_{\text{dR}}^1(X_n, \mathcal{F}|_{X_n}))_{n \geq 0}$ (ou de manière équivalente la suite d'indices $(\chi_{\text{dR}}(X_n, \mathcal{F}_n))_{n \geq 0}$) est constante pour tout n assez grand.

La preuve pour le H_{dR}^0 est facile, la dimension est finie sur chaque X_n , et la suite des dimensions est décroissante, donc constante pour tout n assez grand.

La preuve pour le H_{dR}^1 utilise un passage à la limite de [Gro61, Ch.0,13.2.4] qui nécessite la densité des applications de transition $H_{\text{dR}}^1(X_{n+1}, \mathcal{F}|_{X_{n+1}}) \rightarrow H_{\text{dR}}^1(X_n, \mathcal{F}|_{X_n})$. On utilise alors la propriété de Banach pour les espaces de Fréchet [CM95], qui dit que une morphisme d'espaces de Fréchet (dans notre cas la connexion) dont le conoyau a dimension finie est automatiquement un morphisme strict. Cela entraîne que les topologies des $H_{\text{dR}}^1(X_n, \mathcal{F}|_{X_n})$ sont *séparées*, et l'hypothèse des images denses $\mathcal{O}(X_{n+1}) \rightarrow \mathcal{O}(X_n)$ donne alors la surjectivité des morphismes $H_{\text{dR}}^1(X_{n+1}, \mathcal{F}|_{X_{n+1}}) \rightarrow H_{\text{dR}}^1(X_n, \mathcal{F}|_{X_n})$.

15.1. La condition de Liouville globale

Nous avons déjà rencontré la condition Non Liouville pour les équations différentielles sur les couronnes ouvertes et rayons log-affines (cf. Définition 14.4.1).

Si C est une couronne, cette condition est valable sur C si et seulement si elle vaut sur une sous-couronne C' telle que $\Gamma_{C'} \subset \Gamma_C$. Cela permet de généraliser la définition aux cas des équations différentielles sur les pseudo-couronnes ouvertes dont les rayons sont log-affines. Par ailleurs, cela permet de tester la propriété sur un germe de couronne dont le squelette est contenu dans Γ_C .

Dans le cas globale la condition se donne sur les arêtes de Γ_S sur les quels les rayons sont log-affines, et aussi sur les arêtes de $\Gamma_S(\mathcal{F}) - \Gamma_S$ sortants d'un point de Γ_S . Plus précisément il nous faut d'abord une définition :

Définition 15.1.1 (pseudo-triangulations adaptées à \mathcal{F}). *Une pseudo-triangulation S est adaptée à \mathcal{F} si les rayons de \mathcal{F} sont log-affines sur tout composante connexe de $\Gamma_S - S$, et si S rencontre toute composante connexes de X .*

Définition 15.1.2 (Condition de Liouville). *Soit S une pseudo-triangulation adaptée à \mathcal{F} . Nous dirons que \mathcal{F} est libre de nombres de Liouville le long de Γ_S si pour toute pseudo-couronne qui*

est composante connexe de $X - S$, et pour tout arête de $\Gamma_S(\mathcal{F})$ sortant d'un point de S , il existe un germe de segment qui est le squelette d'une couronne sur la quelle \mathcal{F} est libre de nombres de Liouville (cf. Définition 14.4.1).

15.2. Formule d'indice global pour les équations finiment contrôlées

Définition 15.2.1 (Équations finiment contrôlées). *Nous dirons que l'équation \mathcal{F} est finiment contrôlée si il existe une pseudo-triangulation finie de X qui est adaptée à \mathcal{F} .*

Cette hypothèse entraine que le graphes $\Gamma_S(\mathcal{F})$ est topologiquement fini (i.e. réunion finie d'intervalles). En particulier X est une courbe de genre fini dont le squelette Γ_S est topologiquement fini.

Pour ces équations nous avons l'énoncé suivant :

Théorème 15.2.2. *Supposons X connexe et soit r le rang de \mathcal{F} . Supposons de plus que*

- i) *Tout point de $S - \partial X$ de type 2 satisfait la condition (TR);*
- ii) *\mathcal{F} est finiment contrôlée sur X ;*
- iii) *\mathcal{F} est libre de nombres de Liouville le long de Γ_S ;*
- iv) *Les rayons $\mathcal{R}_{S,i}(x, \mathcal{F})$ de \mathcal{F} sont tous spectraux non solubles en chaque point de ∂X .*

Alors la cohomologie de de Rham de \mathcal{F} est de dimension finie et nous avons la formule d'indice suivante

$$\chi_{\text{dR}}(X, \mathcal{F}) = \chi_c(X) \cdot \text{rank}(\mathcal{F}) - \text{Irr}_X(\mathcal{F}), \quad (15.2)$$

où

$$\text{Irr}_X(\mathcal{F}) = \sum_{x \in \partial X} [dd^c H_{S,r}(x, \mathcal{F}) + r \cdot \chi(x, S)] - \sum_{b \in \partial^\circ X} \text{Irr}_b(\mathcal{F}). \quad (15.3)$$

La preuve est une application des résultats d'indice locaux précédents de la manière suivante. On considère le recouvrement fini $\{U_i\}_i$ de X formé par les ouverts suivants :

- i) les composantes connexes de $X - S$ isomorphes à des pseudo-couronnes;
- ii) pour tout $x \in S$ et tout germe de segment b de $\Gamma_S(\mathcal{F})$ sortant de x , on considère le disque D_b contenant b ;
- iii) pour tout $x \in S$ on considère un voisinage élémentaire suffisamment petit U de $V_S(x, \mathcal{F})$ (cf. Définition 14.2.1).

Par la finitude locale de $\Gamma_S(\mathcal{F})$, et la finitude de S , le recouvrement ouvert $\{U_i\}_i$ de X est fini.

Par les Théorèmes d'indice locaux des sections précédentes, la cohomologie de de Rham de \mathcal{F} est de dimension finie sur chaque ouvert U_i .

Maintenant, si au point iii) on choisit le voisinage de $V_S(x, \mathcal{F})$ suffisamment petits, alors l'intersection de trois ouverts du recouvrement est toujours vide, et l'intersection de deux ouverts du recouvrement est toujours une couronne ouverte sur la quelle les rayons sont affines (et l'indice est nul). Par conséquence la cohomologie globale de X est de dimension finie, grâce à la suite exacte longue de Mayer-Vietoris.

La formule d'indice se déduit des formules d'indice locales par un calcul combinatoire. Dans ce calcul les formules d'indices locaux font intervenir des irrégularités $\text{Irr}_b(\mathcal{F})$. Les contributions des irrégularités à l'intérieur de X s'éliminent mutuellement, sauf celles à la frontière ouverte, et celles sortantes d'un point à la frontière ∂X . On en déduit la formule (15.3).

Par exemple sur un arête relativement compact de $\Gamma_S - S$ reçoit deux irrégularités provenantes de la formule d'indice (14.15) appliquée à ses deux points aux extrémités. Ces deux irrégularités sont égales et de signe opposé car la triangulation S est adaptée à \mathcal{F} , donc elles s'éliminent.

15.3. Formule d'indice global, cas général

Supposons que X soit une courbe de genre fini est quasi-Stein, mais que son graphe Γ_S ne soit pas nécessairement fini (pour se faire un exemple il suffit de considérer un disque ouvert moins les zéros d'une fonction analytique non bornée).

Pour tout $x \in S - \partial X$ nous posons

$$\chi(x, S, \mathcal{F}) := \chi(x, S) - \sum_b \text{Irr}_b(\mathcal{F}), \quad (15.4)$$

où b parcourt l'ensemble des germes de segments sortants de x appartenants à Γ_S .

Nous notons par $\mathcal{D}_{\partial X}$ la famille des disques ouverts dans X dont la frontière est un point de ∂X . Nous notons par b_D le germe de segment sortant de ∂X contenu dans D .

Théorème 15.3.1. *Soit X une courbe de genre fini n'ayant qu'un nombre fini de composantes connexes, et telle que ces dernières soient toutes non propres. Supposons que les rayons de \mathcal{F} soient tous spectrales non solubles en les points de la frontière ∂X . Soit S une pseudo-triangulation non vide adaptée à \mathcal{F} telle que \mathcal{F} est libre de nombres de Liouville le long de Γ_S , et telle que tout point de $S - \partial X$ vérifie l'hypothèse (TR). Supposons de plus que $\chi(x, S) \leq 0$ pour tout point de $S - \partial X$. Alors \mathcal{F} a cohomologie de de Rham de dimension finie si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- i) $\chi(x, S, \mathcal{F}) \neq 0$ pour au plus un nombre fini de points de S ;
- ii) Nous avons $\partial_b H_{\emptyset, b_D}(-, \mathcal{F}|_D) \neq 0$ pour au plus un nombre fini de disques ouverts D dans $\mathcal{D}_{\partial X}$.

Dans ce cas on a

$$\chi_{\text{dR}}(X, \mathcal{F}) = \sum_{x \in S - \partial X} \chi(x, S, \mathcal{F}) + \sum_{D \in \mathcal{D}_{\partial X}} \left(r + \text{Irr}_{b_D}(\mathcal{F}) \right). \quad (15.5)$$

Cette formule peut s'exprimer aussi sous d'autres formes, dont une incarnation est (15.2) dans le cadre des équations finiment contrôlées.

La preuve s'obtient par passage à la limite en utilisant le Théorème 15.0.4, à partir du Théorème 15.2.2 sur des sous-courbes relativement compactes de X bien choisies.

Notamment, on peut exprimer Γ_S comme une réunion croissante dénombrable de sous-graphes $\Gamma_n \subset \Gamma_S$ qui sont ouverts, finis, et relativement compacts dans X , et tels que $\Gamma_{n+1} - \Gamma_n$ est une réunion disjointe finie d'arêtes de Γ_S partants des points à la frontière relative de Γ_n dans Γ_S . Chaque graphe fini Γ_n est le squelette d'une courbe $X_n \subset X$ de genre fini : c'est l'image inverse de Γ_n par la rétraction $X \rightarrow \Gamma_S$.

L'hypothèse $\chi(x, S) \leq 0$, signifie que Γ_S n'a pas de points finaux de type 1, cela permet permettent de montrer que les inclusions $\mathcal{O}(X_{n+1}) \rightarrow \mathcal{O}(X_n)$ ont image dense, de manière à rentrer dans le cadre du Théorème 15.0.4. En effet la restriction d'un disque sur une couronne n'a pas d'image dense.

Ensuite la restriction de \mathcal{F} à X_n est finiment contrôlée, et on montre que sur chaque X_n la formule (15.5) coïncide avec (15.2).

16. Remarquons que la condition $\partial_b H_{\emptyset, b_D}(-, \mathcal{F}|_D) = 0$ équivaut à $\text{Irr}_{b_D}(\mathcal{F}) = -r$. Ainsi $r + \text{Irr}_{b_D}(\mathcal{F}) = 0$ pour presque tout $D \in \mathcal{D}_{\partial X}$.

Un calcul direct montre alors que la contribution à l'indice de X_{n+1} par rapport à X_n est donné par

- i) la somme des $\chi(x, S, \mathcal{F})$ sur les points $x \in S - \partial X$ qui se trouvent à la frontière relative des X_n dans X_{n+1} ;
- ii) la somme des $\chi_{\text{dR}}(D, \mathcal{F}) = r + \text{Irr}_{d_D}(\mathcal{F})$ pour les disques $D \in \mathcal{D}_{\partial X}$ dont la frontière relative dans X_{n+1} est un point de la frontière relative des X_n dans X_{n+1} .

Le Théorème 15.0.4 affirme alors que la cohomologie de de Rham globale de \mathcal{F} sur X est de dimension finie si et seulement si la suite des indices qu'on trouve se stabilise. Cela revient à demander les conditions i) et ii) du Théorème 15.3.1.

Remarque 15.3.2. i) *Nous remarquons que les conditions du théorème n'impliquent pas la finitude du graphe $\Gamma_S(\mathcal{F})$, dans la prochaine section nous en donnons un exemple explicite.*

La raison est que les conditions du Théorème 15.3.1 ne font appel qu'au pentes de la hauteur totale du polygone $H_{S,r}(-, \mathcal{F})$.

La finitude du graphe contrôlant $\Gamma_S(H_{S,r}(-, \mathcal{F}))$ de la hauteur totale n'est toutefois (pour le moment) qu'une condition suffisante, car le lien entre les pentes nulles de $H_{S,r}(-, \mathcal{F})$ et le fait que le graphe $\Gamma_S(H_{S,r}(-, \mathcal{F}))$ soit fini, est une conséquence de la super-harmonicité de $H_{S,r}(-, \mathcal{F})$, qui n'est potentiellement pas vérifiée partout en présence de solubilité.

Nous sommes en ce moment au travail pour optimiser ces conditions (cf. Remarque 14.7.3).

- ii) *D'après la preuve, si les hypothèses et les conclusions du théorème sont vérifiées, il est clair que pour il existe une sous courbe $X(S, \mathcal{F})$ quasi-Stein dont le squelette est un graphe fini contenu dans Γ_S , qui contient tous les points $x \in S$ tels que $\chi(x, S, \mathcal{F}) \neq 0$, et telle que pour tout i on a*

$$H_{\text{dR}}^i(X(S, \mathcal{F}), \mathcal{F}|_{X(S, \mathcal{F})}) = H_{\text{dR}}^i(X, \mathcal{F}). \quad (15.6)$$

Sur $X(S, \mathcal{F})$ la quantité $\chi_c(X(S, \mathcal{F}))$ est définie, et le Théorème 15.2.2 est valable. En particulier nous avons la formule d'indice

$$\chi_{\text{dR}}(X, \mathcal{F}) = \chi_{\text{dR}}(X(S, \mathcal{F}), \mathcal{F}|_{X(S, \mathcal{F})}) = \chi_c(X(S, \mathcal{F})) \cdot \text{rang}(\mathcal{F}) - \text{Irr}_{X(S, \mathcal{F})}(\mathcal{F}|_{X(S, \mathcal{F})}). \quad (15.7)$$

Nous essayons en ce moment de perfectionner le contrôle qu'on a de la courbe $X(S, \mathcal{F})$.

15.4. Un exemple d'équation sur un disque, avec graphe contrôlant infini et cohomologie de dimension finie.

Dans cette section nous souhaitons donner un exemple d'équation de rang 2, définie sur un disque ouvert muni de la pseudo-triangulation vide, telle que pour tout $i = 1, 2$ les graphes contrôlants $\Gamma_{S,i}(\mathcal{F})$ ont une infinité de bifurcations, alors que la hauteur totale $\mathcal{H}_{S,2}(-, \mathcal{F})$ est constante sur un germe de segment à la frontière ouverte et sa cohomologie de de Rham est de dimension finie.

Soit \mathcal{F} l'équation différentielle sur le disque unité ouvert $D := D^-(0, 1)$ définie dans une base cyclique par l'opérateur

$$\left(\frac{d}{dT}\right)^2 + f_1\left(\frac{d}{dT}\right) + f_2, \quad (15.8)$$

où

- i) f_1 est une fonction bornée sur D , avec une infinité de zéros ;
- ii) $f_2 \in K$ est une fonction constante de norme strictement positive $|f_2| > 1$;

iii) la norme sup $\|f_1\|_D := \sup_{x \in D} |f_1|(x)$ satisfait

$$1 < \|f_1\|_D < |f_2| < \|f_1\|_D^2. \quad (15.9)$$

Notons par $x_{0,\rho}$ le point au bord du disque fermé $D^+(0, \rho)$. Alors, grâce à cette condition, il existe un réel $s < 1$, tel que pour tout $\rho \in]s, 1[$ on a

$$\rho^{-1} < |f_1|(x_{0,\rho}) < \rho|f_2| < \rho|f_1|(x_{0,\rho})^2. \quad (15.10)$$

Considérons maintenant la pseudo-triangulation S de D formée par un unique point $x_{0,s'}$, avec $s' \in]s, 1[$. Par le théorème de Young [You92] (voir [Pul12, Section 4.3] pour des notations proches de notre contexte), pour tout $\rho \in]s', 1[$ on a

$$\mathcal{R}_{S,1}(x_{0,\rho}, \mathcal{F}) = \frac{\omega}{\rho \cdot |f_1|(x_{0,\rho})} < \omega \quad (15.11)$$

$$(15.12)$$

$$\mathcal{R}_{S,2}(x_{0,\rho}, \mathcal{F}) = \frac{\omega \cdot |f_1|(x_{0,\rho})}{\rho \cdot |f_2|} < \omega, \quad (15.13)$$

$$H_{S,2}(x_{0,\rho}, \mathcal{F}) = \frac{\omega^2}{\rho^2 \cdot |f_2|}, \quad (15.14)$$

où

$$\omega = \begin{cases} |p|^{\frac{1}{p-1}} & \text{si la caractéristique résiduelle de } K \text{ est } p > 1 \\ 1 & \text{si la caractéristique résiduelle de } K \text{ est } 0. \end{cases} \quad (15.15)$$

La hauteur totale du polygone $H_{S,2}(-, \mathcal{F})$ n'a pas de changements de pente sur le segment $b_D :=]x_{0,s}, x_{0,1}[$. Par le Théorème 15.3.1 on trouve alors que

$$H_{\text{dR}}^0(D, \mathcal{F}) = H_{\text{dR}}^1(D, \mathcal{F}) = 0. \quad (15.16)$$

Maintenant montrons que $\Gamma_S(\mathcal{F})$ a un nombre infini de points de bifurcation le long du segment $]x_{0,s'}, x_{0,1}[$. Nous savons que pour tout $\rho \in]s', 1[$ on a

- i) $i = 1$ et $i = 2$ sont tous les deux des sommets du polygone de Newton des convergences en $x_{0,\rho}$ (i.e. $i = 2$ sépare les rayons sur tout point de $]x_{0,s}, x_{0,1}[$);
- ii) Tous les rayons sont spectrales non solubles en tout point de $]x_{0,s}, x_{0,1}[$.

Par le Théorème 12.0.7, la fonction $H_{\emptyset,1}(-, \mathcal{F}) = \mathcal{R}_{\emptyset,1}(-, \mathcal{F})$ est donc *harmonique* en chaque point du segment $]x_{0,s'}, x_{0,1}[$.

Maintenant pour tout $\rho \in]s', 1[$ elle satisfait la condition (C3) du Théorème 10.2.7 sur tous les disques dont la frontière est $x_{0,\rho}$. On a donc

$$\partial_b \mathcal{R}_{S,1}(x_{0,\rho}, \mathcal{F}) \geq 0 \quad (15.17)$$

sur tout germe de segment b sortante de $x_{0,\rho}$ différent de $b_\infty :=]x_{0,\rho}, x_{0,1}[$. Et la direction b appartient à $\Gamma_{S,1}(\mathcal{F})$ si et seulement si (15.17) est une inégalité stricte. Ensemble à l'harmonicité cela montre la propriété suivante :

- $\Gamma_{S,1}(\mathcal{F})$ a un point de bifurcation en correspondance de tout point $x_{0,\rho}$ où la fonction $\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F})$ a un changement de pente sur l'intervalle $]x_{0,s'}, x_{0,1}[$.

On voit alors que si $\Gamma_S(f_1)$ est le graphe contrôlant de f_1 , on a

$$\Gamma_{S,1}(\mathcal{F}) = \Gamma_S(f_1) \quad (15.18)$$

dans un voisinage de tout point de $]x_{0,s'}, x_{0,1}[$. Le graphe $\Gamma_S(f_1)$ est le graphe dont les points finaux sont les zéros de f_1 . Comme f_1 a un nombre infini de zéros, $\Gamma_{S,1}(\mathcal{F})$ est un graphe infini.

Il est possible de voir que $\Gamma_{S,2}(\mathcal{F})$ a les mêmes points de bifurcation de $\Gamma_{S,2}(\mathcal{F})$ sur l'intervalle $]x_{0,s'}, x_{0,1}[$.

CHAPITRE III : Déformation infinitésimale des équations différentielles p -adiques sur les courbes de Berkovich

Ce chapitre concerne les articles [Pul08], [Pul11], [Pul14a]. Nous avons obtenu le premier pendant la thèse de doctorat, et les autres après.

Nous signalons également les articles suivants qui sont en relation avec les arguments traités dans ce chapitre (voir aussi l'introduction, pour les localiser dans un contexte plus générale) : [ADV04], [DV04], [DV02].

16. Automorphismes infinitésimaux

Soit K un corps valué complet. Soit X une courbe de Berkovich K -analytique et quasi-lisse. Soit S une triangulation faible sur X . Nous préservons les notations de la section 10.1, et en particulier de la Définition 10.1.2.

Par commodité, choisissons une extension valué complète de corps Ω/K telle que tout point de X est Ω -rationnel.

Définition 16.0.1. Soit $\sigma : X \xrightarrow{\sim} X$ un automorphisme de courbes K -analytiques. Nous dirons que σ est S -infinitésimal si pour tout $x \in X$, l'automorphisme $\sigma_\Omega : X_\Omega \rightarrow X_\Omega$ induit un automorphisme du disque maximal $D(x, S) \subseteq X_\Omega$.

D'après la définition, si X est un disque avec triangulation faible vide, alors tout automorphisme de X est infinitésimal (en effet $D(x, S) = X_\Omega$ pour tout x).

Il est clair que la composition de deux morphismes S -infinitésimaux est S -infinitésimale. Si Σ est une famille d'automorphismes S -infinitésimaux, nous notons par $\langle \Sigma \rangle$ le groupe engendré par Σ .

Lemme 16.0.2. Soit $D := D^-(0, R)$ un disque ouvert, si $\sigma : D \rightarrow D$ est un K -automorphisme, alors σ est une isométrie : pour tout corps valué L/K et tout $x, y \in D(L)$ on a

$$|x - y| = |\sigma_L(x) - \sigma_L(y)|. \quad (16.1)$$

La raison est qu'un tel automorphisme s'écrit comme

$$\sigma(T) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n T^n \quad (16.2)$$

avec $a_0 \in D(K)$ et $|a_1| = 1$, et $|a_n| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Ce lemme montre qu'il existe un plus petit disque fermé $D^+ \subset D$ contenant 0 qui est globalement stable par σ : c'est le plus petit disque fermé contenant 0 et $\sigma(0)$. Et tout disque intermédiaire est stable par σ .

Définition 16.0.3. Notons par $D^+(x, \sigma) \subset D(x, S)$ le plus petit disque fermé contenant t_x stabilisé par σ_Ω . Si R_σ et R sont les rayons de $D^+(x, \sigma)$ et $D(x, S)$ respectivement dans une coordonnée, alors nous posons

$$\mathcal{R}_S(x, \sigma) = R_\sigma / R. \quad (16.3)$$

Grâce au lemme cette définition est indépendante de la coordonnée choisie. Avec un abus de notations, nous notons par

$$\Gamma_S(\sigma) \quad (16.4)$$

le graphe contrôlant de la fonction

$$\mathcal{R}_S(-, \sigma) : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (16.5)$$

16.1. Localisation

L'automorphisme S -infinitésimal $\sigma : X \xrightarrow{\sim} X$ stabilise certaines parties intéressantes de X . Notamment nous avons le lemme suivant

Lemme 16.1.1. *Si $Y \subseteq X$ est un domaine analytique admettant une triangulation faible non vide S_Y telle que*

$$\Gamma_{S_Y} = \Gamma_S \cap Y, \quad (16.6)$$

alors σ induit un automorphisme S_Y -infinitésimal de Y .

La même assertion vaut pour les composantes connexe de $X - S$ munies de la triangulation faible vide.

En effet le fait d'être S -infinitésimal entraîne que tout point de Γ_S est fixé par σ , et que tout disque maximal $D(x, S)$ est globalement fixé.

Il est alors clair que si Y' est l'image inverse par la rétraction $X \rightarrow \Gamma_S$ d'un ouvert ou un fermé de Γ_S , alors σ stabilise Y' .

Le hypothèses du lemme entraînent que Y est obtenu par Y' en supprimant un nombre localement fini de disques maximaux $D(x, S)$.

16.2. Continuité et finitude de la fonction $\mathcal{R}_S(-, \sigma)$

Théorème 16.2.1. *La fonction $\mathcal{R}_S(-, \sigma)$ jouit des propriétés suivantes :*

- i) $\mathcal{R}_S(-, \sigma)$ est une fonction continue sur X . Elle est log-affine par morceaux sur tout segment de X , et ses pentes sont entières;
- ii) Si C est une composante connexe de $X - S$ (soit un disque ouvert soit une couronne ouverte), il existe une fonction $f \in \mathcal{O}(C)$, et un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in C$ on a

$$\mathcal{R}_S(x, \sigma) = a|f(x)|. \quad (16.7)$$

En particulier $\mathcal{R}_S(x, \sigma)$ est harmonique en dehors de S ;

- iii) $\Gamma_S(\sigma)$ est localement fini. Si de plus $\sigma \neq \text{Id}_X$, alors les points finaux de $\Gamma_S(\sigma)$ sont les points rigides de X qui sont des points fixes de σ .

La preuve est facile sur la droite affine. Notamment si X est un domaine analytique de $\mathbb{A}_K^{1, \text{an}}$ et si T est une coordonnée, alors on regarde la fonction

$$\delta_{\sigma, T} := T \circ \sigma - T \in \mathcal{O}(X). \quad (16.8)$$

Pour tout fonction $f \in \mathcal{O}(X)$, et tout point $x \in X$ on a $|f|(x) = |f_\Omega|(t_x)$, donc on voit que pour tout point $x \in X$ on a

$$|\delta_{\sigma, T}|(x) = |\sigma_\Omega(t_x) - t_x|_\Omega, \quad (16.9)$$

où la distance est mesurée avec la coordonnée T . En d'autres termes $|\delta_{\sigma, T}|(x)$ mesure le déplacement du centre de $D(x, S)$ par l'application σ_Ω . Par définition on a

$$|\delta_{\sigma, T}|(x) = R_\sigma. \quad (16.10)$$

Le Théorème 16.2.1 s'en suit facilement dans ce cas.

Dans le cas général, notamment autour d'un point de S avec du genre, la preuve n'est pas aussi simple. On a besoin de la machinerie de [PP12b], en particulier du Théorème 10.2.8 pour se réduire

au cas de la droite affine, et traiter direction par direction la continuité et la finitude à l'aide de certaines applications étales bien choisies.

17. Déformation

Dans cette section nous montrons comment déformer les équations différentielles en des Σ -modules.

Définition 17.0.2. *Soit Σ une faille d'automorphismes S -infinitésimaux de X . Un Σ -module est par définition un \mathcal{O}_X -module cohérent muni d'un isomorphisme \mathcal{O}_X -linéaire*

$$\sigma^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \sigma^*(\mathcal{F}). \quad (17.1)$$

Un morphisme de Σ -modules $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ est un morphisme \mathcal{O}_X -linéaire qui commute à l'action de Σ .

Si $\langle \Sigma \rangle$ est le groupe engendré par Σ , on peut demander une compatibilité par composition de l'action de Σ sur \mathcal{F} de sorte à ce que l'action de Σ se prolonge en une action de $\langle \Sigma \rangle$. Cela sera une propriété automatique des Σ -modules obtenus par déformation d'une équation différentielles.

L'expression locale d'un Σ -module, c'est ce qu'on appelle une équation aux σ -différences. Notamment, si X est quasi-Stein, et si \mathcal{F} est libre sur X , alors la flèche (17.1) équivaut à un automorphisme

$$\sigma : \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(X) \quad (17.2)$$

qui a la propriété suivante

$$\sigma(fm) = \sigma(f)\sigma(m), \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{O}(X), \text{ et tout } m \in \mathcal{F}(X). \quad (17.3)$$

Autrement dit l'action de $\sigma \in \Sigma$ sur \mathcal{F} est σ -semi-linéaire par rapport à l'action de σ sur $\mathcal{O}(X)$.

Si une base de \mathcal{F} sur $\mathcal{O}(X)$ est fixé la flèche (17.2) s'écrit comme

$$\sigma \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} = A(\sigma) \cdot \begin{pmatrix} \sigma(f_1) \\ \vdots \\ \sigma(f_r) \end{pmatrix}, \quad A(\sigma) \in GL_n(\mathcal{O}(X)). \quad (17.4)$$

17.1. Stratifications

Les stratifications forment une catégorie équivalente à celle des équations différentielles. Nous allons en rappeler brièvement la définition.

Soit U un domaine analytique de X , et soit $T : U \rightarrow \mathbb{A}_K^{1,\text{an}}$ un morphisme étale. Si $p_i : X \times X \rightarrow X$ sont les projections, on note par

$$T_i := T \circ p_i. \quad (17.5)$$

Un *voisinage tubulaire* de la diagonale de U est un domaine de Weierstrass de la forme

$$\mathcal{T}(U, T, R) = \{x \in U \times U \mid |T_1 - T_2|(x) \leq R\}. \quad (17.6)$$

Définition 17.1.1. *Un voisinage \mathcal{T} de la diagonale de $X \times X$ est admissible si pour tout $x \in X$ il existe un ouvert U_x contenant x , une coordonnée étale $T_x : U_x \rightarrow \mathbb{A}_K^{1,\text{an}}$, et un nombre réel $R_x > 0$ tels que*

$$\mathcal{T}(U_x, T_x, R_x) \subset \mathcal{T}. \quad (17.7)$$

Définition 17.1.2. *Une stratification sur X est un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} localement libre de type fini muni*

d'un isomorphisme

$$\chi : (p_2^* \mathcal{F})|_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\sim} (p_1^* \mathcal{F})|_{\mathcal{T}}, \quad (17.8)$$

au dessus d'un ouvert admissible \mathcal{T} non spécifié de la diagonale, qui est $\mathcal{O}(\mathcal{T})$ -linéaire, et qui satisfait aux relations suivantes :

- i) Si $p_{i,j} : X \times X \times X \rightarrow X \times X$ dénote la projection sur le (i,j) -ème facteur, alors sur l'ouvert $p_{1,2}^{-1}(\mathcal{T}) \cap p_{2,3}^{-1}(\mathcal{T}) \cap p_{1,3}^{-1}(\mathcal{T})$ on a

$$p_{1,2}^*(\chi) \circ p_{2,3}^*(\chi) = p_{1,3}^*(\chi). \quad (17.9)$$

- ii) Si $\Delta : X \rightarrow X \times X$ est la diagonale, alors on a

$$\Delta^*(\chi) = \text{Id}_{\mathcal{F}}, \quad (17.10)$$

où nous avons identifié canoniquement $\Delta^* p_i^* \mathcal{F}$ avec \mathcal{F} .

Un morphisme entre stratifications est un morphisme \mathcal{O}_X -linéaire $\alpha : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ entre les \mathcal{O}_X -modules sous-jacent qui respecte χ .

Théorème 17.1.3 ([Ber96a]). *La catégorie des équations différentielles sur X est équivalente à la catégorie des stratifications.*

En termes concrets localement sur X , si \mathcal{F} et Ω_X^1 sont libres et si X est quasi-Stein, la donnée d'une équation différentielle $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \Omega^1$ correspond à une écriture du type

$$d(Y) = G \cdot Y, \quad G \in M_n(\mathcal{O}(X)) \quad (17.11)$$

où la dérivation $d : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ engendre l'espace des K -dérivations continues de $\mathcal{O}(X)$.

La matrice de χ dans la même base s'écrit localement sur X comme le développement de Taylor formel

$$Y_{\chi} = \sum_{n \geq 0} G_n(T_2) \frac{(T_1 - T_2)^n}{n!}. \quad (17.12)$$

C'est une solution de l'équation (17.11) au voisinage de la diagonale de \mathcal{F} .

17.2. Équations différentielles Σ -compatibles

Soit σ un automorphisme S -infinitésimal. Nous dirons que l'équation différentielle \mathcal{F} est σ -compatible si pour tout $x \in X$ on a

$$\mathcal{R}_{S,1}(x, \mathcal{F}) > \mathcal{R}_S(x, \sigma). \quad (17.13)$$

Cette condition signifie que $D_S^+(x, \sigma) \subset D_{S,1}(x, \mathcal{F})$, autrement dit toutes les solutions de \mathcal{F} autour de t_x convergent sur le disque $D_S^+(x, \sigma)$.

Comme la fonction $\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F})$ est sur-harmonique en dehors de S alors que $\mathcal{R}_S(-, \sigma)$ est sous-harmonique, on démontre facilement le lemme suivant

Lemme 17.2.1. *Si X est connexe, la condition (17.13) vaut pour tout $x \in X$ si et seulement si elle vaut pour les points de S et sur tout germe de segment à l'infini dans $\partial^{\circ} X$.*

Si Σ est une famille d'automorphismes S -infinitésimaux, alors \mathcal{F} est Σ -compatible si elle est σ -compatible pour tout $\sigma \in \Sigma$.

17.3. Déformation

Nous rappelons qu'une solution d'une équation différentielle \mathcal{F} est une section du noyau de la connexion $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \Omega_X^1$. Par ailleurs une solution d'un Σ -module est une section v de \mathcal{F} tel que

$$\sigma(v) = v \otimes 1 \quad (17.14)$$

où $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow \sigma^* \mathcal{F}$. Dans l'expression locale (17.4), cela revient à dire que v est un point fixe par l'action de tout $\sigma \in \Sigma$.

Théorème 17.3.1. *Soit \mathcal{F} une équation différentielle Σ -compatible. Il existe une structure canonique de Σ -module sur le \mathcal{O}_X -module sous-jacent \mathcal{F} telle que :*

- i) *Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sont deux équations différentielles Σ -compatibles, et si $\alpha : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ commute à la connexion, alors α commute à l'action de Σ sur \mathcal{F} .*
- ii) *Si $v \in \mathcal{F}|_{D_{S,1}(x, \mathcal{F})}$ est une solution de l'équation différentielle, alors v est aussi une solution du Σ -module.*

La preuve de ce théorème se fait en deux étapes :

- i) On montre qu'il existe un voisinage admissible \mathcal{T} de la diagonale de X , sur lequel la stratification associée à \mathcal{F} est définie, tel que l'image de la flèche $\Delta_\sigma : X \rightarrow X \times X$ définie par $\Delta_\sigma = \sigma \times \text{Id}_X$ est contenue dans \mathcal{T} ;
- ii) Ensuite on considère le pull-back de la stratification $\chi : (p_2^* \mathcal{F})|_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\sim} (p_1^* \mathcal{F})|_{\mathcal{T}}$, et on trouve l'action de σ cherchée :

$$\sigma : \mathcal{F} = \Delta^*(p_2^* \mathcal{F})|_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\Delta_\sigma^*(\chi)} \Delta^*(p_1^* \mathcal{F})|_{\mathcal{T}} = \sigma^* \mathcal{F} . \quad (17.15)$$

La partie un peu plus compliquée est celle de montrer que le voisinage \mathcal{T} existe. On le construit comme réunion de voisinages locaux sur les points de $x \in X$:

- i) Si $x \in \Gamma_S$ on prends un voisinage tubulaire quelconque sur lequel la connexion existe. En effet x est un point fixe de tout $\sigma \in \Sigma$;
- ii) Si $x \notin \Gamma_S$, alors il appartient à une composante connexe de $X - \Gamma_S$ qui est nécessairement un disque virtuel ouvert D_x (tel que $(D_x)_\Omega = D(x, S)$). Dans ce cas la fonction $\mathcal{R}_{S,1}(-, \mathcal{F})$ étant sur-harmonique et la fonction $\mathcal{R}_S(-, \sigma)$ étant harmonique, on a immédiatement qu'il existe R' tel que ces deux fonctions vérifient

$$\mathcal{R}_S(x, \sigma) < R'/R < \mathcal{R}_{S,1}(x, \mathcal{F}) , \quad (17.16)$$

pour tout $x \in D_x$, où R est le rayon de $D_S(x, S)$ dans une coordonnée. Le voisinage tubulaire est alors $\mathcal{T}(D_x, T_x, R)$.

Remarque 17.3.2. *La description locale du foncteur est la suivante. Si Y_χ est la matrice de χ dans une base (cf. (17.12)), alors la matrice $A(\sigma)$ (cf. (17.4)) de qui décrit l'action de $\sigma = \Delta_\sigma^*(\chi)$ dans la même base est*

$$A(\sigma) = \Delta_\sigma^*(Y_\chi) = \sum_{n \geq 0} G_n(T) \frac{(T \circ \sigma - T)^n}{n!} . \quad (17.17)$$

C'est l'expression de $A(\sigma) \in GL_r(\mathcal{O}(X))$ comme fonction sur un voisinage formel de la diagonale. En pratique cela signifie que $A(\sigma)$ est la limite de la famille de fonctions $G_n(T) \frac{(T \circ \sigma - T)^n}{n!} \in GL_r(\mathcal{O}(X))$.

17.4. Pleine fidélité

Le Théorème 17.3.1 donne un foncteur

$$\text{Def}_{S,\Sigma} : \{\text{Equations Différentielles } \Sigma\text{-compatibles}\}/X \longrightarrow \{\Sigma\text{-modules}\}/X . \quad (17.18)$$

ce foncteur est l'identité sur les morphismes, en particulier il est fidèle. Nous nous intéressons maintenant à obtenir des critères pour la pleine fidélité de ce foncteur.

Définition 17.4.1. *La famille Σ est non dégénérée si pour toute composante connexe X' de X il existe un point $x \in X'$ tel que pour tout disque ouvert*

$$D_S^+(x, \sigma) \subset D \subset D(x, S) \quad (17.19)$$

on a

$$\mathcal{O}(D)^\Sigma = \Omega \quad (17.20)$$

où $\mathcal{O}(D)^\Sigma$ désigne les fonctions stables par composition avec les éléments de Σ .

Cette définition est relativement facile à tester. Par exemple si X est un domaine affinoïde de la droite affine, et s'il existe une suite $\{\sigma_n\}_{n \geq 0}$ d'éléments du groupe $\langle \Sigma \rangle$ telle que l'ensemble de nombres réels (cf. (16.8))

$$\{|\delta_{\sigma_n, T}|(x)\}_n - \{0\} \quad (17.21)$$

admet 0 comme point d'accumulation, alors Σ est non dégénérée.

Dans le cas général d'une courbe X on a le même critère, mais il faut se servir d'une coordonnée étale $T_x : U \rightarrow \mathbb{A}_K^{1, \text{an}}$ définie sur un voisinage ouvert U .

Proposition 17.4.2. *Si Σ est une famille non dégénérée, le foncteur de déformation $\text{Def}_{S,\Sigma}$ est pleinement fidèle.*

La preuve se fait en plongeant les morphismes dans leur restriction au disque D de (17.19). On peut trouver un tel disque trivialisant les équations différentielles, et aussi leurs déformations. L'assertion se réduit donc à vérifier que l'espace des endomorphismes de l'équation différentielle triviale sur D s'identifie à l'espace des endomorphismes du Σ -module triviale. C'est exactement ce que la condition (17.20) demande.

17.5. Analyticité de l'action de Σ

Nous avons vu que dans la Remarque 17.3.2 l'expression locale de la matrice $A(\sigma)$. Dans cette section nous montrons la dépendance analytique en σ de $A(\sigma)$.

Plus précisément, jusqu'à la nous avons considéré l'action d'un ensemble sur X . Maintenant nous allons considérer un groupe K -analytique G agissant sur X par l'application

$$\mu : G \times X \longrightarrow X , \quad (17.22)$$

satisfaisant les conditions usuelles. Le formalisme ici est celui de [Ber90, Section 5.1] ou [Mum08, Section 12]. Cette structure correspond, pour tout extension valé complète L/K , à la donnée d'une action du groupe $G(L)$ sur l'ensemble X_L par automorphismes L -analytiques :

$$G(L) \longrightarrow \text{Aut}_L(X_L) . \quad (17.23)$$

Soit Σ_L l'image de $G(L)$ in $\text{Aut}_L(X_L)$.

L'idée qui est derrière à la notion de G -module analytique est la donnée pour tout L/K d'un Σ_L -module de manière compatible à la composition de Σ_L et aux changements de base de L . En d'autres termes \mathcal{F} est considéré comme un foncteur $L \mapsto \mathcal{F}_L$ en $G(L)$ -modules. La définition qu'on en tire à travers le lemme de Yoneda est la suivante.

Soit $p_X : G \times X \rightarrow X$ la projection sur le deuxième facteur. Considérons l'objet simplicial

$$G \times G \times X \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_2} \end{array} G \times X \xrightarrow[\mu]{p_X} X. \quad (17.24)$$

où $d_0 = p_2 \times p_3$, $d_1 = m_G \times \text{Id}_X$, $d_2 = \text{Id}_G \times \mu$, et p_i est la i -ème projection de $G \times G \times X$.

Définition 17.5.1. *Un G -module semi-linéaires analytique est un \mathcal{O}_X -module localement libre de type fini \mathcal{F} muni d'un isomorphisme*

$$\sigma_G : p_X^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mu^*(\mathcal{F}), \quad (17.25)$$

satisfaisant la relation de cocycle. Cela signifie que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} p_3^*(\mathcal{F}) & \xrightarrow{d_0^*(\sigma_G)} & (\mu \circ d_0)^*(\mathcal{F}) \\ & \searrow d_1^*(\sigma_G) & \swarrow d_2^*(\sigma_G) \\ & \eta^*(\mathcal{F}) & \end{array} \quad (17.26)$$

où $\eta := \mu \circ d_1 = \mu \circ d_2$.

Si pour tout L/K et tout $g \in G(L)$ on regarde le pull-back de σ_G par l'application $g \times \text{Id}_{X_L} : X_L \rightarrow G_L \times X_L$, on obtient une famille d'applications

$$\{ \sigma_g^{\mathcal{F}_L} : \mathcal{F}_L \xrightarrow{\sim} \sigma_g^*(\mathcal{F}_L) \}_{g \in G(L)}, \quad (17.27)$$

satisfaisant la condition de cocycle

$$\sigma_{gh}^{\mathcal{F}_L} = \sigma_h^*(\sigma_g^{\mathcal{F}_L}) \circ \sigma_h^{\mathcal{F}_L}. \quad (17.28)$$

qui provient du diagramme (17.26).

Maintenant nous dirons que l'action de G sur X est S -infinitésimale (resp. non dégénérée), si pour tout L/K l'action de tout $g \in G(L)$ est un automorphisme S_L -infinitésimal de X_L (resp. si la famille Σ_L est non dégénérée).

Nous dirons qu'une équation différentielle \mathcal{F} est G -compatible, si pour tout L/K elle est $G(L)$ -compatible.

Théorème 17.5.2 ([Pul14a]). *Si l'action de G est S -infinitésimale, nous avons un foncteur*

$$\{ \text{Équations différentielles } G\text{-compatibles} \} \longrightarrow \{ G\text{-modules semi-linéaires analytiques} \} \quad (17.29)$$

Le foncteur associé à (\mathcal{F}, ∇) une structure de G -module semi-linéaire analytique sur \mathcal{F} , telle que tout morphisme \mathcal{O}_X -linéaire entre objets de la catégorie de départ commutant aux connexions commute aussi aux actions de G respectives. En particulier ce foncteur est fidèle.

Si de plus l'action de G est non dégénérée, le foncteur est pleinement fidèle.

La preuve consiste à montrer qu'il existe un voisinage admissible de la diagonale \mathcal{T} , sur lequel la stratification associée à l'équation différentielle \mathcal{F} est définie, contenant l'image du morphisme

$$\Delta_G : G \times X \rightarrow X \times X \quad (17.30)$$

où $\Delta_G = \mu \times p_X$. La structure de G -module sera alors le pull-back de la stratification.

En cette situation, nous déduisons l'existence de \mathcal{T} en utilisant la preuve du Théorème 17.3.1. Notamment la preuve du théorème 17.3.1 donne un tel \mathcal{T} pour l'action de $G(L)$ sur X_L , pour tout L/K . Il suffit alors de prendre une extension Ω/K assez grande de sorte que tout point des espaces K -analytiques en jeu devienne Ω -rationnel.

18. Quasi-unipotence des Σ -modules sur l'anneau de Robba

Les conditions pour la compatibilité et la non dégénérescence sur l'anneau de Robba \mathfrak{R} sont assez pénibles à raconter, et nous renvoyons le lecteur à [Pul14a]. La notion de automorphisme infinitésimal se donne sur une couronne $C_\varepsilon = \{1 - \varepsilon < |T| < 1\}$ non spécifiée, munie de la triangulation faible vide. Et la déformation sur l'anneau de Robba s'obtient sans obstructions par passage à la limite.

Les complications arrivent lorsqu'on veut montrer que le foncteur est pleinement fidèle, car il faut faire coïncider la couronne où \mathcal{F} est σ -compatible et la couronne où l'action de Σ est non dégénérée. Nous ne donnerons que l'énoncé informel suivant

Théorème 18.0.3. *Soit Σ une famille d'automorphismes infinitésimaux de \mathfrak{R} . Le foncteur de déformation*

$$\text{Def}_\Sigma : \{\text{Équations différentielles } \Sigma\text{-compatibles}\}/\mathfrak{R} \longrightarrow \{\Sigma\text{-modules}\}/\mathfrak{R} \quad (18.1)$$

est fidèle.

Si Σ est non dégénérée, nous avons une sous-catégorie (fidèlement pleine) $\mathcal{DE}(\Sigma)$ d'équations différentielles Σ -compatibles, qui sont compatibles aussi à la non dégénérescence de Σ et telles que la restriction de Def_Σ à $\mathcal{DE}(\Sigma)$ est pleinement fidèle.

Remarque 18.0.4. *Nous verrons dans la prochaine section comment décrire l'image essentielle du foncteur de déformation lorsque $\Sigma = \{\sigma\}$ est un automorphisme de la forme $\sigma_{q,h}(qT + h)$, et obtenir également un foncteur inverse nommé confluence. La condition pour appartenir à l'image essentielle ressemble à (17.13).*

Cette équivalence est le résultat central de [ADV04], mais les méthodes sont différents. Notamment dans [ADV04] on montre que toute équation aux q -différences sur \mathfrak{R} admettant une structure de Frobenius non spécifiée est quasi-unipotente. Nous verrons dans un instant ce que ça veut dire. Signalons seulement que le fait d'être quasi-unipotente demande une fine classification des q -différences, et que l'équivalence est déduite pas des méthodes Tannakiennes.

L'équivalence de [ADV04] suppose que le corps résiduel soit de caractéristique positive p , que $|q - 1| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$, que les objets aient une structure de Frobenius, le corps de base soit essentiellement algébriquement clos.

Nous avons remplacé ces hypothèses par la condition de compatibilité (17.13) qui nous a permis au même temps de considérer des automorphismes plus généraux, et de sortir du cadre des équations sur l'anneau de Robba et de passer aux courbes de Berkovich.

18.1. Extensions étales et quasi-unipotence.

Nous rappelons d'abord la notion de quasi-unipotence des équations différentielles.

Une équation est unipotente si elle est extension successive d'équations de rang un triviales.

Introduisons le sous-anneau $\mathcal{E}^\dagger \subset \mathfrak{R}$ qu'on a déjà vu dans le chapitre I (cf. (5.8)). Si K est de valuation discrète (non triviale) de corps résiduel de caractéristique $p > 0$, alors \mathcal{E}^\dagger est un anneau local Henselien de corps résiduel $E := \widetilde{K}((T))$.

Les extensions finies séparables du corps E , se relèvent à des extensions finies non ramifiées de \mathcal{E}^\dagger , et par changement de base elles sont en bijection avec des extensions finies étales de \mathfrak{R} .

Théorème 18.1.1 ([And02],[Ked04],[Meb02]). *Quitte à faire une extension finie L/K , toute équation différentielle \mathcal{F} sur l'anneau de Robba admettant une structure de Frobenius non spécifiée est produit tensoriel $\mathcal{F} = \mathcal{N} \otimes \mathcal{U}$, où \mathcal{U} est une équation unipotente, et \mathcal{N} est une équation trivialisée par une extension finie étale de \mathfrak{R} provenant d'une extension finie séparable de E .*

Une équation \mathcal{F} avec la propriété du théorème s'appelle quasi-unipotente. On définit la notion de Σ -module quasi-unipotent de manière complètement analogue, sachant que l'action de Σ se prolonge de manière unique aux extensions étales de \mathfrak{R} provenant d'extensions finie séparables de E .

Théorème 18.1.2. *Soit Σ une famille non dégénérée d'automorphismes infinitésimaux de \mathfrak{R} provenant par restriction d'une famille infinitésimale d'automorphismes définis chacun sur une couronne non spécifiée de la forme $A_\varepsilon := \{1 - \varepsilon < |T| < 1 + \varepsilon\}$.*

Alors, quitte à faire une extension finie L/K , tout Σ -module \mathcal{F} sur \mathfrak{R} provenant par déformation d'une équation différentielle dans $\mathcal{DE}(\Sigma)$ admettant une structure de Frobenius non spécifiée, est quasi-unipotent.

Soit \mathcal{F} une équation différentielle dans $\mathcal{DE}(\Sigma)$ avec structure de Frobenius, et soit $\text{Def}_\Sigma(\mathcal{F})$ le Σ -module obtenu par déformation.

L'équation \mathcal{F} est trivialisée par une extension étale, et nous montrons que le Σ -module $\text{Def}_\Sigma(\mathcal{F})$ est trivialisé par la même extension. Or, \mathcal{F} et $\text{Def}_\Sigma(\mathcal{F})$ ont en commun les solutions de Taylor, et la preuve consiste à montrer qu'ils ont en commun aussi les solutions *étales*, i.e. les solutions dans une extension finie étale de \mathfrak{R} .

Pour ce faire on utilise le fait qu'une extension étale de \mathfrak{R} est encore isomorphe à un anneau de Robba. La situation est assimilable à un revêtement étale de couronnes $\psi : C_{\varepsilon'} \rightarrow C_\varepsilon$. L'idée élémentaire de la preuve est d'arriver à trouver un disque D dans C_ε trivialisant \mathcal{F} tel que la restriction de ψ à D soit un recouvrement trivial de disques. Il est alors clair que les pull-backs de \mathcal{F} et $\text{Def}_\Sigma(\mathcal{F})$ sont simultanément triviaux sur $\psi^{-1}(D)$. Cela montre que la déformation commute au pull-back, et puisque \mathcal{F} est triviale sur toute la couronne $C_{\varepsilon'}$ la même chose doit arriver à $\text{Def}_\Sigma(\mathcal{F})$.

En réalité le processus est un peu plus compliqué à cause de certains problèmes dont nous n'avons pas fait mention concernant l'action de Σ , qui n'est pas entièrement définie sur chaque C_ε . Nous sommes obligé de restreindre de plus en plus notre couronne. À cause de ça, pour trouver le disque D nous devons en effet prendre l'extension canonique de Katz de l'équation différentielle \mathcal{F} à un germe de couronne non spécifiée $A_\varepsilon := \{1 - \varepsilon < |T| < 1 + \varepsilon\}$, qui existe dans ce contexte grâce à un résultat de S.Matsuda [Mat02], et supposer que Σ agisse sur A_ε . La déformation $\text{Def}_\Sigma(\mathcal{F})$ est définie alors sur la même couronne A_ε . La condition de solubilité de \mathcal{F} entraîne qu'elle est trivialisé par le disque $D := D^-(1, 1)$, et la condition de infinitésimalité assure que ce disque est stable par Σ . L'application ψ se prolonge en effet à $\psi : A_{\varepsilon'} \rightarrow A_\varepsilon$, et à partir de là on raisonne comme avant.

Remarque 18.1.3. *Nous reprenons la remarque 18.0.4. Dans le cadre des équations aux q -différences, le Théorème 18.1.2 est le résultat central de [ADV04], démontré avec une classification fine des équations aux q -différences. L'équivalence de déformation de [ADV04] repose sur le Théorème 18.1.2.*

Notre parcours est différent : nous obtenons d'abord la déformation (qui existe dans un contexte plus ample que celui des équations aux q -différences sur l'anneau de Robba) pour ensuite en déduire le Théorème 18.1.2 par déformation.

19. Équations aux différences sur la droite affine et confluence

Nous spécialisons maintenant les notions précédentes à la droite affine et aux automorphismes de la forme

$$\sigma_{q,h}(T) = qT + h. \tag{19.1}$$

- Si $h = 0$ un $\sigma_{q,0}$ -module s'appelle une *équation aux q -différences*,

- Si $q = 1$ un $\sigma_{1,h}$ -module s'appelle une *équation aux différences finies*,
- Dans le cas général nous parlerons d'*équation aux différences*.

Pour ces automorphismes on peut décrire l'image essentielle du foncteur $\text{Def}_{\sigma_{q,h}}$ et construire un quasi-inverse. L'idée de base est qu'à partir de l'action de $\sigma_{q,h}$ on peut construire une solution de Taylor formelle, qui est la matrice d'une stratification sous certaines conditions de compatibilité.

Nous fixons comme avant une extension Ω/K sphériquement complet, algébriquement clos, tel que tout point de $\mathbb{P}_K^{1,\text{an}}$ est Ω -rationnel.

Fixons un couple

$$(q, h) \in K^\times \times K. \quad (19.2)$$

On peut voir que $\sigma_{q,h}$ s'étend en un automorphisme de $\mathbb{P}_K^{1,\text{an}}$ qui fixe l'infini, et que, si $q \neq 1$, le point

$$a := \frac{-h}{q-1} \quad (19.3)$$

est l'unique point fixe de $\sigma_{q,h}$ différent de l'infini.

Nous commençons par traduire les notions de infinitésimalité et non dégénérescence :

Proposition 19.0.4. *Soit $X \subseteq \mathbb{P}_K^{1,\text{an}}$ un domaine analytique connexe différent de $\mathbb{P}_K^{1,\text{an}}$ et de $\mathbb{P}_K^{1,\text{an}} - \{t\}$ pour tout point t de type 1 ou 4. Alors*

- i) *Soit Y une composante connexe de X_Ω . Alors toute composante connexe de $\mathbb{P}_\Omega^{1,\text{an}} - Y$ est soit un disque fermé ou ouvert, soit un point de type 1 ou 4.*
- ii) *$\sigma_{q,h}$ induit un automorphisme de X si et seulement si σ_Ω induit un automorphisme de $\mathbb{P}_\Omega^{1,\text{an}} - X_\Omega$.*
- iii) *Si S est une triangulation faible de X , l'action de $\sigma_{q,h}$ sur X est S -infinitésimale si et seulement si pour toute composante connexe Y de X_Ω on a :*
 - (a) *$(\sigma_{q,h})_\Omega$ induit un automorphisme de toute composante connexe de $\mathbb{P}_\Omega^{1,\text{an}} - Y$;*
 - (b) *Si D est un disque virtuel ouvert de X tel que $S \cap D \neq \emptyset$, alors pour tout $x \in S_\Omega \cap D_\Omega$ qui est un point final du squelette Γ_{S_Ω} , il existe un disque ouvert $D_x \subset D_\Omega$ avec frontière x , qui est globalement fixé par $(\sigma_{q,h})_\Omega$.*
- iv) *Supposons que l'action de $\sigma_{q,h}$ sur X soit S -infinitésimale. Alors l'action de $\sigma_{q,h}$ est non dégénérée si et seulement si soit q n'est pas une racine de l'unité, soit $q = 1$ et $h \neq 0$.*

Remarquons que :

- si $|q| \neq 1$, alors $\sigma_{q,h}$ n'est pas infinitésimale.
- D'autre part, si $|q-1| = 1$, les uniques domaines analytiques stables par $\sigma_{q,h}$ sont de la forme $\mathbb{P}_K^{1,\text{an}} - (D_a, D_\infty)$ où D_a et D_∞ sont des disques virtuels (fermé ou ouverts), éventuellement réduits à un point, centrés en a et ∞ respectivement.

Cette action est infinitésimale seulement si un des deux disques est vide, et dans ce cas l'unique équation différentielle $\sigma_{q,h}$ compatible est l'équation triviale.

Nous sommes donc amené à faire l'hypothèse suivante

Hypothèse 19.0.5. *Nous supposons à partir de maintenant que*

$$|q-1| < 1. \quad (19.4)$$

Nous avons l'expression explicite

$$\mathcal{R}_S(x, \sigma_{q,h}) = R_x^{-1} \cdot |(q-1)T + h|(x), \quad (19.5)$$

où R_x est le rayon du disque $D(x, S)$ par rapport à la coordonnée T fixée sur $\mathbb{A}_K^{1, \text{an}}$.

19.1. (q, h) -séries de Taylor.

Soit $q \in K^\times$. Pour tout $n \geq 0$ nous posons

$$[n]_q := 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}, \quad [n]_q! := [1]_q [2]_q [3]_q \cdots [n]_q. \quad (19.6)$$

Pour tout $c \in \Omega$ soit $(T - c)_{q,h}^{[0]} = 1$ et, pour tout $n \geq 1$ posons

$$(T - c)_{q,h}^{[n]} := (T - c)(T - \sigma_{q,h}(c))(T - \sigma_{q,h}^2(c)) \cdots (T - \sigma_{q,h}^{n-1}(c)). \quad (19.7)$$

Nous définissons la (q, h) -dérivation comme

$$d_{q,h}(f) := \frac{f \circ \sigma_{q,h} - f}{(q-1)T + h}. \quad (19.8)$$

Bien qu'elle ait un pôle on montre qu'elle est définie sur tout domaine analytique où $\sigma_{q,h}$ existe. C'est une application K -linéaire satisfaisant pour tout $n \geq 1$ la relation

$$d_{q,h}((T - c)_{q,h}^{[n]}) = [n]_q \cdot (T - c)_{q,h}^{[n-1]}. \quad (19.9)$$

Des calculs directs montrent que si le disque $D = D^-(c, \rho)$ est stable par $\sigma_{q,h}$, et son action est non dégénéré, alors toute fonction dans $\mathcal{O}(D)$ s'écrit de manière unique comme

$$f(T) = \sum_{n \geq 0} d_{q,h}^n(f)(c) \frac{(T - c)_{q,h}^{[n]}}{[n]_q!} \quad (19.10)$$

et que son rayon de convergence se calcule par la formule

$$\text{Rayon}(f) = \liminf_n \frac{1}{\sqrt[n]{\left| \frac{d_{q,h}^n(f)(c)}{[n]_q!} \right|}}. \quad (19.11)$$

19.2. Image essentielle du foncteur $\text{Def}_{\sigma_{q,h}}$

Soit maintenant X un domaine analytique quasi-Stein de $\mathbb{A}_K^{1, \text{an}}$, tel que Ω_X^1 est libre. Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module libre muni d'une action semi-linéaire de $\sigma_{q,h}$:

$$\sigma_{q,h} : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \sigma_{q,h}^*(\mathcal{F}). \quad (19.12)$$

On montre que la dérivation $d_{q,h}$ agit également sur \mathcal{F} . Cela correspond, dans une base $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_r\}$ de \mathcal{F} , à la donnée d'une équation du type

$$d_{q,h}(Y) = G_{[1]}(q, h, T) \cdot Y, \quad (19.13)$$

où $G_{[1]}(q, h, T) \in M_n(\mathcal{O}(X))$. Or, en analogie avec (17.12), nous pouvons considérer l'expression formelle

$$Y_X := \sum_{n \geq 0} G_{[n]}(q, h, T_2) \frac{(T_1 - T_2)_{q,h}^{[n]}}{[n]_q!}, \quad (19.14)$$

où $G_{[0]} = \text{Id}_X$, et récursivement $G_{[n+1]} = d_{q,h}(G_{[n]}) + \sigma_{q,h}(G_{[n]})G_{[1]}$. Ce n'est pas toujours une série de fonctions qui converge dans un voisinage de la diagonale de $X \times X$. Nous souhaitons maintenant donner une condition qui en assure la convergence. Pour tout $x \in X$, soit R_x le rayon du disque

$D(x, S)$ (dans la coordonnée T), et posons

$$\mathcal{R}^{\mathcal{F}, \sigma_{q,h}}(x, \mathbf{e}) := \min \left(1, R_x^{-1} \cdot \liminf_n \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{|G_{[n]}(q,h,T)|(x)|}{[n]_q!}}} \right). \quad (19.15)$$

Cette fonction $X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dépend de la base choisie \mathbf{e} .

Le théorème suivant caractérise l'image essentielle du foncteur de déformation et permet d'en définir un quasi inverse.

Théorème 19.2.1. *Si pour tout $x \in X$ on a*

$$\mathcal{R}^{\mathcal{F}, \sigma_{q,h}}(x, \mathbf{e}) > \mathcal{R}_S(x, \sigma_{q,h}) \quad (19.16)$$

alors (19.14) est la matrice d'une stratification χ , qui est associée à une équation différentielle (\mathcal{F}, ∇) qui est $\sigma_{q,h}$ -compatible, et dont le rayon de convergence est donné par

$$\mathcal{R}_{S,1}(x, (\mathcal{F}, \nabla)) = \mathcal{R}^{\mathcal{F}, \sigma_{q,h}}(x, \mathbf{e}). \quad (19.17)$$

Dans ce cas $(\mathcal{F}, \sigma_{q,h}) = \text{Def}_{S,\Sigma}(\mathcal{F}, \nabla)$.

La réciproque du théorème est en effet évidente : si (\mathcal{F}, ∇) est une équation différentielle $\sigma_{q,h}$ -compatible, alors sa déformation $\text{Def}_{q,h}(\mathcal{F})$ vérifie toujours la condition (19.16) par construction.

La preuve est un calcul explicite basé sur (19.10).

19.3. Analyticité

Soit \mathcal{G} l'espace K -analytique $\mathbb{G}_m^{\text{an}} \times \mathbb{A}^{1,\text{an}}$ muni de la structure de groupe donnée par

$$(q, h) \cdot (q', h') := (qq', q'h + h'). \quad (19.18)$$

C'est la loi de groupe qu'on trouve en faisant la composition $\sigma_{q,h} \circ \sigma_{q',h'} = \sigma_{qq', q'h+h'}$.

Comme cette lois de groupe est donné par des polynômes, \mathcal{G} est naturellement un groupe K -analytique (comme dans la section 17.5). On voit que pour tout $\nu, \tau > 0$ le sous-espace analytique $\mathcal{G}_{\tau,\nu} := D^-(1, \tau) \times D^-(0, \nu)$ est un sous groupe.

Maintenant si \mathcal{F} est une équation différentielle vérifiant (17.13) par rapport à un valeur individuelle de (q, h) , et si X est un domaine suffisamment gentil (e.g. un domaine affinoïde connexe)¹⁷ il est clair (voir (19.5)) qu'elle satisfait la même compatibilité pour tout (q', h') dans un sous groupe ouvert de \mathcal{G} contenant (q, h) et $\mathcal{G}_{\tau,\nu}$ pour $\tau, \nu > 0$ suffisamment petits. En particulier l'action de $\mathcal{G}_{\tau,\nu}$ n'est pas dégénérée.

La section 17.5 affirme alors qu'on a automatiquement dépendance analytique en (q, h) . Dans [Pul14a, Section 6.3.2] nous donnons des formules qui expriment la connexion de \mathcal{F} comme un opérateur de l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}_{\tau,\nu}$ à l'origine.

19.4. Racines de l'unité

Dans [Pul08] nous avons approché le problème de comprendre la situation pour les valeurs de q égaux à une racine de l'unité, pour les quels la déformation n'est pas pleinement fidèle. En effet dans ce cas la catégorie des $\sigma_{q,h}$ -différences n'est pas équivalente à celle des équations différentielles tout simplement car l'anneau des endomorphismes de l'objet unité s'identifie aux fonctions sur X telles que $f(qT + h) = f(T)$. On peut voir que de telles fonctions non constantes existent. Donc

17. La condition exacte sur X est que le complémentaire de X est une réunion de disques dont les rayons ont une borne inférieure non nulle.

la catégorie des équations aux $\sigma_{q,h}$ -différences est R -linéaire par rapport à un anneau R contenant strictement K .

Quoi faire alors ? La question se pose déjà quand $q = 1$ et $h = 0$. Dans ce cas la catégorie des équations aux $\sigma_{1,0}$ -différences est la catégorie des \mathcal{O}_X -modules localement libres de type fini munis d'un endomorphisme \mathcal{O}_X -linéaire.

La proposition de solution qu'on a identifié dans [Pul08] est de ne pas se borner à regarder l'action de (q, h) , mais d'un voisinage de (q, h) dans \mathcal{G} . Cette action existe si l'équation aux $\sigma_{q,h}$ -différences provient d'une équation différentielle, grâce à ce qu'on a dit à la section 19.3. La vraie catégorie dans laquelle on atterrit en faisant la déformation est une catégorie de germes de représentations semi-linéaires analytiques de \mathcal{G} .

Nous avons montré que cela revient à considérer l'action de $\sigma_{q,h}$, mais aussi d'une base de l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}_{\tau,\nu}$ qui est donné par les dérivations du type

$$(aT + b) \frac{d}{dT} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{1+ar, br} - \text{Id}}{r}. \quad (19.19)$$

Dans [Pul08] nous avons choisi de travailler avec une catégorie qu'on a appelé les (σ_q, δ_q) -modules, qui sont des modules libres de type fini munis d'une action de $\sigma_{q,0}$, et aussi d'un opérateur tangent qui est en effet une connexion.

20. Fonction Gamma p -adique et valeurs de fonctions L de Kubota-Leopoldt

Nous allons maintenant appliquer la confluence au cas de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction Gamma p -adique Γ_p de Morita [Mor75]. Nous supposons que $p \neq 2$.

La fonction Γ_p est l'unique fonction localement analytique sur \mathbb{Z}_p dont les valeurs sur les entiers sont donné par

$$\Gamma_p(n) = \prod_{(i,p)=1, i=1, \dots, n-1} (-1)^i \cdot i. \quad (20.1)$$

C'est l'interpolation p -adique de la fonction Γ complexe. Notons par $\Gamma_p^0(T)$ la série convergente qui est le développement de Taylor de Γ_p au voisinage de $T = 0$. Pour tout $n \geq 0$, $\Gamma_p^0(T)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Gamma_p^0(T + p^n) = A(1, p^n, T) \cdot \Gamma_p^0(T), \quad A(1, p^n, T) := - \prod_{(i,p)=1, i=1, \dots, p^n-1} (T + i). \quad (20.2)$$

En regardant la σ_{1,p^n} -confluence de ces équations on obtient le résultat suivant

Théorème 20.0.1. *La fonction $\Gamma_p^0(T)$ est la solution de Taylor en $T = 0$ d'une équation différentielle*

$$(\Gamma_p^0(T))' = g_0(T) \cdot \Gamma_p^0(T) \quad (20.3)$$

telle que $g_0(T) \in \mathcal{O}(D^-(0, 1)) \subseteq \mathbb{Q}[[T]]$.

La preuve se fait en utilisant un analogue du théorème de Young [You92] pour les équations aux différences finies de rang un, qui permet de calculer le rayon (19.15) de chacune de ces équations.

Quand $n \rightarrow \infty$ le domaine D_n sur lequel la condition de compatibilité (17.13) est vérifiée est un disque de plus en plus large.

Pour tout n l'équation différentielle sur D_n obtenue par σ_{1,p^n} -confluence est la même pour tout n , car sa solution en $T = 0$ est $\Gamma_p^0(T)$ pour tout n . Donc, $\Gamma_p^0(T)$ est solution de Taylor en $T = 0$ d'une équation différentielle définie sur la réunion des D_n . Cette réunion est en effet $D^-(0, 1)$.

Remarque 20.0.2. *Naturellement, si pour $i = 0, \dots, p-1$ on désigne par $\Gamma_p^i(T)$ le développement de Taylor de Γ_p en $T = i$, on a le même résultat.*

Comme déjà mentionné dans l'introduction, le Théorème 20.0.1 peut se déduire d'une estimation donnée dans [Rob00, p.376] (cf. (20.5)), et il n'est donc pas nouveau. L'aspect qui nous semble important est le lien avec les méthodes d'équations différentielles et rayon de convergence.

20.1. Certains valeurs spéciaux des fonctions L de Kubota-Leopoldt

Il est bien connu depuis Y.Morita [Mor75] et J.Diamond [Dia77] qu'on a

$$\log(\Gamma_p^0(T)) = \lambda_0 T + \sum_{m \geq 1} L_p(1 + 2m, \omega_p^{2m}) \frac{T^{2m+1}}{1 + 2m}, \quad (20.4)$$

où $L_p(-, \omega_p^{2m})$ est la fonction L p -adique de Kubota-Leopoldt associée au caractère de Teichmüller Dirichlet ω_p^{2m} .

De plus, on sait au moins depuis [Rob00, p.376] que le rayon de convergence de cette série est 1. On en déduit donc immédiatement que

$$g_0(T) = \lambda_0 + \sum_{m \geq 1} L_p(1 + 2m, \omega_p^{2m}) T^{2m}, \quad (20.5)$$

et que son rayon de convergence est 1.

Le calcul du rayon de convergence de l'équation différentielle sur les points $x_{0,\rho}$, $\rho \geq 0$ donné, grâce au théorème de Young [You92], le polygone de Newton de $g_0(T)$, et donc une estimation de la valeur absolue des valeurs $L_p(1 + 2m, \omega_p^{2m})$. On trouve l'estimation suivante :

Corollaire 20.1.1. *Pour tout $n \geq 1$ on a*

$$v_p(L_p(1 + p^{n-1}(p-1), \omega_p^{p^{n-1}(p-1)})) = v_p(\zeta_p(1 + p^{n-1}(p-1))) = -n, \quad (20.6)$$

où v_p est la valuation p -adique de \mathbb{Z}_p normalisée par $v_p(p) = 1$. De plus pour tout $m \geq 0$ on a

$$v_p(L_p(1 + 2m, \omega_p^{2m})) \geq \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq 2m \leq (p-1) \\ -n & \text{if } p^{n-1}(p-1) \leq 2m < p^n(p-1), \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (20.7)$$

20.2. Les sommes $S_\ell(k)$

Pour tout entier $\ell, k \geq 1$, posons

$$S_\ell(k) := \sum_{i=1, (i,p)=1}^{k-1} \frac{1}{i^\ell}. \quad (20.8)$$

Cette, et des sommes similaires, ont été étudié par [Dic52, pp. 95-103]. Un résultat de L.Washington [Was98] l'exprime comme une somme de valeurs de certaines fonctions L de Kubota-Leopoldt. Des résultats similaires ont été trouvé par D.Barsky [Bar83].

Nous avons détaillé dans [Pul14a] le résultat suivant :

Corollaire 20.2.1. *Pour tout $n \geq 1$ nous avons :*

- $\log(\Gamma_p(p^n)) = p^n \lambda_0 + \sum_{m \geq 1} p^{n(1+2m)} \frac{L_p(1+2m, \omega_p^{2m})}{1+2m}$;
- Pour tout $\ell = 1$ on a

$$S_1(p^n) := \sum_{i=1, (i,p)=1}^{p^n-1} \frac{1}{i} = \sum_{m \geq 1} p^{2mn} \cdot L_p(1 + 2m, \omega_p^{2m}) = g_0(p^n) - g_0(0). \quad (20.9)$$

En particulier nous retrouvons la relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{-n} \sum_{i=0, (i,p)=1}^{p^n-1} i^{-1} = 0 \quad (20.10)$$

car $g'_0(0) = 0$.

- Pour tout $\ell \geq 2$ on a

$$\frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell} \cdot S_\ell(p^n) = \sum_{m \geq \ell/2} \binom{1+2m}{\ell} p^{n(1+2m-\ell)} \cdot \frac{L_p(1+2m, \omega_p^{2m})}{1+2m}.$$

Annexe A. Lettre du 28 Février 2011 à Gilles Christol

Cher Gilles,

je te joins cette remarque sur ton algorithme, qui est incomplet dans la manière que tu l'a énoncé. En effet il fait entrer en jeux des racines p^n -èmes dans la clôture algébrique de $K(t)$ de certains polynômes (e.g. t^{1/p^n} est racine de p^n -ème de t). La variation du rayon dans ta démonstration est donnée par la norme de ces polynômes (les $\lambda_n(t)$ du point (2) de page 12 de ton papier [Chr11], paragraphe 3.1) qui vivent *a priori* sur un revêtement de la droite affine, et qui décrivent mal le comportement du Rayon sur la base. Dans cette note je te joins une méthode légèrement différente ne faisant pas paraître cette "ramification apparente". Les polynômes que je trouve ne sont rien d'autre que les vecteurs de Witt qui donnent comme composants fantôme ce qu'il faut. Le Rayon va être directement lié au valeur absolu de ces polynômes évalués en t .

A.1. Notations

Soit K un corps ultramétrique complet, et soit $y' = g(x)y$, $g(x) \in K[x]$. Alors ton algorithme consiste à regarder la solution $f_t(x)$ autour de chaque point t de n'importe quelle extension complète de corps Ω/K , et d'en deviner le rayon. Pour le faire tu exprime $f_t(x)$ comme produit d'exponentielles de Robba de type $e_{\varpi,d}(\lambda_n(t)(x-t))$, avec

$$e_{\varpi,d}(T) := \exp(\pi_m T^n + \pi_{m-1} \frac{T^{np}}{p} + \pi_{m-2} \frac{T^{np^2}}{p^2} + \cdots + \pi_0 \frac{T^d}{p^m}) \quad (\text{A.1})$$

où $d = np^m$, avec n premier à p .¹⁸ Cette opération engendre le calcul de racines des polynômes dont je te parle. En effet pour trouver le $\lambda_n(t)$ en suivant le procédé de Robba qui est dans ton livre avec lui (Prop. 13.3.1, dans la preuve), il faut extraire de proche en proche des racines p^r -èmes du terme correspondant à $\frac{T^{np^{m-r}}}{p^{m-r}}$. Cela donne des problèmes de ramification, comme illustré dans l'exemple suivant.

A.2. Exemple

Pour faire un exemple simple considérons l'équation $y' = g(x)y$, avec

$$g(x) = rx^{r-1}, \quad (\text{A.2})$$

Sa résolvante est donnée par

$$Y(x, y) = \exp(x^r - y^r) \quad (\text{A.3})$$

La solution au voisinage de t est alors, avec les notations de ton article, $f_t(x) = Y(x, t)$ ¹⁹. Pour exprimer cette fonction sous la forme que tu évoque il faut d'abord écrire

$$x^r - y^r = (x - y + y)^r - y^r = \sum_{i=1}^r \binom{r}{i} y^{r-i} (x - y)^i \quad (\text{A.4})$$

18. Excuse-moi d'avoir inversé le d avec le n par rapport à tes notations, mais cela est la notation que j'ai utilisé dans mon papier (car pour moi d =degré), et je crois qu'à cause de l'habitude je n'arriverai plus jamais à écrire diversement ces exponentielles : si maintenant je change le n avec le d je vais sûrement écrire des bêtises.

19. NOTE : d'ailleurs ce ne serait pas trop mal de indiquer dans l'article que la résolvante de $y' = gy$, $g \in K[x]$, est $\exp(G(x) - G(y))$ où G est une primitive de G , et donc $f_t(x) = \exp(G(x) - G(t))$. C'est en effet le fait de travailler avec cette formule qui te permet de calculer le rayon de la solution, et non pas la formule inductive classique $G_{n+1} = G'_n + G_n G$ qui donne les coefficients de Taylor.

ce qui donne

$$Y(x, y) = \exp\left(\sum_{i=1}^r \binom{r}{i} y^{r-i} (x-y)^i\right) \quad (\text{A.5})$$

Pour $p = 3$,²⁰ et $r = 4$ cela donne

$$Y(x, y) = \exp(4y^3(x-y) + 6y^2(x-y)^2 + 4y(x-y)^3 + (x-y)^4) \quad (\text{A.6})$$

C'est le terme de degré 3 qui pose problème. En effet la décomposition que tu évoque dans ton papier se fait en 2 étapes, d'abord on décompose en produit selon l'ensemble $J_p := \{n \geq 1 \text{ t.q. } (n, p) = 1\}$ (voir Lemme A.3.1) :

$$f_t(x) = Y(x, t) = \prod_{n \in J_p, n \leq 4} \exp(P_n(x-y)) \quad (\text{A.7})$$

avec

$$P_1(x-y) = 4y^3(x-y) + 4y(x-y)^3 \quad (\text{A.8})$$

$$P_2(x-y) = 6y^2(x-y)^2 \quad (\text{A.9})$$

$$P_4(x-y) = (x-y)^4 \quad (\text{A.10})$$

Maintenant il n'y a qu'une exponentielle (celle correspondante à $n = 1$) qui n'est pas dans la forme que tu évoques au point (2) de ton algorithme, dans le paragraphe 3.1 de ton article. Toi tu as besoin d'avoir des exponentielles de la forme

$$e_{\varpi, d}(\lambda(t)(x-t)) \quad (\text{A.11})$$

c'est à dire que tu veux des exponentielles sont de la forme

$$\exp(\pi_m \lambda(t)^n (x-t)^n + \pi_{m-1} \lambda(t)^{np} (x-t)^{np} + \pi_{m-2} \lambda(t)^{np^2} (x-t)^{np^2} + \dots + \pi_0 \lambda(t)^{np^m} (x-t)^{np^m}). \quad (\text{A.12})$$

Pour $n = 2, 4$ les exponentielles $\exp(P_n(x-y))$ sont déjà dans cette forme. Pour $n = 1$ il faut décomposer l'exponentielle $\exp(P_1(x-y)) = \exp(4y^3(x-y) + 4y(x-y)^3)$ comme de suite

$$\exp(4y^3(x-y) + 4y(x-y)^3) = \exp(\pi_0 \lambda_1(y)(x-y)) \cdot \exp\left(\pi_1 \lambda_2(y)(x-y) + \pi_0 \lambda_2(y)^3 \frac{(x-y)^3}{3}\right) \quad (\text{A.13})$$

On voit alors que cela donne :

$$\lambda_2(y) = (12y/\pi_0)^{1/3}, \quad (\text{A.14})$$

$$\lambda_1(y) = \left(4y^3 - \pi_1(12y/\pi_0)^{1/3}\right)/\pi_0 \quad (\text{A.15})$$

Maintenant cette racine définit une fonction dans un revêtement fini (Kumerien de degré $p = 3$) de la droite affine. De plus elle n'est unique qu'à une racine p -ème de l'unité près. Ce n'est surtout pas un polynôme contrairement à ce que tu annonce dans ton article et cela entraîne que l'algorithme, tel que tu l'a énoncé dans l'article est incorrect, et de plus : il n'est pas très effectif.

NOTE : Il est vrai qu'on peut avoir la sensation que ces racines existent dans $K[[y]]$. Par exemple, si l'on se borne à considérer des exponentielles de type Robba, on tombe toujours sur des séries de la forme $ay^{np^m} + (\text{termes de degré } + \text{ grand})$ qui admettent une racine p^m -ème dans $K^{alg}[[y]]$ (cela résulte facilement de la théorie de Kummer pour $K[[y]]$). C'est pour cela que j'ai dû considérer le terme $x^n - y^n$ dans mon exponentielle de départ (A.3). Dans l'exemple que tu fais à la fin de ton article tu n'a pas ce phénomène.

20. Je préfère éviter le cas $p = 2$, bien que ce serait plus simple.

A.3. Preuve alternative

Je rappelle que

$$J_p := \{n \geq 1 \text{ t.q. } (n, p) = 1\}. \quad (\text{A.16})$$

Lemme A.3.1. *Soit A un anneau intègre de caractéristique 0, et soit $f \in 1 + zA[[z]]$ une série formelle. Alors il existent des séries formelles uniques $\{P_n(z)\}_{n \in J_p}$ telle que*

- $P_n(z) = \sum_{d \geq 1} a_d z^d$, avec $a_d = 0$ pour tout $d \notin \{n, np, np^2, np^3, \dots\}$.
- $f(z) = \prod_{n \in J_p} \exp(P_n(z))$.

De plus si f est une série exponentielle dans le sens de ton article (Déf. 2.3), i.e. si $f(z) = \exp(P(z))$, avec $P(z) \in zA[z]$, alors les $P_n(z)$ sont des polynômes dont la somme fait $P(z) = \sum_{n \in J_p} P_n(z)$ et $P_n = 0$ pour $n \geq \deg(P) + 1$, où $\deg(P)$ est le degré de $P(z)$.

Démonstration. Le logarithme converge z -adiquement dans $1 + zA[[z]]$, donc

$$f(z) = \exp(\ln(f(z))).$$

On pose alors

$$P(z) = \ln(f(z)) = \sum_{d \geq 1} a_d z^d.$$

Il suffit alors de prendre $P_n(z) = \sum_{m \geq 0} a_{np^m} z^{np^m}$ pour tout $n \in J_p$. \square

A.3.1. Première étape : réduction à la partie p -typique

Soit

$$y' = g(x) \cdot y, \quad g(x) \in K[x] \quad (\text{A.17})$$

une équation différentielle. La résolvante de l'équation est

$$Y(x, y) = \exp(G(x) - G(y)) \quad (\text{A.18})$$

où $G(x) \in xK[x]$ est la primitive de $g(x)$ qui a terme constant nul. Après résommation des termes on écrit $Y(x, y)$ comme $\exp(P(x - y))$, avec

$$P(z) = \sum_{d \geq 1} a_d(y)(x - y)^d, \quad P(z) \in K[y][z]. \quad (\text{A.19})$$

Grâce au lemme A.3.1 on peut décomposer la résolvante en une manière unique comme un produit fini

$$Y(x, y) = \prod_{n \in J_p} \exp(P_n(x - y)) \quad (\text{A.20})$$

où $P_n(z)$ est le polynôme

$$P_n(x - y) = \sum_{m=0}^{m(n)} a_{np^m}(y)(x - y)^{np^m}. \quad (\text{A.21})$$

où l'on note par

$$m(n) \quad (\text{A.22})$$

l'entier tel que $np^{m(n)}$ soit le degré de P_n . Maintenant grâce à [Pul07, Theorem 2.2], l'équation différentielle satisfaite par l'exponentielle $\exp(P_n(x - y))$ a une irrégularité qui est du type np^m pour un certain $m \geq 0$ (voir aussi proposition A.3.2 plus bas). Cette irrégularité n'est rien d'autre que la "première pente" de l'exponentielle selon ta définition 2.5. Toutes ces irrégularités sont

différentes pour des valeurs différents de $n \in J_p$. Donc le rayon de convergence de $Y(x, y)$ est le minimum des rayons des exponentielles $\exp(P_n(x - y))$:

$$\text{Ray}(Y(x, y), y = t) = \min_{n \in J_p} \text{Ray}(\exp(P_n(x - t))) \quad (\text{A.23})$$

Il ne reste plus qu'à calculer le rayon de chaque $\exp(P_n(x - t))$. Il ne reste plus qu'à calculer le rayon d'une exponentielle p -typique i.e. de la forme

$$\exp(P_n(x - y)) = \exp(a_n(y)(x - y)^n + a_{np}(y)(x - y)^{np} + \dots + a_{np^{m(n)}}(y)(x - y)^{np^{m(n)}}) . \quad (\text{A.24})$$

A.3.2. Deuxième étape : Rayon d'une exponentielle p -typique On écrit

$$\exp(P_n(x - y)) = \exp \left(\pi_{m(n)} \phi_{0,n}(y)(x - y)^n + \pi_{m(n)-1} \phi_{1,n}(y) \frac{(x - y)^{np}}{p} + \dots + \pi_0 \phi_{m(n),n}(y) \frac{(x - y)^{np^{m(n)}}}{p^{m(n)}} \right) . \quad (\text{A.25})$$

où

$$\phi_{i,n}(y) = p^i \cdot \frac{a_{np^i}(y)}{\pi_{m-i}} . \quad (\text{A.26})$$

Maintenant on calcule par induction les polynômes $\lambda_{0,n}(y), \dots, \lambda_{m(n),n}(y)$ tels que

$$\phi_{i,n}(y) = \lambda_{0,n}(y)^{p^i} + p \lambda_{1,n}(y)^{p^{i-1}} + p^2 \lambda_{2,n}(y)^{p^{i-2}} + \dots + p^i \lambda_{i,n}(y) \quad (\text{A.27})$$

pour tout $i = 0, \dots, m(n)$. On trouve

$$\lambda_{0,n}(y) = \phi_{0,n}(y) \quad (\text{A.28})$$

$$\lambda_{1,n}(y) = \frac{\phi_{1,n}(y) - \phi_{0,n}(y)^p}{p} \quad (\text{A.29})$$

$$\dots \quad (\text{A.30})$$

Avec les notations de [Pul07] cela donne

$$\exp(P_n(x - y)) = e_{np^{m(n)}}(\boldsymbol{\lambda}_n(y), (x - y)) \quad (\text{A.31})$$

où $\boldsymbol{\lambda}_n(y) = (\lambda_{0,n}(y), \dots, \lambda_{m(n),n}(y))$. De sorte que l'on ait finalement

$$Y(x, y) = \prod_{n \in J_p} e_{np^{m(n)}}(\boldsymbol{\lambda}_n(y), (x - y)) \quad (\text{A.32})$$

Par [Pul07, Prop.2.3] on a

$$e_{np^{m(n)}}(\boldsymbol{\lambda}_n(y), (x - y)) = \prod_{j=0}^{m(n)} e_{p^{m(n)-j}}((1, 0, \dots, 0), \lambda_{j,n}(y)(x - y)^{np^j}) \quad (\text{A.33})$$

où avec tes notations (cf. (A.1)) on a

$$e_{p^{m(n)-j}}((1, 0, \dots, 0), \lambda_{j,n}(y)(x - y)^{np^j}) = e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(\lambda_{j,n}(y)(x - y)^{np^j}) \quad (\text{A.34})$$

NOTE : C'est la que tu introduit de la ramification en prenant l'exponentielle

$$e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(\lambda_{j,n}(y)^{1/np^j}(x - y)) . \quad (\text{A.35})$$

NOTE : De cette manière on a effectivement exprimé $Y(x, y)$ comme un produit d'exponentielles presque de la forme que tu voulais, mais ils ne le sont pas, on a du payer un prix : par rapport à la forme que tu souhaite on a du remplacer $(x - y)$ avec $(x - y)^{np^j}$ à l'intérieur de l'exponentielle. À priori on ne peut pas calculer le rayon par la Prop. 2.15 de ton papier car on a des exponentielles de type un peu différents. Mais on verra dans la proposition suivante que le passage de $(x - y)$

à $(x - y)^{np^j}$ fait multiplier la pente par n , et cela entraîne qu'en effet les pentes vont être toutes différentes ce qui fait qu'on peut appliquer ton critère 2.6 de ton papier et conclure que le rayon du produit est le minimum des rayons tes facteurs.

Le Rayon et la pente de $e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(\lambda_{j,n}(y)(x - y)^{np^j})$ sont encore données par [Pul07, Th.2.2], quitte à faire une homothétie. Dans ce cas quand même la situation est beaucoup plus simple que [Pul07, Th.2.2]. Pour cette raison j'en donne maintenant une preuve directe :

Proposition A.3.2. *Le rayon de convergence de $e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(\lambda_{j,n}(t)(x - t)^{np^j})$ est*

$$\text{Ray}(e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(\lambda_{j,n}(t)(x - t)^{np^j})) = |\lambda_{j,n}(t)|^{-1/np^j}. \quad (\text{A.36})$$

Sa "première pente" (selon ta définition 2.5) est donnée par

$$\text{Pente}(e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(\lambda_{j,n}(t)(x - t)^{np^j})) = 1 - np^{m(n)-j} \quad (\text{A.37})$$

Par conséquence on a

$$\text{Ray}\left(e_{np^{m(n)}}(\boldsymbol{\lambda}_n(t), (x - t))\right) = \min_{j=0, \dots, m(n)} \left(\text{Ray}\left(e_{p^{m(n)-j}}((1, 0, \dots, 0), \lambda_{j,n}(t)(x - t)^{np^j})\right) \right) \quad (\text{A.38})$$

$$= \min_{j=0, \dots, m(n)} |\lambda_{j,n}(t)|^{-1/np^j} \quad (\text{A.39})$$

$$= \left[\max_{j=0, \dots, m(n)} |\lambda_{j,n}(t)|^{1/np^j} \right]^{-1} \quad (\text{A.40})$$

et aussi

$$\text{Pente}\left(e_{np^{m(n)}}(\boldsymbol{\lambda}_n(t), (x - t))\right) = 1 - np^{\ell(\boldsymbol{\lambda}_n(t))} \quad (\text{A.41})$$

où $\ell(\boldsymbol{\lambda}_n(t))$ est le plus grand index tel que (cf. [Pul07, Section 1.3.3, et Theorem 2.2])

$$\ell(\boldsymbol{\lambda}) := m(n) - \min \left(j \quad \text{t.q.} \quad |\lambda_{j,n}(t)|^{-1/np^j} = \min_{j=0, \dots, m(n)} |\lambda_{j,n}(t)|^{-1/np^j} \right) \quad (\text{A.42})$$

$$= \max \left(m(n) - j \quad \text{t.q.} \quad |\lambda_{j,n}(t)|^{-1/np^j} = \min_{j=0, \dots, m(n)} |\lambda_{j,n}(t)|^{-1/np^j} \right) \quad (\text{A.43})$$

Démonstration. Il résulte de ta proposition 2.7 que $\text{Ray}(f(x^n))^n = \text{Ray}(f(x))$, donc

$$\text{Ray}(e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(\lambda_{j,n}(t)(x - t)^{np^j})) = \text{Ray}(e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(\lambda_{j,n}(t)(x - t)))^{1/np^j} \quad (\text{A.44})$$

Ensuite par homothétie on a

$$\text{Ray}(e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(\lambda_{j,n}(t)(x - t))) = |\lambda_{j,n}(t)|^{-1}, \quad (\text{A.45})$$

puisque $\text{Ray}(e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(x - t)) = 1$. D'où la formule (A.36). Encore grâce à ta proposition 2.7 on a

$$\text{Pente}(f(x^{np^j})) - 1 = n \cdot (\text{Pente}(f(x)) - 1) \quad (\text{A.46})$$

donc

$$\text{Pente}\left(e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(\lambda_{j,n}(t)(x - t)^{np^j})\right) - 1 = n \cdot \left[\text{Pente}\left(e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(\lambda_{j,n}(t)(x - t))\right) - 1 \right] \quad (\text{A.47})$$

Maintenant l'homothétie par $\lambda_{j,n}(t)$ produit une translation du graphe logarithmique du Rayon de convergence de l'équation différentielle satisfaite par $e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(x - t)$, et cela préserve la pente. Donc

$$\text{Pente}\left(e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(\lambda_{j,n}(t)(x - t))\right) = \text{Pente}\left(e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(x - t)\right) \quad (\text{A.48})$$

Par [Pul07, Th. 2.2] on a

$$\text{Pente} \left(e_{\varpi, p^{m(n)-j}}(x-t) \right) = 1 - p^{m(n)-j} \quad (\text{A.49})$$

Cela donne l'égalité (A.37). Maintenant d'après (A.33) on a

$$e_{np^{m(n)}}(\boldsymbol{\lambda}_n(t), (x-t)) = \prod_{j=0}^{m(n)} e_{p^{m(n)-j}}((1, 0, \dots, 0), \lambda_{j,n}(t)(x-t)^{np^j}), \quad (\text{A.50})$$

on vient de voir que les “premières pentes” des termes du produit sont toutes différentes, on peut alors appliquer ton critère 2.6. La pente se calcule par la formule (A.42) car seul les termes de ce produit qui ont rayon minimale (i.e. ceux correspondants aux indexes j vérifiant $|\lambda_{j,n}(t)|^{-1/np^j} = \min_{j=0, \dots, m(n)} |\lambda_{j,n}(t)|^{-1/np^j}$) “produisent” une pente, et parmi ces termes il faut considérer celui qui a la plus grande pente (i.e. plus petit rayon). \square

NOTE : Cette preuve adaptée donne en effet une autre démonstration du théorème 2.2 de [Pul07] qui repose sur ton critère 2.6, alors que la preuve originaire du [Pul07, Th.2.2] utilise des antécédents de Frobenius pour se ramener au cas d'une pente unique sans ruptures, pour se ramener au théorème du rayon petite et conclure par continuité.

A.3.3. Conclusion Si l'on reprend l'équation (A.20) on voit que la résolvante

$$Y(x, y) = \prod_{n \in J_p} e_{np^{m(n)}}(\boldsymbol{\lambda}_n(y), (x-y)) \quad (\text{A.51})$$

par la proposition A.3.2 les pentes des exponentielles $e_{np^{m(n)}}(\boldsymbol{\lambda}_n(t), (x-t))$ sont toutes différentes. Le rayon de convergence de $Y(x, t)$ est alors le minimum des rayons de chaque $e_{np^{m(n)}}(\boldsymbol{\lambda}_n(t), (x-t))$. On a alors la formule

$$\text{Ray}(Y(x, t)) = \min_{n \in J_p} \left(\min_{j=0, \dots, m(n)} |\lambda_{j,n}(t)|^{-1/np^j} \right) \quad (\text{A.52})$$

$$= \left[\max_{n \in J_p} \left(\max_{j=0, \dots, m(n)} |\lambda_{j,n}(t)|^{1/np^j} \right) \right]^{-1} \quad (\text{A.53})$$

Tout le rayon de convergence est écrit dans les vecteurs de Witt. Cela donne aussi bien un algorithme effectif pour le calcul du Rayon.

NOTE : L'algorithme repose essentiellement sur le calcul des vecteurs de Witt $\lambda_{j,n}(y)$ à partir des composantes fantôme $\phi_{j,n}(y)$ (formule inductive (A.28)). J'ai entendu dire par Berthelot que ce calcul a une vitesse exponentielle, mais j'avoue que je n'en sais rien.

NOTE : Il serait vraiment joli de pouvoir démontrer la finitude du Rayon des équation d'ordre supérieur par des méthodes qui permettent de se ramener au cas de rang un. Si l'on se borne aux équations qui deviennent extension de rang un après un revêtement étale de la droite affine je crois qu'on puisse y arriver. Les formules devrait être semblables à celles qu'on rencontre dans la théorie de Galois, quand l'on fait l'induction de Brauer.

NOTE : Il faut quand même remarquer qu'il y a pas mal de passages dans ce procédé :

- Premièrement exprimer la résolvante comme l'exponentielle d'un polynôme ;
- La résommation du polynôme $P(x-y)$ dans la résolvante (A.20) qui est le logarithme de la résolvante $\log(Y(x, y))$;

- La décomposition de $P(x - y)$ selon l'ensemble J_p (A.20) ;
- Ensuite l'idée des groupes de Lubin-Tate ;
- Puis le fait de trouver les composantes du vecteur de Witt à partir des composantes fantôme.

En dimension supérieure on peut essayer de considérer la résolvante déjà donnée sous la forme après résommation, puis éventuellement son logarithme. Mais déjà la décomposition selon l'ensemble J_p je la vois mal. Le reste est complètement mystérieux pour moi.

A.4. Remarques sur l'extension au cas d'un affinoïde

J'aimerais éteindre la méthode aux équations (surconvérgentes) sur des affinoïdes. J'en ai besoin fortement pour résoudre les calculs que Berger me demande de faire.

- Sur un affinoïde X avec un nombre fini de trous, la situation me semble simple. Pour une équation donnée $y' = gy$, telle que g soit surconvérgente sur X , il faut
 - écrire g sous forme Mittag-Leffler : $g = \sum_{c \in \mathcal{T}} g_c$ où \mathcal{T} est l'ensemble des trous de X , et c est une famille choisie de centres ;
 - ensuite on étudie séparément chaque équation $y' = g_c y$, car l'équation originaire est le produit tensoriel de toutes ces équations. Pour chacune de ces équations on a une situation totalement semblable à celle décrite dans cette note (quitte à faire un changement de variable $x \rightsquigarrow (x - c)^{-1}$). En effet si la fonction g est surconvérgente sur X , alors par un petit changement de base par une fonction fonction inversible sur X on peut supprimer la queue infinie de g_c , de sorte à se ramener au cas d'un polynôme en la variable $(x - c)^{-1}$.
 - Ensuite il faut bien vérifier que le rayon du produit tensoriel soit le minimum des rayons trouvés. On fait cela par des raisonnements de continuité. Si l'on a deux trous c et c' , les graphes des rayons des résolvantes $Y_c(x, y)$ et $Y_{c'}(x, y)$ se croisent presque toujours de manière transverse, puisque par les deux graphes sont concaves par rapport à deux centres différents. Néanmoins il existent des zones dans les quelles les deux graphes pourrait coïncider, mais dans ces intervalles, sauf erreurs, le module est soluble i.e. rayon maximale, et donc le produit tensoriel a même rayon.
- Ensuite pour généraliser la méthode au cas d'un affinoïde avec un nombre fini de trous, on fait en sorte de exprimer l'affinoïde comme réunion (limite inductive) d'affinoïdes plus petits, mais avec un nombre fini de trous. Si l'on choisit bien ces sous-affinoïdes, alors on contrôle bien le rayon de convergence de la restriction qui coïncide modulo un terme simple avec le rayon global.

A.5. Appendice à la lettre : Calcul du rayon de l'exemple

Je rappelle que l'équation est

$$y(x)' = g(x)y(x), \quad g(x) := 4x^3. \quad (\text{A.54})$$

On a exprimé la résolvante $Y(x, y) = \exp(x^4 - y^4)$ comme produit des 3 exponentielles

$$Y(x, y) = \exp(P_1(x - y)) \cdot \exp(P_2(x - y)) \cdot \exp(P_4(x - y)) \quad (\text{A.55})$$

avec

$$P_1(x - y) = 4y^3(x - y) + 4y(x - y)^3 \quad (\text{A.56})$$

$$P_2(x - y) = 6y^2(x - y)^2 \quad (\text{A.57})$$

$$P_4(x - y) = (x - y)^4 \quad (\text{A.58})$$

- Pour $n = 1$ on écrit

$$\exp(4y^3(x - y) + 4y(x - y)^3) = \exp(\pi_1 \phi_{0,1}(y)(x - y) + \pi_0 \phi_{1,1}(y) \frac{(x - y)^3}{3}) \quad (\text{A.59})$$

Donc

$$\phi_{0,1}(y) = \frac{4y^3}{\pi_1}, \quad \phi_{1,1}(y) = \frac{3 \cdot 4 \cdot y}{\pi_0}. \quad (\text{A.60})$$

Les vecteur de Witt correspondant est $\lambda_{\mathbf{1}}(y) := (\lambda_{0,1}(y), \lambda_{1,1}(y))$, avec

$$\lambda_{0,1}(y) = \phi_{0,1}(y), \quad \lambda_{1,1}(y) = \frac{\phi_{1,1}(y) - \phi_{0,1}(y)^p}{p} \quad (\text{A.61})$$

Donc

$$\lambda_{0,1}(y) = \frac{4y^3}{\pi_1}, \quad \lambda_{1,1}(y) = \frac{12y - 4^3 y^9}{3\pi_0} = \frac{4^3 y^9 - 12y}{\pi_0^3}. \quad (\text{A.62})$$

- Pour $n = 2$ on écrit

$$\exp(6y^2(x-y)^2) = \exp(\pi_0 \phi_{0,2}(y)(x-y)^2) \quad (\text{A.63})$$

d'où

$$\phi_{0,2}(y) = \lambda_{0,2}(y) = \frac{6y^2}{\pi_0} \quad (\text{A.64})$$

- Pour $n = 4$ on écrit

$$\exp((x-y)^4) = \exp(\pi_0 \phi_{0,4}(y)(x-y)^4) \quad (\text{A.65})$$

d'où

$$\phi_{0,4}(y) = \lambda_{0,4}(y) = \frac{1}{\pi_0} \quad (\text{A.66})$$

Donc on a

$$\text{Ray}(Y(x, t)) = \left[\max \left(|\lambda_{0,1}(t)|, |\lambda_{1,1}(t)|^{1/3}, |\lambda_{0,2}(t)|, |\lambda_{0,4}(t)| \right) \right]^{-1} \quad (\text{A.67})$$

cela donne

$$|\lambda_{0,1}(t)| = |3|^{-1/6} \cdot |t|^3 \quad (\text{A.68})$$

$$|\lambda_{1,1}(t)|^{1/3} = |3|^{-1/2} \cdot |4^2 t^9 - 3t|^{1/3} \quad (\text{A.69})$$

$$|\lambda_{0,2}(t)| = |3|^{1/2} \cdot |t|^2 \quad (\text{A.70})$$

$$|\lambda_{0,4}(t)| = |3|^{-1/2} \quad (\text{A.71})$$

NOTE : Cela est bien compatible au théorème du rayon petit qui s'applique pour $\rho > 1$, si la norme choisie est la $|\cdot|_\rho$. En effet pour $\rho > 1$, on a $|g(x)|_\rho = |4x^3|_\rho = \rho^3 > \rho^{-1}$, donc le théorème s'applique et ça donne :

$$\text{Ray}(Y(x, t_\rho)) = \frac{|\pi_0|}{|g(x)|_\rho} = |3|^{1/2} \cdot \rho^{-3}. \quad (\text{A.72})$$

En effet on voit que pour $\rho > 1$ le terme dominant est $|\lambda_{1,1}(t_\rho)|^{1/3}$, et alors

$$\text{Ray}(Y(x, t)) = \left[\max \left(|\lambda_{0,1}(t)|, |\lambda_{1,1}(t)|^{1/3}, |\lambda_{0,2}(t)|, |\lambda_{0,4}(t)| \right) \right]^{-1} \quad (\text{A.73})$$

$$= |\lambda_{1,1}(t)|^{-1/3} \quad (\text{A.74})$$

$$= |3|^{1/2} \cdot |\rho^9|^{1/3} = |3|^{1/2} \cdot \rho^{-3}. \quad (\text{A.75})$$

RÉFÉRENCES

- Ado76 A. Adolphson, *An index theorem for p -adic differential operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **216** (1976), 279–293. MR 0387284 (52 #8127)
- ADV04 Yves André and Lucia Di Vizio, *q -difference equations and p -adic local monodromy*, Astérisque (2004), no. 296, 55–111. MR MR2135685
- And02 Y. André, *Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p -adique*, Invent. Math. **148** (2002), no. 2, 285–317.
- And09 Yves André, *Slope filtrations*, Confluentes Math. **1** (2009), no. 1, 1–85. MR 2571693
- AS02 A. Abbes and T. Saito, *Ramification of local fields with imperfect residue fields*, Amer. J. Math. **124** (2002), no. 5, 879–920. MR MR1925338 (2003m :11196)
- AS03 ———, *Ramification of local fields with imperfect residue fields. II*, Doc. Math. (2003), no. Extra Vol., 5–72 (electronic), Kazuya Kato’s fiftieth birthday. MR MR2046594 (2005g :11231)
- AS09 Ahmed Abbes and Takeshi Saito, *Analyse micro-locale l -adique en caractéristique $p > 0$: le cas d’un trait*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **45** (2009), no. 1, 25–74. MR 2512777 (2009m :11197)
- Bal87 F. Baldassarri, *Comparaison entre la cohomologie algébrique et la cohomologie p -adique rigide à coefficients dans un module différentiel. I. Cas des courbes*, Invent. Math. **87** (1987), no. 1, 83–99. MR 862713 (88d :14014)
- Bal10 Francesco Baldassarri, *Continuity of the radius of convergence of differential equations on p -adic analytic curves*, Invent. Math. **182** (2010), no. 3, 513–584. MR 2737705 (2011m :12015)
- Bar80 Daniel Barsky, *On morita’s p -adic gamma function*, Math.Proc.Camb.phil.soc. **257** (1980), 159–169.
- Bar83 ———, *Sur la norme de certaines séries de iwasawa (une démonstration analytique p -adique du théorème de ferrero-washington)*, Groupe de travail d’analyse ultramétrique **Tome 10, n.1, exp.13**, (1982–1983), 1–44.
- Ber74 Pierre Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* , Lecture Notes in Mathematics, Vol. 407, Springer-Verlag, Berlin, 1974. MR MR0384804 (52 #5676)
- Ber83 ———, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p* , Study group on ultrametric analysis, 9th year : 1981/82, No. 3 (Marseille, 1982), Inst. Henri Poincaré, Paris, 1983, pp. Exp. No. J2, 18. MR 720573 (85j :14036)
- Ber86 ———, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p* , Mém. Soc. Math. France (N.S.) (1986), no. 23, 3, 7–32, Introductions aux cohomologies p -adiques (Luminy, 1984). MR 865810 (88a :14020)
- Ber90 Vladimir G. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- Ber96a Pierre Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, Prépublications de l’Université de Rennes 1 (1996), no. 96-03, 1–91, http://perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/publis/Cohomologie_Rigide_I.pdf.
- Ber96b ———, *\mathcal{D} -modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **29** (1996), no. 2, 185–272. MR 1373933 (97b :14019)
- Ber97 ———, *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide*, Invent. Math. **128** (1997), no. 2, 329–377, With an appendix in English by Aise Johan de Jong. MR 1440308 (98j :14023)
- Ber04 Daniel Bertrand, *Travaux de J.-P. Ramis sur les équations différentielles linéaires*, Astérisque (2004), no. 296, 11–20, Analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes. I. MR 2135681 (2005k :34339)
- Bou06 N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 8 et 9*, Springer, Berlin, 2006, Reprint of the 1983 original. MR 2284892 (2007h :13001)
- BV07 F. Baldassarri and L. Di Vizio, *Continuity of the radius of convergence of p -adic differential equations on berkovich spaces*, arXiv, 2007, <http://arxiv.org/abs/0709.2008>, pp. 1–22.

- Car58 P. Cartier, *Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique*, Bull. Soc. Math. France **86** (1958), 177–251. MR MR0106223 (21 #4957)
- CC96 B. Chiarellotto and G. Christol, *On overconvergent isocrystals and F -isocrystals of rank one*, Compositio Math. **100** (1996), no. 1, 77–99.
- CD94 G. Christol and B. Dwork, *Modules différentiels sur des couronnes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **44** (1994), no. 3, 663–701. MR MR1303881 (96f :12008)
- Chi02 D. Chinellato, *Una generalizzazione del π di dwork*, Tesi di laurea. Univ. Padova (2002).
- Chi07 Daniele Chinellato, *Algebraic properties of a class of p -adic exponentials*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **344** (2007), no. 3, 187–190. MR 2292285 (2008f :12014)
- Chr83 Gilles Christol, *Modules différentiels et équations différentielles p -adiques*, Queen’s Papers in Pure and Applied Mathematics, vol. 66, Queen’s University, Kingston, ON, 1983.
- Chr11 ———, *The radius of convergence function for first order differential equations*, Advances in non-Archimedean analysis, Contemp. Math., vol. 551, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 71–89. MR 2882390
- Chr12 Gilles Christol, *Le théorème de turritin p -adique. (book in preparation)*, 2012, <http://www.math.jussieu.fr/~christol/courspdf.pdf>.
- CM93 G. Christol and Z. Mebkhout, *Sur le théorème de l’indice des équations différentielles p -adiques. I*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **43** (1993), no. 5, 1545–1574. MR 1275209 (95j :12009)
- CM95 Gilles Christol and Zoghman Mebkhout, *Topological p -adic vector spaces and index theory*, Proceedings of the 3rd International Conference on p -adic Functional Analysis (Aubière, 1994), vol. 2, 1995, pp. 93–98. MR 1342807 (96k :46142)
- CM97 G. Christol and Z. Mebkhout, *Sur le théorème de l’indice des équations différentielles p -adiques. II*, Ann. of Math. (2) **146** (1997), no. 2, 345–410. MR 1477761 (99a :12009)
- CM00 ———, *Sur le théorème de l’indice des équations différentielles p -adiques. III*, Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 2, 385–457. MR 1765703 (2001k :12014)
- CM01 ———, *Sur le théorème de l’indice des équations différentielles p -adiques. IV*, Invent. Math. **143** (2001), no. 3, 629–672. MR 1817646 (2002d :12005)
- CM02 Gilles Christol and Zoghman Mebkhout, *Équations différentielles p -adiques et coefficients p -adiques sur les courbes*, Astérisque (2002), no. 279, 125–183, Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques, II. MR 1922830 (2003i :12014)
- CP09 Bruno Chiarellotto and Andrea Pulita, *Arithmetic and differential Swan conductors of rank one representations with finite local monodromy*, Amer. J. Math. **131** (2009), no. 6, 1743–1794. MR 2567506 (2011a :14036)
- CR94 G. Christol and P. Robba, *Équations différentielles p -adiques*, Actualités Mathématiques., Hermann, Paris, 1994, Applications aux sommes exponentielles. [Applications to exponential sums].
- Cre87 R. Crew, *F -isocrystals and p -adic representations*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 111–138.
- Cre98 Richard Crew, *Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **31** (1998), no. 6, 717–763. MR 1664230 (2000a :14023)
- Cre00 ———, *Canonical extensions, irregularities, and the Swan conductor*, Math. Ann. **316** (2000), no. 1, 19–37. MR MR1735077 (2001c :14039)
- Del70 Pierre Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163, Springer-Verlag, Berlin, 1970. MR MR0417174 (54 #5232)
- Dia77 J. Diamond, *The p -adic log gamma function and p -adic euler constants*, Trans. Am. Math. Soc. **233** (1977), 321–337.
- Dic52 L.E. Dickson, *History of the theory of numbers, vol.i, (chapter 3)*, Chelsea, New York, 1952.
- DMR07 Pierre Deligne, Bernard Malgrange, and Jean-Pierre Ramis, *Singularités irrégulières*, Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], 5, Société Mathématique de France, Paris, 2007, Correspondance et documents. [Correspondence and documents]. MR 2387754 (2009d :32033)

- DR77 B. Dwork and P. Robba, *On ordinary linear p -adic differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **231** (1977), no. 1, 1–46. MR 0447247 (56 #5562)
- DR80 ———, *Effective p -adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **259** (1980), no. 2, 559–577. MR 567097 (81k :12022)
- Duc Antoine Ducros, *La structure des courbes analytiques*, <http://www.math.jussieu.fr/~ducros/livre.html>.
- DV02 Lucia Di Vizio, *Arithmetic theory of q -difference equations : the q -analogue of Grothendieck-Katz's conjecture on p -curvatures*, Invent. Math. **150** (2002), no. 3, 517–578. MR MR1946552 (2005a :12013)
- DV04 ———, *Introduction to p -adic q -difference equations*, Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, pp. 615–675.
- Dwo60 Bernard Dwork, *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety*, Amer. J. Math. **82** (1960), 631–648. MR 0140494 (25 #3914)
- Dwo73 B. Dwork, *On p -adic differential equations. II. The p -adic asymptotic behavior of solutions of ordinary linear differential equations with rational function coefficients*, Ann. of Math. (2) **98** (1973), 366–376. MR 0572253 (58 #27987b)
- Dwo74 B. M. Dwork, *On p -adic differential equations. I. The Frobenius structure of differential equations*, Table Ronde d'Analyse non archimédienne (Paris, 1972), Soc. Math. France, Paris, 1974, pp. 27–37. Bull. Soc. Math. France, Mém. No. 39–40. MR 0571892 (58 #27987a)
- Dwo82a B. Dwork, *Lectures on p -adic differential equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science], vol. 253, Springer-Verlag, New York, 1982.
- Dwo82b Bernard Dwork, *A note on the p -adic gamma function*, Groupe de travail d'analyse ultramétrique **9** (1981-1982), no. 3, exp.J5, J1–J10.
- Fon90 J. M. Fontaine, *Représentations p -adiques des corps locaux. I*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 249–309.
- Gar97 Laurent Garnier, *Cohérence sur \mathcal{D}^\dagger et irrégularité des isocristaux surconvergents de rang 1*, Forum Math. **9** (1997), no. 5, 569–601. MR 1467140 (98e :14018)
- Gro54 A. Grothendieck, *Espaces vectoriels topologiques*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1954. MR 0077884 (17,1110a)
- Gro61 ———, *Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1961), no. 11, 167. MR 0217085 (36 #177c)
- Gru66 Laurent Gruson, *Théorie de Fredholm p -adique.*, Bull. Soc. Math. Fr. **94** (1966), 67–95.
- Kas89 Masaki Kashiwara, *Representation theory and D -modules on flag varieties*, Astérisque (1989), no. 173-174, 9, 55–109, Orbites unipotentes et représentations, III. MR 1021510 (90k :17029)
- Kat70 Nicholas M. Katz, *Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1970), no. 39, 175–232. MR 0291177 (45 #271)
- Kat87a ———, *On the calculation of some differential Galois groups*, Invent. Math. **87** (1987), no. 1, 13–61. MR MR862711 (88c :12010)
- Kat87b ———, *On the calculation of some differential Galois groups*, Invent. Math. **87** (1987), no. 1, 13–61. MR MR862711 (88c :12010)
- Kat87c ———, *A simple algorithm for cyclic vectors*, Amer. J. Math. **109** (1987), no. 1, 65–70. MR 878198 (88b :13001)
- Kat89 K. Kato, *Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case*, Algebraic K -theory and algebraic number theory (Honolulu, HI, 1987), Contemp. Math., vol. 83, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 101–131. MR MR991978 (90g :11164)
- Kat90 Nicholas M. Katz, *Exponential sums and differential equations*, Annals of Mathematics Studies, vol. 124, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990. MR 1081536 (93a :14009)
- Ked04 Kiran S. Kedlaya, *A p -adic local monodromy theorem*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 1, 93–184. MR MR2119719 (2005k :14038)

- Ked06 ———, *Finiteness of rigid cohomology with coefficients*, Duke Math. J. **134** (2006), no. 1, 15–97. MR 2239343 (2007m :14021)
- Ked07 ———, *Swan conductors for p -adic differential modules. I. A local construction*, Algebra Number Theory **1** (2007), no. 3, 269–300. MR 2361935 (2009b :11205)
- Ked10 ———, *p -adic differential equations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 125, Cambridge Univ. Press, 2010.
- Ked13 ———, *Local and global structure of connections on nonarchimedean curves*, arxiv, 2013, <http://arxiv.org/abs/1301.6309>, pp. 1–76.
- Lev75 A. H. M. Levelt, *Jordan decomposition for a class of singular differential operators*, Ark. Mat. **13** (1975), 1–27. MR 0500294 (58 #17962)
- Liu87 Qing Liu, *Ouverts analytiques d’une courbe algébrique en géométrie rigide*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **37** (1987), no. 3, 39–64. MR 916273 (89c :14032)
- LT65 J. Lubin and J. Tate, *Formal complex multiplication in local fields*, Ann. of Math. (2) **81** (1965), 380–387.
- Mal74 Bernard Malgrange, *Sur les points singuliers des équations différentielles*, Enseignement Math. (2) **20** (1974), 147–176. MR 0368074 (51 #4316)
- Mar04 Adriano Marmora, *Irrégularité et conducteur de Swan p -adiques*, Doc. Math. **9** (2004), 413–433 (electronic). MR MR2117421 (2005i :11169)
- Mat95 Shigeki Matsuda, *Local indices of p -adic differential operators corresponding to Artin-Schreier-Witt coverings*, Duke Math. J. **77** (1995), no. 3, 607–625. MR MR1324636 (97a :14019)
- Mat02 ———, *Katz correspondence for quasi-unipotent overconvergent isocrystals*, Compositio Math. **134** (2002), no. 1, 1–34. MR MR1931960 (2003j :12007)
- Meb02 Z. Mebkhout, *Analogie p -adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p -adique*, Invent. Math. **148** (2002), no. 2, 319–351.
- Mer72 David Meredith, *Weak formal schemes*, Nagoya Math. J. **45** (1972), 1–38. MR 0330167 (48 #8505)
- MFK94 D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, third ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)], vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994. MR 1304906 (95m :14012)
- Mor75 Yasuo Morita, *A p -adic analogue of the Γ -function*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **22** (1975), no. 2, 255–266. MR MR0424762 (54 #12720)
- MS89 O. V. Mel’nikov and A. A. Sharomet, *The Galois group of a multidimensional local field of positive characteristic*, Mat. Sb. **180** (1989), no. 8, 1132–1147. MR MR1019485 (90j :11131)
- Mum08 David Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, vol. 5, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay ; by Hindustan Book Agency, New Delhi, 2008, With appendices by C. P. Ramanujam and Yuri Manin, Corrected reprint of the second (1974) edition. MR 2514037 (2010e :14040)
- MW68 P. Monsky and G. Washnitzer, *Formal cohomology. I*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 181–217. MR MR0248141 (40 #1395)
- Pon00 Emilie Pons, *Modules différentiels non solubles. rayons de convergence et indices*, Rend.Sem.Mat.Padova **103** (2000), 21–45.
- PP12a Andrea Pulita and Jérôme Poineau, *Continuity and finiteness of the radius of convergence of a p -adic differential equation via potential theory*, To appear in Crelle’s Journal, 2012, <http://arxiv.org/abs/1209.6276>, pp. 1–20.
- PP12b ———, *The convergence newton polygon of a p -adic differential equation ii : Continuity and finiteness on berkovich curves*, Arxiv, 2012, <http://arxiv.org/abs/1209.3663>, pp. 1–16.
- PP13a ———, *The convergence newton polygon of a p -adic differential equation iii : global decomposition and controlling graphs*, arxiv, 2013, <http://arxiv.org/abs/1308.0859>, pp. 1–81.
- PP13b ———, *The convergence newton polygon of a p -adic differential equation iv : local and global index theorems*, arxiv, 2013, <http://arxiv.org/abs/1309.3940>, pp. 1–44.

- Pul05a Andrea Pulita, *Frobenius structure for rank one p -adic differential equations*, Ultrametric functional analysis, Contemp. Math., vol. 384, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 247–258. MR 2174788 (2006j :12011)
- Pul05b ———, *Frobenius structure for rank one p -adic differential equations*, Ultrametric functional analysis, Contemp. Math., vol. 384, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 247–258. MR MR2174788 (2006j :12011)
- Pul07 ———, *Rank one solvable p -adic differential equations and finite abelian characters via Lubin-Tate groups*, Math. Ann. **337** (2007), no. 3, 489–555. MR MR2274542
- Pul08 ———, *p -adic confluence of q -difference equations*, Compos. Math. **144** (2008), no. 4, 867–919. MR MR2441249 (2009f :12006)
- Pul11 ———, *A basic introduction to deformation and confluence of ultrametric differential and difference equations*, Arithmetic and Galois theories of differential equations, Séminaires et Congrès, vol. 23, Math. Soc. Fr., 2011, pp. 331–366.
- Pul12 ———, *The convergence newton polygon of a p -adic differential equation i : Affinoid domains of the berkovich affine line*, arxiv, 2012, <http://arxiv.org/abs/1208.5850>, pp. 1–44.
- Pul13 ———, *An algorithm computing non-solvable spectral radii of p -adic differential equations*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **351** (2013), no. 5-6, 167–171.
- Pul14a ———, *Infinitesimal deformation of p -adic differential equations over berkovich curves*, arxiv, 2014, <http://arxiv.org/abs/0802.1945>, pp. 1–39.
- Pul14b ———, *Small connections are cyclic.*, arXiv :1407.3761 [math.NT] (2014), 11 pages.
- PV11 Erik Jarl Pickett and Stéphane Vinatier, *Exponential power series, galois module structure and differential modules*, Arxiv, 2011, <http://arxiv.org/abs/1107.1120>, pp. 1–24.
- Ram78 J.-P. Ramis, *Déviage Gevrey*, Journées Singulières de Dijon (Univ. Dijon, Dijon, 1978), Astérisque, vol. 59, Soc. Math. France, Paris, 1978, pp. 4, 173–204. MR 542737 (81g :34010)
- Ray74 Michel Raynaud, *Géométrie analytique rigide d’après Tate, Kiehl, . . .*, Table Ronde d’Analyse non archimédienne (Paris, 1972), Soc. Math. France, Paris, 1974, pp. 319–327. Bull. Soc. Math. France, Mém. No. 39–40. MR 0470254 (57 #10012)
- Ric14 Rodolphe Richard, *Sur les π -exponentielles i : Vecteurs de witt annulés par frobenius et algorithmes de (leur rayon de convergence)*, Arxiv, 2014, <http://arxiv.org/abs/1403.0610>, pp. 1–30.
- Rob75a P. Robba, *On the index of p -adic differential operators. I*, Ann. of Math. (2) **101** (1975), 280–316. MR 0364243 (51 #498)
- Rob75b Philippe Robba, *Lemme de Hensel pour les opérateurs différentiels*, Groupe d’Étude d’Analyse Ultramétrique, 2e année (1974/75), Exp. No. 16, Secrétariat Mathématique, Paris, 1975, D’après un travail en commun avec B. Dwork (“On ordinary p -adic differential equations”, to appear), p. 11. MR 0572968 (58 #27989c)
- Rob76 P. Robba, *On the index of p -adic differential operators. II*, Duke Math. J. **43** (1976), no. 1, 19–31. MR 0389910 (52 #10739)
- Rob80 ———, *Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels. Application à la réduction formelle des équations différentielles*, Enseign. Math. (2) **26** (1980), no. 3-4, 279–311 (1981). MR 610528 (82k :12022)
- Rob84 P. Robba, *Indice d’un opérateur différentiel p -adique. III. application to twisted exponential sums*, Astérisque **119-120** (1984), 191–266.
- Rob85 ———, *Indice d’un opérateur différentiel p -adique. IV. Cas des systèmes. Mesure de l’irrégularité dans un disque*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **35** (1985), no. 2, 13–55.
- Rob00 A. Robert, *A course in p -adic analysis*, G.T.M. 198, Springer Verlag, 2000.
- RZ00 Luis Ribes and Pavel Zalesskii, *Profinite groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 40, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- Sau09 Jacques Sauloy, *Équations aux q -différences et fibrés vectoriels holomorphes sur la courbe elliptique $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$* , Astérisque (2009), no. 323, 397–429. MR 2647980 (2012d :32018)

- Sch02 Peter Schneider, *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002. MR 1869547 (2003a :46106)
- Ser62 J. P. Serre, *Corps locaux*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VIII, Actualités Sci. Indust., No. 1296. Hermann, Paris, 1962.
- SS94 Tsutomu Sekiguchi and Noriyuki Suwa, *Théories de Kummer-Artin-Schreier-Witt*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319** (1994), no. 2, 105–110. MR MR1288386
- Tat71 John Tate, *Rigid analytic spaces*, Invent. Math. **12** (1971), 257–289. MR 0306196 (46 #5323)
- Tho87 R. W. Thomason, *Algebraic K-theory of group scheme actions*, Algebraic topology and algebraic K-theory (Princeton, N.J., 1983), Ann. of Math. Stud., vol. 113, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987, pp. 539–563. MR 921490 (89c :18016)
- Thu05 Amaury Thuillier, *Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. applications à la théorie d'arakevov*, Thèse de l'Université de Rennes 1 **N.ordre 3231** (2005), viii+185.
- TP12 Lara Thomas and Erik Jarl Pickett, *Formal group exponentials and galois modules in lubin-tate extensions*, Arxiv, 2012, <http://arxiv.org/abs/1201.4023>, pp. 1–26.
- Tsu98a N. Tsuzuki, *Finite local monodromy of overconvergent unit-root F -isocrystals on a curve*, Amer. J. Math. **120** (1998), no. 6, 1165–1190.
- Tsu98b Nobuo Tsuzuki, *The local index and the Swan conductor*, Compositio Math. **111** (1998), no. 3, 245–288. MR MR1617130 (99g :14021)
- vdPS03 Marius van der Put and Michael F. Singer, *Galois theory of linear differential equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 328, Springer-Verlag, Berlin, 2003. MR 1960772 (2004c :12010)
- Was98 L. Washington, *p -adic l -functions and sums of powers*, J. of Number Th. **69** (1998), 50–61.
- Xia10 Liang Xiao, *On ramification filtrations and p -adic differential modules, I : the equal characteristic case*, Algebra Number Theory **4** (2010), no. 8, 969–1027. MR 2832631
- You92 Paul Thomas Young, *Radii of convergence and index for p -adic differential operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), no. 2, 769–785. MR 1066451 (92m :12015)

Andrea Pulita pulita@math.univ-montp2.fr

Département de Mathématiques, Université de Montpellier II, CC051, Place Eugène Bataillon, F-34 095, Montpellier CEDEX 5.